Carrés magiques d'ordre 3

Monique VOUTAZ
Véronique TISSOT

Table des matières

1 Introduction

Un *carré magique d'ordre* n est un tableau carré de nombres entiers positifs, à n lignes et n colonnes, et jouissant des propriétés suivantes : la somme des éléments d'une ligne, d'une colonne, d'une diagonale est constante.

Exemples :

1. Le carré d'ordre 4 suivant :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

   est un carré magique de constante $k = 34$, car 34 est la somme des éléments de n'importe quelle ligne, colonne et diagonale de ce carré.
   Par exemple : $1 + 15 + 14 + 4 = 34$ et $13 + 10 + 7 + 4 = 34$, etc. On remarque que dans ce cas, les éléments du tableau sont les entiers consécutifs de 1 à 16 ; un carré dont les n^2 nombres entiers qui le constituent sont les entiers consécutifs de 1 jusqu'à n^2 est appelé *carré magique normal*.

2. Le carré suivant :

39	53	59	42
57	44	45	47
46	55	49	43
51	41	40	61

   est magique (mais pas normal) de constante $k = 193$.

3. Le carré magique normal d'ordre 5 et de constante $k = 65$ suivant :

13	7	1	25	19
21	20	14	8	2
9	3	22	16	15
17	11	10	4	23
5	24	18	12	6

   possède la propriété de rester magique par toute permutation circulaire de ses lignes ou de ses colonnes. Un tel carré est appelé *carré panmagique* ou *carré diabolique*.

Par exemple le carré ci-dessous, obtenu par permutation circulaire des colonnes du précédent, est encore magique :

1	25	19	13	7
14	8	2	21	20
22	16	15	9	3
10	4	23	17	11
18	12	6	5	24

On peut montrer que ce carré possède encore d'autres particularités étonnantes ...

A la suite des recherches menées durant le deux dernières décennies, il apparaît que les carrés magiques ont été initialement étudiés dans les pays musulmans. Les premières études dans ce domaine ont été faites peu après l'introduction du jeu d'échecs en Perse, vers le VII$^{\text{ième}}$ siècle.

Des pays de l'Islam, les carrés magiques sont parvenus aux Indes, puis en Chine ; enfin ils sont arrivés en Europe via Byzance grâce au moine grec Moschopoulos (XV$^{\text{ième}}$ siècle). Des légendes et des superstitions naissent alors : origine antédiluvienne ou même divine de ces carrés, propriétés occultes fastes ou néfastes, etc ...

C'est ainsi qu'apparaît (vers le XVII$^{\text{ième}}$ siècle) la dénomination, à connotation péjorative, de carré "magique". Peu à peu elle remplacera la dénomination traditionnelle arabe de *disposition harmonieuse des nombres.*

Plus tard, au XVII$^{\text{ième}}$ et XVIII$^{\text{ième}}$ siècles, de grands mathématiciens en ont fait l'objet de leurs préoccupations, tels Fermat ou Euler.

Actuellement, il reste de nombreux problèmes ouverts concernant les carrés magiques : par exemple, la détermination de tous les carrés d'ordre n, pour tout entier n.

Le but de l'étude qui va suivre est de montrer qu'il est possible de décrire relativement aisément tous les carrés magiques *d'ordre 3* dont les éléments sont des <u>*nombres réels*</u> , ceci en utilisant quelques outils de l'algèbre linéaire.

Tout d'abord, on assimile l'ensemble des carrés d'ordre 3 à l'ensemble des matrices carrées 3×3 à coefficients réels. La solution du problème repose alors sur deux observations : d'une part, l'ensemble des matrices *magiques* carrées d'ordre 3 a une structure *d'espace vectoriel réel* ; et d'autre part, les contraintes sur les éléments de ces matrices sont *linéaires.*

2 Etude de l'espace vectoriel réel des carrés magiques d'ordre 3

On note $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ le sous-ensemble de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices magiques d'ordre 3 à coefficients réels.

