Corrigé 21

1. Déterminer, dans les trois cas suivants, l'aire du domaine situé entre l'axe Ox et l'arc de courbe défini par $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ y \geq 0\}$.

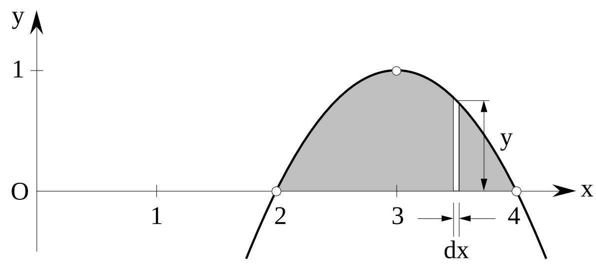
a) $f(x) = 6x - x^2 - 8$, b) $f(x) = e^{-|x|} - \dfrac{1}{2}$, c) $f(x) = (2-x)\ln x$.

---

a) Considérons la courbe définie par $y = f(x)$.

$$y = -x^2 + 6x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = -(x-3)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = -(x-3)^2 .$$

Représentation du domaine.

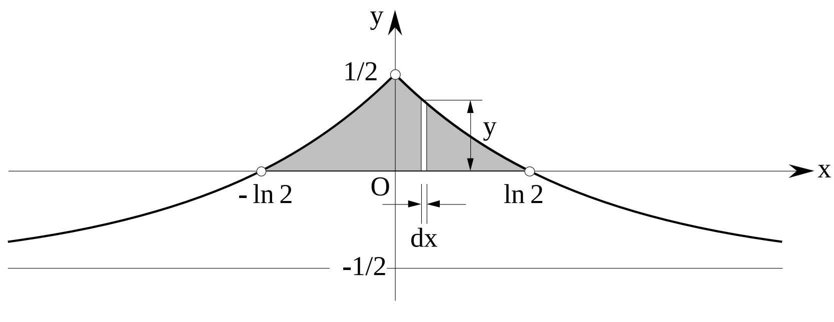


Soit A l'aire du domaine, $A = \displaystyle\int_2^4 y\,dx$.

$$A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x\right]_2^4$$

$$A = \left(-\tfrac{64}{3} + 48 - 32\right) - \left(-\tfrac{8}{3} + 12 - 16\right) = \frac{4}{3} .$$

b) La fonction f est paire, la courbe définie par $y = f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe Oy, elle coupe l'axe Ox en $x = \pm \ln 2$.

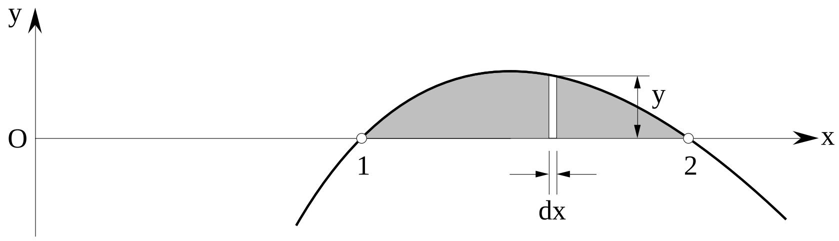


Soit B l'aire du domaine, $B = \displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} y\,dx = 2\int_0^{\ln 2} y\,dx$.

$$B = 2\int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} - \tfrac{1}{2}\right)dx = 2\left[-e^{-x} - \tfrac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2} = 2\left[\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\ln 2\right) - (-1)\right]$$

$$B = 1 - \ln 2 .$$

c) Soit $y = f(x) = (2-x)\,\ln x$. $y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 2$.



Soit C l'aire du domaine, $C = \displaystyle\int_1^2 y\,dx = \int_1^2 (2-x)\,\ln x\,dx$.

Recherche d'une primitive de $(2-x)\,\ln x$ par intégration par parties.

