Physique — Roger Sauser

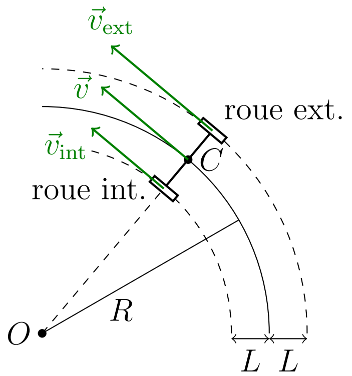
Semestre de printemps 2019 — https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 14

Exercice 1

Pour bien comprendre l'exercice, il est nécessaire de visualiser sur des dessins le mouvement de la voiture et celui des roues.

La voiture fait un virage : l'axe des roues arrière effectue une rotation autour du centre du virage. Quel est le mouvement du centre de chacune des roues ?



La vitesse de rotation du centre de l'axe C autour du centre du virage O vaut

$$v = R\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \frac{v}{R}\,.$$

Les roues extérieure et intérieure (leurs centres) ne se déplacent pas à la même vitesse que C :

$$v_{\text{ext}} > v > v_{\text{int}}\,.$$

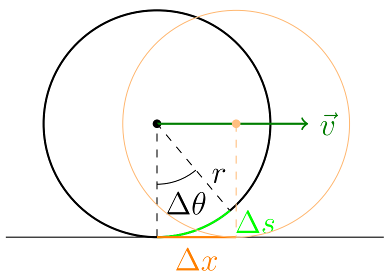
Le centre des roues se déplace sur un arc de cercle de rayon respectif

$$R_{\text{ext}} = R + L \quad \text{et} \quad R_{\text{int}} = R - L\,,$$

avec la même vitesse angulaire Ω que C. Ainsi

$$\begin{aligned} v_{\text{ext}} &= (R+L)\Omega = \frac{R+L}{R}v \\ v_{\text{int}} &= (R-L)\Omega = \frac{R-L}{R}v\,. \end{aligned}$$

D'autre part, la vitesse d'une roue roulant sans glisser est liée à la vitesse angulaire autour de son centre :



Si une roue de rayon r fait une rotation d'un angle $\Delta\theta$ autour de son axe pendant une durée Δt, elle "déroule" sur le sol la longueur d'arc $\Delta s = r\Delta\theta$ correspondante. Le centre de la roue avance donc d'autant :

$$\Delta x = \Delta s = r\Delta\theta\,.$$

Dans la limite $\Delta t \to 0$, le quotient par Δt donne la relation entre vitesse (selon l'horizontale) et vitesse angulaire :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} v = r\omega\,.$$

Ainsi, pour les roues extérieure et intérieure,

$$\omega_{\text{ext}} = \frac{v_{\text{ext}}}{r} = \frac{R+L}{Rr}v$$

et

$$\omega_{\text{int}} = \frac{v_{\text{int}}}{r} = \frac{R-L}{Rr}v\,.$$

Le nombre de tours effectués par chacune des roues est donné par la distance parcourue par leur centre.
Sur le quart de tour, la distance parcourue par le centre des roues est

$$\begin{aligned} d_{\text{ext}} &= (R+L)\frac{\pi}{2} \\ d_{\text{int}} &= (R-L)\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

L'angle de rotation correspondant vaut

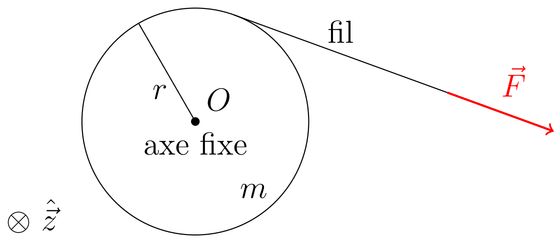
$$\begin{aligned} \theta_{\text{ext}} &= \frac{d_{\text{ext}}}{r} = \frac{R+L}{r}\frac{\pi}{2} \\ \theta_{\text{int}} &= \frac{d_{\text{int}}}{r} = \frac{R-L}{r}\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Enfin, l'angle de rotation pour un tour étant 2π, le nombre de tours effectués est

$$\begin{aligned} n_{\text{ext}} &= \frac{\theta_{\text{ext}}}{2\pi} = \frac{R+L}{4r} \\ n_{\text{int}} &= \frac{\theta_{\text{int}}}{2\pi} = \frac{R-L}{4r}\,. \end{aligned}$$

