29.3.19

Corrigé de la Série 16

1. (a) (i) $\overline{z}(z-3) < 6\text{Re}(z) + 3z + 5$; on pose $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$:

$$x^2 + y^2 < 12x + 5 \;\Leftrightarrow\; (x-6)^2 + y^2 < 41$$

Attention : la relation d'ordre $<$ n'existe pas dans les complexes ; elle n'a de sens ici que dans la mesure où $3(z+\overline{z})$ représente un réel !

(ii) $|z-i| = |z+4+7i| \;\Leftrightarrow\; |z-i|^2 = |z+4+7i|^2 \;\Leftrightarrow\; (z-i)(\overline{z-i}) = (z+4+7i)(\overline{z+4+7i}) \;\Leftrightarrow\; x^2+(y-1)^2 = (x+4)^2+(y+7)^2 \;\Leftrightarrow\; x+2y+8 = 0\,.$

(b) Il s'agit de faire tourner le point P_2 autour de P_1, donc on effectue une multiplication par un complexe a de module 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ en prenant l'origine en P_1.

$$z_3 - z_1 = a(z_2-z_1) = 1(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}))(z_2-z_1) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8+3i-2+3i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6+6i) = 3(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})) \;\Rightarrow\; z_3 = 5 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i \;\Rightarrow$$

$$P_3 = (5-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$$

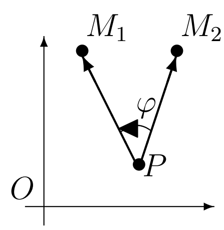
.

2. (a) Pour faire "tourner" un nombre, on va le multiplier par un complexe unitaire d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le nombre $-i$:

$$z' = z(-i) = (5-i)(-i) = -1-5i$$

(b)

Il s'agit de faire tourner le point M_1 autour de P, donc on effectue une multiplication par un complexe a de module 1 et d'angle φ en prenant l'origine en P. Affixe de P : z_0 ; affixe de M_1 : z_1 ; affixe de M_2 : z_2



$$z_2 - z_0 = a(z_1-z_0) = 1(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))(z_1-z_0) = \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)(6+5i-2-3i)$$

$$\left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)(4+2i) = 4-2i \;\Rightarrow\; z_2 = 4-2i+2+3i = 6+i \;\Rightarrow\; M_2(6,1)$$

(c) Il s'agit d'une similitude affine du plan ; le rapport d'homothétie est donné par:

$$k = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} \text{ et on a : } \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ d'où } k = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\ ;$$

l'angle de rotation vaut $-\dfrac{\pi}{4}$.

On va faire la transformation (similitude linéaire) en prenant le point A pour origine :

$$z_P - z_A = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right](z_B - z_A)$$

$$z_P = (1-i)z_B + iz_A \;\Rightarrow\; z_P = (1-i)(4+3i) + i(2+2i) = 5+i.$$

3. $\omega^3 = i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (forme trigo.) $\Rightarrow \omega_k = \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right]$ $\quad k = 0, 1, 2$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) & = & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) & = & -i\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

Il faut donc résoudre les trois équations suivantes :

$$z^2 - (\sqrt{3}+i)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6} = \omega_k \qquad k = 0, 1, 2$$

(a) i $k = 0$: $\quad z^2 - (\sqrt{3}+i)z = 0$

Les solutions sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_2 = \sqrt{3} + i \end{array} \right.$$

(b) $k = 1$: $\quad z^2 - (\sqrt{3}+i)z + 1 = 0$

$\Delta = (\sqrt{3}+i)^2 - 4 = -2 + 2\sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - y^2 & = -2 \\ 2xy & = 2\sqrt{3} \end{array} \right.$

En introduisant la première équation dans la deuxième, nous obtenons :
$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$; la seule solution possible est :
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$ et $y = \pm\sqrt{3}$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} z_3 = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i) \\ \\ z_4 = \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}-1) + (1-\sqrt{3})i\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(1-i) \end{cases}$$

(c) $k = 2$: $\quad z^2 - (\sqrt{3}+i)z + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = 0 \qquad \Delta = (\sqrt{3}+i)^2 - 2(1+i\sqrt{3}) = 0$

Les solutions sont :

$$z_5 = z_6 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

4. (a) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

On va multiplier cette équation par $(z-1)$

$$(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)(z-1) = 0 \;\Rightarrow\; (z^7 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; z^7 = 1$$

C'est le problème bien connu de la racine n^{ième} de l'unité :

$z_k = \left[1; \dfrac{2k\pi}{7}\right]$, $\quad k = 0, \ldots, 6$: on retranche le cas $k = 0$ qui représente $z = 1$, la racine que nous avons astucieusement ajoutée.

Ainsi les solutions s'écrivent :

$$z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{7}\right], \quad k = 1, \ldots, 6\,;$$

(b) $(1+i)z^4 = (1-i)\overline{z}^2 \Leftrightarrow \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right] \times \left[r^4; 4\varphi\right] = \left[\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right] \times \left[r^2; -2\varphi\right] \Leftrightarrow$

$$\left[\sqrt{2}\cdot r^4; \frac{\pi}{4} + 4\varphi\right] = \left[\sqrt{2}\cdot r^2; -\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cdot r^4 = \sqrt{2}\cdot r^2 \\ \frac{\pi}{4} + 4\varphi = -\frac{\pi}{4} - 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$r = 0$ ou $r^2 = 1$ et $6\varphi = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow r = 0$ ou $r = 1$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$, $\quad k = 0, \ldots, 5$;

solutions : $\begin{cases} z = 0 \\ z_k = \left[1; -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right] \quad k = 0, \dots, 5 \end{cases}$

(c) On va résoudre dans les nombres complexes, l'équation $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$, où i est l'unité imaginaire et donner les solutions sous la forme $a + bi$ (avec a et b réels).

$$z^6+2iz^3-1 = 0 \Leftrightarrow \left(z^3 + i\right)^2 = 0 \Rightarrow z^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_{0,1,2} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

5. (a) Pour résoudre $z^3 - 3z^2 + 3z - i = 0$, on essaie de créer un cube parfait :

l'équation s'écrit $(z-1)^3 = i - 1 = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ d'où :

$$z = [1; 0] + \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right] \quad ; \quad z_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i \ ;$$

(b) Comme il s'agit d'une équation du 3ème degré, on utiliser un cube parfait :

$$z^3 + 3iz^2 - 3z = 1 + i \Leftrightarrow z^3 + 3iz^2 - 3z - i = 1 \Leftrightarrow (z + i)^3 = 1$$

On est ramené Ã la recherche de la racine de l'unité de $\omega^3 = 1$ avec :

$$\omega_k = \left[1; k\frac{2\pi}{3}\right] \quad k = 0, 1, 2 \quad \Leftrightarrow \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

On a donc : $\quad z = \omega - i \qquad \Rightarrow$

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i\,.$$