# Semaine 7b. Moment de flexion et axe neutre

## Question 1 – Comparer des poutres avec différentes sections

Deux poutres avec des sections différentes sont illustrées sur la **Figure** 1.1. Calculer :

- **Le moment d'inertie** ($I_{z,y_0}$)**.** Attention à l'axe !
- **Le module de section S.**
- **L'aire de la section transversale et le rapport** $\frac{S}{A}$ **pour les dimensions suivantes**
- **Quelle poutre est plus efficace (meilleur S/A). pourquoi ?**

$$cas\ A: \quad \mathrm{b} = 30\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{d} = 40\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{b}_1 = 6\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{d}_1 = 32\ \mathrm{cm}$$
$$cas\ B: \quad \mathrm{b} = 40\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{d} = 30\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{b}_1 = 32\ \mathrm{cm}\,, \mathrm{d}_1 = 6\ \mathrm{cm}$$

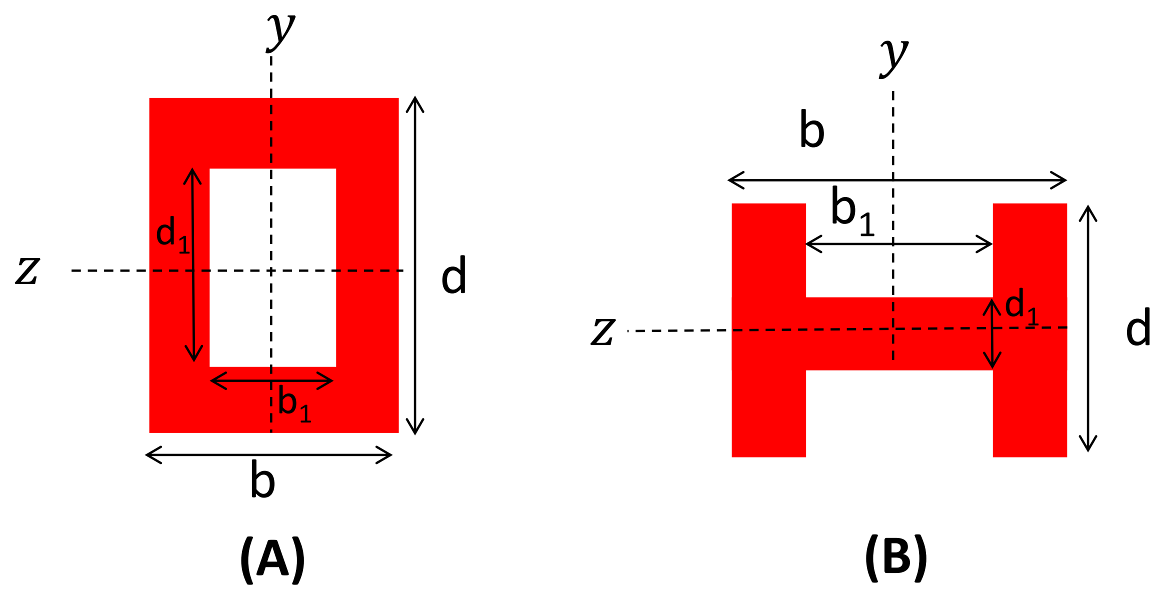


**Figure 1.1**| Sections transversale

## Solution

Ce qui est donné ?

Les dimensions de la section.

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Ce qui est demandé ?

