Série 12

Exercice 1. Dans un repère orthonormé, on donne $d : \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{4-z}{5}$. Calculer la distance de d à chacun des axes de coordonnées (Ox), (Oy) et (Oz).

Solution: La droite d passe par $A(1, -3, 4)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Par ailleur, l'axe (Ox) passe par $O(0, 0, 0)$ et est dirigé par $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ est orthogonal à la fois à d et (Ox). La distance séparant ces deux droites est donc :

$$\delta = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{13}{\sqrt{74}}.$$

En raisonnant de même avec (Oy) (resp. (Oz)) on trouve une distance de $\sqrt{\frac{17}{2}}$ (resp. $\frac{16}{\sqrt{58}}$).

Exercice 2. Dans un repère orthonormé, on donne :

$$d : \begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } g : \begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 10 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Vérifier que d et g sont gauches.

b. Calculer la distance δ entre d et g.

c. Déterminer les équations paramétriques de la perpendiculaire commune à d et g, notée p, ainsi que les coordonnées de ses points d'intersection avec d et g.

Solution:

a. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est directeur de d, et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est directeur de g. Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, on voit que les droites d et g sont gauches ou sécantes. Par ailleurs, l'intersection de d et g correspond aux valeurs s et t des paramètres tels que :

$$\begin{cases} -7 + 4s = 6 + 4t \\ -1 + s = 2 - 3t \\ 3 - s = 10 + t \end{cases}$$

et on montre alors que ce système n'a pas de solutions. Par conséquent, l'intersection de d et g est vide, et ces droites sont donc gauches.

b. Le vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix}$ et est donc colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. La distance entre d et g est alors donnée par la formule :

$$\delta = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|},$$

où $A(-7, -1, 3)$ est sur d et $B(6, 2, 10)$ est sur g. On trouve alors $\delta = 9$.

c. Notons I le point d'intersection de p avec d et J celui de p avec g. Il existe donc des réels s et t tels que $I(-7+4s, -1+s, 3-s)$ et $J(6+4t, 2-3t, 10+t)$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, si bien que :

$$\overrightarrow{IJ} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} 13-4s+4t \\ 3-s-3t \\ 7+s+t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -4-12s-28t=0 \\ -97+33s-31t=0 \\ 49-15s+19t=0 \end{cases}$$

que l'on résout pour trouver $s=2$ et $t=-1$. On a donc $I(1,1,1)$ et $J(2,5,9)$. On a alors :

$$p : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+4t \ , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1+8t \end{cases}$$

Exercice 3. Dans un repère orthonormé, on donne $d : x+5 = \frac{y+7}{2} = 13-z$, $A(-1,2,1)$, $B(1,3,0)$ et $C(3,5,2)$. Déterminer les coordonnées d'un point D sur d sachant que le tétraèdre $ABCD$ est de volume 2.

Solution: La droite d a pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = -5+t \\ y = -7+2t \ , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 13-t \end{cases}$$

Le point D recherché a donc des coordonnées du type $D(-5+t, -7+2t, 13-t)$. On calcule alors les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4+t \\ -9+2t \\ 12-t \end{pmatrix}.$$

Comme le repère employé est orthonormé, le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à la valeur absolue de :

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4+t \\ 1 & 3 & -9+2t \\ -1 & 1 & 12-t \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 14-3t \\ 1 & 3 & -9+2t \\ 0 & 4 & 3+t \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(-2\cdot(3+t)-4\cdot(14-3t)) = \frac{1}{3}(31-5t).$$

Ce volume valant 2, on en déduit alors deux valeurs possibles pour t : 5 et $\frac{37}{5}$. Il y a donc deux points D solutions, à savoir le point de coordonnées $(0,3,8)$ et celui de coordonnées $(\frac{12}{5}, \frac{39}{5}, \frac{28}{5})$.

Exercice 4. Dans un repère orthonormé, on donne $A(2,2,-1)$, $B(1,0,1)$ et $C(1,-1,2)$ ainsi que :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x-2 = y+2 = \frac{z}{2}.$$

