Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 10

Déterminants : exercice 16

(a) Soit $XA = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

On détermine d'abord la dimension de la matrice X :

$$\begin{array}{ccc} (n \times 2) \cdot (2 \times 3) & = & (2 \times 3) \\ (n \times 3) & = & (2 \times 3) \end{array}$$

Le produit est possible si et seulement si $X \in \mathbb{M}(2 \times 2\,; \mathbb{R})$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y & 2x + y & 3x \\ z - 2t & 2z + t & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

On a donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - 2y & = & 0 \\ 2x + y & = & 5 \\ 3x & = & 6 \\ z - 2t & = & -4 \\ 2z + t & = & 7 \\ 3z & = & 6 \end{cases}$$

qui a pour solution unique : $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ et $t = 3$.
Ainsi :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $(XA)^t = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

On détermine la dimension de la matrice X^t :

$$\begin{array}{ccc} (3 \times 2) \cdot (2 \times p) & = & (3 \times 1) \\ (3 \times p) & = & (3 \times 1) \end{array} \quad \text{donc } p = 1$$

Le produit est possible si et seulement si $X^t \in \mathbb{M}(2 \times 1\,; \mathbb{R})$. Ainsi $X \in \mathbb{M}(1 \times 2\,; \mathbb{R})$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x-2y &= 2 \\ 2x+y &= 5 \\ 3x &= 6 \end{cases}$$

Comme ce système n'admet pas de solution, l'équation matricielle donnée ne possède pas de solution.

(c) $AX^t = B \quad$ avec $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

On détermine la dimension de la matrice X^t :

$$\begin{array}{rcl} (2\times 2)\cdot(2\times p) &=& (2\times 3) \\ (2\times p) &=& (2\times 3) \end{array} \qquad \text{donc } p=3$$

Le produit est possible si et seulement si $X^t \in \mathbb{M}(2\times 3\,;\,\mathbb{R})$. Ainsi $X \in \mathbb{M}(3\times 2\,;\,\mathbb{R})$.

La matrice A est carrée mais son déterminant vaut 0. On ne peut donc pas l'inverser, il faut donc poser :

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z & u \\ y & t & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & z+3t & u+3v \\ 2x+6y & 2z+6t & 2u+6v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x+3y &= 1 \\ z+3t &= 2 \\ u+3v &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1-3y \\ z &= 2-3t \\ u &= -1-3v \end{cases} \quad \text{ce qui est vérifié pour tout } y\,,t\,,v \in \mathbb{R}$$

Les matrices solutions de l'équation matricielle sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 1-3y & y \\ 2-3t & t \\ -1-3v & v \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } y\,,t\,,v \in \mathbb{R}$$

(d) $AX^t = B \quad$ avec $\quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

On détermine la dimension de la matrice X^t :

$$\begin{array}{rcl} (2\times 2)\cdot(2\times p) &=& (2\times 3) \\ (2\times p) &=& (2\times 3) \end{array} \qquad \text{donc } p=3$$

Le produit est possible si et seulement si $X^t \in \mathbb{M}(2\times 3\,;\,\mathbb{R})$. Ainsi $X \in \mathbb{M}(3\times 2\,;\,\mathbb{R})$.

La matrice A est carrée et son déterminant est différent de 0. On peut donc l'inverser ainsi et multiplier à gauche par A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-1}\,A\,X^t = A^{-1}\,B \quad \Leftrightarrow \quad X^t &= A^{-1}\,B = \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'unique solution

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$

On détermine la dimension de la matrice X :

$$(3 \times 1) \cdot X \cdot (3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (3 \times 3)$$

Le produit est possible si et seulement si $X \in \mathbb{M}(1 \times 3\,; \mathbb{R})$.

On pose : $\quad X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

On observe le produit $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et on détermine la dimension de la matrice obtenue.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b - c \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(1 \times 1\,; \mathbb{R})$$

On pose pour plus de clarté : $3a - b - c = \alpha \in \mathbb{R}$

et on calcule les produits matriciels de la partie gauche de l'équation.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 5\alpha \\ 7\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha & -6\alpha & 3\alpha \\ 5\alpha & -10\alpha & 5\alpha \\ 7\alpha & -14\alpha & 7\alpha \end{pmatrix}$$

Finalement on a :

$$\begin{pmatrix} 3\alpha & -6\alpha & 3\alpha \\ 5\alpha & -10\alpha & 5\alpha \\ 7\alpha & -14\alpha & 7\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

