Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 5**

Exercice 1. *Les vecteurs*

$$\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 := \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement dépendants ?

Solution 1. Supposons que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$. On peut récrire cela comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est linéairement indépendante.

Exercice 2. *Soit*

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelles valeurs de h le vecteur $\vec{v}_3$ se trouve-t-il dans* Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *?*
2. *Pour quelles valeurs de h l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est-il linéairement dépendant ?*

Solution 2.

1. Supposons que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{v}_3$. On peut recrire cela comme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h+2 \end{pmatrix}.$$

Mais ce système est n'admet jamais de solution. Donc, quelque soit la valeur de h, $\vec{v}_3$ ne peut pas se trouver dans Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

2. On voit que $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$. La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est donc linéairement dépendante. A *fortiori* la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est aussi linéairement dépendante.

Exercice 3. *Soit*

$$S := \{1, t, t^2, t^3, \ldots\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que S est un sous-ensemble linéairement indépendant de l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels.*

2. *Montrer que S est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels.*
3. *Démontrer que l'ensemble*
$$S := \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$$
est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ des polynômes à coéfficients réels de degré plus petit ou égal à 2.

Solution 3. 1. Supposons que pour quelques $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nombres réels, et $n_1, \ldots, n_m$ nombre naturels l'on a que
$$\lambda_1 t^{n_1} + \cdots + \lambda_m t^{n_m} = 0 \text{ dans } \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$
autrement dit le polynôme est le polynôme 0. Par définition, un polynôme est zéro si et seulement si tous les coéfficients le sont. Donc chaque λ_i est zéro, et on a bien montré que S est un sous-ensemble linéairement indépendant de l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels.

2. Par définition, chaque polynôme est une combinaison linéaire d'éléments de S. Donc S engendre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Pour montrer que $S = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ forme une base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, on doit montrer d'abord que ces polynômes sont linéairement indépendants.
Supposons que la combination linéaire
$$\alpha(1+t^2) + \beta(t+t^2) + \gamma(1+2t+t^2) = (\alpha+\gamma) + (\beta+2\gamma)t + (\alpha+\beta+\gamma)t^2$$
des éléments de S donne le polynôme nulle. En particulier tous les coefficients sont nuls. On est donc amené à résoudre un système de trois équations à trois inconnues (α, β et γ). On constate que la seule solution est le vecteur nul, et donc
$$\alpha, \beta, \gamma = 0$$
est la seule possibilité. Donc S est linéairement indépendant. Par ailleurs $\mathrm{Vect}\,\{S\} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, puisque $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$ (on utilise de nouveau le critère de §4.5). (Aussi on peut vérifier que
$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 + a_2)(1+t^2) + (a_2 - a_0)(t+t^2) + \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2)(1+2t+t^2).)$$

Exercice 4. *1. Les colonnes de la matrice*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

2. Les polynômes $1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3$ sont-ils linéairement dépendants ?

Solution 4. 1. Les colonnes de M sont les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Il y a 4 colonnes. Cela implique que les colonnes de la matrice forment un ensemble linéairement dépendant.

2. Ces polynômes forment une famille libre. En effet toute combinaison linéaire qui est égale au polynôme nulle
$$a \cdot 1 + b(1+t) + c(1+t+t^2) + d(1+t+t^2+t^3) = 0$$
doit avoir tous ses coefficients nuls. Cela se voit rapidement si on simplifie l'écriture de cette combinaison linéaire :
$$(a+b+c+d) + (b+c+d)t + (c+d)t^2 + dt^3 = 0$$
En observant les coefficients de droite à gauche on constate que $d = 0$, donc $c = 0$, si bien que $b = 0$ et enfin $a = 0$.

Exercice 5. *1. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?*

2. Soit $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour compléter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Solution 5. 1. Les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes si la seule combinaison linéaire

$$f(t) = \alpha \sin^2 t + \beta \cos^2 t$$

qui donne la fonction nulle (constamment nulle !), est donnée par $\alpha = \beta = 0$. Or, on calcule $f(0) = \beta$ et $f(\pi/2) = \alpha$. Si la fonction f est nulle, elle s'annule en particulier en 0 et en $\pi/2$. Par conséquent $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Ces deux fonctions ne forment pas une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet toute combinaison linéaire des fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ est continue, si bien que la fonction $f(t)$ qui vaut 1 en zéro et zéro partout ailleurs ne peut appartenir à $\operatorname{Vect}(\sin^2 t, \cos^2 t)$. En fait de nombreuses fonctions continues n'y sont pas non plus, par exemple $g(t) = t$.

