Théorèmes d'Analyse à l'examen !

1) Section 3.5

Proposition: si une suite converge sa limite est unique.

Démonstration 3.5 (démonstration par l'absurde)

Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ avec $a \neq b$. Alors

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{Déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_1$ tel que, $\forall n \geq n_1, \ |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

$\lim_{n\to\infty} a_n = b \overset{\text{Déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_2$ tel que, $\forall n \geq n_2, \ |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Donc, pour $n \geq n_0 := \text{maximum}\{n_1, n_2\}$, on a à la fois (1) et (2) et donc, puisque $a - b = (a - a_n) + (a_n - b)$, on obtient que, pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq |a-b| \leq |a-a_n| + |b-a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

et on a donc que $\forall \varepsilon > 0, \ 0 \leq |a-b| \leq \varepsilon$. Ceci implique (voir 1.1) que $|a-b| = 0$ et donc $a = b$, en contradiction avec l'hypothèse que $a \neq b$.

2) Section 3.8

3.8 Théorème des deux gendarmes

<u>Théorème</u>: soient $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in \mathbb{N}$ trois suites.

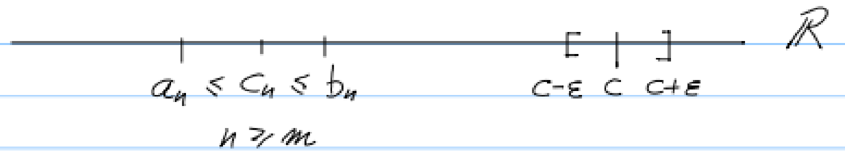
<u>Si</u> i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$

ii) il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

<u>Démonstration</u> (voir aussi la démonstration 3.5)



On a $a_n \leq c_n \leq b_n \Leftrightarrow a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$, $\forall n \geq m$ $(*)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq m$ tel que $\forall n \geq n_0$ $\begin{cases} |a_n - c| \leq \varepsilon & ① \\ |b_n - c| \leq \varepsilon & ② \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$-\varepsilon \underset{①}{\leq} a_n - c \underset{(*)}{\leq} c_n - c \underset{(*)}{\leq} b_n - c \underset{②}{\leq} \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|c_n - c| \leq \varepsilon \overset{\text{Déf.}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

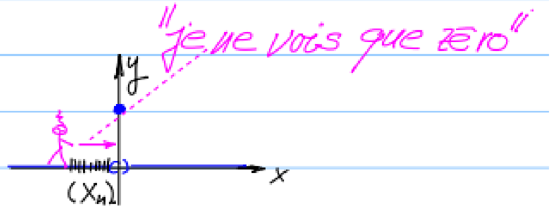
3) Section 4.9

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

<u>Démonstration</u>: si la série est convergente la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est une suite de Cauchy. Ceci veut dire que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n, m \geq n_0$, $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. En particulier $|S_{m+1} - S_m| \leq \varepsilon$ et donc $|a_{m+1}| \leq \varepsilon$. On a donc que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 + 1$ $|a_n - \underset{\text{zéro}}{0}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

4) Section 5.9.1

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

<u>Proposition:</u> $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$

<u>Démonstration:</u> soit (x_n) une suite arbitraire telle que $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Alors $y_n = f(x_n) = 0$ pour tout n (car $x_n \neq 0$) et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

5) Section 5.9.2

3) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D = \mathbb{R}^*$.

Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

<u>Proposition:</u> f n'admet pas de limite en $x^* = 0$

<u>Démonstration:</u> (deux techniques équivalentes)

<u>i1) deux suites (x_n), $(\tilde{x}_n)$ telles que (y_n) et $(\tilde{y}_n)$ convergent mais vers différentes limites</u>

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \; n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}, \; n \in \mathbb{N}$$

on a $x_n \neq 0$, $\tilde{x}_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0$

$y_n = f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0$, $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n = 1$.

6) Théorème limites gauche/droite

Soit $f: I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x^* \in I$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell$.

D'abord il faut donner les définitions des ces limites : Soit $\ell \in \mathbb{R}$

1. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell$ *si et seulement si pout toute suite* (x_n) *avec* $x_n \neq x^*$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$
2. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x)\ell$ *si et seulement si pout toute suite* (x_n) *avec* $x_n < x^*$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$
3. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell$ *si et seulement si pout toute suite* (x_n) *avec* $x_n > x^*$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Ces définitions sont équivalente eux version "$\varepsilon - \delta$" suivantes :

1. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ t.q.\ \forall x \ : \ 0 < |x - x^*| < \delta \ on\ a\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x)\ell$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta^- = \delta^-(\varepsilon) \ t.q.\ \forall x \ : \ 0 < x^* - x < \delta^- \ on\ a\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

3. $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta^+ = \delta^+(\varepsilon) \ t.q.\ \forall x \ : \ 0 < x - x^* < \delta^+ \ on\ a\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Prouvons que $1 \Rightarrow 2$

Soit (x_n) *une suite avec* $x_n < x^*$ *et* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, *Puisque* $x_n < x^*$, *on a que* $x_n \neq x^*$, *donc c'est*

une suite (x_n) *avec* $x_n \neq x^*$ *et* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, *et d'après 1., on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Donc 2.

Prouvons que $1 \Rightarrow 3$

Cette preuve est similarie à la précendente. Pas besoin de la faire. Ici on va en donner une alternative en utilisant les "$\varepsilon - \delta$".

Soit $\varepsilon > 0$. *De 1 on a qu'il existe* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tel que*

$$\forall x \ : \ 0 < |x - x^*| < \delta \ on\ a\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définisson $\delta^+ = \delta$.

