Corrigé 6

1. A l'aide du théorème des deux gendarmes, montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{(n+1)^n\ n!}{n^{2n}}$ admet une limite nulle.

La démarche consiste à encadrer la suite (a_n) par deux "suites-gendarmes" qui convergent vers 0.

On exprime le terme général a_n en un produit, en constatant que le dénominateur n^{2n} peut s'écrire $n^n \cdot n^n$:

$$a_n = \frac{(n+1)^n\ n!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n!}{n^n}.$$

Le facteur $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tend vers e, montrons que le facteur $\dfrac{n!}{n^n}$ tend vers 0.

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{car} \qquad \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq 1\,.$$

Cette majoration de $\dfrac{n!}{n^n}$ par $\dfrac{1}{n}$ nous permet d'encadrer la suite a_n :

$$0 \leq \frac{(n+1)^n\ n!}{n^{2n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Avec $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = e \cdot 0 = 0\,.$

Le théorème des deux gendarmes permet de conclure : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n\ n!}{n^{2n}} = 0\,.$

2. Montrer à l'aide de la définition que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty\,.$

Puis utiliser ce résultat pour calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3-\sqrt{n})\,(\sqrt{n}+2)}{8n-4}\,.$

- Pour montrer que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers ∞, il faut être capable, pour un $A > 0$ donné, d'exhiber un rang $N(A) \in \mathbb{N}^*$, de sorte que tous les termes de la suite, à partir du rang N, soient dans l'intervalle $]\,A\,;\,+\infty\,[$.

$$\sqrt{n} > A \quad \Leftrightarrow \quad n > A^2\,.$$

Donc si $n \geq N > A^2$ alors $\sqrt{n} > A\,.$ Tout $N > A^2$ convient.

- On met en évidence la plus haute puissance de n au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{(3-\sqrt{n})\,(\sqrt{n}+2)}{8n-4} = \frac{n\left[\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-1\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right]}{n\left(8-\frac{4}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-1\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{8-\frac{4}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

D'où $$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-\sqrt{n})\,(\sqrt{n}+2)}{8n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-1\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{8-\frac{4}{n}} = -\frac{1}{8}.$$

3. Etudier la convergence de la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

On détermine les premiers termes de cette suite et on observe si elle semble converger ou diverger.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1!}{2^1} = \frac{1}{2}\\
a_2 &= \frac{2!}{2^2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} = a_1\cdot\frac{2}{2}\\
a_3 &= \frac{3!}{2^3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2} = a_2\cdot\frac{3}{2}\\
a_4 &= \frac{4!}{2^4} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2} = a_3\cdot\frac{4}{2}\\
&\dots\\
a_n &= \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2} = a_{n-1}\cdot\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Cette suite semble diverger car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty$.

On le démontre en utilisant le "théorème du gendarme".

On montre que la suite (a_n) tend vers $+\infty$ en la minorant par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$$a_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2} \geq \frac{n}{4}, \quad \text{car} \quad \frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2} \geq 1 \quad (n\geq 3).$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{4} = +\infty$, donc, d'après le "théorème du gendarme", $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

4. Soient $\{C_1\,,\ C_2\,,\ C_3\,,\cdots\}$ un ensemble infini de cubes. Sachant que le volume de C_{i+1} est égal à la moitié de celui de C_i $(i \in \mathbb{N}^*)$, déterminer, en fonction de l'arête c du premier cube, la hauteur H de la "tour" obtenue en superposant tous les cubes de l'ensemble.

Calcul du volume et de la longueur de l'arête des cubes.

- Le cube C_1
  - son volume : $v_1 = c^3\,,$
  - son arête : $c_1 = c\,.$
- Le cube C_2
  - son volume : $v_2 = \dfrac{v_1}{2} = \dfrac{c^3}{2}\,,$
  - son arête : $c_2 = \sqrt[3]{v_2} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{2}} = \dfrac{c}{\sqrt[3]{2}}\,.$
- Le cube C_3
  - son volume : $v_3 = \dfrac{v_2}{2} = \dfrac{c^3}{2^2}\,,$
  - son arête : $c_3 = \sqrt[3]{v_3} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{2^2}} = \dfrac{c}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}\,.$

