**Exercice 1* : Moment d'inertie d'un cylindre creux d'épaisseur non négligeable**

En raison de la symétrie de revolution, on peut prendre un élément de volume $dV = 2\pi r\, dr\, h$.

$$I_z = \int_V r_\perp^2\, dm = \int_V r_\perp^2\, \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho\, 2\pi r\, h\, dr = 2\rho\,\pi\, h\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho\,\pi\, h}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

avec : $M = \rho V = \rho h \pi (R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow \rho = \frac{M}{h\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

$$\Longrightarrow I_z = \frac{M}{2}\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{1}{2}\mathrm{M}(R_2^2 + R_1^2)$$

**Exercice 2(*)* : Poulie et masses**

On choisit un référentiel et on fait un bilan des forces (voir schéma ci-contre):

- la masse $m_1$ est soumise à son poids $m_1 g\, \vec{e}_z$ et à la force de tension du fil $-T_1\, \vec{e}_z$
- la masse $m_2$ est soumise à son poids $m_2 g\, \vec{e}_z$ et à la force de tension du fil $-T_2\, \vec{e}_z$
- la poulie est soumise aux forces de tension du fil $T_1\, \vec{e}_z$ et $T_2\, \vec{e}_z$ , et à la force de réaction de l'axe $\vec{N}$.

a) Expression de $(T_1 - T_2)$ en fonction de $\dot{\omega}$ , $M$ et $R$ :

Cette relation découle du théorème du moment cinétique appliqué au centre $O$ (fixe) de la poulie :
$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{ext}$,
avec $\vec{L}_O = I_O \omega\, \vec{e}_y = \frac{1}{2}MR^2\omega\, \vec{e}_y$ et $\sum \vec{M}_O^{ext} = -R\vec{e}_x \times T_1\vec{e}_z + R\vec{e}_x \times T_2\, \vec{e}_z + \vec{0} \times \vec{N} = R(T_1 - T_2)\vec{e}_y$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{ext} \Longrightarrow \frac{d\,\frac{1}{2}MR^2\omega}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} = R(T_1 - T_2) \Longrightarrow (T_1 - T_2) = \frac{1}{2}MR\dot{\omega}$$

Si $M$ est négligeable, on voit que cette relation devient $T_1 \approx T_2$ : c'est l'approximation usuelle pour les poulies de masse négligeable.

b) Accélération de $m_1$:

L'accélération de la masse $m_1$ étant $a\vec{e}_z$, la conservation de la longueur du fil impose que l'accélération de la masse $m_2$ est $-a\vec{e}_z$. Sachant cela, posons la deuxième loi de Newton pour les masses $m_1$ et $m_2$ :

$$m_1 a\vec{e}_z = m_1 g\, \vec{e}_z - T_1\, \vec{e}_z \Longrightarrow T_1 = m_1(g - a)$$
$$-m_2 a\vec{e}_z = m_2 g\, \vec{e}_z - T_2\, \vec{e}_z \Longrightarrow T_2 = m_2(g + a)$$

En introduisant ces expressions de $T_1$ et $T_2$ dans l'expression trouvée en a) :

$$\frac{1}{2}MR\dot{\omega} = (T_1 - T_2) = m_1(g - a) - m_2(g + a) = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

Il faut encore exploiter une dernière relation géométrique due au fait que la corde ne glisse pas sur la poulie. Cela impose que la vitesse du fil au contact de la poulie $(R\omega)$ égale la vitesse de $m_1$ :

$$R\omega = v \ \Longrightarrow R\dot{\omega} = a$$

En reportant cette égalité dans l'expression précédente, on trouve le résultat recherché :

$$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = \frac{1}{2}MR\dot{\omega} = \frac{1}{2}Ma \Longrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g$$

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

*Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen*

**Exercice 3** : Cylindre et ressort**

a) $I_{cylindre\ plein} = 1/2\ MR^2$

On peut utiliser le principe de superposition des moments d'inertie :

$I_{total}$ = I(cylindre de rayon $R_1$ de masse volumique $\rho_1$) + I(cylindre de rayon $R_2$ de masse volumique $\rho_2$) - I(cylindre de rayon $R_1$ et de masse volumique $\rho_2$)

Le terme en bleu correspond au cylindre creux de rayon $R_2$ et de masse volumique $\rho_2$.

