Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 19

Exercice 1

(a) Rappelons l'équation canonique de la parabole (centrée à l'origine, axe horizontal) :

$$y^2 = 2px, \quad \text{avec } p > 0\,.$$

$4y = x^2 + 4x + 8 \;\Leftrightarrow$
$4y = (x+2)^2 + 4 \;\Leftrightarrow$

$$4(y-1) = (x+2)^2\,.$$

On a alors $2p = 4$ et donc $p = 2$ et $\frac{p}{2} = 1$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Sommet : $S\,(-2;1)$
Foyer : $F\,(-2,2)$
Axe : $x = -2$
Directrice : $y = 0$

(b) $(y+1)^2 = 4(x+y+1) \;\Leftrightarrow$.
$y^2 + 2y + 1 = 4x + 4y + 4 \;\Leftrightarrow$
$y^2 - 2y + 1 = 4(x+1) \;\Leftrightarrow$

$$(y-1)^2 = 4(x+1)\,.$$

On a alors $2p = 4$ et donc $p = 2$ et $\frac{p}{2} = 1$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Sommet : $S\,(-1;1)$
Foyer : $F\,(0,1)$
Axe : $y = 1$
Directrice : $x = -2$

Exercice 2

(a) Rappelons l'équation canonique de la parabole (axe Oy) :

$$x^2 = \pm 2p(y-\beta) \text{ avec } p > 0\,.$$

Le sommet de la parabole se trouve sur l'axe Oy, donc $S\,(0,\beta)$.
La forme de l'équation, au vu de la position des points A et B, est : $x^2 = 2p(y-\beta)$ avec $p > 0$ et β à déterminer.

$A\,(-1,2)$: $\quad 1 = 2p(2-\beta) \quad (1)$
$B\,(7,10)$: $\quad 49 = 2p(10-\beta) \quad (2)$

On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & 4p - 2p\beta \\ 49 & = & 20p - 2p\beta \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \; p = 3 \;$ et $\; \beta = \frac{11}{6}$.

L'équation de la parabole :

$$x^2 = 6\left(y - \frac{11}{6}\right).$$

(b) Rappelons l'équation canonique de la parabole (axe horizontal, concavité à droite) :

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha) \text{ avec } p > 0\,.$$

Le point $A\,(2,1)$ appartient à la parabole. On a donc l'équation $(1-\beta)^2 = 2p(2-\alpha)$.

Le point $B\,(6,-3)$ appartient à la parabole. On a donc l'équation $(-3-\beta)^2 = 2p(6-\alpha)$.

On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\beta+3)^2 & = & 2p(6-\alpha) & (1) \\ (1-\beta)^2 & = & 2p(2-\alpha) & (2) \end{array} \right.$$

De plus, on compare la directrice tenant compte des paramètre avec la directrice donnée de façon numérique.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x-(\alpha-\frac{p}{2}) & = & 0 \\ x-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$\dfrac{\alpha-\frac{p}{2}}{1} = \dfrac{1}{1} \;\Leftrightarrow$

$\alpha = \frac{p}{2}+1 \;\Leftrightarrow$

$2\alpha = p+2 \;\Leftrightarrow$

$p = 2\alpha - 2 \;\Leftrightarrow$

$2p = 4\alpha - 4 = 4(\alpha-1)$.

On remplace dans les équations (1) et (2).

(1) $\beta^2+6\beta+9 = 4(\alpha-1)(6-\alpha) \;\Leftrightarrow$

$4\alpha^2+\beta^2+6\beta-28\alpha+33 = 0$.

(2) $\beta^2-2\beta+1 = 4(\alpha-1)(2-\alpha) \;\Leftrightarrow$

$4\alpha^2+\beta^2-2\beta-12\alpha+9 = 0$.

