

(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : .....

Prénom : .....

Question	Pts max.	Pts
1	5	
2	5	
3	$5\frac{1}{2}$	
4	$4\frac{1}{2}$	
Total	20	

Note :

## Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.  
Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom, prénom, n° du contrôle, branche, groupe, ID et date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

## Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  en fonction de  $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$  :

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

## Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

## Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\arg \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\arg \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\arg \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\arg \coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Question 1** (à 5 points)

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x) - \frac{1}{5} \sin^3(x)}.$$

*Réponse à la question 1:*

laisser la  
marge vide

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The background is a very light gray, and it is covered by a precise grid of thin, darker gray lines. The grid consists of small, equal-sized squares that extend across the entire area of the page, providing a guide for drawing or writing. There are no margins, text, or other markings present.

laisser la  
marge vide

*Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:* ☐

**Question 2** (à 5 points)

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soit  $D$  le domaine fini du plan limité par l'axe  $Ox$  et par les deux arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  :

$$\Gamma_1 : x^2 - 2y = 0, \quad x \leq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : y^2 + x - 2 = 0, \quad y \geq 0.$$

Indication : les deux arcs de parabole se coupent en  $(-2, 2)$ .

- a) Calculer l'aire  $A$  du domaine  $D$ .
- b) Calculer le volume  $V$  du corps de révolution engendré par la rotation du domaine  $D$  autour de l'axe  $Ox$ .

*Réponse à la question 2:*

laisser la  
marge vide



*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:* ☐



**Question 3** (à 5 1/2 points)

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

On considère l'arc de courbe  $\Gamma$  défini par

$$y = \sinh^2(x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

- Calculer la longueur de l'arc  $\Gamma$ .
- Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc  $\Gamma$  autour de l'axe vertical d'équation  $x = \arg \sinh(1)$ .

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

*Réponse à la question 3:*

[illegible]

laisser la  
marge vide

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:* ☐

**Question 4** (à 4 1/2 points)

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien  $Oxyz$ , on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe  $Oy$  sont des triangles  $ABC$  tels que  $A$  est sur l'axe  $Oy$ ,  $B$ , dans le plan  $Oxy$ , appartient à la droite  $d$  et  $C$ , dans le plan  $Oyz$ , appartient au quart de cercle  $\Gamma$  :

$$d: \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0, \end{cases} \quad \Gamma: \quad \begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 4 \\ x = 0, \end{cases} \quad y \in [0, 2], \quad z \geq 0.$$

Calculer le volume  $V$  de ce corps.

*Réponse à la question 4:*

laisser la  
marge vide

[illegible]

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!*

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

laisser la  
marge vide

*Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:* ☐

## Réponses

1.  $\int f(x) \, dx = \ln [1 - \cos(x)] - \frac{1}{2} \ln [\cos^2(x) + 4] - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\cos(x)}{2} \right) + C.$

2.  $A = 4, \quad V = \frac{32\pi}{5}.$

3.  $s = \sqrt{2}, \quad \mathcal{A} = \pi.$

4.  $V = \pi - \frac{4}{3}.$