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 - \frac{1}{2}M_3R_1^2 = \frac{1}{2}\rho_1\pi R_1^2L\ R_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2\pi R_2^2L\ R_2^2\ - \frac{1}{2}\rho_2\pi R_1^2LR_1^2 = \frac{\pi L}{2}(\rho_1R_1^4 + \rho_2R_2^4 - \rho_2R_1^4)$$

Cette expression fait apparaître la longueur du cylindre $L$, non donnée dans l'énoncé.

On exprime donc le moment cinétique en fonction de la masse $M$ :

$$\frac{I}{M} = \frac{\frac{\pi L}{2}(\rho_2R_2^4 + (\rho_1 - \rho_2)R_1^4)}{\rho_1\pi LR_1^2 + \rho_2\pi L(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1}{2}\frac{\rho_1R_1^4 + \rho_2R_2^4 - \rho_2R_1^4}{\rho_1R_1^2 + \rho_2R_2^2 - \rho_2R_1^2} \Longrightarrow I = \frac{1}{2}M\frac{\rho_1R_1^4 + \rho_2R_2^4 - \rho_2R_1^4}{\rho_1R_1^2 + \rho_2R_2^2 - \rho_2R_1^2}$$

b) L'allongement $\Delta l$ du ressort se trouve en écrivant l'équilibre statique au centre de masse, selon $\vec{e}_x$.

$$\sum F_x = 0 = -Mg\sin\alpha + k\Delta l \Longrightarrow \Delta l = \frac{Mg\sin\alpha}{k}$$

c) La condition au point de contact pour que le roulement ait lieu sans glissement est que la vitesse du point de contact $C$ soit nulle. *On remarque que $\vec{v}_C = 0 \Leftrightarrow v_x = R_2\omega$, en notant $v_x$ la vitesse du centre du cylindre (selon $\vec{e}_x$) et $\omega$ la vitesse angulaire ($\vec{\omega} = \omega\vec{e}_y$). On aura besoin de cette relation en d)*

d) Equation différentielle du mouvement :

- Méthode 1. On applique le théorème du moment cinétique au point de contact $C$. Il faut alors calculer le moment d'inertie $I_C$ en $C$. On peut utiliser le théorème de Steiner puisque de centre de masse est sur l'axe de rotation du cylindre : $I_C = I + MR_2^2$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C = -R_2Mg\sin\alpha\,\vec{e}_y - R_2k(x - \Delta l)\vec{e}_y \Longrightarrow I_A\dot{\omega} = -R_2kx$$

avec $\dot{x} = R_2\omega$ (condition du roulement sans glisser) $\Longrightarrow \dot{\omega} = \ddot{x}/R_2$ :

$$I_A\frac{\ddot{x}}{R_2} = -R_2kx \Longrightarrow \ddot{x} + k\frac{R_2^2}{I_A}x = \ddot{x} + k\frac{R_2^2}{I + MR_2^2}x = 0$$

- Méthode 2. On applique Newton et le théorème du moment cinétique au centre de masse. Il faut alors tenir compte de la force tangentielle au point de contact, que l'on note $F_T\vec{e}_x$ .

