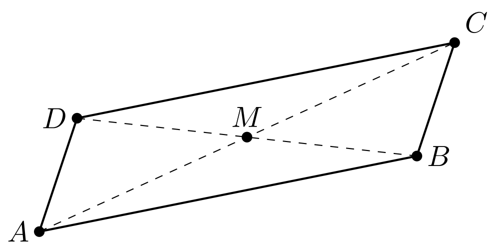
Série 3

Exercice 1. Un parallélogramme $ABCD$ est défini par les sommets $A(3,2)$ et $B(2,-5)$, ainsi que son centre $M(1,8)$ dans un repère fixé du plan. Quelles sont les coordonnées des sommets C et D dans ce repère ?

Solution: Figure d'étude :



Dans un parallélogramme, le centre est le milieu des diagonales. On a donc : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. Si $C\,(x,y)$, ceci se traduit en coordonnées par

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

En résolvant ces équations on trouve $C\,(-1,14)$. On peut procéder exactement de la même manière pour trouver les coordonnées de D.

On peut aussi calculer celles-ci en utilisant les coordonnées de C obtenues ci-dessus. En effet, comme le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, d'où l'on déduit que :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix},$$

où O désigne l'origine du repère choisi. Remarquer que sur notre dessin le repère n'est pas indiqué. Sauriez-vous placer l'origine et les vecteurs de base ?

Exercice 2. Dans un repère fixé du plan, on considère les points $A\,(-4,2)$, $B\,(1,3)$ et $G\,(-\frac{1}{3},\frac{10}{3})$. Déterminer les coordonnées du point C sachant que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Solution: Rappelons que l'une des caractérisations de G est que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

En particulier, en prenant pour M le point O origine du repère utilisé, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Si C a pour coordonnées (x,y), cette dernière identité devient :

$$\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3+x \\ 5+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on obtient $x=2$ et $y=5$, autrement dit $C\,(2,5)$.

Exercice 3. On fixe un repère du plan dont on note O l'origine, ainsi qu'un réel α. On considère les points suivants :

$$P(6,0),\ Q(1,4),\ S(\alpha-2,-9) \text{ et } T(5,\alpha).$$

a. Calculer dans ce repère les composantes des vecteurs

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}, \quad \vec{b}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}, \quad \vec{c}=2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}, \quad \vec{d}=3(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}.$$

b. Calculer dans ce repère les coordonnées du point R, sachant que

$$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}+2\overrightarrow{QR}=\vec{0}.$$

c. Déterminer α pour que les points P, S et T soient alignés.

d. Déterminer α pour que les droites (PQ) et (TS) soient parallèles.

Solution:

a. Par définition des coordonnées dans un repère, on sait que les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont données par :

$$\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OQ}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, comme l'addition des vecteurs en coordonnées se fait terme à terme, on voit que $\vec{a}$ a pour composantes :

$$\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}.$$

En raisonnant exactement de la même façon, on obtient les composantes suivantes :

$$\vec{b}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}, \quad \vec{c}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d}\begin{pmatrix}-25/2\\10\end{pmatrix}.$$

b. Si $R\,(x,y)$, alors la condition $\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}+2\overrightarrow{QR}=\vec{0}$ devient

$$\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

ce qui correspond à

$$\begin{pmatrix}2x+2\\-16+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

et donc $x=-1$, $y=8$.

c. Les points P, S et T sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont colinéaires, autrement dit si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PT}$. En écrivant cette condition en coordonnées, on obtient

$$\begin{pmatrix}\alpha-8\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda\\\lambda\alpha\end{pmatrix},$$

ce qui donne un système (non-linéaire !) en λ et α. Comme le produit $\lambda\alpha$ est non nul (il vaut -9 !) on voit que ni λ ni α ne peut être nul. On peut alors exprimer λ en fonction de α par la relation $\lambda=\frac{-9}{\alpha}$, puis insérer cette expression dans la première, ce qui mène à $\alpha^2-8\alpha-9=0$. On résout ensuite cette équation du second degré et on trouve deux solutions : $\alpha=-1$, $\alpha=9$.

d. Pour que les droites (PQ) et (TS) soient parallèles, il faut et il suffit que les vecteurs

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{TS}=\begin{pmatrix}\alpha-7\\\alpha+9\end{pmatrix}$$

soient colinéaires, autrement dit qu'il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{TS} = \lambda \overrightarrow{PQ}\,.$$

On cherche donc à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha - 7 = -5\lambda \\ -\alpha - 9 = 4\lambda \end{cases}$$

Seule la valeur de α nous intéresse. On fait donc en sorte d'éliminer λ en calculant une combinaison judicieuse des équations :

$$4(\alpha - 7) + 5(-\alpha - 9) = -20\lambda + 20\lambda = 0.$$

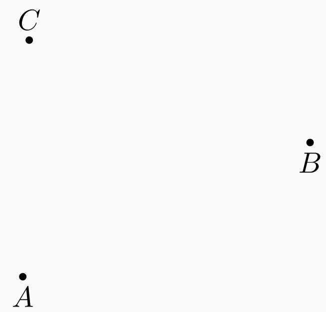
On en déduit alors $\alpha = -73$.

