Série 10

1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos(\frac{1+2x}{x})$

b) $b(x) = \cos^2(\sin x)$

c) $c(x) = [\sin(p\, x^q)]^r\ ,\ \ p, q, r \in \mathbb{N}^*$

d) $d(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

e) $e(x) = \arccos(3x - 1)$

f) $f(x) = \arctan\left(\frac{12\ \sin x}{5+13\ \cos x}\right)$

2. Soit Γ la courbe d'équation $y = 3\ \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right)$, $x \in [\,0\,,\ \frac{\pi}{2}\,[$.

a) Montrer que la courbe Γ admet une tangente de pente $m = 3$.
Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente.

b) Pour quelle valeur de x, la courbe Γ admet-elle au point $(x, f(x))$, une normale de pente $m = -\frac{1}{2}$?

3. Soit Γ la courbe d'équation $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Montrer que la droite t d'équation $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1 + \sqrt{3}\,x)$ est tangente à Γ.

4. Montrer que la fonction dérivée de la fonction f est identiquement nulle.

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)$$

En déduire l'expression de $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ en fonction de $\arctan x$ sur chaque intervalle de son domaine de continuité.

Puis déduire le graphe de la fonction $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ de celui de la fonction $\arctan x$.

5. Montrer que les fonctions suivantes ont même fonction dérivée sur l'intervalle $[\,0\,,\ \frac{\pi}{2}\,]$.

$$f(x) = \arctan\left(\tfrac{12\ \sin x}{5+13\ \cos x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\ \arctan\left(\tfrac{3+2\ \tan(x/2)}{3-2\ \tan(x/2)}\right).$$

Puis en déduire que $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$ sur $[\,0\,,\ \frac{\pi}{2}\,]$.

6. On considère la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

a) Donner le domaine de définition de la fonction f.

b) Déterminer la fonction dérivée de f ainsi que son domaine de définition.

c) En déduire la représentation graphique de f.

Réponses de la série 10

1.

a) $a'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ \sin(\frac{1+2x}{x})$

b) $b'(x) = -\cos x\ \sin(2\sin x)$

c) $c'(x) = p\,q\,r\ x^{q-1}\ \cos(p\,x^q)\,[\sin(p\,x^q)]^{r-1}$

d) $d'(x) = -\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$

e) $e'(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}$

f) $f'(x) = \dfrac{12}{13+5\cos x}$

2. a) En $x = \frac{\pi}{3}$, Γ admet une tangente d'équation : $y - \frac{\pi}{2} = 3\,(x - \frac{\pi}{3})$

b) $x = \arcsin\frac{3}{4}$

3. La droite t est tangente à Γ en $T\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\right)$

4. $$\arctan\frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} - \arctan x & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

5. $f'(x) = g'(x) = \dfrac{12}{13+5\cos x}$

6. a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}\ \left[\operatorname{sgn}(1-x^2) + \operatorname{sgn} x\right]$, $\qquad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\,,\,0\,,\,1\}$.

c) $$f(x) = \begin{cases} -\pi - 4\arctan x & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ 4\arctan x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \pi & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
