Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 10

Valeurs propres : exercice 19

(a) On commence par tester si $\vec{u}$ est un vecteur propre en utilisant la définition : $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Eventuellement penser à annuler le produit scalaire.

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} - 4\vec{x} \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de f est de degré deux, il a au plus deux racines réelles λ_1 et λ_2, qui sont les valeurs propres de f, de sous espaces propres $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$.

On commence par tester si le vecteur $\vec{u}$ répond à cette définition.

- $\vec{u}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$
  On calcule, en posant $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$:
  $f(\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{u} - 4\vec{u} = 2\vec{u} - 4\,\vec{u} = -2\vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}$ est un vecteur propre.
  Il est associé à la valeur propre $\lambda = -2$.
- Il faut déterminer si il y a un deuxième vecteur propre. On peut le trouver parmi les vecteurs qui annulent le produit scalaire $\vec{x}\cdot\vec{u}$.

  Soit $\vec{w}$ un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$.

  $\vec{w}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{w}) = \lambda\vec{w}$
  On calcule :
  $f(\vec{w}) = (\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{u} - 4\vec{w} = -4\vec{w} = \lambda\vec{w}$
  $\Leftrightarrow\;\vec{w}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$

L'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -4$, de multiplicité égale à 1.
Les sous espaces propres sont de dimension 1 : ce sont des droites. L'endomorphisme f est diagonalisable.

$E(-2)$ est la droite $(O\,,\vec{u})$
$E(-4)$ est la droite $(O\,,\vec{w})$

Soit la base $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\vec{w})$. C'est une base propre de f. D'où la matrice de f par rapport à cette base :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f est une homothétie de centre O et rapport -2, composée avec une affinité d'axe la droite $(O\,,\vec{u})$, de direction $\vec{w}$ et rapport 2 .

(b) On définit une base propre commune à h et g, puis on effectue un changement de base.

On constate que g et h sont diagonalisables et possèdent la même base propre $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\vec{v})$. On peut donc déterminer la matrice de $g \circ h$ dans cette base propre.

- g est une affinité d'axe $(O\,,\vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et rapport -1 .

  Par rapport à cette base : $M'_g \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- On connaît les valeurs et les sous espaces propres de h :
  $E(2)$ est la droite $(O\,,\vec{u})$. Donc : $h(\vec{u}) \;=\; 2\vec{u}$.
  $E(-3)$ est la droite $(O\,,\vec{v})$. Donc : $h(\vec{v}) \;=\; -3\vec{v}$.

  Dans la base propre $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\vec{v})$ la matrice de h est : $M'_h \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

- On peut donc calculer la matrice de $g \circ h$ par rapport à la base $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\vec{v})$:

  $$M'_{goh} \;=\; M'_g \cdot M'_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Maintenant on détermine la matrice de $g \circ h$ par rapport à la base $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en effectuant un changement de bases.
On connaît les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:
$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
D'où la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à la base $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\vec{v})$:
$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On considère le diagramme de changement de bases suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\begin{array}{c} \color{red}{\mathbb{R}^2, \mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \\ X_e \end{array} \arrow[r, red, "\color{red}{M_{goh}}"] \arrow[d, squiggly] & \begin{array}{c} \color{red}{\mathbb{R}^2, \mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \\ Y_e = M X_e \end{array} \arrow[d, squiggly] \\
\begin{array}{c} \mathbb{R}^2, \mathcal{B}\,(\vec{u}, \vec{v}) \\ X'_u \end{array} \arrow[r, "M'_{goh}"] \arrow[u, "P"] & \begin{array}{c} \mathbb{R}^2, \mathcal{B}\,(\vec{u}, \vec{v}) \\ Y'_u = M' X'_u \end{array} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$M' \;=\; P^{-1}\,M\,P \quad \Leftrightarrow \quad M \;=\; P\,M'\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ M est la matrice de $g \circ h$ par rapport à la base $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

(c) s et f admettent les mêmes vecteurs propres mais pas les mêmes valeurs propres.