Newton selon $\vec{e}_x$: $M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - k(x - \Delta l) + F_T = -kx + F_T$

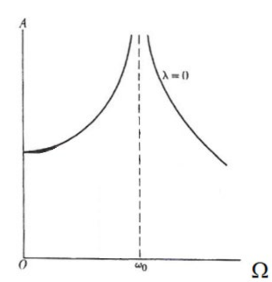
Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{cm} \Longrightarrow I\dot{\omega} = -R_2F_T \Longrightarrow I\frac{\ddot{x}}{R_2} = -R_2F_T \Longrightarrow F_T = -I\frac{\ddot{x}}{R_2^2}$

$$\Longrightarrow M\ddot{x} = -kx - I\frac{\ddot{x}}{R_2^2} \Longrightarrow \left(M + \frac{I}{R_2^2}\right)\ddot{x} = -kx \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{kR_2^2}{MR_2^2 + I}x = 0$$

e) On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$. La pulsation est ici $\omega_0 = \sqrt{\frac{kR_2^2}{MR_2^2+I}}$. La forme générale des solutions est $X_0\sin(\omega_0t + \varphi)$ ($X_0$ et $\varphi$ sont des constantes).

f) La pulsation du régime stationnaire est la même que celle de l'excitation, à savoir $\Omega$.

g) Dessin avec $A \longrightarrow \infty$ *quand* $\Omega \longrightarrow \omega_0$



**Exercice 4** : Pendule de torsion et choc**

1. Moment d'inertie du barreau : $I_O = \frac{1}{12}Ml^2$
   En $O$ $\sum \vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$.
   Les forces sont le poids $\vec{P}$, la tension du fil $\vec{T}$ et le moment dû à la torsion.

$$\vec{M}_O^P = \vec{0},\ \ \vec{M}_O^T = \vec{0} \ \text{ donc } \ \sum \vec{M}_O^{ext} = -\kappa\theta\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_0 = I_O\vec{\omega} = I_{Oz}\dot{\theta}\vec{e}_z,\ \ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{Oz}\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \Rightarrow -\kappa\theta\vec{e}_z = I_{Oz}\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_{Oz}}\theta = 0$$

donc $\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_{Oz}}}$

$$\theta t = \theta_0 \ \ et \ \ \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \ \ et \ \ A = \theta_0$$

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega_0 t)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_{Oz}}} = \sqrt{\kappa\frac{12}{Ml^2}} = 2\sqrt{\frac{3\kappa}{Ml^2}}$$

2. Système : barreau + balle. à $t = 0$ la balle s'encastre dans le barreau. Les forces exterieurs sont le poids (négligé pour la balle) et poids du barreau et tension du fil pour la barre. Elles on un moment nul par rapport à O. On a donc conservation de moment cinétique avant et après le choc $\vec{L}_O^{avant} = \vec{L}_O^{après}$. Après le choc, le système barre+balle se met à tourner avec une vitesse angulaire initiale $\omega_0$. On détermine $\omega_0$ par la conservation du moment cinétique lors du choc.

$$\vec{L}_O^{\text{avant}} = \vec{0} + \frac{l}{2}mv\vec{e}_z = \vec{L}_O^{\text{après}} = (I_{tot})\omega_0\vec{e}_z$$

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{barre}} + I_{\text{balle}} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = I_{\text{tot}}$$

$$\omega_0 = \frac{mlv}{2I_{tot}} \quad I_{\text{tot}} = \frac{l^2}{4}(m + \frac{M}{3})$$

L'équation de mouvement est : $\theta(t) = A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t)$. avec $\Omega_1 = \sqrt{(\kappa/I_{\text{tot}})}$ cette fois $\theta(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\dot{\theta}(0) = \omega_0 \ \ \dot{\theta}(t) = B\Omega_1\cos(\Omega_1 t) \ \ \text{et} \ \ \dot{\theta}(0) = B\Omega_1 = \omega_0 \Rightarrow B = \frac{\omega_0}{\Omega_1}$$

$$\theta(t) = \frac{\omega_0}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 t)$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{mlv}{2I_{\text{tot}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa}{I_{\text{tot}}}}} = \frac{mlv}{2\sqrt{\kappa I_{\text{tot}}}} = \frac{m\cancel{l}v}{\cancel{2}\sqrt{\kappa}\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{M}{3} + m}} = \frac{mv}{\sqrt{\kappa(m + \frac{M}{3})}}$$

