Contrôle de géométrie analytique N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

Groupe

PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les équations cartésiennes de deux droites t_1 et t_2 et les coordonnées d'un point A :

$$t_1 \ : \ x+y=0, \qquad t_2 \ : \ 7x-y=0 \qquad \text{et} \qquad A(0;\, 2).$$

Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle $\gamma(\Omega,\ r)$ tangent à t_1 et t_2 et tel que les tangentes issues de A ont pour longueur 2. Donner la solution pour laquelle Ω est situé dans le premier quadrant. 3,5 pts

2. Le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O. On donne les équations cartésiennes de deux cercles et les coordonnées d'un point P :

$$\gamma_1 \ : \ x^2+y^2-12=0, \qquad \gamma_2 \ : \ x^2+(y-3)^2-9=0 \quad \text{et} \quad P(0;\, 1).$$

On considère les cercles $\gamma\ (\Omega, r)$ orthogonaux à γ_1 et γ_2, la droite d passant par O et Ω et la polaire p du point P par rapport à γ.

Soit M le point d'intersection des droites d et p.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M lorsque le cercle γ varie.

Montrer que ce lieu est une ellipse et déterminer les équations cartésiennes des directrices. 5,5 pts

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.

On considère la famille $\mathcal{F}$ des ellipses $\mathcal{E}$ qui sont tangentes à l'axe Oy, dont la distance entre les foyers vaut 2 et leur centre est sur la droite g d'équation $y=x-1$.

a) Déterminer l'équation cartésienne des ellipses $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$ dont l'une des directrices est la droite $d : y=30$.

Pour la suite du problème, on considère les ellipses de la famille $\mathcal{F}$ dont le grand axe est parallèle à l'axe Ox.

b) Déterminer l'équation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$ dépendante d'un paramètre.

c) Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$ dont la polaire du point $P(0;\, -1)$ est la droite d'équation $3x+4y-4=0$. 6,5 pts

Tourner la page

4. Dans le plan, on considère un point P et trois droites p, l et t.

Soient $\gamma_1\,(\Omega_1\,,\,r_1)$ et $\gamma_2\,(\Omega_2\,,\,r_2)$ deux cercles dont la ligne des centres est la droite l.

Le point P appartient à l'axe radical de γ_1 et γ_2 et il a pour polaire par rapport à γ_1, la droite p. La droite t est tangente au cercle γ_2.

Construire rigoureusement (règle, équerre, compas), sur la donnée graphique ci-dessous, les deux cercles γ_1 et γ_2. 4,5 pts