Analyse I – Corrigé de la Série 11

Echauffement.

Une asymptote verticale ne peut exister qu'en un point où la fonction n'est pas définie, donc ici potentiellement en $x = 0$. En effet, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Donc f a une asymptote verticale en $x = 0$.
Une asymptote horizontale (si elle existe) est caractérisée par les limites de f à l'infini (positif ou négatif). Ici on a

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

si bien que f a une asymptote horizontale en $y = 0$. Le graphe de f est donné à la Fig. **??**.

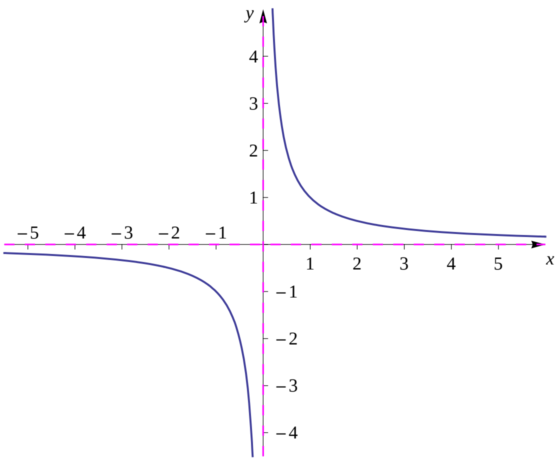

Fig. 1

Exercice 1.

i) Avant de calculer ses dérivées, on récrit f en distinguant les deux cas. On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{5}{4}\,, & -1 \le x \le -\frac{1}{4} \\ x^2 - x + \frac{3}{4}\,, & -\frac{1}{4} < x \le 1 \end{cases}\,, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1\,, & -1 < x < -\frac{1}{4} \\ 2x - 1\,, & -\frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Pour $x_0 = -\frac{1}{4}$ on a

$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0{}^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to -\frac{1}{4}^+} \frac{x^2 - x - \frac{5}{16}}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x\to -\frac{1}{4}^+} \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0{}^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to -\frac{1}{4}^-} \frac{x^2 + x + \frac{3}{16}}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x\to -\frac{1}{4}^-} \frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

et donc f n'est pas dérivable en ce point. De plus $f''(x) = 2$ pour tout $x \in \left]-1, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]-\frac{1}{4}, 1\right[$.

Les extremums locaux et absolus sont donc parmi les points suivants :

(a) Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$. Comme $f''(x_1) = f''(x_2) > 0$, x_1 et x_2 sont des minimums locaux. On a $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = \frac{1}{2}$.

(b) Points où f' n'existe pas : Le seul point à examiner est $x_0 = -\frac{1}{4}$ pour lequel on a $f'_d(x_0) = -\frac{3}{2}$ et $f'_g(x_0) = \frac{1}{2}$ (cf. ci-dessus). On déduit alors des signes de ces dérivées unilatérales que x_0 est un maximum local. On a $f(x_0) = \frac{17}{16}$.

(c) Extrémités du domaine de f : Comme f est continue sur $[-1, 1]$, on déduit des signes de f' au voisinage des extrémités (négatif vers -1 et positif vers 1) que f a des maximums locaux en $a = -1$ et $b = 1$. On a $f(a) = \frac{5}{4}$ et $f(b) = \frac{3}{4}$.

$$(a), (b), (c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{maximum global en} & x = -1, \quad f(-1) = \frac{5}{4} \\ \text{minimum global en} & x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(cf. Fig. ??)}$$

ii) Comme $2 - x < 0$ pour tout $x \in]2, 3[=: I$, il ne faut pas distinguer deux cas pour f. On a en effet

$$f(x) = (x-1)^2 + 2(2-x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad f'(x) = 2(x-2) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Les extremums locaux et globaux se trouvent de nouveau parmi les points suivants :

(a) Points stationnaires : $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, donc aucun.

(b) Points où f' n'existe pas : f' existe sur tout I, donc aucun.

(c) Extrémités du domaine de f : Le domaine I est un intervalle ouvert et n'a donc pas d'extrémités.

Ainsi la fonction f ne possède ni d'extremum local ni absolu sur I (cf. Fig. ??).