Proposition :
$\mathbb{M}_{\text{ag}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

Preuve :
On utilise le critère du sous-espace vectoriel. Il s'agit donc de montrer :

$$\forall \lambda\,, \mu \in \mathbb{R}\ , \forall A, B \in \mathbb{M}_{\text{ag}},\ \lambda\, A + \mu\, B \in \mathbb{M}_{\text{ag}}\,.$$

En notant k_A et k_B les constantes magiques de A et B, et en utilisant les propriétés d'addition des matrices et de multiplication par un scalaire, on constate que :

- λA et μB sont des matrices magiques telles que $k_{\lambda A} = \lambda\, k_A$ et $k_{\mu B} = \mu\, k_B$;
- $A + B$ est une matrice magique telle que $k_{A+B} = k_A + k_B$.

Ainsi $\lambda A + \mu B$ est une matrice magique d'ordre 3 dont la constante vaut $\lambda\, k_A + \mu\, k_B$, c'est-à-dire $\lambda\, A + \mu\, B \in \mathbb{M}_{\text{ag}}$.

■

2.1 Mise en équations

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$; les contraintes qui rendent magique la matrice A peuvent être décrites à l'aide d'un système *homogène d'équations linéaires.*

Plus précisément, si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et que l'on désigne par k la constante magique ($k \in \mathbb{R}$), alors les huit contraintes sur les éléments de A s'expriment ainsi :

$$\textit{(I)}\ \left\{ \begin{array}{rcll} a_{11} + a_{22} + a_{33} & = & k & \textit{(1)} \\ a_{31} + a_{22} + a_{13} & = & k & \textit{(2)} \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} & = & k & \textit{(3)} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} & = & k & \textit{(4)} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} & = & k & \textit{(5)} \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} & = & k & \textit{(6)} \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} & = & k & \textit{(7)} \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} & = & k & \textit{(8)} \end{array} \right.$$

Après soustraction de l'équation *(1)* aux équations *(2)* à *(8)*, le système *(I)* est équivalent au système *(II)* suivant :

$$
(II)\left\{\begin{array}{rcll}
a_{11}+a_{22}+a_{33} & = & k & \textit{(1)}\\
a_{31}+a_{22}+a_{13}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(2)}\\
a_{11}+a_{12}+a_{13}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(3)}\\
a_{21}+a_{22}+a_{23}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(4)}\\
a_{31}+a_{32}+a_{33}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(5)}\\
a_{11}+a_{21}+a_{31}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(6)}\\
a_{12}+a_{22}+a_{32}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(7)}\\
a_{13}+a_{23}+a_{33}-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) & = & 0 & \textit{(8)}
\end{array}\right.
$$

On observe que les neuf inconnues $a_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ vérifient le système homogène formé des équations *(2)* à *(8)* et ceci $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

Soit *(III)* ce système :

$$
(III)\left\{\begin{array}{cccccccccccl}
-a_{11} & & +a_{13} & & & & +a_{31} & & -a_{33} & = & 0 & \textit{(1)}\\
 & a_{12} & +a_{13} & & -a_{22} & & & & -a_{33} & = & 0 & \textit{(2)}\\
-a_{11} & & & +a_{21} & & +a_{23} & & & -a_{33} & = & 0 & \textit{(3)}\\
-a_{11} & & & & -a_{22} & & +a_{31} & +a_{32} & & = & 0 & \textit{(4)}\\
 & & & a_{21} & -a_{22} & & +a_{31} & & -a_{33} & = & 0 & \textit{(5)}\\
-a_{11} & +a_{12} & & & & & & +a_{32} & -a_{33} & = & 0 & \textit{(6)}\\
-a_{11} & & +a_{13} & & +a_{22} & +a_{23} & & & & = & 0 & \textit{(7)}
\end{array}\right.
$$

A ce système on associe l'application linéaire f de $\mathbb{R}^9$ dans $\mathbb{R}^7$ définie ainsi :

$$f(\vec{a}) = M\,\vec{a}$$

avec

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\\ a_{21}\\ a_{22}\\ a_{23}\\ a_{31}\\ a_{32}\\ a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9 \qquad \text{et} \qquad
M = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