Exercice 4. Dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan, les points A, B et C ont pour coordonnées :

$$A(-1, -1),\ B(1, -1) \text{ et } C(0, 1).$$

a. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Les points A, B et C sont donnés sur la figure suivante :



En expliquant votre démarche, construire sur la feuille, à la règle et au compas l'origine O ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. *Indication : on pourra faire intervenir le milieu du segment AB.*

Solution:

a. Par définition des coordonnées dans un repère, on a les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{OA} = -\vec{u} - \vec{v},\ \overrightarrow{OB} = \vec{u} - \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \vec{v}.$$

On en déduit alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{u} + 2\vec{v}.$$

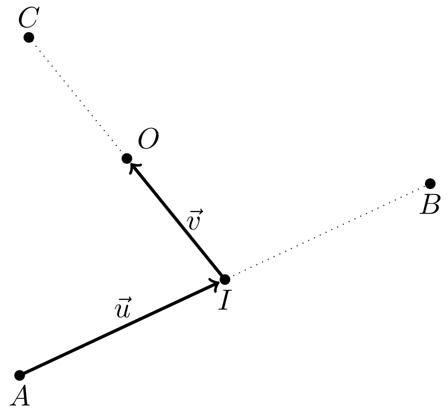
Finalement, on obtient :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

b. Notons I le milieu du segment AB. On voit alors que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$. Par ailleurs, on a aussi :

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.$$

Comme $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$, on voit finalement que O se situe au milieu du segment IC.



Exercice 5. On donne quatre points non alignés A, B, C, D dans le plan. On sait que D a pour coordonnées $(2,-1)$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Donner les coordonnées de B dans les repères suivants :

$$(A,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}),\ (C,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}),\ (D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}).$$

Solution: Comme D a pour coordonnées $(2,-1)$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, on a :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

On peut alors exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. On obtient :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

si bien que B a pour coordonnées $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$. Ensuite, on cherche à exprimer le vecteur $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$. En partant de l'égalité initiale, on obtient :

$$\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{AC} \text{ et donc } \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Par conséquent, B a pour coordonnées $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ dans le repère $(C,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$. Enfin, on cherche à exprimer le vecteur $\overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$. En partant de l'égalité initiale, on obtient :

$$-\overrightarrow{DA} = 2(-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) - (-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \text{ et donc } \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Par conséquent, B a pour coordonnées $(0,\frac{1}{2})$ dans le repère $(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})$.

Exercice 6.

a. Après avoir placé deux points A et B sur une feuille blanche, construire à la règle et au compas le point :

$$D = \mathrm{Bar}\big\{(A,1),(B,-3)\big\}.$$

b. Placer ensuite un point C non aligné avec A et B, puis construire à la règle et au compas le point :

$$E = \mathrm{Bar}\big\{(A,1),(B,-3),(C,1)\big\}.$$

Indication : faire apparaitre E comme un barycentre de C et D.

c. Montrer que la droite (BE) passe par le milieu du segment AC.

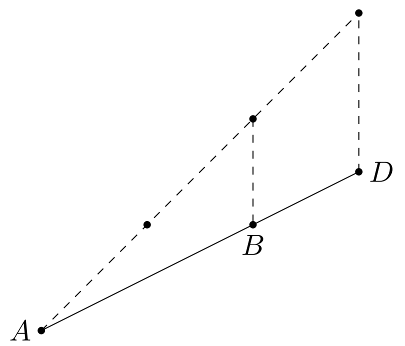
Solution:

a. On commence donc par placer deux points A et B arbitrairement sur une feuille :

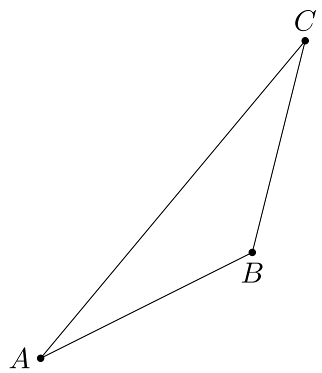
Par définition du point D, on a :

$$\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}, \text{ et donc } \overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \text{ ou encore } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

ce qui signifie que la point D a pour abscisse $\frac{3}{2}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$ de la droite (AB). Pour placer D sur la figure, on applique le procédé de construction vu au cours précédent :



b. Plaçons à présent un point C dans le plan, situé en dehors de la droite (AB).