On pose $u' = 2-x$ et $v = \ln x$, $u = 2x - \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$.

$$\int (2-x)\,\ln x\,dx = \left(2x - \tfrac{x^2}{2}\right)\ln x - \int \left(2 - \tfrac{x}{2}\right)dx$$

$$\int (2-x)\,\ln x\,dx = \left(2x - \tfrac{x^2}{2}\right)\ln x - 2x + \tfrac{x^2}{4} + K.$$

Calcul de l'aire C :

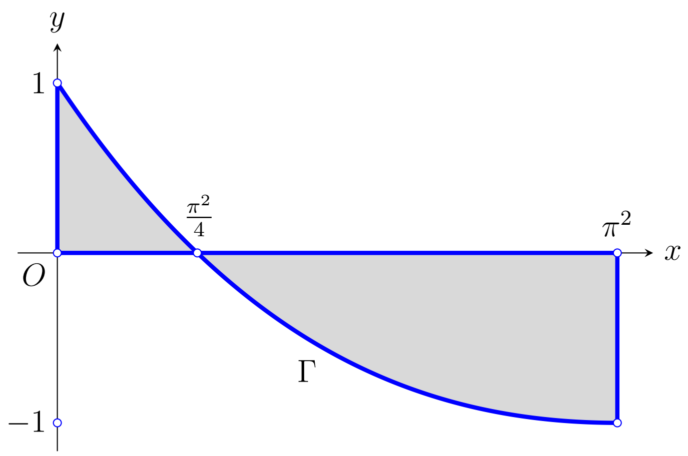
$$C = \left[(2x - \frac{x^2}{2})\,\ln x - 2x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\,\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

2. Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy, on considère la courbe Γ défini par

$$\Gamma: \quad y = \cos\left(\sqrt{x}\right), \qquad 0 \leq x \leq \pi^2.$$

Calculer l'aire géométrique du domaine fini limité par la courbe Γ, l'axe Ox, l'axe Oy et la droite verticale d'équation $x = \pi^2$.

- Représentation du domaine



- Expression de l'aire géométrique du domaine

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi^2} \left|\cos(\sqrt{x}\,)\right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}\,)\,dx + \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \left[-\cos(\sqrt{x}\,)\right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}\,)\,dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}\,)\,dx\,. \end{aligned}$$

- Recherche de primitive

  Pour intégrer $\cos(\sqrt{x}\,)$, on change de variable en posant

$$\sqrt{x} = t\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \qquad x = t^2\,, \qquad dx = 2t\,dt\,.$$

$$\int \cos(\sqrt{x}\,)\,dx = \int \cos(t)\cdot 2t\,dt = 2\int t\cdot\cos(t)\,dt\,.$$

  Puis on intègre $t\cdot\cos(t)$ par parties :

$$\int \underset{\downarrow}{t}\cdot\underset{\uparrow}{\cos(t)}\,dt = t\cdot\sin(t) - \int 1\cdot\sin(t)\,dt = t\cdot\sin(t) + \cos(t) + C\,.$$

$$\int \cos(\sqrt{x}\,)\,dx = 2\left[\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x}\,) + \cos(\sqrt{x}\,)\right] + C\,.$$

- Conclusion

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}\,)\,dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}\,)\,dx \\ &= 2\left[\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x}\,) + \cos(\sqrt{x}\,)\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} - 2\left[\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x}\,) + \cos(\sqrt{x}\,)\right]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\ &= 2\left[\left(\tfrac{\pi}{2}+0\right) - (0+1)\right] - 2\left[(0+(-1)) - \left(\tfrac{\pi}{2}+0\right)\right] \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

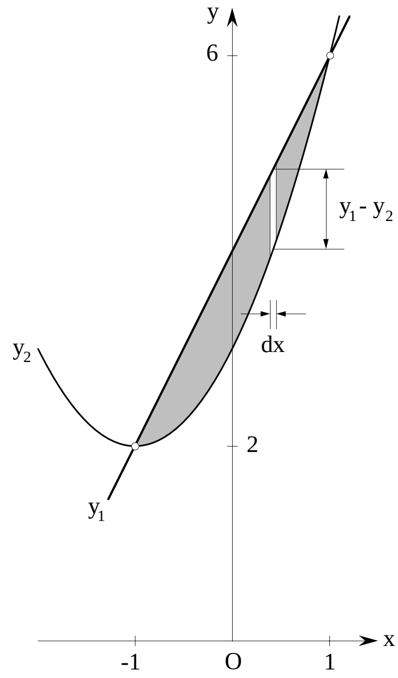
3. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad y = 2x + 4\,.$$

Posons $y_1 = 2x + 4$ et $y_2 = x^2 + 2x + 3$.

