31.5.19

Corrigé de la Série 20

1. $\sinh(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ et

$\cosh(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ d'où:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

car :

$$\begin{array}{lcl}
x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots & : & \underline{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots} \\
\underline{x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5} & & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\
\quad -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & & \\
\quad \underline{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5} & & \\
\qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 + \dots & & \\
\qquad\qquad \underline{\frac{2}{15}x^5 + \dots} & & \\
\qquad\qquad\quad \dots & &
\end{array}$$

2. (a) On peut appliquer le développement de Taylor à la lettre (pénible, long); on peut aussi consulter une table de d.l. et faire une division en puissances croissantes (mieux) ou encore multiplier le d.l. de cosx par le d.l. de e^{-x}, trouvé à partir du d.l. de e^x en changeant x en -x (pas mal non plus)...

On va réaliser cette dernière suggestion :

$$(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots) = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Attention: bien regrouper les termes par ordre de puissances croissantes !

(b) Une simple division par puissances croissantes nous donne le résultat :

$$\frac{\sin x}{x+1} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x+1} \simeq x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$$

3. (a) $f(x) = \cos x = \cos(\frac{\pi}{4} + t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)$; on considère ici le d.l. au voisinage de $t = 0$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{6}t^3) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - t - \frac{1}{2}t^2)$ à l'ordre 2 ;

en remplaçant t par sa valeur en x, on trouve la solution proposée:

$$f(x) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2\right)$$

Il est évident qu'on aurait pu simplement appliquer le d.l. selon la formule générale.

(b) $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} \simeq \left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right) : (1 + 2t + t^2)$;

on effectue la division en puissances croissantes, on remplace t par $x - 1$ et on trouve la solution proposée :

$$g(x) \simeq (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4$$

(c) $h(x) = \sqrt{\tan x} = \sqrt{\tan(t + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{1 + \tan t}{1 - \tan t}} = \Phi(t)$

et on procède au d.l. à l'ordre 3 de $\Phi(t)$ autour de $t = 0$.

$$\Phi(t) \simeq \sqrt{\frac{1 + t + \frac{t^3}{3}}{1 - t - \frac{t^3}{3}}} = \sqrt{1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3} = \sqrt{1 + \left(2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3\right)} = \sqrt{1+u}$$

$\sqrt{1+u} \simeq 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3$ et apès avoir réordonné les puissances de t :

$$\Phi(t) \simeq 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{6}t^3 \quad \Rightarrow \quad h(x) \simeq 1 + (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{5}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3$$

4. (a) On peut appliquer la formule de Taylor pour $x_0 = -2$:

$$P(x) = (x - x_0) \cdot \frac{P'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2 \cdot \frac{P''(x_0)}{2!} + \ldots$$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x + 1\,;\; P''(x) = 12x^2 - 18x + 4\,;\; P'''(x) = 24x - 18\,;$

$P^{(4)}(x) = 24; P^{(5)}(x) = 0 \Rightarrow$

$P(-2) = 45\,;\ P'(-2) = -75\,;\ P''(-2) = 88\,;\ P'''(-2) = -66\,;$

$P^{(4)}(-2) = 24\,;\ P^{(5)}(-2) = 0\,.$

D'où la réponse:

$$P_4(x) = (x+2)^4 - 11(x+2)^3 + 44(x+2)^2 - 75(x+2) + 45\,;$$

(b) On pose : $\quad t = x+2 \quad \Rightarrow \quad x = t-2$ et on développe:

$$P_4(t) = (t-2)^4 - 3(t-2)^3 + 2(t-2)^2 + (t-2) - 1\,;$$

...il faut donc connaître les coefficients du binôme et on obtient le résultat ci-dessus après regroupement des termes en ordre décroissant

$$P_4(t) = (t^4 - 4t^3\cdot 2^1 + 6t^2\cdot 2^2 - 4t\cdot 2^3 + 2^4) - 3(t^3 - 3t^2\cdot 2 + 3t\cdot 2^2 - 2^3) + 2(t^2 - 4t + 4) + (t-2) - 1$$

$$= (t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16) - 3(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) + 2t^2 - 7t + 5$$

$$P_4(t) = t^4 - 11t^3 + 44t^2 - 75t + 45\,.$$

5. Le développement de $\dfrac{1}{sinx}$ pourra être obtenu en divisant par x celui de $\dfrac{x}{sinx}$, car la fonction n'est, à proprement parler, pas définie en $x = 0$.

