**Exercice 1 : Deux ressorts et une masse**

a) On applique la seconde loi de Newton. On prend l'origine au point d'attache du ressort gauche (voir schéma).

$$M\vec{a} = \sum \vec{F} \Longrightarrow M\ddot{x} = -k_1(x - l_1)$$

b) On place l'origine de notre repère $Ox$ au point d'attache du ressort gauche. En utilisant cet axe pour repérer la position de la masse $M$, l'allongement du ressort 1 est donné par $x$-$l_1$, celui du ressort 2 par $d$-$x$-$l_2$. Le bilan des forces sur la masse s'écrit ainsi :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1(x - l_1)\vec{e}_x + k_2(d - x - l_2)\vec{e}_x$$

A l'équilibre, la seconde loi de Newton devient :

$$M\vec{a} = \vec{0} = -k_1(x_{eq} - l_1)\vec{e}_x + k_2(d - x_{eq} - l_2)\vec{e}_x$$

et en projection sur $\vec{e}_x$ :

$$-k_1(x_{eq} - l_1) + k_2(d - x_{eq} - l_2) = 0$$

$$\Longrightarrow x_{eq} = \frac{k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}{k_1 + k_2}$$

c) En gardant l'origine du repère au point d'attache du ressort gauche comme en b), la seconde loi de Newton est :

$$M\vec{a} = -k_1(x - l_1)\vec{e}_x + k_2(d - x - l_2)\vec{e}_x$$

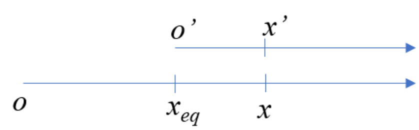
et en projection sur $\vec{e}_x$ :

$$M\ddot{x} = -k_1(x - l_1) + k_2(d - x - l_2)$$

$$M\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_1 l_1 + k_2(d - l_2)$$

En prenant comme origine la position d'équilibre calculée en b) ,

$$x' = x - x_{eq}$$




l'équation différentielle du mouvement devient :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}' &= -(k_1 + k_2)(x' + x_{eq}) + k_1 l_1 + k_2(d - l_2) \\ &= -(k_1 + k_2)x' \underbrace{- (k_1 + k_2)\frac{k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}{k_1 + k_2} + k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}_{=0} \end{aligned}$$

$$M\ddot{x}' = -(k_1 + k_2)x'$$

Les termes constants s'annulent lorsque l'on prend la position d'équilibre comme origine du repère ; l'équation du mouvement s'exprime plus simplement.

d)

- Dans le cas a), l'équation du mouvement est $M\ddot{x} = -k_1(x - l_1)$ et s'écrit avec la position d'équilibre comme origine $\ddot{x}' = -\frac{k_1}{M}x'$.

On reconnait l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$.

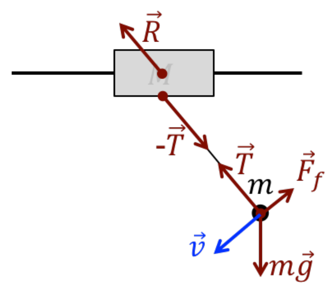
La fréquence des oscillations est $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{M}}$

- Dans le cas c), la pulsation est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$ et la fréquence des oscillations $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$

## Exercice 2 : Pendule et masse sur un rail

1re partie:

a) Il y a trois forces qui agissent sur la masse $m$ (voir schéma ci-contre) :



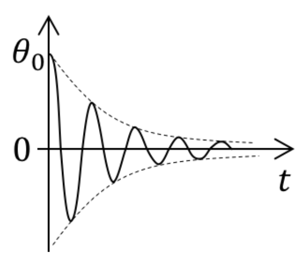

Le poids, $m\vec{g}$

La force de tension du fil, $\vec{T}$.

La force de frottement fluide laminaire $\vec{F}_f$, orientée dans la direction opposée à la vitesse $\vec{v}$.

