Peter Wittwer

Analyse I – Corrigé de la Série 7

Echauffement.

i) La période de f n'est pas toujours définie. En effet, la fonction constante est périodique pour tout $T > 0$ mais elle n'a pas de période au sens strict (il n'existe pas de plus petit $T > 0$ tel que f soit T-périodique).

ii) La fonction $|f|$ est périodique car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+T)| = |f(x)|$, où T est une période de f.

iii) La réciproque est fausse: Pour la fonction non périodique f représentée à la Fig. 1, la fonction $|f|$ est périodique.

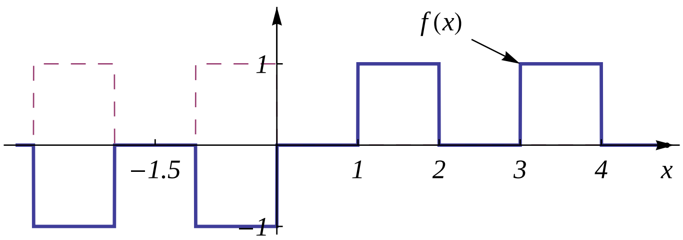


Fig. 1

iv) La période de $|f|$ n'est pas forcément égale à celle de f: les fonctions f et $|f|$ représentées à la Fig. 2 ont les périodes $T = 4$ resp. $T = 2$.

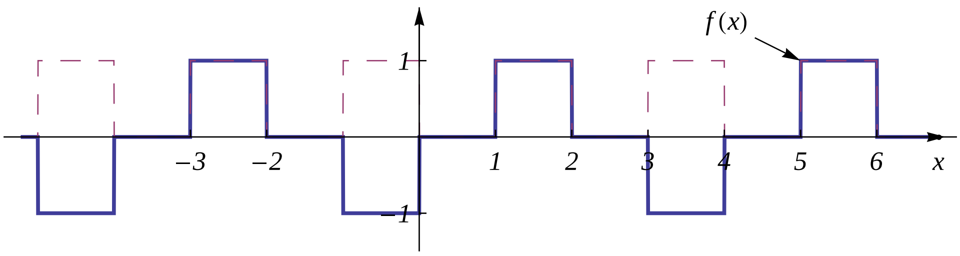


Fig. 2

Notez encore que la période de $|f|$ peut ne pas exister alors que celle de f existe. Exemple: $f(x) = (-1)^{[x]}$, où $[x]$ dénote la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.

i) La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{1-c}\right)^n$ converge absolument $\Leftrightarrow$ $\left|\dfrac{c}{1-c}\right| < 1$ $\Leftrightarrow$ $c < \dfrac{1}{2}$.

Remarque: On pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand $\left|\dfrac{c}{1-c}\right| = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$, on obtient la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ qui diverge.

ii) Pour $c = 0$ la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}|c|\right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge absolument si $|c| < 1$ et qu'elle diverge si $|c| > 1$. Si $c = \pm 1$, la série diverge (évident pour $c = 1$; et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ pour $c = -1$).

iii) Pour $c = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\left|\left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n\right| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc la série diverge.
Pour $c \neq 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right| < 1,$$

et donc la série converge absolument et sa somme vaut (série géométrique commençant à $n = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)} .$$

iv) Pour $c = 0$, la série converge et est égale à zéro. Soit donc $c \neq 0$. En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e} .$$

Ainsi la série converge absolument si $|c| < e$ et elle diverge si $|c| > e$ (et on obtient aucune information si $|c| = e$).
Si $c = \pm e$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est croissante:

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > |a_n|$$

car la suite $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ croît vers e. Comme $|a_1| = |c| = e$, il suit que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

Exercice 2.

i) On calcule

$$\begin{aligned} cS_n - S_n &= c(1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}) - (1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}) \\ &= -(1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1}) + nc^n = -\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n. \end{aligned}$$

ii) En utilisant le résultat de *i*) on a d'une part pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kc^{k-1} = S_n = \frac{1}{c-1}\left(-\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n\right) = \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1} . \qquad (1)$$

