Corrigés - Série 8

1. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{(2x+1)^2(3x-1)\,(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$

b) $b(x) = \dfrac{|x|\,\sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

c) $c(x) = \dfrac{\cos x\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+\sin x}}$

e) $e(x) = \dfrac{(x^2+1)\,(\sin x - 2)}{2x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x\,.$

---

a) La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Il suffit donc de calculer le terme de plus haut degré du numérateur de $a(x)$. :

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^2\cdot 3x\cdot 25\,x^2}{60x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{300\,x^5}{60x^5} = 5\,.$$

b) Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)$, on se place dans un voisinage de $+\infty$.

On peut donc considérer $x>0$: $\quad b(x) = \dfrac{x\,\sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}\,.$

Puis en mettant en évidence les plus hautes puissances de x, on obtient :

$$b(x) = \frac{x\,\sqrt{x\,(1+x^{-2})}}{\sqrt[3]{x^4\,(1-x^{-4})}} = \frac{x\,\sqrt{x}\;\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^4}\;\sqrt[3]{1-x^{-4}}} = \frac{x^{3/2}\;\sqrt{1+x^{-2}}}{x^{4/3}\;\sqrt[3]{1-x^{-4}}} = x^{1/6}\cdot\frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{1-x^{-4}}}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} b(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^{1/6}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{1-x^{-4}}}}_{\to 1} = +\infty\,.$$

c) En considérant $x>0$, on a

$$c(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2\left[1+\frac{1}{x^2}\right]}} = \frac{x^{1/3}\cdot\cos(x)}{|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x^{1/3}\cdot\cos(x)}{x\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\cos(x)}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,.$$

$$\text{Or}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$

et $\cos x$ est borné sur $\mathbb{R}$,

$$\text{donc}\quad \lim_{x\to+\infty} c(x) = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{\text{borné}} = 0\,.$$

d) La fonction $\sqrt[3]{x}$ est une fonction "gentille" sur tout $\mathbb{R}$ (par la suite on dira que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} f(x)} \qquad \text{si} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe.}$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$d(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+\sin x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3\,(1+\frac{\sin x}{x^3})}} = \frac{x}{x\,\sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}}}\,.$$

$$\text{Or} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} = 0\,,$$

$$\text{donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} d(x) = 1\,.$$

e) On étudie séparément $\dfrac{x^2+1}{2x+1}$ et $\sin(x)-2$.

La fonction $(\sin x - 2)$ est non seulement bornée, mais elle est de signe constant. Plus précisément, elle est inférieure ou égale à -1, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D'autre part,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\,(1+\frac{1}{x^2})}{x\,(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}}_{\to 1/2} = +\infty\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{2x+1}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(\sin x - 2)}_{\leq -1 < 0} = -\infty\,.$$

f) L'amplification par l'expression conjuguée permet d'exploiter la différence pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x = \left[\sqrt{x\,(x+1)} - x\right] \cdot \frac{\sqrt{x\,(x+1)}+x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x}\,,$$

$$f(x) = \frac{x\,(x+1)-x^2}{\sqrt{x\,(x+1)}+x} = \frac{x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x}\,.$$

Cette expression, au voisinage de $+\infty$ est toujours une forme indéterminée, mais de type "$\frac{\infty}{\infty}$". On lève cette indétermination de la façon suivante :

pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle f(x) = \frac{x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2\,(1+\frac{1}{x})}+x}$

