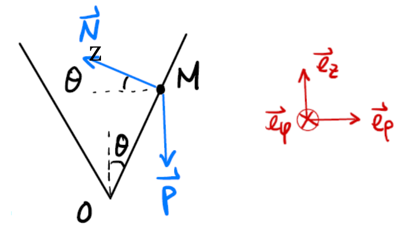
Exercice 1 : Théorème du moment cinétique



La bille est soumise à deux forces, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction de la paroi intérieure du cône $\vec{N}$. Calculons d'abord le moment de chacune des forces au sommet du cône, en les projetant sur les vecteurs de base du système de coordonnées cylindriques $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$:

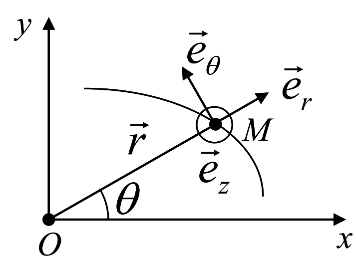
$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} = \left(\rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}\right) \times (-mg\vec{e_z}) = mg\rho\,\vec{e_\varphi},$$

(ρ distance du point M à l'axe de symétrie du cône)

$$\overrightarrow{M_N} = \overrightarrow{OM} \times \vec{N} = \left(\rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}\right) \times \left(-N\cos\theta\vec{e_\rho} + N\sin\theta\vec{e_z}\right) = -N(z\cos\theta + \rho\sin\theta)\,\vec{e_\varphi},$$

Si on applique maintenant le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M_N} + \overrightarrow{M_P}$, on constante que la dérivée du moment cinétique a uniquement une composante selon $\vec{e_\varphi}$, donc $\frac{dL_z}{dt} = 0$. On trouve bien que $\boxed{L_z = cte}$.

Exercice 2 : Tout sur le moment cinétique



1. La définition du moment cinétique est : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$. En coordonnées cylindriques : $\vec{r} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$. ($z = 0$ car le mouvement est dans le plan Oxy)

On trouve alors $\boxed{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}$

2. Dérivée du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \vec{a}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a} = m(r\vec{e_r}) \times (a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta})$ ($a_z = 0$ car le mouvement est dans le plan). Donc :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_z}}$$

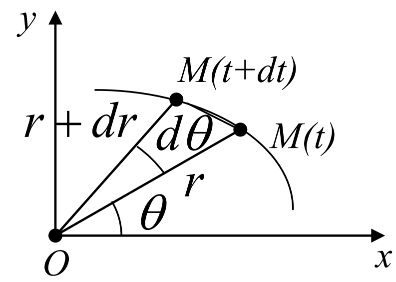
Pour démontrer le théorème du moment cinétique, on part de $\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a}$, et on utilise la deuxième loi de Newton $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. On a alors : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \sum\vec{F} = \sum\left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$. On reconnait bien le moment de la force $\vec{F}$: $\overrightarrow{M_F} = \vec{r} \times \vec{F}$: Donc on retrouve bien :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum\overrightarrow{M_F}}$$

Si la particule est soumise à une force centrale $\vec{F} = -F\vec{e_r}$, on a : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M_F} = (r\vec{e_r}) \times (-F\vec{e_r})$ soit

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}}$$

On vérifie bien que la dérivée du moment cinétique est nulle si la force est centrale.



3. $dr = \dot{r}dt$ et $d\theta = \dot{\theta}dt$. Au premier ordre en dr et $d\theta$, l'aire dA du triangle $OM(t)M(t+dt)$ est donnée par :
$dA = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM(t)} \times \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\right\| = \frac{1}{2}\|(r\overrightarrow{e_r}) \times (dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta})\|$.

d'où : $dA = \frac{1}{2}|r^2 d\theta|$

On a donc : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|2r\frac{dr}{dt}d\theta + r^2\dot{\theta}\right| = \frac{1}{2}\left|r^2\dot{\theta}\right|$ au 1er ordre.

On remarque que : $\|\vec{L}\| = \left|mr^2\dot{\theta}\right| = 2m\frac{dA}{dt}$. Pour une force centrale $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$, soit $\vec{L} = \overrightarrow{cte}$. Au final

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = cte}$$

Exercice 3 : Troisième loi de Kepler
Comme on a $M_{Terre} \ll M_{Soleil}$, le centre de masse du système se trouve être quasiment confondu avec le centre de masse du soleil. La Terre tourne autour du Soleil.
L'ellipse que décrit la terre autour du soleil est très proche d'un cercle, donc on prend a égal au rayon de l'orbite terrestre : $a = 150\ 000\ 000$ km.

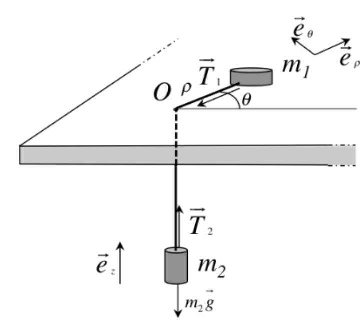
Mouvement circulaire : $a_n = F/m = GMm/(r^2m) = r\omega^2 = r(2\pi/T)^2$
La troisième loi de Kepler s'écrit alors avec $r=a$: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

Comme la Terre tourne autour du Soleil, on prend alors $M \approx M_{Soleil}$.

