Corrigé 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x-3 \ > \ \sqrt{x^2+3x}\,,$ b) $\sqrt{\dfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \ \geq \ 2-x\,.$

---

a) • Domaine de définition.

$$D_{\text{def}} = \big\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+3x\geq 0\big\} = \,]-\infty\,,\,-3]\,\cup\,[\,0\,,+\infty\,[\,.$$

• Premier cas

$x-3<0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\,]-\infty\,,\,-3]\,\cup\,[\,0\,,\,3\,[\,.$ Dans ce cas, on a

$$\underbrace{\sqrt{x^2+3x}}_{\geq 0} \ < \ \underbrace{x-3}_{<0}\,.$$

Sur ce référentiel restreint, l'inéquation n'est pas vérifiée, l'ensemble solution est vide : $S_1=\emptyset\,.$

• Deuxième cas

$x-3\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\,[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$ Dans ce cas, les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut les élever au carré :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x}<x-3 \ &\Leftrightarrow\ x^2+3x<(x-3)^2\\ &\Leftrightarrow\ x^2+3x<x^2-6x+9\\ &\Leftrightarrow\ 9x<9\\ &\Leftrightarrow\ x<1\,.\end{aligned}$$

Sur ce référentiel restreint, l'ensemble solution est aussi vide : $S_2=\emptyset\,.$

• Conclusion

L'ensemble solution est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$S=S_1\cup S_2=\emptyset\,.$$

b) • Domaine de définition.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\text{def}} \ &= \ \Big\{x\in\mathbb{R}\ \Big|\ x+1\neq 0 \ \text{ et } \ \tfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}\geq 0\Big\}\\ &= \ ]-\infty\,,\,-1\,[\ \cup\ \{0\}\ \cup\ \big[\,\tfrac{5}{2}\,,\,+\infty\,\big[\,.\end{aligned}$$

- La résolution de cette inéquation irrationnelle dépend du signe de $2-x$.
  - $2-x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

    Sur ce référentiel, l'inéquation est toujours vérifiée, $\quad S_1 = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
  - $2-x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \{0\}$.

    Sur ce référentiel, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$\frac{x^2(2x-5)}{2(x+1)} \geq (2-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2(2x-5)}{2(x+1)} - (2-x)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2(2x-5)-2(2-x)^2(x+1)}{2(x+1)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-8}{x+1} \geq 0$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle Q à l'aide d'un tableau de signe :

x		$-2\sqrt{2}$		-1		$2\sqrt{2}$	
x^2-8	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$Q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-2\sqrt{2}, -1\right[\cup \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[; \quad S_2 = \left[-2\sqrt{2}, -1\right[$.

- En conclusion :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[-2\sqrt{2}, -1\right[\cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[.$$

2. On considère l'équation suivante :

$$\sqrt{\sqrt{x^2-5x+4} + 5x - 2} = 5 .$$

a) Déterminer le domaine de définition de cette équation.

b) Résoudre cette équation sur son domaine de définition.

---

a) Domaine de définition de l'équation :

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2-5x+4 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2-5x+4} + 5x - 2 \geq 0 \right\} .$$

i) Résolution de l'inéquation $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-4) \geq 0, \quad S_i =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$.

ii) Résolution de l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x$ sur S_i.

La résolution de cette inéquation dépend du signe de $2 - 5x$.

- Premier cas : $2 - 5x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]\frac{2}{5}, 1] \cup [4, +\infty[$.

  Sur ce référentiel restreint, l'inéquation est toujours vraie :

  $$S_1 =]\tfrac{2}{5}, 1] \cup [4, +\infty[.$$

- Deuxième cas : $2 - 5x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, \frac{2}{5}]$.

  Sur ce référentiel restreint, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

  $$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 \geq (2-5x)^2$$

  $$\Leftrightarrow \quad 3x(5 - 8x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, \tfrac{5}{8}], \qquad S_2 = [0, \tfrac{2}{5}].$$

L'ensemble solution de l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x$ est donc

$$S_{ii} = S_1 \cup S_2 = [0, 1] \cup [4, +\infty[.$$

Le domaine de définition s'écrit :

$$D_{\text{def}} = S_i \cap S_{ii} = S_{ii} = [0, 1] \cup [4, +\infty[.$$

b) Résolution de l'équation sur son domaine de définition.
Les deux membres de cette équation étant positifs, on les élève au carré.

$$\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 5x - 2} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 5x + 4} + 5x - 2 = 25.$$

L'équation $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 27 - 5x$ n'admet d'éventuelles solutions que si

$$27 - 5x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, 1] \cup [4, \tfrac{27}{5}].$$

Sur ce référentiel restreint, les deux membres de l'équation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 27 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = (27 - 5x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 24x^2 - 265x + 725 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5 \quad \text{ou} \quad x_2 = \tfrac{145}{24}.$$

La solution x_2 est à exclure car $\frac{145}{24} > \frac{27}{5}$.

