ALGEBRE LINEAIRE

Aperçu historique

- ***Algèbre*** : ce mot vient de l'arabe « al-jabr » (= reconstruction) ; il est employé pour la première fois au IXième siècle pour caractériser le transfert, dans une égalité, d'un terme d'un membre à l'autre.

  Issue du calcul sur les nombres, l'algèbre a essentiellement consisté jusqu'au XIXième siècle à résoudre des équations algébriques (formules contenant des nombres inconnus, ceux-ci étant remplacés par des lettres). Puis il y a eu un double mouvement d'élargissement :
  - on a considéré des ensembles constitués d'éléments autres que les nombres : ce sont par exemples des objets géométriques, des fonctions, etc ;
  - les quatre opérations de l'arithmétique sont remplacées par des lois dites « lois de composition » internes ou externes (ou règles de calcul) dont on étudie les propriétés.

  Ainsi sont apparues des structures abstraites tels que groupes, anneaux, corps, modules, espaces vectoriels, etc, chacune étant définie par des « règles de calcul» et des propriétés. Une structure abstraite peut alors se concrétiser de plusieurs façons différentes : par exemple, l'ensemble des nombres entiers muni de la loi d'addition usuelle a la même structure que l'ensemble des vecteurs muni de la loi d'addition des vecteurs (règle du parallélogramme).

  L'algèbre dite « moderne » commence avec la théorie des groupes due à *K.-F. Gauss* (1777-1855) et surtout à *E. Galois* (1811-1832). Elle a de très nombreuses applications en analyse, en mécanique, en physique théorique, etc.

- ***Algèbre linéaire*** : apparue essentiellement au XIXième siècle, l'algèbre linéaire est issue de la géométrie et de l'étude des systèmes d'équations linéaires ; c'est un langage commun à plusieurs branches des mathématiques dont on peut dire que l'algèbre en est la langue et la géométrie le support intuitif.

  Les notions fondamentales de l'algèbre linéaire : combinaison linéaire, indépendance linéaire, base, dimension, sont définies dans l'ouvrage principal de *H. Grassmann* (1809-1877) ; malheureusement ses théories sont tellement en avance sur son temps qu'il fallut attendre une vingtaine d'années pour qu'elles soient comprises et développées.

  En 1888, *Giuseppe Peano* (1858-1932) , après une étude approfondie de l'œuvre de Grassmann, énonce les axiomes définissant la structure d'espace vectoriel de dimension finie ou non et donne une définition de la notion d'application linéaire. La terminologie ne fut définitivement fixée que vers 1920.

  Etant particulièrement adaptée au calcul automatique, l'algèbre linéaire a une importance fondamentale en analyse numérique et en recherche opérationnelle.

  C'est aujourd'hui le domaine de l'algèbre qui possède le plus d'application : analyse, probabilités, physique, informatique, économie, etc.

Table des matières

CHAPITRE 1	*Langage ensembliste*
CHAPITRE 2	*Logique - Méthode de preuve*
CHAPITRE 3	*Analyse combinatoire*
CHAPITRE 4	*Applications*
CHAPITRE 5	*Matrices et déterminants*
CHAPITRE 6	*Espaces vectoriels*
CHAPITRE 7	*Applications linéaires*
CHAPITRE 8	*Changement de base*
CHAPITRE 9	*Valeurs et vecteurs propres*
CHAPITRE 10	*Rang et système*

CHAPITRE 1 *Langage ensembliste*

1. Ensembles, propriétés sur un ensemble, opérations ensemblistes
2. Symboles logiques et ensembles

CHAPITRE 2 *Logique - Méthode de preuve*

1. Introduction
2. Méthode de démonstration
    - Méthode directe
    - Méthode par l'absurde
    - Méthode indirecte ou contraposée
    - Méthode par induction ou récurrence
    - Méthode du contre-exemple

CHAPITRE 3 *Analyse combinatoire*

1. Arrangements
2. Permutations
3. Combinaisons

CHAPITRE 4 *Applications*

1. Définitions
2. Injection, surjection, bijection

CHAPITRE 5 *Matrices et déterminants*

1. Calcul matriciel
    - Opérations sur les matrices
    - Multiplication de deux matrices
    - Matrices carrées d'ordre n
    - Inverse d'une matrice d'ordre 2
2. Déterminants
3. Déterminants et matrices

CHAPITRE 6 *Espaces vectoriels*

1. Définitions et exemples
2. Combinaisons linéaires
3. Sous-espace vectoriel : définition et critère du sev
4. Générateur, base et dimension
5. Quelques exemples de bases canoniques

CHAPITRE 7 *Applications linéaires*

1. Définitions et conséquences
2. Propriétés générales
3. Matrice d'une application linéaire
4. Matrices carrées – Endomorphismes
5. Exemples d'endomorphismes bijectifs du plan
    - Homothétie
    - Rotation
    - Symétrie orthogonale
    - Affinité
6. Exemple d'interprétation géométrique d'un endomorphisme

CHAPITRE 8 *Changement de base*

CHAPITRE 9 *Valeurs et vecteurs propres*

1. Définitions et exemples
2. Calcul des valeurs propres et sev associés
3. Base propre et diagonalisation
4. Nature géométrique d'un endomorphisme diagonalisable
5. Cas des matrices symétriques

CHAPITRE 10 *Rang et système*

1. Notions de rang
2. Calcul du rang à l'aide du déterminant
3. Discussion d'un système d'équations linéaire

VT/18