La période T est simplement donnée par : $T = 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 = 3.16 \times 10^7$s.

$$\boxed{M_{Soleil} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 2 \times 10^{30}\ \text{kg}}$$

Exercice 4 : Deux masses et une table trouée



a) Les forces en présence sont la tension du fil $\vec{T}_1$ sur m_1, la tension du fil $\vec{T}_2$ et le poids $m_2\vec{g}$ sur m_2 (le mouvement de m_1 étant dans le plan de la table, le poids de m_1 et la force de réaction de la table s'annulent, ils ne sont pas représentés sur le schéma). On écrit la deuxième loi de newton pour la masse m_1 :

$$\vec{T}_1 = m_1\,\vec{a}_1 \Rightarrow -T_1\overrightarrow{e_\rho} = m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho} + m_1(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\Rightarrow -T_1 = m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \quad et \quad \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$$

Pour la masse m_2 , repérée par sa hauteur z:

$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\,\vec{a}_2 \Rightarrow (T_2 - m_2 g)\overrightarrow{e_z} = m_2\ddot{z}\overrightarrow{e_z}$
$\Rightarrow T_2 = m_2(\ddot{z} + g)$

Nous savons en outre que :

$T_1 = T_2$: troisième loi de Newton

$\ddot{z} = \ddot{\rho}$: Longueur du fil constante

Donc $T_2 = m_2(\ddot{z}+g) \Longrightarrow T_1 = m_2(\ddot{\rho}+g)$. En reportant T_1 dans le couple d'équations précédent, on en déduit les équations différentielles du mouvement :

$$(m_1+m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0 \quad et \quad \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$$

b) Le moment cinétique de m_1 en O s'écrit :

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m_1\vec{r}\times\vec{v} = m_1\rho\overrightarrow{e_\rho}\times\left(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = m_1\rho^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

c) La force de tension du fil $\vec{T}_1$ étant une force centrale, on peut affirmer que le moment cinétique de m_1 en O reste constant pendant le mouvement. D'après l'expression de $\vec{L}$ trouvée en b) :

$$\vec{L} = cte \;\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \Longrightarrow 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0$$

Ceci est bien la deuxième équation trouvée en a)

d) Un mouvement circulaire uniforme autour de O étant décrit par $\rho = cste \; et \; \dot{\theta} = cste$, on regarde si les équations différentielles du mouvement trouvée en a) peuvent être satisfaites :

- C'est bien le cas pour $\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$, puisque $\ddot{\theta}$ et $\dot{\rho}$ sont nuls.
- $\ddot{\rho}$ est nul donc $(m_1+m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0 \Longrightarrow m_1\rho\dot{\theta}^2 = m_2 g \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{m_2 g}{m_1\rho} \Longrightarrow \dot{\theta} = \left(\frac{m_2 g}{m_1\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

On peut donc avoir un mouvement circulaire uniforme si la vitesse angulaire et le rayon de rotation vérifient cette relation.

Note : Pour ces solutions particulières, la masse m_2 est immobile. Cette relation exprime que l'accélération centripète de m_1 est due au poids de m_2.

Exercice S11.1 : Révision ressort et masse

1. Immobile : $\sum\vec{F} = \vec{0}$ forces : $\vec{F_k}$ et $m\vec{g}$

$$\vec{F_k} = -kd_0\vec{e_x} \qquad m\vec{g} = mg\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow -kd_0\vec{e_x} + mg\vec{e_x} = \vec{0} \qquad d_0 = \frac{mg}{k}$$

2. a) Par les forces :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}$$

$$mg\vec{e_x} - kx\vec{e_x} = m\ddot{x}\vec{e_x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \qquad (= \text{cte})$$

Par l'énergie :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie mécanique est constante (conservation de l'énergie) : $\frac{d}{dt}E = 0$

$$\frac{d}{dt}E \;= 0 = \frac{1}{2}m\,2\,\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{1}{2}k2\,\dot{x}\,x = \dot{x}\,[m\,\ddot{x} + kx]$$

