Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 16

Exercice 2

(a) Rappelons l'équation canonique de l'ellipse (centrée à l'origine, grand axe horizontal) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a > b > 0\,.$$

Rappelons aussi l'équation canonique de l'ellipse (centrée à l'origine, grand axe vertical) :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{avec } a > b > 0\,.$$

Résolution : $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 3 \;\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{21} = 1\,.$$

On a alors $a^2 = 21$, $b^2 = 15$, et donc $a = \sqrt{21}$ et $b = \sqrt{15}$.
Aussi, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6}$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Centre : $O\,(0;0)$
Foyers : $F\,(0, \sqrt{6})$ et $F'\,(0, -\sqrt{6})$
Paramètre de l'ellipse : $2p = 2\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{30}{\sqrt{21}}$
Excentricité : $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$

(b) $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0 \;\Leftrightarrow$
$9(x-5)^2 + 25(y-3)^2 + 225 = 0 \;\Leftrightarrow$
$9(x^2 - 10x) + 25(y^2 - 6y) + 225 - 225 - 225 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\,.$$

On a alors $a^2 = 25\,,\ b^2 = 9\,,$ donc $a = 5$ et $b = 3\,.$
Aussi $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

On en déduit alors les éléments suivants :
Centre : $O\,(5,3)$
Foyers : $F\,(1,3)$ et $F'\,(9,3)$
Paramètre de l'ellipse : $2p = 2\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{18}{5}$
Excentricité : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

Exercice 3

(a) Comme on a $F\,(-4-2\sqrt{6};-3)$ et $F'\,(-4+2\sqrt{6};-3)$, alors $y_\Omega = -3$.
De plus $c = 2\sqrt{6}$, $c^2 = a^2 - b^2 = 24$ et $x_\Omega = \frac{1}{2}(x_F + x_{F'}) = -4$.
La seule possibilité pour l'équation de l'ellipse :

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{b^2} = 1\,.$$

Comme $P\,(0, -\frac{12}{5})$ est un point de l'ellipse, donc :
$\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{9}{25b^2} = 1 \;\Leftrightarrow$
$400b^2 + 9(24+b^2) = 25b^2(24+b^2) \;\Leftrightarrow$
$25b^4 + 191b^2 - 216$
et donc $b^2 = 1$ et $a^2 = 25$.
Equation de l'ellipse :