X est solution si et seulement si $\alpha = 1$ c'est-à-dire $3a - b - c = 1$. D'où l'ensemble des solutions :

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 3a - b - 1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Remarques :

- Des regroupements moins judicieux conduisent à des produit de matrices d'ordre 3 et à des calculs un peu plus longs.
- $\begin{pmatrix} 3\alpha & -6\alpha & 3\alpha \\ 5\alpha & -10\alpha & 5\alpha \\ 7\alpha & -14\alpha & 7\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix} = S_\alpha\, B$

  $S_\alpha\, B$ peut aussi voir comme $\alpha\, B$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminants : exercice 19

(a) Soient $M \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R})$ une matrice fixée telle que $\det M \neq 0$ et $B = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix}$.

et l'équation $(B+I_2)BXM = 0$.

On peut multiplier par M^{-1} à droite car $\det M \neq 0$ par hypothèse.

D'où

$(B+I_2)B\,X\,MM^{-1} = 0\,M^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (B+I_2)BX = 0$

Cette équation possède d'autres solutions que la solution $X = 0$ si et seulement si

$(B+I_2)B$ n'est pas inversible, c'est-à-dire :

$$\det[(B+I_2)B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \det(B+I_2) = 0 \\ \text{ou} \\ \det B = 0 \end{array} \right.$$

$$B + I_2 = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(B+I_2) = (a+1)(a+2) - 2(a+1) = (a+1)(a+2-2) = a(a+1) = 0 \\ \text{ou} \\ \det B = a(a+1) - 2(a+1) = (a+1)(a-2) = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire : $\quad a \in \{-1, 0, 2\}$

(b) Soit l'équation $(B+I_2)BXM = BM$ et $a = 2$.

Par (a) : $\det B = 0$ et $\det(B+I_2) = 6$, donc

$B + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, mais $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ne l'est pas !

On multiplie à gauche par $(B+I_2)^{-1}$ et à droite par M^{-1}. On obtient :

$BX = (B+I_2)^{-1}B$

et on calcule l'inverse de $(B+I_2)$:

$$(B+I_2)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice B n'étant pas inversible, on pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ 2x+3z & 2y+3t \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3z = \frac{1}{3} \\ \\ 2y + 3t = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x \\ \\ t = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}y \end{array} \right. \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x & \frac{1}{6} - \frac{2}{3}y \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Déterminants : exercice 20

Soit $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $X \in M \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R})$.

On veut déterminer $a \in \mathbb{R}$ de telle manière que l'équation

$$B^k(B+B^t)X = 0, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

admette comme solution unique $\quad X = 0$.

La solution $X = 0$ est unique ssi $B^k(B+B^t)$ est une matrice inversible.

càd :

$\det(B^k(B+B^t)) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\det B)^k \cdot \det(B+B^t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det B \cdot \det(B+B^t) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Or :

$B + B^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$,

d'où :

$\begin{cases} \det B = a \neq 0 \\ \det(B+B^t) = 4a - a^2 = a(4-a) \neq 0 \end{cases}$

La solution est unique et nulle ssi $\quad a \notin \{0\,,\,4\}$.

On pose $a = 4$ et $k = 1$:

La matrice B est inversible pour $a = 4$ ... mais pas la matrice $B + B^t$.

Il s'agit donc de résoudre l'équation : $\quad (B+B^t)X = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8x + 4z &= 0 \\ 8y + 4t &= 0 \\ 4x + 2z &= 0 \\ 4y + 2t &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z &= 0 \\ 2y + t &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -2x \\ t &= -2y \end{cases}$$

ce qui donne finalement : $\qquad X = \begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} \qquad \forall x\,,\,y \in \mathbb{R}$

Espaces vectoriels : exercice 1

Idée : Prendre en défaut un des axiomes de la définition des espaces vectoriels.

On teste en priorité l'un de ces axiomes :

- la stabilité,
- l'appartenance de l'élément neutre,
- l'opposé de tout élément de V doit appartenir à V.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}$.

A est muni de la loi d'addition des couples et de la multiplication par un scalaire.

Il est évident que $(0;0)$ est l'élément neutre de A.

Soit par exemple l'élément $(2;0) \in A$.
Il a comme opposé l'élément $(-2;0)$ car $(2;0)+(-2;0)=(2-2;0)=(0;0)$.
Mais $(-2;0) \notin A$, donc cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x-2y+2=0\}$.
B est muni de la loi d'addition des couples et de la multiplication par un scalaire.