La seule solution non triviale est $m\,\ddot{x} + kx = 0$

x est ici pris par rapport à la position d'équilibre

b) Une solution particulière : $a(t) = \text{cte} = C \Rightarrow \ddot{x} = 0$

$$0 + \frac{k}{m}C = g$$
$$C = \frac{gm}{k} = d_0 = x_1(t)$$

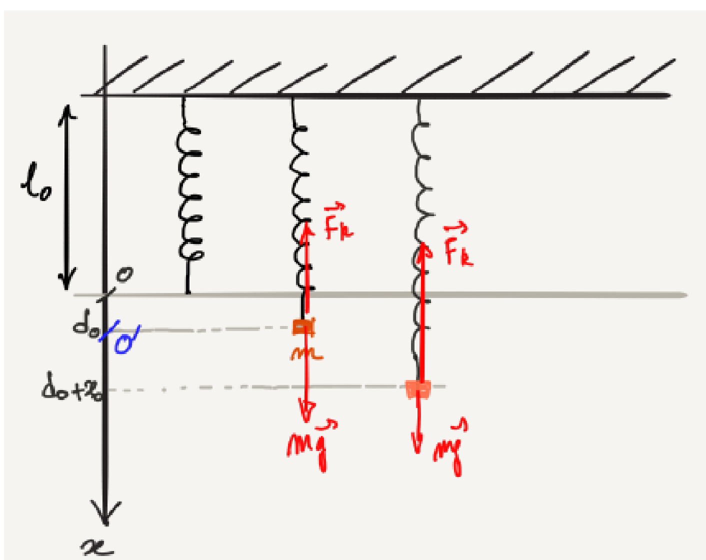
Solution générale de l'équation second membre :

$$x_2(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$$

Solution générale :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t + d_0$$
$$\dot{x}(t) = -A\Omega_0\sin\Omega_0 t + B\Omega_0\cos\Omega_0 t$$
$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow 0 + B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$x(t) = A\cos\Omega_0 t + d_0$$
$$x(0) = x_0 + d_0 \qquad x(0) = A1 + d_0 = a + d_0 = x_0 + d_0$$
$$A = x_0$$
$$x(t) = x_0\cos\Omega_0 t + d_0$$

Changement de repère, soit $R'(0', \vec{e_x})$ $0'$ centré sur la position d'équilibre avec m accrochée.



m de coordonnée x dans R and x' dans R'.

$$x = x' + d_0$$
$$x' = x - d_0$$
$$\Rightarrow x'(t) = x_0 \cos \Omega_0 t$$

On retrouve l'oscillateur libre du cours mais les oscillations se font autour de $0'$ donc de d_0.

Option 2 : On peut aussi directement utiliser :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}k\left(x^2 - \frac{2mg}{k}x\right)$$

$x^2 - \frac{2mg}{k}x$ est le début de $(x - \frac{mg}{k})^2 = x^2 - \frac{2mg}{k}x + (\frac{mg}{k})^2$ donc

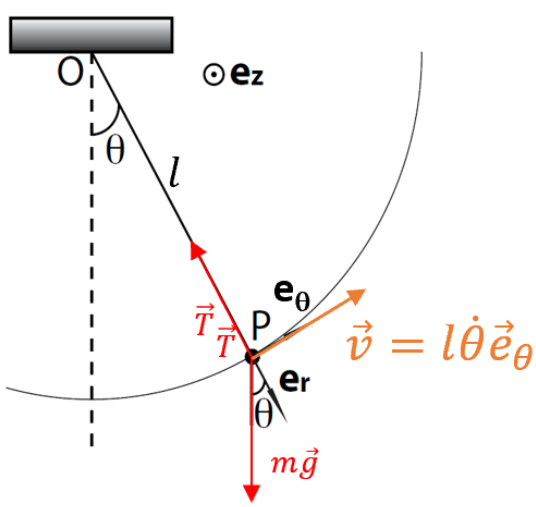
$$x^2 - \frac{2mg}{k}x = \left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \tfrac{1}{2}k(x - d_0)^2 + E_{p,0}$$

On obtient donc l'équation de l'oscillation autour de la position $d_0 = \frac{mg}{k}$ avec $\Omega_0^2 = \frac{2A}{m} = \frac{k}{m}$ en passant par l'énergie (en ajoutant l'énergie cinétique et en dérivant).

$$x(t) = x_0 \cos \Omega_0 t + d_0$$

Exercice S11.2 : Pendule et moment cinétique



1. Le théorème du moment cinétique nous donne :

$$\sum M_0^{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v})$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(lml\dot{\theta}\vec{e}_z)$$

En explicitant les moments de force en jeux, on obtient alors :

$$\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}} = l^2 m\ddot{\theta}\vec{e}_z$$
$$\cancel{l}\vec{e}_r \wedge \cancel{m}\vec{g} = l^{\cancel{2}}\cancel{m}\ddot{\theta}\vec{e}_z$$
$$-g\sin\theta\vec{e}_z = l\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

et donc, finalement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

<u>Retrouver l'équation grâce à l'énergie :</u>

L'énergie mécanique est conservée $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 + mgl - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

2. La masse effectue un mouvement circulaire. La force que doit supporter le fil est donc donnée par $\vec{T} = mg\cos\theta\vec{e}_r + ma_n\vec{n} = m(g\cos\theta + \frac{v^2}{l})\vec{e}_r$. Or, si l'angle de départ est θ_0, l'énergie mécanique du système est $mgl(1-\cos\theta_0)$, et donc la vitesse maximale (lorsque $\theta = 0$) : $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$. La force maximale que doit supporter le fil est alors donnée par :

$$\boxed{T_{max} = 2mg\left(\frac{3}{2} - \cos\theta_0\right)}$$