Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 11

Espaces vectoriels : exercice 5

Dans ce cas, le plus simple est d'utiliser la définition de la dépendance linéaire.
Les trois matrices sont linéairement dépendantes si et seulement si l'une d'entre elle est une combinaison linéaire des deux autres.

Il est évident que A et B sont linéairement indépendantes car leurs coefficients ne sont pas proportionnels ou il suffit d'observer où se trouvent les zéros! De même pour A et C et pour B et C.

L'idée est donc d'exprimer la matrice C comme une combinaison linéaire de A et B et de résoudre le système.

$$C = \alpha A + \beta B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\beta \end{pmatrix}$$

D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} 1 & = \alpha + 2\beta \\ t-2 & = 2\alpha \\ 2t & = 3\alpha \\ 10 & = 4\beta \end{cases}$$

qui est vérifié pour $\alpha = -4$, $\beta = \frac{5}{2}$ et $t = -6$.

Ainsi pour $t = -6$ ces trois matrices sont linéairement dépendantes.

Espaces vectoriels : exercice 6

Soit E un espace vectoriel et V un sous-ensemble de E.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V \;\Leftrightarrow\; V$ est un sev de E.
Le critère du sev consiste donc à vérifier que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V},\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \mathbf{V}$$

(a) $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire }\}$
Rappel : une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est paire ssi $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve du critère :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in V$, on doit vérifier que $\alpha f + \beta g$ est une fonction paire.

$$\begin{array}{rcll} (\alpha f+\beta g)(-x) & = & \alpha f(-x)+\beta g(-x) & \text{définition de l'addition dans} \\ & & & \text{l'ensemble des fonctions} \\ & = & \alpha f(x)+\beta g(x) & f \text{ et } g \text{ sont des fonctions paires} \\ & = & (\alpha f+\beta g)(x) & \end{array}$$

Donc $\alpha f+\beta g \in V$. Le critère est vérifié.

On en conclut que V est un sev de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(b) $V=\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y=0\}$

Soit l'élément $(1;-1)$. Il appartient à V car $1^2+1=0$.

Son opposé est $(-1;1)$. Il n'appartient pas à V car $(-1)^2+1\neq 0$.

Donc V ne peut pas être un sev.

(c) $V=\{X\in\mathbb{M}_n \mid AX=XA \;\text{ où }\; A\in\mathbb{M}_n \;\text{ est fixée}\}$

Preuve du critère :

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall X,Y\in \mathbf{V}$, on doit vérifier que la matrice $\alpha X+\beta Y$ commute avec A.

Par hypothèse : $X\in V \Leftrightarrow AX=XA$
$Y\in V \Leftrightarrow AY=YA$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} (\alpha X+\beta Y)A & = & \alpha XA+\beta YA & \text{distributivité de } A \text{ à droite} \\ & = & \alpha AX+\beta AY & \text{par hypothèse } X \text{ et } Y \text{ appartiennent à } V \\ & = & A\alpha X+A\beta Y & \text{scalaire et matrice commutent} \\ & = & A(\alpha X+\beta Y) & \text{mise en évidence de } A \text{ à gauche} \end{array}$$

Donc $\alpha X+\beta Y\in V$. Le critère est vérifié.

On en conclut que V est un sev de l'ensemble $\mathbb{M}_n$.

(d) $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c\end{pmatrix}\in\mathbb{M}(2,\,\mathbb{R}) \mid a,\, b,\, c\in\mathbb{R}\right\}$

V ne peut pas être un sev car la matrice nulle n'appartient pas à cet ensemble.

(e) $V=\{X\in\mathbb{M}_n \mid M(X+X^t)=0 \;\text{ où }\; M\in\mathbb{M}_n \;\text{ est fixée et }\; \det M=0\}$

Preuve du critère :

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall X,Y\in \mathbf{V}$, on doit vérifier que la matrice $\alpha X+\beta Y$ a la propriété caractéristique de V.

Par hypothèse : $X\in V \Leftrightarrow M(X+X^t)=0$
$Y\in V \Leftrightarrow M(Y+Y^t)=0$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} M(\alpha X+\beta Y+(\alpha X+\beta Y)^t) & = & M(\alpha X+\beta Y+\alpha X^t+\beta Y^t) & \text{car } (A+B)^t=A^t+B^t \\ & & & \text{et } (\alpha A)^t=\alpha A^t \\ & = & M(\alpha(X+X^t)+\beta(Y+Y^t)) & \text{on regroupe et on met} \\ & & & \alpha \text{ et } \beta \text{ en évidence} \\ & = & \alpha M(X+X^t)+\beta M(Y+Y^t) & \text{on distribue } M \text{ à} \\ & & & \text{gauche} \\ & = & 0 & \text{et on utilise l'hypothèse} \end{array}$$

Donc $\alpha X+\beta Y\in V$. Le critère est vérifié.

