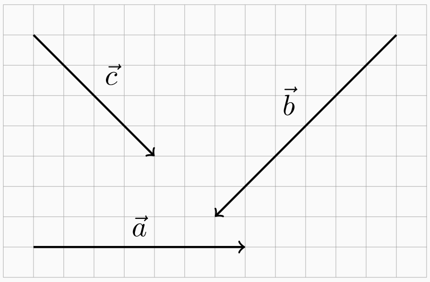
Série 1

Exercice 1. On donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sur la figure ci-dessous.

Représenter ces trois vecteurs sur une feuille quadrillée, puis construire les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{n}, \vec{t}$ définis par :

$$\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}, \quad \vec{y}+\vec{b}=\vec{c}, \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{z}, \quad 2(\vec{a}-\vec{n})=\vec{b}-\vec{c},$$

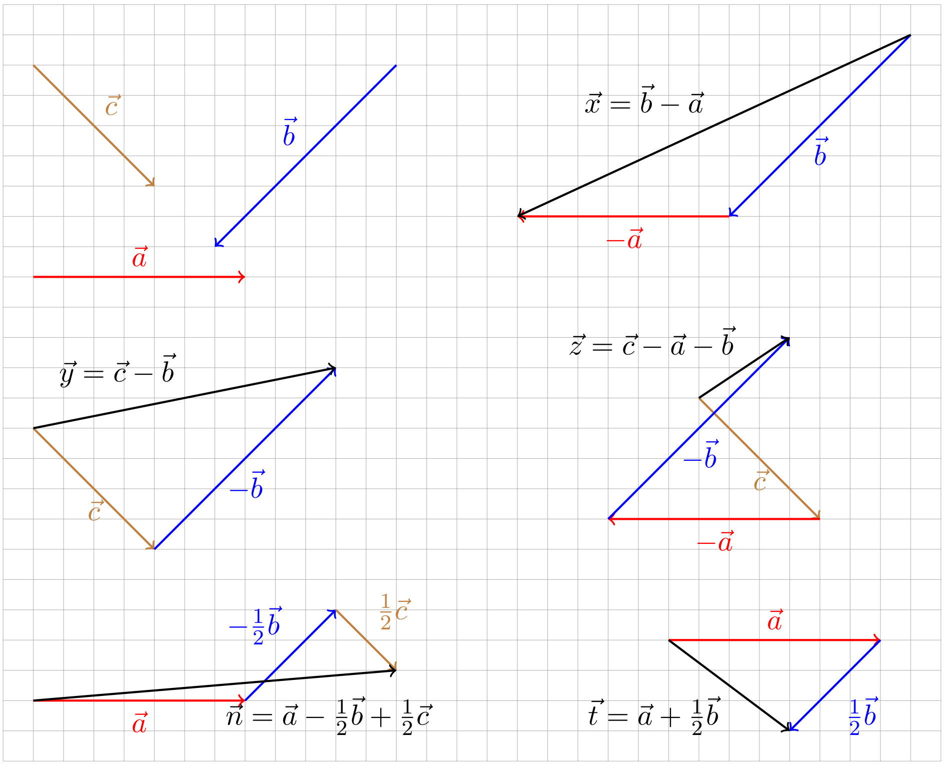
$$\frac{1}{3}\Big(\frac{7}{2}\,\vec{t}+\vec{a}-\vec{b}\Big)=-\vec{b}+\frac{1}{2}\big(\vec{t}+2\,\vec{a}+2\,\vec{b}\big).$$



Solution: On commence par exprimer les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{n}, \vec{t}$ en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en utilisant les règles usuelles du calcul vectoriel. On obtient :

$$\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}\,, \quad \vec{y}=\vec{c}-\vec{b}\,, \quad \vec{z}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\,, \quad \vec{n}=\vec{a}-\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})\,, \quad \vec{t}=\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}\,.$$

Graphiquement :



Exercice 2. On donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sur la figure ci-dessous.

a. Représenter ces vecteurs sur une feuille quadrillée, puis construire les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

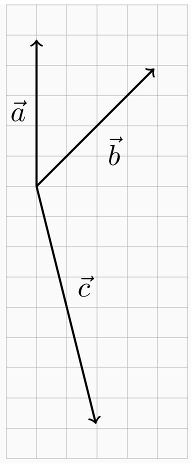
$$\vec{x} = \vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{y} = 6\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}.$$

b. À l'aide du dessin, déterminer deux nombres p et q tels que $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

c. Exprimer les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ seulement.

