Examen Analyse IV, Correction non-officielle

Cours du Prof. Marco Picasso, sections MT/SV

Maximilian Wettstein, Bassam El Rawas

Juin 2021

Partie 1 : QCM

Exercice 1:

$\langle Df, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi'(x)\, dx$. Une IPP donne ensuite:

$$\langle Df, \varphi \rangle = -\left[e^{-x}\varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} -e^{-x}\varphi(x)\, dx$$

Ensuite, on sait que $\varphi \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire que φ est C^∞ sur un compact (ensemble fermé et borné) et vaut 0 ailleurs. Ceci veut dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, et donc:

$$\langle Df, \varphi \rangle = \varphi(0) + \int_0^{+\infty} -f(x)\varphi(x)\, dx = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle -f, \varphi \rangle = \langle -f + \delta, \varphi \rangle$$

On en conclut que $\boxed{Df = -f + \delta}$.

Exercice 2:

- $\boxed{\text{Faux}}$: $\frac{1}{z}$ est sa propre serie de Laurent, $z_0 = 0 \in \text{int}(\gamma)$ est la seule singularité et $\text{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$. Par le théorème des résidus, $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$. On aurait pu trouver le même resultat par un calcul direct, ou par l'application de la formule integrale de Cauchy.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: $\frac{\cos(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-2}$. La seule singularité est en $z_0 = 0 \in \text{int}(\gamma)$, et on remarque en regardant la serie de Laurent que $\text{Res}_{z_0}\left(\frac{\cos(z)}{z^2}\right) = 0$. Donc $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2}\, dz = 0$. On aurait aussi pu appliquer la formule integrale de Cauchy, avec $f(z) = \cos(z)$.

- $\boxed{\text{Faux}}$: les singularités de cette fonction sont $z_0 = 0$ et $z_1 = -1$. Or $z_1 \in \gamma$, l'intégrale n'est donc pas bien définie.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: $\frac{1}{(z+2)^2}$ possede une singularité en $z_0 = -2 \notin \text{int}(\gamma)$. La fonction est donc holomorphe à l'interieur du cercle unité, et donc $\int_\gamma \frac{1}{(z+2)^2}\, dz = 0$.

- $\boxed{\text{Faux}}$: Comme pour la 2e proposition: $\frac{\cos(z)}{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-3}$, et la seule singularité est en $z_0 = 0 \in \text{int}(\gamma)$. En regardant la série de Laurent, $\text{Res}_{z_0}\left(\frac{\cos(z)}{z^3}\right) = \frac{-1}{2}$. Donc $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3}\, dz = -i\pi$. On aurait pu aussi appliquer la formule intégrale de Cauchy.

Exercice 3:

- $\boxed{\text{Vrai}}$: si f est holomorphe alors f est egale à sa série de Taylor.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: si f est holomorphe, alors l'intégrale de f sur une courbe simple fermée régulière est 0.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: on applique la formule integrale de Cauchy: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$.

  Ici, il suffit de prendre $f(z) = 1$ et on a donc $1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz \implies \int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$.

- $\boxed{\text{Faux}}$: c.f le cours, $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: on part de la 1ere proposition et on divise par $z - z_0$.

- $\boxed{\text{Faux}}$: $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$ par la formule intégrale de Cauchy. Le résultat n'est donc pas forcément nul.
  De plus, on sait que f est holomorphe, donc $\frac{f(z)}{z-z_0}$ possède un pole d'ordre 1 en z_0, et $z_0 \in \text{int}(\gamma)$.
  On peut appliquer le théorème des résidus:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \,\text{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = 2\pi i \underbrace{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\frac{f(z)}{z-z_0}}_{\text{car } z_0 \text{ est un pole d'ordre 1}} = 2\pi i \lim_{z\to z_0} f(z) = 2\pi i f(z_0)$$

  On retombe sur le même résultat. Ce raisonnement est un peu plus long, mais fonctionne quand même.

- still can't remember :(

Exercice 4:

- $\boxed{\text{Vrai}}$: il s'agit d'une série de Laurent centrée en 0. La seule singularité de la fonction est en $z_0 = 1$, ce qui donne un rayon de convergence de 1.

  En ce qui concerne la série, nous pouvons regarder la somme partielle qui vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$ pour un $N \in \mathbb{N}$ (cf analyse I, somme des termes d'une suite géométrique). Comme $|z| < 1$, lorsque $N \to +\infty$, on obtiens $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

- $\boxed{\text{Faux}}$: on sait que $\sin(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Il manque le $(-1)^n$ dans la réponse proposée.

