(a) Montrer que toute matrice de $\mathbb{M}_n$ est la somme directe d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
L'idée est d'utiliser le théorème montré à l'exercie précédent :

la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, où 0 est la matrice nulle d'ordre n.

- On pose :

  $A = \frac{1}{2}(M + M^t)$ et $B = \frac{1}{2}(M - M^t)$, alors

  $A \in F$ car $A^t = \frac{1}{2}(M + M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t + M) = A$

  $B \in G$ car $B^t = \frac{1}{2}(M - M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t - M) = -B$

  On calcule la somme :

  $A + B = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t) = M$ pour tout $M \in \mathbb{M}_n$.

  On a bien que $\mathbb{M}_n = F + G$

- Il faut encore montrer que $F \cap G = \{0\}$.

  Soit $M \in F \cap G$

  $M \in F \Leftrightarrow M = M^t \Leftrightarrow M - M^t = 0 \qquad (1)$

  $M \in G \Leftrightarrow M = -M^t \Leftrightarrow M + M^t = 0 \qquad (2)$

  En additionnant (1) et (2), on obtient $M = 0$.

  Donc la somme est directe : $\mathbb{M}_n = F \oplus G$

Remarque : F et G sont dits *supplémentaires* lorsque $F \oplus G = E$.

(b) Montrer que toute matrice de $\mathbb{M}_n$ est la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

- $S \in F \Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

  et

  $T \in G \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Il est évident que toute matrice carrée d'ordre n est la somme de deux matrices de ce type.

- $F \cap G$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, donc $F \cap G \neq \{0\}$. La somme n'est pas directe.

(c) Montrer que toute application de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la somme directe d'une application paire et d'une application impaire.

- On pose :

  $f(x) = \dfrac{1}{2}(h(x) + h(-x))$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}(h(x) - h(-x))$, alors

  $f(x) \in F$ car $f(-x) = \dfrac{1}{2}(h(-x) + h(x)) = f(x)$

  $g(x) \in G$ car $g(-x) = \dfrac{1}{2}(h(-x) - h(x)) = -g(x)$

  On calcule la somme :

  $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{2}(h(x) + h(-x)) + \dfrac{1}{2}(h(x) - h(-x)) = h(x)$ pour toute application $h(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

  On a bien que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F + G$

- Il faut encore montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}}\}$.

  Soit $h(x) \in F \cap G$

  $h(x) \in F \Leftrightarrow h(x) = h(-x) \Leftrightarrow h(x) - h(-x) = 0_{\mathbb{R}} \qquad (1)$

  $h(x) \in G \Leftrightarrow h(x) = -h(-x) \Leftrightarrow h(x) + h(-x) = 0_{\mathbb{R}} \qquad (2)$

  En additionnant (1) et (2), on obtient $h(x) = 0_{\mathbb{R}}$.

  Donc la somme est directe, F et G sont supplémentaires.