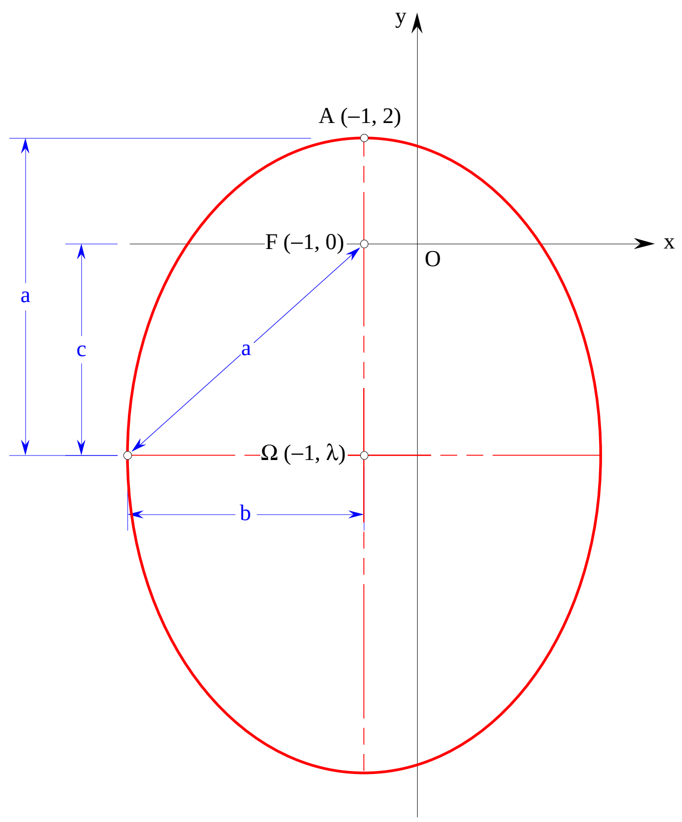
$$\frac{(x+4)^2}{25} + (y+3)^2 = 1\,.$$

(b) Les foyers étant $F\,(5,-2)$ et $F'\,(5,4)$, on en déduit que $c = 3$, car c vaut la moitié de la distance entre les deux foyers.
D'où $\Omega\,(5,1)$.
De plus, on a $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} =$ d'où
$a = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{27-9} = 3\sqrt{2}$.
Equation de l'ellipse :

$$\frac{(x-5)^2}{18} + \frac{(y-1)^2}{27} = 1\,.$$

Exercice 4

Figure d'étude



Grand axe et coordonnées du centre Ω

Le support du grand axe d'une ellipse de $\mathcal{F}$ est la droite verticale (AF) d'équation $x = -1$.
Le centre Ω de l'ellipse est sur la droite (AF), donc Ω a pour coordonnées $\Omega\,(-1\,,\,\lambda)$ avec $\lambda < 0$ car $y_\Omega < y_F$.

Equation cartésienne de l'ellipse en fonction de λ

Connaissant A, F et Ω, on en déduit les valeurs de c, de a puis de b.

$$c = ||\overrightarrow{\Omega F}|| = |\lambda| = -\lambda \quad \text{car} \quad \lambda < 0\,.$$

$$a = ||\overrightarrow{\Omega A}|| = 2 - \lambda\,.$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(2-\lambda)^2 - (-\lambda)^2} = \sqrt{4\,(1-\lambda)}\,.$$

On en déduit l'équation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$.

$$\frac{(x - x_\Omega)^2}{b^2} + \frac{(y - y_\Omega)^2}{a^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4\,(1-\lambda)} + \frac{(y-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2} - 1 = 0\,, \quad \lambda < 0\,.$$

Equation de l'ellipse $\mathcal{E}$ de l'ensemble $\mathcal{F}$ dont l'excentricité vaut $e = \frac{2}{3}$.

L'excentricité e est le rapport de la distance focale et de la longueur du grand axe :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{-\lambda}{2-\lambda}\,; \qquad e = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\lambda}{2-\lambda} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -4\,.$$

D'où l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x+1)^2}{20} + \frac{(y+4)^2}{36} - 1 = 0\,.$$

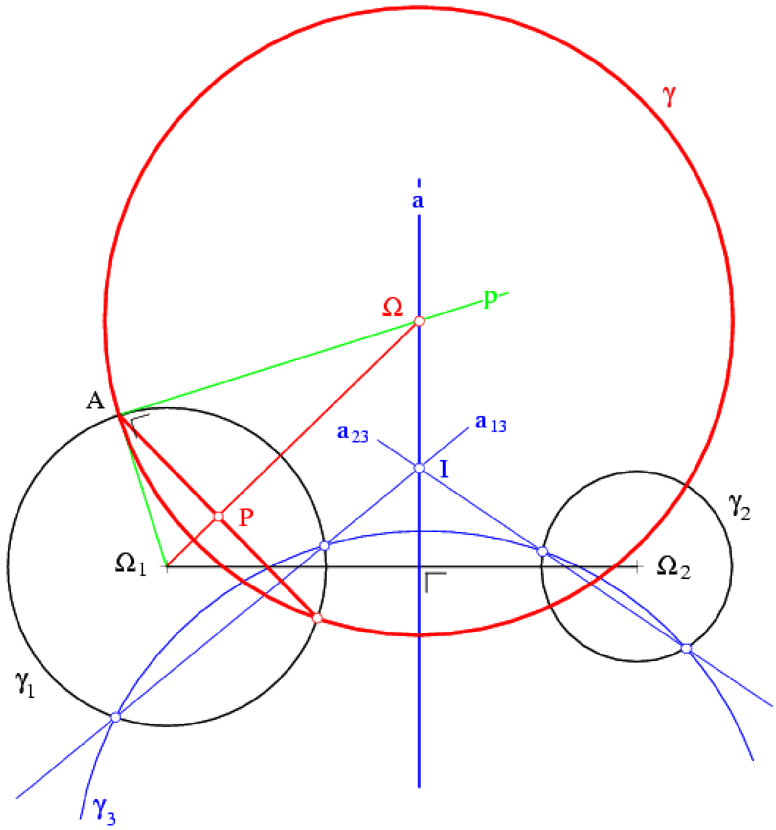
Exercice 5

(a) **Construction du cercle γ et du point P**

Marche à suivre :

