Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 13

Exercice 2

(a) Le cercle γ est de centre $\Omega(2,5)$ et son rayon r est donné par : $r^2 = \|P\Omega\|^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32$. L'équation de γ est donc

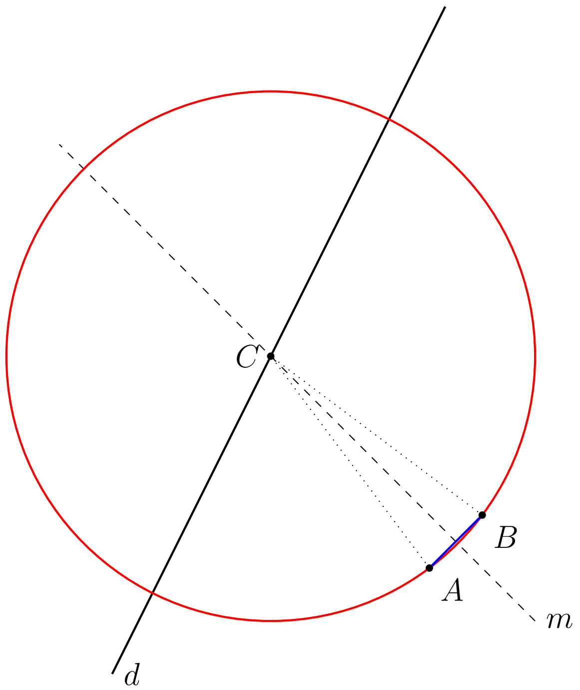
$$(x-2)^2 + (y-5)^2 - 32 = 0\,.$$

(b) Le centre du cercle est le milieu du segment AB.
Pour que γ ait AB pour diamètre, son centre doit être au milieu de AB, c'est-à-dire en $C\,(4, -\frac{1}{2})$. Son rayon est alors donné par $r^2 = (\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2})^2 = \frac{13}{4}$. L'équation de γ est donc

$$(x-4)^2 + (y+\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{13}{4}\,.$$

Exercice 3

On utilise une méthode géométrique (plus courte qu'une méthode analytique).
Le centre du cercle cherché se trouve sur la médiatrice du segment AB.
Figure d'étude :



Comme A et B appartiennent au cercle, le centre de γ doit appartenir à la médiatrice m du segment AB. Comme celle-ci a pour équations paramétriques

$$m : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

on trouve son intersection avec d pour obtenir le centre de γ : $C\,(-1, 3)$. Le rayon de γ s'obtient par exemple en prenant $r = \|\overrightarrow{CB}\| = 5$. Ceci donne :

$$\gamma :\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25\,.$$

Exercice 4

On utilise une méthode géométrique (plus courte qu'une méthode analytique).
Le centre de γ doit appartenir à la fois à la médiatrice du segment AB, donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 11/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

et à la perpendiculaire à d passant par B, donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\,.$$

On trouve donc son centre en calculant l'intersection de ces deux droites : $C\,(1, 5)$. Son rayon s'obtient comme avant : $r = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{13}$, et donc :

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 13\,.$$

Exercice 5

Méthode 1
Remarque préliminaire

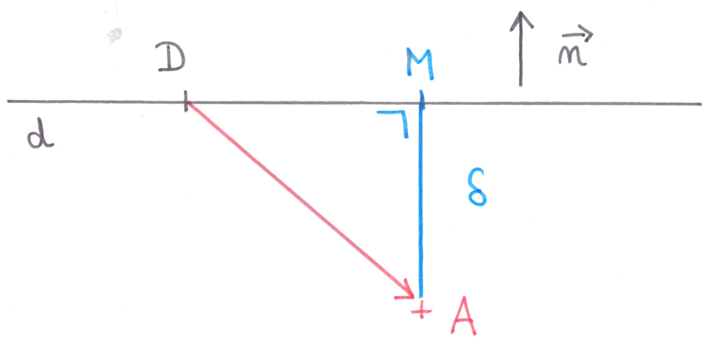
Soit γ le cercle cherché, de centre $\Omega\ (\alpha,\ \beta)$ et de rayon r.
Si la droite d est tangente au cercle γ, la distance de Ω à d vaut r.
Il en est de même si la droite g est tangente au cercle γ.
Le centre Ω du cercle γ est donc équidistant des deux droites d et g.
Le lieu des points du plan équidistants des deux droites d et g est constitué des deux bissectrices b_1 et b_2 des deux droites d et g.