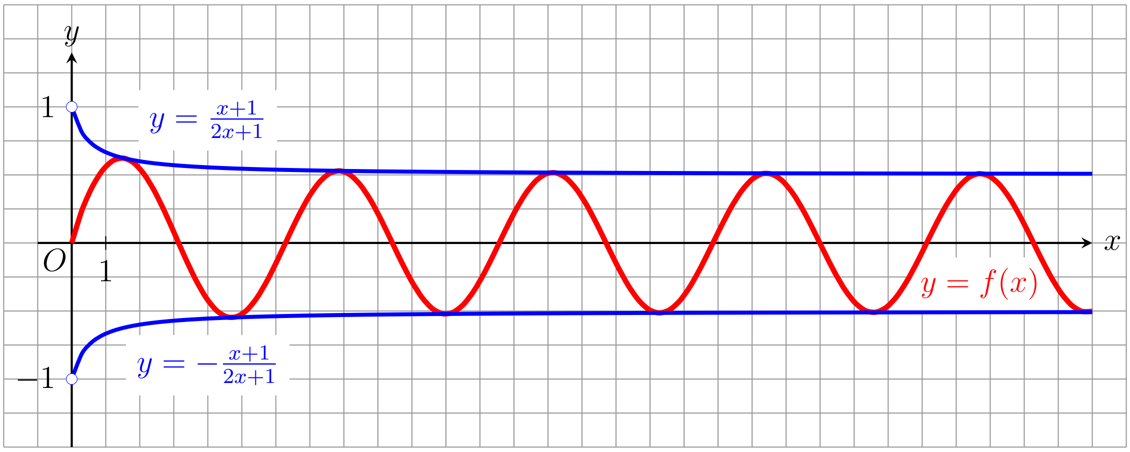
$$= \frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

Il semble que la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1} \cdot \sin x$ diverge lorsque $x \to +\infty$.

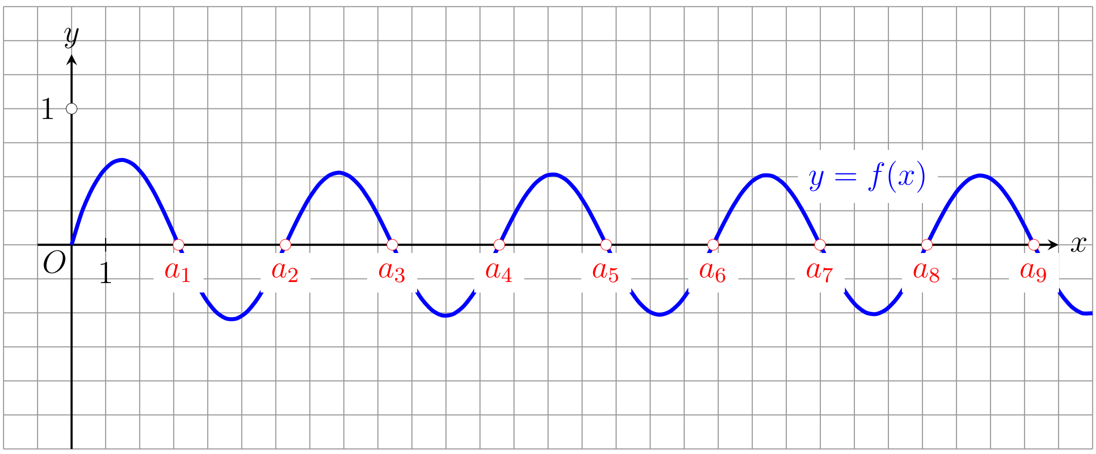
En effet la fonction $\dfrac{x+1}{2x+1}$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$, cela ne permet pas de "calmer" les oscillations de la fonction sinus.



On montre que $f(x)$ diverge en définissant deux suites (a_n) et (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$ qui divergent vers l'infini et dont les images par f ne convergent pas vers la même valeur.

— Soit $a_n = n\,\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (a_n) diverge vers $+\infty$ et la suite $(f(a_n))$ est la suite constante nulle, elle converge vers 0.

