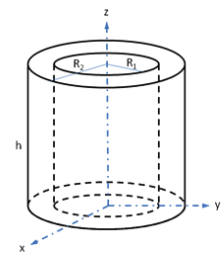
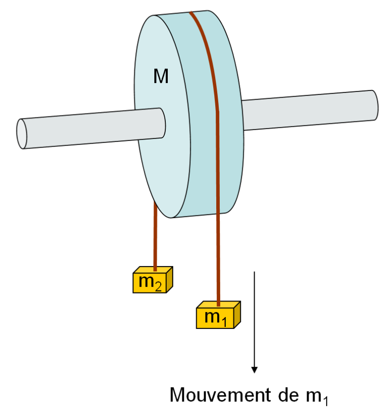
Exercice 1* (5 min) **: Moment d'inertie d'un cylindre creux d'épaisseur non négligeable**



On cherche à calculer le moment d'inertie autour de l'axe z d'un cylindre creux de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2, de hauteur h, et de masse M. L'axe z passe par le centre de masse du cylindre. Exprimez le moment d'inertie en fonction de M, R_1 et R_2 . La masse volumique du cylindre est constante.

Exercice 2$^{(*)}$**** (25 min) **: Poulie et masses**

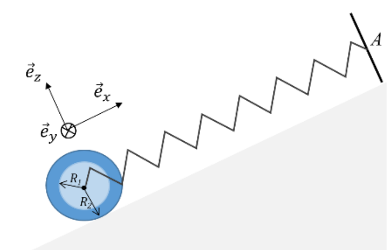


Soient deux masses m_1 et m_2 reliées entre elles par une corde inextensible passant sur une poulie ayant la forme d'un disque de masse M et de rayon R, comme indiqué sur le schéma ci-contre. La masse m_1 étant plus grande que la masse m_2, elle descend avec une accélération a.

a) On note T_1 (resp. T_2) la tension du fil du côté de la masse m_1 (resp. m_2). Exprimez $(T_1 - T_2)$ en fonction de l'accélération angulaire de la poulie $\dot{\omega}$, M et R. Que vaut $(T_1 - T_2)$ si M est négligeable ?
b) Calculez a (accélération de m_1) en fonction de m_1, m_2, M et g.

On rappelle que le moment d'inertie pour un disque est $\frac{1}{2}MR^2$, où R est le rayon du disque et M sa masse. On considèrera que la masse de l'axe est négligeable et que la corde ne glisse pas sur la poulie.

Exercice 3** (40 min) **: Cylindre et ressort** (Examen 2017)



Un cylindre de masse M est constitué de deux matériaux différents de masse volumique ρ_1 pour la partie interne (pour un rayon variant de 0 à R_1) et ρ_2 pour la partie externe (pour un rayon variant de R_1 à R_2). Ce cylindre roule sans glissement sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Un axe passant par son centre de masse est relié à un ressort de longueur l_0 au repos et de constante de raideur k. L'axe du cylindre reste parallèle à $\vec{e}_y$ pendant son déplacement suivant $\vec{e}_x$.

a) Calculez le moment d'inertie I_{cm} du cylindre pour une rotation autour d'un axe parallèle à $\vec{e}_y$ et passant par son centre de masse.

Dans un premier temps, le système est immobile et à sa position d'équilibre.
b) Calculez l'allongement du ressort correspondant à la position d'équilibre du système.

Partant de la position d'équilibre, on déplace le cylindre vers le bas, puis on le lâche.
c) Quelle est la condition au point de contact pour que le roulement ait lieu sans glissement ?
d) Déterminez l'équation différentielle du mouvement.
e) Quelle est la pulsation et donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle du mouvement.

Le point d'attache du ressort en A est maintenant soumis à un mouvement périodique selon $\vec{e}_x$ à la pulsation Ω.

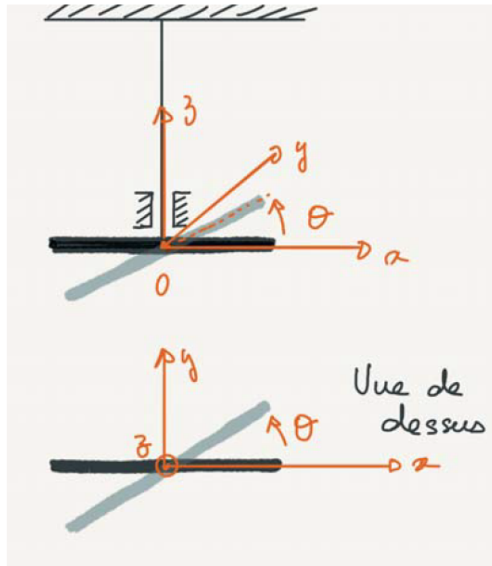
f) Quand le régime stationnaire est établi, quelle est la pulsation du mouvement oscillatoire du cylindre ?
g) Tracez qualitativement sur un graphe l'évolution de l'amplitude des oscillations du cylindre en fonction de la pulsation Ω.