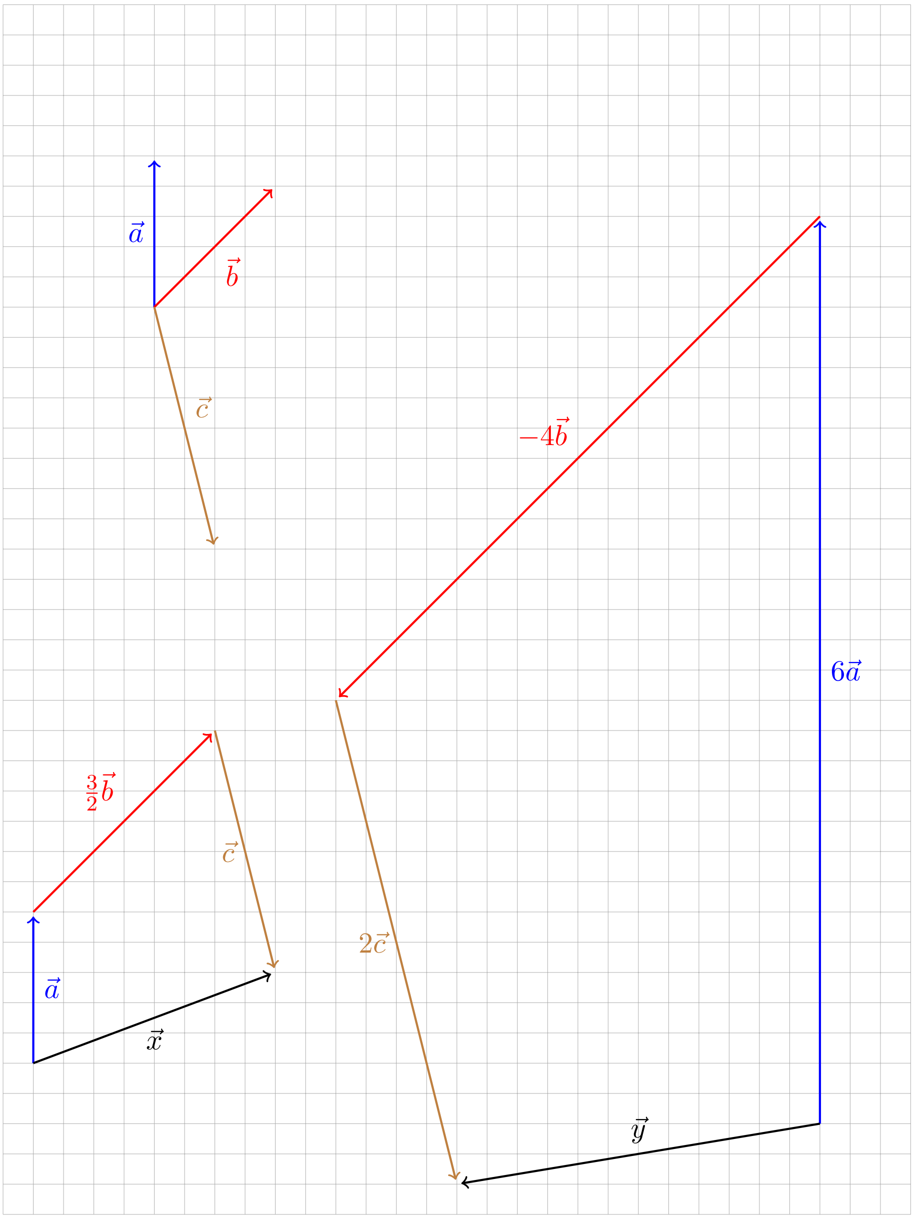
d. Exprimer les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en fonction de $\vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{y}$.

