Contrôle de géométrie analytique N°1

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe ☐

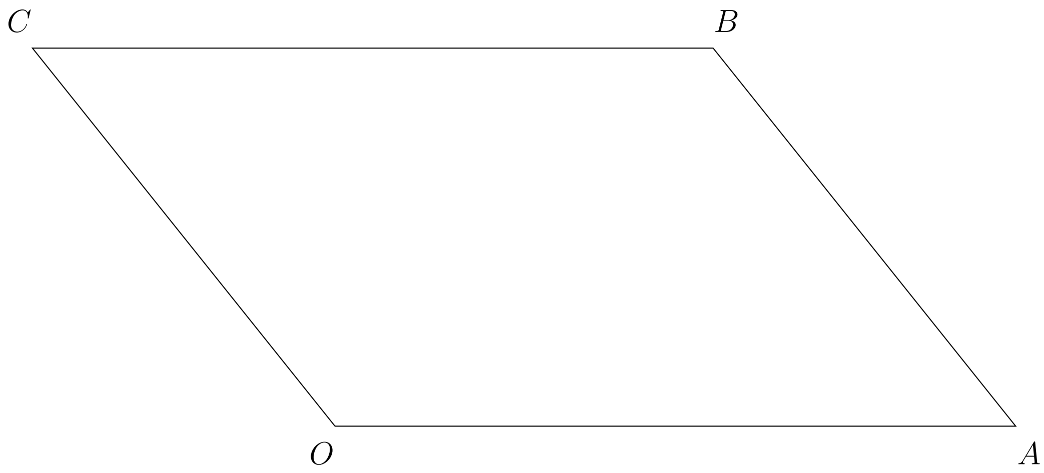
PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan, on considère un parallélogramme $OABC$ et le point H défini par $H = \text{Bar}\left\{ (O,1)\,,\ (A,1)\,,\ (B,1)\,,\ (C,\tfrac{3}{2})\right\}$

a) A l'aide de la propriété d'associativité des barycentres, et en définissant, à chaque étape, le barycentre à l'aide d'un rapport de section, construire le point H sur la figure ci-dessous. On exige une construction rigoureuse et soignée.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

c) Soient M un point de la droite (BC) et G le point défini par $G = \text{Bar}\{\,(O,2)\,,\ (A,2)\,,\ (M,5)\}$.
Déterminer l'équation vectorielle du lieu de G lorsque le point M décrit la droite (BC).
Montrer que le point H appartient à ce lieu. 5 pts



Tourner la page

2. Dans le plan, on considère un triangle OAB.

Soient un nombre réel k $(k > 1)$ et le point I défini par $(I\,B\,,\ O) = \frac{1}{k}$.

a) Déterminer, à l'aide du calcul vectoriel uniquement, et en fonction des données $(O,\,A,\,B$ et $k)$, le rayon vecteur $\overrightarrow{OC}$ sachant que

- le quadrilatère $OABC$ (orientation positive) est un trapèze de bases OA et CB,
- le point I est le point d'intersection des diagonales OB et AC.

b) Sachant que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\,\|\overrightarrow{OA}\|$, déterminer le nombre réel k de sorte que (OC) soit parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle en A. 4,5 pts

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne l'équation cartésienne d'une droite d, un point A' de la droite d d'abscisse $x_{A'} = 1$, une longueur δ et un vecteur $\vec{v}$:

$$d:\ x + 2y - 15 = 0\,, \qquad A' \in d\,,\ x_{A'} = 1\,, \qquad \delta = \frac{9\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC sachant que

- le point A' est le pied de la hauteur issue du sommet A et le segment AA' est de longueur δ, $(y_A < 0)$,
- les sommets B et C appartiennent à la droite d, $(x_B < 0)$,
- Soit H l'orthocentre du triangle ABC (point de concours des hauteurs).
  Le point H est défini par $(A'\,A\,,\ H) = -2$ et la droite (BH) est dirigée par le vecteur $\vec{v}$. 5,5 pts