Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe [ ]

PRENOM : ______________________________

1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dépendants d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha-5 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha+1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Soient les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ de $\mathbb{R}^3$. Sachant que :
$\det[\vec{x}\,,\,\vec{y}\,,\,\vec{z}] = 4$
et
$\det[\vec{u}\,,\,\vec{v}+2\vec{x}\,,\,\vec{w}] \;+\; \det[\vec{x}\,,\,\vec{u}\,,\,2\vec{w}] \;+\; \det[\vec{x}\,,\,3\vec{y}\,,\,\vec{z}] \;=\; 12$
Calculer les valeurs du paramètre α.

Pour la suite du problème, on pose $\alpha = 1$.

b) Soit $V = [\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{w}]_{\text{sev}}$. Donner une base et la dimension de V.

c) Soit $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\vec{t}$ appartient-il à V ? Si c'est le cas, donner ses composantes dans une base à préciser de V. 4 pts

2. On considère l'équation en $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A - A^{-1})X = \lambda X\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée telle que $\det A \neq 0$.

a) Montrer que l'ensemble solution est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Tourner la page

On pose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Toute matrice X solution à cette équation est-elle inversible ? Discuter en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) On fixe $\lambda = -\frac{3}{2}$. Déterminer une base et la dimension de l'ensemble solution. 5 pts

3. Soient $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et U et V des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[x]$. On considère l'ensemble suivant :

$$W = \{\ p \ \in \ \mathbb{R}[x] \mid \exists\ u \in U \ \text{ et } \ \exists\ v \in V,\ p = (u+v)'\ \}$$

où $(u+v)'$ est le polynôme dérivé de la somme des polynômes u et v.

a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

b) V est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ suivant :

$$V = \{\ q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + e \mid q(0) = 0 \ \text{ et } \ q(1) = 0\ \}.$$

Déterminer une base et la dimension de V.

c) U est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ engendré par les polynômes

$$f = x^4 + x^3 + x \quad \text{et} \quad g = 4x^3 + 2x - 2\,.$$

V étant le sous-espace vectoriel défini sous b), déterminer l'expression générale d'un polynôme de W. En déduire une base et la dimension de W. 4 pts

4. Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longmapsto A\,\vec{x} + 2\,\vec{x} \end{aligned}$$

a) Montrer que l'application f est linéaire.

On pose $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le sous-ensemble $f^{-1}(\{\vec{v}\})$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ce sous-ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
Justifier votre réponse. 2 pts