Divisons 1 (polynôme A) par B, le développement de :

$$\frac{sinx}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 \\
\cline{2-2}
\underline{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4} & 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \ldots \\
\quad \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 & \\
\quad \underline{\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{720}x^6} & \\
\qquad \frac{7}{360}x^4 - \frac{1}{720}x^6 & \\
\qquad \underline{\frac{7}{360}x^4 - \ldots} & \\
\qquad 0 + \ldots &
\end{array}$$

Divisons ce résultat par x : $\dfrac{1}{sinx} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{360}x^3 + \dots$

On retrouve bien sûr que si x tend vers 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{sinx} - \dfrac{1}{x}) = 0$.

6. (a) xe^x est nul en $x=0$, on trouve immédiatement son d.l. :

$$xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 + o(x^4)$$

On place alors ce dernier résultat dans le d.l. de arctan :

$\arctan(xe^x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 - \frac{1}{3}\left(x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^4\right)^3 + \dots$

$= x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{5}{6}x^4 + \dots$, tous les autres termes ont une puissance strictement supérieure.

(b) • Au voisinage de $x_0 = 0$
On connaît le d.l. de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to x_0=0} \ln(1+x) = \ln(1+x_0) = \ln(1).$$

Comme $1+x$ ne tend pas vers 0 pour x tendant vers 0, on ne peut pas, dans $\ln(2+x)$, poser $t = 1+x$ et utiliser le DL pour $\ln(1+t)$.

On peut employer l'une des méthodes suivantes.

– Revenir à la définition générale du développement de Taylor de $\ln(x)$ en calculant ses dérivées successives en $x_0 = 2$.
– Passer par le DL de la dérivée de $\ln(2+x)$:

$$\big(\ln(2+x)\big)' = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

que l'on obtient soit par division en puissances croissantes, soit avec le développement connu de

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

Il reste à intégrer cette fonction:

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{64}x^4 + \dots$$

et de conclure

$$x\ln(2+x) = x\ln 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

– Avec la propriété de ln,

$$\ln(2+x) = \ln\big(2(1+\tfrac{x}{2})\big) = \ln 2 + \ln(1+\tfrac{x}{2})$$

et du développement de $\ln(1+t)$ ($t = \frac{x}{2}$) autour de 0,

$$\begin{aligned} x\ln(2+x) &= x\left(\ln 2 + \ln(1+\tfrac{x}{2})\right) \\ &= x\ln 2 + x\left(\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) \\ &= x\ln 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

- Au voisinage de $x_0 = -1$: $x = x_0 + t = t - 1$. On peut donc faire le changement de variable $t = 1 + x$ ($\lim_{x\to -1} t = 0$) et chercher le d.l. autour de $t_0 = 0$:

  $f(x) = (t-1)\ln(1+t)$ et $\ln(1+t)$ est connu dans les tables ;

  on multiplie le résultat par $(t-1)$ et on réarrange les puissances de t :

  $$(t-1)\ln(1+t) = (t-1)(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \ldots) = -t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \frac{7}{12}t^4 + \ldots$$

  Enfin, avec $t = x + 1$,

  $$x\ln(2+x) = -(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{6}(x+1)^3 + \frac{7}{12}(x+1)^4 + o((x+1)^4)\,.$$

7. (a) Pour $n = 1$, on vérifie que $(-\mathrm{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta) = \sin(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}(x)$.