**Exercice 5* : Cylindre sur un tremplin**

a) Classement des hauteurs ($h_1, h_2, h_3$ et $H$) :

$$H = h_1 > h_2 > h_3$$

***Justifications :***

❑ **Cas (1) :** Le cylindre n'entre pas en rotation pendant son trajet sur le tremplin (il glisse sans rouler et il n'y pas de force de frottements). Son énergie cinétique est donc uniquement celle de son centre de masse. Etant éjecté verticalement, il est totalement à l'arrêt lorsqu'il atteint la hauteur $h_1$ (sa vitesse n'a pas de composante horizontale). La conservation de l'énergie mécanique impose donc $h_1 = H$.

❑ **Cas (2) :** Comme le cylindre roule, il arrive au bout du tremplin avec une énergie de translation et de rotation. Il continue à tourner sur lui-même lors de sa trajectoire verticale après éjection. Une partie de son énergie cinétique reste donc stockée dans son mouvement de rotation, ce qui impose $h_2 < h_1$.

❑ **Cas (3) :** Puisque le point d'éjection est à la même hauteur qu'en (2) et que le cylindre roule de la même manière, la conservation de l'énergie mécanique impose que le cylindre arrive au bout du tremplin avec une vitesse de même norme que dans le cas (2). Mais cette vitesse a une composante horizontale, qui reste constante après éjection, il y a donc moins d'énergie convertible en potentiel de gravitation qu'en (2) : $h_3 < h_2$.

a) Calcul de $h_1$, $h_2$ et $h_3$ :

❑ **Cas (1) :** $h_1 = H$.

Calculons maintenant $h_3(\theta)$, car $h_2$ sera donné par $h_2 = h_3(\pi/2)$ :

❑ **Cas (3) :** Rappelons que le roulement sans glissement impose une relation entre la vitesse du centre de masse et la vitesse de rotation du cylindre, que l'on retrouve en exprimant le fait que la vitesse du point de contact est nulle : $\vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r} = 0 \Longrightarrow \|v_3\| + r\omega_3 = 0 \Longrightarrow \omega_3 = -\frac{v_3}{r}$

L'énergie cinétique au point d'éjection est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation :

$$E_{C3} = \frac{1}{2}m\|v_3\|^2 + \frac{1}{2}I_\Delta {\omega_3}^2 = \frac{1}{2}m\|v_3\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\|v_3\|}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m\|v_3\|^2$$

$\|v_3\|$ est donnée par la conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ (énergie cinétique nulle) et celui d'éjection :

$$mgH = \frac{mgH}{2} + \frac{3}{4}m\|v_3\|^2 \Longrightarrow \|v_3\| = \sqrt{\frac{2}{3}gH}$$

Après éjection, la vitesse horizontale du cylindre est constante, égale à $\|v_3\|\cos\theta$, ainsi que sa vitesse de rotation. La conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ et l'apogée de la trajectoire s'écrit :

$$mgH = mgh_3 + \frac{1}{2}m(\|v_3\|\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}I_\Delta {\omega_3}^2 = mgh_3 + m\|v_3\|^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\right)$$
$$= mgh_3 + m\frac{2}{3}gH\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\right)$$

$\Longrightarrow h_3 = \left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\right)\right)H$, et finalement :

$$h_3 = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\cos^2\theta\right)H$$

❑ **Cas (2) :** On en déduit alors $h_2 = h_3(\pi/2)$:

$$h_2 = \frac{5}{6}H$$

**Exercice S14.1** : Poulie et masses - bis**

1. Les accélérations des masses $m$ et $m'$ dépendent entièrement des forces extérieures qui leur sont appliquées (voir fin de l'exercice pour la solution).
2. Si l'on considère successivement le système formé de la masse $m$ et celui formé de la masse $m'$, on obtient deux équations du mouvement à partir de la deuxième loi de Newton :

