Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 1

Langage Ensembliste : exercice 1

Si nécessaire, donner un référentiel et écrire l'ensemble sous la forme :

$$A = \{ \, x \in R \mid x \text{ vérifie la propriété } P \, \}$$

- $A \; = \; \{ \, n \mid n \in \mathbb{N} \;\text{ et }\; 2n+1 < 16 \, \}$

  Un élément de A est un entier positif ou nul qui vérifie l'inéquation :

  $2n + 1 < 16 \quad$ donc $\quad n < \dfrac{15}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$.

  D'où : $A \; = \; \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  Le référentiel manque dans l'énoncé.
  On peut choisir $\mathbb{R}$ comme référentiel : $\quad A \; = \; \{ \, n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \;\text{ et }\; 2n+1 < 16 \, \}$
  ou
  on peut choisir $\mathbb{N}$ comme référentiel, alors la propriété "$n \in \mathbb{N}$" devient inutile :
  $A \; = \; \{ \, n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 < 16 \, \}$

- $B \; = \; \{ \, n \in \mathbb{N} \mid n^3 \;\text{ est impair} \, \}$

  B est l'ensemble des entiers n positifs ou nul tels que la propriété "n^3 est impair" est vérifiée.
  On énumère les éléments du référentiel $\mathbb{N}$ et on vérifie si leur cube est impair :

  si $n = 0$ alors $0^3 = 0$ donc $0 \notin B$
  si $n = 1$ alors $1^3 = 1$ donc $1 \in B$
  si $n = 2$ alors $2^3 = 8$ donc $2 \notin B$
  si $n = 3$ alors $3^3 = 27$ donc $3 \in B$ etc

  D'où : $B \; = \; \{1, 3, 5, 7, \ldots \}$
  On peut aussi écrire : $B \; = \; \{ \, n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{N}, \;\; n^3 = 2k+1 \, \}$

  Remarque : on montrera au chapitre suivant : n^3 est impair si et seulement si n est impair.

- $C \; = \; \{ \, 3y + 1 \mid y \in \mathbb{N} \, \}$

  C est l'ensemble des éléments x qui s'écrivent comme $3y + 1$, y étant un entier positif ou nul.
  Il suffit donc d'énumérer quelques un de ces éléments x :

  pour $y = 0$, on obtient $x = 1$
  pour $y = 1$, on obtient $x = 4$
  pour $y = 2$, on obtient $x = 7$
  pour $y = 3$, on obtient $x = 10$ etc

D'où : $C \;=\; \{1,\,4,\,7,\,10,\,...\,\}$
Il manque un référentiel et une propriété à vérifier. On peut choisir $\mathbb{N}$ comme référentiel, d'où :

$C \;=\; \{\; n \in \mathbb{N} \mid n = 3y+1\,,\; y \in \mathbb{N}\;\}$

- $D \;=\; \{\; a \in \mathbb{Z}^* \mid$ le produit de a par 6 est un élément de $\mathbb{Z}^*\;\}$

  Un élément a de $\mathbb{Z}^*$ appartient à D si, lorqu'il est multiplié par 6, il est encore dans $\mathbb{Z}^*$.

  Il est évident que tout élément de $\mathbb{Z}^*$ vérifie cette propriété, donc $D = \mathbb{Z}^*$.

  La propriété peut être écrite d'une manière plus "mathématique" :

  $D \;=\; \{\; a \in \mathbb{Z}^* \mid 6a \in \mathbb{Z}^*\;\}$

- $E \;=\; \{\; 4y \mid y \in \mathbb{Z}\;\}$

  E est l'ensemble des éléments x qui s'écrivent comme $4y$, y étant dans $\mathbb{Z}$.
  On énumère donc quelques éléments x :

