Physique
Semestre d'automne 2018

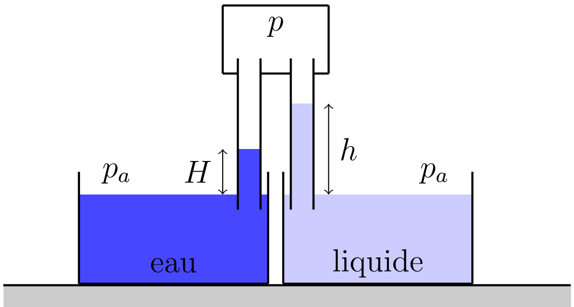
Simon Bossoney
Guido Burmeister

moodle.epfl.ch

Corrigé 6

Exercice 1

Après avoir modélisé la situation (en s'aidant d'un dessin), on exploite la loi de l'hydrostatique.
Nous allons supposer que la pression à la surface des liquides est p_a (pression extérieure) et que la pression dans les pailles (c'est-à-dire dans la bouche de la personne aspirant) est p. La situation peut alors être schématisée de la manière suivante :

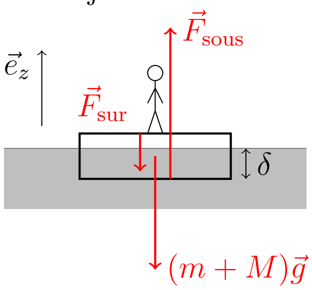


Selon la loi de l'hydrostatique :

$$\left.\begin{array}{rcl} p_a - p & = & \rho_{\text{eau}} g H \\ & = & \rho_{\text{liquide}} g h \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d = \frac{\rho_{\text{liquide}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{H}{h} < 1\,.$$

Exercice 2

Utiliser la loi de l'hydrostatique.
Considérer l'objet formé du radeau et de la personne.



Objet : personne et radeau

Forces : poids, forces de pression

$$(m+M)\vec{g} + \vec{F}_{\text{sous}} + \vec{F}_{\text{sur}} = \vec{0}\,,$$

avec $M = \rho abh$.

Utiliser la projection selon le repère.
Selon $\vec{e}_z$:

$$-(m+M)g + p_{\text{sous}}ab - p_{\text{sur}}ab = 0\,.$$

En admettant que la pression de l'air est uniforme, on a

$$p_{\text{sur}} = p_{\text{air}}$$

et, par la loi de l'hydrostatique,

$$p_{\text{sous}} - p_{\text{air}} = \rho_{\text{eau}} g \delta\,.$$

Alors

$$-(m+\rho abh)g + \rho_{\text{eau}} g \delta ab = 0 \Rightarrow \delta = \frac{m+\rho abh}{\rho_{\text{eau}} ab} = 9.5\,\text{cm}.$$

Lorsque la personne quitte le radeau, $m = 0$ et

$$\delta = \frac{\rho abh}{\rho_{\text{eau}} ab} = \frac{\rho h}{\rho_{\text{eau}}} = 9\,\text{cm}.$$

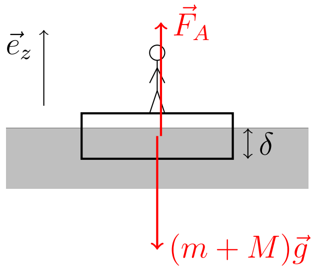
La hauteur immergée diminue donc de 5 mm.
Remarque : comment peut-on tenir compte du fait que la pression de l'air n'est pas uniforme ?
Considérer l'air comme un fluide pesant ($\rho_{\text{air}} = 1.3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$).
Si l'on tient compte de la variation de la pression de l'air entre la surface du radeau et le niveau de l'eau, l'enfoncement du radeau dans l'eau est légèrement plus petit :

$$p_{\text{sous}} - p_{\text{sur}} = p_{\text{sous}} - p_{\text{interface}} + p_{\text{interface}} - p_{\text{sur}} = \rho_{\text{eau}} g\delta + \rho_{\text{air}} g(h - \delta)\,.$$

Alors ($\rho_{\text{air}} = 1.3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$)

$$\delta = \frac{m + (\rho - \rho_{\text{air}})abh}{(\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{air}})ab} = 9.499\,\text{cm}\,.$$

Variante : utiliser la poussée d'Archimède
Commencer par le dessin.



Objet : personne et radeau

Forces : poids, poussée d'Archimède

$$(m + M)\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0}\,,$$

avec $M = \rho abh$.

