Exercice 1* : Palan

Si l'on suppose que les poulies peuvent tourner librement, sans frottement, alors la tension de la corde est la même partout sur la corde. S'il n'en était pas ainsi le couple créé par les deux forces différentes de part et d'autre de la poulie la ferait tourner jusqu'à ce que les couples et donc les forces s'équilibrent. Nous déduisons $F = T_1 = T_2$. En regardant la figure on voit que $T_4 = Mg$ et $T_4 = T_1 + T_2$ (à l'équilibre la somme des forces appliquées sur la poulie est nulle). Pour la poulie du haut nous avons $T_3 = T_1 + T_2 + F$. En combinant ces expressions nous obtenons :

$$F = \frac{1}{2}Mg \ , \ T_1 = T_2 = \frac{1}{2}Mg \ , \ T_3 = \frac{3}{2}Mg \ , \ T_4 = Mg$$

Exercice 2* : Ressort en rotation

a) En coordonnées polaires la vitesse et l'accélération s'expriment par :

$$\vec{v} = \rho\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Dans le cas present, on sait que la masse tourne autour de l'axe à vitesse constante donc $\omega = \dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi} = 0$:

$$\vec{v} = \rho\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

La force de rappel du ressort s'exprime par :

$$\vec{F} = -k(\rho - l_0)\vec{e}_\rho$$

On demande le rayon à l'équilibre, donc $\rho = R \ et \ \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Ainsi, l'équation du mouvement selon $\vec{e}_\rho$ s'écrit :

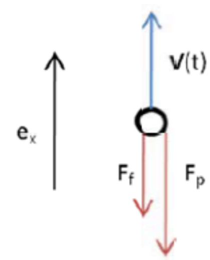
$$-mR\omega^2 = -k(R - l_0)$$

On obtient ainsi :

$$R = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

b) On remarque que pour $k - m\omega^2 > 0$ ($\omega^2 < \frac{k}{m}$) il existe une valeur de R bien définie. En revanche, pour $k - m\omega^2 \leq 0$ ($\omega^2 \geq \frac{k}{m}$) il n'existe plus de solution physique au problème. En fait pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, le rayon devient infini, ce qui ce traduira physiquement par une rupture du ressort.

Exercice 3 : hauteur maximum d'une balle**



On applique Newton :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow -mg\mathbf{e_x} - bv(t)\mathbf{e_x} = ma\mathbf{e_x}$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) + \frac{b}{m}v(t) = -g$$

On obtient une équation différentielle qu'il s'agit maintenant de résoudre :

La solution de l'équation homogène (sans le second membre) s'écrit :

$$v(t) = V\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

Il existe une solution particulière évidente de l'équation avec second membre :

$$v = Cste = -\frac{mg}{b}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$v(t) = V\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) - \frac{mg}{b}$$

Où V est une constante à déterminer sachant que $v(t=0)=v_0$:

$$v_0 = V - \frac{mg}{b} \Rightarrow V = v_0 + \frac{mg}{b}$$

Ce qui donne : $v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) - \frac{mg}{b}$

A l'apogée la vitesse de la balle s'annule. On cherche donc t_{ap} tel que $v(t_{ap}) = 0$:

$$v(t_{ap}) = 0 \Rightarrow \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{bt_{ap}}{m}\right) - \frac{mg}{b} = 0$$

$$\Rightarrow t_{ap} = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{bv_0}{mg} + 1\right)$$

Maintenant il est temps de calculer l'équation horaire $x(t)$ de la balle :

$$x(t) - \underbrace{x(t=0)}_{=0} = \int_0^t v(\tau)d\tau = -\frac{m}{b}\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) - \frac{mg}{b}t + \frac{m}{b}\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)$$