  ...
  pour $y = -2$, on obtient $x = -8$
  pour $y = -1$, on obtient $x = -4$
  pour $y = 0$, on obtient $x = 0$
  pour $y = 1$, on obtient $x = 4$
  pour $y = 2$, on obtient $x = 8$
  pour $y = 3$, on obtient $x = 12$ etc
  D'où : $E \;=\; \{\; ...\; -8,\,-4,\,0,\,4,\,8,\,12\;...\;\}$
  Il manque un référentiel et une propriété à vérifier. On peut choisir $\mathbb{Z}$ comme référentiel, d'où : $E \;=\; \{\; n \in \mathbb{Z} \mid$ il existe $y \in \mathbb{Z}\,,\;\; n = 4y\;\}$

- $F \;=\; \{\; x \mid x \in \mathbb{Q}\;$ et $\; x^2 - 2 = 0\;\}$

  F est l'ensemble des rationnels qui vérifient l'équation $x^2 - 2 = 0$.

  Cette équation a pour solutions $x = \pm\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $F = \emptyset$.
  Il manque un référentiel. On peut choisir $\mathbb{Q}$ comme référentiel, alors la propriété "$x \in \mathbb{Q}$" devient inutile :
  $F \;=\; \{\; x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\;\}$

  (On pourrait choisir $\mathbb{R}$ comme référentiel : $F \;=\; \{\; x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\;$ et $\; x \in \mathbb{Q}\}$)

- $G \;=\; \{\; n \mid n \in \mathbb{N}\;$ et $\; 2 < 3n+1 < 20\;\}$

  G est l'ensemble des entiers n positifs ou nul qui vérifient : $2 < 3n+1 < 20$.
  Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ le système d'inéquations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & < & 3n+1 \\ 3n+1 & < & 20 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{3} & < & n \\ n & < & \dfrac{19}{3} \end{array}\right.$$

  D'où : $G \;=\; \{\; 1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\;\}$
  Il manque un référentiel. On peut choisir $\mathbb{N}$ comme référentiel, alors la propriété

$"n \in \mathbb{N}"$ devient inutile : $G \;=\; \{\; n \in \mathbb{N} \mid 2 < 3n+1 < 20 \;\}$

- $H = \{\; x \in \mathbb{R} \mid \; -5 < x-3 < 5 \;\text{ et }\; x > 2 \;\}$

  Remarque :
  $H = \{\; x \in \mathbb{R} \mid (x \text{ vérifie la propriété } P) \quad \textit{et} \quad (x \text{ vérifie la propriété } Q) \;\}$
  Ecrire H comme l'intersection de deux ensembles définis par les propriétés P et Q : $H = H_1 \cap H_2$

  On pose :
  $H_1 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid \; -5 < x-3 < 5 \;\}$

  $H_2 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \;\}$

  d'où : $H = H_1 \cap H_2$
  H_1 est l'ensemble des réels qui vérifient $-5 < x-3 < 5$

  On résout dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations suivant :
  $$\begin{cases} -5 & < \; x-3 \\ x-3 & < \; 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2 & < \; x \\ x & < \; 8 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad H_1 \;=]-2\,;8[$$

  $H_2 \;=]\,2\,;+\infty\,[$
  Ainsi : $H \;=]-2\,;8\,[\,\cap\,]\,2\,;+\infty\,[\;=\;]\,2\,;8\,[$

- $I = \{\; x \in \mathbb{R} \mid x+5 > 4 \;\text{ ou }\; x+5 < -4 \;\}$

  Remarque :
  $I = \{\; x \in \mathbb{R} \mid (x \text{ vérifie la propriété } P) \quad \textit{ou} \quad (x \text{ vérifie la propriété } Q) \;\}$
  Ecrire I comme la réunion de deux ensembles définis par les propriétés P et Q : $I = I_1 \cup I_2$

  On pose :
  $I_1 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid x+5 > 4 \;\} \;=\; \{\; x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \;\} \;=]-1\,;+\infty\,[$
  $I_2 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid x+5 < -4 \;\} \;=\; \{\; x \in \mathbb{R} \mid x < -9 \;\} \;=]-\infty\,;-9[$

  d'où : $I = I_1 \cup I_2 \;=]-\infty\,;-9[\,\cup\,]-1\,;+\infty\,[$

- $J = \{\; x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 14x + 8 = 0 \;\text{ et }\; x \notin \mathbb{N} \;\}$