Les deux courbes se coupent en $(-1\,,\,2)$ et en $(1\,,\,6)$.

Soit A l'aire du domaine fini limité par les deux courbes.



$$A = \int_{-1}^{1} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left[(2x+4) - (x^2+2x+3)\right]\, dx$$

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^2+1)\, dx$$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

4. Calculer l'aire des domaines finis compris entre les courbes définies par les équations suivantes :

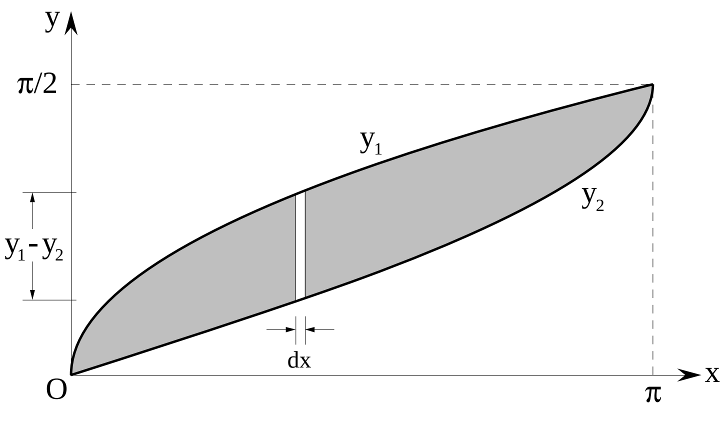
a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\, x}$ et $y = \operatorname{Arcsin}(\frac{x}{\pi})$.

Intégrer d'abord par rapport à x, puis par rapport à y.

Indication : ces deux courbes se coupent en $x = 0$ et $x = \pi$.

- Intégration par rapport à x.

Posons $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\, x}$ et $y_2 = \operatorname{Arcsin}(\frac{x}{\pi})$, $x \in [0\,,\,\pi]$.



L'aire A du domaine s'écrit :

$$A = \int_0^{\pi} (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\, x} - \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\right] dx$$

Recherche des primitives :

$$\int \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\, x}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \sqrt{x}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{3}\, x^{3/2} + C\,.$$

$$\int \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\, dx \;=\; \int 1\cdot \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\, dx\,. \quad \text{Posons} \;\; u' = 1 \;\; \text{et} \;\; v = \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})$$

$$\int \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\, dx \;=\; x\, \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi}) - \int \frac{x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\, dx\,,$$

$$\int \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi})\, dx \;=\; x\, \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi}) + \sqrt{\pi^2 - x^2} + C\,.$$

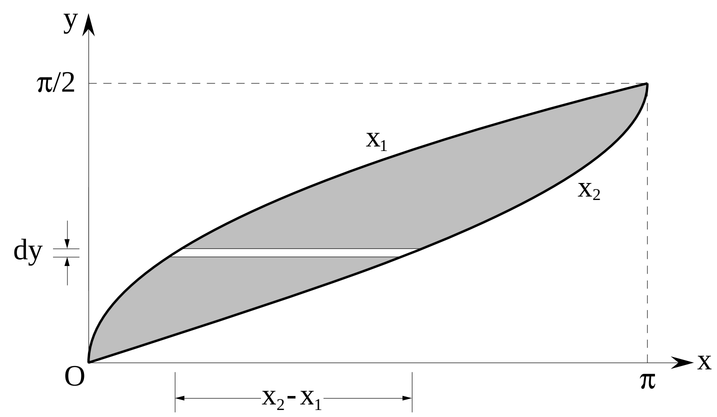
D'où : $\quad A \;=\; \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\, x^{3/2} - x\, \operatorname{Arcsin}(\tfrac{x}{\pi}) - \sqrt{\pi^2 - x^2}\right]_0^{\pi} \;=\; \pi - \dfrac{\pi^2}{6}\,.$

- Intégration par rapport à y.

