EPFL
Section MT

Peter Wittwer
16 novembre 2020

Analyse I – Série 9

Echauffement 1. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.

Q1 : $f(I)$ est un intervalle.

Q2 : Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.

Q3 : Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.

Q4 : Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Q5 : Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q6 : Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q7 : Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Exercice 1. (Continuité à gauche et droite)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

i) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ *ii)* $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ *iii)* $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ *iv)* $(1, 2)$ *v)* $(2, 2)$

Exercice 2. (Théorème de la valeur intermédiaire)

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions :

i) $e^{x-1} = x + 1$ *ii)* $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Exercice 3. (Algorithme de bissection)

En appliquant l'algorithme de bissection, localiser une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

dans un intervalle de longueur $L \leq \frac{1}{8}$.

Echauffement 2. (Propriétés de la dérivée)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

i) f paire $\Rightarrow$ f' impaire,

ii) f impaire $\Rightarrow$ f' paire,

iii) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique.

Exercice 4. (Calcul de dérivées)

En partant de la définition, calculer la dérivée f' de la fonction f.

i) $f(x) = \sin(2x)$ *ii)* $f(x) = \cos(2x)$

Exercice 5. (Dérivabilité)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 6. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

i) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ *ii)* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ *iii)* $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$

Exercice 7. (Dérivées d'ordre supérieur)

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f :

i) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ *ii)* $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ *iii)* $f(x) = \mathrm{Log}(x)$

Exercice 8. (Dérivée d'une composée de fonctions)

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f et g données par

i) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)^3$.

ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Exercice 9. (Dérivation en chaîne)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

i) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (sans formulaire!) *ii)* $f(x) = \sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$

iii) $f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$ *iv)* $f(x) = \mathrm{Log}_3\big(\mathrm{ch}(x)\big)$

v) $f(x) = \mathrm{Log}\left(4^{\sin(x)}\right)e^{\cos(4x)}$

Exercice 10. (V/F : Dérivation)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions.

Q1 : Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.

Q2 : Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

Q3 : Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q4 : Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.