Contrôle d'analyse I N°1

Durée : 1 heure 45 minutes   Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. On considère la droite d d'équation

$$d:\ y = -4x - 10$$

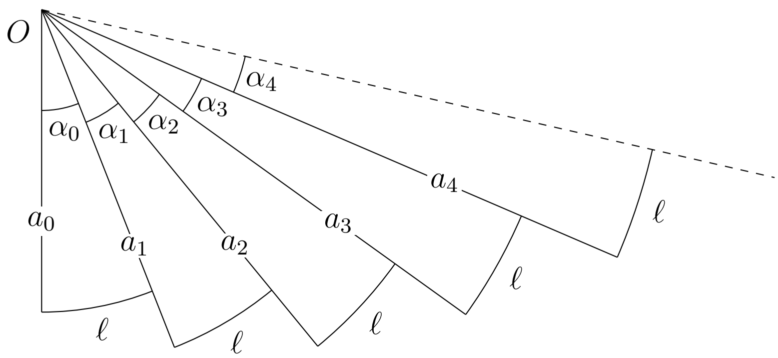
et la parabole Γ d'équation

$$\Gamma:\ y = P(x) = \frac{1}{m}\,x^2 + 2x + m(m-2)$$

dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}^*$.
Déterminer m tel que
— la droite d et la parabole Γ se coupent en deux points distincts,
— le sommet de Γ soit situé dans le demi-plan défini par $y > -4x - 10$. 6 pts

$S = \,]\leftarrow, 0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,2\,[\,\cup\,]\,5\,,\,10\,[\,.$

2. On donne les valeurs d'une longueur d'arc de cercle ℓ, d'un rayon a_0 et d'un paramètre $\lambda = \frac{3}{2}$. On construit une suite d'angles de la manière itérative suivante :
— α_0 est l'angle défini par le rayon a_0 et la longueur d'arc ℓ ;
— α_1 est l'angle défini par le rayon $a_1 = \lambda a_0$ et la même longueur d'arc ℓ ;
— α_2 est l'angle défini par le rayon $a_2 = \lambda a_1$ et la même longueur d'arc ℓ ;
— et ainsi de suite, comme illustré sur le dessin...



Tourner s.v.p.

a) Déterminer la somme γ_n de ces angles après n étapes, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\gamma_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\,.$$

b) Déterminer l'angle total

$$\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\,.$$

3 pts

$$\gamma_n = \frac{\ell}{a_0} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\,, \qquad \gamma = \frac{3\ell}{a_0}\,.$$

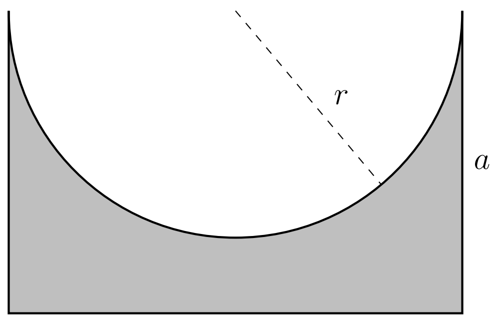
3. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel m, l'inéquation suivante :

$$\sqrt{\left|x^2 - 5m^2\right|} \geq x - m\,.$$

6 pts

— si $m > 0$, $S = \,]\leftarrow, 2m] \cup [3m, \rightarrow[$,
— si $m = 0$, $S = \mathbb{R}$,
— si $m < 0$, $S = \,]\leftarrow, -m]$.

4. On considère le domaine ci-dessous en découpant un demi-disque dans un rectangle. Les grandeurs a et r sont variables alors que le périmètre L est fixé. On posera $\pi \simeq 3$.



a) Décrire les contraintes géométriques sur a et r et en déduire le domaine de variation de la variable r. $D_r = \left]\,0\,, \frac{L}{7}\,\right[$.

b) Déterminer l'aire du domaine en fonction de la variable r et représenter son graphe. $A(r) = \frac{r}{2}\,(2L - 13r)$.

c) Pour quelle relation entre a et r l'aire est-elle maximale ? $a_{\max} = 4r_{\max}$.

5 pts