Analyse I – Corrigé de la Série 4

Echauffement 1.

i) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i\,(-1) = -i$

ii) $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i\,(0) = -1$

iii) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}\,\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$

Echauffement 2.

On va utiliser que pour $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|e^z| = \left(e^z\,\overline{e^z}\right)^{1/2} = \left(e^z\,e^{\bar z}\right)^{1/2} = \left(e^{z+\bar z}\right)^{1/2} = e^{\frac{z+\bar z}{2}} = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^a.$$

i) $|e^{i+1}| = e^1 = e$ *ii)* $\left|e^{-(i+1)}\right| = e^{-1} = \frac{1}{e}$ *iii)* $\left|e^{-(i-1)}\right| = e^1 = e$

iv) $\left|e^{(i-50)}\right| = e^{-50}$ *v)* $\left|e^{(1-50i)}\right| = e^1 = e$

Exercice 1.

Les résultats ci-après sont écrits sous la forme $z = a + i\,b$, et on a $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$.

i) $z = (2-3i)(3+2i) = 12 - 5i$ *ii)* $z = \dfrac{2-3i}{4-5i} = \dfrac{2-3i}{4-5i}\,\dfrac{4+5i}{4+5i} = \dfrac{23}{41} - i\dfrac{2}{41}$

iii) $z = \left(\dfrac{1}{i}\right)^{4567} = e^{i\frac{3\pi}{2}4567} = e^{i\frac{13701\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = 0 + i$

iv) On a que $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} z = (1+\sqrt{3}i)^{10} &= 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 2^{10}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} \\ &= 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2^{10}e^{i\frac{\pi}{3}} = -2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

et ainsi $\mathrm{Re}(z) = -2^9 = -512$ et $\mathrm{Im}(z) = -512\sqrt{3}$.

v) $z = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-i}{2} + \dfrac{1-2i}{5} + \dfrac{1-3i}{10} = \dfrac{4}{5} - i\,\dfrac{6}{5}$

vi) $z = \dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i} = \dfrac{(2-3i)(2-i)}{5} + \dfrac{(1-i)(1-3i)}{10} = 0 - 2i$

$$vii)\quad z = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{25} + \frac{20(4-3i)}{25} = 3-i$$

$$viii)\quad z = \frac{3i^{30}-i^{19}}{-1+2i} = \frac{3i^2-i^3}{-1+2i} = \frac{-3+i}{-1+2i} = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{5} = 1+i$$

$$ix)\quad z = \left(\frac{10-15i}{2+i}\right)\left(\frac{1+i}{1-3i}\right) = (1-8i)\left(-\frac{1}{5}+i\,\frac{2}{5}\right) = 3+2i$$

Exercice 2.

Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z = \rho\, e^{i\phi}$, et on a $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \phi$.

$$i)\quad z = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$ii)\quad z = -1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$iii)\quad z = -1 + i\,\mathrm{tg}(3) = -1 + i\,\frac{\sin(3)}{\cos(3)} = \frac{1}{|\cos(3)|}\big(\cos(3) - i\sin(3)\big) = \frac{1}{|\cos(3)|}\, e^{-3i}$$

$$iv)\quad z = \frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i} = \frac{8i-2i^3}{1-i} = \frac{8i+2i}{1-i} = \frac{10i}{1-i} = 10i\,\frac{1+i}{2} = 5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$v)\quad z = 2^i = e^{i\,\mathrm{Log}(2)}$$

Exercice 3.

i) On utilise que $1 = e^{i\,2\pi n}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = e^{i\frac{2\pi n}{5}}$ avec $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (voir Fig. 1a).

ii) En écrivant $z = a + i\,b$, l'équation donnée devient $a^2 - b^2 + 2ab\,i = -3 + 4i$. Puisque a et b sont réels, on doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

