Résumé Général

samedi, 5 janvier 2019 01:08

pente d'une droite

$xm + b = y$

$m = pente$

$b = offset$

$pour\ choisier\ le\ point\ le\ quelle\ passe\ la\ droite\ on\ remplace\ x\ et\ y\ par\ les\ coordoné\ du\ point\ et\ on\ mets\ b\ à\ la\ bonne\ valeur$

Produit vectoriel

Le produit vectorielle donne le vecteur normal au plan formé des deux vecteur dont on fais le produit

Définition de $\vec{u}x_R\vec{v}$ ("produit vectorielle en coordonées")

Soit R un repère de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\ et\ \vec{v}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\rho\end{pmatrix}\ deux\ vecteurs$

On définit le vecteur $\vec{u}x_R\vec{v}\ par\ la\ formule\ suivante :$

$$\vec{u}x_R\vec{v} = \begin{pmatrix}\beta\rho - \gamma\mu\\ -(\alpha\rho - \gamma\lambda)\\ (\alpha\mu - \beta\lambda)\end{pmatrix}$$

$Propriété\ de\ \vec{u}x_R\vec{v}\ pour\ R\ quelquonque$

Proposition; $\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\quad \forall\lambda\epsilon\mathbb{R},$

i) $\vec{u}x_R\vec{v} = 0 <=> \vec{u},\vec{v}\ colinéaire$

ii) $\vec{u}x_R\vec{v} = -\vec{v}x_R\vec{u}\ (anti\ symmétrie)$

iii) $\begin{cases}\vec{u}x_R(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}x_R\vec{v} + \vec{u}x_R\vec{w}\ \ (chasle)\\ (\vec{u}+\vec{v})x_R\vec{w} = \vec{u}x_R\vec{v} + \vec{v}x_R\vec{v}\ \ (toujours\ chasle)\end{cases}$

iv) $\lambda\vec{u}x_R\vec{v} = \vec{u}x_R\lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}x_R\vec{v})$

$[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\ \vec{u}\ x\ \vec{v})\cdot\vec{w}$

si le plus petit angle de u a v est positif, alors la famille est directe. si le plus petit angle est négatif (sens anti trigo) la famille est indirecte.

(règle main droite)

produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}|| * \cos(\theta) = (ou, seulement\ si\ le\ repère\ est\ orthonormé :)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\rho\end{pmatrix} = \alpha\lambda + \beta\mu + \rho\gamma$$

Nous donne 0 si les vecteur sont perpendiculaire. si i sont parallèle, la valeur est maximal

produit mixte

$Définition :$

$le\ produit\ mixte\ de\ \ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ est\ le\ réel\ définit\ par :$

$[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\ \vec{u}\ x\ \vec{v})\cdot\vec{w}$

Il contient donc le volume du parallélépipède formé et le signe détermine si la famille est directe ou indirecte.

$Proposition :$

$|[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}]|\ est\ le\ volume\ du\ parallélépipède\ construit\ sur\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}.$

Preuve :

$base : ||\vec{u}\times\vec{v}||$

Hauteur : $||\vec{w}|| * |cos\theta| = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v}) * \vec{w}|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}$

$Volume\ =\ base\ * hauteur = |(\vec{u}\times\vec{v}) * \vec{w}| = |[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$

Projection d'un vecteur :

Dans le plan : $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = Projeté\ de\ \vec{u}\ sur\ \vec{v}$

Norme d'un vecteur :

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ||\vec{a}||$

vecteur directeur

Les vecteur qui engendre la droite, le plan, l'espace, etc. SI il y en a plus que que la dimension de l'objet, il sont automatiquement lié. Si il n'est pas possible au moins un des vecteurs en fonction des autres, alors ils sont dit libre.

base

$\mathbb{B}(\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots)$ est la manière d'écrire la base d'un objet géométrique, c'est un peu comme les coordoné (x,y,z) sauf que v1 représente le vecteur unitaire dans le premiere direction, v2 dans la deuxieme et ainsi de suite.

Si V est un ev Réel

$\mathbb{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n) est\ une\ base\ de\ V$

Ssi

1) $\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n\ sont\ linéairement\ indépendant$

(on dit aussi que $\{\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n\}$ est libre)

2) E = $[\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n]_{sev}$ (càd $\forall\vec{x}\epsilon E : \vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$

Alors, $\vec{x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}_{\mathbb{B}}\ : uniuqes\ relativement\ à\ \mathbb{B}$

Famille Directe et indirecte :

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 <=> \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ est\ lié$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0 <=> \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ directe$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] < 0 <=> \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ indirecte$

Se référer au produit scalaire

$[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\ \vec{u}\ x\ \vec{v})\cdot\vec{w} \rightarrow positif\ alors\ directe\ sinon\ indirecte$

si le plus petit angle de u a v est positif, alors la famille est directe. si le plus petit angle est négatif (sens anti trigo) la famille est indirecte.

