Géométrie analytique N°1

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

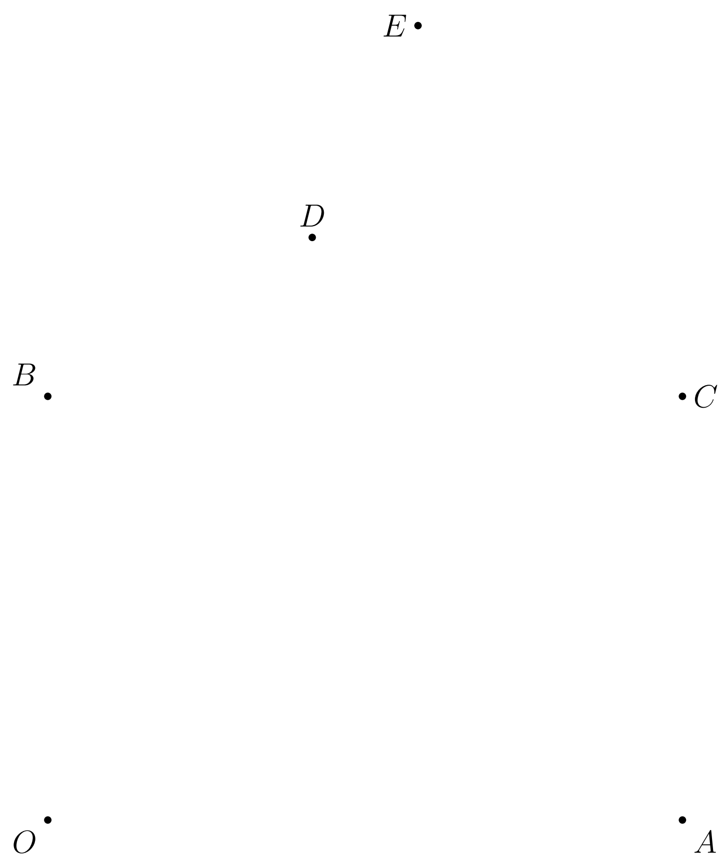
Groupe ☐

1. Dans le plan, on considère les points O, A, B, C, D et E. Les points O, A, C, B sont les sommets d'un rectangle, D et E sont quelconques (voir la figure ci-dessous).

a) Soit G le point défini comme

$$G = Bar\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1);(D,-3);(E,7)\}\,.$$

Construire G sur la figure ci-dessous ; on demande une construction rigoureuse et soignée (règle, équerre, compas) et de justifier chaque étape par un calcul, qui définit avec précision le point construit.



b) Soit α un paramètre réel, tel que $O = Bar\{(A,\alpha);(B,-1);(C,\alpha-1);(E,-1)\}$.
A l'aide du **calcul vectoriel uniquement**, déterminer en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et du paramètre α, l'équation vectorielle du lieu de E.
Caractériser géométriquement le lieu. 6 pts

Réponses :

(b) $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \alpha(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\,, \quad \alpha \neq \frac{3}{2}\,.$
Le lieu est une droite passant par le point X dont le rayon-vecteur est $\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$, et dirigée par le vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, et dont on a exclu le point P défini par $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \frac{3}{2}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\,.$

2. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, on donne une droite $d : 3y - x - 6 = 0$ et un point $A\,(5,2)$. Calculer les coordonnées des sommets du losange $ABCD$ d'aire égale à 15, tel que
- AC soit parallèle à d,
- $B \in d$,
- l'abscisse de C soit positive : $x_C > 0$. 7 pts

Réponses :

B (9,5) , C (14,5) , D (10,2)

3. Dans le plan, on considère trois points non-alignés O, A, B, et on note $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. On suppose de plus que $\|\overrightarrow{OB}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{3}$.
Soient I le point milieu de OB, J le point défini par $(B, A; J) = -2$ et d la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{OBA}$.
Pour la suite de l'énoncé, déterminer à l'aide du calcul vectoriel uniquement, et en fonction des données $(O,\vec{a},\vec{b})$,

a) l'équation vectorielle de la droite (IJ) et de la droite d;

b) le vecteur $\overrightarrow{OL}$, où L est le point d'intersection des droites (IJ) et d.

c) Soit Z le point d'intersection entre la droite d et le segment OA. Déterminer la variation du paramètre de l'équation vectorielle de d pour que son point courant décrive le segment LZ. 7 pts

Réponses :

(a) (IJ) : $\quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \ell\big(\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}\big)\,, \qquad \ell \in \mathbb{R}\,.$
d : $\quad \overrightarrow{ON} = \vec{b} + k\big(3\vec{a} - 4\vec{b}\big)\,, \qquad k \in \mathbb{R}\,.$

(b) $\overrightarrow{OL} = \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\vec{b}\,.$

(c) $k \in [\frac{2}{13}, \frac{1}{4}]\,.$