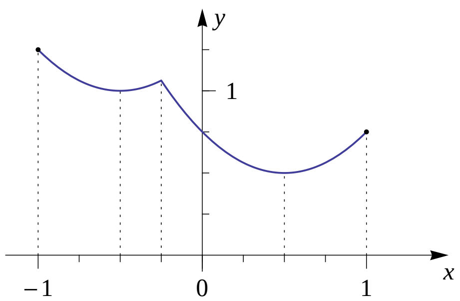

Fig. 2

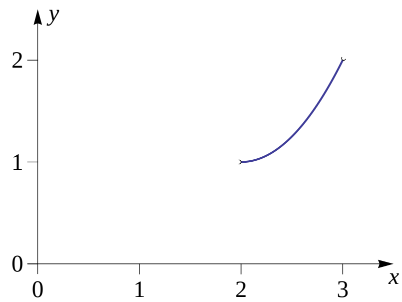

Fig. 3

Exercice 2.

i) 1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) Impaire, non-périodique

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4) En tant que composition de fonctions élémentaires f est continue sur $D(f)$.

5) f est dérivable sur $D(f)$

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\ ,\quad D(f') = D(f) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\ ,\quad D(f'') = D(f)$$

6) • $f'(x) < 0$ pour tout $x \in D(f')$, donc pas de point stationnaire

• $f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$. On calcule alors f''':

$$f'''(x) = -\frac{6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4} < 0 \qquad \text{pour tout } x \in D(f).$$

Comme $f'''(0) = -6 \neq 0$, f a un point d'inflexion en $x = 0$.

7) • Monotonie :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,\infty[$
f'	< 0	< 0	< 0
f	décroissante	décroissante	décroissante

Notez bien que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles listés dans le tableau mais pas sur $D(f)$; en effet le Corollaire 1 du Théorème des accroissements finis s'applique seulement à des intervalles.

• Convexité/concavité :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,1[$	$]1,\infty[$
f''	< 0	> 0	< 0	> 0
f	concave	convexe	concave	convexe

8) • Asymptotes verticales: f n'est pas définie en $x = \pm 1$ et on a $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ ainsi que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, donc des asymptotes verticales en $x = \pm 1$.

• Asymptote horizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, donc une asymptote horizontale en $y = 0$.

9) Le graphe de f est tracé à la Fig. **??**.

ii) 1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left]1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ (sera obtenue à la fin de cette étude)

2) ni paire, ni impaire, pas périodique

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$.

4) Continue sur $D(f)$ (composition de fonctions élémentaires)

5) f est dérivable sur $D(f)$

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(2x-1) - 2(3x^2-x)}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2-6x+1}{(2x-1)^2}\ , \qquad D(f') = D(f)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(12x-6)(2x-1)^2 - 4(6x^2-6x+1)(2x-1)}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(12x-6)(2x-1) - 4(6x^2-6x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{2}{(2x-1)^3}\ , \qquad D(f'') = D(f) \end{aligned}$$

6) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

Donc f a des points stationnaires en $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Comme

$$f''(x_{1,2}) = \frac{2}{\left(2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - 1\right)^3} = \frac{2}{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \pm\frac{2}{3^{-3/2}} = \pm 6\sqrt{3}\ ,$$

il suit que x_1 est un minimum local (car $f''(x_1) > 0$) et x_2 un maximum local (car $f''(x_2) < 0$) de f.

• Comme $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(f)$, f n'a pas de point d'inflexion.

7) • Monotonie :

x	$\left]-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right[$	$\left]\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right[$	$\left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right[$
f'	> 0	< 0	< 0	> 0
f	croissante	décroissante	décroissante	croissante

• Convexité/concavité :

x	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \infty\right[$
f''	< 0	> 0
f	concave	convexe

8) • Asymptote verticale: f n'est pas définie en $x = \frac{1}{2}$ et

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} \frac{x(3x-1)}{2x-1} = \pm\infty$$

parce que $x(3x-1) > 0$ pour x proche de $\frac{1}{2}$. Donc f a une asymptote verticale en $x = \frac{1}{2}$.

