Méthodes pour Analyse I

Tamara Paris, Salim Najib

Août 2021

Contents

Comment lire et pourquoi ce document ?

Eyyo!

Ce document a pour but de lister des *méthodes* de résolution d'exercices type de l'examen d'analyse I. Par méthodes, nous entendons aussi bien des algorithmes systématiques venant à bout de toute question d'un type donné, que de petits trucs et petites astuces calculatoires. Remplacer le cours ou les séries ne rentre surtout pas dans les objectifs de ce document, qui présupposera d'ailleurs souvent une connaissance correcte du cours, bien que nous rappelons (le plus souvent sans démonstration) des résultats de cours.

Les problèmes principaux sont listés dans le sommaire, classés en chapitres. Quand c'est probant, un problème est décomposé en plusieurs sous-problèmes, ainsi par exemple la simplification de nombres complexes est divisée en plusieurs étapes.
Chaque problème contient d'abord un **énoncé** général, puis une ou plusieurs **méthodes** contribuant à la résolution du problème, suivies **d'exemples**. Quand c'est utile, des **justifications et remarques additionnelles** sont données à la suite, pour éviter de mémoriser une méthode donnée sans comprendre en quoi elle fonctionne, et parfois pour aller plus loin aussi, pour préciser certaines notions, etc.
Le document se termine par le recensement, pour nombre d'examens finaux d'analyse I, du type à laquelle correspond chaque question d'un examen donné.

Plutôt que de lire ce document linéairement, du début jusqu'à la fin, nous suggérons de consulter la section qui vous intéresse au besoin, au fur et à mesure de vos exercices et révisions. Considérez chaque section comme une fiche de révision (plutôt détaillée, soit).

Bonne lecture et *may the force be with you!*

1 Complexes

1.1 Réduction et simplification de nombres complexes

Cette section détaille dans l'ordre les étapes pour simplifier un nombre complexe.

1.1.1 Simplification des i^k

La première étape, la plus simple, consiste à simplifier les i^k, $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, en utilisant $i^2 = -1$ et $i^4 = (i^2)^2 = 1$, on peut rapidement montrer:

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \mod 4 \\ i & \text{si } k = 1 \mod 4 \\ -1 & \text{si } k = 2 \mod 4 \\ -i & \text{si } k = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Remarquons qu'en particulier, $\frac{1}{i} = i^{-1} = i^3 = -i$.
Cette petite propriété du k en modulo 4 peut accélérer des calculs, en particulier quand l'on se dote encore de la propriété suivante:

$\boxed{\text{$k$ est égal modulo 4 à ses deux derniers chiffres : dizaines et unités, multipliés par le signe de k.}}$

Exemples

$i^{329} = i^{29} = i^{28+1} = i^{7\times4+1} = i$.
$i^{-1451} = i^{-51} = i^{-48-3} = i^{-3} = i$.

Justifications et remarques additionnelles

Nous énonçons plus précisément la propriété encadrée Notons les chiffres de k en écriture décimale par k_i et le signe de k par $s \in \{-1; 1\}$, avec $k = s\sum_{i=0}^{m} 10^i k_i$. Par exemple : pour $k = 123$, $k_2 = 1$, $k_1 = 2$, $k_0 = 3$. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$k = s(10k_1 + k_0) \mod 4$$

Ceci est dû au fait que $100 = 4 \times 25$. Ainsi, modulo 4, dans la somme $k = s\sum_{i=0}^{m} 10^i k_i$, les puissances 10^i s'annulent modulo 4 pour $i \geq 2$, donc: $k = s(0k_m + ... + 0k_2 + 10k_1 + k_0) = s(10k_1 + k_0) \mod 4$.

1.1.2 Addition et soustraction de complexes sous forme polaire

Il s'agit ici de simplifier des expressions du style $\pm r_1 e^{i\phi_1} \pm r_2 e^{i\phi_2}$ où $r_i e^{i\phi_i}$ sont des écritures de complexes sous forme polaire *exponentielle*, ou encore des expressions sous forme polaire *trigonométrique* $\rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))$.

La forme polaire exponentielle est pratique pour multiplier, diviser des complexes, pas pour les additionner. Ramenons-nous alors à la forme cartésienne $x + iy$ grâce à une formule d'Euler, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{x} + i\underbrace{\sin(\theta)}_{y}$$

Ce sera souvent l'occasion d'utiliser des identités de trigonométrie (annexe).

Exemples

$$\begin{aligned} i^{321} + e^{i\frac{2\pi}{3}} &= i + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = i + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= i - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Notons que nous aurions pu utiliser:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{2\pi}{3}} &= e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} \\
&= e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
&= -e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
&= -\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Pour un exemple utilisant plus de propriétés mais moins réaliste pour l'examen:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - e^{-i\frac{3\pi}{7}} &= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) - i\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \\
&= i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

Les propriétés utilisées sont $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, la parité de cos et l'imparité de sin.

1.1.3 Puissances et produits

Il s'agit ici de simplifier $(a+ib)^n(c+id)^m$, et ce en passant à la forme polaire *exponentielle* $re^{i\phi}$.

Nous rappelons d'abord la méthode générale puis nous donnons un raccourci dans un cas moins général mais commun.

Donné $z = a + ib$, il est toujours possible de trouver r, ϕ, respectivement le module et un argument de z, tels que $z = a + ib = re^{i\phi}$ ainsi:

1. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. (a) Si $a = 0 \implies \phi = \frac{\pi}{2}$. En effet, z est imaginaire pur.
   (b) Si $a > 0 \implies \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
   Ne pas oublier la 2π périodicité de $x \mapsto e^{ix}$ pour éventuellement obtenir un argument dans $]-\pi;\pi]$ ou $[0;2\pi[$.
   (c) Si $a < 0 \implies \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$.
   Même remarque que ci-dessus.

Notez que nous pourrions tomber sur une valeur d'$\arctan(x)$ pour laquelle x ne serait pas connu, comme $\arctan\left(\frac{3}{7}\right)$.

L'autre technique s'applique seulement dans le cas d'une forme $\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_2)$, qui *ressemble à ou est une forme polaire trigonométrique*, et seulement quand il semble qu'on pourrait "jouer" avec les φ_1 et φ_2 en s'aidant de formules basiques de trigonométrie pour arriver à un argument commun pour le cos et le sin, ou qui serait une *forme cartésienne avec des parties réelles et imaginaires valant des valeurs de* cos *et* sin *connues.* Un exemple de chaque cas ci-dessous.

Exemples

1. Application de la méthode générale:

$$-1 + i\frac{5}{2} \overset{-1\leq 0}{=} \sqrt{1 + \frac{25}{4}}e^{i\left(\arctan\left(\frac{5}{2}\right)+\pi\right)}$$

2.a) Technique alternative pour une forme quasi polaire trigonométrique:

$$\begin{aligned}
-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= -\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\\
&= -\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= -\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\\
&= -e^{-i\frac{\pi}{5}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}}
\end{aligned}$$

2.b) Technique alternative pour une forme cartésienne se ramenant à une forme polaire trigonométrique:

$$\begin{aligned}
-1+i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\left(-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\
&= -2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}}\\
&= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

1.1.4 Quotients de complexes

Nous étudions la simplification des quotients $\frac{(a+ib)^n}{(c+id)^m}$.

La première approche serait de calculer la forme polaire exponentielle du numérateur et du dénominateur comme dans la sous-section précédente. Le quotient de puissances est donc vu comme produit de puissances.

Cependant, dans le cas où $m=1$, il peut être plus rapide de multiplier par le **conjugué** du dénominateur:

$$\frac{(a+ib)^n}{c+id} = \frac{(a+ib)^n(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)^n(c-id)}{c^2+d^2}$$

Un exemple résumant toute cette première section sur les complexes:

1.1.5 Exemple de simplification complète

Simplifions: $z = \frac{(1+i^{5609})^8(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})}{1-i}$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(1+i^{5609})^8(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})}{1-i}\\
&= \frac{(1+i)^8(e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})}+e^{i\frac{\pi}{6}})}{1-i}\\
&= \frac{1+i}{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8(e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})\\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}})\\
&= \frac{2i}{2}2^{\frac{9}{2}}e^{i\frac{9\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = i2^{\frac{7}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = i2^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -8+8i
\end{aligned}$$

1.2 Résoudre l'équation $z^n = f(z)$

Beaucoup d'équations dans les examens prennent la forme $z^n = f(z)$ pour f une fonction donnée. Par exemple: $z^n = \bar{z}$, $z^n = \frac{1}{\bar{z}}$.

Souvent, il suffit de ramener l'équation de départ à la forme $r^m e^{im\phi} = \omega_0,\ \omega_0 \in \mathbb{C}$ étant une **constante**. Pour cela, il faudra souvent poser $z = re^{i\phi}$. Nous pourrons ensuite conclure:

$$r^n e^{in\phi} = \omega_0 := s_0 e^{i\varphi_0} \iff r = \sqrt[n]{s_0},\ \phi \in \left\{ \frac{2k\pi + \varphi_0}{n} \mid k = 0, 1, ..., n-1 \right\}$$

où $\omega_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$ est la forme polaire *exponentielle* de ω_0. En particulier: $s_0 \geq 0$.

Attention aux cas limites: il existe souvent des pièges de division par zéro, comme nous le verrons dans le second exemple.

Exemples

1) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (attention au conjugué au dénominateur):

$$z^n = \frac{1}{\bar{z}}$$

Posons $z = re^{i\phi}$ comme prévu avec $r \in [0; +\infty[$ et $\phi \in [0; 2\pi[$. Ici, remarquons que $r \neq 0$ car $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pas de piège de division par zéro possible.
Ainsi, $\bar{z} = re^{-i\phi}$, d'où:

$$\begin{aligned} z^n = \frac{1}{\bar{z}} &\iff r^n e^{in\phi} = \frac{1}{re^{-i\phi}} \\ &\iff r^{n+1} e^{i(n-1)\phi} = 1 = 1e^{i0} \\ &\iff r = 1,\ \phi \in \left\{ \frac{2\pi k}{n-1} = 2\pi \frac{k}{n-1} \mid k = 0, 1, ..., (n-1) - 1 = n-2 \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors $\left\{ e^{i2\pi \frac{k}{n-1}} \mid k = 0, 1, ..., n-2 \right\}$.

2) Une équation qui est déjà tombée quelques fois en examen. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^n - \bar{z} = 0$$

Posons encore $z = re^{i\phi}$, ainsi $\bar{z} = re^{-i\phi}$. Ici, r peut être nul.

$$z^n - \bar{z} = 0 \iff r^n e^{in\phi} = re^{-i\phi}$$

Piège ici, avant de diviser allègrement par r: $r = 0$ fait tenir l'équation. Gardons cette solution de côté, et considérons à présent le cas $r \neq 0$ (donc $r > 0$):

$$\begin{aligned} r^n e^{in\phi} = re^{-i\phi} &\iff r^{n-1} e^{i(n+1)\phi} = 1 \\ &\iff r = 1,\ \phi \in \left\{ \frac{2\pi k}{n+1} = 2\pi \frac{k}{n+1} \mid k = 0, 1, ..., (n+1) - 1 = n \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors $\{0\} \cup \left\{ e^{i2\pi \frac{k}{n+1}} \mid k = 0, 1, ..., n \right\}$.
Remarquons qu'il y a $n+2$ solutions et pas n comme nous pourrions peut être nous y attendre en méprenant $z^n - \bar{z}$ pour un polynôme de degré n, avec donc au plus n racines distinctes par théorème fondamental de l'algèbre. En effet, ce n'est pas un polynôme à cause de l'intervention du conjugué.

2 Suites

2.1 Trouver la formule générale d'une suite définie récursivement

Remarquons que dans le contexte de QCM, si les propositions données sont des formes closes (i.e: non récursives) de la suite, il sera toujours possible de calculer les quelques premiers termes. Ceci dit, cela n'arrive pas souvent.

2.1.1 Forme $a_{n+1} = q \cdot a_n + c$

Si, pour une raison ou pour une autre, il n'est pas possible de trouver une forme close (i.e non récursive) pour a_n, nous exposerons ici 2 méthodes. La première serait d'essayer de deviner puis prouver par récurrence une forme close. La seconde est plus systématique. Etant donnée la suite suivante, où $q, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes:

$$\begin{cases} a_0 \text{ est donné,} \\ a_{n+1} = qa_n + c \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Nous pouvons directement conclure:

$$\boxed{\begin{cases} q = 1 \implies \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n = a_0 + nc \\ q \neq 1 \implies \forall n \in \mathbb{N}^* \; a_n = q^n \left(a_0 - \frac{c}{1-q}\right) + \frac{c}{1-q} \end{cases}}$$

Il devient aisé de, par exemple, calculer la limite de a_n.

Justifications et remarques additionnelles

La preuve de cette identité suit facilement par récurrence, c'est un calcul direct.

2.2 Calculer la limite d'une suite (ou un majorant/minorant de la suite)

Cette section détaille comment calculer la limite d'une suite en fonction de la forme de la suite.

Dans le cas des suites définies récursivement (2.2.1), il est parfois demandé de donner un majorant et/ou un minorant de la suite. Nous verrons alors dans la sous-section sur ces-dernières que la méthode pour résoudre ce type d'exercice est la même que celle pour calculer la limite de cette même suite.

2.2.1 Suite définie récursivement

Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie ainsi : $a_{n+1} = f(a_n)$ et $a_0 = c$.

Méthode de résolution

La méthode pour calculer la limite de ces suites ou un majorant/minorant se découpe en 2 étapes :

- Notons $g(x) = f(x) - x$. La première étape est d'étudier le signe de la fonction g :

$$\begin{cases} g(x) = 0 \Rightarrow x \text{ est un candidat à la limite} \\ g(x) > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ est croissante} \\ g(x) < 0 \Rightarrow (a_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

  Nous noterons l_i les candidats à la limite, avec $i \in \{0, 1, ..., r-1\}$, r étant le nombre total de candidats à la limite.

- Ensuite il suffit d'étudier si (a_n) est croissante ou décroissante quand $x = a_0$. Si elle est croissante (resp. décroissante), le plus petit des $l_i > a_0$ (resp. le plus grand des $l_i < a_0$) est la limite de (a_n). Si il n'existe pas de l_i tel que $l_i > a_0$ (resp. $l_i < a_0$) alors la suite diverge.

Notons que la limite l de (a_n) et a_0, resp. majore et minore la suite si (a_n) est croissante et convergente, resp. minore et majore la suite si (a_n) est décroissante et convergente.

Exemples

1. (Calcul de limite) Calculons la limite de la suite (a_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{4a_n+3} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Nous étudions le signe de la fonction $g(x) = \frac{3x+1}{4x+3} - x$:

$$\begin{aligned} &\frac{3x+1}{4x+3} - x > 0 \\ \iff &\frac{3x+1}{4x+3} > x \\ \iff &3x+1 > x(4x+3) \\ \iff &3x+1 > 4x^2+3x \\ \iff &0 > 4x^2 - 1 \\ \iff &0 > 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		a_0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x - \frac{1}{2}$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

Nous constatons que lorsque $x = a_0$, (a_n) est croissante. Donc (a_n) va croître depuis a_0 jusqu'au candidat à la limite le plus proche : $\frac{1}{2}$.
Donc (a_n) tend vers $\frac{1}{2}$.

2. (Calcul de majorant et minorant) Soit la suite (a_n) définie comme suit :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $4 \leqslant a_n \leqslant 5$:

On étudie le signe de la fonction $g(x) = \sqrt{5x-4} - x$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x-4} - x > 0 \\ \iff &\sqrt{5x-4} > x \\ \iff &5x - 4 > x^2, \text{ pas de valeur absolue car } x > 0 \\ \iff &0 > x^2 - 5x + 4 \\ \iff &0 > (x-4)(x-1) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

x	$\frac{4}{5}$		1		4		a_0		$+\infty$
$x-4$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Nous constatons que lorsque $x = a_0$, (a_n) est décroissante. Donc (a_n) va décroître depuis a_0 jusqu'au candidat à la limite le plus proche: 4.
Donc nous avons bien: $4 \leqslant a_n \leqslant 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Justifications et remarques additionnelles

Le signe de $g(x)$ détermine la croissance ou la décroissance de la suite (a_n) car (a_n) est croissante si et seulement si :

$$a_{n+1} \geqslant a_n$$

En remplaçant a_{n+1} par $f(a_n)$ on obtient :

$$f(a_n) - a_n \geqslant 0$$

Donc (a_n) est croissante lorsque $g(a_n) \geqslant 0$ (on procède de la même manière pour la décroissance).

