



EPFL

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique et optimisation - XXX
11 Août 2020
de 08h15 à 11h15













201

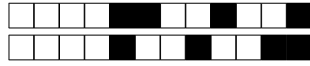
XXX-9

SCIPER: **FAKE-9**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso.
Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
 - +1/ N points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
 - 0 point si vous ne cochez rien,
 - 1/ M point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si vous cochez la réponse correcte,
 - 0 point si vous ne cochez rien,
 - 1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 33 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions à rédiger.
- **Aucune** page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Soit n un entier positif. On cherche $\vec{x}^* \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \Omega$ où $f(\vec{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n$ et $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \text{ et } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$.

Soit \mathcal{L} le lagrangien défini $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n, \forall \mu \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = f(\vec{x}) - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) - \mu(x_1 + \dots + x_n - 1).$$

Question 1 : Soit $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ défini par $c_i = 1, i = 1, \dots, n-1$ et $c_n = -1$. On a pour $i = 1, \dots, n$

- ☐ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i - \lambda_i - \mu$
- ☐ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = -c_i + \lambda_i + \mu$
- ☐ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i + \lambda_i + \mu$
- ☐ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i + \lambda_i - \mu$

Les conditions KKT s'écrivent: trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n, \vec{\lambda}^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{F}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \mu^*) = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{\lambda}^* \geq \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{x}^* \geq \vec{0} \quad (3)$$

où \vec{F} est défini pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$ par

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = \begin{pmatrix} ??? \\ x_1 + \dots + x_n - 1 \\ \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Question 2 : A la place de ??? il faut écrire

- ☐ $\vec{c} + \vec{\lambda} + \mu \vec{1}$
- ☐ $-\vec{c} + \vec{\lambda} + \mu \vec{1}$
- ☐ $\vec{c} - \vec{\lambda} - \mu \vec{1}$
- ☐ $\vec{c} + \vec{\lambda} - \mu \vec{1}$

On implémente la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (1) (2) (3). A chaque étape on effectue un pas de la méthode de Newton pour tenir compte de (1). Le fichier `exam3.m` implémente la méthode.

Fichier `exam3.m`:

```
function x_new=exam3(n,eps)
c=ones(n,1);
c(n)=-1;
x_old=max(eps,zeros(n,1));
lambda_old=max(eps,zeros(n,1));
mu_old=0;
for iter=1:10
```



```
mat1 = horzcat(sparse(n,n),-speye(n,n),-??);
mat2 = horzcat(ones(1,n),sparse(1,n),sparse(1,1));
mat3 = horzcat(sparse(1:n,1:n,lambda_old,n,n),???,sparse(n,1));
mat = vertcat(mat1,mat2,mat3);
rhs1 = ???;
rhs2 = ones(1,n)*x_old-1;
rhs3 = sparse(n,1);
for i=1:n
    rhs3(i)=???;
end
rhs = vertcat(rhs1,rhs2,rhs3);
sol=mat\rhs;
x_new=max(eps,x_old-sol(1:n));
lambda_new=max(eps,lambda_old-sol(n+1:2*n));
mu_new=mu_old-sol(2*n+1:2*n+1);
discrep=norm(x_new-x_old)/norm(x_new);
printf ("iter: %d Discrepancy: %f \n",iter,discrep);
x_old=x_new;
lambda_old=lambda_new;
mu_old=mu_new;
if (discrep<0.001)
    break
end
end
end
```



Question 3 : A la ligne `mat1=...` il faut remplacer ??? par

- ☐ `ones(1,n)`
- ☐ `zeros(1,n)`
- ☐ `zeros(n,1)`
- ☐ `ones(n,1)`

Question 4 : A la ligne `mat3=...` il faut remplacer ??? par

- ☐ `speye(n,n)`
- ☐ `sparse(1:n,1:n,x_old,n,n)`
- ☐ `ones(n,n)`
- ☐ `zeros(n,n)`

Question 5 : A la ligne `rhs1=???` il faut remplacer ??? par

- ☐ `c-ones(n,1)*mu_old-lambda_old`
- ☐ `c+ones(n,1)*mu_old-lambda_old`
- ☐ `-c+ones(n,1)*mu_old+lambda_old`
- ☐ `c+ones(n,1)*mu_old+lambda_old`

Question 6 : A la ligne `rhs3(i)=???` il faut remplacer ??? par

- ☐ `-lambda_old(i)`
- ☐ `x_old(i)*lambda_old(i)`
- ☐ `-x_old(i)`
- ☐ `-x_old(i)*lambda_old(i)`



+201/5/16+

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



Soit m, n deux entiers positifs, $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on considère la décomposition en valeurs singulières de A (SVD), $A = U\Sigma V^T$ où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ et où $UU^T = U^T U = I$ et $VV^T = V^T V = I$. On note \vec{u}_k la k^e colonne de U , \vec{v}_k la k^e colonne de V .

Question 7 : On a:

- ☐ $A^T A V = V \Sigma^T \Sigma$
- ☐ $AA^T \vec{v}_i = \sigma_i^2 \vec{v}_i \quad i = 1, \dots, n$
- ☐ $A^T A \vec{v}_i = \sigma_i^2 \vec{v}_i \quad i = 1, \dots, n$
- ☐ $AA^T V = V \Sigma^T \Sigma$

Question 8 : Le coefficient $A_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$ est donné par:

- ☐ $A_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_k U_{ik} V_{jk}$
- ☐ $A_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_k (\vec{u}_k \vec{v}_k^T)_{ij}$
- ☐ $A_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_k U_{ki} V_{kj}$
- ☐ $A_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_k (\vec{v}_k \vec{u}_k^T)_{ij}$

où, étant donné deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , on note $\vec{a}\vec{b}^T$ la matrice de coefficient $i, j : (\vec{a}\vec{b}^T)_{ij} = a_i b_j$.