$\forall\, (x, y) \in [\,0\,,\,\pi\,] \times [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$, on a :

$y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\, x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{\pi}\, y^2 \quad$ et $\quad y = \operatorname{Arcsin}(\frac{x}{\pi}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi\, \sin y\,.$

Posons $x_1 = \frac{4}{\pi}\, y^2 \quad$ et $\quad x_2 = \pi\, \sin y\,.$



L'aire A du domaine s'écrit :

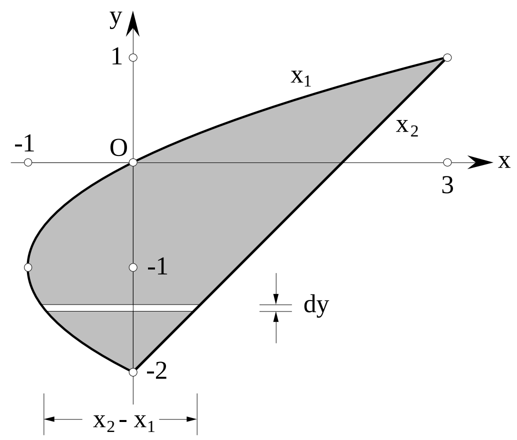
$$A \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\pi\, \sin y - \tfrac{4}{\pi}\, y^2\right] dy \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\pi\, \sin y - \tfrac{4}{\pi}\, y^2\right] dy$$

$$A \;=\; \left[-\pi\, \cos y - \frac{4}{3\pi}\, y^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi - \frac{\pi^2}{6}\,.$$

L'intégration par rapport à y s'impose ici comme la méthode nécessitant les calculs les plus élémentaires.

b) $y^2 + 2y - x = 0$ et $y - x + 2 = 0\,.$

On intègre par rapport à la variable $y\,.$



$$B \;=\; \int_{-2}^{1} [x_2\,(y) - x_1\,(y)]\,dy$$

avec $x_1\,(y) = y^2 + 2\,y$ et $x_2\,(y) = y + 2\,.$

$$B \;=\; \int_{-2}^{1} \left(-y^2 - y + 2\right) dy$$

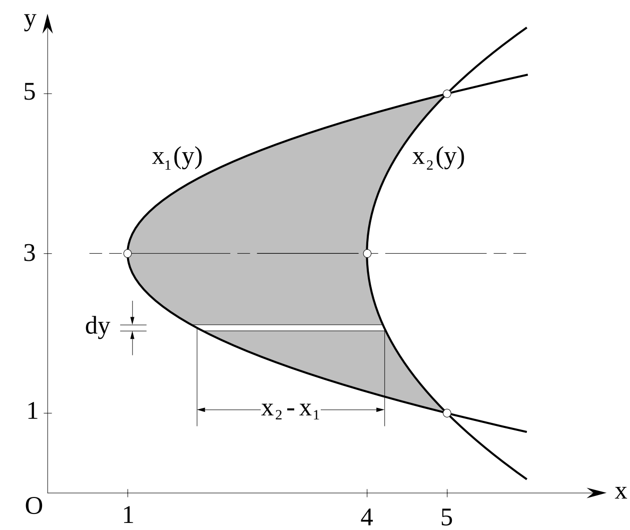
$$B \;=\; \left[-\frac{1}{3}\,y^3 - \frac{1}{2}\,y^2 + 2\,y\right]_{-2}^{1} \;=\; \frac{9}{2}\,.$$

