CATALOGUE

EPFL

n/a

Prof. S. Deparis

Algèbre linéaire - (n/a)

20 janvier 2020

3 heures

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m\times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$
– Pour $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}^T\vec{y}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [MC-calc-syst-lineaire] : Soient h un paramètre réel,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ -1 & 12 & 5\\ -1 & 4h+4 & h+3\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ h-3\\ 2\end{pmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle $A\vec{x}=\vec{b}$

■ admet une infinité de solutions si et seulement si $h\in\{4,-1\}$.

□ admet une infinité de solutions si et seulement si $h\in\{-4,1\}$.

□ admet une infinité de solutions si et seulement si $h\in\{-4,-1\}$.

□ admet une infinité de solutions si et seulement si $h\in\{4,1\}$.

Question [q:MC-calc-span] : Soit a un paramètre réel et soient

$$p_1(t)=a+4t-5t^2\,, \qquad p_2(t)=4+at-5t^2\,, \qquad p_3(t)=4-5t+at^2\,.$$

Alors les polynômes p_1, p_2 et p_3 sont linéairement dépendants si et seulement si

□ $a\notin\{-5,1,4\}$.

□ $a\in\{-5,-1,4\}$.

■ $a\in\{-5,1,4\}$.

□ $a\notin\{-5,-1,4\}$.

Question [q:MC-calc-inverse] : Soit

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Les coefficients de sa matrice inverse $C=A^{-1}$ satisfont

□ $c_{21}=-1$ et $c_{13}=0$.

■ $c_{11}=-1$ et $c_{32}=-1$.

□ $c_{22}=-1$ et $c_{13}=-1$.

□ $c_{12}=-1$ et $c_{33}=0$.

Catalogue

Question [`q:MC-calc-det`] : Soient α un nombre réel et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible si et seulement si

- [ ] $\alpha \in \{3, -1\}$.
- [ ] $\alpha \notin \{3, -1\}$.
- [ ] $\alpha \in \{-3, 1\}$.
- [x] $\alpha \notin \{-3, 1\}$.

Question [`q:MC-calc-matrice`] : Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 8x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Si $M = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ est la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\}$, telle que $\big[T(\vec{v})\big]_{\mathcal{B}} = M\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, alors

- [x] $b_1 = 2, \quad b_2 = 1$.
- [ ] $b_1 = 1, \quad b_2 = 2$.
- [ ] $b_1 = -2, \quad b_2 = 1$.
- [ ] $b_1 = 1, \quad b_2 = -2$.

Question [`q:MC-calc-matrice-matrice`] : Soit $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, telle que $\big[T(A)\big]_{\mathcal{B}} = M\big[A\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, est

- [ ] $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- [x] $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Question [`q:MC-calc-rank`] : Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$W = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\vec{v} = \vec{w}\}.$$

Si $\dim(W) = k$, alors

- [ ] $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = n - k$.
- [x] $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = m - k$.
- [ ] $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = k$.
- [ ] $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = \min(m, n) - k$.

Question [q:`MC-calc-base-ker`] : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.
- ■ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Question [q:`MC-calc-base-im`] : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T(\vec{e}_1) = 6\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\,, \qquad T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3\,,$$

$$T(\vec{e}_3) = 8\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3\,, \qquad T(\vec{e}_4) = 8\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3\,,$$

où $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ et $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Alors

- ■ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Question [q:`MC-calc-passage`] : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ■ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Question [MC-calc-valeurs-propres] : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 15 & 18 \\ 0 & 2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

- ☐ -1, 15, -6 et 2 .
- ■ 2, 6, 0.
- ☐ -2, 2 et 0.
- ☐ 3, 5, 0 et 2.

Question [MC-calc-vecteurs-propres] : Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors une base de $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = 5\vec{x}\right\}$ est donnée par

- ☐ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
- ☐ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
- ■ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Question [q:MC-calc-proj-ortho] : Soient

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Si $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique, alors la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W est

- ■ $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -360 \\ 360 \\ -432 \\ -180 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Question [MC-calc-moindre-carres] : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ■ $\widehat{x}_1 = 10/7$, $\widehat{x}_2 = 12/7$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 12/7$, $\widehat{x}_2 = -10/7$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = -10/7$, $\widehat{x}_2 = 12/7$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 12/7$, $\widehat{x}_2 = 10/7$.

