

Physique

Semestre d'automne 2018

Simon Bossoney
Guido Burmeister

moodle.epfl.ch

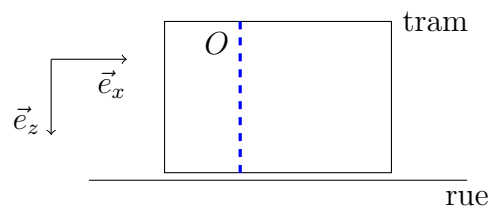
Corrigé 3

Exercice 1

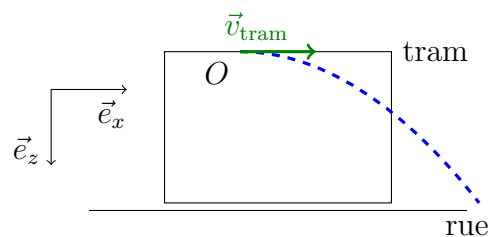
Visualiser et représenter les situations et introduire un repère judicieusement choisi pour la description du mouvement.

Représenter la rue, le tram et l'objet sur un ou plusieurs croquis réalisés avec soin, pour permettre un raisonnement correct et l'introduction des notations utilisées dans la suite.

- Par rapport au tram :



- Par rapport à la rue :



Sur la base des deux dessins, on caractérise la trajectoire de la bille, une fois par rapport au tram, une fois par rapport au sol.

Par rapport au tram, le mouvement de la bille est une chute libre (MUA). On connaît les équations horaires (vectorielles) pour l'accélération (constante), la vitesse (linéaire dans le temps) et la position (quadratique dans le temps).

L'objet est en chute libre :

$$\vec{a}(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

L'accélération est verticale à chaque instant.

Selon \vec{e}_x ,

$$a_x(t) = 0 \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_z ,

$$a_z(t) = g \quad \forall t.$$

Fixons l'origine et l'instant $t = 0$ en début de chute.

Par rapport au tram, la vitesse initiale est nulle : $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 0$. Alors

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t \quad \forall t.$$

La vitesse est ainsi verticale à tout instant.

Selon \vec{e}_x ,

$$v_x(t) = 0 \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_z ,

$$v_z(t) = gt \quad \forall t.$$

Après $t_1 = 0.2 \text{ s}$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{g}t_1$$

et

$$\begin{cases} v_{1x} &= 0 \text{ m s}^{-1} \\ v_{1z} &= v_z(t_1) = g t_1 = 9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0.2 \text{ s} = 1.96 \text{ m s}^{-1}. \end{cases}$$

La norme de la vitesse vaut alors

$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2} = 1.96 \text{ m s}^{-1}.$$

Par rapport à la rue, le mouvement de la bille est une chute libre (MUA). On connaît les équations horaires (vectorielles) pour l'accélération (constante), la vitesse (linéaire dans le temps) et la position (quadratique dans le temps).

L'objet est en chute libre :

$$\vec{a}(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

L'accélération est verticale à chaque instant.

Selon \vec{e}_x ,

$$a_x(t) = 0 \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_z ,

$$a_z(t) = g \quad \forall t.$$

Fixons l'origine et l'instant $t = 0$ en début de chute.

Par rapport à la rue, la vitesse initiale est celle du tram (par rapport au sol) : $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \vec{v}_{\text{tram}}$. Alors,

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_{\text{tram}} \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_x ,

$$v_x(t) = v_{\text{tram}} \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_z ,

$$v_z(t) = g t \quad \forall t.$$

Après $t_1 = 0.2 \text{ s}$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{g}t_1 + \vec{v}_{\text{tram}}$$

et

$$\begin{cases} v_{1x} &= v_{\text{tram}} = 5 \text{ m s}^{-1} \\ v_{1z} &= v_z(t_1) = g t_1 = 9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0.2 \text{ s} = 1.96 \text{ m s}^{-1}. \end{cases}$$

La norme de la vitesse vaut alors

$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2} = 5.37 \text{ m s}^{-1}.$$

