Semaine 10b 2022

Poutres statiquement indéterminées 2/2

PARTIE 1: (slide 3 - 12)
Poutres avec expansion thermique
(pas de gradient de température)

PARTIE 2: (slide 13 - 29)
Energie de déformation
(Chapitre 9.8 + 9.10 de Gere et Goodno)

Cdm1 micro-200

PROGRAMME DU COURS, semaines 7-10

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
		Herbert Shea		
7	mardi 01.11	Poutre: forces internes, relation différentielles, forces distribuées	x	
7	jeudi 03.11	ε et σ_normale en flexion pure. Moment inertie de poutre	x	Série 7
8	mardi 08.11	charge axiale (et normales). poutre composite		Série 7
8	jeudi 10.11	Flèche des poutres pt1	x	Série 8
9	mardi 15.11	Flèche des poutres pt 2	x	Série 8
9	jeudi 17.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 9
10	mardi 22.11	Flambage	x	Série 9+10
10	jeudi 24.11	Energie déformation	x	Série 10

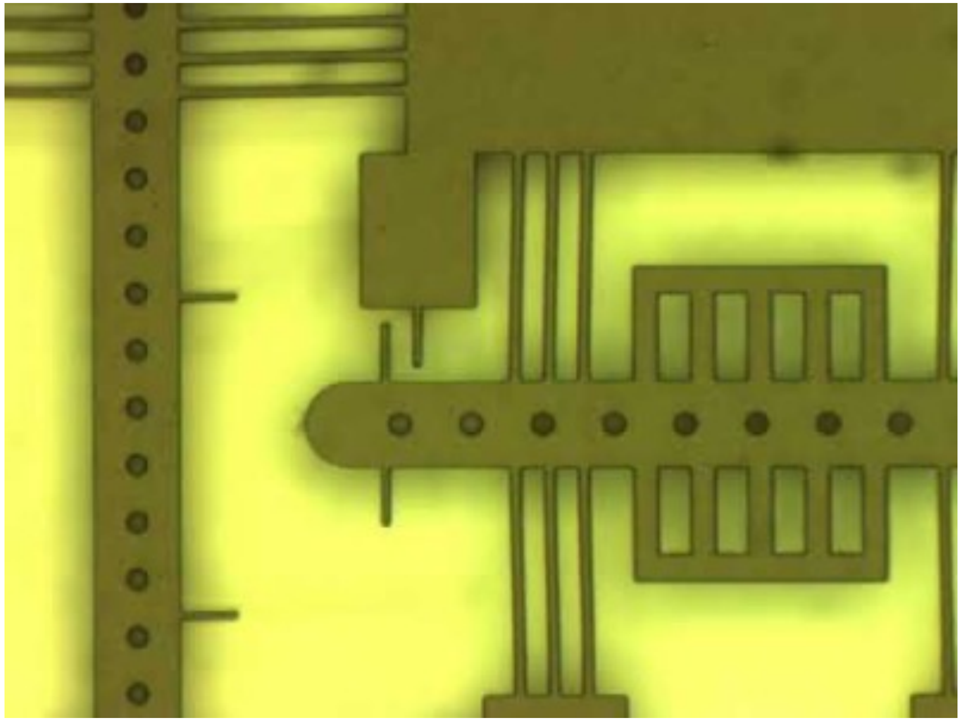
Semaine 10b – indéterminé partie 4 (slides 1-12) Objectifs d'apprentissage

- Savoir appliquer la méthode des poutres indéterminées aux cas où un des support a une expansion thermique (pas le cas où la poutre principale est chauffée)
- Trouver la flèche de poutres avec un supports avec expansion thermique

Calcul de flèche d’une poutre qui a un support avec expansion thermique

à petite échelle, les actionneurs thermiques

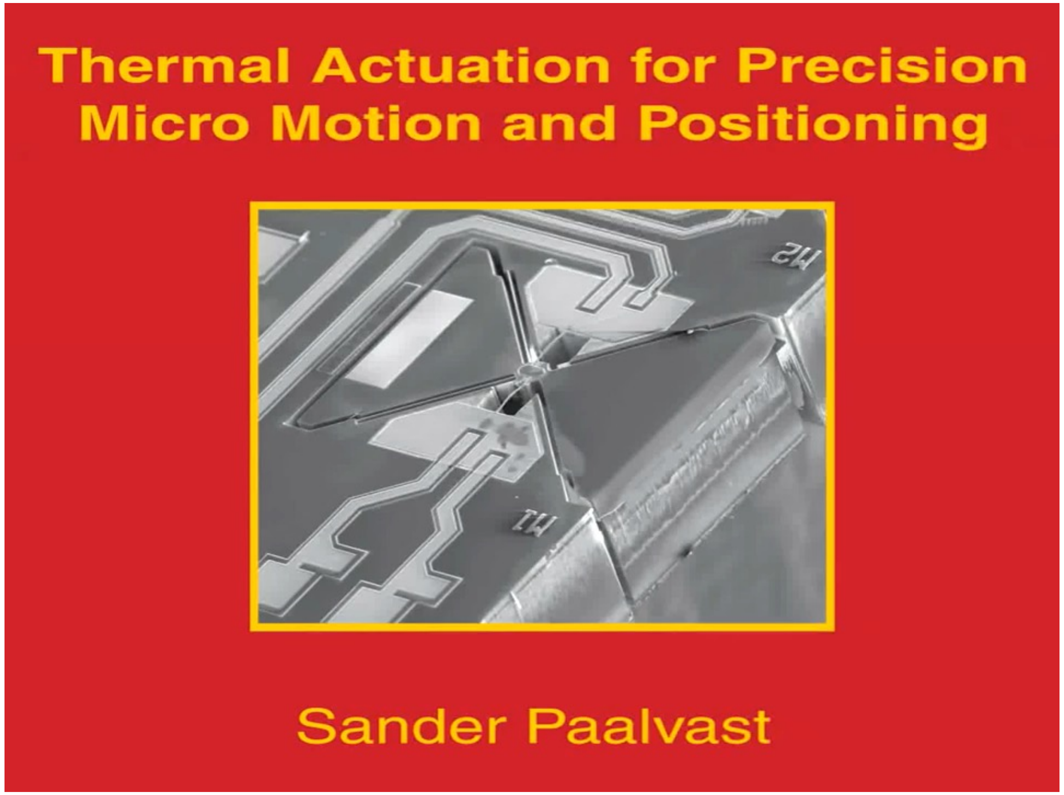
- haute densité d'énergie
- grande force
- faible rendement



