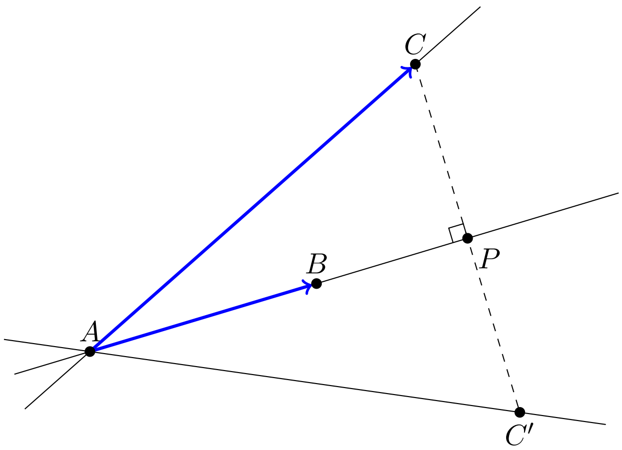
Série 10

Exercice 1. Dans l'espace, on donne trois points non alignés A, B et C.

a. Déterminer, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, une équation vectorielle de la droite d symétrique (orthogonale) de (AC) par rapport à (AB).

b. Application numérique : $A(0,0,0)$, $B\,(-2,1,-3)$ et $C\,(3,-2,2)$ (dans un repère orthonormé).

Solution: Figure d'étude :



a. Notons C' le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et P le projeté orthogonal de C sur (AB). Comme P est le milieu de CC', on a :

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AP} \text{ et donc } \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}.$$

De plus, le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$, donc :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\ \overrightarrow{AB}.$$

La droite d recherchée possède donc comme équation vectorielle :

$$d : \overrightarrow{AM} = t(2\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}),\ t \in \mathbb{R}.$$

b. L'application des formules donnant le produit scalaire en repère orthonormé conduit aux équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

On en déduit alors des équations cartésiennes :

$$d : 4x = z,\ y = 0.$$

Exercice 2. On donne un triangle ABC rectangle en B. Existe-t-il un point sur (AB) dont le symétrique par rapport à (AC) appartient à (BC) ? Si oui, donner son abscisse dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$. On pourra discuter selon l'angle θ au sommet A.

Solution: Considérons un point M sur (AB). Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

En raisonnant comme à l'exercice précédent, on trouve alors l'expression de $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de t, où M' est le symétrique de M par rapport à (AC) :

$$\overrightarrow{AM'} = 2\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = t(2\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

Le point M' se trouve sur la droite (BC) si et seulement si :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2.$$

Sous cette condition, le réel t doit donc vérifier l'égalité :

$$t(2\frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} - \|\overrightarrow{AB}\|^2) = \|\overrightarrow{AB}\|^2.$$

Appelons θ l'angle au sommet A dans le triangle rectangle ABC. On a donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\theta).$$

L'équation en t ci-dessus devient alors :

$$t(2\cos^2(\theta) - 1) = t\cos(2\theta) = 1.$$

Il y a donc deux cas à distinguer :

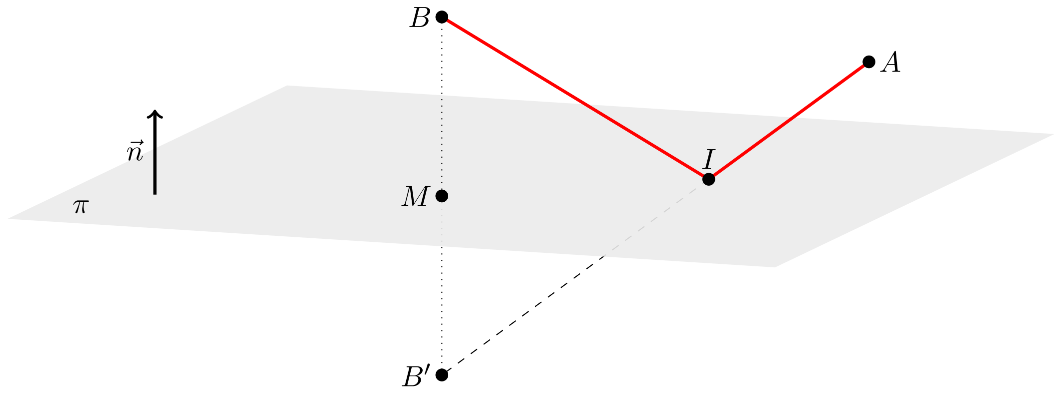
- soit le triangle ABC est rectangle isocèle, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{4}$, et dans ce cas il n'y a pas de solution au problème posé.
- soit $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, et dans ce cas, le point d'abscisse $\frac{1}{\cos(2\theta)}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$ est le seul point solution du problème posé.

