Série 8

Exercice 1. On munit l'espace d'un repère. Dans chacun des cas ci-dessous, décrire la position relative des plans π et ρ définis par les données. S'ils sont sécants, donner un point et un vecteur directeur de la droite intersection.

a. $\pi : x + y - 3z = 2$, ρ passe par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(3, 1, 1)$.

b. $\pi : 3x + 2y - z = 8$, $\rho : x + 3y + 2z = 5$.

c. $\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + 4t \\ y = 1 + s - t \\ z = 2 + 5s + 2t \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\rho : x + 2y - z = 1$.

Solution:

a. Tout d'abord, observons que le point A n'appartient pas à π. En effet, $1 + 0 - 3 \cdot 0 = 1 \neq 2$. Par conséquent, les plans π et ρ sont différents. Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui sont directeurs de ρ, sont aussi directeurs de π, car :

$$1 + (-1) - 3 \cdot 0 = 0 \text{ et } 2 + 1 - 3 \cdot 1 = 0.$$

Par conséquent, les plans ρ et π ont même direction. Ils sont donc parallèles (et non confondus).

b. Les parties variables des équations cartésiennes de π et ρ ne sont pas proportionnelles : par conséquent ces plans sont sécants. Leur intersection est formée des points de coordonnées (x, y, z) vérifiant :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2y - 8 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ z = -2 + x. \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point dans l'intersection sont donc de la forme $(x, 3 - x, -2 + x)$, ce qui montre que la droite $\pi \cap \rho$ passe par $A(0, 3, -2)$ et est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Le plan π passe par $A(1, 1, 2)$ et est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Or $A \in \rho$, car $1 + 2 \cdot 1 - 2 = 1$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont directeurs de ρ, car :

$$3 + 2 \cdot 1 - 5 = 0 \text{ et } 4 + 2 \cdot (-1) - 2 = 0.$$

Par conséquent, les plans π et ρ sont égaux.

Exercice 2. On munit l'espace d'un repère. Dans chacun des cas ci-dessous, décrire la position relative de la droite d avec les plans de coordonnées.

a. d passe par $A(1, 2, 0)$, $B(1, 3, -5)$.

b. $d : \frac{x+1}{2} = \frac{z-3}{5}$, $y = 2$.

c. $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = t - 7 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Solution:

a. d est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Elle admet donc pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \;, \; t \in \mathbb{R}. \\ z = -5t \end{cases}$$

La droite d est contenue dans le plan d'équation $x = 1$. Elle est donc parallèle à (Oyz). Par ailleurs, elle est sécante avec les plans (Oxy) et (Oxz), qu'elle intersecte respectivement aux points de coordonnées $(1, 2, 0)$ (c'est le point A) et $(1, 0, 10)$.

b. La droite d est contenue dans le plan $y = 2$. Elle est donc parallèle au plan (Oxz). Par ailleurs, elle est sécante avec les plans (Oxy) et (Oyz), qu'elle intersecte respectivement aux points de coordonnées $(-\frac{11}{5}, 2, 0)$ et $(0, 2, \frac{11}{2})$.

c. La droite d est contenue dans les plans $x = 1$ et $y = 3$. Elle est donc parallèle aux plans (Oyz) et (Oxz). Par ailleurs, elle est sécante avec le plan (Oxy), qu'elle intersecte au point de coordonnées $(1, 3, 0)$.

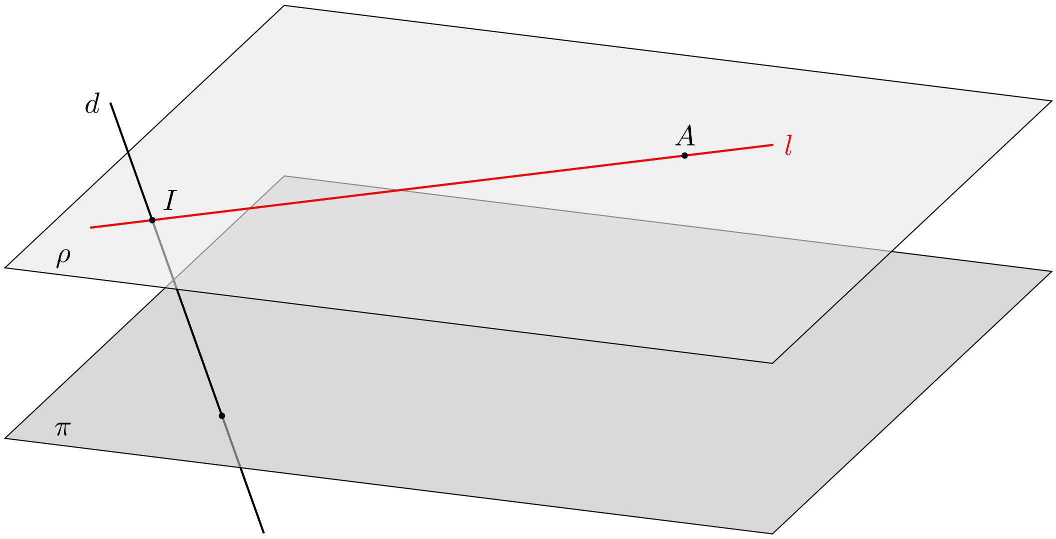
Exercice 3. Dans l'espace on donne un point A, une droite d et un plan π.

