Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 18

Exercice 1

Rappelons l'équation canonique de l'hyperbole (centrée à l'origine, axe réel horizontal) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a, b > 0\,.$$

Rappelons aussi l'équation canonique de l'hyperbole (centrée à l'origine, axe réel vertical) :

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{avec } a, b > 0\,.$$

(a) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 117 = 0 \;\Leftrightarrow$
$9(x^2 - 6x) - 4y^2 + 117 = 0 \;\Leftrightarrow$
$9(x-3)^2 - 81 - 4y^2 + 117 = 0 \;\Leftrightarrow$
$9(x-3)^2 - 4y^2 + 36 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0\,.$$

On a alors $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, et donc $a = 3$ et $b = 2$.
Aussi, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Centre : $\Omega\,(3; 0)$
Foyers : $F\,(3, \sqrt{13})$ et $F'\,(3, -\sqrt{13})$
Axe réel : $x = 3$
Axe imaginaire : $y = 0$
Asymptotes (la pente est $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ et elles passent par le point $\Omega\,(3; 0)$) :
$y = \pm\dfrac{3}{2}(x-3)$ c'est-à-dire $3x \pm 2y - 9 = 0$.

(b) $x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 49 = 0 \;\Leftrightarrow$.
$(x^2 - 18x) - 4(y^2 + 4y) + 49 = 0 \;\Leftrightarrow$
$(x-9)^2 - 81 - 4(y+2)^2 + 16 + 49 = 0 \;\Leftrightarrow$
$(x-9)^2 - 4(y+2)^2 - 16 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} - 1 = 0\,.$$

On a alors $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, et donc $a = 4$ et $b = 2$.
Aussi, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20}$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Centre : $\Omega\,(9; -2)$
Foyers : $F\,(9 - 2\sqrt{5}, -2)$ et $F\,(9 + 2\sqrt{5}, -2)$
Axe réel : $y = -2$
Axe imaginaire : $x = 9$
Asymptotes (la pente est $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ et elles passent par le point $\Omega\,(9; -2)$) :
$y + 2 = \pm\dfrac{1}{2}(x-9)$ c'est-à-dire $x - 2y - 13 = 0$ et $x + 2y - 5 = 0$.

Exercice 2

(a) Si le centre est $\Omega\,(-3,1)$ et un foyer $F\,(-3,5)$, alors la distance entre le centre et le foyer valant c, on a $c=4$.
D'où $c^2=16$.
On note que l'hyperbole est d'axe réel vertical.
Comme $e=2=\frac{c}{a}$ et $c=4$, on a $2=\frac{4}{a}$ et $a=2$.
On a $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 4+b^2=16 \Rightarrow b=2\sqrt{3}$.
D'où l'équation de l'hyperbole :

$$-\frac{(x+3)^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

(b) Le centre $\Omega\,(?,1)$ appartient à l'asymptote.
D'où $3x_\Omega-4\cdot 1-2=0 \Rightarrow x_\Omega=2$ et $\Omega\,(2,1)$.
Un foyer est $F\,(7,1)$ car l'hyperbole est d'axe réel horizontal.
D'où $c=7-2=5$.
Pente de l'asymptote : $\frac{3}{4}$.
Pente de l'autre asymptote : $-\frac{3}{4}$.
D'où $y_\Omega=-\frac{3}{4}x_\Omega+h$ où $x_\Omega=2$ et $y_\Omega=1$
$\Rightarrow h=\frac{5}{2}$.
Or $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ et $c^2=a^2+b^2=a^2+\frac{9}{16}a^2=\frac{25}{16}a^2=25$.
D'où $a^2=16$ et $a=4$ et par suite $b=3$.
D'où l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Exercice 3

(a) Lorsque les asymptotes sont perpendiculaires entre elles, on a une hyperbole équilatère.
L'équation de l'hyperbole est de la forme (car $a=b$) :

$$(x+1)^2-(y-4)^2=a^2 \quad \text{ou} \quad (y-4)^2-(x+1)^2=a^2\,.$$

Or $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=3 \Leftrightarrow 9=2a^2 \Rightarrow a^2=\frac{9}{2}$.