• Asymptote horizontale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(3x-1)}{2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{2-\frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

donc f n'a pas d'asymptote horizontale.

• Asymptote oblique:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{3}{2} \qquad \text{et}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x(2x-1+x)}{2x-1} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2(2x-1)} = \frac{1}{4}$$

Ainsi f a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.

9) Grâce aux informations trouvées, on sait qu'il suffit de calculer les valeurs de f aux extremums locaux $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ pour connaître son image. Or,

$$f(x_{1,2}) = \frac{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(3\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - 1\right)}{\pm 3^{-1/2}} = \pm\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

Comme $f(x_1) > f(x_2)$ on conclut en tenant compte de la nature des extremums locaux de f en x_1 et x_2 que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left]1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ comme donnée sous 1).
Le graphe de f est tracé à la Fig. **??**.

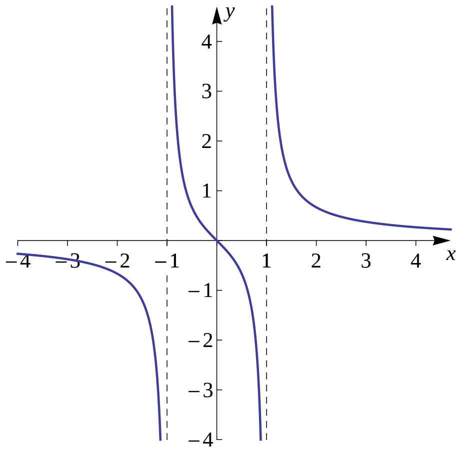

Fig. 4

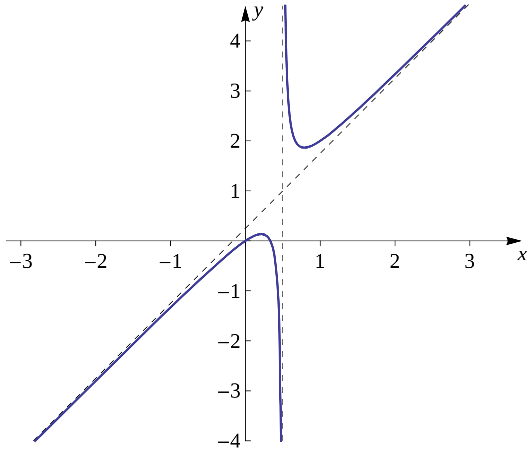

Fig. 5

iii) 1) $D(f) = \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) ni paire, ni impaire, pas périodique

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$.

4) f est continue sur $D(f)$ en tant composition de fonctions élémentaires.

5) f est dérivable sur $D(f)$, donc $D(f') = D(f'') = D(f)$ et

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

6) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$
Donc f a des points stationnaires en $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Comme $f''(x_1) = 0$, il faut calculer f''' pour voir si x_1 pourrait quand-même être un extremum local (cf. remarque à la fin du § 5.10.2 du cours). On a

$$f'''(x) = \left(-\frac{9}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{5}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-9x^3 - 5x^2 + 7x - 1}{x^7}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

donc $f'''(x_1) = 4e \neq 0$. Ainsi x_1 n'est pas un extremum local (en fait c'est un point d'inflexion, voir aussi ci-après). D'autre part, on a $f''(x_2) = \frac{4}{e} > 0$ et donc x_2 est un minimum local.

• $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$
Ainsi $x_1 = -1$ et $x_3 = \frac{1}{3}$ sont candidats pour un point d'inflexion. On vient de voir que $f'''(x_1) = 4e \neq 0$ et puis on a $f'''(x_3) = \frac{4 \cdot 3^5}{e^3} \neq 0$, c'est-à-dire $x_1 = -1$ et en $x_3 = \frac{1}{3}$ sont des points d'inflexion.

7) • Monotonie :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
f'	> 0	> 0	< 0	> 0
f	croissante	croissante	décroissante	croissante

- Convexité/concavité :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,\frac{1}{3}[$	$]\frac{1}{3},\infty[$
f''	<0	>0	<0	>0
f	concave	convexe	concave	convexe

8) - Asymptote verticale: f n'est pas définie en $x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\infty$, donc une asymptote verticale en $x=0$.
- Asymptote horizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, donc aucune
- Asymptote oblique: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et

$$\begin{aligned} b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x}-xe^{\frac{1}{x}}\right)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x}-xe^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$ et la première limite s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\left(x(1-e^{\frac{1}{x}})-2-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-2-\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}_{=0} \\ &\overset{\text{BH}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}-2=-1-2=-3 \end{aligned}$$

Ainsi $b=-3$ et f a une asymptote oblique d'équation $y=ax+b=x-3$.

9) Le graphe de f est tracé à la Fig. ??.

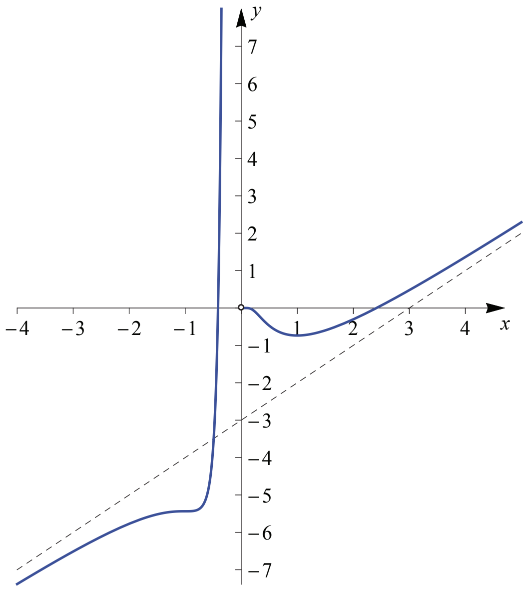

Fig. 6

Exercice 3.

Q1 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in]a,b[$ tels que $x_1 < x_2$. Comme f est dérivable sur $]a,b[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x_1) = f'_d(x_1) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\big(x_1+\lambda(x_2-x_1)\big)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\big(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\big)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} \\ &\leq \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,, \end{aligned}$$

où l'inégalité vient de la convexité de f et du fait que $\lambda(x_2-x_1) > 0$. De même on a (noter que $x_1 - x_2 < 0$)

$$\begin{aligned} f'(x_2) = f'_g(x_2) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\big(x_2+\lambda(x_1-x_2)\big)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} \\ &\geq \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,, \end{aligned}$$

où le signe de l'inégalité est inversé parce que le dénominateur est négatif. Ainsi on a

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2),$$

c.-à-d. f' est croissante.

Q2 : VRAI.
Par le théorème sur les points d'inflexion, on sait que $f''(x_0) = 0$. Donc si on pose $g = f'$, on a $g'(x_0) = 0$ ce qui veut dire que $g = f'$ admet un point stationnaire en x_0.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors f a une tangente horizontale en $c = 0$ car $f'(0) = 0$ mais elle n'admet pas d'extremum en ce point car pour tout $\varepsilon > 0$ on a $f(-\varepsilon) = -\varepsilon^3 < f(0) = 0 < \varepsilon^3 = f(\varepsilon)$.

Exercice 4.

Le développement limité d'ordre 3 autour du point a d'une fonction f est donné par la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + r_3(x)\,,$$

où $r_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(u)}{4!}(x-a)^4$ pour un certain u entre a et x, ce qui veut dire que $u \in]a,x[$ si $x > a$ et que $u \in]x,a[$ si $x < a$, cf. cours.

i) On calcule les dérivées de f:

$$f'(x) = 3\cos(3x), \quad f''(x) = -9\sin(3x), \quad f'''(x) = -27\cos(3x), \quad f^{(4)}(x) = 81\sin(3x)$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 3, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -27.$$

Donc le développement limité de f d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \sin(3x) = 0 + 3x + 0\cdot x^2 - \frac{27}{3!}x^3 + r_3(x) = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + r_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + r_3(x)\,,$$

avec $r_3(x) = \dfrac{81\sin(3u)}{4!}\,x^4 = \dfrac{27\sin(3u)}{8}\,x^4$ pour un certain u entre 0 et x.

ii) On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$
$$f(0) = \mathrm{Log}(2), \qquad f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(0) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, le développement limité de f d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \mathrm{Log}(2+x) = \mathrm{Log}(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + r_3(x)$$

avec $r_3(x) = -\dfrac{6}{4!(2+u)^4}\,x^4 = -\dfrac{1}{4(2+u)^4}\,x^4$ pour un certain u entre 0 et x.