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(-6, 3, 5)$, $B\,(0, 3, 2)$ et le plan $\pi : \, y + z - 2 = 0$.

a. Montrer que A et B sont situés du même côté de π.

b. On souhaite atteindre B avec un rayon laser issu de A, après une réflexion sur π. Quel point de π doit-on viser ?

Solution: Figure d'étude :



a. Le plan π sépare l'espace en deux demi-espaces ouverts, à savoir :

$$\pi_+ : y + z - 2 > 0 \text{ et } \pi_- : y + z - 2 < 0.$$

Le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ pointe vers π_+ tandis que son opposé $-\vec{n}$ pointe vers π_-. Par ailleurs, A et B sont tous deux dans π_+ car $3+5-2=6>0$ et $3+2-2>0$.

b. Si l'on pense à π comme un miroir, le point que l'on doit viser depuis A est l'image de B par le miroir, autrement dit le symétrique B' de B par rapport à π. Le point d'impact du rayon se situe donc à l'intersection de π avec (AB').

Les coordonnées de B' sont du type $B'(0, 3+t, 2+t)$ pour un certain réel t, car il se trouve sur la perpendiculaire à π passant par B. Par ailleurs, le milieu $M(0, 3+\frac{1}{2}t, 2+\frac{1}{2}t)$ de BB' appartient au plan π, si bien que :

$$(3+\frac{1}{2}t) + (2+\frac{1}{2}t) - 2 = 0 \text{ et donc } t = -3.$$

On en déduit que $B'(0,0,-1)$. La droite (AB') est donc dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et admet donc pour équations paramétriques :

$$(AB') : \begin{cases} x = -6 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

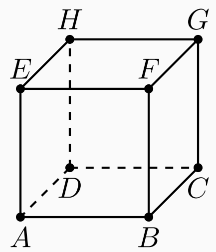
L'intersection de (AB') et π correspond donc au réel t tel que :

$$(3-t) + (5-2t) - 2 = 0 \text{ c'est-à-dire } t = 2.$$

On en déduit que le point d'impact est $I(-2,1,1)$.

Exercice 4.

La figure ci-contre représente un cube de côté 2. Dans chacun des cas suivants écrire une équation normale du plan proposé vu depuis le point A :



a. (ABC) b. (BCF) c. (BCE)

Ensuite, décrire le lieu géométrique formé des points M vérifiant la condition proposée :

d. $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ e. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ f. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EM} = 4.$

Solution:

a. Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AE}$. On en déduit que, vu depuis le point A, il admet pour équation normale :

$$(ABC) : \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

b. Le plan (BCF) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. On en déduit que, vu depuis le point A, il admet pour équation normale :

$$(BCF) : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 4.$$

c. Le plan (BCE) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AF}$. On en déduit que, vu depuis le point A, il admet pour équation normale :

$$(BCE) : \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = 4.$$

d. Il s'agit du plan passant par C et normal à $\overrightarrow{HG}$, c'est-à-dire le plan (BCF).

e. Le milieu I de AB appartient au lieu recherché, car :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 2.$$

Il s'agit donc du plan passant par I et normal à $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire le plan médiateur du segment AB.

