Exercice 1. Dans cet exercice on verra un critère pour qu'il existe une seule solution au sens des moindres carrés d'un système $AX = b$.

Soit $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. On considère $AX = b$ un système d'équations linéaires. Montrer que ce système possède une unique solution au sens des moindres carrés si et seulement si le rang de A est égal à m si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 2. *vrai ou faux*

(a) *Si une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisfait $A = A^T$ et u et v sont deux vecteurs qui vérifient $Au = 3u$ et $Av = 4v$, alors par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $u \cdot v = 0$.*

(b) *Toute matrice symétrique $n \times n$ admet n valeurs propres réelles distinctes.*

(c) *Si P est une matrice inversible telle que $P^T = P^{-1}$, D est une matrice diagonale, et enfin $B = PDP^T$, alors la matrice B est symétrique.*

(d) *Toute matrice orthogonale est orthogonalement diagonalisable.*

(e) *La dimension d'un espace propre d'une matrice symétrique est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre associée.*

Exercice 3. *Soit A une matrice inversible $n \times n$ telle que $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormale de vecteurs propres de A. Montrer que A^{-1} est diagonalisable orthogonalement.*

Exercice 4. *Soient A et B deux matrices diagonalisables orthogonalement telles que $AB = BA$. Montrer que AB est également diagonalisable orthogonalement.*

Les reste de la série consiste à une collection de problèmes choisis sur toute la matière du semestre.

Exercice 5. *On considère les vecteurs*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \ \text{et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h+20 \\ 9 \\ 2h-7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Pour quelle valeur du nombre réel h le vecteur $\mathbf{b}$ appartient-il à $Vect\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$?

Exercice 6. *Soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{et } T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Soit $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $T(\overrightarrow{e}_1)$

Exercice 7. *Calculer la factorisation LU de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -4 & 15 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & 11 & 0 \\ 8 & 6 & 9 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous. Le coefficient l_{43} de la matrice L ainsi obtenue est égal à :

☐ -1
☐ 2
☐ 1
☐ -2

Exercice 8. *Soit* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la transformation linéaire définie par*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, *alors la matrice* $M = (T)_{\mathcal{B}}$ *de* T *par rapport à la base* $\mathcal{B}$, *c'est-à-dire telle que* $M[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}}$, *est*

☐ $M = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

☐ $M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

☐ $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 9. *Soit* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

☐ *Alors* 1 *est valeur propre de* A, *la dimension de* E_1 *vaut* 2 *et* A *est diagonalisable.*

☐ *Alors* 2 *est valeur propre de* A, *la dimension de* E_2 *vaut* 2 *et* A *est diagonalisable.*

☐ *Alors* 1 *est valeur propre de* A, *la dimension de* E_1 *vaut* 1 *et* A *n'est pas diagonalisable.*

☐ *Alors* 2 *est valeur propre de* A, *la dimension de* E_2 *vaut* 1 *et* A *n'est pas diagonalisable.*

Exercice 10. *Soit* W *le sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Alors la projection orthogonale de* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *sur* W *est*

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exercice 11. *Soient* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. *Alors la solution* $\hat{\mathbf{x}}$ *au sens des moindres carrés de l'équation* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *est telle que*

(A) $\hat{x}_1 = 16$

(B) $\hat{x}_1 = -16$

(C) $\hat{x}_1 = -2$

(D) $\hat{x}_2 = 2$

Exercice 12. *Soient* $\mathcal{B} = (1, 1+t, t+t^2)$ *et* $\mathcal{C} = (1+t, 1+t^2, t+t^2)$ *deux bases de l'espace vectoriel* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *des polynômes de degré* ≤ 2. *Si le vecteur de coordonnées d'un polynôme* p *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *est*

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors la dernière composante de $[p]_{\mathcal{C}}$ *est*

☐ 1
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ 0