On a donc les deux équations suivantes pour les deux hyperboles cherchées :

$$(x+1)^2-(y-4)^2=\frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad (y-4)^2-(x+1)^2=\frac{9}{2}\,.$$

(b) Rappelons l'équation canonique de l'hyperbole (axe réel vertical) :

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \quad \text{avec } a,b>0\,.$$

L'intersection des asymptotes donne le centre :

$$\begin{cases} 3x+4y &= 0 \\ 3x-4y+24 &= 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \Omega\,(-4,3)\,.$
La pente de ces asymptotes est donc de $\pm\frac{3}{4}$, ce qui donne (l'axe réel de l'hyperbole est vertical au vu de l'équation de la directrice) $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ et donc $4a=3b \quad (1)$
De plus la distance entre le centre Ω et la directrice vaut $\frac{a^2}{c}=\mid 6-3\mid = 3 \quad (2)$
On obtient le système suivant :

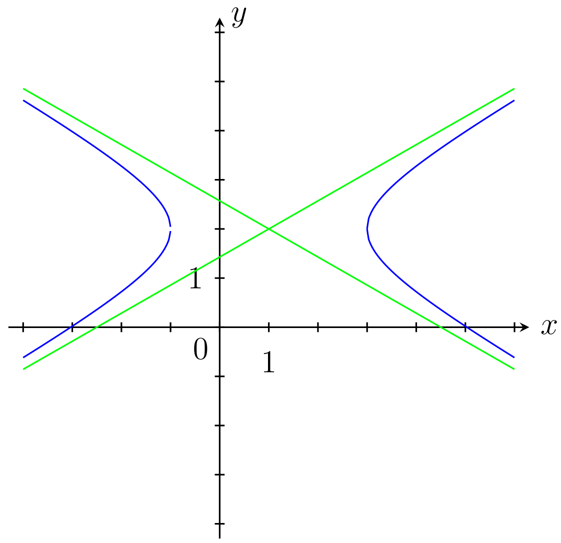
$$\left\{\begin{array}{lcll} 4a & = & 3b & (1) \\ a^2 & = & 3c & (2) \\ c^2 & = & a^2+b^2 & (3) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lclcl} b^2 & = & (\frac{4}{3}a)^2 & = & \frac{16}{9}a^2 \\ c^2 & = & (\frac{a^2}{3})^2 & = & \frac{a^4}{9} \\ \frac{a^4}{9} & = & a^2+\frac{16}{9}a^2 & (4) & \end{array}\right.$$

$(4) \quad \Rightarrow a^4 = 25a^2 \;\Leftrightarrow\; a^2=25 \;\Leftrightarrow\; a=5\,.$
Et par suite $b=\frac{4}{3}a=\frac{20}{3}\,.$
D'où l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{(y-3)^2}{25}-\frac{9(x+4)^2}{400}=1.$$

(c) Une des asymptotes des hyperboles cherchées est d'équation $4x-7y+10=0$, ce qui donne une pente de $\frac{4}{7}$. On a donc deux cas possibles :

1^{er} cas :
$m=\frac{4}{7}=\frac{b}{a}$
$4a=7b$



L'axe réel est $y=y_A=2$, le centre est donc la solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ 4x-7y+10=0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \quad \Omega\,(1,2)\,.$
Et l'équation de l'hyperbole est dans ce 1^{er} cas :