- On commence par déterminer la matrice de s par rapport à la base $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

  $$M_s \;=\; M_{goh} + M_l \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta - 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \beta \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Les sous espaces propres de f, obtenus au point a), sont :
la droite $(O\,,\vec{u})$ et $\vec{u}=\vec{e}_1+\vec{e}_2\,,$
la droite $(O\,,\vec{w})$ où $\vec{w}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$; soit par exemple $\vec{w}=-\,\vec{e}_1+\vec{e}_2\,.$

  Ce sont par hypothèse les espaces propres de s, ils sont associés à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2.

  Ainsi : $\left\{\begin{array}{lcl} s(\vec{u}) & = & \lambda_1\,\vec{u} \\ s(\vec{w}) & = & \lambda_2\,\vec{w}\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$
$\Leftrightarrow$
$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta+1 & = & \lambda_1 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ -\alpha+\beta-1 & = & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & = & 4\end{array}\right.$$

Pour les paramètres les solutions sont : $\alpha=1$ et $\beta=-2\,.$
Les valeurs propres de s sont : $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=4\,.$

Valeurs propres : exercice 20

(a) On commence par tester si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres en utilisant la définition : $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(\vec{x})=\lambda\vec{x}$.
Il faut éventuellement penser à annuler le produit scalaire.

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x})=\vec{x}-4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v}\end{array}$$

Le polynôme caractéristique de f est de degré trois, il a au plus trois racines réelles $\lambda_1\,,\ \lambda_2$ et $\lambda_3\,,$ qui sont les valeurs propres de f.
On commence par tester si les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ répondent à cette définition.

- $\vec{u}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$
On calcule, en posant $\vec{u}\cdot\vec{v}=k$:
$f(\vec{u})=\vec{u}-4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,(\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{v}=\vec{u}-4\,k\,||\vec{u}||^2\,\vec{v}\neq\lambda\vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}$ n'est pas un vecteur propre.
- $\vec{v}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{v})=\lambda\vec{v}$
On calcule :
$f(\vec{v})=\vec{v}-4\,k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{v}=\vec{v}-4\,k^2\,\vec{v}=(1-4k^2)\,\vec{v}=\lambda\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{v}$ est un vecteur propre.

  Il est associé à la valeur propre $\lambda=1-4k^2\,.$
- Il faut déterminer encore deux vecteurs propres. On les trouve parmi les vecteurs qui annulent le produit scalaire.

  Soit $\vec{r}$ et $\vec{s}$ des vecteurs linéairement indépendants et perpendiculaires à $\vec{u}\,.$

  On calcule :
$f(\vec{r})=\vec{r}-4\,k\,(\vec{r}\cdot\vec{u})\,\vec{v}=\vec{r}-0\;\vec{v}=1\,\vec{r}=\lambda\vec{r} \;\Leftrightarrow\; \vec{r}$ est un vecteur propre.
$f(\vec{s})=\vec{s}-4\,k\,(\vec{s}\cdot\vec{u})\,\vec{v}=\vec{s}-0\;\vec{v}=1\,\vec{s}=\lambda\vec{s} \;\Leftrightarrow\; \vec{s}$ est un vecteur propre.