  On pose :
  $J_1 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 14x + 8 = 0 \;\} \;=\; \{\; \frac{2}{3}\,;4 \;\}$

  $J_2 = \{\; x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{N} \;\}$
  d'où : $J = J_1 \cap J_2 \;=\; \{\; \frac{2}{3} \;\}$

- $K = \{\; x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 10 = 0 \;\text{ ou }\; x \in \mathbb{N}^* \;\}$

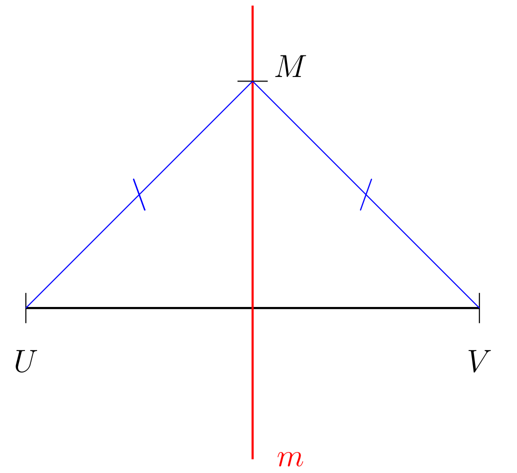
  On pose :
  $K_1 = \{\; x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 10 = 0 \;\} \;=\; \{\; -2\,;5 \;\}$

  $K_2 = \{\; x \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{N}^* \;\} \;=\; \mathbb{N}^* = \{1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\,\}$

  d'où : $K = K_1 \cup K_2 \;=\; \{\; -2,\,1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\;\}$

- $L = \{\, M \in \mathcal{E} \mid \text{distance de } U \text{ à } M = \text{distance de } V \text{ à } M \,\}$

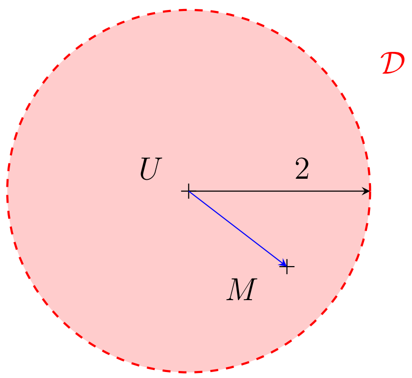
  L est l'ensemble des points de la médiatrice m du segment UV.



distance $(U\,,\,M)\ =\ $ distance $(V\,,\,M)$

- $N = \{\, M \in \mathcal{E}\ |\,$distance de U à M est inférieure à $2\,\}$

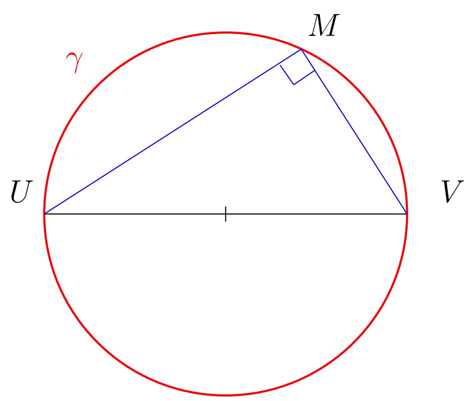
  N est l'ensemble des points du disque $\mathcal{D}$ de centre U et rayon 2, frontière non comprise.



distance $(U\,,\,M)\ <\ 2$

- $P = \{\, M \in \mathcal{E}\ |\,$l'angle saillant entre MU et MV est droit$\,\}$

  P est l'ensemble des points du cercle de Thalès γ du segment $U\,V$ (les points U et V non compris).



angle $(MU\,,\,MV) = \dfrac{\pi}{2}$

Langage Ensembliste : exercice 3

(a) $\sqrt{4} \notin \mathbb{N}$: $\sqrt{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$

Faux car $\sqrt{4} = 2$ et 2 est un élément de $\mathbb{N}$.
Donc $\sqrt{4}$ appartient à $\mathbb{N}$: $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$

(b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$: l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus ou égal à $\mathbb{N}$

Juste car le signe $\subset$ relie deux ensembles.