Question 9 : Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sachant que la SVD de A donne $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 = 0$, on a $A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T$.

- ☐ VRAI ☐ FAUX



+201/7/14+

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



On considère le problème suivant : trouver $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ où $\vec{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\vec{F}(\vec{x}) = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_1)^3 - 1 \\ (x_2)^3 - 1 \\ \vdots \\ (x_{N-1})^3 - 1 \\ (x_N)^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Question 10 : La matrice jacobienne est définie $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N$ par :

$$DF(\vec{x}) = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & & & & (0) \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & d_N \end{pmatrix}$$

avec

- ☐ $d_i = 3x_i^2$
☐ $d_i = (x_i)^3 - 1$

Question 11 : Si \vec{x} et $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ et $\vec{F}(\vec{y}) = \vec{0}$ on a:

- ☐ $(N+1)^2(\vec{x} - \vec{y})^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x} - \vec{y}) + \sum_{i=1}^N ((x_i)^3 - (y_i)^3)(x_i - y_i) = 0$
- ☐ $(N+1)^2(\vec{x} - \vec{y})^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x} - \vec{y}) \leq 0$
- ☐ $\vec{x} = \vec{y}$

Le fichier `exam1.m` implémente la méthode de Newton pour approcher \vec{x} .

Fichier `exam1.m`:

```
function[x] = exam1(N)
%
% Methode de Newton : Etant donne x^n, trouver x^{n+1}
% tel que DF(x^n)(x^n - x^{n+1}) = F(x^n)
% En pratique on construit A=DF(x^n), b=F(x^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose x^{n+1}=x^n-y
%
% parametres
%
% N      : nombre d inconnues du systeme non lineaire
% a      : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
```




```
% c      : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
% b      : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
% x      : N-vecteur, contient x^n puis x^{n+1}
%
for i=1:N
    x(i) = 1;
end
stop=1;
iter=0;
coeff=(N+1)*(N+1);
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
        a(i) = 2*coeff+???;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = coeff*(2*x(1)-x(2))+???;
    for i=2:N-1
        b(i) = coeff*(2*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???;
    end
    b(N) = coeff*(2*x(N)-x(N-1))+???;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = ???;
    for i=1:N-1
        c(i) = c(i)/???;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1)-???);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Ly = b, puis L^T x = y

    b(1)=???;
    for i=1:N-1
        b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
    end

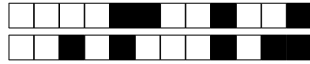
    % resolution du systeme lineaire L^T x = y

    b(N)=???;
    for i=N-1:-1:1
        b(i) = (b(i)-???)/a(i);
    end

    %x^{n+1} = x^n - y

    for i=1:N
        x(i) = x(i) - b(i);
    end

    % calcul de ||b||/||x||
```



```
stop=norm(b)/norm(x);  
fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)  
end  
end
```

Question 12 : A la ligne $a(i)=2*\text{coeff}(i)+???$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $3*x(i)*x(i)-1$
- ☐ $3*x(i)*x(i)$
- ☐ $x(i)*x(i)*x(i)$
- ☐ $x(i)*x(i)*x(i)-1$

Question 13 : A la ligne $b(i)=\text{coeff}(2*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $x(i)*x(i)*x(i)-1$
- ☐ $x(i)*x(i)*x(i)$
- ☐ $3*x(i)*x(i)-1$
- ☐ $3*x(i)*x(i)$

Question 14 : A la ligne $c(i)=c(i)/???$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $a(i+1)$
- ☐ $a(i)$
- ☐ $b(i+1)$
- ☐ $b(i)$

Question 15 : A la ligne $a(i+1)=\text{sqrt}(a(i+1)-???)$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $c(i)*c(i)$
- ☐ $a(i)*c(i)$
- ☐ $a(i)*a(i)$

Question 16 : A la ligne $b(i+1)=(b(i+1)-???) / a(i+1)$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $a(i)*b(i)$
- ☐ $a(i+1)*b(i)$
- ☐ $c(i)*b(i)$

Question 17 : A la ligne $b(i)=(b(i)-???) / a(i)$, il faut remplacer ??? par

- ☐ $c(i)*b(i+1)$
- ☐ $c(i)*b(i)$
- ☐ $a(i)*b(i+1)$
- ☐ $a(i)*b(i)$



Question 18 : Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants

```
>> exam1(9);
iter=1, stop = 3.580783e+00
iter=2, stop = 1.274647e+00
iter=3, stop = 1.123099e-02
iter=4, stop = 4.868424e-07
iter=5, stop = 9.555565e-16
>> exam1(19);
iter=1, stop = 3.720121e+00
iter=2, stop = 1.277933e+00
iter=3, stop = 1.123106e-02
iter=4, stop = 4.834302e-07
iter=5, stop = 1.710970e-15
>> exam1(39);
iter=1, stop = 3.791584e+00
iter=2, stop = 1.278749e+00
iter=3, stop = 1.123128e-02
iter=4, stop = 4.825987e-07
iter=5, stop = 6.741537e-16
```

On en déduit

- ☐ La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ
- ☐ La méthode de Newton converge quadratiquement quel que soit le point de départ
- ☐ La méthode de Newton diverge pour ce point de départ



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



On considère le problème suivant: trouver $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

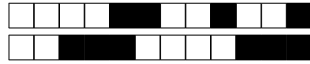
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \ u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Question 19 : La solution du problème est donnée par

