Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 2

Langage Ensembliste : exercice 14

Rappel :
$A \times B \;=\; \{(x,\, y) \mid x \in A \;\text{ et } y \in B\}$
On représente l'ensemble A sur l'axe horizontal et l'ensemble B sur l'axe vertical.

Soient $G = \{1;\, 2\}$, $F = \{-1;\, 0;\, 1\}$ et $K = ((\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})) \cup G^2$.
Pour exprimer K comme produit de deux ensembles, le plus simple est de le représenter graphiquement. On procède par étape :

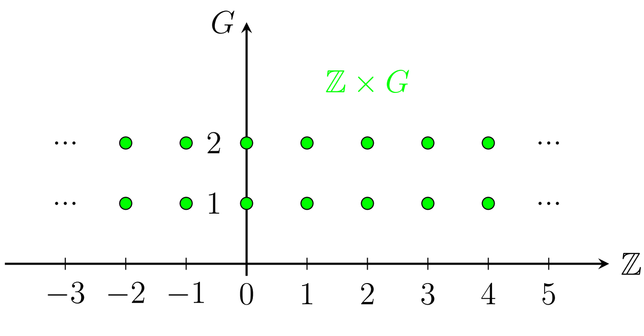
- représenter l'ensemble produit $\mathbb{Z} \times G$.
- représenter l'ensemble produit $F \times \mathbb{N}$.
- déduire de la représentation graphique de ces ensembles, la représentation graphique de l'intersection.
- représenter l'ensemble produit $G \times G$, et faire la réunion avec $(\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})$.

Représentation graphique de $\mathbb{Z} \times G$

$\mathbb{Z} \times G \;=\; \{(x,\, y) \mid x \in \mathbb{Z} \;\text{ et } y \in G\}$

$\mathbb{Z} = \{ \;...\, -1;\, 0;\, 1;\, 2\, ...\; \}$

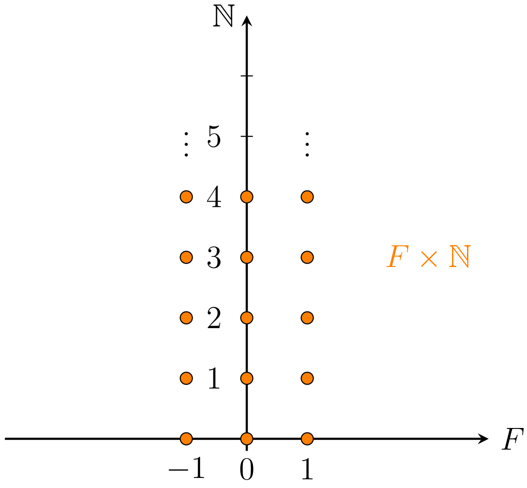
$G = \{1;\, 2\}$



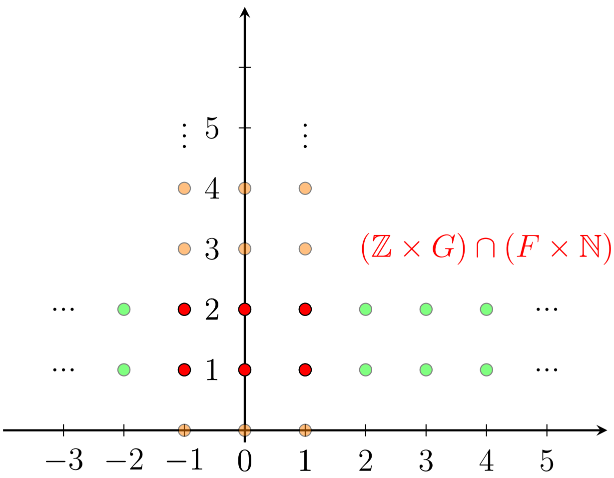
Représentation graphique de $F \times \mathbb{N}$

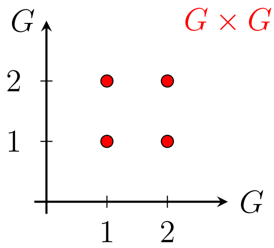
$F \times \mathbb{N} \;=\; \{(x,\, y) \mid x \in F \;\text{ et } y \in \mathbb{N}\}$

$F = \{-1;\, 0;\, 1\}$
$\mathbb{N} = \{ \;0;\, 1;\, 2;\, 3\, ...\; \}$



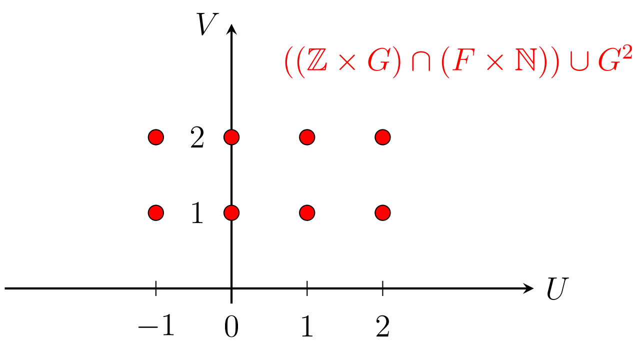
Représentation graphique de $(\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})$ **et de** $G \times G$





D'où finalement :

$K = ((\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})) \cup G^2$



On observe que $K = \{-1;\, 0;\, 1;\, 2\} \times \{1;\, 2\}$

Langage Ensembliste : exercice 16

On procède par étapes :

- Expliciter l'ensemble E et l'ensemble B.
- Représenter l'ensemble produit $B \times A$.
- Représenter l'ensemble D.
- Déduire de la représentation graphique des ensembles $B \times A$ et D, la représentation graphique de l'intersection.