- $\boxed{\text{Vrai}}$: On sait que $e^z = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, donc en injectant $\frac{1}{z-1}$ dans la formule, on obtiens la réponse proposée.

- $\boxed{\text{Faux}}$: en partant de la 1ère proposition, $\dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{1-(-z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$. On remarque que le facteur $(-1)^n$ manque dans la réponse proposée.

Exercice 5:

On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ et on s'interesse à $\displaystyle\int_\gamma f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{iz}\,dz$.

On peut paramétrer γ par $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi \implies \gamma'(t) = ie^{it}$. De plus, $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

On a donc:

$$\int_\gamma f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{iz}\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{f\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{ie^{it}}}_{f(\gamma(t))}\cdot\underbrace{ie^{it}}_{\gamma'(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} f(\sin(t))\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5}-\sin(t)}\,dt = I$$

Il faut donc calculer $I = \int_\gamma f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{iz}\,dz$. On peut faire cela avec le théorème des résidus.

Nous avons tout d'abord:

$$f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{iz} = \frac{1}{\sqrt{5}-\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz} = \frac{2}{-z^2+2iz\sqrt{5}+1} \implies I = \int_\gamma \frac{2}{-z^2+2iz\sqrt{5}+1}\,dz$$

$\boxed{\text{La 1ère proposition est donc fausse}}$ (il manque le facteur 2 devant le $\sqrt{5}$ dans la réponse proposée).

Ensuite, on remarque que les z_1, z_2 donnés dans l'énoncé correspondent aux 2 racines du polynôme du dénominateur (les 2 singularités de la fonction). Seul $z_2 \in \operatorname{int}(\gamma)$, donc:

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{2}{-z^2+2iz\sqrt{5}+1}\right) = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{2}{-(z-z_1)(z-z_2)}\right)$$

$\boxed{\text{La 3e proposition est donc correcte}}$.

On a ensuite que z_2 est un pole d'ordre 1 de f. Donc:

$$\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{2}{-z^2+2iz\sqrt{5}+1}\right) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot\frac{2}{-(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2}\frac{-2}{z-z_1} = \frac{-2}{z_2-z_1} = \frac{-2}{-4i} = \frac{1}{2i}$$

Donc finalement:

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{2}{-z^2+2iz\sqrt{5}+1}\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi$$

$\boxed{\text{La 2e proposition est donc correcte}}$, et par conséquent $\boxed{\text{la 4e proposition est fausse}}$.

Exercice 6:

On prends la transformée de Fourier "en x" de l'ED suivant l'indication de l'énoncé, et on utilise $\mathcal{F}(f'')(\alpha) = (i\alpha)^2\mathcal{F}(f)(\alpha) = -\alpha^2\mathcal{F}(f)(\alpha)$ pour obtenir:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}(\alpha,t) + \frac{\alpha^2}{4}\hat{u}(\alpha,t) = 0 & \alpha\in\mathbb{R},\ t>0 \\ \hat{u}(\alpha,0) = \hat{u}_0(\alpha) & \alpha\in\mathbb{R} \\ \frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\alpha,0) = 0 & \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$\boxed{\text{La 1ère proposition est donc fausse}}$ (il manque un facteur $\frac{1}{4}$).

On s'intéresse ensuite à la résolution de cette ED, qui est de la forme $y''(t)+k^2y(t)=0$, $k\neq 0$. On peut la résoudre assez rapidement avec la transformée de Laplace, mais nous n'avons pas accès aux tables de transformées durant cet examen. Utiliser les techniques d'analyse II est une méthode moins risquée que d'essayer de se souvenir de certaines transformées, ou de les redémontrer.
C'est ce que nous allons faire. Étudions le polynôme caractéristique de cette ED:

$$\lambda^2+k^2=0 \implies \lambda_{1,2} = \pm ik$$

La solution est alors de la forme (c.f cours analyse II):

$$y(t) = A\cos(kt)+B\sin(kt) \text{ avec } A,B\in\mathbb{R}$$

Nous pouvons determiner ces constantes à l'aide des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$. En effet:

$$y(0) = A\cos(0)+B\sin(0) = A \text{ et } y'(0) = -kA\sin(0)+kB\cos(0) = kB$$

Finalement, nous avons la solution de l'ED:

$$y(t) = y(0)\cos(kt) + \frac{y'(0)}{k}\sin(kt)$$

Appliquons ce resultat à notre equation avec $\hat{u}(\alpha, t)$ comme inconnue:

$$\hat{u}(\alpha,t) = \hat{u}(\alpha,0)\cos\left(\frac{\alpha t}{2}\right) + \frac{2}{\alpha}\cdot\underbrace{\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\alpha,0)}_{=0}\cdot\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \implies \hat{u}(\alpha,t) = \hat{u}(\alpha,0)\cos\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$$

$\boxed{\text{La 2e proposition est donc correcte}}$.