https://youtu.be/BP1Jxj3Bxzc

Effects of temperature

Actionnement à petite échelle par expansion



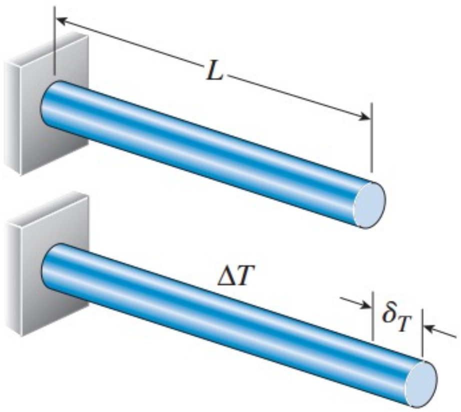
https://www.youtube.com/watch?v=kS8mN5i7jGE

Expansion thermique
(Rappel du début du semestre)

Les matériaux se dilatent généralement quand chauffés, s'il n'y a pas de contraintes géométriques. Déformation relative thermique ε_T

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha \Delta T$$

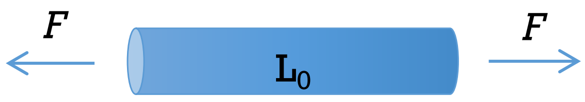
α est le coefficient d'expansion thermique (linéaire). unité de 1/K ou (mm/mm)/C ou C^{-1}



$$\boxed{\delta_T = \varepsilon_T L = \alpha\ \Delta T\ L}$$

rappel: expansion selon x, $\varepsilon = \varepsilon_x$

Superposition



Poutre «libre»: Si on applique une force **et** qu'on change la température

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{mech,\,F} + \varepsilon_{Therm}$$

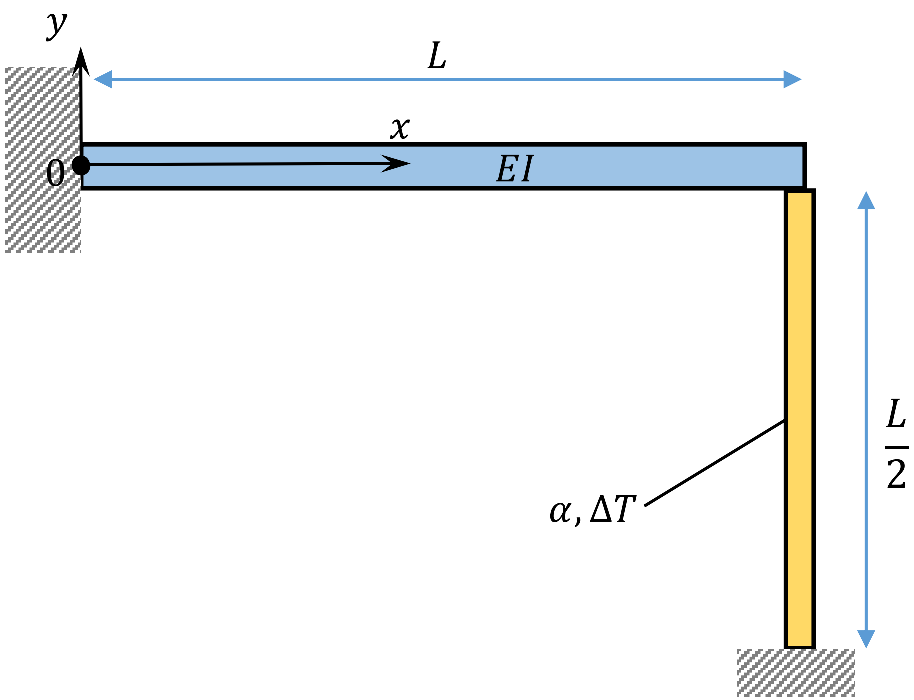
$$\varepsilon_{mech} = \sigma/E$$

$$\varepsilon_{Therm} = \alpha\, \Delta T$$

Les déformations relatives thermiques s'ajoutent aux déformations relatives dues aux forces externes