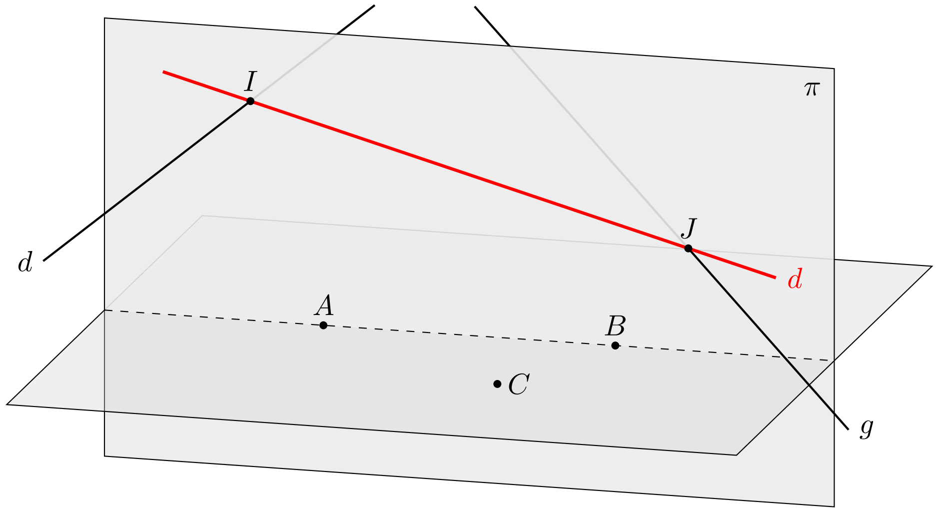
a. Vérifier que A, B, et C définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne.

b. Existe-t-il une droite p intersectant à la fois d et g, et dont la projection orthogonale sur (ABC) est la droite (AB) ? Si oui, déterminer des équations paramétriques de p.

Solution:

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés et définissent donc un plan, dont un vecteur normal est donné par $\pm\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne en est donc $y+z=1$.

b. Figure d'étude :



La droite p, si elle existe, doit être contenue dans le plan π contenant (AB) et perpendiculaire au plan défini par A, B et C. Comme π passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, on trouve qu'il admet pour équation cartésienne :

$$\pi : 4x - y + z = 5.$$

Par ailleurs, la droite p doit intersecter les droites d et g, et doit donc passer par un point I de $d\cap\pi$ et un point J de $g\cap\pi$. Un calcul montre alors que $I(2,3,0)$ et $J(1,-3,-2)$ sont les seules possibilités. Par conséquent, la seule droite candidate pour être solution est la droite $p=(IJ)$. Or cette droite coupe bien d et g, et sa projection orthogonale sur (ABC) est bien la droite (AB) (car elle est contenue dans π et n'est pas dirigée par $\vec{n}$). L'unique solution au problème posé est donc la droite d'équations paramétriques :

$$p : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+6t \\ z = 2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 5. Dans l'espace, on donne deux points A et B, ainsi que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ linéairement indépendants. Montrer que la droite $d(A,\vec{u})$ intersecte le plan $\pi(B,\vec{v},\vec{w})$ en un unique point I qu'on localisera depuis le point A.

Solution: La droite d passe par A et est dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Par conséquent, elle admet pour équation vectorielle :

$$d : \overrightarrow{AM} = t\vec{u},\ t\in\mathbb{R}.$$

Le plan π passe par B et admet pour vecteur normal $\vec{v}\times\vec{w}$. Vu depuis le point A, il admet donc pour équation normale :

$$\pi : \overrightarrow{AM}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}).$$

L'intersection de d et π correspond donc au(x) t tel(s) que :

$$\underbrace{(t\vec{u})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}_{t[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]} = \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}_{[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]}.$$

Or, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, donc $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ est non nul. On en déduit qu'il n'y a qu'un seul t solution de l'équation, et donc un seul point I dans l'intersection de d et π, à savoir :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{[\overrightarrow{AB},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}\vec{u}.$$

Exercice 6. Soit $\delta > 0$ fixé. Dans l'espace, on donne un plan π passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, ainsi qu'une droite d non perpendiculaire à π dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Localiser vectoriellement depuis le point A un point B sur π, sachant que (AB) est orthogonale à d et que B est à distance δ de A.

Solution: Comme le point B appartient à π, on peut affirmer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\vec{n}$. Par ailleurs, la droite d étant orthogonale à (AB), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi normal à $\vec{u}$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ n'étant pas colinéaires (car d est supposée ne pas être perpendiculaire à π), on voit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{n} \times \vec{u}$. Comme il est de norme δ, on trouve donc deux points solutions du problème :

$$\overrightarrow{AB} = \pm \frac{\delta}{\|\vec{n} \times \vec{u}\|} \vec{n} \times \vec{u}.$$

Exercice 7. Dans l'espace, on donne deux points A et B ainsi que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note π le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Localiser vectoriellement depuis le point A le symétrique orthogonal de B par rapport à π.