Le moment d'inertie ($I_{z,y_0}$) autour de l'axe horizontal z

Le module de section $S$

L'air de la coupe transversale $A$ et $\frac{S}{A}$

Principes et formules

Le moment d'inertie $I_{z,y_0}$ d'une aire A par rapport à un axe y arbitraire est :

$$I_{z,y_0} = \iint_A (y - y_0)^2 \, \mathrm{dy} \, \mathrm{dz} \tag{1.1}$$

Pour la section transversale (A), la poutre à section transversale de forme creuse est constituée de 2 composantes, un cadre rectangulaire et une région creuse rectangulaire. Par conséquent, le moment d'inertie sera égal à la différence entre le cadre rectangulaire et la région creuse rectangulaire. Le moment d'inertie sera :

$$I_A = I_1 - I_2 = \iint_{A_1} y^2 \, \mathrm{dy} \, \mathrm{dz} - \iint_{A_2} y^2 \, \mathrm{dy} \, \mathrm{dz} \tag{1.2}$$

Où $A_1$ fait référence à l'aire totale du cadre rectangulaire plus la région creuse rectangulaire et $A_2$ à l'aire de la région creuse rectangulaire (voir la **Figure 1.2** pour les schémas des aires). Pour résoudre les intégrales :

$$\begin{gathered} I_{(A)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left( \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \right) y^2 \, \mathrm{dy} - \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left( \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 \, \mathrm{dy} \\ I_{(A)} = \frac{bd^3}{12} - \frac{b_1 d_1^3}{12} = \frac{bd^3 - b_1 d_1^3}{12} \end{gathered} \tag{1.3}$$

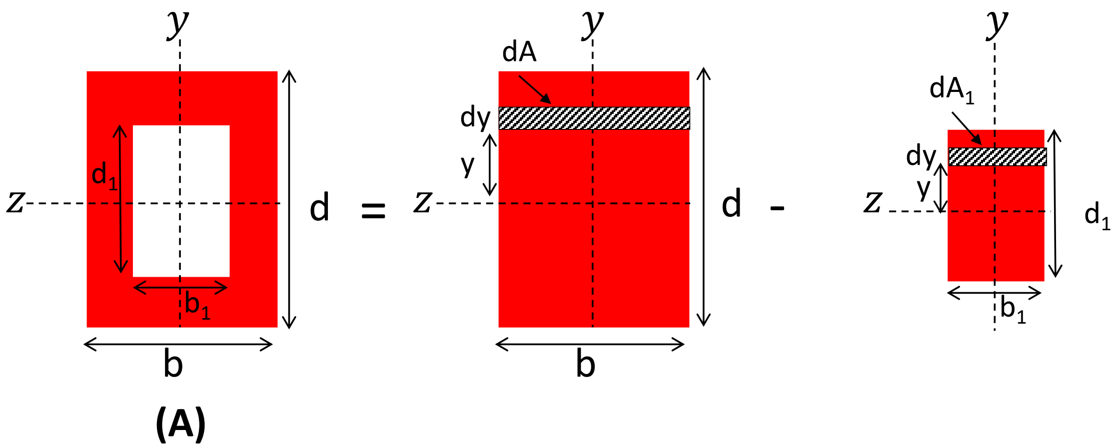


**Figure 1.2**| Diagrammes des aires

Pour la poutre de section transversale (B), la poutre est divisée en 3 composantes illustrés sur la **Figure 1.3** :

$$I_{(B)} = I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{A_1} y^2\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \iint_{A_2} y^2\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \iint_{A_3} y^2\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \tag{1.4}$$

Placer d'abord les limites de l'intégration :

$$I_{(B)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left( \int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2\,\mathrm{dy} + \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left( \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2\,\mathrm{dy} + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left( \int_{\frac{b_1}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \right) y^2\,\mathrm{dy} \tag{1.5}$$

Puis intégrer les termes en z et y :

$$I_{(B)} = \int_{\frac{-d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{b-b_1}{2}\, y^2 dy + \int_{\frac{-d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} b_1\, y^2 dy + \int_{\frac{-d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{b-b_1}{2}\, y^2 dy \tag{1.6}$$

$$I_{(B)} = \frac{(b-b_1)d^3}{24} + \left(\frac{b_1 d_1^3}{12}\right) + \frac{(b-b_1)d^3}{24} = \frac{b_1 d_1^3 + (b-b_1)d^3}{12} \tag{1.7}$$