2.2.2 Suite comportant des racines n-ième

Certaines suites peuvent comporter des racines n-ième sous ces deux formes :

$$\sqrt[q\cdot n]{x} \qquad \sqrt[q\cdot n]{x\cdot n}$$

avec $q \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

Méthode de résolution

Ces formes de racines n-ième tendent vers 1 quand n tend vers l'infini. Il suffit donc de simplement les remplacer par 1 nous calculons la limite, puis de finir les calculs normalement.

Exemples

1. Calculons la limite de la suite définie par :

$$a_n = \frac{3\sqrt[4n]{\sqrt{13}n} + 4}{7}$$

$\sqrt[4n]{\sqrt{13}n}$ est de la forme $\sqrt[q\cdot n]{x\cdot n}$ donc nous pouvons le remplacer par 1 dans le calcul de la limite.
Nous avons donc:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3\cdot 1 + 4}{7} = 1$$

2. Calculons la limite de la suite définie par :

$$a_n = \frac{\sqrt[3n]{7} + 4}{\sqrt[2n]{5} + 7}$$

$\sqrt[3n]{7}$ et $\sqrt[2n]{5}$ sont de la forme $\sqrt[q\cdot n]{x}$ donc nous pouvons les remplacer par 1 dans le calcul de la limite.
Nous pouvons donc:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+4}{1+7} = \frac{5}{8}$$

2.2.3 Suite sous forme d'une fraction d'addition de n^r, $r \in \mathbb{R}$

Certaines suites sont des fractions de cette forme :

$$\frac{\alpha_t n^{r_t} + ... + \alpha_1 n^{r_1} + \alpha_0 n^{r_0}}{\beta_p n^{s_p} + ... + \beta_1 n^{s_1} + \beta_0 n^{s_0}}$$

Avec $r_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., t\}$, $0 \leq r_0 < r_1 < ... < r_t$ et avec $s_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $0 \leq s_0 < s_1 < ... < s_p$.

Méthode de résolution

Pour ce type de suite on différencie 3 cas :

- $r_t > s_p$: dans ce cas la limite tend vers $+\infty$ si $\alpha_t > 0$, $-\infty$ si $\alpha_t < 0$.
- $r_t < s_p$: dans ce cas la limite tend vers 0.
- $r_t = s_p$: dans ce cas la limite tend vers $\frac{\alpha_t}{\beta_p}$.

Notons que nous pouvons donc ignorer au numérateur (resp dénominateur) tous les ternes n à une puissance inférieur à la plus grande puissance du numérateur (resp dénominateur).

Exemples

1. Calulculons la limite de la suite suivante :

$$\frac{\sqrt[5]{3n^3 + 4n + 7} - \sqrt{67n} + 4}{\sqrt[3]{n + 5} + \sqrt[5]{n^2 + 3n + 2} + 1}$$

On remarque qu'au numérateur la plus grande puissance de n est $\frac{3}{5}$ et au dénominateur la plus grande puissance de n est $\frac{2}{5}$. On a donc une puissance plus grande au numérateur, $\alpha_t = \sqrt[5]{3} > 0$, donc la suite tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{3n^3 + 4n + 7} - \sqrt{67n} + 4}{\sqrt[3]{n + 5} + \sqrt[5]{n^2 + 3n + 2} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{3n^3}}{\sqrt[5]{n^2}} = +\infty$$

2. Calculons la limite de la suite suivante :

$$\frac{4n^2 + 3n\sqrt{n + 4} + 1}{\sqrt[3]{n^6 + 3n + 1} + 4n + 2}$$

On remarque qu'au numérateur la plus grande puissance de n est 2 et au dénominateur la plus grande puissance de n est $\frac{6}{3} = 2$. On a donc la même plus grande puissance au numérateur et au dénominateur, $\alpha_t = 4$ et $\beta_p = 1$, donc la suite tend vers $\frac{4}{1} = 4$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 3n\sqrt{n + 4} + 1}{\sqrt[3]{n^6 + 3n + 1} + 4n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt[3]{n^6}} = 4$$

3. Calculons la limite de la suite suivante :

$$\frac{78n^3 + 5n + 1}{n^\pi + 7n^2 + \sqrt{n}}$$

On remarque qu'au numérateur la plus grande puissance de n est 3 et au dénominateur la plus grande puissance de n est π. On a donc une plus grande puissance au dénominateur, donc la suite tend vers 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{78n^3 + 5n + 1}{n^\pi + 7n^2 + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{78n^3}{n^\pi} = 0$$

2.2.4 Suite comportant une soustraction de racine carré ou cubique au numérateur

Certaines suites comportent une soustraction de racine carrée ou cubique au numérateur comme ci-dessous:

$$\frac{\sqrt{P(n)}-\sqrt{Q(n)}}{f(n)} \qquad \frac{\sqrt[3]{P(n)}-\sqrt[3]{Q(n)}}{f(n)}$$

Avec $P(n)$ et $Q(n)$ des polynômes de même degré, et $f(n)$ une fonction de n quelconque.
Notons que $f(n)$ peut être égale à 1, dans ce cas la suite ressemblerait à cela :

$$\sqrt{P(n)}-\sqrt{Q(n)} \qquad \sqrt[3]{P(n)}-\sqrt[3]{Q(n)}$$

Méthode de résolution

Pour calculer la limite de ce type de suite nous rappelons d'abord ces formules:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Nous remarquons donc que si on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce type de limite par $\left(\sqrt{P(n)}+\sqrt{Q(n)}\right)$ dans le cas des racines carré et par $\left(\sqrt[3]{P(n)}^2+\sqrt[3]{P(n)}\sqrt[3]{Q(n)}+\sqrt[3]{Q(n)}^2\right)$ dans le cas des racines cubiques, cela enleverait les racines au numérateur:

$$\frac{\left(\sqrt{P(n)}-\sqrt{Q(n)}\right)\cdot\left(\sqrt{P(n)}+\sqrt{Q(n)}\right)}{f(n)\cdot\left(\sqrt{P(n)}+\sqrt{Q(n)}\right)}=\frac{P(n)-Q(n)}{f(n)\cdot\left(\sqrt{P(n)}+\sqrt{Q(n)}\right)}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{P(n)}-\sqrt[3]{Q(n)}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{P(n)}^2+\sqrt[3]{P(n)}\sqrt[3]{Q(n)}+\sqrt[3]{Q(n)}^2\right)}{f(n)\cdot\left(\sqrt[3]{P(n)}^2+\sqrt[3]{P(n)}\sqrt[3]{Q(n)}+\sqrt[3]{Q(n)}^2\right)}=\frac{P(n)-Q(n)}{f(n)\cdot\left(\sqrt[3]{P(n)}^2+\sqrt[3]{P(n)}\sqrt[3]{Q(n)}+\sqrt[3]{Q(n)}^2\right)}$$

Une fois les racines suprimées au numérateur, il est plus aisé de finir de calculer la limite.

Exemples

1. (Racines carrées) Calculons la limite de la suite ci-dessous :

$$\frac{\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{2n^2-7}}{3n}$$

Nous multiplions par le conjugué ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{2n^2-7})(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{2n^2-7})}{3n(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{2n^2-7})} &= \frac{n^2+4n+5-(2n^2-7)}{3n(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{2n^2-7})}\\ &= \frac{-n^2+4n+12}{3n(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{2n^2-7})}\end{aligned}$$

Ensuite pour finir de calculer cette limite nous utilisons la méthode expliquée dans la partie précedente (2.2.3) :

Nous remarquons qu'au numérateur et au dénominateur la plus grande puissance de n est 2. La limite de la suite est donc le rapport des coefficient de n^2 au numérateur et au dénominateur.

- Le coefficient de n^2 au numérateur est -1.
- Le coefficient de n^2 au dénominateur est $3(1+\sqrt{2})=3+3\sqrt{2}$

La limite de cette suite est donc $\frac{-1}{3+3\sqrt{2}}$.

2. (Racines cubiques) Calculons la limite de la suite ci-dessous :

$$\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} - n$$

Nous remarquons que cette suite comporte bien une soustraction de racine cubique car n peut s'écrire sous la forme $\sqrt[3]{n^3}$.
Nous multiplions donc par le conjugué, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} - n)\left((\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7})^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} + n^2\right)}{(\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7})^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} + n^2} &= \frac{n^3 + 8n^2 + 7 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7})^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} + n^2} \\
&= \frac{8n^2 + 7}{(\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7})^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 8n^2 + 7} + n^2}
\end{aligned}$$

Ensuite pour finir de calculer cette limite nous utilisons la méthode expliquée dans la partie précedente (2.2.3) :

Nous remarquons qu'au numérateur et au dénominateur la plus grande puissance de n est 2. La limite de la suite est donc le rapport des coefficient de n^2 au numérateur et au dénominateur.

- Le coefficient de n^2 au numérateur est 8.
- Le coefficient de n^2 au dénominateur est $1^2 + 1 + 1 = 3$

La limite de cette suite est donc $\frac{8}{3}$.

2.2.5 Suite ressemblant à des suites connues

La limite de certaines suites peuvent être calculées en transformant la suite en une suite connue ou en une composition de suites connues, dont nous connaissons les limites.
Voici la liste non exhaustive des suites connues les plus importantes :

- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{a+o(n)}{f(n)+o'(n)})^{f(n)+k} = e^a$

  avec $a, k \in \mathbb{R}$ et $f(n)$ une fonction de n quelconque, $o(n)$ et $o'(n)$ deux fonctions de n qui tendent vers 0.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{p^n} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et p > 0.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Exemples

1. Calculons la limite de la suite suivante :

$$\left(1 + \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{5n}\right)^{4n}$$

On remarque que la suite ressemble à la forme de suite qui tend vers e^a.

$$\left(1 + \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{5n}\right)^{4n} = \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5\sqrt{n}}}{n}\right)^n\right)^4$$

On a $f(n) = n$, $a = \frac{3}{5}$, $o(n) = \frac{1}{5\sqrt{n}}$. Ainsi on peut donc calculer aisément la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5\sqrt{n}}}{n} \right)^n \right)^4 = \left(e^{\frac{3}{5}}\right)^4 = e^{\frac{12}{5}}$$

2. Calculons la limite de la suite suivante :

$$\frac{e^8(n-1)!}{3n^n \sin \frac{1}{n}}$$

Nous remarquons que la suite ressemble à une composition de la $2^{ème}$ et de la $4^{ème}$ suite de la liste.

$$\frac{e^8(n-1)!}{3n^n \sin \frac{1}{n}} = \frac{e^8}{3} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}}$$

Sachant que $\frac{n!}{n^n}$ tend vers 0 et que $\frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}}$ tend vers 1, le tout tend vers 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^8(n-1)!}{3n^n \sin \frac{1}{n}} = 0$$

2.2.6 Méthode par le théorème des deux gendarmes (dernier recours)

Parfois, la suite ne ressemble à aucune des formes précédentes. Dans ce cas, c'est souvent le théorème des deux gendarmes qu'il faut utiliser.

Méthode de résolution

Il est souvent plus judicieux de commencer par trouver une suite qui est plus grande que la suite donnée, car si la suite majorante tend vers 0, alors la suite donnée tend elle aussi vers 0, et il ne sera donc pas nécessaire de trouver une suite minorante.
Pour trouver cette suite majorante, on peut enlever des termes aditionné au dénominateur, ajouter des termes au numérateur, multiplier la suite par un terme toujours > 1... etc. Puis on fait l'inverse pour trouvé la suite minorante.

En particulier, les suites comportant des ln sont assez facile à encadrer :

$$n = \ln e^n < \ln\left(e^n + P(n)\right) < \ln e^n + k \cdot e^n = \ln(k) + n$$

avec $P(n)$ un polynôme quelconque, $P(n) < k \cdot e^a$ à partir d'un certain n, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. Calculons la limite de la suite suivante :

$$\frac{\ln(e^{2n} + 4n)}{3n + 4}$$

Pour cela on majore et minore la suite ainsi : (pour tout $n > 1$)

$$\frac{2n}{3n+4} = \frac{\ln(e^{2n})}{3n+4} < \frac{\ln(e^{2n} + 4n)}{3n+4} < \frac{\ln(e^{2n} + e^{2n})}{3n+4} = \frac{2n + \ln(2)}{3n+4}$$

On remarque que la limite de la suite à droite et de la suite à gauche est $\frac{2}{3}$, donc on peut conclure que la limite de la suite qu'on cherche à calculer est également $\frac{2}{3}$.

3 Séries numériques

3.1 Etudier la convergence d'une série

Nous conseillons de suivre les étapes suggérées par les titres des sections suivantes:

3.1.1 Cas où a_n ne tend pas vers 0

Toujours vérifier que la suite des termes a_n tend bien vers 0, *surtout dans l'étude de convergence de* ***séries paramétrées****.*

Exemple

La série suivante ne converge pas pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^n$$

Ce n'est pas le cas pour $\alpha = 1$ par exemple.

3.1.2 Série alternée, Leibnitz

Pour les séries changeant de signe à chaque terme, il sera souvent commode d'appliquer le critère de Leibnitz. Cependant, **attention aux hypothèses**:

<u>Le critère de Leibnitz énonce:</u>
Soit (a_n) une suite telle que:

1. Alternance: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$
2. Décroissance absolue: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |a_{n+1}| \leq |a_n|$
3. Condition nécessaire: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Alors: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Attention aux hypothèses 2 et 3, décroissance absolue et condition nécessaire. C'est un piège commun en vrai-faux notamment.
A ce détail près, l'application du théorème est directe.

Exemples

1) La série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$ diverge. Malgré l'alternance, il n'y a pas décroissance absolue donc Leibnitz ne s'applique pas. Le terme général ne tend pas vers 0 non plus, ainsi la série diverge.

2) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge par critère de Leibnitz car elle vérifie les 3 conditions sus-mentionnées.

3.1.3 Série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n)^n$, Cauchy

Si le critère de Leibnitz ne s'applique pas, vérifions si la série est propice à subir le critère de Cauchy. La puissance n est l'indice important indiquant Cauchy.

<u>Le critère de Cauchy énonce:</u>
Soit (a_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R}$. Donc:

1. $\rho < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument,
2. $\rho > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge,
3. $\rho = 1 \implies$ aucune conclusion par Cauchy ni D'Alembert.

Ce sera l'occasion d'appliquer des tricks vus dans la section traitant des suites.

Exemples

1) Déterminer la convergence de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3n}{3n+1}\right|^2 = 1$ donc Cauchy ne permet pas de conclure - notons que la série diverge grossièrement, le terme général ne converge pas vers 0.

2) Déterminer la convergence de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}|\sqrt[n]{n}-1| = 0 < 1$ donc la série converge par Cauchy.

3.1.4 Série comportant des factorielles et puissances de n, D'Alembert

Si Cauchy ne semble pas propice, autrement dit, s'il n'y a pas de puissance n dans le terme général de la série ou que la racine semble difficile à calculer, c'est peut-être que d'Alembert serait plus judicieux. C'est surtout le cas quand le terme général comprend des factorielles, qui se simplifient donc quand on calculerait le quotient $\left|\frac{a_{n+1}}{an}\right|$.

<u>Le critère de d'Alembert énonce:</u>
Soit (a_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in \mathbb{R}$, **et** $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq 0$. Donc:

1. $\rho < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument,
2. $\rho > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge,
3. $\rho = 1 \implies$ aucune conclusion par Cauchy ni D'Alembert.

Exemple

1) Déterminer la convergence de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$$

Calculons, par d'Alembert: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{5} < 1$, ainsi la série converge.

2) Déterminer la convergence de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^n)}{(n+2)!}$$

Calculons la limite du quotient: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln((n+1)^{n+1})}{(n+3)!}\frac{(n+2)!}{\ln(n^n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\frac{1}{n+3} = 0 < 1$, ainsi la série converge par d'Alembert.

Justifications et remarques additionnelles

La condition $a_n \neq 0$ peut être évitée dans l'énoncé du critère de d'Alembert, en pratique: il suffit de considérer la suite (a_{n_i}) où les n_i sont les indices des a_n tels que $a_{n_i} \neq 0$. Si tous les a_n sont nuls à partir de n_0, il suffira alors de poser $a_{n_i} = 0\ \forall n_i \geq n_0$. Ainsi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i}$, vu que nous ne retirons de a_n que les termes nuls. Ainsi, par exemple: la série des $a_n = \frac{5^n}{n!}$ si n est pair et 0 si n est impair converge, en appliquant d'Alembert sur (a_{n_i}) qui est (a_{2i}) ici.

3.1.5 Utilisation du critère de comparaison

Quand Cauchy, d'Alembert et Leibnitz nous trahissent tour à tour pour déterminer la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \geq 0$, c'est qu'il est temps d'essayer de borner x_n d'un côté ou de l'autre.