  Ces deux vecteurs sont associés à la valeur propre $\lambda=1\,.$

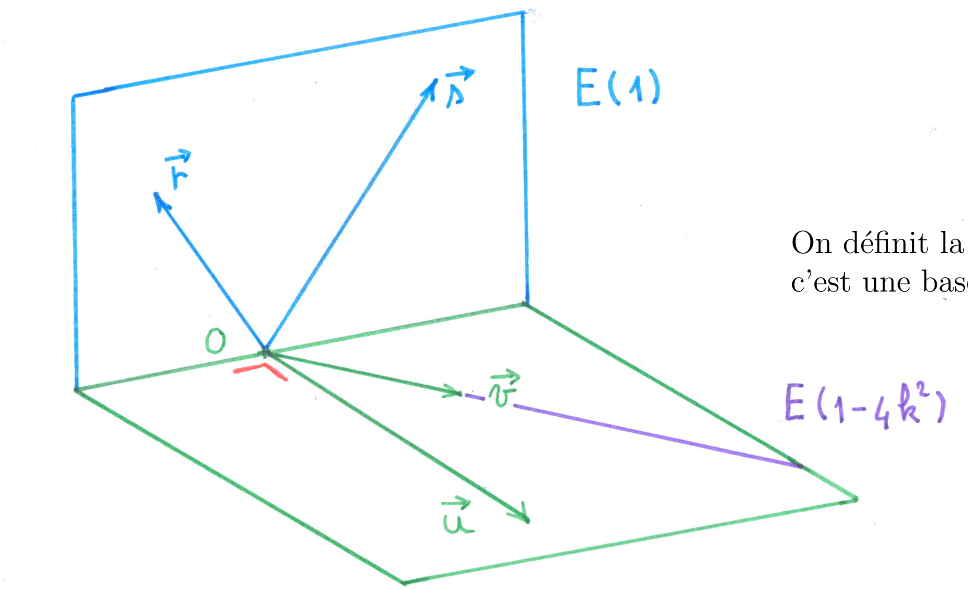
L'endomorphisme f a les valeurs propres suivantes : $\lambda_1 = 1$ de multiplicité égale à 2 et $\lambda_2 = 1 - 4k^2$, de multiplicité égale à 1 (car par hypothèse $k \neq 0$ donc $\lambda_2 \neq 1$).

$E(1)$ est le plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,)$.

Le vecteur $\vec{v} \notin E(1)$ car $\vec{v}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{u}$.

$E(1-4k^2)$ est la droite $(O\,,\vec{v}\,)$.

Les dimensions des espaces propres correspondent aux ordres de multiplicité donc f est diagonalisable.



On définit la base $\mathcal{B}(\vec{r}\,,\vec{s}\,,\vec{v}\,)$: c'est une base propre de f.

D'où la matrice de f par rapport à cette base :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(\vec{r}) & = & 1\,\vec{r} \\ f(\vec{s}) & = & 1\,\vec{s} \\ f(\vec{v}) & = & (1-4k^2)\,\vec{v} \end{array} \right.$$

Si $1 - 4k^2 \neq 0$ c'est-à-dire si $k \neq \pm\frac{1}{2}$, f est une affinité dont l'ensemble des points fixes est le plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,)$, de direction parallèle à $\vec{v}$ et de rapport $1 - 4k^2$.

Si $1 - 4k^2 = -1$ c'est-à-dire si $k \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, f est une symétrie dont l'ensemble des points fixes est le plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,)$, de direction parallèle à $\vec{v}$.

(b) On montre que la base propre de f est aussi une base propre de g .

- L'axe de l'affinité g est la droite $(O\,,\vec{v}\,)$ donc :
  $g(\vec{v}) = 1\,\vec{v}$ et $(O\,,\vec{v}\,) = E_g(1)$

  Le rapport est 2 et la direction de g est perpendiculaire à $\vec{u}$ donc :
  $g(\vec{r}) = 2\,\vec{r}$, $g(\vec{s}) = 2\,\vec{s}$ et $E_g(2)$ est le plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,)$.

  Sous a) on a déterminé que l'application f est une affinité de direction parallèle au plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,)$ et ce plan est le sous espace propre $E_f(1)$. L'axe de cette affinité est la droite $(O\,,\vec{v}\,)$, qui est le sous espace propre $E_f(1-4k^2)$.

  Ainsi : $$\begin{array}{lclcl} E_g(1) & = & E_f(1-4k^2) & = & (O\,,\vec{v}\,) \\ E_g(2) & = & E_f(1) & = & (O\,,\vec{r}\,,\vec{s}\,) \end{array}$$

La base $\mathcal{B}(\vec{r}\,,\vec{s}\,,\vec{v})$ est aussi une base propre de g.