Considérer l'air comme un fluide sans masse.
En admettant que la poussée d'Archimède due à l'air est négligeable, on a selon $\vec{e}_z$:

$$-(m + M)g + F_{A,\text{eau}} = -(m + M)g + \rho_{\text{eau}} ab\delta g = 0 \Rightarrow \delta = \frac{m + \rho abh}{\rho_{\text{eau}} ab} = 9.5\,\text{cm}.$$

Lorsque la personne quitte le radeau, $m = 0$ et

$$\delta = \frac{\rho abh}{\rho_{\text{eau}} ab} = \frac{\rho h}{\rho_{\text{eau}}} = 9\,\text{cm}.$$

La hauteur immergée diminue donc de 5 mm.
Considérer l'air comme un fluide pesant.
Si l'on tient compte de la poussée d'Archimède due à l'air, l'enfoncement du radeau dans l'eau est légèrement plus petit :

$$-(m + M)g + F_{A,\text{eau}} + F_{A,\text{air}} = -(m + M)g + \rho_{\text{eau}} ab\delta g + \rho_{\text{air}} ab(h - \delta)g = 0$$

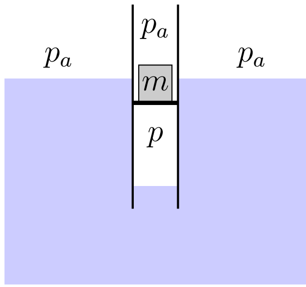
et alors

$$\delta = \frac{m + (\rho - \rho_{\text{air}})abh}{(\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{air}})ab} = 9.499\,\text{cm}\,.$$

Exercice 3

(a) On commence par faire un schéma de la situation d'équilibre, avant d'exploiter la deuxième loi de Newton.

Appelons p_a la pression au-dessus de la surface de l'eau et p la pression du gaz enfermé dans le tube à l'équilibre.



A l'équilibre

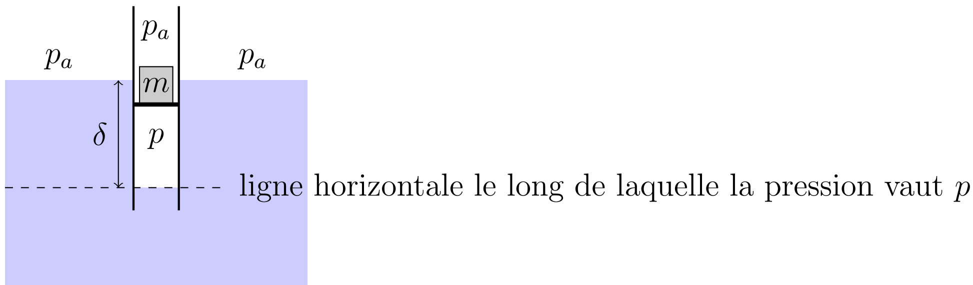
Le système du piston et de la masse est au repos. Selon la verticale, la deuxième équation de Newton appliquée à l'objet "piston" s'écrit, en projetant les forces selon la verticale vers le bas,

$$mg + p_a S - pS = 0\,.$$

Ainsi, la pression du gaz enfermé par le piston dans le tube a pour expression

$$p = p_a + \frac{mg}{S}\,.$$

(b) On exploite le résultat du point (a) et la loi de l'hydrostatique.
Appelons p_a la pression au-dessus de la surface de l'eau et p la pression du gaz enfermé dans le tube à l'équilibre.



A l'équilibre

Selon la loi de l'hydrostatique, la différence de pression entre les niveaux intérieur et extérieur est donnée par

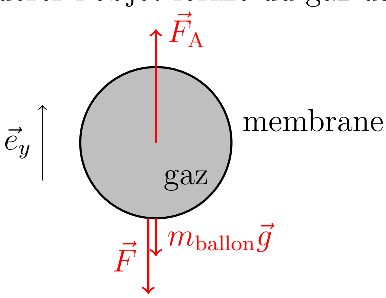
$$p - p_a = \rho_{\text{eau}} g \delta\,.$$

Or, selon le point (a), $p - p_a = mg/S$, si bien que la différence de niveau entre l'eau à l'extérieur et l'eau à l'intérieur du tube a pour expression

$$\delta = \frac{m}{\rho_{\text{eau}} S}\,.$$

Exercice 4

Considérer l'objet formé du gaz dans le ballon et de l'enveloppe de celui-ci.