Rappel : $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 2.

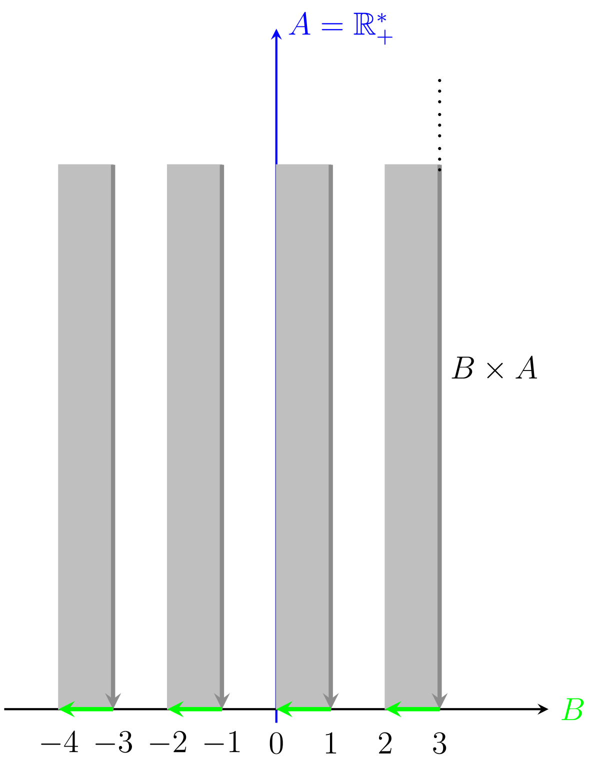
- $E = \{x \in 2\mathbb{Z} \,|\, -4 \leq x < 4\} = \{-4;\ -2;\ 0;\ 2\}$
  D'où l'ensemble B :

  $B = \bigcup_{k \in E}\ ]k;\ k+1] =]-4;\ -3] \cup]-2;\ -1] \cup]0;\ 1] \cup]2;\ 3] \subset \mathbb{R}$

- **Représentation graphique de** $B \times A$

  On représente l'ensemble B sur l'axe horizontal et l'ensemble A sur l'axe vertical.

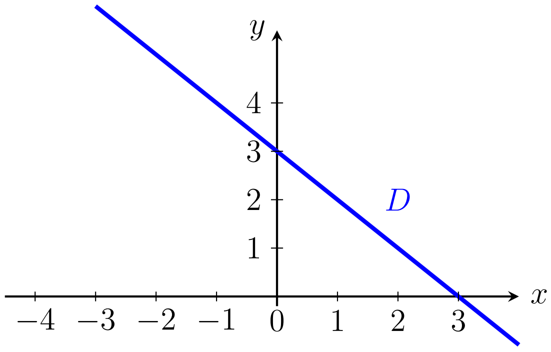
  $B \times A = \big( ]-4;\ -3] \cup]-2;\ -1] \cup]0;\ 1] \cup]2;\ 3] \big) \times [0;\ +\infty[$



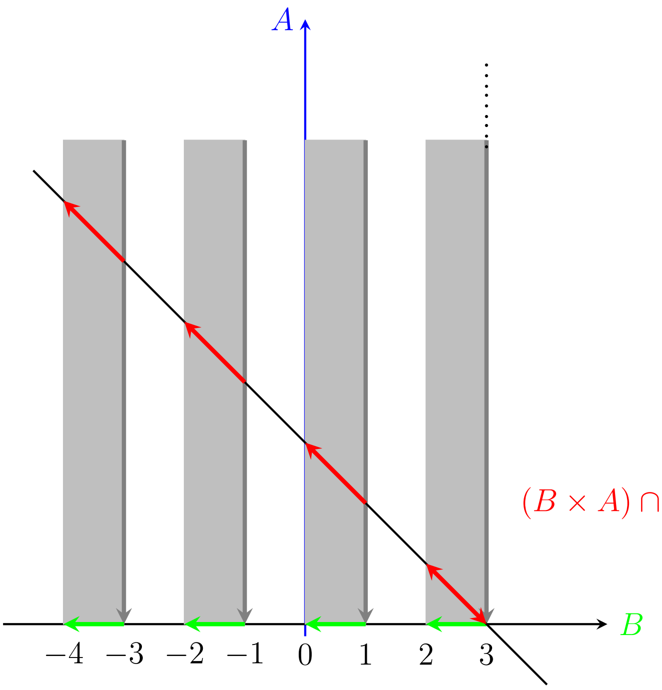
Représentation graphique de D

$D = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y + x - 3 = 0\} = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -x + 3\}$

D est l'ensemble des points de la droite d'équation $y = -x + 3$; elle a pour pente -1 et elle passe par le point $(0\,,3)$.



