Exercice 1* : Frottement sec et Energie

Si le carton a parcouru une distance L avant de s'arrêter, le travail de la force de frottement vaut :

$$W_f = \int_0^L \vec{F_s}.d\vec{l} = -\mu_d MgL$$

Au départ, le carton a une énergie cinétique $E_{c_{ini}} = \frac{1}{2}M{v_0}^2$ et à la fin le carton est arrêté donc $E_{c_{fin}} = 0$.

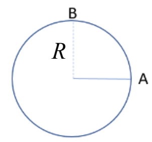
D'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique est égale au travail de la force de frottement :

$$\underbrace{E_{c_{fin}}}_{=0} + \underbrace{E_{p_{fin}}}_{=0} - (E_{c_{ini}} + \underbrace{E_{p_{ini}}}_{=0}) = W_f = -E_{c_{ini}} \quad \text{(On pose l'énergie potentielle à 0 sur le sol)}$$

$$-\mu_d MgL = -\frac{1}{2}M{v_0}^2$$

On trouve : $\mu_d = \frac{{v_0}^2}{2gL}$

Exercice 2* : Masse et fil



a) Si le fil est rigide : la masse fait un tour complet si sa vitesse est tout juste supérieure à 0 au point haut (B).

Posons la conservation de l'énergie mécanique pour que la vitesse en haut soit nulle :

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgR$$

et donc $v_0 = \sqrt{2gR}$.

La vitesse v_0 doit donc être supérieure à cette valeur pour faire un tour complet.

b)

Si le fil est souple : il faut que la tension du fil soit tout juste nulle.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\underbrace{\vec{T}}_{\vec{0}} + m\vec{g} = ma_n\vec{n}$$
$$mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

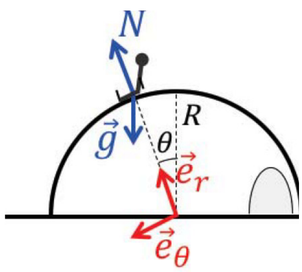
et donc $v_B = \sqrt{gR}$.

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR$$

soit $v_0^2 = v_B^2 + 2gR = gR + 2gR = 3gR$.
On en tire : $v_0 = \sqrt{3gR}$

Exercice 3 : L'igloo**

a) L'esquimau est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la force de réaction du toit $\vec{N}$



$\vec{N}$ est colinéaire au vecteur radial $\vec{e}_r$, $\vec{N} = N\vec{e}_r$. La condition pour que l'esquimau décolle est $N = 0$. Il nous faut calculer N.

La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ est :

$$ma_c = N - mg\cos\theta$$

a_c étant l'accélération centripète. Pour un mouvement circulaire, a_c est donné par (en projection sur $\vec{e}_r$) :

$$a_c = -\frac{v^2}{R} = -R\dot{\theta}^2$$

(On peut le retrouver à partir du formulaire)
La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ s'écrit donc :

$$-mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$$

Utilisons la conservation énergie mécanique pour expliciter le terme $mR\dot{\theta}^2$:

$$0 + mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$
$$\Rightarrow mR\dot{\theta}^2 = 2mg(1-\cos\theta)$$

Au final, N s'exprime donc :

$$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$$

La condition pour que l'esquimau décolle est $N = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

$$\theta_d = \arccos\frac{2}{3}$$

b) La norme de la vitesse lorsqu'il décolle est donnée par la conservation de l'énergie mécanique :

$$mgR = mgR\cos\theta_d + \frac{1}{2}m{v_d}^2 \Rightarrow {v_d}^2 = 2Rg(1-\cos\theta_d) = 2Rg(1-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}Rg \Rightarrow ||v_d|| = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

Ses composantes horizontales v_{dx} et verticales v_{dy} sont :

$$v_{dx} = \cos\theta_d ||v_d|| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$
$$v_{dy} = \sin\theta_d ||v_d|| = \sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}\sqrt{\frac{2Rg}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

c) L'esquimau n'est plus soumis qu'à son poids après avoir décollé. Son mouvement est uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$) et sa trajectoire est parabolique.

d) Tout le mouvement se faisant sans frottement (glissade et trajet parabolique), on peut directement poser la conservation de l'énergie mécanique entre le haut de l'igloo et le point de chute :

$$mgR = \frac{1}{2}mv_a{}^2 \Rightarrow ||v_a|| = \sqrt{2Rg}$$

Exercice 4*(- c) : La relève est là…**

a) Dans un choc élastique l'énergie cinétique ET la quantité de mouvement sont conservées.