Remarque : on utilise parfois la notation $\subseteq$ qui signifie "inclus ou égal".

(c) $\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$: l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un élément de $\mathbb{Q}$

Faux car $\mathbb{Q}$ est un ensemble et le signe $\in$ relie un élément à un ensemble.
Donc $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$

(d) $2 \in \emptyset$: 2 appartient à l'ensemble vide.

Faux car quelque soit x, $x \notin \emptyset$, donc 2 n'appartient pas à cet ensemble.
Donc : $2 \notin \emptyset$

Remarque : le signe $\emptyset$ représente un *ensemble* et non un élément.

(e) $\{1\} \in \{1;\, 4;\, 5\}$: l'ensemble $\{1\}$ appartient à l'ensemble $\{1;\, 4;\, 5\}$.

Faux car $\{1\}$ est un sous-ensemble de $\{1;\, 4;\, 5\}$ et le signe $\in$ relie un élément à un ensemble.
Donc $\{1\}$ est inclus dans $\{1;\, 4;\, 5\}$: $\{1\} \subset \{1;\, 4;\, 5\}$

(f) $\{1;\, 4\} \supset \{4\}$: l'ensemble $\{1;\, 4\}$ contient $\{4\}$ ou $\{4\}$ est inclus dans $\{1;\, 4\}$

Juste car $\{4\}$ est un sous-ensemble de $\{1;\, 4\}$ et le signe $\subset$ relie deux ensembles.

(g) $\emptyset \subset \mathbb{R}$: l'ensemble vide est inclus dans $\mathbb{R}$.

Juste car d'une part le signe $\emptyset$ représente un ensemble et non un élément.
De plus, l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble et le signe $\subset$ relie deux ensembles.

(h) $\{2;\, 5\} \not\subset \{2;\, 4;\, 6\}$: $\{2;\, 5\}$ n'est pas un sous-ensemble de $\{2;\, 4;\, 6\}$.

Juste car 5 n'appartient pas à l'ensemble $\{2;\, 4;\, 6\}$.

Langage Ensembliste : exercice 5

Dans chaque cas, il suffit d'expliciter les ensembles.

(a)
- $A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \leq 4\} = \{-2;\, -1;\, 0;\, 1;\, 2\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1;\, 2\}$

Donc : $A \neq B$

(b)
- $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = -1\} = \emptyset$
- $B = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2\} = \emptyset$

Donc : $A = B$

(c) • $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \leq 1\} \;=\; \{-1;\, 0;\, 1\;\}$
• $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 = x\} \;=\; \{-1;\, 0;\, 1\;\}$
Donc : $A \;=\; B$

Langage Ensembliste : exercice 7

Déterminer si on a une relation entre un élément et un ensemble ou une relation entre deux ensembles.

(a) $A = \{a;\, b\}$

$\{a\} \subset A$: juste car a est est élément de A, donc $\{a\}$ est un sous-ensemble de à A.

(b) $A = \{a;\, b\}$

$\{a\} \in A$: faux car relativement à A, $\{a\}$ est un sous-ensemble donc $\{a\} \subset A$.

(c) $\mathcal{P}(A) \;=\; \big\{\emptyset\,,\, \{a\}\,,\, \{b\}\,,\, \{a,\, b\}\;\big\}$

$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$: juste car relativement à $\mathcal{P}(A)$, $\{a\}$ est un élément.

(d) $\mathcal{P}(A) \;=\; \big\{\emptyset\,,\, \{a\}\,,\, \{b\}\,,\, \{a,\, b\}\;\big\}$

$\{\{a;\, b\}\} \;=\; A$: faux car relativement à $\mathcal{P}(A)$, $\{a;\, b\}$ est un élément, donc $\{\{a;\, b\}\} = \{A\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(A)$.