Exercice 2

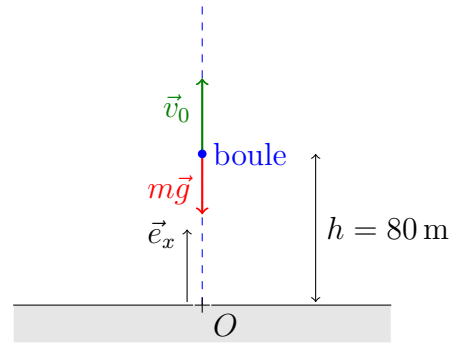
Tout d'abord, on détermine la (ou les) force(s) extérieure(s) qui s'exerce(nt) sur la boule. Puis, on écrit les lois de la dynamique avant de les projeter selon un repère choisi.

Une fois lancée, la boule de masse m ne subit que son poids. Elle est donc en chute libre :

$$m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Nous choisissons par exemple d'orienter le repère vers le haut et de placer l'origine au sol :

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e}_x.$$



En tenant compte de la condition initiale $v(0) = v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ et $x(0) = h = 80 \text{ m}$, nous obtenons successivement, en projetant selon \vec{e}_x ,

$$\begin{aligned} a(t) &= -g, \\ v(t) &= -gt + v_0, \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h. \end{aligned}$$

Le temps de chute t_c correspond à une hauteur nulle (impact sur le sol) :

$$x(t_c) = -\frac{1}{2}gt_c^2 + v_0t_c + h = 0.$$

On en déduit

$$t_c \cong 4.25 \text{ s},$$

où l'on a utilisé $g \cong 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

La vitesse au moment de l'impact est la vitesse au temps de chute :

$$v(t_c) = -gt_c + v_0 \cong -39.67 \text{ m s}^{-1}.$$

Exercice 3

On choisit un repère horizontal \vec{e}_x dirigé selon la vitesse initiale de la luge.

La condition initiale est $x(0) = 0 \text{ m}$ (choix de l'origine) et $v(0) = v_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$.

L'accélération de la luge est constante : $a(t) = a_0 = -0.5 \text{ m s}^{-2}$.

La vitesse et la position de la luge sont donc données par (MUA)

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0t + v_0, \\ x(t) &= \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t. \end{aligned}$$

(a) Après $t_1 = 1 \text{ s}$, la vitesse vaut donc

$$v(t_1) = a_0t_1 + v_0 = -0.5 \text{ m s}^{-2} \cdot 1 \text{ s} + 5 \text{ m s}^{-1} = 4.5 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) La distance de freinage est parcourue pendant le temps de freinage t_f défini par la condition d'arrêt de la luge ($v(t_f) = 0 \text{ m s}^{-1}$) :

$$v(t_f) = a_0t_f + v_0 = 0 \Rightarrow t_f = -\frac{v_0}{a_0} = -\frac{5 \text{ m s}^{-1}}{-0.5 \text{ m s}^{-2}} = 10 \text{ s}.$$

La distance de freinage d_f est alors donnée par

$$d_f = x(t_f) = \frac{1}{2}a_0t_f^2 + v_0t_f = 25 \text{ m}.$$

(c) La distance $d = 1$ m a été parcourue au temps t_d :

$$x(t_d) = \frac{1}{2}a_0 t_d^2 + v_0 t_d = d.$$

Cette équation possède deux solutions positives. Seule la plus petite a un sens :

$$t_d = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0 d}}{a_0} \cong 0.202 \text{ s}.$$

On note que ce temps t_d est bien légèrement supérieur à celui que l'on aurait en absence de freinage ($t = 0.2$ s).

La vitesse au temps t_d vaut alors $v(t_d) \cong 4.899 \text{ m s}^{-1}$.

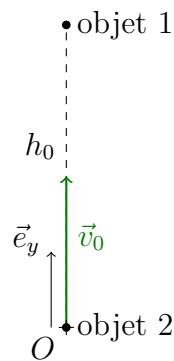
Exercice 4

Visualiser et représenter la situation et introduire un repère judicieusement choisi pour la description des mouvements.

Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position à chaque instant des deux objets.

Faire un dessin soigné et choisir un repère judicieusement choisi pour la description des mouvements.

Notons h_0 la hauteur initiale de l'objet 1 et \vec{v}_0 la vitesse initiale de l'objet 2.



Remarque : tous les mouvements se font selon la verticale.

(a) Critère de rencontre :

$$\exists t_r, \vec{r}_1(t_r) = \vec{r}_2(t_r).$$

L'objet 1 est en chute libre.

Ainsi

$$\vec{a}_1(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$a_1(t) = -g \quad \forall t.$$

Fixons l'origine au niveau du sol et l'instant $t = 0$ en début de chute.

La vitesse initiale est nulle. Alors

$$\vec{v}_1(t) = \vec{g}t \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$v_1(t) = gt \quad \forall t.$$

La position initiale se situe à la hauteur h_0 . Alors

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{r}_{10} \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \quad \forall t \quad \text{avec } h_0 = +20 \text{ m}.$$

L'objet 2 est en chute libre.

Ainsi

$$\vec{a}_2(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$a_2(t) = -g \quad \forall t.$$

Remarque : pour pouvoir par la suite comparer les positions des deux objets, il faut prendre les mêmes origines spatiale et temporelle !

La vitesse initiale est verticale. Alors

$$\vec{v}_2(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$v_2(t) = -gt + v_0 \quad \forall t.$$

La position initiale est nulle. Alors

$$\vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t \quad \forall t.$$

Selon \vec{e}_y ,

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \forall t \quad \text{avec } v_0 = +16 \text{ m s}^{-1}.$$

Appliquer le critère (vectorielle) pour la rencontre des objets.

Selon \vec{e}_y , la condition de rencontre est $y_1(t_r) = y_2(t_r)$:

$$-\frac{1}{2}gt_r^2 + h_0 = -\frac{1}{2}gt_r^2 + v_0 t_r \Rightarrow t_r = \frac{h_0}{v_0} = \frac{20 \text{ m}}{16 \text{ m s}^{-1}} = 1.25 \text{ s}.$$

L'instant t_r existe, la rencontre a lieu.

Connaissant le mouvement des objets et l'instant de leur rencontre, on calcule l'endroit de la rencontre.

Par exemple avec la position de l'objet 1 (égale à celle de l'objet 2),

$$y_1(t_r) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{h_0}{v_0} \right)^2 + h_0 = -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot (1.25 \text{ s})^2 + 20 \text{ m} = 12.34 \text{ m}.$$

(b) Utiliser un critère d'arrivée au sol.

Un objet est au sol si sa hauteur est nulle.

Objet 1 : il touche le sol à l'instant t_1 tel que

$$y_1(t_1) = 0.$$

Alors

$$y_1(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + h_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 2.02 \text{ s}$$

Objet 2 : il touche le sol à l'instant t_2 tel que

$$y_2(t_2) = 0.$$

Alors

$$y_2(t_2) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 = \left(-\frac{1}{2}gt_2 + v_0\right)t_2 = 0.$$

Les solutions sont

$$t_2 = 0 \text{ (sans intérêt)} \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 16 \text{ m s}^{-1}}{9.81 \text{ m s}^{-2}} = 3.26 \text{ s}.$$

L'intervalle entre les impacts est donc

$$t_2 - t_1 = 1.24 \text{ s}.$$

(c) Modifier les conditions initiales pour satisfaire à la nouvelle condition.

Les équations du mouvement restent les mêmes, à la différence que la vitesse \vec{v}_0 n'est pas connue. Toutes les expressions obtenues pour le temps de rencontre et la hauteur de rencontre restent valables.

Le temps de croisement est donné par $t_r = \frac{h_0}{v_0}$.