2. Il s'agit à nouveau de comprendre quand une combinaison linéaire des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

donne la matrice nulle. A nouveau, nous sommes amenés à résoudre un système homogène (de quatre équations et quatre inconnues) donné par les coefficients de la combinaison linéaire $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$. Ceci donne le système linéaire :

$$\begin{gathered} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0. \end{gathered}$$

On trouve $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, si bien que les matrices données sont libres. On remarque donc que ces matrices forment une base du sous-espace vectoriel de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $W = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, et de suite on trouve qu'on peut compléter en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, en rajoutant, par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *Trouver la dimension du sous-espace H défini par :*

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix},\ \textit{où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Solution 6. Par construction, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini comme l'ensemble des vecteurs de la forme $a\begin{pmatrix}1\\5\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}6\\0\\-2\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\5\end{pmatrix}=\text{Vect}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\5\\0\\0\end{bmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}6\\0\\-2\\0\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad \vec{v}_4=\begin{bmatrix}0\\4\\-1\\5\end{bmatrix}.$$

On voit que $\vec{v}_3=-2\vec{v}_2$, ce qui est équivalent à dire que $H=\text{Vect}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_4\}$. En vérifiant que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (en calculant la forme échelonnée de la matrice dont les colonnes sont $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_4$ par exemple), on peut déduire que H est de dimension 3.

Exercice 7. *Choix Multiples.*

(a) *On considère les polynômes $p(t)=(1-t)(1+t)=1-t^2$ et $q(t)=(1+t)(1+t)=1+2t+t^2$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

- ☐ *Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.*
- ☐ *Les polynômes p et q forment une base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*
- ☐ *Le polynôme $q-p$ est le polynôme nul.*
- ☐ $(1+t)p-(1-t)q$ *est une combinaison linéaire de p et q.*

(b) *Soit W le sous-espace dans $\mathbb{R}^6$ défini par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$. On considère les vecteurs* $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

- ☐ *On peut compléter $\{\vec{a},\vec{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter $\{\vec{a},\vec{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter $\{\vec{a},\vec{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter $\{\vec{a},\vec{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.*

(c) *Soit V un espace vectoriel et $v_1,\dots,v_k$ des vecteurs de V.*

- ☐ *Si la famille $\{v_1,\dots,v_k\}$ est libre, alors $dimV=k$.*
- ☐ *Si la famille $\{v_1,\dots,v_k\}$ est libre, alors $dimV\geq k$.*
- ☐ *Si la famille $\{v_1,\dots,v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $dimV=k$.*
- ☐ *Si la famille $\{v_1,\dots,v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $dimV\geq k$.*

Solution 7. Choix Multiple.

(a) ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants, car l'un n'est pas un multiple scalaire de l'autre.

En effet, bien que $(1+t)p+(1-t)q=0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dans une combinaison linéaire les coefficients scalaires sont des réels et non des polynômes de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Enfin, le polynôme $q-p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t+2t^2$.

(b) ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues libres qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

(c) ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.

Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geq k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leq k$).

Exercice 8. *On considère le système d'équations linéaires suivant :*

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$$
$$5x_1 - x_3 = 0$$

Trouver une base de l'ensemble des solutions, comme sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

Solution 8. On échelonne la matrice des coefficients du système homogène et une des formes échelonnées qu'on peut trouver est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit que le système possède une infinité de solutions $\{(\frac{3}{10}\alpha, \frac{13}{10}\alpha, \frac{3}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. On peut donc prendre comme base $\{(3, 13, 15, 10)\}$.

Exercice 9. *Soient les matrices suivantes dans l'espace vectoriel* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer si D *ou* $E \in \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

Solution 9.

— Il faut chercher si l'équation $\alpha A + \beta B + \gamma C = D$ a une solution. Si c'est le cas, alors on aura $\alpha + 3\beta = 2$, $-\alpha + 2\beta + \gamma = -2$, $2\alpha + \beta - 2\gamma = 4$ et $-\beta + 2\gamma = -1$. Mais ce système d'équations ne possède aucune solution et donc $D \notin \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

— Il faut chercher si l'équation $\alpha A + \beta B + \gamma C = E$ a une solution. Si c'est le cas on aura $\alpha + 3\beta = 1$, $-\alpha + 2\beta + \gamma = 5$, $2\alpha + \beta - 2\gamma = -5$ et $-\beta + 2\gamma = 1$. On trouve que $\alpha = -2, \beta = 1$ et $\gamma = 1$ et on vérifie que $E = -2A + B + C$ et donc $E \in \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

Exercice 10. *Déterminer le polynôme de degré 4,* $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$*, dont la représentation graphique passe par les points* $(1; \frac{1}{2})$, $(2; 3)$, $(-1; \frac{9}{2})$, $(-2; 35)$ *et* $(\frac{1}{2}; \frac{15}{16})$.