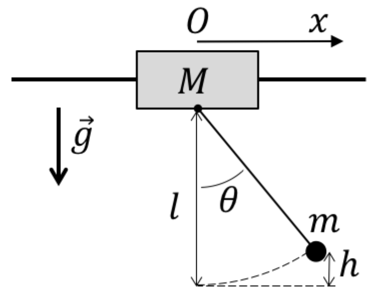
(Le schéma représente le pendule en train de descendre, on peut aussi le représenter à la descente)
On pouvait optionnellement représenter les forces opérant sur $M$ (poids, tension du fil et réaction du support pour la maintenir immobile, voir schéma).

b) Pour un amortissement faible, l'évolution de l'angle en fonction du temps a la forme d'une sinusoïde amortie exponentiellement. À $t = 0$, on a $\theta = \theta_0$ et la tangente est horizontale puisque $\dot{\theta} = 0$.




2ème partie: la masse $M$ est mobile dans cette partie et il n'a a aucun frottement.

c) Notons $v_{0m}$ et $v_{0M}$ les vitesses de $m$ et $M$ lorsque la masse $m$ atteint le point le plus bas (cela a lieu pour $\theta = 0$). Comme cherche deux vitesses, il nous faut deux équations.




Considérons le système [pendule + masse $M$]. Les forces de tension du fil sont des forces internes au système. Les seules forces externes sont le poids $m\vec{g}$ appliqué sur la masse $m$ et la réaction $\vec{N}$ du rail appliquée sur la masse $M$. $\vec{N}$ et $M\vec{g}$ sont perpendiculaires au rail (il n'y a pas de frottements), le travail est donc nul. On peut justifier les deux lois de conservations suivantes :

1- Conservation de l'énergie mécanique du système. *Justification : la seule force à travail non nul est la pesanteur, avec l'énergie potentielle $E_p = mgh$.*

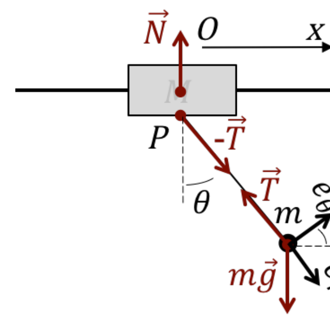
2- Conservation de la quantité de mouvement selon $Ox$. *Justification : Toutes les forces externes sont nulles en projection sur $Ox$ .*

Ces deux lois de conservation donnent la solution à la question :

$$\begin{cases} E_m^{initiale} = E_m^{finale} \\ p_{Ox}^{initiale} = p_{Ox}^{finale} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mgh = \frac{1}{2}mv_{0m}^2 + \frac{1}{2}Mv_{0M}^2 \\ 0 = mv_{0m} + Mv_{0M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgh = \frac{1}{2}mv_{0m}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_{0m}\right)^2 = \left(\frac{m}{2} + \frac{m^2}{2M}\right)v_{0m}^2 = \frac{m(M+m)}{2M}v_{0m}^2 \\ v_{0M} = -\frac{m}{M}v_{0m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{0m}^2 = \frac{2Mgh}{m+M} \\ v_{0M} = -\frac{m}{M}v_{0m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0m} = \pm\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} \\ v_{0M} = \mp\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} \end{cases}$$




d) Le schéma ci-contre représente le bilan des forces pour cette partie du problème. L'énoncé nous indiquant que pour les petits angles $\|T\| = mg$, la projection sur $Ox$ de la seconde loi de Newton donne le résultat cherché :

$$\|T\|\sin\theta = Ma_x = M\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{\|T\|\sin\theta}{M} = \frac{m}{M}g\sin\theta$$

e) Pour bien poser la seconde loi de Newton sur la masse $m$, il faut penser au fait que le point d'attache du pendule est lié à la masse $M$ : Notons donc $P$ le point d'attache du pendule sur la masse $M$. Newton s'écrit dans le référentiel galiléen lié au point $O$ immobile. L'accélération de la masse $m$ se calcule de la façon suivante :

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{Pm} \Longrightarrow \vec{a}_m = \ddot{\overrightarrow{OP}} + \ddot{\overrightarrow{Pm}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \left(-l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)$$

où on a utilisé les coordonnées polaires pour exprimer $\ddot{\overrightarrow{Pm}}$ .