Nous cherchons v_0 telle que, à cet instant, les objets se trouvent à mi-hauteur :

$$y_1(t_r) = y_2(t_r) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h_0}{v_0}\right)^2 + h_0 = \frac{h_0}{2}$$
$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gh_0} = \sqrt{9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 20 \text{ m}} = 14.01 \text{ m s}^{-1}.$$

Exercice 5

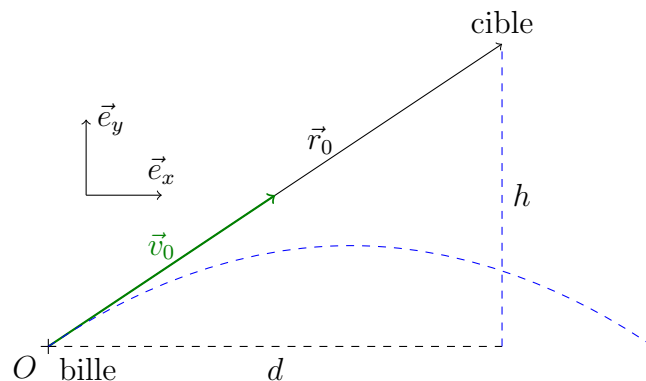
Visualiser et représenter la situation.

Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position à chaque instant des deux objets.

Faire un dessin soigné et choisir un repère judicieusement choisi pour la description des mouvements.

Plaçons l'origine O à l'extrémité du tube de la sarbacane. Notons d et h les distances horizontale et verticale entre O et la cible.

Appelons encore \vec{v}_0 la vitesse initiale de la balle lorsqu'elle quitte la sarbacane.



Avec le repère choisi, la position initiale de la cible est donnée par

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix}.$$

Choisissons enfin l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où la bille quitte la sarbacane.

La seule force exercée sur la bille est son poids.

Pour la bille,

$$m_b \vec{a}_b = m_b \vec{g} \implies \vec{a}_b(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

Le mouvement est un MUA (chute libre).

Nous en déduisons les équations pour la vitesse et la position

$$\begin{aligned} \vec{v}_b(t) &= \vec{g}t + \vec{v}_0 \\ \vec{r}_b(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t. \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned} a_{bx}(t) &= 0 \\ v_{bx}(t) &= v_{0x} \\ x_b(t) &= v_{0x}t. \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned} a_{by}(t) &= -g \\ v_{by}(t) &= -gt + v_{0y} \\ y_b(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t. \end{aligned}$$

La seule force exercée sur la cible est son poids.

Pour la cible,

$$m_c \vec{a}_c = m_c \vec{g} \implies \vec{a}_c(t) = \vec{g} \quad \forall t.$$

Le mouvement est un MUA (chute libre).

Nous en déduisons les équations pour la vitesse et la position

$$\begin{aligned} \vec{v}_c(t) &= \vec{g}t \\ \vec{r}_c(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{r}_0. \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned} a_{cx}(t) &= 0 \\ v_{cx}(t) &= 0 \\ x_c(t) &= d. \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned} a_{cy}(t) &= -g \\ v_{cy}(t) &= -gt \\ y_c(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + h. \end{aligned}$$

Appliquer le critère (vectoriel) pour la rencontre des objets.

Critère de rencontre :

$$\exists t_r, \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_c(t_r).$$

Selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned}x_b(t_r) &= x_c(t_r) \\ v_{0x}t_r &= d.\end{aligned}$$

Selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned}y_b(t_r) &= y_c(t_r) \\ -\frac{1}{2}gt_r^2 + v_{0y}t_r &= -\frac{1}{2}gt_r^2 + h.\end{aligned}$$

L'instant t_r existe ssi

$$v_{0x}t_r = d \quad \text{et} \quad v_{0y}t_r = h$$

c'est-à-dire ssi

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{h}{d},$$

ce qui est le cas, étant donné que la sarbacane est alignée sur la cible.

La rencontre a donc lieu, indépendamment de la norme de la vitesse initiale \vec{v}_0 !

Remarque : vectoriellement, le critère de rencontre donne directement

$$\vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_c(t_r) \iff \vec{v}_0 t_r = \vec{r}_0.$$

Comme la sarbacane vise initialement la cible, \vec{v}_0 et \vec{r}_0 sont parallèles et un tel t_r existe (sauf si \vec{v}_0 est nulle). La bille tirée touche toujours la cible !

