CMS Analyse I

Semestre d'automne

2018–2019

23 octobre 2018 MPC/OW/GB

Table des matières

2 Suites de nombres réels

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. Une suite de nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, notée (a_n) :

$$\begin{array}{rccc} (a_n) : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & a_n\,. \end{array}$$

Définition 2.2. Une suite (a_n) est constante si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = a$. On la note $(a_n) = (a)$.

Définition 2.3. Une suite (a_n) est majorée si $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq M$.

Définition 2.4. Une suite (a_n) est minorée si $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq m$.

Définition 2.5. Une suite (a_n) est bornée si elle est majorée et minorée.

Définition 2.6. Une suite (a_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq a_{n+1}$,
et strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n < a_{n+1}$.

Définition 2.7. Une suite (a_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq a_{n+1}$,
et strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > a_{n+1}$.

Définition 2.8. Une suite (a_n) est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

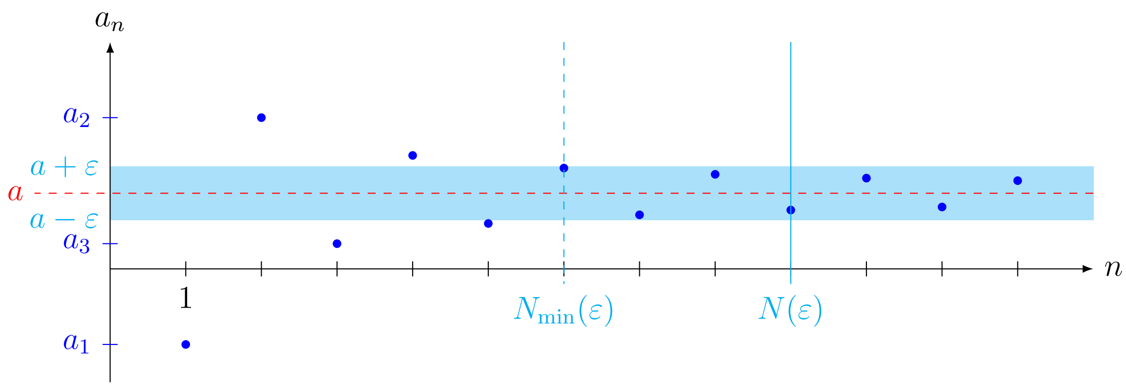
2.2 Limite finie d'une suite

Définition 2.9. Une suite (a_n) converge vers une limite a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \forall n \geq N(\varepsilon),\ |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

On écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{ou encore} \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\,.$$



Définition 2.10. L'intervalle $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$ est appelé ε-voisinage de a.

Définition 2.11. Une suite (a_n) qui converge vers une limite a est dite convergente. Sinon elle est dite divergente.

Exemple. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$

Théorème 2.1.

Toute suite convergente n'a qu'une limite.

Théorème 2.2.

Toute suite convergente est bornée.

Théorème 2.3.

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites convergeant vers* a *et* b *respectivement. Alors*

1. $|a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|\,.$
2. $(a_n \pm b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \pm b\,.$
3. $(a_n b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab\,.$
4. $(\frac{a_n}{b_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$ *si* $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \neq 0$ *et* $b \neq 0\,.$

Théorème 2.4.

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites convergeant vers* a *et* b *respectivement. Alors on a l'implication*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^* \ t.q.\ \forall n \geq N,\ a_n \leq b_n \implies a \leq b\,.$$

Théorème 2.5 (Théorème des deux gendarmes)**.**

Soient $(a_n), (s_n), (b_n)$ *des suites telles que*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^* \ t.q.\ \forall n \geq N,\ a_n \leq s_n \leq b_n\,.$$

On a alors l'implication

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell \implies \lim_{n\to\infty} s_n = \ell\,.$$

Théorème 2.6.

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites.*

1. *Si* $|a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *alors* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$
2. *Si* $|a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* b_n *est bornée, alors* $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

Théorème 2.7.

Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge. (Toute suite monotone et bornée converge.)