Nous avons maintenant la transformée de Fourier de notre solution, il faut donc retrouver la fonction originale. Rappelons que $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Ceci donne:

$$\hat{u}(\alpha,t) = \hat{u}(\alpha,0)\cdot\frac{e^{i\frac{\alpha t}{2}}}{2} + \hat{u}(\alpha,0)\cdot\frac{e^{-i\frac{\alpha t}{2}}}{2} = \frac{\hat{u}_0(\alpha)}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha t}{2}} + \frac{\hat{u}_0(\alpha)}{2}\cdot e^{-i\frac{\alpha t}{2}}$$

On utilise ensuite l'indication de l'enoncé, avec $a = \frac{t}{2}$ pour le premier terme et $a = \frac{-t}{2}$ pour le second:

$$\hat{u}(\alpha,t) = \mathcal{F}\left(\frac{u_0(x+\frac{t}{2})}{2}\right)(\alpha) + \mathcal{F}\left(\frac{u_0(x-\frac{t}{2})}{2}\right)(\alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{u_0(x+\frac{t}{2}) + u_0(x-\frac{t}{2})}{2}\right)(\alpha)$$

En explicitant la définition de la transformée de Fourier, on obtiens:

$$\hat{u}(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x+\frac{t}{2}) + u_0(x-\frac{t}{2})}{2}\cdot e^{-i\alpha x}\,dx$$

$\boxed{\text{La 3e proposition est donc fausse}}$ (il y a un facteur α de plus dans la réponse proposée).

A partir du résultat ci dessus, on déduit la solution du problème:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+\frac{t}{2}) + u_0(x-\frac{t}{2})}{2}$$

$\boxed{\text{La 4e proposition est donc fausse}}$ (le facteur $\frac{1}{4}$ dans la réponse proposée est incorrecte).

Partie 2 : Questions ouvertes

Exercice 1

1)

On note $Y(z)$ la transformée de Laplace de $y(t)$.
On prend la transformée de Laplace des deux côtés de l'ED on obtient:

$$\mathcal{L}(y'')(z) + 2\mathcal{L}(y')(z) + \mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(1)(z)$$

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace : $\mathcal{L}(f'')(z) = z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0)$ et $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$ ainsi que $\mathcal{L}(1)(z) = \dfrac{1}{z}$ l'équation peut se réécrire :

$$z^2Y(z) - y'(0) - zy(0) + 2zY(z) - 2y(0) + Y(z) = \frac{1}{z}$$

Par les conditions initiales on sait que $y(0) = y'(0) = 1$ et on a donc :

$$\begin{aligned}
z^2Y(z) - 1 - z + 2zY(z) - 2 + Y(z) &= \frac{1}{z} \\
Y(z)(z^2+2z+1) &= 3 + z + \frac{1}{z} \\
Y(z)(z^2+2z+1) &= \frac{z^2+3z+1}{z} \\
Y(z) &= \frac{z^2+3z+1}{z(z^2+2z+1)}
\end{aligned}$$

En voyant que $z^2+2z+1=(z+1)^2$ on peut décomposer $Y(z)$ en élément simple :

$$\begin{aligned}\frac{z^2+3z+1}{z(z+1)^2} &= \frac{Az+B}{(z+1)^2}+\frac{C}{z}\\ &= \frac{Az^2+Bz+Cz^2+2Cz+C}{z(z+1)^2}\\ &= \frac{z^2(A+C)+z(B+2C)+C}{z(z+1)^2}\end{aligned}$$

Pour trouver A, B, C on doit donc résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} A+C=1\\ B+2C=3\\ C=1\end{cases}$$

Ce qui nous donne $A=0, B=1, C=1$ et donc la décomposition en élément simple de $Y(z)$ est :

$$Y(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

2)

On sait que :