Soit $\overrightarrow{v'_0}$ la vitesse de la bille A après le choc.

Conservation de la quantité de mouvement, puis projection sur Ox :

$$m\overrightarrow{v_0} + M\vec{0} = m\overrightarrow{v'_0} + M\overrightarrow{v_b}$$

$mv_0 = mv'_0 + Mv_b$ (après avoir projeté la quantité de mouvement sur un axe horizontal)

Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}M0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_0 + \frac{1}{2}Mv_b^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_0 + \frac{1}{2}Mv_b^2$$

On doit résoudre:

$$\begin{cases} mv_0 = mv'_0 + Mv_b \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_0 + \frac{1}{2}Mv_b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_0 = \dfrac{mv_0 - Mv_b}{m} \\ mv_0^2 = m(\dfrac{mv_0 - Mv_b}{m})^2 + Mv_b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mv_0^2 = mv_0^2 - 2Mv_0v_b + \dfrac{(Mv_b)^2}{m} + Mv_b^2 \\ \dfrac{M^2 + Mm}{m}v_b^2 - 2Mv_0v_b = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} v_b = 0 \quad \text{Pas de choc} \\ v_b = \dfrac{2mv_0}{M+m} \end{cases}$$

On ne garde que la solution non nulle et donc le vecteur vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{v_b} = \frac{2mv_0}{M+m}\overrightarrow{e_x}$$

b) Pour trouver la hauteur h on utilise la conservation de l'énergie mécanique :

Juste après le choc, la bille a une énergie cinétique de $E_{cin,1} = \frac{1}{2}Mv_b^2$ avec v_b calculée au point (a) et une énergie potentielle de $E_{pot,1} = 0$. Donc $E_{tot,1} = E_{pot,1} + \frac{1}{2}Mv_b^2 = \frac{1}{2}Mv_b^2$.

A la hauteur h la bille a transformé toute son énergie cinétique en énergie potentielle :

$E_{cin,2} = 0$

$E_{pot,2} = Mgh$

$E_{tot,2} = E_{cin,2} + E_{pot,2} = Mgh$

Comme l'énergie mécanique est conservée (pas de frottements qui s'appliquent) :

$$E_{tot,1} = E_{tot,2}$$

$$\frac{1}{2}Mv_b^2 = Mgh$$

$$h = \frac{1}{2g}v_b^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{2mv_0}{M+m}\right)^2$$

On note que la valeur h trouvée ci-dessus peut être plus grande que $2l_0$ si la vitesse v_0 est assez grande, en contradiction avec le montage qui impose une hauteur maximale $\leq 2l_0$. h est en fait la hauteur maximale que peut atteindre la bille si son mouvement a une vitesse nulle à son apogée.

Dans le cas où $h > 2l_0$, la hauteur maximale atteinte est $2l_0$. La bille fait alors un tour complet et sa vitesse ne s'anulle pas à son apogée !

Résultat final du raisonnement :

- Si $h \leq 2l_0$, i.e $l_0 \geq \frac{1}{g}\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2$ alors $h_{Max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{2mv_0}{M+m}\right)^2$
- Si $h > 2l_0$, i.e $l_0 < \frac{1}{g}\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2$ alors $h_{Max} = 2l_0$

c) Si on reprend le cas général décrit en a) et que l'on introduit le fait que

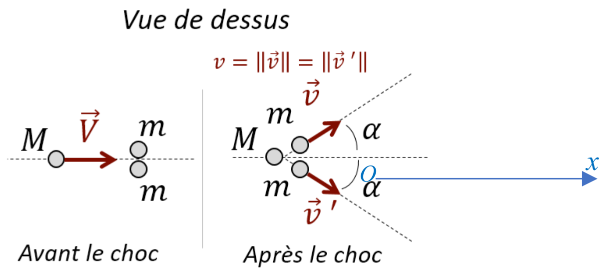
$$m = M$$

On remarque que $v_b = \frac{2Mv_0}{M+M} = v_0$ ce qui signifie que toute l'énergie cinétique de la bille A a été transmise à la bille B et donc que la bille A se retrouve arrêtée.