Exercice 5.

i) On a vu au cours que $f(u) = \mathrm{Log}(1+u)$ admet le développement limité suivant autour de $u = 0$:

$$\mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)\,.$$

Ici $1 + u = \cos(x)$, donc $u = \cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\cos(x)) &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)^2}_{=\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)} + x^4\varepsilon(x)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

Notez bien que comme on demande le développement limité d'ordre 4, toutes les puissances supérieures vont dans le reste $x^4\varepsilon(x)$ et ne doivent donc pas être calculées explicitement.

ii) On utilise les développements limités d'ordre 3 autour de $a = 0$ de la fonction exponentielle et du sinus qui sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) = 1 &+ \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^3\\ &+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^4 + x^4\varepsilon(x)\\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

iii) Les développements limités d'ordre 3 autour de $a=0$ de $\sin(x)$ et $(1+y)^{1/2}$ sont

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + y^3\varepsilon(y)\,.$$

En posant $y = x - \frac{x^3}{6}$ on a donc

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)\,. \end{aligned}$$

Exercice 6.

Il faut choisir l'ordre des développements limités tel qu'on puisse éliminer le dénominateur. Comme on s'intéresse seulement à des limites, il suffit d'exprimer le reste avec la notation $(x-a)^n\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

i) Comme

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\,,$$

on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{120} + \varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{120}\,,$$

puisque $\varepsilon(x)\to 0$ quand $x\to 0$.

ii) Comme

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{x^2}{2} - 2x + x^2\varepsilon(x) = x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

et

$$x - \operatorname{Log}(1+x) = x - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x),$$

on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \operatorname{Log}(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)} = 2.$$

iii) Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de $\sin(\sin(x))$ et celui d'ordre 6 de $\sin(x)^2$.

Comme $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$, il suit que

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin(x)^3}{3!} + \frac{\sin(x)^5}{5!} + \underbrace{\sin(x)^5\varepsilon\big(\sin(x)\big)}_{=x^5\varepsilon(x)}, \tag{1}$$

où le remplacement de $\sin(x)^5\varepsilon\big(\sin(x)\big)$ par $x^5\varepsilon(x)$ s'explique comme suit: Puisque $\sin(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon\big(\sin(x)\big)=0$ et donc $\varepsilon\big(\sin(x)\big)$ se comporte comme $\varepsilon(x)$. Ensuite, $\frac{\sin(x)}{x}$ est borné autour de 0 si bien que $\sin(x)^5\varepsilon(x)=\frac{\sin(x)^5}{x^5}x^5\varepsilon(x)$ se comporte comme $x^5\varepsilon(x)$.

Pour les puissances de $\sin(x)$ on a

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2 &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^6\varepsilon(x)\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}+x^6\varepsilon(x),\\
\sin(x)^3 &= \left(x^2-\frac{x^4}{3}+x^5\varepsilon(x)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right) = x^3-\frac{x^5}{2}+x^5\varepsilon(x),\\
\sin(x)^5 &= \left(x^2-\frac{x^4}{3}+x^5\varepsilon(x)\right)\left(x^3-\frac{x^5}{2}+x^5\varepsilon(x)\right) = x^5+x^5\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

où on a calculé le développement limité d'ordre 6 de $\sin(x)^2$ juste à cause du deuxième terme du numérateur de la limite demandée. Pour les autres puissances le développement limité d'ordre 5 suffit.
Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\sin(\sin(x)) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin(x))-\sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{10}-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{45}+x^6\varepsilon(x)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{18}+x^6\varepsilon(x)\right)=\frac{1}{18}\ .
\end{aligned}$$

Remarque : On pourrait aussi directement emboiter les développements limités du sinus sans passer par l'équation (**??**). On aurait alors

$$\begin{aligned}
\sin(\sin(x)) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)^3\\
&\quad+\frac{1}{120}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)^5+x^5\varepsilon(x)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)^3\\
&\quad+\frac{1}{120}\big(x+x\varepsilon(x)\big)^5+x^5\varepsilon(x)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{3x^5}{6}\right)+\frac{1}{120}x^5+x^5\varepsilon(x)\\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+x^5\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Exercice 7.