Remarque : on peut aussi calculer cette aire en intégrant par rapport à $x\,.$
Il faut intégrer de $x = -1$ à $x = 0$ la différence des ordonnées des deux branches de la parabole d'équation $(y+1)^2 = x + 1\,,$ et intégrer de $x = 0$ à $x = 3$ la différence des ordonnées de la branche supérieure de la parabole et de la droite d'équation $y = x - 2\,.$

$$B = \int_{-1}^{0} \Big[(-1 + \sqrt{x+1}\,) - (-1 - \sqrt{x+1}\,)\Big]\,dx + \int_{0}^{3} \Big[(-1 + \sqrt{x+1}\,) - (x-2)\Big]\,dx.$$

c) $(y-3)^2 = x - 1$ et $(y-3)^2 = 4\,(x-4)\,.$

Les deux paraboles se coupent en $(5\,,\,1)$ et $(5\,,\,5)\,.$



Posons $x_1(y) = (y-3)^2 + 1$

et $x_2(y) = \dfrac{(y-3)^2}{4} + 4\,.$

L'aire C du domaine s'écrit :

$$C \;=\; \int_{1}^{5} [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy\,,$$

$$C \;=\; 2\int_{1}^{3} [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy\,.$$

$$C \;=\; 2\int_{1}^{3} \left[\,\frac{(y-3)^2}{4} + 4 - [\,(y-3)^2 + 1\,]\,\right] dy \;=\; 2\int_{1}^{3} \left[-\frac{3}{4}\,(y-3)^2 + 3\right] dy$$

$$C \;=\; 2\left[-\frac{1}{4}\,(y-3)^3 + 3y\right]_{1}^{3} \;=\; 2\,[\,9 - (2+3)\,] \;=\; 8\,.$$

d) $y = \frac{1}{2}\,x^2\,,\quad y = x^2 \quad$ et $\quad y = 2x\,.$

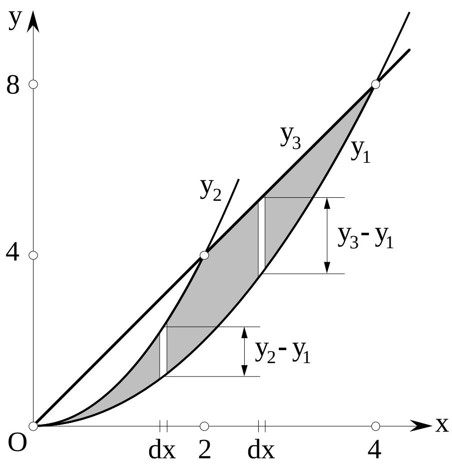
Posons $y_1 = \frac{1}{2}\,x^2\,,\ y_2 = x^2$ et $y_3 = 2x\,.$

L'aire D du domaine fini limité par les trois courbes se décompose de la façon suivante

$$D \;=\; \int_0^2 (y_2 - y_1)\,dx \;+\; \int_2^4 (y_3 - y_1)\,dx$$

$$D \;=\; \int_0^2 (x^2 - \tfrac{1}{2}\,x^2)\,dx \;+\; \int_2^4 (2x - \tfrac{1}{2}\,x^2)\,dx$$

$$D \;=\; \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \;=\; 4\,.$$



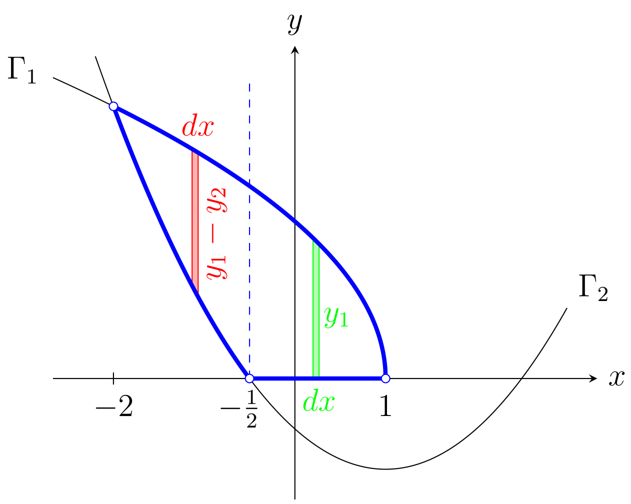
5. Dans le plan, on considère les deux courbes Γ_1 et Γ_2 suivantes :

$$\Gamma_1 :\ y = \sqrt{3\,(1-x)}\,,\quad x \le 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 :\ y + 1 = \frac{4}{9}\,(x-1)^2\,.$$

Calculer l'aire du domaine fini contenu dans le demi-plan $y \ge 0$ et limité par les deux arcs Γ_1 et Γ_2.