En outre, pour les petits angles on peut poser $\vec{e}_x \approx \vec{e}_\theta$, soit $\vec{a}_m = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \left(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$

La seconde loi de Newton sur la masse $m$ est donc :

$$m\vec{a}_m = \vec{T} + m\vec{g} = -T\vec{e}_r + mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) \Longrightarrow \begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

La première équation s'approxime $T \approx mg$, ce qui démontre l'indication donnée dans l'énoncé.

La seconde équation donne le résultat recherché, en remplaçant $\ddot{x}$ par son expression trouvée à la question précédente et avec l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ :

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Longrightarrow \frac{m}{M}g\,\theta + l\ddot{\theta} = -g\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{(m+M)g}{Ml}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique, avec la pulsation des oscillation $\omega_0$ telle que $\omega_0^2 = \frac{(m+M)g}{Ml}$.

La pulsation des oscillations est donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m+M)g}{Ml}}$$

*On note que pour $M \gg m$ , $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ : on retrouve les équations du pendule simple.*

**Exercice 3 : Le flotteur**

Rappelons tout d'abord le volume d'un cylindre : $V_{cylindre} = hauteur \times surface = h\,\pi r^2$

a) Position d'équilibre :

A l'équilibre, le cylindre est soumis à la poussée d'Archimède et au Poids.
D'après la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
A l'équilibre $\vec{a} = \vec{0}$, donc **:** $\vec{P}_A + \vec{P} = \vec{0}$
On pose $h'$, la hauteur immergée du cylindre et on projette sur l'axe *z* (dirigé vers le haut) :

$$\rho_{eau} V_{immergé}\, g - \rho_f V_{cylindre}\, g = 0$$

Avec $\rho_f = \frac{2}{3}\rho_{eau}$

Soit $\rho_{eau} V_{immergé}\, g - \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre}\, g = 0 \Rightarrow \pi r^2 \rho_{eau}\left(h' - \frac{2}{3}h\right) = 0$
$\Rightarrow h' = \frac{2}{3}h$
A l'équilibre, les 2/3 de la hauteur du cylindre est immergée.

b) Equation différentielle du mouvement :

On définit l'origine du repère par rapport au centre de gravité du flotteur lorsque celui-ci est à la position d'équilibre. L'origine se trouve donc à $-\frac{h}{6}$ par rapport à la surface de l'eau.
En notant $\vec{F}_f$ la force de frottement :
$\vec{P}_A + \vec{P} + \vec{F}_f = m\vec{a}$
On projette sur l'axe *z* :

$$\rho_{eau} V_{immergé}\, g - \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre}\, g - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre}\ddot{z}$$

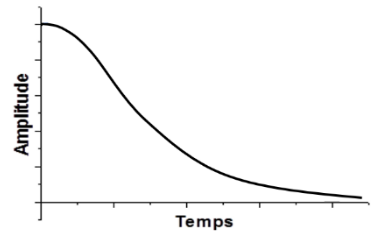
$$\Rightarrow \rho_{eau}\pi r^2\left(\frac{2}{3}h - z\right) g - \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 h\, g - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 h\,\ddot{z}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 h\,\ddot{z} + k\eta\dot{z} + \rho_{eau}\pi r^2 g z = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{3k\eta}{2\rho_{eau}\pi r^2 h}\dot{z} + \frac{3g}{2h}z = 0$$

On reconnait la forme de l'équation différentielle du mouvement pour un oscillateur amorti :

$\ddot{z} + 2\lambda\,\dot{z} + \omega_0^2\, z = 0$ , avec $\lambda = \frac{3k\eta}{4\rho_{eau}\pi r^2 h}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2h}}$