Remarque préliminaire : L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée (si vous le faites vous verrez pourquoi...) mais de se baser sur des développements limités (DL) autour de 0 qui sont bien connus.

Pour trouver le DL de $\cos(x)$ autour de $a = \frac{\pi}{3}$, on introduit la variable auxiliaire $y := x - \frac{\pi}{3}$. Ainsi on a

$$\cos(x) = \cos\Big(y + \frac{\pi}{3}\Big) = \cos(y)\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) - \sin(y)\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}\cos(y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(y)\,.$$

Comme $x = \frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; y = 0$, on peut utiliser les DL de $\cos(y)$ et $\sin(y)$ autour de $y = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + y^4\varepsilon(y)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{y^3}{6} + y^4\varepsilon(y)\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

On pose $u = \cos(x)$. Il faut alors trouver le DL de $(1+u)^{-1}$ autour de $u = \cos\big(\frac{\pi}{3}\big) = \frac{1}{2}$. En introduisant $v := u - \frac{1}{2}$, on peut récrire

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+v+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}+v} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}\,v}\,,$$

Pour le dernier terme, on utilise le DL $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$ autour de $x = 0$:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{2}{3}\Big(1 - \big(\tfrac{2}{3}\,v\big) + \big(\tfrac{2}{3}\,v\big)^2 - \big(\tfrac{2}{3}\,v\big)^3 + \big(\tfrac{2}{3}\,v\big)^4 + v^4\varepsilon(v)\Big)\,. \qquad (3)$$

De (**??**) on déduit

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\,v = \frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\end{aligned}$$

qu'on met ensuite dans (**??**) pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3}\Bigg[1 &- \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right)\\ &+ \left(\frac{1}{3}\,y^2 + \frac{1}{36}\,y^4 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right)\\ &- \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{6}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + \left(\frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + y^4\varepsilon(y)\Bigg]\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3}\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3}\,y+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)y^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)y^3\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{72}-\frac{1}{36}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)y^4+y^4\varepsilon(y)\right]$$
$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3}\,y+\frac{1}{2}\,y^2+\frac{\sqrt{3}}{6}\,y^3+\frac{13}{72}\,y^4+y^4\varepsilon(y)\right]$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\,y+\frac{1}{3}\,y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3+\frac{13}{108}\,y^4+y^4\varepsilon(y)\,.$$

En remplaçant finalement $y = x-\frac{\pi}{3}$ on obtient

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{13}{108}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 8.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x+\sin(x)$ et $g(x) = x$. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$ mais $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1+\cos(x)$ n'admet pas de limite à l'infini (et donc la dernière hypothèse de Bernoulli-l'Hospital n'est pas satisfaite).

Q2 : FAUX.
Prendre les fonctions de la question précédente.
Remarque: Dans ce cas particulier (puisque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$), l'affirmation est en quelque sorte une réciproque de Bernoulli-l'Hospital qui est, comme vu à plusieurs reprises, en général fausse.

Exercice 9. (QCM : Prolongement par continuité)

- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ■ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

Vu que $\sin(x) = x-\dfrac{1}{3!}x^3+x^3\varepsilon(x)$ et $\cos(x) = 1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+x^4\varepsilon(x)$, donc on a

$$\sin\left(\cos(x)-1\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x),$$
$$1-\cos(\sin(x)) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)^2-\frac{1}{4!}x^4+x^4\varepsilon(x) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x).$$

On obtient

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\cos(x)-1)+1-\cos(\sin(x))}{x^4} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{6},$$

et donc $c = -\frac{1}{6}$.

Exercice 10.

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ■ $-\frac{1}{2}$
- ☐ e^2

On a $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et donc

$$e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) - 1\right) = e^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^2\varepsilon\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x),$$

car $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, et donc $\varepsilon\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \varepsilon(x)$, et on obtient bien que

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) - 1\right) = -\frac{1}{2}.$$