Dans l'Ex. 1 *ii*) on a montré que la série $\sum_{n=1}^{\infty} nc^n$ converge pour $|c| < 1$, donc en particulier pour $0 < c < 1$. Ainsi par le critère nécessaire de convergence d'une série, $\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$. En laissant $n \to \infty$ dans (1), on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1} \right) = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

Exercice 3.

i) $D(f) = \mathbb{R}$. f est paire parce que les fonctions $x^4, \cos$ et $\sin^2$ sont paires. f est non périodique à cause du terme x^4.

ii) $D(f) = \mathbb{R}$. $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ est impair et 4π-périodique; $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ est pair et 6π-périodique. Ainsi f est impaire et 12π-périodique.

iii) La fonction $\operatorname{tg}(3x)$ n'est pas définie pour $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, donc

$$D(f) = \mathbb{R} \Big\backslash \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\operatorname{tg}(3x)$ est $\frac{\pi}{3}$-périodique et impaire. $\cos(\pi x)$ est 2-périodique et pair.
Donc f n'est ni paire ni impaire. De plus, f n'est pas périodique car $\dfrac{\pi/3}{2} \notin \mathbb{Q}$.

iv) $D(f) = \mathbb{R}$. f n'est ni paire, ni impaire, mais 1-périodique (cf. Fig. 3).

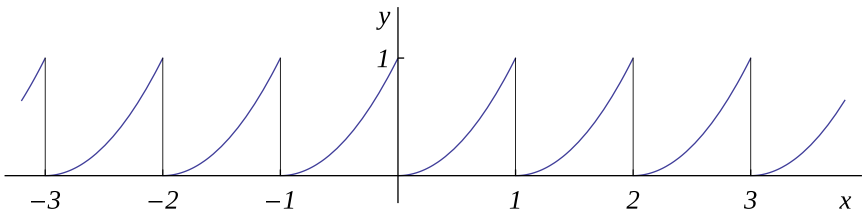


Fig. 3

Exercice 4.

i) Comme f et g sont croissantes, on a

$$x_1 \le x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) \le f(x_2) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x_1)) \le g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est aussi croissante.

ii) Comme f et g sont décroissantes, on a

$$x_1 \le x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) \ge f(x_2) \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(f(x_1)) \le g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est croissante.

iii) Pour f croissante et g décroissante on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est décroissante.
Pour la composée $f \circ g$ on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(x_1) \geq g(x_2) \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)),$$

c'est-à-dire $f \circ g$ est aussi décroissante. La composée de deux fonctions avec monotonies opposées est donc toujours décroissante.

Exercice 5.

i) On commence par le côté droit de l'égalité.

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((e^x)^2 - \left(e^{-x}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = \operatorname{sh}(2x) \end{aligned}$$

ii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\big(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\big)^k = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^k = (e^x)^k = e^{kx} = \operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx).$$

Exercice 6.

Remarque préliminaire : Pour trouver la fonction réciproque, il faut résoudre l'équation $y = f(x)$ pour x et puis échanger les variables x et y.

i) La fonction $\operatorname{sh}(x)$ va de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf. Fig. 4). On a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}\,. \end{aligned}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ et donc la fonction réciproque est

$$\operatorname{Argsh}(x) := \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Comme $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$ aussi pour $x < 0$. Ainsi le domaine de Argsh est $\mathbb{R}$ (la fonction sh est en fait bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Les graphes des fonctions sh et Argsh sont tracés sur les Figs. 4 et 5.

ii) Le domaine de $\operatorname{ch}(x)$ est $\mathbb{R}$ mais son image est $[1, \infty)$ (cf. Fig. 6). On a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 2y = e^x + \frac{1}{e^x} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned}$$