Indication: à l'aide de *a.* et *b.*, exprimer les vecteurs $\vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ uniquement, puis résoudre le système.

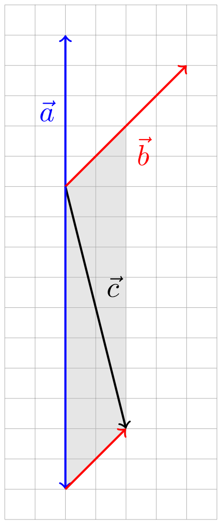


Solution:

a. Afin de construire $\vec{x}$, on met "bout-à-bout" les vecteurs $\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{b}$ et $\vec{c}$ dont il est la somme. On raisonne exactement de la même manière pour construire $\vec{y}$.



b. Pour trouver les nombres p et q, on fait apparaitre le vecteur $\vec{c}$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{a}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{b}$, ou, ce qui revient au même, on construit un parallélogramme dont les côtés sont dirigés par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et dont la diagonale est $\vec{c}$. On obtient la figure suivante :



En s'aidant du quadrillage, on en déduit la décomposition $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. On a donc $p = -2$ et $q = \frac{1}{2}\vec{b}$.

Remarque : le vecteur $-2\vec{a}$ est la projection de $\vec{c}$ dans la direction de $\vec{a}$ parallèlement à la direction de $\vec{b}$. De même, le vecteur $\frac{1}{2}\vec{b}$ est la projection de $\vec{c}$ dans la direction de $\vec{b}$ parallèlement à la direction de $\vec{a}$.

c. Pour trouver les expressions demandées, on reprend les définitions de $\vec{x}$ et de $\vec{y}$ et on y injecte l'expression de $\vec{c}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ trouvée à la question précédente. En employant les règles usuelles de calcul sur les vecteurs, on obtient alors :

$$\vec{x} = \vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b} + (-2\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}\,,$$

et

$$\vec{y} = 6\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = 6\vec{a} - 4\vec{b} + 2(-2\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = 2\vec{a} - 3\vec{b}\,.$$

d. Pour résoudre cette question, notre stratégie est d'exprimer les vecteurs $\vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$, puis d'inverser les relations obtenues en résolvant un système. Par définition même de $\vec{x}$, on a directement

$$\vec{x} - \vec{a} = \tfrac{3}{2}\vec{b} + \vec{c}.$$

Pour obtenir une expression de $\vec{y}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ il faut travailler un peu plus, car la définition de $\vec{y}$ fait intervenir le vecteur $\vec{a}$. On commence alors par exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$, à l'aide du résultat trouvé à la deuxième question. On a vu que

$$\vec{c} = -2\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b},$$

et donc

$$\vec{a} = -\tfrac{1}{2}(\vec{c} - \tfrac{1}{2}\vec{b}) = -\tfrac{1}{2}\vec{c} + \tfrac{1}{4}\vec{b}.$$

On obtient ainsi

$$\vec{y} = 6\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = -\vec{c} - \tfrac{5}{2}\vec{b}.$$

On a établi les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tfrac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{x} - \vec{a} \\ -\tfrac{5}{2}\vec{b} - \vec{c} = \vec{y} \end{cases}$$

On peut considérer ce système comme ayant pour inconnues $\vec{b}$ et $\vec{c}$. On peut le résoudre comme on résoudrait un système pour des variables réelles (par combinaisons ou par substitutions). On obtient alors

$$\vec{b} = -(\vec{x} - \vec{a}) - \vec{y}\,, \quad \vec{c} = \tfrac{5}{2}(\vec{x} - \vec{a}) + \tfrac{3}{2}\vec{y}\,.$$

Obs : On pourra éventuellement, pour clarifier les opérations nécessaires dans ce calcul, remplacer $\vec{x} - \vec{a}$ par une variable, par exemple $\vec{z}$, et une fois le calcul fait, remplacer celle-ci à nouveau par $\vec{x} - \vec{a}$.

