Série 21

1. Déterminer, dans les trois cas suivants, l'aire du domaine situé entre l'axe Ox et l'arc de courbe défini par $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ y \geq 0\}$.

a) $f(x) = 6x - x^2 - 8$, b) $f(x) = e^{-|x|} - \dfrac{1}{2}$, c) $f(x) = (2 - x) \cdot \ln(x)$.

2. Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy, on considère l'arc de courbe Γ défini par

$$\Gamma : \quad y = \cos\left(\sqrt{x}\right) , \qquad 0 \leq x \leq \pi^2 .$$

Calculer l'aire géométrique du domaine fini limité par la courbe Γ, l'axe Ox, l'axe Oy et la droite verticale d'équation $x = \pi^2$.

3. Calculer l'aire du domaine fini limité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad y = 2x + 4 .$$

4. Calculer l'aire des domaines finis compris entre les courbes définies par les équations suivantes :

a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\, x}$ et $y = \text{Arcsin}(\frac{x}{\pi})$.

Intégrer d'abord par rapport à x, puis par rapport à y.

Indication : ces deux courbes se coupent en $x = 0$ et $x = \pi$.

b) $y^2 + 2y - x = 0$ et $y - x + 2 = 0$.

c) $(y - 3)^2 = x - 1$ et $(y - 3)^2 = 4\,(x - 4)$.

d) $y = \frac{1}{2}\,x^2$, $y = x^2$ et $y = 2x$.

5. Dans le plan, on considère les deux courbes Γ_1 et Γ_2 suivantes :

$$\Gamma_1 : \ y = \sqrt{3\,(1 - x)} , \quad x \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \ y + 1 = \frac{4}{9}\,(x - 1)^2 .$$

Calculer l'aire du domaine fini contenu dans le demi-plan $y \geq 0$ et limité par les deux arcs Γ_1 et Γ_2.

Indication : les deux courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent en $x = -2$.

6. On considère l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a\,\cos(t) \\ y(t) = b\,\sin(t) \end{cases} \qquad a\,,\, b\, \in\, \mathbb{R}_+^*\,.$$

Montrer que l'aire du domaine limité par cette ellipse vaut $\pi\, a\, b$.

7. Dans le plan Oxy, on considère la demi-ellipse Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\,\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

On considère le domaine fini D limité par la courbe Γ, la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et la droite verticale d'équation $x = 1$, ($x \geq 1$ et $y \geq -\frac{1}{2}$).

Calculer l'aire du domaine D.

Réponses de la série 21

1. a) $A = \displaystyle\int_2^4 (6x - x^2 - 8)\, dx \;=\; \frac{4}{3}$,

b) $B = \; 2\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} - \tfrac{1}{2}\right) dx \;=\; 1 - \ln 2$,

c) $C = \displaystyle\int_1^2 (2 - x)\, \ln x\, dx \;=\; \ln 4 - \frac{5}{4}$.

2. $A = 2\pi$.

3. L'aire du domaine vaut $\dfrac{4}{3}$.

4. a) $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\, x} - \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\right] dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\pi\, \sin y - \tfrac{4y^2}{\pi}\right] dy \;=\; \pi - \frac{\pi^2}{6}$.

b) $B = \dfrac{9}{2}$. c) $C = 8$. d) $D = 4$.

5. $A = 4$.

6. $\dfrac{A}{4} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t) \cdot \dot{x}(t)\; dt \;=\; \frac{\pi\, ab}{4}$.

7. $A = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\,2\,\cos t - 1\,]\, \cos t\; dt \;=\; \frac{\pi - 1}{2}$.