Représentation graphique de $(B \times A) \cap D$



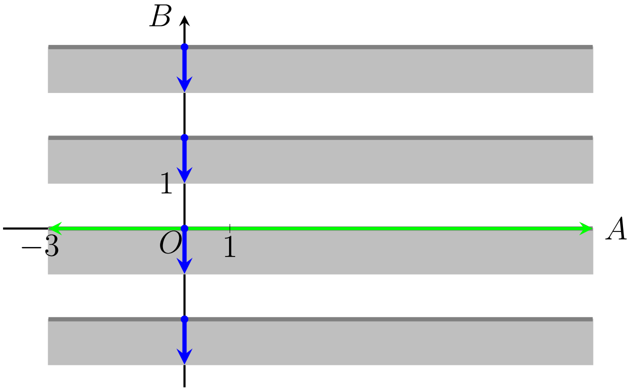
Langage Ensembliste : exercice 17

L'ensemble $B = \bigcup_{k \in I} \left] k\,,\, k+1 \right]$ est la réunion des quatre intervalles $\left] k\,,\, k+1 \right]$ correspondants à $k \in \{-3\,,-1\,,\,1\,,\,3\,\}$

D'où $\quad B = \left]-3\,,\,-2\right] \cup \left]-1\,,\,0\right] \cup \left]1\,,\,2\right] \cup \left]3\,,\,4\right]$.

Représentation graphique de $A \times B$**.**

On représente l'ensemble $A = \left]-3\,,\,+\infty\right[$ sur l'axe horizontal et l'ensemble B sur l'axe vertical.



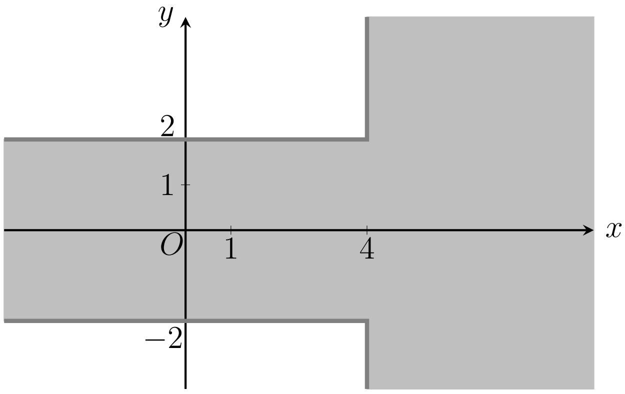
On décrit l'ensemble D comme une réunion de deux ensembles.

$D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4 \quad \text{ou} \quad |y| \leq 2\,\}$.

$D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4\,\} \ \cup \ \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 2\,\}$.

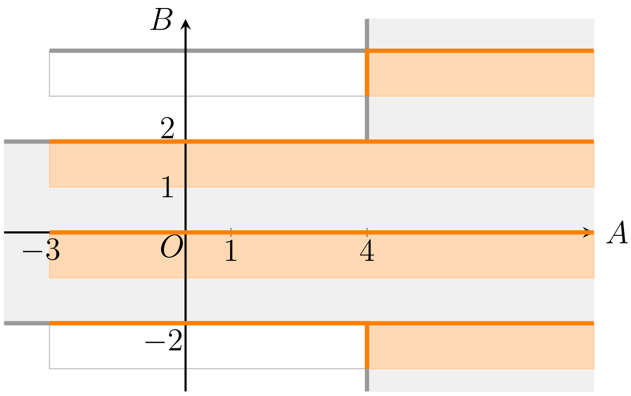
$D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4\,\} \ \cup \ \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 2\,\}$.

Représentation graphique de D.



Finalement on représente sur une même figure les ensembles $A \times B$ et D, puis en déduire la partie commune.
$(A \times B) \ \cap \ D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A \times B \quad \text{et} \quad (x, y) \in D\,\}$.

Représentation graphique de $(A \times B) \ \cap \ D$.



Langage Ensembliste : exercice 19

Pour traduire en langage ensembliste, on utilise les équivalences entre propriétés et ensembles.

Propriétés		*Ensembles*
P ou Q	$\Leftrightarrow$	$A \cup B$
P et Q	$\Leftrightarrow$	$A \cap B$
non P	$\Leftrightarrow$	$C_E A$
$P \Rightarrow Q$	$\Leftrightarrow$	$A \subset B$

E : référentiel
$A = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } P\} = \{x \in E \mid P(x)\}$
$B = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } Q\} = \{x \in E \mid Q(x)\}$

(Rappel : on note $\bar{A} = C_E A$)

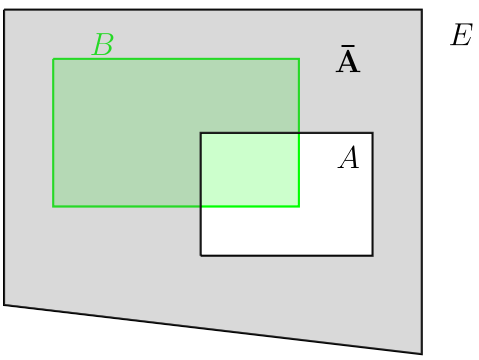
- On considère la propriété :
  R : pour tout x appartenant à E, x vérifie $[(\text{non}P) \text{ ou } Q]$.
  Or :
  $(\text{non}P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bar{A}$
  $(\text{non}P(x)) \text{ ou } Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\bar{A} \cup B)$
  De plus : soit $T(x)$ une propriété et $C = \{x \in E \mid T(x)\}$, alors :
  pour tout x appartenant à E, x vérifie $T \quad \Leftrightarrow \quad C = E$

  Donc :
  R : pour tout x appartenant à E, x vérifie $[(\text{non}P) \text{ ou } Q] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \cup B = E$
- On considère la propriété :
  S : $P(x) \Rightarrow Q(x)$
  Alors : $S \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$

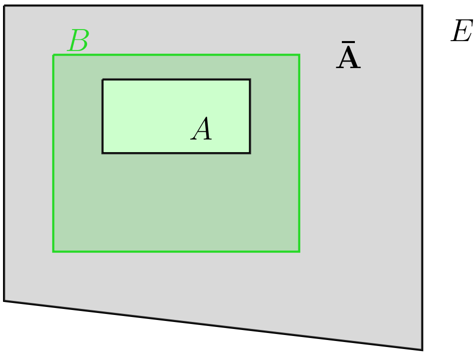
L'équivalence des propriétés R et S se traduit par une équivalence entre ensembles :

$$(R \quad \Leftrightarrow \quad S) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\bar{A} \cup B = E \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B)$$

ce que l'on peut illustrer avec un diagramme de Venn.