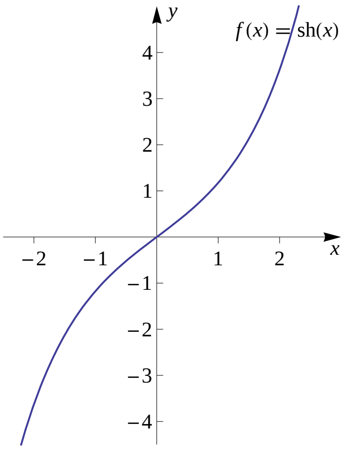


Fig. 4

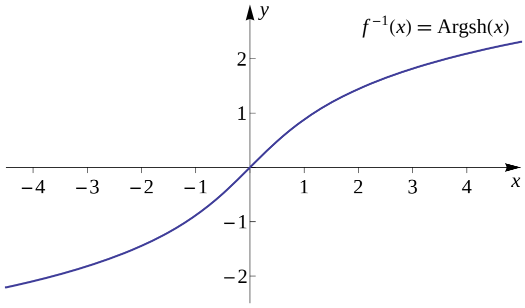


Fig. 5

Comme $y = \mathrm{ch}(x) \geq 1$, la radicande est bien non-négative. La condition $e^x > 0$ est satisfaite pour les deux signes de la racine. Comme $y \geq 1$, on obtient $e^x \geq 1$ si on prend $+\sqrt{\cdot}$ et $e^x \leq 1$ si on prend $-\sqrt{\cdot}$. Ces deux solutions correspondent donc aux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$ respectivement. En fait, la fonction $\mathrm{ch}(x)$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $[0, \infty[$ ou $]-\infty, 0]$ (cf. Fig. 6) et donc il faut la restreindre à un de ces domaines pour qu'elle soit inversible. Par convention, on prend $x \geq 0$ et donc la fonction réciproque est

$$\mathrm{Argch}\colon\ [1, \infty[\ \longrightarrow\ [0, \infty[\quad \text{définie par} \quad \mathrm{Argch}(x) = \mathrm{Log}\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big)\,.$$

Les graphes des fonctions ch et Argch sont tracés sur les Figs. 6 et 7. Comme illustration, la fonction réciproque de la fonction $g\colon\,]-\infty, 0] \to [1, \infty[$, $g(x) = \mathrm{ch}(x)$ est aussi tracée sur la Fig. 7 (courbe hachurée). Cette fonction correspond à la solution avec $-\sqrt{\cdot}$ ci-dessus.

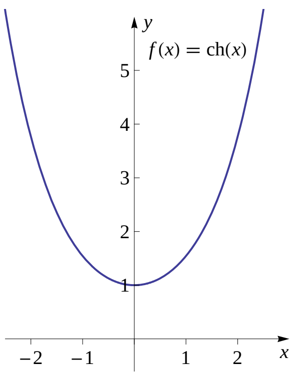


Fig. 6

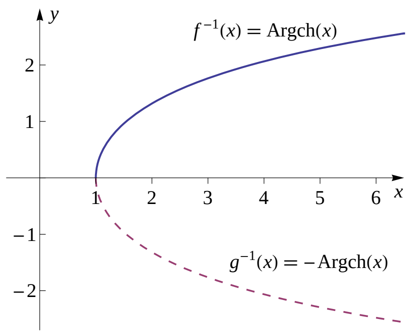


Fig. 7

iii) Le domaine de $\mathrm{th}(x)$ est $\mathbb{R}$ parce que $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}(x)$ ne s'annule jamais. Pour trouver l'image de $\mathrm{th}(x)$, on calcule ses limites lorsque x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

où on a utilisé que $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$. En effet, comme la suite $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ croît vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en particulier que $e^x \geq a_1 = 1 + x$. Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x} = 0\,.$$

L'image de $\mathrm{th}(x)$ est donc $]-1,1[$ (cf. Fig. 8). On a

$$y = \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2(1-y) = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Notons que $y \in]-1,1[$ car $\mathrm{Im(th)} =]-1,1[$ et donc la radicande est non-négative et bien définie. Comme $e^x > 0$, il faut prendre la racine positive et donc la fonction réciproque de th est

$$\mathrm{Argth}\colon\ ]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Les graphes des fonctions th et Argth sont tracés sur les Figs. 8 et 9.