L'élément neutre $(0;0) \notin B$ car $0-2\cdot 0+2 \neq 0$.
Donc cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Remarque : géométriquement B est une droite ne passant pas par l'origine.

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x-y=0\}$.
C est muni de la loi d'addition des couples et de la multiplication par un scalaire.

On montre qu'il n'y a pas stabilité en choisissant deux éléments dans C et on les additionne.
Soient $(1;-1) \in C$ car $1+(-1)=0$ et $(1;2) \in C$ car $2\cdot 1-2=0$.

Mais $(1;-1)+(1;2)=(1+1;-1+2)=(2;1) \notin C$.

Donc cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Remarque : géométriquement C est la réunion de deux droites passant par l'origine. Ces deux droites sont des espaces vectoriels mais leur réunion ne l'est pas.

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ (boule unité).
D est muni de la loi d'addition des triples et de la multiplication par un scalaire.

On montre qu'il n'y a pas stabilité en choisissant deux éléments dans D et on les additionne.
Soient $(1;0;0) \in D$ car $1^2+0^2+0^2 \leq 1$ et $(0;1;0) \in D$ car $0^2+1^2+0^2 \leq 1$.

Mais $(1;0;0)+(0;1;0)=(1+0;0+1;0+0)=(1;1;0) \notin D$ car $1^2+1^2+0 \geq 1$.

Donc cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

(e) $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \,/\, \deg(P)=3\}$.

On montre qu'il n'y a pas stabilité en choisissant deux éléments dans E et on les additionne.
Soient $p(x)=x^3 \in E$ et $r(x)=-x^3+x \in E$.
$p(x)+r(x)=x \notin E$.

On a aussi que l'élément neutre $p(x)=0$ n'appartient pas à E.

Donc cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Espaces vectoriels : exercice 2

Il peut s'avérer efficace, avant d'effectuer tout calcul, d'essayer de deviner une éventuelle dépendance linéaire entre les vecteurs donnés.

(a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont manifestement non colinéaires et donc linéairement indépendants.

Avec deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ linéairement indépendants, on peut écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ comme une combinaison linéaire (unique) de ces vecteurs. En particulier, $\vec{v}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

Nous pouvons de plus chercher une telle combinaison linéaire : déterminons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$.

$$\vec{v} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 3\beta & = & -1 \\ 2\alpha - \beta & = & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & -1 \end{array} \right.$$

et donc $\vec{v} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

(b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont manifestement colinéaires ($2\vec{a}_1 = \vec{a}_2$) et donc linéairement dépendants.

Comme $\vec{v}$ ne leur est pas colinéaire, il n'est pas possible d'écrire $\vec{v}$ comme combinaison de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

(c) $\vec{a}_1 = \vec{x} - \vec{y} \qquad \vec{a}_2 = \vec{y} + \vec{z} \qquad \vec{v} = -\vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z} \qquad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linéairement indépendants.

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont manifestement non colinéaires et donc linéairement indépendants. En effet, cherchons à déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2$.

$$\vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} = \lambda(\vec{y} + \vec{z}) \Leftrightarrow \vec{x} - (1 + \lambda)\vec{y} - \lambda\vec{z} = \vec{0}$$

ce qui est impossible par indépendance linéaire de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tous les coefficients devant être nuls.

Avec deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants, on ne peut pas écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.
Cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$:

$$\vec{v} = -\vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 = \alpha(\vec{x} - \vec{y}) + \beta(\vec{y} + \vec{z}) = \alpha\vec{x} + (-\alpha + \beta)\vec{y} + \beta\vec{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha + 1)\vec{x} + (-\alpha + \beta - 1)\vec{y} + (\beta - 2)\vec{z} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha + 1 = 0\,, \quad -\alpha + \beta - 1 = 0\,, \quad \beta - 2 = 0$$

car $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linéairement indépendants.
Ainsi $\vec{v} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ ssi $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $-\alpha + \beta - 1 = 0$, ce qui est impossible.

Remarque : si $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont linéairement indépendants, toute combinaison linéaire $\vec{v}$ des $\vec{a}_i$ s'écrit de manière unique. En particulier, si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont linéairement indépendants,

$$\vec{v} = -\vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z} = \alpha\vec{x} + (-\alpha + \beta)\vec{y} + \beta\vec{z}$$

$$\Leftrightarrow -1 = \alpha\,, \quad 1 = -\alpha + \beta\,, \quad 2 = \beta,$$

par égalité des coefficients.