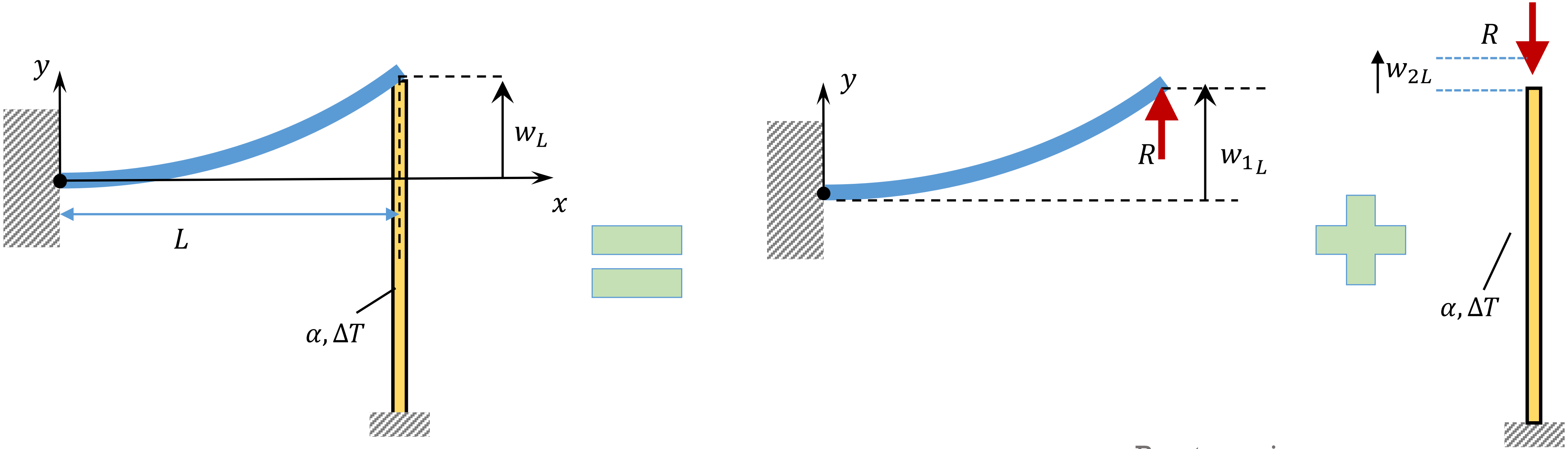
Exemple T1

- On augmente la température de la poutre verticale de ΔT.
- Trouver la flèche de la poutre bleue horizontale.



superposition: séparer le problème en “morceaux”et utiliser equ. de compatibilité

Solution T1

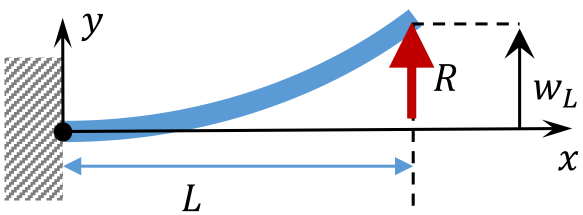


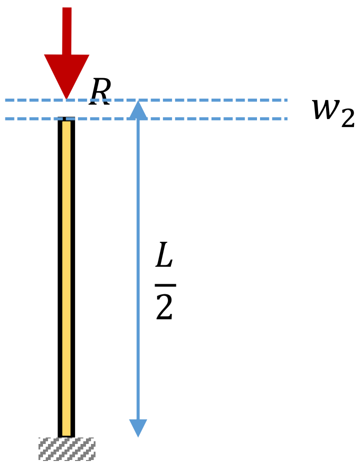
R est une inconnue

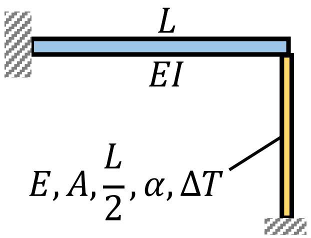
- Nous allons calculer la flèche de la poutre bleu, et la longueur de la poutre jaune.
- Compatibilité: ces deux déformations doivent être égales. $w_{1,L} = w_{2,L}$

(w_2 n'est pas la flèche en flexion, mais simplement le changement de longueur de la poutre jaune)

Solution T1







1. Trouver $w_1(x)$ *en fonction de R* par les formulaires
(par ex Gere et Goodno)

$$w_1(x) = \frac{RL^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)$$

$$w_{1,L} = w_1(L) = \frac{RL^3}{3EI}$$

2. Calculer le changement de longueur de la poutre jaune *en fonction de R* (*attention*, ici w_2 n'est pas une flèche d'une poutre en flexion, mais simplement un changement de longueur)

$$\varepsilon = \varepsilon_{Th} + \varepsilon_{Mec} = \alpha \Delta T - \frac{R}{EA}$$

$$w_{2,L} = \varepsilon \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\alpha \Delta T - \frac{LR}{2EA}$$

Solution T1

- l'équation de compatibilité nous donnera R : $\boldsymbol{w_{1,L} = w_{2,L}}$

$$w_{1,L} = w_{2,L} \quad \rightarrow \quad \frac{RL^3}{3EI} = \frac{L}{2}\alpha\Delta T - \frac{LR}{2EA}$$

$$\rightarrow R = \frac{EI\,\alpha\Delta T}{L^2\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{r}{L}\right)^2\right]}$$

avec $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$=radius of gyration

$$\boxed{w(x) = \frac{RL^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) = \frac{L\alpha\Delta T}{\left[4 + 6\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)}$$

$$\boxed{w(L) = \frac{L\alpha\Delta T}{\left[2 + 3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]}}$$

Semaine 10b –(slides 13 -30)

