Série 8

1. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $A = \cos(\arcsin(-3))$ c) $C = \tan(\arccos(-\frac{1}{3}))$ e) $E = \cos(2\arccos(\frac{2}{5}))$

b) $B = \sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ d) $D = \tan(\pi - \arctan(2))$ f) $F = \sin(-2\arctan(2))$

2. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$ c) $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$

b) $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$ d) $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5}))$

3. Montrer que : $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos(\frac{15}{17}) = \arcsin(\frac{77}{85})$.

4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$, e) $\tan x = -\frac{3}{2}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

b) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3}$, $x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]$, f) $\cot(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}$, $x \in \,]\,\pi\,,\,3\pi\,[$,

c) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$, $x \in [-\pi\,,\,0\,]$, g) $\tan(2x) = 2$, $x \in \,]-\pi\,,\,0\,[$,

d) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]$, h) $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in \,]\,\pi\,,\,3\pi\,[$.

5. Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$, c) $\tan(2x) \geq 2$, $-\pi \leq x \leq 0$.

b) $\cot x \geq -\frac{1}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq x < 0$,

6. Exprimer la somme S suivante à l'aide d'une seule valeur de la fonction $\arctan x$.

$$S = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 7 + \arctan 8$$

Indication : commencer par calculer $\arctan 2 + \arctan 3$, puis $\arctan 7 + \arctan 8$.

7. Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes :

a) $a(x) = \arccos(\sqrt{x}\,)$ c) $c(x) = \arcsin(\tan x)$

b) $b(x) = \tan(\arcsin x)$ d) $d(x) = \tan(2\,\arccos x)$

Réponses de la série 8

1. a) A n'existe pas c) $C = -2\sqrt{2}$ e) $E = -\dfrac{17}{25}$

b) $B = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ d) $D = -2$ f) $F = -\dfrac{4}{5}$

2. a) $A = \dfrac{\pi}{3}$ b) $B = \dfrac{5\pi}{12}$ c) $C = -\dfrac{\pi}{12}$ d) $D = \dfrac{\pi}{10}$

4. a) $S = \left\{\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\ ,\ 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$,

b) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\ ,\ \frac{7\pi}{3} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$,

c) $S = \left\{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$,

d) $S = \emptyset$,

e) $S = \left\{\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\ ,\ 2\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$,

f) $S = \left\{\frac{7\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right)\ ,\ \frac{13\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$,

g) $S = \left\{\frac{1}{2}\cdot\arctan(2) - \pi\ ,\ \frac{1}{2}\cdot\arctan(2) - \frac{\pi}{2}\right\}$,

h) $S = \left\{2\cdot\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi\right\}$.

5. a) En posant $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\arccos(-\frac{3}{4})$,

$S = [\,0\,,\ \alpha\,]\ \cup\ [\,\pi - \alpha\,,\ \pi + \alpha\,]\ \cup\ [\,2\pi - \alpha\,,\ 2\pi\,]$,

b) $S = [-\frac{3\pi}{2}\,,\ -2\pi + \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})\,]\ \cup\ ]-\pi\,,\ -\pi + \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})\,]$,

c) $S = [-\pi + \frac{1}{2}\cdot\arctan(2)\,,\ -\frac{3\pi}{4}\,[\ \cup\ [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(2)\,,\ -\frac{\pi}{4}\,[$.

6. $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$, $\arctan 7 + \arctan 8 = \arctan(-\frac{3}{11}) + \pi$,

$S = \arctan(-\frac{7}{4}) + 2\pi\ =\ 2\pi - \arctan(\frac{7}{4})$.

7. a) $D_a = [\,0\,,\ 1\,]$ c) $D_c = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

b) $D_b =]-1\,,\ 1\,[$ d) $D_d = [-1\,,\ 1\,] \setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$