Analyse I – Corrigé de la Série 5

Dans ce corrigé nous allons utiliser les définitions et techniques du Chapitre 2 du cours. Nous allons voir plus tard que les démonstrations peuvent souvent être considérablement simplifiées si on se permet d'utiliser des propriétés additionnelles des fonctions élémentaires (continuité, dérivabilité, développements limités). Au fur et à mesure que nous progresserons dans le cours d'Analyse I, nous aurons des nouveaux outils à disposition. Il est recommandé de revenir périodiquement sur la présente série et de refaire les démonstrations en se servant de ces informations.

Echauffement.

i) Les premiers termes de la suite sont $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{6}{4} = 1.5$, $a_3 = \frac{9}{5} = 1.8$, $a_4 = \frac{12}{6} = 2$, $a_5 = \frac{15}{7} = 2.429\ldots$. La suite est en effet croissante car

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{n+3} - \frac{3n}{n+2} = 3\,\frac{(n+1)(n+2) - n(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0\ .$$

Il s'en suit que pour $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ on a

$$\operatorname{Inf} A = \min A = a_1 = 1\,.$$

ii) On remarque aussi que

$$a_n = \frac{3n}{n+2} = \frac{3(n+2) - 6}{n+2} = 3 - \frac{6}{n+2} \le 3\ ,$$

et donc $a = 3$ est une borne supérieure. Il reste montrer que $a = 3$ est la plus petite borne supérieure, c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$, il faut trouver n_0 tel que $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Posons

$$n_0 = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right]\ ,$$

où $[r]$ est la partie entière de $r \in \mathbb{R}$. Puisque $\frac{6}{\varepsilon} \le \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 1$,

$$a_{n_0} = 3 - \frac{6}{\left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 2} = 3 - \varepsilon \cdot \frac{\frac{6}{\varepsilon}}{\left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 2} \ge 3 - \varepsilon \cdot \frac{\left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 1}{\left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 2} > 3 - \varepsilon\ ,$$

ce qui montre que

$$\operatorname{Sup} A = 3.$$

Exercice 1.

i) On a $a_n = (n-2)^2 - 3$. La suite n'est donc pas monotone car $a_1 > a_2$ et $a_2 < a_3$. Pour $n \ge 2$, on a par contre

$$a_n = (n-2)^2 - 3 \le (n-1)^2 - 3 = a_{n+1}\ ,$$

c.-à-d. la suite est croissante pour $n \geq 2$. Donc pour $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ on a

$$\operatorname{Inf} A = \min A = a_2 = -3 \ .$$

Comme pour tout $a > 0$, il existe n_0 tel que $a_{n_0} > a$, la suite n'est pas majorée et on a

$$\operatorname{Sup} A = +\infty \ ,$$

et donc $\max A$ n'existe pas.

ii) On a

$$a_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}\frac{2n}{2n-1} = \frac{1}{2}\frac{2n-1+1}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2n-1} \ .$$

On procède ensuite comme pour l'échauffement. On montre que la suite et décroissante :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0 \ .$$

Il s'en suit que $\operatorname{Sup} A = \max A = a_1 = 1$, où $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. De plus on a

$$a_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{n - \frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n-1)} \geq \frac{1}{2} \ ,$$

donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est minorée par $a = \frac{1}{2}$. Pour montrer que a est le plus grand minorant de $(a_n)_{n\geq 1}$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$. En posant

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \ ,$$

on a

$$a_{n_\varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(2\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right)} = \frac{1}{2} + \varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2\varepsilon}}{2\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1} \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \cdot \frac{\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1}{2\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

et donc

$$\operatorname{Inf} A = \frac{1}{2} \ .$$

Notons encore que $\min A$ n'existe pas.

Exercice 2.

i) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ et n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq c := \max\{|a| + 1, |a_0|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|\}$$

ce qui montre que la suite est bornée.

ii) (Démonstration par l'absurde). Supposons que la suite (a_n) est convergente, alors par *i)* il existe c tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$. Soit $r > c$ ($r < -c$), alors si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) il existe n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq r$ ($a_n \leq r$), en contradiction avec le fait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$.

Exercice 3.

