Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 7

Valeurs propres : exercice 3

Rappel :

- n vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.
- un vecteur propre est toujours différent du vecteur nul.

Hypothèse : f admet n valeurs propres distinctes.

Conclusion : les n vecteurs propres associés sont linéairement indépendants.

Preuve par l'absurde :

On considère les deux hypothèses H et non C :

f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n$
et
les n vecteurs propres associés $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants.
Ces n vecteurs sont donc différents du vecteur nul et l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.
On écrit l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des $n-1$ autres et on applique f à ce vecteur.

D'où :

$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \, \vec{v}_i$ et $\vec{v}_i \neq \vec{0} \,, \quad i = 1 , \ldots , n$

$\lambda_i \neq \lambda_j \,, \quad i \neq j \,, \quad i \,, j = 1 , \ldots , n$

On peut toujours supposer que le vecteur $\vec{v}_n$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres. C'est-à-dire, il existe $\alpha_1 , \ldots , \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\vec{v}_n \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \vec{v}_i \qquad (1)$$

On applique f des deux côté. D'où (par linéarité)

$$f(\vec{v}_n) \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, f(\vec{v}_i) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n \, \vec{v}_n \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \lambda_i \, \vec{v}_i \qquad (2)$$

Or par (1)

$$\lambda_n \, \vec{v}_n \ = \ \lambda_n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \vec{v}_i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n \, \vec{v}_n \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \, \alpha_i \, \vec{v}_i$$

Et on remplace à gauche de l'égalité (2), d'où

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \, \alpha_i \, \vec{v}_i \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \lambda_i \, \vec{v}_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \, \alpha_i \, \vec{v}_i \; - \; \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \lambda_i \, \vec{v}_i \; = \; \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n \, \alpha_i \; - \; \alpha_i \, \lambda_i) \vec{v}_i \; = \; \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, (\lambda_n \; - \; \lambda_i) \vec{v}_i \; = \; \vec{0}$$

Par hypothèse : $\lambda_n \neq \lambda_i$, et $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, $\quad i = 1 \, , \ldots , n-1$.
Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, (\lambda_n \; - \; \lambda_i) \vec{v}_i \; = \; \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \, , \quad i = 1 \, , \ldots , n-1$$

D'où

$$\vec{v}_n \; = \; \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, \vec{v}_i \; = \; \vec{0} \qquad (3)$$

On a donc simultanément, $\vec{v}_n \neq \vec{0}$ (car c'est un vecteur propre) et par (3), $\vec{v}_n = \vec{0}$.
Ce qui est impossible.
Les n vecteurs propres sont donc linéairement indépendants.

Valeurs propres : exercice 4

Par hypothèse $E(-9)$ est la droite $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur (non nul)appartenant à $E(-9)$ est un vecteur propre.
En particulier $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de matrice N.
$\vec{u}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -9 si et seulement si $f(\vec{u}) = -9 \, \vec{u}$.

$$\begin{aligned}
f(\vec{u}) = -9 \, \vec{u} \quad & \Leftrightarrow \quad N \, U = -9 \, U \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b & 2a & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -a & 4b & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2b - 4a - 4 = -18 \\ 16 - 2 + 4 = 18 \\ -2a - 8b + 7 = -9 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a - b - 7 = 0 \\ 18 = 18 \\ a + 4b - 8 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $a = 4$ et $b = 1$.

Valeurs propres : exercice 6

L'idée est de calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_3)$.
Puis de le développer en utilisant les opérations d'invariance sur les lignes et les colonnes afin d'obtenir un polynôme partiellement factorisé.
Le polynôme caractéristique de A est du 3ième degré et comporte un paramètre. D'où l'intérêt qu'il soit déjà partiellement factorisé.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & t & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & t & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \\ 2 & 5+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\,(\lambda^2 + 3\lambda - 14 + 2t)$$

On pose $r(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 14 + 2t$

Ainsi : $p(\lambda) = (3-\lambda)\, r(\lambda)$

Les racines de $p(\lambda) = (3-\lambda)\, r(\lambda)$ sont les valeurs propres de A, donc ce polynôme doit admettre une racine double.

Il y a deux cas à considérer :
soit $\lambda = 3$ est une valeur propre double, soit la valeur propre double est différente de 3.

- $\lambda = 3$ **est la valeur propre double** : c'est donc la racine double de $p(\lambda)$.

  Or $p(\lambda) = (3-\lambda)\, r(\lambda)$ et $r(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 14 + 2t$

  Ainsi le polynôme $r(\lambda)$ admet 3 comme racine :

  $r(3) = 0 = 9 + 9 - 14 + 2t \;\Rightarrow\; t = -2$

  En remplaçant dans $p(\lambda)$, on obtient :

  $$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda)\,(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = \\ &= (3-\lambda)\,(\lambda-3)\,(\lambda+6) \end{aligned}$$

  Les trois valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = -6$

- **La valeur propre double est différente de** 3.

  Dans ce cas, le polynôme $r(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 14 + 2t$ est un carré parfait. Son discriminant est donc nul.