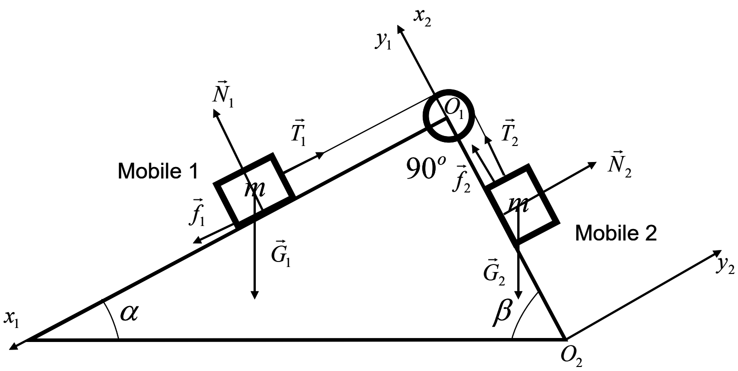
$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{mv_0}{b} + \frac{m^2 g}{b^2}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right) - \frac{mg}{b}t$$

Les coordonnées de l'apogée sont obtenues en injectant t_{ap} dans $x(t)$:

$$x_{\max} = x(t_{ap}) = \frac{mv_0}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(\frac{bv_0}{mg} + 1\right)$$

Exercice 4 : Masse et poulie**

Le fait que les deux mobiles soient reliés par un fil inextensible impose que leur mouvement est relié. Si Le mobile 1 a un déplacement donné selon (O_1x_1), le mobile 2 a le même déplacement selon (O_2x_2). De plus cela impose aussi, en utilisant la troisième loi de Newton que $\|\overrightarrow{T_1}\| = \|\overrightarrow{T_2}\|$.



1. Pour indiquer la direction des forces de frottement $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$, on peut faire l'expérience de pensée suivante : vu que $\alpha < \beta$, la projection de la force de pesanteur du mobile 1 sur son plan incliné sera inférieure à la projection de la force de pesanteur du mobile 2 sur son plan incliné. Le déséquilibre qui en résulte sera orienté selon les x_1 et x_2 négatifs. On peut donc placer $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ comme sur la figure ci-dessus.

En revanche une chose est certaine : Si $\overrightarrow{f_1}$ est orientée dans une certaine direction par rapport à (O_1x_1), alors $\overrightarrow{f_2}$ est orientée dans la même direction par rapport à (O_2x_2). Si cette déduction ne semble pas évidente, l'écriture des équations avec les deux orientations possibles pour $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ permettra de retrouver ce résultat. Dans ce corrigé, nous nous intéresserons aux 2 directions possibles pour $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$.

Ecrivons les lois de Newton sur les deux mobiles pris séparément, puis on les projette dans leurs repères respectifs :

- <u>Mobile 1 :</u>

$m\vec{a}_1 = \sum \vec{F} = \vec{G}_1 + \vec{f}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_1$, On projette :

Ox₁ : $m\,a_{x_1} = mg\sin\alpha \pm f_1 - T_1$ (1) « + » correspond à $\vec{f}_1$ comme sur la figure

Oy₁ : $0 = -mg\cos\alpha + N_1$ (2) → $N_1 = mg\cos\alpha$

- <u>Mobile 2 :</u>

$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{G}_2 + \vec{f}_2 + \vec{T}_2 + \vec{N}_2$ On projette :

Ox₂ : $ma_{x_2} = -mg\sin\beta \pm f_2 + T_2$ (3) « + » correspond à $\vec{f}_2$ comme sur la figure

Oy₂ : $0 = -mg\cos\beta + N_2$ (4) → $N_2 = mg\cos\beta$

Ici les conditions sur l'inextensibilité du fil donnent :

- $\|\overrightarrow{T_1}\| = \|\overrightarrow{T_2}\|$ et on écrit $T_1 = T_2 = T$
- $\|\overrightarrow{a_1}\| = \|\overrightarrow{a_2}\|$ et on écrit $a_{x1} = a_{x2} = a_x$