Indication

Soit d une droite passant par le point D et de vecteur normal $\vec{n}$, et un point A.
Alors :

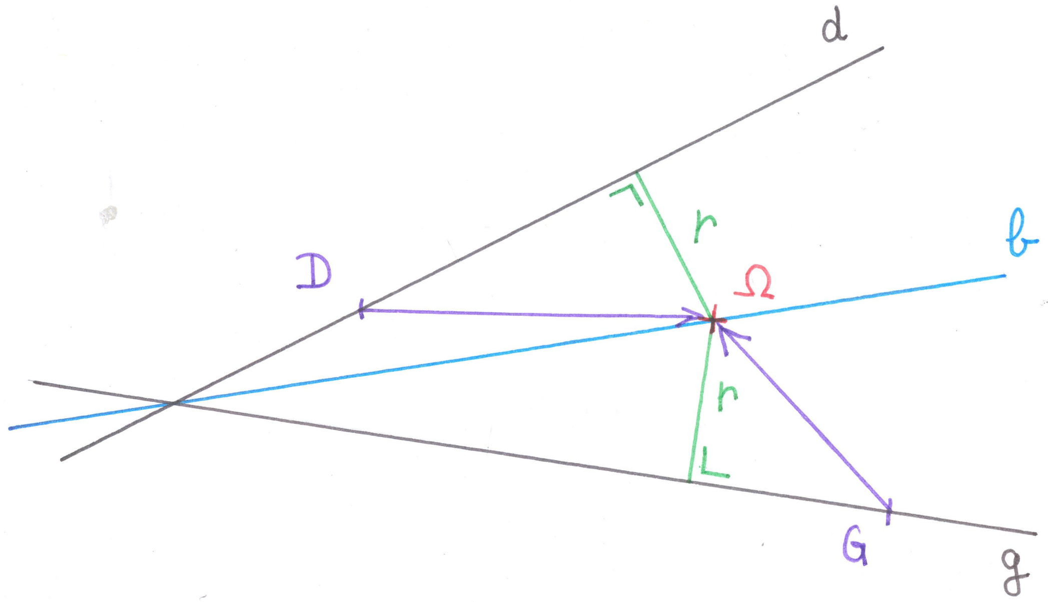
distance $(A\,, d) \;=\; ||\,\overrightarrow{MA}\,|| \;=\; |\,\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}\,|\,\dfrac{1}{||\vec{n}||} \;=\; \delta$

où M est la projection orthogonale de A sur d.



Résolution

Le cercle cherché étant tangent aux droites d et g, son centre appartient à l'une des bissectrices de ces deux droites. Il y a deux bissectrices donc il y aura deux solutions.



- On détermine les équations paramétriques de m : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

  $\Omega \in m \quad \Leftrightarrow \quad \Omega\,(-1+3k\,;\,2-4k)$

- Soit le point $D(-4\,;\,0) \in d$ et le vecteur normal $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  D'où : $\overrightarrow{D\Omega} = \begin{pmatrix} -1+3k+4 \\ 2-4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3k \\ 2-4k \end{pmatrix}$

  On a alors : $r = \text{dist}\,(\Omega\,,d) = |\,\overrightarrow{D\Omega}\cdot\vec{d}\,|\,\dfrac{1}{||\vec{d}||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\,3+3k+2-4k\,| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\,5-k\,| \qquad (1)$

- Soit le point $G(0\,;\,4) \in d$ et le vecteur normal $\vec{g} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

  D'où : $\overrightarrow{G\Omega} = \begin{pmatrix} -1+3k \\ -2-4k \end{pmatrix}$

  On a alors : $r = \text{dist}\,(\Omega\,,g) = |\,\overrightarrow{G\Omega}\cdot\vec{g}\,|\,\dfrac{1}{||\vec{g}||} = \dfrac{1}{\sqrt{50}}\,|\,7(-1+3k)+2+4k\,| =$

$\frac{5}{\sqrt{50}}\;|-1+5k| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\;|-1+5k| \qquad (2)$

- $(1) \;=\; (2)$: ce qui exprime que Ω appartient à la bissectrice de d et g.

