15.3.19

Série 14

1. Mettre sous la forme $a + ib$:

(a) $(4-i)+(2+3i)(1-i)$; (c) i^n n entier ;

(b) $\dfrac{1}{3-2i}$; (d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

2. Résoudre :

(a) $z^2 + 2(1+i)z - \dfrac{5}{1+2i} = 0$

en complétant le membre de gauche pour former un carré parfait ;

(b) $z^3 + 9z - 10 = 0.$

3. Montrer que :

(a) Si $z = x + iy \in \mathbb{C},\ (y \neq 0)$, il existe deux nombres réels T et N tels que :

$$z^2 - Tz + N = 0$$

- Donner une interprétation de ces nombres.
- Résoudre cette équation en prenant les valeurs de $T = 1$ et $N = 2$;

(b) $|z| < 1$ implique $\left|(1-i)z^3 - iz\right| < \dfrac{5}{2}$.

4. On considère l'équation : $|z|^2 = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1-z}\right), \quad b \in \mathbb{R}^+$

Déterminer b pour que cette équation ne possède qu'une solution $(\neq 0)$;

Quelle est cette solution ?

5. Résoudre l'équation suivante : $\mathrm{Arth}x + \mathrm{Arth}2x = \mathrm{Arth}\dfrac{2}{3}$

6. Soient $f(x) = -\mathrm{Arsh}(\tan x)$ et $g(x) = 2\ln\left(2\sqrt{\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|}\right)$ où $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

(a) Montrer que ces deux fonctions ne diffèrent que d'une constante ;

(b) Déterminer la valeur de celle-ci.

Solutions

S1 (a) $a = 9, \quad b = 0$

(b) $a = \frac{3}{13}, \quad b = \frac{2}{13}$

(c) $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i \quad k \in \mathbb{N}$

(d) $a = 2, \quad b = 0$

S2 (a) $z = -i$ ou$z = -2 - i$

(b) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$

S3 $T = 2\mathrm{Re}z, \quad N = |z|^2$

S4 $b = 1, \quad z = \frac{1}{2} - i$

S5 $x = \frac{1}{4}$

S6 $c = -\ln(4)$