Valeurs et vecteurs propres

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\vec{x}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

a) Montrer que $k\,\lambda$, $k \in \mathbb{R}^*$, est une valeur propre de $k\,f$.

b) Montrer par induction que λ^k, $k \in \mathbb{N}^*$, est une valeur propre de f^k et que $\vec{x}$ est un vecteur propre de f^k.

c) On suppose f bijective et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}.

2. Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont linéairement indépendants, $\vec{x}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Montrer que :

a) $\lambda = 0 \iff \vec{x} \in \ker f$.

b) $\lambda \neq 0 \iff \vec{x} \in \operatorname{Im} f$.

3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, qui admet n valeurs propres distinctes.
Montrer que les n vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont linéairement indépendants.

4. Soit la matrice N suivante :

$$N = \begin{pmatrix} b & 2a & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -a & 4b & 7 \end{pmatrix} \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer a et b sachant que $\lambda = -9$ est une valeur propre de N dont le sous-espace propre associé est : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer la matrice A carrée d'ordre 2 dont les valeurs propres sont 1 et 2, et dont les vecteurs propres associés sont respectivement :
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
A^3 admet-elle 6 comme valeur propre ?

6. Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$, la matrice A a-t-elle une valeur propre d'ordre 2 ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer, par le calcul vectoriel, les valeurs propres et les sous-espaces propres des applications suivantes.
Dans chaque cas, montrer qu'il est possible de construire une base formée de vecteurs propres. Donner la matrice de f dans cette base et interpréter f géométriquement.

a) $$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) = k\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \end{aligned}$$
où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants et $k = \vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$.

b) $$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + 5\,(\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n} + \vec{x} \end{aligned}$$
où $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $\|\vec{u}\|^2 = 5$ et $\|\vec{n}\|^2 = 1$.

8. Soient a et b deux paramètres réels et f l'application linéaire de l'espace dans lui-même, donnée par sa matrice A relativement à la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & b & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Pour les valeurs particulières $a = 2$ et $b = 4$, déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.

b) Déterminer a et b pour que f admette $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ comme valeurs propres. Montrer que f possède une troisième valeur propre ; calculer les sous-espaces propres correspondants à ces trois valeurs propres.

9. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, donner les matrices de passage.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. Déterminer les valeurs des paramètres réels a, p et q pour que les matrices suivantes soient diagonalisables :

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 0 & a & 0 \\ 10 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -p \\ p+1 & p+3 & p \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $F = \begin{pmatrix} -q & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -q \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base canonique E, est :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Montrer que f est diagonalisable. Donner la matrice de f relativement à une base propre E' ainsi que la matrice de passage de E vers E'.

b) Soit M, P et D des matrices carrées réelles, avec P inversible, telles que $M = P^{-1}DP$. Montrer que $M^n = P^{-1}D^nP$.

c) En utilisant (a) et (b), calculer :

i) l'image de $\vec{e_3}$ par l'application $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$;

ii) $\det\left(A^5 + 16I_3\right)$

12. En cherchant les valeurs et les sous-espaces vectoriels propres, étudier la nature des endomorphismes du plan de matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

13. Soient f et s les deux endomorphismes du plan suivants :
f est une affinité d'axe $a : y = 0$, de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rapport $\lambda = -5$ et s est une symétrie orthogonale d'axe $b : -2x + y = 0$.
Chercher la matrice de $g = s \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$; puis étudier la nature géométrique de g.

Indication : déterminer la matrice de f dans une base propre et utiliser la matrice de passage. De même pour s.

14. On considère les deux endomorphismes du plan suivants :

- f est une affinité d'axe la droite $a : 3x - y = 0$, de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rapport $\lambda = 2$,

- g est une projection sur la droite $b : 2x - y = 0$, parallèlement à la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Chercher la matrice de $h = g \circ f$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$; puis étudier la nature géométrique de h

Indication : déterminer la matrice de f dans une base propre et utiliser la matrice de passage. De même pour g.

15. a) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} \\ f(\vec{e_2}) = 2(\vec{e_1} + \vec{e_2}) \\ f(\vec{e_3}) = 3(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) \end{cases}$$

où $(\vec{e_1};\, \vec{e_2};\, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Chercher les valeurs et sous-espaces vectoriels propres de f.

Donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres et donner la matrice de passage.

Déterminer la nature de f.

b) Même question avec l'application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad g(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

16. On considère les deux applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:
f est une symétrie orthogonale d'axe $a : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ et g est une projection orthogonale sur le plan $\beta : 2x + 3y + 4z = 0$.

En utilisant une base propre, calculer la matrice de $h = f \circ g$ dans la base canonique.

17. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'endomorphisme h dont la matrice M par rapport à B est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a) Calculer α et β pour que h soit une affinité de rapport $\lambda = -2$.

b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :
$\operatorname{Im} g$ est la droite $(O, \vec{v})$, où $\vec{v}$ est la direction de l'affinité h définie sous a),
$\operatorname{Ker} g$ est l'axe de l'affinité h.
Chercher les valeurs et sous-espaces propres de g sachant que :
$\forall\ \vec{x} \in \operatorname{Im} g\ :\ (g - 3I_2)(\vec{x}) = \vec{0}$.
($I_2 =$ application linéaire identité sur $\mathbb{R}^2$)

c) Calculer la matrice de $l = h \circ g$ dans une base propre à préciser et en déduire la nature géométrique de l.

18. On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = \vec{x} - 4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \end{array}$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que : $k = \vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$.
Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f.
Définir une base propre et donner la matrice de f dans cette base.
Discuter en fonction de k la nature géométrique de f.

19. Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} - 4\vec{x} \end{array}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\|\vec{u}\|^2 = 2$.

a) Déterminer, par le calcul vectoriel, les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
Donner la nature géométrique de f.

Pour la suite, on pose $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

b) On considère les deux endomorphismes suivants :
- g est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, de direction $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$ et de rapport $k = -1$,
- h est défini par ses valeurs propres : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ et par ses sous-espaces vectoriels propres : $E_2 = (O, \vec{u})$ et $E_{-3} = (O, \vec{v})$.

Déterminer la matrice de l'endomorphisme $g \circ h$ dans la base B.

c) On considère l'endomorphisme du plan l défini par sa matrice $M_l = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ relativement à la base B.
Soit $s = g \circ h + l$. Déterminer les paramètres réels α et β de sorte que s et f admettent les même espaces propres.

20. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = \vec{x} - 4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \end{array}$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que : $k = \vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$.

a) Par le calcul vectoriel,déterminer les valeurs et les sous espaces propres de f.
Donner la nature géométrique de f.

b) Soit g une affinité d'axe $(O, \vec{v})$, de rapport 2 et de direction perpendiculaire à $\vec{u}$; déterminer la matrice de $h = g \circ f$ dans une base propre de h à préciser.
Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que $j = 6\,\mathrm{Id} + 2h$ comporte dans sa décomposition une projection parallèle à $\vec{v}$.
Quelle est la nature géométrique de j ?

21. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ linéairement indépendants. On munit le plan de la base $B'(\vec{u},\vec{v})$ et on considère l'endomorphisme g dont la matrice, relativement à B', est :

$$M'_g = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Soit a une affinité d'axe la droite $(O,\vec{v})$, de direction $\vec{u}$ et de rapport 2. Déterminer

- les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme $f = g \circ a^{-1}$,
- la nature géométrique de f.

On note $B = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on pose :

$\vec{u} = 4\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{v} = -2\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2\,.$

b) Calculer la matrice de f relativement à la base B.

c) On considère

- la symétrie oblique, notée s, d'axe la droite $(O,\vec{u})$, de direction $\vec{w} = (k+1)\,\vec{u} + \vec{v}$, $k \in \mathbb{R}^*$,
- l'homothétie h de centre O et rapport k.

Déterminer la matrice, dépendant du paramètre k, de l'endomorphisme $r = (s \circ g) - 2h$ relativement à la base $B'(\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer le paramètre k de sorte que la matrice de r, par rapport à la base B', soit diagonale ; en donner alors la nature géométrique.