Objet : ballon (gaz et membrane)

Forces : poids, poussée d'Archimède, tension

$$m_{\text{ballon}}\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} + \vec{F} = \vec{0}\,,$$

avec $m_{\text{ballon}} = m_{\text{gaz}} + m$ et $\vec{F}_{\text{A}} = -\rho_{\text{air}} V_{\text{ballon}} \vec{g}$.

Utiliser la projection selon le repère.
Selon $\vec{e}_y$:

$$-m_{\text{ballon}}g + \rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}}g - F = 0\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m_{\text{gaz}}g &= \rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}}g - mg - F \\ \rho_{\text{gaz}}V_{\text{ballon}}g &= \rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}}g - mg - F \\ \rho_{\text{gaz}} &= \frac{\rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}}g - mg - F}{V_{\text{ballon}}g}\,. \end{aligned}$$

Avec

$$V_{\text{ballon}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}(0.3\,\text{m})^3 = 0.0141\,\text{m}^3,,$$

nous avons

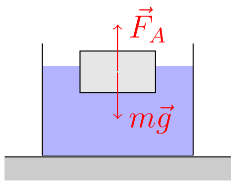
$$\begin{aligned} \rho_{\text{gaz}} &= \frac{(\rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}} - m)g - F}{V_{\text{ballon}}g} \\ &= \frac{(1.293\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}\cdot 0.0141\,\text{m}^3 - 4.5\cdot 10^{-3}\,\text{kg})\cdot 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2} - 0.08\,\text{N}}{0.0141\,\text{m}^3\cdot 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}} \\ &= 0.395\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

Exercice 5

On détermine le volume d'eau déplacé par le glaçon et on compare ce volume au volume qu'occupe la glace lorsqu'elle a fondu.

- **Volume immergé**

  En négligeant la poussée d'Archimède due à l'air, le glaçon de masse m à l'équilibre subit son poids et la poussée d'Archimède due à l'eau :

  $$\vec{F}_A = -\rho_{\text{eau}}V_{\text{immergé}}\,\vec{g}$$

  La deuxième loi de Newton appliquée au glaçon qui flotte sur l'eau s'écrit, lorsqu'elle est projetée le long d'un axe vertical vers le haut,

  $$\rho_{\text{eau}}V_{\text{immergé}}\,g - mg = 0\,.$$

  Ainsi, le volume d'eau déplacé par le glaçon est

  $$V_{\text{immergé}} = \frac{m}{\rho_{\text{eau}}}\,.$$

- **Volume occupé par le glaçon lorsqu'il a fondu**

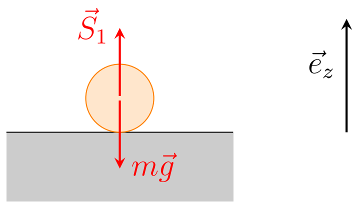
  La masse de l'eau obtenue en fondant le glaçon est égale à la masse du glaçon (la quantité de matière est indépendante de son état, solide ou liquide). Lorsque le glaçon s'est transformé en eau, il occupe donc un volume donné par

  $$V_{\text{glaçon fondu}} = \frac{m}{\rho_{\text{eau}}}\,.$$

- **Conclusion**
  Comme
  $$V_{\text{immergé}} = V_{\text{glaçon fondu}}\,,$$
  la hauteur d'eau dans le récipient ne varie pas lors de la fonte du glaçon.

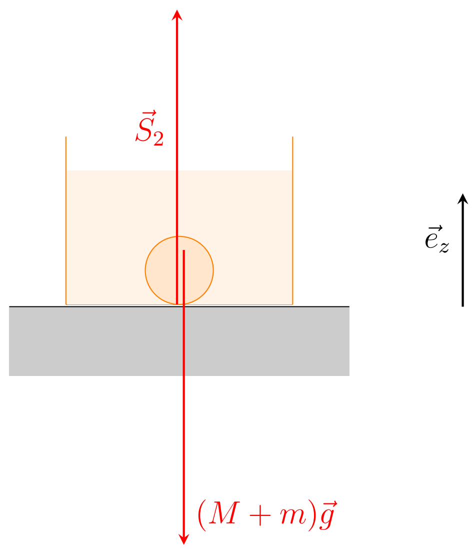
Remarque
Un iceberg flottant ne va donc pas faire augmenter le niveau des mers en fondant. Tout au moins, si l'on néglige le fait que l'iceberg est la plupart du temps constitué d'eau douce, alors que l'eau de mer est salée.