Pour que la bille A puisse atteindre le mur, il faut que la bille B vienne frapper à son tour la bille A après avoir effectué un tour complet. Pour satisfaire à cette condition, la bille B doit avoir une énergie suffisante pour atteindre la hauteur $2l_0$ tout ayant une vitesse non-nulle. Ceci se traduit par :

$$\frac{1}{2}Mv_b^2 > 2Mgl_0 \Rightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 > 2Mgl_0$$

Soit $v_0 > 2\sqrt{gl_0}$



Exercice 5 : Carreaux sur deux palets** (Examen 2017)

a) *Carreau sur deux palets*

La condition de conservation de la quantité s'écrit

$$M\vec{V} = m\vec{v} + m\vec{v}'$$

En projetant sur l'axe Ox : $MV = 2mv\cos(\alpha)$

- Choc élastique : conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}MV^2 = 2\frac{1}{2}mv^2$

On divise la deuxième égalité par la première : $\frac{V}{2} = \frac{v}{2\cos(\alpha)} \Longrightarrow v = \cos(\alpha)\,V$

On reporte ensuite v dans la première égalité : $MV = 2m(\cos(\alpha)\,V)\cos\alpha \Longrightarrow m = \frac{M}{2\cos^2(\alpha)}$

b) *Carreau sur deux palets superposés*

i. v'' se déduit de la conservation de la quantité de mouvement :

$$mV + 0 = 2mv'' \Longrightarrow v'' = \frac{V}{2}$$

ii. Le choc n'est pas élastique parce qu'il y a dissipation d'énergie par frottement lors du déplacement du palet supérieur sur l'inférieur. *Autre argument* L'énergie cinétique n'est pas conservée, voir le calcul de ΔE_c plus loin.

La Force de frottement est $F_f = \mu_d N = \mu_d mg$, opposée au déplacement.

L'énergie dissipée est $\Delta E = -W_f$, W_f étant le travail de F_f lors du déplacement d (travail de signe négatif) :

$$\Delta E = -W_f = dF_f = d\mu_d mg$$

iii. La variation d'énergie cinétique des deux palets superposés immédiatement après le choc est :

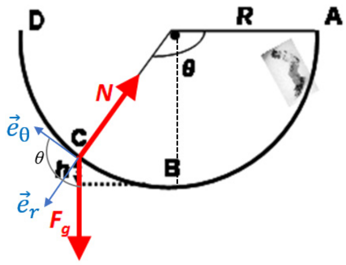
$$\Delta E_c = 2\frac{1}{2}mv''^2 - \frac{1}{2}mV^2 = m\frac{V^2}{4} - \frac{1}{2}mV^2 = -\frac{1}{4}mV^2$$

La conservation de l'énergie impose $\Delta E_c = W_f$

$$-\frac{1}{4}mV^2 = -d\mu_d mg \Longrightarrow \mu_d = \frac{V^2}{4dg}$$

Exercice S7.1 : Shaun White

a)



b) En coordonnées polaires :

$W_N^{AB} = \int_0^{\pi/2} -N\vec{e}_r \cdot Rd\theta\vec{e}_\theta = 0$ (reaction toujours perpendiculaire au chemin)

$$W_P^{AB} = \int_0^{\pi/2} (mg\,cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + mg\,sin(\theta)\,\vec{e}_r) \cdot Rd\theta\vec{e}_\theta = mgR$$

$$W_N^{AC} = \int_0^{\theta} -N\vec{e}_r \cdot Rd\theta'\vec{e}_\theta = 0$$

$$W_P^{AC} = \int_0^{\theta} (mg\,cos(\theta')\,\vec{e}_\theta + mg\,sin(\theta')\,\vec{e}_r) \cdot Rd\theta'\vec{e}_\theta = mgR\,sin(\theta) = mg(R-h)$$

c) L'absence de frottement assure la conservation de l'énergie mécanique, donc pour atteindre la même hauteur que celle de départ une vitesse initiale nulle lui suffira.