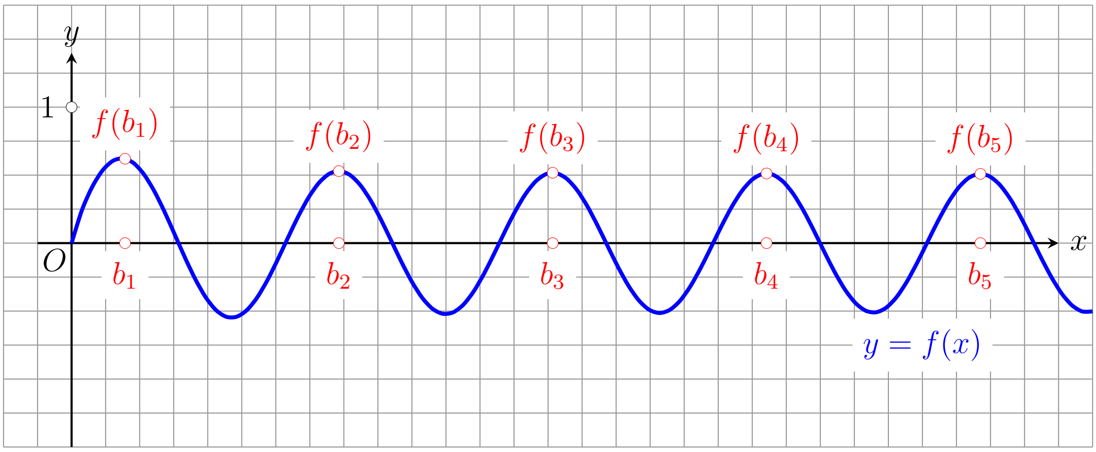


— Soit $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\,\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (b_n) diverge vers $+\infty$ et la suite $(f(b_n))$ a pour terme général

$$f(b_n) = f(\tfrac{\pi}{2} + 2n\,\pi) = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\,\pi + 1}{\pi + 4n\,\pi + 1} = \frac{n\,\left(2\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n}\right)}{n\,\left(4\pi + \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n}}{4\pi + \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}}\,,$$

elle converge vers $\frac{1}{2}$.



Les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$, mais les deux suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ ne convergent pas vers la même valeur :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{2}.$$

La fonction $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ n'admet donc pas de limite.

3. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$

c) $c(x) = x^2\left(\sqrt[3]{8x^3-1} - 2x\right)$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + 2x\right)(3 - \cos^2 x)$

d) $d(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2-x}$.

---

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$".

On lève cette indétermination en mettant en évidence les plus hautes puissances de x au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $x < 0$, on a

$$a(x) = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-2}} = \frac{x - |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x\,\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = \frac{x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x\,\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = 2.$$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + 2x\right)(3 - \cos^2 x)$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $3 - \cos^2 x$ n'admet pas de limite, mais reste de signe constant : $3 - \cos^2 x \geq 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)$ est une forme indéterminée de type "$\infty-\infty$".

On lève cette indétermination par factorisation :

$$\sqrt{x^2+1}+2x = |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}+2x = -x\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}+2x\,, \qquad \text{car } x<0\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\right) = -\infty\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} b(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{\left(3-\cos^2 x\right)}_{\geq 2>0} = -\infty\,.$$

c) On amplifie par l'expression conjuguée de $\left(\sqrt[3]{8x^3-1}-2x\right)$ pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$c(x) = x^2\left(\sqrt[3]{8x^3-1}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+(2x)^2}{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+(2x)^2}\,,$$

$$= \frac{x^2\,\left[(8x^3-1)-(2x)^3\right]}{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+(2x)^2} = \frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(8-x^{-3})^2}+2\sqrt[3]{8-x^{-3}}+4\right)}\,,$$

$$c(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(8-x^{-3})^2}+2\sqrt[3]{8-x^{-3}}+4}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(8-x^{-3})^2}+2\sqrt[3]{8-x^{-3}}+4} = -\frac{1}{12}\,.$$

d) On amplifie par l'expression conjuguée du numérateur pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$d(x) = \frac{x^2-\sqrt{(x^2-x)(x^2+1)}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^4-(x^4-x^3+x^2-x)}{\sqrt{x^2+1}\,\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}\right)}\,,$$

$$d(x) = \frac{x^3-x^2+x}{|x|\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(x^2+x^2\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}}\right)}\,, \qquad x<0\,,$$

$$d(x) = \frac{x^3\left(1-x^{-1}+x^{-2}\right)}{x^3\left[-\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(1+\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}}\right)\right]}\,,$$

$$d(x) = \frac{1-x^{-1}+x^{-2}}{-\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(1+\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}}\right)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} d(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

4. Déterminer p et q réels de sorte que $\forall\ a\,,\ b\ \in\ \mathbb{R}$ on ait

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\right]=0\,.$$

On commence par observer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\right]$ n'est pas une forme indéterminée pour tout $p\in\mathbb{R}$.

