Série 9

1. Soit la fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $B \subset \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x + \cos x$.

Déterminer A et B de sorte que f soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de f.

2. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$2 \arccos\left(\tfrac{x}{4}\right) + \arcsin\left(\tfrac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

a) $\dfrac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(3x)$

b) $2 \arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}\, x) = \dfrac{\pi}{2}$

4. Calculer $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celle de la fonction $\arctan(x)$.

5. Dans un triangle ABC les angles α, β, γ sont définis par

$$\alpha = \arccos(4x) \qquad \beta = \arccos(-3x) \qquad \gamma = \arccos(24x^2).$$

On connaît aussi le rayon R de son cercle circonscrit $R = 25$.

a) Déterminer la valeur de x ainsi que les valeurs de $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$.

b) Calculer le rayon r du cercle inscrit du triangle ABC.

Réponses de la série 9

1. Il y a plusieurs solutions à ce problème. En voici une :

$A = [-\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,]\,, \qquad B = [-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\,]\,,$

$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \forall\, x \in B\,.$

Consultez Moodle pour en découvrir deux autres.

2. $S = \{-2\}$

3. a) $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

4.

- $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$
- $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$

5. a) $x = \frac{1}{5}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}\,, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}\,, \qquad \sin\gamma = \frac{7}{25}\,.$

b) $r = 4\,.$