Question [`q:MC-calc-ortho-diag`] : La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en base orthonormée et peut s'écrire sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

Si $d_{11} > 0$, alors un choix possible pour Q est

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

■ $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Question [`q:MC-theory-det`] : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit

$$k = \det\left((A + I_n)^2 - (A - I_n)^2\right).$$

Alors

☐ $k = 2\det(A)$.

☐ $k = 2^n \det(A)$.

☐ $k = 4\det(A)$.

■ $k = 4^n \det(A)$.

Question [`q:MC-theory-syst-lineaire`] : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Alors il est toujours vrai que

■ $A\vec{x} = A\vec{c}$ possède une infinité de solutions pour tout choix de $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

☐ $A\vec{x} = A\vec{c}$ possède une unique solution pour tout choix de $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

☐ $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

☐ $A^T\vec{y} = \vec{0}$ possède une solution unique.

Question [`q:MC-theory-sous-espaces`] : Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ et } a_1 = 0\right\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ et } a_2 = a_0 + a_1\right\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ et } a_1 = a_2 + 3\right\},$$
$$\mathcal{E}_4 = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ et } a_0^2 = a_1^2\right\},$$

combien sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?

☐ 1. ■ 2. ☐ 3. ☐ 4.

Question [`q:MC-theory-diagonalisable`] : Soit A une matrice de taille $n \times n$ diagonalisable. Si toutes les valeurs propres de A sont non nulles, alors il est toujours vrai que

☐ A^T et A^{-1} ne sont pas forcément diagonalisables.

☐ A^{-1} est diagonalisable, mais A^T n'est pas forcément diagonalisable.

■ A^T et A^{-1} sont diagonalisables.

☐ A^T est diagonalisable, mais A^{-1} n'est pas forcément diagonalisable.

Catalogue

Question [`q:MC-theory-diagonalisation`] : Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$ et soit $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont aussi des vecteurs propres de la matrice AB, alors il est toujours vrai que

- [ ] le déterminant de B est non-nul.
- [ ] si B est inversible, alors B est diagonalisable.
- [ ] si A est inversible, alors $AB \neq BA$.
- [x] si A est inversible, alors B est diagonalisable.

Question [`q:MC-theory-moindres-carres`] : Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Soit $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ une solution du système linéaire $(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$. Alors il est toujours vrai que

- [x] $\|\vec{b} - A\vec{w}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{u}\|$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
- [ ] $\|\vec{b} - A\vec{w}\| \geq \|\vec{b} - A\vec{u}\|$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
- [ ] $\vec{w}$ est une solution du système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$.
- [ ] la matrice $A^T A$ est inversible.

Question [`q:MC-theory-matrice-orthogonale`] : Soit A une matrice de taille $n \times n$.
Si A est orthogonale, laquelle des affirmations suivantes **n'est pas** forcément vraie?

- [ ] A^T est orthogonale.
- [x] $\det A = 1$.
- [ ] Pour $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $A\vec{v}$ est orthogonal à $A\vec{w}$ si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$.
- [ ] $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$, où $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont les colonnes de A et $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ sont les colonnes de A^T.

Deuxième partie, questions de type ouvert

– Cette partie comporte les questions 23 et 24.
– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 1 : *Cette question est notée sur 10 points.*

Réservé au correcteur

Réservé au correcteur

Soit A une matrice 4×4 telle que

- Le noyau de A est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$
- La factorisation LU de $A+2I_4$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -9/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- L'image de $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ par A est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sans calculer explicitement la matrice A ni la matrice P^{-1} :

(a) Calculer les valeurs propres de A, ainsi qu'une base de chaque espace propre. *(6 points)*

( ) Justifier les étapes en (a). *(2 points)*

(b) Calculer les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$ et D est diagonale. *(2 points)*

Question 1 : *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soit V un espace vectoriel réel.

(a) Donner la définition d'un produit scalaire $(\ ,\ )$ dans V. *(2 points)*

(b) Donner la définition de norme associé à un produit scalaire. *(2 points)*

(c) Prouver le Théorème de Pythagore: pour tout $u, v \in V$ *(2 points)*

$$(u, v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2$$