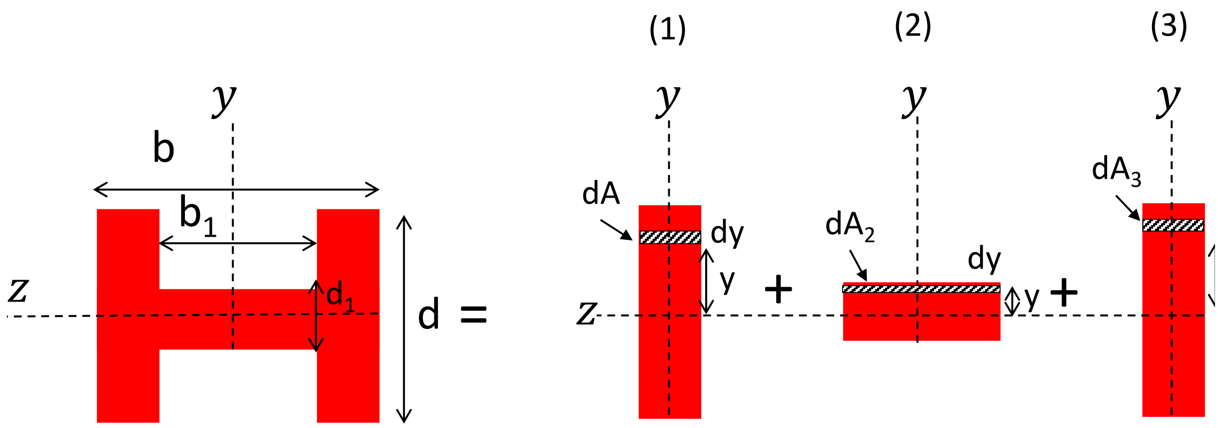


**Figure 1.3**| Sections transversal des poutres

Nous appliquons la définition du module de section :

$$S = \frac{I_{z,y_0}}{c} \tag{1.8}$$

Avec c étant la distance maximale à l'axe neutre. Comme dans toutes les coupes transversales de l'exercice, les coupes sont symétriques ($c = \frac{d}{2}$) et ainsi :

$$S = 2\frac{I_{z,y_0}}{d} \tag{1.9}$$

(A)

$$S = \frac{bd^2 - \frac{b_1 d_1^3}{d}}{6} \tag{1.10}$$

(B)

$$S = \frac{\frac{b_1 d_1^3}{d} + (b - b_1)d^2}{6} \tag{1.11}$$

(A) de l'Eq. (1.10):

$$A = b \cdot d - b_1 d_1 = (30)(40) - (6)(32) = 1.00 * 10^3 \text{ cm}^2 \tag{1.12}$$

$$S = \frac{(30)(40)^2 - (6)(32)^3/40}{6} = 7.18 * 10^3 \text{ cm}^3 \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{\frac{S}{A_{(A)}} = 7.18 \text{ cm}} \tag{1.14}$$

(B) de l'Eq. (1.11)

$$S = \frac{(32)(6)^3/30 + (40 - 32)(30)^2}{6} = 1.24 * 10^3 \text{cm}^3 \tag{1.15}$$

$$A = b_1 d_1 + d(b - b_1) = (6)(32) + (30)(40 - 32) = 0.43 * 10^3 \text{cm}^2 \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{\frac{S}{A_{(B)}} = 2.88 \text{ cm}} \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{\frac{S}{A_{(A)}} > \frac{S}{A_{(B)}}} \tag{1.18}$$

La poutre de section transversale (A) est la plus efficace des 2 sections transversales par rapport au module de section pour un même volume de matériau.

La section en I n'est pas très efficace pour une flexion selon l'axe $z$, mais serait bien efficace pour une flexion selon l'axe $y$ (car beaucoup de matériau serait alors loin de l'axe). Comparer à la question 3, ou le « I » est tourné de 90°.

