Analyse II : Contrôle N° 4

Durée : 1 heure 30 minutes - Barème sur 15 points

NOM : ____________________ GROUPE ☐

PRENOM : ____________________

1. Déterminer le polynôme $P(z)$ de degré 3 connaissant :
   (a) $P(z)$ et sa dérivée $P'(z)$ admettent $1-i$ comme racine ;
   (b) $P(z)$ possède un reste égal à $i-2$ après division par $z-1$;
   (c) Le produit des racines vaut 1 .

   $P(z) = 2z^3 + (3i-4)z^2 + 2(1-i)z - 2 = (z-1+i)(2z^2 + (i-2)z + (1+i))$

   Par le schéma de Horner, calculer alors la valeur du reste de la division de $P(z)$ par $(z-i)$. 5 pts

   $4-3i$

2. Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt[4]{\cos^2(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{e^{(x^2)}}}$$

   En utilisant les développements limités de ces fonctions à l'ordre 4 , justifier que $f(x) \leq g(x)$ dans le voisinage de $x_0 = 0$. 5 pts

   $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5); g(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + o(x^5); g(x) - f(x) = \frac{x^4}{24} + o(x^5) \geq 0$

3. On considère la transformation homographique $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$w = h(z) = \frac{(2-2i)z}{2-z} \quad \text{où} \quad z = x+iy \quad \text{et} \quad w = u+iv \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

   (a) Déterminer le pôle et les points fixes de cette transformation ;
   $P = (2\,;0); \quad F = (0\,;0) \quad \text{et} \quad F' = (0\,;2)$

   Déterminer (nature et équation) et représenter graphiquement :

   (b) l'image des cercles :

- Γ_1 : $(x-1)^2+(y-1)^2=2$;

$$g_1' : \quad u=0$$

- Γ_2 : $x^2+(y-1)^2=1$;

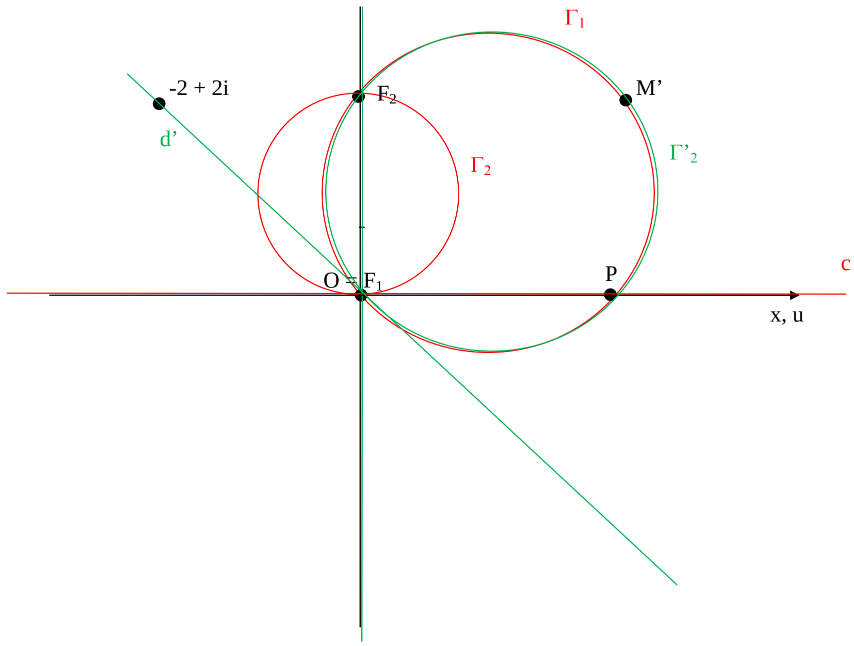
$$\Gamma_2' : \quad (u-1)^2+(v-1)^2=2$$

(c) la courbe c (droite ou cercle) qui a pour image la droite d' : $u+v=0$; 5 pts

$$c : \quad y=0$$

Indication :

Pour la représentation graphique (sur une page complète), placer l'origine au centre de la feuille et prendre 5 carreaux pour unité.



Tourner s.v.p. ☞

Formulaire

Développements limités (autour de $x = 0$) :

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

où α peut être rationnel et négatif