- $\mathcal{L}(1)(z)=\dfrac{1}{z}$
- $\mathcal{L}(te^{-\alpha t})(z)=\dfrac{1}{(z+\alpha)^2}$

On a donc que:

$$\begin{aligned}Y(z) &= \mathcal{L}(1)(z)+\mathcal{L}(te^{-t})(z)\\ &= \mathcal{L}(1+te^{-t})(z)\end{aligned}$$

Et on a donc finalement que :

$$y(t)=1+te^{-t}$$

Exercice 2

Pour cet exercice on va étendre la fonction u par imparité sur $[-1,0]$ puis par 2-périodicité sur $\mathbb{R}$, la fonction ainsi construite est donc impaire sur $[k-1,k+1]$ $k\in\mathbb{Z}$. On regarde ensuite la série de Fourier de u:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_n(t)\sin(\pi n x)$$

On peut donc exprimer les dérivées partielles de u en fonction de cette expression :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_n'(t)\sin(\pi n x)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} -\pi^2 n^2 b_n(t)\sin(\pi n x)\end{aligned}$$

On calcule ensuite la série de Fourier de la condition initiale $u(x,0)$

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty} b_n(0)\sin(\pi n x)$$

$$\begin{aligned}b_n(0) &= 2\int_0^1 u(x,0)\sin(\pi n x)\\ &= 2\int_0^1 \sin(\pi n x)\\ &= \frac{2}{\pi n}\left[-\cos(\pi n x)\right]_0^1\\ &= -\frac{2}{\pi n}(1-\cos(\pi n))\end{aligned}$$

On a que $\cos(\pi n) = 1$ si n est pair et $\cos(\pi n) = -1$ si n est impair et donc:

$$b_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Finalement le terme $\sin(2\pi x)$ peut aussi être écrit comme une série de Fourier:

$$\sin(2\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_n(t) \sin(\pi n x)$$
$$\beta_2 = 1$$
$$\beta_n = 0 \quad \text{Si } n \neq 2$$

En utilisant ces données on peut réécrire l'EDP comme :

$$b'_n(t) + \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n$$

On résout cette équation en utilisant l'indication avec $a = \pi^2 n^2$,$b = \beta_n$ et $y_0 = b_n(0)$

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-\pi^2 n^2 t} + \frac{\beta_n}{\pi^2 n^2}(1 - e^{-\pi^2 n^2 t})$$

On va maintenant distinguer les cas où n est pair et où n est impair
Si n est pair:

Alors $b_n(0) = 0$ et la solution devient :

$$b_n(t) = \frac{\beta_n}{\pi^2 n^2}(1 - e^{-\pi^2 n^2 t})$$

Comme $\beta_2 = 1$ et $\beta_n = 0$ si $n \neq 2$:

$$b_2(t) = \frac{1}{4\pi^2}(1 - e^{-4\pi^2 t})$$
$$b_n(t) = 0 \quad \text{Si } n \neq 0$$

Si n est impair:

Alors $b_n(0) = \frac{4}{\pi n}$ mais $\beta_n = 0$ car la seule valeur de n pour laquelle β_n est non nulle est $n = 2$ et on peut donc exprimer b_n comme:

$$b_n(t) = \frac{4}{\pi n} e^{-\pi^2 n^2 t}$$
$$b_k(t) = \frac{4}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2 (2k+1)^2 t} \qquad k \ \in \mathbb{N}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne on a paramétré les impairs par $n = 2k + 1$ On peut donc finalement réécrire $u(x, t)$ comme:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin((2k+1)\pi x) + \frac{1}{4\pi^2}(1 - e^{-4\pi^2 t}) \sin(2\pi x)$$

On reconnaît ainsi :

- $b_{2k+1} = \dfrac{4}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}$
- $f(t) = \dfrac{1}{4\pi^2}(1 - e^{-4\pi^2 t})$

Remarque : L'équation différentielle aurait aussi pu être résolu en utilisant les transformées de Laplace

Exercice 3

1)

Soit $F(z)e^{zt} = \dfrac{e^{zt}}{(z+1)^2(z+2)}$ .On voit que les singularités de cette fonction sont en $z_0 = -1$ et $z_1 = -2$. On voit aussi que z_1, z_2 sont contenu dans l'intérieur de Γ_r car $r > 2$ .Par le théorème des résidus on a donc:

$$\int_{\Gamma_r} F(z)e^{zt}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}_{-1}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{Res}_{-2}(F(z)e^{zt})]$$

