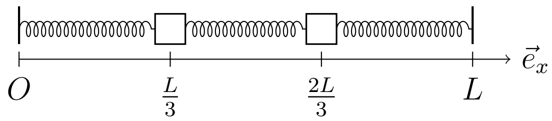
Modes propres d'un système oscillant

1 Modèle

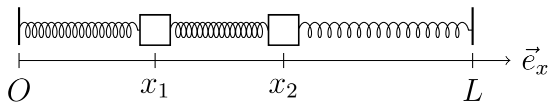
Considérons deux masses ponctuelles m_1 et m_2 égales ($m_1 = m_2 = m$) maintenues par trois ressorts identiques entre deux parois distantes d'une longueur L. Elles subissent ainsi chacune deux forces de rappel (les ressorts sont de longueur au repos ℓ et de constante k) et forment ainsi un système d'oscillations couplées.
Choisissons l'origine sur la paroi de gauche et le vecteur $\vec{e}_x$ dirigé vers la droite. Les positions des masses sont données par $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
A l'équilibre, les masses se trouvent respectivement aux position $x_1 = \frac{L}{3}$ et $x_2 = \frac{2L}{3}$.



Pour chaque ensemble de conditions initiales (positions et vitesse à un instant donné t_0)

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= p_1 \qquad & \dot{x}_1(t_0) &= v_1 \\ x_2(t_0) &= p_2 \qquad & \dot{x}_2(t_0) &= v_2\,, \end{aligned}$$

l'évolution est régie par la seconde loi de Newton.



Un ressort de longueur supérieure à la longueur au repos exerçant une traction, les lois de la dynamique pour m_1 et m_2 s'écrivent selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} -k(x_1 - \ell) + k(x_2 - x_1 - \ell) &= m\ddot{x}_1 \\ -k(x_2 - x_1 - \ell) + k(L - x_2 - \ell) &= m\ddot{x}_2\,. \end{aligned}$$

En notant

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,,$$

les équations deviennent

$$\begin{aligned} -\omega^2(2x_1 - x_2) &= \ddot{x}_1 \\ -\omega^2(2x_2 - x_1 - L) &= \ddot{x}_2\,. \end{aligned}$$

2 Transformation des équations

En additionnant les équations, nous obtenons $-\omega^2(x_1 + x_2 - L) = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$. Définissant la position du centre de masse (milieu des deux masses)

$$\sigma(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2},$$

celle-ci obéit à la loi

$$-\omega^2\left(\sigma - \frac{L}{2}\right) = \ddot{\sigma} \qquad \text{avec} \quad \sigma(t_0) = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \dot{\sigma}(t_0) = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Le centre de masse oscille donc autour de la position $L/2$, le milieu entre les parois, à la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En soustrayant les équations, nous obtenons $-\omega^2(3x_2 - 3x_1 - L) = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$. Définissant la distance séparant les deux masses

$$\delta(t) = x_2(t) - x_1(t),$$

celle-ci obéit à la loi

$$-3\omega^2\left(\delta - \frac{L}{3}\right) = \ddot{\delta} \qquad \text{avec} \quad \delta(t_0) = p_2 - p_1 \quad \dot{\delta}(t_0) = v_2 - v_1.$$

La distance entre les masses oscille donc autour de la longueur $L/3$, la distance d'équilibre, à la pulsation

$$\sqrt{3}\,\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

La transformation inverse

$$x_1(t) = \frac{2\sigma(t) - \delta(t)}{2} \qquad x_2(t) = \frac{2\sigma(t) + \delta(t)}{2}$$

donne l'évolution des masses m_1 et m_2 au cours du temps.
Nous obtenons ainsi deux mouvements découplés, celui du centre de masse, ou mode collectif, et celui de la distance entre les masses, ou mode relatif. Ces mouvements sont les modes propres du système formé des deux masses et ω et $\sqrt{3}\,\omega$ sont les pulsations propres correspondantes. Tout mouvement est alors une superposition des modes collectif et relatif

3 Formulation matricielle

Les deux équations s'écrivent sous forme matricielle

$$-\omega^2\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Avec les définitions

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix},$$

nous avons

$$-\omega^2(AX - B) = \ddot{X} \qquad \text{avec} \quad X(t_0) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \dot{X}(t_0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A décrit le couplage entre les deux mouvements.
A étant réelle et symétrique, elle est diagonalisable. Son polynôme caractéristique est

$$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

- Valeur propre $\lambda = 1$: le sous-espace propre E_1 est donné par l'équation

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad E_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\text{sev}}.$$

- Valeur propre $\lambda = 3$: le sous-espace propre E_3 est donné par l'équation

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad E_3 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\text{sev}} = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]_{\text{sev}}.$$

Appelons D la matrice diagonale des valeurs propres et P la matrice des vecteurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $AP = PD$, ou

$$A = PDP^{-1}.$$

L'équation matricielle devient alors $-\omega^2(PDP^{-1}X - B) = \ddot{X}$, ou encore

$$-\omega^2(DP^{-1}X - P^{-1}B) = P^{-1}\ddot{X}.$$

En introduisant la transformation (changement de base)

$$\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \\ x_2(t) - x_1(t) \end{pmatrix} \qquad \widetilde{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}L \\ L \end{pmatrix},$$

nous obtenons l'équation

$$-\omega^2(D\widetilde{X} - \widetilde{B}) = \ddot{\widetilde{X}},$$

c'est-à-dire les deux équations découplées pour les modes propres

$$\begin{aligned} -\omega^2\left(\tilde{x}_1 - \frac{L}{2}\right) &= \ddot{\tilde{x}}_1 \qquad \text{avec} \quad \tilde{x}_1(t_0) = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \dot{\tilde{x}}_1(t_0) = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ -3\,\omega^2\left(\tilde{x}_2 - \frac{L}{3}\right) &= \ddot{\tilde{x}}_2 \qquad \text{avec} \quad \tilde{x}_2(t_0) = p_2 - p_1 \quad \dot{\tilde{x}}_2(t_0) = v_2 - v_1, \end{aligned}$$

comme dans la section précédente, pour $\tilde{x}_1 = \sigma$ et $\tilde{x}_2 = \delta$.
La transformation inverse fournit le mouvement des masses m_1 et m_2 :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) - \frac{1}{2}\tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_1(t) + \frac{1}{2}\tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Remarque : la matrice A étant réelle et symétrique, les espaces propres sont orthogonaux. Nous pouvons choisir des générateurs normés, la matrice P des vecteurs propres étant alors unitaire : $P^tP = I_2 \Leftrightarrow P^{-1} = P^t$. Ce choix simplifie les calculs liés au changement de base.