- Si $p\geq 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\right]=+\infty\,.$

  Il est donc nécessaire que p soit strictement négatif.

- Et si $p<0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\right]$ est une forme indéterminée de type "$\infty-\infty$".

On pose $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\,,\quad x<0\,.$

On amplifie $f(x)$ par son expression conjuguée pour pouvoir "comparer" $\sqrt{x^2+ax+b}$ et $(px+q)$:

$$f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)=\left[\sqrt{x^2+ax+b}-(px+q)\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2+ax+b}+(px+q)}{\sqrt{x^2+ax+b}+(px+q)}\,,$$

$$f(x)=\frac{(x^2+ax+b)-(px+q)^2}{\sqrt{x^2+ax+b}+(px+q)}=\frac{(1-p^2)\,x^2+(a-2pq)\,x+(b-q^2)}{|x|\,\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+(px+q)}\,,\quad x<0\,,$$

$$f(x)\;=\;\frac{x\left[(1-p^2)\,x+(a-2pq)+\frac{b-q^2}{x}\right]}{x\left[-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+p+\frac{q}{x}\right]}\;=\;\frac{(1-p^2)\,x+(a-2pq)+\frac{b-q^2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+p+\frac{q}{x}}$$

Si $1-p^2\neq 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty\,.$

Il est donc nécessaire que $p^2=1$ et donc que $p=-1$, (car $p<0$).

On vérifie que dans ce cas, le dénominateur ne tend pas vers 0.

Sachant que $p=-1$, on en déduit que

$$f(x)=\frac{(a+2q)+\frac{b-q^2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}-1+\frac{q}{x}}\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{a+2q}{2}\,.$$

En conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\,,\quad\forall\,a\,,\,b\in\mathbb{R}$ si et seulement si

$$p=-1\qquad\text{et}\qquad q=-\frac{a}{2}\,.$$

5. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) \cdot \mathrm{sgn}\,(1-x)$.

a) Faire la représentation graphique de la fonction f (unité = 6 carrés).

b) Pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, déterminer graphiquement $\delta = \delta_1$ vérifiant la relation suivante :

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

c) Qu'en est-il pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$?

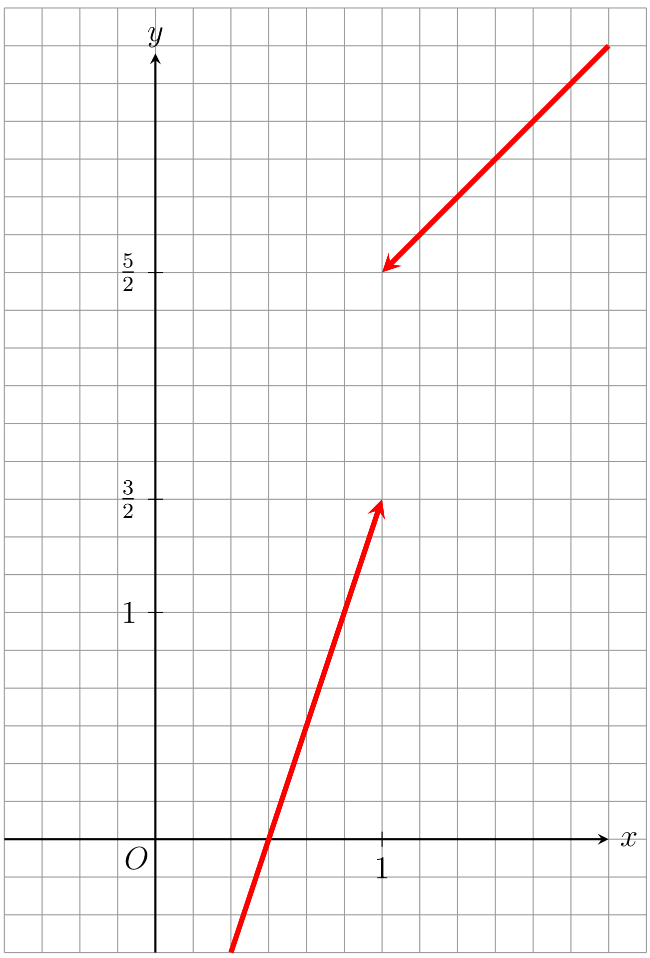
Il s'agit d'illustrer la définition de la limite en x_0 sur un contre-exemple.

