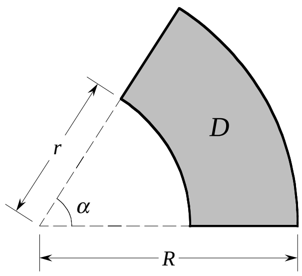
Corrigé 3

1. Le domaine D est un secteur de couronne circulaire d'angle au centre $\alpha = 1$ radian, de rayon extérieur R et de rayon intérieur r, (R et r variables).

Le domaine D a pour périmètre une valeur donnée L.



a) Déterminer rigoureusement la variation de l'aire A du domaine D en fonction de R ou r.

Déterminer R et r de sorte que l'aire A soit maximale.

b) On pose $L = 24$. Représenter graphiquement, avec soin, la variation de l'aire A en fonction de la variable choisie (R ou r).

Axe des abscisses : 1 unité = 2 carrés, axe des ordonnées : 3 unités = 1 carré.

---

a) Conditions géométriques du problème : $0 < r < R$.

Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \frac{\alpha}{2} R^2 - \frac{\alpha}{2} r^2 , \qquad A = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) .$$

Le périmètre L étant fixé, les variables R et r sont liées par l'équation :

$$L = 2(R-r) + \alpha R + \alpha r , \qquad L = 3R - r .$$

Si on choisit R comme variable, on exprime r en fonction de R :

$$L = 3R - r \quad \Leftrightarrow \quad r = 3R - L .$$

Les conditions géométriques définissent l'intervalle de variation de R :

$$0 < r < R \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3R - L < R \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{L}{3} < R < \tfrac{L}{2} .$$

Expression de l'aire A en fonction de la variable R :

$$A(R) = \frac{1}{2} \left[R^2 - (3R-L)^2\right] = \frac{1}{2} \left[R - (3R-L) \right] \left[R + (3R-L) \right] = \frac{1}{2} (-2R+L)(4R-L) .$$

La variation de l'aire A en fonction de R est donc définie par

$$\begin{cases} A = -4R^2 + 3LR - \frac{L^2}{2} \\ R \in \left] \frac{L}{3} , \frac{L}{2} \right[\end{cases}$$

Sa représentation graphique est un arc de parabole dont la concavité est orientée dans le sens des A négatifs.

L'aire A est donc maximale lorsque $R = R_{\max} = -\frac{3L}{2\,(-4)} = \frac{3L}{8} \in \left]\,\frac{L}{3}\,,\,\frac{L}{2}\,\right[$.

On en déduit la valeur correspondante de r grâce à l'équation de liaison $r = 3R - L$:

$$R_{\max} \;=\; \tfrac{3L}{8} \qquad \text{et} \qquad r_{\max} \;=\; \tfrac{L}{8}\,.$$

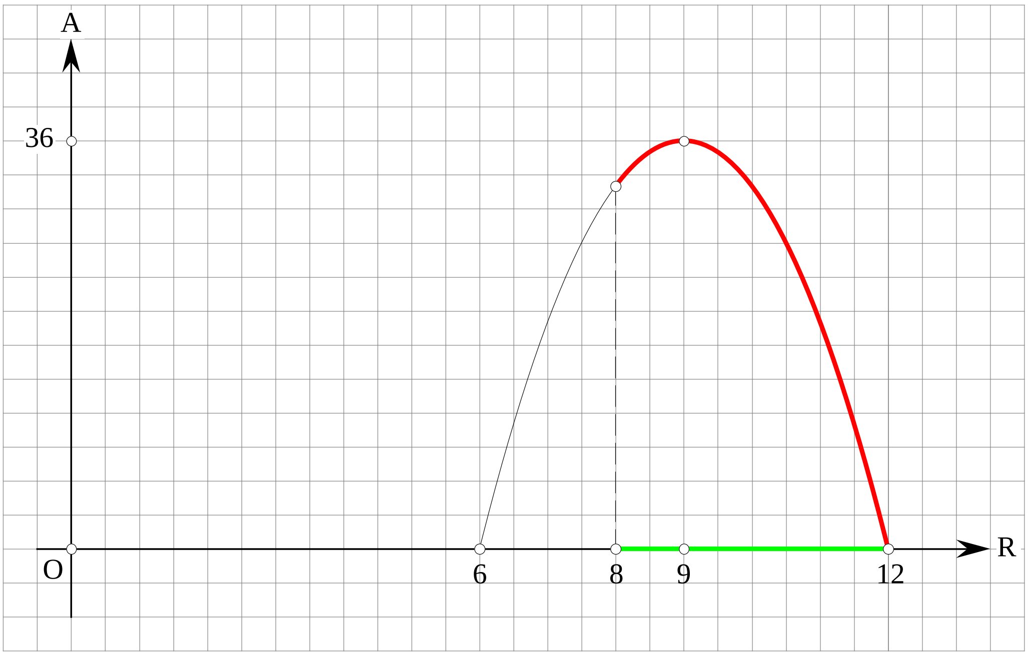
b) On fixe $L = 24$.

$$A(R) \;=\; -4\,(R^2 - 18R + 72)\,, \quad R \in \left]\,8\,,\,12\,\right[\,.$$

Les deux zéros de $A(R)$ sont $R_1 = 6$ et $R_2 = 12$

$$R_{\max} \;=\; 9 \qquad \text{et} \qquad A_{\max} \;=\; A(9) \;=\; 36\,.$$

Représentation graphique de la variation de l'aire A en fonction de R :



2. Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.

a) $A = \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m}$, $\quad m \in \mathbb{Z}$.