On soustrait l'équation (2) à l'équation (1) :

$$\left\{ \begin{array}{llcl} (1) & 4\alpha^2+\beta^2+6\beta-28\alpha+33 & = & 0 \\ (2) & 4\alpha^2+\beta^2-2\beta-12\alpha+9 & = & 0 \end{array} \right.$$

$-$ ―――――――――――――――――――

$$8\beta-16\alpha+24 = 0 \quad (3)$$

On obtient le nouveau système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \beta-2\alpha+3 & = & 0 & (3) \\ 4\alpha^2+\beta^2-2\beta-12\alpha+9 & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

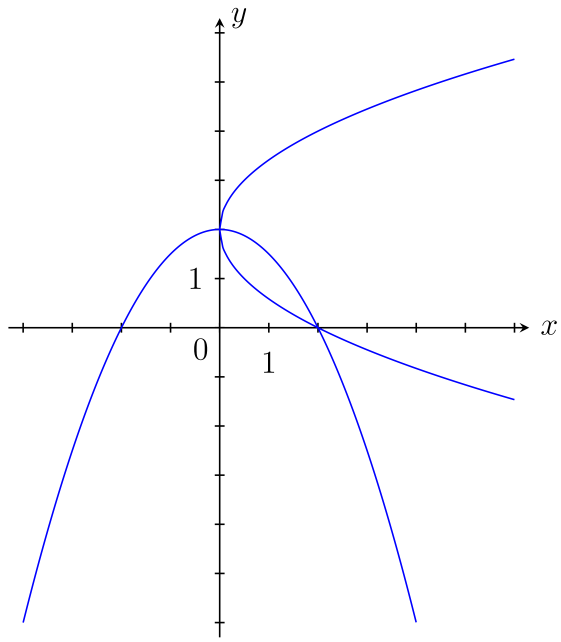
(3) $\Rightarrow \; \beta = 2\alpha - 3$.

On remplace dans l'équation (2) :

$4\alpha^2+4\alpha^2-12\alpha+9-4\alpha+6-12\alpha+9 = 0 \;\Leftrightarrow 8\alpha^2-28\alpha+24 = 0 \quad (4)$

(4) : $2\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0$
$\Rightarrow\ \alpha = 2\,, \beta = 1$ et $2p = 4$ ou $\alpha = \frac{3}{2}\,, \beta = 0$ et $2p = 2\,.$
D'où les équations des paraboles :

$$(y-1)^2 = 4(x-2) \quad \text{ou} \quad y^2 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\,.$$



(c)

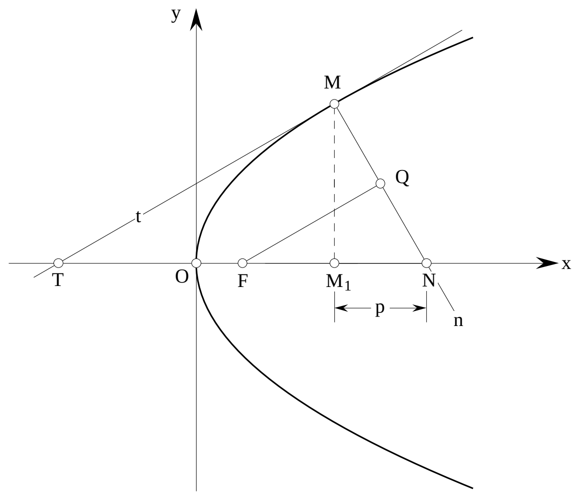
Vu la disposition des données, l'équation de la parabole peut prendre les deux formes suivantes :
i) $(y-2)^2 = 2px$
ii) $x^2 = -2p(y-2)$

Dans les deux cas, en remplaçant $A\,(2,0)$ dans chacune de ces deux équations, on trouve $p = 1\,.$
Equations des deux paraboles solutions :

$$((y-2)^2 = 2x \quad \text{ou} \quad x^2 = -2(y-2)\,.$$

Exercice 3

(a)



Equation de $\mathcal{P}$: $y^2 = 2\,p\,x$

Paramètre : $2p$

Foyer : $F\,(\frac{p}{2}\,;\,0)$

$M(x_0\,;\,y_0) \in \mathcal{P}$

t : $y\,y_0 = p\,x + p\,x_0$

$y_T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(-x_0\,;\,0)$

n : $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}\,(x - x_0)$

$y_N = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x_0 + p\,;\,0)$

- $M_1(x_0\,;\,0)$ et $N(x_0+p\,;\,0)$ $\Rightarrow$ $M_1N = p$ quel que soit $M \in \mathcal{P}$.