La matrice M a 7 lignes et 9 colonnes et l'image $f(\vec{a})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^7$. Par la suite, on considérera un vecteur de $\mathbb{R}^9$ comme une matrice de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices magiques $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ est l'ensemble des solutions du système *(III)*. Cet ensemble peut donc être vu comme le noyau de l'application f ; ce qui, par la même occasion, montre d'une autre manière que $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, plutôt que de résoudre le système *(III)* on va chercher à déterminer une *base* de $\operatorname{Ker} f$, ce qui permettra d'exprimer toute matrice de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ comme combinaison linéaire des éléments de cette base.

L'idée est de décomposer toute matrice magique en la somme de deux matrices magiques, l'une symétrique et l'autre antisymétrique car il est évident que lorsqu'on augmente les contraintes (être symétrique ou antisymétrique), on diminue le nombre d'inconnues, ce qui va faciliter le raisonnement.

2.2 Recherche d'une base de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$, ensemble des matrices magiques d'ordre 3

La recherche d'une base de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ est basée sur la proposition suivante donnant la décomposition d'une matrice en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

***Proposition* :**

Soit $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$;

si $A = \frac{1}{2}(M + M^t)$ et $B = \frac{1}{2}(M - M^t)$ alors A est symétrique, B est antisymétrique et $M = A + B$.

***Preuve* :**

On calcule :

- $A^t = \frac{1}{2}(M + M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t + M) = A$ A est donc symétrique ;
- $B^t = \frac{1}{2}(M - M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t - M) = -B$
  B est donc antisymétrique.
- $A + B = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t) = M$

■

Dans le cas où $M \in \mathbb{M}_{\text{ag}}$, il est évident que A et B sont aussi magiques : M^t est magique si M l'est, et d'autre part $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ étant un sous-espace vectoriel, il y a stabilité.

On considère $\mathbb{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ et $\mathbb{A}$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$.

On peut alors exprimer $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ comme somme directe :

$$\mathbb{M}_{\text{ag}} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A}$$

Le symbole $\oplus$ (somme directe) signifie :
i) $\forall\, M \in \mathbb{M}_{\text{ag}}\,, \exists\, A \in \mathbb{S}\,, \exists\, B \in \mathbb{A}$ telles que $M = A + B\,,$
cette propriété découle de la proposition précédente ;
ii) $\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \{0\}$;
en effet, seule la matrice nulle est à la fois symétrique et anti-symétrique.

Dans ce cas, une base de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$ peut s'exprimer comme une base de $\mathbb{S}$ que l'on complète par une base de $\mathbb{A}$; et par le théorème de la dimension, on a :

$$\dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{M}_{\text{ag}}$$

2.2.1 Recherche d'une base de $\mathbb{S}$, sev des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{\text{ag}}$

Dans l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 3, on cherche à caractériser le sous-ensemble $\mathbb{T}$ des matrices symétriques magiques de trace nulle (la somme des éléments de la première diagonale est nulle).
Il est évident que cet ensemble coïncide avec l'ensemble des matrices symétriques de constante magique nulle.

Toute matrice de $\mathbb{T}$ peut s'écrire :

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

avec $a_{11}\,, a_{12}\,, a_{13}\,, a_{22}\,, a_{23}$ et a_{33} vérifiant le système linéaire homogène suivant :

$$\textit{(IV)} \left\{ \begin{array}{lcll} a_{11} + a_{22} + a_{33} & = & 0 = \operatorname{tr} R & \textit{(1)} \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} & = & 0 & \textit{(2)} \\ a_{12} + a_{22} + a_{23} & = & 0 & \textit{(3)} \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} & = & 0 & \textit{(4)} \\ a_{13} + a_{22} + a_{13} & = & 0 & \textit{(5)} \end{array} \right.$$