a) $f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) \cdot \mathrm{sgn}\,(1-x)$, $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Si $x < 1$, $\quad \mathrm{sgn}(1-x) = +1 \quad$ et $\quad f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) = 3x - \frac{3}{2}$.
- Si $x > 1$, $\quad \mathrm{sgn}(1-x) = -1 \quad$ et $\quad f(x) = 2x - (x - \frac{3}{2}) = x + \frac{3}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ x + \frac{3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de $f(x)$:



b) On détermine graphiquement les abscisses x dont l'image par f est dans l'ε_1-voisinage de 2 :

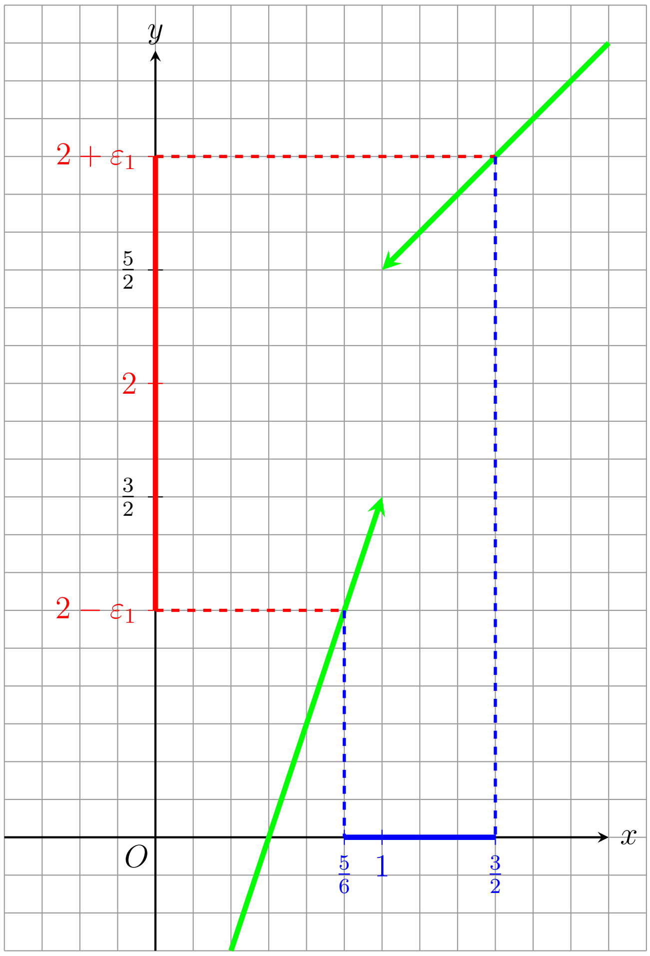
$$|\,f(x)-2\,|<\varepsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in\,]\,2-\varepsilon_1\,,\,2+\varepsilon_1\,[\quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in\,]\,1\,,\,3\,[\,.$$

$$f(x)\in\,]\,1\,,\,3\,[\quad \Leftrightarrow \quad x\in\,]\,\tfrac{5}{6}\,,\,\tfrac{3}{2}\,[\,.$$

On en déduit δ_1 en imposant que l'intervalle $]\,1-\delta_1\,,\,1+\delta_1\,[$, centré en $x_0=1$, soit inclus dans l'intervalle $]\,\frac{5}{6}\,,\,\frac{3}{2}\,[$.

Tout $0<\delta_1\leq\frac{1}{6}$ convient, en effet :

$$0<|\,x-1\,|<\delta_1\leq\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad |\,f(x)-2\,|<\varepsilon_1\,.$$



