

Contrôle d'analyse I N°4

Durée : 1 heure 40 minutes

Barème sur 15 points

NOM : _____

Groupe ☐

PRENOM : _____

1. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\sin^3(x)}. \quad 4 \text{ pts}$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les deux paraboles Γ_1 et Γ_2 définies par leur équation cartésienne :

$$\Gamma_1 : (y - 2)^2 = x + 4 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : (x - 3)^2 = 9(y + 1)$$

Ces deux paraboles passent par l'origine et par le point $P(-3, 3)$.

On considère le domaine fini D limité par ces deux courbes et entièrement contenu dans le demi-plan : $x \leq 0$.

Esquisser avec soin le domaine D , puis calculer l'aire A de ce domaine. 3,5 pts

3. Dans l'espace muni d'un système d'axes cartésien, on considère un corps dont les sections par des plans parallèles au plan Oyz sont des disques dont le cercle frontière a pour diamètre AB , les points A et B étant situés sur les arcs de paraboles \mathcal{P}_A et \mathcal{P}_B , dans le plan $z = 0$:

$$\mathcal{P}_A : y = x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_B : y = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad z = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Calculer le volume V du corps ainsi défini. 3,5 pts

4. Dans le plan, on considère l'arc de courbe Γ d'équation $y = \ln(x)$, $x \in [1, e]$.

Soit D le domaine fini du plan limité par l'arc Γ , la droite verticale d'équation $x = 1$ et la droite horizontale d'équation $y = 1$.

Calculer le volume du corps engendré par la rotation du domaine D autour de la droite horizontale d'équation $y = 1$. 4 pts
