EPFL
Section MT

Peter Wittwer
9 novembre 2020

Analyse I – Série 8

Echauffement. (Continuité)

Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x > 1 \\ 3\,, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1. (Limites de fonctions)

Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$ *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ *v)* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Exercice 2. (Existence de limites)

Trouver les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$:

i) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{tg}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$ *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha|x|}{\sqrt{x^2+\beta\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}}$

Exercice 3. (Continuité)

Etudier la continuité de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x = 0$:

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{1/x}}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$ *ii)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ *iv)* $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 4. (Continuité avec partie entière)

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3 \cdot \big[x(2-x)\big] + a \cdot \big[\cos\big(\pi(x-1)\big)\big]$$

est-elle continue en $x = 1$?

Rappel: La partie entière d'un nombre réel u est donnée par $[u] = \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq u\}$.

Exercice 5. (Prolongement par continuité)

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0.

i) $f\colon [0,1[\cup]1,\infty[\to\mathbb{R}$, $\qquad f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$ $\quad$ en $x_0=1$

ii) Soit $A=\left\{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-1} : n\in\mathbb{N}\right\}$.
$f\colon]0,1]\setminus A\to\mathbb{R}$, $\qquad f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ $\quad$ pour $x_0\in A\cup\{0\}$

iii) $f\colon]1,2]\to\mathbb{R}$, $\qquad f(x)=\dfrac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2}$ $\quad$ en $x_0=1$

Exercice 6. (Fonctions avec limites)

Trouver le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes :

i) $f(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right)$ $\qquad$ *ii)* $f(x)=x^4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^{2n}+1}$

Exercice 7. (QCM : Limite d'une fonction)

La limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin(2x)}$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{3}$

Exercice 8. (QCM : Prolongement par continuité)

Pour $x\in\mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\big(\cos(x)-1\big)-\cos\big(\sin(x)\big)+1}{x^4} & \text{pour } x\neq 0\,,\\ c & \text{pour } x=0\,.\end{cases}$$

Quelle est la valeur de $c\in\mathbb{R}$ pour que f soit continue en $x=0$?

- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

Exercice 9. (Limites à gauche et à droite)

Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$, avec $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x^*\in I$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to x^*\\ x\neq x^*}} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to x^*\\ x<x^*}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x^*\\ x>x^*}} f(x)=\ell$.