Solution 10. Les différentes conditions nous donnent le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} a+b+c+d+e=\frac{1}{2} \\ a-b+c-d+e=\frac{9}{2} \\ 16a+8b+4c+2d+e=3 \\ 16a-8b+4c-2d+e=35 \\ \frac{1}{16}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}d+e=\frac{15}{16} \end{array}\right.$$

On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \frac{9}{2} \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 35 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{16} \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on trouve $e=1, d=0, c=\frac{1}{2}, b=-2$ et $a=1$, c'est-à-dire que le polynôme cherché est $x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+1$.

Exercice 11. *Vrai-faux .*

a) Si la forme échelonnée d'une matrice augmentée possède une ligne de zéros, alors le système linéaire associé possède une infinité de solutions.

b) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 *inconnues admet au moins une solution.*

c) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 *inconnues n'admet aucune solution.*

d) Si un système linéaire avec n équations à n inconnues a n fois le pivot 1 *dans une forme échelonnée simplifiée de sa matrice augmentée, alors le système admet exactement une solution.*

Solution 11. a) Faux. Si l'on considère le système de trois équation à une inconnue $x=1, x=2, x=1$, il est clair qu'il ne possède pas de solutions alors que sa matrice réduite associée est, après échelonnement : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La règle générale est : si un système sous-déterminé (i.e. avec moins d'équations que d'inconnues) possède au moins une solution, alors il en possède une infinité.

b) Faux. Considérer le système du point a) comme un système à 5 inconnues, ce qui correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Faux. Considérer par exemple le système $x=1, 2x=2, y=2, 3y=6, z=3$, qui admet la solution $(x,y,z)=(1,2,3)$.

d) Faux. On considère par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La dernière ligne correspond à l'équation $0=1$.

Exercice 12. *Dans chaque cas, donner deux bases distinctes de l'espace vectoriel V.*

a) $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) $V=\mathcal{P}(\mathbb{R})$

c) $V=\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

d) $V=\{(a-b, b-c, c-a, b) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$, *qui est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Solution 12. a) On peut prendre la base canonique

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On peut prendre comme deuxième base les matrices correspondant à celles données dans l'exercice 7 de cette série : $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

b) Comme indiqué au point suivant, $\{1, x, x^2\}$ et $\{1 + x, x, x^2\}$ sont deux bases différentes de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, on a les deux bases suivantes de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \quad \{1 + x, x, x^2, x^3, \ldots\}.$$

c) On peut prendre la base standard $\{1, x, x^2\}$ ainsi que la base $\{1 + x, x, x^2\}$.

d) Les vecteurs $\{(1, 0, -1, 0), (-1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$ forment une famille génératice de V, car $(a - b, b - c, c - a, b) = a(1, 0, -1, 0) + b(-1, 1, 0, 1) + c(0, -1, 1, 0)$. Il est facile de vérifier qu'ils sont linéairement indépendants et par conséquent forment une base de V. Pour la deuxième base, en prenant, par exemple, les valeurs suivantes pour les triples (a, b, c), on trouve :

$$a = 0, b = -1, c = 0 \to (1, -1, 0, -1), \quad a = 1, b = 1, c = 0 \to (0, 1, -1, 1)$$

$$a = 0, b = 1, c = 1 \to (-1, 0, 1, 1)$$

Les 3 vecteurs trouvés appartiennent à V et on peut aussi vérifier facilement qu'ils sont linéairement indépendants. Ils forment donc une autre base de V.

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Soit x, y, z des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z &= 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z &= 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

En posant $X = \cos x$, $Y = \cos y$ et $Z = \cos z$, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues X, Y et Z. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de x, y et z dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui satisfont au système (1).

Solution 13. On écrit la matrice augmentée du système, où l'on a permuté la première et la dernière ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 2 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3}\to\mathrm{L3}+(-\sqrt{2})\cdot\mathrm{L1}}{\overset{\mathrm{L2}\to\mathrm{L2}+(-1)\cdot\mathrm{L1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L2}\to\mathrm{L2}+(-2)\cdot\mathrm{L3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6+2\sqrt{2} & -7+\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L2}\to\mathrm{L2}\cdot\frac{-1}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L3}\to\mathrm{L3}+\mathrm{L3}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}+\frac{3}{2} & \sqrt{2}+\frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \frac{1}{2}, Y = 1, X = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Au final, on trouve $x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ et $z = \frac{\pi}{3}$.