Exercice 2

On commence par faire un schéma de la situation :



On suppose qu'il n'y a pas de frottement et que le poids du cerceau (de masse m et de rayon r) est compensé par une force de soutien au niveau de l'axe. La résultante des forces s'exerçant sur le cerceau s'identifie donc à $\vec{F}$.
Nous pouvons alors écrire, pour le cerceau par rapport à son centre O,

$$\vec{M}_0 = I_0\vec{\alpha}\,,$$

où $\alpha \equiv \dot{\omega}$ est l'accélération angulaire. Selon $\hat{\vec{z}}$, on a donc

$$M_0 = rF = I_0\alpha\,,$$

où $F = ||\vec{F}||$ et $I_0 = mr^2$. L'accélération angulaire α est constante et vaut

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{rF}{I_0} = \frac{rF}{mr^2} = \frac{F}{mr} = 200\,\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Comme l'accélération angulaire est constante, on peut s'inspirer des équations du mouvement uniformément accéléré pour trouver l'expression de la vitesse angulaire :

$$\omega(t) = \alpha_0 t + \omega_0 = \frac{F}{mr} t\,,$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale $\omega(t=0) = 0$ pour fixer ω_0 : $\omega_0 = 0\,\mathrm{s}^{-1}$. La vitesse angulaire après un temps t_1 est donc

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \frac{F}{mr} t_1 = 1000\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

L'angle de rotation au temps t pour la condition initiale $\theta(t=0) = 0$ est donné par

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{F}{mr}}_{=\dot{\omega}=\mathrm{cste}} t^2\,.$$

L'angle après un temps t_1 est ainsi

$$\theta_1 = \theta(t_1) = \frac{F t_1^2}{2mr} = 2500\,,$$

ce qui correspond à un nombre de tours

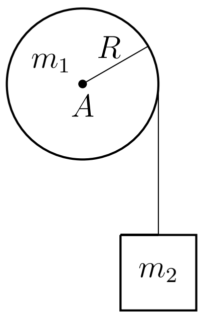
$$n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{F t_1^2}{4\pi m r} \cong 398\,\text{tours}\,.$$

Exercice 3

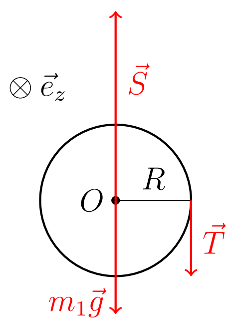
Il n'est pas judicieux de choisir comme objet "cylindre et contrepoids", ces deux parties ne bougeant pas de la même manière. Ainsi,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse ;
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

Il est primordial (comme toujours) de faire un dessin convenable de la situation :



Notons que l'axe de rotation A du cylindre est fixe.



Objet : cylindre

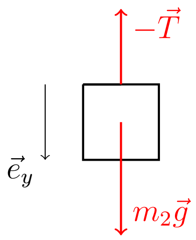
Forces : poids, soutien, tension

Comme le CM est au repos, il n'est pas nécessaire de considérer la translation.
Rotation autour de O :

$$\vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O(m_1\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{T})}_{\otimes} = I_O\dot{\vec{\omega}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$RT = I_0\dot{\omega}\,.$$



Objet : contrepoids

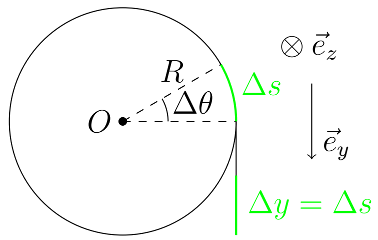
Forces : poids, tension

$$m_2\vec{g} - \vec{T} = m_2\vec{a}_2$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$m_2 g - T = m_2 a_2\,.$$

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du contrepoids :

- 

  Si la poulie tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta y = R\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

- La variation par rapport au temps (dérivée) donne alors la liaison entre les vitesses :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = R\omega\,.$$