On doit écrire : $\{\{a;\, b\}\} \subset \mathcal{P}(A)$ ou de manière équivalente $\{A\} \subset \mathcal{P}(A)$.

(e) $A \in A$: faux car relativement à A, A est un sous-ensemble. Donc : $A \subset A$.

(f) $A \supset A$: juste. Cette notation est équivalente à $A \subset A$.

(g) $\mathcal{P}(A) \;=\; \big\{\emptyset\,,\, \{a\}\,,\, \{b\}\,,\, \{a,\, b\}\;\big\}$

$A \in \mathcal{P}(A)$: juste car relativement à $\mathcal{P}(A)$, $\{a;\, b\} = A$ est un élément.

(h) $\mathcal{P}(A) \;=\; \big\{\emptyset\,,\, \{a\}\,,\, \{b\}\,,\, \{a,\, b\}\;\big\}$

$\{\{a\};\, \{b\}\} = \mathcal{P}(A)$: faux relativement à $\mathcal{P}(A)$, $\{\{a\};\, \{b\}\}$ est un sous-ensemble contenant les deux éléments $\{a\}$ et $\{b\}$.
Pour être égal à $\mathcal{P}(A)$, il faut encore ajouter les éléments $\{a,\, b\}$ et $\emptyset$.

On doit écrire : $\{\{a\};\, \{b\}\} \subset \mathcal{P}(A)$

Langage Ensembliste : exercice 11

$n\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k\,n\,,\; k \in \mathbb{Z}\} = \{\; ...;\, -2n\,;\, -n\,;\, 0\,;\, n\,;\, 2n\,;\, ...\;\}$

$m\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k\,m\,,\; k \in \mathbb{Z}\} = \{\; ...;\, -2m\,;\, -m\,;\, 0\,;\, m\,;\, 2m\,;\, ...\;\}$

$n\mathbb{Z} \;\cap\; m\mathbb{Z} =$ ensembles des multiples de n et m
On peut donc déterminer directement les éléments de l'intersection de $n\mathbb{Z}$ et $m\mathbb{Z}$: ils appartiennent à $k\mathbb{Z}$ où k est le ppmc de n et m.
(ppcm = plus petit multiple commun)

- $6\,\mathbb{Z} \cap 4\,\mathbb{Z} =$ ensembles des multiples de 6 et 4 $= \{\; ...;\, -24\,;\, -12\,;\, 0\,;\, 12\,;\, ...\;\} =$
$=$ ensembles des multiples de 12 $= 12\,\mathbb{Z}$
$12 =$ ppmc de 6 et 4

- $7\,\mathbb{Z} \cap 2\,\mathbb{Z}$ = ensembles des multiples de 6 et 4 = $\{\ ...;\ -28\,;\ -14\,;\ 0\,;\ 14\,;\ ...\ \}$ =
= ensembles des multiples de 14 = $14\,\mathbb{Z}$
14 = ppmc de 7 et 2
- $3\,\mathbb{Z} \cap 5\,\mathbb{Z}$ = ensembles des multiples de 3 et 5 = $\{\ ...;\ -30\,;\ -15\,;\ 0\,;\ 15\,;\ ...\ \}$ =
= ensembles des multiples de 15 = $15\,\mathbb{Z}$
15 = ppmc de 3 et 5

Langage Ensembliste : exercice 12

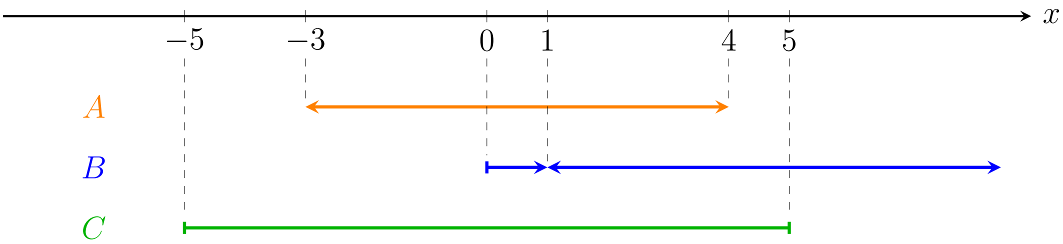
Expliciter les ensembles A, B et C et les représenter sur un axe horizontal.