Objectifs d'apprentissage au sujet de l'énergie de déformation

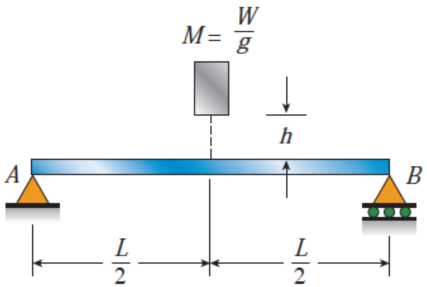
- Comprendre que l'énergie de déformation est toujours positive
- Calculer l'énergie de déformation de poutre avec des charges
- Calculer Déflection sous impacte par l'énergie

Energie de déformation (*strain energy*)

- Le travail fait par une force externe est stocké sous forme d'énergie élastique
- On peut résoudre certains problèmes liants force à déplacement (F-d, M-θ) en passant par l'énergie de déformation. (par exemple déplacement par impact)
- C'est un pas vers une méthode de résolution plus complète, passant par l'énergie: *le théorème de Castigliano*. La dérivé de l'énergie U par rapport à la force P_i donne le déplacement d_i

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

(pas à l'examen!)



Energie de déformation pour une poutre en flexion pure

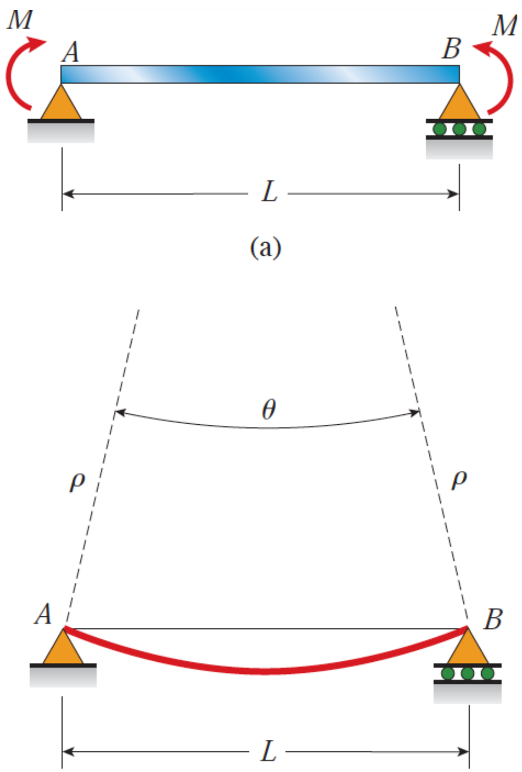
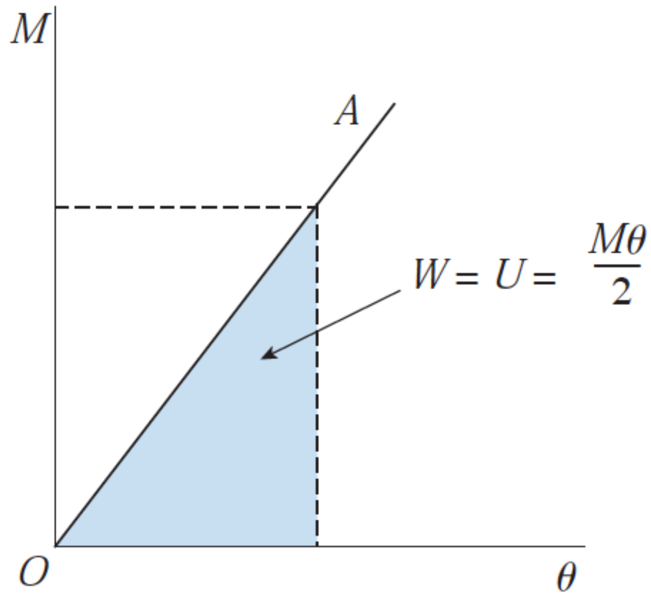


Diagram showing linear relationship between bending moments M and the angle θ



$$W = U = \frac{M\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{ML}{EI}$$

$$U = \frac{M^2 L}{2EI} \qquad U = \frac{EI\theta^2}{2L}$$

Et plus généralement $U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$ $\qquad U = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$

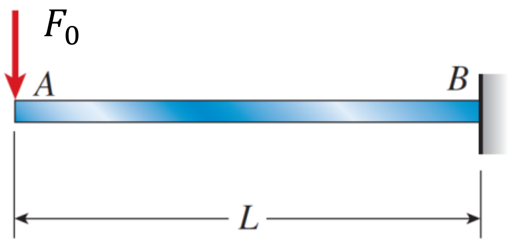
(on le calculera dans 2 slides)

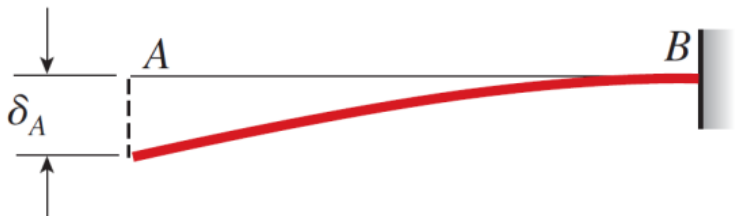
U est toujours positif

Energie de déformation pour les poutres

Force ou Moment ponctuels

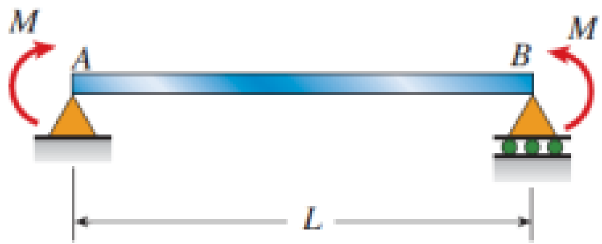
- Force F_0 crée un déplacement δ au point d'application:

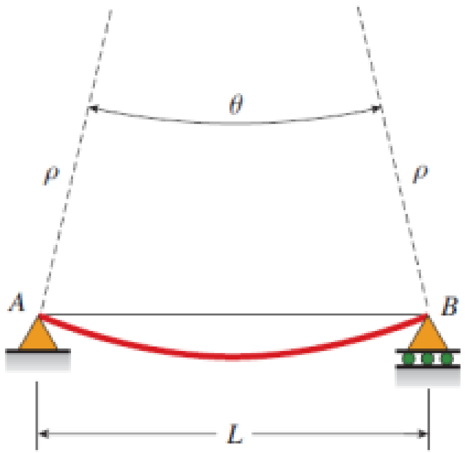




$$U_{F_0} = \frac{1}{2} F_0 \delta$$

- Moment M_0, crée un angle θ

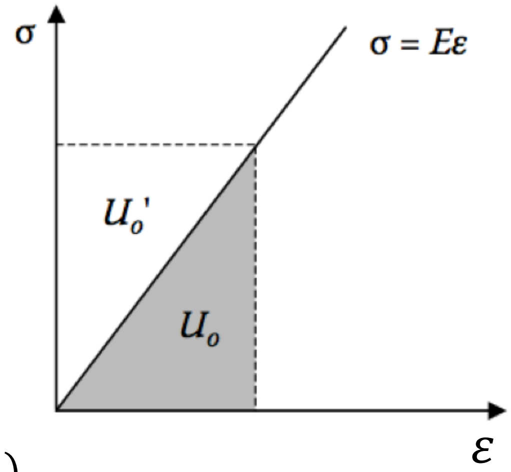




$$U_M = \frac{1}{2} M_0 \theta$$

Energie de déformation pour les poutres

- La *densité* d'énergie u_0 de déformation relative est la surface sous la courbe ε–σ. On intègre sur le volume de la poutre pour trouver l'énergie de déformation.



- déjà vu pour des poutres 1 en semaine 4 $$U = \int_V u_0 \, dV$$
- de façon générale, u_0 est une forme d'énergie potentielle

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

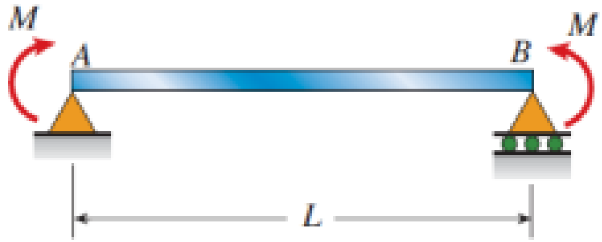
- Pour une poutre (longueur selon x), on peut simplifer:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{yx}\gamma_{yx}\right) \approx \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} \equiv \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x$$

  - L'énergie de déformation due à la contrainte en cisaillement est plus petite d'un facteur $\left({}^{\acute{e}paisseur}/_{longueur}\right)^2$ que l'énergie à la contrainte normale.
  - Nous négligeons donc généralement l'énergie de contrainte due à la contrainte en cisaillement.

Energie de déformation pour une poutre

- En flexion pure(M_0), monomatériau



$$U = \int_V u_0 \, dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x \, dV$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}^2} (y - y_0)^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dy \, dz$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}} dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{z,y_0} w''(x)^2 \, dx}$$

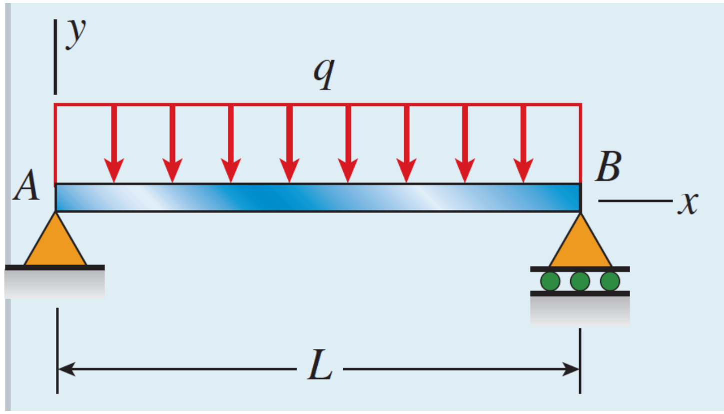
U toujours positif

Energie de déformation d'une poutre avec charge distribuée

- Option a) par le moment de flexion

$$M_z(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$$

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z}\, dx = \frac{q^2L^5}{240\ EI}$$



- Option b), par la déflection

$$w(x) = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{q^2L^5}{240\ EI}$$

Nous avons une poutre avec 2 charges, F_1 and F_2.

