Physique
Semestre de printemps 2019

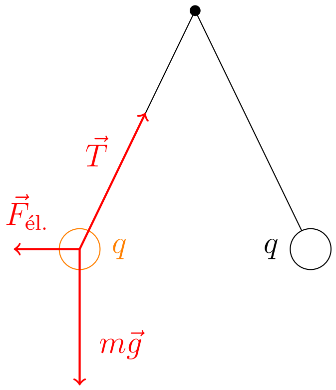
Roger Sauser
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 16

Exercice 1

Nous allons étudier la situation où les deux masses sont à l'équilibre. Il convient donc de faire un dessin, choisir un objet, inventorier les forces extérieures s'exerçant sur cet objet, avant d'écrire la deuxième loi de Newton dans le cas d'une situation statique.

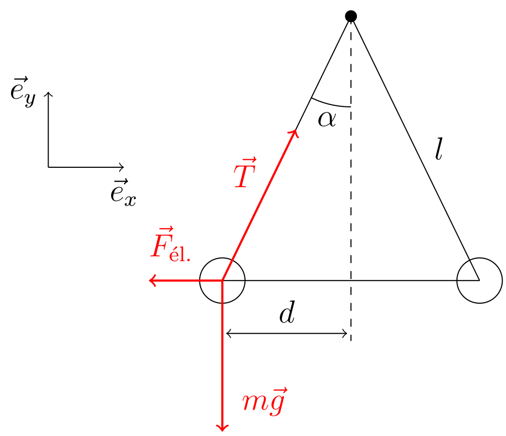
Nous allons nous intéresser à la masse de gauche (objet considéré).



En supposant que la force de gravitation due à la masse de droite est négligeable, les forces s'exerçant sur la masse de gauche sont le poids $m\vec{g}$, la force électrique répulsive $\vec{F}_{\text{él.}}$ due à la présence de l'autre masse et la traction $\vec{T}$ dans le fil.
La deuxième loi de Newton s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{él.}} + \vec{T} = \vec{0}\,.$$

Nous allons choisir un repère et projeter cette relation vectorielle en supposant que le rayon des sphères est négligeable vis-à-vis de la longueur l des fils.



- selon $\vec{e}_x$:

$$T\sin\alpha - F_{\text{él.}} = T\sin\alpha - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad T\sin\alpha = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}\,;$$

- selon $\vec{e}_y$:

$$T\cos\alpha - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad T\cos\alpha = mg\,.$$

Nous avons obtenu le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T\sin\alpha & = & \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \\ T\cos\alpha & = & mg\,. \end{array} \right.$$

En éliminant la tension T (en faisant par exemple le rapport de ces deux relations), il vient

$$d^2\tan\alpha = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 mg}\,,$$

Finalement, la relation géométrique $d = l\sin\alpha$ permet d'écrire

$$\sin^2\!\alpha\tan\alpha = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}\,.$$

Exercice 2

Comme les charges s'additionnent, il suffit de connaître le nombre d'ions contenus dans une mole. Or, une mole contient N_{A} ions, où $N_{\mathrm{A}} = 6.022\cdot 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro. Selon l'énoncé, chaque ion porte une charge élémentaire $e = 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

La charge totale portée par une mole d'ions est donc donnée par

$$Q(1\mathrm{mole}) = N_{\mathrm{A}}e = 6.022\cdot 10^{23}\cdot 1.602\cdot 10^{-19} \cong 9.65\cdot 10^{4}\,\mathrm{C}\,.$$

Ce nombre est connu sous le nom de "constante de Faraday". Il intervient en électromagnétisme et en électrochimie.

Exercice 3

Nous allons exploiter le lien entre la force exercée par une charge Q sur une autre charge q et le champ électrique produit par la charge Q à l'endroit où se trouve q.

La charge $q_1 = 4\,\mu\mathrm{C}$ est séparée de la charge $q_2 = 6\,\mu\mathrm{C}$ par une certaine distance. Comme les deux charges sont de même signe, elles se repoussent. Plus précisément, la charge q_2 exerce une force électrique répulsive $\vec{F}^{2\to 1}$ sur la charge q_1. Par la troisième loi de Newton ("action=réaction"), la charge q_1 exerce une force $\vec{F}^{1\to 2} = -\vec{F}^{2\to 1}$ sur la charge q_2 :

