Corrigé 15

1. Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes en $x = x_0$.

a) $a(x) = \dfrac{1-3x^2+2x^3}{1-x+\ln x}\,, \quad x_0 = 1$

b) $b(x) = \dfrac{a^x - e^x}{x}\,, \quad x_0 = 0$

c) $c(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\,, \quad x_0 = 0$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\ln\left[3x+\cosh(2x)\right]}\,, \quad x \to -\infty$

e) $e(x) = \sin(x)\cdot\ln(x)\,, \quad x_0 = 0\,,\ x > 0$

f) $f(x) = \Big[\tanh(x)\Big]^{\sinh^2(x)}\,, \quad x \to +\infty$

g) $g(x) = \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}\,, \quad x_0 = 0$

---

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-3x^2+2x^3}{1-x+\ln x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

On lève l'indétermination à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-3x^2+2x^3}{1-x+\ln x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-6x+6x^2}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-6x^2\,(x-1)}{x-1} = -6\,.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - e^x}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - e^x}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(a)\cdot e^{x\ln a} - e^x}{1} = \ln(a) - 1\,.$$

c)
- Limite de $c(x)$ lorsque $x \to 0^+$

  $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ n'est pas une forme indéterminée, car $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty\,.$

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0\,.$$

- Limite de $c(x)$ lorsque $x \to 0^-$

  $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$", car $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\,.$

  - Première tentative

    On lève l'indétermination de type "$\frac{0}{0}$" à l'aide de la règle de Bernoulli-de l'Hôpital.

    $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}\,.$$

On a toujours une indétermination de type "$\frac{0}{0}$". L'expression obtenue en appliquant la règle de Bernoulli-de l'Hôpital est même pire que l'expression initiale. Il faut essayer autre chose.

- Deuxième tentative

On se ramène à une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$" :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1} = -\infty\,.$$

d) $3x+\cosh(2x) = 3x + \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = e^{-2x}\cdot\dfrac{6x\,e^{2x}+e^{4x}+1}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$

car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-2x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2\,e^{-2x}} = 0\,.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\ln\left[3x+\cosh(2x)\right]}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\ln\left[3x+\cosh(2x)\right]} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\cosh(2x)}{3+2\,\sinh(2x)} \quad \text{(F.I. de type "}\tfrac{\infty}{\infty}\text{")}$$

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{3+2\,\sinh(2x)}{4\,\cosh(2x)} \quad \text{(F.I. de type "}\tfrac{\infty}{\infty}\text{")}$$

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{4\,\cosh(2x)}{8\,\sinh(2x)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\tanh(2x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\cdot\ln(x) \overset{\text{IPE}}{=} \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0\,.$

f) Continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x\to+\infty}\Big[\tanh(x)\Big]^{\sinh^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sinh^2(x)\cdot\ln\left[\tanh(x)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\sinh^2(x)\cdot\ln\left[\tanh(x)\right]}$$

car la fonction exponentielle est continue.

Forme indéterminée :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sinh^2(x)\cdot\ln\left[\tanh(x)\right]$ est une forme indéterminée "$\infty\cdot 0$", car

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sinh(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty}\tanh(x) = +1$ et la fonction ln est continue.

Pour pouvoir utiliser la règle de Bernoulli-de l'Hospital, il faut se ramener à une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$".

Limite de $f(x)$ lorsque $x\to+\infty$:

On se ramène à une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$" pour pouvoir utiliser la règle de Bernoulli-de l'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sinh^2(x) \cdot \ln[\tanh(x)] &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[\tanh(x)]}{\frac{1}{\sinh^2(x)}} \\
&\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\tanh(x)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(x)}}{-2 \cdot \frac{1}{\sinh^3(x)} \cdot \cosh(x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sinh(x)\cdot\cosh(x)} \cdot \frac{\sinh^3(x)}{\cosh(x)} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \tanh^2(x) \\
&= -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big[\tanh(x)\Big]^{\sinh^2(x)} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

g) $g(x) = \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\frac{\sin x}{x})}$.

Calculons $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}\cdot\ln\dfrac{\sin x}{x}$, c'est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to0} \frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to0} \frac{(\cos x - x\sin x)-\cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}\cdot\ln\dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{1}{6}$ car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = e^{-\frac{1}{6}}$ car la fonction exponentielle est continue.

2. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln[\cosh(x)]}{x^n}\,, \qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction g est-elle prolongeable par continuité en $x=0$?

La fonction g est prolongeable par continuité en $x=0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ existe (est finie).

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln[\cosh(x)]}{x^n}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ", car $\lim\limits_{x\to 0} \cosh(x) = 1$ et la fonction ln est continue.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[\cosh(x)]}{x^n} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh(x)} \cdot \sinh(x)}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{n\,x^{n-1}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour déterminer cette limite en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, il faut distinguer deux cas selon que $n = 1$ (dénominateur constant non nul) ou $n > 1$ (dénominateur qui tend vers 0) :

- si $n = 1$, $\quad g(x) = \dfrac{\tanh(x)}{1} = \tanh(x)\,, \quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\,,$
- si $n \geq 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{n\,x^{n-1}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{n\,(n-1)\,x^{n-2}}\,.$$

De même ici, il faut distinguer deux cas selon que $n = 2$ (dénominateur constant non nul) ou $n > 2$ (dénominateur qui tend vers 0) :

- ∘ si $n = 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{2} = \dfrac{1}{2}\,,$
- ∘ si $n > 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{n\,(n-1)\,x^{n-2}} = \infty\,.$

La fonction g est donc prolongeable par continuité en $x = 0$ si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$.

3. Faire l'étude complète des fonctions données sous **3.** b) c) d) et e) de la série 13.

b) $b(x) = x + \sqrt{1-x}$, $\qquad$ c) $c(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

d) $d(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ e) $e(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

---

b) $b(x) = x + \sqrt{1-x}\,, \qquad D_b = \,]-\infty\,, 1]\,, \qquad b$ est continue sur D_b.

Etude des branches infinies.

$$\lim_{x\to -\infty} b(x) = \lim_{x\to -\infty} x + \sqrt{1-x} = \lim_{x\to -\infty} x\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}\right) = -\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

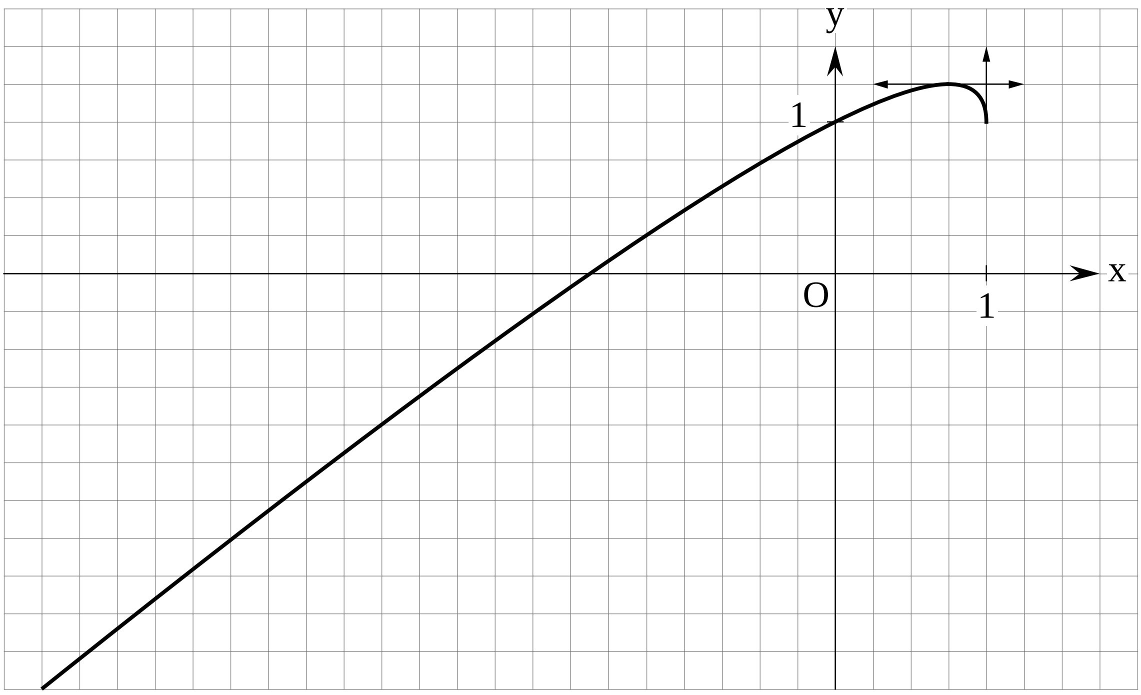
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = 1\,, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} b(x) - x = +\infty\,.$$

Le graphe de b admet donc au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction de pente $m = 1$.