- Le centre Ω du cercle γ est sur l'axe radical a des deux cercles γ_1 et γ_2.
  Construction de l'axe radical a :
  - On introduit un cercle auxiliaire γ_3 coupant les deux cercles γ_1 et γ_2.
  - L'axe radical a_{13} de γ_1 et γ_3 et l'axe radical a_{23} de γ_2 et γ_3 se coupent en I.
  - L'axe radical a passe par I et il est perpendiculaire à la droite des centres $(\Omega_1\,,\,\Omega_2)$.

- Les deux cercles γ et γ_1 sont orthogonaux en A, les rayons correspondants sont donc perpendiculaires.
  Le centre Ω est sur la perpendiculaire p à $(\Omega_1 A)$ passant par A.
- La droite des centres $(\Omega\,,\,\Omega_1)$ est un axe de symétrie des deux cercles γ et γ_1, c'est donc la médiatrice de leur corde commune.
  Le point P est l'intersection de la droite des centres $(\Omega\,,\,\Omega_1)$ et de la corde commune des deux cercles γ et γ_1.



(b) **Equation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$ des cercles orthogonaux à γ_1 et γ_2.**

Soit $\gamma\,(\Omega\,,\,r)$ un cercle de cette famille.

Son centre Ω appartient à l'axe radical a des cercles γ_1 et γ_2.

$$a:\ (x^2+y^2-36)-\left[(x-16)^2+y^2-4\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-9=0\,.$$

$$\Omega\in a \quad\Leftrightarrow\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\ \text{ tel que }\ \Omega\,(9\,,\,\lambda)\,.$$

Son rayon r s'exprime à l'aide de la puissance de Ω par rapport à γ_1 ou γ_2.

$$r^2=\mathcal{P}_{\Omega/\gamma_1} \quad\Leftrightarrow\quad r^2=x_\Omega^2+y_\Omega^2-36 \quad\Leftrightarrow\quad r^2=\lambda^2+45\,.$$

L'équation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$ s'écrit donc :

$$\mathcal{F}:\ (x-9)^2+(y-\lambda)^2-(\lambda^2+45)=0\,,\qquad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Equation cartésienne du lieu de P

Considérons la droite b support de la corde commune des cercles γ et γ_1.

Cette droite peut être décrite soit comme l'axe radical des cercles γ et γ_1, soit comme la polaire de Ω_1 par rapport au cercle γ, soit comme la polaire de Ω par rapport au cercle γ_1.

$$b: \ x\,x_\Omega + y\,y_\Omega - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + \lambda\,y - 36 = 0\,.$$

D'autre part, la droite des centres $m = (\Omega_1\Omega)$ est un axe de symétrie des deux cercles γ et γ_1. C'est donc la médiatrice de leur corde commune.

$$m = (\Omega_1\Omega): \ y = \tfrac{y_\Omega}{x_\Omega}\,x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\,x - 9y = 0\,.$$

Le point $P\,(x\,,\,y)$ milieu de la corde commune des cercles γ et γ_1 est le point d'intersection des deux droites b et m, ses coordonnées vérifient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 9x + \lambda\,y - 36 = 0 & (b) \\ \lambda\,x - 9y = 0 & (m) \end{cases}$$

L'élimination du paramètre λ nous donne l'équation cartésienne du lieu de P :

$$9x^2 + 9y^2 - 36x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0\,.$$

Le lieu de P est le cercle Γ de centre $C\,(2\,,\,0)$ et de rayon $\rho = 2$.