  $\vdots$
- Le cube C_n
  - son volume : $v_n = \dfrac{v_{n-1}}{2} = \dfrac{c^3}{2^{n-1}}\,,$
  - son arête : $c_n = \sqrt[3]{v_n} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{2^{n-1}}} = \dfrac{c}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{n-1}}\,.$

La hauteur H de la tour s'obtient en sommant les arêtes de tous les cubes :

$$H = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_n + \cdots$$

$$H = c\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{2}\,)^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{2}\,)^3} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt[3]{2}\,)^{n-1}} + \cdots\right)$$

$$H = c\left[1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

L'expression qui définit H est une série géométrique de premier terme c et de raison $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\,.$

Cette série converge car $|r| < 1$ et $H = \dfrac{c}{1-r} = \dfrac{c}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{c\,\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$.

En amplifiant cette expression par le conjugué du dénominateur, on obtient :

$$H = c\left(2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) .$$

5. La suite (b_n) est définie par son terme général :

$$b_n = 4,321\,321 \cdots 321 \quad \text{(partie décimale : } n \text{ fois "321").}$$

Calculer, si elle existe, la limite de cette suite.

On cherche une expression plus convenable du terme général de cette suite en exprimant sa partie décimale à l'aide des puissances de 10.

$b_1 = 4,321 = 4 + 321 \cdot 10^{-3}$.

$b_2 = 4,321\,321 = 4 + 321 \cdot 10^{-3} + 321 \cdot 10^{-6} = 4 + 321\,(10^{-3} + 10^{-6})$.

$b_3 = 4,321\,321\,321 = 4+321\cdot10^{-3}+321\cdot10^{-6}+321\cdot10^{-9} = 4+321\,(10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9})$.

...

$b_n = 4 + 321\,(10^{-3} + 10^{-6} + \cdots + 10^{-3n}) = 4 + S_n$

où $S_n = 321\,(10^{-3} + 10^{-6} + \cdots + 10^{-3n})$ est la somme partielle d'une série géométrique de premier terme $S_1 = 321 \cdot 10^{-3}$ et de raison $r = 10^{-3}$:

$$S_n = 321 \cdot 10^{-3}\left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \cdots + 10^{-3\,(n-1)}\right) = 321 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1-10^{-3n}}{1-10^{-3}} .$$

Cette série converge car $|r| < 1$, elle converge vers $S = 321 \cdot 10^{-3} \cdot \dfrac{1}{1-10^{-3}} = \dfrac{321}{999}$.

Donc la suite (b_n) converge vers $b = 4 + S = 4 + \dfrac{321}{999} = \dfrac{4317}{999}$.

Cet exercice illustre un résultat plus général :

Tout nombre réel dont la partie décimale est périodique est un nombre rationnel.

6. Depuis le sol, on lance une balle vers le haut de sorte qu'elle atteigne la hauteur $h_1 = 5\,\mathrm{m}$. Elle retombe et rebondit instantanément pour atteindre une hauteur $h_2 = p \cdot h_1$, $p = 0,81$, et ainsi de suite, chaque nouvelle hauteur atteinte étant p fois la précédente.

En utilisant la relation entre la hauteur et le temps

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2 , \quad g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} ,$$

donner le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle.

- Temps du premier aller-retour :

$$2\,t_1 = 2\sqrt{\frac{2\,h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\cdot 5\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

- Temps du deuxième aller-retour :

$$2\,t_2 = 2\sqrt{\frac{2\,h_2}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,p\,h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,h_1}{g}}\,\sqrt{p} = 2\,\cdot(\sqrt{p}\,)\ \mathrm{s}\,.$$

- Temps du troisième aller-retour :

$$2\,t_3 = 2\sqrt{\frac{2\,h_3}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,p^2\,h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,h_1}{g}}\,(\sqrt{p})^2 = 2\,\cdot(\sqrt{p}\,)^2\ \mathrm{s}\,.$$

- Temps du n-ième aller-retour, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\,t_n = 2\sqrt{\frac{2\,h_n}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,p^{n-1}\,h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\,h_1}{g}}\,(\sqrt{p})^{n-1} = 2\cdot(\sqrt{p}\,)^{n-1}\ \mathrm{s}\,.$$