On en conclut que V est un sev de l'ensemble $\mathbb{M}_n$.

(f) $V=\{(x;\, y;\, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-4z=0\}$

Preuve du critère :

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall(x;y;z),(u;v;w)\in \mathbf{V}$, on doit vérifier que $\alpha(x;y;z)+\beta(u;v;w)$ a la propriété caractéristique de V.

Par hypothèse : $(x;y;z)\in V \Leftrightarrow 2x+3y-4z=0$
$(u;v;w)\in V \Leftrightarrow 2u+3v-4w=0$

On commence par calculer :

$$\begin{array}{rcl} \alpha(x;y;z)+\beta(u;v;w) & = & (\alpha x;\alpha y;\alpha z)+(\beta u;\beta v;\beta w) \\ & = & (\alpha x+\beta u\,;\alpha y+\beta v\,;\alpha z+\beta w) \;=\; (x'\,;y'\,;z') \end{array}$$

On teste la propriété caractéristique en utilisant l'hypothèse et en calculant :

$$\begin{array}{rcl} 2x'+3y'-4z' & = & 2\,(\alpha x+\beta u)+3\,(\alpha y+\beta v)-4\,(\alpha z+\beta w) \;= \\ & = & \alpha\,(2x+3y-4z)+\beta\,(2u+3v-4w) \;=\; 0 \end{array}$$

Donc $\alpha(x;y;z)+\beta(u;v;w)\in V$. Le critère est vérifié.

On en conclut que V est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(g) $V=\{(a;\,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a>0\}$

V ne peut pas être un sev car l'élément neutre $(0;0)$ n'appartient pas à cet ensemble.

(h) $V=\{p\in P_3[x] \mid p(1)=0 \text{ et } p'(1)=0\}$

Preuve du critère :

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall p,q\in$ **V**, on doit vérifier que $\alpha p+\beta q$ a la propriété caractéristique de V.

$$\begin{array}{ll} \text{Par hypothèse :} & p\in V \Leftrightarrow p(1)=0 \text{ et } p'(1)=0 \\ & q\in V \Leftrightarrow q(1)=0 \text{ et } q'(1)=0 \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} (\alpha p+\beta q)(1) & = & (\alpha p)(1)+(\beta q)(1) & \text{définition de l'addition dans } P_3 \\ & = & \alpha p(1)+\beta q(1) & \text{définition de l'amplification dans } P_3 \\ & = & \alpha\,0+\beta\,0 \;=\; 0 & \text{par hypothèse} \end{array}$$

De même :

$$\begin{array}{rcll} (\alpha p+\beta q)'(1) & = & (\alpha p)'(1)+(\beta q)'(1) & \text{propriétés de la dérivée} \\ & = & \alpha p'(1)+\beta q'(1) & \\ & = & \alpha\,0+\beta\,0 \;=\; 0 & \text{par hypothèse} \end{array}$$

Donc $\alpha p+\beta q\in V$. Le critère est vérifié.

On en conclut que V est un sev de l'ensemble des polynômes.

Espaces vectoriels : exercice 7

Montrer une égalité d'ensembles par la méthode directe.

- Par définition : $[\vec{u}_1,\,\vec{u}_2,\,\dots\,\vec{u}_n]_{sev} \;=\; \{\vec{x}\in E\,|\,\vec{x}=\alpha_1\vec{u}_1+\dots+\alpha_n\vec{u}_n,\ \alpha_i\in\mathbb{R}\}$
- Utiliser une double inclusion pour montrer l'égalité des deux ensembles.

Preuve :

i) $[\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m]_{sev} \subset [\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m,\,\vec{v}_{m+1}]_{sev}$: évident.

ii) $[\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m,\,\vec{v}_{m+1}]_{sev} \subset [\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m]_{sev}$

Soit $\vec{x}\in[\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m,\,\vec{v}_{m+1}]_{sev}$
alors il existe $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\alpha_m,\,\alpha_{m+1}\in\mathbb{R}$ tels que
$\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\;\dots\;+\alpha_m\vec{v}_m+\alpha_{m+1}\vec{v}_{m+1}$.