Si les mobiles ne sont pas en mouvement, on peut écrire $a_x = 0$. Et les équations (1) et (3) deviennent donc :

$$0 = mg\sin\alpha \pm f_1 - T$$

$$0 = -mg\sin\beta \pm f_2 + T$$

On calcule (1) + (3) :

$$0 = mg\sin\alpha \pm f_1 - T - mg\sin\beta \pm f_2 + T$$

$$0 = mg\sin\alpha - mg\sin\beta \pm f_1 \pm f_2$$

$$mg\sin\beta - mg\sin\alpha = \pm f_1 \pm f_2$$

Comme $\alpha < \beta$ pour pouvoir satisfaire cette égalité, on doit prendre le signe « + » pour les projections des forces de frottement f_1 et f_2, ce qui correspond bien au cas dessiné sur la figure.

$$mg\sin\beta - mg\sin\alpha = f_1 + f_2$$

Si les mobiles ne sont pas en mouvement, on est dans le cas de frottements statiques, donc on cherche une condition sur μ_s. On peut écrire : $\left\|\vec{f}_1\right\| \leq \mu_s\left\|\vec{N}_1\right\| = \mu_s mg\cos\alpha$ et de même $\left\|\vec{f}_2\right\| \leq \mu_s\left\|\vec{N}_2\right\| = \mu_s mg\cos\beta$, donc $f_1 + f_2 \leq \mu_s mg\cos\alpha + \mu_s mg\cos\beta$, donc :

$mg\sin\beta - mg\sin\alpha = f_1 + f_2 \leq \mu_s mg\cos\alpha + \mu_s mg\cos\beta$ et finalement $\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta} \leq \mu_s$.

Or : $\sin\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\alpha$ et on trouve :

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}}$$

2. On est maintenant dans le cas de frottements dynamiques, et on traite le problème de façon équivalente. $\left\|\vec{f}_1\right\| = \mu_d\left\|\vec{N}_1\right\| = \mu_d mg\cos\alpha$ et $\left\|\vec{f}_2\right\| = \mu_d\left\|\vec{N}_2\right\| = \mu_d mg\cos\beta$, donc on a la relation : $f_1 + f_2 = \mu_s mg\cos\alpha + \mu_s mg\cos\beta \Rightarrow$

$mg\sin\beta - mg\sin\alpha = f_1 + f_2 = \mu_d mg\cos\alpha + \mu_d mg\cos\beta$ et finalement $\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta} = \mu_d$,

soit

$$\boxed{\mu_d = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}}$$

3. On reprend les lois de Newton écrites pour les deux mobiles. En sachant que les mobiles se déplacent vers la droite (le premier module monte) on peut en déduire la direction des forces. Les équations (1) et (3) deviennent : $ma_x = mg\sin\alpha + f_1 - T$ et $ma_x = -mg\sin\beta + f_2 + T$.

On calcule (1) – (3) : $ma_x - ma_x = mg\sin\beta - \mu_d mg\cos\beta - T + mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha - T$

$0 = mg\sin\beta - \mu_d mg\cos\beta - T + mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha - T$

$\Rightarrow 2T = mg(\sin\beta - \mu_d\cos\beta + \sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)$

donc

$$\left\|\vec{T}_{1,2}\right\| = \frac{mg(\sin\beta - \mu_d\cos\beta + \sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{2} = \frac{mg(\cos\alpha - \mu_d\sin\alpha + \sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{2}$$

$$\left\|\vec{T}_{1,2}\right\| = \frac{mg}{2}\left((1+\mu_d)\cos\alpha + (1-\mu_d)\sin\alpha\right)$$

Les forces sur les mobiles 1 et 2 sont les frottements, la tension du fil (que nous venons de calculer) le poids et la réaction normale. Un déplacement du mobile 1 sur une hauteur d correspond à une distance $s_1 = \frac{d}{\sin\alpha}$ suivant le plan incliné. Le mobile 2 parcourt alors la même distance $s_2 = s_1$. Le travail de chacune des forces est donné par $W = \int_{déplacement} \vec{F}.\vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est le vecteur déplacement élémentaire. Dans notre cas où les forces sont constantes et où les déplacements sont rectilignes on a : $W = \vec{F}.\vec{s}$ où $\vec{s}$ est le vecteur déplacement. On a alors :

