

Solutions Semaine 7a

Solution 1

Commentaires généraux sur la résolution du problème.

1. La convention choisie pour les forces et les moments est similaire à celle que vous avez vu au cours. De manière générale, vous pouvez cependant choisir le sens dans lequel vous dessinez vos forces ou vos moments. La seule contrainte physique étant que les efforts de liaison entre deux sous-systèmes doivent être de sens opposé.
2. Pour des dessins de poutres, comme les efforts internes sont décrits par une seule fonction le long de toute la poutre, on les posera toujours dans le même sens pour les parties de gauche de la poutre et dans le sens opposé pour les parties de droite. Un signe négatif dans la réponse indique que la direction réelle de l'effort est dans le sens opposé à celui dans lequel vous l'avez dessiné.
3. Lorsque vous coupez des poutres pour calculer les efforts internes, définissez toujours une coordonnée unique liant tous les sous-systèmes (nous avons définis la coordonnée x dans les solutions suivantes).

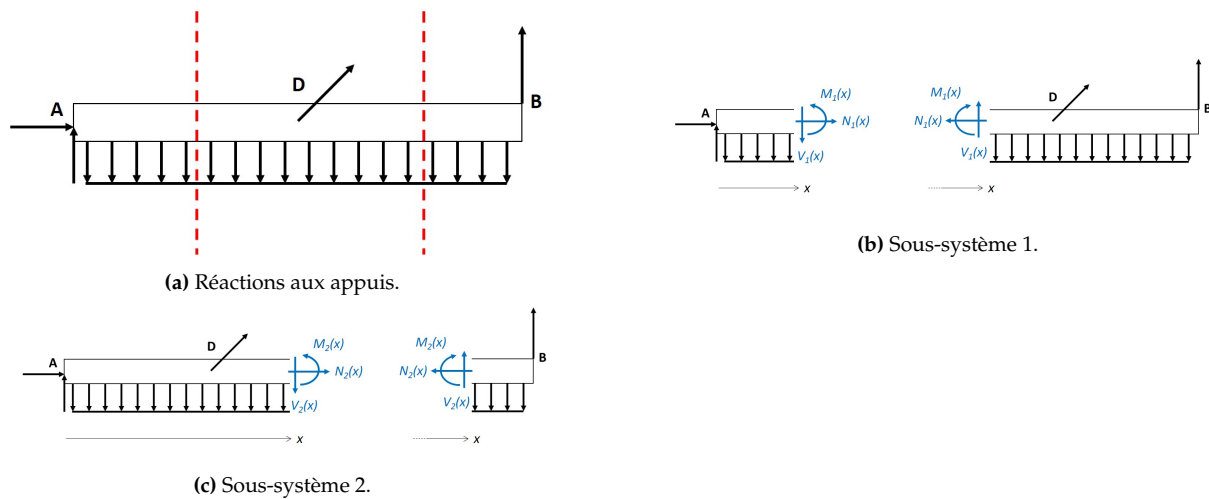


FIGURE 1 – Poutre A.

