EPFL

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique et optimisation
3 July 2021
de 16h15 à 19h15

1

Student One

SCIPER : **111111**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

PROJET

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 29 questions à **choix multiple** et 17 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le problème suivant : étant donné la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, trouver la fonction $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + x(1 + \sin(u(x))) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Question 1 Si $f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) + x(1 + \sin(\sin(2\pi x)))$, la solution de ce problème est donnée par

- [x] $u(x) = \sin(2\pi x)$
- [ ] $u(x) = \cos(2\pi x)$
- [ ] $u(x) = -\cos(2\pi x)$
- [ ] $u(x) = -\sin(2\pi x)$

On utilise une méthode de différences finies centrées pour approcher u et la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire obtenu. Le fichier `exam1.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

Question 2 A la ligne `a(i)=2*coeff+????`, il faut remplacer ??? par:

- [ ] `1+sin(u(i))`
- [ ] `i*h*(1+sin(u(i)))`
- [ ] `cos(u(i))`
- [x] `i*h*cos(u(i))`

Question 3 A la ligne `b(i)=coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1))+ ????-f(i*h);`, il faut remplacer ???? par:

- [x] `i*h*(1+sin(u(i)))`
- [ ] `1+sin(u(i))`
- [ ] `i*h*cos(u(i))`
- [ ] `cos(u(i))`

Question 4 A la ligne `c(i)=????;`, il faut remplacer ???? par:

- [x] `c(i)/a(i)`
- [ ] `a(i)/c(i)`
- [ ] `a(i+1)/c(i)`
- [ ] `c(i)/a(i+1)`

Question 5 A la ligne `a(i+1)=sqrt(a(i+1)-????);`, il faut remplacer ???? par:

- [ ] `a(i)*a(i)`
- [x] `c(i)*c(i)`
- [ ] `c(i)*a(i+1)`
- [ ] `c(i)*a(i)`

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 6 A la ligne `b(i+1)=(b(i+1)-c(i)*b(i))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- [x] `a(i+1)`
- [ ] `c(i)`
- [ ] `a(i)`
- [ ] `c(i+1)`

Question 7 A la ligne `b(i)=(b(i)-c(i)*b(i+1))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `c(i+1)`
- [x] `a(i)`
- [ ] `c(i)`
- [ ] `a(i+1)`

Question 8 A la ligne `u(i)=u(i)-????;`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `a(i)`
- [ ] `u(i)`
- [ ] `c(i)`
- [x] `b(i)`

Question 9 Après avoir complété le fichier, les résultats obtenus sont les suivantes:

```
>> err = exam1(9);
iter=1, stop = 1.649725e+00
iter=2, stop = 2.511976e-02
iter=3, stop = 7.045653e-06
iter=4, stop = 6.851657e-13
err = 0.031974
>> err = exam1(19);
iter=1, stop = 1.704753e+00
iter=2, stop = 2.564039e-02
iter=3, stop = 6.913912e-06
iter=4, stop = 6.217630e-13
err = 0.0082731
>> err = exam1(39);
iter=1, stop = 1.725976e+00
iter=2, stop = 2.577019e-02
iter=3, stop = 6.880664e-06
iter=4, stop = 6.025330e-13
err = 0.0020607
```

On déduit de ces résultats que :

- [ ] L'erreur est divisée par 2 si N est multiplié par 2
- [x] La méthode de Newton converge quadratriquement pour ce point de départ.
- [ ] La méthode de Newton converge quel que soit le point de départ.
- [x] L'erreur est divisée par 4 si N est multiplié par 2.

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Fichier exam1.m:

```
function err = exam1(N)
%
% Resolution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
% par une methode de differences finies
% et une methode de Newton
% Etant donne u, trouver u^{n+1}
% tel que DF(u^n)(u^n-u^{n+1}) = F(u^n)
% En pratique on construit A=DF(u^n), b=F(u^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose u^{n+1}=u^n-y
%
% parametres
%
%  N        : nombre d inconnues du systeme non lineaire
%  a        : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
%  c        : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
%  b        : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
%  x        : N-vecteur, contient u^n puis u^{n+1}
%
for i=1:N
    u(i) = 1;
end
h=1/(N+1);
coeff=(N+1)*(N+1);
stop=1;
iter=0;
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
        a(i) = 2*coeff+????;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = 2*coeff + ????;
    for i=2:N-1
        b(i) = coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1))+????-f(i*h);
    end
    b(N) = ????;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = sqrt(a(1));
    for i=1:N-1
        c(i) = ????;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1)-????);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Lz = b

    b(1)=b(1)/a(1);
    for i=1:N-1
        b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/????;
```