La solution $x_1 = 5$ appartient au référentiel restreint : $S = \{5\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

a) $\left| 3x - 5 - \sqrt{-x^2 + x + 42} \right| \geq -x + 11 - \sqrt{-x^2 + x + 42}$,

b) $\sqrt{x^2 - |3x + 4|} \leq x - 2$.

---

a) • Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x + 42 \geq 0\}$.

$$-x^2 + x + 42 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x+6)(x-7) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-6, 7],$$

$$D_{\text{def}} = [-6, 7].$$

• Cette inéquation est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} 3x - 5 - \sqrt{-x^2 + x + 42} \geq -x + 11 - \sqrt{-x^2 + x + 42} \\ \text{ou} \\ 3x - 5 - \sqrt{-x^2 + x + 42} \leq -(-x + 11 - \sqrt{-x^2 + x + 42}\,) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 5 \geq -x + 11 & (1) \\ \text{ou} \\ \sqrt{-x^2 + x + 42} \geq x + 3 & (2) \end{cases}$$

• Résolution de l'inéquation (1) :

$$4x \geq 16 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4, \qquad S_1 = [4, 7].$$

• La résolution de l'inéquation (2) dépend du signe de $(x + 3)$:

a) $x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-6, -3[$.

Dans ce cas, l'inéquation est toujours vérifiée : $S_a = [-6, -3[$.

b) $x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3, 7]$.

Sur ce référentiel restreint, les deux membres de l'inéquation étant positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + x + 42 \geq (x+3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 33 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x+11)(x-3) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in [-\tfrac{11}{2}, 3], \qquad S_b = [-3, 3].$$

c) L'ensemble solution de l'inéquation (2) s'écrit :

$$S_2 = S_a \cup S_b = [-6, -3[\cup [-3, 3] = [-6, 3].$$

• L'ensemble solution S de l'inéquation initiale s'écrit :

$$S = S_1 \cup S_2 = [-6, 3] \cup [4, 7].$$

b) • Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - |3x+4| \geq 0 \right\}$.

$$|3x+4| \leq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x+4 \leq x^2 \\ \text{et} \\ 3x+4 \geq -x^2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 + 3x + 4 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-4)\,(x+1) \geq 0 \\ \text{et} \\ x \in \mathbb{R} \quad (\Delta < 0) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,] \cup [\,4\,,\,+\infty\,[\,.$$

$$D_{\text{def}} = \,]-\infty\,,\,-1\,] \cup [\,4\,,\,+\infty\,[\,.$$

• Discussion des deux cas

∘ Si $x-2<0$, alors $\sqrt{x^2-|3x+4|} \,\leq\, x-2$ n'admet pas de solution.

∘ Si $x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\,2\,,\,+\infty\,[\,\cap D_{\text{def}} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\,4\,,\,+\infty\,[$, on a

$$\sqrt{x^2-|3x+4|} \,\leq\, x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-|3x+4| \,\leq\, (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-|3x+4| \,\leq\, x^2-4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad |3x+4| \geq 4x-4\,.$$

• Résolution de l'inéquation $|3x+4| \geq 4x-4$

$$|3x+4| \geq 4x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x+4 \geq 4x-4 \\ \text{ou} \\ 3x+4 \leq -4x+4 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 8 \\ \text{ou} \\ 7x \leq 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 8\,.$$

• Conclusion

L'ensemble solution est donc donné par l'intersection de l'intervalle $[-\infty\,,\,8\,]$ avec le domaine de positivité $[\,4\,,\,+\infty\,[$.

$$S = [\,4\,,\,8\,]\,.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} \;=\; x-m\,, \qquad m \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \,\in\, \mathbb{R}$.

• Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\,(x^2+1) \geq 0\} = \mathbb{R}$.

• Condition de positivité : cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si

$$x-m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq m\,.$$

- Sous cette condition, on a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} = x-m \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x^2+1) = (x-m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2m\,x+2-m^2 = 0\,.$$

Ce trinôme du deuxième degré n'admet d'éventuelles solutions que si son discriminant est positif ou nul.

$$\Delta' \;=\; m^2-(2-m^2) \;=\; 2m^2-2 \;=\; 2\,(m^2-1)\,.$$

- ◦ Si $\Delta' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-1\,,\,1\,[\,,$ alors $S = \emptyset\,.$
- ◦ Si $\Delta' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \;]-\infty\,,\,-1\,]\;\cup\;[\,1\,,\,+\infty\,[\,,$

  alors l'équation admet deux solutions éventuelles :

$$x_1 = -m-\sqrt{2\,(m^2-1)} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -m+\sqrt{2\,(m^2-1)}\,.$$

  Ces deux valeurs sont solutions de l'équation initiale si et seulement si elles vérifient la condition de positivité.