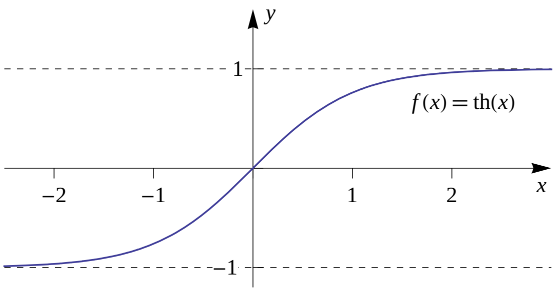


Fig. 8

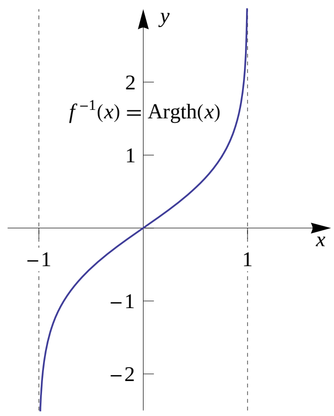


Fig. 9

iv) Comme la fonction sh s'annule en $x = 0$, le domaine de définition de coth est $\mathbb{R}^*$. Afin de simplifier la suite de l'exercice, observons que $\coth(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$. Comme l'image de $\mathrm{th}(x)$ est $]-1,1[$, il suit que l'image de $\coth(x)$ est $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$, cf. Fig. 10. On pourrait trouver la fonction réciproque en procédant comme pour la fonction th au *iii*), mais il est plus facile d'utiliser la relation avec la fonction th pour obtenir

$$y = \coth(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{th}(x) = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Argth}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{y+1}{y-1}\right).$$

Notons que $|y| > 1$ car y est dans l'image de coth, et donc l'argument du logarithme est toujours positif. Ainsi la fonction réciproque de coth est

$$\mathrm{Argcoth}\colon\ ]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{Argcoth}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Voir les Figs. 10 et 11 pour les graphes des fonctions coth et Argcoth.

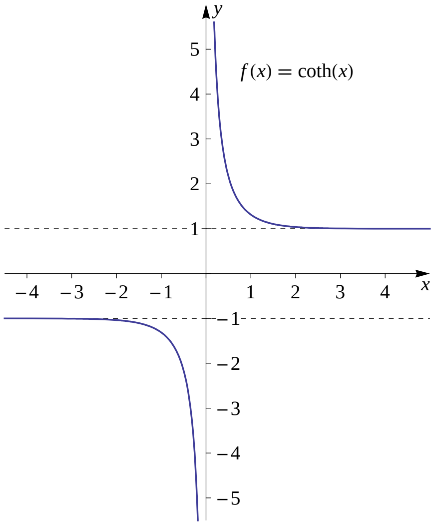


Fig. 10

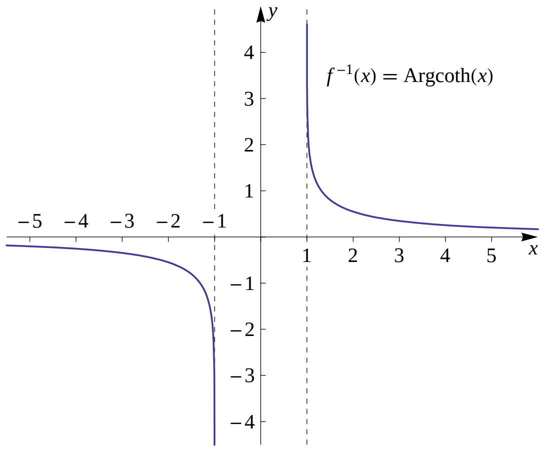


Fig. 11

Exercice 7.

