Analyse II : Contrôle N° 4

Corrigé - Barème sur 20 points

1. Soient les deux polynômes :

$$P(z) = 3z^5 - 5z^4 + 8z^3 - 7z^2 + 5z - 2 \quad \text{et} \quad Q(z) = z^3 + 1.$$

   (a) Par le schéma de Horner, calculer la valeur de $P(\frac{2}{3})$;

   (b) Décomposer $P(z)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$, sachant que $-i$ est une racine de $P(z)$;

   (c) Calculer le produit des racines non-réelles de $P(z)$;

   (d) A l'aide de l'algorithme d'Euclide , déterminer le PGCD de $P(z)$ et $Q(z)$ et le donner sous forme normalisée. 5 pts

---

(a) Par le schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & +3 & -5 & +8 & -7 & +5 & -2 \\
\frac{2}{3} & & +2 & -2 & +4 & -2 & +2 \\
\hline
 & +3 & -3 & +6 & -3 & +3 & +0
\end{array}$$
$\frac{1}{2}$ pt

$\dfrac{2}{3}$ est donc une racine ; (-$\frac{1}{2}$ pt) sans Horner $\frac{1}{2}$ pt

(b) Le polynôme $P(z)$ étant à coefficients réels, i est aussi une racine, donc $P(z)$ est divisible par (z^2+1) ; $\frac{1}{2}$ pt

on va diviser le pôlynome normalisé $P'(z)$ donné par le schéma de Horner : $\frac{1}{2}$ pt

$$\begin{array}{llll}
z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 & : & \underline{z^2+1} \\
\underline{z^4 \quad\; + z^2} & & z^2 - z + 1 \\
\quad -z^3 + z^2 \quad - z + 1 & & \\
\quad \underline{-z^3 \qquad\quad - z} & & \\
\qquad\quad z^2 \qquad + 1 & & \\
\qquad\quad \underline{z^2 \qquad + 1} & & \\
\qquad\qquad\quad 0 & &
\end{array}$$

$z^2 - z + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$: discriminant négatif ; $\frac{1}{2}$ pt

on trouve sa décomposition en facteurs irréductibles :

$$P(z) = (3z-2)(z^2-z+1)(z^2+1)$$
$\frac{1}{2}$ pt

(-$\frac{1}{2}$ pt) si la décomposition est faite dans $\mathbb{C}$

(c) Nous pourrions trouver toutes les racines, on pourrait donc en faire le produit; on va plutôt utiliser le théorème de Viète sur le polynôme $P'(z)$:

$$\prod_{i=0}^{5} z_i = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = \frac{1}{1} = 1\,.$$
$\frac{1}{2}$ pt

Algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{l|l}
3z^5 - 5z^4 + 8z^3 - 7z^2 + 5z - 2 & z^3 + 1 \\
\underline{3z^5 + 3z^2} & \overline{3z^2 - 5z + 8} \\
\quad -5z^4 + 8z^3 - 10z^2 + 5z - 2 & \\
\quad \underline{-5z^4 - 5z} & \\
\qquad 8z^3 - 10z^2 + 10z - 2 & \\
\qquad \underline{8z^3 + 8} & \\
\qquad\quad -10z^2 + 10z - 10 &
\end{array}$$

On continue :

$$\begin{array}{l|l}
z^3 + 1 & z^2 - z + 1 \\
\underline{z^3 - z^2 + z} & \overline{z + 1} \\
\quad z^2 - z + 1 & \\
\quad \underline{z^2 - z + 1} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Le PGCD est donc : $z^2 - z + 1$ (- 1 pt) si l'algorithme d'Euclide n'est pas utilisé $1\frac{1}{2}$ pts

2. Soit la fonction définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ par :

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{x}}$$

(a) Etablir le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$;

(b) Montrer que $f(x)$ est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$;

(c) Montrer que la courbe représentative Γ du prolongement de f admet une tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ et donner l'équation de cette tangente ;

(d) Représenter la courbe Γ au voisinage de $x_0 = 0$. 5 pts

(a)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}\ln(1-x)}$$

Pour avoir le d.l. de $f(x)$ au $V(0)$ à l'ordre 2, on effectue le d.l. de $\ln(1-x)$ à l'ordre 3 au $V(0)$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \in V(0)$$ 1 pt

$$-\frac{1}{x}\ln(1-x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

$$e^{-\frac{1}{x}\ln(1-x)} = e^{\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right]} = e \cdot e^{\left[\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right]}$$ 1 pt

et on utilise le d.l. de e^x dans le voisinage de 0 :

$$= e \cdot \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2} + ...\right)^2 + o(x^2)\right]$$ $\frac{1}{2}$ pt

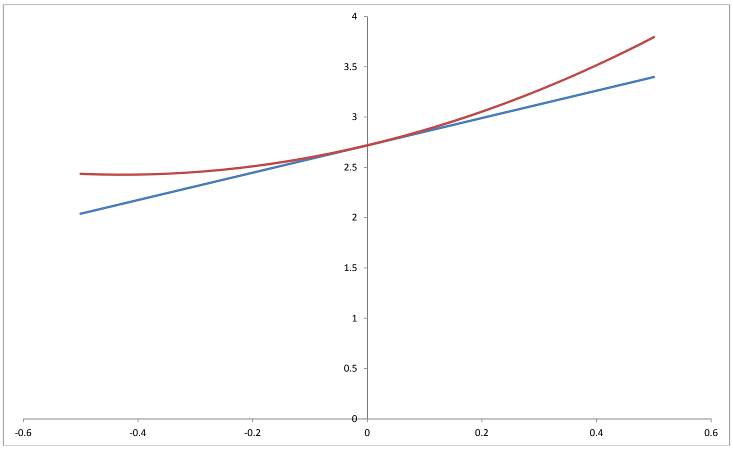
$$= e \cdot \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2)\right]$$ $\frac{1}{2}$ pt