Exercice 3. Soient A, B, C, D et E des points quelconques. Simplifier les expressions suivantes :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}.$$

Solution: On peut commencer par réarranger et faire apparaître des termes qui se simplifient à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}}_{=\overrightarrow{AE}} + \underbrace{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{EC}} + \overrightarrow{DC} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}}_{=\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}\,. \end{aligned}$$

De même,

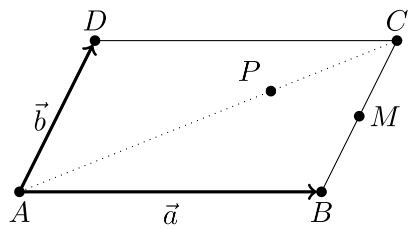
$$\vec{b} = \overrightarrow{DA} - (\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{DC}}) \underbrace{-\overrightarrow{CD}}_{=+\overrightarrow{DC}} = \overrightarrow{DA}\,,$$

puis

$$\vec{c} = \overrightarrow{EC} \underbrace{-\overrightarrow{ED}}_{=+\overrightarrow{DE}} + \overrightarrow{CB} \underbrace{-\overrightarrow{DB}}_{=+\overrightarrow{BD}} = \underbrace{\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}}_{=\overrightarrow{DC}} + \underbrace{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}}_{=\overrightarrow{CD}} = \vec{0}\,.$$

Exercice 4. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point du plan défini par $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Solution: Figure d'étude :



Pour aborder la question, la stratégie que l'on va suivre est d'utiliser la relation de Chasles de manière répétée afin de faire apparaître des vecteurs que l'on peut exprimer en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On peut par exemple commencer par écrire

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\,.$$

Mais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, et comme

$$\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC} = -2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC})\,,$$

on a que $\overrightarrow{PA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{PB} = \tfrac{1}{3}\vec{a} - \tfrac{2}{3}\vec{b}\,.$$

On procède de même pour $\overrightarrow{PM}$, en commençant par exemple avec la décomposition $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}$, en utilisant $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, pour obtenir finalement $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$.

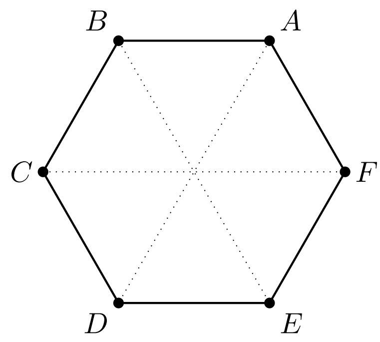
Finalement, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Remarquons que ces calculs impliquent $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DM}$, et donc que D, P, et M sont alignés !

Exercice 5. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier. Construire les vecteurs suivants et simplifier leur expression :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}.$$

Solution: Nommons les sommets de l'hexagone de la façon suivante (la solution de l'exercice ne dépend pas du choix pour la notation, horaire ou anti-horaire, tant que les points sont placés en respectant l'ordre alphabétique : $A, B, C, ..., F$) :



Notre stratégie est de faire apparaître sur le dessin des vecteurs égaux et s'en servir pour modifier les expressions proposées, à l'aide notamment de la relation de Chasles. Par exemple, on a :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}\,.$$

La façon de procéder n'est pas unique. On aurait tout aussi bien pu écrire :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{ED}\,,$$

ce qui revient au même puisque $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$. Pour les suivants, on procède de la même façon :

$$\vec{b} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EA}\,,$$

Bien-sûr, $\vec{c} = 2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$, et comme $\overrightarrow{DD} = \vec{0}$ on a

$$\vec{d} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}\,.$$

Exercice 6. a. Soient A, A', D et D' quatre points quelconques du plan ou de l'espace, I le milieu de AA' et L le milieu de DD'. Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{IL}$.

b. Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes. On note I, J, K et L les milieux de AA', BB', CC' et DD' respectivement. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Solution:

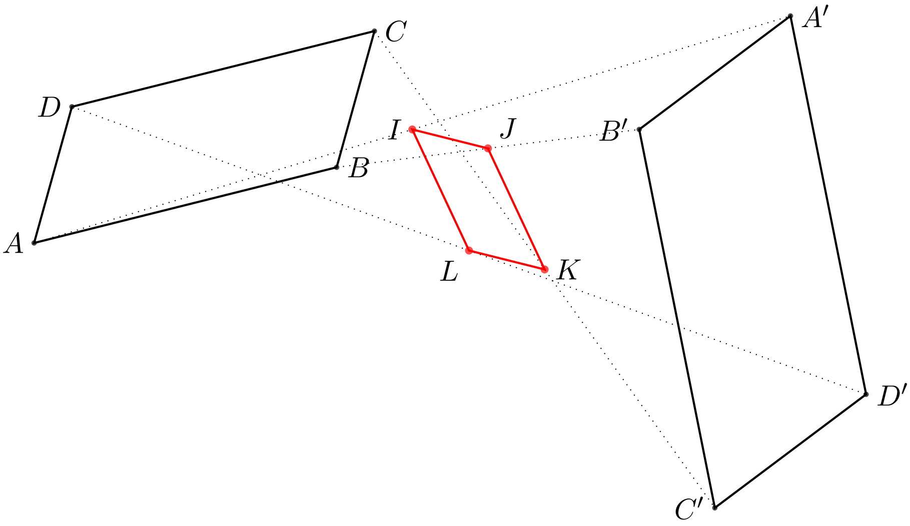
a. On peut utiliser la relation de Chasles pour écrire :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LD}\,,$$
$$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LD'}\,.$$

En additionnant ces deux identités, et en utilisant le fait que $\overrightarrow{A'I} = -\overrightarrow{AI}$ (car I est milieu de AA'), $\overrightarrow{LD'} = -\overrightarrow{LD}$ (car L est milieu de DD'), on obtient

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{IL}\,.$$

b. La stratégie qui nous guide ici est de chercher à établir l'égalité $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, traduction vectorielle du fait que $IJKL$ est un parallélogramme.



Par le point précédent, on a

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\,, \qquad 2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D'C'}\,.$$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$, on obtient $2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{LK}$, et donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, ce qui signifie bien que $IJKL$ est un parallélogramme.

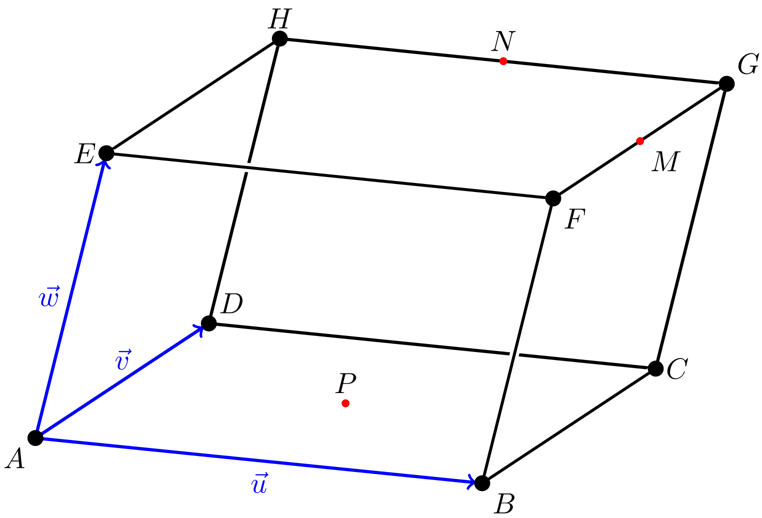
Exercice 7. Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AF}$.

a. On appelle M le milieu de FG, N celui de HG et P le centre du parallélogramme $ABCD$. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b. On considère le point J de la face $BCGF$ tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

Solution:

a. Pour aborder cette question, on commence par représenter les données de l'énoncé sur un dessin :



On rappelle qu'un parallélépipède est un hexaèdre dont les faces sont parallèles deux-à-deux. En particulier, toutes ses faces sont des parallélogrammes. Utilisons maintenant la relation de Chasles et les propriétés géométriques du parallélépipède. On a : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP}$. Or $\overrightarrow{EA} = -\vec{w}$ et

