Exercice 1. *Soit la matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Trouver une base de* $\ker C$.
2. *Trouver une base de* $\operatorname{Im} C$.
3. *L'application linéaire* $T_C : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, *dont la matrice par rapport aux bases canoniques est égale à* C, *est-elle injective ? Et surjective ?*

Solution 1. 1. Le noyau de C est l'ensemble de solutions de l'équation $C\vec{x} = \vec{0}$. Avec des opérations élémentaires sur les lignes de C, on obtient la forme reduite :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui donne le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 & = & 0 \\ x_4 - 4x_5 & = & 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 & = & -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & 4x_5 \\ x_5 & = & x_5 \end{array} \right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, une base de $\ker(C)$ est

$$\{(-1/3, -1/3, 1, 0, 0), (-10/3, 26/3, 0, 4, 1)\} \text{ ou encore } \{(-1, -1, 3, 0, 0), (-10, 26, 0, 12, 3)\}.$$

2. Une base pour $\operatorname{Im}(C)$ est $\{(5, 3, 8, 2), (1, 3, 4, 1), (2, -1, -5, 0)\}$ parce que la forme échelonnée de C a des pivots dans les première, deuxième et quatrième colonnes.
3. T_C n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas $\mathbb{R}^4$ car $\operatorname{rang}(C) = 3 < 4$. T_C n'est pas injective puisque le noyau n'est pas zéro.

Exercice 2. *Soit $C = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base ordonnée standard de $\mathbb{R}^3$. On considère la famille de vecteurs $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

a) Expliquer pourquoi B est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice de passage $[\mathrm{id}]_{CB}$.

c) Calculer $[\mathrm{id}]_{CB}^{-1}$ et vérifier directement que cette matrice est bien la matrice de passage $[\mathrm{id}]_{BC}$.

d) Soit $\mathbf{v} = (4,-1,2) \in \mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de $\mathbf{v}$ par rapport à la base B, c'est-à-dire, trouver $[\mathbf{v}]_B$, et vérifier que $[\mathbf{v}]_B = [\mathrm{id}]_{BC}[\mathbf{v}]_C$

Solution 2. a) En écrivant les vecteurs de B dans les lignes d'une matrice, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3. Ainsi les vecteurs de B sont linéairements indépendants. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il s'agit d'une base.

b) Par définition, la première colonne de $[\mathrm{id}]_{CB}$ est formée par le vecteur $(1,1,1)^t$ écrit dans la base C. On fait de même avec les autres colonnes pour obtenir

$$[\mathrm{id}]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Par le procédé d'échelonnage, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3}\to\mathrm{L3}+(-1)\cdot\mathrm{L1}}{\overset{\mathrm{L2}\to\mathrm{L2}+(-1)\cdot\mathrm{L1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L3}\to\mathrm{L3}+(-1)\cdot\mathrm{L2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $[\mathrm{id}]_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver $[\mathrm{id}]_{BC}$ il faut exprimer les vecteurs de la base C en fonction de la base B. Puisque $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$, $(0,1,0) = (0,1,1) - (0,0,1)$ et $(0,0,1) \in B$, on a

$$[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $[\mathrm{id}]_{BC} = ([\mathrm{id}]_{CB})^{-1}$.

d) Pour exprimer $\mathbf{v}$ dans la base B, il faut trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{v} = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1)$. Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 4 = \alpha \\ -1 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

On obtient alors $\alpha = 4$, $\beta = -5$ et $\gamma = 3$, et ainsi $[\mathbf{v}]_B = (4,-5,3)$.
On vérifie alors

$$[\mathrm{id}]_{BC}[\mathbf{v}]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_B.$$