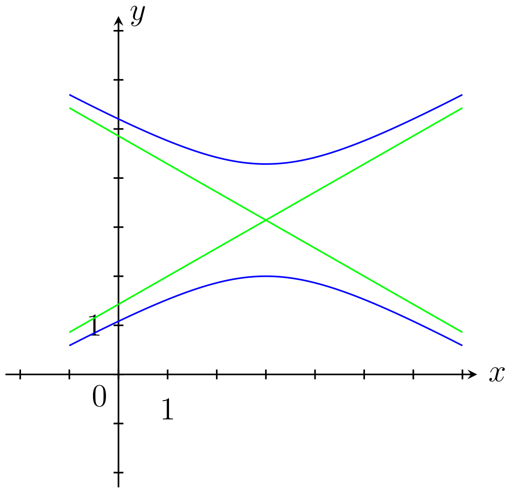
$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1.$$

Or, on sait que la distance entre le centre et le sommet A vaut a et donc on a $a=\mid x_\Omega - x_A\mid = \mid 3-1\mid = 2\,.$
De plus $b=\frac{4}{7}a=\frac{8}{7}\,.$

Donc : $a^2 = 4$ et $b^2 = \frac{64}{49}$.
L'équation de l'hyperbole du 1^{er} cas est donc finalement :

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{49(y-2)^2}{64} = 1.$$

$2^{\text{ème}}$ cas :
$m = \frac{4}{7} = \frac{a}{b}$
$4b = 7a$



L'axe réel est $x = x_A = 3$, le centre est donc la solution du système suivant :

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4x - 7y + 10 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \Omega\,(3, \frac{22}{7})$.
Et l'équation de l'hyperbole est dans ce $2^{\text{ème}}$ cas :

$$-\frac{(x-3)^2}{b^2} + \frac{(y-\frac{22}{7})^2}{a^2} = 1.$$

Or, on sait que la distance entre le centre et le sommet A vaut a et donc on a $a = \mid y_\Omega - y_A \mid = \mid \frac{22}{7} - 2 \mid = \frac{8}{7}$.
De plus $b = \frac{7}{4}a = 2$.
Donc : $a^2 = \frac{64}{49}$ et $b^2 = 4$.
L'équation de l'hyperbole du $2^{\text{ème}}$ cas est donc finalement :

$$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{49(y-\frac{22}{7})^2}{64} = 1.$$

Exercice 4

(a) On a le tableau de signe suivant :

λ		-1		2	
$\lambda+1$	$-$	$\|\|$	$+$		$+$
$(2-\lambda)(\lambda+1)$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$
$\mathcal{H}$	$\emptyset$		*ellipse*		*hyperbole*

(b) Pour l'ellipse, on pose $a^2 > b^2$, alors la position de a^2 dans l'équation détermine la direction du grand axe.

Pour l'hyperbole, c'est la position du signe négatif qui détermine la direction de l'axe réel.

Premier cas : $\lambda \in]-1\,;\,2[$ alors $\mathcal{H}$ est une ellipse.

- Pour déterminer si le grand axe est horizontal ou vertical, il faut comparer les dénominateurs. On résoud par exemple :

  $\lambda + 1 \geq (2-\lambda)(\lambda+1) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda-1) \geq 0$

λ	-1		1		2
	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$

- Si $\lambda = 1$ alors $\lambda + 1 = (2-\lambda)(\lambda+1)$ c'est-à-dire $a^2 = b^2$: $\mathcal{H}$ est un cercle.

- Si $\lambda \in]1\,;\,2[$ alors $a^2 = \lambda + 1$ et $b^2 = (2-\lambda)(\lambda+1)$
  Le grand axe est horizontal.

- Si $\lambda \in]-1\,;\,1[$ alors $a^2 = (2-\lambda)(\lambda+1)$ et $b^2 = \lambda + 1$
  Le grand axe est vertical.

Deuxième cas : $\lambda \in]2\,;\,+\infty[$ alors $\mathcal{H}$ est une hyperbole.

Dans ce cas : $a^2 = \lambda + 1 > 0$ et $b^2 = (-1)(2-\lambda)(\lambda+1) > 0$

L'axe réel est horizontal.

