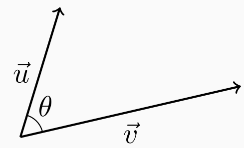
# Série 9

**Exercice 1.**
Calculer la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et celle de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ sachant que :

$$\|\vec{u}\| = 3,\ \|\vec{v}\| = 5 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}.$$




Solution: La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est donnée par :

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \text{ avec } \|\vec{v}\| = 5 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 5\cdot\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{15}{2}.$$

Cette projection vaut donc $\frac{3}{10}\vec{v}$. En raisonnant de la même façon, on trouve que la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ vaut $\frac{5}{6}\vec{u}$.

**Exercice 2.** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(3,-2,5)$, $B(1,7,11)$ et $C(2,-1,5)$. Quel est l'angle au sommet $A$ dans le triangle $ABC$ ?

Solution: Notons $\theta$ l'angle recherché. On a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

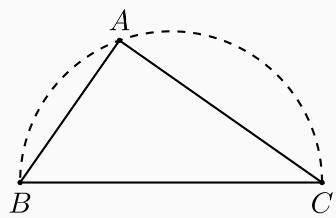
Par ailleurs, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Comme le repère employé est orthonormé, on trouve :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + 9\cdot 1 + 6\cdot 0 = 11,\ \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+9^2+6^2} = 11 \text{ et } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}.$$

Par conséquent, $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui montre que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 3.**

Soit un triangle $ABC$ inscrit dans un demi-cercle. En utilisant le produit scalaire, montrer que l'angle au sommet $A$ est droit (on pourra introduire le milieu de $BC$).




Solution: Soit $I$ le milieu de $BC$. Comme $I$ est le centre du demi-cercle, on a $\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\|$. Calculons alors le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}) = \|\overrightarrow{AI}\|^2 - \|\overrightarrow{IB}\|^2 = 0.$$

Cela montre bien que l'angle au sommet $A$ du triangle $ABC$ est droit.

**Exercice 4.** On donne un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan. On sait que :

$$\|\vec{u}\| = 1, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

où $\theta$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Exprimer le produit scalaire des vecteurs $\vec{w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{w}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en fonction de $x$, $x'$, $y$ et $y'$.

b. Exprimer la distance du point $M(x, y)$ à l'origine en fonction de $x$ et $y$.

c. Déterminer, en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur normal à la droite d'équation $x - y + 3 = 0$.

Solution:

a. On écrit $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, $\vec{w}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$, puis on calcule :

$$\vec{w} \cdot \vec{w}' = (x\vec{u} + y\vec{v}) \cdot (x'\vec{u} + y'\vec{v}) = xx'\|\vec{u}\|^2 + (xy' + x'y)\vec{u} \cdot \vec{v} + yy'\|\vec{v}\|^2.$$

Comme on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = 1$, On obtient donc finalement :

$$\vec{w} \cdot \vec{w}' = xx' + xy' + x'y + 2yy'.$$

b. Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ en utilisant la formule trouvée en a. :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}} = \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

c. La droite proposée est dirigée par le vecteur $\vec{w}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant le résultat obtenu à la question a., on voit alors qu'un vecteur $\vec{w}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est normal à $\vec{w}$ si et seulement si :

$$\vec{w} \cdot \vec{w}' = 0, \text{ c'est-à-dire } 2x' + 3y' = 0.$$

Le vecteur de composantes $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à dire le vecteur $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ est donc normal à la droite proposée.

**Exercice 5.** Dans le plan, on donne deux points $A$ et $B$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. Dans chacun des cas suivants, décrire le lieu géométrique des points $M$ du plan vérifiant la condition donnée.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ (on pourra introduire le milieu de $AB$).

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \alpha$ (on pourra introduire un point bien choisi de la droite $(AB)$).

d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} \geqslant 0$.

Solution:

a. Le lieu recherché est formé des points $M$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Il s'agit donc de la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $A$.

b. Soit $I$ le milieu de $AB$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2.$$

Par conséquent, le point $I$ est dans le lieu recherché. Réécrivons la condition sous la forme :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} \text{ ce qui est équivalent à } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0.$$

Le lieu recherché est donc la droite passant par $I$ et perpendiculaire à $(AB)$.

c. Introduisons le point $J$ d'abscisse $\frac{\alpha}{4}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$ de la droite $(AB)$. On a alors :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{\alpha}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{\alpha}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha.$$

Par conséquent, le point $J$ est dans le lieu recherché. Réécrivons la condition sous la forme :

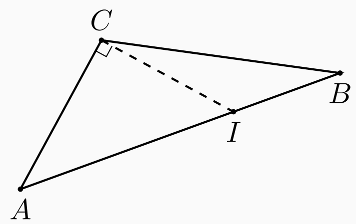
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ} \text{ ce qui est équivalent à } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JM} = 0.$$

Le lieu recherché est donc la droite passant par $J$ et perpendiculaire à $(AB)$.

d. La condition est remplie si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ forment entre eux un angle aigu. Par conséquent, le lieu recherché est un des demi-plans (fermés) définis par la perpendiculaire à $(AB)$ passant par $B$ : c'est celui ne contenant pas $A$.