(règle main droite)

Équation :

Plan	espace
perpendiculaire $La\ somme\ des\ pente\ des\ deux\ droites = -1$	normal Déterminer si normal ou non : Si connais une équation cartésienne du plan, vérifier que les coefficient du vecteur normal et de a, b et c dans l'équation cartésienne du plan soient proportionnel. $\vec{n}(x,y,z) et\ P: AX + BY + CZ + D = 0$ Si on connais 2 vecteur du plan, il suffit de vérifier que le produit scalaire de ces deux vecteurs avec le vecteur normal soient bien égal a zéro

	Déterminer le vecteur normal : $ax + by + cz + d = 0$ *alors le vecteur normal* $\vec{n}(a, b, c)$ *Ou alors, on écrit un système d'équation donc les inconnue sont les composantes du vecteur normal et dont le produit scalaire est égal à zéro* *OU ALORS : On fait le produit vectorielle de deux vecteur du plan. et on trouve le vecteur normal de norme égal à l'air du parallélogramme formé par les deux vecteur du plan choisis.*

point	droite	plan
nombre de valeur X égal à la dimension	Dans le plan : équation cartésienne: $AX + BY + C = 0$ équation paramétrique : $\begin{cases} x = A + \alpha T \\ y = B + \beta T \end{cases}$ Dans l'espace : équation cartésienne : $\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Y + D' = 0 \end{cases}$ Remarque : les deux équation représente chacune un plan dans l'espace qui ne sont pas parallèle. équation paramétrique : $\begin{cases} x = A + \alpha T \\ y = B + \beta T \\ z = C + \gamma T \end{cases}$ Remarque : A B C représente un point de la droite et α, β, γ *le vecteurs directeur de celle − ci* système redondant à trois équation / triple égalité : $\frac{X-A}{\alpha} = \frac{Y-B}{\beta} = \frac{Z-C}{\gamma}$ *ou* $\begin{cases} \frac{X-A}{\alpha} = \frac{Y-B}{\beta} \\ \frac{Y-B}{\beta} = \frac{Z-C}{\gamma} \\ \frac{Z-C}{\gamma} = \frac{X-A}{\alpha} \end{cases}$ Remarque : α, β, γ *représente le vecteur directeur et* A, B, C *représente les coordoné d'un point* (Si A est positif, on ecrit X-A. c'est normal) À partir d'un point et d'une droite perpendiculaire : deux vecteur sont perpendiculaire si le produit de leurs pente est égal à -1 (fonctionne dans le plan)	Dans l'espace : équation cartésienne : $AX + BY + CZ + D = 0$ équation paramétrique : $\begin{cases} x = A + \alpha T + \mu U \\ y = B + \beta T + \rho U \\ z = C + \gamma T + \omega U \end{cases}$ Remarque : A B C représente un point de la droite et α, β, γ *et* μ, ρ *et* ω *les vecteurs directeur de celui − ci* système redondant à trois équation / triple égalité : $\frac{X-A}{\alpha} = \frac{Y-B}{\beta} = \frac{Z-C}{\gamma}$ *ou* $\begin{cases} \frac{X-A}{\alpha} = \frac{Y-B}{\beta} \\ \frac{Y-B}{\beta} = \frac{Z-C}{\gamma} \\ \frac{Z-C}{\gamma} = \frac{X-A}{\alpha} \end{cases}$ Remarque : α, β, γ *représente le vecteur directeur et* A, B, C *représente les coordoné d'un point* (Si A est positif, on ecrit X-A. c'est normal)

Distance entre les droites

Parallèle :

calculer le vecteur perpendiculaire au droite, prendre un point au hasard sur la première droite et additionner k fois le vecteur directeur de la perpendiculaire. jusqu'à atteindre l'autre droite. De la, calculer la longueur du segment. (donné par la racine de la somme des carré des delta de chaque coordonné.

gauche :

Faire le produit mix d'un vecteur qui v'as d'un point de la première drite a un autre de la seconde, et des deux vecteurs directeur de la droite.
faire le produit vectorielle de leurs vecteur directeur respective, on trouve le vecteur directeur de la normal.
le quotient des deux donne la distance.

$$\delta = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{||\vec{u} \times \vec{v}||} \quad (A \text{ et } B \text{ sont des points choisis au hazard. un sur chaque droite})$$

Distance entre une droite et un point :

$$Dist(M, d) = \left| \frac{aX_M + bY_M + C}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \qquad \text{avec } d \equiv ax + by + c = 0$$

$$\text{a partir du produit scalaire} : \left| \overrightarrow{MD} * \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \right| \qquad \text{ou } \overrightarrow{MD} \text{ est le vecteur du point } M \text{ au point } D \text{ qui est un point choisis au hazard de la drote et } n \text{ le vecteur normal à la droite}$$

$$\text{Le tétraèdre construit sur } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ a pour volume} : \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$