Exercice 6

On cherche une explication en faisant appel aux lois de la dynamique (lois de Newton) appliquées au train et à une personne à l'intérieur du train.

Le train fait un virage. En effet, les voies exercent une force sur le train lui imposant une courbure de trajectoire. Une personne qui est dans le train ne subit pas cette force et continue à se déplacer en ligne droite. Vous vous retrouvez ainsi projeté contre la paroi latérale (la paroi est projetée contre vous).

Exercice 7 (facultatif)

Visualiser et représenter la situation.

Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position à chaque instant des deux objets.

Faire un dessin soigné et choisir un repère judicieusement choisi pour la description des mouvements.

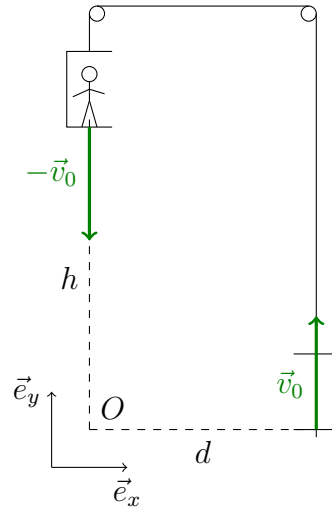
Plaçons l'origine O au sol, sous la première cage d'ascenseur et notons \vec{r}_1 la position de la cage d'ascenseur de gauche, \vec{r}_2 celle de la cage d'ascenseur de droite et \vec{r}_c celle du cascadeur.

Le critère de rencontre entre le cascadeur et la cage 2 s'écrit :

$$\exists t_r \text{ t.q. } \vec{r}_c(t_r) = \vec{r}_2(t_r).$$

Il convient donc de décrire la position des cages 1 et 2 et celle du cascadeur à chaque instant.

Appelons \vec{v}_0 la vitesse, ascendante, de la seconde cage d'ascenseur.



Avec le repère choisi, la position initiale de la première cage est donnée par

$$\vec{r}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

et celle de la seconde

$$\vec{r}_{02} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le mouvement du cascadeur est différent après le saut d'avant le saut. Appelons t_s l'instant du saut.

- Avant le saut : $0 < t \leq t_s$.

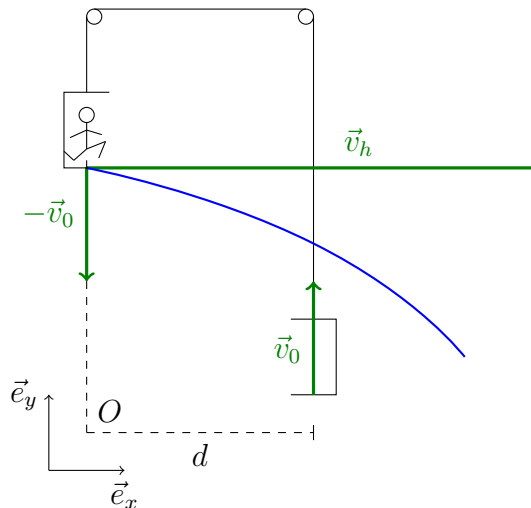
Le cascadeur se trouve dans la cage 1,

$$\vec{r}_c(t) = \vec{r}_1(t) = -\vec{v}_0 t + \vec{r}_{01}.$$

Selon \vec{e}_x et \vec{e}_y ,

$$x_c(t) = 0 \quad y_c(t) = -v_0 t + h.$$

- Après le saut : $t_s \leq t$.