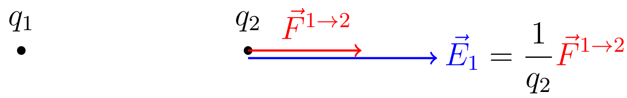
Selon l'énoncé, les forces $\vec{F}^{1\to 2}$ et $\vec{F}^{2\to 1}$ ont une intensité de 0.4 N :

$$||\vec{F}^{1\to 2}|| = ||\vec{F}^{2\to 1}|| = F = 0.4\,\mathrm{N}\,.$$

(a) L'intensité du champ électrique de la première charge q_1 à l'endroit où se trouve la seconde charge est donc

$$E_1 = ||\vec{E}_1|| = \frac{F}{q_2} = \frac{0.4}{6\cdot 10^{-6}} \cong 6.67\cdot 10^{4}\,\mathrm{V\,m^{-1}}.$$

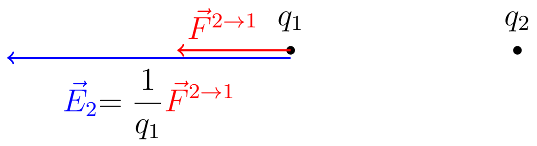
Le champ électrique $\vec{E}_1$ est parallèle à la force $\vec{F}^{1\to 2}$ (et de même sens) :



(b) De même, l'intensité du champ électrique de la seconde charge q_2 à l'endroit où se trouve la première charge q_1 est donnée par

$$E_2 = ||\vec{E}_2|| = \frac{F}{q_1} = \frac{0.4}{4 \cdot 10^{-6}} = 10^5\,\mathrm{V\,m^{-1}}.$$

Le champ électrique $\vec{E}_2$ est parallèle à la force $\vec{F}^{2\to1}$ (et de même sens) :



Exercice 4

La force exercée sur la charge $q > 0$ est la somme (vectorielle) des forces électriques dues à q_1 et q_2. La force due à $q_1 > 0$ est radiale et répulsive, alors que celle due à $q_2 < 0$ est radiale et attractive. Déterminons ces forces individuelles $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et additionnons-les graphiquement.
Les distances respectives de q à q_1 et q_2 sont

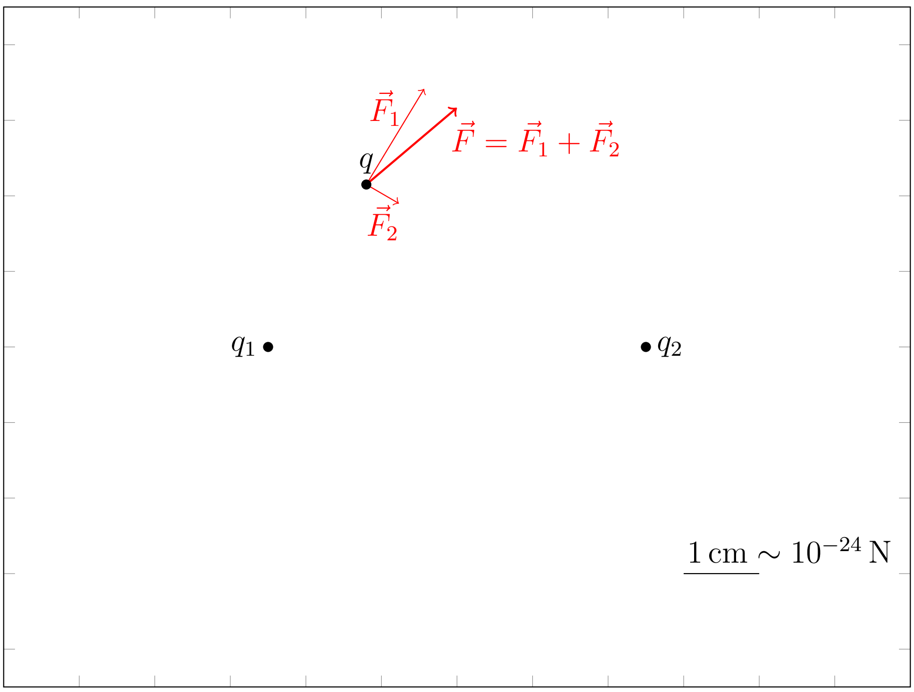
$$r_1 = 2.5\,\mathrm{cm} \quad \text{et} \quad r_2 = 4.3\,\mathrm{cm}\,.$$

La norme des forces individuelles est alors

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r_1^2} = \frac{4 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}} \cdot (2.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 1.476 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{N} \sim 1.48\,\mathrm{cm}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2| q}{r_2^2} = \frac{4 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}} \cdot (4.3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 0.499 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{N} \sim 0.50\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Nous reportons ces vecteurs à l'échelle sur le dessin et effectuons l'addition graphiquement :



Exercice 5

En un point P quelconque de l'espace (mis à part C_1 et C_2), le champ électrique dû à plusieurs charges q_1 et q_2 aux points C_1 et C_2 est la somme des champs électriques dus aux charges individuelles (principe de superposition).

