EPFL

Ens. : S. Basterrechea
Analyse IV (GC IN SC SIE)
MA
06.07.2022
Durée : 180 minutes

π

Cauchy Augustin-Louis

SCIPER : **12091993**

Signature :

- **Attendre le début de l'épreuve avant de tourner la page.**
- **Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages, les dernières pouvant être vides.**
- **L'examen contient 10 exercices valant un total de 57 points.**
- **Ne pas dégrafer.**
- **Lire les règles dans l'encadré ci-dessous et signer la première page de l'examen.**

- **Aucun document et aucune machine électronique n'est autorisé.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Rédiger à l'encre noire ou bleue. Toute autre couleur n'est pas autorisée.**
- **Ce qui est écrit au crayon ne sera pas corrigé.**
- **Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.**
- **Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.**
- **Si les pages prévues pour un exercice ne sont pas suffisantes, continuez l'exercice sur les pages d'un autre exercice. Indiquer clairement, dans l'exercice où il vous manque de la place que la solution continue ailleurs. Indiquer clairement quel exercice est résolu au nouvel endroit.**
- **Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.**

It's dangerous to go alone, take this theorem!

Question 1: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Vérifier avec les équations de Cauchy-Riemann si les fonction suivantes sont holomorphes ou non.

(a) $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(b) $g(z) = \sinh(z), \quad z \in \mathbb{C}$

Question 2: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ■5

Construire une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que sa partie imaginaire soit

$$v(x, y) \;=\; 3x^2y - y^3 + e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

Exprimer f comme une fonction de sa variable complexe z.

Question 3: *Cette question est notée sur 9 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5
5 .5 6 .5 7 .5 8 .5 9

a) Soit

$$f(z) = \frac{1}{3+z^2}$$

et $z_0 = 0$. Déterminer

- la série de Laurent de f autour de z_0
- le rayon de convergence de la série de Laurent de f autour de z_0

b) Soit

$$g(z) = \frac{e^{z-\pi}-1}{\sin^2(z)}$$

et $z_0 = \pi$. Déterminer

- la nature de la singularité de g en z_0
- le résidu de g en z_0

c) Soit

$$h(z) = \sin\left(\frac{1}{2i-3z}\right)$$

et $z_0 = \frac{2i}{3}$. Déterminer

- la nature de la singularité de h en z_0
- le résidu de h en z_0
- la série de Laurent de h autour de z_0.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5

a) Soit

$$f(z) \;=\; \frac{e^z}{\cos(z)}$$

et Γ_1 le cercle centré en 0 et de rayon 1. Calculer

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz.$$

b) Soit

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+4)(z-3)}$$

et Γ_2 le cercle centré en i et de rayon 2. Calculer

$$\int_{\Gamma_2} g(z)dz.$$

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5

Avec le théorème des résidus, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)}\, d\theta.$$

Question 6: *Cette question est notée sur 11 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5
6 .5 7 .5 8 .5 9 .5 10 .5 11

Avec la méthode vue au cours et le théorème des résidus, calculer, en simplifiant la réponse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+4} e^{3ix} dx.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$f(t) \;=\; t\sin(\omega t), \quad t \geq 0.$$

(a) Déterminer l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace de f.

(b) A l'aide du formulaire et des propriétés de la transformée de Laplace, calculer $\mathcal{L}(f)$.

Question 8: *Cette question est notée sur 3 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3

Trouver la solution $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) + 2u(t) + 20 \displaystyle\int_0^t u(s) e^{2(t-s)}\, ds = 10e^{2t}, \quad t > 0 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Question 9: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6

Soit $c > 0$. Trouver la solution $u(x,t)$ du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - cu(x,t), & x \in \left]0,2\right[\,, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = -3 + \pi\cos(\pi x) - 2\cos\left(\dfrac{5\pi x}{2}\right) & x \in \left]0,2\right[. \end{cases}$$

Question 10: *Cette question est notée sur 4 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4

Trouver la solution $u(x,y)$ du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \; = \; 0, & x > 0,\; y \in \mathbb{R} \\ u(0,y) \; = \; \dfrac{2}{y^2+4}, & y \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x,y) \; = \; 0, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$