Supposons la relation vérifiée pour $n-1$. Notons d'abord, que pour $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\theta = -\mathrm{sgn}(x)\frac{1}{1+x^2}.$$

On a alors, pour $x \neq 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Arctan}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathrm{Arctan}(x)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left((-\mathrm{sgn}(x))^{n-2}(n-2)!\sin^{n-1}(\theta)\sin((n-1)\theta)\right)$$

$$= (-\mathrm{sgn}(x))^{n-2}(n-1)!\frac{d\theta}{dx}\left(\sin^{n-2}(\theta)\cos(\theta)\sin((n-1)\theta) + \sin^{n-1}(\theta)\cos((n-1)\theta)\right)$$

$$= (-\mathrm{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\frac{\sin^{n-2}(\theta)}{1+x^2}\left(\cos(\theta)\sin((n-1)\theta) + \sin(\theta)\cos((n-1)\theta)\right)$$

$$= (-\mathrm{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\frac{\mathrm{sgn}(x)\sin^{n-2}(\theta)}{1+x^2}\sin(n\theta)$$

$$= (-\mathrm{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta),$$

et on conclut, que la relation est vérifiée pour $x \neq 0$.

Si $n = 2l$, alors $(-\text{sgn}(x))^{n-1} = -1$, et pour $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\sin(n\theta) = \sin(l\pi) = 0$. Ainsi, $(-\text{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta)$ est continue et prolongeable en $x = 0$.

Si $n = 2l+1$, alors $(-\text{sgn}(x))^{n-1} = 1$. Ainsi, $(-\text{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta) = (n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta)$ est continue et prolongeable en $x = 0$.

Dans les deux cas,

$$\frac{d^n}{dx^n}\text{Arctan}(x) = (-\text{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la récurrence est vérifiée.

(b)

$n = 2l$:

$\sin(n\theta) = \sin(l\pi) = 0$, et $\frac{d^n}{dx^n}\text{Arctan}(x) = 0$.

$n = 2l+1$:

$\sin(n\theta) = \sin(l\pi + \pi/2) = (-1)^l$, et $\frac{d^n}{dx^n}\text{Arctan}(x) = (2l!)(-1)^l$.

Toutes les dérivées d'ordre pair s'annule donc, alors que les dérivées d'ordre $n = 2l+1$ égalent $(2n-1)!(-1)^l$.

Ainsi, les n premiers termes non nuls du développement limités correspondent à la série de Taylor d'ordre $2n-1$, et on a

$$\text{DL}_0^{2n-1}(\text{Arctan}(x)) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{2l+1}.$$

(c) On a donc

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{2l+1} + \frac{x^{2n}}{2n!}\text{Arctan}^{(2n)}(\xi),$$

avec $\xi \in (0, x)$. Or, $|\text{Arctan}^{(2n)}(\xi)| = (2n-1)!|\sin^{2n}(\theta)\sin(2n\theta)| \leq (2n-1)!$,

ce qui implique, après substitution de x par 1,

$$|\frac{\pi}{4} - \sum_{l=0}^{n-1}\frac{(-1)^l}{2l+1}| \leq \frac{1}{2n},$$

et donc que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l 4}{2l+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2l+1}$$

oblème récréatif:

(Faire un dessin pour suivre le raisonnement) Le triangle APQ est isocèle de sommet P. L'angle $\angle(AQP)$ est donc égal à α et l'angle $\angle(PQC)$ égale $\pi - \alpha$. Le triangle PCQ est aussi isocèle de sommet Q. L'angle $\angle(QCP)$ égale donc $\alpha/2$.
Pour trouver le point P, on divise donc l'angle en A par deux. On rapport cet angle en C, ce qui forme une droite qui intersecte AB. Cette intersection est P.
Pour trouver Q on trace un cercle de rayon AP, centré en P. Ce cercle possède deux intersections avec AC: le point A et le point Q.