Corrigé 16

1. Pour chacune des courbes définies ci-dessous, rechercher les éléments de symétrie déductibles de la parité des fonctions coordonnées.

a) $\begin{cases} x(t) &= 3t - t^3 \\ y(t) &= \sqrt[3]{t} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) &= e^{-t}\cos t \\ y(t) &= e^{-t}\sin t \end{cases}$

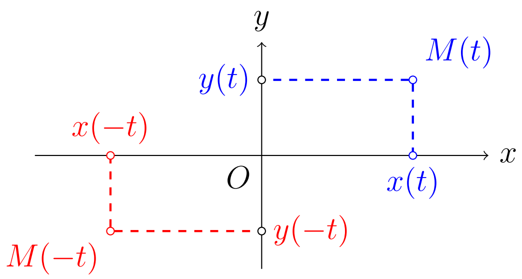
b) $\begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \frac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(t) &= \frac{2t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \\ y(t) &= \frac{4t^3}{(t^2+1)^2} \end{cases}$

---

a) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$:

- $x(t) = 3t - t^3$, $x(-t) = -3t + t^3 = -x(t)$, $x(t)$ est donc impaire,
- $y(t) = \sqrt[3]{t}$, $y(-t) = \sqrt[3]{-t} = -\sqrt[3]{t} = -y(t)$, $y(t)$ est donc impaire.

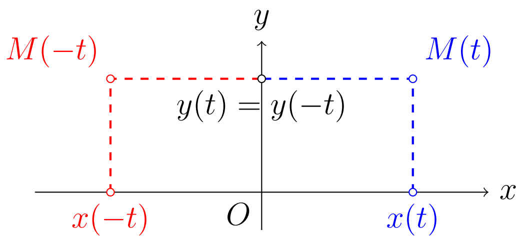
On en déduit que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'origine O.



b) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$:

- $x(t) = \sin t$, $x(-t) = -\sin t = -x(t)$, $x(t)$ est donc impaire,
- $y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}$, $y(-t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} = y(t)$, $y(t)$ est donc paire.

On en déduit que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy.



c) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$:

- $x(t) = e^{-t}\cos t\,, \qquad x(-t) = e^{+t}\cos(-t) = e^{+t}\cos t\,,$

  la fonction $x(t)$ n'est ni paire ni impaire, on peut donc déjà en déduire que la courbe Γ ne possède pas de symétrie déductible de la parité des fonctions coordonnées,

- $y(t) = e^{-t}\sin t\,, \qquad y(-t) = e^{+t}\sin(-t) = -e^{+t}\sin t\,,$

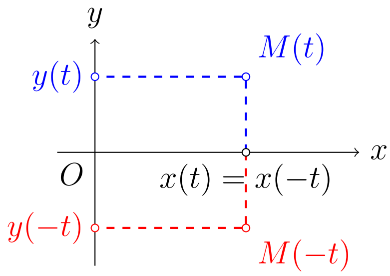
  la fonction $y(t)$ n'est ni paire ni impaire.

d) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$:

- $x(t) = \dfrac{2\,t^2\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,, \quad x(-t) = \dfrac{2\,t^2\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = x(t)\,, \quad x(t)$ est donc paire,

- $y(t) = \dfrac{4\,t^3}{(t^2+1)^2}\,, \quad y(-t) = -\dfrac{4\,t^3}{(t^2+1)^2} = -y(t)\,, \quad y(t)$ est donc impaire.

On en déduit que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe Ox.



2. a) Pour la courbe paramétrée suivante, déterminer le point stationnaire et la tangente en ce point.