- Par rapport à cette base :

$$M_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} g(\vec{r}) & = & 2\,\vec{r} \\ g(\vec{s}) & = & 2\,\vec{s} \\ g(\vec{v}) & = & 1\,\vec{v} \end{array} \right.$$

On peut calculer la matrice de h par rapport à cette base :

$$M_h = M_g \cdot M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix}$$

M_h est une matrice diagonale et $\mathcal{B}$ est une base propre de h.

La projection j doit admettre une valeur propre nulle.
On calcule la matrice de j dans la base $\mathcal{B}(\vec{r}\,,\vec{s}\,,\vec{v})$:

$$M_j = 6\,I_3 + 2\,M_h = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 8-8k^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10}(8-8k^2) \end{pmatrix}$$

j est une projection de direction $\vec{v}$ si et seulement si elle admet une valeur propre nulle associée au vecteur $\vec{v}$:

$$j(\vec{v}) = \vec{0} = 0\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10}(8-8k^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm 1\,.$$

Dans les deux cas, j est une homothétie de centre O et de rapport 10, composée avec une projection sur le plan $(O\,,\vec{r}\,,\vec{s})$, parallèle à $\vec{v}$.

Rang-Systèmes : exercice 1

Avant d'utiliser des méthodes générales de résolution, il est bon de toujours vérifier une éventuelle dépendance linéaire simple des vecteurs lignes ou des vecteurs colonnes.

(a) Les vecteurs colonnes sont colinéaires de manière évidente.
La matrice A est une matrice 4×2, donc $\text{rg}A \leq 2$
On constate que les deux vecteurs colonnes $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires et que : $\vec{a} = 2\vec{b}$

$$\text{donc} \quad \text{rg}A = 1.$$

(b) On remarque que les trois vecteurs lignes sont colinéaires.
La matrice B est une matrice 3×3, donc $\text{rg}B \leq 3$
On constate que les trois vecteurs lignes $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires
et que : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = 2\vec{c} \\ \vec{b} = 3\vec{c} \end{array} \right.$

$$\text{donc} \quad \text{rg}B = 1.$$

(c) On constate que les vecteurs colonnes sont deux à deux linéairement indépendants (non colinéaires).

La matrice C est une matrice 3×4, donc rg $C \leq 3$

De plus les vecteurs colonnes sont deux à deux linéairement indépendants, donc rg $C \geq 2$.

Pour que le rang soit égal à 3, il doit exister au moins un sous-déterminant d'ordre 3 non nul ; il y a donc au plus 4 sous-déterminants d'ordre 3 à calculer :

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -8 & -17 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ -8 & -33 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ -33 & -21 \end{vmatrix} =$$
$$= 231 - 231 = 0$$

$$\det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -17 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 21 & -3 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & -17 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 21 & -3 \\ 0 & -17 & 11 \\ 0 & -17 & 11 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} -17 & 11 \\ -17 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \\ 0 & -8 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 0 & -8 & 11 \\ 0 & -8 & 11 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} -8 & 11 \\ -8 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & -17 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 21 \\ 6 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & -17 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 0 & -8 & -17 \\ 0 & -8 & -17 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} -8 & -17 \\ -8 & -17 \end{vmatrix} = 0$$

On constate que les 4 sous-déterminants sont nuls, donc $\quad \mathrm{rg} C = 2$.

(d) La matrice D est une matrice 4×3, donc $\mathrm{rg} D \leq 3$

On peut chercher...et trouver une relation linéaire entre les trois vecteurs colonnes.

Or $\quad \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg} D = 2 \quad$ car $\quad \vec{a} \neq k\vec{b}$.

On peut aussi faire plus classique et calculer la valeur de tous les sous-déterminants d'ordre 3.

