Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère la proposition suivante :

$$T : \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{si } \; a \; < \; b \; \text{ alors } a^2 \; < \; b^2$$

a) Ecrire la négation de la proposition T.

b) Enoncer la proposition contraposée de T, notée C_T.

c) Ecrire la proposition réciproque, notée R_{C_T}, de la proposition contraposée C_T.

d) La proposition T est-elle vraie ? (justifier par une méthode de preuve)

4 pts

Réponses :

(a) non T : $\exists\; a\,, b \;\in \mathbb{R} \quad (a \;<\; b) \;$ et $(a^2 \;\geq\; b^2)$

(b) C_T : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad$ si $\; a^2 \;\geq\; b^2 \;$ alors $a \;\geq\; b$

(c) R_{C_T} : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad$ si $\; a \geq b \;$ alors $a^2 \;\geq\; b^2$

(d) T est fausse, un contre-exemple le montre :
$\exists\; a = -4\,, b = 3 \;\in \mathbb{R} \quad -4 \;<\; 3 \;$ et $(-4)^2 \;\geq\; 3^2$

2. On définit $S(n)$ par

$$S(n) = \frac{3(3-1)}{2} + \frac{4(4-1)}{2} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 3\,.$$

Montrer par récurrence que

$$S(n) = \mathrm{C}_{n+1}^{3} \; - 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 3\,.$$

3.5 pts

3. a) On considère les ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \{\; x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4 \;\} \\ A &= \{\; x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \;\text{ ou }\; 2 \leq x \leq 3 \;\} \\ B &= \{\; x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3 \;\} \end{aligned}$$

On considère les deux ensembles suivants :

$$F \;=\; \complement_{E\times E}(A \times B) \qquad \text{et} \qquad G \;=\; \complement_E A \times \complement_E B$$

Représenter avec soin et précision, les ensembles F et G. Faire un graphique pour F et un autre pour G. Préciser sur les graphiques si les frontières sont inclues ou non.
Echelle : 1 unité = 1 cm.

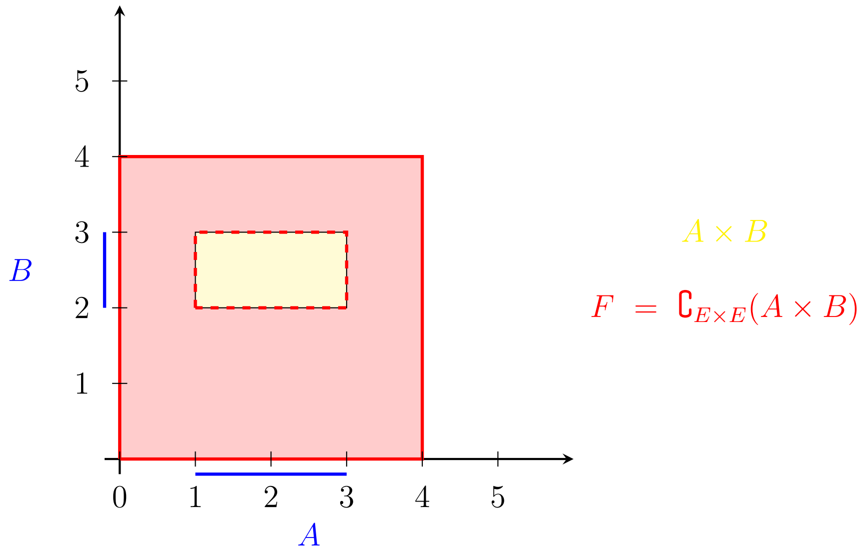
b) On considère des ensembles A, B et E non vides et l'énoncé noté T suivant :

$$T \ : \ \forall\, A\,,B\,,E\,,\quad \text{si} \quad A\subset E \ \text{ et } B\subset E \quad \text{alors} \quad \complement_{E\times E}(A\times B) \ = \ \complement_E A\times \complement_E B$$

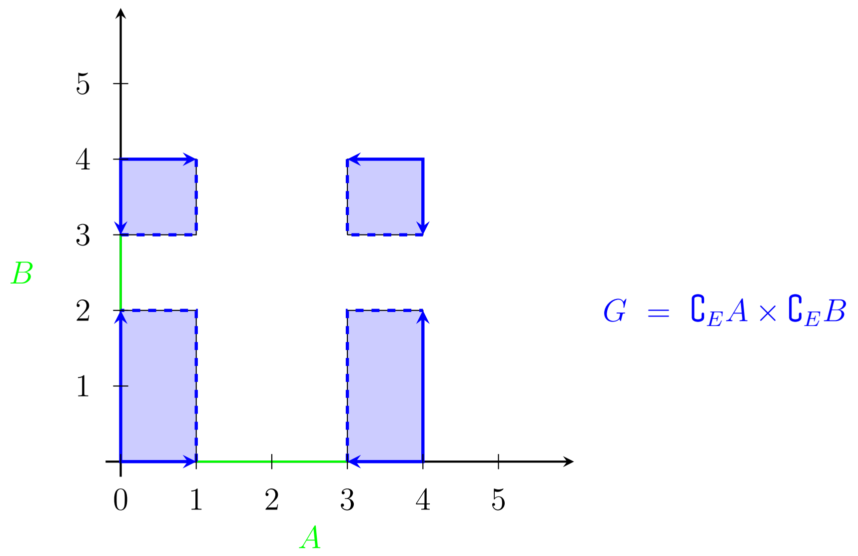
Ecrire la négation de T.
A l'aide d'un contre-exemple, montrer que T est fausse. 4.5 pts

Réponses :

(a) Représentation graphique de $F \ = \ \complement_{E\times E}(A\times B)$



Représentation graphique de $G \ = \ \complement_E A\times \complement_E B$



non T : $\exists\, A\,,B\,,E\,,\quad A\subset E\,,\ B\subset E$ et $F\neq G$
La partie (a) de la question constitue un contre-exemple, donc T est fausse.

4. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x',y')=\begin{cases} \big(x+1,\,(x-1)^2\big) & \text{si } x\geq 0 \\ \big(x,\,1\big) & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$$

a) Déterminer $f(\{-1,0,1\})$.

b) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$ et en donner la représentation graphique. Echelle : 1 cm par unité.

c) Soit $H=[\,0\,;\,5\,]\times\{4\}$. Déterminer rigoureusement $f^{-1}(H)$.

d) f est-elle surjective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

e) f est-elle injective ? On demande une preuve ou un contre-exemple.

On donne encore l'application g définie par

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & v-u+2\,. \end{array}$$

f) Déterminer $g\circ f$ rigoureusement.

8 pts

Réponses :

(a) $f(\{-1,0,1\})=\{(-1,\,1),\,(1,\,1),\,(2,\,0)\}$

(b) $\operatorname{Im} f=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2\,|\,x'\geq 1\,,\ y'=(\,x'-2\,)^2\}\cup\{(x',y')\in\mathbb{R}^2\,|\,x'<0\,,\ y'=1\}$

(c) $f^{-1}(H)=\{3\}$

(d) f n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{R}^2$.

(e) f est injective

(f) $$\begin{array}{rccl} g\circ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x',y')=\begin{cases} x^2-3x+2 & \text{si } x\geq 0 \\ 3-x & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$$