 

## Question 2 – Flexion d'une poutre avec une section triangulaire

Une poutre encastrée AB de section triangulaire a une longueur $L = 2$ m, une largeur $b = 40$ mm et une hauteur $h = 50$ mm (voir **Figure** 2.1). La poutre est en laiton. La densité est $\gamma = 8000\ kg/\text{m}^3$. Attention, pour cet exercice, le poids de la poutre n'est pas négligé.

- **Calculez les forces de réaction et le moment dus au poids de la poutre.**
- **Calculez puis dessinez les forces de cisaillement le long de la poutre**
- **Calculez puis dessinez le moment de flexion le long de la poutre**
- **Trouvez l'axe neutre**
- **Calculer les contraintes normales maximales en compression $\boldsymbol{\sigma_{cmax}}$ et en traction $\boldsymbol{\sigma_{tmax}}$ dus au poids de la poutre.**

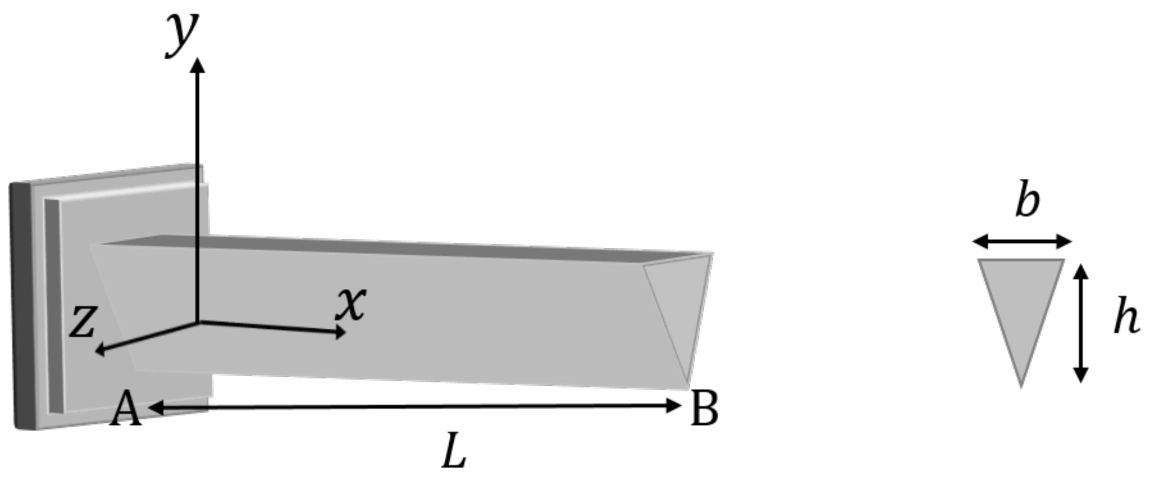


**Figure** 2.1| Une poutre en porte-à-faux avec une section transversale triangulaire

## Solution

Ce qui est donné :

- $L = 2000$ mm
- $b = 40$ mm
- $h = 50$ mm
- $\gamma = 8000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ soit $80\,\frac{kN}{m^3}$

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Ce qui est demandé :

- Valeur des forces et moments de réaction
- Diagramme des forces de cisaillement
- Diagramme du moment de flexion
- Contrainte de compression maximale $\sigma_{cmax}$ et contrainte de traction maximale $\sigma_{tmax}$ dans la poutre dus à son propre poids

Principes et formules

Force de réaction aux points A et B et moment au point A

Nous calculons les forces de réaction à partir du diagramme du corps libre de l'ensemble de la poutre illustré sur la **Figure** 2.2.

