Série 10

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

a) $a(x) = \tan|x|$

b) $b(x) = x \sin|x|$

c) $c(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $c(0) = 0$

d) $d(x) = \sin^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $d(0) = 0$.

2. On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \frac{\cos(2x) + \sin x}{\sin(2x)} \quad \text{si } x \neq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad g(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Montrer à l'aide de la définition que la fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que la fonction $b(x)$ de l'exercice **1.** b) de la série 9 peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$.

Est-elle alors dérivable en $x_0 = 0$? $\qquad b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{x}$.

4. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{6}{x}$

b) $b(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x^3}\,\right)^2}$

g) $g(x) = (x-1)^5(2x+1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x = -1$?

5. Dériver sur $\mathbb{R}^*$ les deux fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^2} = \begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6. On considère la courbe Γ d'équation $y = (\pi - x)^2 \sin^2 x$.

Déterminer l'équation de la tangente t à la courbe Γ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ tangente à la droite d'équation $y - 3x - 1 = 0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

Réponses de la série 10

1. a) non b) oui c) non d) oui

2. La fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}$.

3. La fonction prolongée $\widehat{b}$ est dérivable en $x_0 = 0$ et $\widehat{b}\,'(0) = \frac{1}{2}$.

4. a) $a'(x) = 6\left(x^5 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{1}{x^2}\right), \quad D_a = D_{a'} = \mathbb{R}^*$.

b) $b'(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}, \quad D_b = D_{b'} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

c) $c'(x) = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3\,(1-2x)}}, \quad D_c = \left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et $D_{c'} = \left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

d) $d'(x) = \dfrac{7}{8}\,\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}, \quad D_d = \mathbb{R}_+$ et $D_{d'} = \mathbb{R}_+^*$.

e) $e'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2, \quad D_e = D_{e'} = \mathbb{R}$.

f) $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}, \quad D_f = \mathbb{R}_+$ et $D_{f'} = \mathbb{R}_+ - \{1\}$.

g) $g'(x) = 5\,(4x-1)\,(x-1)^4\,(2x+1)^4, \quad D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$,

$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,1\}$.

h) $h'(x) = \dfrac{3x+2a-1}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+a)^2\,(x-1)}}, \quad D_h = \mathbb{R}$ et $D_{h'} = \mathbb{R} - \{1\,;\,-a\}$,

$h'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$.

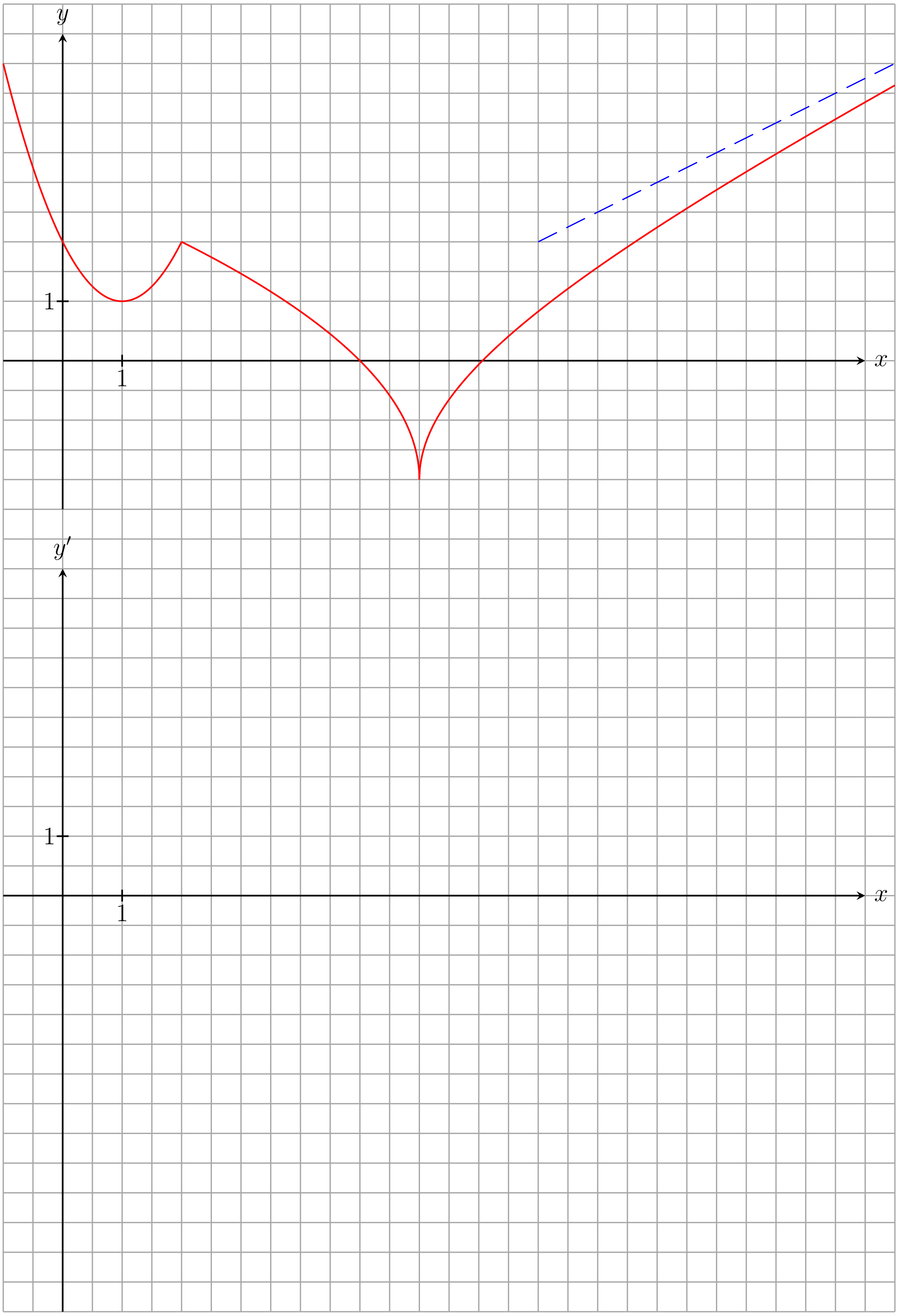
5. a) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$. b) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \dfrac{2}{5\,\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

6. Equation de la tangente t : $y = -\pi\,x + \frac{3}{4}\pi^2$.

7. Equation de la parabole : $y = x^2 + x + 2$.

8. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



9. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.