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

```
    end

    % resolution du systeme lineaire L^T y = z

    b(N)=b(N)/a(N);
    for i=N-1:-1:1
        b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/????;
    end

    %u^{n+1} = u^n - y

    for i=1:N
        u(i) = u(i) - ????;
    end

    % calcul de ||b||/||u||

    stop=norm(b)/norm(u);
    fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)
end
err=0;
for i=1:N
    err=max(err,abs(u(i)-uex(i*h)));
end
end
% second membre de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function f=f(x)
    f=4*pi*pi*sin(2*pi*x)+x*(1+sin(sin(2*pi*x)));
end
% solution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function uex=uex(x)
    uex=????;
end
```

PROJET

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Question 10 Cocher les affirmations vraies

- [ ] $\forall\ u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\exists\ C > 0$, $\forall\ 0 < h \leq 1$ on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4$$

- [ ] $\exists C > 0$, tel que $\forall\ u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\forall\ 0 < h < 1$, on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4 \max_{-2\leq x\leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

- [x] $\forall\ u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\exists\ C > 0$, $\forall\ 0 < h \leq 1$ on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4$$

- [ ] $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\exists C > 0$, $\forall 0 < h \leq 1$,

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4 \max_{-2\leq x\leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

- [x] $\exists C > 0$, tel que $\forall\ u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\forall\ 0 < h < 1$, on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4 \max_{-2\leq x\leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

- [ ] $\exists C > 0$, tel que $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\forall 0 < h \leq 1$, on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4$$

- [ ] $\exists C > 0$, tel que $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2]$, $\forall 0 < h \leq 1$, on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4$$

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

On considére le problème suivant: trouver la fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases}$$

Question 11 La formule variationnelle (ou faible) du problème consiste à trouver $u \in V$ telle que:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V,$$

où l'espace vectoriel V est donné par:

- [ ] $V = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g$ continue, g' continue par morceaux, $g(0) = 0,\ g(1) = 0\}$
- [ ] $V = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g$ continue, g' continue par morceaux$\}$
- [ ] $V = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g$ continue, g' continue par morceaux, $g(0) = 0\}$
- [x] $V = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g$ continue, g' continue par morceaux, $g(1) = 0\}$

Question 12 On note V_1 le sous espace vectoriel de V engendré par la fonction φ_1 définie par

$$\varphi_1(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Soit $u_1 \in V_1$ telle que

$$\int_0^1 u_1'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V_1$$

On a $u_1 =$

- [x] $\frac{1}{2}(1 - x)$
- [ ] $2(1 - x)$
- [ ] $1 - x$
- [ ] 0

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Soit n un entier positif, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}^0[0,1]$, des fonctions linéairement indépendantes. On considère m points d'interpolations $0 \leq x_1 < \cdots < x_m \leq 1$ pour lesquels des observations $y_1, \dots, y_m$ sont données. On cherche $\alpha^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(\alpha^*) \leq f(\alpha) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

où

$$\min_{\alpha_i} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_j) - y_j \Big)^2.$$

On peut montrer que α^* satisfait $A^T(A\alpha^* - b) = 0$, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Question 13
Pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$ la matrice A est définie par:

- [ ] $A_{ij} = \varphi_i(x_j)$
- [ ] $A_{ij} = \varphi_j(x_i)$
- [ ] $A_{ji} = \varphi_j(x_i)$
- [x] $A_{ji} = \varphi_i(x_j)$

Le fichier `exam2.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

Question 14 A la ligne `mat(j,i) = basis(N,i,????);`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `val(j)`
- [ ] `val(i)`
- [x] `xinterp(j)`
- [ ] `xinterp(i)`

Question 15 A la ligne `alpha=????;`, il faut remplacer `????` par:

- [x] `(mat'*mat)\(mat'*val)`
- [ ] `(mat'*val)\(mat'*mat)`
- [ ] `(mat*mat')\(mat*val)`
- [ ] `(mat*val)\(mat*mat')`

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Fichier exam2.m:

```
function exam2(N,M)
% N : nb of neurons
% M : nb of interpolation points
% mat: the rectangular matrix corresponding to the least square problem
% val: the values at interpolation points
% alpha : vector alpha containing the values of alpha_i for i=1,...,N
xinterp=zeros(M,1);
val=zeros(M,1);
for j=1:M
    xinterp(j)=j/(M+1);
    val(j)=1+tanh(100*(xinterp(j)-0.5));
end
mat=zeros(M,N);
for i=1:N
    for j=1:M
        mat(j,i) = basis(N,i,????);
    end
end
alpha=????
% plot results
xx=zeros(100,1);
yy=zeros(100,1);
for k=1:100
    xx(k)=k/101;
    yy(k)=sumbasis(N,alpha,xx(k));
end
axis([0 1 -1 1]);
plot(xinterp,val,'o',xx,yy);
refresh();
end
function sumbasis=sumbasis(N,alpha,x)
    sumbasis=0;
    for i=1:N
        sumbasis=sumbasis+alpha(i)*basis(N,i,x);
    end
end
function basis=basis(N,i,x)
    basis=max(0,x-i/(N+1));
end
```

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ où $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive et soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n$ tel que $-c_i \le x_i \le c_i,\ i = 1,\dots,n\}$ où $c \in \mathbb{R}^n$ est donné. On cherche $x^* \in \Omega$ tel que $f(x^*) \le f(x)$, $\forall\, x \in \Omega$. Soit $\mathcal{L}$ le lagrangien définit par

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \sum_{i=1}^{n}(\lambda_1)_i(x_i + c_i) - \sum_{i=1}^{n}(\lambda_2)_i(-x_i + c_i).$$

Les conditions KKT s'écrivent: $\exists\ \lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} Ax^* - b \ ???? & = 0 \\ x^* + c & \ge 0 \\ -x^* + c & \ge 0 \\ \lambda_1^* & \ge 0 \\ \lambda_2^* & \ge 0 \\ (\lambda_1^*)_i(????) & = 0,\ i = 1,\dots,n \\ (\lambda_2^*)_i(????) & = 0,\ i = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{1}$$

Question 16 A la 1ère ligne de (1) il faut remplacer ???? par

- [ ] $+\lambda_1^* + \lambda_2^*$
- [ ] $+\lambda_1^* - \lambda_2^*$
- [x] $-\lambda_1^* + \lambda_2^*$
- [ ] $-\lambda_1^* - \lambda_2^*$

Question 17 A la 6ème ligne de (1) il faut remplacer ???? par

- [ ] $x_i^* - c_i$
- [ ] $-x_i^* - c_i$
- [ ] $-x_i^* + c_i$
- [x] $x_i^* + c_i$

Question 18 A la 7ème ligne de (1) il faut remplacer ???? par

- [ ] $x_i^* + c_i$
- [x] $-x_i^* + c_i$
- [ ] $x_i^* - c_i$
- [ ] $-x_i^* - c_i$

On considère la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (1). On introduit $s_1 = x^* + c$ et $s_2 = -x^* + c$ et on écrit les lignes 1,2,3,6 et 7 de (1) sous la forme

$$F(x^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, s_1, s_2) = 0.$$

$\forall\ x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$ la matrice jacobienne $DF(x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2)$ est donnée par

$$DF(x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2) = \begin{pmatrix} A & ???? & ???? & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & -I \\ 0 & ???? & 0 & ???? & 0 \\ 0 & 0 & ???? & 0 & ???? \end{pmatrix}.$$

On note diagλ_1 la matrice $n \times n$ diagonale, de coefficients diagonaux $(\lambda_1)_i$.

PROJET

Question 19 Le bloc 1,2 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐ diagλ_1
- ☐ diagλ_2
- ☐ diags_2
- ■ $-I$
- ☐ I
- ☐ diags_1

Question 20 Le bloc 1,3 de la matrice jacobienne est donné par

- ■ I
- ☐ diags_1
- ☐ diags_2
- ☐ diagλ_1
- ☐ $-I$
- ☐ diagλ_2

Question 21 Le bloc 4,2 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐ diagλ_1
- ☐ I
- ☐ diagλ_2
- ☐ $-I$
- ☐ diags_2
- ■ diags_1

Question 22 Le bloc 4,4 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐ I
- ■ diagλ_1
- ☐ diags_1
- ☐ $-I$
- ☐ diagλ_2
- ☐ diags_2

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Soit $c \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ donnés, soit $\Omega = \{q \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Bq = c\}$, soit $f(q) = \frac{1}{2}||q||^2$, on cherche

$$q^* \in \Omega \text{ tel que } f(q^*) \leq f(q) \quad \forall\, q \in \Omega.$$

On introduit le lagrangien défini $\forall\, q \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \mu \in \mathbb{R}^m$ par

$$\mathcal{L}(q,\mu) = f(q) - \mu^T(Bq - c).$$

Les conditions KKT s'écrivent

$$\begin{pmatrix} I & ???? \\ ???? & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

Question 23 Le bloc 1,2 de cette matrice est égal à

- ☐ B
- ■ $-B^T$
- ☐ B^T
- ☐ $-I$
- ☐ I
- ☐ $-B$

Question 24 Le bloc 2,1 de cette matrice est égal à

- ☐ $-B$
- ☐ B^T
- ■ B
- ☐ I
- ☐ $-I$
- ☐ $-B^T$

Question 25 Le système linéaire (2) admet une solution unique

- ☐ sans condition sur B
- ■ si $\ker B^T = 0$
- ☐ si $\ker B = 0$

PROJET

On suppose que $B = M^o A^{-1}$ où $M^o \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique définie positive et $c = M^o(x^o - A^{-1}b)$ où x^o et $b \in \mathbb{R}^n$. Si q^* et μ^* sont solution de (2), il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} ???? & -I & 0 \\ 0 & A & ???? \\ M^o & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ q^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ M^o x^o \end{pmatrix} \tag{3}$$