(b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e \quad \Rightarrow \quad f$ est prolongeable par continuité en posant $f(0) = e$. $\frac{1}{2}$ pt

(c) L'équation de t = tangente en $x_0 = 0$ à Γ est : $y = e + \frac{e}{2}x$ (partie linéaire du d.l. de f au $V(0)$). $\frac{1}{2}$ pt

(d) $h(x) - y(x) = \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2) > 0$ au voisinage de 0 ; $\frac{1}{2}$ pt

(-$\frac{1}{2}$ pt) si le reste du d.l. ne figure pas ou est faux ;



$\frac{1}{2}$ pt

tangente en bleu et $f(x)$ en rouge

3. (a) Soit la fonction :

$$g(x) = \frac{Arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Établir le développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$ au voisinage de 0 ;

(b) Calculer alors la limite : 5 pts

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[\frac{Arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} - 1 - \frac{2}{3}x\right]$$

(a) Pour avoir le d.l. de $g(x)$ au $V(0)$ à l'ordre 2, on effectue le d.l. de Arcsin $\sqrt{x}$ donné dans le formulaire :

$$\text{Arcsin}\,\sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{6}x\sqrt{x} + \frac{3}{40}x^2\sqrt{x} + ...$$ 1 pt

Alors : $g(x) = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + ...$ $\frac{1}{2}$ pt

(b) On continue par une multiplication en puissance croissante :

$(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + ...) \cdot d.l.(1-x)^{-\frac{1}{2}}$; et par le formulaire,

$(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + ...) \cdot (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...)$ 1 pt

$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{15}x^2 + o(x^2)$ (l'absence du reste du d.l. est comptabilisé à la fin de l'exercice !) 1 pt

On peut maintenant calculer la limite proposée :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[\frac{Arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} - 1 - \frac{2}{3}x\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{15}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{2}{3}x\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[\frac{8}{15}x^2 + o(x^2)\right] = \frac{8}{15}$$ 1 pt

car $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{o(x^2)}{x^2}\right] = 0$ $\frac{1}{2}$ pt

4. On considère la transformation homographique $h \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$w = h(z) = \frac{2}{2-z} \quad \text{où} \quad z = x + iy \quad \text{et} \quad w = u + iv \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer le pôle et les points fixes de cette transformation ;

(b) Déterminer (nature et équation) et représenter graphiquement les images :

i. de la droite d : $x - 3y - 2 = 0$;

ii. du cercle Γ : $x^2 + y^2 - 2x = 0$;

(c) Quelle est l'image du secteur délimité par le cercle Γ et la droite d et contenant le centre du cercle Γ. 5 pts

---

(a) Le pôle P de la transformation est le point dont l'affixe z_P annule le dénominateur : $z_P = 2 \quad \Rightarrow \quad P = (2; 0)$ $\frac{1}{2}$ pt

Les points fixes sont donnés par : $z = \frac{2}{2-z} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i \quad \Rightarrow \quad F = (1; 1) \quad \text{et} \quad F' = (1; -1)$ $\frac{1}{2}$ pt

(b) i. la droite d passe par le pôle mais pas par les points fixes : elle se transforme en droite d'.

Elle passe par le pôle de l'application inverse, donc par l'origine du plan w; $\frac{1}{2}$ pt

on cherche l'image d'un autre point, par exemple : $A = (-1; -1)$ nous donne $A' = (\frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$ $\frac{1}{2}$ pt

$$d' : \quad u + 3v = 0$$

$\frac{1}{2}$ pt

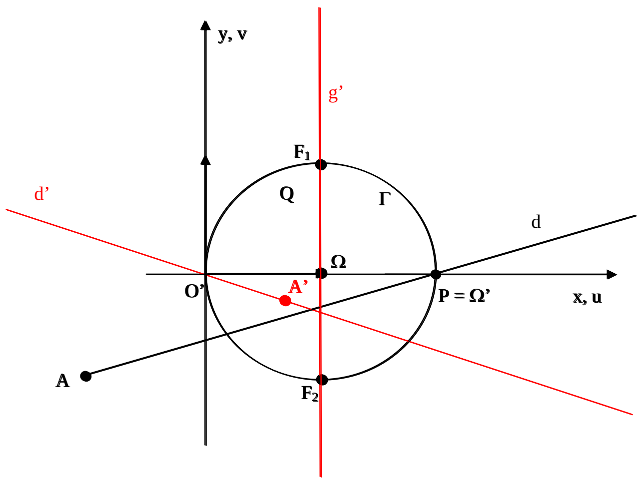
ii. Le cercle Γ est transformé en une droite g' car $P \in \Gamma$; de plus les deux points fixes obtenus précédemment sont aussi sur Γ, l'image $g' = h(\gamma)$ est donc la droite passant par les deux points fixes. $\frac{1}{2}$ pt

$$g' : \quad u = 1$$

$\frac{1}{2}$ pt

(-$\frac{1}{4}$ pt) pour la confusion entre (x, y) et (u, v) ;

iii. Le cercle Γ est centré en $\Omega(1; 0)$; on va donc chercher son image qui est le point $\Omega'(2; 0)$.
On peut maintenant faire la représentation graphique :
($\frac{1}{2}$ pt) par droite image en vérifiant la cohérence !



1 pt

On peux donc aussi en déduire l'image du domaine $\mathbb{D}$ cherché ; l'image $\mathbb{D}'$ est la portion de plan située entre les deux droites d' et g' contenant le point $\Omega'(2; 0)$. $\frac{1}{2}$ pt