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}\,.$

a) $$\begin{aligned} A &= \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m}, \qquad m \in \mathbb{Z} \\ &= (-p)^{-2m} \cdot (-p^{-2})^{-2m^2} \\ &= (-1)^{-2m} \cdot p^{-2m} \cdot (-1)^{-2m^2} \cdot (p^{-2})^{-2m^2} \\ &= p^{-2m} \cdot p^{4m^2} \qquad \text{car } -2m \text{ et } -2m^2 \text{ sont des nombres pairs} \\ &= p^{4m^2-2m}. \end{aligned}$$

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}\,.$

Dans les trois termes de B apparaît la quantité $\sqrt[3]{2\,q}$, on la met en évidence.

$$\begin{aligned} B &= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[9\,\sqrt[3]{p^6} + 3\,\sqrt[3]{-8\,p^3} + 1\right] \\ &= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[9\,p^2 + 3\,p\,\sqrt[3]{-8} + 1\right] \\ &= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[(3\,p)^2 - 2\,(3\,p) + 1\right] \\ &= \sqrt[3]{2\,q}\,\left(3p-1\right)^2. \end{aligned}$$

3. Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes puis simplifier.

a) $A = \dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}\,.$ b) $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-2} - 2\,\sqrt[3]{7}\,.$

---

a) $$A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}}{3+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{6}\,)\cdot(3+\sqrt{6}\,)}}{3+\sqrt{6}}\,,$$

$$A = \frac{\sqrt{9-6}}{3+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\,(3-\sqrt{6}\,)}{9-6} = \sqrt{3}-\sqrt{2}\,.$$

b) On appelle expression conjuguée de $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$, le quotient $\dfrac{a-b}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ que l'on peut exprimer à l'aide de la décomposition suivante :

$$x^n - y^n = (x-y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x\,y^{n-2} + y^{n-1})\,,$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x\,y^{n-2} + y^{n-1}\,.$$

$$\frac{a-b}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = (\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}\,\sqrt[n]{b} + (\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2 + \cdots + \sqrt[n]{a}\,(\sqrt[n]{b})^{n-2} + (\sqrt[n]{b})^{n-1}.$$

L'expression conjuguée de $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ est donc $(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2$.

$$B = \frac{1}{\sqrt[3]{7}-2}-2\sqrt[3]{7} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}-2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{7})^2+2\sqrt[3]{7}+2^2}{(\sqrt[3]{7})^2+2\sqrt[3]{7}+2^2}-2\sqrt[3]{7}$$

$$B = \frac{(\sqrt[3]{7})^2+2\sqrt[3]{7}+2^2}{7-8}-2\sqrt[3]{7} = -(\sqrt[3]{7})^2-4\sqrt[3]{7}-2^2 = -(\sqrt[3]{7}+2)^2 .$$

4. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $A(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}$ et $a(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x)=\operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^6+1}$ et $b(x)=x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x)=\sqrt[3]{x^4+x^3}$ et $c(x)=x\sqrt[3]{x+1}$,

d) $D(x)=\sqrt{x^6}$ et $d(x)=x^2\,|x|$,

e) $E(x)=\sqrt[4]{x^2}$ et $e(x)=\sqrt{x}$.

On commence par se forger une opinion en comparant, par exemple, les domaines de définition ou l'ensemble des valeurs des deux expressions.

Si les deux expressions semblent être différentes, on cherche un contre-exemple à l'égalité.

Si les deux expressions semblent être égales, on tente une démonstration.

a) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_A=D_a=\mathbb{R}^*$, mais elles n'ont pas même ensemble de valeurs : $a(x)$ est toujours strictement positif, $A(x)$ peut être négatif.

Contre-exemple à l'égalité : $x=-1$, $A(-1)=-1$, $a(-1)=+1$.

b) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_B=D_b=\mathbb{R}^*$ et même ensemble de valeurs : $V_B=V_b=\,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$.

Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6+1} = \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6\,(1+\tfrac{1}{x^6})} = \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6}\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\,|x^3|\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}} = \operatorname{sgn}(x^3)\,|x^3|\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}} = x^3\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\,,\qquad \forall\,x\in\mathbb{R}^*.$$

c) Les deux expressions ont même domaine de définition et même ensemble de valeurs.

Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\sqrt[3]{x^4+x^3} \;=\; \sqrt[3]{x^3\,(x+1)} \;=\; \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x+1} \;=\; x\,\sqrt[3]{x+1}\,, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^*.$$

d) $\sqrt{x^6} \;=\; x^2\cdot|x|\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^*.$ Démonstration :

$$\sqrt{x^6} \;=\; \sqrt{(x^3)^2} \;=\; |x^3| \;=\; |x^2\cdot x| \;=\; |x^2|\cdot|x| \;=\; x^2\cdot|x|\,.$$

e) Ces deux expressions ne sont pas égales car elles ont des domaines de définition différents.

Contre-exemple à l'égalité : $x=-1\,,\quad E(-1)=1$ et $-1\notin D_e\,.$

5. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1)\,.$

- Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\;/\;-x^2-x+6\geq 0\right\} \;=\; [-3\,,\,2\,]\,.$$

- Résolution de l'équation sur son domaine de définition.

  ◦ Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $-(x+1)\geq 0\,.$

  Condition de positivité :

$$-(x+1)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq -1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\;[-3\,,\,-1\,]\,.$$

  ◦ Sous cette condition, les deux membres de l'équation étant positifs, on peut les élever au carré.

$$\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad -x^2-x+6=[-(x+1)\,]^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x^2+3x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x+5)\,(x-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} x=-\frac{5}{2} & \text{convient}\\ \text{ou} & \\ x=1 & \text{à exclure}\end{array}\right.$$

En conclusion : $S=\{-\frac{5}{2}\}\,.$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{x-2\,(1+\sqrt{x-1})}{2x-\sqrt{x-1}-5}=1\,.$

- Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x-1\geq 0 \quad \text{et} \quad 2x-\sqrt{x-1}-5\neq 0\right\}\,.$$

i) $x-1\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\ \in [\,1\,;\,+\infty[\,.$

ii) Résolvons l'équation : $\sqrt{x-1}=2x-5\,.$

- Condition de positivité : $2x-5\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\ \in\ [\,\frac{5}{2}\,;\,+\infty\,[\,.$
- Sur cet intervalle, les deux membres de l'équation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré :

$$x-1=(2x-5)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-21x+26=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2\ :\ \text{à exclure} \\ \text{ou} \\ x=\frac{13}{4} \end{cases}$$

L'unique solution de l'équation $\sqrt{x-1}=2x-5$ est $x=\frac{13}{4}\,.$

En conclusion : $D_{\text{def}}=\ \left[\,1\,;\,\frac{13}{4}\,\right[\ \cup\ \left]\,\frac{13}{4}\,;\,+\infty\,\right[\,.$

- Résolution de l'équation sur son domaine de définition.

$$\frac{x-2\,(1+\sqrt{x-1})}{2x-\sqrt{x-1}-5}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x-2\,(1+\sqrt{x-1})=2x-\sqrt{x-1}-5$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1}=3-x\,.$$

Condition de positivité : $3-x\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\ [\,1\,;\,3\,]\,.$

Sur ce domaine restreint, l'équation devient équivalente à :

$$x-1=(3-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-7x+10=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=5\ :\ \text{à exclure} \end{cases}$$

En conclusion : $S=\{2\}\,.$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{x+m^2}=x+m\,, \qquad m\in\mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m\in\mathbb{R}\,.$

- **Domaine de définition**

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + m^2 \geq 0\} = [-m^2\,,\,+\infty\,]\,.$$

- **Condition de positivité**

  Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si

$$x + m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -m\,.$$

- **Equivalence**

  Sous cette condition, on a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{x+m^2} = x + m \quad \Leftrightarrow \quad x + m^2 = (x+m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (2m-1)\,x = 0\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,[\,x + (2m-1)\,] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 - 2m\,.$$

- **Appartenance à D_{def}**

  les deux "candidats-solution" $x = 0$ et $x = 1-2m$ appartiennent au domaine de définition. En effet :

  * $0 \in [-m^2\,,\,+\infty\,]$, car $0 \geq -m^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \geq 0\,, \quad \forall m \in \mathbb{R}$,
  * $1 - 2m \in [-m^2\,,\,+\infty\,]$, car $1 - 2m \geq -m^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m + 1 \geq 0$
    $\Leftrightarrow \quad (m-1)^2 \geq 0\,, \quad \forall m \in \mathbb{R}\,.$

- **Validité des deux valeurs obtenues**

  Les deux "candidats" sont solutions de l'équation initiale si et seulement si ils vérifient la condition de positivité.

  * $0 \geq -m \quad \Leftrightarrow \quad m \geq 0\,,$
  * $1 - 2m \geq -m \quad \Leftrightarrow \quad m \leq 1\,.$

- **Conclusion**

  On explicite l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre m :

  ◦ si $m \in \,]-\infty\,,\,0\,[\,,$ alors $S = \{1-2m\}\,,$

  ◦ si $m \in \,[\,0\,,\,1\,]\,,$ alors $S = \{0\,,\,1-2m\}\,,$

  ◦ si $m \in \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors $S = \{0\}\,.$