Correction

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique - XYZ
26 Juin 2019
de 12h15 à 14h30

1

Lennon John

SCIPER : **XXXXX1**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 18 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Soit A la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

- [ ] A est inversible.
- [x] $A\vec{1} = \vec{0}$ (ici, $\vec{1}$ est le vecteur de composantes 1).
- [x] $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$.
- [ ] A est symétrique définie positive.

Correction

On considère le système différentiel suivant:

Trouver $u_1 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_1(t) \end{array}$ et $u_2 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_2(t) \end{array}$ tels que

$$\begin{aligned} &u_1'(t) = -(u_2(t))^2 u_1(t), \quad t > 0, \\ &u_2'(t) = -(u_1(t))^2 u_2(t), \quad t > 0, \\ &u_1(0) = 1, \; u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Question 2 : On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\Big) + 2(u_1(t))^2(u_2(t))^2 = 0, \qquad \forall t > 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 3 : On a

$$(u_1(1))^2 + (u_2(1))^2 \leq (u_1(0))^2 + (u_2(0))^2.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 4 : Soit $h > 0$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue à l'aide du schéma d'Euler rétrograde. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, étant donné u_1^n et u_2^n, il s'agit de trouver u_1^{n+1} et u_2^{n+1} tels que

$$\begin{aligned} f_1(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0, \\ f_2(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

où $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ par

- ☐ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(u_2^n)^2 u_1^n, \; f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(u_1^n)^2 u_2^n$
- ■ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(x_2)^2 x_1, \; f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(x_1)^2 x_2$
- ☐ $f_1(x_1, x_2) = u_1^{n+1} - u_1^n + h(u_2^{n+1})^2 u_1^{n+1}, \; f_2(x_1, x_2) = u_2^{n+1} - u_2^n + h(u_1^{n+1})^2 u_2^{n+1}$

Question 5 : On effectue un pas de la méthode de Newton pour approcher u_1^1 et u_2^1 à partir de u_1^0 et u_2^0. On note x_1^1 et x_2^1 les approximations de u_1^1 et u_2^1 ainsi obtenues. Le système linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix},$$

où a et b sont donnés par

- ☐ $a = 1 - h, \; b = -h$
- ■ $a = 1 + h, \; b = 2h$
- ☐ $a = 1 - 2h, \; b = -2$
- ☐ $a = 1 + 2h, \; b = h$

Correction

On considère le problème suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin(\pi x), && 0 < x < 1, \\ &u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0,1,\dots,N+1$. Soit M un entier positif et $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\dots,M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i,t_n)$, $n = 0,1,\dots,M$, $i = 1,\dots,N$. On considère une méthode de différences finies pour calculer les valeurs u_i^n. On approche

- $\partial u/\partial t(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies rétrograde,
- $\partial^2 u/\partial x^2(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies centrée.

A chaque pas de temps il s'agit de résoudre le système linéaire $A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ où on a noté $\vec{u}^n$ le vecteur de composantes u_i^n, $i = 1,\dots,N$. Le programme matlab / octave `exam1.m` correspond à cette méthode. A partir de N, M, τ, il permet de calculer u_i^M, $i = 1,\dots,N$. Le programme est incomplet.

Question 6 : A la ligne `b(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `sin(pi*i*h)`
- ☐ `tau*sin(pi*i*h)`
- ☐ `0`
- ☐ `tau / (h*h) * sin(pi*i*h)`

Question 7 : A la ligne `a(i) = 1 + ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `tau`
- ☐ `tau / (h*h)`
- ■ `2 * tau / (h*h)`
- ☐ `2 * tau`

Question 8 : A la ligne `d(i) = - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `2 * tau`
- ☐ `tau`
- ■ `tau / (h*h)`
- ☐ `2* tau / (h*h)`

Question 9 : A la ligne `a(i) = a(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `b(i-1) * d(i-1)`
- ■ `c(i-1) * d(i-1)`
- ☐ `b(i-1) * c(i-1)`

Question 10 : A la ligne `c(i) = c(i)/???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `a(i)`
- ☐ `d(i)`
- ☐ `b(i)`

Question 11 : A la ligne `b(i+1) = (b(i+1) - ???)/a(i+1);`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `c(i) * b(i)`
- ☐ `d(i) * c(i)`
- ■ `d(i) * b(i)`

Question 12 : A la ligne `b(i) = b(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `c(i) * d(i)`
- ■ `c(i) * b(i+1)`
- ☐ `d(i) * b(i+1)`

Question 13 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,10,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.032035e-02
>> exam1(19,40,0.0025);
 erreur maximum au temps final  5.238880e-03
>> exam1(39,160,0.000625);
 erreur maximum au temps final  1.320115e-03
>> exam1(79,640,0.00015625);
 erreur maximum au temps final  3.306863e-04
```

On en déduit

- ■ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$
- ☐ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$

Question 14 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.755597e-41
>> exam1(9,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  3.826546e-297
>> exam1(9,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(19,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.580696e-41
>> exam1(19,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  1.795569e-298
>> exam1(19,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(39,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.374616e-41
>> exam1(39,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  8.349512e-299
>> exam1(39,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
```

On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$
- ■ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$