d) $\vec{N} = -N\vec{e}_r; \vec{P} = mg\,sin(\theta)\,\vec{e}_r + mg\,cos(\theta)\,\vec{e}_\theta$

En coordonnées polaires l'accélération vaut : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

Et donc :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &: m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -N + mg\,sin(\theta) \\ \vec{e}_\theta &: m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = mg\,cos(\theta)\end{aligned} \xrightarrow{\text{avec } r=R=cte} \begin{aligned}\vec{e}_r &: -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\,sin(\theta) \quad (1) \\ \vec{e}_\theta &: m\,R\ddot{\theta} = mg\,cos(\theta)\end{aligned}$$

e) $\vec{a}_r = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r \rightarrow \|\vec{a}_r\| = R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$

Conservation de l'énergie mécanique :

$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2g(R-h)}$ donc $\|\vec{a}_r\| = \frac{v_0^2+2g(R-h)}{R}$ avec $h = R\left(1 - cos\left(\theta - {}^{\pi}/_{2}\right)\right) = R(1 - sin(\theta))$

Soit

$$\|\vec{a}_r\| = \frac{v_0^2 + 2g\left(R - R(1 - sin(\theta))\right)}{R} = \frac{v_0^2}{R} + 2g\,sin(\theta)$$

f) $\vec{N} = -N\vec{e}_r = -(mR\dot{\theta}^2 + mg\,sin(\theta))\vec{e}_r$ d'après (1)

$$\vec{N} = \left[-m\left(\frac{v_0^2}{R} + 2g\,sin(\theta)\right) - mg\,sin(\theta)\right]\vec{e}_r = -\left[m\frac{v_0^2}{R} + 3mg\,sin(\theta)\right]\vec{e}_r$$

Exercice S7.2 : Etude du coefficient de viscosité

a) La seconde loi de Newton nous donne l'équation différentielle du mouvement de la balle dans le bloc:

$$ma = F_f \Longrightarrow m\ddot{x} = -K\eta\dot{x} \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{K\eta}{m}\dot{x} = 0$$

La solution de cette équation est, en prenant $t = 0$ quand la balle commence à pénétrer dans le bloc :

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

Puis on intègre pour connaître la position en fonction du temps :

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{K\eta}{m}\tau}\, d\tau = v_0\left[-\frac{m}{K\eta}e^{-\frac{K\eta}{m}\tau}\right]_0^t = v_0\frac{m}{K\eta}\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)$$

Notons t_s le temps lorsque la balle sort du bloc. D'après ce qui précède, t_s est donné par :

$$e = v_0\frac{m}{K\eta}\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t_s}\right) \Longrightarrow e^{-\frac{K\eta}{m}t_s} = 1 - \frac{K\eta}{mv_0}e$$

Et on reporte cette égalité dans l'expression de la vitesse en fonction du temps :

$$v_S = \dot{x}(t = t_s) = v_0 e^{-\frac{K\eta}{m}t_s} = v_0\left(1 - \frac{K\eta}{mv_0}e\right) = v_0 - \frac{K\eta}{m}e$$

b) La vitesse v_M du chariot se trouve en posant la conservation de la quantité de mouvement du système balle + chariot :

$$mv_0 = mv_S + Mv_M \Longrightarrow v_M = \frac{m}{M}(v_0 - v_S)$$

c) En reportant l'expression de v_S trouvée en a) dans celle de v_M trouvée en b) :

$$v_M = \frac{m}{M}(v_0 - v_S) = \frac{m}{M}\left(v_0 - v_0 + \frac{K\eta}{m}e\right) = \frac{K\eta}{M}e$$

D'où l'expression de η recherchée :

$$\eta = \frac{Mv_M}{Ke}$$