Si $A \not\subset B$, on constate que $\bar{A} \cup B$ ne peut être égal à E : il manque la partie en blanc de l'ensemble A.



Si $A \subset B$, on constate que $\bar{A} \cup B$ est égal à E : la partie qui manque, c'est-à-dire A, est complétée par B.

Langage Ensembliste : exercice 20

Pour traduire en langage ensembliste, on utilise les équivalences entre propriétés et ensembles.

Propriétés		*Ensembles*
P ou Q	$\Leftrightarrow$	$A \cup B$
P et Q	$\Leftrightarrow$	$A \cap B$
non P	$\Leftrightarrow$	$C_E A$
$P \Rightarrow Q$	$\Leftrightarrow$	$A \subset B$

L'ensemble $E = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq n \leq 20 \,\}$ est le référentiel sur lequel sont définies les propriétés $P\,, Q$ et R.

Ces propriétés définissent les ensembles $A\,, B$ et C que l'on peut expliciter :

$$\begin{aligned} A &= \{n \in E \mid P(n)\} = \{n \in E \mid n \text{ est divisible par } 4\} \\ &= \{-20;\ -16;\ -12;\ -8;\ -4;\ 0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20\} \\ B &= \{n \in E \mid Q(n)\} = \{n \in E \mid n \text{ est divisible par } 5\} \\ &= \{-20;\ -15;\ -10;\ -5;\ 0;\ 5;\ 10;\ 15;\ 20\} \\ C &= \{n \in E \mid R(n)\} = \{n \in E \mid n \text{ est divisible par } 10\} \\ &= \{-20;\ -10;\ 0;\ 10;\ 20\} \end{aligned}$$

Il faut traduire en langage ensembliste l'implication entre les propriétés :

$(P \text{ et } Q) \ \Rightarrow\ R \qquad \Leftrightarrow \qquad (A \cap B) \subset C$

On peut alors vérifier cette équivalence en utilisant les ensembles que l'on a explicités :

$A \cap B = \{-20;\ 0;\ 20\}$

On a bien que $\{-20;\ 0;\ 20\} \subset C$

Logique : exercice 1

On utilise la négation d'une proposition :

non $(\forall x \in E\,,\ R(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E\,,\ \text{non } R(x))$

non $(\exists x \in E\,,\ R(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E\,,\ \text{non } R(x))$

et les équivalences :

P vrai $\Leftrightarrow$ non P faux

P faux $\Leftrightarrow$ non P vrai

Pour justifier si $P(x)$ ou non $P(x)$ est vrai, il faut soit montrer l'existence d'un élément ($\exists x \in$ ... tel que ...) soit donner une brève justification.

Par exemple :

P : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 < 0$: vrai car il existe $x = \dfrac{1}{2}$ tel que $\dfrac{1}{2^2} - 1 = -\dfrac{3}{4} < 0$

(a) $P :\ \exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| = 0\,.$

(non P) : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| \neq 0\,.$
P vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
(non P) faux.

(b) $P :\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = \sqrt{3}\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq \sqrt{3}\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

(c) $P :\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

(d) $P :\ \exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 = 0\,.$

(non P) : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 \neq 0\,.$
or $\Delta' = 1 - 2 < 0$
(non P) vrai, car $\Delta' < 0.$
P faux.

(e) $P :\ \forall\, x \in \{1;\,2;\,3;\,4\}\,,\ x^2 - 10 \leq 0\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \{1;\,2;\,3;\,4\}\,,\ x^2 - 10 > 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 4$ tel que $x^2 - 10 > 0.$
P faux.

(f) $P :\ \forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 2k\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ x \neq 2k\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}\,,\ x \neq 2k.$
P faux.

(g) $P :\ \forall\, x \in A = \{1;\,2;\,3\}\,,\ \exists\, y \in A\,,\ x^2 + 2y < 10\,.$

(non P) : $\exists\, x \in A = \{1;\,2;\,3\}\,,\ \forall\, y \in A\,,\ x^2 + 2y \geq 10\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $y \in A$: $x^2 + 2y \geq 10\,.$
P faux.

(h) $P :\ \forall\, (a;\,b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$

(non P) : $\exists\, (a;\,b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 > (a+b)^2\,.$
P vrai, car pour tout $(a;\,b) \in \mathbb{N}^2\,,\ ab \geq 0$ donc
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$
(non P) faux.

(i) $P: \ \forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad (x \leq 1 \ \text{ et } \ x^2 \leq x)$.

(non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+ , \ (x > 1$ ou $x^2 > x)$.
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$.
P faux.

(j) $P: \ \forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad (x \leq 1 \ \text{ ou } \ x^2 \leq x)$.

