Série 17

1. Etudier la courbe du plan Γ définie ci-dessous, déterminer les points remarquables et donner le tableau de variation, puis représenter graphiquement la courbe Γ (échelle : 4 carrés / unité).

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 + 2 \\ y(t) = -2t^3 + 9t^2 - 12t + 3 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

2. Faire l'étude complète de la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \dfrac{1 + t^4}{t^2} \end{cases}$$

3. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

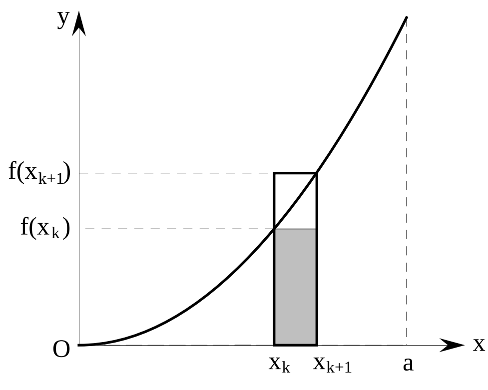
Indication : En plus de la parité et de la périodicité des fonctions coordonnées de la fonction vectorielle $\vec{r}\,(t)$, tester l'évaluation des fonctions coordonnées en $\pi - t$.

b) Faire l'étude de la courbe paramétrée sur l'intervalle I, puis en déduire le tracé de la courbe Γ.

4. Soit P_n une partition en n intervalles de même longueur de l'intervalle $[\,0\,,\,a\,]$, $a > 0$.

Calculer les deux sommes de Riemann de la fonction $f(x) = x^3$, en considérant pour l'intervalle $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$ un rectangle de hauteur $f(x_k)$, puis de hauteur $f(x_{k+1})$.

Montrer que ces deux sommes convergent vers la même valeur lorsque n tend vers l'infini.



Indication :
On pourra démontrer par récurrence le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$

Réponses de la série 17

1. Points remarquables.

- $M_0\,(2\,,\,3)$ est un point de Γ à tangente verticale.
- $M_1\,(3\,,\,-2)$ est un point stationnaire dont la tangente est de pente $m=-1$
- $M_2\,(-2\,,\,-1)$ est un point de Γ à tangente horizontale.

2. Branches paraboliques de direction $y=x$,
asymptote verticale $x=0$,
point stationnaire en $R\,(-1\,;\ 2)$ à tangente oblique (point de rebroussement),
point double en $D\,(1\,;\ 6)$ (non demandé),
tangente horizontale en $A\,(3\,;\ 2)$.

3. Tangente verticale en $A\,(1\,;\ 0)$,
tangente horizontale en $B\,(\frac{1}{2}\,;\ 1)$,
point stationnaire à tangente oblique en $C\,(-1\,;\ -1)$.

4.

- Rectangles de hauteur $f\,(x_k)$.

$$s_n = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{4}\cdot\frac{2n-1}{n^2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a^4}{4}\,.$$

- Rectangles de hauteur $f\,(x_{k+1})$.

$$S_n = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}\cdot\frac{2n+1}{n^2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^4}{4}\,.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \cdot \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2 .
\end{aligned}
$$