Un résultat important à très souvent utiliser en plus du critère de comparaison. Soit $r > 0$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \text{ converge} \iff r > 1}$$

> Le critère de comparaison énonce:
> Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n à partir d'un certain n_0. Donc:
>
> 1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge
> 2. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Exemples

1) Etudier la convergence de la série suivante.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Notons que $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = -2\sin\left(\frac{-1}{2n}\right)\sin\left(\frac{1}{2n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)$.
Remarquons:

$$\boxed{\forall x \geq 0 \ \ \sin(x) \leq x}$$

Ainsi: $2\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \leq 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$. La série des $\frac{1}{n^2}$ converge, alors par critère de comparaison la série initiale converge.

2) Etudier la convergence de la série suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$$

Remarquons: $\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+0} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, dont la série converge. Alors la série initiale converge par critère de comparaison.

Justifications et remarques additionnelles

Observons que pour $n_0 \in \mathbb{N}$ donné, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n + n_0) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n)$ et n_0 étant fini, nous avons donc que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n + n_0)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergent ou divergent en même temps puisqu'elles ne diffèrent que d'une constante *finie* $C(n_0) = \sum_{n=1}^{n_0} f(n) < \infty$. Pour étudier une série de $f(n + r)$ où $r \in \mathbb{R}$, il suffit souvent de borner $f(n + r)$:

1. Pour montrer la convergence: $0 \leq f(n + r) \leq f(n + \lfloor r \rfloor)$ (quand c'est possible, par exemple pour f décroissante et positive) puis d'appliquer l'observation ci-dessus pour $n_0 = \lfloor r \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à r.

2. Pour montrer la divergence: $0 \leq f(n + \lceil r \rceil) \leq f(n + r)$ (quand c'est possible, par exemple toujours pour f décroissante et positive) puis d'appliquer l'observation ci-dessus pour $n_0 = \lceil r \rceil$, le plus petit entier supérieur ou égal à r.

Ceci justifie d'ignorer les constantes additives dans beaucoup de séries comme celle des $\frac{1}{(n+r)^k}$ qui a donc la même nature (convergente ou pas) que celle des $\frac{1}{n^k}$, puisque $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^k}$ est décroissante pour $k > 0$ et positive.

3.1.6 Série paramétrée

Souvent, en examen, surtout dans les sujets les plus récents, une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_a(n)$ est donnée avec a un paramètre réel, comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, et il sera question de déterminer si la série converge ou diverge en fonction de a, voire de plusieurs paramètres $a, b, c...$.

Pour trouver les a tels que $\sum_{n=0}^{\infty} f_a(n)$ coverge, il suffit d'adapter la méthode de détermination de convergence ou non de série non paramétrée. Typiquement il suffira de suivre ces étapes:

1. D'abord, quand c'est simple: vérifier la condition nécessaire $\lim_{n\to\infty} f_a(n) = 0$. Pour les a la rendant fausse, la série ne converge pas.
2. Appliquer, quand cela semble propice, Cauchy ou d'Alembert pour trouver les valeurs de a telles que $\lim_{n\to\infty} |f_a(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_a(n+1)}{f_a(n)}\right| > 1$, pour les valeurs de a faisant converger la série, et < 1 pour les valeurs de a faisant diverger la série.
3. Ensuite, pour les a tels que $\lim_{n\to\infty} |f_a(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_a(n+1)}{f_a(n)}\right| = 1$, ou quand Cauchy/d'Alembert semblent peu utiles, vérifier et classifier a en utilisant (le plus souvent) le critère de comparaison.

En effet, il ne faut pas oublier que Cauchy et d'Alembert ne donnent aucune conclusion quand les limites étudiées valent 1, il faut donc étudier la convergence séparément dans ces cas-là.
Concernant "quand c'est simple" dans la première étape: il n'est en effet pas nécessaire de vérifier la condition nécessaire lorsque nous utilisons les critères de Cauchy et d'Alembert.

Exemples

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les valeurs de a telles que la série suivante converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

Ici, il n'est pas aisé de vérifier directement la condition nécessaire.
Par d'Alembert:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{a^n n!}\right| &= \lim_{n\to\infty} |a| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} |a| \frac{1}{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{|a|}{e}
\end{aligned}$$

Ainsi par d'Alembert, la série converge pour $|a| < e$ et diverge pour $|a| > e$.
Reste à étudier le cas $|a| = e$. Le terme général de la suite des valeurs absolues devient: $|b_n| = \frac{e^n n!}{n^n}$.
Remarquons: $|b_{n+1}| = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = e\frac{en!}{(n+1)^n} = e\frac{en!}{n^n}\frac{n^n}{(n+1)^n} = |b_n| \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > |b_n|$, et $|b_1| = e \neq 0$, ainsi $\lim_{n\to\infty} |b_n| > 0$. Alors, la série converge si et seulement si $|a| < e$.

2) Soit $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Trouver toutes les valeurs de a telles que la série suivante converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^n(a)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Commençons par le critère nécessaire: $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan^n(a)}{\sqrt{n(n+1)}} = 0 \iff \tan(a) \leq 1 \iff a \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
Ensuite, par Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \tan(a)\frac{1}{(n(n+1))^{\frac{1}{2n}}} = \tan(a) < 1 \iff a < \frac{\pi}{4}$. Pour $\tan(a) = 1$ i.e $a = \frac{\pi}{4}$, la série des $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge par critère de comparaison. Ainsi, la série converge si et seulement si $a \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, pour $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3.2 Somme (valeur) d'une série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Il n'est habituellement pas demandé de déterminer la valeur vers laquelle converge une série, sauf dans un cas précis: la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, convergente pour $|q| < 1$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (*):

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Quand $|q| < 1$, $q^{N+1} \overset{N\to\infty}{\to} 0$ et ainsi:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}}$$

Attention: l'indice de sommation n commence à zéro dans la formule ci-dessus. Quand n ne commence *pas* à zéro, il suffit de retrancher les termes manquants. Donc:

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - \sum_{n=0}^{k-1} q^n = \frac{1}{1 - q} - \sum_{n=0}^{k-1} q^n$$

Notamment:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} - 1$$

Attention aussi au signe "$-$" dans le dénominateur, qui devient "$+$" si $q < 0$, voir l'exemple 3 ci-dessous.

Exemples

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$.

2) Trouver une borne supérieure à la série suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n + 1}$$

Notons que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4^n+1} \leq \frac{1}{4^n}$ ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

Justifications et remarques additionnelles

L'identité (*) se montre par récurrence sur N.

4 Fonctions, continuité et dérivées

4.1 Questions sur des définitions de base

4.1.1 Questions sur la définition de fonction, injectivité, surjectivité, bijectivité

Que veut dire l'écriture: $f : A \to B$? En particulier, ceci signifie-t-il que f a pour image tout B, et donc que f est surjective sur B?

La réponse est non, d'ailleurs cela voudrait dire que toutes les fonctions sont surjectives, c'est absurde. Nous pouvons voir (un peu informellement) une fonction comme un triplet (A, B, f) où A est le *domaine de définition* de la fonction, B le *le domaine d'arrivée* et f l'expression transformant chaque $a \in A$ en un *unique* $b \in B$. La seule restriction additionnelle après l'unicité de l'image de chaque a: l'expression f doit avoir un sens, i.e être définie, sur *tout* A. Aussi, par cette définition, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, x \mapsto x^2)$, $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, x \mapsto x^2)$, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2)$, $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2)$ sont **quatre** fonctions différentes; la première n'est ni injective ni surjective, la seconde est injective non surjective, la troisième est surjective non injective, la quatrième est bijective.

Comprendre profondément cette définition ainsi que celles d'injectivité, surjectivité et bijectivité permet d'éviter des pièges dans des questions V/F notamment, quelques exemples ci-dessous.

Exemples

1) Vrai ou faux:
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S'il existe (au moins) une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R}\ g(f(x)) = x$, alors f est injective.

Pour des questions V/F, quand les idées nous manquent, il est toujours pratique de commencer avec des exemples simples mais pas trop. Par exemple: $f(x) = e^x$, en effet ici $g(x) = \ln(x)$ vérifie $g(f(x)) = x$ et f est bien injective. Un contre-exemple évident vient-il en tête? A priori non, tentons peut-être de montrer cette proposition:
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y) \implies g(f(x)) = g(f(y)) \implies x = y$. Ainsi f est injective. Notons que la réciproque est également vraie.

2) Vrai ou faux:
Une fonction $f : [0; 1] \to [0; 1]$ strictement monotone est toujours bijective.

Une autre stratégie pour résoudre des V/F et mieux trouver des contre-exemples ou alors plus systématiquement montrer les propositions données serait de lister tout ce que les données impliquent. Ici, la stricte monotonie implique l'injectivité de f, pas sa surjectivité. Nous trouvons alors le contre-exemple: $f(x) = \frac{1}{3}x$, non surjective dans $[0; 1]$.

3) Vrai ou faux:
Une fonction bijective est strictement monotone.

Contre-exemple dans la section 8.

Justifications et remarques additionnelles

Une définition plus formelle de fonction $f : A \to B$ passe par celle de *relation* $R \subseteq A \times B$. Une relation entre A et B est simplement un sous-ensemble (non stricte, i.e pouvant être égal à l'ensemble entier) R du produit cartésien $A \times B$. Une fonction $f \subseteq A \times B$ sera alors une relation telle que: $\forall a \in A\ \exists! b_a \in B\ (a, b_a) \in f$, en français: pour tout $a \in A$ il existe un unique $b_a \in B$ tel que $(a, b_a) \in f$. Nous notons alors généralement b_a ainsi: $f(a)$.

Dans cette optique, f est vue comme une liste d'associations de valeurs dans A à des valeurs dans B.

4.1.2 Infimum et supremum d'ensembles définis à l'aide de fonctions usuelles

Nous traitons ici d'un problème tombant assez systématiquement dans les examens:
Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$, trouver l'infimum et/ou le supremum de l'ensemble $\{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Premier avertissement: **l'inf/sup cherché porte sur les x et pas sur les $f(x)$.**

Souvent, f est une composition de fonctions usuelles comme cos, $\frac{1}{x}$, log... et B est un intervalle $]c; +\infty[$ ou $]-\infty; c[$, et la méthode la plus systématique sera de ramener l'équation $f(x) \in B$ à $g(x) > c$ ou $g(x) < c$ pour une certaine fonction g usuelle et une certaine constante c, cela deviendra plus clair dans des exemples ci-dessous tirés des examens.

Exemples

1) Soit $E = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \mid \frac{1}{\ln(x)} < 1\right\}$. Trouver, s'ils existent, $\inf E$ et $\sup E$.

Ici, pour reprendre les notations du haut: $A = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$, $B =]-\infty; 1[$. Pour ramener l'écriture de la condition $\frac{1}{\ln(x)} < 1$ à la forme $g(x) > c$ où g est une fonction usuelle, remarquons que E s'écrit de manière équivalente:

$$E = \underbrace{\{x \in]1; +\infty[\mid \ln(x) > 1\}}_{E_1} \cup \underbrace{\{x \in]0; 1[\mid \ln(x) < 1\}}_{E_2}$$

Il vaut mieux en effet séparer les $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ car, sur le premier intervalle, $ln(x) < 0$ et sur le second, $\ln(x) > 0$. Ainsi: $\inf E = \min\{\inf E_1, \inf E_2\}$ et $\sup E = \max\{\sup E_1, \sup E_2\}$ car E_1 et E_2 forment une partition de E, i.e: $E_1 \cup E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \phi$.

Il devient aisé de calculer les $\inf E_i$ et $\sup E_i$: $\inf E_1 = e$, $\inf E_2 = 0$, $\sup E_1 = +\infty$ (i.e: il n'existe pas), $\sup E_2 = 1$. Ainsi: $\inf E = 0$ puis $\sup E = +\infty$. Remarquons que, puisque $\forall x \in E_1\ \forall y \in E_2\ x > y$, nous aurions pu directement conclure: $\inf E = \inf E_2$ et $\sup E = \sup E_1$.

2) Soit $F = \left\{x > 0 \mid \cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Trouver, s'ils existent, $\inf F$ et $\sup F$.

Posons $y(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, l'ensemble F s'écrit:

$$F = \left\{\frac{1}{y} > 0 \mid \cos(y) > 0\right\} = \{y > 0 \mid \cos(y) > 0\}$$

$\sup F$ ne peut pas exister, vu que $\cos(y) > 0$ pour $y = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, ainsi F n'est pas majoré: $\sup F = +\infty$. Cependant, F est minoré par 0 et $\forall a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\ \cos(a) > 0$, ainsi $\inf F = 0$.

4.2 Applications de théorèmes fondamentaux

4.2.1 Applications du théorème de la valeur intermédiaire

Le théorème de la valeur intermédiaire est utile pour montrer ou compter l'existence de solutions à certaines équations, et ses applications en examen sont parfois non triviales. Il énonce que l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé, ou encore qu'une fonction continue sur une intervalle fermé atteint son minimum, son maximum et toute valeur comprise entre les deux. Dit autrement mais de manière équivalente:

Le théorème de la valeur intermédiaire (TVI) énonce:
Soient $f : [a; b] \in \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \leq b$ des réels.
Ainsi, $\inf_{x \in [a;b]} f(x)$ et $\sup_{x \in [a;b]} f(x)$ existent ($\in \mathbb{R}$) et $\forall y \in \left[\inf_{x \in [a;b]} f(x); \sup_{x \in [a;b]} f(x)\right]\ \exists u \in [a; b]\ f(u) = y$. Nous pouvons aussi écrire:

$$f \in C^0([a; b]) \implies f([a; b]) = \left[\min_{x \in [a;b]} f(x); \max_{x \in [a;b]} f(x)\right]$$

Nous utilisons ici l'écriture: pour A un ensemble et f une fonction: $f(A) = \{y \mid \exists x \in A \; f(x) = y\}$.

Attention sur l'hypothèse: par définition, f est continue sur $[a; b]$ si:

1. $\forall x \in]a; b[\; \lim_{t \to x} f(t) = f(x)$ (continuité sur $]a; b[$),
2. $\lim_{t \overset{>}{\to} a} f(t) = f(a)$ (continuité à droite en a), et
3. $\lim_{t \overset{<}{\to} b} f(t) = f(b)$ (continuité à gauche en b).

En particulier, la continuité sur $]a; b[$ ne suffit pas, contre-exemple:
$f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0; 1]$: $\sup_{x \in]0;1]} f(x) = +\infty$, le supremum n'existe pas.

Cependant, le théorème se généralise naturellement pour $f : A \to \mathbb{R}$ où A est une union *finie* d'intervalles fermés $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i; b_i]$, par exemple $A = [1; 2] \cup [3; 4]$. Ainsi, f atteint son min et son max sur A. Il suffit d'appliquer le TVI sur chaque intervalle fermé $[a_i; b_i]$, ainsi $\min_{x \in A} f(x) = \min_{i=1}^{n} \min_{x \in [a_i; b_i]} f(x)$, idem pour le max. Attention, il n'est pas vrai, en général, dans ce cas, que toute valeur entre le min et le max trouvés est atteinte.

Le théorème admet une seconde extension naturelle. Supponsons $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]a; b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ (emphase sur l'égalité qui est admise avec $\pm\infty$). Supposons de plus que $l_a := \lim_{t \overset{>}{\to} a} f(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l_b = \lim_{t \overset{<}{\to} b} f(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors, $\forall$ réel $y \in \,]\min(l_a, l_b); \max(l_a, l_b)[$, $\exists u \in \,]a; b[\; f(u) = y$. Notons qu'ici $\min(l_a, l_b); \max(l_a, l_b)$ ne sont pas nécessairement des réels et peuvent valoir $\pm\infty$. Notons également: $]\infty; \infty[=] - \infty; -\infty[\overset{a \in \mathbb{R}}{=}]a; a[= \phi$. Plusieurs exemples ci-dessous.

Exemples

1) Une application simple, vrai ou faux:
Soit $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f([1; 2]) =]1; 2[$. Alors f n'est pas continue sur $[1; 2]$.
C'est vrai: par contraposée du TVI, si f était continue sur $[1; 2]$ alors $f([1; 2]) = [m; M]$, i.e un intervalle fermé. Or, ce n'est pas le cas, donc f n'est pas continue sur $[1; 2]$.