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{1-2t} \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{1-2t} \end{cases}$$

$M\,(x,y)$ est un point stationnaire de Γ en $t=t_0$ si et seulement si $\dot{x}\,(t_0)=0$ et $\dot{y}\,(t_0)=0$.

$$\dot{x}\,(t) = \frac{2t\,(1-2t)+2t^2}{(1-2t)^2} = \frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2} = \frac{-2t\,(t-1)}{(1-2t)^2}\,.$$

$$\dot{x}\,(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=0 \quad \text{ou} \quad t=1\,.$$

$$\dot{y}\,(t) = \frac{3t^2\,(1-2t)+2t^3}{(1-2t)^2} = \frac{-4t^3+3t^2}{(1-2t)^2} = \frac{-t^2\,(4t-3)}{(1-2t)^2}\,.$$

$$\dot{y}\,(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=0 \quad \text{ou} \quad t=\frac{3}{4}\,.$$

Γ admet en $t_0 = 0$ un point stationnaire : c'est l'origine.

La pente de la tangente en ce point est donnée par $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2(4t-3)}{-2t(t-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t(4t-3)}{2(t-1)} = 0\,.$$

Γ admet donc à l'origine un point stationnaire à tangente horizontale $(y = 0)$.

Remarque :

En $t = 0$, $\dot{x}(t)$ change de signe et $\dot{y}(t)$ garde un signe constant.
Donc le point stationnaire est un point de rebroussement et la tangente est en fait une demi-tangente horizontale.

b) Pour la courbe paramétrée suivante, déterminer les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{4}{t-1} \\ y(t) = 2t^2 - \dfrac{16}{t-1} \end{cases}$$

- Asymptotes

  Limites aux points frontières de $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

  * Limites aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

  $$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty\,.$$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3-2t^2-16}{t^3-t^2+4} = 2\,,$$

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \left[\, y(t) - 2\,x(t)\,\right] = \lim_{t\to\pm\infty} -\frac{24}{t-1} = 0\,.$$

  Γ admet, lorsque $t \to \pm\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

  * Limites au voisinage de $t = 1$.

  $$\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$$

  $$\lim_{t\to 1^+} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^+} y(t) = -\infty$$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{2t^3-2t^2-16}{t^3-t^2+4} = -4\,,$$

  $$\lim_{t\to 1} \left[\, y(t) + 4\,x(t)\,\right] = \lim_{t\to 1} 6t^2 = 6\,.$$

  Γ admet, lorsque $t \to 1$, une asymptote oblique : $y = -4x + 6$.

- Tangentes horizontales et verticales

$$\dot{x}(t) = 2t - \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{2\,(t^3 - 2t^2 + t - 2)}{(t-1)^2} = \frac{2\,(t-2)\,(t^2+1)}{(t-1)^2}\,,$$

$$\dot{y}(t) = 4t + \frac{16}{(t-1)^2} = \frac{4\,(t^3 - 2t^2 + t + 4)}{(t-1)^2} = \frac{4\,(t+1)\,(t^2 - 3t + 4)}{(t-1)^2}\,.$$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\,, \qquad \dot{y}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1\,.$$

  * Lorsque $t = -1$, $\dot{y}(t) = 0$ et $\dot{x}(t) \neq 0$, Γ admet en $(-1\,;\,10)$ une tangente horizontale d'équation $y = 10$.
  * Lorsque $t = 2$, $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t) \neq 0$, Γ admet en $(8\,;\,-8)$ une tangente verticale d'équation $x = 8$.

3. Déterminer les paramètres réels a et b pour que la droite d : $9x + 3y + 4 = 0$ soit une asymptote oblique de la courbe Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{(t-a)\,(t-b)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{t-b} \end{cases}$$

Pour que la courbe Γ admette une asymptote oblique, il est nécessaire que $x(t)$ et $y(t)$ tendent simultanément vers l'infini (condition nécessaire mais non suffisante).

Limite aux points frontières de $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$:

- lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 1$ et $y(t) \to \pm\infty$, la courbe Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$,
- lorsque $t \to a$, $(a \neq b)$, $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \frac{a^2}{a-b}$, la courbe Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{a^2}{a-b}$,
- lorsque $t \to b$, $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, la courbe Γ admet peut-être une asymptote oblique.