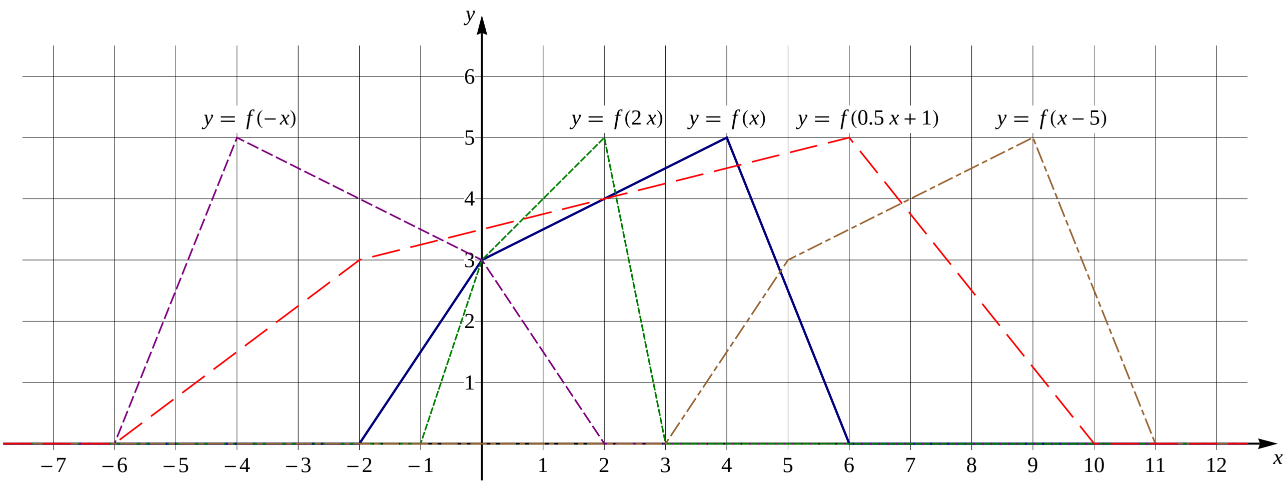
i) Pour montrer que la fonction f est bijective, on doit montrer qu'elle est surjective et injective. Soit $y \in B$. Alors $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, donc il existe $z := g(y) \in A$ tel que $y = f(z)$, c'est-à-dire f est surjective.
Soient $z_1, z_2 \in A$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Alors on a $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, ce qui montre que $z_1 = z_2$ car $(g \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in A$. Ainsi f est injective et donc bijective.
La fonction réciproque de f satisfait alors $f^{-1}(y) = f^{-1}((f \circ g)(y)) = (f^{-1} \circ f)(g(y)) = g(y)$ pour tout $y \in B$ et donc $f^{-1} = g$.

ii) Comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque f^{-1} est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) = x \quad &\overset{f(\cdot)}{\Leftrightarrow} \quad -y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = -f(x) \\ &\overset{f \text{ impaire}}{\Leftrightarrow} \quad y = f(-x) \quad \overset{f^{-1}(\cdot)}{\Leftrightarrow} \quad f^{-1}(y) = -x \quad \Leftrightarrow \quad -f^{-1}(y) = x\,. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien montré que $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$, c'est-à-dire que f^{-1} est aussi impaire.

Exercice 8.



Exercice 9.

i) Pour calculer $f \circ g$, il faut déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$ et $g(x) < 0$ respectivement et puis appliquer l'expression correspondante de f au résultat $g(x)$.