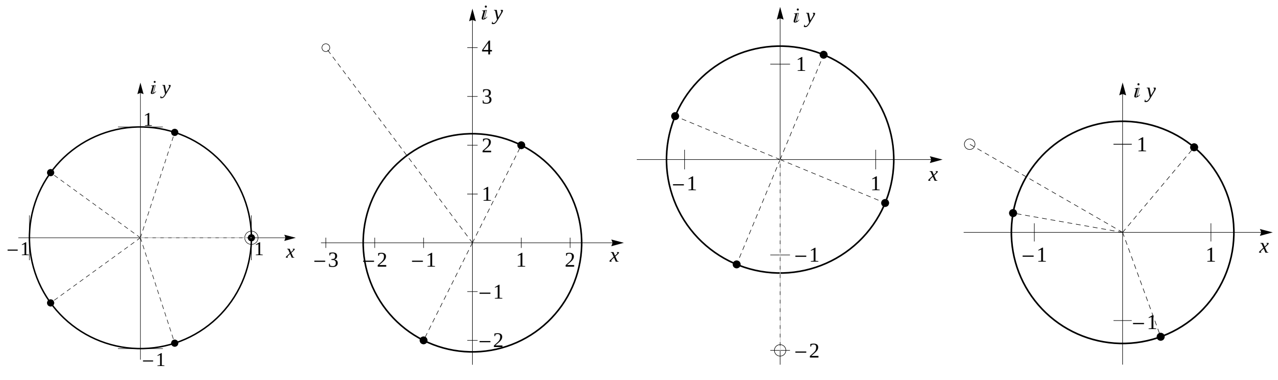
La deuxième équation implique que a et b sont non-nuls et donc $b = \frac{2}{a}$. En insérant ceci dans la première équation on obtient

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \quad\Leftrightarrow\quad a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Puisque $a \in \mathbb{R}$, seulement la première solution est possible; on a donc $a = \pm 1$ et $b = \pm 2$. Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$ (voir Fig. 1b).

iii) On utilise que $-i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right)}$ avec $n = 0, 1, 2, 3$ (voir Fig. 1c).

iv) On a que $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\, e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n\right)}$ avec $n = 0, 1, 2$ (voir Fig. 1d).



(a) (b) (c) (d)

Fig. 1

Exercice 4.

i) <u>*Méthode 1:*</u> On pose $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on met dans l'équation donnée :

$$(a + i\,b)^2 + 6(a + i\,b) + 12 - 4i = 0,$$

d'où le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6a + 12 = 0 \\ \qquad 2ab + 6b - 4 = 0\,. \end{cases}$$

De la première équation on obtient

$$a = -3 \pm \sqrt{b^2 - 3}\,,$$

et donc $|b| \geq \sqrt{3}$ car a doit être réel. On peut alors récrire la deuxième équation du système comme

$$a = \frac{2}{b} - 3$$

et on trouve

$$-3 \pm \sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b} - 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pm\sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b}\ ,$$

d'où

$$b^2 - 3 = \frac{4}{b^2}\ ,$$

ou encore

$$(b^2)^2 - 3b^2 - 4 = (b^2 - 4)(b^2 + 1) = 0.$$

On a alors $b = \pm 2$ car b doit être réel. Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$z_1 = -2 + 2i$$
$$z_2 = -4 - 2i.$$

<u>*Méthode 2:*</u> On utilise directement la formule pour l'équation quadratique vue au cours. Comme $a = 1$, $b = 6$ et $c = 12 - 4i$, on obtient

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48 + 16i}}{2} = -3 \pm \sqrt{-3 + 4i}\ . \tag{1}$$

On remarque que la radicande est la même qu'à l'Ex. 3*ii*) et donc la racine vaut $\pm(1 + 2i)$. Puisqu'il y a déjà les deux signes dans (1), il suffit de considérer une seule racine (laquelle n'importe pas). Les solutions (1) sont alors

$$z_1 = -3 + (1 + 2i) = -2 + 2i\,,$$
$$z_2 = -3 - (1 + 2i) = -4 - 2i\,.$$

$ii)$ L'équation donnée est équivalente à

$$(z^3-1)^2=-1\,.$$

Puisque $-1=e^{i\pi}$, il suit que $z^3-1=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}$ avec $n=0,\,1,$ d'où

$$z^3=1\pm i=\sqrt{2}\,e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\ .$$

Il faut alors résoudre les équations $z^3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z^3=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ en utilisant la même technique qu'aux Ex. $3i, iii, iv)$. Les solutions sont

$$\begin{aligned}
&z_1=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\,, && z_2=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, && z_3=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\,,\\
&z_4=\sqrt[6]{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{23\pi}{12}}\,, && z_5=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\,, && z_6=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Comme $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, on a

$$1+\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}=1+i\sqrt{3}\,,$$

qu'on récrit sous forme polaire :

$$1+i\sqrt{3}=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Ainsi l'équation devient

$$z^2=\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8=2^8\,e^{i\frac{8\pi}{3}}=2^8\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\ .$$

