Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________ Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. Dans le plan muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$, on donne deux vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2$ et $\vec{v} = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2$.

On considère un endomorphisme f du plan dont l'espace image $\operatorname{Im} f$ est la droite $(O\,,\,\vec{v})$ et le noyau $\operatorname{Ker} f$ est la droite $(O\,,\,\vec{u})$.

a) Sachant que $\forall\ \vec{x} \in \operatorname{Im} f\,,\ f(\vec{x}) = 13\,\vec{x}$, déterminer une base propre B' de f, la matrice de f relativement à B' et la nature géométrique de f.

b) Soit g l'endomorphisme du plan défini par sa matrice relativement à la base canonique B : $M_g = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ -8 & 45 \end{pmatrix}$.

i) Montrer que f et g ont un sous-espace vectoriel propre en commun.

ii) Calculer la matrice de g dans la base propre B' de f.

c) Soit h une homothétie de centre O et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

i) Calculer la matrice de l'application $j = \frac{1}{13}\,(g \circ f) + h$ dans B'.

ii) Déterminer les valeurs de α de sorte que j soit une affinité, caractériser alors l'affinité j. 4,5 pts

2. Soit f l'endomorphisme de l'espace dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

a) L'endomorphisme f est il diagonalisable ? Justifier rigoureusement votre réponse.

b) Déterminer avec précision la nature géométrique de f. 4 pts

Tourner la page

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux vecteurs perpendiculaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\vec{x}) = (\vec{x} \times \vec{a}) \times \vec{a} + (\vec{x} \times \vec{b}) \times \vec{b},$$

où $\vec{u} \times \vec{v}$ représente le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier rigoureusement votre réponse.

Indication : on ne demande pas de calculer les éventuelles valeurs propres de f. 2,5 pts

4. Discuter en fonction du paramètre réel m et résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z &= m - 1 \\ -x - y - 2z &= 1 \\ x - y - 4z &= -m^2 \end{cases}$$

4 pts