(d) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Il n'y a pas de dépendance évidente entre les vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Testons donc la dépendance. Comme il s'agit de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser le déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} \overset{c_1' = c_1 - 3c_3}{=} \begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 10 & -6 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{selon } \ell_2}{=} -(-1) \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = 28 \neq 0\,.$$

Ainsi, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ sont linéairement indépendants.

Avec trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants, on peut écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme une combinaison linéaire (unique) de ces vecteurs. En particulier, $\vec{v}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$.

Nous pouvons de plus chercher une telle combinaison linéaire : déterminons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3$.

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{v} & = & \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha & +2\beta & +3\gamma & = & 2 \\ -3\alpha & & -\gamma & = & 4 \\ 7\alpha & -6\beta & -\gamma & = & -5 \end{array} \right. \\
& \overset{\ell_3'=\ell_3+3\ell_1}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha & +2\beta & +3\gamma & = & 2 \\ -3\alpha & & -\gamma & = & 4 \\ 10\alpha & & +8\gamma & = & 1 \end{array} \right. \\
& \overset{\ell_3'=\ell_3+8\ell_2}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha & +2\beta & +3\gamma & = & 2 \\ -3\alpha & & -\gamma & = & 4 \\ -14\alpha & & & = & 33 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & -\frac{33}{14} \\ \gamma & = & -3\alpha - 4 = \frac{43}{14} \\ \beta & = & \frac{1}{2}(2 - \alpha - 3\gamma) = -\frac{17}{7} \end{array} \right.
\end{array}
$$

et donc $\vec{v} = \frac{1}{14}(-33\vec{a}_1 - 34\vec{a}_2 + 43\vec{a}_3)$.

Remarque : nous pouvons également déterminer les coefficients α , β et γ en résolvant l'équation matricielle

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} .
$$

Le déterminant de la matrice carrée, notée A , étant $\det A = 28 \neq 0$, cette matrice est inversible. Sa comatrice est

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 18 \\ -16 & -22 & 20 \\ -2 & -8 & 6 \end{pmatrix}
$$

et son inverse

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -6 & -16 & -2 \\ -10 & -22 & -8 \\ 18 & 20 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -1 \\ -5 & -11 & -4 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} .
$$

Alors

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -1 \\ -5 & -11 & -4 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -33 \\ -34 \\ 43 \end{pmatrix} .
$$

Cette méthode n'est pas la plus efficace...

(e) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont manifestement non colinéaires et donc linéairement indépendants.

Comme la famille $\{\vec{a}_1, \vec{a}_1, \vec{0}\}$ est liée, $\vec{v} = \vec{0}$ est combinaison linéaire (triviale) de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$: $\vec{v} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2$.

(f) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont manifestement colinéaires ($2\vec{a}_1 = \vec{a}_2$) et donc linéairement dépendants.

Le vecteur $\vec{v}$ leur est colinéaire, car

$$\vec{v} = -6\vec{a}_1 = -3\vec{a}_2 .$$

Il est donc possible d'écrire $\vec{v}$ comme combinaison linéaire (non unique) de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ et

$$\vec{v} = -6\vec{a}_1 + \vec{0} = -6\vec{a}_1 + \lambda\underbrace{(2\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}_{\vec{0}} = (2\lambda - 6)\vec{a}_1 - \lambda\vec{a}_2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} .$$

Espaces vectoriels : exercice 3

(a) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ p^2 - 4p - 3 \\ p^2 + p + 1 \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont linéairement dépendants si leurs composantes sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{a} = k\vec{b}$. D'où

$$\left\{\begin{array}{rll} 1 & = -3k & (1) \\ 2 & = k(p^2 - 4p - 3) & (2) \\ -1 & = k(p^2 + p + 1) & (3) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll} k & = -\frac{1}{3} & (1) \\ 2 & = -\frac{1}{3}(p^2 - 4p - 3) & (2) \\ -1 & = -\frac{1}{3}(p^2 + p + 1) & (3) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rll} p^2 - 4p + 3 = & 0 & (2) \\ p^2 + p - 2 = & 0 & (3) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll} (p-1)(p-3) = & 0 & (2) \\ (p+2)(p-1) = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

La seule solution commune du système est $p = 1$; donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **linéairement dépendants** pour $p = 1$ et **linéairement indépendants** pour $p \neq 1$.

