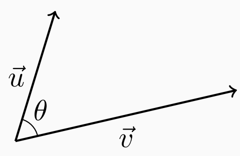
Série 9

Exercice 1.
Calculer la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et celle de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ sachant que :

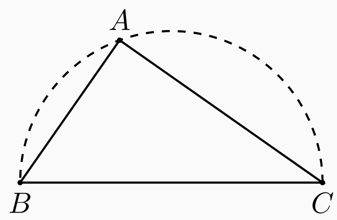
$$\|\vec{u}\| = 3,\ \|\vec{v}\| = 5 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}.$$



Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(3,-2,5)$, $B(1,7,11)$ et $C(2,-1,5)$. Quel est l'angle au sommet A dans le triangle ABC ?

Exercice 3.

Soit un triangle ABC inscrit dans un demi-cercle. En utilisant le produit scalaire, montrer que l'angle au sommet A est droit (on pourra introduire le milieu de BC).



Exercice 4. On donne un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan. On sait que :

$$\|\vec{u}\| = 1, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

où θ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Exprimer le produit scalaire des vecteurs $\vec{w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{w}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en fonction de x, x', y et y'.

b. Exprimer la distance du point $M(x,y)$ à l'origine en fonction de x et y.

c. Déterminer, en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur normal à la droite d'équation $x-y+3=0$.

Exercice 5. Dans le plan, on donne deux points A et B tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. Dans chacun des cas suivants, décrire le lieu géométrique des points M du plan vérifiant la condition donnée.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$.

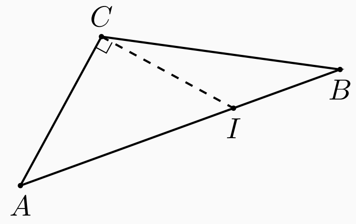
b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2$ (on pourra introduire le milieu de AB).

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \alpha$ (on pourra introduire un point bien choisi de la droite (AB)).

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} \geqslant 0$.

Exercice 6.

Soit ABC un triangle non rectangle en A. On note I le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à (AC) passant par C. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Exercice 7. On donne un triangle ABC dont on note G le centre de gravité. Pour tout point M, on note :

$$f(M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 + \|\overrightarrow{CM}\|^2.$$

a. En utilisant le produit scalaire, calculer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et de $\|\overrightarrow{GM}\|$.

b. En déduire la valeur minimum de la fonction f.

Exercice 8. On donne un triangle ABC dans le plan.

a. Quels sont les lieux géométriques décrits par les conditions suivantes ?

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

b. En utilisant a. montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes, c'est-à-dire qu'elles s'intersectent en un point.

Exercice 9. On donne deux points A et B dans le plan ainsi qu'un réel α. Quel est le lieu géométrique formé des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \alpha$? On discutera selon la valeur de α.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : $\frac{3}{10}\vec{v}$ et $\frac{5}{6}\vec{u}$.

Ex. 2 : $\frac{\pi}{4}$.

Ex. 4 : a. $xx' + xy' + x'y + 2yy'$, b. $\sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}$, c. $-3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Ex. 5 : a. la perpendiculaire à (AB) passant par A, b. la médiatrice de (AB), c. la perpendiculaire à (AB) passant par le point d'abscisse $\frac{\alpha}{4}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$, d. un demi-plan découpé par la perpendiculaire à (AB) passant par B.

Ex. 6 : $\overrightarrow{AI} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$.

Ex. 7 : a. $f(M) = f(G) + 3\|\overrightarrow{GM}\|^2$.

Ex. 8 : a. les hauteurs du triangle ABC.

Ex. 9 : un cerle, un point ou l'ensemble vide, selon que $\alpha >, =$ ou $< -\frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$.