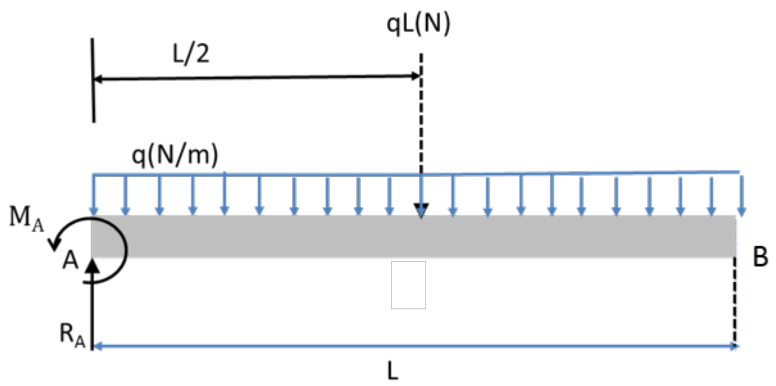


**Figure** 2.2| Diagramme des forces

Le poids de la poutre agit uniformément sur la longueur de la poutre, nous pouvons donc la décrire par une charge répartie $q$ qui est définie comme :

$$q = \gamma A = \frac{\gamma bh}{2} \tag{2.1}$$

L'équilibre des forces en $y$ donne :

$$\Sigma F_y = 0 \implies R_{A,y} - \int_0^L q\,dx = R_{A,y} - \frac{\gamma bhL}{2} = 0 \tag{2.2}$$

$$R_{A,y} = \frac{\gamma bhL}{2} = 160 \text{ N} \tag{2.3}$$

A partir de l'équilibre du moment $M_z$ autour de A, on obtient le moment de réaction $M_A$ :

$$\Sigma M_z = 0 \implies M_A - \int_0^L q \cdot x \, \mathrm{d}x = M_A - \frac{\gamma bhL^2}{4} = 0 \tag{2.4}$$

Ce qui nous donne :

$$R_A = 160 \text{ N et } M_A = 160 \text{ N} \cdot \text{m} \tag{2.5}$$

Diagramme des forces de cisaillement

En x(A), la force de cisaillement est calculée par (rappelez-vous que la force de cisaillement $V$ est positive pointant vers le bas) :

$$R_A - V(x = 0) = 0 \rightarrow V(x = 0) = 160 \text{ N} \tag{2.6}$$

De x(A) vers x(B) :

$$V(x) = R_A - qx = \left(160 \text{ N} - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x\right) \tag{2.7}$$

En utilisant ces valeurs, nous dessinons le diagramme des forces de cisaillement :

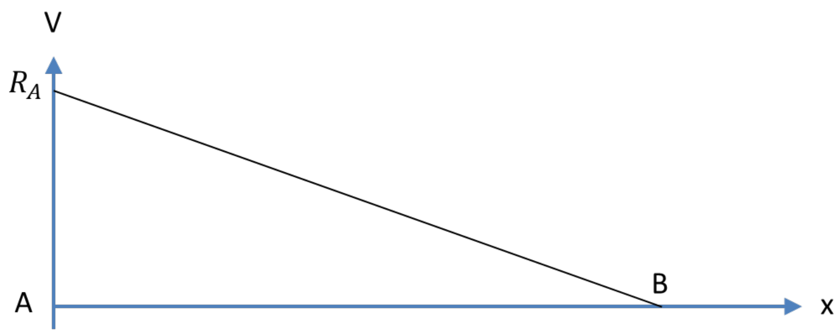


**Figure** 2.3| Diagramme de la force de cisaillement

Diagramme du moment de flexion

Nous savons par la théorie que :

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) \tag{2.8}$$

$$\int_0^x dM = \int_0^x V(x')\,dx' = \int_0^x (R_A - qx')dx' \tag{2.9}$$

$$M(x) - M(x = 0^+) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \rightarrow M(x) = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} \tag{2.10}$$

En utilisant ces valeurs, nous dessinons le diagramme du moment de flexion.