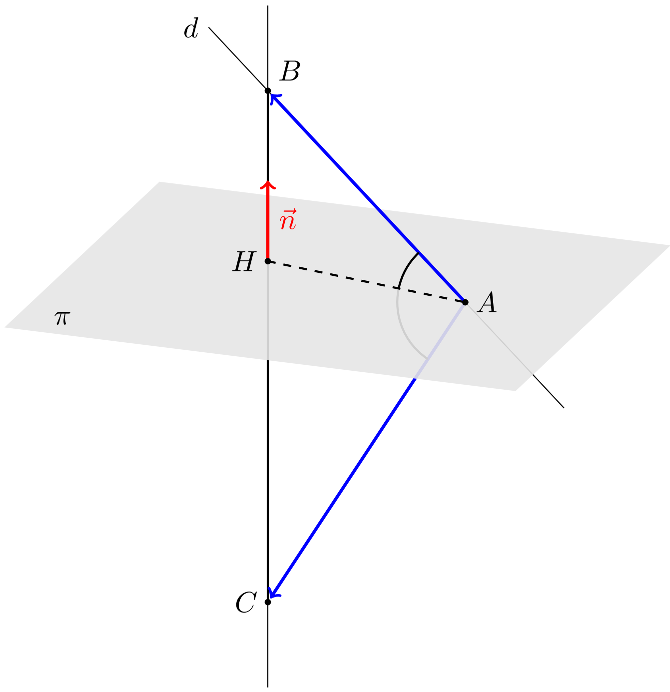
f. Le point F appartient au lieu proposé, car :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4.$$

Il s'agit donc du plan passant par F et normal à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$, c'est-à-dire le plan (BDF).

Exercice 5. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $B\,(0, -4, -7), H\,(-2, -2, -5)$, et $d:\ x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$. Déterminer les sommets A et C du triangle ABC sachant que A appartient à d, et que, dans le triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de A et l'angle au sommet A a pour cosinus $-\frac{1}{3}$.

Solution: Figure d'étude :



Comme H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BH), le point A doit appartenir au plan π passant par H et normal à $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On obtient :

$$\pi : x - y - z = 5.$$

De plus, les coordonnées de A vérifient les équations de d car A se situe sur d. On en déduit alors par un calcul que $A(-3, -4, -4)$. Le point C se situe sur la droite (BH), qui passe par $B(0, -4, -7)$ et est dirigée par $\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de C ont donc la forme $C(t, -4 - t, -7 - t)$ pour un certain réel t. On va maintenant chercher la (ou les) valeur(s) de t pour que la condition sur l'angle au sommet A donnée dans l'énoncé soit satisfaite, c'est-à-dire pour avoir :

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = -\frac{1}{3}.$$

En insérant les coordonnées de C dans cette formule, on trouve l'équation :

$$18(-t - 3) = \sqrt{18}\sqrt{3t^2 + 12t + 18}.$$

On peut élever cette équation au carré en imposant la condition $t \leq -3$, regrouper les termes et obtenir

$$15t^2 + 96t + 144 = 0.$$

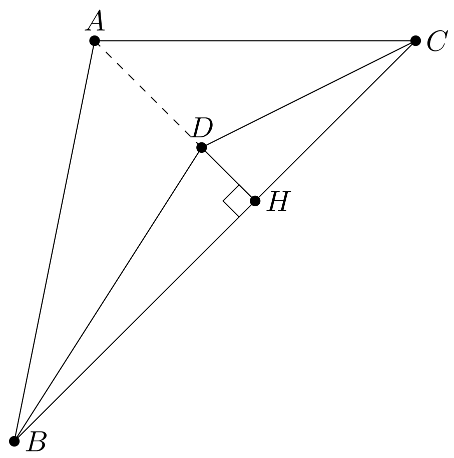
Cette dernière possède deux solutions : $-\frac{12}{5}$ (que l'on rejette car > -3), et -4. On ne garde donc que $t = -4$, qui donne $C(-4, 0, -3)$.