  $\frac{1}{\sqrt{2}}\,|5-k| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\;|-1+5k|$

  $\Leftrightarrow$

  $5-k \;=\; \pm\,(-1+5k)$

  $\Leftrightarrow$

  $k=1 \quad$ ou $\quad k=-1$

  D'où les deux cercles :

  $\Omega_1 = (2\,;\,-2) \quad$ et $\quad r_1 = 2\sqrt{2}$

  $\Omega_2 = (-4\,;\,6) \quad$ et $\quad r_2 = 3\sqrt{2}$

Méthode 2

Soit γ le cercle cherché, de centre $\Omega\;(\alpha,\;\beta)$ et de rayon r :

$$\gamma:\;(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2 \;=\; 0\,.$$

Marche à suivre

- Equation de la tangente au cercle γ en un point T de γ.
- La droite d est une tangente au cercle γ en un point $T_0\;(x_0,\;y_0)$ de γ.
- La droite g est une tangente au cercle γ en un point $T_1\;(x_1,\;y_1)$ de γ.
- Conclusion.

Equation de la tangente à γ en un point T de γ

A l'aide de la règle du dédoublement, on peut écrire l'équation de la tangente t au cercle γ en un point T de γ :

$$t:\;(x_T-\alpha)\,(x-\alpha) \;+\; (y_T-\beta)\,(y-\beta) \;-\; r^2 \;=\; 0\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_T-\alpha)\,x \;+\; (y_T-\beta)\,y \;-\; r^2 \;-\; \alpha\,(x_T-\alpha) \;-\; \beta\,(y_T-\beta) \;=\; 0\,.$$

La droite d est une tangente au cercle γ en un point $T_0\;(x_0,\;y_0)$ de γ

Soit t_0 cette tangente, considérons les équations des deux droites t_0 et d :

$$t_0:\;(x_0-\alpha)\,x \;+\; (y_0-\beta)\,y \;-\; r^2 \;-\; \alpha\,(x_0-\alpha) \;-\; \beta\,(y_0-\beta) \;=\; 0$$

$$\text{et} \qquad d:\; x \;+\; y \;+\; 4 \;=\; 0\,.$$

Ces deux droites coïncident donc les coefficients respectifs sont proportionnels :

$$\frac{x_0-\alpha}{1} \;=\; \frac{y_0-\beta}{1} \;=\; -\frac{r^2+\alpha\,(x_0-\alpha)+\beta\,(y_0-\beta)}{4}\,.$$

De plus le point $T_0\;(x_0,\;y_0)$ appartient au cercle γ :

$$(x_0-\alpha)^2 \;+\; (y_0-\beta)^2 \;-\; r^2 \;=\; 0\,.$$

Donc les cinq variables α, β, r, x_0 et y_0 vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_0-\alpha \;=\; y_0-\beta \\ 4\,(x_0-\alpha) \;=\; -\,[r^2 \;+\; \alpha\,(x_0-\alpha) \;+\; \beta\,(y_0-\beta)] \\ (x_0-\alpha)^2 \;+\; (y_0-\beta)^2 \;-\; r^2 \;=\; 0 \end{cases}$$

La droite g est une tangente au cercle γ en un point $T_1\ (x_1,\ y_1)$ de γ

Soit t_1 cette tangente, considérons les équations des deux droites t_1 et g :

$$t_1 :\ (x_1-\alpha)\,x \ + \ (y_1-\beta)\,y \ - \ r^2 \ - \ \alpha\,(x_1-\alpha) \ - \ \beta\,(y_1-\beta) \ = \ 0$$

$$\text{et} \qquad g :\ 7x \ - \ y \ + \ 4 \ = \ 0\,.$$

Ces deux droites coïncident donc les coefficients respectifs sont proportionnels :

$$\frac{x_1-\alpha}{7} \ = \ \frac{y_1-\beta}{-1} \ = \ -\frac{r^2+\alpha\,(x_1-\alpha)+\beta\,(y_1-\beta)}{4}\,.$$