Indication : les deux courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent en $x = -2$.

- Une méthode : découpage du domaine en "tranches verticales"
  - Représentation du domaine



Le découpage du domaine en "tranches verticales" exige de distinguer deux cas selon que x est plus grand ou plus petit que $-\frac{1}{2}$.

- Expression de l'aire du domaine
  - si $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, les "tranches verticales" ont pour épaisseur dx et pour longueur $y_1 - y_2$,
  - si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, les "tranches verticales" ont pour épaisseur dx et pour longueur y_1.

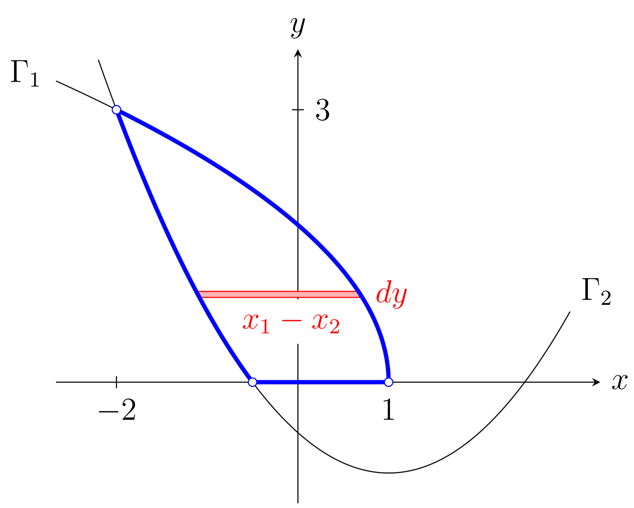
  Expression de l'aire A :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [\, y_1(x) - y_2(x)\,]\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} y_1(x)\, dx \\ &= \int_{-2}^{1} y_1(x)\, dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} y_2(x)\, dx \\ &= \int_{-2}^{1} \sqrt{3\,(1-x)}\, dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \tfrac{4}{9}\,(x-1)^2\right] dx\,. \end{aligned}$$

- Intégration

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} \sqrt{3\,(1-x)}\, dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \tfrac{4}{9}\,(x-1)^2\right] dx \\ &= \sqrt{3}\left[-\frac{2}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{1} - \left[-x + \frac{4}{27}\,(x-1)^3\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3}\left[0 - \left(-2\sqrt{3}\right)\right] - \left[\,\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) - (2-4)\,\right] \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

- Une meilleure méthode : découpage du domaine en "tranches horizontales"
  - Représentation du domaine



- Expression de l'aire du domaine

  Les "tranches horizontales" ont pour largeur dy et pour longueur $x_1 - x_2$.

  On explicite $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sous la condition $x_1, x_2 \leq 1$:

  $* \; \Gamma_1 : \quad y = \sqrt{3\,(1-x)} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \dfrac{y^2}{3}, \qquad x_1(y) = 1 - \dfrac{y^2}{3}.$

  $* \; \Gamma_2 : \quad y + 1 = \frac{4}{9}\,(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \dfrac{3}{2}\sqrt{y+1}\,,$

  $$x_2(y) = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y+1}\,.$$

  Expression de l'aire A du domaine :

  $$A = \int_0^3 [\,x_1(y) - x_2(y)\,]\,dy = \int_0^3 \left[-\tfrac{y^2}{3} + \tfrac{3}{2}\sqrt{y+1}\right] dy$$

- Intégration

$$A = \int_0^3 \left[-\tfrac{y^2}{3} + \tfrac{3}{2}\sqrt{y+1}\right] dy = \left[-\frac{y^3}{9} + (y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = [\,(-3+8) - 1\,] = 4\,.$$

6. On considère l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a\,\cos t \\ y(t) = b\,\sin t \end{cases} \qquad a\,,\, b \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

Montrer que l'aire du domaine limité par cette ellipse vaut $\pi\,ab$.