Nous allons calculer les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en quelques points et effectuer leur somme graphiquement.

En un point P choisi par exemple à $r_1 = 2.5\,\mathrm{cm}$ de C_1 et à $r_2 = 4.3\,\mathrm{cm}$ de C_2, nous déterminons le champ dû à q_1 :

- la direction est définie par P et C_1,
- le sens est "à l'opposé" de q_1 (car $q_1 > 0$),
- la norme vaut

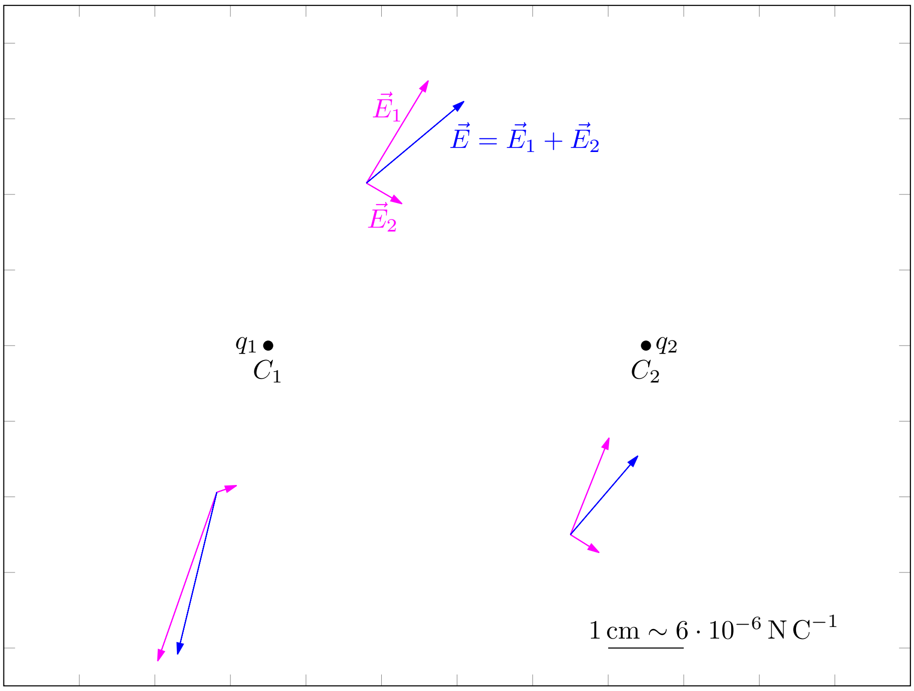
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = 9.21 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$$

et le champ dû à q_2 :

- la direction est définie par P et C_2,
- le sens est "vers" q_2 (car $q_2 < 0$),
- la norme vaut

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{r_2^2} = 3.12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

Nous reportons ces vecteurs à une certaine échelle sur le dessin et effectuons l'addition graphiquement :