Question 26 Le bloc 1,1 de cette matrice est égal à

- ☐ I
- ☐ $-M^o$
- ☐ $-I$
- ☐ M^o
- ☐ $-A$
- ☐ M^{oT}
- ■ A
- ☐ $-M^{oT}$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 27 Le bloc 2,3 de cette matrice est égal à

- [ ] M^o
- [ ] $-I$
- [ ] $-A$
- [ ] M^{oT}
- [x] $-M^{oT}$
- [ ] A
- [ ] $-M^o$
- [ ] I

PROJET

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et soit $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_j^T \varphi_i = \delta_{ji}, \quad (1 \text{ si } i = j, 0 \text{ sinon}),$$

avec $0 \le |\lambda_n| \le \cdots \le |\lambda_2| \le |\lambda_1|$.
Etant donné $x^0 \in \mathbb{R}^n$, on considère l'algorithme suivant

$$x^k = Ax^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Question 28 On a

- ☐ si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et si $(x^0)^T\varphi_n \neq 0$ alors
$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{||x^k||} = \varphi_n.$$
- ■ si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et si $(x^0)^T\varphi_1 \neq 0$ alors
$$\frac{x^k}{||x^k||} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \varphi_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)^{1/2}}$$
- ■ $x^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i)^k \varphi_i$, $k = 1, 2, \dots$
- ☐ $(x^k)^T x^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^k$
- ■ $x^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ avec $\alpha_i = (x^0)^T \varphi_i$

Soit m, n deux entiers $m \ge n$. Soit $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on pose $B = U\Sigma V^T$ où $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont deux matrices orthogonales ($UU^T = U^TU = I$, $VV^T = V^TV = I$) et $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice diagonale de coefficients $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge 0$.
On applique l'algorithme (4) avec $A = B^TB$.

Question 29 On a

- ■ $B^TBV = V\Sigma^T\Sigma$
- ☐ $B^TBU = U\Sigma\Sigma^T$
- ■ $B^TBv_i = \sigma_i^2 v_i$ $i = 1, \dots, n$ où v_i est le i^e vecteur colonne de V
- ☐ $B^TBu_i = \sigma_i^2 u_i$ $i = 1, \dots, n$ où u_i est le i^e vecteur colonne de U.

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on veut approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la formule du rectangle. Soit N un entier positif destiné à être grand, on note $h = \dfrac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$.

(a) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2}dt). \tag{5}$$

(b) Pour $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue donnée, on approche $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt$ par la formule du rectangle définie par $J(g) = 2g(0)$. Définir l'approximation $L_h(f)$ de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ obtenue en utilisant la formule du rectangle dans (5).

(c) On suppose $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$. Soit $i = 0, 1, \ldots, N-1$ fixé, soit $-1 \leq t \leq 1$, montrer que

$$f(x_i + h\frac{t+1}{2}) = p_i(t) + r_i(t) \quad \text{où } p_i \in \mathbb{P}_1,$$

expliciter p_i et r_i.

(d) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx - L_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\int_{-1}^{1} r_i(t)dt. \tag{6}$$

(e) Montrer que $\forall\ f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $\exists C > 0$, $\forall 0 < h < b-a$ on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| \leq Ch^2,$$

expliciter C.

(f) Que devient le point (e) si on remplace la formule du rectangle par $J(g) = 2g(-1)$?

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

PROJET

PROJET

PROJET

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(a) On choisit $x = x^* + sd$ où $d \in \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. Montrer que

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0$$

(on rappelle que $\nabla f(x^*)^T d = \lim_{s\to 0} \frac{f(x^*+sd) - f(x^*)}{s}$).
En déduire que $\nabla f(x^*) = 0$

(b) On pose $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ où $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive. Pour approcher x^* on applique la méthode du gradient:étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$, on pose $x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Montrer que

$$x^* - x_{k+1} = (I - \alpha A)(x^* - x_k).$$

(c) Soit une base orthonormée de vecteur propres de A:

$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\varphi_j^T \varphi_k = \delta_{jk} \quad (1 \text{ si } k = j, 0 \text{ sinon}),$$

avec $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Décomposer $x^* - x_k$ dans la base des vecteur propres et montrer que

$$||x^* - x_{k+1}|| \leq \max_{1\leq i\leq n} |1 - \alpha\lambda_i| \; ||x^* - x_k||.$$

En déduire que la méthode converge si $\alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.

PROJET

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.