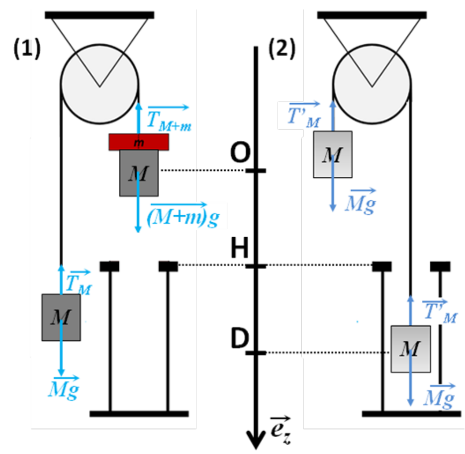
Mobile 1 :

- $W_{m\vec{g}} = (mg\,sin\,\alpha\,\vec{e}_x - mg\,cos\,\alpha\,\vec{e}_y).\frac{-d}{sin\,\alpha}\vec{e}_x = -mgd$
- $W_{T_1} = \dfrac{mgd}{2\sin\alpha}\left((1+\mu_d)\cos\alpha + (1-\mu_d)\sin\alpha\right)$
- $W_{f_1} = \mu_d mg\cos\alpha\vec{e}_x.\dfrac{-d}{\sin\alpha}\vec{e}_x = \dfrac{-\mu_d mgd}{\tan\alpha}$
- $W_{N_1} = N_2\vec{e}_y.\dfrac{-d}{\sin\alpha}\vec{e}_x = 0$

Mobile 2 :

- $W_{T_2} = \dfrac{-mgd}{2\sin\alpha}\left((1+\mu_d)\cos\alpha + (1-\mu_d)\sin\alpha\right)$
- $W_{m\vec{g}} = (-mg\,sin\,\beta\,\vec{e}_x - mg\,cos\,\beta\,\vec{e}_y).\frac{-d}{sin\,\alpha}\vec{e}_x = \frac{mgd\,sin\,\beta}{sin\,\alpha} = \frac{mgd}{tan(\alpha)}$
- $W_{f_2} = \mu_d mg\cos\beta\vec{e}_x.\dfrac{-d}{\sin\alpha}\vec{e}_x = -\mu_d mgd$
- $W_{N_2} = N_1\vec{e}_y.\dfrac{-d}{\sin\alpha}\vec{e}_x = 0$

Exercice S6.1 : Machine d'Atwood**



1. On note O le point de départ des deux masses $\{M + m\}$, et H le point où se situent les butées. On étudie d'abord le mouvement entre O et H (schéma (1) ci-contre). Pour cela, on applique la seconde loi de Newton aux masses de part et d'autre de la poulie, et on projette selon $\overrightarrow{e_z}$, orienté vers le bas.

- Pour la masse de gauche, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_M} = M \times \vec{g} = Mg\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{T_M} = -T_M\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Donc $M \times \overrightarrow{a_M} = Mg\overrightarrow{e_z} - T_M\overrightarrow{e_z}$ (1)

- Pour $\{M + m\}$, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{\{M+m\}}} = (M+m) \times \vec{g} = (M+m)g\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{T_{\{M+m\}}} = -T_{\{M+m\}}\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Donc $(M+m) \times \overrightarrow{a_{\{M+m\}}} = (M+m)g\overrightarrow{e_z} - T_{\{M+m\}}\overrightarrow{e_z}$ (2)

Étant donné que les masses sont reliées via la poulie par un fil inextensible, on peut écrire l'égalité en norme des forces de tension et des accélérations :

$T_M = T_{\{M+m\}} = T$ et $\|\overrightarrow{a_{\{M+m\}}}\| = \|\overrightarrow{a_M}\| = a$