La somme des temps est une série géométrique de raison $\sqrt{p}$:

$$S_n = 2\,t_1 + 2\,t_2 + \cdots + 2\,t_n = 2\,\left(1 + \sqrt{p} + \cdots + (\sqrt{p}\,)^{n-1}\right) = 2\cdot\frac{1-(\sqrt{p}\,)^n}{1-\sqrt{p}}.$$

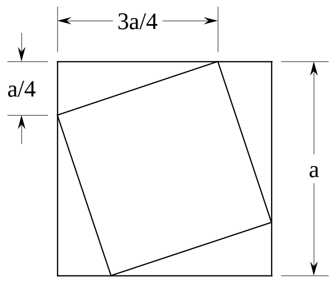
Comme $\sqrt{p} = 0.9 < 1$, la balle s'immobilise et le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle est donné par la limite :

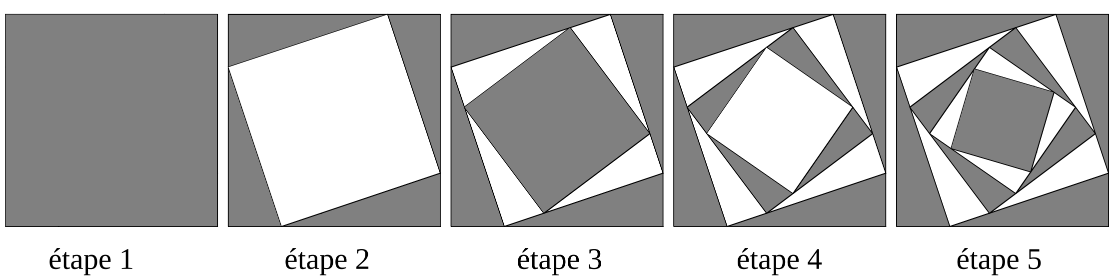
$$t = \lim_{n\to\infty} S_n = 2\,\frac{1}{1-\sqrt{p}} = \frac{2}{1-0,9} = 20\,\mathrm{s}\,.$$

7. Dans un carré de côté a, on inscrit un deuxième carré comme décrit ci-contre.

Dans le deuxième carré, on inscrit un troisième carré de la même manière, et ainsi de suite.

On grise le carré initial de côté a, étape par étape de la façon suivante :





On note A_n l'aire grisée à l'étape n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(étape 2 : de l'aire grisée à l'étape 1, on soustrait l'aire du deuxième carré ;
étape 3 : à l'aire grisée à l'étape 2, on ajoute l'aire du troisième carré ; etc...)

a) Déterminer l'expression de A_n en fonction de n.

b) Calculer, si elle existe, la limite de la suite (A_n) lorsque n tend vers l'infini.

---

a) Soit S_1 l'aire du premier carré : $S_1 = a^2$.

Soit S_2 l'aire du deuxième carré. Par Pythagore on obtient :

$$S_2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}\,a^2 = \frac{5}{8}\,S_1 .$$

Soit S_n l'aire du n-ième carré, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

$$S_n = \frac{5}{8}\,S_{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} a^2 .$$

On en déduit les termes de la suite (A_n).

$A_1 = S_1 = a^2$,

$A_2 = S_1 - S_2 = a^2 - \frac{5}{8}\,a^2$,

$A_3 = S_1 - S_2 + S_3 = a^2 - \frac{5}{8}\,a^2 + (\frac{5}{8})^2\,a^2$,

$\vdots$

$A_n = S_1 - S_2 + S_3 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$,

$A_n = a^2 - \frac{5}{8}\,a^2 + (\frac{5}{8})^2\,a^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(\frac{5}{8})^{n-1}\,a^2$,

$A_n = a^2\left(1 - \frac{5}{8} + (\frac{5}{8})^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(\frac{5}{8})^{n-1}\right)$,

$A_n = a^2\left(1 + (-\frac{5}{8}) + (-\frac{5}{8})^2 + \cdots + (-\frac{5}{8})^{n-1}\right)$.

A_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme a^2 et de raison $r = -\frac{5}{8}$.

$$A_n = a^2 \cdot \frac{1-(r)^n}{1-r} = a^2 \cdot \frac{1-(-\frac{5}{8})^n}{1-(-\frac{5}{8})} .$$

b) La suite (A_n) converge car $|r| = \frac{5}{8} < 1$.

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{a^2}{1-r} = \frac{a^2}{1-(-\frac{5}{8})} = \frac{8}{13}\,a^2 .$$