Correction

Fichier exam1.m:

```
function [b]=exam1(N,M,tau)
%
%  Schema d'Euler retrograde pour le probleme de la chaleur.
%  A chaque pas de temps, il faut resoudre le systeme lineaire A u^{n+1} = b
%  ou u^{n+1} est le vecteur qui contient les approximations de u(x_i,t^{n+1}).
%
%  parametres
%
%  N         : nombre d'inconnues du systeme lineaire
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  b         : N-vecteur, a chaque pas de temps,
%              b est le second membre du systeme lineaire A u^{n+1} = b,
%              puis la solution du systeme lineaire u^{n+1}.
%  h         : pas d'espace
%  t         : temps courant
%  a         : N-vecteur, diagonale de la matrice A,
%              puis diagonale de L tq  A=LU
%  c         : (N-1)-vecteur, sur-diagonale de la matrice A,
%              puis sur-diagonale de U tq  A=LU
%  d         : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de la matrice A,
%              puis sous-diagonale de L tq  A=LU
%

h=1/(N+1);
t=0;
%
% condition initiale
%
for i=1:N
  b(i)=???;
end
%
% remplissage de la matrice  A
%
for i=1:N
  a(i) = 1+???;
end
for i=1:N-1
  d(i) =-???;
end
for i=1:N-1
  c(i) = -???;
end
%
% decomposition A = LU
%
c(1)=c(1)/???;
for i=2:N-1
  a(i) = a(i)-???;
  c(i) = c(i)/???;
end
```

Correction

```
a(N) = a(N)-???;
%
% schema d'Euler retrograde
%
for n=1:M
  t=t+tau;
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b
%
  b(1)=b(1)/???;
  for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
  end
%
% resolution du systeme lineaire U x = y
%
  for i=N-1:-1:1
    b(i) = b(i)-???;
  end
end
err = 0;
for(i=1:N)
    erri = abs(b(i)-exp(-pi*pi*t)*sin(i*h*pi));
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Problème de transport On considère le problème de transport suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, && 0 < x < 1, t > 0, \\ &u(x,0) = 10(1-x)^3, && 0 < x < 1, \\ &u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Question 15 : La solution du problème est donnée par $u(x,t)$

- [ ] $= 10(1-x+t)^3$
- [ ] $= 10(1-x-t)^3$
- [ ] $= \begin{cases} 10(1-x+t)^3 & \text{si } x-t<1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- [x] $= \begin{cases} 10(1-x-t)^3 & \text{si } x+t<1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, M le nombre de pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots,M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i,t_n)$ obtenue

- en utilisant une formule de différence finie progressive pour approcher $\frac{\partial u}{\partial t}$,
- en utilisant une formule de différence finie décentrée pour approcher $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Le fichier matlab / octave `exam2.m` implémente ce schéma. Ce fichier est incomplet.

Question 16 : A la ligne `unew(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i+1)`
- [ ] `uold(i) + tau/(2*h) * (uold(i+1) - uold(i-1))`
- [ ] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i-1)`

Question 17 : Le fichier donne les résultats suivants

```
>> exam2(9,5,0.09)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  6.435000e-02
>> exam2(19,10,0.045)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  3.465000e-02
>> exam2(39,20,0.0225)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  1.794375e-02
>> exam2(79,40,0.01125)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  9.126562e-03
```

On en déduit que, si $\tau \leq h$, alors:

- [ ] Le schéma est stable
- [ ] Le schéma est instable
- [x] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h+\tau)$
- [ ] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2+\tau)$

Question 18 : Soit $1 \leq n \leq M$ fixé. Si $\tau \leq h$ on peut montrer que

- ■ $\max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^n|$
- ■ Si tous les $u_i^n \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots N+1$, alors tous les $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$
- □ $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^n|$

Correction

Fichier `exam2.m`:

```
function exam2(N,M,tau)
    %
    %  Schema d'Euler progressif pour le probleme de transport du/dt-du/dx=0
    %
    %  indications :
    %
    %  uold     : N-vecteur, uold(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
    %  unew     : N-vecteur, unew(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
    %
    %  definitions preliminaires
    %
    h=1/(N+1);       % pas d'espace
    t=0.;            % temps initial
    %
    % condition initiale
    %
    for i=1:N
      uold(i)=10*(1-i*h)^3;
    end
    %
    % schema progressif decentre
    %
    for n=1:M
      t=t+tau;
      unew(N)= ???;
      for i=N-1:-1:1
        unew(i)= ???;
      end
    %
      for i=1:N
        uold(i)=unew(i);
      end
    end
    %
    % imprimer l'erreur maximum au temps final
    %
    err = 0;
    for i=1:N
      if (???<1)
        uex(i)=???;
      else
        uex(i)=???;
      endif
      erri = abs(unew(i)-uex(i));
      if (erri>err)
        err = erri;
      end
    end
    fprintf(' erreur maximum au temps %e :  %e \n',t,err)
```

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : [x_0, x_0 + 2] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$. Montrer que pour tout $0 < h \leq 1$ on a

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} \right| \leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0+2} |f'''(x)|.$$

Correction

CORRECTION

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ donnée. On veut approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide de la formule du rectangle. Soit N un entier positif, on subdivise l'intervalle $[0,1]$ en N sous-intervalles $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t.$

Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on approche $\int_{-1}^1 g(t)\ \mathrm{d}t$ par $2g(0)$. On obtient ainsi l'approximation $L_N(f)$ de $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t - 2f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

(c) Pour tout $i = 0, 1, \ldots, N-1$ et pour tout $-1 < t < 1$ on a

$$f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N}f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \ r_i(t).$$

Expliciter $r_i(t)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} r_i(t)\ \mathrm{d}t.$

(e) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f)\right| \le \frac{1}{8N^2}\max_{0\le t\le 1}|f''(t)|.$

Correction

Correction

Correction

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique - XYZ
26 Juin 2019
de 12h15 à 14h30

2

McCartney Paul

SCIPER : **XXXXX2**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 18 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le système différentiel suivant:

$$\text{Trouver} \quad \begin{array}{rcl} u_1 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_1(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} u_2 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_2(t) \end{array} \quad \text{tels que}$$

$$\begin{aligned} &u_1'(t) = -(u_2(t))^2 u_1(t), \quad t > 0, \\ &u_2'(t) = -(u_1(t))^2 u_2(t), \quad t > 0, \\ &u_1(0) = 1, \; u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Question 1 : On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\Big) + 2(u_1(t))^2(u_2(t))^2 = 0, \qquad \forall t > 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 2 : On a

$$(u_1(1))^2 + (u_2(1))^2 \leq (u_1(0))^2 + (u_2(0))^2.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 3 : Soit $h > 0$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue à l'aide du schéma d'Euler rétrograde. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, étant donné u_1^n et u_2^n, il s'agit de trouver u_1^{n+1} et u_2^{n+1} tels que

$$\begin{aligned} f_1(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0, \\ f_2(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

où $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ par

- ☐ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(u_2^n)^2 u_1^n, \; f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(u_1^n)^2 u_2^n$
- ☐ $f_1(x_1, x_2) = u_1^{n+1} - u_1^n + h(u_2^{n+1})^2 u_1^{n+1}, \; f_2(x_1, x_2) = u_2^{n+1} - u_2^n + h(u_1^{n+1})^2 u_2^{n+1}$
- ■ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(x_2)^2 x_1, \; f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(x_1)^2 x_2$

Question 4 : On effectue un pas de la méthode de Newton pour approcher u_1^1 et u_2^1 à partir de u_1^0 et u_2^0. On note x_1^1 et x_2^1 les approximations de u_1^1 et u_2^1 ainsi obtenues. Le système linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix},$$

où a et b sont donnés par

- ☐ $a = 1 - 2h, \; b = -2$
- ☐ $a = 1 + 2h, \; b = h$
- ☐ $a = 1 - h, \; b = -h$
- ■ $a = 1 + h, \; b = 2h$

Question 5 : Soit A la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

- ☐ A est inversible.
- ■ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$.
- ☐ A est symétrique définie positive.
- ■ $A\vec{1} = \vec{0}$ (ici, $\vec{1}$ est le vecteur de composantes 1).

Correction

On considère le problème suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad && 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u(x,0) = \sin(\pi x), && 0 < x < 1,\\
&u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, && t > 0.
\end{aligned}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Soit M un entier positif et $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, M$, $i = 1, \ldots, N$. On considère une méthode de différences finies pour calculer les valeurs u_i^n. On approche

- $\partial u/\partial t(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies rétrograde,
- $\partial^2 u/\partial x^2(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies centrée.

A chaque pas de temps il s'agit de résoudre le système linéaire $A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ où on a noté $\vec{u}^n$ le vecteur de composantes u_i^n, $i = 1, \ldots, N$. Le programme matlab / octave `exam1.m` correspond à cette méthode. A partir de N, M, τ, il permet de calculer u_i^M, $i = 1, \ldots, N$. Le programme est incomplet.

Question 6 : A la ligne `b(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `tau*sin(pi*i*h)`
- [ ] `tau / (h*h) * sin(pi*i*h)`
- [ ] `0`
- [x] `sin(pi*i*h)`

Question 7 : A la ligne `a(i) = 1 + ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `2 * tau / (h*h)`
- [ ] `2 * tau`
- [ ] `tau`
- [ ] `tau / (h*h)`

Question 8 : A la ligne `d(i) = - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `tau / (h*h)`
- [ ] `2* tau / (h*h)`
- [ ] `tau`
- [ ] `2 * tau`

Question 9 : A la ligne `a(i) = a(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `b(i-1) * c(i-1)`
- [x] `c(i-1) * d(i-1)`
- [ ] `b(i-1) * d(i-1)`

Question 10 : A la ligne `c(i) = c(i)/???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `b(i)`
- [x] `a(i)`
- [ ] `d(i)`

Question 11 : A la ligne `b(i+1) = (b(i+1) - ???)/a(i+1);`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `c(i) * b(i)`
- [x] `d(i) * b(i)`
- [ ] `d(i) * c(i)`

Question 12 : A la ligne `b(i) = b(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `c(i) * b(i+1)`
- [ ] `c(i) * d(i)`
- [ ] `d(i) * b(i+1)`

Question 13 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,10,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.032035e-02
>> exam1(19,40,0.0025);
 erreur maximum au temps final  5.238880e-03
>> exam1(39,160,0.000625);
 erreur maximum au temps final  1.320115e-03
>> exam1(79,640,0.00015625);
 erreur maximum au temps final  3.306863e-04
```

On en déduit

- [x] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- [ ] Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$
- [ ] Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$
- [ ] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$

Question 14 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.755597e-41
>> exam1(9,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  3.826546e-297
>> exam1(9,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(19,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.580696e-41
>> exam1(19,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  1.795569e-298
>> exam1(19,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(39,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.374616e-41
>> exam1(39,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  8.349512e-299
>> exam1(39,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
```

On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h+\tau)$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2+\tau)$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$
- ■ Le schéma est stable pour tout $h>0$ et $\tau>0$

Correction

Fichier exam1.m:

```
function [b]=exam1(N,M,tau)
%
%  Schema d'Euler retrograde pour le probleme de la chaleur.
%  A chaque pas de temps, il faut resoudre le systeme lineaire A u^{n+1} = b
%  ou u^{n+1} est le vecteur qui contient les approximations de u(x_i,t^{n+1}).
%
%  parametres
%
%  N         : nombre d'inconnues du systeme lineaire
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  b         : N-vecteur, a chaque pas de temps,
%              b est le second membre du systeme lineaire A u^{n+1} = b,
%              puis la solution du systeme lineaire u^{n+1}.
%  h         : pas d'espace
%  t         : temps courant
%  a         : N-vecteur, diagonale de la matrice A,
%              puis diagonale de L tq  A=LU
%  c         : (N-1)-vecteur, sur-diagonale de la matrice A,
%              puis sur-diagonale de U tq  A=LU
%  d         : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de la matrice A,
%              puis sous-diagonale de L tq  A=LU
%

h=1/(N+1);
t=0;
%
% condition initiale
%
for i=1:N
  b(i)=???;
end
%
% remplissage de la matrice  A
%
for i=1:N
  a(i) = 1+???;
end
for i=1:N-1
  d(i) =-???;
end
for i=1:N-1
  c(i) = -???;
end
%
% decomposition A = LU
%
c(1)=c(1)/???;
for i=2:N-1
  a(i) = a(i)-???;
  c(i) = c(i)/???;
end
```

```
a(N) = a(N)-???;
%
% schema d'Euler retrograde
%
for n=1:M
  t=t+tau;
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b
%
  b(1)=b(1)/???;
  for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
  end
%
% resolution du systeme lineaire U x = y
%
  for i=N-1:-1:1
    b(i) = b(i)-???;
  end
end
err = 0;
for(i=1:N)
    erri = abs(b(i)-exp(-pi*pi*t)*sin(i*h*pi));
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Problème de transport On considère le problème de transport suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, && 0 < x < 1, t > 0,\\
&u(x,0) = 10(1-x)^3, && 0 < x < 1,\\
&u(1,t) = 0, && t > 0.
\end{aligned}$$

Question 15 : La solution du problème est donnée par $u(x,t)$

- [ ] $= 10(1-x+t)^3$
- [ ] $= 10(1-x-t)^3$
- [ ] $= \begin{cases} 10(1-x+t)^3 & \text{si } x-t<1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- [x] $= \begin{cases} 10(1-x-t)^3 & \text{si } x+t<1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, M le nombre de pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue

- en utilisant une formule de différence finie progressive pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial t}$,
- en utilisant une formule de différence finie décentrée pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Le fichier matlab / octave `exam2.m` implémente ce schéma. Ce fichier est incomplet.

Question 16 : A la ligne `unew(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i+1)`
- [ ] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i-1)`
- [ ] `uold(i) + tau/(2*h) * (uold(i+1) - uold(i-1))`

Question 17 : Le fichier donne les résultats suivants

```
>> exam2(9,5,0.09)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  6.435000e-02
>> exam2(19,10,0.045)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  3.465000e-02
>> exam2(39,20,0.0225)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  1.794375e-02
>> exam2(79,40,0.01125)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  9.126562e-03
```

On en déduit que, si $\tau \leq h$, alors:

- [ ] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- [x] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$
- [ ] Le schéma est instable
- [ ] Le schéma est stable

Correction

Question 18 : Soit $1 \leq n \leq M$ fixé. Si $\tau \leq h$ on peut montrer que

- [x] Si tous les $u_i^n \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots N+1$, alors tous les $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$
- [x] $\max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^n|$
- [ ] $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^n|$

Correction

Fichier exam2.m:

```
function exam2(N,M,tau)
    %
    %  Schema d'Euler progressif pour le probleme de transport du/dt-du/dx=0
    %
    %  indications :
    %
    %  uold     : N-vecteur, uold(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
    %  unew     : N-vecteur, unew(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
    %
    %  definitions preliminaires
    %
    h=1/(N+1);       % pas d'espace
    t=0.;            % temps initial
    %
    % condition initiale
    %
    for i=1:N
      uold(i)=10*(1-i*h)^3;
    end
    %
    % schema progressif decentre
    %
    for n=1:M
      t=t+tau;
      unew(N)= ???;
      for i=N-1:-1:1
        unew(i)= ???;
      end
    %
      for i=1:N
        uold(i)=unew(i);
      end
    end
    %
    % imprimer l'erreur maximum au temps final
    %
    err = 0;
    for i=1:N
      if (???<1)
        uex(i)=???;
      else
        uex(i)=???;
      endif
      erri = abs(unew(i)-uex(i));
      if (erri>err)
        err = erri;
      end
    end
    fprintf(' erreur maximum au temps %e :  %e \n',t,err)
```

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : [x_0, x_0 + 2] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$. Montrer que pour tout $0 < h \leq 1$ on a

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} \right| \leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0+2} |f'''(x)|.$$

Correction

Correction

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ donnée. On veut approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide de la formule du rectangle. Soit N un entier positif, on subdivise l'intervalle $[0,1]$ en N sous-intervalles $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t.$

Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on approche $\int_{-1}^1 g(t)\ \mathrm{d}t$ par $2g(0)$. On obtient ainsi l'approximation $L_N(f)$ de $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t - 2f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

(c) Pour tout $i = 0, 1, \ldots, N-1$ et pour tout $-1 < t < 1$ on a

$$f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N}f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + r_i(t).$$

Expliciter $r_i(t)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} r_i(t)\ \mathrm{d}t.$

(e) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f)\right| \leq \frac{1}{8N^2}\max_{0\leq t\leq 1}|f''(t)|.$

Correction

Correction

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

CORRECTION

EPFL

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique - XYZ
26 Juin 2019
de 12h15 à 14h30

3

Harrisson George

SCIPER : **XXXXX3**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 18 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Correction

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le système différentiel suivant:

Trouver $\begin{array}{rcl} u_1 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_1(t) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u_2 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_2(t) \end{array}$ tels que

$$\begin{aligned} & u_1'(t) = -(u_2(t))^2 u_1(t), \quad t > 0, \\ & u_2'(t) = -(u_1(t))^2 u_2(t), \quad t > 0, \\ & u_1(0) = 1, \ u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Question 1 : On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\Big) + 2(u_1(t))^2(u_2(t))^2 = 0, \qquad \forall t > 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 2 : On a

$$(u_1(1))^2 + (u_2(1))^2 \leq (u_1(0))^2 + (u_2(0))^2.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 3 : Soit $h > 0$, $t_n = nh$, $n = 0,1,2,\ldots$, on note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue à l'aide du schéma d'Euler rétrograde. Pour $n = 0,1,2,\ldots$, étant donné u_1^n et u_2^n, il s'agit de trouver u_1^{n+1} et u_2^{n+1} tels que

$$\begin{aligned} f_1(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0, \\ f_2(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

où $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ par

- ☐ $f_1(x_1,x_2) = u_1^{n+1} - u_1^n + h(u_2^{n+1})^2 u_1^{n+1}, \ f_2(x_1,x_2) = u_2^{n+1} - u_2^n + h(u_1^{n+1})^2 u_2^{n+1}$
- ☐ $f_1(x_1,x_2) = x_1 - u_1^n + h(u_2^n)^2 u_1^n, \ f_2(x_1,x_2) = x_2 - u_2^n + h(u_1^n)^2 u_2^n$
- ■ $f_1(x_1,x_2) = x_1 - u_1^n + h(x_2)^2 x_1, \ f_2(x_1,x_2) = x_2 - u_2^n + h(x_1)^2 x_2$

Question 4 : On effectue un pas de la méthode de Newton pour approcher u_1^1 et u_2^1 à partir de u_1^0 et u_2^0. On note x_1^1 et x_2^1 les approximations de u_1^1 et u_2^1 ainsi obtenues. Le système linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix},$$

où a et b sont donnés par

- ☐ $a = 1 - 2h, \ b = -2$
- ☐ $a = 1 + 2h, \ b = h$
- ☐ $a = 1 - h, \ b = -h$
- ■ $a = 1 + h, \ b = 2h$

Correction

Question 5 : Soit A la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

- [x] $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4,\ \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0.$
- [ ] A est symétrique définie positive.
- [x] $A\vec{1} = \vec{0}$ (ici, $\vec{1}$ est le vecteur de composantes 1).
- [ ] A est inversible.

Correction

On considère le problème suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Soit N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Soit M un entier positif et $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, M$, $i = 1, \ldots, N$. On considère une méthode de différences finies pour calculer les valeurs u_i^n. On approche

- $\partial u / \partial t(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies rétrograde,
- $\partial^2 u / \partial x^2(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies centrée.

A chaque pas de temps il s'agit de résoudre le système linéaire $A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ où on a noté $\vec{u}^n$ le vecteur de composantes u_i^n, $i = 1, \ldots, N$. Le programme matlab / octave `exam1.m` correspond à cette méthode. A partir de N, M, τ, il permet de calculer u_i^M, $i = 1, \ldots, N$. Le programme est incomplet.

Question 6 : A la ligne `b(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `sin(pi*i*h)`
- [ ] `tau / (h*h) * sin(pi*i*h)`
- [ ] `tau*sin(pi*i*h)`
- [ ] `0`

Question 7 : A la ligne `a(i) = 1 + ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `2 * tau / (h*h)`
- [ ] `tau`
- [ ] `tau / (h*h)`
- [ ] `2 * tau`

Question 8 : A la ligne `d(i) = - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `2* tau / (h*h)`
- [x] `tau / (h*h)`
- [ ] `tau`
- [ ] `2 * tau`

Question 9 : A la ligne `a(i) = a(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `b(i-1) * c(i-1)`
- [x] `c(i-1) * d(i-1)`
- [ ] `b(i-1) * d(i-1)`

Question 10 : A la ligne `c(i) = c(i)/???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [ ] `b(i)`
- [ ] `d(i)`
- [x] `a(i)`

Question 11 : A la ligne `b(i+1) = (b(i+1) - ???)/a(i+1);`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `d(i) * b(i)`
- ☐ `d(i) * c(i)`
- ☐ `c(i) * b(i)`

Question 12 : A la ligne `b(i) = b(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `c(i) * b(i+1)`
- ☐ `d(i) * b(i+1)`
- ☐ `c(i) * d(i)`

Question 13 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,10,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.032035e-02
>> exam1(19,40,0.0025);
 erreur maximum au temps final  5.238880e-03
>> exam1(39,160,0.000625);
 erreur maximum au temps final  1.320115e-03
>> exam1(79,640,0.00015625);
 erreur maximum au temps final  3.306863e-04
```

On en déduit

- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$
- ■ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$
- ☐ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$

Question 14 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.755597e-41
>> exam1(9,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  3.826546e-297
>> exam1(9,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(19,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.580696e-41
>> exam1(19,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  1.795569e-298
>> exam1(19,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(39,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.374616e-41
>> exam1(39,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  8.349512e-299
>> exam1(39,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
```

On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- ■ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$