a. Existe-t-il une droite l passant par A, parallèle à π et intersectant d ? On discutera selon les positions relatives des données.

b. Application numérique : $A(-3, -2, 1)$, $d : \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$ et $\pi : 3x - 5y + 4z = 12$.

Solution:

a. Figure d'étude :



On note ρ le plan parallèle à π et passant par A. Une droite l comme dans l'énoncé passe par A et est parallèle à π. Par conséquent, elle doit être contenue dans ρ. Si la droite donnée d est parallèle au plan ρ, il n'y a donc pas de solution au problème posé. On discute alors selon les autres positions relatives possibles de d et ρ :

- d et ρ sont sécants en un point I. Si les points A et I sont distincts, alors la droite $l = (AI)$ est la seule solution au problème posé. Par contre si $I = A$ alors toute droite de π passant par A convient.
- d est contenue dans ρ. Alors si A n'appartient pas à d, toute droite joignant A à un point de d est solution. Par contre si A appartient à d, la droite $l = d$ est la seule solution au problème.

b. Avec ces données numériques, on voit que ρ a pour équation :

$$\rho : 3x - 5y + 4z = 5 \, (= 3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1).$$

La droite d admet pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de d et ρ correspond donc au(x) valeur(s) de t telle(s) que :

$$3(6+2t) - 5(-2-t) + 4(3t) = 5 \text{ c'est-à-dire } t = -1.$$

Le plan ρ et la droite d s'intersectent donc au point $I(4,-1,-3)$. Par conséquent, la droite l recherchée passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. On en déduit alors qu'elle a pour équations cartésiennes :

$$l : \frac{x+3}{7} = y+2 = \frac{z-1}{-4}.$$

Exercice 4. Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points suivants :

$$A(5,0,0),\ B(2,4,5),\ C(0,3,1),\ D(-5,14,6),\ E(-4,17,1).$$

a. Montrer que A, B, C définissent un plan que l'on notera π. En calculer une équation cartésienne.
b. Montrer que (DE) intersecte π en un point I dont on donnera les coordonnées.
c. Quelle est l'abscisse de I sur la droite (DE) munie du repère $(E, \overrightarrow{ED})$?
d. Quelles sont les coordonnées de I dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan π ?

Solution:

a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les points A, B, C ne sont pas alignés, et définissent donc un plan dans l'espace. Ce plan π admet comme équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = 5 - 3s - 5t \\ y = 4s + 3t \\ z = 5s + t \end{cases}, \ s,t \in \mathbb{R}.$$

On trouve une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} 4x + 3y = 20 - 11t \\ 5y - 4z = 11t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant t, on trouve maintenant une équation cartésienne de π :

$$\pi : x + 2y - z = 5.$$

b. Comme $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, on voit que la droite (DE) admet pour équations paramétriques :

$$(DE) : \begin{cases} x = -5 + t \\ y = 14 + 3t \\ z = 6 - 5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de π et (DE) correspond au(x) réels(s) t tels que :

$$(-5+t) + 2(14+3t) - (6-5t) = 5 \text{ autrement dit } t = -1.$$

Le plan π et la droite (DE) se rencontrent donc en un unique point I de coordonnées $(-6, 11, 11)$.

c. L'abscisse recherchée est le réel x vérifiant $\overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{ED}$. Un tel réel existe bien car I est sur la droite (DE). Or $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$. Par conséquent, $x = 2$.

d. Les coordonnées recherchées sont les réels x, y vérifiant :

$$\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

De tels réels existent car I appartient au plan défini par A, B et C. On a :