- ☐ $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{\pi t}$
☐ $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi t}$
☐ $u(x, t) = \sin(\pi x)(1 + \sin(\pi t))$
☐ $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$

Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue en utilisant des formules de différences finies centrées pour approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. Le fichier `exam2.m` implémente ce schéma.
Fichier `exam2.m`:

```
function [u2]=exam2(N,M,tau)
%
% Schema explicite centre pour l'equation des ondes
%
% parametres
%
% N      : nombre de points interieurs dans l'intervalle [0,1]
% h      : pas d'espace
% M      : nombre de pas de temps
% tau    : pas de temps
% t      : temps courant
% u0     : N-vecteur, u0(i) est une approximation de u(x_i,t_n-1)
% u1     : N-vecteur, u1(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
% u2     : N-vecteur, u2(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
%
h=1./(N+1);
lambda=???;
%
% condition initiale u0 et u1
%
for i=1:N
    u0(i)=sin(pi*i*h);
end
u1(1)=???;
for i=2:N-1
    u1(i)=???;
end
u1(N)=???;
%
% schema
%
```



```
t=tau;
for n=2:M
    t=t+tau;
    u2(1)=???;
    for i=2:N-1
        u2(i)=???;
    end
    u2(N)=???;
%
% reactualiser la solution
%
    for i=1:N
        u0(i)=u1(i);
        u1(i)=u2(i);
    end
end
%
% imprimer l'erreur maximum au temps final
%
err = 0;
for i=1:N
    erri = abs(u2(i)-sin(pi*i*h)*???);
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Question 20 : A la ligne `lambda=???` il faut écrire

- ☐ τ/h
- ☐ τ^2/h^2
- ☐ τ/h^2
- ☐ τ^2/h

Question 21 : A la ligne `u1(i)=???` il faut écrire

- ☐ $(1-\lambda)u_0(i)+\lambda(u_0(i-1)+u_0(i+1))$
- ☐ $2(1-\lambda)u_0(i)+\lambda/2(u_0(i-1)+u_0(i+1))$
- ☐ $2(1-\lambda)u_0(i)+\lambda(u_0(i-1)+u_0(i+1))$
- ☐ $(1-\lambda)u_0(i)+\lambda/2(u_0(i-1)+u_0(i+1))$

Question 22 : A la ligne `u2(i)=???` il faut écrire

- ☐ $(1-\lambda)u_1(i)+\lambda/2(u_1(i-1)+u_1(i+1))-u_0(i)$
- ☐ $(1-\lambda)u_1(i)+\lambda(u_1(i-1)+u_0(i+1))-u_0(i)$
- ☐ $2(1-\lambda)u_1(i)+\lambda/2(u_1(i-1)+u_1(i+1))-u_0(i)$
- ☐ $2(1-\lambda)u_1(i)+\lambda(u_1(i-1)+u_1(i+1))-u_0(i)$

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:



```
>> u=exam2(9,200,0.1);
    erreur maximum au temps final  1.776357e-15
>> u=exam2(9,200,0.11);
    erreur maximum au temps final  3.639871e+54
>> u=exam2(19,200,0.05);
    erreur maximum au temps final  2.775558e-15
>> u=exam2(19,200,0.051);
    erreur maximum au temps final  8.657832e+15
```

Question 23 : On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ☐ Le schéma est stable $\forall h, \tau > 0$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h$.

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:

```
>> u=exam2(9,10,0.09);
    erreur maximum au temps final  6.903714e-04
>> u=exam2(19,20,0.045);
    erreur maximum au temps final  1.711472e-04
>> u=exam2(39,40,0.0225);
    erreur maximum au temps final  4.269724e-05
>> u=exam2(79,80,0.01125);
    erreur maximum au temps final  1.066873e-05
```

Question 24 : On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.
- ☐ Le schéma est stable $\forall h, \tau > 0$.
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h$.



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



Soit $\alpha, \beta > 0$, n un entier positif, $A \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ définis par:

$$A = (2n+2)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche $(\vec{x}^*, \vec{q}^*) \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*, \vec{q}^*) \leq f(\vec{x}, \vec{q}) \forall (\vec{x}, \vec{q}) \in \Omega$, où $f(\vec{x}, \vec{q}) = \frac{\alpha}{2} \|\vec{q}\|^2 + \frac{1}{2} (x_{n+1} - \beta)^2$ et $\Omega = \{(\vec{x}, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}; A\vec{x} - \vec{b} = \vec{q}\}$.

On introduit le lagrangien défini par $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{q}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}, \vec{q}) - \vec{\mu}^T (A\vec{x} - \vec{b} - \vec{q}) \forall \vec{x}, \vec{q}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^{2n+1}$, les conditions KKT s'écrivent (après avoir éliminé $\vec{\mu}^*$):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{d} \end{pmatrix}.$$

Question 25 : La matrice B est donnée par

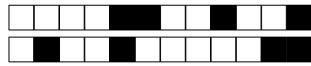
- ☐ $B_{n+1, n+1} = -1, B_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1) \ i, j = 1, \dots, 2n+1$
- ☐ $B = -I$
- ☐ $B_{n+1, n+1} = 1, B_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1) \ i, j = 1, \dots, 2n+1$