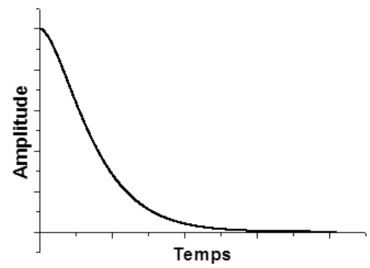
c) Voici l'allure qu'ont les solutions pour les différents régimes possibles :




**Si $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{\omega_0}$** : régime d'amortissement fort, le type de mouvement est apériodique. On a :

$z(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$ avec $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

Pour ce type de mouvement on a $z$ qui part de sa position initiale et qui atteint 0 au bout d'un temps long, sans oscillation.




**Si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega_0}$** : Il s'agit du régime d'amortissement critique. On a :
$z(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$
Le cas critique est un mouvement qui ne présente pas d'oscillations et qui tend le plus rapidement possible vers $z = 0$.

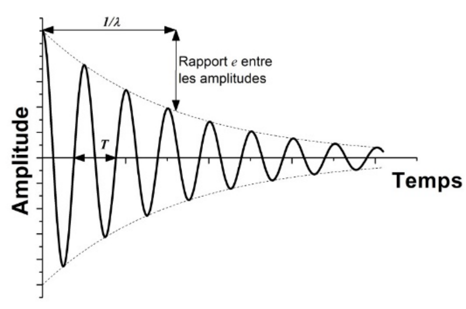
**Si $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\omega_0}$** : Il s'agit du régime d'amortissement faible. Le mouvement est périodique avec une amplitude décroissante.

$$z(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

La fonction est le produit entre une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde. L'allure de la courbe sera donc une sinusoïde dont l'amplitude varie comme une exponentielle décroissante :

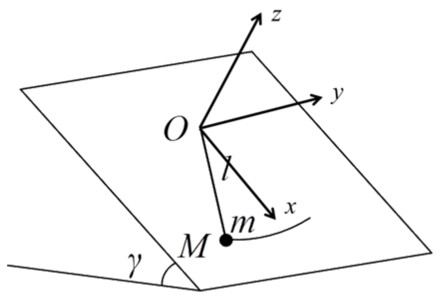
La sinusoïde a une pulsation $\omega$, soit une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Remarque : la fonction $z(t)$ n'étant pas parfaitement périodique du fait de l'exponentielle décroissante, on appelle $T$ pseudo-période.

Dans l'énoncé, il est précisé que le flotteur oscille avant de retrouver sa position d'équilibre : on est donc dans le régime d'amortissement faible. L'amplitude de l'oscillation du flotteur en fonction du temps est celle représentée ci-dessous.



**Exercice S9.1 : Pendule sur plan incliné**

1. On choisit le système de coordonnées cylindriques associé au repère $\{x, y, z\}$ tel qu'il est défini sur la figure ci-dessous.




Les forces agissant sur la masse $m$ sont :

- Le poids : $\mathbf{P} = mg(\sin\gamma\mathbf{e_x} - \cos\gamma\mathbf{e_z}) = mg\left(\sin\gamma\left(\cos\theta\mathbf{e_\rho} - \sin\theta\mathbf{e_\theta}\right) - \cos\gamma\mathbf{e_z}\right)$
- La réaction du support : $\mathbf{R} = R\mathbf{e_z}$
- La tension de la corde : $\mathbf{T} = -T\mathbf{e_\rho}$

Le formulaire nous donne l'accélération en coordonnées cylindriques, qui devient lorsque le rayon est constant (ici égal à la longueur $l$) :

$\mathbf{a} = -l\dot{\theta}^2\mathbf{e_\rho} + l\ddot{\theta}\mathbf{e_\theta} + \ddot{z}\mathbf{e_z}$

Pour trouver l'équation du mouvement, on applique la seconde loi de Newton :

$$m\mathbf{a} = \sum\mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\sin\gamma\cos\theta - T \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\gamma\sin\theta \\ m\ddot{z} = 0 = R - mg\cos\gamma \end{cases}$$

L'équation du mouvement se déduit de la projection selon $\mathbf{e_\theta}$ :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g\sin\gamma}{l}\sin\theta = 0}$$

2. Il faut maintenant rajouter la force de frottement : $\mathbf{F_f} = -\alpha\mathbf{v}$

Le formulaire nous donne la formule de la vitesse encoordonnées cylindriques :

$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\mathbf{e_\theta} = l\dot{\theta}\mathbf{e_\theta}$ car le rayon est constant.