En faisant attention au signe opposé de l'accélération pour chacun des deux sous-systèmes, les équations (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} -Ma\,\overrightarrow{e_z} = Mg\overrightarrow{e_z} - T\,\overrightarrow{e_z} & (1) \\ (M+m)a\,\overrightarrow{e_z} = (M+m)g\overrightarrow{e_z} - T\,\overrightarrow{e_z} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -Ma = Mg - T & (1) \\ (M+m)a = (M+m)g - T & (2) \end{cases}$$

On en déduit l'accélération avant les butées, donc entre O et H :

$$\boxed{a_{O-H} = \frac{m}{2M+m}g}$$

On note maintenant D le point pour lequel on mesurera le temps t_d. On trouve l'accélération en prenant $m = 0$ dans la formule de a_{O-H}. On trouve donc que :

$$\boxed{a_{H-D} = 0}$$

La vitesse de la masse M est constante dans la deuxième partie de l'expérience.

<u>NB :</u> On pourrait aussi retrouver a_{H-D} de la même façon qu'on a trouvé a_{O-H}, en appliquant la seconde loi de Newton pour la deuxième partie du mouvement (schéma (2)).

2. On détermine la vitesse entre O et H en intégrant la formule de l'accélération trouvée précédemment :

$v(t) = \frac{m}{2M+m}g \times t + v(t=0) \Leftrightarrow v(t) = \frac{m}{2M+m}g \times t$ (Car $(t=0) = 0$)

Puis on trouve la position entre O et H en intégrant la vitesse:

$x(t) = \frac{m}{2M+m}g \times \frac{t^2}{2} + cte \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{m}{2M+m}g \times \frac{t^2}{2}$ (Car $x(t=0) = 0$)

On note t_h le temps mis par l'ensemble $\{M+m\}$ pour atteindre le point H. La vitesse et la position en H s'écrivent :

$v(t_h) = v_h = \frac{m}{2M+m} g t_h$ et $x(t_h) = h = \frac{m}{2M+m} g \times \frac{{t_h}^2}{2}$ (3)

Comme on l'a démontré dans la première question, la vitesse après le point H reste constante, donc $v(H) = v(D) = \frac{d}{t_d}$ avec t_d le temps mis par la masse M pour aller de H à D. On trouve donc :

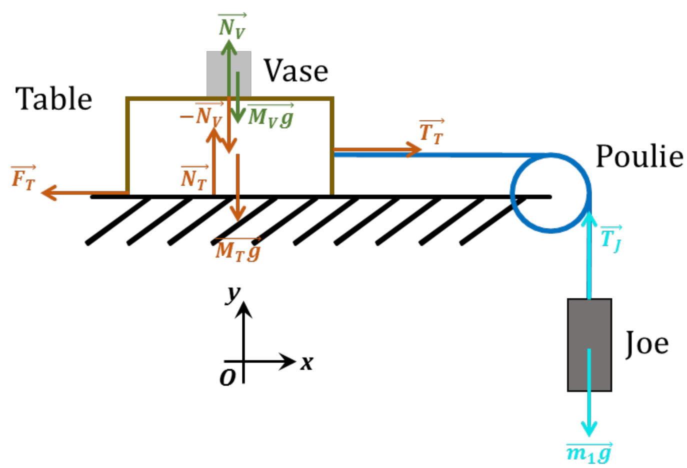
$$\frac{m}{2M+m} g t_h = \frac{d}{t_d} \Rightarrow t_h = \frac{d(2M+m)}{mgt_d}$$

En remplaçant t_h dans (3), on obtient :

$H = \frac{m}{2M+m} g \times \frac{1}{2}\left(\frac{d(2M+m)}{mgt_d}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{2M+m}{m} \times \frac{1}{g} \times \frac{1}{2} \times \frac{d^2}{{t_d}^2}$ et finalement :

$$\boxed{g = \frac{(2M+m)d^2}{2mh{t_d}^2}}$$

Exercice S6.2 **(*) : L'évasion des Dalton



Le problème peut être résolu simplement en considérant la table et le vase comme un seul objet de masse $(M_T + M_V)$:

On a alors le bilan des forces suivant :

- ❑ (Table + Vase) soumis à
  - La pesanteur : $-(M_T + M_V)g\vec{e_y}$
  - La reaction du sol : $\vec{N_T} = N_T\vec{e_y}$
  - La force de frottements avec le sol : $\vec{F_T} = -F_T\vec{e_x}$
  - La tension des draps : $\vec{T_T} = T_T\vec{e_x}$
- ❑ Joe (respectivement Averell) soumis à
  - La force de pesanteur : $-m_1 g\vec{e_y}$ (respectivement $-m_2 g\vec{e_y}$)
  - La tension des draps : $\vec{T_J} = T_T\vec{e_y}$

a) Dans le cas de Joe, la condition pour que la table et la vase restent immobiles est :

$$F_T = \alpha_s N_T = \alpha_s (M_T + M_V) g$$

avec $F_T = T_T = m_1 g$

$$\Longrightarrow \alpha_s (M_T + M_V) g = m_1 g \Longrightarrow M_V = \frac{m_1}{\alpha_s} - M_T$$

b) Dans le cas d'Averell, on calcule l'accélération a du système « table+vase »:

$a\,(M_T + M_V) = T_T - F_T$

La corde étant inextensible, l'accélération d'Averell a_A est la même que celle du système « table+vase », soit

$$m_2 a_A = m_2 g - T_T = m_2 a \Longrightarrow T_T = m_2(g-a)$$

et la force de frottement F_T donnée par $F_T = \alpha_d N_T = \alpha_d (M_T + M_V) g$

$$\Longrightarrow a\,(M_T + M_V) = m_2(g-a) - \alpha_d(M_T + M_V)g \Longrightarrow a = \frac{m_2 - \alpha_d(M_T + M_V)}{(M_T + M_V + m_2)} g$$

La limite de glissement du vase sur la table est donnée par :

$F_V = \beta_s N_V = \beta_s M_V g$

avec $M_V a = F_V$

$$\Longrightarrow M_V a = \beta_s M_V g \Longrightarrow \frac{m_2 - \alpha_d(M_T + M_V)}{(M_T + M_V + m_2)} g = \beta_s g \Longrightarrow m_2 = \frac{(\alpha_d + \beta_s)(M_T + M_V)}{(1 - \beta_s)}$$

Autre méthode :

a) On se place dans le référentiel lié au sol, et on définit un repère (O, x, y) comme indiqué sur le schéma ci-dessous. On considère trois sous-sytèmes : le vase, la table, et Joe. Pour chaque sous-système (considérés comme des points matériels) on fait un bilan des forces, comme sur le schéma, et on applique la 2^{nde} loi de Newton $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$ que l'on projettera sur les axes du repère.

❑ Le vase est immobile et soumis à :

- La force de pesanteur : $M_V \vec{g} = -M_V g \overrightarrow{e_y}$
- La réaction de la table : $\overrightarrow{N_V} = N_V \overrightarrow{e_y}$

Donc on peut écrire : $N_V = M_V g$.

❑ La table est immobile et soumise à :

- La force de pesanteur : $M_T \vec{g} = -M_T g \overrightarrow{e_y}$
- La réaction de la table : $-\overrightarrow{N_V} = -N_V \overrightarrow{e_y}$
- La reaction du sol : $\overrightarrow{N_T} = N_T \overrightarrow{e_y}$
- La force de frottements avec le sol : $\overrightarrow{F_T} = -F_T \overrightarrow{e_x}$
- La tension des draps : $\overrightarrow{T_T} = T_T \overrightarrow{e_x}$

En projetant sur les axes on peut donc écrire : $\begin{cases} T_T = F_T \\ N_T = M_T g + N_V \end{cases}$