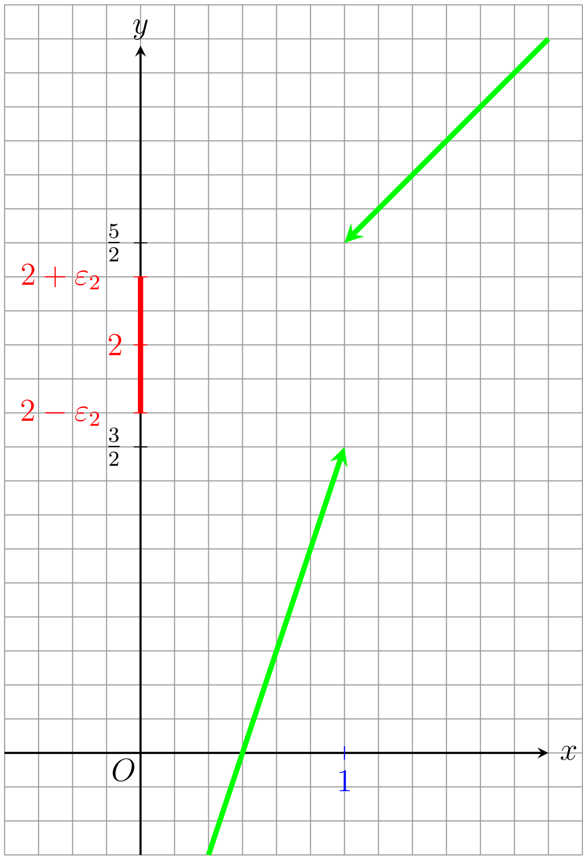
c) Pour $\varepsilon_2=\frac{1}{3}$, l'antécédent par f de l'intervalle $]\,2-\varepsilon_2\,,\,2+\varepsilon_2\,[$ est l'ensemble vide.

Donc δ_2 n'existe pas.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq 2\,.$

Plus généralement, quelque soit l'ordonnée $a\in\mathbb{R}$, l'ε_2-voisinage de a $J=\,]\,a-\varepsilon_2\,,\,a+\varepsilon_2\,[$ ne peut pas contenir l'image par f d'un intervalle $I=\,]\,1-\delta\,,\,1+\delta\,[$, $\delta>0$, car J est de longueur $\ell=2\,\varepsilon_2=\frac{2}{3}<1\,.$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.



6. Soit $f(x) = a\,x + b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques.
Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a\,x_0 + b$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - (a\,x_0 + b)| < \varepsilon .$$

On exploite la "contrainte verticale" définie par ε, [$f(x)$ appartient à l' $\varepsilon-$voisinage de $(a\,x_0 + b)$], pour en déduire une "contrainte horizontale" : x appartient à un $\delta-$voisinage de x_0 :

$$|a\,x + b - (a\,x_0 + b)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a\,x - a\,x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon .$$

Deux cas se présentent selon que a est nul ou non nul :

— si $a \neq 0$, $\quad |f(x) - (a\,x_0 + b)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$,

donc tout δ vérifiant $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$ est solution, en effet :

$$0 < |x - x_0| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{|a|} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - (a\,x_0 + b)| < \varepsilon$$

— et si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et tout $\delta > 0$ convient, en effet $|f(x) - b| = 0 < \varepsilon$ sans aucune contrainte sur x.

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. De telles fonctions sont dites continues sur $\mathbb{R}$.

7. Démontrer le résultat suivant.

Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Hypothèse : $\forall\ \varepsilon > 0\,,\ \exists\ M(\varepsilon) > 0$ tel que $x > M \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

Conclusion : $\forall\ A > 0\,,\ \exists\ M^*(A) > 0$ tel que $x > M^* \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > A$.

Démonstration : Soit $A > 0$ donné, on cherche à déterminer $M^*(A)$.

$$\frac{1}{f(x)} > A \quad\Leftrightarrow\quad f(x) < \frac{1}{A} \quad\Leftrightarrow\quad |f(x) - 0| < \frac{1}{A}\,, \qquad \text{car} \quad f(x) > 0\,.$$

Or d'après l'hypothèse, si x est suffisamment grand, $|f(x) - 0|$ est aussi petit que l'on veut.

Plus précisément, si $x > M(\frac{1}{A})$, alors $|f(x) - 0| < \frac{1}{A}$.

Donc tout $M^*(A)$ plus grand que $M(\frac{1}{A})$ convient.

En effet : $x > M^*(A)$, (avec $M^*(A) \geq M(\frac{1}{A})$) $\Rightarrow \frac{1}{f(x)} > A$.
