Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ____________________

PRENOM : ____________________

Groupe ☐

1. Dans le plan, muni d'une origine O et de la base canonique orthonormée $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'endomorphisme f donné par la relation :

$$f(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + 3\,(\vec{x} \cdot \vec{e}_2)\,(\frac{4}{3}\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

a) Déterminer la matrice M_f de l'application linéaire f relativement à la base B_1.

b) Montrer que f admet une droite de points fixes et qu'un point P et son image P' déterminent une direction fixe $\vec{v}$. Calculer $f(\vec{v})$, en déduire la nature géométrique de f.

Soit p une projection orthogonale telle que son image est la droite $(O\,,\,\vec{v})$.
On note B_2 une base formée de vecteurs de $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$.

c) Relativement à la base B_2, déterminer la matrice de p. A l'aide d'un changement de base, calculer la matrice de $f \circ p$ dans B_2 et en déduire directement une interprétation géométrique.

4 pts

2. Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les trois endomorphismes suivants :

- h : homothétie de centre O et de rapport $k = 25$,
- r : rotation de centre O et d'angle $\varphi = \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}$,
- g est donné par sa matrice dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$
  $M_g = \begin{pmatrix} -4-3a & 24 \\ -24 & a+6 \end{pmatrix}$ par rapport à B.

Déterminer la matrice de l'endomorphisme $l = g - h \circ r^{-2}$ par rapport à B et $a \in \mathbb{R}$ tel que l soit composée d'une homothétie et d'une symétrie. 3 pts

Tourner la page

3. Dans l'espace muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère l' endomorphisme f défini par sa matrice M par rapport à B :

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2m+1 & 3 & m+2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$$

.

a) Discuter en fonction du paramètre m , la dimension de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ (on ne demande pas leurs équations).

b) On pose $m = 1$.
Déterminer les équations de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. En déduire, en le justifiant, la nature géométrique de f .

3,5 pts

4. On note P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à deux.

On considère les bases suivantes de P_2 :

$B_1 = (x^2 - 1\,;\, 4\,;\, x)$,

$B_2 = (x - 8\,;\, 12\,;\, 4x^2)$.

a) Déterminer la matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2 .

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $E_1 = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$ et de la base $E_2 = (\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$ définie par

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = -\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 = 3\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

On considère l'application linéaire f de P_2 dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice associée est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à B_1 et E_2 .

b) Déterminer la matrice de f relativement aux bases B_2 et E_1 .

c) Soit $\overrightarrow{OP'} = 12\vec{e}_1 + 6\,\vec{e}_2$.
Déterminer les composantes de $f^{-1}(\overrightarrow{OP'})$ relativement à la base B_1 , puis relativement à la base canonique $B = (1,\, x,\, x^2)$ de P_2 .

4,5 pts