Le point E vérifie, par définition, l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}.$$

Or, on a :

$$\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{ED}.$$

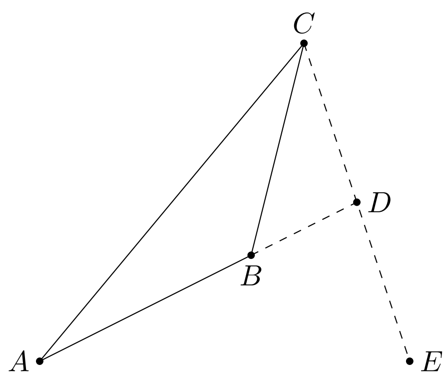
Pour se convaincre de cette relation, on peut soit utiliser la localisation du barycentre depuis un point arbitraire vue au cours, soit en refaire la démonstration comme suit :

$$\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) - 3(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}) = -2\overrightarrow{ED} + \underbrace{\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB}}_{\vec{0}} = -2\overrightarrow{ED}.$$

Par conséquent, le point E vérifie :

$$\overrightarrow{EC} - 2\overrightarrow{ED} = \vec{0}.$$

Autrement dit, $E = \mathrm{Bar}\big\{(C, 1), (D, -2)\big\}$ On s'est donc ramené à la construction du barycentre de deux points connus, que l'on effectue de manière analogue à la question précédente. On obtient la figure suivante :



Remarque : la stratégie utilisée ici est d'utiliser l'associativité du barycentre, c'est-à-dire la possibilité lorsqu'on calcule un barycentre de remplacer un certains sous-ensemble des points considérés par leur barycentre, affecté de la somme de leur masses (à condition bien sûr que celle-ci soit non nulle).

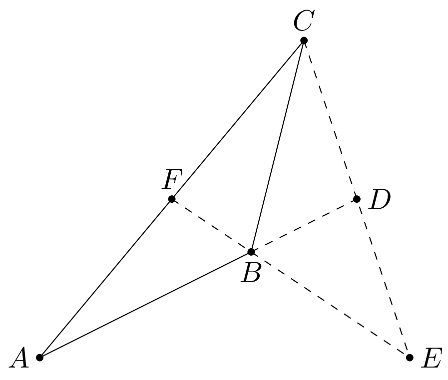
c. On va ici utiliser à nouveau l'associativité du barycentre, mais en procédant à un regroupement différent. Considérons le point F défini par :

$$F = \mathrm{Bar}\big\{(A,1),(C,1)\big\}$$

c'est-à-dire que F est le milieu de AC. En raisonnant comme à la question précédente, on peut, dans la définition de E comme barycentre, regrouper $(A,1)$ et $(C,1)$ et les remplacer par $(F,2)$. Autrement dit, E peut être décrit par :

$$E = \mathrm{Bar}\big\{(B,-3),(F,2)\big\},$$

ce qui montre bien que les points B, E, F sont alignés.



Exercice 7. Dans un repère du plan, on donne les points $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(7,6)$ et $D(5,8)$. Déterminer les réels α et β sachant que :

$$B = \mathrm{Bar}\big\{(A,8),(B,1),(C,\alpha),(D,\beta)\big\}$$

Solution: Remarquons tout d'abord que pour que l'énoncé ait un sens, il faut que la somme $1+8+\alpha+\beta$ des poids utilisés pour définir le barycentre soit non nulle. On doit donc avoir :

$$\alpha+\beta \neq -9$$

Sous cette condition, on sait que le barycentre G qui apparait dans l'énoncé peut être localisé depuis l'origine O du repère utilisé de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{9+\alpha+\beta}(8\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\alpha\overrightarrow{OC}+\beta\overrightarrow{OD}).$$

Les composantes de $\overrightarrow{OG}$ sont donc données par :

$$\frac{1}{9+\alpha+\beta}\left(8\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9+\alpha+\beta}\begin{pmatrix}12+7\alpha+5\beta\\13+6\alpha+8\beta\end{pmatrix}.$$

Comme on souhaite que G et B soient confondus, on cherche donc α et β tels que

$$\frac{1}{9+\alpha+\beta}\begin{pmatrix}12+7\alpha+5\beta\\13+6\alpha+8\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}.$$

Ceci nous conduit au système suivant :

$$\begin{cases}3\alpha+\beta = 24\\ \alpha+3\beta = 32\end{cases}$$

On résout alors ce système, pour obtenir $\alpha = 5$, $\beta = 9$. Comme pour ces valeurs la condition de somme non nulle des poids est remplie, on en déduit que ces valeurs donnent bien la solution.