(b) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, il est plus efficace d'utiliser la propriété suivante des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ plutôt que d'établir la dépendance linéaire

$$\vec{a}\,, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ sont linéairement dépendants ssi } \det(\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & 1-p & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 2 & p \end{vmatrix} = (p-1)^2(p+2)$$

donc si :

- $p \in \{1;-2\}$, $\quad (\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})$ sont linéairement dépendants ;
- $p \notin \{1;-2\}$, $\quad (\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})$ sont linéairement indépendants .

(c) Soient $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} p-2 \\ 2 \\ 2p \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 2(p+1) \end{pmatrix}, \quad$ et $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix}.$

$\vec{a}\,,\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants ssi $\det(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}) = 0$. text et

$$\begin{vmatrix} p-2 & 2 & -1 \\ 2 & p & 2 \\ 2p & 2(p+1) & p+1 \end{vmatrix} \underset{c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} p-1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 2 \\ p-1 & 2(p+1) & p+1 \end{vmatrix} \underset{\ell_3-\ell_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} p-1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 2 \\ 0 & 2p & p+2 \end{vmatrix} = (p-1)(p^2+2p-4p) = p(p-1)(p-2) = 0\,,$$ donc si :

- $p \in \{0;1;2\}$, $\quad (\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})$ sont linéairement dépendants ;
- $p \notin \{0;1;2\}$, $\quad (\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})$ sont linéairement indépendants .

Espaces vectoriels : exercice 4

Remarque : Il peut s'avérer efficace, avant d'effectuer tout calcul, d'essayer de deviner une éventuelle dépendance linéaire entre les polynômes donnés.
Si aucune dépendance linéaire n'est évidente, on applique le critère selon le théorème sur la dépendance linéaire.

(a) Déterminons sous quelles conditions sur $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la combinaison linéaire $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ est nulle.

$$\begin{aligned}
\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha(t+2t^2) + \beta(1+2t+t^2) + \gamma(2+t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2\alpha+\beta)t^2 + (\alpha+2\beta+\gamma)t + \beta + 2\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta & = & 0 \\ \alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \text{ par indépendance linéaire de } t^2, t, 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha & = & -\beta \\ 2\alpha+4\beta+2\gamma & = & 0 \\ 2\gamma & = & -\beta \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha & = & -\beta \\ -\beta+4\beta-\beta & = & 0 \\ 2\gamma & = & -\beta \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0\,.
\end{aligned}$$

La seule manière d'avoir une combinaison linéaire nulle des polynômes f_1, f_2, f_3 est donc la manière triviale : ils sont linéairement indépendants.

Remarque : de même qu'on peut écrire tout polynôme de $P_2[t]$ comme combinaison linéaire (unique) des trois polynômes linéairement indépendants t^2, t et 1, on peut écrire tout polynôme de $P_2[t]$ comme combinaison linéaire (unique) des trois polynômes linéairement indépendants f_1, f_2 et f_3.

Suivant la remarque ci-dessus, on peut, de manière unique, exprimer f_4 comme combinaison linéaire des f_1, f_2, f_3 .
Déterminons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = f_4$.

$$\begin{aligned}
\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = f_4 &\Leftrightarrow \alpha(t+2t^2) + \beta(1+2t+t^2) + \gamma(2+t) = 1 - 3t - t^2 \\
&\Leftrightarrow (2\alpha+\beta)t^2 + (\alpha+2\beta+\gamma)t + \beta + 2\gamma = 1 - 3t - t^2 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta & = & -1 \\ \alpha+2\beta+\gamma & = & -3 \\ \beta+2\gamma & = & 1 \end{array}\right. \text{ par indépendance linéaire de } t^2, t, 1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha & = & -\beta-1 \\ 2\alpha+4\beta+2\gamma & = & -6 \\ 2\gamma & = & -\beta+1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha & = & -\beta-1 \\ -\beta-1+4\beta-\beta+1 & = & -6 \\ 2\gamma & = & -\beta+1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -3 \\ \alpha & = & 1 \\ \gamma & = & 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi $f_4 = f_1 - 3f_2 + 2f_3$. Cette combinaison linéaire est unique.