Exercice 6
Chacune des pesées exprime un équilibre. Nous allons donc dans chacune des pesées choisir un objet et l'étudier en écrivant la deuxième loi de Newton dans le cas d'une accélération nulle. Les relations obtenues vont nous permettre d'exprimer la densité $d_m = \rho_m/\rho_{\text{eau}}$ de la masse m en fonction des pesées S_i , $i = 1, 2, 3$.
On étudie la première pesée :



- Objet : masse m
- Forces (externes) : poids $m\vec{g}$ et soutien $\vec{S}_1$ de la balance.
- Deuxième loi de Newton (sous forme vectorielle) :
  $$m\vec{g} + \vec{S}_1 = \vec{0}\,.$$
- Projection par rapport au repère choisi :
  selon $\vec{e}_z$:
  $$-mg + S_1 = 0\,.$$

Ainsi,
$$mg = S_1\,.$$
On considère la deuxième pesée :



- Objet : masse m et récipient rempli d'eau (masse M)
- Forces (externes) : poids $(M+m)\vec{g}$ et soutien $\vec{S}_2$ de la balance
- Deuxième loi de Newton (sous forme vectorielle) :

$$(M+m)\vec{g}+\vec{S}_2=\vec{0}\,.$$

- Projection par rapport au repère choisi :

  selon $\vec{e}_z$:

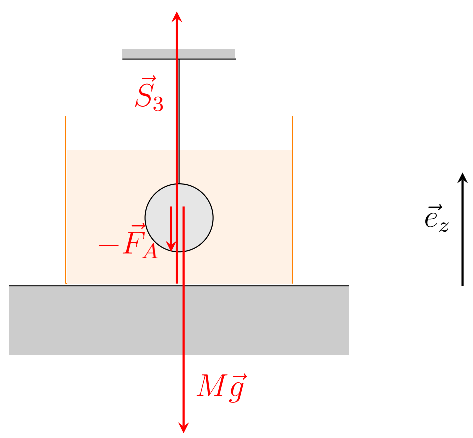
$$-(M+m)g+S_2=0\,.$$

En utilisant le résultat de la première étape, il vient alors

$$Mg=S_2-mg=S_2-S_1\,.$$

Remarque

La masse m subit la pousée d'Archimède due à la présence du fluide (l'eau). Cette force est une force *interne* de l'objet "masse m et récipient rempli d'eau". Par le principe action=réaction, une force de même direction et de même norme, mais de sens opposé, agit sur le fluide. Ces deux forces se compensent et n'interviennent donc pas dans la deuxième loi de Newton appliquée à l'objet considéré.
On étudie la troisième pesée :



- Objet : récipient rempli d'eau (masse M)

- Forces (externes) : poids $M\vec{g}$, soutien $\vec{S}_3$ de la balance et résultante $-\vec{F}_A$ des forces de pression dues à la présence de la masse m
- Deuxième loi de Newton (sous forme vectorielle) :

$$M\vec{g} + \vec{S}_3 - \vec{F}_A = \vec{0}\,.$$

- Projection par rapport au repère choisi :

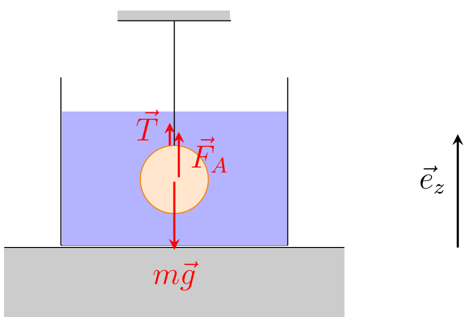
  selon $\vec{e}_z$:

$$-Mg + S_3 - F_A = 0\,.$$

La résultante des forces de pression dues à la présence de la masse m est égale (au signe près : action=réaction) à la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ que subit la masse m. Comme $\vec{F}_A = -\rho_{\text{eau}} V_m\,\vec{g}$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$-Mg + S_3 - \rho_{\text{eau}} V_m\, g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{eau}} V_m\, g = S_3 - Mg\,.$$

Remarque
On aurait également pu étudier l'objet "masse m" :



- Objet : masse m
- Forces (externes) : poids $m\vec{g}$, tension $\vec{T}$ du fil et poussée d'Archimède $\vec{F}_A$.
- Deuxième loi de Newton (sous forme vectorielle) :