(non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+ , \ (x > 1$ et $x^2 > x)$.
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$ et $x^2 > x$.
P faux.

(k) $P: \ (\forall x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \leq 1) , \quad x^2 \leq x$.

(non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \leq 1 , x^2 > x$.
P vrai, car pour tout $0 \leq x \leq 1 , x^2 - x \leq 0$.
non P faux.

Logique : exercice 3

(a)
- On a les équivalences suivantes :

  $P \Leftrightarrow S$: $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $ABCD$ a des angles opposés égaux

  $Q \Leftrightarrow R$: $ABCD$ est un losange qui a un angle droit $\Leftrightarrow$ $ABCD$ est un carré
- On a les implications suivantes :

  $Q \Rightarrow P$: $ABCD$ est un losange qui a un angle droit $\Rightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme

  $R \Rightarrow P$: $ABCD$ est un carré $\Rightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme

  $R \Rightarrow S$: $ABCD$ est un carré $\Rightarrow$ $ABCD$ a des angles opposés égaux

  $Q \Rightarrow S$: $ABCD$ est un losange qui a un angle droit $\Rightarrow$ $ABCD$ a des angles opposés égaux

(b) $P \Rightarrow Q$ mais la réciproque est fausse.

Logique : exercice 4

Rappel :
n est pair $\Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z} , \quad n = 2k$
m est impair $\Leftrightarrow \ \exists l \in \mathbb{Z} , \quad m = 2l + 1$

(a) Référentiel : $\mathbb{Z}$
Hypothèse : n pair

Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{Z}\,, \quad n^2+1 = 2l+1$

Preuve :

n pair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\,, \quad n = 2k$

$$\begin{aligned} n^2+1 &= (2k)^2+1 \\ &= 4k^2+1 \\ &= 2\,(2k^2)+1 \;:\quad \text{on pose } 2k^2 = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l+1 \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) Référentiel : $\mathbb{Z}$
Hypothèse : n impair
Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}\,, \quad n^2-1 = 2l$

Preuve :

n impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\,, \quad n = 2k+1$

$$\begin{aligned} n^2-1 &= (2k+1)^2-1 \\ &= 4k^2+4k \\ &= 2\,(2k^2+2k) \;:\quad \text{on pose } 2k^2+2k = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Remarque : une autre preuve est aussi possible. Par exemple :
$n^2-1 = (n-1)(n+1)$
n étant impair, $n-1$ et $n+1$ sont pairs donc leur produit est pair.

(c) Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : n impair
Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}\,, \quad n^2+2 = 2l+1$

Preuve :

n impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\,, \quad n = 2k+1$

$$\begin{aligned} n^2+2 &= (2k+1)^2+2 \\ &= 4k^2+4k+1+2 \\ &= 2\,(2k^2+2k+1)+1 \;:\quad \text{on pose } 2k^2+2k+1 = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l+1 \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(d) *Indication* : Factoriser n^2-n et conclure.
Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : n est un entier positif
Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}\,, \quad n^2-n = 2l$

Preuve :

$n^2-n = n\,(n-1)$
ce qui est le produit de deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Le produit est donc pair.
Remarque : une autre preuve est aussi possible. Par exemple par disjonction de l'hypothèse :
si $n = 2k$: $\quad n^2-n = 4k^2-2k = 2\,(2k^2-k) = 2l$
ou
si $n = 2k+1$: $\quad n^2-n = 4k^2+4k+1-2k-1 = 4k^2+2k = 2l$

(e) *Indication* : Factoriser $n^3 - n$ et conclure.
Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : n est un entier positif
Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}, \quad n^3 - n = 3l$

Preuve :
$n^3 - n = n\ (n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$
ce qui est le produit de trois entiers consécutifs, donc l'un est un multiple de 3. Le produit est donc un multiple de 3.
Remarque : une preuve par disjonction des cas de l'hypothèse n'est ici pas adéquate.

(f) Référentiel : $\mathbb{Z}$
Hypothèse : n impair
Conclusion : $\exists\, k \in \mathbb{N}, \quad n^2 = 8k + 1$

Preuve :
n impair $\Leftrightarrow$ $\exists\, l \in \mathbb{Z}, \quad n = 2l + 1$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2l+1)^2 \\ &= 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4l\,(l+1) + 1 \ \text{ : or } l\,(l+1) \text{ est le produit de 2 entiers consécutifs donc est pair} \\ &= 4 \cdot 2k + 1 \ \text{ : on a posé } l(l+1) = 2k \\ &= 8k + 1 \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(g) *Remarque* :
$a \in \mathbb{N}$ n'est pas un multiple de 3
$\Leftrightarrow$
$\exists\, k \in \mathbb{N}, \quad a = 3k + 1 \quad \text{ou} \quad a = 3k + 2$
Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : a n'est pas un multiple de 3
Conclusion : $a^2 + 2$ est un multiple de 3

Preuve :
<u>1er cas</u> : $a = 3k + 1$

$$\begin{aligned} a^2 + 2 &= (3k+1)^2 + 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) = 3k' \quad \text{où} \quad k' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a^2 + 2$ est un multiple de 3.

<u>2ème cas</u> : $a = 3k + 2$

$$\begin{aligned} a^2 + 2 &= (3k+2)^2 + 2 \\ &= 9k^2 + 12k + 4 + 2 \\ &= 9k^2 + 12k + 6 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 2) = 3k'' \quad \text{où} \quad k'' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a^2 + 2$ est un multiple de 3.