 

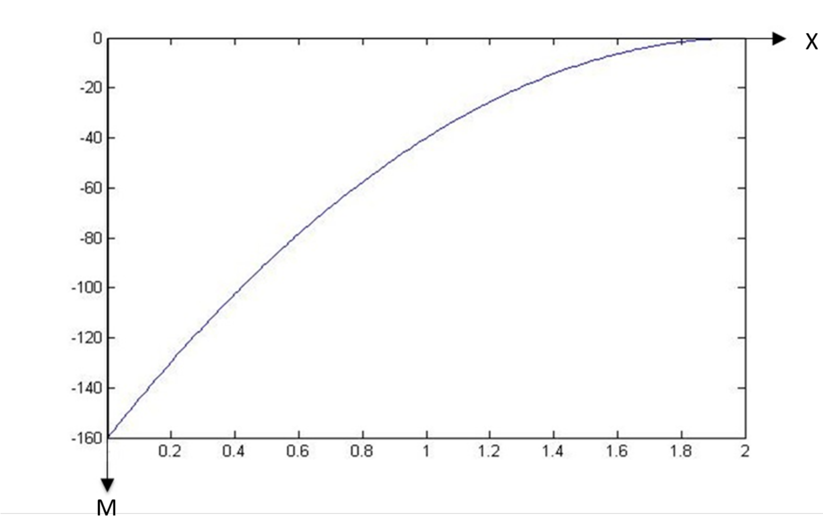


**Figure 2.4**| Diagramme du moment de flexion

Contraintes maximales en compression et en traction dues à la flexion

On sait que la contrainte interne normale à la section transversale est donnée par :

$$\sigma(x,y) = -\frac{M_{int}}{I_{z,y_0}}(y-y_0) \tag{2.11}$$

Où $y_0$ est la position de l'axe neutre. Nous calculons ensuite la position de l'axe neutre par rapport à l'origine que nous définissons en bas du triangle (voir **Figure** 2.**5**). Pour effectuer ce calcul, nous devons d'abord déterminer la largeur de la section transversale en fonction de la coordonnée verticale $y$, et est donnée par l'Eq. (2.**12**), après avoir utilisé la proportionnalité des triangles :

$$b(y) = \frac{b}{h}y \tag{2.12}$$

Alors $y_0$ peut être facilement calculé :

$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h \left(\int_{-\frac{b(y)}{2}}^{\frac{b(y)}{2}} dz\right) y\, dy}{\int_0^h \left(\int_{-\frac{b(y)}{2}}^{\frac{b(y)}{2}} dz\right) dy} = \frac{\int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz\right) y\, dy}{\int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz\right) dy} = \frac{\int_0^h \frac{by}{h} y dy}{\int_0^h \frac{by}{h} dy} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h \tag{2.13}$$

Et maintenant, nous pouvons trouver les valeurs maximales de traction et de compression pour chaque position de $x$, toujours en considérant que $M(x) < 0\ \forall x$ :

$$\sigma_{max,t}(x) = \frac{M_{max}}{I_{z,y_0}}\frac{h}{3} \quad \& \quad \sigma_{max,c}(x) = \frac{M_{max}}{I_{z,y_0}}\frac{2h}{3} \tag{2.14}$$

Afin de trouver le moment quadratique (d'inertie) autour de l'axe $Z$ dans le plan yz nous utilisons la formule :

$$I_{z,y_0} = \iint_A (y-y_0)^2 dA = \int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz\right)(y-y_0)^2\, dy = \int_0^h \frac{by}{h}(y-y_0)^2\, dy \tag{2.15}$$

 