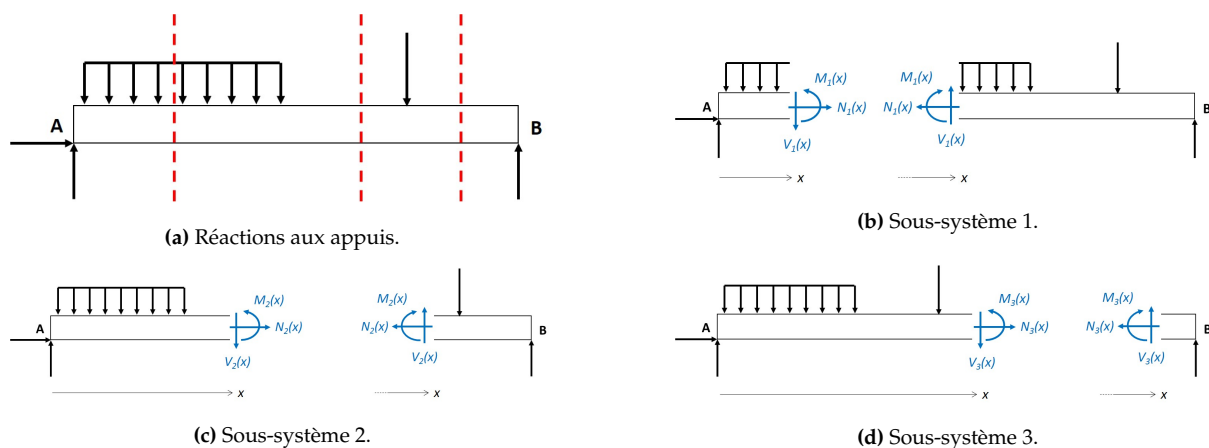


FIGURE 2 – Poutre B.

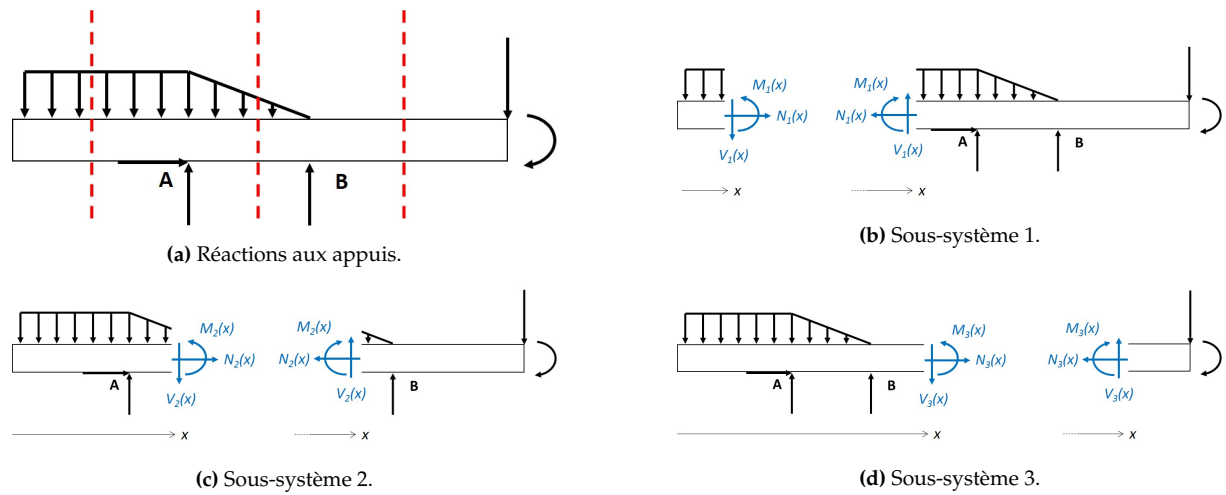


FIGURE 3 – Poutre C.