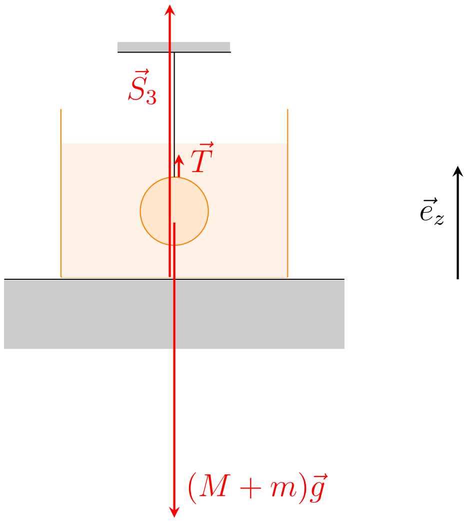
$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A = \vec{0}\,.$$

- Projection par rapport au repère choisi :

  selon $\vec{e}_z$:

$$-mg + T + \rho_{\text{eau}} V_m\, g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{eau}} V_m\, g = mg - T\,.$$

Il faut alors trouver une relation entre T et S_3. Pour ce faire, on étudie l'objet "masse m et récipient rempli d'eau" :



- Objet : masse m et récipient rempli d'eau (masse M)
- Forces (externes) : poids $(M+m)\vec{g}$, tension $\vec{T}$ du fil et soutien $\vec{S}_3$ de la balance.
- Deuxième loi de Newton (sous forme vectorielle) :

$$(M+m)\vec{g} + \vec{T} + \vec{S}_3 = \vec{0}\,.$$

- Projection par rapport au repère choisi :

  selon $\vec{e}_z$:

  $$T + S_3 - (M+m)g = 0 \quad \Rightarrow \quad T = (M+m)g - S_3\,.$$

On peut alors remplacer T par son expression en fonction de S_3 dans l'équation obtenue pour l'objet "masse m" :

$$\rho_{\text{eau}} V_m\, g = mg - T = mg - (M+m)g + S_3 = S_3 - Mg\,.$$

On retrouve bien le même résultat.
Par définition, la densité d_m de la masse m s'écrit

$$d_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\text{eau}}}\,.$$

En amplifiant par $V_m g$ et en utilisant $m = \rho_m V_m$ ainsi que les résultats des étapes précédentes, il vient alors

$$d_m = \frac{\rho_m V_m g}{\rho_{\text{eau}} V_m g} = \frac{mg}{S_3 - Mg} = \frac{S_1}{S_3 + S_1 - S_2}\,.$$

Finalement, on utilise les valeurs numériques obtenues lors des pesées successives :

$$d_m = \frac{3\,\text{N}}{22\,\text{N} + 3\,\text{N} - 23\,\text{N}} = 1.5\,.$$

Remarque
En résumé,

$$mg = S_1 = 3\,\text{N}, \quad (M+m)g = S_2 = 23\,\text{N},$$

$$Mg = S_2 - S_1 = 23 - 3 = 20\,\text{N},$$

$$F_A = S_3 - Mg = 22 - 20 = 2\,\text{N} \quad \text{et}$$

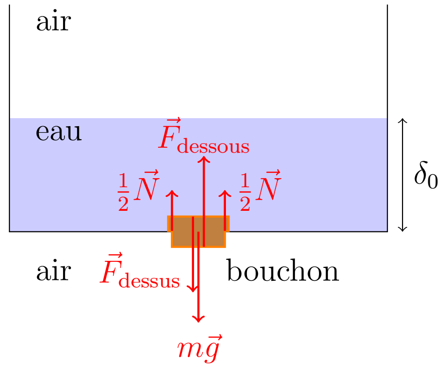
$$T = S_2 - S_3 = 23 - 22 = 1\,\text{N}\,.$$

Exercice 7

(a) Comme nous cherchons à déterminer la force exercée par le fond du récipient sur le bouchon, il paraît raisonnable de considérer que l'objet est le bouchon.

Ainsi, nous allons devoir en particulier déterminer les forces de pression qui s'exercent sur le bouchon.
On considère l'objet "bouchon". Les forces extérieures s'exerçant sur l'objet sont :

- son poids, $m\vec{g}$,
- la force de pression exercée par le liquide, $\vec{F}_{\text{dessus}}$,
- la force de pression exercée par l'air en dessous, $\vec{F}_{\text{dessous}}$,
- la force de réaction du fond du récipient, $\vec{N}$.