Exercice 3. *Soient $V = \mathbb{R}^4$, C la base canonique de V, ainsi que B, B' les bases de V formées respectivement des vecteurs $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ et $\{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_4}\}$ où $\mathbf{e_1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e_2} = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e_3} = (1,1,1,0)$, $\mathbf{e_4} = (1,1,1,1)$, et $\mathbf{e'_1} = (0,0,0,2)$, $\mathbf{e'_2} = (0,0,2,2)$, $\mathbf{e'_3} = (0,2,2,2)$, $\mathbf{e'_4} = (2,2,2,2)$.*

a) Trouver deux matrices A et A' telles que $[\mathbf{u}]_B = A[\mathbf{u}]_C$ et $[\mathbf{u}]_{B'} = A'[\mathbf{u}]_C$, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$.

b) Trouver la matrice Q satisfaisant $[\mathbf{u}]_{B'} = Q[\mathbf{u}]_B$, pour tout $\mathbf{u} \in V$.

c) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

et soit $T : V \to V$ l'application linéaire définie par $T(a,b,c,d) = A \cdot (a,b,c,d)^t$. Trouver les représentations matricielles de T suivantes : $[T]_C$, $[T]_B$, et $[T]_{BC}$.

Solution 3. a) Dans un premier temps, on remarque que les matrices cherchées sont $A = [\mathrm{id}]_{BC}$ et $A' = [\mathrm{id}]_{B'C}$.

On commence par chercher $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$ tels que $(1,0,0,0) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$ (on aura ensuite que la première colonne de $[\mathrm{id}]_{CB}$ est $(a_1, a_2, a_3, a_4)^t$). Ici, il suffit de prendre $a_1 = 1$ et $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. On cherche ensuite $b_1, \dots b_4 \in \mathbb{R}$ tels que $(0,1,0,0) = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$ (on aura alors que la deuxième colonne de $[\mathrm{id}]_{CB}$ est $(b_1, b_2, b_3, b_4)^t$). On obtient alors $b_1 = -1$, $b_2 = 1$ et $b_3 = b_4 = 0$. On continue ainsi pour finalement obtenir

$$[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manière similaire, puisqu'on a

$$\begin{aligned}
(1,0,0,0) &= \frac{1}{2}e'_4 + \frac{-1}{2}e'_3 \\
(0,1,0,0) &= \frac{1}{2}e'_3 + \frac{-1}{2}e'_2 \\
(0,0,1,0) &= \frac{1}{2}e'_2 + \frac{-1}{2}e'_1 \\
(0,0,0,1) &= \frac{1}{2}e'_1
\end{aligned}$$

on obtient

$$[\mathrm{id}]_{B'C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note qu'on pourrait procéder autrement, comme $[\mathrm{id}]_{BC} = [\mathrm{id}]_{CB}^{-1}$ et la matrice de passage $[\mathrm{id}]_{CB}$ est plus facile à trouver (voir la partie (b)). De même pour $[\mathrm{id}]_{B'C}$.

b) Tout d'abord, on remarque que $Q = [\mathrm{id}]_{B'B}$. Dans un second temps, on calcul $[\mathrm{id}]_{CB}$, ce qui est facile puisqu'il suffit d'exprimer les vecteurs de B dans la base C, c.-à-d.

$$[\mathrm{id}]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, par un résultat du cours, on a

$$[\mathrm{id}]_{B'B} = [\mathrm{id}]_{B'C} \cdot [\mathrm{id}]_{CB}.$$

Ainsi, pour trouver $[\mathrm{id}]_{B'B}$, il suffit de faire le produit matricielle $[\mathrm{id}]_{B'C}[\mathrm{id}]_{CB}$ et on obtient

$$[\mathrm{id}]_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

c) Puisque T est définie (sur la base canonique) via la multiplication par A, $[T]_C = A$. Par le cours, on a $[T]_B = [T]_{BB} = [\mathrm{id}]_{BC} \cdot [T]_C \cdot [\mathrm{id}]_{CB}$, d'où

$$\begin{aligned} [T]_B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manière similaire, $[T]_{BC} = [\mathrm{id}]_{BC} \cdot [T]_{CC}$, c.-à-d.

$$\begin{aligned} [T]_{BC} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note : Via la matrice ci-dessus, on obtient par exemple $T((1,0,0,0)^t) = 2e_1 - e_2 = (1,-1,0,0)$ ce qui correspond à ce que l'on calcule directement depuis A.