On réécrit l'équation sous la forme :

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\lambda+1} - \frac{(y-2)^2}{(-1)(2-\lambda)(\lambda+1)} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-\lambda)^2}{\lambda+1} - \frac{(y-2)^2}{(\lambda-2)(\lambda+1)} - 1 = 0$$

(c) $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère ssi $a^2 = b^2$.

Par hypothèse : $\lambda \in]2\,;\,+\infty[$

L'hyperbole équilatère ssi $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda+1 = (\lambda-2)(\lambda+1) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ La seule solution est $\lambda = 3$. D'où l'équation cartésienne :

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} - 1 = 0$$

Le centre de la conique est donc : $\Omega\,(3\,;\,2)$.
L'axe réel étant horizontal, les foyers ont pour coordonnées : F , $F'\,(3 \pm c\,;\,2)$.
$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad c = 2\sqrt{2}$.
D'où les foyers :

$$F(3+2\sqrt{2};\,2) \qquad F'(3-2\sqrt{2};\,2)$$

(d) Il faut considérer deux cas, selon de la direction du grand axe.
Exprimer les coordonnées des sommets en fonctions de λ puis éliminer le paramètre pour déterminer l'équation cartésienne du lieu.

- Ellipse de grand axe horizontal : $\lambda \in]1\,;\,2[$ et $a^2 = \lambda + 1 > 0$

  Le centre a pour coordonnées : $\Omega\,(\lambda\,;\,2)$.
  D'où les sommets du grand axe : $A,\ B(\lambda \pm a\,;\,2) \ = \ (\lambda \pm \sqrt{\lambda+1}\,;\,2)$
  Ce qui définit deux lieux.

$$1)\ \begin{cases} 1 < \lambda < 2 \\ x = \lambda + \sqrt{\lambda+1} \\ y = 2 \end{cases}$$

La fonction $f(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda+1}$ étant croissante sur l'intervalle $]1\,;\,2[$, on obtient :

$$\begin{cases} x \in]1+\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{3}[\\ y = 2 \end{cases}$$

Le lieu de A est un segment de droite horizontal.

$$2)\ \begin{cases} 1 < \lambda < 2 \\ x = \lambda - \sqrt{\lambda+1} \\ y = 2 \end{cases}$$

On montre facilement que $f(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda+1}$ est aussi croissante sur l'intervalle $]1\,;\,2[$, on obtient :

$$\begin{cases} x \in]1-\sqrt{2}\,;\,2-\sqrt{3}[\\ y = 2 \end{cases}$$

Le lieu de B est un segment de droite horizontal.

- Ellipse de grand axe vertical : $\lambda \in]-1\,;\,1[$ et $a^2 = (2-\lambda)(\lambda+1) > 0$

  Le centre a pour coordonnées : $\Omega\,(\lambda\,;\,2)$.
  D'où les sommets du grand axe : $A,\ B(\lambda\,;\,2 \pm a) \ = \ (\lambda\,;\,2 \pm \sqrt{(2-\lambda)(\lambda+1)})$
  Ce qui définit deux lieux.

$$1)\ \begin{cases} -1 < \lambda < 1 \\ x = \lambda \\ y - 2 = \sqrt{(2-\lambda)(\lambda+1)} \\ y > 2 \end{cases}$$

Sous la condition $y > 2$ on peut élever au carré :

$$\begin{cases} x \in]-1\,;\,1[\\ (y-2)^2 = (2-x)(x+1) \\ y > 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in]-1\,;\,1[\\ (x - \dfrac{1}{2})^2 + (y-2)^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \\ y > 2 \end{cases}$$

Le lieu est un arc du cercle γ centré en $C(\dfrac{1}{2}\,;\,2)$ et de rayon $r = \dfrac{3}{2}$ et dont les points extrémités $J(1\,;\,2+\sqrt{2})$ et $K(-1\,;\,2)$ sont exclus.