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$$\det D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(6 - 6) = 0$$

$$\det D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-6+6) = 0.$$

On constate que les 4 sous-déterminants sont nuls, donc $\quad \mathrm{rg} D = 2.$

(e) La matrice E est une matrice 3×3, donc $\mathrm{rg} E \leq 3$.
La matrice est de rang 3 si son déterminant est différent de 0.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 3 \\ 2a-1 & 2a & 4-a \\ 1 & 2a^2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 3 \\ 2a-1 & 2a & 4-a \\ 0 & 2a^2-a-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2a^2-a-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2a-1 & 4-a \end{vmatrix} = (2a^2-a-1)(-1)(4-a-6a+3) = 7(a+\frac{1}{2})(a-1)^2$$

i) Si $\quad a \neq -\frac{1}{2} \quad$ et $\quad a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad |E| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg} E = 3$;

ii) Si $\quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg} E = 1$;

iii) Si $\quad a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -1 & \frac{9}{2} \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad :$

les vecteurs lignes sont deux à deux linéairement indépendants $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg} E = 2.$

(f) La matrice F est une matrice 3×3, donc $\mathrm{rg}\, F \leq 3$.
La matrice est de rang 3 si son déterminant est différent de 0.

$$\det F = \begin{vmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 9 & -7 & 8a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & 9a-7 & 8a-27 \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} -a & 3 \\ 9a-7 & 8a-27 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 9a-7 & 8a-27 \end{vmatrix} =$$

$$= a(27a-8a^2-27a+21)-(81-24a+35-45a) = -8a^3+90a-116 = (-8a^2-16a+58)(a-2)$$

i) Si $\quad a \neq \{2\,;\, -1+\frac{\sqrt{33}}{2}\,;\, -1-\frac{\sqrt{33}}{2}\} \quad \Rightarrow \quad \det F \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}\, F = 3$;

ii) Si $\quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & -7 & 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}\, F = 2$; car, par exemple, les deux premiers vecteurs colonnes ne sont pas proportionnels ;

iii) Si $\quad a = -1 \pm \frac{\sqrt{33}}{2} \quad \Rightarrow \quad E = \begin{pmatrix} -1 \pm \frac{\sqrt{33}}{2} & -3 & 5 \\ 1 & +1 \mp \frac{\sqrt{33}}{2} & 3 \\ 9 & -7 & -8 \pm 4\sqrt{33} \end{pmatrix} \quad :$

les vecteurs lignes sont deux à deux linéairement indépendants $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}\, F = 2.$

Rang-Systèmes : exercice 2

Ne pas résoudre le système $f(\vec{x}) = \vec{0}$ pour déterminer le noyau mais utiliser le théorème de la dimension, en déduire la dimension de l'image de f, puis discuter en fonction de k.

Du théorème de la dimension, on en déduit :

$$\dim \operatorname{Im} f \;=\; \dim \mathbb{R}^3 \;-\; \dim\, \ker f \;=\; 3-1=2$$

Par définition, le rang de A est la dimension de $\operatorname{Im} f$, c'est donc la dimension du sous espace engendré par les vecteurs- colonne de A.

$$\operatorname{rg} A \;=\; \dim \operatorname{Im} f \;=\; \dim\,[\, f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)\,,\, f(\vec{e}_3)\,]_{sev}$$

Déterminer le rang revient donc à tester la dépendance ou l'indépendance des trois vecteurs $f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$. On calcule donc le déterminant de la matrice A.