- La variation des vitesses par rapport au temps (dérivée) donne ensuite la liaison entre les accélérations :

$$a_2 = R\dot{\omega}\,.$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} RT & = & I_O\dot{\omega} \\ m_2 g - T & = & m_2 a_2 \\ a_2 & = & R\dot{\omega}\,. \end{array}\right.$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}$ ($a_2 = R\dot{\omega}$) et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} RT & = & I_O\dot{\omega} \\ m_2 g - T & = & m_2 R\dot{\omega} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot\,1 \\ \cdot\,R \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par 1 et par R, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T, inconnue non recherchée. On obtient alors

$$m_2 g R = (I_O + m_2 R^2)\dot{\omega}\,.$$

Avec $I_O = \frac{1}{2} m_1 R^2$ pour un cylindre plein, il vient

$$\dot{\omega} = \frac{m_2 g R}{I_O + m_2 R^2} = \frac{2m_2 g}{(m_1 + 2m_2)R}$$

et donc

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g > 0\,.$$

Le contrepoids accélère vers le bas avec une accélération inférieure à g :

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g = \frac{1}{\frac{m_1}{2m_2} + 1}\, g < g\,.$$

Remarque : on est libre de choisir les repères comme on veut. Par exemple, avec le même choix de $\vec{e}_z$ entrant et le choix (différent) de $\vec{e}_y$ vers le haut, les projections et équations de liaison sont modifiées comme suit.

$$\left\{\begin{array}{rcll} RT & = & I_O\dot{\omega} & \text{(inchangée)} \\ -m_2 g + T & = & m_2 a_2 & \text{(modifiée)} \\ a_2 & = & -R\dot{\omega} & \text{(modifiée)}\,. \end{array}\right.$$

Avec $a_2 = -R\dot{\omega}$, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} RT & = & I_O\dot{\omega} & \cdot 1 \\ -m_2 g + T & = & -m_2 R\dot{\omega} & \cdot (-R) \end{array}\right.$$

En amplifiant les équations respectivement par 1 et par $-R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T , inconnue non recherchée, on obtient alors

$$m_2 g R = (I_O + m_2 R^2)\dot{\omega}$$

et donc, comme ci-dessus,

$$\dot{\omega} = \frac{m_2 g R}{I_O + m_2 R^2}$$

mais

$$a_2 = -R\dot{\omega} = -\frac{m_2 R^2}{I_O + m_2 R^2} g < 0\,.$$

Toutefois, le contrepoids accélère bien vers le bas, $\vec{e}_y$ étant orienté vers le haut.

Connaissant l'accélération, on peut (en principe. . .) en déduire la vitesse et la position à chaque instant. On considère alors l'instant correspondant à la distance parcourue.
L'accélération du contrepoids est constante. On sait que la vitesse est linéaire dans le temps et la position quadratique (accélération = dérivée de la vitesse, vitesse = dérivée de la position). Pour le contrepoids, avec un choix de l'origine à l'endroit où la vitesse est nulle ($t_0 = 0$), nous obtenons l'évolution temporelle selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & \dfrac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g = \text{cte} \\ v_2(t) & = & a_2\, t \qquad \text{car } v_2(0) = 0 \\ y_2(t) & = & \dfrac{1}{2}\, a_2\, t^2 \qquad \text{car } y_2(0) = 0\,. \end{array}$$

Déterminons l'instant correspondant à une descente h. Notons t_h l'instant auquel le contrepoids a parcouru une distance verticale h :

$$y_2(t_h) = \frac{1}{2}\, a_2\, t_h^2 = h \quad \Rightarrow \quad t_h = \sqrt{\frac{2h}{a_2}}\,.$$

Nous obtenons alors la vitesse à cet instant :

$$v_2(t_h) = a_2 t_h = \sqrt{2ha_2} = \sqrt{\frac{4hm_2 g}{m_1 + 2m_2}}\,.$$

Autre méthode de résolution : comme nous cherchons une relation entre une position et une vitesse (sans être intéressés par le temps), nous pouvons imaginer exploiter le théorème de l'énergie cinétique pour les instants $t_0 = 0$ et t_h correspondant à un déplacement vertical h.