$$2)\ \begin{cases} -1 < \lambda < 1 \\ x = \lambda \\ y - 2 = -\sqrt{(2-\lambda)(\lambda+1)} \\ y < 2 \end{cases}$$

Sous la condition $y < 2$ on peut élever au carré :

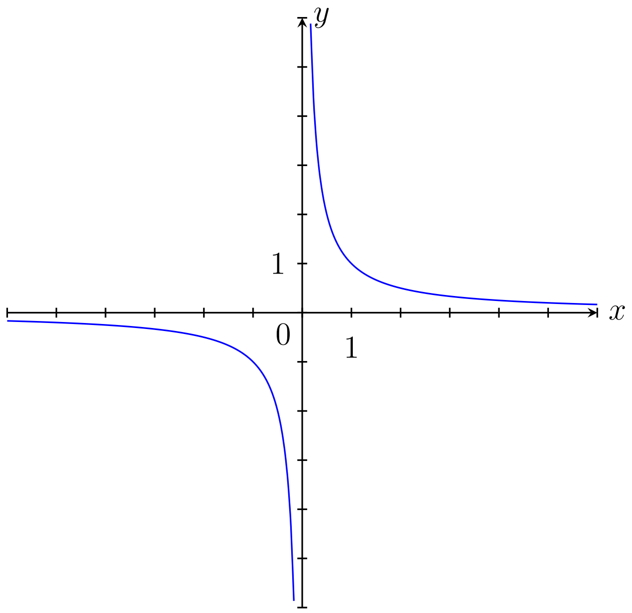
$$\left\{\begin{array}{l} x \in]-1\,;\,1[\\ (y-2)^2 = (2-x)(x+1) \\ y < 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x \in]-1\,;\,1[\\ (x-\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ y < 2 \end{array}\right.$$

Le lieu est un arc du cercle γ dont les points extrémités $I(1\,;\,2-\sqrt{2})$ et $K(-1\,;\,2)$ sont exclus.

Exercice 5

L'hyperbole $\mathcal{H}$ est d'équation $xy = k, \quad k > 0$ (fixé).

Schéma (pour $k = 1$) : le repère étant orthonormé.



L'hyperbole $\mathcal{H}$ est d'équation $xy = k, \quad k > 0$ (fixé).
De plus, on a $A \in \mathcal{H}$ ce qui implique que (sachant que $x_A = a \quad (a > 0)$),

$$A\,(\,a\,;\,\frac{k}{a}\,),\ a > 0$$

Choix du paramètre : pente de $d \ \rightarrow m$.

Déterminons tout d'abord les points P et N en fonction des paramètres du problème a et k, ainsi que du paramètre du lieu : m.

$\{P\} = d \cap Ox$ en sachant que d passe par A et est de pente m
$\rightarrow P\,(\,a - \dfrac{k}{ma}\,;\,0\,)$

$\{N\} = d \cap \mathcal{H}$:
$x\left(mx + \dfrac{k}{a} - ma\right) = k$
$mx^2 + \left(\dfrac{k}{a} - ma\right)x - k = 0$
D'après les formules de Viète, on a :

$x' = a$ est solution, ce qui implique (en supposant $m \neq 0$) :

$x'x'' = -\frac{k}{m} = ax'' \quad \Rightarrow \quad x'' = -\frac{k}{am} = x_N$
Et par suite $y_N = \frac{k}{x_N} = -am$.
On a donc

$$N\left(-\frac{k}{am}\,;-am\right)$$

Cherchons ensuite le lieu des points M, proprement dit :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{am} - a \\ -2am \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Ce qui implique donc $y = -2am$ et donc $m = -\dfrac{y}{2a}$
D'où : $x = \dfrac{k}{a} \cdot \dfrac{2a}{y} - a = \dfrac{2k}{y} - a$

Et on obtient finalement le lieu des points M :

$$(x+a)y = 2k$$

Il s'agit d'une hyperbole équilatère de centre $\Omega\,(-a\,;\,0\,)$