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \qquad (1)$$
$$\vec{T'} + \vec{P'} = m'\vec{a'} \qquad (2)$$

Expression de $\vec{a}$ et $\vec{a'}$

Posons $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_z$
Les accélérations des masses sont liées à la rotation de la poulie. Choisissons un repère pour le système complet (poulie + masse $m$ + masse $m'$).
L'accélération de la masse $m$ s'écrit alors $\vec{a} = -R\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y = -R\ddot{\theta}\vec{e}_y$ (on vérifie que si $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ augmente, l'accélération de la masse $m$ est bien dirigée vers le bas). À l'opposé, $\vec{a'} = r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y = r\ddot{\theta}\vec{e}_y$.
Considérons maintenant uniquement la poulie. Elle constitue un solide en rotation autour d'un axe fixé $\Delta$. Soit $A$ un point quelconque de $\Delta$. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A^{ext} \qquad \text{où } \vec{M}_A^{ext} = \sum_\alpha \overrightarrow{AP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha \qquad \text{et } \vec{L}_{A,z} = I_\Delta\omega$$

Ainsi, en confondant $A$ avec $O$

$$I_\Delta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{OB}\wedge\vec{T} - \overrightarrow{OC}\wedge\vec{T'} = -\overrightarrow{OB}\wedge(m\vec{a} - \vec{P}) - \overrightarrow{OC}\wedge(m'\vec{a'} - \vec{P'}) \quad (2')$$

En combinant (2') ec les expressions de $\vec{a}$ et $\vec{a'}$ on obtient :

$$I_\Delta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (-R^2m\ddot{\theta} + Rmg)\vec{e}_z - (r^2m'\ddot{\theta} + rm'g)\vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta}\vec{e}_z = \frac{(mR - m'r)g}{(I_\Delta + mR^2 + m'r^2)}\vec{e}_z \qquad (3)$$

Pour obtenir les accélérations respectives, on utilise :

(2'

$$\vec{a} = -R\ddot{\theta}\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{a'} = r\ddot{\theta}\vec{e}_y$$

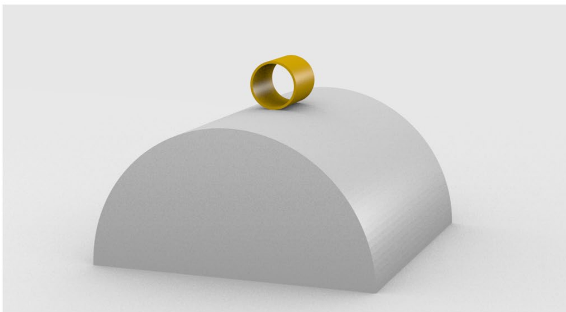
La tension de chaque corde s'obtient en utilisant (3) dans respectivement (1) et (2) :

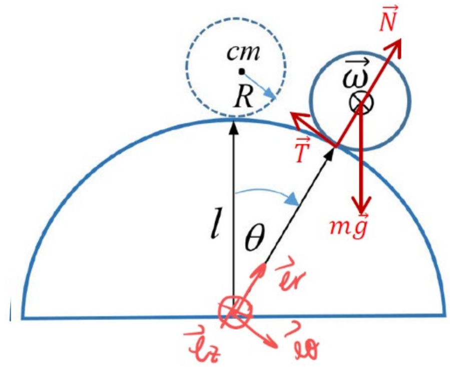
$$(1) \Rightarrow T = -mR\ddot{\theta} + mg = mg\left[R\frac{m'r - mR}{(I_\Delta + mR^2 + m'r^2)} + 1\right]$$
$$(2) \Rightarrow T' = m'r\ddot{\theta} + m'g = m'g\left[r\frac{mR - m'r}{(I_\Delta + mR^2 + m'r^2)} + 1\right]$$

