CATALOGUE

Prof. S. Deparis
Algèbre Linéaire - (n/a)
23 Janvier 2017
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Notation

- $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
- Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice. De même, pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
- I_m désigne la matrice identité $m \times m$.
- Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$ et la norme euclidienne par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`q:MC-calc-det-new`] : Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0?

- ■ 0 et 1
- □ aucun
- □ 0 et -1
- □ -1 et 1

Question [`q:MC-calc-famillelibre-parametre-JS`] : On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- □ si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- □ si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.
- □ pour toute valeur réelle de h.
- ■ si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.

Question [q:MC-calc-inversion-new] : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- ☐ $-\frac{2}{3}$.
- ■ $\frac{1}{9}$.
- ☐ $-\frac{1}{9}$.
- ☐ $\frac{1}{3}$.

Question [MC-calc-LU] : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément l_{32} de L est

- ☐ 1/2.
- ☐ $-3/2$.
- ☐ 3/2.
- ■ 3.

Question [MC-calc-moindre-carres] : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\hat{x}_2 = -35/6$.
- ☐ $\hat{x}_2 = 41/6$.
- ■ $\hat{x}_2 = -5/6$.
- ☐ $\hat{x}_2 = 1/6$.

Question [q:MC-calc-polynome-1-alternative] : La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{tels que} \quad v_4 = 0 \right\}$$

est

- ☐ 4.
- ☐ 3.
- ☐ 1.
- ■ 2.

Question [q:MC-calc-polynome-2] : Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T\big(p(t)\big) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question [q:MC-calc-proj-ortho-JS] : Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

- ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} 255 \\ 396 \\ 375 \end{pmatrix}$.

Question [q:MC-calc-span-new] : Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

- ☐ $b = 1$.
- ☐ $b = -1$.
- ☐ $b = -3$.
- ■ $b = 3$.

Question [MC-calc-systeme-lineaire-2] : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une infinité de solutions

- ■ pour $h = -2$, $h = 0$ et $h = 2$.
- □ pour $h = -2$, $h = 1$ et $h = 2$.
- □ pour $h = -1$, $h = 0$ et $h = 1$.
- □ pour $h = -1$, $h = -1/2$ et $h = 1/2$.

Question [q:MC-calc-systeme-lineaire-new] : Soit A une matrice de taille 4×5 telle que l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est compatible} \right\} \ ?$$

- □ 0
- □ 1
- □ 2
- ■ 3

Question [q:MC-calc-transf-lineaire-alternative] : Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- □ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
- □ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.
- □ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
- ■ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.

Question [q:MC-calc-tr-lineaire-enleve] : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

est

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 6 \\ 10 & -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$.

Question [MC-calc-valeurs-propres-1] : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 3.
- ☐ 3 et 4.
- ☐ -5, -1 et 1.
- ■ -2 et 7.

Question [q:MC-moindres-carres] : Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$?

- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- ■ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.

Question [q:MC-theory-bases-newer] : Soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble $\{T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), T(2\vec{e}_2), T(\vec{e}_3 + \vec{e}_4), T(\vec{e}_4 + \vec{e}_1)\}$

- ☐ est une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ n'est pas linéairement indépendante.
- ☐ ne peut pas être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
- ■ peut être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.

Question [q:MC-theory-diagonalisable] : Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Alors

- ☐ AB est toujours diagonalisable.
- ☐ AB n'est jamais diagonalisable.
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- ■ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.

Question [MC-theory-eq-matricielle] : Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m-1)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être

- ■ l'ensemble vide.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension 1.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension $m-2$.
- ☐ égal à $\mathbb{R}^{m-1}$.

Question [q:MC-theory-inverse-JS] : Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ☐ $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- ☐ $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- ■ $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$

Question [q:MC-theory-matrice-orthogonale-JS] : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

$$\text{(a) } \det A = 1 \qquad \text{(b) } AA^T = I_3 \qquad \text{(c) } A^3 = I_3$$

lesquelles sont vraies?

- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ seulement (b)
- ☐ seulement (a) et (b)
- ■ (a), (b) et (c)

Question [q:MC-theory-pol-carac-JS] : Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie?

- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ $\det A = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ■ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Question [MC-theory-projection-ortho-2] : Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W. Alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- ☐ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \vec{0}$.
- ☐ $U^T U \vec{x} = \text{proj}_W \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.
- ☐ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \vec{y}$.
- ■ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.

Question [q:MC-theory-sous-espaces-extra-question-JS] : Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

- ☐ tous sauf (d)
- ☐ tous sauf (b)
- ☐ seulement (c) et (e)
- ■ seulement (a), (c) et (e)

Question [q:MC-theory-valeurs-propres-2] : Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai?

- ☐ Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
- ☐ Les rangs de A et de B sont les mêmes.
- ■ A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Pour chaque question répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur. Cette partie comporte les questions A et B.

Question A : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ■3 *Réservé au correcteur*

☐0 ☐1 ■2 *Réservé au correcteur*

Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et soit $T : V \to W$ une application linéaire.

(a) (2 points) Donner la définition d'une application linéaire de V dans W.

(b) (2 points) Définir $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$.

(c) (4 points) Soient Y un sous-espace vectoriel de W et $X = \{v \in V \text{ tels que } T(v) \in Y\}$. Démontrer que X est un sous-espace vectoriel de V.

(d) (2 points) En déduire que $\operatorname{Ker} T$ est un sous-espace vectoriel de V.

Catalogue

Question B : *Cette question est notée sur 8 points.*

□ 0 □ 1 ■ 2	*Réservé au correcteur*
□ 0 □ 1 ■ 2	*Réservé au correcteur*

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) (4 points) Diagonaliser A. Exhiber une base (orthonormale, si le problème le permet) de vecteurs propres.

(b) (2 points) Calculer la dimension du noyau de A.

(c) (2 points) Soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Calculer $\min\{Q(\vec{x})$ tel que $\|\vec{x}\| = 1\}$ et $\max\{Q(\vec{x})$ tel que $\|\vec{x}\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.