- ❑ Joe est immobile et soumis à :
- La force de pesanteur : $m_1\vec{g} = -m_1 g\overrightarrow{e_y}$
- La tension des draps : $\overrightarrow{T_J} = T_J\overrightarrow{e_y}$

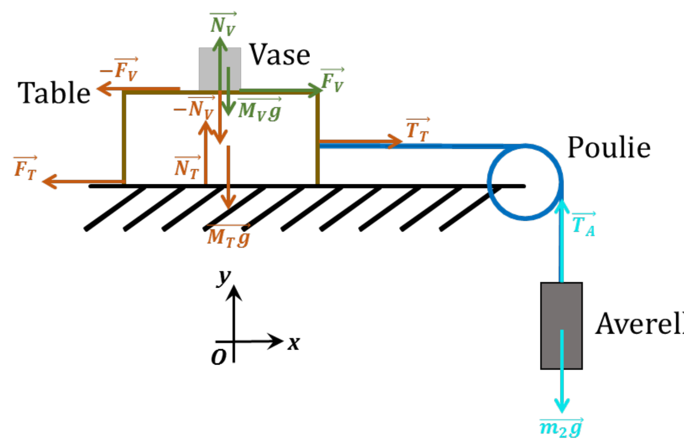
Donc on peut écrire : $T_J = m_1 g$.

On cherche une condition sur la masse du vase donc isolons M_V : $M_V = \frac{N_V}{g} = \frac{N_T - M_T g}{g}$.

Comme on considère les draps comme une corde inextensible et sans masse, on peut écrire $T_J = T_T$. Donc $m_1 g = F_T$. De plus, la condition limite pour que la table ne se mette pas en mouvement est : $F_T = \alpha_s N_T$. Donc, à la limite statique, on a $N_T = \frac{F_T}{\alpha_s} = \frac{m_1 g}{\alpha_s}$, et finalement pour M_V, $M_V = \frac{\frac{m_1 g}{\alpha_s} - M_T g}{g}$. Donc on trouve la masse minimale pour que la table ne bouge pas est :

$$M_V = \frac{m_1}{\alpha_s} - M_T$$

b) On considère maintenant que la table est en mouvement et on doit chercher la limite pour que le vase ne bouge pas. On fait un nouveau bilan des forces sur chacun des trois sous-systèmes :



- ❑ Le vase est soumis à :
- La force de pesanteur : $M_V\vec{g} = -M_V g\overrightarrow{e_y}$
- La réaction de la table : $\overrightarrow{N_V} = N_V\overrightarrow{e_y}$
- La force de frottements avec la table : $\overrightarrow{F_V} = F_V\overrightarrow{e_x}$

En projetant sur les axes on peut donc écrire : $\begin{cases} M_V a_V = F_V \\ N_V = M_V g \end{cases}$.

- ❑ La table est soumise à :
- La force de pesanteur : $M_T\vec{g} = -M_T g\overrightarrow{e_y}$
- La réaction de la table : $-\overrightarrow{N_V} = -N_V\overrightarrow{e_y}$
- La reaction du sol : $\overrightarrow{N_T} = N_T\overrightarrow{e_y}$
- La force de frottements avec le sol : $\overrightarrow{F_T} = -F_T\overrightarrow{e_x}$
- La force de frottements avec le vase: $-\overrightarrow{F_V} = -F_V\overrightarrow{e_x}$
- La tension des draps : $\overrightarrow{T_T} = T_T\overrightarrow{e_x}$

En projetant sur les axes on peut donc écrire : $\begin{cases} M_T a_T = -F_T - F_V + T_T \\ N_T = M_T g + N_V \end{cases}$

❑ Averell est soumis à :

- La force de pesanteur : $m_2\vec{g} = -m_2 g\overrightarrow{e_y}$
- La tension des draps : $\overrightarrow{T_A} = T_A\overrightarrow{e_y}$

En projetant on peut donc écrire $m_2 a_A = -m_2 g + T_A$.