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} 8-k & 2 & 3 \\ 1 & 9-k & 3 \\ 1 & 2 & 10-k \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 8-k & 2 & 3 \\ 0 & 7-k & -7+k \\ 1 & 2 & 10-k \end{vmatrix} \;=$$

$$= \begin{vmatrix} 8-k & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7+k \\ 1 & 12-k & 10-k \end{vmatrix} \;=\; -\,(k-7)^2\,(k-13)$$

- $m \notin \{7\,,13\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;=\; 3$
- $m \in \{7\,,13\} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;\leq 2$

Discussion de la dimension de $\ker f$ **en fonction du paramètre** k

- $m \notin \{7\,,13\} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;=\; 3 \;=\; \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow\; \dim\, \ker f = 0 \neq 1$
- $m = 7 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;\leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

  $\operatorname{rg} A \;=\; 1 \;=\; \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow\; \dim\, \ker f = 2 \neq 1$
- $m = 13 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;\leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à deux si et seulement si il existe *un déterminant principal* P d'ordre deux différent de 0.

  Soit : $P \;=\; \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A \;=\; 2$

  $\operatorname{rg} A \;=\; 2 \;=\; \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow\; \dim\, \ker f = 1$

Conclusion : $\dim\, \ker f = 1 \;\Leftrightarrow\; k = 13$

Rang-Systèmes : exercice 3

Première partie

Discuter le rang de f revient, par définition, à discuter le rang de A en fonction du paramètre m.

Discussion du rang de A en fonction du paramètre m

Par définition, le rang de A est la dimension de $\operatorname{Im} f$, c'est donc la dimension du sous espace engendré par les vecteurs- colonne de A.

$$\operatorname{rg} A \;=\; \dim \operatorname{Im} f \;=\; \dim\left[\, f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)\,,\, f(\vec{e}_3)\,\right]_{sev}$$

Déterminer le rang revient à tester la dépendance ou l'indépendance des trois vecteurs $f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$. On calcule donc le déterminant de la matrice A.

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1-2m & m+1 & 1 \\ 1 & 1-m & -m \end{vmatrix} \;=\; -\,2m\,(m-2)$$

Il y a donc trois cas à discuter.

- $\mathbf{m} \notin \{\mathbf{0}\,,\mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;=\; 3 \;=\; \operatorname{rg} f$
- $\mathbf{m} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;\leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à deux si et seulement si il existe *un déterminant principal* P d'ordre deux différent de 0.

  Soit $: P \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A \;=\; 2 \;=\; \operatorname{rg} f$

- $\mathbf{m} = \mathbf{2} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;\leq 2$ La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à deux si et seulement si il existe *un déterminant principal* P d'ordre deux différent de 0.

  Soit $: P \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A \;=\; 2 \;=\; \operatorname{rg} f$

Deuxième partie

$$\begin{aligned} f^{-1}(\overrightarrow{OP'}) \neq \varnothing \;&\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OP'} \in \operatorname{Im} f \\ &\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} B \;=\; \operatorname{rg} A \text{ où } B \text{ est la matrice augmentée de } A \;: \\ &\;\; B \;=\; (A \quad \overrightarrow{OP'}) \in \mathbb{M}(3\times 4\,,\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Il faut discuter le rang de B en fonction des valeurs de m qui ont été obtenues.

Discussion du rang de B en fonction du paramètre

Il y a donc aussi trois cas à discuter.

- $\mathbf{m} \notin \{\mathbf{0}\,,\mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \;=\; 3 \;=\; \dim \operatorname{Im} f$

  Dans ce cas : $\operatorname{Im} f \;=\; \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{OP'} \in \mathbb{R}^3$. Donc on a toujours que :

  $$\overrightarrow{OP'} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(\overrightarrow{OP'}) \neq \varnothing$$

- $\mathbf{m} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} \in \operatorname{Im} f \quad & \Leftrightarrow \quad \dim [\, f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)\,, \overrightarrow{OP'}]_{sev} = \dim \operatorname{Im} f \\ & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \end{aligned}$$

et

$\overrightarrow{OP'} \notin \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$

avec

$$B = (A \quad \overrightarrow{OP'}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ : matrice augmentée de } A\,.$$

Il faut donc maintenant déterminer le rang de B.

Or $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$ si et seulement si *tous les déterminants caractéristiques* construits sur P sont nuls.