- $$\left.\begin{array}{lll} T(-x_0\,;\,0) \text{ et } F(\frac{p}{2}\,;\,0) & \Rightarrow & TF = x_0 + \frac{p}{2} \\ F(\frac{p}{2}\,;\,0) \text{ et } N(x_0+p\,;\,0) & \Rightarrow & FN = x_0 + \frac{p}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad TF = FN\,.$$

(b) Les deux triangles rectangles TNM et FNQ sont semblables et F est le milieu de TN donc Q est le milieu de MN .

Lieu de Q : $\begin{cases} x = x_0 + \frac{p}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}$ équation de liaison : $y_0^2 = 2\,p\,x_0$.

Elimination des paramètres x_0 et y_0 : $\begin{cases} x_0 = x - \frac{p}{2} \\ y_0 = 2y \end{cases}$

D'où : $(2y)^2 = 2\,p\,(x - \frac{p}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2\,\frac{p}{4}\,(x - \frac{p}{2})$.

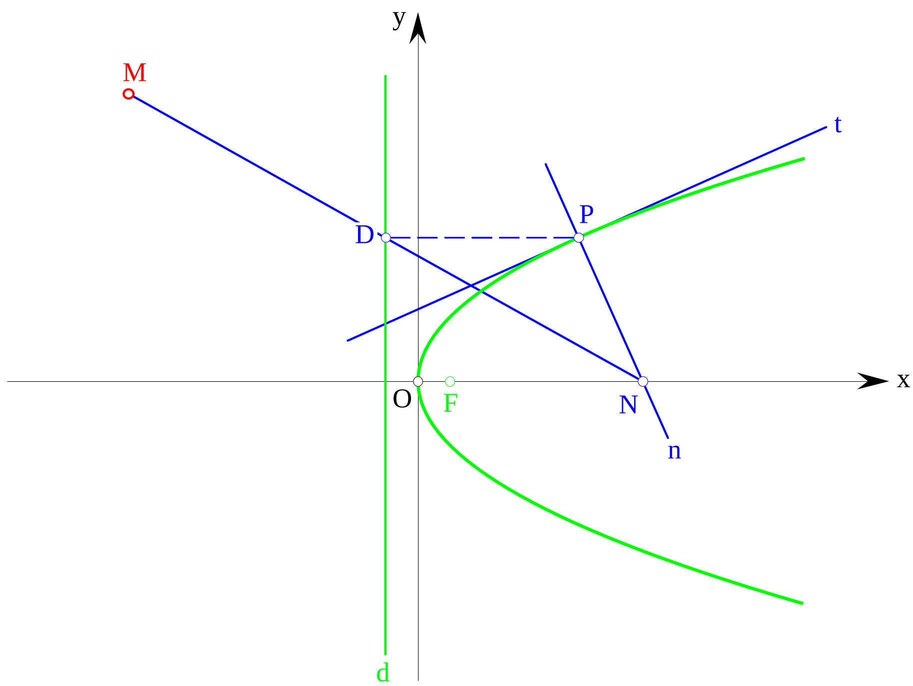
Le lieu de Q est une parabole d'axe Ox , de paramètre $2p'$ avec $p' = \frac{p}{4} > 0$ et de sommet $S'(\frac{p}{2}\,;\,0)$.

Equation de la directrice : d' : $x = x_{S'} - \frac{p'}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{p}{2} - \frac{p}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3p}{8}$.

Coordonnées du foyer : $F'(x_{S'} + \frac{p'}{2}\,;\,0)$, $F'(\frac{5p}{8}\,;\,0)$.