- ☐ $B = I$

Question 26 : La matrice C est donnée par

- ☐ $C_{n+1, n+1} = -1, C_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1) \ i, j = 1, \dots, 2n+1$
- ☐ $C = I$
- ☐ $C = -I$
- ☐ $C_{n+1, n+1} = 1, C_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1) \ i, j = 1, \dots, 2n+1$

Question 27 : Le vecteur \vec{d} est donné par

- ☐ $\vec{d} = C\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = \beta C\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = \vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -\beta C\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -C\vec{b}$



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On cherche $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Question 28 : La formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ telle que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V,$$

où V est défini par :

- ☐ $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(0) = g(1) = 0\}$
- ☐ $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(0) = 0\}$
- ☐ $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(1) = 0\}$
- ☐ $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux}\}$

Question 29 : Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. On considère les fonctions “chapeaux” $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, continues, polynômiales de degré 1 sur chaque intervalle telles que :

$$\varphi_i(x_i) = 1, \quad \varphi_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i, \quad j = 0, 1, \dots, N+1.$$

L'approximation des éléments finis correspondante consiste à chercher $u_h \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h,$$

où V_h est défini par :

- ☐ $V_h = \text{span}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N+1})$
- ☐ $V_h = \text{span}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N+1})$
- ☐ $V_h = \text{span}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$
- ☐ $V_h = \text{span}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$

Question 30 : D'autre part, u_h est défini par :

- ☐ $u_h(x) = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x)$
- ☐ $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j \varphi_j(x)$
- ☐ $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$
- ☐ $u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} u_j \varphi_j(x)$



+201/20/1+

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



Soit $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on approche $\int_{-1}^1 g(t)dt$ à l'aide de la formule de quadrature:

$$J(g) = g(-\alpha) + g(\alpha), \text{ où } 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Question 31 : On a :

- ☐ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_3$.
- ☐ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2$.
- ☐ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_5$.
- ☐ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_4$.
- ☐ Pour tout $0 < \alpha < 1$ on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_1$.

Question 32 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. On a

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^1 f(x_i + h \frac{t+1}{2})dt. \quad (2)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 33 : On approche les intégrales de -1 à 1 dans (2) en utilisant la formule de quadrature (1) avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; On obtient ainsi l'approximation $L_h(f)$. On a

☐ $L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f \left(x_i + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}h \right) + f \left(x_i + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}h \right) \right).$

