(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Question	Pts max.	Pts
1	3½	
2	5	
3	6	
4	5½	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 3½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

$\mathbb{R}^2$ est muni de la base orthonormée $B(\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.
On considère l' endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la nature géométrique de f.

(b) Soit l'endomorphisme g qui admet les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$ et dont l'image, $\operatorname{Im} g$, est la droite d'équation $x - 3y = 0$ et le noyau, $\ker g$, est la droite $x + y = 0$.
Déterminer la matrice de $f \circ g$ par rapport à la base B.

Solution:

(a) $f = h \circ a$ où h est une homothétie de centre O et rapport -1 (ou aussi symétrie centrale), et a est une affinité d'axe la droite $(O,\,\vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et rapport 3.
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $M_{fog} = \dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 2 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soit f l'application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, définie par sa matrice M relativement à la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & k \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}, \qquad \text{où } k \text{ est un paramètre réel.}$$

(a) Pour quelle(s)valeur(s) du paramètre k, f est-elle diagonalisable ?
Justifiez rigoureusement votre réponse.

(b) On pose $k = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $h = \alpha\, f$ et de $g = f^{\alpha}$.

Solution:

(a) $\det(M - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - (k+4)) = 0$

- Premier cas : $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre double, $k = -4$
  f n'est pas diagonalisable.
- Deuxième cas : $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre double, $k = -3$.
  f n'est pas diagonalisable.

- Troisième cas : les trois valeurs propres sont distinctes donc $k \notin \{-4, -3\}$, f est diagonalisable.

(b) • Les valeurs propres de $h = \alpha f$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \alpha$ et $\lambda_3 = 4\alpha$.

Les sev propres sont : $E_0^h = E_0^f$, $E_1^h = E_1^f$, et $E_{4\alpha}^h = E_4^f$.

- Les valeurs propres de $g = f^\alpha$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 4^\alpha$.

Les sev propres sont : $E_0^g = E_0^f$, $E_1^g = E_1^f$, et $E_{4^\alpha}^g = E_4^f$.

Question 3 (à 6 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans l'espace, muni de la base canonique orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = 3\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{u})\,\vec{u} \end{array}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur fixé et $\|\vec{u}\| = \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Par le calcul vectoriel, montrer que f est diagonalisable. Définir une base propre et donner la matrice de f par rapport à cette base.

(b) Déterminer le(s) valeur(s) de k tel(s) que $f = h \circ a$ où h est une homothétie et a est une affinité de rapport 2. Donner avec précision la nature géométrique de f.

Pour la suite, on pose $k = 6$.

(c) Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{a} \neq 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{a}$ ne sont pas colinéaires.
On note g la symétrie orthogonale par rapport au plan $\beta(O, \vec{u}, \vec{a})$.

Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans une base à définir en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{u}$.
Justifier avec précision chaque étape du raisonnement menant à la solution.

Solution:

(a) • $f(\vec{u}) = (3 - k)\,\vec{u}$, $k > 0$.

- Soit γ le plan orthogonal à $\vec{u}$ et passant par O, de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $f(\vec{v}) = 3\vec{v}$ et $f(\vec{w}) = 3\vec{w}$.
Base propre : $\mathcal{B}'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
$$M_f' = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $k = \dfrac{3}{2}$

f est composée d'une homothétie de centre O et rapport $\dfrac{3}{2}$ et d'une affinité d'axe la droite $(O, \vec{u})$, de direction le plan γ et de rapport 2.

(c) Soit $\vec{b} = \vec{u} \times \vec{a}$ et $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{b} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{a})$

La base $\mathcal{B}''(\vec{u}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base propre commune et

$$M'_{f\circ g} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 4 (à 5½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

$\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\vec{a}_1 + y\,\vec{a}_2 + z\,\vec{a}_3$.

avec $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-m \\ 2m-2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer toutes les valeurs du paramètre m pour que f soit surjective.

(b) Soit $\vec{c} \in \operatorname{Im} f$.
Discuter en fonction de m le nombre de paramètres dont dépendent les équations de $f^{-1}(\{\vec{c}\})$.

(c) Soit le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m^2-1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Déterminer m de sorte que $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \emptyset$.

Solution:

(a) f est surjective ssi $m \notin \{-3; 2\}$

(b)
- $m \notin \{-3; 2\}$: il n'y a pas de paramètre.
- $m = -3$: il y a 1 seul paramètre.
- $m = 2$: il y a 2 paramètres.

(c) $m = 2$.