Exercice 4

Figure d'étude.



Choix des paramètres.

Les coordonnées x_0 et y_0 du point P .
Ces deux paramètres vérifient l'équation de liaison : $y_0^2 = 2p\,x_0$.

Mise en équation.

- Equation de la tangente t à $\mathcal{P}$ en P : $y\,y_0 = p\,x + p\,x_0$, $\quad (m_t = \frac{p}{y_0})$.
- Equation de la normale n à $\mathcal{P}$ en P : $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}\,(x - x_0)$.
- Coordonnées du point N :

  $y_N = 0 \quad \text{et} \quad -y_0 = -\dfrac{y_0}{p}\,(x_N - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_N = x_0 + p\,, \quad N(x_0 + p\,,\,0)$.
- Equation de la directrice d de $\mathcal{P}$: $d:\ x = -\frac{p}{2}$.
- Coordonnées du point D : $D(-\frac{p}{2}\,,\,y_0)$.
- Coordonnées du point M :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{ND} = 2\,\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{ON}\,,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 2\,y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 + p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 - 2\,p \\ 2\,y_0 \end{pmatrix}.$$

Elimination des paramètres x_0 et y_0 .

$$\begin{cases} x = -x_0 - 2\,p \\ y = 2\,y_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = -x - 2\,p \\ y_0 = \frac{y}{2} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad y_0^2 = 2p\,x_0\,,$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 2p\,(-x - 2\,p) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 8p\,(-x - 2\,p) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -2\,(4p)\,(x + 2\,p)\,.$$

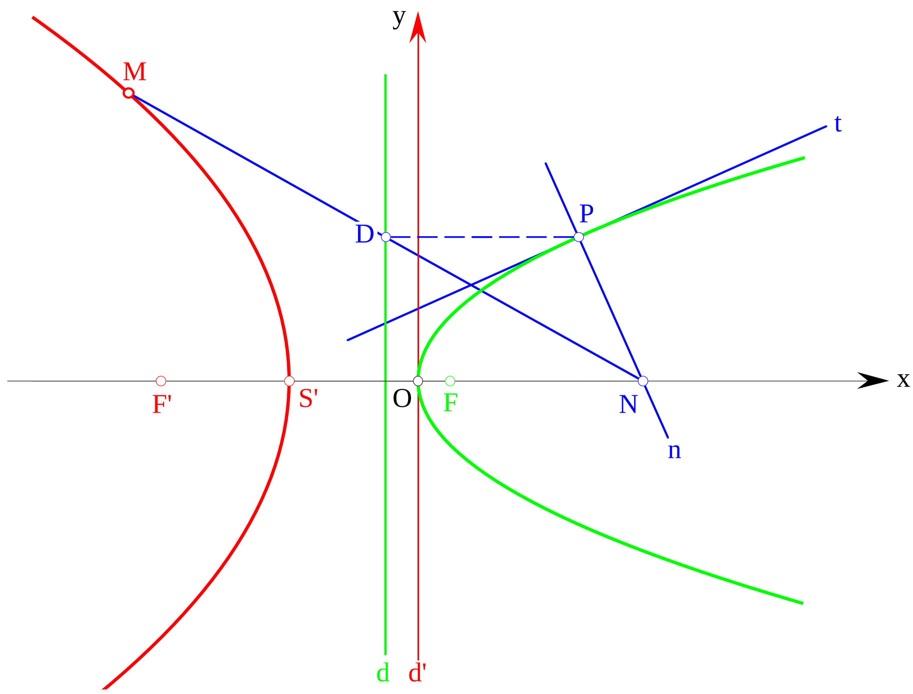
Le lieu de M est une parabole $\mathcal{P}'$ d'axe Ox , de sommet $S'(-2p\,,\,0)$, de paramètre $2\,p' = 2\,(4p)$ et dont la concavité est tournée dans le sens des x négatifs.

