Exercice 1. *Montrer que* 3 *est une valeur propre de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer le polynôme caractéristique de la matrice.) Ensuite trouver une base de l'espace propre associé.

Exercice 2. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a) Trouver les valeurs propres de A.

b) Trouver des bases des sous-espaces propres de A.

c) Peut-on déduire de a) si A est inversible ou non ?

d) Donner les valeurs propres de A^2.

e) Donner des bases des sous-espaces propres de A^2.

Exercice 3. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices A et B, leurs valeurs propres, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 4. *Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des polynômes, muni de la base $(p_0, p_1, p_2, \ldots)$ définie par $p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3, \ldots$. On considère le sous-espace vectoriel W engendré par les polynômes $q_1(t) = t^2 + 2$, $q_2(t) = t^2 - 2$, $q_3(t) = t^3 + 3$.*

a) Montrer que $B = (q_1, q_2, q_3)$ et $B' = (p_0, p_2, p_3)$ sont des bases de W.

b) Ecrire la matrice de passage $[\mathrm{id}]_{B,B'}$.

c) Utiliser la matrice $[\mathrm{id}]_{B,B'}$ pour calculer les composantes dans la base B des polynômes

$$p(t) = -1 + 3t^2 - 5t^3,\ q(t) = (t+a)(t+b)(t+c),$$

après avoir déterminé les conditions sur a, b, c pour que q appartienne à W.

d) Soit $T : W \to W$ une transformation linéaire telle que $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de T et déterminer la multiplicité algébrique et géométrique de chaque valeur propre.

Exercice 5. *Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que*

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Exercice 6. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Est-ce que* 4 *est une valeur propre de* A *? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.*
2. *Est-ce que*
$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est un vecteur propre de B *?*
3. *Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre* 3 *de* C*. Quelle est la dimension de cet espace propre ? Trouver la multiplicité géométrique de la valeur propre* 3 *de la matrice* C*.*
4. *Montrer que* 0 *et* 6 *sont des valeurs propres de* D*, calculer les espaces propres associés et déterminer les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre.*

Exercice 7. *Vrai ou Faux ? Montrer ou donner un contre-exemple.*
Soient A *une matrice de taille* 3×3 *inversible et* λ *une valeur propre de* A*.*

1. *Alors* $-\lambda$ *est une valeur propre de* $-A$*.*
2. *Alors* λ *est une valeur propre de* $-A$*.*
3. *Alors* $\lambda \neq 0$ *et* λ^{-1} *est une valeur propre de* A^{-1}*.*
4. *On a que* λ *est une valeur propre de* A^{-1}*.*
5. *On a que* $\lambda \neq 0$*.*

Exercice 8. *Sans poser d'équations, en utilisant les propriétés géométriques des applications décrites, trouver une valeur propre de* T *et décrire son espace propre dans les cas suivants :*

1. T *est la rotation dans* $\mathbb{R}^3$ *dont l'axe est la droite* $x = y = z$*.*
2. T *est une symétrie dans* $\mathbb{R}^2$ *par rapport à la droite* $y = 2x$*.*
3. T *est une projection orthogonale dans* $\mathbb{R}^3$ *sur le plan d'équation* $x + y + z = 0$*.*

Exercice 9. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— *Ecrire pour chaque matrice le polynôme caractéristique.*
— *Trouver pour chaque matrice les valeurs propres et les espaces propres correspondants.*

Exercice 10. *Soit* A *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$*. Montrer que* 0 *et* 6 *sont des valeurs propres de* A *et calculer les espaces propres associés. On pourra utiliser l'exercice 5. pour l'une des deux valeurs.*

Exercice 11. *Questions à Choix Multiples.*

a. *Soit* A *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ *Alors seulement* 6 *est une valeur propre de* A*.*
☐ *Alors* -6 *et* -4 *sont valeurs propres de* A*.*
☐ *Alors* 6 *et* 0 *sont valeurs propres de* A*.*
☐ *Alors* -4 *et* 6 *sont valeurs propres de* A*.*

b. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ *et* $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

- ☐ *Alors* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *mais pas* $\mathcal{C}$.
- ☐ *Alors* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *et* $\mathcal{C}$ *aussi.*
- ☐ *Alors* $\mathcal{C}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *mais pas* $\mathcal{B}$.
- ☐ *Alors* $\mathcal{B}$ *n'est pas une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *et* $\mathcal{C}$ *non plus.*

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ *et* $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$, *deux bases de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *On pose encore* $S = (Id)_{\mathcal{CB}}$ *et* $T = (Id)_{\mathcal{BC}}$ *et on considère les coefficients* s_{ij} *de* S *et les coefficients* t_{ij} *de* T.

- ☐ *Alors* $s_{13} = 3/2$ *et* $t_{23} = 0$.
- ☐ *Alors* $s_{13} = 9/16$ *et* $t_{23} = 3/2$.
- ☐ *Alors* $s_{13} = -1$ *et* $t_{23} = -3/4$.
- ☐ *Alors* $s_{13} = 3/2$ *et* $t_{23} = -9/8$.

d. Soit A *une matrice de taille* 2×2 *qui n'est pas inversible. Alors*

- ☐ 0 *est une valeur propre de* A.
- ☐ A *est la matrice nulle.*
- ☐ A *n'a pas de valeur propre réelle.*
- ☐ *tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *est un vecteur propre de* A.

Exercice 12. *Soient* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *et* λ *une valeur propre de* A. *Montrer que* λ^k *est une valeur propre de* A^k *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.