Or par hypothèse $\vec{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1,\,\dots,\,\vec{v}_m$ donc il existe m réels $\beta_1,\,\dots,\beta_m$ tels que
$\vec{v}_{m+1}=\beta_1\vec{v}_1+\;\dots\;+\beta_m\vec{v}_m$.

D'où

$\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\;\dots\;+\alpha_m\vec{v}_m+\alpha_{m+1}\,(\beta_1\vec{v}_1+\;\dots\;+\beta_m\vec{v}_m)\;=$

$=\;(\alpha_1+\alpha_{m+1}\,\beta_1)\vec{v}_1+\;\dots\;+(\alpha_m+\alpha_{m+1}\,\beta_m)\vec{v}_m$

Ainsi il existe m réels $\delta_1 = \alpha_1 + \alpha_{m+1}\,\beta_1$, ... , $\delta_m = \alpha_m + \alpha_{m+1}\,\beta_m$ tels que

$\vec{x} = \delta_1\vec{v}_1 + \ ... \ + \delta_m\vec{v}_m$, c'est-à-dire $\vec{x} \in [\vec{v}_1, \ ... \ , \vec{v}_m]_{sev}$.

D'où l'inclusion.

Remarque : $[\vec{v}_1, \ ... \ , \vec{v}_m \ , \vec{0}]_{sev} = [\vec{v}_1, \ ... \ , \vec{v}_m]_{sev}$ car $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \ ... \ + 0\vec{v}_m$.

Espaces vectoriels : exercice 8

(a) On regarde d'abord les éventuelles dépendance linéaires entre les vecteurs donnés. Ce qui permet de déterminer une famille maximale de générateurs linéairement indépendants.

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ces trois vecteurs sont manifestement linéairement indépendants. Ce que l'on peut vérifier en calculant leur déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \ = \ 2\,(1\cdot 0 - 1 \cdot 2) \ = \ -4 \ \neq \ 0$$

Ces trois vecteurs engendrent $\mathbb{R}^3$. Il y a donc ni équations paramétriques, ni équation cartésienne.

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$

On constate que $\vec{b} = 2\vec{a}$ et $\vec{c} = -3\vec{a}$. D'où :

$V \ = \ [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}]_{sev} \ = \ [\vec{a}]_{sev} \ = \ \{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda\,\vec{a}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\,\}$

Ce sev est une droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{a}$.

Equations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Equation cartésienne : $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{5}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

On constate que $\vec{b} = \frac{3}{4}\,\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas colinéaires (leurs composantes ne sont pas proportionnelles). D'où :

$V \ = \ [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}]_{sev} \ = \ [\vec{b}\,,\,\vec{c}]_{sev} \ = \ \{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \alpha\,\vec{b} + \beta\vec{c}\,,\,\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}\,\}$

Ce sev est un plan passant par l'origine et de vecteurs directeurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Equations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

ou aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs directeurs sont, de manière évidente, des générateurs du plan (Oxz) d'équation cartésienne $y = 0$.

(b) Il faut déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, (et $\vec{c}$) . On cherche d'abord une famille maximale de générateurs $\vec{a}_1$, ... $\vec{a}_n$.

$\vec{v} \in V = [\vec{a}_1 , ... \vec{a}_n]_{sev} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \alpha_1 , ... \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \ ... \ + \alpha_n \vec{a}_n$

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\vec{a}$

Donc : $\vec{v} \in V = [\vec{a} , \vec{b}]_{sev} = [\vec{a}]_{sev} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda\, \vec{a} , \lambda \in \mathbb{R} \}$

Ce sev est une droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\vec{a}$.

Equations paramétriques de V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R} , \vec{v} = \alpha\, \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 = -4\, \alpha \\ y = 2\, \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

D'où : $\alpha = -1 , y = -2 , z = -1$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$

On constate que $\vec{c} = -3\,\vec{a}$ et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires (leurs composantes ne sont pas proportionnelles). D'où :

$$V = [\vec{a} , \vec{b} , \vec{c}]_{sev} = [\vec{a} , \vec{b}]_{sev} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b} , \alpha , \beta \in \mathbb{R} \}$$

Ce sev est un plan passant par l'origine et de vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Equations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ou aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = 3\,\alpha + 2\,\beta \\ 2 = \alpha + \beta \\ z = -5\,\alpha \end{cases}$$

D'où : $\alpha = -3\,,\ \beta = \frac{5}{2}$, et $z = 15\,.$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq k\,\vec{a}$ ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Donc

$V = [\vec{a}\,,\,\vec{b}]_{sev} = \{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b}\,,\ \alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,\}$

