APPLICATIONS DES MATHEMATIQUES: contrôle n^0 4

Durée: 1 heure 45'

30 pts donnent la note 6

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ☐

---

1. On considère le programme linéaire (PL) à un paramètre λ suivant:

$$\text{Minimiser } \mathbf{Z} = -(1-\lambda)\,x_1 + x_2 \text{ où } \mathbf{D}: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0\,;\, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda \geq \mathbf{0}.$$

1.1. Dans le plan muni d'un système d'axe orthonormé $(\mathbf{O}, x_1, x_2)$, hachurer le domaine admissible **D**.

1.2. Résoudre <u>graphiquement</u> ce PL , en fonction de λ et **<u>en illustrant très soigneusement</u>** .
<u>*Rappel*:</u> Z_λ est, dans la représentation graphique, l'ordonnée à l'origine de la droite d_λ : $x_2 = (1-\lambda)\,x_1 + Z_\lambda$.

6 1/2 pts

---

2. Soit le programme linéaire: <u>maximiser</u> $Z = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$ où:

$$\mathbf{D}: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 160 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.1. Les variables d'écart étant $\mathbf{s_1} \geq 0$, $\mathbf{s_2} \geq 0$, $\mathbf{s_3} \geq 0$, $\mathbf{s_4} \geq 0$, donner la forme standard du PL puis le (premier) tableau du simplexe associé; il correspond à la solution de base réalisable:

$$(\mathbf{x_1 = x_2 = x_3 = 0},\ \ \mathbf{s_1 = ?},\ \ \mathbf{s_2 = ?},\ \ \mathbf{s_3 = ?},\ \ \mathbf{s_4 = ?})$$

2.2. Résoudre ensuite ce problème en utilisant la **méthode du simplexe** (en commentant les tableaux successifs du simplexe).

2.3. En déduire que l'ensemble des solutions optimales correspond à un segment de droite dans l'espace des variables x_1, x_2, x_3. En donner une représentation paramétrique.

<u>Remarque</u>. Si on ne connaît pas la méthode du simplexe, essayer de résoudre graphiquement le problème en utilisant une représentation spatiale (axonométrie) de système d'axes $(\mathbf{O}, x_1, x_2, x_3)$.

8 pts

---

3. Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre: $\mathbf{x^2\,y' - y = 1}$.

3.1. Déterminer la solution générale de cette équation sur chacun des intervalles $\mathbf{I_1} =]-\infty, 0[$ et $\mathbf{I_2} =]0, +\infty[$.

3.2. Déterminer (en justifiant) la famille de solutions définies sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
<u>*Indication*</u>. Il s'agit du problème de prolongement (raccordement), au point d'abscisse $\mathbf{x = 0}$, de la solution générale obtenue au point 3.1.

11 pts

☞ *[Tourner s.v.p.]*

4. Un circuit électrique contient, en série, un générateur de force électromotrice $\mathbf{V} = 100$ volts et de résistance intérieure négligeable, une résistance $\mathbf{R} = 1$ ohm, une inductance $\mathbf{L} = 10$ henrys et un interrupteur. Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
Donner l'expresssion de l'intensité $\mathbf{i}(t)$ du courant (en ampères) en fonction du temps, ainsi que sa valeur au temps $t = 0{,}1$ seconde à 1 % près.

Indication. On sait que $\mathbf{i}$ est donné par la solution de l'équation différentielle $\mathbf{L}\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{Ri} = \mathbf{V}$, satisfaisant à la condition initiale $\mathbf{i} = 0$ pour $t = 0$).

4 1/2 pts