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-11\\11\\11\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} -3x - 5y = -11 \\ 4x + 3y = 11 \\ 5x + y = 11. \end{cases}$$

La dernière équation permet d'écrire y en fonction de x. En substituant l'expression trouvée dans les deux premières équations, on trouve :

$$\begin{cases} -3x - 55 + 25x = -11 \\ 4x + 33 - 15x = 11 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

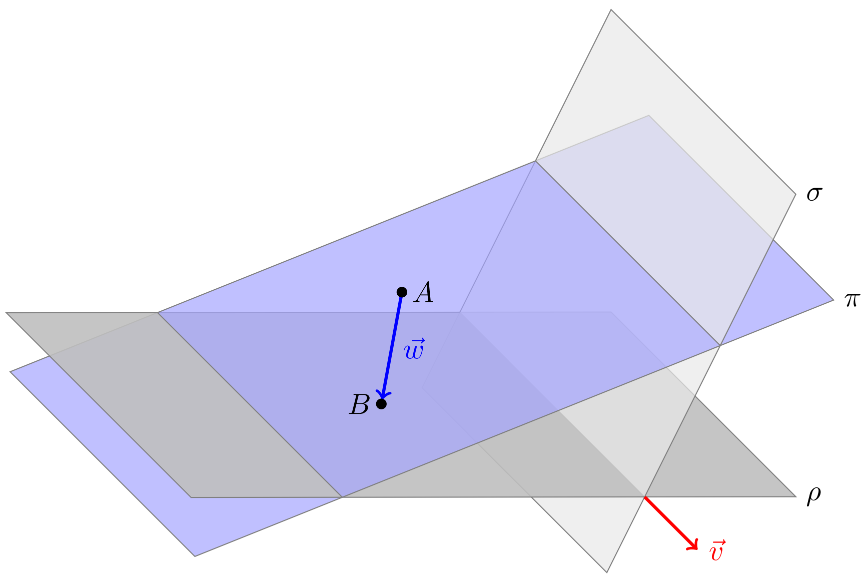
Le point I a donc pour coordonnées $(2, 1)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan π.

Exercice 5. Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points $A\,(-1, 2, 1)$, $B\,(0, 3, \frac{5}{2})$ et les plans :

$$\rho : x + y - z = 1,\ \sigma : x - 3y + z + 1 = 0.$$

Montrer qu'il existe un unique plan π contenant A et B, et tel que l'intersection $\pi \cap \rho \cap \sigma$ est vide. Donner une équation cartésienne de π.

Solution: Figure d'étude :



Les plans ρ et σ ne sont pas parallèles (les parties variables de leurs équations cartésiennes ne sont pas proportionnelles) : ils s'intersectent donc selon une droite que l'on notera d. Cherchons des équations de cette droite. Par définition, on a :

$$d : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

En imposant de plus $x = 0$, on voit que d passe par le point $C(0, 0, -1)$, et, en imposant de plus que $z = 0$, on trouve que $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ appartient à d. Comme $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, on voit que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est directeur de d, qui a donc pour équations cartésiennes :

$$d : x = y = \frac{z+1}{2}.$$

Le plan π ne doit pas intersecter la droite d : il doit donc lui être parallèle. Autrement dit, le vecteur $\vec{v}$ doit être directeur de π. De plus, comme les points A et B doivent appartenir à π, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est aussi directeur de π. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'étant pas colinéaires, on voit donc qu'il y a un unique plan solution du problème posé, à savoir celui d'équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t \\ y = 2 + s + t \\ z = 1 + 2s + \frac{3}{2}t \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

On trouve alors une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} x - y = -3 \\ z - 2y = -3 - \frac{1}{2}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Le paramètre t ayant disparu dans la première équation à ce stade, on a déjà trouvé une équation cartésienne de π :