☐ $\exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^4[0, 1], \forall 0 < h \leq 1$ on a

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^4.$$

☐ $\forall f \in \mathcal{C}^4[0, 1], \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1$:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^4.$$



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0.0 ☐ 0.5 ☐ 1.0 ☐ 1.5 ☐ 2.0 ☐ 2.5 ☐ 3.0 ☐ 3.5 ☐ 4.0 ☐ 4.5 ☐ 5.0

Réservé au correcteur

On considère le problème suivant : trouver $u : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = 0, & 0 < t \leq 10, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

- (a) Donner une formule pour $u(t)$, $0 < t \leq 10$.
- (b) Soit N un entier positif, $h = 10/N$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$. On note u^n l'approximation de $u(t_n)$ obtenue en utilisant une formule de différences finies progressive (schéma d'Euler progressif, explicite). Ecrire le schéma correspondant.

- (c) Montrer que $\forall x > 0$:

$$|e^{-x} - (1 - x)| \leq \frac{x^2}{2}$$

- (d) En déduire que

$$|u(t_N) - u^N| \leq \frac{h^2}{2} (1 + |1 - h| + \dots + |1 - h|^{N-1})$$

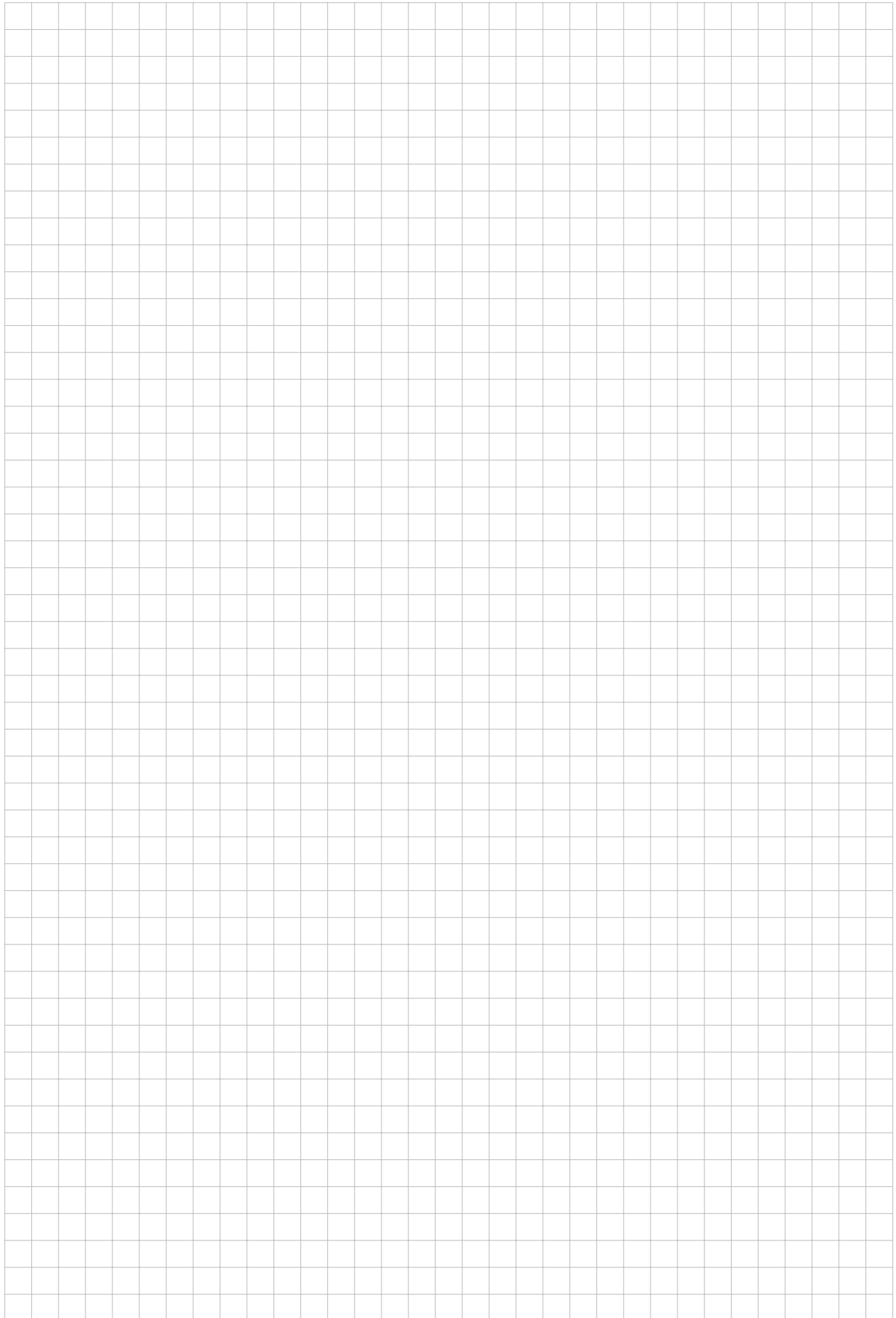
- (e) Montrer que $\forall 0 < h \leq 2$, on a

$$|u(t_N) - u^N| \leq 5h.$$



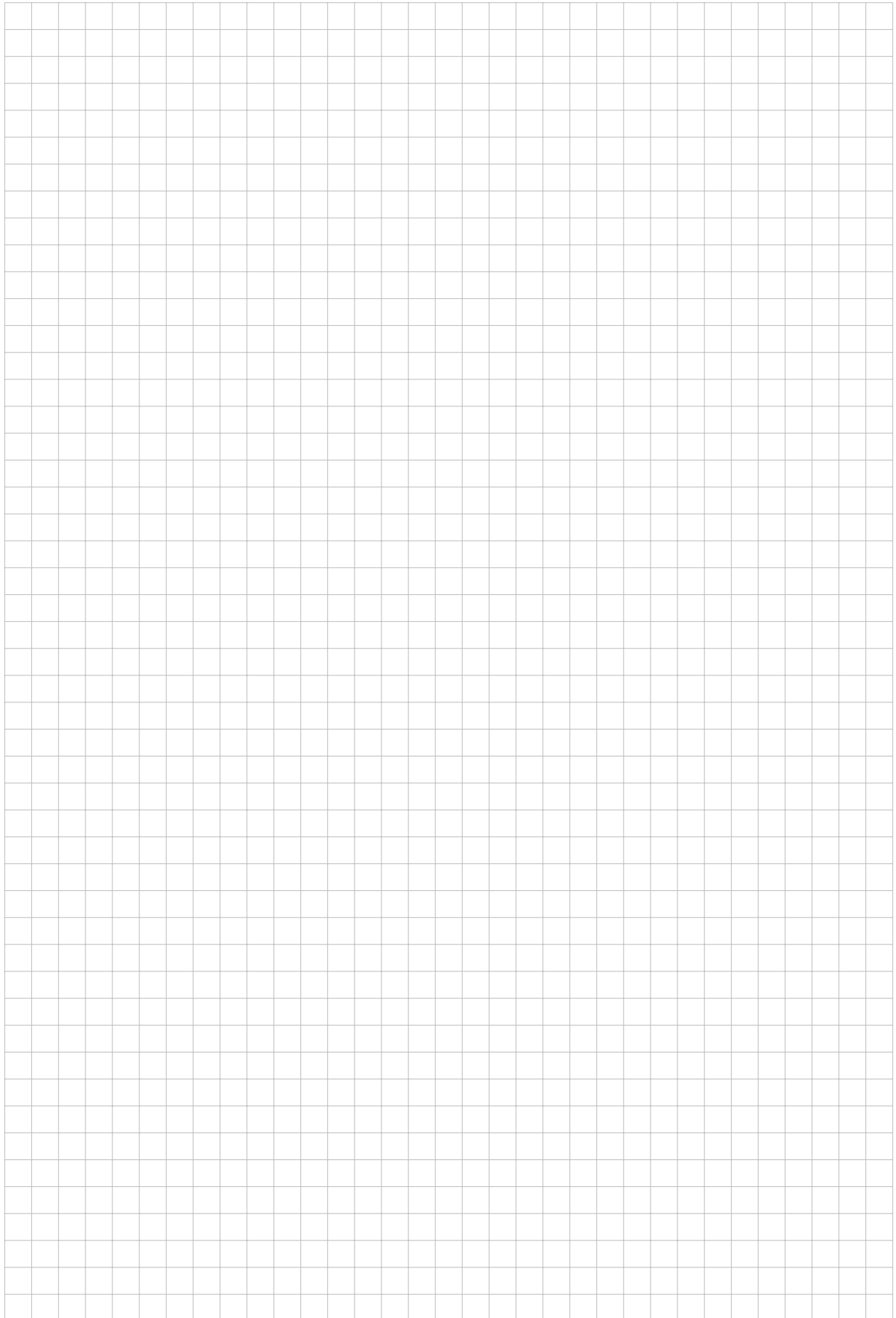


+201/24/57+





+201/25/56+





Question ouverte 2: Cette question est notée sur 9 points.

	0.0		0.5		1.0		1.5		2.0		2.5		3.0		3.5		4.0		4.5
	5.0		5.5		6.0		6.5		7.0		7.5		8.0		8.5		9.0		

Réservé au correcteur

On considère le problème suivant : trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = e^x, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ obtenue avec l'aide d'une méthode de différences finies centrées.

- (a) Ecrire le schéma permettant de calculer u_i , $i = 1, \dots, N$.