Ce sev est un plan passant par l'origine et de vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Equations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3\,\alpha + 4\,\beta \\ -1 = \alpha - \beta \\ 4 = -2\,\alpha + 2\,\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3\,\alpha + 4\,\beta \\ -1 = \alpha - \beta \\ -2 = \alpha - \beta \end{cases}$$

Ce système est impossible. Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \vec{v} \notin V\,.$

Espaces vectoriels : exercice 10

(a) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $W = [\vec{x}\,,\ \vec{y}\,,\ \vec{z}]_{\text{sev}}\,.$
Sachant que : $\det[\,\vec{x} - \vec{y};\ \vec{x};\ \vec{z} - \vec{u}\,] + \det[\,\vec{x} + \vec{u};\ \vec{y};\ \vec{u}\,] - 12 = \det[\,3\vec{w};\ 2\vec{u};\ \vec{v}\,]$, il faut déterminer toutes les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour que $\dim W < 3\,.$

Par hypothèse dim $W < 3$, donc les vecteurs $\vec{x}\,,\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont linéairement dépendants. Or
$\vec{x}\,,\ \vec{y}$ et $\vec{z}$ linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ $\det[\vec{x}\,;\ \vec{y}\,;\ \vec{z}] = 0$

On va donc utiliser la relation donnée pour calculer $\det[\vec{u}\,;\ \vec{v}\,;\ \vec{w}]\,.$

$\det[\vec{x};\,\vec{x};\,\vec{z}-\vec{u}\,] + \det[-\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{z}-\vec{u}\,] + \det[\vec{x};\,\vec{y};\,\vec{u}\,] + \det[\vec{u};\,\vec{y};\,\vec{u}\,] - 12 =$
$= 3\cdot 2\det[\vec{w};\,\vec{u};\,\vec{v}\,]\,,$

$0 + (-1)\det[\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{z}\,] + (-1)\,(-1)\det[\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{u}\,] + \det[\vec{x};\,\vec{y};\,\vec{u}\,] + 0 - 12 =$
$= (-1)\,(-1)\,6\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,]\,,$

$\det[\vec{x};\,\vec{y};\,\vec{z}\,] + \det[\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{u}\,] + (-1)\det[\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{u}\,] - 12 = 6\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,]\,,$

$\det[\vec{x};\,\vec{y};\,\vec{z}\,] - 12 = 6\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,]\,,$

Or $\dim W < 3 \quad\Leftrightarrow\quad \det[\vec{x};\,\vec{y};\,\vec{z}\,] = 0$

D'où :

$0 - 12 = 6\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,] \;\Leftrightarrow\; \det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,] = -2 \qquad (*)$

On calcule donc ce déterminant :

$\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & t-1 & 2 \\ 0 & 2t & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & t+1 & 1 \\ 0 & 2t & t \end{vmatrix} = -t^2 + t = -2$ par $(*)$

$\Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2) = 0$

ainsi : $\dim W < 3 \quad\Leftrightarrow\quad t = -1$ ou $t = 2\,.$

(b) Le vecteur $\vec{a}$ est une combinaison linéaire unique de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si ces trois vecteurs forment une base de V.
Pour $t = 1$, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a} \in V$ est une combinaison linéaire non unique si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. On calcule donc le déterminant formé par ces trois vecteurs.

$$\det[\vec{u};\,\vec{v};\,\vec{w}\,] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ils sont dépendants, donc il est possible d'exprimer tout vecteur $\vec{a} \in V$ comme combinaison non unique de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

(c) Il faut détermine α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{a} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$

$$\vec{a} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w} \qquad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & -\alpha + 2\beta - \gamma \\ 1 & = & \alpha + 2\gamma \\ 2 & = & 2\beta - \gamma \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & -\alpha + 2\beta - 2 + 2\beta \\ 1 & = & \alpha + 2(2 - 2\beta) \\ \gamma & = & 2 - 2\beta \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 3 & = & -\alpha - +4\beta \\ 3 & = & -\alpha - +4\beta \\ \gamma & = & 2 - 2\beta \end{array} \right.$$

Les solution de ce système s'exprime donc en fonction d'un paramètre, par exemple β :

$$(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) \;=\; (4\beta - 3\,,\,\beta\,,\,2 - 2\beta)$$

D'où la combinaison linéaire non unique :

$$\vec{a} = (4\beta - 3)\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + (2 - 2\beta)\,\vec{w}\,, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

En posant par exemple $\beta = 0$, on a la combinaison linéaire non triviale suivante :

$$\vec{0} \;=\; -\vec{a} - 3\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 2\,\vec{w}$$