Série 19

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x \cdot e^{2x}$,

b) $b(x) = \ln(x)$,

c) $c(x) = \arctan(x)$,

d) $d(x) = e^{ax} \cos(bx)$.

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

b) $b(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{2^{u(x)}}{u(x)}$ où $u(x) = \sqrt{x}$,

b) $b(x) = \sin(\sqrt{x}\,)$,

c) $c(x) = x^3 \cdot \sin(x^2)$.

4. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$,

b) $b(x) = x^2\,(1-x^2)^{-3/2}$,

c) $c(x) = \sqrt{4x-x^2}$,

d) $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}$,

e) $e(x) = \dfrac{x \cdot \arccos^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Déterminer, sur son domaine de définition, l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \; .$$

6. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}} \, , \qquad x \in \left] -\tfrac{\pi}{2} \, , \, \tfrac{\pi}{2} \right[\, .$$

Réponses de la série 19

1. a) $\displaystyle\int a(x)\ dx = \frac{1}{4}\,(2x-1)\cdot e^{2x} + C$

b) $\displaystyle\int b(x)\ dx = x\cdot[\,\ln(x)-1\,]+C$

c) $\displaystyle\int c(x)\ dx = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ \ln(1+x^2)+C$

d) $\displaystyle\int d(x)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ [\,a\ \cos(bx) + b\ \sin(bx)\,]+C$

2. a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx \ = \ \sqrt{x^2+1}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\ dx \ = \ \frac{\sqrt{x^2+1}}{3}\cdot\left[x^2-2\right]+C$

3. a) $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx \ = \ \frac{2^{(1+\sqrt{x})}}{\ln 2}+C$

b) $\displaystyle\int \sin\left(\sqrt{x}\,\right)\ dx \ = \ 2\ \left[\sin\left(\sqrt{x}\,\right) - \sqrt{x}\cdot\cos\left(\sqrt{x}\,\right)\right]+C$

c) $\displaystyle\int x^3\cdot\sin(x^2)\ dx \ = \ \frac{1}{2}\ \left[-x^2\ \cos(x^2)+\sin(x^2)\ \right]+C$

4. a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\ dx \ = \ -\frac{1}{x}\ \sqrt{1+x^2}+C$

b) $\displaystyle\int x^2\cdot\left(1-x^2\right)^{-3/2}\ dx \ = \ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin(x)+C$

c) $\displaystyle\int \sqrt{4x-x^2}\ dx \ = \ \frac{x-2}{2}\cdot\sqrt{4x-x^2}+2\ \arcsin(\,\tfrac{x-2}{2}\,)+C$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\ dx \ = \ \begin{cases} -\operatorname{arg\,cosh}\left(-\frac{x+3}{2}\right)+C & \text{si } \ x<-5 \\ \ \ \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{x+3}{2}\right)+C & \text{si } \ x>-1 \end{cases}$

e) $\displaystyle\int \frac{x\cdot\arccos^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \ = \ 2\sqrt{1-x^2} - 2x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}\cdot\arccos^2(x)+C$

5. $$\int \frac{x\,\ln(x)}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx \quad = \quad -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan\sqrt{x^2-1} + C\ .$$

6. $$\int \frac{x \cdot \cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\,dx \quad = \quad x \cdot \sqrt{1+\sin x} + 2\,\sqrt{1-\sin x} + C\ .$$