Exercice 6. On donne trois points non alignés A, B, C dans l'espace et un réel $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

a. En fonction des données, localiser depuis A le point D situé sur la hauteur issue de A et tel que le rapport de l'aire du triangle BCD à l'aire de ABC soit égal à α.

b. Application numérique : $A(20, -12, 40)$, $B(12, 16, 0)$, $C(16, 24, -12)$ (repère orthonormé), $\alpha = \frac{1}{4}$.

Solution: Figure d'étude :



a. Appelons H le pied de la hauteur issue de A. En projetant $\overrightarrow{AB}$ orthogonalement sur $\overrightarrow{BC}$, on obtient :

$$\overrightarrow{HB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\overrightarrow{BC} \text{ et donc } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\overrightarrow{BC}.$$

Les triangles ABC et BCD partagent la base BC, pour laquelle les hauteurs respectives sont $\|\overrightarrow{HA}\|$ et $\|\overrightarrow{HD}\|$. D'après la condition sur l'aire donnée dans l'énoncé, on a donc :

$$\frac{\|\overrightarrow{HD}\|}{\|\overrightarrow{HA}\|} = \alpha.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{HA}$ ont même sens, on obtient $\overrightarrow{HD} = \alpha\overrightarrow{HA}$ ou encore $\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)\overrightarrow{AH}$. Finalement, on a donc montré que :

$$\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)(\overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\overrightarrow{BC}).$$

b. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -8 \\ 28 \\ -40 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 672 \text{ et } \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 224.$$

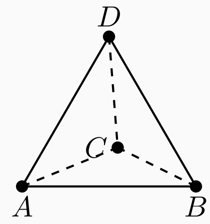
On trouve ensuite :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) \text{ et donc } \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on voit que le point D a pour coordonnées $D(5, -9, 37)$.

Exercice 7.

Quel est l'angle θ entre deux faces d'un tétraèdre régulier ? On pourra introduire un repère orthonormé adapté au problème.



Solution: Les faces du tétraèdre considéré sont toutes des triangles équilatéraux. Quitte à lui appliquer un facteur d'agrandissement ou de rétrécissement (ce qui ne change pas l'angle entre les faces), on peut supposer que toutes les arêtes ont pour longueur 1. Il existe alors un unique repère orthonormé pour lequel :

$$A(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$$

et D a pour coordonnées (α, β, γ) avec $\gamma > 0$. Dans ce repère, le plan (ABC) a pour équation $z = 0$. Le plan médiateur de AB, auquel appartient D, est le plan normal à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par C. Il a donc pour équation $x = \frac{1}{2}$, si bien que l'on a $\alpha = \frac{1}{2}$. De la même manière, le plan médiateur de AC, auquel appartient D, est le plan normal à $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par B. Il a donc pour équation $x + \sqrt{3}y = 1$. Ceci permet alors de trouver $\beta = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Enfin, D est situé à une distance 1 de A, si bien que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Comme $\gamma > 0$, on trouve $\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Le point D a donc pour coordonnées $D(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$. Cherchons alors une équation cartésienne du plan (ABD) sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$. En exprimant que A, B et D sont sur ce plan, on trouve :

$$d = 0, a + d = 0 \text{ et } \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b + \frac{\sqrt{6}}{3}c + d = 0.$$

On obtient alors que (ABD) a pour équation cartésienne $2\sqrt{2}y - z = 0$. On peut maintenant calculer l'angle θ entre la face (ABC), qui a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (ABD), qui a pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ (c'est le même angle que l'on retrouve entre toutes les faces car le tétraèdre est régulier). Il s'agit de l'unique réel θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que :