Solution: Notons H le projeté orthogonal de B sur le plan π. Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est donc la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur le vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ (qui est normal à π). Par conséquent, on a :

$$\overrightarrow{HB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2} \vec{u} \times \vec{v} = \frac{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2} \vec{u} \times \vec{v}.$$

On obtient donc :

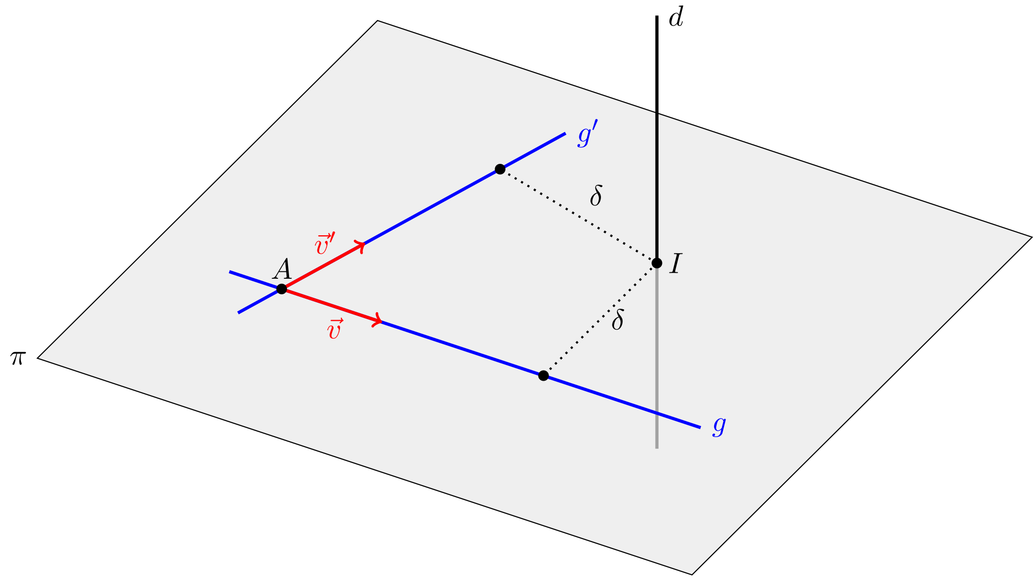
$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} - 2\frac{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2} \vec{u} \times \vec{v}.$$

Exercice 8. Dans un repère orthonormé, on donne $A(3, 0, 6)$ et :

$$d : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 3t \ , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 29 - 6t \end{cases}$$

Existe-t-il une droite g passant par A, orthogonale à d et à distance $\delta = 7$ de d ? Si oui, donner des équations paramétriques d'une telle droite.

Solution: Figure d'étude :



Une telle droite g, si elle existe, doit être contenue dans le plan π perpendiculaire à d passant par A, qui a pour équation cartésienne :

$$\pi : 2x + 3y - 6z + 30 = 0.$$

La perpendiculaire commune à d et g est alors contenue dans le plan π, et doit donc passer par le point d'intersection $I(6,8,11)$ de g et π. La distance de d à g est par conséquent égale à la distance de I à la droite g. Considérons alors un vecteur directeur $\vec{v}$ de π qui a donc des composantes du type $\begin{pmatrix} 3\alpha \\ 2\beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$, et cherchons à quelle condition sur α et β la droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$ est solution du problème. Pour cela, on calcule la distance de I à cette droite :

$$\delta = \frac{\|\overrightarrow{AI} \times \vec{v}\|}{\|v\|}.$$

Comme le repère est orthonormé, un calcul montre alors que $\overrightarrow{AI} \times \vec{v}$ a pour composantes :

$$\pm \begin{pmatrix} 8\alpha-2\beta \\ 12\alpha-3\beta \\ -24\alpha+6\beta \end{pmatrix} = \pm(4\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(il est normal qu'on trouve un vecteur directeur de d : pourquoi ?). La condition devient donc :

$$49 = \frac{(8\alpha - 2\beta)^2 + (12\alpha - 3\beta)^2 + (-24\alpha + 6\beta)^2}{(3\alpha)^2 + (2\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2} = \frac{49(4\alpha - \beta)^2}{10\alpha^2 + 5\beta^2 + 2\alpha\beta}.$$

Cette équation est équivalente à :

$$3\alpha^2 - 2\beta^2 - 5\alpha\beta = 0 \text{ ou encore } (\alpha - 2\beta)(3\alpha + \beta) = 0.$$

Il y a donc deux familles de vecteurs qui fournissent des droites solutions, à savoir les vecteurs colinéaires à $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (qui correspondent à $\alpha - 2\beta = 0$) et ceux colinéaires à $\vec{v}'\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ (qui correspondent à $3\alpha + \beta = 0$). On trouve donc deux droites solutions du problème posé, à savoir :

$$g : \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } g' : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -6t \\ z = 6 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$