A.N. $T = 4.78$ N $T' = 5.60$ N

**Exercice S14.2** : Cylindre creux qui roule puis décolle**

Un cylindre creux de masse $m$, de longueur $L$, de rayon $R$, et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon $l$, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ($\theta = 0$), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle $\theta$, tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note $g$ l'accélération de la pesanteur.






a) Démontrez que le moment d'inertie $I_{cm}$ du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est $I_{cm} = mR^2$.

$$I_{cm} = \iiint_{Volume} \underbrace{r^{\perp 2}}_{R^2=cte}\, dm = R^2 \iiint_{Volume} dm = mR^2$$

b) Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position $\theta > 0$ .

Au centre de masse : poids $m\vec{g}$ ;

Au point de contact $A$ : Réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle (frottement) $\vec{T}$

Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique $\theta_C$, puis il « décolle ». Il n'est alors plus en contact avec le support.

c) Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?

Parabolique ou uniformément accéléré ($\vec{g}$)

d) Calculez l'angle critique de décollage $\theta_C$ .

- Condition pour le « décollage » : $N = 0$
- Newton selon $\vec{e}_r$ : $\underbrace{-m(l+R)\dot{\theta}_C^2}_{\substack{accélération\ centrifuge \\ (mvt\ circulaire)}} = -mg\cos\theta_C + N$

$$\rightarrow \dot{\theta}_C^2 = \frac{g\cos\theta_C}{l+R}$$

- Conservation de l'énergie mécanique pour exprimer $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$ :

Équation de liaison entre $\omega$ et $\dot{\theta}$.

En notant $A$ le point de contact du cylindre creux :

$$v_A = v_{cm} + v_{A/cm} = 0 \Longrightarrow (l+R)\dot{\theta} - R\omega = 0 \Longrightarrow \omega = \frac{l+R}{R}\dot{\theta}$$

Énergie potentielle :

$$E_p = mg(l+R)(\cos\theta - 1)\ \big(ici\ choisie\ telle\ que\ E_p(\theta=0)=0\big)$$

(on pourrait prendre $E_p = mg(l+R)\ \cos\theta\ \ car\ E_p\ définie$ à $une\ cte\ près$)

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m\left((l+R)\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{l+R}{R}\dot{\theta}\right)^2 = m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = mg(l+R)(\cos\theta - 1) + m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = cte = E_m(\theta = 0) \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos\theta)}{l+R}$$

Finalement :

$$\dot{\theta}_C^2 = \frac{g\cos\theta_C}{l+R}\ avec\ \dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos\theta)}{l+R} \Longrightarrow \frac{g(1-\cos\theta_C)}{l+R} = \frac{g\cos\theta_C}{l+R} \Longrightarrow \cos\theta_C = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta_C = \mathrm{Acos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon $\theta$, pour $\theta < \theta_C$ (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de $R$, $l$, et $g$.

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta = 0$$

$Newton\ selon\ \vec{e}_\theta$: $m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - T$

*Théorème du moment cinétique au centre de masse* :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{cm,T} \Longrightarrow I_{cm}\dot{\omega}\vec{e}_z = RT\vec{e}_z \Longrightarrow T = mR\dot{\omega}$$

$$\Longrightarrow\ m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - mR\dot{\omega}$$

Avec l'équation de liaison

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

***Autre Méthode :*** *On peut appliquer le théorème du moment cinétique en A (car $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_{cm}$)*

$$Théorème\ du\ moment\ cinétique\ en\ A\ :\ \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{A,mg} \Longrightarrow I_A\dot{\omega}\vec{e}_z = Rmg\sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$avec\ steiner: I_A = mR^2 + I_{cm} = 2mR^2 \Longrightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{2R}\sin\theta$$

Et avec l'équation de liaison

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \ \rightarrow \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

f) Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage $\theta_C$ serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

$\theta_C$ serait plus petit car le cylindre irait plus vite (il y aurait moins d'inertie due à la rotation)