De plus le point $T_1\ (x_1,\ y_1)$ appartient au cercle γ :

$$(x_1-\alpha)^2 \ + \ (y_1-\beta)^2 \ - \ r^2 \ = \ 0\,.$$

Donc les cinq variables α β, r, x_1 et y_1 vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_1-\alpha \ = \ -7\,(y_1-\beta) \\ 4\,(x_1-\alpha) \ = \ -7\,[r^2 \ + \ \alpha\,(x_1-\alpha) \ + \ \beta\,(y_1-\beta)] \\ (x_1-\alpha)^2 \ + \ (y_1-\beta)^2 \ - \ r^2 \ = \ 0 \end{cases}$$

Le centre Ω appartient à la droite m

Les coordonnées de Ω vérifient donc l'équation de la droite m :

$$4\,\alpha \ + \ 3\,\beta \ - \ 2 \ = \ 0\,.$$

Conclusion

Les sept variables α, β, r, x_0, y_0, x_1 et y_1 vérifient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x_0-\alpha \ = \ y_0-\beta \\ 4\,(x_0-\alpha) \ = \ -\,[r^2 \ + \ \alpha\,(x_0-\alpha) \ + \ \beta\,(y_0-\beta)] \\ (x_0-\alpha)^2 \ + \ (y_0-\beta)^2 \ - \ r^2 \ = \ 0 \\ x_1-\alpha \ = \ -7\,(y_1-\beta) \\ 4\,(x_1-\alpha) \ = \ -7\,[r^2 \ + \ \alpha\,(x_1-\alpha) \ + \ \beta\,(y_1-\beta)] \\ (x_1-\alpha)^2 \ + \ (y_1-\beta)^2 \ - \ r^2 \ = \ 0 \\ 4\,\alpha \ + \ 3\,\beta \ - \ 2 \ = \ 0 \end{cases}$$

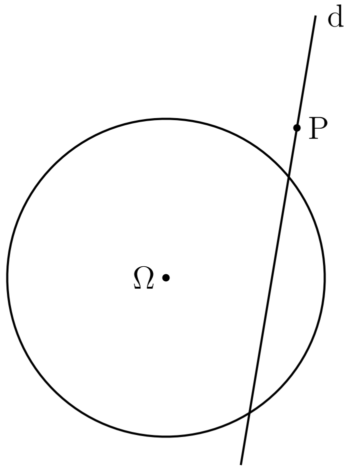
Il n'y a plus qu'à résoudre ce système de sept équations à sept inconnues !

En voulant faire l'économie d'un raisonnement géométrique élémentaire, on est contraint à des développements longs et fastidieux, débouchant sur un système pour le moins désagréable !

Exercice 6

Méthode 1

Figure d'étude :



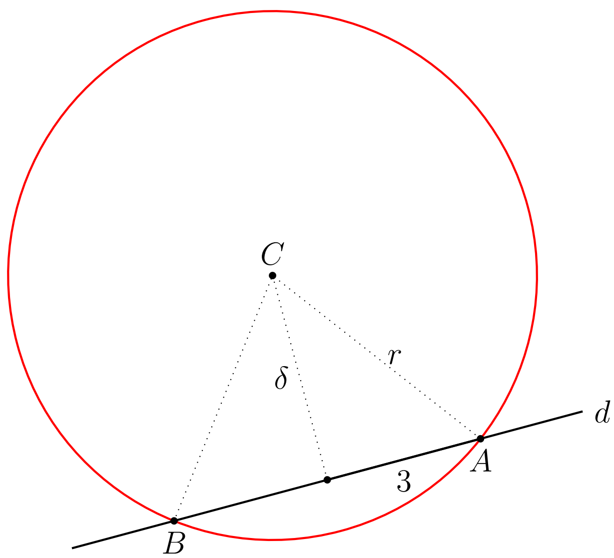
On peut commencer par calculer la distance de Ω à d :
Prenons un point quelconque de la droite d. Soit $P(-4,2) \in d$.
Soit encore un vecteur normal à la droite d : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Posons $\vec{u} = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
On a alors $\text{dist}(\Omega, d) = \left| \overrightarrow{\Omega P} \cdot \vec{u} \right|$.
Or, on a $\overrightarrow{\Omega P} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.
D'où $\left| \overrightarrow{\Omega P} \cdot \vec{u} \right| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{29}} |-14 - 15| = \dfrac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$.