En voyant que $z_0 = -1$ est un pôle d'ordre 2 ,$z_1 = -2$ un pôle d'ordre 1 et en utilisant le fait que pour z_i un pôle d'ordre m le résidu est donné par $\mathrm{Res}_{z_i}(f(z)) = \dfrac{1}{m!}\lim\limits_{z\to z_i} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} f(z)(z-z_i)^m$ on peut calculer les deux résidus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{-1}(F(z)e^{zt}) &= \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz} F(z)e^{zt}(z+1)^2 \\
&= \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz} \frac{e^{zt}}{(z+2)} \\
&= \lim_{z\to-1} \frac{te^{zt}(z+2) - e^{zt}}{(z+2)^2} \\
&= te^{-t} - e^{-t} \\
\mathrm{Res}_{-2}(F(z)e^{zt}) &= \lim_{z\to-2} F(z)e^{zt}(z+2) \\
&= \lim_{z\to-2} \frac{e^{zt}}{(z+1)^2} \\
&= \frac{e^{-2t}}{(-1)^2} = e^{-2t}
\end{aligned}$$

Le théorème des résidus nous donne donc:

$$\int_{\Gamma_r} F(z)e^{zt}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}_{-1}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{Res}_{-2}(F(z)e^{zt})] = 2\pi i(te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t})$$

2)

Pour prouver que $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}dz = 0$ on va prouver que $\left|\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}dz\right| \leq 0$. Comme le module est par définition une quantité positive cela implique que $\left|\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}dz\right| = 0$ et comme le seul nombre avec un module nul est $z = 0$ cela implique que $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}dz = 0$
On utilise le fait que $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, dz$ et on obtient :

$$\lim_{r\to\infty} \left|\int_{C_r} F(z)e^{zt}dz\right| \leq \lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \left|F(z)e^{zt}\right| dz = \lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \left|\frac{e^{zt}}{(z+1)^2(z+2)}\right| dz$$

On paramètre C_r par $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \left|F(z)e^{zt}\right| dz &= \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\frac{e^{tr(\cos\theta + i\sin\theta)}ire^{i\theta}}{(re^{i\theta}+1)^2(re^{i\theta}+2)}\right| d\theta \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|e^{tr\cos\theta}||e^{itr\sin\theta}||r||e^{i\theta}||i|}{|re^{i\theta}+1|^2|re^{i\theta}+2|} d\theta
\end{aligned}$$

On a que $|e^{tr\cos\theta}| = e^{tr\cos\theta}$ mais comme $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ alors $\cos\theta \leq 0$ et donc $e^{tr\cos\theta} \leq 1$. On remarque aussi que $|i| = |e^{itr\sin\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$ et $|r| = r$. On regarde maintenant le comportement du dénominateur:

$$\begin{aligned}
r = |re^{i\theta}| &= |re^{i\theta} + 1 - 1| \\
&\leq |re^{i\theta} + 1| + |-1| \\
&= |re^{i\theta} + 1| + 1 \\
r - 1 &\leq |re^{i\theta} + 1| \\
\frac{1}{|re^{i\theta}+1|} &\leq \frac{1}{r-1}
\end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne nous avons utilisé l'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a|+|b|$. On peut appliquer le même raisonnement pour voir que $\frac{1}{|re^{i\theta}+2|} \leq \frac{1}{r-2}$. L'inégalité peut donc être réécrite comme:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \left|\int_{C_r} F(z)e^{zt}dz\right| &\leq \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{r}{(r-1)^2(r-2)}\, d\theta \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\pi r}{(r-1)^2(r-2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{r\to\infty} \left|\int_{C_r} F(z)e^{zt}dz\right| = 0$ et donc $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}dz = 0$

3)

Comme on a prouvé que lorsque r tend vers l'infini l'intégrale sur la partie circulaire est nulle on a :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} F(z)e^{zt}dz = \lim_{r\to\infty} \int_{L_r} F(z)e^{zt}dz = 2\pi i(te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t})$$

On paramètre L_r par $z = is$ avec $s \in [-r, r]$ et l'intégrale s'écrit donc:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \int_{L_r} F(z)e^{zt}dz &= \lim_{r\to\infty} i \int_{-r}^{r} F(is)e^{ist}ds \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} F(is)e^{ist}ds
\end{aligned}$$

Mais comme $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(is)e^{ist}ds$ on a que :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{L_r} F(z)e^{zt}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i(te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}) \\
&= te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}
\end{aligned}$$