Tableau de variation de la fonction b :

x	$-\infty$		$3/4$		1
$b'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖
$b(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5/4$	$\searrow$	1

Représentation graphique de la fonction b :



c) $c(x) = \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right|$, $\qquad D_c = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\qquad c$ est continue sur D_c.

Etude des branches infinies.

- $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} c(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

  Le graphe de c admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

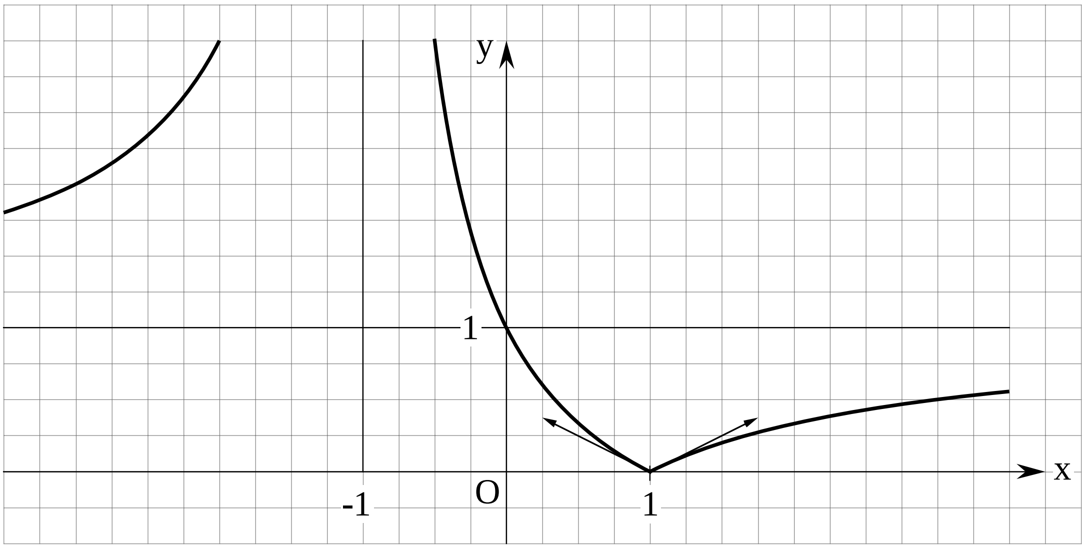
- $\displaystyle \lim_{x \to -1} c(x) = \lim_{x \to -1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$.

  Le graphe de c admet une asymptote verticale en $x = -1$.

Tableau de variation de la fonction c :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$c'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$-\frac{1}{2}\ \|\|\ \frac{1}{2}$	$+$	
$c(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Représentation graphique de la fonction c :



d) $d(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,, \qquad D_d = \mathbb{R}\,, \quad d$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Etude des branches infinies.

$$\lim_{x\to\pm\infty} d(x) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right) \;=\; +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