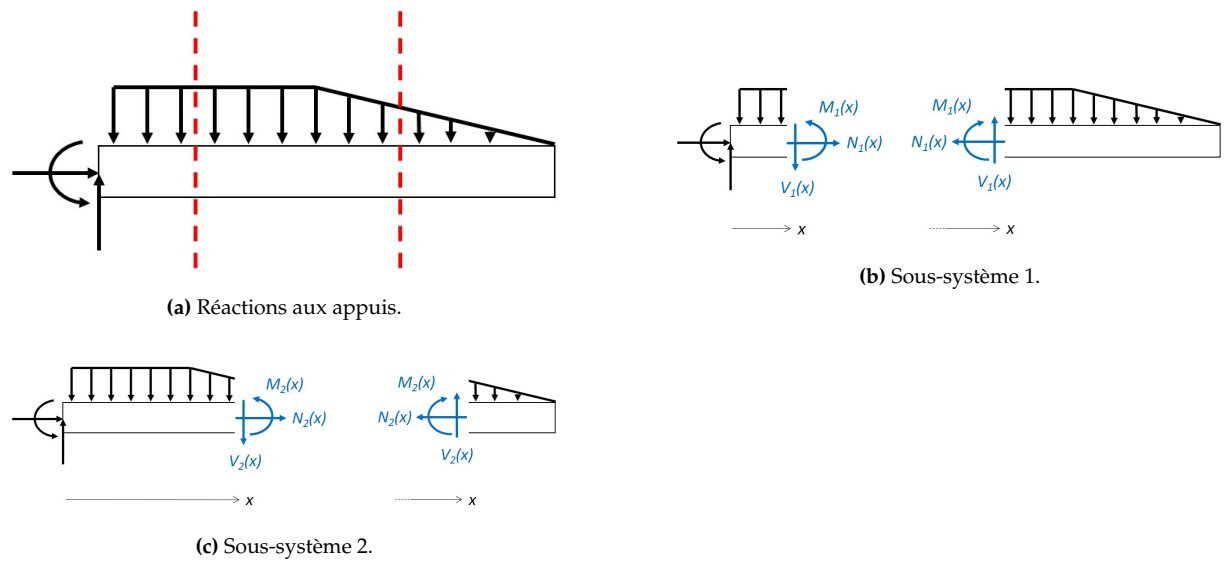


FIGURE 4 – Poutre D.

Solution 2

(a) Les forces de réactions sont dessinées à la figure 5.

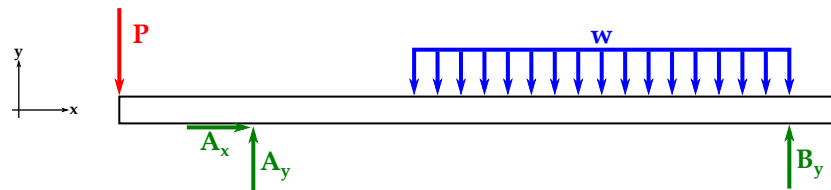


FIGURE 5 – Diagramme des forces de réaction sur le système.

Vu qu'il n'y a pas de force selon x , on remarque tout de suite que :

$$A_x = 0 \text{ N} \quad (1)$$

Pour calculer les réactions des appuis selon y , on fait la somme des moments au point A :

$$\sum M_A = 5 \cdot P - 13 \cdot 14 \cdot w + 20 \cdot B_y = 0 \quad (2)$$

$$B_y = 410 \text{ N} \quad (3)$$

$$\sum M_B = 25 \cdot P + 7 \cdot 14 \cdot w - 20 \cdot A_y = 0 \quad (4)$$

$$A_y = 2990 \text{ N} \quad (5)$$

(b) Pour calculer $M(x)$, on sépare trois fois en sous-systèmes, puis on trouve les $M_i(x)$. Vu qu'il n'y a pas de forces selon x , on n'a ni dessiné les efforts normaux, ni reporté A_x .

Premier sous-système ($0 < x < 5$, figure 6) :

Pour la partie de gauche :

$$\sum M(x) = M_1(x) + Px = 0 \quad (6)$$

$$M_1(x) = -Px = [-2000x] \text{ N m} \quad (7)$$

Deuxième sous-système ($5 < x < 11$, figure 7) :

Encore une fois, pour la partie de gauche :

$$\sum M(x) = M_2(x) - (x - 5)A_y + Px = 0 \quad (8)$$

$$M_2(x) = [(x - 5)A_y - Px] = [-14950 + 990x] \text{ N m} \quad (9)$$

Troisième sous-système ($11 < x < 25$, figure 8) :

C'est plus simple, dans ce cas, d'utiliser la partie de droite (attention à l'intégrale utilisant la variable muette u) :

$$\sum M(x) = -M_3(x) + (25 - x)B_y - \int_x^{25} 100(u - x)du = 0 \quad (10)$$

$$M_3(x) = [-21000 + 2090x - 50x^2] \text{ N m} \quad (11)$$

Les forces et moments internes entre B et le bout de la poutre sont tous nuls, car il n'y a aucune contrainte externe sur cette partie de la poutre.