Le cascadeur est en MUA, sa chute libre commençant à l'instant t_s telle que

$$\vec{a}_c(t) = \vec{g}$$

$$\vec{v}_c(t) = \vec{g} \cdot (t - t_s) + \vec{v}_c(t_s)$$

$$\vec{r}_c(t) = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_s)^2 + \vec{v}_c(t_s) \cdot (t - t_s) + \vec{r}_c(t_s).$$

avec les conditions initiales (fin du MRU avec la cage 1)

$$\vec{r}_c(t_s) = -\vec{v}_0 t_s + \vec{r}_{01} \quad \vec{v}_c(t_s) = -\vec{v}_0 + \vec{v}_h.$$

Selon \vec{e}_x et \vec{e}_y ,

$$x_c(t) = v_h(t-t_s) \quad y_c(t) = -\frac{1}{2}g(t-t_s)^2 - v_0(t-t_s) - v_0 t_s + h = -\frac{1}{2}g(t-t_s)^2 - v_0 t + h.$$

La cage de droite est en MRU.

Le mouvement est donné par

$$\vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_{02}.$$

Selon \vec{e}_x et \vec{e}_y ,

$$x_2(t) = d \quad y_2(t) = v_0 t.$$

Appliquer le critère (vectoriel) pour la rencontre des objets.

Critère de rencontre :

$$\exists t_r, \vec{r}_c(t_r) = \vec{r}_2(t_r).$$

Selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned} x_c(t_r) &= x_2(t_r) \\ v_h(t_r - t_s) &= d. \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned} y_c(t_r) &= y_2(t_r) \\ -\frac{1}{2}g(t_r - t_s)^2 - v_0 t_r + h &= v_0 t_r. \end{aligned}$$

Déterminons t_s pour que la rencontre ait lieu (c'est-à-dire pour que l'instant t_r existe) :
cherchons à résoudre le système

$$\begin{cases} v_h(t_r - t_s) &= d \\ -\frac{1}{2}g(t_r - t_s)^2 - v_0 t_r + h &= v_0 t_r. \end{cases}$$

en t_s et t_r .

En utilisant la première équation sous la forme

$$t_r - t_s = \frac{d}{v_h}$$

dans la seconde, il vient

$$-\frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_h^2} + h = 2v_0 t_r \implies t_r = \frac{1}{2v_0} \left(h - \frac{gd^2}{2v_h^2} \right)$$

d'où l'instant du saut

$$t_s = t_r - \frac{d}{v_h} = \frac{1}{2v_0} \left(h - \frac{gd^2}{2v_h^2} \right) - \frac{d}{v_h}.$$

Exercice 8

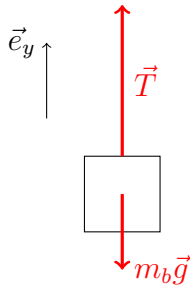
On applique la méthode générale :

(a) faire un dessin

- (b) choisir un objet
- (c) déterminer les forces extérieures
- (d) écrire les lois de la dynamique
- (e) choisir un repère
- (f) faire les projections en vue des calculs.

Faire un dessin soigné et choisir un repère judicieusement choisi pour la description des mouvements.

Notons m_b la masse du bloc et \vec{a}_b son accélération.



Objet : le bloc

Forces : poids, tension

Newton :

$$m_b \vec{g} + \vec{T} = m_b \vec{a}_b .$$

Selon \vec{e}_y :

$$-m_b g + T = m_b a_b .$$

Remarque : en absence d'ambiguïté, il n'est pas nécessaire de noter l'indice y dans la composante de l'accélération.

L'accélération étant connue, on détermine la force exercée par le câble.

La deuxième loi de Newton pour le bloc donne

$$T = m_b a_b + m_b g = m_b (g + a_b) .$$

L'accélération étant de même sens que \vec{e}_y , sa composante est positive :

$$a_b = +1 \text{ m s}^{-2} > 0 .$$

Ainsi

$$T = m_b (g + a_b) = 500 \text{ kg} \cdot (9.81 \text{ m s}^{-2} + 1 \text{ m s}^{-2}) = 5405 \text{ N} .$$

L'accélération étant connue, on détermine la force exercée par le câble.

La vitesse étant constante, l'accélération est nulle.

La deuxième loi de Newton pour le bloc donne alors

$$T = m_b g = 500 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2} = 4905 \text{ N} .$$