Série 11

1. Soit $\widehat{b}$ la fonction définie dans l'exercice **3.** de la série 10 (fonction prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice **1.**b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{b}(0) = 1\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est-elle continûment dérivable en $x_0 = 0$?

2. Déterminer les points de tangence T des tangentes issues de l'origine à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$.

3. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1 : \ 3x - 2y - 4 = 0\,.$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$,

Γ_2 la courbe d'équation $y = g \circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2.

4. Déterminer la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{-3}$

b) $g(x) = \sin(ax)$, $\quad a \in \mathbb{R}^*$.

5. Estimer, à l'aide de l'approximation linéaire, la quantité $A = \sqrt[4]{16,032}$.

6. Soient Δf l'accroissement et df la différentielle de la fonction $f(x) = x^3$.

Evaluer $\delta = |\Delta f - df|$ aux points $x = 0$ et $x = 100$ pour un accroissement $\Delta x = \frac{1}{10}$.

7. Soient $g(x)$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1+\sqrt{16+x^2}}{1-\sqrt{25-x^2}}$$

et $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 3$.

Soient A l'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en x_0 et B l'approximation linéaire de $(g \circ f)(x_0 + \Delta x)$ en x_0 pour un Δx donné.

Sachant que $A = \frac{22}{7}$, en déduire la valeur de B.

8. Soient Γ la courbe définie par la relation : $y^3 + xy^2 + x^3y + x = 0$ et P le point de Γ d'abscisse $x_P = 1$.

Déterminer l'équation de la tangente à Γ en P.

9. Sous quel angle φ les courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent-elles ?

$$\Gamma_1 : \; y^3 + x^3y^2 + x = 3\,, \qquad \Gamma_2 : \; y^3 + x^3y^2 - x = 1\,.$$

Réponses de la série 11

1. La fonction $\widehat{b}\,'$ est continue en $x_0 = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \widehat{b}\,'(x) = \widehat{b}\,'(0)$.

2. Point de tangence : $T\,(-1\,,\; -\frac{1}{3})$.

3. $t_2 :\; 3x + 4y - 8 = 0$.

4. a) $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\,(-1)^n\,(n+2)\,!\; x^{-(n+3)}$, à démonter par récurrence.

b) $g^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, à démonter par récurrence.

5. Soit $f(x) = \sqrt[4]{x}$. L'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en $x_0 = 16$ et pour $\Delta x = 0,032$ est égale à $2,001$.

6. Pour $x = 0\,,\; \delta = 10^{-3}$; pour $x = 100\,,\; \delta = 3 + 10^{-3}$.

7. $B = -2,1$.

8. Equation de la tangente à Γ passant par P : $x - 2y - 3 = 0$.

9. $\varphi = \arctan\left(\frac{10}{33}\right)$.