  $\Delta = 9 - 4\,(2t - 14) = 0 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{65}{8}$

  En remplaçant dans $p(\lambda)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (3-\lambda)\,(\lambda^2+3\lambda-14+2\,\frac{65}{8}) \;= \\
&= (3-\lambda)\,(\lambda^2+3\lambda+\frac{9}{4}) \;= \\
&= (3-\lambda)\,(\lambda+\frac{3}{2})^2
\end{aligned}
$$

Les trois valeurs propres sont :

$\lambda_1 = \; -\dfrac{3}{2}$ de multiplicité 2 et $\lambda_3 = 3$ de multiplicité 1.

Valeurs propres : exercice 7

(a) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}) = k\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \end{array}$

On teste si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres en utilisant la définition : $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Il faut aussi penser à annuler le produit scalaire.

Le polynôme caractéristique de f est de degré deux, il a au plus deux racines réelles λ_1 et λ_2 , qui sont les valeurs propres de f , de sous espaces
propres $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$.
On commence par tester si les vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont des vecteurs propres.

- $\vec{u}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$
  On calcule, en posant $\vec{u}\cdot\vec{v} = k$:
  $f(\vec{u}) = k\,(\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \neq \lambda\,\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}$ n'est pas un vecteur propre.
- $\vec{v}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$
  On calcule :
  $f(\vec{v}) = k\,(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{v} = k^2\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = k^2$.
- Il faut déterminer si il y a un deuxième vecteur propre. On peut le trouver parmi les vecteurs qui annulent le produit scalaire $\vec{x}\cdot\vec{u}$.

  Soit $\vec{w}$ un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$.

  $\vec{w}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{w}) = \lambda\vec{w}$
  On calcule :
  $f(\vec{w}) = k\,(\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{v} = 0\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = 0$.

L'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = k^2$ et $\lambda_2 = 0$, de multiplicité égale à 1.
Les sous espaces propres sont des droites.

$E(k^2)$ est la droite $(O\,,\vec{v})$
$E(0)$ est la droite $(O\,,\vec{w})$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, on peut donc construire une base formée de vecteurs propres.

Soit la base $\mathcal{B}(\vec{v}\,,\vec{w})$. Par définition, c'est une base propre de f. D'où la matrice de f par rapport à cette base :

$$M = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} f(\vec{v}) & = & k^2\,\vec{v} \\ f(\vec{w}) & = & 0\,\vec{w} \end{array} \right.$$

f est une homothétie de centre O et rapport k^2, composée avec une projection d'axe la droite $(O\,,\vec{v})$ et de direction $\vec{w}$.

(b) $$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \,+\, 5\,(\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \,+ \vec{x} \end{array}$$

et $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0\,,\ \|\vec{u}\|^2 = 5\,,\ \|\vec{n}\|^2 = 1\,.$

On teste si $\vec{u}$ ou $\vec{n}$ sont des vecteurs propres en utilisant la définition : $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Penser à annuler les produits scalaires !

Le polynôme caractéristique de f est de degré trois, il a au plus trois racines réelles λ_1 , λ_2 et λ_3 , qui sont les valeurs propres de f.

- $\vec{u}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$
  On calcule :
  $f(\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \,+\, 5\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \,+ \vec{u} = 5\,\vec{u} \,+\, 0\,\vec{n} \,+\, \vec{u} = 6\,\vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = 6$.
- $\vec{n}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{n}) = \lambda\vec{n}$
  On calcule :
  $f(\vec{n}) = (\vec{n}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \,+\, 5\,(\vec{n}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \,+ \vec{n} = 0\,\vec{u} \,+\, 5\,\vec{n} \,+\, \vec{n} = 6\,\vec{n} \;\Leftrightarrow\; \vec{n}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = 6$.
- On cherche d'éventuels vecteurs propres parmi les vecteurs qui annulent les produits scalaires. On remarque qu'ils doivent donc être perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

  Soit $\vec{v} = \vec{u} \,\times\, \vec{n}$.

  On calcule :
  $f(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \,+\, 5\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \,+ \vec{v} = 1\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{v}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

L'endomorphisme f possède les valeurs propres suivantes : $\lambda_1 = 6$ de multiplicité égale à 2 et $\lambda_2 = 1$, de multiplicité égale à 1.

$E(6)$ est le plan $(O\,,\vec{u}\,,\vec{n})$.

$E(1)$ est la droite $(O\,,\vec{v})$.

Les vecteurs $\vec{v}\,,\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont linéairement indépendants, on peut donc construire une base formée de vecteurs propres.

Soit la base $\mathcal{B}(\vec{v}\,,\vec{u}\,,\vec{n})$. Par définition, c'est une base propre de f. D'où la matrice de f par rapport à cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f(\vec{v}) & = & 1\,\vec{v} \\ f(\vec{u}) & = & 6\,\vec{u} \\ f(\vec{n}) & = & 6\,\vec{n} \end{array} \right.$$

f est une affinité d'axe la droite $(O\,,\vec{v})$, de direction le plan $(O\,,\vec{u}\,,\vec{n})$ et de rapport 6.