Afin de résoudre cette équation, on écrit

$$z^2=2^8\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)},\qquad \text{avec } n=0,\,1\,,$$

car une équation polynomiale du deuxième degré a deux solutions. Ces solutions sont donc

$$\begin{aligned}
z_1&=2^4\,e^{i\frac{\pi}{3}}=16\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8+i\,8\sqrt{3}\,,\\
z_2&=2^4\,e^{i\frac{4\pi}{3}}=16\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8-i\,8\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Les quantités recherchées sont alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(z_1)=8, && \mathrm{Im}(z_1)=8\sqrt{3}, && |z_1|=16, && \arg(z_1)=\tfrac{\pi}{3}\,,\\
&\mathrm{Re}(z_2)=-8, && \mathrm{Im}(z_2)=-8\sqrt{3}, && |z_2|=16, && \arg(z_2)=\tfrac{4\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

Pour la décomposition en facteurs irréductibles complexes il faut utiliser que $-1=e^{i(\pi+2\pi n)}$ pour $n=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5$. Les racines complexes sont donc

$$z_{n+1}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n\right)},\qquad \text{avec } n=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\,,$$

ce qui donne

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\ , \qquad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = i\,, \qquad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\ ,$$

$$z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\ , \qquad z_5 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -i\,, \qquad z_6 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\ .$$

Ainsi

$$z^6 + 1 = \left(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\right)\left(z - i\right)\left(z + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\right)\left(z + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right)\left(z + i\right)\left(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right).$$

Puisque l'équation est à coefficients réels, ses racines complexes sont deux à deux complexes conjuguées: $z_1 = \overline{z_6}$, $z_2 = \overline{z_5}$ et $z_3 = \overline{z_4}$. Pour tout nombre complexe c on a

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\,\bar{c} = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(c)z + |c|^2\ ,$$

d'où on obtient

$$z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)\ .$$

Exercice 7.

Pour caractériser l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0,\ z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\}$, on pose $z = \rho\, e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$. La condition devient alors

$$\rho\, e^{i\phi} + \frac{1}{\rho}\, e^{-i\phi} \in \mathbb{R}\,,$$

ou

$$\mathrm{Im}\left(\rho\, e^{i\phi} + \frac{1}{\rho}\, e^{-i\phi}\right) = \rho \sin(\phi) - \frac{1}{\rho}\sin(\phi) = 0\,.$$

Cette condition est satisfaite pour $\phi = 0$, $\phi = \pi$, ou $\rho = 1$ et ϕ arbitraire, donc pour les nombres de forme $z = \rho$, $z = -\rho$ et les nombres complexes de module égale à 1. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0, \text{ ou } |z| = 1\}$ contient non seulement les nombres complexes z de module 1, mais aussi les nombres réels non-nuls qui correspondent aux nombres de la forme $z = \rho$ et $z = -\rho$ avec $\rho > 0$.

Exercice 8.

Q1 : VRAI.
Noter que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Comme $i^6 + 3i^4 + i^2 - 1 = -1 + 3 - 1 - 1 = 0$, $z - i$ divise le polynôme donné. Puisque ce dernier est à coefficients réels, il suit que $\bar{i} = -i$ en est aussi une racine et donc $z + i$ le divise aussi. Ainsi on conclut que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ divise ce polynôme donné.
Sinon, on peut aussi faire une division polynomiale pour obtenir que $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 2z^2 - 1)$.

Q2 : VRAI.
Comme $z_1, \ldots, z_n$ sont racines du polynôme, on a

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

En comparant les termes de degré zéro des deux côtés de l'expression, on trouve la formule de l'énoncé.

Q3 : FAUX.
On calcule la puissance en utilisant la forme polaire

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\Big(\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right)\Big).$$

Ce nombre est purement imaginaire si et seulement si $\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; n\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; n = \frac{3}{2} + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, cette condition ne peut être satisfaite pour k entier.

Q4 : VRAI.
En utilisant de nouveau la forme polaire on obtient

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\Big(\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right)\Big).$$

Ce nombre est réel si et seulement si $\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; n\frac{\pi}{3} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi on peut par exemple prendre $n = 3$.

Exercice 9.

☐ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\right\}$

☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\right\}$

■ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)\right\}$

☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\right\}$