Au final, si a n'est pas un multiple de 3, alors a^2+2 est un multiple de 3.

(h) Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : m pair ou n pair

Conclusion : $m^2+n^2=2k'+1$ ou $m^2+n^2=4l'$

Il faut traduire correctement le "ou" de l'hypothèse : seulement 2 cas sont à envisager.

Preuve :

1er cas : m et n sont pairs

$m=2k$ et $n=2l$

$$\begin{aligned} n^2+m^2 &= 4k^2+4l^2 \\ &= 4\,(k^2+l^2) \\ &= 4l' \quad \text{où} \quad l'\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad m^2+n^2$ est un multiple de 4.

2ème cas : m et n ne sont pas de même parité

Soit : $m=2k$ et $n=2p+1$

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= 4k^2+4p^2+4p+1 \\ &= 2\,(2k^2+2p^2+2p)+1 \\ &= 2l'+1 \quad \text{où} \quad l'\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

(i) On additionne un nombre *impair* d'entiers *consécutifs*. Il est donc judicieux de les écrire en utilisant des symétries par rapport au terme de rang milieu.
Par exemple :
$n-1\,,\ n\,,\ n+1$ sont 3 entiers consécutifs.

Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : m est la somme de 5 entiers consécutifs

Conclusion : $m=5k\,,\ k\in\mathbb{N}$

Preuve :

Soit 5 entiers consécutifs. On peut toujours les écrire de la manière suivante :
$n-2\,,\ n-1\,,\ n\,,\ n+1\,,\ n+2\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,.$
Par hypothèse, m est la somme de ces 5 entiers consécutifs donc :

$m=n-2+n-1+n+n+1+n+2=5n \quad\Leftrightarrow\quad m$ est un multiple de 5.

Si m est la somme de $2k+1$ entiers consécutifs, alors m est un multiple de $2k+1$ car on écrit ces $2k+1$ entiers ainsi :
$n-k\,, n-k+1\,,\ n-k+2\,,\ \ldots\,,\ n-2\,,\ n-1\,,\ n\,,\ n+1\,,\ \ldots\,, n+k$
et en les additionnant on obtient :
$m=(2k+1)n \quad\Leftrightarrow\quad m$ est un multiple de $2k+1$

Par contre la somme de $2k$ entiers consécutifs n'est pas un multiple de $2k$.
Un contre-exemple le montre.

(j) *Rappel* :

- $A=B \quad\Leftrightarrow\quad (A\subset B \quad \text{et} \quad B\subset A)$
- $A\subset B \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\in A\,,\ x\in B$

Référentiel : E
Hypothèse : $A \cup B = A \cap B$
Conclusion : $A = B$

Preuve :

$A \subset B$:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

$B \subset A$:

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Logique : exercice 6

Rappel :
Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire*.

(a) Référentiel : $\mathbb{R}$
Hypothèse : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$: H
Conclusion : $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: C

Preuve par l'absurde :
On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H : & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Q} \\ \text{non } C : & x + y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$(x + y) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + y = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ et m, n premiers entre eux

et

$y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et a, b premiers entre eux

D'où : $x + \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{m}{n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bm - an}{nb} = \dfrac{c}{d}, \quad c, d \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{Q}$.
Mais par hypothèse, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Ce qui est impossible donc la conclusion ($x + y$ irrationnel) est vraie.

(b) Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : $n, m \in \mathbb{N}, n \neq 0$: H
Conclusion : $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: C

Preuve par l'absurde :
On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H \ : & n\,,m\,\in\,\mathbb{N}\,,\,n\neq 0 \\ \text{non } C \ : & m+n\sqrt{2}\,\in\,\mathbb{Q} \end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; m+n\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}\,,\; a\in\mathbb{Z}\,,\; b\in\mathbb{Z}^*$ et $a\,,b$ premiers entre eux

Or $n\neq 0\,,$ d'où $\quad \sqrt{2} \;=\; \dfrac{a-bm}{nb} \;=\; \dfrac{c}{d}\,,\quad c\,,d\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Mais $\quad \sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\quad$ (pour la démonstration voir le point f)

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Ce qui est impossible donc la conclusion $(m+n\sqrt{2}$ irrationnel) est vraie.

(c) Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : $\forall a\,\in\,\mathbb{N}^*\,,\; a^2+2=3k \quad k\in\mathbb{N}^*$: H
Conclusion : a n'est pas multiple de 3 : C

Preuve par l'absurde :
On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H \ : & \forall a\,\in\,\mathbb{N}^*\,,\; a^2+2=3k \quad k\in\mathbb{N}^* \\ \text{non } C \ : & a \;=\; 3n\,,\; n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$$\begin{cases} a^2+2=3k \\ a^2+2=(3n)^2+2=9n^2+2 \end{cases}$$

d'où

$3k=9n^2+2 \quad\Rightarrow\quad 2=3\,(k-3n^2)\quad$ c'est-à-dire 2 est multiple de 3.

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à la situation absurde où 2 est un multiple de 3.

Ce qui est impossible donc la conclusion (a n'est pas multiple de 3) est vraie.