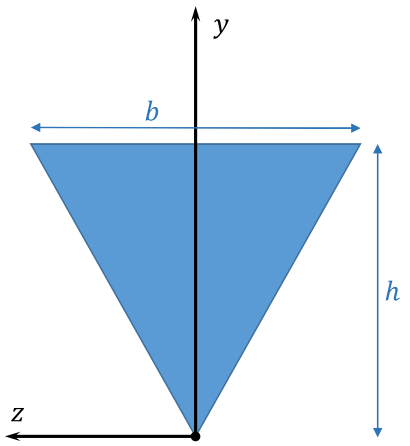


**Figure** 2.5| Section triangulaire

$$I_{z,y_0} = \frac{b}{h}\int_0^h y(y-y_0)^2\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (y^3 - 2y_0y^2 + y_0^2y)\,dy = \frac{b}{h}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y_0y^3}{3} + \frac{y_0^2y^2}{2}\right)_0^h \quad (2.16)$$

$$I_{z,y_0} = \frac{b}{h}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y_0y^3}{3} + \frac{y_0^2y^2}{2}\right)_0^h = \frac{b}{h}\left(\frac{h^4}{4} - \frac{4h^4}{9} + \frac{4h^4}{18}\right)_0^h = \frac{bh^3}{36}(9-8) = \frac{bh^3}{36} \quad (2.17)$$

$$I_{z,y_0} = \frac{bh^3}{36} = 1.39 \cdot 10^5\ \mathrm{mm}^4 \quad (2.18)$$

En utilisant l'Eq. (2.**14**) et l'Eq. ((2.**18**), nous obtenons (avec une distance de c=2/3h et de c=1/3h pour la distance entre l'axe neutre du triangle et les bords supérieur et inférieur de la poutre)

$$\sigma_{max,t} = \frac{M_{max}\,h}{3I_{z,y_0}} = 19.2\ \mathrm{MPa} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{max,c} = \frac{M_{max}\,2h}{3I_{z,y_0}} = 38.4\ \mathrm{MPa} \quad (2.20)$$

 

## Question 3 – Charges distribuée et ponctuelle

Une poutre simplement supportée est illustrée ci-dessous sur la **Figure** 3.1. Nous allons comparer deux sections, voir **Figure 3.3.**

Nous vous donnons moment de flexion le long de la poutre, voir **Figure** 3.2.

Trouvez :

- **La contrainte normale <u>maximale</u> due à la flexion sur pour les sections A (rectangulaire) et B (en « I »)**
- **Quelle section est la plus efficace (calculer S/aire) ?**
  - **Pour la section rectangulaire :** $b = 30$ cm , $d = 40$ cm
  - **Pour la section en 'I' :** $b_1 = 6$ cm, $d_1 = 32$ cm, $b = 30$ cm, $d = 40$ cm