- (b) Ecrire le système linéaire correspondant $A\vec{u} = \vec{f}$ où $\vec{u} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de composantes u_i , A et f sont à définir.
- (c) On suppose dans la suite que $u \in C^4[0, 1]$, montrer que :

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} = e^{x_i} + r_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

où r_i est à définir. Montrer $\exists C > 0$, $\forall 0 < h \leq 1$, $|r_i| \leq Ch^2$.

- (d) Soit $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes $u(x_i)$. En déduire que

$$A(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{r}.$$

- (e) On admet le résultat suivant : $\forall \vec{g} \in \mathbb{R}^N$, si \vec{v} est tel que $A\vec{v} = \vec{g}$, alors :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |v_i| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq i \leq N} |g_i|.$$

En déduire que :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} Ch^2.$$

- (f) Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ par

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{f}^T \vec{v}.$$

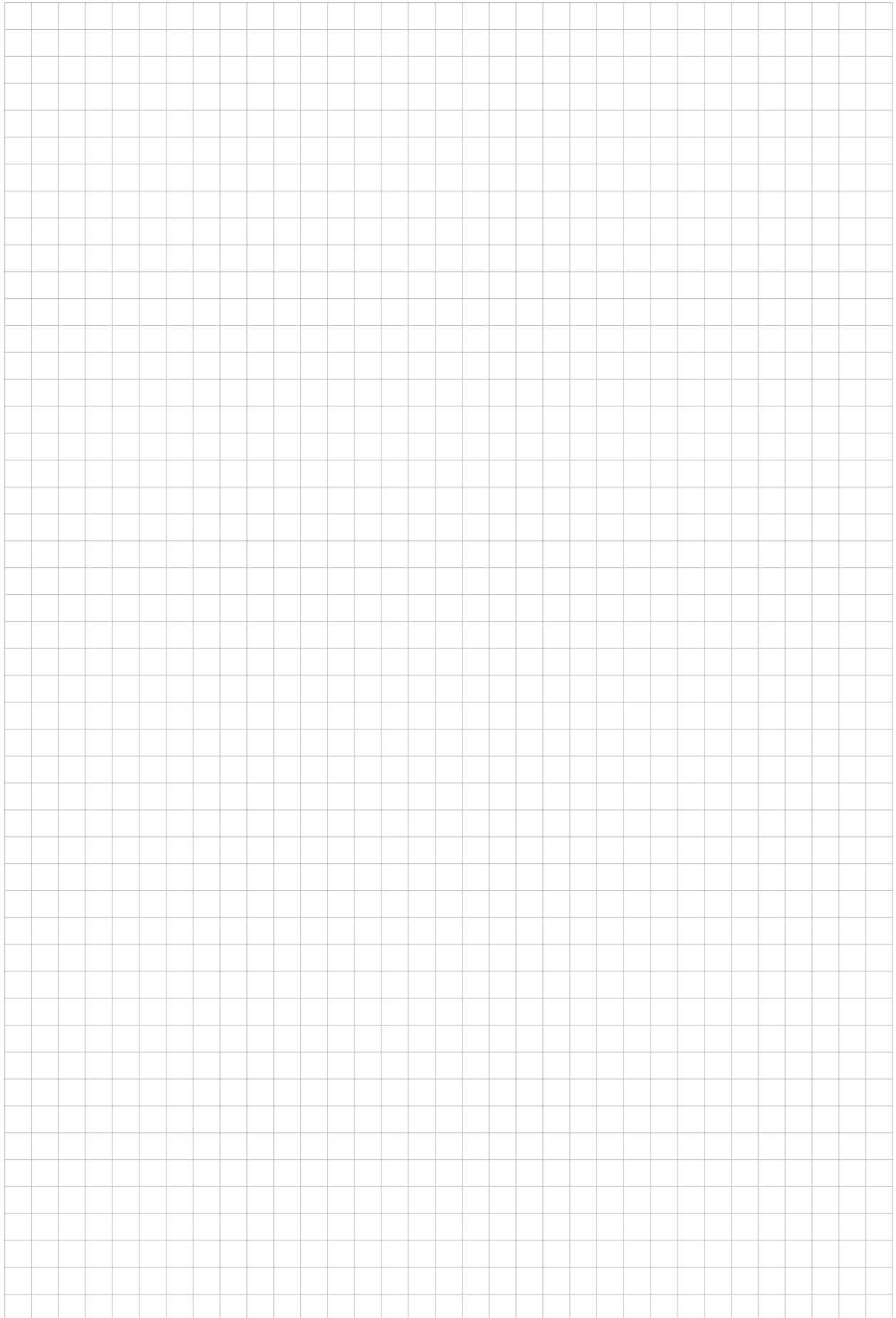
Montrer que

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \mathcal{L}(\vec{u}) + (\vec{v} - \vec{u})^T (A\vec{u} - \vec{f}) + \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{u})^T A (\vec{v} - \vec{u}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N.$$

On admet que A est symétrique définie positive. En déduire que $\mathcal{L}(\vec{v}) \geq \mathcal{L}(\vec{u}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

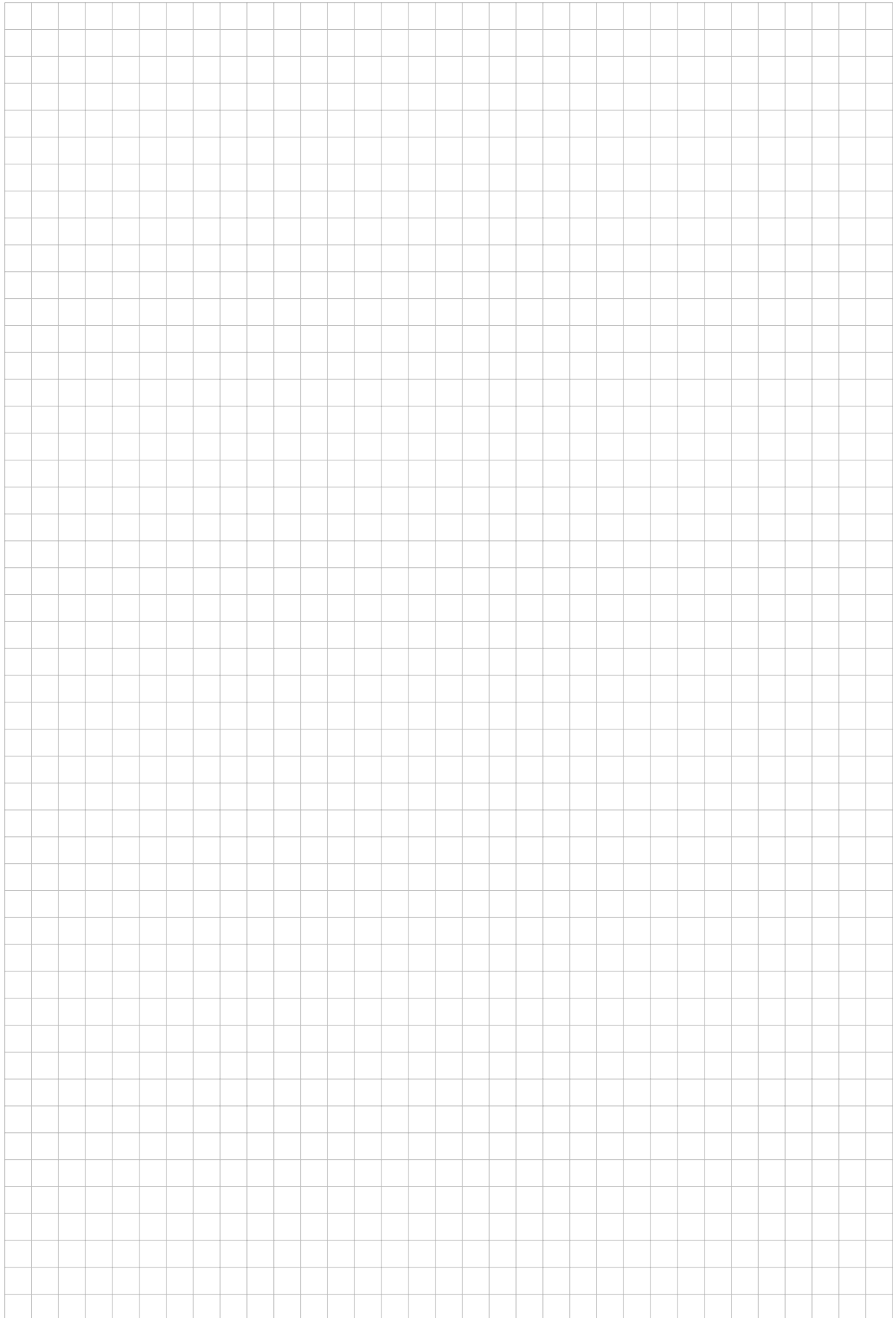


+201/27/54+



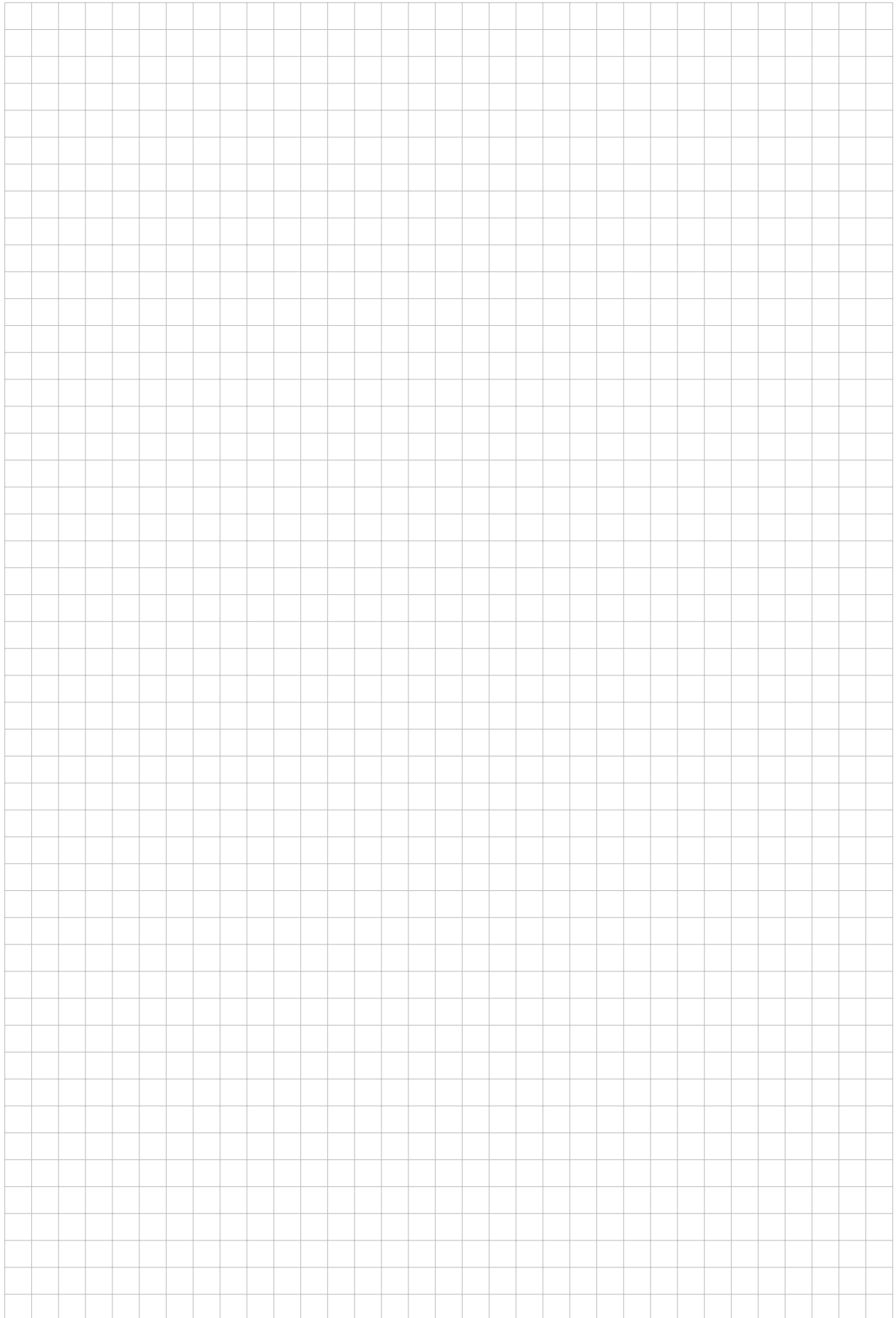


+201/28/53+



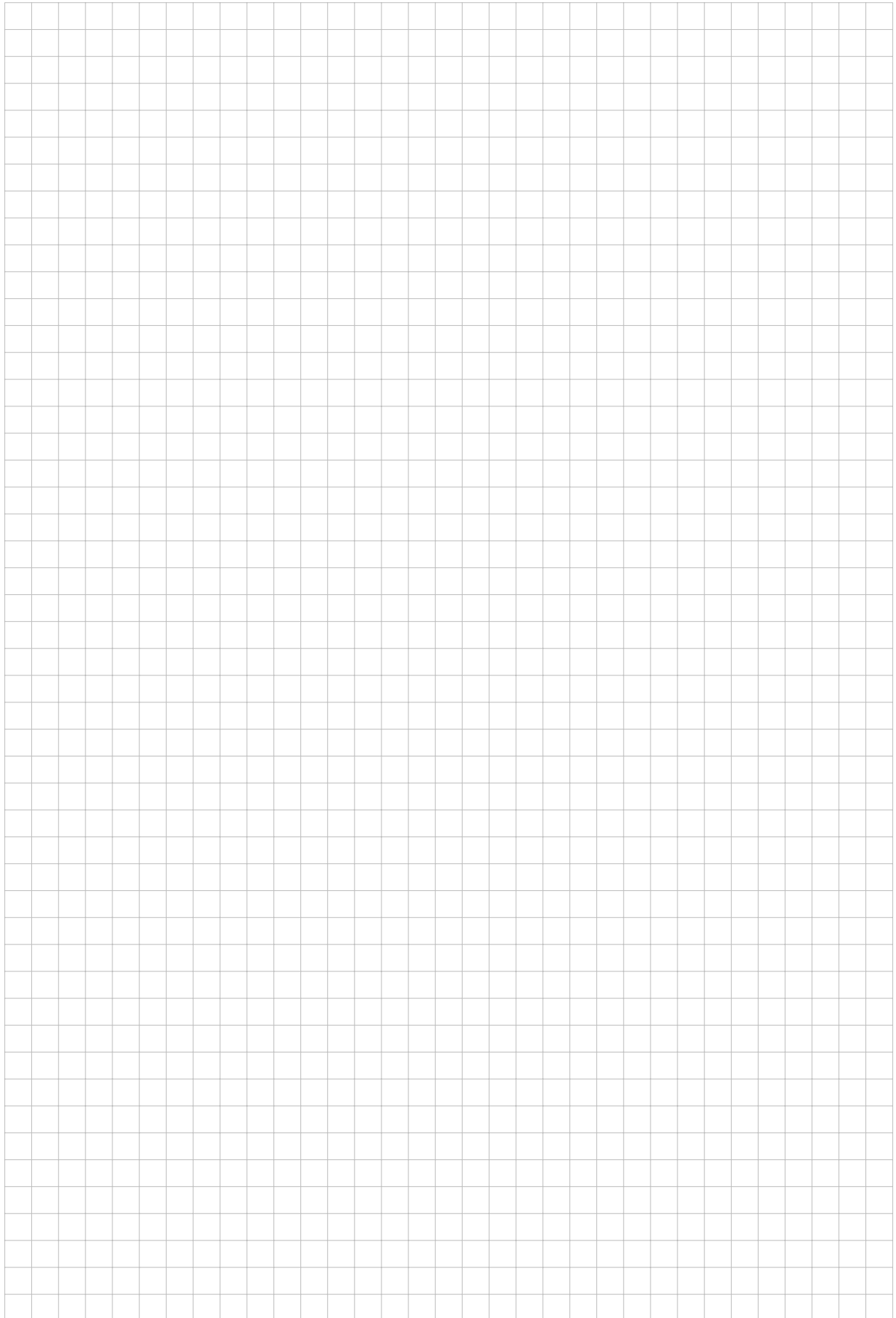


+201/29/52+





+201/30/51+





+201/31/50+

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)