Exercice 4. *Soient $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base usuelle. Soit encore $\mathcal{F}$ la base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathcal{F} := \left(1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2, t^2 - t^3\right),$$

et $\mathcal{C}' = (1, t, t^2, t^3)$ la base canonique de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C}',\mathcal{F}}$ et $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}'}$.*
2. *Soit $G : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ l'application définie par $p(t) \mapsto (3t+2)p(t)$. Calculer $[G]_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$.*
3. *Soit $H : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ l'application définie par $p(t) \mapsto (2t-3)p(t)$. Calculer $[H]_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$.*

Solution 4. 1. La matrice de passage $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ a taille 3×3. Dans la j-ème colonne il faut mettre le vecteur de cordonnées du j-ème vecteur de $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{C}$. Donc

$$[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C}',\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}'} = [\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]^{-1}_{\mathcal{C}',\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $[G]_{\mathcal{F},\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}'}[G]_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ où

$$[G]_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $[H]_{\mathcal{F},\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}'}[H]_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ où

$$[H]_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne ; parfois il est plus facile de tout d'abord échelonner la matrice, en tenant compte des changements que ça implique sur le déterminant.*

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Solution 5. (a) Par un développement selon la première ligne, on calcule deux déterminants 2×2 et trouve $a = 4$.

(b) Par un développement selon la troisième ligne, puis la première, on trouve $b = 10$.

(c) En fait, la matrice étant triangulaire, nous savons que le déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale. (Résultat du cours.) On trouve $c = 72$.

(d) On applique ici la méthode de Gauss : $d = 3$.

(e) La réduction sous forme échelonnée de cette matrice fait surgir une ligne sans pivot. On en conclut que $e = 0$.

Exercice 6. *Sachant que*

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants des matrices suivantes

$$T = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Solution 6. Tout d'abord on rappelle la notation $L_{rs}(\lambda)$ (ou $E_{rs}(\lambda)$), utilisée pour désigner la matrice élémentaire associée à l'opération élémentaire sur les lignes, où on rajoute λ fois la ligne s à la ligne r. On rappelle aussi qu'une telle opération effectuée sur les lignes d'une matrice A résulte en une matrice A' dont le déterminant est égal à $\det(A)$.

(T) On obtient la matrice T en multipliant une ligne par -1. Donc

$$\det(T) = (-1) \cdot 7 = -7.$$

(S) On obtient la matrice S en multipliant la deuxieme ligne par 2, et apres en faisant l'opération $L_{21}(1)$ sur les lignes. Donc

$$\det(S) = 2 \cdot 7 = 14.$$

(Z) La matrice Z a une ligne de zéros. Donc

$$\det(Z) = 0.$$

(P) On obtient la matrice P en échangeant deux lignes. Donc

$$\det(P) = -1 \cdot 7 = -7.$$

(Q) On obtient la matrice Q en remplaçant la troisième colonne par sa somme avec la première. Donc

$$\det(Q) = 7$$

puisque cette opération correspond à effectuer $L_{31}(1)$ sur la transposée de T, et le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée.

(L) On obtient la matrice L en prenant la transposée de la matrice donnée. Donc

$$\det(L) = 7.$$

Exercice 7. *Etant donné*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -5,$$

calculer : $\det \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$

Solution 7. On a

$$A = \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix} = D_1(2) \cdot D_2(2) \cdot D_3(2) \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= D_1(2) \cdot D_2(2) \cdot D_3(2) \cdot T_{1,2} \cdot T_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(D_1(2))\det(D_2(2))\det(D_3(2))\det(T_{1,2})\det(T_{1,3})\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & h & i \end{pmatrix}\right) \\ &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-5) = -40.\end{aligned}$$

puisque le determinant est multiplicatif.