Comme la corde doit avoir une longueur de $6 = 2 \cdot 3$, ceci implique que le rayon du cercle cherché satisfait $r^2 = (\sqrt{29})^2 + 3^2 = 38$. L'équation du cercle cherché est donc donnée par

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 38 \,.$$

Méthode 2

On utilise la forme normale d'une droite.
Figure d'étude :



On peut commencer par calculer la distance de C à d :

$$\delta = \frac{|2(3) - 5(-1) + 18|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \sqrt{29}\,.$$

Comme la corde doit avoir une longueur de $6 = 2 \cdot 3$, ceci implique que le rayon du cercle cherché satisfait $r^2 = (\sqrt{29})^2 + 3^2 = 38$. L'équation du cercle cherché est donc donnée par

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 38\,.$$

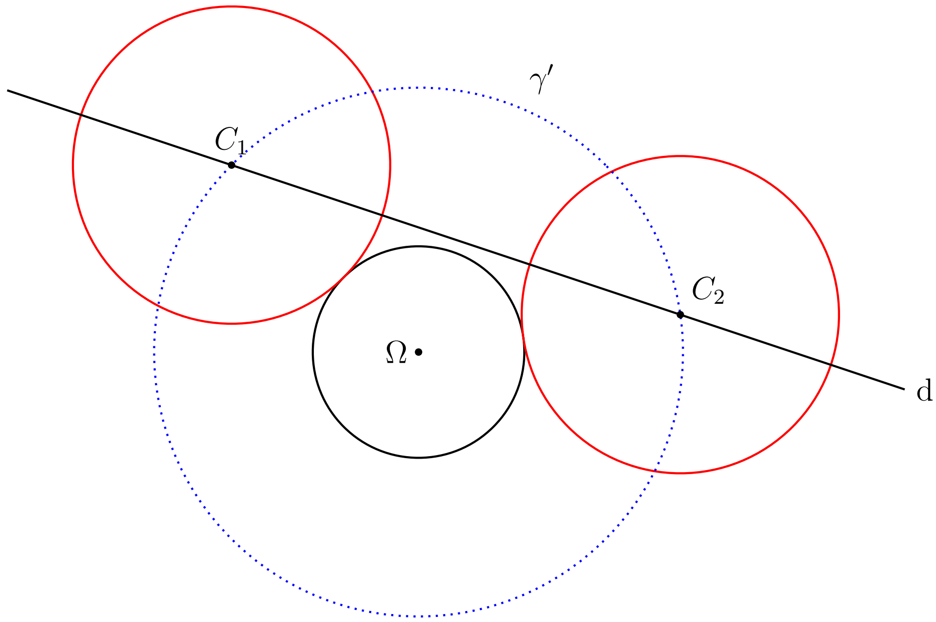
Exercice 7

L'équation de γ se met sous la forme

$$\gamma :\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4\,.$$

Son centre est donc $\Omega\,(-2,-2)$ et son rayon $r = 2\,.$

Remarquons que pour être tangent *extérieurement* à γ, le centre du cercle cherché doit se trouver à distance $r + 3 = 5$ de Ω. On en conclut que son centre, noté $C\,(x,y)$, doit être situé sur un cercle γ' de rayon 5 centré en Ω, représenté en traitillé sur la figure ci-dessous :



On voit sur cette figure d'étude qu'il existe à priori deux cercles ayant la propriété requise. (Il pourrait n'en exister aucune si d ne coupait pas γ'.)
Commençons par écrire l'équation de γ' :

$$\gamma' :\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25\,.$$

On calcule l'intersection de γ' avec d, en injectant $2x + y + 1 = 0$ dans l'équation de γ', et on trouve deux points d'intersection : $C_1\,(-2,3)$, $C_2\,(2,-5)$. On a alors deux solutions pour le cercle cherché :

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9\,, \qquad \text{et} \qquad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9\,.$$