A l'équilibre, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{dessus}} + \vec{F}_{\text{dessous}} + \vec{N} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon un axe vertical dirigé vers le bas, on obtient :

$$mg + F_{\text{dessus}} - F_{\text{dessous}} - N = 0\,.$$

La loi de l'hydrostatique permet de trouver la pression intervenant dans l'intensité de la force de pression $\vec{F}_{\text{dessus}}$:

$$F_{\text{dessus}} = \big(p_a + \rho_{\text{eau}} g \delta_0\big) S.$$

On a donc

$$mg + \big(p_a + \rho_{\text{eau}} g \delta_0\big) S - p_a S - N = 0\,.$$

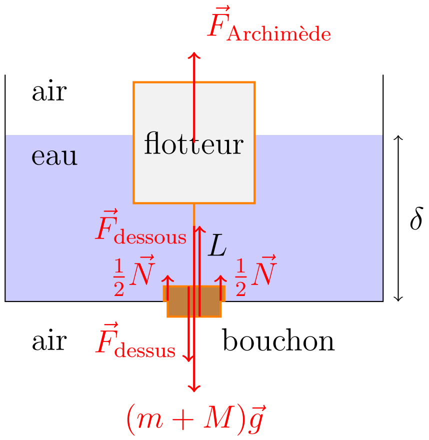
Ainsi, la force de réaction du fond du récipient a pour expression

$$N = N(\delta_0) = (m + \rho_{\text{eau}} \delta_0 S) g = (40 \cdot 10^{-3} + 10^{3} \cdot 10^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-4}) \cdot 9.81 \cong 2.35\,\text{N}\,.$$

(b) Le flotteur subit une poussée d'Archimède (résultante des forces de pression) dirigée vers le haut compensant son poids et permettant éventuellement à la force de réaction exercée par le fond du récipient sur le bouchon de s'annuler.

De manière à ne pas devoir considérer explicitement la tension dans le fil (cette tension n'est pas explicitement recherchée ici), nous allons étudier l'objet "bouchon+flotteur".
On considère l'objet "bouchon+flotteur". Les forces extérieures s'exerçant sur l'objet sont :

- son poids, $(m+M)\vec{g}$,
- la force de pression exercée sur le bouchon par le liquide, $\vec{F}_{\text{dessus}}$,
- la force de pression exercée sur le bouchon par l'air en dessous, $\vec{F}_{\text{dessous}}$,
- la force de réaction du fond du récipient, $\vec{N}$,
- la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression) s'exerçant sur le flotteur, $\vec{F}_{\text{Archimède}}$.



A l'équilibre, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$(m+M)\vec{g} + \vec{F}_{\text{dessus}} + \vec{F}_{\text{dessous}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{Archimède}} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon un axe vertical dirigé vers le bas, on obtient :

$$(m+M)g + F_{\text{dessus}} - F_{\text{dessous}} - N - F_{\text{Archimède}} = 0\,.$$

L'expression de la pression intervenant dans l'intensité de la force de pression $\vec{F}_{\text{dessus}}$ est identique à celle obtenue au point (a) :

$$F_{\text{dessus}} = \big(p_a + \rho_{\text{eau}} g \delta\big) S.$$

L'intensité de la poussée d'Archimède est quant à elle donnée par :

$$F_{\text{Archimède}} = \rho_{\text{eau}} g V_{\text{immergé}} = \rho_{\text{eau}} g A(\delta - L)\,.$$

On a donc

$$(m+M)g + \big(p_a + \rho_{\text{eau}} g\delta\big)S - p_a S - N - \rho_{\text{eau}} g A(\delta - L) = 0\,.$$

Ainsi, la force de réaction du fond du récipient a pour expression

$$N = (m+M)g + \rho_{\text{eau}} g \delta S - \rho_{\text{eau}} g A(\delta - L) = N(\delta)\,.$$

On cherche la hauteur pour laquelle N s'annule :

$$N(\delta_{\text{annulation}}) = 0 = (m+M)g + \rho_{\text{eau}} g \delta_{\text{annulation}} S - \rho_{\text{eau}} g A(\delta_{\text{annulation}} - L)$$

En utilisant le fait que $A = 2S$, il vient

$$\begin{aligned}\delta_{\text{annulation}} &= \frac{(m+M)g + \rho_{\text{eau}} g A L}{\rho_{\text{eau}} g (A - S)} = \frac{(m+M) + \rho_{\text{eau}} 2SL}{\rho_{\text{eau}} S} \\ &= \frac{m+M}{\rho_{\text{eau}} S} + 2L\,.\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient

$$\begin{aligned}\delta_{\text{annulation}} &= \frac{(40+180)\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 20\cdot 10^{-4}} + 2\cdot 0.5 \\ &= 0.11 + 1 = 1.11\,\mathrm{m}\,.\end{aligned}$$