2) Une application moins simple mais ressemblant à celles du gymnase / du lycée: Trouver toutes les valeurs α telles que l'équation $x^5 - 5x + \alpha = 0$ admet exactement 3 racines réelles distinctes.
Nous devrons un peu anticiper sur l'étude de fonctions via la dérivée. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x + \alpha$ et cherchons les zéros de cette fonction. Etudions ses variations: $f'(x) = 5x^4 - 5$ donc:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff 5x^4 - 5 = 0 \\
&\iff 5(x^4 - 1) = 0 \\
&\iff 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \\
&\iff f'(x) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0
\end{aligned}
$$

La procédure est similaire pour $f' > 0$, d'où le tableau de signe de f' et de variations de f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1) = 4 + \alpha$	$\searrow$	$f(1) = -4 + \alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

Appliquons le théorème de la valeur intermédiaire et sa seconde généralisation énoncée ci-dessus en $]-\infty;-1]$, $[-1,1]$ puis $[1,+\infty[$. Afin que f passe exactement 3 fois par 0:

$$4+\alpha > 0 \wedge -4+\alpha < 0 \iff \alpha > -4 \wedge \alpha < 4 \iff \alpha \in]-4;4[$$

3) Application directe de la seconde généralisation du TVI énoncée ci-dessus, l'exemple précédent n'étant pas le plus explicite à son sujet.

Considérons $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$. En appliquant la généralisation sur $]a;b[=]-\infty;\infty[=\mathbb{R}$, nous n'obtenons rien vu que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: il n'existe pas de réel y appartenant à $]\infty;\infty[$. Cependant, en l'appliquant sur $]-\infty;0[$, nous obtenons que $\forall y \in]0;\infty[\ \exists u_1 \in]-\infty;0[\ f(u_1)=y$. En appliquant ce même résultat sur $]0;\infty[$, nous trouvons alors que $\forall y \in]0;\infty[\ \exists u_2 \in]0;\infty[\ f(u_2)=y$, et donc que l'équation $x^2=y$ pour y donné dans $]0;\infty[$ a deux solutions distinctes dans R^*. Bien sûr, ici, l'exemple $f(x)=x^2$ est assez évident, mais nous pourrions remplacer f par n'importe quelle fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0)=0$ et $\lim_{t\to\pm\infty} g(t)=\infty$, et arriver aux mêmes conclusions.

4) Une application pas simple mais déjà tombée en examen, vrai ou faux:
Soit $f:[0;2]\to\mathbb{R}$ avec $f(0)=f(2)$ et f continue, alors il existe (au moins un) $a\in[0;1]$ tel que $f(a)=f(a+1)$.

L'intuition est donnée par le graphe de f nécessairement en cloche à cause de la continuité, il suffit alors d'étudier la différence de f sur chaque moitié des abscisses et vérifier l'existence d'une ordonnée commune pour des abscisses x et $x+1$, ainsi: soit $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=f(x+1)-f(x)$, tâchons de trouver un 0 de g. Notons que: $g(0)=f(1)-f(0)$, $g(1)=f(2)-f(1) \overset{f(0)=f(2)}{=} f(0)-f(1)$, ainsi $g(0)=-g(1)$. g change de signe sur $[0;1] \implies$ par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y\in[0;1]$ tel que $g(y)=0$ car $0\in[-|g(0)|;|g(0)|]\subseteq[\min(g(x));\max(g(x))]$. Ainsi $g(y)=f(y+1)-f(y)=0 \iff f(y)=f(y+1)$.

Retenons la technique, étant donnée l'équation $f(x)=h(x)$, de poser $g(x)=f(x)-h(x)$ et de chercher les zéros de g.

4.2.2 Applications du théorème des accroissements finis

Il suffit généralement d'appliquer directement le théorème des accroissements finis, bien que des utilisations plus créatives peuvent être demandées, un exemple d'examen sera donné ci-dessous.

Le théorème des accroissements finis énonce:
Soient $a<b$ des réels et $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ telle que f est continue sur $[a;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$.
Alors, $\exists c\in]a;b[\ f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Les pièges communs ici résident en les crochets des intervalles ouverts ou fermés au mauvais endroit, en particulier: fermés pour la continuité.

Exemples

1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=|x\cos(x)|$. Le TAF ne s'applique pas sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$ car f n'est pas dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$, puisque f n'est pas dérivable en 0. En revanche, le TAF s'applique sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$, ainsi $\exists c\in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\ f'(c)=\frac{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-0}{\frac{\pi}{4}-0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=x^2+4x-1$. Pour $x\neq y,\ x,y\in]-3;2[$, borner le taux d'accroissement: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Supposons $x<y$ sans perte de généralité, le cas $x>y$ donne exactement le même résultat. f est continue et dérivable sur $[x;y]\subseteq]-3;2[$, alors le TAF s'applique: $\exists u\in]x;y[\ f'(u)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Il suffit alors de borner $f'(u)$:

$f'(x)=2x+4$ pour $x\in]-3;2[$ est croissante, ainsi $\min_{x\in\ ]-3;2[} f'(x)=f'(-3)=-2$ et $\max_{x\in\ ]-3;2[} f'(x)=f'(2)=8$. Vu que $u\in[x;y]\subseteq]-3;2[$, $-2\le f'(u)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le 8$.

4.3 Calcul de limites

4.3.1 Limites impliquant exponentielles et logarithmes

Voici d'abord quelques limites utiles pas ou peu citées en cours.

1. Soit $r > 0$, alors $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^r \ln(x) = 0$

2. Soit $r \geq 0$, alors $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x)}{x^r} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$

6. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

Souvent, utiliser $a^x = e^{x \ln(a)}$ peut aider. Remarquons que $\lim\limits_{x \to y} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to y} f(x)}$ "souvent", les conditions d'applications du théorème de composition des limites sont rappelées ci-dessous après les exemples.

Exemple

1) Trouver la valeur minimale p_0 de p telle que $f(x) = \begin{cases} |x|^p \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ soit dérivable en 0 pour $p > p_0$.

Définissons la fonction signe $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\ |x| = s(x)x$.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|^p \ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} s(x) \frac{|x|^p \ln(|x|)}{s(x)x} = \lim\limits_{x \to 0} s(x) \frac{|x|^p \ln(|x|)}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0} s(x)|x|^{p-1} \ln(|x|)$. Pour que f soit dérivable, $f'(0) \in \mathbb{R}$. Pour $p > 1$, $p - 1 > 0$ donnant $f'(0) = 0$ par la première limite énoncée ci-dessus. Pour $p \leq 1$, nous utilisons la deuxième limite énoncée ci-dessus pour avoir $f'(0) = -\infty$. Ainsi, $p_0 = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{xe^{2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{xe^{2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{e^{2x}} = 1.$

Justifications et remarques additionnelles

Rappelons d'abord le théorème de composition des limites, sans hypothèses de continuité.

> Soient $f : E \to F$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, $g : G \to H$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l \in \mathbb{R}$. Supposons encore que $f(E) \subseteq G$ et $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in E\ 0 < |x - x_0| < \alpha \implies f(x) \neq y_0$.
> Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

La condition piège: f doit être non constante égale à y_0 dans un voisinage de x_0 pour que ce théorème s'applique, cependant une version levant cette condition existe pour f et g continues:

> Soient $f : E \to F$, $g : G \to H$, avec $f(E) \subseteq G$, et f **continue en** $x_0 \in E$, puis g **continue en** $f(x_0) \in G$.
> Alors $g \circ f$ est continue en x_0, ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

C'est en pratique cette version-ci qui est utilisée le plus souvent.
Un mot concernant les deux premières limites: pour $r > 0$, il suffit de les montrer pour $r = 1$ puis d'utiliser $\ln(x^c) = c \ln(x)$ pour le cas plus général $r > 0$. Toutes les limites énoncées ci-dessus peuvent être calculées via Bernoulli-L'Hôpital, par exemple.

4.3.2 Limites impliquant des fonctions trigonométriques

Une limite fondamentale existe pour les fonctions trigonométriques, à utiliser quasi-systématiquement. C'est le théorème fondamental de l'ingénierie, $\sin(x) = x$, ou plutôt: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Une technique souvent payante est d'essayer de se ramener à cette limite en multipliant par $1 = \frac{x}{x}$, ou en transformant des cos en sin en utilisant des formules trigonométriques (voir annexe), dont: $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Parfois, aussi, des développements limités viennent plus efficacement à bout de certaines limites. C'est particulièrement le cas de limites de fractions quand le numérateur est une somme ou différence *autre* que $\cos(a) - \cos(b)$, et le dénominateur est x^k.

Notons aussi que $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, et $\lim_{x\to-\infty} = -\frac{\pi}{2}$. C'est aussi une fonction impaire.

Enfin, $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Exemples

1) Par développement limité:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^4} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2) Sans développement limité:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1} \frac{1}{\sin(5x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{5x}{\sin(5x)} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Notons qu'avec un développement limité d'ordre 1: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

3) Un exemple plus long utilisant $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x^2)\arctan\left(\frac{1}{x^4}\right)}{(1-\cos(x))^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{2} \frac{\sin^2(x^2)}{(\cos(0) - \cos(x))^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{2} \frac{\sin^2(x^2)}{(-2)^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{-x}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{8} \frac{\sin^2(x^2)}{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{8} \frac{(x^2)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^4} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\sin^2(x^2)}{(x^2)^2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Justifications et remarques additionnelles

En pratique, il n'est pas bien grave d'oublier les limites remarquables concernant les fonctions trigonométriques ou de ne pas remarquer quand une limite se rapproche d'une limite remarquable trigonométrique, vu qu'il est souvent possible de se débrouiller, bien que peut être plus lentement que prévu - mais pas forcément, comme vu dans l'exemple 2, via développement limité ou Bernoulli-L'Hôpital.

4.3.3 Limites diverses: racines, fonctions hyperboliques, valeur absolue, etc.

Il existe peu de limites remarquables utiles pour l'examen autres que celles énoncées dans les deux sections précédentes. Nous les recensons ici, au moins un exemple de chaque cas est donné après.

1. Concernant les racines: il suffit de conserver ses bonnes habitudes issues des suites (voir les sections correspondantes). Multiplication par le conjugué, factorisation par le terme de plus haute puissance, et autres techniques issues des suites sont à appliquer ici.

2. Une limite tombant parfois: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou encore $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Dans les deux cas, nous reconnaissons $f'(a)$ (en supposant que f soit une fonction différentiable en a), il suffit alors de calculer la dérivée de f et de l'évaluer en a.

3. Concernant les fonctions hyperboliques: il suffit souvent d'exprimer cosh et sinh comme $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$.

4. Pour gérer les valeurs absolues dans les limites: au lieu de décomposer en plusieurs cas, il suffit souvent de poser la fonction signe $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, puis de remarquer que $|x| = s(x)x$. Pour $x \neq 0$: $s(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$, vu que $s(x) = \frac{1}{s(x)}$. Nous aurons donc aussi $|x| = \frac{x}{s(x)}$ pour $x \neq 0$. Ceci permet de se défaire de la valeur absolue efficacement. Aussi, il faut profiter de sa positivité pour la passer sous la racine, en utilisant notamment: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Exemples

1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$$

2)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

<u>Première méthode: par la dérivée.</u>
Posons $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, qui est bien dérivable en 1. Ainsi $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, et $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, donc $f'(1) = \frac{1}{3}$.
<u>Seconde méthode: en utilisant l'identité des cubes:</u> $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
Ainsi, $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ (pour $a \neq b$), donc, avec $a = \sqrt[3]{x}$ et $b = 1$, nous obtenons: $\sqrt[3]{x} - 1 = \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{1}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\sinh\left(\frac{1}{x}\right) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{\sinh(y)}{y} = 1.$

4a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

4b) Etudier la différentiabilité de $f(x) = \begin{cases} |x|^p\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ - dans cet exemple, poser $|x| = s(x)x$ aide beaucoup. Le calcul a été détaillé dans la section sur les limites exponentielles et logarithmiques.

Justifications et remarques additionnelles

Des factorisations et identités remarquables de polynômes de degré 4 sont (rarement) utiles, voici comment les redériver sans avoir à les mémoriser:

1. $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

2. $x^4+1 = (x^2)^2+1+2x^2-2x^2 = (x^2)^2+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

L'idée, pour la seconde, est de compléter le carré, en faisant apparaître l'identité remarquable $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ en ajoutant $0 = 2x^2 - 2x^2$. Ainsi: nous posons $a^2 = (x^2)^2$ et $b^2 = 1$, impliquant $2ab = 2x^2$.

4.3.4 Limites par Bernoulli-L'Hôpital et par développements limités

Cette section n'ira *pas* en détail dans le calcul de développements limités, ceci est fait dans une section à part plus tard dans le document (voir le sommaire). La section présente traite, entre autres, de l'utilisation de développements limités pour le calcul de limites.

Souvent, la présentation de la règle de Bernoulli-L'Hôpital en cours est directement accompagnée du conseil de ne pas l'utiliser, car ses conditions d'applications seraient piégeuses. Nous allons voir ceci dans un instant, mais premièrement: la vraie raison pour laquelle Bernoulli-L'Hôpital est à éviter est le fait que, très souvent, l'approche par développements limités est plus propice, plus efficace, surtout quand il faudrait dériver plus de deux fois avec Bernoulli-L'Hôpital. Pragmatiquement parlant, Bernoulli-L'Hôpital n'est finalement très pratique que pour des limites plutôt simples.

La règle de Bernoulli-L'Hôpital énonce, pour une limite évaluée en $x_0 \in \mathbb{R}$:
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, f, g définies sur un $]a;b[$ avec $x_0 \in]a;b[$ telles que:

1. f, g dérivables sur $]a;b[\setminus\{x_0\}$,
2. $\boxed{\forall x \in]a;b[\setminus\{x_0\}\ g(x) \neq 0 \text{ et } g'(x) \neq 0,}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dans le cas d'une limite évaluée en ∞, la règle de Bernoulli-L'Hôpital est similaire:
Soient f, g définies sur $]c, \infty[$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ telles que:

1. f, g dérivables sur $]c, \infty[$,
2. $\boxed{\forall x \in]c, \infty[\ g(x) \neq 0 \text{ et } g'(x) \neq 0,}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dans les deux cas, la seule condition potentiellement piégeuse est la 2, surtout la partie $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a;b[\setminus\{x_0\}$ resp. $]c;\infty[$. Dans beaucoup de cas, prendre un intervalle $]a;b[$ plus petit ou un c suffisamment grand suffit, cependant des limites de la forme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{p(x)}$ où p est une fonction périodique à dérivée parfois nulle poseront problème. De telles limites, si elles sont bien définies, sont exotiques cependant. En particulier: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\cos(x)}$ ne pose pas problème car cette limite n'a... aucun sens, vu que $\cos(x)$ s'annulera toujours pour certains x pour tout choix de $]c;\infty[$.

Concernant le calcul de limites par Bernoulli-L'Hôpital:
Il n'existe qu'une seule vraie astuce importante concernant Bernoulli-L'Hôpital. Pour évaluer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ où $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, il suffit de calculer la limite de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ pour retomber dans les conditions de la règle de Bernoulli-L'Hôpital.

Concernant le calcul de limites par développements limités:
La question classique est "jusqu'à quel rang devons-nous calculer le développement limité". Souvent, des x^r traînent pour indiquer que r serait le rang minimal. Sinon, nous pouvons calculer par défaut jusqu'au rang 3 ou 4, et calculer plus de termes au besoin (en pratique, ce ne sera jamais nécessaire). N'oublions pas que le polynôme de Taylor de rang 2 de cos est le même que celui de rang 3, similairement, le polynôme de rang 1 de sin est le même que celui de rang 2, et enfin le polynôme de rang 3 de sin est le même que celui de rang 4.
Le calcul des développements limités en eux-mêmes est abordé plus tard dans le document (voir sommaire).

Exemples

1) Un terme x^2 étant au numérateur, développons à l'ordre 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)-1}-1-x^2}{(\sin(x))^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1-x^2}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1-x^2}{x^2}\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

2) Le DL n'a pas l'air commode à calculer, tentons BH pour la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

La limite est de la forme $\frac{f}{g}$ où $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ et $g(x)=x$.
Remarquons que $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(x) \implies f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}$, ce qui facilitera nos calculs.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{e^x-1+xe^x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-1}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{2e^x+xe^x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Nous avons dû appliquer la règle de Bernoulli L'Hôpital plusieurs fois mais les calculs ne sont pas spécialement compliqués.

3) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable en a. Calculer:

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$$

La question semble méchante, mais avec Bernoulli-L'Hôpital:

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a} \overset{BH}{=} \lim_{x\to a} af'(x)-f(a)=af'(a)-f(a)$$

4) Une limite par DL a ordre non évident, où nous tentons 3 (en fait 2 pour les cos et cosh) par défaut:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\cosh(x)}}{\cos(x)-\cosh(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(\cos(x)-1)+1}-e^{(\cosh(x)-1)+1}}{\cos(x)-\cosh(x)}$$

Il est important de comprendre pourquoi le recentrage ici $\cos(x)=\cos(x)-1+1$ est nécessaire, il est développé dans la section concernant les développements limités.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\cosh(x)}}{\cos(x)-\cosh(x)} &= \lim_{x\to 0} e\frac{e^{(\cos(x)-1)}-e^{(\cosh(x)-1)}}{\cos(x)-\cosh(x)}\\ &= \lim_{x\to 0} e\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{\frac{x^2}{2}}}{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}}\\ &= e\end{aligned}$$

Il aurait également suffit d'appliquer BH 2 fois.