Exemple. Soient $q \in \mathbb{R}$ et la suite (q^n). Alors

$$(q^n) \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } |q| > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q = -1 \\ \text{converge} & \text{si } q = 1 \\ \text{converge} & \text{si } |q| < 1\,. \end{cases}$$

Exemple. Suite géométrique : soient $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et la suite (a_n) de terme général

$$a_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \,.$$

Alors

$$(a_n) \begin{cases} \text{converge vers } \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } |q| \geq 1 \,. \end{cases}$$

Exemple. On note e la limite

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \simeq 2.71828.$$

Remarque. Le nombre e est aussi donné par la limite

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,.$$

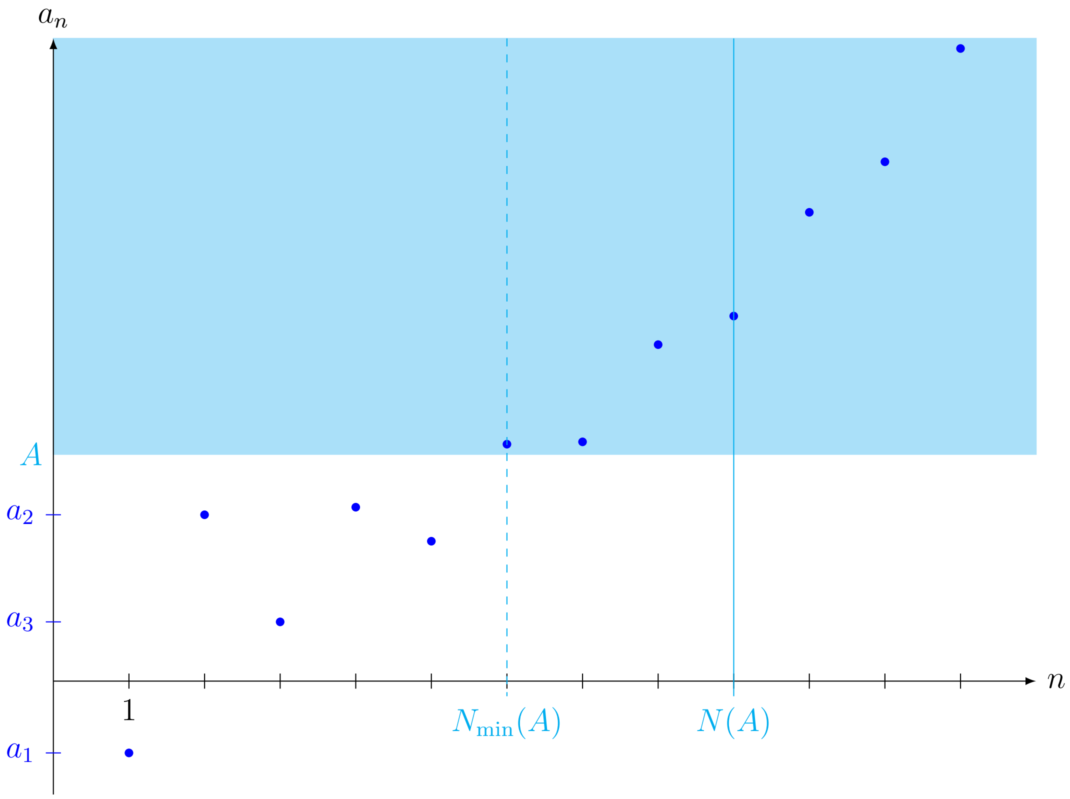
2.3 Limite infinie d'une suite

Définition 2.12. Une suite (a_n) tend vers l'infini si

$$\forall A > 0,\ \exists\, N(A) \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \forall n \geq N(A),\ a_n > A \,.$$

On écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ou encore} \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \,.$$



Définition 2.13. L'intervalle $]\,A, \infty\,[$ est appelé A-voisinage de l'infini.

Définition 2.14. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si

$$\forall B < 0,\ \exists\, N(B) \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \forall n \geq N(B),\ a_n < B \,.$$

Théorème 2.8.

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites.*

1. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* (b_n) *converge, alors* $a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
2. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *alors* $a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
3. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* (b_n) *est bornée, alors* $a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
4. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $\lambda > 0$, *alors* $\lambda a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $(-\lambda)a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
5. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b > 0$, *alors* $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
6. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ *et* $m \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $\forall n \geq N,\ b_n \geq m$, *alors* $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
7. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et* $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *alors* $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
8. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *alors* $\frac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
9. *Si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $\forall n \geq N, a_n > 0$, *alors* $\frac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
10. *Soient* (a_n) *et* (b_n) *deux suites telles que* $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $\forall n \geq N, a_n \leq b_n$. *Alors*
    - *si* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *alors* $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,
    - *si* $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, *alors* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque. Formes indéterminées. Soient $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ des suites telles que
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = \infty$.
On ne peut rien dire à priori sur les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n c_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \big(c_n - d_n\big).$$