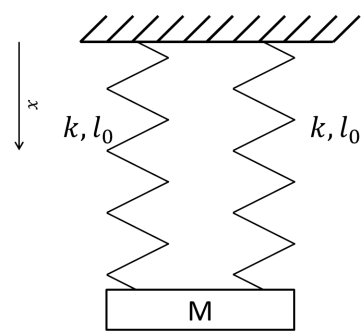
Maintenant, on doit trouver une condition sur la masse d'Averell m_2, pour que le vase ne se mette pas en mouvement. On part du bilan des forces sur Averell : $m_2(a_A + g) = T_A$.Et on cherche à remplacer toutes les inconnues pour trouver une équation ne dépendant que des données du problème, à savoir : $\alpha_d, \beta_s, M_T, M_V$ et g. On applique alors les points suivants :

- De même qu'à la question a), $T_A = T_T$.
- Or, comme la table entre en mouvement on peut écrire $F_T = \alpha_d N_T$ et ainsi remplacer F_T.
- Enfin, si on considère la limite statique à laquelle le vase va commencer à glisser et pour laquelle on peut écrire $F_V = \beta_s N_V$, soit la condition sur a_V : $M_V a_V = \beta_s M_V g \Rightarrow a_V = \beta_s g$.
- Or, on veut que le vase ne glisse pas sur la table, ce qui implique que $a_V = a_T = a$.
- De plus, comme les draps sont considérés comme inextensibles et sans masse, l'accélération d'Averell est la même que celle de la table : $a_T = -a_A = a$.
- En appliquant tous ces points, on trouve que la condition limite sur m_2 s'écrit finalement :

$$m_2 = \frac{(\alpha_d + \beta_s)(M_T + M_V)}{(1 - \beta_s)}$$

Exercice S6.3* : Association de ressorts

Les 2 ressorts sont associés en parallèle.

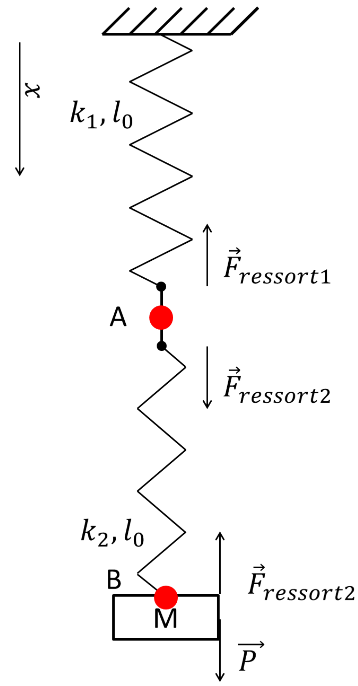


Le système est à l'équilibre, on applique la 1ère loi de Newton:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{ressort1} + \vec{F}_{ressort2} + \vec{P} = 0$$
$$-kx - kx + Mg = 0$$
$$x = \frac{Mg}{2k}$$

Conclusion si l'on met 2 ressorts en parallèle leurs constantes de raideur s'additionnent :

$$k_{eq} = k + k = 2k$$



Les 2 ressorts sont associés en série et le système est à l'équilibre.
On applique la 1ère loi de Newton aux points A et B.
Au point A :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{ressort1} + \vec{F}_{ressort2} = 0$$
$$F_{ressort1} = F_{ressort2} \; (1)$$

Au point B:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{ressort2} + \vec{P} = 0$$
$$\vec{F}_{ressort2} = -\vec{P}$$
$$-k_2 x_2 = -Mg$$
$$x_2 = \frac{Mg}{k_2}$$

Avec (1)

$$-k_1 x_1 = -k_2 x_2$$
$$x_1 = \frac{Mg}{k_1}$$

L'allongement total est donc

$$x = x_1 + x_2 = \frac{Mg}{k_1} + \frac{Mg}{k_2} = Mg\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

En conclusion la constante de raideur équivalente est :

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Ou encore

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$