(d) Référentiel : $\mathbb{N}$
Hypothèse : $\forall m\,,\,n\,\in\,\mathbb{N}\,,\; m\leq 3$ et $n\leq 3$: H
Conclusion : $m\,\cdot n\neq 15$: C

Preuve par l'absurde :
On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H \ : & \forall m\,,\,n\,\in\,\mathbb{N}\,,\; m\leq 3 \text{ et } n\leq 3 \\ \text{non } C \ : & m\,\cdot n=15 \end{cases}$$

- si $n\neq 0$: $\quad m\,\cdot n=15 \quad\Rightarrow\quad m=\dfrac{15}{n}\;\geq 5\;$ car $\;n\leq 3\,.$

  On a donc silmultanément $\;m\leq 3\;$ et $\;m\geq 5\;$: ce qui est impossible.
  Ainsi $\;(m\,\cdot n\neq 15)\;$ est vrai.

- si $n = 0$: on a simultanément $m \cdot n = 0$ et $m \cdot n = 15$: ce qui est impossible. Ainsi la conclusion $(m \cdot n \neq 15)$ est vraie.

(e) *Remarque* : on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

Référentiel :	un ensemble E		
Hypothèse :	$\forall A\,,\, B \in E\,,\ A \subset B$	:	H
Conclusion :	$\overline{A} \cup B = E$	:	C

Preuve par l'absurde :

On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H \ : & \forall A\,,\, B \in E\,,\ A \subset B \\ \text{non } C \ : & \overline{A} \cup B \neq E \end{cases}$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} \overline{A} \cup B \neq E \ &\Rightarrow\ \exists\, x \in E\,, \quad x \notin \overline{A} \cup B \\ &\Rightarrow\ \exists\, x \in E\,, \quad x \in \overline{\overline{A} \cup B} \\ &\Rightarrow\ \exists\, x \in E\,, \quad x \in A \cap \overline{B} \\ &\Rightarrow\ \exists\, x \in E\,, \quad x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow\ \exists\, x \in E\,, \quad x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\Rightarrow\ A \not\subset B \end{aligned}$$

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $A \subset B$ et $A \not\subset B$.

Ce qui est impossible donc la conclusion $(\overline{A} \cup B = E)$ est vraie.

(f) *Indication :* utiliser $a^2 = 3k \Leftrightarrow a = 3k'\,,\, k\,,\, k' \in \mathbb{N}$ (la preuve se fera plus loin)

Référentiel :	$\mathbb{R}$
Hypothèse :	$x = \sqrt{3}$
Conclusion :	x est irrationnel

Preuve par l'absurde :

On suppose les hypothèses H et non C vraies :

$$\begin{cases} H \ : & x = \sqrt{3} \\ \text{non } C \ : & x = \sqrt{3} \text{ est rationnel} \end{cases}$$

Par hypothèse :

$\sqrt{3}$ est rationnel

$\Leftrightarrow$

$\exists\, a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} = \frac{a}{b} > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3 = \frac{a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 = 3b^2 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow\quad & a \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 3a'\,, a' \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \text{ rationnel} \quad \Leftrightarrow\quad & \sqrt{3} = \frac{3a'}{b} > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3 = \frac{9a'^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow\quad & b^2 = 3a'^2 \\ \Leftrightarrow\quad & b^2 \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow\quad & b \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow\quad & b = 3b'\,, b' \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ainsi $\sqrt{3}$ est rationnel $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3} = \dfrac{3a'}{3b'} = \dfrac{a}{b}$

donc a et b ont un facteur commun, mais par hypothèse, a et b sont premiers entre eux.

Ainsi en supposant $\sqrt{3}$ rationnel, on a simultanément que a et b ont un facteur commun et a et b sont premiers entre eux : ce qui est impossible. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Logique : exercice 7

Soit le théorème :

$T \quad : \quad \forall x \in E\,, \quad A \quad \Rightarrow \quad B$

A est l'hypothèse et B est la conclusion.
Son énoncé contraposé est :

$C \quad : \quad \forall x \in E\,, \quad \text{non } B \quad \Rightarrow \quad \text{non } A$
non B est l'hypothèse de C et non A est sa conclusion.

Le référentiel du théorème et de son contraposé est le même.

(a) *Référentiel* : Soient ABC un triangle et D le milieu du côté AB.
E est le milieu du côté AC $\Rightarrow$ DE est parallèle à BC.

non B : DE n'est pas parallèle à BC
non A : E n'est pas le milieu de AC.

D'où l'énoncé contraposé :

Soient ABC un triangle, D le milieu de AB.
DE n'est pas parallèle à BC $\Rightarrow$ E n'est pas le milieu de AC

(b) *Référentiel* : $\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}^*$
a ou b pairs $\Rightarrow$ ab pair.

non B : ab impair
non A : a et b impairs

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}^*$: ab impair $\Rightarrow$ a et b impairs

(c) *Référentiel* : $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$x\,(x-3) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$ ou $x > 3$

non B : $x \geq 0$ et $x \leq 3$
non A : $x(x-3) \leq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x \geq 0$ et $x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) \leq 0$

(d) *Référentiel* : $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$x^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$ et $x > -1$

non B : $x \geq 1$ ou $x \leq -1$
non A : $x^2 - 1 \geq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x \geq 1$ ou $x \leq -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \geq 0$

(e) *Référentiel* : $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$
$m \leq 3$ et $n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n \neq 15$.

non B : $m \cdot n = 15$
non A : $m > 3$ ou $n > 3$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$: $m \cdot n = 15 \quad \Rightarrow \quad m > 3$ ou $n > 3$

(f) *Référentiel* : $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$
$m + n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ et $n = 0$.

non B : $m \neq 0$ ou $n \neq 0$
non A : $m + n \neq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$: $m \neq 0$ ou $n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m + n \neq 0$