Dans ce cas il y a un seul déterminant caractéristique car :

$$(\text{nombre de ligne de } A) \; - \; (\text{rang de } A) = 3 - 2 = 1$$

D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^{-1}(\overrightarrow{OP'}) \neq \varnothing$$

- $\mathbf{m} = \mathbf{2} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Il faut déterminer le rang de la matrice augmentée B.

$$B = (A \quad \overrightarrow{OP'}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a un seul déterminant caractéristique construit sur P car :
$(\text{nombre de ligne de } A) \; - \; (\text{rang de } A) = 3 - 2 = 1$.

D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} \notin \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^{-1}(\overrightarrow{OP'}) = \varnothing$$

Conclusion

$f^{-1}(\overrightarrow{OP'}) \neq \varnothing \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\}$

Rang-Systèmes : exercice 4

(a) Soit A la matrice de f :
Par définition : $\text{rg}\, f \;=\; \text{rg}\, A$
Il faut d'abord déterminer la matrice A et son rang.
On a :

$$f(\vec{e}_1) \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; f(\vec{e}_2) \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\; f(\vec{e}_3) \;=\; \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice A de f : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Par définition, le rang de A est la dimension de $\text{Im}\, f$, c'est la dimension du sous espace engendré par les vecteurs colonne de A.

$$\text{rg}\, A \;=\; \dim \text{Im}\, f \;=\; \dim\left[\, f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)\,,\, f(\vec{e}_3)\,\right]_{sev} \;\leq\; 3$$

Déterminer le rang revient à tester la dépendance ou l'indépendance des trois vecteurs $f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$. On calcule donc le déterminant de la matrice A.

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, A \leq 2$$

Le rang de A est égal à deux si et seulement si il existe un *déterminant principal* noté P d'ordre deux différent de 0.
Ce qui est le cas ici car soit : $P \;=\; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\text{rg}\, A \;=\; 2 \;=\; \text{rg}\, f$.

Soit A la matrice de f :
$\vec{v} \in \text{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, B \;=\; \text{rg}\, A$ où B est la matrice augmentée de A :
$B \;=\; (A \quad \vec{v}) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $P \;=\; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ et $\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\text{rg}\, A \;= 2 \;=\; \dim \text{Im}\, f$

On a les équivalences suivantes :

$\vec{v} \;\in \text{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \dim\left[\, f(\vec{e}_1)\,,\, f(\vec{e}_2)\,,\, f(\vec{e}_3)\,,\vec{v}\right]_{sev} \;=\; \dim \text{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, B \;=\; \text{rg}\, A$

et

$\vec{v} \notin \text{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, B \;\neq\; \text{rg}\, A$

avec

$$B \;=\; (A \quad \vec{v}) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$: matrice augmentée de A.

Il faut donc déterminer le rang de B, il doit être égal à 2 pour que $\vec{v}$ appartienne à $\text{Im}\, f$.

Or $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$ si et seulement si *tous les déterminants caractéristiques* construits sur P sont nuls.
Dans ce cas il y a un seul déterminant caractéristique car :

$$(\text{nombre de ligne de } A) - (\text{rang de } A) = 3 - 2 = 1$$

D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{v} \notin \operatorname{Im} f$$

Pour déterminer si $\vec{w} \in \operatorname{Im} f$, on écrit la matrice augmentée B avec le vecteur $\vec{w}$ et on discute son rang en fonction du paramètre m.
Le raisonnement est donc identique à celui de la partie précédente, c'est-à-dire :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \dim\left[\, f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)\,, \vec{w}\right]_{sev} = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = 2$$

avec

$$B = (A \quad \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & m \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} : \text{matrice augmentée de } A\,.$$

Donc pour que $\vec{w}$ appartienne à $\operatorname{Im} f$, le rang de B doit être égal à 2.