(c) Pour trouver l'effort tranchant, on dérive simplement le moment fléchissant calculé précédemment ($V(x) = dM(x)/dx$). On dessine ensuite l'effort tranchant et le moment fléchissant par rapport à la distance x , en tenant compte des valeurs calculées (voir figure 9) :

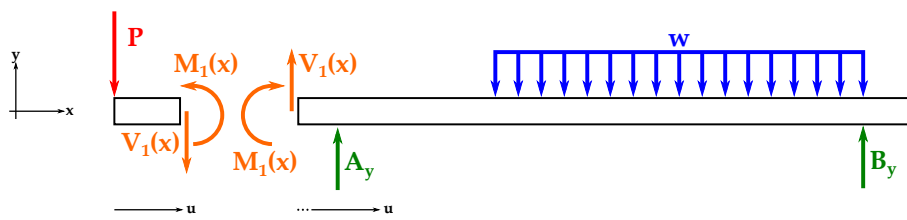


FIGURE 6 – Diagramme des forces pour le premier sous-système.

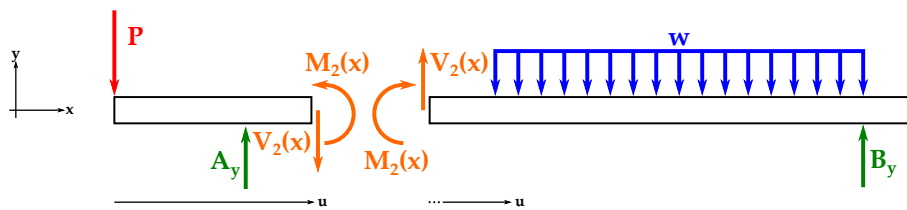


FIGURE 7 – Diagramme des forces pour le deuxième sous-système.

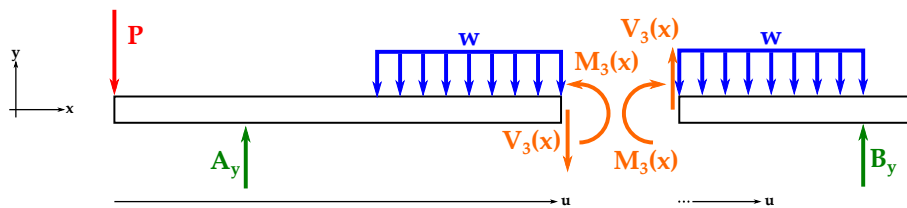


FIGURE 8 – Diagramme des forces pour le troisième sous-système.

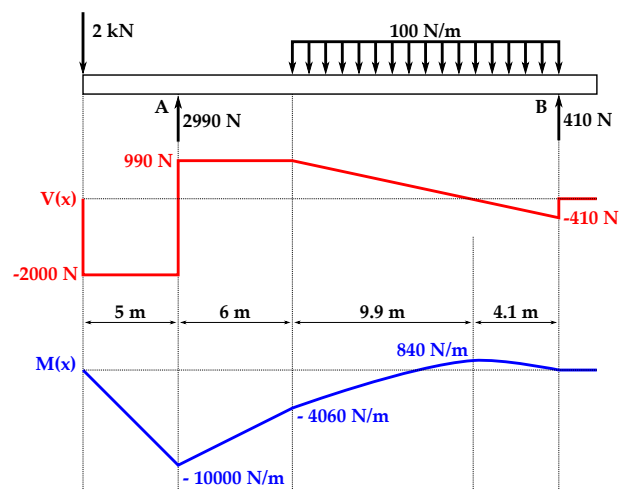


FIGURE 9 – Diagramme des forces et moments internes.

Solution 3

(a) The free body diagram of the beam is shown in Figure 10.

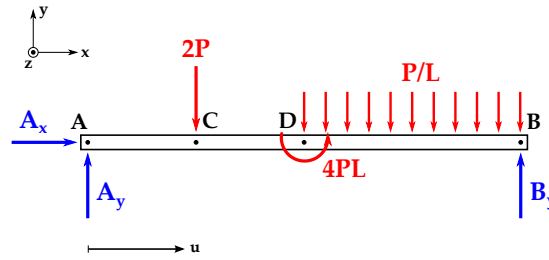


FIGURE 10 – The FBD of the beam.