  1) $x_1 \geq m \quad \Leftrightarrow \quad -m-\sqrt{2\,(m^2-1)} \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2\,(m^2-1)} \leq -2m\,.$

     Soit M_1 l'ensemble des solutions en m de cette inéquation.

     La résolution de cette inéquation dépend du signe de $-2m$:

     i) Si $-2m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \;[\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors $M_{1i} = \emptyset\,.$

     ii) Si $-2m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \;]-\infty\,,\,-1\,]\,,$ alors les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on les élève au carré :

$$2\,(m^2-1) \leq (-2m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \geq -1\,, \qquad M_{1ii} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

     $M_1 \;=\; M_{1i} \;\cup\; M_{1ii} \;=\;]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

  2) $x_2 \geq m \quad \Leftrightarrow \quad -m+\sqrt{2\,(m^2-1)} \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2\,(m^2-1)} \geq 2m\,.$

     Soit M_2 l'ensemble des solutions en m de cette inéquation.

     La résolution de cette inéquation dépend du signe de $2m$:

     i) Si $2m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \;]-\infty\,,\,-1\,]\,,$ alors $M_{2i} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

     ii) Si $2m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \;[\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on les élève au carré :

$$2\,(m^2-1) \geq (2m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \leq -1\,, \qquad M_{2ii} = \emptyset\,.$$

     $M_2 \;=\; M_{2i} \;\cup\; M_{2ii} \;=\;]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

En résumé :

- x_1 est solution de l'équation initiale si et seulement si $m \in M_1 = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,,$
- x_2 est solution de l'équation initiale si et seulement si $m \in M_2 = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

D'où la synthèse finale :

- si $m \in \left]-\infty\,,\,-1\right]$, alors $S = \left\{-m - \sqrt{2\,(m^2-1)}\,,\,-m + \sqrt{2\,(m^2-1)}\right\}$,
- si $m \in \left]-1\,,\,+\infty\right[$, alors $S = \emptyset$.

5. Calculer le terme en x^{18} du développement de $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$.

Explicitons le terme général du développement de $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$.

$$\mathrm{C}_{15}^{k}\,\left(x^2\right)^{15-k}\left(\frac{3a}{x}\right)^{k} = (3a)^k\,\mathrm{C}_{15}^{k}\,x^{2\,(15-k)-k} = (3a)^k\,\mathrm{C}_{15}^{k}\,x^{30-3k}\,,$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 15$.

Il s'agit du terme en x^{18} si et seulement si $30-3k = 18$.

$$30-3k = 18 \quad\Leftrightarrow\quad 3k = 12 \quad\Leftrightarrow\quad k = 4\,.$$

Le terme en x^{18} du développement de $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ est : $(3a)^4\,\mathrm{C}_{15}^{4}\,x^{18}$.

6. Calculer le terme en x^{26} dans le développement de $(x^{1/2}+x)^3\,(1-x^{3/2})^{18}$.

Le terme général du développement de $(x^{1/2}+x)^3\,(1-x^{3/2})^{18}$ est égal au produit des termes généraux des développements de $(x^{1/2}+x)^3$ et de $(1-x^{3/2})^{18}$.

$$\left[\mathrm{C}_{3}^{k}\,\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{3-k}x^k\right]\cdot\left[\mathrm{C}_{18}^{\ell}\,\left(-x^{\frac{3}{2}}\right)^{\ell}\right] = (-1)^{\ell}\,\mathrm{C}_{3}^{k}\,\mathrm{C}_{18}^{\ell}\,x^{\frac{3\ell+k+3}{2}}\,,$$

avec $k\,,\,\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 3$ et $0 \leq \ell \leq 18$.

Il s'agit du terme en x^{26} si et seulement si $\frac{3\ell+k+3}{2} = 26$.

$$\frac{3\ell+k+3}{2} = 26 \quad\Leftrightarrow\quad 3\ell+k = 49\,.$$

Résolvons cette équation en explicitant les quatre valeurs possibles de k.

$$k=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell = \frac{49}{3} \notin \mathbb{N}\,, \qquad\qquad k=2 \quad\Leftrightarrow\quad \ell = \frac{47}{3} \notin \mathbb{N}\,,$$

$$k=1 \quad\Leftrightarrow\quad \ell = 16\,, \qquad\qquad k=3 \quad\Leftrightarrow\quad \ell = \frac{46}{3} \notin \mathbb{N}\,.$$

Il n'existe qu'un seul terme en x^{26}, il correspond à $(k\,,\,\ell) = (1\,,16)$ et il vaut

$$\mathrm{C}_3^1\ \mathrm{C}_{18}^{16}\ x^{26}\,.$$

7. A l'aide du développement de $(1+x)^5$, évaluer $(1,04)^5$ à quatre décimales près.

Développement de $(1+x)^5$: $\quad (1+x)^5 \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k\ x^{5-k}\,.$

$$(1+x)^5 \;=\; 1 \;+\; 5\,x \;+\; 10\,x^2 \;+\; 10\,x^3 \;+\; 5\,x^4 \;+\; x^5\,.$$

Pour évaluer $(1,04)^5$ à 4 décimales près, on pose $x = 0,04 = 4\cdot 10^{-2}$ et on calcule tous les termes du développement dont la valeur est supérieure à 10^{-4}.