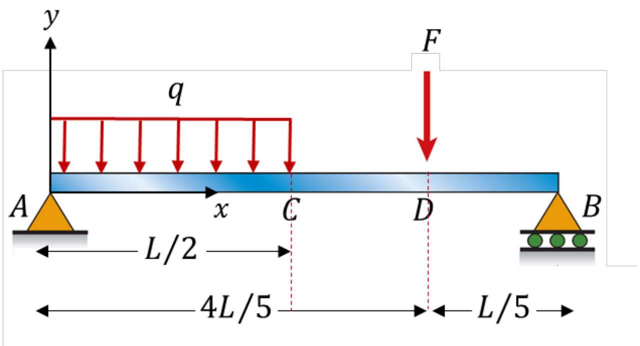


**Figure 3.1**| Poutre $AB$. q=20N/m. F=10 N. L=4m

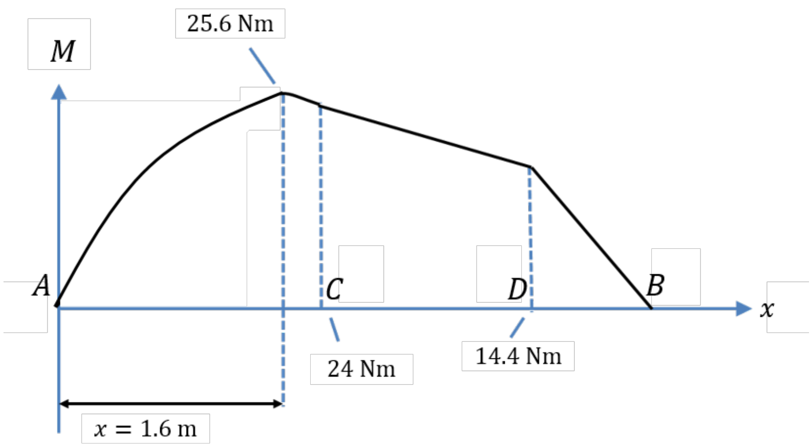


**Figure 3.2**| Moment de flexion $M(x)$ le long de la poutre

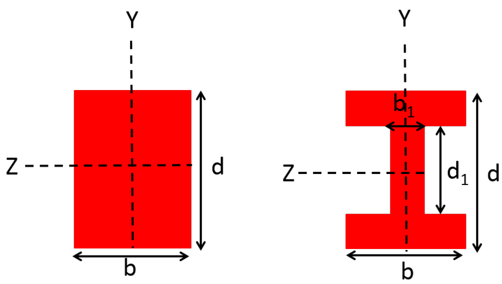


**Figure 3.3**| Sections: rectangulaire (A) et en forme de « I » (B).

 

## Solution

Ce qui est donné :

$b = 30$ cm
$d = 40$ cm
$b_1 = 6$ cm
$d_1 = 32$ cm
$M = 25.6$ Nm

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.
La section de la poutre dans le plan $yz$ n'est pas déformée.

Ce qui est demandé ?

La contrainte normale maximale due à la flexion dans les deux sections transversales.
Quelle section transversale est la plus efficace ?

Principes et formules

Pour trouver la contrainte normale maximale, nous commençons par la formule de flexion :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_{int}}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \tag{3.1}$$

La contrainte normale maximale dans la poutre est située là où le moment de flexion est maximal:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, c}{I_{z,y_0}} \tag{3.2}$$

Où $c$ est la distance maximale d'une surface de la poutre par rapport à l'axe neutre. Le moment fléchissant maximal M se produit à $x = 1.6$ m. Vu la géométrie des sections,, la distance maximale de l'axe neutre est $c=\frac{d}{2}$ pour les deux sections A et B.

La contrainte normale maximale de la section rectangulaire (A) est :

$$\sigma_{max1} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I_{z,y_0}} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{\frac{bd^3}{12}} = \frac{6M}{bd^2} = 3.20 \text{ [kPa]} \tag{3.3}$$

Le moment d'inertie $I_{z,y_0}$ pour la section transversale "I" est calculé en soustrayant la contribution des 2 régions creuses du moment d'inertie de la section rectangulaire calculé ci-dessus :

$$I_{z,y_0} = \frac{bd^3 - (b - b_1)d_1^3}{12} \tag{3.4}$$

La contrainte normale maximale $\sigma_{max2}$ de la section transversale en "I" (B) est donc :

$$\sigma_{max2} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I_{z,y_0}} = 5.42 \text{ [kPa]} \tag{3.5}$$

Enfin, nous trouvons que $\sigma_{max1} < \sigma_{max2}$. Cela implique que la section (A) est plus efficace que la section (B). Mais pour une comparaison juste, nous devons le rapporter à la masse, c'est-à-dire à la section transversale de la poutre

 

Area (A) = 1200 cm²

Area (B) = 432 cm²

$$S_A = \frac{I_A}{c} = \frac{bd^2}{6}$$

$$S_B = \frac{I_I}{c} = \frac{bd^{\,3} - (b - b_1)d_1^3}{6\text{d}}$$

Pour (A)  $S_A$/Area = 0.066 m

Pour (B)  $S_B$/Area = 0.1 m

Cela implique que la section (B) est plus efficace (pour une section de poutre, donc normalisé par le poids de la poutre par unité de longueur).

 