A ce système on associe l'application linéaire g de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$ définie ainsi :

$$g(\vec{a}) = K\,\vec{a}$$

avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \qquad \text{et} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions de *(IV)* peut être vu comme le noyau de l'application g.
Par le théorème de la dimension, on a :

$$\dim\,\mathrm{Ker}\,g = 6 - \dim \mathrm{Im}\,g\,.$$

Or $\mathrm{Im}\,g$ est généré par les 6 vecteurs-colonnes de K et $\mathrm{Im}\,g \subset \mathbb{R}^5$ donc $\dim \mathrm{Im}\,g \leq 5$ et les 6 vecteurs sont linéairement dépendants. En choisissant les 5 premiers, on constate qu'ils sont linéairement indépendants, ce que l'on peut vérifier en calculant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Celui-ci étant non-nul, on en conclut :
- $\dim\,\mathrm{Im}\,g = 5$
- $\dim\,\mathrm{Ker}\,g = 6 - 5 = 1$

Ainsi pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,g$, il suffit de trouver une matrice magique *non-nulle symétrique* et de *trace nulle*. On peut par exemple prendre la matrice :

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 3 assimilé à $\mathbb{R}^6$, on a :

$$\begin{aligned} R \in \mathrm{Ker}\,g &\iff R \in \mathbb{T} \\ &\iff R \in \mathbb{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}R = 0 = k_R \\ &\iff R = \lambda\, S_0\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff R \in [S_0]_{sev} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{S}$ on considère les matrices S_3 et $\frac{1}{3}S_3$, avec :

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les traces de ces matrices sont :
- $\operatorname{tr} S_3 = 3$
- $\operatorname{tr}\left(\frac{1}{3}S_3\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{tr} S_3 = 1$

Alors, pour toute matrice M de $\mathbb{S}$:

$$\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M \cdot 1 = \operatorname{tr} M \cdot \tfrac{1}{3}\operatorname{tr} S_3 = [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot \operatorname{tr} S_3$$

Les matrices M et $[\frac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot S_3$ ayant même trace, leur différence $M - [\frac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot S_3$ est une matrice de trace nulle.

En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(M - [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot S_3\right) &= \\ &= \operatorname{tr} M - \operatorname{tr}([\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\ \ S_3) = \\ &= \operatorname{tr} M - [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\operatorname{tr} S_3 = \\ &= \operatorname{tr} M - \operatorname{tr} M = 0 \end{aligned}$$

Or par ce qui précède, on a l'équivalence :

$$\operatorname{tr}\left(M - [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot S_3\right) = 0 \iff M - [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\cdot S_3 \in [S_0]_{sev}$$

Donc,

$$\forall M \in \mathbb{S},\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \lambda S_0 = M - [\tfrac{1}{3}\operatorname{tr} M]\, S_3$$

En d'autres termes,

$$\forall M \in \mathbb{S},\ \exists \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \ \text{ tels que } M = \lambda S_0 + \mu S_3$$

Remarque : La constante magique de M vaut alors 3μ :

$$k_M = \operatorname{tr} M = \operatorname{tr}\lambda S_0 + \operatorname{tr}\mu S_3 = 0 + 3\mu$$

Les matrices S_0 et S_3 sont génératrices du sous-espace vectoriel $\mathbb{S}$ et elles sont linéairement indépendantes ; elles forment donc une base de $\mathbb{S}$.

2.2.2 Recherche d'une base de $\mathbb{A}$, sev des matrices antisymétriques de $\mathbb{M}_{\mathbf{ag}}$

Toute matrice de $\mathbb{A}$ est de constante magique nulle et peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a_{12}\,, a_{13}\,, a_{23}$ vérifiant le système linéaire homogène suivant :

$$\textit{(V)} \left\{ \begin{array}{rcll} a_{12} + a_{13} & = & 0 & \textit{(1)} \\ a_{12} - a_{23} & = & 0 & \textit{(2)} \\ a_{13} + a_{23} & = & 0 & \textit{(3)} \end{array} \right.$$

A ce système on associe l'application linéaire h de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie ainsi :

$$g(\vec{a}) = L\,\vec{a}$$

avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on assimile $\mathbb{R}^3$ à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.
L'ensemble des solutions de *(V)* est donc à nouveau le noyau de l'application h.