To find A_x , we use the force balance in the x direction :

$$\sum F_x = A_x = 0 \quad (12)$$

To find B_y , we take the moment with respect to point A :

$$\sum M_A = -(2P)(L) + 4PL - \int_{2L}^{4L} q(u)u du + (B_y)(4L) = 0 \quad (13)$$

$$\sum M_A = -(2P)(L) + 4PL - \int_{2L}^{4L} \frac{P}{L} u du + (B_y)(4L) = 0 \quad (14)$$

$$B_y = P \quad (15)$$

As we now know B_y , we can use the force balance equation in the y direction to find A_y

$$\sum F_y = A_y - 2P - \int_{2L}^{4L} q(u) du + B_y = 0 \quad (16)$$

$$\sum F_y = A_y - 2P - \int_{2L}^{4L} \frac{P}{L} du + B_y = 0 \quad (17)$$

$$A_y = 3P \quad (18)$$

(b) Distributed load :

$$q(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0; L] \\ 0 & x \in [L; 2L] \\ \frac{P}{L} & x \in [2L; 4L] \end{cases}$$

point load $q(L) = 2P$

Shear force : $V(x) = \int -q(x) dx$

$$V(x) = \begin{cases} C_1 & x \in [0; L) \\ C_2 & x \in (L; 2L] \\ -\frac{P}{L}x + C_3 & x \in [2L; 4L] \end{cases}$$

Boundary conditions and continuity for the shear force :

$$V_1(0) = 3P$$

$$V_3(4L) = -P$$

$$V_2(2L) = V_3(2L) \text{ because no point load}$$

After substitution :

$$V(x) = \begin{cases} 3P & x \in [0; L) \\ P & x \in (L; 2L] \\ -\frac{P}{L}x + 3P & x \in [2L; 4L] \end{cases}$$

Bending moment : $M(x) = \int V(x) dx$

$$M(x) = \begin{cases} 3Px + C_4 & x \in [0; L] \\ Px + C_5 & x \in [L; 2L] \\ -\frac{P}{2L}x^2 + 3Px + C_6 & x \in (2L; 4L] \end{cases}$$

Boundary conditions and continuity for the bending moment :

$$M_1(0) = 0$$

$$M_3(4L) = 0$$

$$M_1(L) = M_2(L)$$

After substitution :

$$M(x) = \begin{cases} 3Px & x \in [0; L] \\ P(x + 2L) & x \in [L; 2L) \\ -\frac{P}{2L}x^2 + 3Px - 4PL & x \in (2L; 4L] \end{cases}$$

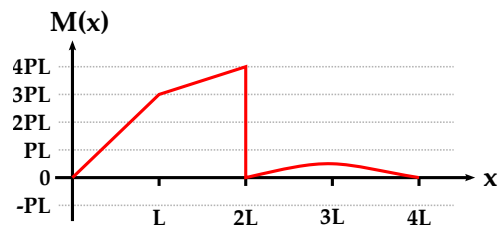


FIGURE 11 – The graph of bending moment along the beam.

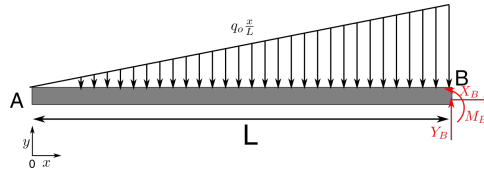


FIGURE 12 – Question 4a : Diagramme des forces

Solution 4

- (a) Le diagramme des forces est présenté en figure 12. On peut calculer les réactions en calculant le bilan des forces du système, cette étape n'est pas obligatoire pour répondre à la question mais elle permet de vérifier facilement les résultats obtenus pour les calculs de moment de flexion et d'effort tranchant :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= X_B = 0 \\ \sum F_y &= Y_B + \int_0^L q(x)dx = 0 \\ \sum M_z \text{ en B} &= M_B + \int_0^L q(x)(x-L)dx = 0\end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}Y_B &= - \int_0^L -q_0 \frac{x}{L} dx = \frac{q_0 L}{2} \\ M_B &= - \int_0^L -q_0 \frac{x}{L} (x-L) dx = -\frac{q_0 L^2}{6}\end{aligned}$$