Exercice 8. *Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.*

Solution 8. Le calcul du determinant de A, développé par rapport à la première ligne, donne

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) + x\cdot\det\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x - 1 - (1-x) + x(1-x^2) = -x^3 + 3x - 2 \\ &= -(x^3 - 3x + 2) = -(x+2)(x^2 - 2x + 1) = -(x+2)(x-1)^2\end{aligned}$$

Puisque A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, A est inversible si et seulement si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$. Note : On aurait pu remarquer immédiatement que si $x = 1$, A n'est pas inversible car alors la matrice a deux lignes égales.

Exercice 9.
- *Soient A, B, C des matrices $n\times n$ telles que B est inversible et* $\det(A) = \det(B^3)$, $\det(C) = \det(B^{-1})$, $\det(ABC) = 8$. *Déterminer* $\det(A), \det(B), \det(C)$.
- *Soient A et B des matrices $n \times n$. Démontrer que si A est inversible, alors* $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.
- *Montrer que si U est une matrice carrée telle que $U^TU = I$ (on dit que U est une matrice* orthogonale*), alors* $\det U = \pm 1$ *;*
- *Montrer que si A est une matrice carrée telle que* $\det(A^4) = 0$, *alors A ne peut pas être inversible.*

Solution 9.
- Nous rappelons d'abord que si B est une matrice inversible, on a $1 = \det(BB^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})$. Donc $\det(B^{-1}) = \det(B)^{-1} = \frac{1}{\det(B)}$.
  En utilisant les relations données, on obtient
  $$8 = \det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = \det(B^3)\det(B)\det(B^{-1}) = \det(B)^3.$$
  On a donc $\det(B) = 2$, $\det(A) = 8$ et $\det(C) = \frac{1}{2}$.
- On a
  $$\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1})\det(B)\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(B)\det(A) = \det(B)$$
  par la multiplicativité du déterminant.
- Si U est une matrice orthogonale, alors $U^TU = I$. Par conséquent
  $$1 = \det I_n = \det(U^TU) = \det(U^T)\cdot\det U = \det U \cdot \det U = (\det U)^2$$
  où nous avons utilisé le fait que la transposition ne modifie pas le déterminant. Par conséquent $\det U = \pm 1$.
- Si $(\det A)^4 = \det(A^4) = 0$, alors $\det A$ est aussi nul. Ainsi A ne peut pas être inversible.

Exercice 10. *Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ est-ce que le déterminant des matrices suivantes est 0 ?*

$$A_\lambda = A - \lambda I_3 \quad \textit{et} \quad B_\lambda = B - \lambda I_3$$

Solution 10. $\det A_\lambda = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ Donc $\det A_\lambda = 0$ pour $\lambda \in \{1, 2, 3\}$.

$$\det B_\lambda = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda^3$$

Donc $\det B_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1$.

Exercice 11. Questions aux Choix Multiples.

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors*

X $\quad det A = 24$
☐ $det A^T = -24$
☐ $det A^{-1} = 24$
☐ $\det A = 0$

(2) Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.

X $\quad det A = 0$
☐ $det A = 1$
☐ $det A = -1$
☐ *aucune de ces réponses, l'application n'est pas linéaire*

(3) Soit A une matrice de taille 5×5. On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B.

☐ *on a toujours* $det A = det B$
X $\quad$ *on a toujours* $det A = -det B$
☐ *on a toujours* $det B = 0$
☐ *on ne peut rien dire en général*

(4) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;
☐ $\det D = -60 \det A \det B$;
☐ $\det D = 90 \det A \det B$;
X $\quad \det D = -120 \det A \det B$.

Solution 11. (1) On a $\det A = 24$ (produit des coefficients diagonaux), donc aussi $\det A^T = 24$. Par contre $\det A^{-1} = 1/24$.

