APPLICATION DES MATHEMATIQUES : Contrôle N° 1

Durée : 1 heures 45 minutes - Barème sur 20 points

NOM : ____________________

PRENOM : ____________________

GROUPE [ ]

1. Une distribution statistique d'un échantillon de taille $N = 100$ d'un caractère X continue, est représentée dans le tableau suivant :

Classes de X	Effectifs n_i			Fréquences cumulées	Classes de Y	c_i centre de classes de Y	$n_i c_i$
$[5660, 5680[$	16						
$[5680, 5700[$	28						
$[5700, 5710[$	16						
$[5710, 5730[$	7						
$[5730, 5770[$	33						
Total	100						

a) Déterminer la classe **modale** de X (justifier votre réponse).
Indication. Vous pouvez remplir convenablement les 2 premières colonnes vides.

b) Utiliser le changement de variable $Y = \dfrac{X - 5700}{10}$ pour compléter le tableau.

c) Déterminer la moyenne $\overline{X}$ de X.
Rappel : La variable statistique $Y = aX + b$ a pour moyenne $\overline{Y} = a\overline{X} + b$.

d) Déterminer la médiane $\widetilde{X}$ de X.

e) Tracer le "Box-plots" de X en admettant que le premier quartile $Q_{0,25} = 5686.43$ et le troisième quartile $Q_{0,75} = 5739.70$ (on peut prendre 2 carreaux pour 10 unités). **6 pts**

Tourner la page S. V. P.

2. Les question a) et b) sont indépendantes.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$.

b) On pose $\sigma_n = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\quad \sigma_n = 2\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)$,

en utilisant les propriétés de $\sum$ et un changement d'indice approprié.

Rappels : $\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha) \quad \text{et} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{cases}$. **5 pts**

3. a) Pour chacun des 2 ensembles suivants, montrer s'il est minoré, majoré, s'il possède une borne inféreure, une borne supérieure, un minimum, un maximum.

i) $E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2, \quad x \in]-1,\ 2]\}$ ***ii)*** $F = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \quad \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

b) Montrer que 2 est un majorant de $\quad G = \left\{v_n = \dfrac{2n(-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

et que $\sup(G) = 2$. $\quad G$ a-t-il un maximum ? **5 pts**

4. Le code d'entrée d'un immeuble est un nombre de 4 chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des 9 valeurs $1, 2, \ldots, 9$.

a) Déterminer le nombre de codes différents qu'on peut former.

b) Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres distincts ?

c) Combien y a-t-il de codes comportant au moins 2 chiffres identiques ?

d) Combien y a-t-il de codes comportant deux 5 et deux seulement ?

e) Combien y a-t-il de codes comportant 2 chiffres distincts et 2 seulement ? **4 pts**

Question bonus (1 pt) :

Critiquez l'histogramme suivant qui représente les données de l'exercice 1.