Série 14

1. Déterminer et caractériser les extrema et les points remarquables du graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = |x+4|\,\sqrt[3]{x}\,.$$

2. On donne les fonctions $f(x) = x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + p\,x + q\,.$

Déterminer les coefficients réels p et q de telle sorte qu'au point d'inflexion du graphe de g, celui-ci touche tangentiellement le graphe de f.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + n\,|x+2|}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,.$

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le graphe de f admet-il en $x_0 = -2$, un point anguleux qui n'est pas un extremum ?

4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = ax^2 + 6x - 3\,\mathrm{Arctg}(2x)\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer le paramètre réel a de sorte que le graphe de f admette un point à tangente horizontale qui ne soit pas un extremum.

5. Etudier les branches infinie du graphe de f défini par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - 2x\,.$

6. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^2+1}$, où a et b sont des paramètres réels.

Déterminer a et b pour que le graphe de la fonction f admette :

- une asymptote passant par l'origine,
- des points à tangente horizontale qui ne sont pas des extrema.

7. Pour quelle(s) valeur(s) de k, $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction suivante admet-elle un point de rebroussement en $x = 0$?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^k\,(x-1)^2}\,.$$

8. Exercice facultatif

Démontrer le théorème suivant :

Soit f une fonction continue en x_0 et dérivable sur un voisinage pointé de x_0.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Réponses de la série 14

1.
- Le point $(-4\,;\,0)$ est un maximum, c'est un point anguleux dont les demi-tangentes sont de pente $\sqrt[3]{4}$ et $-\sqrt[3]{4}$.
- Le point $(-1\,;\,-3)$ est un minimum à tangente horizontale.
- Le point $(0\,;\,0)$ n'est pas un extremum, mais c'est un point du graphe à tangente verticale.

2. $p = 2$ et $q = 2$.

3. Le graphe de f admet en $x_0 = -2$, un point anguleux qui n'est pas un extremum si et seulement si $n \in \{1\,,\,2\,,\,3\}$.

4. Le graphe de f admet un point à tangente horizontal qui n'est pas un extremum si et seulement si $a \in \{-3\,,\,0\,,\,3\}$.

5. Asymptotes obliques : $y = -3x - \frac{1}{2}$, $(x \to -\infty)$ et $y = -x + \frac{1}{2}$, $(x \to +\infty)$

6. $a = 0$ et $(\,b = 0$ ou $b = 9\,)$.

7. $k = 2$.