$b \neq 0$ implique qu'il existe n_1, tel que, $\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$ et donc, $\forall n \geq n_1$,

$$\frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|b + b_n - b|} \leq \frac{1}{||b| - |b_n - b||} \leq \frac{1}{|b| - \frac{1}{2}|b|} = \frac{2}{|b|}.$$

On a

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{|(a_n - a)b - (b_n - b)a|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b|.$$

$\forall \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \geq n_1$, tel que, $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{2}{|b|}|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 4.

i) Il s'agit de la suite que l'on a déjà discutée dans l'exercice d'échauffement. La suite est croissante et bornée et on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_2, \ldots\} = 3 \ .$$

On peut aussi utiliser les propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{3}{1 + 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{3}{1 + 2 \cdot 0} = 3 \ .$$

ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}$

iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{3}{3} = 2$

Intermezzo.

Les informations suivantes seront utiles pour les exercices qui suivent :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, pour tout $p > 0$.

2) $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour tout $x \geq 0$.

3) $1 + x \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour $-1 \leq x \leq 0$.

Démonstration :

1) Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On peut par exemple choisir

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right] + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \ ,$$

car on trouve pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n_0^p} \leq \varepsilon \ .$$

2) Pour $x \geq 0$ on a

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x+\frac{1}{4}x^2} = 1+\frac{1}{2}x \ .$$

3) Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $0 \leq 1+x \leq 1$ et donc $(1+x)^2 \leq 1+x$. Donc

$$1+x \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x+\frac{1}{4}x^2} = 1+\frac{1}{2}x \ .$$

Exercice 5.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-3\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \frac{5-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+7\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

ii) On a

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0 \ ,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0 \ .$$

iii) On a

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \leq 1+\frac{1}{n^2} \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \ ,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

Remarque :

Nous allons voir plus tard que l'on peut « échanger » la racine et la limite, ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{2n} = \frac{\sqrt{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Exercice 6.

Comme montré grace à l'aide de la Figure 1, pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$, on a

$$0 \leq \sin(x) \leq x \leq \mathrm{tg}(x).$$

Cela implique les inégalités suivantes :

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1-\sin(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \qquad 1-x^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \ .$$

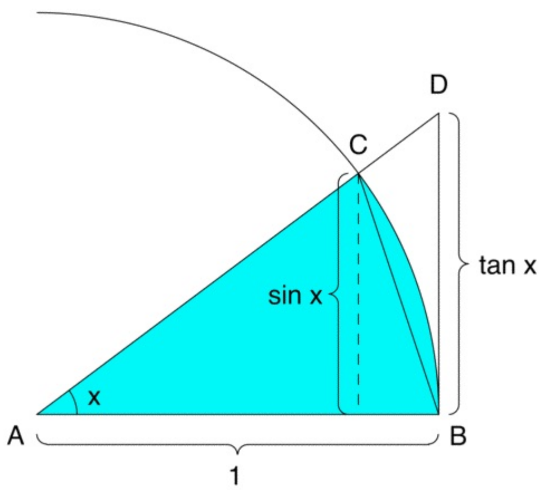

FIGURE 1 – On peut voir que l'aire du triangle ABC est égal à $\sin(x)/2$, ce qui est inférieur à l'aire du secteur circulaire en bleu, eguale à $x/2$. L'aire de ce dernier est au même temps inférieure à l'aire du triangle ABD, qui est égale à $\operatorname{tg}(x)/2$.

i) On a

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \;.$$

ii) On a d'abord

$$1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 \;,$$

et ensuite

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \leq 1 \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 \;.$$

iii) On a

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} \leq 1 \;.$$

Comme pour *ii*) on montre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} = 1 \;,$$

d'où on trouve par le théorème des deux gendarmes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} = 1 \;.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}}\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \;. \end{aligned}$$

Exercice 7.

i) On a

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \ ,$$

d'où $0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, et par le théorème des deux gendarmes on obtient que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

iii) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ on a

$$\frac{2}{m} \leq 1 \ ,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2 \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ avec le théorème des deux gendarmes.