On a $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x + 2 \geq 0$ pour $x \geq -2$. Ainsi $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ et donc

$$(f \circ g)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2g(x) - 3, & x \geq -2 \\ g(x), & x < -2 \end{array} \right\} = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & -2 \leq x < 1 \\ x + 2, & x < -2 \end{cases}$$

Le procédé pour $g \circ f$ est similaire. Comme $2x - 3 \geq 1$ pour $x \geq 2$ et $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$, on a $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$. Ainsi

$$(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)^2, & x \geq 2 \\ f(x) + 2, & x < 2 \end{array} \right\} = \begin{cases} (2x - 3)^2, & x \geq 2 \\ 2x - 1, & 0 \leq x < 2 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

ii) Calcul de $f \circ g$:
Pour $x \geq 4$ on a

$$-\sqrt{x - 4} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq x \leq 5$$

et pour tout $x < 4$ on a $1 - \frac{1}{2}x \geq -1$. Ainsi $g(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 5$ et donc

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} |2g(x) - 1|, & x \leq 5 \\ -g(x)\big(g(x) + 2\big), & x > 5 \end{cases} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} |1 - x|, & x < 4 \\ \big| - 2\sqrt{x - 4} - 1\big|, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x - 4} - x + 4, & x > 5 \end{array} \right\} = \begin{cases} |1 - x|, & x < 4 \\ 2\sqrt{x - 4} + 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x - 4} - x + 4, & x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Calcul de $g \circ f$:
Pour $x \geq -1$, on a

$$|2x - 1| \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 \geq 4 \text{ ou } 2x - 1 \leq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{2} \qquad (\text{car } x \geq -1)$$

et pour $x < -1$ on a $-x(x + 2) \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 \leq 0$, ce qui est impossible car le polynôme n'a pas de racines réelles. Ainsi $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ et donc

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= \begin{cases} -\sqrt{f(x) - 4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}f(x), & x < \frac{5}{2} \end{cases} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt{|2x - 1| - 4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}|2x - 1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & x < -1 \end{array} \right\} = \begin{cases} -\sqrt{2x - 5}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}|2x - 1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 10.

Q1 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$. Si f est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_2)$ et si f est strictement décroissante, on a $f(x_1) > f(x_2)$. Dans les deux cas $f(x_1) \neq f(x_2)$, c.-à-d. f est injective.

Q2 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = 2[x] - x + 1$. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors

$$\begin{aligned} 2[x_1] - x_1 + 1 = 2[x_2] - x_2 + 1 \quad &\Rightarrow \quad 2([x_1] - [x_2]) = x_1 - x_2 \\ &\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 2k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2 + 2k) &= 2[x_2 + 2k] - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2([x_2] + 2k) - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2[x_2] + 2k - x_2 + 1 = f(x_2) + 2k. \end{aligned}$$

Or, $f(x_1) = f(x_2)$ par hypothèse, si bien que $k = 0$ et donc $x_1 = x_2$. Ainsi f est bien injective. Mais f n'est pas monotone parce qu'on a par exemple $f(0) = 1 > f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, mais $f(0) = 1 < f(1) = 2$. En fait, f est monotone (strictement décroissante) sur chacun des intervalles $[k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, voir Fig. 12.

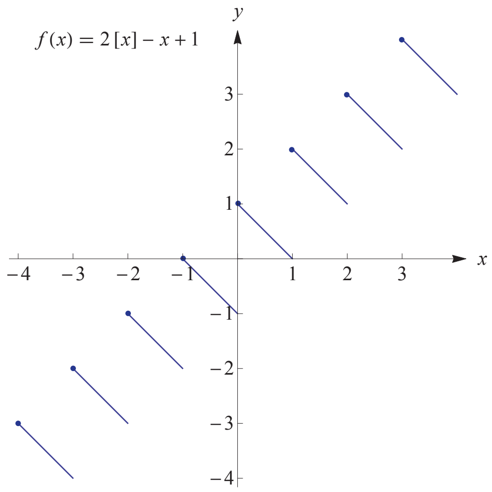


Fig. 12

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = f^{-1}(x) = x$.

Q4 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$. Alors $(f \circ g)(x) = -x$ est décroissante mais f ne l'est pas.