Contrôle d'analyse I N°4

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

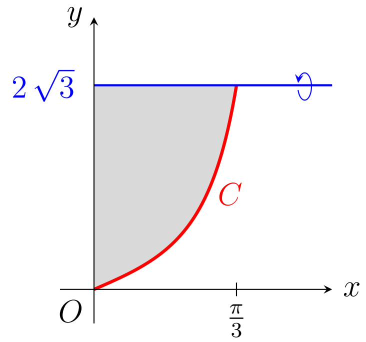
1. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{Th}(x)}{4 + \mathrm{Th}^2(x)}\,.$$ (exercice 3 b) série 20) 4,5 pts

2. Soit D le domaine du plan limité par la courbe C, l'axe Oy et la droite horizontale d'équation $y = 2\sqrt{3}$.

$$C: \quad y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,, \qquad x \in \left[\,0\,,\, \tfrac{\pi}{3}\,\right].$$

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $y = 2\sqrt{3}$. (exercice 6 série 22)



4 pts

3. Soit a un réel strictement positif. Calculer la longueur de l'arc Γ défini par

$$\Gamma: \quad y = \mathrm{Arcsin}\,(e^{-x})\,, \qquad 0 \le x \le a\,.$$ (exercice 1 d) série 23) 3 pts

4. Dans l'espace muni d'un système d'axes cartésien $(Oxyz)$, on considère une droite d et un arc Γ :

$$d: \quad x = y = z \qquad \text{et} \qquad \Gamma: \quad \begin{cases} x(t) = \ln(1+t) \\ y(t) = t \\ z(t) = -t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

On considère le corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe (Ox) sont des disques dont le centre appartient à la droite d et dont le cercle frontière coupe l'arc Γ. Calculer le volume du corps ainsi défini. 4,5 pts

$V = \frac{\pi}{3}\left[-3 + 6\ln(2) + 2\ln^3(2)\right]$

5. Dans le plan, on considère une droite d et l'arc d'ellipse Γ :

$$d: \quad y = x - 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma: \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\,\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Calculer l'aire du domaine fini limité par l'arc Γ et la droite d. $A = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}$ 4 pts

Tourner la page

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\operatorname{Sh}(x+y) = \operatorname{Sh} x\ \operatorname{Ch} y + \operatorname{Ch} x\ \operatorname{Sh} y \qquad \operatorname{Ch}(x+y) = \operatorname{Ch} x\ \operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} x\ \operatorname{Sh} y$$

$$\operatorname{Th}(x+y) = \frac{\operatorname{Th} x + \operatorname{Th} y}{1 + \operatorname{Th} x\ \operatorname{Th} y}$$

Formules de bissection :

$$\operatorname{Sh}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{2} \qquad \operatorname{Ch}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x + 1}{2} \qquad \operatorname{Th}(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\operatorname{Sh} x} = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$
$\operatorname{Th} x$	$\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$