- Premier terme : terme constant qui vaut 1.
- Deuxième terme : $5\,x \;=\; 2\cdot 10^{-1}$.
- Troisième terme : $10\,x^2 \;=\; 1,6\cdot 10^{-2}$.
- Quatrième terme : $10\,x^3 \;=\; 6,4\cdot 10^{-4}$.
- Cinquième terme : $5\,x^4 \;=\; 1,28\cdot 10^{-5} \;<\; 10^{-4}$.

L'évaluation de $(1,04)^5$ à 4 décimales près est donc donnée par :

$$1 \;+\; 2\cdot 10^{-1} \;+\; 1,6\cdot 10^{-2} \;+\; 6\cdot 10^{-4} \;=\; 1,2166\,.$$

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{|x^2-5m^2|} \;\leq\; x-m\,, \qquad m\;\in\;\mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$.

La résolution de cette inéquation dépend du signe de $x-m$:

- Cas $x < m$: le membre de droite est négatif, il n'y a pas de solution.

$$\text{Si} \quad x \in\,]-\infty\,,\,m\,[\,, \quad \text{alors} \quad S = \emptyset\,.$$

- Cas $x \geq m$ (condition de positivité) : $D_{\text{pos}} = [\,m\,,\,\infty\,[\,.$

  Sous cette condition de positivité, l'ensemble des solutions est inchangé si l'on élève les deux membres, positifs, au carré :

$$\sqrt{|x^2-5m^2|} \;\leq\; x-m \quad\Leftrightarrow\quad |x^2-5m^2| \;\leq\; (x-m)^2\,.$$

  On résout cette inéquation à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|x^2-5m^2| \;\leq\; (x-m)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lll} x^2-5m^2 \;\leq\; (x-m)^2 & & \text{(I)} \\ \text{et} & & \\ x^2-5m^2 \;\geq\; -(x-m)^2 & & \text{(II)} \end{array}\right.$$

  i) Inéquation (I) : $x^2-5m^2 \;\leq\; (x-m)^2 \quad\Leftrightarrow\quad m\,x \;\leq\; 3m^2\,.$

  La résolution de cette inéquation dépend du signe de m :

  $*$ Si $m<0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad\Leftrightarrow\quad x \geq 3m\,.$

$$S_i = [\,3m\,,\,\infty\,[\;\cap\; D_{\text{pos}} = [\,m\,,\,\infty\,[\,.$$

  $*$ Si $m=0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leq 0\,.$

$$S_i = \mathbb{R} \;\cap\; D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_+\,.$$

  $*$ Si $m>0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad\Leftrightarrow\quad x \leq 3m$

$$S_i = [\,-\infty\,,\,3m\,[\;\cap\; D_{\text{pos}} = [\,m\,,\,3m\,]\,.$$

  ii) Inéquation (II) : $x^2-5m^2 \;\geq\; -(x-m)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-2mx-4m^2 \;\geq\; 0$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-mx-2m^2 \;\geq\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+m)\,(x-2m) \;\geq\; 0\,.$$

  Donc x est "à l'extérieur" de l'intervalle dont les bornes sont $-m$ et $2m$. On explicite l'ensemble solution S_{ii} en fonction du signe de m :

  $*$ Si $m<0$:

$$S_{ii} = (\;]-\infty\,,\,2m\,] \;\cup\; [\,-m\,,\,\infty\,[\;) \;\cap\; D_{\text{pos}} = [\,-m\,,\,\infty\,[\,.$$

  $*$ Si $m=0$: $(x+m)\,(x-2m) \;\geq\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 \geq 0\,.$

$$S_{ii} = \mathbb{R} \;\cap\; D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_+\,.$$

  $*$ Si $m>0$:

$$S_{ii} = (\;]-\infty\,,\,-m\,[\;\cup\;[\,2m\,,\,\infty\,[\;) \;\cap\; D_{\text{pos}} = [\,2m\,,\,\infty\,[\,.$$

D'où la synthèse finale : $S = S_i \, \cap \, S_{ii}$.

- Si $m < 0$ alors $S = [\, -m \,, \, \infty \, [$.
- Si $m = 0$ alors $S = \mathbb{R}_+$.
- Si $m > 0$ alors $S = [\, 2m \,, \, 3m \,]$.