Exercice 4** (30 min) **: Pendule de torsion et choc**

Un barreau de masse M et longeur l est accroché par son milieu à un fil pendu au plafond et servant de pendule de torsion. Un guide autour du fil permet de le maintenir vertical (il ne peut donc pas se balancer comme un pendule simple).
On note θ l'angle entre (Ox) et la barre. À l'équilibre $\theta = 0$.
Le fil exerce sur le barreau un moment

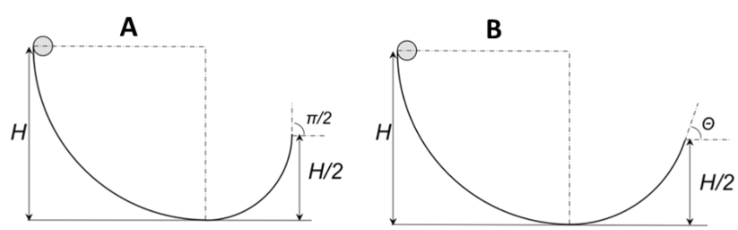
$$\vec{M}_0 = -\kappa\theta\vec{e}_z$$

κ est une constante caractéristique du fil.



1. Etablir l'équation du mouvement puis la résoudre en supposant qu'à $t = 0$ on lâche le barreau sans vitesse angulaire à l'angle θ_0.
2. Le barreau est immobile à l'équilibre. On tire une balle de pistolet de masse m et vitesse v_0 qui arrive perpendiculairement au barreau et s'encastre dans son extrémité. Exprimer la déviation angulaire maximale du barreau en fonction des données du problème.

Exercice 5 * (20 min) **: Cylindre sur un tremplin**



Un cylindre plein homogène de rayon r et de masse m est lâché du haut d'un tremplin avec une vitesse initiale nulle. Le haut du tremplin est à la hauteur H et le point d'éjection à la hauteur $\frac{H}{2}$. On considère les deux types de tremplin (A et B) schématisés ci-dessus, et les trois cas de figure suivants :
1. Tremplin A : le cylindre glisse sans rouler le long du tremplin et est éjecté verticalement.
2. Tremplin A : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin et est éjecté verticalement.
3. Tremplin B : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin et est éjecté en formant un angle θpar rapport à l'horizontale.

Dans tout l'exercice, on considère que le cylindre est uniquement soumis à son poids et on néglige les forces de frottement de l'air.

a) On note h_1, h_2 et h_3 les hauteurs maximales atteintes par le cylindre après son éjection du tremplin pour ces trois cas respectivement. Classez qualitativement par valeur décroissante, ou égalité s'il y a lieu, les valeurs (h_1, h_2, h_3 et H). Sans calcul, commentez les raisons de ce classement.
b) Calculez quantitativement h_1, h_2 et h_3 en fonction des données du problème.

Rappel : *Moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R selon son axe de révolution* Δ : $I_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$.

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

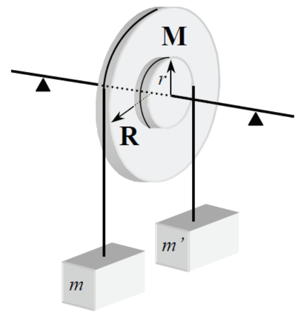
Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen

***

Exercice S14.1** (30 min) **: Poulie et masses - bis** (Examen 2011)

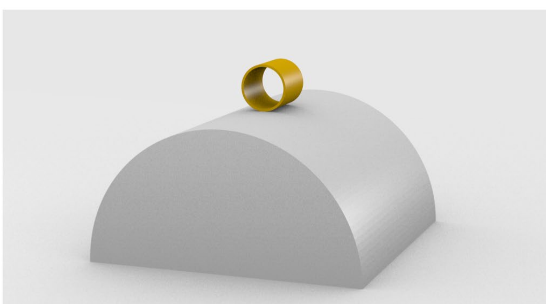
Considérons le système ci-contre. On suppose que la double poulie possède un moment d'inertie global I_Δ.

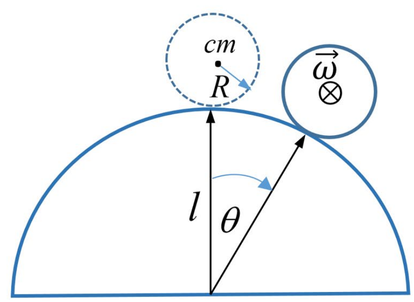
1. Déterminer la vitesse angulaire du disque et l'accélération des masses m et m'.
2. Calculer les tensions de chacune des cordes, en prenant comme valeurs numériques : $m = 0.6$ kg, $m' = 0.5$ kg, $M = 0.8$ kg, $R = 8$ cm, $r = 6$ cm et $I_\Delta = 2.10^{-3}$ kg.m^2.



Exercice S14.2** (50 min) **: Cylindre creux qui roule puis décolle** (Examen 2018)

Un cylindre creux de masse m, de longueur L, de rayon R, et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon l, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ($\theta = 0$), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle θ, tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note g l'accélération de la pesanteur.





a) Démontrez que le moment d'inertie I_{cm} du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est $I_{cm} = mR^2$.

b) Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position $\theta > 0$.

Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique θ_C, puis il « décolle ». Il n'est alors plus en contact avec le support.

c) Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?
d) Calculez l'angle critique de décollage θ_C .
e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon θ, pour $\theta < \theta_C$ (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de R, l, et g.
f) Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage θ_C serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen