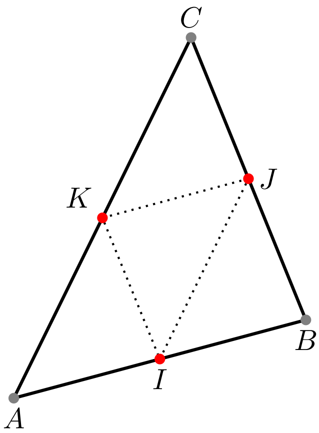
Série 6

Exercice 1. On munit l'espace d'un repère. Calculer les coordonnées des points A, B, C sachant que les milieux de AB, BC, AC ont pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 1, -1)$, $(1, 0, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, 2, -6)$.

Solution: Notons I, J, K les milieux respectifs des segments AB, BC et AC. Figure d'étude :



D'après le théorème de Thalès, on a :

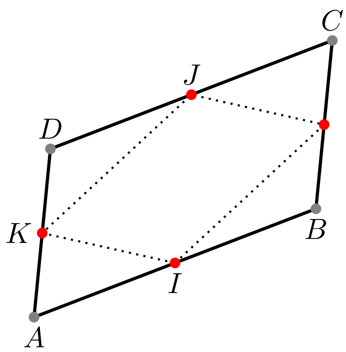
$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{JK}, \quad \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{KJ} \text{ et } \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IK}.$$

Comme les coordonnées de I, J, K sont connues, on en déduit les coordonnées de A, B et C :

$$A\,(-1, 3, -7), \quad B\,(2, -1, 5) \text{ et } C\,(0, 1, -5).$$

Exercice 2. On munit l'espace d'un repère. Calculer les coordonnées des sommets du parallélogramme $ABCD$ sachant que les milieux de AB, CD et AD ont pour coordonnées $(0, 2, \frac{9}{2})$, $(0, -7, \frac{3}{2})$, $(-4, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

Solution: Notons I, J, K les milieux respectifs des segments AB, CD et AD. Figure d'étude :



Sur le dessin, on a l'impression que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont égaux. Montrons cela rigoureusement :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}.$$

Or $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, d'où l'on en déduit bien le résultat voulu. Le point K étant le milieu de AD, on obtient alors :

$$\overrightarrow{KA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}.$$

Connaissant les coordonnées de I, J, K, on déduit alors les coordonnées de A et D :

$$A\,(-4, 1, 3) \text{ et } D\,(-4, -8, 0)$$

On utilise ensuite les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

On en déduit les coordonnées de B et C. On trouve :

$$B\,(4, 3, 6) \text{ et } C\,(4, -6, 3).$$

Exercice 3. On donne un parallélépipède $ABCDEFGH$ dans l'espace (les quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$ sont des parallélogrammes translatés l'un de l'autre). On note I le milieu de EG. En justifiant votre réponse, donner les coordonnées de I dans chacun des repères suivants :

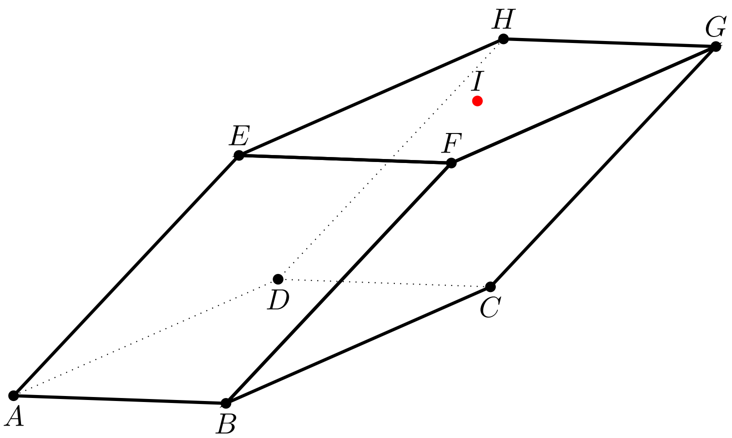
a. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.

c. $(A, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC})$.

d. $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH})$.

Solution: Figure d'étude :



a. Comme I est le milieu de EG, on a :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}.$$

Par ailleurs, les quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$ étant translatés l'un de l'autre, on a :

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

On obtient donc finalement :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},$$

si bien que les coordonnées de I dans le repère proposé sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

b. Au a., on a montré les égalités :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \text{ et } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}.$$

on en déduit directement :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE},$$

si bien que les coordonnées de I dans le repère proposé sont $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

c. Au b., on a montré l'égalité :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

On en déduit que les coordonnées de I dans le repère proposé sont $(0, 1, \frac{1}{2})$.

d. On a :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}.$$

Par conséquent, l'égalité montrée précédemment donne :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}.$$

On en déduit que les coordonnées de I dans le repère proposé sont $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$.

Exercice 4. On donne quatre points non coplanaires A, B, C, D. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}$, l'équation vectorielle de la droite d vue depuis le point A :

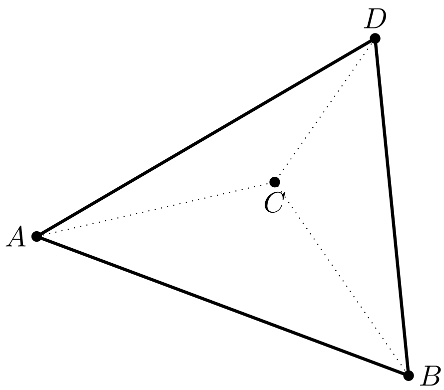
a. $d = (AD)$.

b. $d = (BC)$.

c. d passe par D et le milieu de BC.

d. d passe par C et le centre de gravité du triangle ABD.

Solution: Figure d'étude :



a. Comme la droite $d = (AD)$ passe par A et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AD}$, on obtient :

$$d : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD},\ t \in \mathbb{R}.$$

b. Comme la droite $d = (BC)$ passe par B et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, on obtient :

$$d : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),\ t \in \mathbb{R}.$$

c. Le milieu I de BC vérifie :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.$$

Comme la droite d passe par I et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{DI}$, on obtient :

$$d : \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + t(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Le centre de gravité G de ABD vérifie :

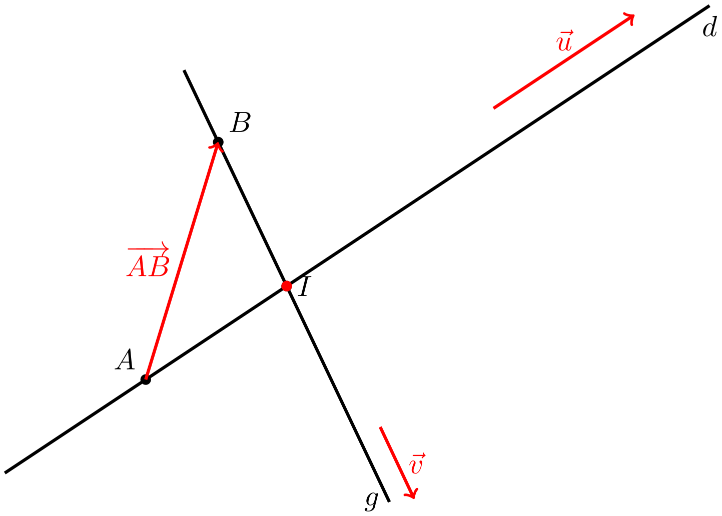
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \text{ et } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

Comme la droite d passe par G et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CG}$, on obtient :

$$d : \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + t(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Dans l'espace, on donne deux points A et B et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note d la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et g celle passant par B et dirigée par $\vec{v}$. Montrer que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ est linéairement dépendante si et seulement si les droites d et g ont un point commun.

Solution: Figure d'étude :



Supposons que les droites d et g possèdent un point commun I. Comme I est sur d, il existe un réel s tel que $\overrightarrow{AI} = s\vec{u}$. Par ailleurs, comme I est sur g, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{BI} = t\vec{v}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = s\vec{u} - t\vec{v},$$

ce qui montre que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si bien que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ est linéairement dépendante.

Réciproquement, supposons que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ est linéairement dépendante. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires par hypothèse, cela impose que $\overrightarrow{AB}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit, il existe des réels s et t tels que :

$$\overrightarrow{AB} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Considérons alors le point I de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AI} = s\vec{u} = \overrightarrow{AB} - t\vec{v}.$$

On a d'une part que I est sur d car les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et d'autre part que I est sur g car :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = -t\vec{v}.$$

On en déduit que I appartient à la fois à d et g.

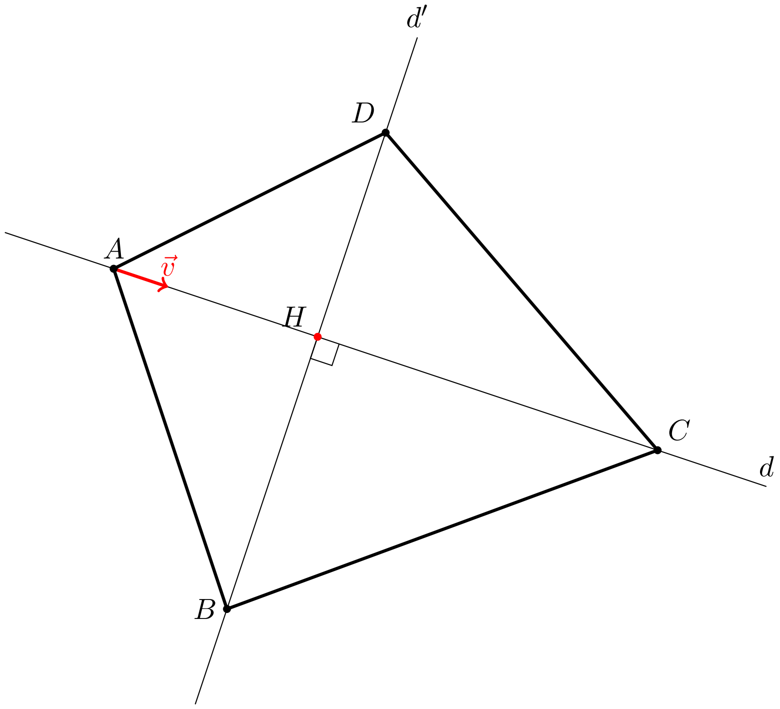
Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne deux points, $A(-12, 5)$, $B(-7, -10)$, ainsi qu'un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. Trouver les coordonnées des points C et D sachant que :

a. $ABCD$ est un quadrilatère convexe d'aire 280.

b. Les diagonales AC et BD sont perpendiculaires, et leur intersection a pour abscisse $\frac{4}{7}$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BD})$ de la droite (BD).

c. Le vecteur $\vec{v}$ dirige la droite (AC).

Solution: Figure d'étude :



On établit la marche à suivre suivante. Soit $d = (AC)$.

1. Déterminer les coordonnées de H, en cherchant l'intersection de d avec d', d' étant la droite perpendiculaire à d passant par B.
2. Déterminer les coordonnées de D, à l'aide de l'abscisse donnée, et de la connaissance de H.
3. Déterminer les coordonnées de C, en utilisant la condition sur l'aire totale (ainsi que les coordonnées de H et C).

On implémente la marche à suivre.

1. La droite d est dirigée par le vecteur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Elle a donc pour pente $-\frac{1}{3}$. Comme elle passe par A, onvoit qu'elle a pour équation cartésienne :

$$d : y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

Par ailleurs, la droite d' est perpendiculaire à d. Elle donc pour pente 3. Comme elle passe par B, on trouve qu'elle a pour équation cartésienne :

$$d' : y = 3x + 11.$$

On trouve alors que l'intersection de d et d', c'est-à-dire le point H, a pour coordonnées $(-3, 2)$.

2. On sait que H a pour pour abscisse $\frac{4}{7}$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BD})$. Cela signifie que $\overrightarrow{BH} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BD}$. Comme on connait les coordonnées de B et H on peut maintenant calculer celles de D. On trouve : $D\,(0, 11)$.

3. Le quadrilatère $ABCD$ a pour aire $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{BD}\|$. Connaissant les coordonnées de B et D et sachant que cette aire vaut 280, on trouve :

$$\|\overrightarrow{AC}\| = 8\sqrt{10}.$$

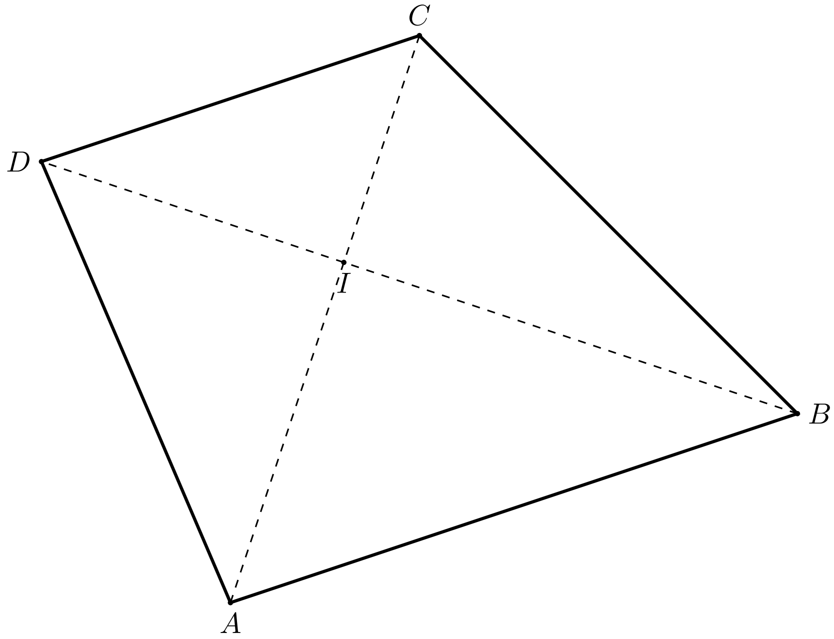
Par ailleurs, ce quadrilatère étant convexe, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction et même sens. Or $\overrightarrow{AH}\left(\begin{smallmatrix}9\\3\end{smallmatrix}\right)$, donc :

$$\|\overrightarrow{AH}\| = 3\sqrt{10}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{AC} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AH}$, puis que $C(12, -3)$.

Exercice 7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne le point $A(5, 1)$ et le vecteur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right)$. Déterminer les coordonnées des points B, C, D sachant que $ABCD$ est un trapèze dont la base AB est dirigée par $\vec{v}$, et dont les diagonales AC et BD se coupent perpendiculairement au point de coordonnées $(8, 10)$. On sait de plus que l'aire du triangle ABC est 100.

Solution: Figure d'étude :



La diagonale (AC) passe par les points $A(5, 1)$ et $I(8, 10)$. On trouve alors qu'elle a pour équation cartésienne :

$$y = 3x - 14.$$

Par ailleurs, la diagonale (BD) est perpendiculaire à (AC) et passe par I. Elle a donc pour équation cartésienne :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{38}{3}.$$

Le point B se trouve à l'intersection des droites :

$$(AB) : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (BD) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{38}{3}.$$

Le point B correspond donc à la valeur t du paramètre telle que :

$$1 + t = -\frac{1}{3}(5 + 3t) + \frac{38}{3}, \text{ ce qui donne } t = 5.$$

On en déduit que B a pour coordonnées $(20, 6)$. Connaissant les coordonnées de I et B, on obtient la distance qui sépare ces points :

$$\sqrt{(20 - 8)^2 + (6 - 10)^2} = 4\sqrt{10}.$$

Dans le triangle ABC d'aire 100, on en déduit que la base AC mesure :

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \frac{2 \cdot 100}{4\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens. En calculant la norme de $\overrightarrow{AI}$, on trouve $3\sqrt{10}$. On en déduit alors :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AI} \text{ et donc } \overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 15 \end{smallmatrix}\right).$$

On en déduit alors que C a pour coordonnées $(10, 16)$. Enfin, le point D se trouve à l'intersection des droites :

$$(CD) : \begin{cases} x = 10 + 3t \\ y = 16 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (BD) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{38}{3}.$$

Le point D correspond donc à la valeur t du paramètre telle que :

$$16 + t = -\frac{1}{3}(10 + 3t) + \frac{38}{3}, \text{ ce qui donne } t = -\frac{10}{3}.$$

On en déduit que D a pour coordonnées $(0, \frac{38}{3})$.