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\,,$$

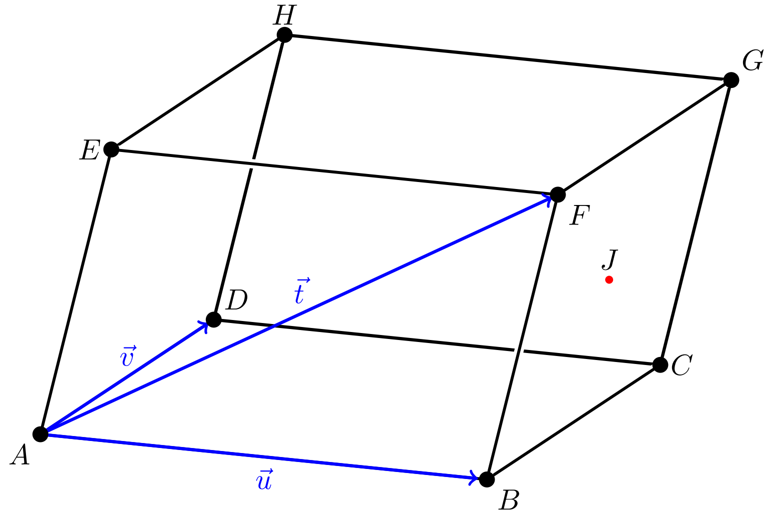
donc

$$\overrightarrow{EP} = \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}\,.$$

Les autres vecteurs s'obtiennent de façon similaire :

$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.
$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HN} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$.
$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.
$\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GN} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$.
$\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$.
$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$.

b. Mettons en évidence les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ et le point J sur la figure.



On remarque alors que J est le centre du parallélogramme $BCGF$: On a :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\,.$$

Or $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, et comme $\vec{u} + \overrightarrow{BF} = \vec{t}$, on a $\overrightarrow{BF} = \vec{t} - \vec{u}$. Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t})$.

Exercice 8. Soient M, N, P, Q les points milieux des arêtes AC, BD, AD, BC d'un tétraèdre $ABCD$.

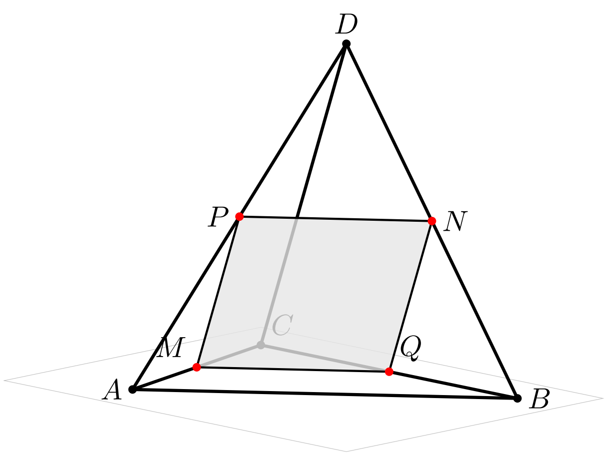
a. Montrer que le quadrilatère $MPNQ$ est un parallélogramme.

b. Démontrer les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}.$$

Solution:

a. Figure d'étude :



Pour montrer que $MPNQ$ est un parallélogramme, il suffit par exemple de montrer que $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ}$. Or

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

En commençant par $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}$, on montre de même que $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b. On a vu au point précédent que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MQ}$, et donc on a aussi $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{QN}$. On a donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}) = 2\overrightarrow{MN}$. Pour calculer $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ on utilise maintenant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}.$$

On raisonne de manière similaire pour la seconde série d'égalités. On a que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{QN}$, d'où l'on tire :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{QN}) = 2(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ}) = 2\overrightarrow{PQ}.$$

Une nouvelle application de la relation de Chasles donne alors :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{PQ}.$$

Pour obtenir la troisième égalité, on additionne les deux premières entre elles :

$$2\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{PQ}$$

d'où l'on tire l'égalité voulue en multipliant par $\frac{1}{2}$. La dernière égalité est obtenue de manière similaire, en soustrayant entre elles les deux premières.