Par le théorème de la dimension, on a :

$$\dim \operatorname{Ker} h = 3 - \dim\, \operatorname{Im} h.$$

Or $\operatorname{Im} h$ est généré par les trois vecteurs-colonnes de L et $\dim \operatorname{Im} h \leq 3$. On constate que ces trois vecteurs sont linéairement dépendants, ce que l'on vérifie en calculant le déterminant de L :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On en conclut que $\dim \operatorname{Im} h < 3$. On constate que les deux premiers vecteurs-colonnes sont non-colinéaires, ils forment donc une base de $\operatorname{Im} h$. $\operatorname{Im} h$ est alors de dimension 2 et donc Ker h de dimension 1.

Pour déterminer une base de Ker h, il suffit de trouver une matrice *antisymétrique magique non-nulle.*

Par exemple :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{A} \iff & A \in [A_0]_{sev} \\ \iff & \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \alpha\, A_0 \end{aligned}$$

2.2.3 Base de $\mathbb{M}_{\mathbf{ag}}$

Pour construire une base de $\mathbb{M}_{\mathrm{ag}}$, il suffit de compléter une base de $\mathbb{S}$, soit $(S_0,\, S_3)$, par une base de $\mathbb{A}$, soit (A_0).

Ainsi $(S_0,\, S_3,\, A_0)$ est une base de $\mathbb{M}_{\mathrm{ag}}$.

3 Expression générale des matrices de $\mathbb{M}_{\mathbf{ag}}$

On désire expliciter toute matrice M de $\mathbb{M}_{\mathrm{ag}}$ en exprimant M comme combinaison linéaire unique des éléments de la base construite sous 2.

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{M}_{\mathrm{ag}} \iff & M \in [S_0,\, S_3,\, A_0]_{sev} \\ \iff & \exists \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad M = \alpha S_0 + \beta S_3 + \gamma A_0 \end{aligned}$$

avec

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta & \alpha + \beta + \gamma & \beta - \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma & \beta & -\alpha + \beta + \gamma \\ \beta + \gamma & -\alpha + \beta - \gamma & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

On constate que M a pour constante magique $k = 3\,\beta$.

4 Exemple : détermination des carrés magiques normaux d'ordre 3

Les éléments de ces carrés sont les entiers naturels consécutifs de 1 à 9.

Soit k la constante magique du carré ; en sommant, par exemple, les éléments de ses 3 lignes, on obtient $3k$. Mais $3k$ est aussi la somme de 9 termes d'une progression arithmétique de raison 1, dont le premier terme est 1 et le dernier terme est 9. On a alors l'égalité :

$$3k = \frac{1+9}{2} \quad 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 15$$

Au § 3 on a montré que les carrés magiques d'ordre 3 sont de la forme suivante

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma & \beta-\gamma \\ \alpha+\beta-\gamma & \beta & -\alpha+\beta+\gamma \\ \beta+\gamma & -\alpha+\beta-\gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

avec α, β, γ $\in \mathbb{R}$, et leur constante magique vaut

$$k = 3\,\beta = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 5.$$

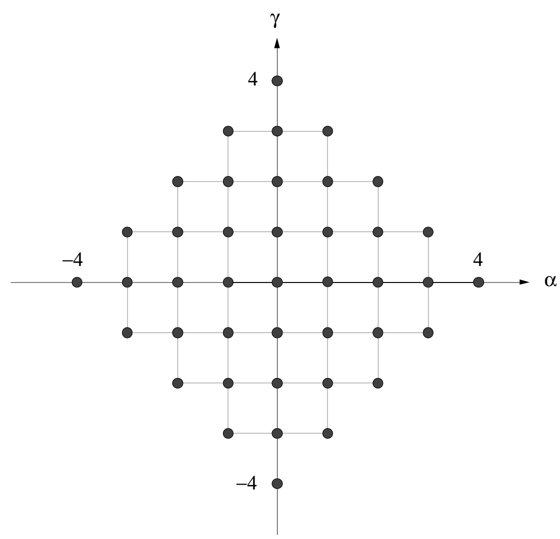
On peut donc les réécrire en posant $\beta = 5$,