Correction

Fichier `exam1.m`:

```
function [b]=exam1(N,M,tau)
%
%  Schema d'Euler retrograde pour le probleme de la chaleur.
%  A chaque pas de temps, il faut resoudre le systeme lineaire A u^{n+1} = b
%  ou u^{n+1} est le vecteur qui contient les approximations de u(x_i,t^{n+1}).
%
%  parametres
%
%  N         : nombre d'inconnues du systeme lineaire
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  b         : N-vecteur, a chaque pas de temps,
%              b est le second membre du systeme lineaire A u^{n+1} = b,
%              puis la solution du systeme lineaire u^{n+1}.
%  h         : pas d'espace
%  t         : temps courant
%  a         : N-vecteur, diagonale de la matrice A,
%              puis diagonale de L tq  A=LU
%  c         : (N-1)-vecteur, sur-diagonale de la matrice A,
%              puis sur-diagonale de U tq  A=LU
%  d         : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de la matrice A,
%              puis sous-diagonale de L tq  A=LU
%

h=1/(N+1);
t=0;
%
% condition initiale
%
for i=1:N
  b(i)=???;
end
%
% remplissage de la matrice  A
%
for i=1:N
  a(i) = 1+???;
end
for i=1:N-1
  d(i) =-???;
end
for i=1:N-1
  c(i) = -???;
end
%
% decomposition A = LU
%
c(1)=c(1)/???;
for i=2:N-1
  a(i) = a(i)-???;
  c(i) = c(i)/???;
end
```

```
a(N) = a(N)-???;
%
% schema d'Euler retrograde
%
for n=1:M
  t=t+tau;
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b
%
  b(1)=b(1)/???;
  for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
  end
%
% resolution du systeme lineaire U x = y
%
  for i=N-1:-1:1
    b(i) = b(i)-???;
  end
end
err = 0;
for(i=1:N)
    erri = abs(b(i)-exp(-pi*pi*t)*sin(i*h*pi));
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Problème de transport On considère le problème de transport suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, && 0 < x < 1, t > 0, \\ &u(x,0) = 10(1-x)^3, && 0 < x < 1, \\ &u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Question 15 : La solution du problème est donnée par $u(x,t)$

- ■ $= \begin{cases} 10(1-x-t)^3 & \text{si } x+t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- ☐ $= 10(1-x+t)^3$
- ☐ $= \begin{cases} 10(1-x+t)^3 & \text{si } x-t < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ☐ $= 10(1-x-t)^3$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0,1,\dots,N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, M le nombre de pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\dots,M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i,t_n)$ obtenue

- en utilisant une formule de différence finie progressive pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial t}$,
- en utilisant une formule de différence finie décentrée pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Le fichier matlab / octave `exam2.m` implémente ce schéma. Ce fichier est incomplet.

Question 16 : A la ligne `unew(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i+1)`
- ☐ `uold(i) + tau/(2*h) * (uold(i+1) - uold(i-1))`
- ☐ `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i-1)`

Question 17 : Le fichier donne les résultats suivants

```
>> exam2(9,5,0.09)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  6.435000e-02
>> exam2(19,10,0.045)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  3.465000e-02
>> exam2(39,20,0.0225)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  1.794375e-02
>> exam2(79,40,0.01125)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  9.126562e-03
```

On en déduit que, si $\tau \le h$, alors:

- ■ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h+\tau)$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2+\tau)$
- ☐ Le schéma est instable
- ☐ Le schéma est stable

Question 18 : Soit $1 \leq n \leq M$ fixé. Si $\tau \leq h$ on peut montrer que

■ $\max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^n|$

■ Si tous les $u_i^n \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots N+1$, alors tous les $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$

☐ $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^n|$

Correction

Fichier exam2.m:

```
function exam2(N,M,tau)
    %
    %  Schema d'Euler progressif pour le probleme de transport du/dt-du/dx=0
    %
    %  indications :
    %
    %  uold     : N-vecteur, uold(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
    %  unew     : N-vecteur, unew(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
    %
    %  definitions preliminaires
    %
    h=1/(N+1);       % pas d'espace
    t=0.;            % temps initial
    %
    % condition initiale
    %
    for i=1:N
      uold(i)=10*(1-i*h)^3;
    end
    %
    % schema progressif decentre
    %
    for n=1:M
      t=t+tau;
      unew(N)= ???;
      for i=N-1:-1:1
        unew(i)= ???;
      end
    %
      for i=1:N
        uold(i)=unew(i);
      end
    end
    %
    % imprimer l'erreur maximum au temps final
    %
    err = 0;
    for i=1:N
      if (???<1)
        uex(i)=???;
      else
        uex(i)=???;
      endif
      erri = abs(unew(i)-uex(i));
      if (erri>err)
        err = erri;
      end
    end
    fprintf(' erreur maximum au temps %e :  %e \n',t,err)
```

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : [x_0, x_0 + 2] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$. Montrer que pour tout $0 < h \leq 1$ on a

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} \right| \leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0+2} |f'''(x)|.$$

Correction

CORRECTION

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 8 points.*

□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 ■ 8 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ donnée. On veut approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la formule du rectangle. Soit N un entier positif, on subdivise l'intervalle $[0,1]$ en N sous-intervalles $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t.$

Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on approche $\int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ par $2g(0)$. On obtient ainsi l'approximation $L_N(f)$ de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t - 2f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

(c) Pour tout $i = 0, 1, \dots, N-1$ et pour tout $-1 < t < 1$ on a

$$f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N}f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + r_i(t).$$

Expliciter $r_i(t)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} r_i(t)\,\mathrm{d}t.$

(e) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - L_N(f)\right| \leq \frac{1}{8N^2}\max_{0\leq t\leq 1}|f''(t)|.$

Correction

Correction

Correction

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

CORRECTION

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique - XYZ
26 Juin 2019
de 12h15 à 14h30

4

Starr Ringo

SCIPER : **XXXXX4**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 18 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Soit A la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

- ☐ A est inversible.
- ■ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$.
- ☐ A est symétrique définie positive.
- ■ $A\vec{1} = \vec{0}$ (ici, $\vec{1}$ est le vecteur de composantes 1).

Correction

On considère le système différentiel suivant:

$$\text{Trouver} \quad \begin{array}{rcl} u_1 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_1(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} u_2 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \to & u_2(t) \end{array} \quad \text{tels que}$$

$$\begin{aligned} &u_1'(t) = -(u_2(t))^2 u_1(t), \quad t > 0, \\ &u_2'(t) = -(u_1(t))^2 u_2(t), \quad t > 0, \\ &u_1(0) = 1, \ u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Question 2 : On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\Big) + 2(u_1(t))^2(u_2(t))^2 = 0, \qquad \forall t > 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 3 : On a

$$(u_1(1))^2 + (u_2(1))^2 \le (u_1(0))^2 + (u_2(0))^2.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 4 : Soit $h > 0$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue à l'aide du schéma d'Euler rétrograde. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, étant donné u_1^n et u_2^n, il s'agit de trouver u_1^{n+1} et u_2^{n+1} tels que

$$\begin{aligned} f_1(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0, \\ f_2(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

où $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ par

- ■ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(x_2)^2 x_1, \ f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(x_1)^2 x_2$
- ☐ $f_1(x_1, x_2) = x_1 - u_1^n + h(u_2^n)^2 u_1^n, \ f_2(x_1, x_2) = x_2 - u_2^n + h(u_1^n)^2 u_2^n$
- ☐ $f_1(x_1, x_2) = u_1^{n+1} - u_1^n + h(u_2^{n+1})^2 u_1^{n+1}, \ f_2(x_1, x_2) = u_2^{n+1} - u_2^n + h(u_1^{n+1})^2 u_2^{n+1}$

Question 5 : On effectue un pas de la méthode de Newton pour approcher u_1^1 et u_2^1 à partir de u_1^0 et u_2^0. On note x_1^1 et x_2^1 les approximations de u_1^1 et u_2^1 ainsi obtenues. Le système linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix},$$

où a et b sont donnés par

- ☐ $a = 1 - 2h, \ b = -2$
- ☐ $a = 1 + 2h, \ b = h$
- ☐ $a = 1 - h, \ b = -h$
- ■ $a = 1 + h, \ b = 2h$

Correction

On considère le problème suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin(\pi x), && 0 < x < 1, \\ &u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. Soit M un entier positif et $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$, $n = 0, 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N$. On considère une méthode de différences finies pour calculer les valeurs u_i^n. On approche

- $\partial u / \partial t(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies rétrograde,
- $\partial^2 u / \partial x^2(x,t)$ à l'aide d'une formule de différences finies centrée.

A chaque pas de temps il s'agit de résoudre le système linéaire $A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ où on a noté $\vec{u}^n$ le vecteur de composantes u_i^n, $i = 1, \dots, N$. Le programme matlab / octave `exam1.m` correspond à cette méthode. A partir de N, M, τ, il permet de calculer u_i^M, $i = 1, \dots, N$. Le programme est incomplet.

Question 6 : A la ligne `b(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `tau*sin(pi*i*h)`
- ☐ `tau / (h*h) * sin(pi*i*h)`
- ☐ `0`
- ■ `sin(pi*i*h)`

Question 7 : A la ligne `a(i) = 1 + ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ■ `2 * tau / (h*h)`
- ☐ `tau`
- ☐ `tau / (h*h)`
- ☐ `2 * tau`

Question 8 : A la ligne `d(i) = - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `tau`
- ☐ `2 * tau`
- ■ `tau / (h*h)`
- ☐ `2* tau / (h*h)`

Question 9 : A la ligne `a(i) = a(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `b(i-1) * c(i-1)`
- ■ `c(i-1) * d(i-1)`
- ☐ `b(i-1) * d(i-1)`

Question 10 : A la ligne `c(i) = c(i)/???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `b(i)`
- ■ `a(i)`
- ☐ `d(i)`

Question 11 : A la ligne `b(i+1) = (b(i+1) - ???)/a(i+1);`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `d(i) * c(i)`
- ☐ `c(i) * b(i)`
- ■ `d(i) * b(i)`

Question 12 : A la ligne `b(i) = b(i) - ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- ☐ `c(i) * d(i)`
- ■ `c(i) * b(i+1)`
- ☐ `d(i) * b(i+1)`

Question 13 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,10,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.032035e-02
>> exam1(19,40,0.0025);
 erreur maximum au temps final  5.238880e-03
>> exam1(39,160,0.000625);
 erreur maximum au temps final  1.320115e-03
>> exam1(79,640,0.00015625);
 erreur maximum au temps final  3.306863e-04
```

On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h+\tau)$
- ☐ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$
- ■ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2+\tau)$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$

Question 14 : Une fois complété, le programme donne les résultats suivants:

```
>> exam1(9,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  2.755597e-41
>> exam1(9,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  3.826546e-297
>> exam1(9,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(19,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.580696e-41
>> exam1(19,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  1.795569e-298
>> exam1(19,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
>> exam1(39,1000,0.01);
 erreur maximum au temps final  1.374616e-41
>> exam1(39,1000,0.1);
 erreur maximum au temps final  8.349512e-299
>> exam1(39,1000,1.);
 erreur maximum au temps final  0.000000e+00
```

On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h + \tau)$
- ■ Le schéma est stable pour tout $h > 0$ et $\tau > 0$
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h^2/2$

