Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 40 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Soient les ensembles A, B et C définis par :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16 \text{ et } -x^2+5x-6 \leq 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \leq 0 \text{ ou } 2x+y > 0\}. \end{aligned}$$

(a) Sur un même dessin, représenter graphiquement les ensembles $A \times B$ et C (échelle : 2 carrés par unité).

(b) A l'aide de cette représentation graphique, expliciter l'ensemble $A \times B \cap \overline{C}$.

2.5 pts

2. On considère la proposition T suivante : Soit E un ensemble.

$$T \,:\, \forall A, B, C \subset E, \quad (A \cap B) \subset C \Longrightarrow \complement_A(C) \cap \complement_B(C) = \emptyset.$$

12 ×
4
16

Rappel : $\complement_A(C)$ est l'ensemble complémentaire de C dans A.

(a) Enoncer la proposition contraposée de T.

(b) Démontrer T par l'absurde.

2.5 pts

6

3. Démontrer par récurrence la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 pts

1h
16

4. Soient f l'application définie par

$$f : \mathbb{R} - \{-1;+1\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{y}{x^2-1}$$

et l'ensemble

(x, y) (x, y)

$$E = \{(-2;-6);(2;6)\}.$$

(a) Calculer $f(E)$.

(b) Donner la représentation graphique de $f^{-1}(f(E))$ (échelle : 2 carrés par unité).

(c) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que f n'est pas injective.

3.5 pts

5. Soit f l'application définie par

13

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto f(x) = (x^2+1; x^2-4).$$

(a) Montrer que f est injective.

(b) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et en donner la représentation graphique (échelle : 2 carrés par unité).

Soit encore g l'application définie par

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0\,. \end{cases}$$

(c) Définir l'application $g \circ f$.

(d) Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective. Déterminer le plus grand sous-ensemble B de son ensemble d'arrivée pour qu'elle soit surjective.

4.5 pts

1h20