Equation cartésienne de la directrice d' de la parabole $\mathcal{P}'$.

$$d':\ x = x_{S'} + \frac{p'}{2} \quad \Leftrightarrow \quad d':\ x = -2p + 2p \quad \Leftrightarrow \quad d':\ x = 0\,, \qquad d' \equiv (Oy)\,.$$

Coordonnées du foyer F' de la parabole $\mathcal{P}'$.

$$x_{F'} = x_{S'} - \frac{p'}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{F'} = -2p - 2p \quad \Leftrightarrow \quad x_{F'} = -4p\,, \qquad F'(-4p\,,\,0)\,.$$



Exercice 5

(a) $T\,(x_0\,;\,y_0)\ \in\ t\ \Rightarrow\ T\,(2y_0+1\,;\,y_0)\,.$
L'équation de la parabole est : (à cause de la contrainte $x_M - 2\,y_M - 1 \geq 0$)

$$y^2 = +2p(x-\alpha) \quad et \quad p > 0$$

on veut déterminer p en fonction du paramètre α.

La polaire en T est la tangente en T :
$y_0 y = px_0 + px - 2p\alpha$ et $x_0 = 2y_0 + 1\,.$

$px - y_0 y + p(2y_0+1) - 2p\alpha = 0$
$px - y_0 y + 2py_0 + p - 2p\alpha$
Cette dernière équation est donc équivalente à celle de la tangente t : $x-2y-1 = 0$

D'où :

$$\frac{p}{1} = \frac{y_0}{2} = -2py_0 - p + 2p\alpha$$

Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} (1)\ 2p = y_0 \\ (2)\ p = -2py_0 - p + 2p\alpha \quad |:p(\neq 0) \\ (3)\ y_0 = 2(-2py_0 - p + 2p\alpha) = 2p \quad \text{selon (2), et on a (1) = (3)} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} (1)\ 2p = y_0 \\ (2)\ 1 = -2y_0 - 1 + 2\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 = -4p - 1 + 2\alpha \quad \Rightarrow \quad 4p = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

$4p = 2\alpha - 2$
$2p = \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

D'où :

$$y^2 = (\alpha-1)(x-\alpha)\,, \quad \alpha \in]1\,;+\infty[$$

(b) Il faut déterminer T et F en fonction de α.
$T\,(2y_0+1\,;\,y_0) = (2\alpha-1\,;\,\alpha-1)$ car $y_0 = 2p = \alpha - 1$
$F\,(x_S + \frac{p}{2}\,;\,0) = (\alpha + \frac{1}{4}\,(\alpha-1)\,;\,0)\ \Rightarrow\ x_F = \frac{5}{4}\,\alpha - \frac{1}{4}$

D'où $\frac{2}{3}\,x_T = x_F\ \Leftrightarrow$
$\frac{2}{3}\,(2\alpha-1) = \frac{5}{4}\,\alpha - \frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \alpha = 5$ et $2p = 4$

Et l'équation de la parabole est :

$$y^2 = 4(x-5)$$

Exercice 6

Utiliser la définition générale d'une conique : $\text{dist}(M,F) = e \cdot \text{dist}(M,d)$

On a l'égalité suivante :

$$\text{dist}(M,F) = \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(M,d)$$

Posons $M(x_M, y_M)$. On a :

$$\text{dist}(M,d) = \left|\frac{x_M + y_M - 1}{\sqrt{2}}\right|$$

De plus :

$$\text{dist}(M,F) = \|\overrightarrow{MF}\| = \sqrt{(3 - x_M)^2 + y_M^2}$$

Et donc :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{x_M + y_M - 1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{(3 - x_M)^2 + y_M^2}$$

Posons $x_M = x$ et $y_M = y$.

$(x + y - 1)^2 = 8((3 - x)^2 + y^2)$

$x^2 + (y - 1)^2 + 2x(y - 1) = 8(9 - 6x + x^2 + y^2)$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 + 2xy - 2x = 72 - 48x + 8x^2 + 8y^2$

$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 46x + 2y + 71 = 0$.