Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 40 minutes. Barème sur 20 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Le plan est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$.

On considère un endomorphisme f du plan défini par sa matrice relativement la base $\mathcal{B}$:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f, ainsi qu'une base propre $\mathcal{B}'$.

Soit g une affinité de rapport $k = -6$, telle que son axe est l'image de f ($\operatorname{Im} f$) et sa direction est parallèle au noyau de f ($\operatorname{Ker} f$).

(b) Déterminer la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer la matrice de l'application $l = g + f$ dans la base propre $\mathcal{B}'$ de f et en déduire la nature géométrique de l.

4 pts

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$.

Dans $\mathcal{B}$, on note M la matrice de f avec

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3a & 2 \\ a-2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ sachant que $\lambda = 4$ est valeur propre de f.

(b) Pour $a = 2$, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Donner la nature géométrique de f et en déduire celle de f^5.

6 pts

Tournez, SVP

3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ défini par la symétrie orthogonale de l'espace par rapport au plan $\alpha(0, \vec{u}, \vec{v})$.

(a) Donner une base propre $\mathcal{B}_1$ de f et la matrice de f relativement à cette base.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\longmapsto (\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} - 4\vec{x} \end{aligned}$$

avec $\vec{u}\cdot\vec{v} = k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}^*$.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de g, ainsi qu'une base propre $\mathcal{B}_2$.

(c) Soit l'endomorphisme suivant:

$$l = f \circ g - 4\, i_3 \quad (i_3 \text{ étant l'application identité dans } \mathbb{R}^3).$$

Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ dans laquelle la matrice de l est diagonale.
Puis déterminer k tel que l comporte dans sa décomposition une projection sur une droite.

5 pts

4. On considère la matrice M dépendante du paramètre réel t suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -t \\ -3t & t & 4 \\ -9 & t+1 & 3t \end{pmatrix}.$$

(a) Discuter en fonction du paramètre t, le rang de M.

(b) Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est M, et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer toutes les valeurs de t et α pour que $f^{-1}(\{\vec{u}\})$ soit un plan ou une droite.

5 pts