Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________________

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ sachant que M_f possède une valeur propre double.

b) On pose $a = 1$. M_f est-elle diagonalisable ? Justifiez rigoureusement votre réponse. 3,5 pts

2. Dans le plan muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$, on donne deux vecteurs $\vec{u} = 5\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Soit la projection p du plan définie de la manière suivante :

- $\operatorname{Im} p$ est la droite $(O\,,\,\vec{v})$
- $\operatorname{Ker} p$ est la droite $(O\,,\,\vec{u})$.

On considère les deux endomorphismes du plan suivants :

- f est une affinité d'axe $(O\,,\,\vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et de rapport $k = -2$,
- g est une affinité d'axe $\operatorname{Im} p$, de direction $\operatorname{Ker} p$ et vérifiant : $\forall\, \vec{x} \in \operatorname{Ker} p,\ (g - 2Id)(\vec{x}) = \vec{0}$.

Soit l'endomorphisme du plan $l = f \circ g$.

a) Déterminer la matrice M_l dans la base canonique.

Soit h une homothétie de centre O et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

b) Déterminer la valeur de α telle que l'endomorphisme $j = l + p \circ h$ possède une projection dans sa décomposition.
Indication: travailler dans une base propre à préciser. 3,5 pts

Tourner la page

3. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et le vecteur } \vec{c} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 0 \\ m+2 \end{pmatrix},$$

m étant un paramètre réel.

a) Déterminer $m \geq 0$ pour que $f^{-1}(\{\vec{c}\})$ soit une droite de $\mathbb{R}^3$.

b) On pose $m = 0$.
Déterminer les équations paramétriques de $f^{-1}(\{\vec{c}\})$. 4,5 pts

4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

On considère l'endomorphisme f défini par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{x} & \longmapsto & 2\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{u})\, \vec{v} \,. \end{array}$$

a) A l'aide d'une base propre de f , donner une interprétation géométrique de f .

b) On note α le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$ et on considère les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants

- s est une symétrie oblique d'axe la droite $(O, \vec{v})$ et de direction parallèle au plan α
- h est une homothétie de centre O et rapport $k = 2$.

Déterminer une base propre commune à f et s. Dans cette base propre, déterminer la matrice de $g = f + h \circ s$ et en déduire, avec précision, la nature géométrique de g. 3,5 pts