En appliquant la deuxième loi de Newton puis en la projetant sur le le vecteur $\mathbf{e_\theta}$, on obtient :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\gamma\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$$

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g\sin\gamma}{l}\sin\theta = 0}$$

3. Dans l'approximation des petites oscillations, l'équation devient : $\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{g\sin\gamma}{l}\theta=0$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur amorti libre de type :

$\ddot{\theta}+2\lambda\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$, avec $\lambda=\frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0=\sqrt{\frac{g\sin\gamma}{l}}$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Comme vu dans le cours, on pose le polynôme caractéristique associé : $x^2+2\lambda x+\omega_0^2=0$

Pour calculer les racines de ce polynome on calcule le déterminant :

$\Delta=4\left(\lambda^2-\omega_0^2\right)$

Selon le signe du déterminant on distingue trois cas :

- ❑ **Δ > 0 (λ > ω₀)→ le polynôme a deux racines réelles distinctes :** $x_\pm=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent :

$\theta(t)=Be^{x_-t}+Ae^{x_+t}=e^{-\lambda t}\left(Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}\right)$, avec $\omega=\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

*A* et *B* se determinent en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases}\theta(0)=A+B=\theta_0\\ \dot{\theta}(0)=-\lambda\left(A+B\right)+\omega\left(A-B\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=\theta_0\\ A-B=\frac{\lambda\theta_0}{\omega}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{\theta_0\left(\omega+\lambda\right)}{2\omega}\\ B=\frac{\theta_0\left(\omega-\lambda\right)}{2\omega}\end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\theta(t)=e^{-\lambda t}\theta_0\left(\frac{\omega+\lambda}{2\omega}e^{\omega t}+\frac{\omega-\lambda}{2\omega}e^{-\omega t}\right)}$$

<u>Cette solution correspond au régime d'amortissement fort</u>.

- ❑ **Δ = 0 (λ = ω₀)→ le polynôme a une racine réelle double :** $x=-\lambda$

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent alors : $\theta(t)=e^{-\lambda t}(A+Bt)$

Où *A* et *B* sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales :

$$\begin{cases}\theta(0)=A=\theta_0\\ \dot{\theta}(0)=-\lambda A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\theta_0\\ B=\lambda\theta_0\end{cases}$$

On obtient la solution :

$$\boxed{\theta(t)=e^{-\lambda t}\theta_0(1+\lambda t)}$$

<u>Cette solution correspond au régime critique.</u>

- **$\Delta < 0$ ($\lambda < \omega_0$)→ le polynôme a deux racines complexes conjuguées :**

$x_{\pm} = -\lambda \pm i\sqrt{w_0{}^2 - \lambda^2}$

Les solutions de l'equation diférentielle s'écrivent :

$\theta(t) = \alpha e^{ix_+t} + \beta e^{ix\_t} = e^{-\lambda t}\left(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right)$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Cette solution peut également s'écrire sous la forme : $\theta(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

On détermine les constantes $A$ et $B$ en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = A = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = -\lambda A + \omega B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \theta_0 \\ B = \dfrac{\lambda \theta_0}{\omega} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$\boxed{\theta(t) = e^{-\lambda t}\theta_0(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin \omega t)}$$

Cette solution correspond au régime d'amortissement faible.