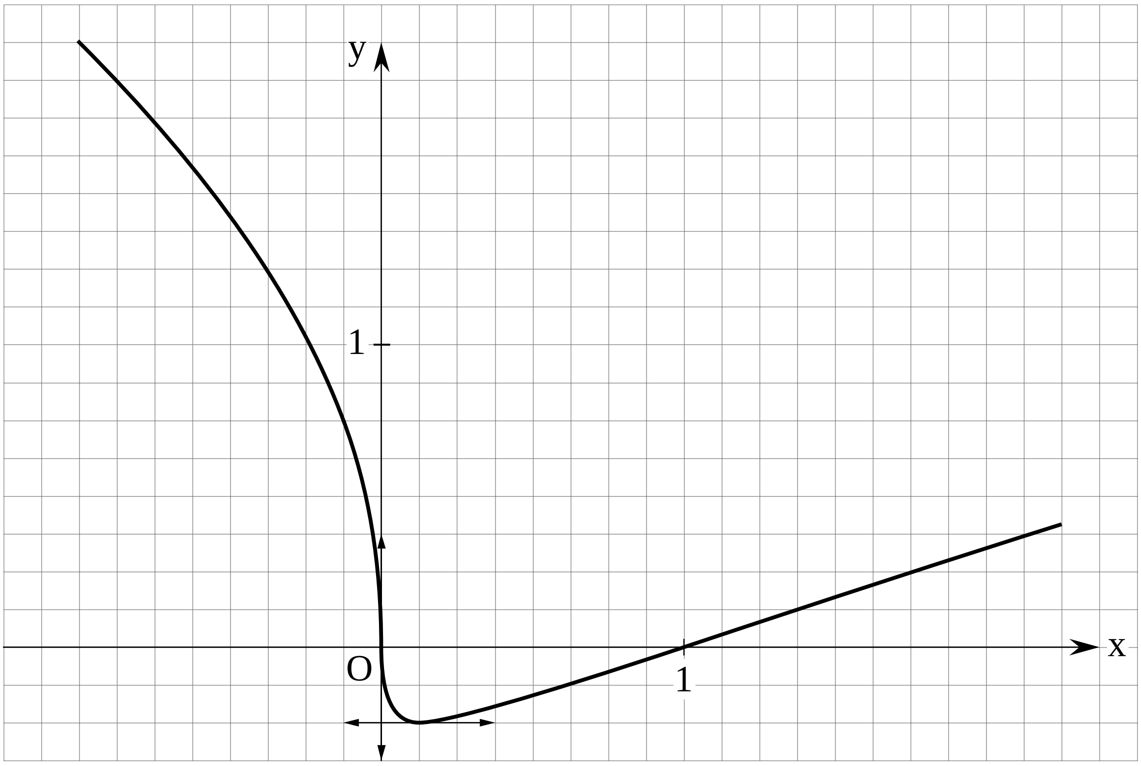
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right) \;=\; 0\,.$$

Le graphe de d admet donc aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ deux branches paraboliques de direction horizontale.

Tableau de variation de la fonction d.

x	$-\infty$		0		$1/8$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	$-\infty\ \|\|\ -\infty$	$-$	0	$+$	
$d(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction d :



e) $e(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}\,, \qquad D_e = \mathbb{R}\,, \quad e$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Etude des branches infinies.

Si $x \neq 0\,,\quad e(x) \;=\; \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} \;=\; x\,\sqrt[3]{1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2}}\,.$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e(x) \;=\; -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} e(x) \;=\; +\infty\,.$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} \;=\; 1\,.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\, e(x) - x \,\right] \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2 + 9x)^2} + x\,\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} + x^2}$$

