15.3.19

Corrigé de la Série 14

1. On a

(a) $(4-i)+(2+3i)(1-i) = (4-i)+[(2+3)+i(-2+3)] = (4-i)+(5+i) = 9$;

(b) $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{9+4} = \dfrac{3}{13} + i\dfrac{2}{13}$;

(c) $i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i \quad k \in \mathbb{N}$;

(d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^7}(1+i)^2 = \left[\dfrac{(1+i)}{(1-i)}\right]^7 (1+i)^2 = \left[\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^7 (1+i)^2$

$= i^7(2i) = 2.$

2. (a) $z^2 + 2(1+i)z - \dfrac{5}{1+2i} = 0$, on compléte les 2 premiers termes du membre de gauche

pour former un carré parfait ce qui donne :

$$z^2 + 2(1+i)z + (1+i)^2 - \frac{5(1-2i)}{5} - (1+i)^2 = 0$$

qui s'écrit : $[z+(1+i)]^2 - (1-2i) - 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [z+(1+i)]^2 = 1$ donc :

$z + (1+i) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad z = -i \quad \text{ou} \quad z = -2-i$;

(b) $z^3 + 9z - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z^2+z+10) = 0 \quad \Rightarrow$

$$(z-1)\left(z + \frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)\left(z + \frac{1-i\sqrt{39}}{2}\right) = 0$$

d'où les solutions : $z_1 = 1,\ z_{2,3} = -\dfrac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$.

3. (a) i) On écrit :

$$(x+iy)^2 - T(x+iy) + N = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - T\cdot x + N = 0 & (1) \\ 2xy - T\cdot y = 0 & (2) \end{cases}$$

$z \in \mathbb{C}$ si $y \neq 0$, de (2) on tire $T = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$: 2 fois la partie réelle de z.

La valeur de T dans (1) nous donne : $x^2 - y^2 - 2x^2 + N = 0 \quad \Rightarrow$

$$N = x^2 + y^2 = |z|^2 \ : \ \text{module de } z \text{ au carré}$$

Si $y = 0$, on a une équation réelle (classique).

ii) On peut résoudre l'équation donnée directement ou utiliser le résultat du point i)

$$T = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}, \quad N = x^2 + y^2 = 2 \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Les racines sont donc conjuguées et nous avons : $z_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} i$;

(b) Soit z tel que $|z| < 1$, on a alors :

$\big|(1-i)z^3 - iz\big| = |z| \; \big|(1-i)z^2 - i\big|$, on utilise l'inégalité triangulaire :

si $u, v \in \mathbb{C}$ alors $|u+v| \leq |u| + |v|$ et on obtient :

$|(1-i)z^2 - i| \leq |(1-i)z^2| + |-i|$ d'où :

$$\big|(1-i)z^3 - iz\big| = |z| \; \big|(1-i)z^2 - i\big| \leq |z| \; \big(|1-i| \; |z|^2 + |1|\big) = A$$

Puisque $|z| < 1$ on a : $A < 1 \cdot (|1+i| + 1) = 1 \cdot (\sqrt{2} + 1) < \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$.

4. On a : $|z|^2 = z\overline{z} = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, $b \in \mathbb{R}^+$ Pour $z \neq 0$, on a alors :

$(1-z)\overline{z} = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right)$. On pose alors $z = x + iy$ et on obtient :

$x - (x^2 + y^2) - iy = -\dfrac{3}{4} + ib \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - (x^2 + y^2) = -\frac{3}{4} \\ y = -b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x + b^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y = -b \end{cases}$$

La première équation nous donne, avec la condition imposée : discriminant nul,

$\Delta = 0 = 1 + 3 - 4b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$ avec la condition de positivité.

D'où : $\quad x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{2} - i$.

5. Son ensemble de définition : $E_D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in]-1;1[\text{ et } 2x \in]-1;1[\ \} =]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$.

Sur E_D en utilisant l'écriture logarithmique, on a :

$$(E) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-2x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)(1+2x)}{(1-x)(1-2x)}=\frac{1}{2}\ln 5$$

On peut alors prendre l'exponentielle des deux membres (fonction bijective sur E_D) :

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)(1+2x)}{(1-x)(1-2x)}=\frac{1}{2}\ln 5 \;\Leftrightarrow\; (1+x)(1+2x)=5(1-x)(1-2x) \;\Leftrightarrow\; 4x^2-9x+2=0$$

Dans E_D, il n'y a qu'une seule solution possible : $x=\dfrac{1}{4}$.

6. (a) On calcule la dérivée de chacune des fonctions f et g :

$$f'(x)=[-\operatorname{Arsh}(\tan x)]'=-\frac{1+\tan^2(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}=-\frac{|\cos x|}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos x}\quad\text{car } x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$$

$$g'(x)=\left[2\ln 2\sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|}\right]'\qquad\text{or}\quad \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$$

$$g'(x)=\frac{(-1)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{(-1)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}$$

Nous avons donc $f'(x)=g'(x) \quad\Rightarrow\quad f(x)=g(x)+c.$

(b) La constante c se détermine en prenant une valeur simple du point de vue calculatoire : par exemple $x=\pi$.

$$\begin{cases} f(\pi)=-\operatorname{Arsh}(\tan\pi)=-\operatorname{Arsh}(0)=0\\ g(\pi)=2\ln 2\sqrt{\left|\tan\frac{3\pi}{4}\right|}=2\ln 2\,; \end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad 0=2\ln 2+c\ ;\ c=-\ln 4\,;$$

on a alors : $-\operatorname{Arsh}(\tan x)=2\ln\left(2\sqrt{\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|}\right)-\ln 4.$