(2) Cette application n'est pas inversible. En effet le vecteur $\overrightarrow{e}_1$ est transformé en $\overrightarrow{e}_2$ par la symétrie axiale, puis en $\overrightarrow{0}$ par la projection. Le système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ a donc une solution non triviale. Par conséquent $\det A = 0$.

(3) Le déterminant change de signe chaque fois que l'on multiplie une ligne par (-1). On change ici le signe de chacune des cinq lignes si bien que $\det A = -\det B$.

(4) ☐ $\det D = -120 \det A \det B$.
En effet le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $5 \cdot (-3)$ par linéarité du déterminant comme fonction d'une ligne, puis d'une colonne. La déterminant de la matrice $2B$ vaut $2^3 \det B$ car on multiplie chacune des trois lignes par 2. Il faut ainsi multiplier $\det A \cdot \det B$ par $-15 \cdot 8 = -120$.

Exercice 12. *Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Utiliser le Théorème du rang !*

Solution 12. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

On a

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ admet une solution pour tout } \vec{b} \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{rang} A = m \Leftrightarrow \operatorname{rang} A^T = m.$$

Maintenant, A^T représente une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Par le théorème du rang,

$$m = \dim \ker(A^T) + \dim(\operatorname{Im} A^T).$$

Donc

$$\operatorname{rang}(A^T) = m \Leftrightarrow \ker A^T = 0 \Leftrightarrow \vec{0} \text{ est la seule solution du système } A^T\vec{x} = 0.$$

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Montrer que*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Solution 13. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, on multiplie A à gauche par la matrice $L_{21}(-1) \cdot L_{32}(-1) \cdot L_{43}(-1)$, afin d'obtenir la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-b & c^2-b^2 & c^3-b^3 \\ 0 & d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{pmatrix}$$

qui est telle que $\det(A) = \det(A')$. En développant par rapport à la première colonne, on obtient que $\det(A') = \det(B)$ où

$$B = \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-b & c^2-b^2 & c^3-b^3 \\ d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(B) = (b-a)(c-b)(d-c)\det(B')$, où

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+b & c^2+bc+b^2 \\ 1 & d+c & d^2+dc+c^2 \end{pmatrix}.$$

Note : ici on a mis en évidence $b-a$ dans la première ligne de B (ce qui est ok puisque $b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$) et on a utilisé le fait que multiplier la ligne i par un réel λ revient à multiplier la matrice par la matrice élémentaire $D_i(\lambda)$. Idem pour les autres lignes.

En multipliant B' à gauche par la matrice $L_{21}(-1) \cdot L_{32}(-1)$, on obtient une matrice

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-a & c^2+bc-ab-a^2 \\ 0 & d-b & d^2+dc-bc-b^2 \end{pmatrix}$$

qui est telle que $\det(B'') = \det(B')$. En développant par rapport à la première colonne, on obtient $\det(B'') = \det(C)$, où C est la matrice

$$C = \begin{pmatrix} c-a & c^2+bc-ab-a^2 \\ d-b & d^2+dc-bc-b^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $c^2 + bc - ab - a^2 = c^2 - a^2 + b(c-a) = (c-a)(c+a+b)$ et $d^2 + dc - bc - b^2 = d^2 - b^2 + c(d-b) = (d-b)(d+b+c)$, on obtient $\det(C) = (c-a)(d-b)\det(C')$ où C' est la matrice

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & c+a+b \\ 1 & d+b+c \end{pmatrix}.$$

Par la formule pour le déterminant d'une matrice 2×2, on a $\det(C') = d+b+c-(c+a+b) = d-a$. En regroupant les calculs ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(A') = \det(B) &= (b-a)(c-b)(d-c)\det(B') \\ &= (b-a)(c-b)(d-c)\det(B'') = (b-a)(c-b)(d-c)\det(C) \\ &= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\det(C') \\ &= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)(d-a). \end{aligned}$$