$A = \{x \in \mathbb{R}\,|\,-x^2 + x + 12 > 0\} \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,|\,-(x+3)(x-4) > 0\} \;= \,]-3\,;\,4[$

$B = \{x \in \mathbb{R}_+\,|\,(x-1)^2 > 0\} \;=\; \mathbb{R}_+ - \{1\}$

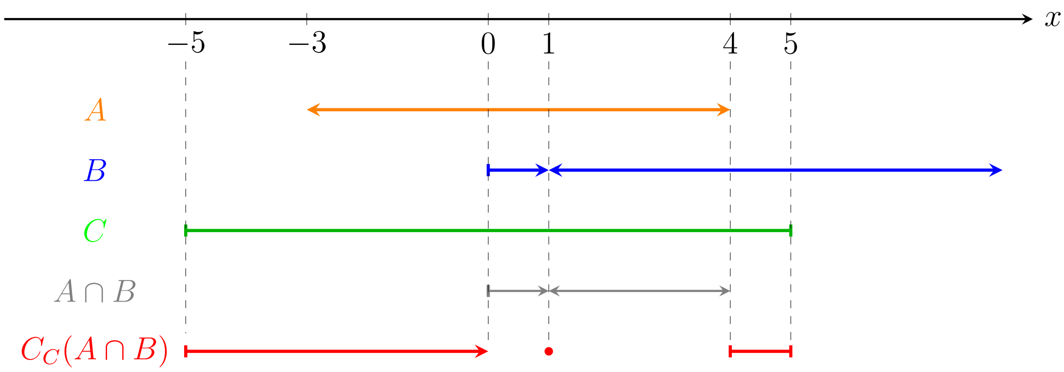
$C = \{x \in \mathbb{R}\,|\,x^2 - 25 \leq 0\} \;=\; [-5\,;\,5]$

$A \;= \,]-3\,;\,4[\qquad B \;=\; \mathbb{R}_+ - \{1\} \qquad C \;=\; [-5\,;\,5]$

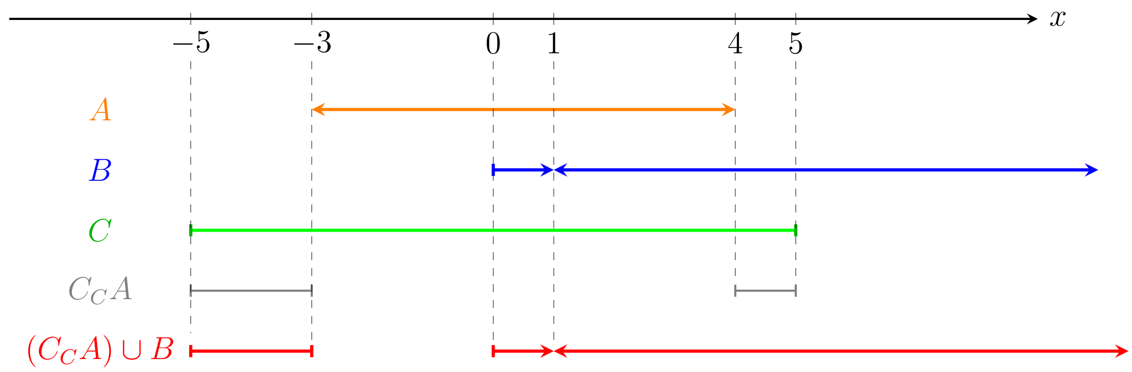


(a) $A \cap B \;=\; [0\,;\,1[\, \cup \,]1\,;4[$
(b) $A \cup B \;= \,]-3\,;\,+\infty[$
(c) $B \cap C \;=\; [0\,;\,1[\, \cup \,]1\,;5]$ d'où $A \cup (B \cap C) \;= \,]-3\,;5]$
(d) $B \cup C \;=\; [-5\,;\,+\infty[$ d'où $A \cap (B \cup C) \;= \,]-3\,;4[$

(e) $A \cap B \;=\; [0\,;\,1[\, \cup \,]1\,;4[$ d'où $C_C(A \cap B) \;=\; [-5\,;\,0[\, \cup \{1\} \,\cup\, [4\,;5]$



(f) $C_C A = [-5\,;\,-3] \cup [4\,;5]$ d'où $(C_C A) \cup B = [-5\,;\,-3] \cup [0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$



(g) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

Langage Ensembliste : exercice 13

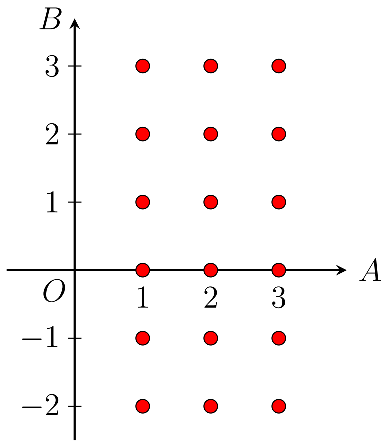
Rappel :
$A \times B = \{\,(x,y) \mid x \in A \;\text{ et }\; y \in B\,\}$.

On représente l'ensemble A sur l'axe horizontal et l'ensemble B sur l'axe vertical.

- $*$ $A = \{\,n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n < 4\,\} = \{\,1\,,\,2\,,\,3\,\}$,
- $*$ $B = \{\,n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 3\,\} = \{\,-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,\}$.

Représentation graphique de $A \times B$.

$A \times B = \{\,(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x < 4 \quad \text{et} \quad -2 \leq y \leq 3\,\}$.

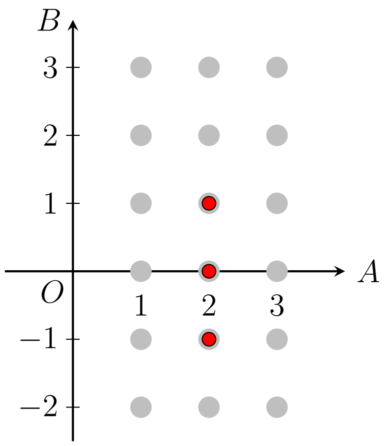


Si A_1 est un sous-ensemble de A et si B_1 est un sous-ensemble de B, alors l'ensemble produit $A_1 \times B_1$ est un sous-ensemble de $A \times B$.
Soit $H_1 = A_1 \times B_1$ avec $A_1 = \{2\}$ et $B_1 = \{-1, 0, 1\}$

$H_1 = \{\,(2,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \in \{-1,0,1\}\,\}$

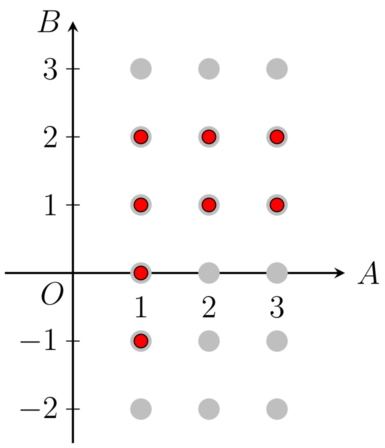
H_1 est un ensemble produit et un sous-ensemble de $A \times B$.

Représentation graphique de H_1.



Il suffit de choisir un sous-ensemble de $A \times B$ qui n'a pas une apparence de "rectangle". Soit H_2 le sous-ensemble de $A \times B$ décrit ci-dessous.

Représentation graphique de H_2.



Le sous-ensemble H_2 n'est pas un ensemble produit, mais peut être décrit comme la réunion de deux ensembles produits.

Par exemple : $H_2 = \{1\} \times \{-1, 0, 1, 2\} \cup \{2, 3\} \times \{1, 2\}$.