**Exercice 6.**

Soit $ABC$ un triangle non rectangle en $A$. On note $I$ le point d'intersection de la droite $(AB)$ et de la perpendiculaire à $(AC)$ passant par $C$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.




Solution: Le point $I$ se trouve sur la droite $(AB)$. Par conséquent, il existe un réel $t$ tel que :

$$\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AB}.$$

Par ailleurs, il se trouve aussi sur la perpendiculaire à $(AC)$ passant par $C$, donc :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

On en déduit alors :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 \text{ et donc } t = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}.$$

Notons que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est non nul, car par hypothèse le triangle n'est pas rectangle en $A$. On obtient donc finalement :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}.$$

**Exercice 7.** On donne un triangle $ABC$ dont on note $G$ le centre de gravité. Pour tout point $M$, on note :

$$f(M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 + \|\overrightarrow{CM}\|^2.$$

a. En utilisant le produit scalaire, calculer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et de $\|\overrightarrow{GM}\|$.

b. En déduire la valeur minimum de la fonction $f$.

Solution:

a. D'après la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) \cdot (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) = \|\overrightarrow{AG}\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} + \|\overrightarrow{GM}\|^2.$$

De même, on obtient :

$$\|\overrightarrow{BM}\|^2 = \|\overrightarrow{BG}\|^2 + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM} + \|\overrightarrow{GM}\|^2.$$
$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = \|\overrightarrow{CG}\|^2 + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GM} + \|\overrightarrow{GM}\|^2.$$

En additionnant ces relations, on trouve :

$$f(M) = \underbrace{\|\overrightarrow{AG}\|^2 + \|\overrightarrow{BG}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2}_{=f(G)} + 2\underbrace{(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG})}_{=\vec{0}} \cdot \overrightarrow{GM} + 3\|\overrightarrow{GM}\|^2$$

et donc finalement :

$$f(M) = f(G) + 3\|\overrightarrow{GM}\|^2.$$

b. La quantité $\|\overrightarrow{GM}\|^2$ est positive et atteint son minimum 0 uniquement au point $M = G$. Par conséquent, on voit que le minimum de la fonction $f$ est $f(G)$ et que ce minimum est atteint uniquement au point $M = G$.

**Exercice 8.** On donne un triangle $ABC$ dans le plan.

a. Quels sont les lieux géométriques décrits par les conditions suivantes ?

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

b. En utilisant a. montrer que les hauteurs du triangle $ABC$ sont concourantes, c'est-à-dire qu'elles s'intersectent en un point.

Solution:

a. La condition $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ décrit la droite perpendiculaire à $(BC)$ passant par $A$, c'est-à-dire la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$. La deuxième condition peut se réécrire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Elle décrit donc la hauteur issue de $B$ dans le triangle $ABC$. De la même manière, on montre que la dernière condition décrit la hauteur issue de $C$.

b. Considérons le point $I$ d'intersection de la hauteur issue de $A$ et de celle issue de $B$. On a donc :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

En soustrayant ces deux relations, on obtient :

$$\underbrace{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC},$$

ce qui montre que $I$ est aussi sur la hauteur issue de $C$.

**Exercice 9.** On donne deux points $A$ et $B$ dans le plan ainsi qu'un réel $\alpha$. Quel est le lieu géométrique formé des points $M$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \alpha$ ? On discutera selon la valeur de $\alpha$.

Solution: Soit $I$ le milieu de $AB$. On a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) = \|\overrightarrow{IM}\|^2 - \|\overrightarrow{IA}\|^2.$$

Par conséquent, la condition définissant le lieu géométrique proposé se réécrit $\|\overrightarrow{IM}\|^2 = \|\overrightarrow{IA}\|^2 + \alpha$. Posons :

$$\beta = \|\overrightarrow{IA}\|^2 + \alpha = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \alpha.$$

Si $\beta > 0$, alors le lieu recherché est le cercle de centre $I$ et de rayon $\sqrt{\beta}$. Si $\beta = 0$, ce lieu est réduit au point $I$, et si $\beta < 0$, alors il est vide.