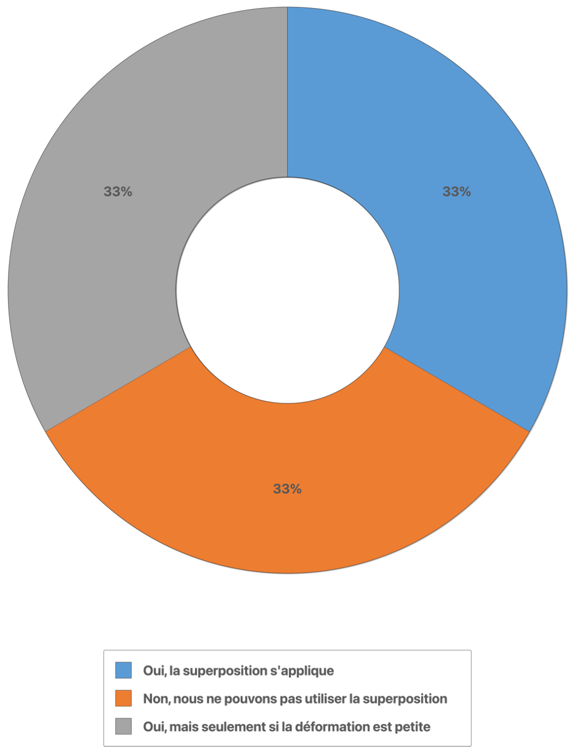
Pouvons-nous utiliser:

$$U_{tot} = U_{F_1} + U_{F_2} \text{ ?}$$

A. Oui, la superposition s'applique

B. Non, nous ne pouvons pas utiliser la superposition

C. Oui, mais seulement si la déformation est petite



Pour une poutre avec 2 charges, F_1 and F_2.

Pouvons-nous utiliser:

$$U_{tot} = U_{F_1} + U_{F_2} \text{ ?}$$

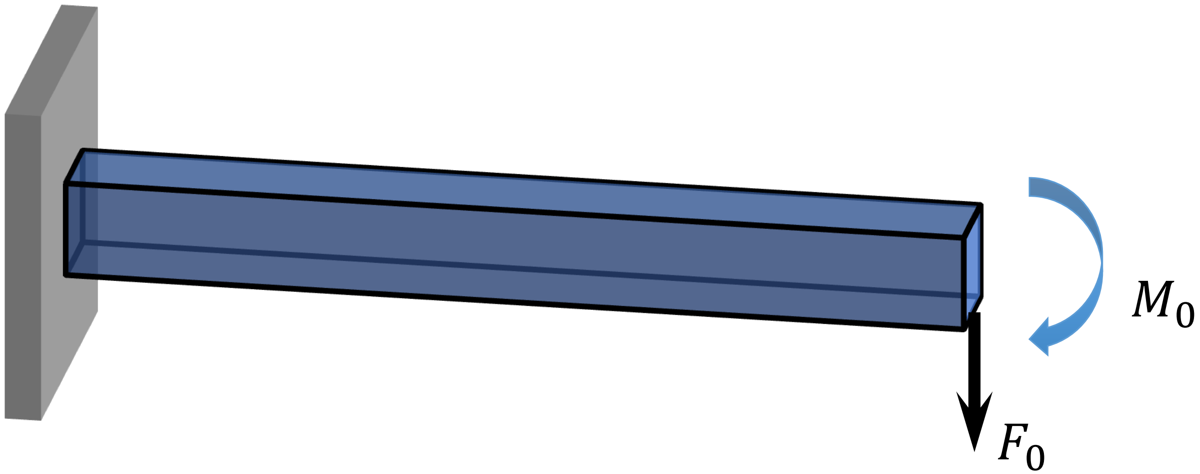
NON!

Nous ne pouvons pas utiliser le principe de superposition pour l'énergie, car l'énergie est l'intégrale du <u>carré</u> du moment interne.

quand c'est pas linéaire : pas de superposition !

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}} dx \;\; = \frac{1}{2}\int_0^L EI_{z,y_0} w''(x)^2 \, dx}$$

Exemple: poutre soumise à une force F_0 et un moment M_0

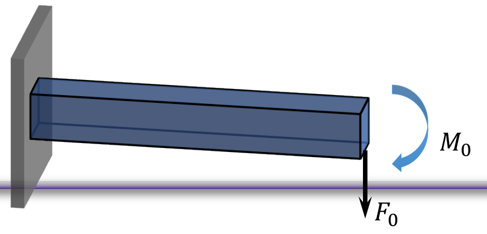


Calculons l'énergie de déformation de cette poutre de deux façons:

- méthode fausse: Calculer l'énergie associée au moment M_0, puis celle due à la force F_0, et les sommer.

- méthode juste: Calculer l'énergie du à la combinaison du moment et de la force

Exemple



- Moment interne du seulement au moment M_0

$$M_{M_0}(x) = -M_0$$

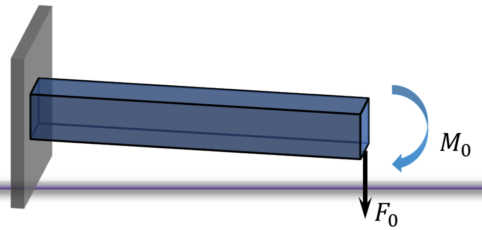
$$U_{M_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2}{2EI} L$$

- Moment interne du seulement à la force F_0

$$M_{F_0}(x) = F_0(x - L)$$

$$U_{F_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{F_0^2}{6EI} L^3$$

Exemple



- Moment interne du aux deux charges (F_0 et M_0) en même temps:

$$M_{interne}(x) = F_0(x-L) - M_0$$

$$U_{total} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx =$$

$$\frac{1}{2EI}\int_0^L (F_0(x-L) - M_0)^2\, dx = \frac{1}{2EI}\left(\frac{F_0^2 L^3}{3} + M_0^2 L + F_0 M_0 L^2\right)$$

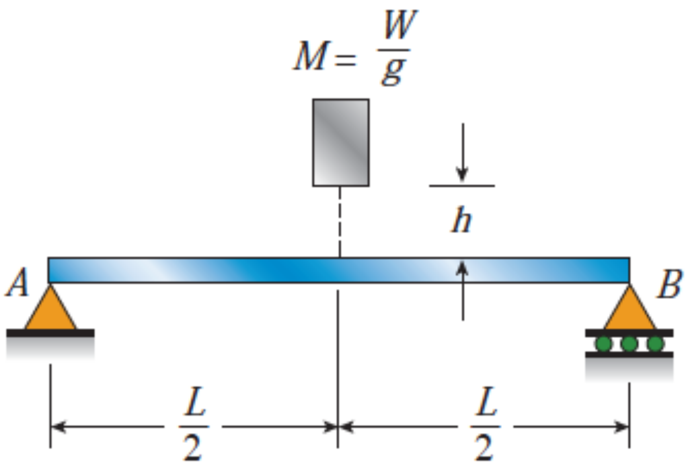
$$U_{total} = U_{M_0} + U_{F_0} + \frac{F_0 M_0}{2EI} L^2$$

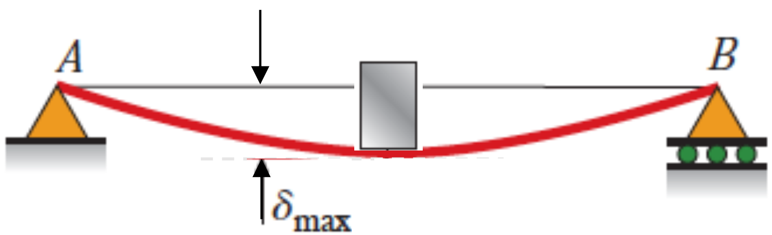
- **Nous ne pouvons pas utiliser le principe de superposition pour l'énergie,** car l'énergie est l'intégrale du carré du moment interne

Déformations (élastiques) produites par **impact**

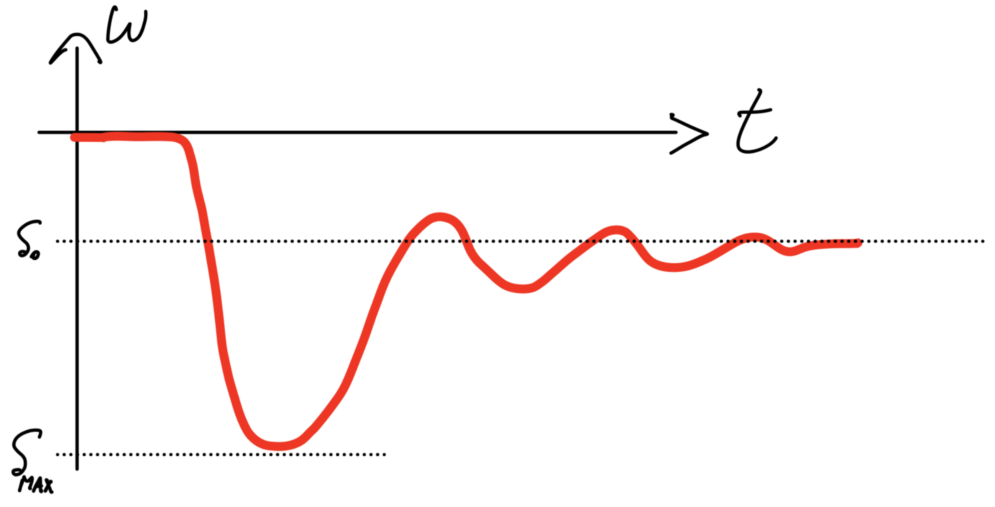
- La flèche maximale causée par l'impact est calculée avec l'hypothèse que toute l'énergie potentielle de la masse qui frappe la poutre est transférée à la poutre (le bloc ne rebondit pas, mais se colle à la poutre)
- donc utiliser la conservation d'énergie

$$Energie\ potentielle\ = Mg(h + \delta_{max})$$





- Après impact, la poutre se déforme pour une flèche maximale de δ_{max}, puis, si des pertres dans le système éventuellement arrive à la position statique δ_0



δ_0 est la déflection statique du à la masse M (sans impact)

Déformations par impact

- énergie de déformation relative

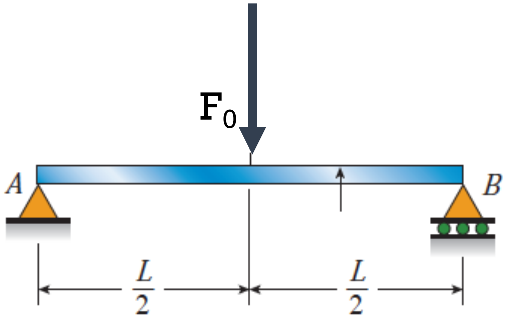
$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}}\,dx$$

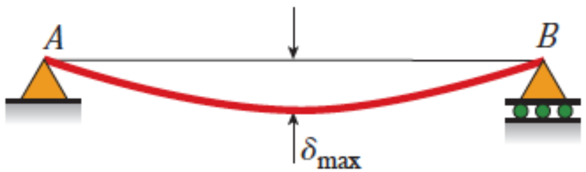
- Moment de flexion du à une charge ponctuelle F_0 au milieu de la poutre:

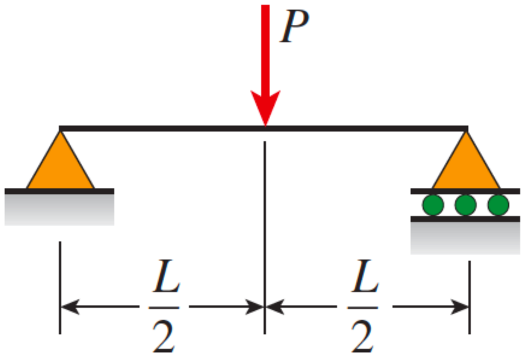
$$M_z(x) = \begin{cases} \frac{F_0}{2}x & x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{F_0}{2}(L-x) & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow U_{F_0} = \frac{F_0^2}{4EI_{z,y_0}}\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx = \frac{F_0^2}{12EI_{z,y_0}}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

On verra que $F_0 > Mg$







$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

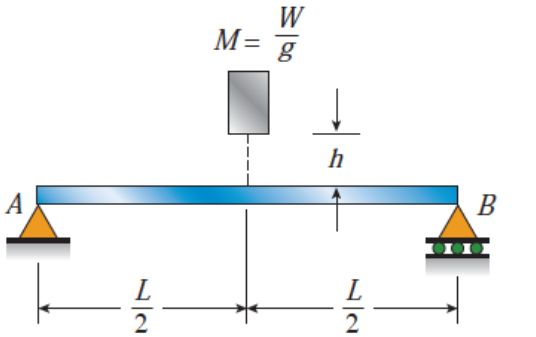
$$\delta_{max} = \frac{F_0 L^3}{48\ EI}$$

$$U_{F_0} = \frac{F_0^2}{12EI_{z,y_0}}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$\delta_0 = \frac{Mg\ L^3}{48\ EI}$$

$$U_{F_0} = \frac{24\ EI}{L^3}\delta_{max}{}^2$$

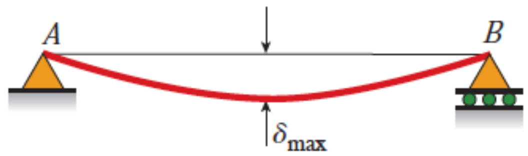
Déflections par impact



- Conservation de l'énergie

$$U_0 = Mg(h + \delta_{max})$$

$$U_{F_0} = \frac{24EI_{z,y_0}}{L^3}\delta_{max}^2$$



$$U_0 = U_{F_0}$$

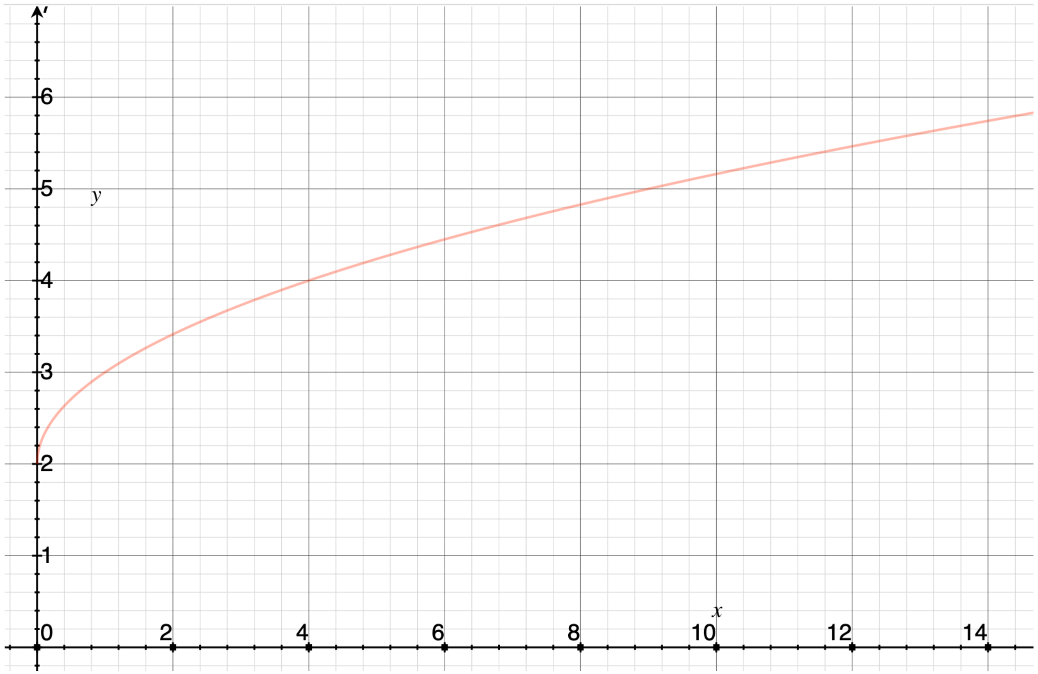
$$\rightarrow \delta_{max} = \frac{MgL^3}{48EI_{z,y_0}}\left(1 + \sqrt{1 + h\frac{96EI_{z,y_0}}{MgL^3}}\right) = \delta_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right) = \delta_{max}$$

δ_0 est la déflection statique du à la masse M (sans impact)

$$et\ donc\ F_0 = Mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right)$$

$$\frac{\delta_{max}}{\delta_0} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right)$$

$\delta_{max}/\ \delta_0$



h/δ_0

si h>>δ_0 $\quad \delta_{max} = \sqrt{2h\delta_0}$

si h=0 $\quad \delta_{max} = 2\ \delta_0$