5 Dérivées, calcul différentiel, séries entières, séries de Taylor

5.1 Questions d'étude de dérivabilité: continuité - dérivabilité - C^1

Beaucoup de questions tombent dans cette section, elles se ressemblent toutes: étant donnée une fonction f, paramétrée ou non, il faut déterminer si la fonction est continue, dérivable et/ou à dérivée continue en un ou plusieurs points, ou encore trouver les valeurs de certains paramètres pour la rendre dérivable, C^1, etc.

La méthode: la rigueur. Il suffit de décider de chaque degré de régularité dans cet ordre:

1. La continuité: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. La dérivabilité: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$
3. La continuité de la dérivée: $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

Quelques remarques et avertissements:

- Pour décider de la dérivabilité d'une fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ c & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, il ne suffit pas, en général, de vérifier si $g'(x_0) = c$, en particulier car il se peut que $g(x_0) \neq c$.
- Il faudra souvent déterminer l'existence d'une limite en vérifiant: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} g(x)$.

Les exemples ci-dessous recensent les différentes variantes de cette question.

Exemples

1) Déterminer les paires de nombres a, b telles que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante soit dérivable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin(a^2 x) - b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Premièrement, développons l'expression du haut: $\forall x \geq 0\ f(x) = abx^2 + x(b-a) - 1$.
Dérivabilité en 0 implique d'abord continuité en 0, ainsi:

$$f(0) = ab \times 0 + 0 \times (b-a) - 1 = -1 = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \sin(a^2 x) - b = -b \implies b = 1$$

Utilisons à présent la dérivabilité de f. En dénotant $g_1(x) = \sin(a^2 x) - 1$ et $g_2(x) = (ax+1)(x-1)$, nous cherchons donc a tel que:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g_1(x)-g_1(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g_2(x)-g_2(0)}{x}$$

En effet, $g_1(0) = g_2(0) = f(0) = -1$ puisque f est continue en 0 et g_1 aussi. De plus, g_1 et g_2 sont dérivables en 0, alors: $g_1'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g_1(x)-g_1(0)}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g_1(x)-g_1(0)}{x}$ (attention au signe $<$ rajouté sous la limite), idem pour g_2. En effet: $\lim\limits_{t\to t_0} h(t) = l \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{t \overset{>}{\to} t_0} h(t) = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} t_0} h(t) = l \in \mathbb{R}$.
Ainsi nous pouvons calculer ces limites en calculant simplement g_1' et g_2' puis en les évaluant en 0: $g_1'(x) = a^2 \cos(a^2 x)$ et $g_2'(x) = 2ax - a + 1$. Puis:

$$g_1'(0) = g_2'(0) \iff a^2 = -a + 1 \iff a^2 + a - 1 = 0$$

Ainsi $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, il existe donc exactement 2 paires (a, b) rendant f dérivable: $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1), (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, trouvons le n minimal pour lequel la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pas le choix ici, nous devons étudier la limite suivante et déterminer quand elle est réelle:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $n=0$ ou $n=1$, la limite diverge assez clairement. Qu'en est-il de $n=2$?

$$\lim_{x\to 0} x^{2-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour $n=2$. Notons que f n'est pas deux fois dérivable pour $n=2$ ni $n=3$:

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour $n=2$, f' n'est même pas continue en 0 à cause du terme $x^{2-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ borné mais qui ne converge pas. Pour $n=3$, étudions la différentiabilité: $\lim_{x\to 0} \frac{x^{3-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui retombe dans le même problème de non convergence.
Plus généralement, il faudra $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$ pour avoir f dérivable k fois, et $n=2k+1$ pour $f\in C^k$.

3) Premier exemple avec valeur absolue: déterminons si la fonction suivante admet un prolongement par continuité en 0:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|} \end{aligned}$$

Nous pourrions séparer le calcul pour $x<0$ et $x>0$, mais à la place, nous utilisons l'astuce $|x| = s(x)x \iff x = \frac{|x|}{s(x)}$ pour $x\neq 0$ où s est la fonction signe, introduite dans la section 4.3.3 de ce document, qui abrège le calcul:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0} s(x) \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} = \lim_{x\to 0} s(x) \implies \text{n'existe pas}$$

La limite en 0 n'existe pas, ainsi f n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

4) Pour un second exemple avec valeur absolue, plus complexe et utilisant $|x| = s(x)x$, l'étude de la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} |x|^p \ln(|x|) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est développée dans la section 4.3.1 sur les limites d'exponentielles et logarithmes.

5.2 Dérivées et calcul différentiel

5.2.1 Dérivée de la fonction réciproque

Etant donnée une fonction f bijective et "suffisamment régulière" (ce sera précisé dans une minute), une question tombant parfois est de calculer $(f^{-1})'(y_0)$. La proposition réglant ce problème est la suivante.

Soit $f : I \to J$, une fonction continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0)\neq 0$. Alors, en posant $y_0 = f(x_0)$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Autrement dit,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemples

1) Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(x) = e^x$, qui est bien bijective, ainsi que continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi la dérivée de la fonction réciproque $f^{-1}:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x) = \ln(x)$ est donnée par:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

2) Pour une question issue d'un examen, avec des calculs plus lourds:
Soit la fonction bijective $f :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = 2 + \log\left(\frac{2e+x}{x^2}\right)$$

et soit f^{-1} la fonction réciproque de f et $y_0 = f(2e)$. Calculer $(f^{-1})'(y_0)$.

$$\begin{aligned}\left[2 + \log\left(\frac{2e+x}{x^2}\right)\right]' &= \frac{x^2}{2e+x}\left(\frac{2e+x}{x^2}\right)' \\ &= \frac{x^2}{2e+x}\frac{x^2 - 2x(2e+x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2}{2e+x}\frac{-x^2-4xe}{x^4} \\ &= \frac{1}{2e+x}\frac{-x-4e}{x} \\ &= -\frac{x+4e}{2ex+x^2}\end{aligned}$$

Ainsi $f'(f^{-1}(f(2e))) = f'(2e) = -\frac{6e}{2\times 4e^2} = -\frac{3}{4e}$ alors $(f^{-1})'(2e) = \frac{1}{f'(2e)} = -\frac{4e}{3}$. Selon les goûts, il était peut être plus efficace ici de séparer le $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ et dériver ensuite.

Justifications et remarques additionnelles

Pour retrouver en deux secondes la formule quand on l'oublie, il suffit de remarquer que, par définition de la fonction réciproque:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Ainsi, en dérivant cette égalité, en faisant attention au fait que le côté gauche sera alors une dérivée d'une composée: $[g \circ h]'(x) = h'(x)g'(h(x))$, d'où:

$$f^{-1}(x)f'(f^{-1}(x)) = 1 \iff f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5.2.2 Etude de fonction

Etant donnée une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $I \subseteq\ ]a;b[$, une question possible sera l'étude de f, notamment la recherche de ses extrema, locaux et absolus. L'étude de f

Les extrema absolus de f peuvent se situer:

1. en les points $x \in I$ où $f'(x) = 0$,
2. en les points $x \in]a;b[\backslash I$, où f n'est donc pas dérivable,
3. ou en a ou b.

Ensuite, pour déterminer les intervalles de croissance de f:

1. $\forall x \in\ ]a;b[\ f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur $]a;b[$
2. $\forall x \in\ ]a;b[\ f'(x) > 0 \implies f$ est **strictement** croissante sur $]a;b[$

Pour la décroissance, il suffit d'inverser les sens des inégalités. **Attention à l'implication allant dans un seul sens pour la stricte monotonie.** Contre-exemple: $x :\mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0, mais qui est strictement croissante.

Exemples

1) Exemple direct: Etudions les variations de $f: [0; 2\pi] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = \sin(x)e^{-x}$.
$f'(x) = \cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x} = (\cos(x) - \sin(x))e^{-x} \implies f'(x) = 0 \iff \cos(x) = \sin(x) \implies x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$, sachant que $x \in [0; 2\pi]$ - pensez au cercle trigonométrique.

Afin de déterminer si $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sont des maxima ou minima locaux, calculons la dérivée seconde:
$f''(x) = -(\cos(x) + \sin(x))e^{-x} - (\cos(x) - \sin(x))e^{-x}$:
$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} < 0$, alors $\frac{\pi}{4}$ est un maximum local. Nous déduisons alors que $\frac{5\pi}{4}$ est un minimum local de f. Voici alors le tableau de variations de f:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	$\nearrow$	0

2) Exemple indirect plus intéressant: Trouver toutes les valeurs α telles que l'équation $x^5 - 5x + \alpha = 0$ admet exactement 3 racines réelles distinctes.
Cet exemple a été développé dans la section traitant du théorème de la valeur intermédiaire, 4.2.1.

5.3 Séries entières, séries de Taylor, développements limités

5.3.1 Calcul de séries de Taylor et développements limités

Dans cette section, nous tentons de résumer tout ce qu'il faut savoir sur les techniques de calcul de séries de Taylor et développements limités. Elle sera découpée en plusieurs parties:

1. Les quelques séries de Taylor et développements limités à connaître
2. Les compositions de développements limités
3. Les dérivées et intégrales de séries entières, et applications aux DL

1. Les quelques séries de Taylor et développements limités à connaître

Voici ci-dessous la liste de séries de MacLaurin (i.e séries de Taylor autour de 0) essentielles, ainsi que leurs domaines de convergence. Il suffit de connaître ces séries suivantes pour retrouver toute série ou tout développement limité pouvant raisonnablement tomber à l'examen.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}...$$

$$\forall x \in]-1;1]\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}...$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}...$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}...$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}...$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}...$$

$$\forall x \in]-1;1[\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4...$$

$$\forall x \in]-1;1[\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4...$$

2. Les compositions de développements limités

La plupart des développements limités d'examens impliquent une composition. Rappelons d'abord la proposition concernant la composition de développements limités:

> Pour $f(x) = \underbrace{a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n}_{P_{f_n}(x)} + (x-a)^n \varepsilon(x)$ son développement limité autour de a, puis
> $g(y) = \underbrace{g(0) + b_1 y + ... + b_n y^n}_{P_{g_n}(x)} + y^n \varepsilon(y)$ son développement limité autour de 0.
> Alors $g \circ f$ admet un développement limité autour de a, avec un polynôme de Taylor donné par:
>
> $$P_{(g \circ f)_n}(x) = g(0) + b_1 P_{f_n}(x) + b_2 (P_{f_n}(x))^2 + ... + b_n \left(P_{f_n}(x)\right)^n$$
>
> d'où on enlève les termes de degré supérieur à n.

En pratique, les seuls développement limités que nous connaissons sont autour de 0. Il faut donc parfois "recentrer" le développement limité, en ajoutant $0 = a - a$, en multipliant par $1 = \frac{b}{b}$, etc. Exemples ci-dessous.

Piège classique des développements limités: "négliger" trop de termes. Un exemple ci-dessous illustrera le danger, l'exemple 4.

Exemples

1) Calculons le DL d'ordre 3 en 0 de:

$$\exp\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

Nous noterons le reste du développement limité simplement par $r(x)$. $\frac{1}{x-2}$ ressemble à $\frac{1}{1-Y}$, tâchons d'abord d'arriver à cette forme.

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x}{x-2}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{1-\frac{x}{2}}\right) \text{ où nous factorisons le dénominateur par 2,}\\ &= \exp\left(-\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)\end{aligned}$$

Ici, pour $x \to 0$, $y(x) = -\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} \to 0$, nous pouvons alors commencer par calculer le DL de y d'ordre 3 en 0 pour ensuite le composer avec celui de exp:

$$\begin{aligned}y(x) &= -\frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\ &= -\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)+r(x)\\ &= -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+r(x)\end{aligned}$$

Nous pouvons alors enfin calculer le DL de la fonction donnée par composition de DL en 0:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x}{x-2}\right) &= \exp(y(x))\\ &= 1+y(x)+\frac{y(x)^2}{2}+\frac{y(x)^3}{6}+r(x)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\right)^2+r(x)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}\right)-\frac{1}{6}\frac{x^3}{8}r(x)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{48}+r(x)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+r(x)\end{aligned}$$

2) Calculons le DL d'ordre 4 en 0 de:

$$\log(1+\cos(x))$$

$\cos(x)$ vaut 1 et pas 0 autour de 0, ainsi nous ne pouvons pas simplement employer la composition de développements limités $\log(1+y(x))$ avec $y(x) = \cos(x)$ et $y(x)$ autour de 0 car ici $y(x)$ approche de 1. Tâchons d'arriver à la forme $\log(1+y(x))$ avec $y(x)$ approchant 0:

$$\begin{aligned}\log(1+\cos(x)) &= \log(1+\cos(x)-1+1)\\ &= \log(2+(\cos(x)-1))\\ &= \log\left[2\left(1+\frac{\cos(x)-1}{2}\right)\right]+r(x)\end{aligned}$$

Donc:

$$\log(2)+\log\left(1+\frac{\cos(x)-1}{2}\right) = \log(2)+\frac{\cos(x)-1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x)-1}{2}\right)^2$$

Les termes suivants iront à une puissance > 4. Continuons:

$$\begin{aligned}\log(2)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+r(x) &= \log(2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}-\frac{x^4}{32}+r(x)\\ &= \log(2)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+r(x)\end{aligned}$$

3) Calculons encore un DL par composition après recentrage, qui était une question d'examen, celui d'ordre 3 autour de 0 de:

$$\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$x \to 0$ implique $e^{-x} \to 1$, tâchons de recentrer le dénominateur pour obtenir $\frac{1}{1+y(x)}$ avec $y(x) \to 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{1+(e^{-x}-1)+1}\\ &= \frac{1}{2+(e^{-x}-1)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{e^{-x}-1}{2}}\end{aligned}$$

Ainsi en posant $y(x) = \frac{e^{-x}-1}{2} \overset{x\to 0}{\to} 0$, nous pouvons d'abord calculer le DL d'ordre 3 autour de 0 de y:

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{e^{-x}-1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(e^{-x}-1)\\ &= \frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+r(x)\\ &= -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+r(x)\end{aligned}$$

Nous pouvons passer au calcul final:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+y(x)}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-y(x)+y(x)^2-y(x)^3\right)+r(x)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2-\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right)+r(x)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^3}{8}\right)+r(x)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48}+r(x)\end{aligned}$$

4) Calculons le DL d'ordre 5 en 0 de $\sin(\sin(x))$:

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) &= \sin\left(\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}_{y(x)}\right)+r(x)\\ &= y(x)-\frac{y(x)^3}{6}+\frac{y(x)^5}{120}+r(x)\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x\right)^5+r(x)\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+\frac{x^5}{120}+r(x)\\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+r(x)\end{aligned}$$

Attention à la troisième ligne: le $\frac{x^3}{6}$ dans la parenthèse du cube fait apparaître le terme $\frac{x^5}{2}$. Ce DL a figuré dans un examen pour PH, et l'une des réponses proposées était justement prévue au cas où ce cube était oublié.

5) Calculer: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\cos(x)-1}-1-x^2}{(\sin(x))^2}$ - voir la section sur les limites par BH et DL pour le calcul.

3. Les dérivées et intégrales de séries entières, et applications aux DL

Un théorème non prouvé mais vu dans le cours d'analyse 1 non avancée est le suivant:

Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, convergente sur un intervalle non vide $I =]x_0 - r; x_0 + r[$, $r > 0$. Alors la série entière donnée est <u>continue</u> sur I et:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \ \forall x \in I$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \ \forall x \in I$$

Remarquons que le théorème ne dit rien pour $x = x_0 \pm r$, avec r le rayon de convergence. Ainsi, les rayons de convergence sont conservés, mais les domaines de convergences peuvent être différents.

En cours, ce théorème vous permet notamment de calculer la série de Taylor de ln en 1. Il a également été nécessaire au moins une fois par le passé en examen. Il peut également servir à retrouver des DL de certaines fonctions, ce qui peut servir dans des calculs de limites par exemple, ou à calculer des DL plus rapidement. Dans les exemples suivants, $r(x)$ désigne le reste du développement limité.

Exemples

1) Calculer la série de Taylor d'arctan.
Il suffit de remarquer: $\arctan(y) = \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt$, et nous pouvons calculer le DL $\frac{1}{1+t^2}$ par composition connaissant celui de $\frac{1}{1+x}$, ainsi:

$$\begin{aligned}
\arctan(y) &= \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^y 1 - t^2 + (t^2)^2 - (t^2)^3 + ... \ dt \\
&= \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (t^2)^k dt = \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^y t^{2k} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors retrouver le DL d'arctan d'ordre 5 autour de 0 par exemple: $\arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + r(x)$.

2) Calculer le DL d'ordre 5 en 0 de $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Nous pourrions calculer celui de $\frac{1}{1-x}$ et l'élever au carré, mais nous pouvons aller plus rapidement en remarquant que $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$, ainsi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\
&\overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + r(x)
\end{aligned}$$

5.3.2 Calcul de domaine de convergence

Pour déterminer le domaine $D \in \{]x_0 - r; x_0 + r[,]x_0 - r; x_0 + r], [x_0 - r; x_0 + r[, [x_0 - r; x_0 + r]\}$ de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, il suffit de trouver le rayon de convergence à l'aide de la proposition ci-dessous puis d'étudier séparément les séries numériques obtenues pour $x = x_0 \pm r$.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $r \geq 0$.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$ et si la limite suivante existe ou est infinie, alors $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{r}$.
2. Si la limite suivante existe ou est infinie, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r}$.

Cette proposition ramène alors le problème du calcul d'un domaine de convergence à celui de l'application des critères de Cauchy et D'Alembert, qui ont leurs propres sections dédiées que nous vous invitons à consulter.

Exemples

1) Une question d'examen: déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k$$

Ici, $x_0 = 0$.
D'abord, calculons le rayon de convergence, par Cauchy pourquoi pas, quoique D'Alembert marcherait aussi:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k+1)^2}{5^{k+3}}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5^{\frac{k+3}{k}}} \sqrt[k]{(k+1)^2} = \frac{1}{5} \implies r = 5$$

Ensuite, pour $x = \pm 5$:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} | \pm 5|\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5^{\frac{k+2}{k}}} \sqrt[k]{(k+1)^2} = \frac{1}{5} < 1 \implies \text{converge}$$

Ainsi, cette série converge $\forall x \in [-5; 5]$.

2) Un exemple avec paramètre. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, puis $\forall n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n^{\alpha n} + 1}}$$

Définissons également la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x - \alpha)^n$, Calculons le rayon de convergence en fonction de α, $r(\alpha)$.

Avec des termes ressemblant à $(b_n)^n$, tentons Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{\frac{n}{n^{\alpha n} + 1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log\left(\frac{n}{n^{\alpha n}+1}\right)}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n) - \log(n^{\alpha n}+1)}{n^2}}$$

$\frac{\log(n)}{n^2}$ tendra vers 0, concentrons-nous sur $\frac{\log(n^{\alpha n}+1)}{n^2}$. Si $\alpha \leq 0$, la limite est de la forme $\frac{réel}{\infty} = 0$. Sinon: Pour des sommes à l'intérieur d'un log, l'astuce gagnante est de factoriser à l'intérieur:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^{\alpha n} + 1)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left[n^{\alpha n}\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha n}}\right)\right]}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha n \log(n)}{n^2} + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha n}}\right)}{n^2} = 0$$

Ainsi $\forall \alpha \in \mathbb{R} \lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$, donc $r(\alpha) = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}}} = 1$.
Notons que le fait que le terme général de la suite ne tende pas vers 0 pour $\alpha \leq 0$ n'a absolument aucune importance car on s'intéresse à la série entière $\sum u_n(x - \alpha)^n$ et pas $\sum u_n$.

6 Intégration

6.1 Théorèmes de base d'intégration

Ces quelques résultats suivants sont importants en V/F, parfois même en QCM, et sont parfois oubliés.

Soit f *continue* sur $[a;b]$, $a < b$. Alors :

- **Théorème d'encadrement:**
$$(b-a) \times \min_{x \in [a;b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \times \max_{x \in [a;b]} f(x)$$
- **Théorème de la moyenne:**
$$\exists c \in [a;b] \ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$
- **Nullité de l'intégrale d'une fonction impaire:**
Soit $[-c;c] \subseteq [a;b]$,
$$f \text{ impaire} \implies \int_{-c}^{c} f(x)dx = 0$$

Le théorème d'encadrement est, en examen, à utiliser systématiquement quand la question est d'encadrer la valeur d'une intégrale, car souvent l'intégrale ne pourra être intégrée avec des méthodes standards d'analyse I.
En ce qui concerne le théorème de la moyenne et le résultat de nullité de l'intégrale de fonction impaire, pour l'instant, en examen, il a suffi de les connaître pour répondre à quelques V/F le concernant.
Attention: la réciproque du résultat de nullité de l'intégrale d'une fonction impaire est fausse. Intuitivement, il suffit que l'aire négative soit égale à l'aire positive. Contre-exemple dans les remarques additionnelles.
En revanche, une propriété importante des fonctions impaires et que **la composée et la somme de fonctions impaires est impaire, mais pas le produit**. En ce qui concerne la composée, si h et g sont impaires, $-h(g(x)) = h(-g(x))$ par imparité de h, puis $h(-g(x)) = h(g(-x))$ par imparité de g, ainsi $-h(g(x)) = h(g(-x))$. Le produit de deux fonctions impaires est en fait pair.

Exemples

1) Encadrer:
$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} e^{(x^2)} dx$$

La primitive d'e^{x^2} ne s'exprime pas en terme de fonctions dites "élémentaires", i.e il ne sera pas possible de la déterminer analytiquement. Appliquons le théorème d'encadrement.
Trouvons les extrema de $f(x) = \frac{2}{3}e^{x^2}$, et ce en dérivant: $f'(x) = \frac{4x}{3}e^{x^2}$ change de signe en 0 du négatif au positif, ainsi f décroît jusqu'à 0 puis croît ensuite. Dressons ainsi un tableau de variations de f:

<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{2}{3}e$</td><td>↘</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>↗</td><td>$\frac{2}{3}e^{\frac{1}{4}}$</td></tr>
</table>

Ainsi $\max_{x\in[-1;\frac{1}{2}]} f(x) = \frac{2}{3}e$ et $\min_{x\in[-1;\frac{1}{2}]} f(x) = \frac{2}{3}$ car $e > 1$ donc $e^{\frac{1}{4}} > 1^{\frac{1}{4}}$. Notons aussi que $b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$, ainsi en appliquant la formule ci-dessus nous obtenons:

$$\frac{2}{3}\frac{3}{2} \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}e^{x^2}dx \leq \frac{3}{2}\frac{2}{3}e \iff 1 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}e^{x^2}dx \leq e$$

2) Calculer:

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \arctan(\sin^3(x))dx$$

arctan et $\sin^3$ sont impaires, $\sin^3$ l'est car $\sin^3 = \sin^2 \times \sin$ qui est le produit d'une fonction paire avec une fonction impaire, qui est donc impaire. De plus, $\sin^3$ est 2π périodique, alors $\arctan \circ \sin^3$ est 2π périodique. Or, si f est T périodique, nous pouvons ajouter ou soustraire T des deux bornes de l'intégrale:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t+T)dt \underset{u=t+T}{=} \int_{a+T}^{b+T} f(u)du$$

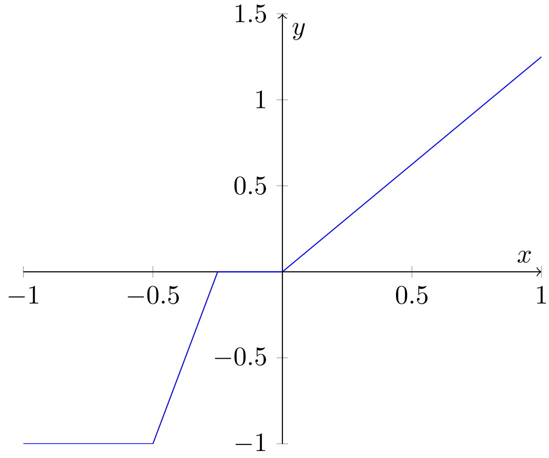
En appliquant ce résultat ici puis celui de la nullité d'intégrale de fonction impaire:

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \arctan(\sin^3(x))dx = \int_{\frac{3}{2}\pi-2\pi}^{\frac{5}{2}\pi-2\pi} \arctan(\sin^3(x))dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\sin^3(x))dx = 0$$

Justifications et remarques additionnelles

Voici le contre-exemple promis ci-dessus, une fonction *continue* (!) non impaire dont l'intégrale s'annule sur $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} f : [-1;1] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -0.5 \\ 4x+1 & \text{si } x \in [-0.5; -0.25] \\ 0 & \text{si } x \in [-0.25; 0] \\ 2 \times \left(\int_{-1}^{0} f(t)dt\right) x = 2 \times 0.625x & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases} \end{aligned}$$



6.2 Primitives élémentaires, factorisation et développement

Avant de voir des techniques d'intégration plus avancées, il serait bon de s'assurer de connaître les primitives nécessaires ainsi que quelques règles basiques d'intégration. Il faut en particulier ne pas oublier les dérivées de fonctions trigonométriques réciproques, voir l'annexe trigonométrique.

Aussi, voici une règle souvent vue au lycée/gymnase mais qui mérite un rappel car elle généralise beaucoup d'autres règles basiques d'intégration:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle, soit $r \in \mathbb{R}$. Alors:

$$\int f'(x)f^r(x)dx = \begin{cases} \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + C & \text{si } r \neq -1 \\ \ln(|f(x)|) + C & \text{si } r = -1 \end{cases}$$

Enfin, parfois, il suffit de développer ou factoriser une partie d'une expression afin de tomber sur une intégrale connue, comme dans quelques exemples ci-dessous.

Exemples

1) Calculer:

$$I = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Il suffit de remarquer les factorisations avec des identités remarquables:

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int_2^3 \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} dx \end{aligned}$$

Le dénominateur est gênant, substituons-le:

$$\begin{aligned} I &\overset{y=x+1}{=} \int_3^4 \frac{(y-2)^2}{y^2} dy \\ &= \int_3^4 \frac{y^2 - 4y + 4}{y^2} dy \\ &= \int_3^4 1 - \frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} dy \\ &= \int_3^4 1dy - 4\int_3^4 \frac{1}{y} dy + 4\int_3^4 \frac{1}{y^2} dy \\ &= 1 - 4[\ln(y)]_3^4 - 4\left[\frac{1}{y}\right]_3^4 \\ &= 1 - 4(\ln(4) - \ln(3)) - 1 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} - 4\ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

2) Calculer:

$$I = \int_{-125}^0 \frac{\sqrt[3]{u} + 5}{3u^{\frac{2}{3}}\sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 10\sqrt[3]{u} + 26}} du$$

Elle n'a pas l'air commode, pourtant elle n'est pas si compliquée. Il s'agit de bien trouver le premier changement de variable en remarquant l'identité remarquable dans la racine au dénominateur:

$$\int_{-125}^0 \frac{\sqrt[3]{u} + 5}{3u^{\frac{2}{3}}\sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 10\sqrt[3]{u} + 26}} du = \frac{1}{3}\int_{-125}^0 \frac{u^{\frac{1}{3}} + 5}{u^{\frac{2}{3}}\sqrt{(u^{\frac{1}{3}} + 5)^2 + 1}} du$$

Le terme commun $u^{\frac{1}{3}}+5$ est tentant. Changeons de variable: $t = u^{\frac{1}{3}}+5 \iff u^{\frac{1}{3}} = t-5 \iff u = (t-5)^3$ donc $du = 3(t-5)^2 dt$, attention aux bornes:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^5 \frac{t}{((t-5)^3)^{\frac{2}{3}}\sqrt{t^2+1}} 3(t-5)^2 \overset{\text{tout s'annule}}{=} \int_0^5 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

Nombre de changements de variables marchent ici. Posons $v = t^2 + 1 \iff t = \sqrt{v-1} \implies dt = \frac{1}{2\sqrt{v-1}} dv$. Attention aux bornes.

$$I = \int_1^{26} \frac{\sqrt{v-1}}{\sqrt{v-1}} \frac{1}{2\sqrt{v}} dv = [\sqrt{v}]_1^{26} = \sqrt{26} - 1$$

3) Une dernière, calculer:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

Ici, il suffit de noter que $\sqrt{\sin(x)} = (\sin(x))^{\frac{-1}{2}}$ puis que $\sin'(x) = \cos(x)$ avant d'appliquer la formule encadrée ci-dessus:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)(\sin(x))^{\frac{-1}{2}} = \left[\frac{\sin(x)^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2[\sqrt{\sin(x)}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}$$

Justifications et remarques additionnelles

Pour vérifier l'identité encadrée ci-dessus, il suffit de dériver le côté droit de l'égalité.

6.3 Intégration par partie

L'intégration par parties repose sur la dérivée du produit de fonctions. Soient $u, v \in C^1$, alors:

$$(uv)' = u'v + uv' \implies \underbrace{\int (uv)'}_{=uv} = \int u'v + \int uv' \implies \boxed{\int u'v = uv - \int uv'}$$

Il n'y a pas de grand secret concernant cette technique d'intégration. Elle ne marche que dans des cas très spécifiques mais qui, heureusement ou malheureusement, tombent en examen, tels que polynôme $\times$ logarithme, trigonométrique $\times$ exponentielle, etc. Ces cas se ressemblent tous et vos cours et séries fourmillent d'exemples.

Exemple

Calculer:

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$. Habituellement, ceci serait gênant, mais ici, en dérivant ln et en intégrant $\frac{1}{x^2}$:

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_e^{\infty} + \int_e^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_e^{\infty} = \frac{2}{e}$$

6.4 Intégration par changement de variable

La formule de changement de variable énonce:

> Soit $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ continue, et $\phi: [c; d] \to [a; b]$ de classe C^1. Alors:
>
> $$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Cette technique d'intégration est souvent l'occasion d'utiliser des identités trigonométriques. Le but sera, assez systématiquement, d'essayer de simplifier tout ce qui gêne dans l'intégrale.

Exemples

1) Calculer:

$$I = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$$

Ce $\frac{1}{x}$ est gênant. Posons alors $y(x) = \frac{1}{x} \implies y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \implies dy = -\frac{1}{x^2}dx$:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{y^3}{y^2} e^y dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 ye^y dy = [ye^y]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^y dy = e - \frac{1}{2}\sqrt{e} - e + \sqrt{e} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

2) Calculer:

$$I = \int_2^3 \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}dx$$

3) Calculer:

$$I = \int_{-125}^0 \frac{\sqrt[3]{u}+5}{3u^{\frac{2}{3}}\sqrt{u^{\frac{2}{3}}+10\sqrt[3]{u}+26}}du$$

Ces deux exemples sont développés en partie 6.2.

4) Calculer:

$$I = \int_1^2 x\ln(1+x)dx$$

Ici $1+x$ gêne. Ainsi, posons $y = 1+x$, et attention aux bornes:

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 (y-1)\ln(y)dy \\ &= \int_2^3 y\ln(y)dy - \int_2^3 \ln(y)dy \end{aligned}$$

Une primitive de $\ln(y)$ est $y\ln(y)-y$, pour l'obtenir il suffit d'intégrer $\ln(y)$ par parties. L'intégrale de gauche se fait également par parties en intégrant y et en dérivant $\ln(y)$:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{y^2}{2}\ln(y)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{y}{2}dy - [y\ln(y)-y]_2^3 \\ &= \frac{9}{2}\ln(3) - 2\ln(2) - \left[\frac{y^2}{4}\right]_2^3 - 3\ln(3) + 3 + 2\ln(2) - 2 \\ &= \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{9}{4} + 1 + 1 \\ &= \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5) Calculer:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$$

Le trick: ajouter 0 intelligemment. D'abord un changement de variable:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt = 2\int_0^{\sqrt{1}} \frac{u^2}{1+u^2}du$$

avec $t = u^2 \to dt = 2udu$. Ensuite on ajoute $0 = 1-1$:

$$2\int_0^{\sqrt{1}} \frac{u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^{\sqrt{1}} \frac{1+u^2}{1+u^2}du - 2\int_0^{\sqrt{1}} \frac{1}{1+u^2}du = 2\int_0^{\sqrt{1}} du - 2[\arctan(u)]_0^{\sqrt{1}} = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{1})$$

D'où $I = 2 - 2\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$ puisque $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ vu que $1 = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \iff \cos(y) = \sin(y) \implies y = \frac{\pi}{4}$ si $y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, ensemble image d'arctan.

Autre technique, plus longue: utiliser $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ en posant $u = \tan(v) \to du = \frac{1}{\cos^2(v)}dv$. Ainsi:

$$I = 2\int_0^{\sqrt{1}} \frac{u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^{\arctan(\sqrt{1})} \frac{\tan^2(v)}{\frac{1}{\cos^2(v)}}\frac{1}{\cos^2(v)}dv = 2\int_0^{\arctan(1)} \tan^2(v)dv = 2\int_0^{\arctan(1)} \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)}dv$$

$$\begin{aligned} &= 2\int_0^{\arctan(1)} \frac{1-\cos^2(v)}{\cos^2(v)}dv = 2\int_0^{\arctan(1)} \frac{1}{\cos^2(v)}dv - 2\int_0^{\arctan(1)} \frac{\cos^2(v)}{\cos^2(v)}dv \\ &= 2[\tan(v)]_0^{\arctan(1)} - 2\arctan(1) = 2\times 1 - 2\arctan(1) = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.5 Séparation d'une fraction en plusieurs

Dans cette section, il est question de séparer des fractions avec des facteurs linéaires au dénominateur pour plus facilement les intégrer. Il existe plusieurs méthodes, nous présenterons ici une méthode moins connue, dite de la *dissimulation*, ou en anglais, la *cover-up* method. Vous pourrez trouver des méthodes utilisant des systèmes linéaires, des complexes et autres sur Internet sans peine. Cette méthode est plus efficace.

Ici, nous expliquerons la méthode via des exemples car l'expliquer en toute généralité serait peu pédagogique.

Exemples

1) Ce premier exemple est en fait le plus utile. Séparer en 2 fractions:

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15}$$

La première étape sera toujours de factoriser le dénominateur:

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 16} = \frac{1}{(x+1)^2 - 4^2} = \frac{1}{(x+5)(x-3)}$$

Ensuite, comme dans la méthode que vous connaissez probablement déjà du système linéaire, nous associons un coefficient inconnu à chaque facteur linéaire:

$$g(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+5}$$

C'est à présent que les choses deviennent intéressantes.

a. Nous isolons A et B:

$$\frac{A}{x-3} = g(x) - \frac{B}{x+5} \iff A = (x-3)g(x) - (x-3)\frac{B}{x+5}$$
$$\frac{B}{x+5} = g(x) - \frac{A}{x-3} \iff B = (x+5)g(x) - (x+5)\frac{A}{x-3}$$

b. Nous usons de limites:

Et ici arrive la seule petite difficulté conceptuelle de la méthode. Observons que dans l'équation pour A, en faisant tendre x vers 3, le terme $(x-3)\frac{B}{x+5}$ s'annule. Ainsi:

$$A = \lim_{x\to 3} A = \lim_{x\to 3} (x-3)g(x) - (x-3)\frac{B}{x+5} = \lim_{x\to 3} (x-3)g(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{8}$$

Idem pour B quand x tend vers -5:

$$B = \lim_{x\to -5} (x+5)g(x) - (x+5)\frac{A}{x-3} = \lim_{x\to -5} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{8}$$

En conclusion:

$$g(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+5}\right)$$

2) Pour un exemple du même type mais plus général ($a \neq b$):

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

Ainsi, en posant $f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$:

$$A = \lim_{x\to a} (x-a)f(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a-b}$$

$$B = \lim_{x \to b} (x-b)f(x) = \lim_{x \to b} \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a-b}$$

Il est tout à fait possible de simplement apprendre ces formules, bien que les retrouver prenne très peu de temps avec la technique présentée.

3) Un exemple avec une racine à multiplicité > 1 $(a \neq b)$:

$$h(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)^2}$$

Ici, nous poserons:

$$h(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$$

Pour calculer A, rien de nouveau:

$$A = \lim_{x \to a} (x-a)h(x) - (x-a)\frac{B}{x-b} - (x-a)\frac{C}{(x-b)^2} = \lim_{x \to a} (x-a)h(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}$$

Aussi, pour C, tout va bien:

$$C = \lim_{x \to b} (x-b)^2 h(x) - (x-b)^2 \frac{A}{x-a} - (x-b)^2 \frac{B}{x-b} = \lim_{x \to b} (x-b)^2 h(x) - (x-b)B = \lim_{x \to b} \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a-b}$$

Seulement, B pose problème. En effet, nous pourrions isoler B ainsi:

$$B = (x-b)h(x) - (x-b)\frac{A}{x-a} - \underbrace{(x-b)\frac{C}{(x-b)^2}}_{=\frac{C}{x-b}}$$

$\frac{C}{x-b}$ ne tendra pas vers 0 quand $x \to b$, mais plutôt vers ∞. Ok, pour remédier à ce problème d'infini, tentons déjà de multiplier l'équation par $(x-b)$:

$$(x-b)B = (x-b)^2 h(x) - (x-b)^2 \frac{A}{x-a} - C$$

Il nous faut à présent une opération qui puisse annuler le C à droite et qui ne garde que B à gauche. Comment annuler une constante? *En la dérivant*, dérivons alors de part et d'autre de l'équation ci-dessus. En plus, le côté gauche $B(x-b)$ a pour dérivée B:

$$B = \frac{d}{dx}\left[(x-b)B\right] = \frac{d}{dx}\left[(x-b)^2 h(x)\right] - \frac{d}{dx}(x-b)^2 \frac{A}{x-a} = \frac{d}{dx}\left[(x-b)^2 h(x)\right] - 2(x-b)\frac{A}{x-a}$$

Et enfin, pour annuler le terme dépendant de A, faisons tendre x vers b:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \to b} \frac{d}{dx}\left[(x-b)^2 h(x)\right] - 2(x-b)\frac{A}{x-a} \\ &= \lim_{x \to b} \frac{d}{dx}\left[(x-b)^2 h(x)\right] \\ &= \lim_{x \to b} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x-a}\right] \\ &= \lim_{x \to b} -\frac{1}{(x-a)^2} \\ B &= -\frac{1}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

4) Notons que pour séparer des fractions telles que $\frac{1}{x^2+1}$ ou plus généralement $\frac{1}{x^2+c^2}$, il n'y a pas de mal à écrire $\frac{1}{x^2+c^2} = \frac{1}{x^2-(ic)^2} = \frac{1}{(x-ic)-x+ic)}$ puis d'appliquer les méthodes exposées dans les 3 exemples précédents, quitte à se débarasser plus tard des i complexes si besoin.

7 Correspondances questions d'examens à questions types

Dans cette section, nous allons indiquer à quelle question type correspond chaque question des examens de 2016 à 2020, ainsi que de la série de révision 2017. Lorsque la question n'est pas une question type, nous l'indiquerons également.

7.1 Examen 2016-2017

- Question [q:common-mc01] : **Question de type 1.2**
  Trouver l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ *tels que* $z^3 = 27i$

- Question [q:common-mc02] : **Question de type 2.1.1**
  Soit la suite de nombres réels (a_n) *définie récursivement par*

  $$a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

  Exprimez a_n *en fonction de* n.

- Question [q:common-mc03] : **Question de type 2.2.1**
  Soit la suite de nombres réels (a_n) *définie par*

  $$a_n = \frac{\sqrt[4n]{5}-4}{\sqrt[5n]{4}-5}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

  Étudiez la convergence de la suite.

- Question [q:common-mc04] : **Question de type 2.2.2**
  Soit la suite de nombres réels (a_n) *définie par*

  $$a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{a_n^2}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

  Déterminer sa limite si elle existe.

- Question [q:common-mc05] : **Question de type 3.1.1**
  Déterminer si la série numérique suivante converge ou pas, et questions supplémentaires:

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- Question [q:common-mc06] : **Question de type 3.1.1**
  Etudier convergence de la série avec un paramètre $t \in \mathbb{R}$ *définie par:*

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(t\pi))^n$$

- Question [q:common-mc07] : **Question de type 3.1.5**
  Pour $p > 0$, *étudier la convergence des séries suivantes:*

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} \text{ absolument}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p(n+2)^p}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2)}{(n+1)^p}$$

- Question [q:common-mc08] : **Question de type 4.2.1**
  Calculer l'image de $[-2; 0]$ *par la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

- Question [q:common-mc09] : **Question de type 4.1.2**
  Trouver $b = \sup A$ *où* $A = \{x \in [0; 4\pi] \mid \cos(x) < 1/4\}$.

- Question [q:common-mc10] : **Question de type 5.1**
  Déterminer a *et* b *tels que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie ci-dessous soit dérivable sur* $\mathbb{R}$*:*

  $$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ bx^2 + \cos(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Question [q:common-mc11] : **Question calculatoire**
  Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. *Soit* $h = g \circ f$, *calculer* $h'(1)$.

- Question [q:common-mc12] : **Question de type 4.3.1**
  Calculer la limite suivante:
  $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{xe^{2x}}$$

- Question [q:common-mc13] : **Question de type 4.3.4**
  Cacluler la limite suivante:
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4}$$

- Question [q:common-mc14] : **Question de type 5.3.1**
  Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = e^{3x-\sin(x)}$. *Trouver le coefficient* a_2 *de son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de 0:* $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

- Question [q:common-mc15] : **Question de type 5.3.1**
  Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. *Calculer* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, *si* f *est dérivable en* $\frac{1}{2}$.

- Question [q:common-mc16] : **Question de type 6.4**
  Calculer l'intégrale suivante:
  $$\int_0^1 \frac{2x^3}{(1+x^4)^3} dx$$

- Question [q:common-mc17] : **Question de type 6.5**
  Calculer l'intégrale suivante:
  $$\int_5^7 \frac{8}{x^2 + 2x - 15} dx$$

- Question [q:common-mc18] : **Question de type 6.3**
  Calculer l'intégrale suivante:
  $$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

- Question [q:lachowska-mc01] : **Question de type 1.2**
  Déterminer le nombre de solutions pour $z \in \mathbb{C}$ *de l'équation* $z^4 - \bar{z} = 0$.

- Question [q:lachowska-mc02] : **Question de type 4.3.3**
  Calculer la limite suivante:
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + \sqrt{3x + \sqrt{5x}}}}$$

- Question [q:lachowska-mc03] : **Question de type 6.3 et 6.4**
  Calculer l'intégrale suivante:
  $$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$$

- Question [q:lachowska-mc04] : **Question de type 5.2.2**
  Etudier la fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par:*
  $$f(x) = 4(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

- Question [q:common-tf01] : **Question de définition**
  Vrai ou faux: Soient deux sous-ensembles bornés non vides A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $A \subset B$ *(et* $A \neq B$*). Alors* $\sup A < \sup B$.
  Faux, le problème est la comparaison stricte. Contre-exemple: $A =$

7.2 Examen 2017-2018

- Question [mc-q01] : **Question de type 4.1.2**
  Trouver l'infimum de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ suivant:
  $$E = \{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)\}$$
- Question [mc-q02] : **Question de type 1.1.2**
  Soit le nombre complexe $z = e^{i} + e^{\frac{i}{3}}$. Calculer $|z|$.
- Question [mc-q03] : **Question de type 5.2.2**
  Trouver le minimum et le maximum de la fonction définie ci-dessous:
  $$\begin{aligned} f : [0; 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sin(x)e^{-x} \end{aligned}$$
- Question [mc-q04] : **Question de type 2.2.1**
  Etudier la convergence de la suite (a_n) définie récursivement par $a_0 = 1$ puis $a_n = g(a_{n-1})$ pour plusieurs fonctions g données.
- Question [mc-q05] : **Question de type 2.2.5**
  Calculer si elle existe la limite de la suite suivante:
  $$a_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n+1}$$
- Question [mc-q06] : **Question non typée.**
  Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles. Déterminer la véracité de plusieurs propositions, sachant que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.
  Ici, il faudra utiliser l'unicité de la limite de suite (et donc de série aussi, qui n'est qu'une suite particulière) pour voir que $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.
- Question [mc-q07] : **Question de type 3.1.6**
  Déterminer les valeurs de c telles que la série S suivante converge:
  $$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}}$$
- Question [mc-q08] : **Question de type 4.3.4**
  Calculer la limite en 0 de $f :]-\pi; \pi[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par:
  $$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{(\sin(x))^2}$$
- Question [mc-q09] : **Question de type 4.3.2**
  Calculer la limite en 0 de $f :]-\pi; \pi[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par:
  $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
- Question [mc-q10] : **Question de type 5.2.2**
  Etudier la fonction $f :\ [-1; 3] \to [-1; 3]$ définie par:
  $$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x}$$
- Question [mc-q11] : **Question de type 5.2.1**
  Soit la fonction bijective $f :]0; \infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
  $$f(x) = 2 + \ln\left(\frac{2e + x}{x^2}\right)$$
  Soit $y_0 = f(2e)$. Calculer $(f^{-1})'(y_0)$.

- Question [mc-q12] : **Question de type 5.1**
  Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$. *Déterminer si* f *est dérivable* $0, 1, 2$ *ou* 3 *fois.*

- Question [mc-q13] : **Question de type 5.1**
  Déterminer α *et* β *tels que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *soit dérivable sur* $\mathbb{R}$*, où:*

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Question [mc-q14] : **Question de type 5.3.1**
  Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ *le DL d'ordre* 3 *autour de* 0 *de* f *définie comme ci-dessous, déterminer* a_3*.*

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

- Question [mc-q15] : **Question de type 5.3.2**
  Déterminer le rayon de convergence de la série suivante:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k$$

- Question [mc-q16] : **Question de type 6.2**
  Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x + 4x^2}} dx$$

- Question [mc-q17] : **Question de type 6.4**
  Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{1}^{e^3} \frac{\ln(x)}{x\sqrt{(\ln(x))^2 + 1}} dx$$

- Question [mc-q18] : **Question de type 6.4 et 6.5**
  Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

- Question [mc-lachowska-01] : **Question de type 6.3**
  Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{0}^{1} e^{-x} x^2 dx$$

- Question [mc-lachowska-02] : **Question de type 3.2**
  Calculer la série numérique suivante:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

- Question [mc-lachowska-03] : **Question calculatoire**
  Calculer la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:*

$$f(x) = \ln\left(2 \arctan(3 + 5x^2)\right)$$

- Question [mc-lachowska-04] : **Question de type 4.3.1**
  Déterminer, parmi les suites suivantes, celles qui convergent vers 0*:*

$$a_n = \frac{\ln(n^5)}{\ln(5^n)},\ b_n = \frac{5^n}{n \ln(n)},\ c_n = \frac{n^5}{(5n)!}$$

- Question [tf-01-sacha] : **Question de définition**
  Vrai ou faux: Soit $A \subset \mathbb{R}$ *un ensemble borné de* R *et* $c = \sup(A)$*. Alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $x \in A$ *tel que* $x + \epsilon \geq c$*.*
  Ceci correspond à la définition de supremum.

- Question [tf-07-sacha] : **Question de définition**
  Vrai ou faux: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Alors:*
  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0)$$
  Il suffit de prendre $\tilde{h} = 2h$ dans la définition de dérivée en x_0.

- Question [tf-3] : **Question non typée**
  Vrai ou faux: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels telle que la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $b_n = \cos(a_n)$ *converge. Alors* (a_n) *converge.*
  Contre-exemple: $a_n = 2\pi n$.

- Question [tf-08-sacha-bis] : **Question non typée**
  Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série numérique divergente et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*. Alors la série numérique* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*
  Contre-exemple: $a_n = n^2$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

- Question [q:vf1FAVI] : **Question de type 4.2.1**
  Vrai ou faux: Soit $f :\ [1;2] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f([1;2]) =]1;2[$*. Alors* f *n'est pas continue sur* $[1;2]$*.*
  Vrai, c'est la contraposée du TVI puisque $]1;2[$ est un intervalle ouvert.

- Question [q:vf5FAVI] : **Question de type 4.3.1**
  Vrai ou faux: Soit $f :\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ *est prolongeable par continuité en* 0*.*

- Question [tf-1] : **Question non typée**
  Vrai ou faux: Soient $f, g :\ [a;b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $[a;b]$ *et dérivables sur* $]a;b[$ *telles que* $f'(x) \leq g'(x)$ *pour tout* $x \in]a;b[$*. Alors* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in]a;b]$*.*
  Faux, contre-exemple avec les fonctions constantes suivantes: $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, ou encore avec $f(x) = 10$ et $g(x) = x^2$ sur $[0;1]$.

- Question [tf-7] : **Question de définition**
  Vrai ou faux: Soient $A \subset \mathbb{R}$ *et* $B \subset \mathbb{R}$ *deux sous-ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *tels que* $A \cap B \neq \phi$*. Alors* $\inf A \leq \inf A \cap B$*.*
  Vrai, il suffira d'écrire les définitions d'inf A et d'inf $A \cap B$.

- Question [tf-8] : **Question de type 4.3.4**
  Vrai ou faux: Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ *une fonction admettant autour de* $x = 0$ *un développement limité* $f(x) = x - 2x^3 + x^3\epsilon(x)$ *où* $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$*. Alors:*
  $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0$$

- Question [q:vf7FAVI] : **Question de type 6.1**
  Vrai ou faux: L'intégrale suivante vaut 0*:*
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13}) dx$$
  Notons que $\sin(x^{13})$ est impaire car c'est la composée de 2 fonctions impaires.

7.3 Examen 2018-2019

- Question [QCM-complexes-B] : **Question de type 1.2**
  Trouver S *l'ensemble l'ensemble des solutions de l'équation complexe* $\bar{z}^2 = z^2$*.*

- Question [QCM-contin-deriv-C1-B] : **Question de type 5.1**
Etudier la continuité / dérivabilité en plusieurs points de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x|\cos(x)|$.

- Question [QCM-contin-vs-derivab-B] : **Question de type 5.1**
Etudier la continuité / dérivabilité en 0 *de la fonction suivante:*

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} |x|^p \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Question [QCM-dev-limite-A] : **Question de type 5.3.1**
Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 4 *autour de* 0 *de:*

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}$$

- Question [QCM-induction-A-2] : **Question non typée**
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et, pour* $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$. *Alors:*

  ☐ $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$
  ☐ $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
  ☐ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

  La dernière proposition est fausse car $u_0 = 0 < \frac{1}{2}$, ainsi la proposition $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ est fausse pour $n = 0$. $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas décroissante car $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$, ainsi la troisième proposition est fausse. Vérifions si la limite de u_n peut être $\frac{1}{2}$ par unicité de la limite de suite, en posant l'équation de la limite u:

$$u = \frac{1+2u}{2+u} \iff 2u + u^2 = 1 + 2u \iff u^2 = 1 \implies u = \pm 1 \neq \frac{1}{2}$$

  Ainsi, soit (u_n) diverge, soit (u_n) converge vers $u = \pm 1 \neq \frac{1}{2}$. Dans les deux cas, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq \frac{1}{2}$, la seconde proposition tombe et il ne reste que la première.

- Question [QCM-inf-sup-E] : **Question de type 4.1.2**
Trouver l'infimum et le supremum de l'ensemble A *suivant:*

$$A = \left\{ x > 0 \mid \cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \right\}$$

- Question [QCM-int-generalisee-A] : **Question de type 6.1**
Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

- Question [QCM-integrale-first-A] : **Question de type 6.2**
Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

- Question [QCM-integrale-second-A] : **Question de type 6.4**
Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

- Question [QCM-limite-prolongmt-B] : **Question de type 4.3.1 et 4.3.2**
Etudiez la continuité de f *suivant la valeur de* m *pour* f *définie comme suit:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+2x^2)} & \text{si } x < 0 \\ m & \text{si } x = 0 \\ \frac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Question [QCM-limsup-liminf-B] : **Question non typée**
  Calculer la $\liminf$ *et la* $\limsup$ *de la suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *définie par:*

$$x_n = \begin{cases} \sqrt[n]{7} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^7} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

  Ici il suffit de comprendre intuitivement les définitions de lim inf et lim sup comme points d'accumulation resp. inférieur et supérieur de la suite. Formellement, un point d'accumulation de (x_n) est une limite d'une sous-suite de (x_n). La suite (x_n) donnée ici a 2 points d'accumulation: $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{7} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^7} = 0$.

- Question [QCM-propriete-fonction-A] : **Question de type 5.2.2**
  Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:*

$$f(x) = e^{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}$$

- Question [QCM-serie-B] : **Question de type 3.1.6**
  Déterminer la série qui converge parmi les séries suivantes, où $\lambda = -\frac{1}{6}$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$$

- Question [QCM-serie-entiere-A] : **Question de type 5.3.1**
  Calculer la série de Taylor autour de $x = 2$ *de* $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par:*

$$f(x) = \frac{4}{2+3x}$$

- Question [QCM-serie-parametre-B] : **Question de type 3.1.5**
  Etudier la valeur minimale de s *pour laquelle la série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, où:*

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^s} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^{2s}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

- Question [QCM-suites-convergence-A] : **Question de type 2.2.5**
  Calculer si elle existe la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ *suivante:*

$$x_n = \frac{2^{2n}}{(7n)!}$$

- Question [QCM-suites-recurrence-B] : **Question de type 2.2.1**
  Calculer la limite, si elle existe, de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $a_0 = \frac{3}{2}$ *puis:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$$

- Question [QCM-theo-accr-finis-B] : **Question de type 4.2.2**
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x^2+4x-1$. *Pour* $x \neq y,\ x, y \in \,]-3; 2[$, *borner le taux d'accroissement:*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

  C'est l'une des questions qui a posé le plus de soucis ces dernières années en examen d'analyse 1.

- Question [TF-complexes-C] : **Question non typée**
  Vrai ou faux: Soit $z \neq 0$ *un nombre complexe d'argument* $\frac{\pi}{4}$, *alors l'argument de* $\frac{1}{z^2}$ *vaut* $-\frac{\pi}{2}$. On a $z = re^{i\phi}$ avec $\phi = \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2 e^{2i\phi}} = \frac{1}{r^2} e^{-2i\phi}$ où $-2\phi = -\frac{\pi}{2}$.

- Question [TF-derivabilite-discussion-B] : **Question de type 5.2.2**
Vrai ou faux: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que l'équation $f'(x) = 0$ possède exactement une solution. Alors l'équation $f(x) = 1$ possède au plus deux solutions réelles distinctes.
$f'(x) = 0$ possède au plus une solution $\implies$ au plus un extremum local $\implies$ f change de monotonie au plus une fois. Ainsi, si f passe par 1 une fois, elle changera au maximum de monotonie une fois plus tard, en repassant potentiellement par 1 au maximum une fois de plus.

- Question [TF-dev-limite-B] : **Question de définition**
Vrai ou faux: Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5 dont le développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est donné par $f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$. Voici la définition du développement limité d'ordre 4 de f en 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)(0)}}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Ainsi, en faisant correspondre les coefficients des polynômes, nous trouvons le résultat.

- Question [TF-fonction-etc-B] : **Question non typée**
Vrai ou faux: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors f est strictement monotone.
Voir le contre-exemple 8.1.5.

- Question [TF-induction-suites-limites-A] : **Question non typée**
Vrai ou faux: Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Remarquons que: $x_1 = 2 - \frac{1}{1}$, $x_2 = 2 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $x_3 = 2 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, etc., ainsi $x_n = 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$: $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge vu qu'elle contient la série harmonique.

- Question [TF-inf-sup-B] : **Question de définition**
Vrai ou faux: Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ majorant de } A\}$. Alors $\inf B \in B$.
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x \geq a \text{ pour tout } a \in A}_{P(x)}\}$ est l'ensemble des majorants de A. Ainsi, l'infimum de B est, par définition, l'infimum de l'ensemble des majorants de A, ce qui correspond au $\sup A$: $\sup A = \inf B$. Or, $\sup A \geq a$ pour tout $a \in A$, ainsi la propriété $P(\sup A)$ est vérifiée, donc $\inf B = \sup A \in B$.

- Question [TF-integrale-B] : **Question non typée**
Vrai ou faux: La fonction $g : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^{|x|} 1\, dt$ est dérivable en $x = 0$.
Il suffit de simplement calculer l'intégrale de la fonction constante 1 entre 0 et $|x|$: $g(x) = |x| - 0 = |x|$, qui n'est pas dérivable en 0. Notons que la fonction suivante est dérivable en 0 par théorème fondamental de l'analyse: $f(x) = \int_0^x |t|dt$.

- Question [TF-limites-continuite-A] : **Question de type 4.2.1**
Vrai ou faux: Soit $f : [-2;20] \to [0;1]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.
On pose $g(x) = f(x) - x$, ainsi on cherche x tel que $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0$. Ainsi, $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in [0;1]$, donc $g(0) = f(0) \geq 0$. Puis: $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ puisque $f(1) \in [0;1]$, donc $f(1) - 1 \in [-1;0]$. Ainsi, il existe $x_0 = 0$ tel que $g(x_0) \geq 0$ et $x_1 = 1$ tel que $g(x_1) \leq 0$, donc par le TVI il existe x_2 tel que $g(x_2) \in [g(x_0); g(x_1)]$.

- Question [TF-serie-AA] : **Question de type 3.1.5**
Vrai ou faux: La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge. Il faut se rappeler que $\sin(x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

- Question [TF-serie-entiere-B] : **Question non typée**
Vrai ou faux: La série entière $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Une série convergente qui commence à $n = 0$ converge à partir de tout $n = m$:

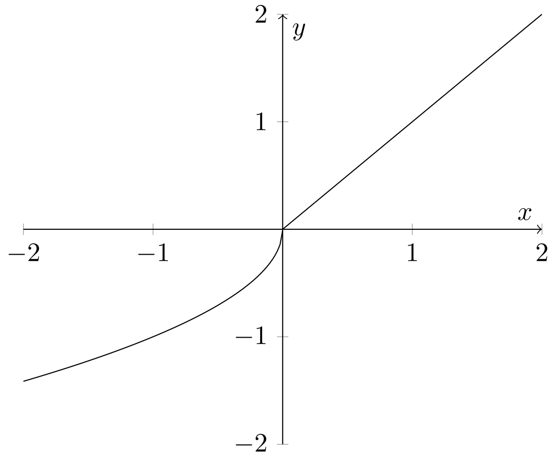
$$\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{<\infty} - \underbrace{\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}}_{<\infty} < \infty$$

8 Contre-exemples utiles pour les V/F

8.1 Fonctions pas cool

8.1.1 Fonction bijective, continue, strictement croissante non différentiable en 0

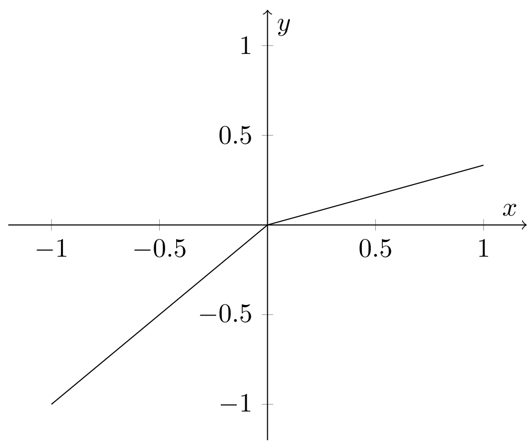
$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x \mapsto f(x) &= \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$



La dérivée de f tend vers l'infini en $0-$. Notons aussi que cette fonction est bijective de $[-1;1]$ dans $[-1;1]$, ainsi que de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais pas de, par exemple, $[-2;2]$ dans $[-2:2]$, ni dans $\mathbb{R}$. En effet, il est faux qu'une fonction bijective de A vers B est bijective de tout sous-ensemble de A vers tout sous-ensemble de B, cette fonction est un contre-exemple de ce faux résultat.
Remarquons aussi que $\int_{-1}^{1} f(t)dt \neq 0$ malgré $f(0) = 0$ et f bijective sur $[-1;1]$ dans $[-1;1]$.

8.1.2 Fonction continue et strictement monotone non bijective (car non surjective)

$$
\begin{aligned}
f : [-1;1] &\to [-1;1] \\
x \mapsto f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$



Par stricte monotonie, f est injective mais elle n'est pas surjective: par exemple, $\frac{1}{2}$ n'admet pas de préimage par f. Elle n'est donc pas bijective.

8.1.3 Fonction continue en exactement deux points

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

f est continue en 0 et 1.

8.1.4 Fonction à dérivée nulle en 0 sans extremum local en 0

Facile celle-ci:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 \end{aligned}$$

$f'(x) = 3x^2 \implies f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local de f.

8.1.5 Fonction bijective non strictement monotone

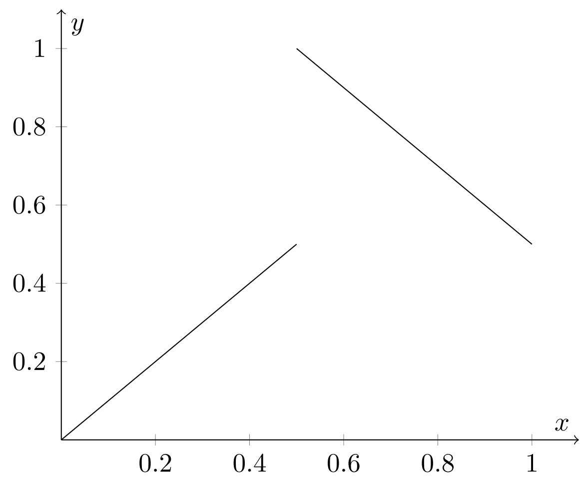
Contre-exemple sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bien que f soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ séparément, elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: $0 > -1$ et $f(0) = 0 \geq f(-1) = -1$.

Contre-exemple sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} f : [0; 1] &\to [0; 1] \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -x + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



f est surjective:
Soit $y < \frac{1}{2}$, alors $f(y) = y$. Aussi, soit $y \geq \frac{1}{2}$, alors $f\left(\frac{3}{2} - y\right) = y$.

f est injective:
Soient $x \neq y$. Si $x < \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$, $f(x) < \frac{1}{2}$ et $f(y) \geq \frac{1}{2}$ ainsi $f(x) \neq f(y)$. Si $x, y < \frac{1}{2}$, $f(x) = x \neq y = f(y)$, idem si $x, y \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi f est bijective.

8.2 Suites et séries pas cool

8.2.1 La suite fondamentale

Elle sert de contre-exemple à tant de propositions:

$$u_n = (-1)^n$$

8.2.2 Série telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mais pas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Considérons $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, dont la série converge. Ainsi, la série des $(-1)^n a_n$ est:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Remarquons qu'ici (a_n) **n'est pas une suite de termes positifs**. Si c'était le cas, nous aurions alors que $|(-1)^n a_n| = a_n$, ainsi la série des $((-1)^n a_n)$ converge absolument et converge donc.

9 Annexe: Trigonométrie

Cette section contient toute la trigonométrie qu'il faut et suffit de connaître pour l'examen d'analyse I.

9.1 Formules élémentaires

Des formules très visuelles: représentons-nous le cercle unité, avec un point M d'abscisse curviligne x. Nous verrons que pour cos:

$$\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x)$$

Puis pour sin:

$$\sin(x) = -\sin(-x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$$

Enfin:

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

9.2 Valeurs importantes de cos et sin

Voici une technique permettant de les retrouver rapidement. Il suffit de mémoriser les valeurs d'angles aigus à connaître, dans l'ordre **décroissant**: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 0$. Remplissons alors la première ligne d'un tableau:

Valeurs	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Numérotons les cases de gauche à droite **en commençant par 0**:

Valeurs	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
Numéros	0	1	2	3	4

Ensuite, appliquons la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{2}$ sur chaque numéro de la seconde ligne:

Valeurs	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
cos	$\sqrt{0}/2 = 0$	$\sqrt{1}/2 = 1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$

Magie magie, on trouve toutes les valeurs de cos! Pour trouver celles de sin: réécrivons les valeurs obtenues en inversant l'ordre. Ceci se justifie par $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$:

Valeurs	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
cos	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
sin	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Il est ainsi possible d'obtenir les valeurs de tan pour ces valeurs, ainsi qu'arctan, arccos, arcsin.

9.3 Autres formules essentielles

9.3.1 Formules d'addition, soustraction, double angle, tangente, Euler

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), \ \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

En particulier quand $y = x$, les formules d'angle double:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Notons aussi qu'en divisant $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ par $\cos^2(x)$, nous obtenons une formule pratique notamment en intégration pour se débarasser de $\sqrt{1 + y^2}$ au dénominateur:

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan'(x)$$

Les résultats d'addition et soustraction découlent des formules d'Euler:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

9.3.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Cette sous-section contient des résultats pratiques en intégration. En utilisant $\cos^2(y)+\sin^2(y) = 1$ pour $y = \arccos(x)$ et $y = \arcsin(x)$, nous obtenons successivement:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Nous pouvons également:

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

En ce qui concerne les dérivées de fonctions réciproques. En utilisant $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, nous trouvons:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

9.4 Fonctions hyperboliques

cosh et sinh sont définies respectivement comme les parties paire et impaire de e^x:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ainsi:

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

D'autre part, la relation suivante tient:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Enfin, concernant les dérivées:

$$\cosh'(x) = \sinh(x),\ \sinh'(x) = \cosh(x)$$

9.5 Encore quelques formules utiles

Des formules moins systématiquement utiles mais qui aident assez souvent pour qu'elles figurent ici, notamment dans le calcul de limites et en intégration.
D'abord, une observation:

$$\sin^3(x) = (1-\cos^2(x))\sin(x),\ \cos^3(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x)$$

Il existe des formes explicites pour argsinh et argcosh qui permettent d'exprimer leurs dérivées:

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Et enfin, très objectivement la plus stylée:

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

La technique pour montrer ce résultat est généralisable et utile pour la suite: il suffit d'ajouter 0 dans chaque cos puis de développer avec $\cos(x \pm y)$:

$$\cos(a) - \cos(b) = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$$