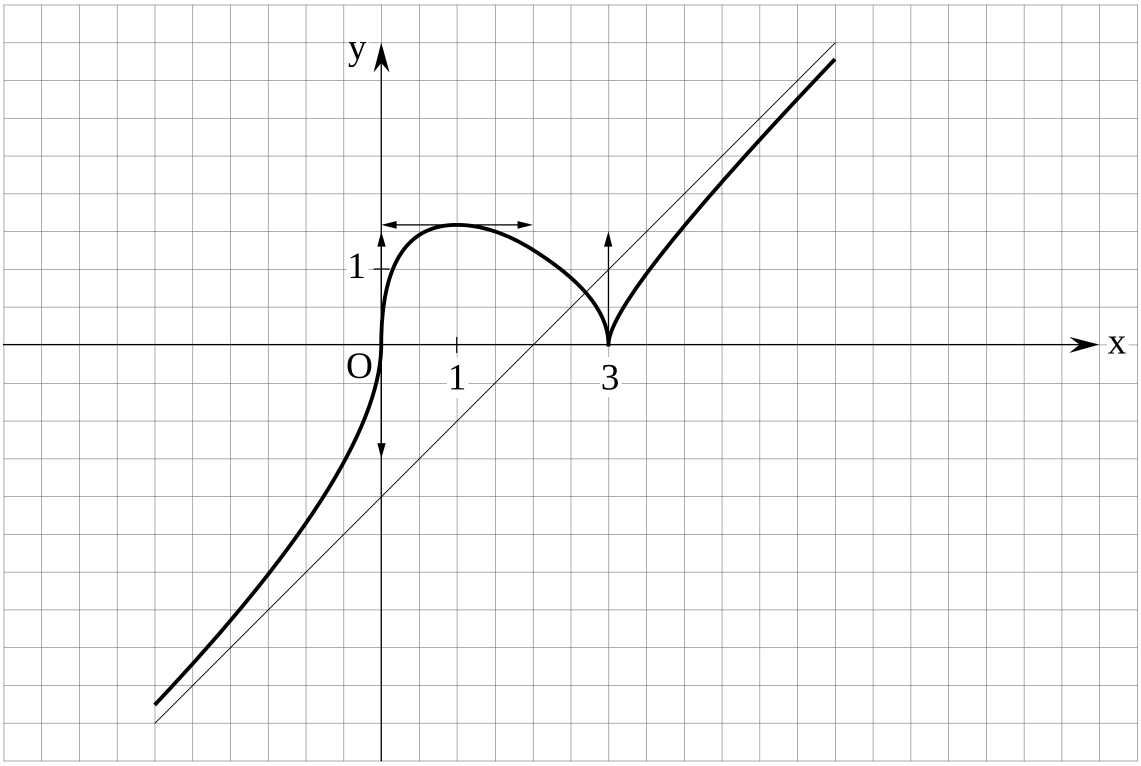
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2\left(-2 + \frac{3}{x}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1\right]} \;=\; -2\,.$$

Le graphe de e admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$.

Tableau de variation de la fonction e.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$e'(x)$		$+$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	
$e(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction e :



4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left[\frac{x^2}{4\,(x+1)}\right] \quad \text{si} \quad x \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Faire l'étude complète de la fonction f.

Caractériser les points remarquables et représenter le graphe de f dans un système d'axes cartésien d'unité 2 cm (4 carrés).

Domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$.

Domaine de définition de $y = \arctan\left[\frac{x^2}{4\,(x+1)}\right]$: $D_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Etude des limites aux points frontières de D_y.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$,
  Le graphe de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2}$,
  Le graphe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = +\frac{\pi}{2}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\frac{\pi}{2} = f(-1)$,
  La fonction f n'est pas continue en $x_0 = -1$, mais elle est continue à droite en ce point.

Expression de la dérivée de f pour $x \neq -1$.

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{x^2}{4\,(x+1)}\right]'}{1 + \left[\frac{x^2}{4\,(x+1)}\right]^2} = \frac{\frac{x^2+2x}{4\,(x+1)^2}}{\frac{16\,(x+1)^2+x^4}{16\,(x+1)^2}} = \frac{4x\,(x+2)}{16\,(x+1)^2 + x^4}\,, \qquad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}\,.$$

La fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$, plus précisément :

- $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -4$,
  dans un voisinage à gauche de $x_0 = -1$, lorsque x tend vers -1, la pente de la tangente au graphe de f tend vers la valeur -4.

- $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -4 = f'(-1^+)$,
  la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -1$. Le graphe de f admet en $(-1\,,\,\frac{\pi}{2})$ une demi-tangente à droite de pente $m = -4$.

Signe de la dérivée. $f'(x)$ s'annule en $x = -2$ ou $x = 0$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	-4 ‖ -4	$-$	0	$+$	

Points remarquables.

- Le point de coordonnées $(-2\,,\,-\frac{\pi}{4})$ est un maximum à tangente horizontale.
- Le point de coordonnées $(-1\,,\,\frac{\pi}{2})$ est un maximum dont la demi-tangente à droite est de pente $m = -4$.
- Le point de coordonnées $(0\,,\,0)$ est un minimum à tangente horizontale.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\to -4 \;\Vert\; -4$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$-\pi/4$	$\searrow$	$+\pi/2$; $-\pi/2 \;\Vert\; +\pi/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\pi/2$

Représentation graphique.