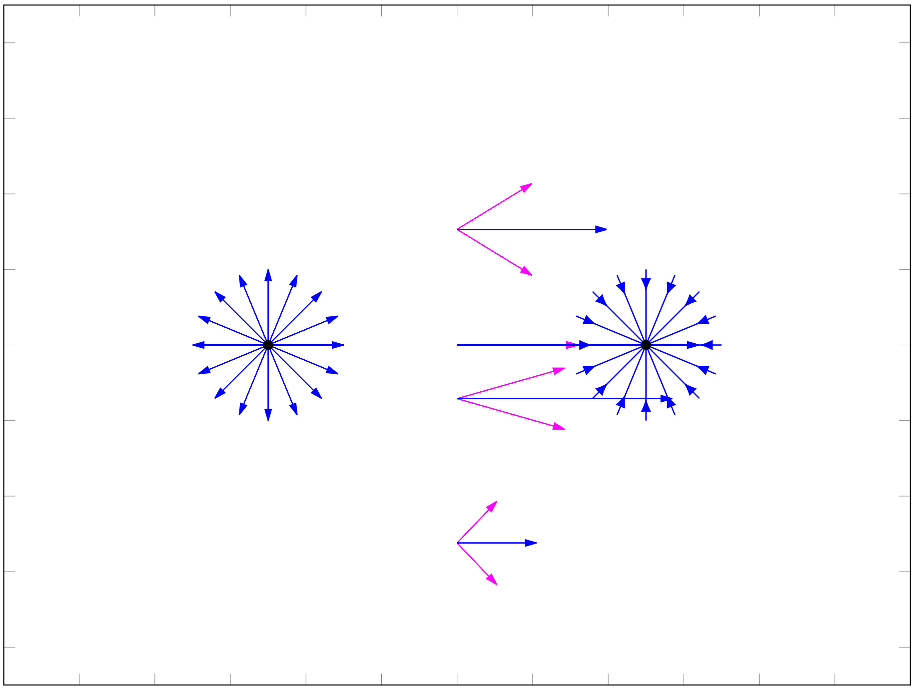


Remarquons d'abord que la situation est invariante par rotation d'axe C_1C_2.

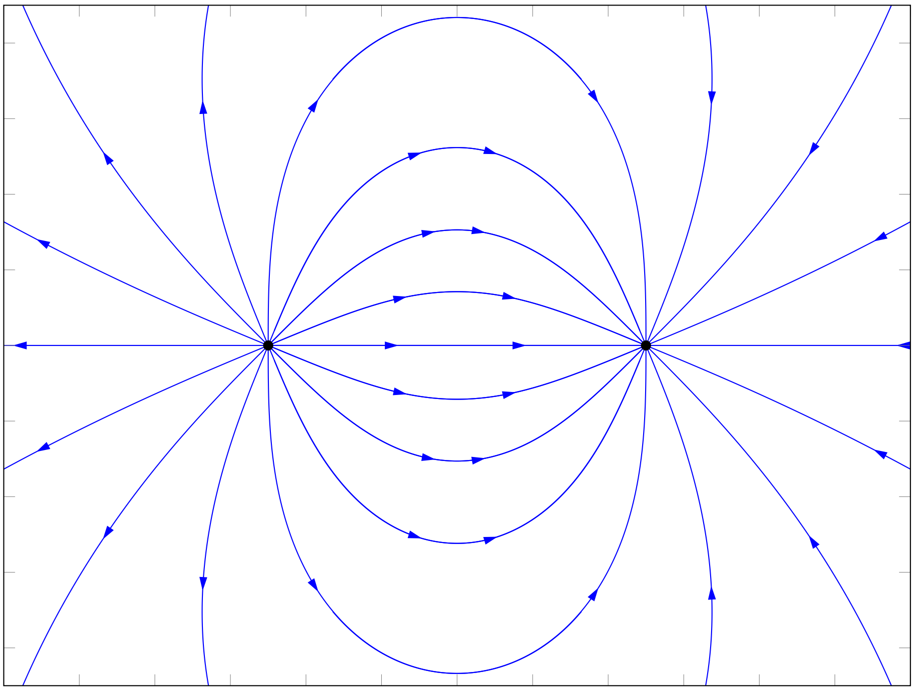
Ensuite, en échangeant les charges, nous avons la même situation qu'initialement, à la différence près que les champs sont inversés. Il existe donc une symétrie plane, de plan médiateur du segment C_1C_2.

Nous déterminons les champs dus à q_1 et à q_2 sur le plan médiateur : ils sont symétriques par rapport à la direction C_1C_2. Le champ résultant est donc parallèle à C_1C_2.

De plus, à proximité d'une charge, le champ dû à cette charge est très important (la distance à la charge étant petite) et le champ dû à l'autre charge est négligeable. Le champ résultant possède donc à proximité des charges une symétrie centrale.



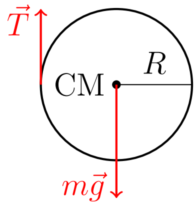
En reliant les deux comportements établis ci-dessus, nous pouvons tracer approximativement les lignes du champ dû aux deux charges.



Plus les lignes de champ s'écartent, plus l'intensité du champ électrique diminue.