Exercice 8.

i) On a $0 \leq \left|\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}\right| = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

ii) On a

$$0 \leq \left| n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| \leq \left| n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| = \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} \ .$$

On montre comme dans l'Ex. 6 *ii)* que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1 \ .$$

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \ ,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 0.$

iii) En utilisant les formules trigonométriques adéquates on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cos(n)\sin(1)}{2\cos(n)\cos(1)} = \mathrm{tg}(1) \ .$$

iv) On a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}{n^3+n^2+1} = 0 \ ,$$
car $\left|\sin\left(\sqrt{n^3+n^2+1}\right)\right| \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n^2+1} = 0 \ .$$
Le résultat suit en utilisant le théorème des deux gendarmes comme dans *i*).

v) On a
$$0 \le \left|\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2}\right| \le \left|\frac{-3}{2(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+4})}\right| \le \frac{3}{4n} \ ,$$
ce qui implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

vi) On a d'une part
$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) = \frac{\sqrt{n}(n-1)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+1}} \le \frac{\sqrt{n}\cdot n}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3}} = \frac{1}{2} \ ,$$
et d'autre part
$$\frac{\sqrt{n}(n-1)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+1}} \ge \frac{\sqrt{n}(n-1)}{2\sqrt{n^3+n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(n-1)^2}{n^3+n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2n}{n^2+1}} \ .$$
Comme $0 \le \dfrac{2n}{n^2+1} \le 1$ pour tout $n \ge 1$, on a (cf. Intermezzo plus haut)
$$1-\frac{2n}{n^2+1} \le \sqrt{1-\frac{2n}{n^2+1}} \le 1 \ ,$$
d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{2n}{n^2+1}} = \dfrac{1}{2}$, et donc
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) = \frac{1}{2}$$
par le théorème des deux gendarmes.

vii) On a
$$0 \le \left|\frac{n^3}{7^n}\cos\left(\sqrt{n}\right)\right| \le \frac{n^3}{7^n} \ .$$
En utilisant le critère de d'Alembert pour les suites, on peut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{7^n} = 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{7^{n+1}}}{\frac{n^3}{7^n}}\right| = \left|\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right| = \left|\frac{1}{7}\right| < 1.$$
Donc on peut conclure que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{7^n}\cos\left(\sqrt{n}\right) = 0 \ .$$

viii) Puisque $3^n e^{-3n} = q^n$, avec $q = \dfrac{3}{e^3} = 0.14936\ldots < 1$, il s'en suit que $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n e^{-3n} = 0$.

Exercice 9.

Rappelons que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Alors

i) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = e^2\ .$$

ii) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right) = \frac{1}{e}\ .$$

iii) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1\ .$$

Exercice 10.

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ■ e^{-4}
- ☐ e^{-1}

Dans ce corrigé nous utilisons uniquement les définitions et techniques du Chapitre 2 du cours. L'idée de base dans ce qui suit est de faire apparaître successivement des limites connues en utilisant les lois algébriques de la limite. Nous allons voir plus tard qu'une méthode beaucoup plus efficace pour calculer ce genre de limites est d'utiliser des développements limités.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)^{n^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-2}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)^{(n+1)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)^{-2n-1}\cdot e^{-1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)^{-2(n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)\right)\cdot e^{-3}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{(1+n)}\right)^{-2(n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{(1+n)}\right)^{-2(n+1)}\cdot 1\right)\cdot e^{-4}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\left(1-\frac{1}{(1+n)}\right)^{n+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{(1+n)}\right)^{n+1}\right)^2}\right)\cdot e^{-4}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{-2}}\cdot\frac{1}{e^2}\right)\cdot e^{-4} = e^{-4}
\end{aligned}$$

Exercice 11.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les termes de a_n alternent entre -1 et 1, ce qui fait que (a_n) est bornée mais ne converge pas.

Q2 : VRAI.
Comme $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |a_n \sin(n)| = |a_n| \cdot |\sin(n)| \leq |a_n|\,,$$

ou

$$-|a_n| \leq a_n \sin(n) \leq |a_n|\,. \tag{1}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)$ converge aussi vers 0. En effet, soit $\epsilon > 0$. Alors par la convergence de (a_n) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - 0| = |a_n| = \big||a_n| - 0\big| < \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui établit que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ également. Par le théorème des deux gendarmes appliqué à (1) on conclut alors que $\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| = 1$$

mais $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Q4 : VRAI.
Comme (a_n) converge, elle est bornée. Ainsi $\operatorname{Sup} A < \infty$ où $A = \{|a_0|, |a_1|, \ldots\}$, si bien que l'énoncé est vrai en prenant par exemple $\epsilon = 1 + \operatorname{Sup} A$.

Q5 : VRAI.
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors $\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$. Ainsi la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - a$ est bornée. En appliquant le raisonnement de la question précédente à la suite (b_n), on a le résultat voulu.