7 avril 2011

Contrôle d'analyse II no 3

Durée: 1 heure 40'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. Résoudre :

$$(\mathrm{Ch}x + \mathrm{Sh}x)^{\mathrm{Arch}x} = (\mathrm{Ch}x - \mathrm{Sh}x)^{\mathrm{Arsh}(2-x)}$$ 3½ pts

2. Soit la fonction $f(x) = \mathrm{Arch}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

a) Calculer sa derivée

b) En déduire une forme simplifiée de f(x). 3½ pts

3. a) Trouver tous les couples de nombres réels (a ; b) solutions de l'équation :

$$(a+ib)\sqrt[3]{i} - 2 = 0$$

b) On considère les deux nombres complexes :

$z_1 = \dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ et $z_2 = 1 - i$. Donner la forme trigonométrique et algébrique du nombre complexe $z_3 = \dfrac{z_1^2}{z_2}$ puis en déduire l'argument φ, tel que $\sin\varphi = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. 4 pts

4. Calculer toutes les solutions de l'équation polynomiale suivante :

$$2z^3 + (2+i)z^2 + (7i-2)z - (3+i) = 0$$

sachant qu'une des racines est purement imaginaire. 4 pts

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{Ch}(x-y) = \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{Sh}(x-y) = \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y$$

$$\mathrm{Th}(x+y) = \frac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1 + \mathrm{Th}\,x \cdot \mathrm{Th}\,y} \qquad \mathrm{Th}(x-y) = \frac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1 - \mathrm{Th}\,x \cdot \mathrm{Th}\,y}$$

$$\mathrm{Ch}x + \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \mathrm{Ch}x - \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\mathrm{Sh}x + \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \mathrm{Sh}x - \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall x \in \mathrm{R} \qquad \mathrm{Ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,; \quad \mathrm{Sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}\,; \quad \mathrm{Th}\,x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{où } t = \mathrm{Th}\,\frac{x}{2}$$

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \mathrm{Arch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \forall x \in]1,+\infty[, \quad \mathrm{Arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\forall x \in \mathrm{R}, \quad \mathrm{Arsh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \forall x \in \mathrm{R}, \quad \mathrm{Arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arth}\,x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\forall x \in \mathrm{R} \setminus [-1;1], \quad \mathrm{Arcoth}\,x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \forall x \in \mathrm{R} \setminus [-1;1], \quad \mathrm{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$