Il y a un seul déterminant caractéristique construit sur $P = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ car :

$(\text{nombre de ligne de } A) - (\text{rang de } A) = 3 - 2 = 1\,.$

D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & m+6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m + 6$$

Conclusion :

$m = -6 \Leftrightarrow C_1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{w} \in \operatorname{Im} f$

$m \neq -6 \Leftrightarrow C_1 \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{w} \notin \operatorname{Im} f$

(b) Par définition : $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$. Il faut donc discuter le rang de la matrice A en fonction de m.

Discussion du rang de A en fonction du paramètre m

Par définition, le rang de A est la dimension de $\operatorname{Im} f$, c'est donc la dimension du sous espace engendré par les vecteurs colonne de A.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} f = \dim\left[\, f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)\,\right]_{sev} \leq 3$$

Déterminer le rang revient à tester la dépendance ou l'indépendance des trois vecteurs $f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$. On calcule le déterminant de la matrice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & m(m-1) & -m \\ m-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m(m-2) \end{vmatrix} = -m^2\,(m-2)^2\,(m-1)$$

Il y a 4 cas à discuter en fonction des valeurs du paramètre m.

- $\mathbf{m} \notin \{\mathbf{0}\,,\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;=\; 3$
- $\mathbf{m} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;\leq 2$ La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Il est évident que $\mathrm{rg}\, A \;=\; 1$: il existe un déterminant principal P d'ordre 1 différent de 0 .

  Soit : $P \;= \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} \;\neq 0$
- $\mathbf{m} = \mathbf{1} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;\leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

  Soit : $P \;= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \;\neq 0$ donc $\mathrm{rg}\, A \;=\; 2$
- $\mathbf{m} = \mathbf{2} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;\leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

  Soit : $P \;= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \;\neq 0$ donc $\mathrm{rg}\, A \;=\; 2$

Conclusion

$m \notin \{0\,,1\,,2\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, f \;=\; 3$

$m \in \{1\,,2\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, f \;=\; 2$

$m = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, f \;=\; 1$

$\vec{c} \in \mathrm{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, B \;=\; \mathrm{rg}\, A$ où B est la matrice augmentée de A .

Il y a 4 cas à discuter en fonction des valeurs de m.

- $\mathbf{m} \notin \{\mathbf{0}\,,\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;=\; 3 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, f$

  Dans ce cas : $\mathrm{Im}\, f \;=\; \mathbb{R}^3$

  et $\vec{c} \;= \begin{pmatrix} m^2 \\ 0 \\ 2-m \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f$ pour tout $m \notin \{0\,,1\,,2\}$
- $\mathbf{m} \;=\; \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;= 1 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, f$

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \;= \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix}$

Le vecteur $\vec{c}$ devient : $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a les équivalences suivantes :

$\vec{c} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \dim [\, f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)\,,\, \vec{c}]_{sev} = \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$

et

$\vec{c} \notin \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$

avec $B = (A \quad \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: matrice augmentée de A.

Or $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$ si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur $P = \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix}$ sont nuls.

Dans ce cas il y a deux déterminants caractéristiques car :

$$(\text{nombre de ligne de } A) - (\text{rang de } A) = 3 - 1 = 2$$

Ils sont d'ordre deux. D'où :

$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et

$C_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{c} \notin \operatorname{Im} f$

- $\mathbf{m} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Le vecteur $\vec{c}$ devient : $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et

$B = (A \quad \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: matrice augmentée de A.

Il y a un seul déterminant caractéristique construit sur P car :

$$(\text{nombre de ligne de } A) - (\text{rang de } A) = 3 - 2 = 1$$

D'où :

$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{c} \in \operatorname{Im} f$

- $\mathbf{m} = \mathbf{2} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

Le vecteur $\vec{c}$ devient : $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et

$$B = (A \quad \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ : matrice augmentée de } A\,.$$

Il y a un seul déterminant caractéristique construit sur P car : (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow \vec{c} \in \operatorname{Im} f$$

Conclusion

$\vec{c} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow m \neq 0$