# Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 20 points

*NOM* : ____________________

*PRENOM* : ____________________

Groupe ☐

**1.** Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les endomorphismes suivants :

- $s$ est une symétrie orthogonale telle que le point $P\,(3\,,\,4)$ a pour image le point $P'\,(5\,,\,0)$,
- $p$ est une projection orthogonale sur la droite $y = x$,
- $r$ est une rotation de centre $O$ et d'angle $\varphi = \frac{\pi}{84}$,
- $h$ est une homothétie de centre $O$ et de rapport $k = 5$.

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f = \frac{\sqrt{2}}{2}\, s^{-5} \circ r^{21} \circ h \circ p$ par rapport à la base $B$.

b) Etudier, avec précision, la nature géométrique de $f$.

6.5 pts

*Réponse : a)* $M_f = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

*b)* $f$ est la composée d'une projection sur la droite $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$, et d'une homothétie de centre O et rapport $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

**2.** Dans le plan muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'endomorphisme, noté $p$, tel que $p$ est une projection oblique définie par :
$p\,(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$ où $P\,(0\,,\,5)$ et $P'\,(-3\,,\,6)$ dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Déterminer $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$.

Soient $\vec{u}_1 \in \operatorname{Im} p$ et $\vec{u}_2 \in \ker p$ et la base $B_u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

b) Déterminer la matrice de $p$ par rapport à la base $B_u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Soient le vecteur $\vec{a} = -\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2$ et $P$ la matrice de passage de la base $B_u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ à la base $B_a = (\vec{u}_1, \vec{a})$.

c) **Ne fait pas partie du sujet du test 3 de cette année. Les questions d) et e) peuvent se résoudre sans cette matrice.**
Déterminer $P$.

On considère l'affinité, notée $f$, d'axe $(O\,,\,\vec{u}_1)$, direction $\vec{a}$ et rapport $\lambda = 3$.

d) Déterminer la matrice de $f$ par rapport à la base $B_a$, puis la déterminer par rapport à la base $B_u$.

Soit l'endomorphisme $g$ tel que $g\,(\vec{u}_1) = -4\,\vec{u}_1$ et $g\,(\vec{u}_2) = \alpha\,\vec{u}_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

e) Déterminer $\alpha$ pour que l'application $l = g + f$ soit la composée d'une homothétie et d'une symétrie d'axe $(O\,,\,\vec{u}_2)$ ; donner alors, avec précision, la nature géométrique de $l$.

6.5 pts

*Réponse :* *a)* $\operatorname{Im} p = (OP')$ : droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k\,\vec{u}_1$

$\ker p\,//\,(PP')$ : droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = k\,\vec{u}_2$

*b)* $M_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(c)\ P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

*d)* $M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ par rapport $\mathcal{B}_a$ et $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ par rapport $\mathcal{B}_u$

*e)* $\alpha = 4$ d'où $M_l = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ : $l = h \circ s$

homothétie de rapport 3 composée avec une symétrie d'axe $(O\,,\vec{u}_2)$ et direction $\vec{u}_1$.

**3.** On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $B_e = (\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3)$.

On note $P_1$ l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à un.

On munit $P_1$ de la base canonique $B_u = (x\,,1)$.

On définit l'application $f$ suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3\,,B_e & \longrightarrow & P_1\,,B_u \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (a+b)\,x + c \end{array}$$

a) Montrer que $f$ est linéaire. Déterminer la matrice $M$ de $f$ par rapport aux bases $B_e$ et $B_u$.

**Les questions suivantes ne font pas partie du sujet du test 3 de cette année.**

Soient $B_f = (\vec{f}_1,\,\vec{f}_2,\,\vec{f}_3)$ nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{f_1} - \vec{f_2} = \vec{e}_3 - \vec{e}_2 \\ \vec{f_2} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f_1} - \vec{f_3} = \vec{e}_3 \end{cases}$$

et $B_v = (x-1\,, x+1)$ nouvelle base de $P_1$ .

b) Déterminer les matrices des changements de bases de $B_e$ à $B_f$ et $B_u$ à $B_v$ .

c) Déterminer $\widetilde{M}$ matrice de $f$ par rapport aux bases $B_e$ et $B_v$ .

Soit $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} = k\,\vec{f_1} + 2\,k\,\vec{f_2} - 2\,k\,\vec{f_3}\,,\ k \in \mathbb{R}\}$

d) Déterminer les composantes de $f(E)$ dans $B_v$ ; puis expliciter ces polynômes. Sachant que $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de $P_1$ , on en donnera une base et la dimension.

7 pts

*Réponse :* *a)* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Big($ *b)* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ : matrice de passage de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_f$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ : matrice de passage de $\mathcal{B}_u$ à $\mathcal{B}_v$

*c)* $\widetilde{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*d)* $f(E) = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = [3x+1]_{sev}$ , $\mathcal{B} = (3x+1)$ et dimension de $f(E) = 1 \Big)$

Exercice supplémentaire (contrôle 3, 2008-2009)

**4.** Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$ .
On considère une affinité $f$ d'axe $a$ : $2y - x = 0$ et de rapport $\lambda = -2$ .
Le point $P\,(8\,, 6)$ a pour image par $f$ le point $P'\,(2\,, -3)$ .

a) Déterminer la direction $\vec{v}$ de l'affinité.
Soit $B' = (\vec{a}, \vec{v})$ où $\vec{a}$ est un vecteur parallèle à l'axe $a$ . Déterminer dans $B'$ la matrice $M'_f$ de $f$ .

Soit $g$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\begin{cases} g(\vec{e}_1) + 6\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_1 = \vec{0} \\ g(2\,\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = (2\,\alpha - 4)\,\vec{e}_1\,,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Relativement à la base $B$ , calculer :

- la matrice, dépendante de $\alpha \in \mathbb{R}$ , de l'application $g$
- la matrice de l'application $l = 4f - g$.

Déterminer le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $l$ admette une droite de points fixes.

*Réponse :* a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , $\quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $M_g = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ , $\quad M_l = 4\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 9 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -6 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & -12-\alpha \\ 15 & -11 \end{pmatrix}$ , $\quad \alpha = -8$