La condition n'est remplie que lorsque t tend vers b.

La courbe Γ admet, lorsque t tend vers b, la droite d : $y = -3x - \dfrac{4}{3}$ comme asymptote oblique si et seulement si

$$\lim_{t \to b} \frac{y(t)}{x(t)} = -3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to b}\,[\,y(t) + 3\,x(t)\,] = -\frac{4}{3}\,.$$

$$\lim_{t \to b} \frac{y(t)}{x(t)} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to b}\,(t-a) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b - a = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a = b + 3\,.$$

$$\lim_{t\to b}\ [\,y(t)+3\,x(t)\,] = \lim_{t\to b}\left[\frac{t^2}{t-b}+\frac{3\,t^2}{(t-b-3)\,(t-b)}\right] = \lim_{t\to b}\ \frac{t^2\,(t-b-3)+3\,t^2}{(t-b-3)\,(t-b)}$$

$$= \lim_{t\to b}\ \frac{t^2}{t-b-3} = -\frac{b^2}{3}. \qquad \text{Donc} \quad \lim_{t\to b}\ [\,y(t)+3\,x(t)\,] = -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad b=\pm 2\,.$$

Ce problème admet deux solutions : $(a\,,\,b)=(1\,,\,-2)$ ou $(a\,,\,b)=(5\,,\,2)\,.$

4. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^3}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^4}{t^2-1} \end{cases}$$

a) Etudier les branches infinies de la courbe Γ.

b) Déterminer le point stationnaire de Γ et sa tangente.
Faire l'esquisse locale de la courbe Γ au voisinage de ce point.
En quoi ce point est-il remarquable ?

---

a) Limites aux points frontières du domaine de définition $D_{\text{def}}=\mathbb{R}-\{-1\,,\,1\}\,.$

- $t\to\pm\infty$: $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} x(t)=+\infty\,,\qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t)=+\infty\,.$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^4}{t^2-1}\cdot\frac{t-1}{2t^3} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{2\,(t+1)} = \frac{1}{2}\,,$$

  $$\lim_{t\to\pm\infty}\left[y(t)-\tfrac{1}{2}\,x(t)\right] = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^4-t^3\,(t+1)}{t^2-1} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{-t^3}{t^2-1} = \mp\infty\,.$$

  La courbe Γ admet, lorsque $t\to\pm\infty$ deux branches paraboliques de direction de pente $m=\frac{1}{2}\,.$

- $t\to -1$: $\displaystyle\lim_{t\to -1} x(t)=1\,,\qquad \lim_{t\to -1^\pm} y(t)=\mp\infty\,.$

  La courbe Γ admet, lorsque $t\to -1$ une asymptote verticale : $x=1\,.$

- $t\to 1$: $\displaystyle\lim_{t\to 1} x(t)=\pm\infty\,,\qquad \lim_{t\to 1} y(t)=\pm\infty\,.$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to 1}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1}\frac{t}{2\,(t+1)} = \frac{1}{4}\,,$$

  $$\lim_{t\to 1}\left[\,y(t)-\tfrac{1}{4}\,x(t)\,\right] = \lim_{t\to 1}\frac{2t^4-t^3\,(t+1)}{2\,(t^2-1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t^3}{2\,(t+1)} = \frac{1}{4}\,.$$

  La courbe Γ admet, lorsque $t\to 1$ une asymptote oblique : $y=\frac{1}{4}\,(x+1)\,.$

b) Recherche du point stationnaire de Γ.

$$\dot{x}(t) = \frac{6t^2\,(t-1) - 2t^3}{(t-1)^2} = \frac{4t^3 - 6t^2}{(t-1)^2} = \frac{2t^2\,(2t-3)}{(t-1)^2}\,.$$

$$\dot{y}(t) = \frac{4t^3\,(t^2-1) - t^4\,(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^5 - 4t^3}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^3\,(t^2-2)}{(t^2-1)^2}\,.$$

$\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ sont simultanément nuls si et seulement si $t = 0$. L'unique point stationnaire de Γ est l'origine O.