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha+5 & 5+\alpha+\gamma & 5-\gamma \\ 5+\alpha-\gamma & 5 & 5-\alpha+\gamma \\ 5+\gamma & 5-\alpha-\gamma & 5+\alpha \end{pmatrix}$$

Chaque élément étant un entier compris entre 1 et 9, on en déduit les systèmes d'inéquations suivants à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{lcll} 1 & \leq & 5-\alpha & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5+\alpha+\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5-\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5+\alpha-\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5-\alpha+\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5+\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5-\alpha-\gamma & \leq & 9 \\ 1 & \leq & 5+\alpha & \leq & 9 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{(II)} \left\{ \begin{array}{lcll} -4 & \leq & \alpha & \leq & 4 \\ -4 & \leq & \gamma & \leq & 4 \\ -4 & \leq & -\alpha+\gamma & \leq & 4 \\ -4 & \leq & \alpha+\gamma & \leq & 4 \end{array} \right.$$

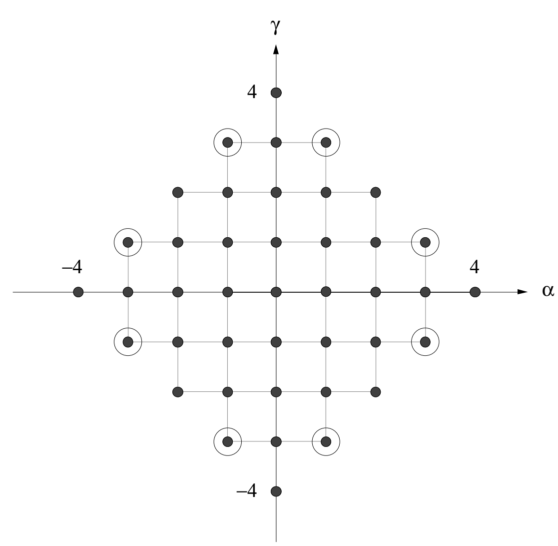
On peut représenter graphiquement les couples $(\alpha;\, \gamma)$ vérifiant le système d'inéquations *(II)* comme suit



La normalité impliquant l'usage d'entiers consécutifs, il faut exclure des couples $(\alpha;\, \gamma)$ ceux qui donnent une solution pour laquelle les éléments du carré ne sont pas tous distincts, à savoir ceux vérifiant :

$$\begin{array}{llll} \alpha = 0 & \text{ou} & \gamma = 0 & \text{ou} \\ \alpha = \pm 2\gamma & \text{ou} & \gamma = \pm 2\alpha & \text{ou} \\ \alpha = \pm\gamma & & & \end{array}$$

Graphiquement, on observe qu'il reste alors huit solutions.



D'où
$S = \{(1, 3); (1, -3); (-1, 3); (-1, -3); (3, 1); (3, -1); (-3, 1); (-3, -1)\}$.

Pour la solution (1, 3), on obtient alors le carré suivant appelé "carré chinois" :

4	3	8
9	5	1
2	7	6

5 Bibliographie et sites Web

- Un traité médiéval sur les carrés magiques
  De l'arrangement harmonieux des nombres
  Jacques SESIANO
  Presses Polytechniques et Universitaires Romandes
- Carrés magiques
  Carrés Latins et Eulériens
  Histoire, théorie, pratique
  Jacques BOUTELOUP
  Editions du Choix
- Algèbre linéaire
  Une introduction
  Cours et exercices corrigés
  Henri ROUDIER
  Vuibert
- Les premiers carrés tétra et pentamagiques
  Christian BOYER
  Pour la Science 286, août 2001
- Les cubes magiques
  Christian BOYER
  Pour la Science 311, septembre 2003
- Le plus petit cube magique parfait
  La Recherche 373, mars 2004

Sites sur les carrés, cubes, cercles, etc magiques :
- www.multimagie.com
- http ://mathworld.wolfram.com/topics/MagicFigures.html