Réponses

4. $a = 4,\ b = 1$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

6. $t = -2\ :\ \lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -6$
$t = \frac{65}{8}\ :\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{3}{2}$

7. a) $\lambda_1 = k^2$ et $E_{k^2} = (O, \vec{v})$
$\lambda_2 = 0$ et $E_0 = (O, \vec{w})$ où $\vec{w} \perp \vec{u}$
Base $(\vec{v}\,;\ \vec{w})$
$M = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
f est une projection d'axe $(O, \vec{v})$ et direction $\vec{w}$, composée avec une homothétie de centre O et rapport $k^2 (\neq 0)$.

b) soit $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$
$\lambda_1 = 1$ et $E_1 = (O, \vec{v})$
$\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ et $E_6 = (O, \vec{u}, \vec{n})$
Base $(\vec{v}\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{n})$
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
f est une affinité de direction le plan $(O, \vec{u}, \vec{n})$, d'axe la droite $(O, \vec{v})$ et rapport 6.

8. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 5$
$E(0) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E(5) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $a = -2$, $b = 2$ et $\lambda_3 = 2$.
$E(0) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E(1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
$E(2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. a) oui
b) oui
c) non

d) oui

10. a) A diagonalisable $\Longleftrightarrow a \neq -3$

b) E diagonalisable $\Longleftrightarrow p = 0$

c) F diagonalisable $\Longleftrightarrow q \notin \{-1; 1\}$

11. a) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$E(-3) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E(2) : x + y - z = 0$

c) $f^n(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n \\ 0 \\ 2(-3)^n - 2^n \end{pmatrix}$

$\det(A^5 + 16I_3) = -523'008$

12. a) Homothétie de centre O et de rapport 25 composée avec une projection orthogonale : $h_{O,25} \circ p$.

b) Homothétie de centre O et de rapport 3 composée avec une symétrie orthogonale : $h_{O,3} \circ s$.

c) Homothétie de centre O et de rapport 2 composée avec une affinité.

d) Affinité.

13. $M_g = M_s M_f = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{56}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{33}{5} \end{pmatrix}$

$M'_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

g est une affinité.

14. $M_h = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 20 & -2 \end{pmatrix}$

$M'_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

h est une homothétie de rapport 2 composée avce une projection.

15. a) $E(1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E(2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E(3) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

f est la composée de deux affinités.

b) $E(0) : x - y + 2z = 0$ $\qquad$ $E(2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g est une homothétie de centre O et de rapport 2 composée avec une projection.

16. c) $M = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -25 & 6 & 8 \\ 6 & -20 & 12 \\ 8 & 12 & -13 \end{pmatrix}$

17. a) $\alpha = -3$ et $\beta = -4$

b) $\lambda_1 = 0$ et $E_0 : 4x - y = 0$

$\lambda_2 = 3$ et $E_3 : x - y = 0$

c) $M_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

l est la composée d'une homothétie de centre O et rapport -6, avec une projection du plan sur la droite $(O, \vec{v})$, de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

18. $\lambda_1 = 1$ et $E(1) = (O, \vec{r})$ où $\vec{r} \perp \vec{u}$

$\lambda_2 = 1 - 4k^2$ et $E(1 - 4k^2) = (O, \vec{v})$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 4k^2 \end{pmatrix}$

Nature géométrique de f :

$k = \pm\frac{1}{2}$: f est une projection ;

$k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: f est une symétrie oblique ;

dans tous les autres cas, f est une affinité.

19. a) $\lambda_1 = -2$ et $E_{-2} = (O, \vec{u})$

$\lambda_2 = -4$ et $E_{-4} = (O, \vec{w})$ où $\vec{w} \perp \vec{u}$

f est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, de direction $\vec{w}$ et de rapport 2, composée avec une homothétie de centre O et rapport -2.

b) $M_{g\circ h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\alpha = 1$ et $\beta = -2$

20. a) $M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix}$

f est une affinité de plan (par O) et de rapport $1 - 4k^2$.

b) $M'_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix}$

$k = \pm 1$

j est une homothétie de centre O et rapport 10 composée avec une projection parallèle à $\vec{v}$.

21. a) $\lambda_1 = -1$ et $E_{-1} = (O, \vec{u})$

$\lambda_2 = -4$ et $E_{-4} = (O, \vec{v})$

f est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et de rapport 4, composée avec une homothétie de centre O et rapport -1.

b) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $M'_r = \begin{pmatrix} -2-2k & 8k+8 \\ 0 & 4-2k \end{pmatrix}$

$k = -1$

r est une projection d'axe $(O, \vec{v})$, de direction $\vec{u}$ composée avec une homothétie de centre O et rapport 6.