Série 2

1. On considère l'équation : $(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1 = 0\,.$

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant la relation : $-6 < x_1 < 4 < x_2$?

2. On considère le trinôme $P(x) \;=\; (m-1)\,x^2 - 4m\,x - 2\,(m+2)\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$

Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit une parabole vérifiant simultanément les conditions suivantes :

i) le sommet de la parabole est situé dans le demi-plan défini par $x > -5\,,$

ii) la parabole coupe l'axe Ox en deux points distincts, déterminant un segment ne contenant pas le point $M\,(2\,;\,0)\,.$

3. On donne le trinôme $P(x) = (m-2)\,x^2 - 4mx + 5m - 1\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$

a) Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5\,.$

b) Déterminer l'équation de la parabole définie par $y = P(x)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) la parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5\,,$

ii) $P(x)$ admet un minimum.

Calculer alors la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimum.

4. On considère l'équation : $x^2 + (m-2)\,x - (m+3) = 0\,.$

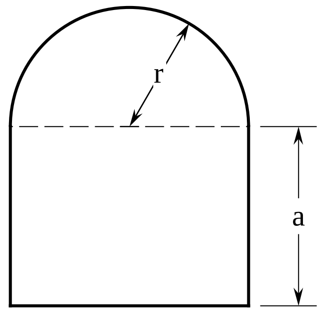
Déterminer m pour que la somme des carrés des racines soit égale à 9.

Indication : utiliser les formules de Viète pour exprimer la somme des carrés des racines.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel $m\,.$

$$\left|\, x^2 - x\,(m+3) + m \,\right| \;=\; -x^2 - x\,.$$

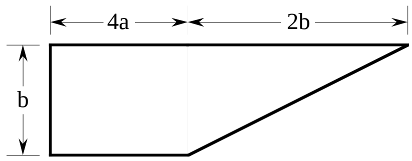
6. Un domaine $\mathcal{D}$, formé d'une surface rectangulaire de hauteur a surmonté d'un demi-disque de rayon r (a et r variables), a pour périmètre une valeur donnée L.



a) Représenter graphiquement la variation de l'aire A du domaine $\mathcal{D}$ en fonction du rayon r.

b) Calculer l'aire maximale de $\mathcal{D}$.
Quelle est alors la relation entre a et r ?

7. On considère un domaine D du plan formé d'un rectangle et d'un triangle rectangle dont les dimensions sont données par les variables a et b vérifiant les deux conditions suivantes :



$$a + b = k \quad \text{où } k \text{ est une constante strictement positive,} \quad \text{et} \quad 4a \geq b\,.$$

a) Déterminer k pour que l'aire maximale de D soit égale à 48 unités d'aire.

b) On pose $k = 15$.

i) Représenter graphiquement la variation de l'aire A du domaine en fonction de la variable choisie (a ou b). Axe des abscisses : 1 unité = 1 carré, axe des ordonnées : 30 unités = 1 carré.

ii) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable (a ou b) pour que l'aire A du domaine vérifie la relation $|A - 261| \leq 36$.

Réponses de la série 2

1. $m \in \,]\,1\,,\,\frac{5}{2}\,[\,.$

2. $m \in \,]-\frac{4}{3}\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{5}{7}\,[\,.$

3. a) $m \in \,]-\infty\,,\,1\,[\,.$

b) $y = x^2 - 12x + 14; \quad x_{\min} = 6\,.$

4. $m = 1\,.$

5.
- si $m \in \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty\,[$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$,
- si $m \in [-2\,,\,0]$ alors $\mathcal{S} = \{\frac{m}{2}\,,\,\frac{m}{m+4}\}$.

6. Aire maximale : $A_m = \dfrac{L^2}{2\,(\pi + 4)}\,.$ L'aire du domaine est maximale lorsque $a = r$.

7. a) $k = 6\,.$ b) $a \in [\,3\,,\,4\,] \cup [\,6\,,\,10\,]\,, \quad b \in [\,5\,,\,9\,] \cup [\,11\,,\,12\,]\,.$