Soit $0 < x - x^* < \delta = \delta^+$, *alors* $0 < |x - x^*| < \delta$ *et, s'après 1. on a* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. *Donc 3.*

Prouvons que 2 et 3 $\Rightarrow$ 1

Pour cette partie, il est plus simple de travailler avec les "$\varepsilon - \delta$".

Soit $\varepsilon > 0$. De 2. et 3. on a qu'ils existent $\delta^- = \delta^-(\varepsilon)$ et $\delta^+ = \delta^+(\varepsilon)$ tels que

$$\forall x \,:\, 0 < x^* - x < \delta^- \text{ on a } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall x \,:\, 0 < x - x^* < \delta^+ \text{ on a } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définisson $\delta = \min\{\delta^-, \delta^+\}$. Si $0 < |x - x^*| < \delta$, alors

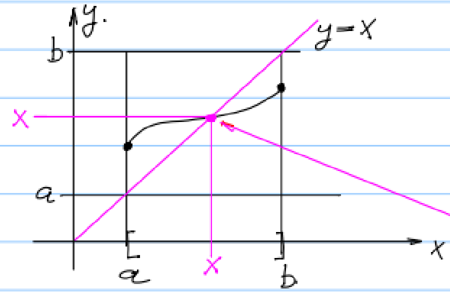
- *soit $x < x^*$, et donc $0 < x^* - x < \delta \leq \delta^-$ et, d'après 2., on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$*
- *soit $x > x^*$, et donc $0 < x - x^* < \delta \leq \delta^+$ et, d'après 2., on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$*

7) Section 7.5

<u>Définition</u>: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet $X \in D$ comme point fixe si $f(X) = X$.

<u>Théorème</u> (du point fixe) : soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Toute fonction <u>continue</u> $f : [a,b] \longrightarrow$ <u>$Im(f) \subset [a,b]$</u> admet un point fixe.



$Im(f) = [m, M] \subset [a,b]$.

point fixe de f

<u>Démonstration</u>

La fonction $g(x) = x - f(x)$ est continue sur $[a,b]$, $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $X \in [a,b]$ tel que $g(X) = 0 \iff f(X) = X$.

8) Section 7.10

7.10. Dérivabilité (en un point) implique continuité (en ce point)

Théorème: une fonction qui est $\underbrace{\text{dérivable en } x_0}_{A}$ est $\underbrace{\text{continue en } x_0}_{B}$

$A \Rightarrow B$

Démonstration:

pourquoi ?

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)$$

pourquoi ?

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}_{=d \text{ par } A}\underbrace{\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right)}_{=0}$$

$$= d\cdot 0 = 0.$$

donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

La réciproque du théorème ($B \Rightarrow A$) est fausse !

9) Enoncez et démontrez le théorème qui permet de calculer la dérivée de f^{-1}

Théorème: Soit I un intervalle, $I \neq \emptyset$, $f : I \to Im(f) \subset \mathbb{R}$ bijective, dérivable, $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors

$$\forall y \in Im(f) = D(f^{-1}), \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Démonstration: Soit $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

On a donc : $\forall y \in D(f^{-1}) = Im(f)$, $f(f^{-1}(y)) = y$

Par dérivation en chaîne on obtient

$\forall y \in Im(f)$, $f'(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y) = 1$ dérivée de y

10) Enoncez le théorème de Rolle et utilisez le pour démontrer le théorème des accroissements finis

8.4. Théorème de Rolle

Théorème : soit $f : D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)=0$, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u)=0$

ACCROISSEMENT FINIS :

Théorème. soit $f : D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \qquad (*)$$

Démonstration : soit

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{équation de la droite en magenta}}$$

$g(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) - f(b) = 0$

g continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Par le théorème de Rolle il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$0 = g'(u) = f'(u) - \left(0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \Rightarrow (*)$$

11) Section 9.1 : savoir énoncer le théorème de Rolle et l'utiliser pour la démo du théorème des accroissements finis généralisé

8.4. Théorème de Rolle

Théorème : soit $f : D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)=0$, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u)=0$

9.1. Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D(f) \cap D(g)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f,g continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, et $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$. Alors il existe $u \in]a,b[$, tel que

$$\boxed{\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Remarque : pour $g(x)=x$ c'est le théorème des accroissements finis

Remarque : $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$ (car si $g(b)=g(a)$, alors il existe u tel que $g'(u)=0$)

Démonstration : on pose

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x)-g(a)) \right)$$

On a $h(a)=h(b)=0$ et on applique le théorème de Rolle

12)Section 10.2.1 théorème 1, fonctions n+1 fois dérivables

Théorème 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a. Plus précisément, pour tout $x \in I$, $x > a$ ($x < a$) il existe $u \in]a, x[$ ($u \in]x, a[$) tel que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}_{= p_n(x) \text{ le polynôme de Taylor d'ordre } n} + \underbrace{(x-a)^n \cdot \varepsilon(x)}_{= r_n(x) \text{, le n-ème reste}}$$

avec

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

u dépend de x

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) \, (x-a)}$$

Remarque: pour $n=0$ on obtient $f(x) = f(a) + f'(u)(x-a)$ ce qui est le théorème des accroissements finis.

13)Section 11.4.1 Théorème de la moyenne généralisé

Théorème de la moyenne généralisé

Soit $f, g \in C^0([a,b])$ et $\forall x \in [a,b], g(x) > 0$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(u) \cdot \int_a^b g(x)\, dx}$$

THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES :

Théorème 2 (théorème des valeurs intermédiaires). Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ prend (au moins une fois) toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration : soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$. Alors, puisque $g(x) > 0$,

$$\forall x \in [a,b], \quad m\, g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M\, g(x)$$

$\Longrightarrow$ propriété iii), i)

$$\boxed{m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx}$$

et il existe donc $v \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = v \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $u \in]a,b[$ tel que $v = f(u)$.