Intéressons-nous d'abord au contrepoids soumis à son poids et à la tension $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{cin}}(t_h) - E_{\mathrm{cin}}(t_0) &= W_{0\to h}(m_2\vec{g}) + W_{0\to h}(-\vec{T}) \\ \frac{1}{2}m_2 v_h^2 - 0 &= m_2 g h + W_{0\to h}(-\vec{T})\,. \end{aligned}$$

Comme le travail de la tension est inconnu, nous sommes amenés à considérer également la poulie soumise à son poids, au soutien et à la tension $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{cin}}(t_h) - E_{\mathrm{cin}}(t_0) &= W_{0\to h}(m_1\vec{g}) + W_{0\to h}(\vec{S}) + W_{0\to h}(\vec{T}) \\ \frac{1}{2}I_O\omega_h^2 - 0 &= W_{0\to h}(\vec{T})\,. \end{aligned}$$

Les travaux de la tension sur le contrepoids et la poulie étant égaux et opposés, nous avons par addition

$$\frac{1}{2}m_2 v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_h^2 = m_2 g h\,.$$

Avec l'équation de liaison $v_2 = R\omega$, nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2}m_2 v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\frac{v_h^2}{R^2} = \frac{1}{2}m_2 v_h^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1 R^2\frac{v_h^2}{R^2} = \left(\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1\right)v_h^2 = m_2 g h$$

et donc

$$v_h = \sqrt{\frac{4m_2 g h}{2m_2 + m_1}}\,.$$

Exercice 4

Comme le courant ne circule que pendant une seconde, il faut différencier deux cas.

Lorsque le moteur est en fonction (c'est-à-dire lorsque le courant circule), le rotor voit sa vitesse angulaire augmenter. Le moment de force $\vec{M}$ est parallèle et de même signe que la vitesse angulaire du rotor $\vec{\omega}$. Ainsi,

$$M = I\dot{\omega}\,,$$

où M est le moment du couple. Ce moment est constant et non nul dans la première seconde après l'enclenchement ($0 < t < 1\,\mathrm{s}$). Ensuite (pour $t > 1\,\mathrm{s}$), il est nul. Il convient donc de procéder en deux étapes.

Pour $0 < t < 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est non nul et provoque une accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \text{constante}\,.$$

La vitesse angulaire est alors donnée par

$$\omega(t) = \frac{M}{I}t + \omega_0\,,$$

où $\omega_0 = \omega(0) = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ car le moteur est initialement immobile. L'angle parcouru par le rotor a quant à lui pour expression

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I}t^2 + \varphi_0\,,$$

où l'on va poser $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$.

On a donc en particulier,

$$\omega(1\,\mathrm{s}) = \frac{2}{0.1} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(1\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2}\frac{2}{0.1} = 10\,.$$

Pour $t > 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est nul. Il n'y a donc pas d'accélération angulaire et la vitesse angulaire du rotor est constante :

$$\dot{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega(1\,\mathrm{s}) = \omega_1 = \text{constante}\,.$$

L'angle parcouru par le rotor est ainsi donné par

$$\varphi(t) = \varphi(1\,\mathrm{s}) + \omega_1(t - 1\,\mathrm{s})\,.$$

Ainsi,

$$\varphi(2\,\mathrm{s}) = 10 + 20(2-1) = 30$$

et le nombre de tours correspondant est

$$n(2\,\mathrm{s}) = \frac{\varphi(2\,\mathrm{s})}{2\pi} \cong 4.77\,.$$

Exercice 5

Nous allons exploiter le lien entre moment de force et accélération angulaire. En choisissant $\hat{\vec{z}}$ pointant dans le plan de la feuille ($\hat{\vec{z}} \otimes$), nous pouvons écrire, par rapport à l'axe de rotation,

$$\begin{aligned} M &= -RF = -kR\omega \\ &= I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha\,. \end{aligned}$$

Comme $\alpha = \alpha(t) = \dot{\omega}(t)$, on obtient alors l'équation différentielle

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\,\omega(t)\,.$$

On devine que la vitesse angulaire $\omega(t)$ solution de cette équation différentielle est une fonction de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,

$$w(t) = Ae^{Bt}\,,$$

où A et B sont des constantes.
L'accélération angulaire s'écrit alors

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t)\,.$$

On obtient alors que $A = \omega(0) = \omega_0$ et $B = -\frac{2k}{mR}$.
L'évolution de la vitesse angulaire est ainsi donnée par

$$\omega(t) = \omega_0\, e^{-\frac{2k}{mR}t}\,.$$