Contrôle de géométrie analytique N°3

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

Groupe

PRENOM : ______________________

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(8\,,\,0)$ et $P(9\,,\,0)$, ainsi que le cercle $\gamma_1\,(\Omega_1\,,r_1)$ de diamètre OA.

On considère les cercles $\gamma\,(\Omega\,,r)$ orthogonaux à γ_1 au point A.

On note p la polaire du point P par rapport à γ et d la droite passant par le point O, de direction $\overrightarrow{\Omega\Omega_1}$.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M, intersection de d et p lorsque le cercle γ varie.

(**Ne fait pas partie du sujet du test 3 de cette année** : Montrer que ce lieu est une hyperbole. Déterminer son centre, les foyers et les équations cartésiennes de ses asymptotes.) 4.5 pts

Réponse : $\dfrac{(x-4)^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses de grand axe horizontal

- dont le centre Ω appartient à la droite $g : y = x + 1$,
- d'excentricité $e = \frac{1}{2}$,
- et tangentes à l'axe Oy.

a) Déterminer l'équation cartésienne, dépendante d'un paramètre, de la famille $\mathcal{F}$.

b) Déterminer l'ellipse de la famille $\mathcal{F}$ qui a pour foyer de plus grande abscisse le point $F\,(9\,,y_F)$; donner son équation cartésienne. 3.5 pts

Réponse : *a)* $\mathcal{F}\ :\ \dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2} + \dfrac{(y-\lambda-1)^2}{\frac{3}{4}\lambda^2} - 1 = 0\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

b) $\lambda = 6$ (seule solution)

Tourner la page

3. Dans le plan, on donne trois points Ω_1 , P et Q et un segment de longueur δ .

On considère deux cercles $\gamma_1\,(\Omega_1\,,\,r_1)$ et $\gamma_2\,(\Omega_2\,,\,r_2)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- la polaire p du point P par rapport à γ_1 passe par Q ,
- p est l'axe radical de γ_1 et γ_2 ,
- le cercle γ_2 est de rayon $r_2 = \delta$.

a) Construire rigoureusement (règle, équerre, compas), sur la donnée graphique ci-jointe, les deux cercles $\gamma_1\,(\Omega_1\,,\,r_1)$ et $\gamma_2\,(\Omega_2\,,\,r_2)$.

Indication : faire une figure d'étude du problème résolu. 3 pts

b) Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les trois points Ω_1 , P et Q et la longueur δ :

$$\Omega_1\,(1\,,\,2)\,, \qquad P\,(\frac{11}{5}\,,\,2)\,, \qquad Q\,(\frac{8}{3}\,,\,4) \qquad \delta = 1\,.$$

Déterminer les équations cartésiennes des cercles γ_1 et γ_2 , donner la solution pour laquelle Ω_2 est à coordonnées entières.

4 pts

Réponse : *b)* $\gamma_1\;:\;(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$ et $\gamma_2\;:\;(x-4)^2+(y-2)^2-1=0$

Donnée graphique pour l'exercice 3.a)