Exercice 6

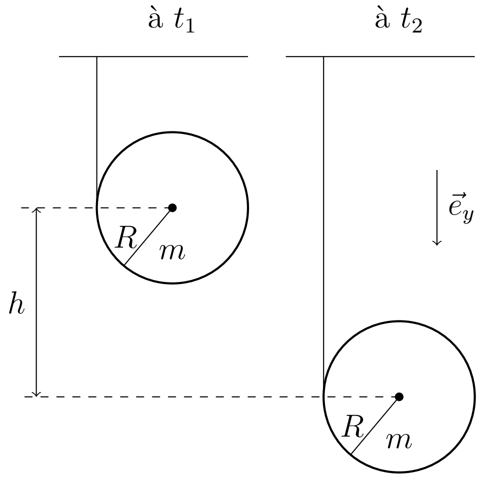
Le théorème de l'énergie cinétique s'applique à un objet choisi. Il convient donc de procéder comme d'habitude : dessin, choix de l'objet, identification des forces, lois de la dynamique. Nous allons considérer le cylindre :



Objet : cylindre

Forces : poids, tension

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au cylindre :



Théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial t_1 , la situation (1), et l'instant final t_2 , la situation (2) :

$$E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}}\,,$$

où l'énergie cinétique du solide (la somme de l'énergie cinétique de toutes les parties) peut s'écrire comme somme des énergies cinétiques de translation du CM et de rotation autour du CM :

$$E_{\text{cin}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{cin,rot}}\,.$$

Ecrivons l'énergie cinétique initiale et finale. Initialement (instant t_1) le cylindre est immobile. Après une descente d'une distance h , sa vitesse (celle de son CM) est $\vec{v}_2$ et sa vitesse angulaire autour du CM est $\vec{\omega}_2$:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(1) &= E_{\text{cin,CM}}(1) + E_{\text{cin,rot}}(1) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 0 \\ E_{\text{cin}}(2) &= E_{\text{cin,CM}}(2) + E_{\text{cin,rot}}(2) = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2\,. \end{aligned}$$

Déterminons maintenant le travail de chacune des forces, en se souvenant que, par définition, le travail d'une force $\vec{F}$ est

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}\,,$$

où $d\vec{r}$ est le déplacement du point du solide sur lequel la force $\vec{F}$ est appliquée.

- Pour le poids, appliqué au CM,

  $$W_{1\to 2}(m\vec{g}) = \int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\text{CM}}\,.$$

  Le poids étant constant et le CM en mouvement vertical vers le bas,

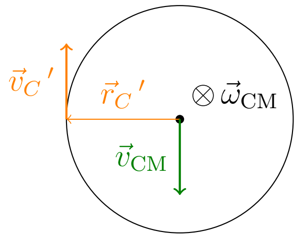
  $$W_{1\to 2}(m\vec{g}) = mg\int_1^2 dy_{\text{CM}} = mgh\,.$$

  Remarque : ce travail est positif.

- Pour la tension, appliquée au point C du cylindre où le fil part tangentiellement vers le haut,

$$W_{1\to 2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{r}_C\,.$$

Dans le référentiel du CM, tout point sur le cylindre est en rotation autour du CM.



En particulier, pour le point C,

$$\vec{v}_C\,' = \vec{\omega}_{\mathrm{CM}} \times \vec{r}_C\,'\,.$$

Dans le référentiel d'inertie, la vitesse du point C est alors

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_C\,' = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{\omega}_{\mathrm{CM}} \times \vec{r}_C\,'\,.$$

Comme d'une part $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ est dirigée vers le bas et de norme $R\omega_{\mathrm{CM}}$ (si le fil se déroule de $\Delta s = R\Delta\theta$, le CM descend d'autant) et d'autre part $\vec{\omega}_{\mathrm{CM}} \times \vec{r}_C\,'$ est vers le haut et de norme $R\omega_{\mathrm{CM}}$,

$$\vec{v}_C = \vec{0}\,.$$

On dit que C est le centre instantané de rotation.
Pendant une durée infinitésimale dt, le déplacement $d\vec{r}_C$ de C est donc nul et le travail de la tension également :

$$W_{1\to 2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{r}_C = 0\,.$$

Revenons au théorème de l'énergie cinétique. Ce dernier s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{cin}}(2) - E_{\mathrm{cin}}(1) &= W_{1\to 2}^{\mathrm{ext}} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 &= mgh\,. \end{aligned}$$

De plus, comme déjà indiqué, le mouvement du CM et la rotation autour du CM sont liés par le déroulement du fil. A l'instant t_2,

$$v_2 = R\omega_2\,.$$

Finalement,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_2^2}{R^2} = \frac{mR^2 + I}{2R^2}\,v_2^2 = mgh\,,$$

d'où

$$v_2 = \sqrt{\frac{2ghmR^2}{mR^2 + I}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}} < \sqrt{2gh}\,.$$

L'inertie de rotation fait que la descente est plus lente qu'en chute libre.