L'ellipse est symétrique par rapport aux axes Ox et Oy, on calcule l'aire du domaine contenu dans le premier quadrant $(x \geq 0\,,\; y \geq 0)$.

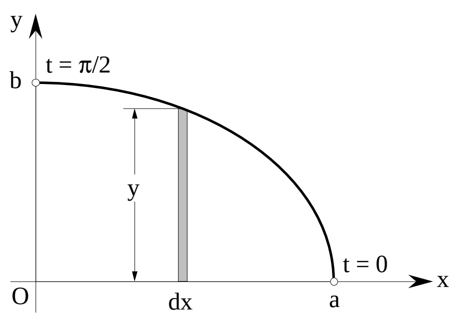
$$\frac{A}{4} = \int_0^a y\,(x)\;dx = \int_{t_1}^{t_2} y\,(t)\cdot \dot{x}(t)\;dt\,.$$

Or x varie de 0 à a lorsque t varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, donc $t_1 = \frac{\pi}{2}$ et $t_2 = 0$.

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\,(t)\cdot\dot{x}(t)\;dt\,.$$

$$\frac{A}{4} = -a\,b\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\;dt$$

$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2}\,a\,b\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos 2t)\;dt$$



$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2}\,a\,b\left[t - \frac{1}{2}\,\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{4}\,\pi\,a\,b \quad\Leftrightarrow\quad A = \pi\,a\,b\,.$$

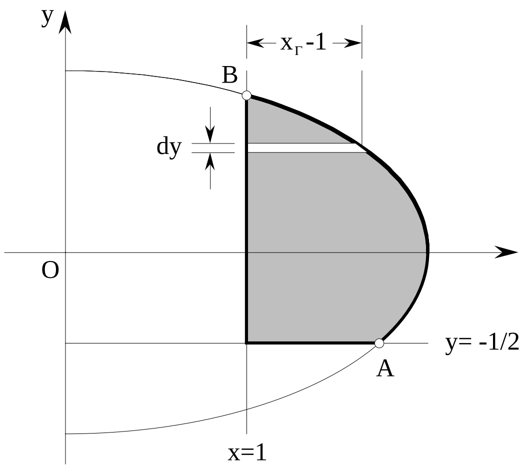
7. Dans le plan Oxy, on considère la demi-ellipse Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\,\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

On considère le domaine fini D limité par la courbe Γ, la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et la droite verticale d'équation $x = 1$, $(\,x \geq 1$ et $y \geq -\frac{1}{2}\,)$.

Calculer l'aire du domaine D.

Figure d'étude :



L'aire $\mathcal{A}$ du domaine D s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int_{y_A}^{y_B} (x_\Gamma - 1)\,dy = \int_{t_A}^{t_B} [\,x_\Gamma(t) - 1\,]\;\dot{y}(t)\;dt\,.$$

Recherche des bornes t_A et t_B.

- $A\,(x_A\,,\,-\frac{1}{2}) \in \Gamma \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; t_A \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ tel que $y(t_A) = -\frac{1}{2}$.

$$\sin(t_A) = -\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t_A = -\frac{\pi}{6}\,.$$

- $B\,(1\,,\,y_B) \in \Gamma$ et $y_B > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; t_B \in \,]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ tel que $x(t_B) = 1$.

$$2\,\cos(t_B) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(t_B) = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t_B = \frac{\pi}{3}\,.$$

Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D :

$$\mathcal{A} \;=\; \int_{t_A}^{t_B} [\, x_\Gamma(t) - 1\,]\; \dot{y}(t)\; dt \;=\; \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\, 2\,\cos t - 1\,]\, \cos t\; dt\,,$$

$$\mathcal{A} \;=\; \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\, 2\,\cos^2 t - \cos t\right)\; dt \;=\; \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\, \cos 2t + 1 - \cos t\,)\; dt\,,$$

$$\mathcal{A} \;=\; \left[\frac{1}{2}\,\sin 2t + t - \sin t\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \;=\; \frac{\pi - 1}{2}\,.$$