On intègre la distribution de charge $q(x)$ pour trouver l'effort tranchant :

$$\begin{aligned}V(x) &= \int q(x)dx \\ V(x) &= \int -\frac{x}{L} q_0 dx \\ V(x) &= -\frac{x^2}{2L} q_0 + C_1\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas d'effort ponctuel en $x = 0$, on calcule C_1 :

$$V(x=0) = 0 \implies C_1 = 0$$

De même pour le moment de flexion, on intègre l'effort tranchant :

$$\begin{aligned}M(x) &= \int V(x)dx \\ M(x) &= -\frac{x^3}{6L} q_0 + C_2\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de moment ponctuel en $x = 0$, on calcule C_2 :

$$M(x=0) = 0 \implies C_2 = 0$$

On obtient les graphes en figure 13. On remarque que les efforts internes au point B correspondent aux efforts de réaction Y_B et M_B .

- (b) Le diagramme des forces est présenté en figure 14. On peut calculer les réactions en calculant le bilan des forces du système, cette étape n'est pas obligatoire pour répondre à la question mais elle permet de vérifier facilement les résultats obtenus pour les calculs de moment de flexion et d'effort tranchant :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= X_B = 0 \\ \sum F_y &= Y_B + \int_0^L q(x)dx = 0 \\ \sum M_z \text{ en B} &= M_B + \int_0^L q(x)(x-L)dx = 0\end{aligned}$$

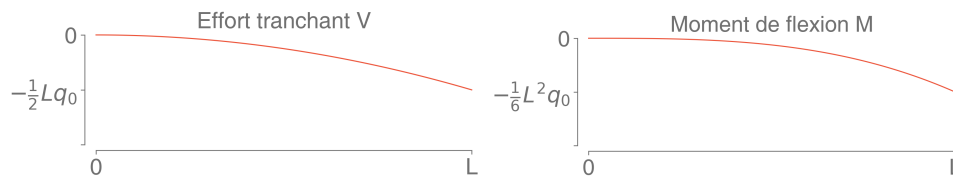


FIGURE 13 – Question 2a : Graphes d'effort tranchant et moment de flexion

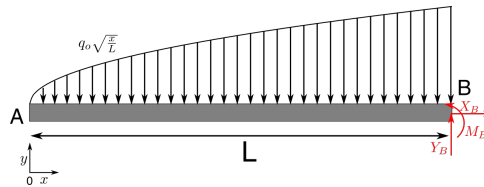


FIGURE 14 – Question 4b : Diagramme des forces

On trouve :

$$Y_B = - \int_0^L -q_0 \sqrt{\frac{x}{L}} dx = \frac{2}{3} q_0 L$$

$$M_B = - \int_0^L -q_0 \sqrt{\frac{x}{L}} (x - L) dx = -\frac{4}{15} q_0 L^2$$

On intègre la distribution de charge $q(x)$

$$V(x) = \int q(x) dx$$

$$V(x) = \int -\sqrt{\frac{x}{L}} q_0 dx$$

$$V(x) = -\frac{2}{3} x \sqrt{\frac{x}{L}} q_0 + C_1$$

Comme il n'y a pas d'effort ponctuel en $x = 0$, on calcule C_1 :

$$V(x = 0) = 0 \implies C_1 = 0$$

De même pour le moment de flexion, on intègre l'effort tranchant :

$$M(x) = \int V(x) dx$$

$$M(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} x^2 \sqrt{\frac{x}{L}} q_0 + C_2$$

$$M(x) = -\frac{4}{15} x^2 \sqrt{\frac{x}{L}} q_0$$

Comme il n'y a pas de moment ponctuel en $x = 0$, on calcule C_2 :

$$M(x = 0) = 0 \implies C_2 = 0$$

On obtient les graphes en figure 15. On remarque que les efforts internes au point B correspondent aux efforts de réaction Y_B et M_B .

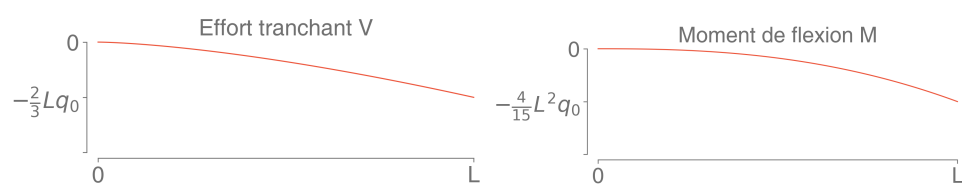


FIGURE 15 – Question 2b : Diagramme d'effort tranchant et moment de flexion

Solution 5

(a) From the given shear force diagram we can find the shear force functions as :

$$V(x) = \begin{cases} 5 - 5x & x \in [0; 1] \\ -5 + 5x & x \in [1; 2] \\ 5 & x \in [2; 3] \\ -10 & x \in (3; 4) \end{cases}$$

The derivative of the shear force gives us the load :

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (19)$$

The distributed

$$q(x) = \begin{cases} 5 & x \in [0; 1] \\ -5 & x \in [1; 2] \\ 0 & x \in [2; 3] \\ 0 & x \in (3; 4) \end{cases}$$

Be aware that the shear force is discontinuous at $x = 3$. The point load at this points is $+15kN$

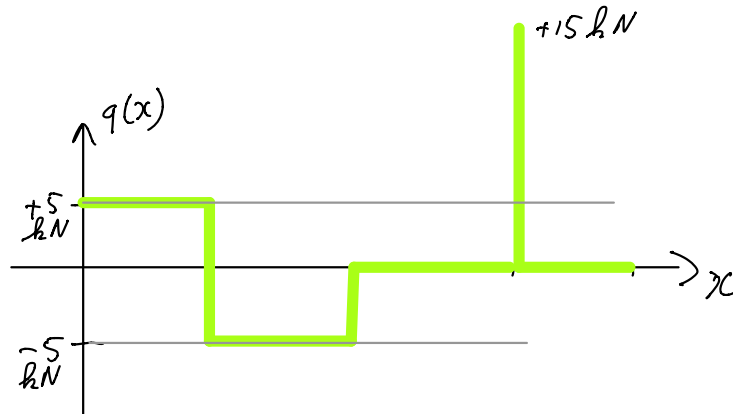


FIGURE 16 – The distributed load diagram.

(b) The integral of the shear force gives us the bending moment :

$$M(x) = \int V(x) dx \quad (20)$$

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x^2 + 5x + C_1 & x \in [0; 1] \\ \frac{5}{2}x^2 - 5x + C_2 & x \in [1; 2] \\ 5x + C_3 & x \in [2; 3] \\ -10x + C_4 & x \in [3; 4] \end{cases}$$

2 boundary conditions for the moment : $M_1(0) = 0$ and $M_4(4) = 0$. Thus $C_1 = 0$ and $C_4 = 40$. We use 2 continuity equations of the moment to find C_2 and C_3 : $M_1(1) = M_2(1) = 2.5kNm$ and $M_3(3) = M_4(3) = 10kNm$. This gives us $C_2 = 5$ and $C_3 = -5$.

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x^2 + 5x & x \in [0; 1] \\ \frac{5}{2}x^2 - 5x + 5 & x \in [1; 2] \\ 5x - 5 & x \in [2; 3] \\ -10x + 40 & x \in [3; 4] \end{cases}$$

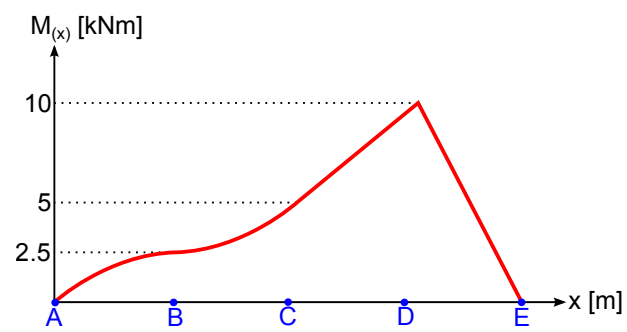


FIGURE 17 – The moment diagram of the beam.

Solution 6

(a) The free body diagram of the beam is shown Figure 18.

Reaction forces :

$$\sum F_y = - \int_0^L w_0 du + B_y = 0 \quad (21)$$

$$B_y = w_0 L \quad (22)$$

$$\sum F_x = A_x = 0 \quad (23)$$

$$\sum M = M_A - \int_0^L w_0 x dx + B_y(L) = 0 \quad (24)$$

$$M_A = - \frac{w_0 L^2}{2} \quad (25)$$

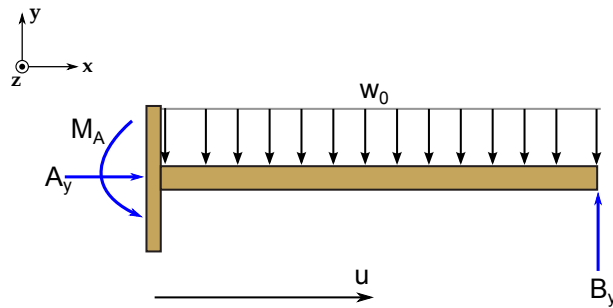


FIGURE 18 – The FBD of the beam.

(b) $q_{(x)} = -w_0$

$$V_{(x)} = \int q_{(x)} dx = \int -w_0 dx \quad (26)$$

$$V_{(x)} = -w_0 x + C_1 \quad (27)$$

Boundary condition : $V_{(0)} = 0$, thus $C_1 = 0$ and $V_{(x)} = -w_0 x$.

$$M_{(x)} = \int V_{(x)} dx = \int -w_0 x dx \quad (28)$$

$$M_{(x)} = \frac{-w_0 x^2}{2} + C_2 \quad (29)$$

Boundary condition : $M_{(L)} = 0$, thus $C_2 = \frac{w_0 L^2}{2}$ and $M_{(x)} = \frac{w_0}{2} (L^2 - x^2)$.

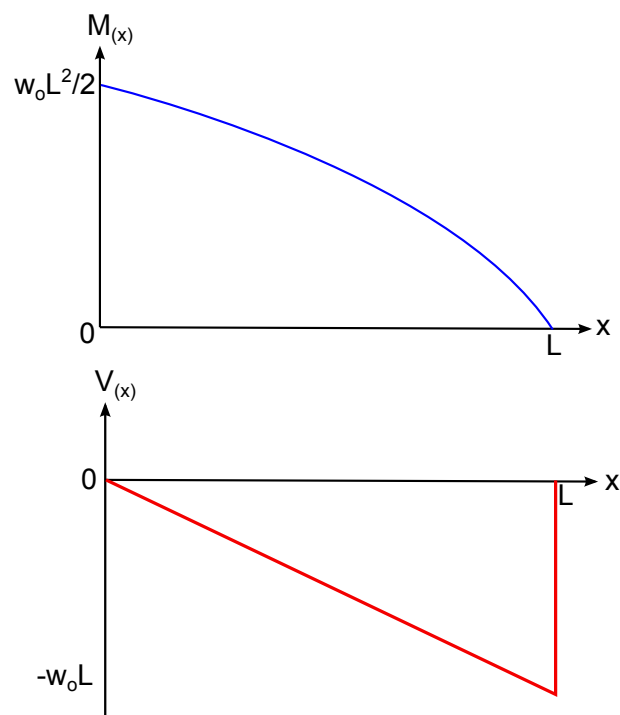


FIGURE 19 – Bending moment and Shear force along the beam.