**Exercice S9.2 : Phénomène de collé-glissé**

1. Vu qu'à l'instant initial la masse se trouve à la position $l_o$, on y place l'origine de notre repère (cf. schéma). On fait le bilan des forces :

- la force du ressort $\vec{F_r} = -kx\vec{e}_x$
- la force de frottement sec correspond à la force de frottement sec statique $\overrightarrow{F_f} = F_f\overrightarrow{e_x}$ tel que $\|\overrightarrow{F_f}\| \leq \alpha_S\|\vec{N}\|$
- la pesanteur $\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$
- la force normale $\vec{N} = N\overrightarrow{e_y}$

Il n'y a pas de mouvement selon $\overrightarrow{e_y}$donc on a équilibre des forces selon cet axe : $\vec{N} = -\vec{P} = mg\overrightarrow{e_y}$

La force de frottement devient donc : $F_f \leq \alpha_S mg$

Posons donc la seconde loi de Newton selon l'axe *x* :

$-kx(t) + F_f = m\ddot{x}(t)$=0 car la masse est entraînée par le tapis à vitesse constante.

La force de frottement sec statique va augmenter au cours du temps jusqu'au moment du décrochage ($t = t_d$). Alors on a :

$$\overrightarrow{F_f} = \alpha_S mg\overrightarrow{e_x}$$

Au décrochage, la seconde loi de Newton selon l'axe *x* s'écrit donc : $-kx(t_d) + \alpha_S mg = 0$

Ainsi la distance parcourue au moment du décrochage est :

$$d = x(t_d) = \frac{\alpha_S mg}{k}$$

Comme le tapis entraîne la masse $m$ à une vitesse constante $v_o$ on a $d = v_0 t_d = \frac{\alpha_S mg}{k}$, donc le temps de décrochage :

$$t_d = \frac{\alpha_S mg}{kv_0}$$

2. Après le décrochage du tapis le bilan des forces reste le même à part que la masse subit maintenant un frottement dynamique sec qui s'écrit $\overrightarrow{F_f} = \alpha_d N\overrightarrow{e_x} = \alpha_d mg\overrightarrow{e_x}$. Donc l'équation de mouvement devient :

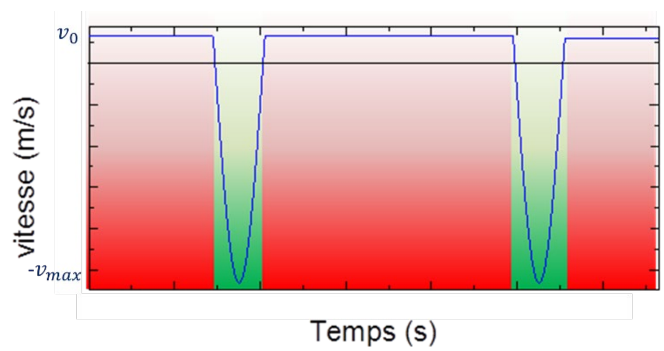
$$-kx + \alpha_d mg = m\ddot{x} \text{ ou bien } \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \alpha_d g = 0$$

3. La masse va continuer de glisser et suivre un mouvement sinusoïdal selon l'équation trouvée précédemment, tant qu'elle aura une vitesse différente du tapis roulant. Lorsque la vitesse devient égale à $v_0$, alors la masse va s'accrocher de nouveau et on repasse dans les conditions de frottement sec statique.

Le mouvement de la masse se compose de deux phases qui se répètent tour à tour :

Première phase : La masse est entrainée par le tapis.

Deuxième phase : La masse s'est décrochée du tapis et suit un mouvement sinusoïdal jusqu'à l'instant $t'$ pour lequel $(t') = v_0$ , c'est-à-dire pour lequel la masse $m$ est de nouveau immobile par rapport au tapis. À ce moment-là, la force de frottement statique intervient de nouveau. Et le tapis entraîne de nouveau la masse à vitesse constante $v_0$.




**Remarque** : la norme de la vitesse maximale (négative) est supérieure à $v_0$. En effet, la conservation de l'énergie mécanique entre le décrochage et le raccrochage nous donne:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Leftrightarrow v_{max}^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}d^2 > v_0^2$$