(g) *Référentiel* : $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$
$m = 0$ ou $n = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n = 0$.

non B : $m \cdot n \neq 0$
non A : $m \neq 0$ et $n \neq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N} \;:\quad m \cdot n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 0 \;\text{ et }\; n \neq 0$

(h) *Référentiel* : $\forall\, a \in \mathbb{R}$
$(\forall\, \varepsilon > 0\,,\; |a| < \varepsilon\,) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$

non B : $a \neq 0$
non A : $\exists\, \varepsilon > 0\,,\; |a| \geq \varepsilon$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, a \in \mathbb{R} \;:\quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0\,,\; |a| \geq \varepsilon$

Logique : exercice 8

Démontrer un théorème en utilisant son énoncé contraposé :

- on écrit l'énoncé contraposé C,
- on démontre C par la méthode directe.

Rappel :
Soit le théorème : $T \;:\; [\,\forall\, n, m \in \mathbb{N},\; P \Rightarrow Q\,]$

et son énoncé contraposé $C \;:\; [\,\forall\, n, m \in \mathbb{N},\; \text{non}\, Q \Rightarrow \;\text{non}\, P\,]$

Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow$ T vrai.

(a) Soit le théorème T :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$
Hypothèse P : $m \cdot n$ pair
Conclusion Q : m est pair ou n est pair

On écrit la proposition contraposée C :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$
Hypothèse non Q : m est impair et n est impair
Conclusion non P : $m \cdot n$ est impair

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m &= 2k+1\,,\; k \in \mathbb{N} \\ n &= 2l+1\,,\; l \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\begin{aligned} m \cdot n = (2k+1)\cdot(2l+1) &= 4\,kl + 2\,k + 2\,l + 1 \\ &= 2\,(2kl + k + l) + 1 \\ &= 2k' + 1 \quad \text{où } k' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; m \cdot n$ est impair.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(b) Soit le théorème T :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$
Hypothèse P : m^n impair

Conclusion Q : m est impair ou n est impair

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$
Hypothèse non Q : m est pair et n est pair
Conclusion non P : m^n est pair

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m = 2k\,, \ k \in \mathbb{N}^* \\ n = 2l\,, \ l \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$\begin{aligned} m^n = (2k)^{2l} &= 2^{2l} \cdot k^{2l} \\ &= 2(2^{2l-1} \cdot k^{2l}) \\ &= 2k' \quad \text{où } k' = 2^{2l-1} \cdot k^{2l} \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ m^n est pair.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(c) Soit le théorème T :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$
Hypothèse P : $m^2 + n^2$ est impair ou $m^2 + n^2 = 4k\,,\ k \in \mathbb{N}$
Conclusion Q : m est pair ou n est pair

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$
Hypothèse non Q : m est impair et n est impair
Conclusion non P : $m^2 + n^2$ est pair et $m^2 + n^2 \neq 4k\,,\ k \in \mathbb{N}$

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m = 2k+1\,, \ k \in \mathbb{N} \\ n = 2l+1\,, \ l \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4\,(k^2 + k + l^2 + l) + 2 \\ &= 4\,k' + 2 \quad \text{où } k' \in \mathbb{N} \\ &= 2\,(2k' + 1) \end{aligned}$$

ainsi $m^2 + n^2$ est pair mais n'est pas multiple de 4 car $2k' + 1$ est impair.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(d) Soit le théorème T :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$
Hypothèse P : $m^2 - n^2$ n'est pas un multiple de 8
Conclusion Q : m est pair ou n est pair

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$

Hypothèse non Q : m est impair et n est impair
Conclusion non P : $m^2 - n^2$ est un multiple de 8

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m = 2l+1\,,\ l \in \mathbb{N} \\ n = 2p+1\,,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (2l+1)^2 - (2p+1)^2 \\ &= 4\,(l^2 + l - p^2 - p) \\ &= 4\,l\,(l+1) - 4\,p\,(p+1) \\ &= 4 \cdot 2\,a - 4 \cdot 2\,b \qquad a\,,\, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

car l et $l+1$ sont deux entiers consécutifs donc leur produit est pair, de même pour p et $p+1$.

$\Rightarrow\ m^2 - n^2 = 8a - 8b = 8k, \quad k \in \mathbb{Z}$
ainsi $m^2 - n^2$ est un multiple de 8.
L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(e) Soit le théorème T :
Référentiel : $n \in \mathbb{N}$
Hypothèse P : $n^2 = 3k\,,\ k \in \mathbb{N}$
Conclusion Q : $n = 3k'\,,\ k' \in \mathbb{N}$

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $n \in \mathbb{N}$
Hypothèse non Q : $n \neq 3k'\,,\ k' \in \mathbb{N}$
Conclusion non P : $n^2 \neq 3k\,,\ k \in \mathbb{N}$

Preuve de la proposition contraposée :

- On suppose : $n = 3l+1\,,\ l \in \mathbb{N}$
  $n^2 = (3l+1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1 = 3l' + 1\,,\ l' \in \mathbb{N}$
  Ainsi n^2 n'est pas un multiple de 3.
- On suppose : $n = 3l+2\,,\ l \in \mathbb{N}$
  $n^2 = (3l+2)^2 = 9l^2+12l+4 = 9l^2+12l+3+1 = 3(3l^2+4l+1)+1 = 3l'+1\,,\ l' \in \mathbb{N}$
  Ainsi n^2 n'est pas un multiple de 3.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.