(b) *Remarque :* On peut essayer d'écrire la matrice “la plus compliquée” comme combinaison linéaire des autres ; ou encore la matrice contenant un zéro comme combinaison linéaire des autres.
On cherche une combinaison linéaire de la forme

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 .$$

En se basant sur le coefficients à la deuxième ligne et à la deuxième colonne, on doit avoir

$$\alpha + 2\beta + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta .$$

En choisissant $\gamma = -1$, on doit avoir

$$A_3 = -2\beta A_1 + \beta A_2 = \beta(-2A_1 + A_2) = \beta \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -2 .$$

On a donc l'existence de α, β, γ non tous nuls tels que

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 .$$

Par exemple

$$-2A_1 + A_2 - A_3 = 0 .$$

Remarque : On cherche à déterminer α, β, γ tels que $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = A_4$.
Comme

- A_1, A_2, A_3 sont linéairement dépendants,
- en particulier $A_3 = -2A_1 + A_2$
- A_1, A_2 sont linéairement indépendants (car non colinéaires),

toute combinaison linéaire des A_1, A_2, A_3 est aussi combinaison linéaire des A_1 et A_2 seulement.
On peut alors chercher à déterminer α et β tels que $\alpha A_1 + \beta A_2 = A_4$. Si α et β existent, ils sont uniques.
On chercher à déterminer α et β tels que $\alpha A_1 + \beta A_2 = A_4$.

$$\begin{aligned}
\alpha A_1 + \beta A_2 &= A_4 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} \alpha & +3\beta & = & 5 \\ 3\alpha & +2\beta & = & -6 \\ 2\alpha & -\beta & = & -11 \\ \alpha & +2\beta & = & 2 \end{array}\right. \\
&\overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_4}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrr} \alpha & +3\beta & = & 5 \\ 2\alpha & & = & -8 \\ 2\alpha & -\beta & = & -11 \\ \alpha & +2\beta & = & 2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} & \beta & = & 3 \\ \alpha & & = & -4 \\ 2\alpha & -\beta & = & -11 \\ \alpha & +2\beta & = & 2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \alpha & = & -4 \\ \beta & = & 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

et donc $A_4 = -4A_1 + 3A_2$.
Cette combinaison n'est pas unique. En effet

$$A_4 = -4A_1 + 3A_2 = -4A_1 + 3A_2 + \lambda(\underbrace{-2A_1 + A_2 - A_3}_{0}) =$$

$$= (-4 - 2\lambda)A_1 + (3 + \lambda)A_2 - \lambda A_3 \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque : en cherchant à déterminer α, β, γ tels que $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = A_4$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 &= A_4 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} \alpha & +3\beta & +\gamma & = & 5 \\ 3\alpha & +2\beta & -4\gamma & = & -6 \\ 2\alpha & -\beta & -5\gamma & = & -11 \\ \alpha & +2\beta & & = & 2 \end{array}\right. \\
&\overset{\ell_2=\ell_1+\ell_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrrr} \alpha & +3\beta & +\gamma & = & 5 \\ 2\alpha & -\beta & -5\gamma & = & -11 \\ \alpha & +2\beta & & = & 2 \end{array}\right. \\
&\overset{5\ell_1+\ell_2=7\ell_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrrr} \alpha & +3\beta & +\gamma & = & 5 \\ 2\alpha & -\beta & -5\gamma & = & -11 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} \alpha & +3\beta & = & 5-\gamma \\ 2\alpha & -\beta & = & -11+5\gamma \end{array}\right. \\
&\overset{\ell_1'=\ell_1+3\ell_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrr} 7\alpha & & = & -28+14\gamma \\ 2\alpha & -\beta & = & -11+5\gamma \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \alpha & = & -4+2\gamma \\ \beta & = & 2\alpha + 11 - 5\gamma = 3 - \gamma\,. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

et donc
$$A_4 = (-4 + 2\gamma)A_1 + (3 - \gamma)A_2 + \gamma A_3 \quad \gamma \in \mathbb{R}\,.$$
Cette méthode est clairement moins efficace !

Espaces vectoriels : exercice 5

Dans ce cas, le plus simple est d'utiliser la définition de la dépendance linéaire.
Les trois matrices sont linéairement dépendantes si et seulement si l'une d'entre elle est une combinaison linéaire des deux autres.

Il est évident que A et B sont linéairement indépendantes car leurs coefficients ne sont pas proportionnels ou il suffit d'observer où se trouvent les zéros ! De même pour A et C et pour B et C.

L'idée est donc d'exprimer la matrice C comme une combinaison linéaire de A et B et de résoudre le système.

$$\begin{aligned} C = \alpha A + \beta B \qquad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où le système à résoudre :
$$\begin{cases} 1 & = \alpha + 2\beta \\ t-2 & = 2\alpha \\ 2t & = 3\alpha \\ 10 & = 4\beta \end{cases}$$
qui est vérifié pour $\alpha = -4\,,\ \beta = \frac{5}{2}$ et $t = -6\,.$

Ainsi pour $t = -6$ ces trois matrices sont linéairement dépendantes.