$$\pi : x - y + 3 = 0.$$

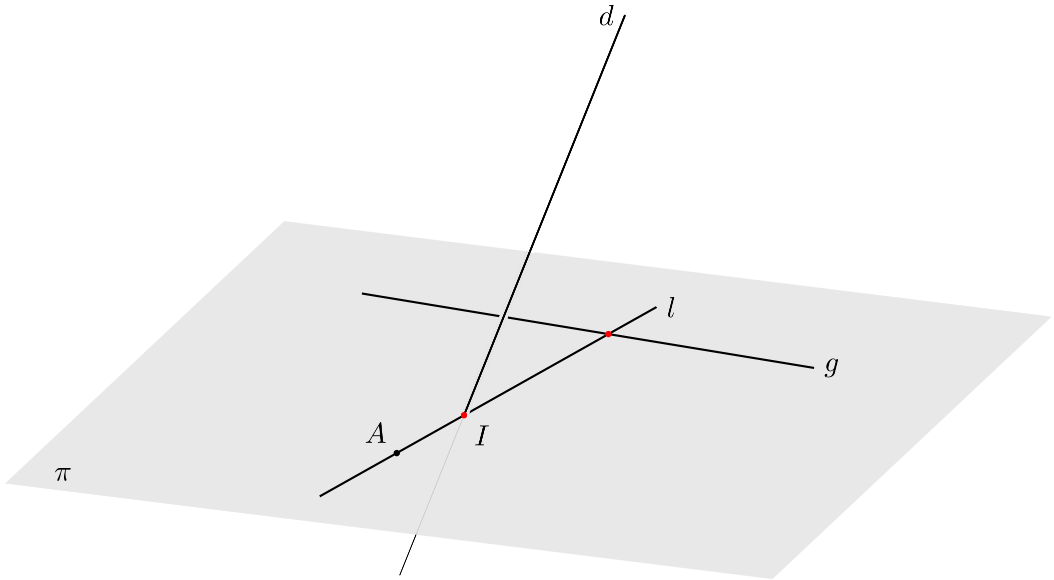
Exercice 6. Dans l'espace, on donne un point A et deux droites gauches d et g.

a. Existe-t-il une droite l passant par A et intersectant à la fois d et g ? On discutera selon les positions relatives des données.

b. Application numérique : $A(0, -1, 2)$, $d : \frac{x-1}{2} = 1 - y = z$ et $g : x = -z, y = 1$.

Solution:

a. Figure d'étude :



Si A appartient à d, alors une droite l solution est construite chaque fois que l'on rejoint A à un point de g. De même, si A appartient à g, toute droite joignant A à un point de g est solution. On supposera dorénavant que A n'appartient ni à d ni à g. Dans ce cas, il existe un unique plan π contenant A et g. Une droite l comme dans l'énoncé doit alors être contenue dans π, car elle passe par A et intersecte g. On discute alors selon les positions relatives possibles de d et π :

- d est parallèle à π. Il n'y a alors pas de solution au problème posé, car une droite contenue dans π ne peut intersecter d.
- d et π sont sécants en un point I. Le point I est disctinct de A car il appartient à d, et on a supposé que A n'appartient pas à d. La droite recherchée l est alors nécessairement la droite (AI). On voit donc que de deux choses l'une : soit (AI) est parallèle à g et il n'y a pas de solution, soit elle n'est pas parallèle à g, auquel cas c'est la seule doite solution du problème posé.
- d est contenue dans π. Ce cas ne peut pas se produire car d et g sont gauches et ne peuvent donc pas être contenues dans un même plan.

b. Avec ces données numériques, on voit facilement que A n'appartient pas à g. Le plan π est donc bien défini. Il contient les points $A(0,-1,2)$, $B(0,1,0)$ et $C(1,1,-1)$ (B et C sont deux points pris sur g). On trouve alors qu'il a pour équation cartésienne :

$$\pi : x + y + z = 1.$$

La droite d admet pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de d et ρ correspond donc au(x) valeur(s) de t telle(s) que :

$$(1+2t) + (1-t) + t = 1 \text{ c'est-à-dire } t = -\frac{1}{2}.$$

Le plan π et la droite d s'intersectent donc au point $I(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Par conséquent, la droite l recherchée passe par $A(0,-1,2)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. On en déduit alors facilement qu'elle a pour équations cartésiennes :

$$l : x = 0, \; y + 1 = 2 - z.$$

Exercice 7. Dans l'espace, on donne deux droites gauches, d et g, et deux droites parallèles, p et q.

a. Existe-t-il une droite l intersectant à la fois d, g, p et q ? On discutera selon les positions relatives des données.