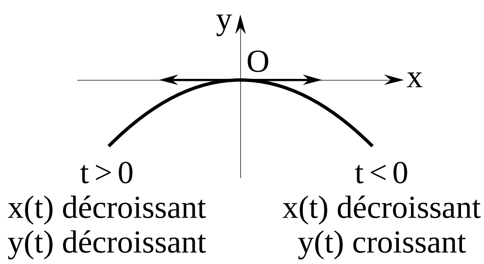
La pente de la tangente en ce point est donnée par $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^3\,(t^2-2)}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{(t-1)^2}{2t^2\,(2t-3)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,(t^2-2)}{(t+1)^2\,(2t-3)} = 0\,.$$

La courbe Γ admet à l'origine une tangente horizontale.

Variation locale et esquisse de Γ au voisinage de O.

t		0	
$\dot{x}(t)$	$-$	0	$-$
$\dot{y}(t)$	$+$	0	$-$



Le point stationnaire de Γ est un maximum à tangente horizontale.

5. On considère dans le plan la courbe paramétrée :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t^2 + a\,t - \frac{1}{t^2} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée Γ possède-t-elle un point stationnaire ?

Déterminer alors l'équation cartésienne de la tangente en ce point.

b) On pose $a = 4$. Etudier les branches infinies de Γ.

---

a) La courbe paramétrée Γ définie par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ possède un point stationnaire en $t = t_0$ si et seulement si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 4t + a + 2\,\frac{1}{t^3} \end{pmatrix}.$$

$\dot{x}(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = -1$, donc Γ admet un point stationnaire en t_0 si et seulement si $t_0 = -1$ et $\dot{y}(-1) = 0$:

$$\dot{y}(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 + a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 6\,.$$

Γ admet un point stationnaire si et seulement si $a = 6$.

Ce point est atteint en $t = -1$ et $\vec{r}\,(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

L'équation de la tangente d à Γ en ce point s'écrit :

$$d :\; y - y(t_0) = m\,(x - x(t_0)\,)$$

où la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$m = \lim_{t \to -1} \frac{4t + 6 + 2\,\frac{1}{t^3}}{2 + 2t} = \lim_{t \to -1} \frac{4t^4 + 6t^3 + 2}{2t^3\,(1+t)} = \lim_{t \to -1} \frac{(1+t)\,(4t^3 + 2t^2 - 2t + 2)}{2t^3\,(1+t)}$$

$$m = \lim_{t \to -1} \frac{(4t^3 + 2t^2 - 2t + 2)}{2t^3} = -1$$

D'où l'équation cartésienne de $d :\; x + y + 6 = 0$.

b) On pose $a = 4$. $\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ 2t^2 + 4t - \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque t tend vers 0.

  $\lim\limits_{t \to 0} x(t) = \lim\limits_{t \to 0} t\,(2+t) = 0\,, \qquad \lim\limits_{t \to 0} y(t) = \lim\limits_{t \to 0} \left(2t^2 + 4t - \dfrac{1}{t^2}\right) = -\infty\,.$

  La courbe Γ admet, lorsque t tend vers 0, une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- Lorsque t tend vers $\pm\infty$.

  $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} t\,(2+t) = +\infty\,, \quad \lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{2t^4 + 4t^3 - 1}{t^2} = +\infty\,.$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{2t^4 + 4t^3 - 1}{t^3\,(2+t)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{2t^4}{t^4} = 2\,.$$

  $$\lim_{t \to \pm\infty} \left[\,y(t) - 2\,x(t)\,\right] = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{2t^4 + 4t^3 - 1 - 2\,t^3\,(2+t)}{t^2} = \lim_{t \to \pm\infty} -\frac{1}{t^2} = 0\,.$$

  La courbe Γ admet, lorsque t tend vers $\pm\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.