Correction

Fichier exam1.m:

```
function [b]=exam1(N,M,tau)
%
%  Schema d'Euler retrograde pour le probleme de la chaleur.
%  A chaque pas de temps, il faut resoudre le systeme lineaire A u^{n+1} = b
%  ou u^{n+1} est le vecteur qui contient les approximations de u(x_i,t^{n+1}).
%
%  parametres
%
%  N         : nombre d'inconnues du systeme lineaire
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  b         : N-vecteur, a chaque pas de temps,
%              b est le second membre du systeme lineaire A u^{n+1} = b,
%              puis la solution du systeme lineaire u^{n+1}.
%  h         : pas d'espace
%  t         : temps courant
%  a         : N-vecteur, diagonale de la matrice A,
%              puis diagonale de L tq  A=LU
%  c         : (N-1)-vecteur, sur-diagonale de la matrice A,
%              puis sur-diagonale de U tq  A=LU
%  d         : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de la matrice A,
%              puis sous-diagonale de L tq  A=LU
%

h=1/(N+1);
t=0;
%
% condition initiale
%
for i=1:N
  b(i)=???;
end
%
% remplissage de la matrice  A
%
for i=1:N
  a(i) = 1+???;
end
for i=1:N-1
  d(i) =-???;
end
for i=1:N-1
  c(i) = -???;
end
%
% decomposition A = LU
%
c(1)=c(1)/???;
for i=2:N-1
  a(i) = a(i)-???;
  c(i) = c(i)/???;
end
```

```
a(N) = a(N)-???;
%
% schema d'Euler retrograde
%
for n=1:M
  t=t+tau;
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b
%
  b(1)=b(1)/???;
  for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
  end
%
% resolution du systeme lineaire U x = y
%
  for i=N-1:-1:1
    b(i) = b(i)-???;
  end
end
err = 0;
for(i=1:N)
    erri = abs(b(i)-exp(-pi*pi*t)*sin(i*h*pi));
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Problème de transport On considère le problème de transport suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, && 0 < x < 1, t > 0, \\ &u(x,0) = 10(1-x)^3, && 0 < x < 1, \\ &u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Question 15 : La solution du problème est donnée par $u(x,t)$

- [ ] $= 10(1-x-t)^3$
- [ ] $= 10(1-x+t)^3$
- [x] $= \begin{cases} 10(1-x-t)^3 & \text{si } x+t<1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- [ ] $= \begin{cases} 10(1-x+t)^3 & \text{si } x-t<1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, M le nombre de pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, M$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue

- en utilisant une formule de différence finie progressive pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial t}$,
- en utilisant une formule de différence finie décentrée pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Le fichier matlab / octave `exam2.m` implémente ce schéma. Ce fichier est incomplet.

Question 16 : A la ligne `unew(i) = ???;`, il faut remplacer les `???` par:

- [x] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i+1)`
- [ ] `uold(i) + tau/(2*h) * (uold(i+1) - uold(i-1))`
- [ ] `uold(i) * (1 - tau/h) + tau/h * uold(i-1)`

Question 17 : Le fichier donne les résultats suivants

```
>> exam2(9,5,0.09)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  6.435000e-02
>> exam2(19,10,0.045)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  3.465000e-02
>> exam2(39,20,0.0225)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  1.794375e-02
>> exam2(79,40,0.01125)
 erreur maximum au temps 4.500000e-01 :  9.126562e-03
```

On en déduit que, si $\tau \leq h$, alors:

- [x] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h+\tau)$
- [ ] Le schéma converge à l'ordre $\mathcal{O}(h^2+\tau)$
- [ ] Le schéma est instable
- [ ] Le schéma est stable

Correction

Question 18 : Soit $1 \leq n \leq M$ fixé. Si $\tau \leq h$ on peut montrer que

- ■ Si tous les $u_i^n \geq 0$, $i = 0, 1, \dots N+1$, alors tous les $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N+1$
- ■ $\max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{0 \leq i \leq N+1} |u_i^n|$
- □ $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^{n+1}| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq N} |u_i^n|$

Correction

Fichier exam2.m:

```
function exam2(N,M,tau)
  %
  %  Schema d'Euler progressif pour le probleme de transport du/dt-du/dx=0
  %
  %  indications :
  %
  %  uold     : N-vecteur, uold(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
  %  unew     : N-vecteur, unew(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
  %
  %  definitions preliminaires
  %
  h=1/(N+1);       % pas d'espace
  t=0.;            % temps initial
  %
  % condition initiale
  %
  for i=1:N
    uold(i)=10*(1-i*h)^3;
  end
  %
  % schema progressif decentre
  %
  for n=1:M
    t=t+tau;
    unew(N)= ???;
    for i=N-1:-1:1
      unew(i)= ???;
    end
  %
    for i=1:N
      uold(i)=unew(i);
    end
  end
  %
  % imprimer l'erreur maximum au temps final
  %
  err = 0;
  for i=1:N
    if (???<1)
      uex(i)=???;
    else
      uex(i)=???;
    endif
    erri = abs(unew(i)-uex(i));
    if (erri>err)
      err = erri;
    end
  end
  fprintf(' erreur maximum au temps %e :  %e \n',t,err)
```

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : [x_0, x_0 + 2] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$. Montrer que pour tout $0 < h \leq 1$ on a

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} \right| \leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + 2} |f'''(x)|.$$

Correction

CORRECTION

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ donnée. On veut approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide de la formule du rectangle. Soit N un entier positif, on subdivise l'intervalle $[0,1]$ en N sous-intervalles $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t.$

Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on approche $\int_{-1}^1 g(t)\ \mathrm{d}t$ par $2g(0)$. On obtient ainsi l'approximation $L_N(f)$ de $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}t - 2f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

(c) Pour tout $i = 0, 1, \ldots, N-1$ et pour tout $-1 < t < 1$ on a

$$f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N}f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + r_i(t).$$

Expliciter $r_i(t)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f) = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} r_i(t)\ \mathrm{d}t.$

(e) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - L_N(f)\right| \leq \frac{1}{8N^2}\max_{0\leq t\leq 1}|f''(t)|.$

Correction

Correction

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Correction

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)