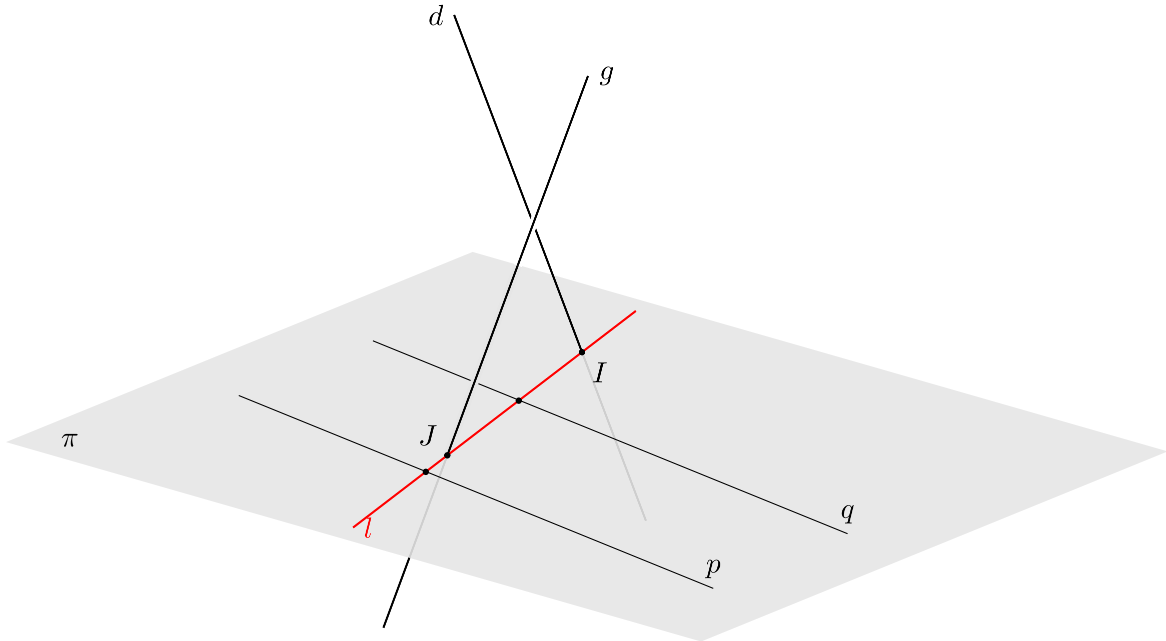
b. Application numérique : d passe par $(0,0,0)$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, g a pour équations cartésiennes :

$$x - 1 = -2z - 4, \; y - 1 = 0$$

la droite p passe par $(2,0,-3)$ et $(6,-6,7)$, et la droite q passe par $(-1,1,0)$.

Solution:

a. Figure d'étude :



Les droites p et q étant parallèles, elles définissent un plan que l'on note π. Une droite l comme dans l'énoncé doit intersecter à la fois p et q, et doit donc être contenue dans π. Si l'une des droites d ou g est parallèle à π, il n'y a donc pas de solution au problème posé. On discute alors selon les positions relatives restantes possibles de d et g avec π :

- d et g sont sécants à π, respectivement aux points I et J. Ces deux points sont distincts car les droites sont gauches. La droite l recherchée est nécessairement la droite (IJ). On voit donc que de deux choses l'une : soit (IJ) est parallèle (non confondue) à p ou q et il n'y a pas de solution, soit elle n'est pas parallèle à p et q, auquel cas c'est la seule doite solution du problème posé.
- d est sécante à π en I et g est contenue dans π. Dans ce cas toutes les droites de π passant par I (sauf les parallèles à p, q et g passant par I) sont solutions du problème.
- d est contenue dans π et g est sécante à π en J. Dans ce cas toutes les droites de π passant par J (sauf les parallèles à p, q et d passant par J) sont solutions du problème.
- d et g sont contenues dans π. Ce cas ne peut pas se produire car d et g sont gauches.

b. Le plan π contient les points $(2, 0, -3)$, $(6, -6, 7)$ et $(-1, 1, 0)$. On trouve alors qu'il admet pour équation cartésienne :

$$\pi : 2x + 3y + z = 1.$$

Les droites d et g ont pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \text{ et } g : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -2 - \dfrac{1}{2}t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

On trouve alors que les droites d et g sont toutes deux sécantes au plan π, respectivement aux points $I(-1, 1, 0)$ et $J(-\frac{1}{3}, 1, -\frac{4}{3})$. Enfin, la droite (IJ) n'est parallèle ni à p ni à q, car le vecteur $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire au vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ de p et q. On en déduit qu'il n'y a qu'une seule solution au problème posé, à savoir la droite d'équations cartésiennes :

$$l : \; x + 1 = \frac{z}{-2}, y = 1.$$