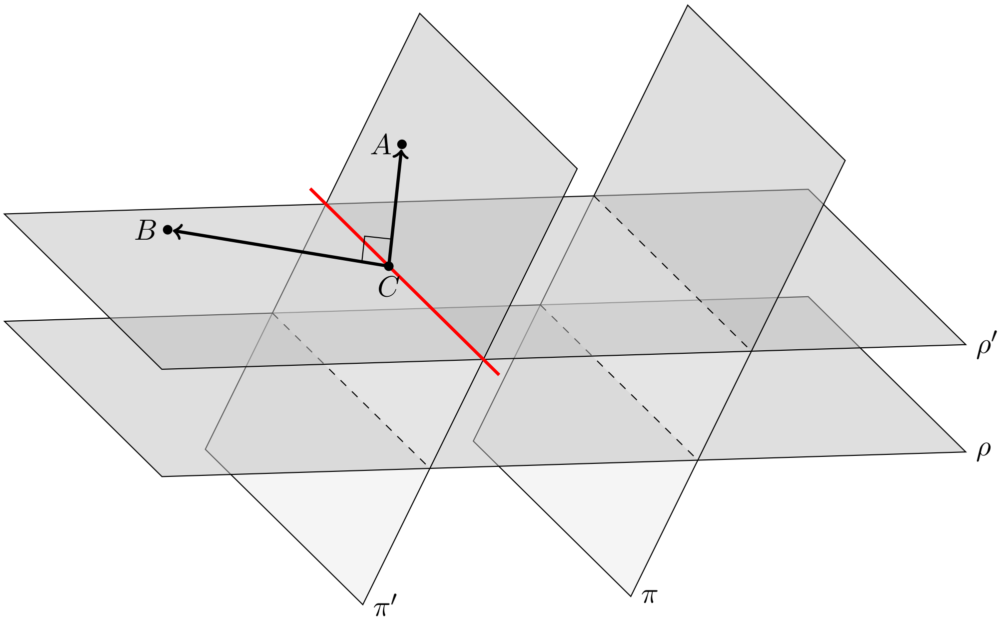
$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 8. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(5,0,3)$, $B\,(-1,4,4)$ ainsi que les plans :

$$\rho : 2x + 2y + z + 1 = 0 \text{ et } \pi : \begin{cases} x = -6 - s \\ y = s \\ z = 2 - 8s + t \end{cases}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les coordonnées du point C sachant que le triangle ABC est rectangle en C, que $\overrightarrow{AC}$ est directeur de π et que $\overrightarrow{BC}$ est directeur de ρ.

Solution: Figure d'étude :



Notons π' le plan parallèle à π passant par A, c'est-à-dire le plan d'équations paramétriques :

$$\pi' : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = s \\ z = 3 - 8s + t \end{cases}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est directeur de π, le point C appartient à π'. De la même façon, le point C appartient au plan ρ' translaté de ρ passant par B, qui admet pour équation cartésienne :

$$\rho' : 2x + 2y + z - 10 = 0.$$

L'intersection de π' et ρ' correspond aux valeurs de s et t telles que :

$$2(5 - s) + 2(s) + (3 - 8s + t) - 10 = 0, \text{ autrement dit, } t = -3 + 8s.$$

La droite d'intersection de π' et ρ', sur laquelle se trouve le point C, a donc pour équations paramétriques :

$$\pi' \cap \rho' : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}.$$

Exprimons alors que le produit scalaire de $\overrightarrow{AC} \left(\begin{smallmatrix} -s \\ s \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{BC} \left(\begin{smallmatrix} 6-s \\ s-4 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ est nul :

$$-s(6 - s) + s(s - 4) + (-3) \times (-4) = 0 \text{ ou encore } s^2 - 5s + 6 = 0.$$

La résolution de cette équation du second degré livre alors deux solutions, $s = 2$ et $s = 3$. Il y a donc deux points C solutions du problème posé, à savoir les points de coordonnées $(3, 2, 0)$ et $(2, 3, 0)$.