

Série 16

1. Pour chacune des courbes définies ci-dessous, rechercher les éléments de symétrie déductibles de la parité des fonctions coordonnées.

$$\text{a) } \begin{cases} x(t) &= 3t - t^3 \\ y(t) &= \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x(t) &= e^{-t} \cos t \\ y(t) &= e^{-t} \sin t \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x(t) &= \frac{2t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \\ y(t) &= \frac{4t^3}{(t^2+1)^2} \end{cases}$$

2. Pour les courbes paramétrées suivantes, déterminer :

- a) le point stationnaire et la tangente en ce point :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1-2t} \end{cases}$$

- b) les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \frac{4}{t-1} \\ y(t) &= 2t^2 - \frac{16}{t-1} \end{cases}$$

3. Déterminer les paramètres réels a et b pour que la droite $d : 9x + 3y + 4 = 0$ soit une asymptote oblique de la courbe Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{(t-a)(t-b)} \\ y(t) &= \frac{t^2}{t-b} \end{cases}$$

4. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^4}{t^2-1} \end{cases}$

- a) Etudier les branches infinies de la courbe Γ .
- b) Déterminer le point stationnaire de Γ et sa tangente.
Faire l'esquisse locale de la courbe Γ au voisinage de ce point.
En quoi ce point est-il remarquable ?

5. On considère dans le plan la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t^2 + at - \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée Γ possède-t-elle un point stationnaire ?
Déterminer alors l'équation cartésienne de la tangente en ce point.
- b) On pose $a = 4$. Etudier les branches infinies de Γ .

Réponses de la série 16

1.
 - a) La courbe est symétrique par rapport à O .
 - b) La courbe est symétrique par rapport à Oy .
 - c) La courbe ne possède pas de symétrie déductible de la parité des fonctions coordonnées.
 - d) La courbe est symétrique par rapport à Ox .

 2.
 - a) Point stationnaire $P(0; 0)$ de tangente $y = 0$.

 - b) Asymptotes obliques $a : y = 2x$ et $a' : y = -4x + 6$.
Tangente horizontale en $(-1, 10)$.
Tangente verticale en $(8, -8)$.

 3. Deux solutions :
 - $a = 5$ et $b = 2$,
 - $a = 1$ et $b = -2$.

 4.
 - a) Branches infinies de la courbe Γ .
 - Branches paraboliques de direction de pente $m = \frac{1}{2}$.
 - Asymptote verticale d'équation $x = 1$.
 - Asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{4}(x + 1)$.
 - b) Le point stationnaire de Γ est l'origine ; c'est un maximum à tangente horizontale.

 5.
 - a) Γ admet un point stationnaire si et seulement si $a = 6$.
Equation de la tangente à Γ au point stationnaire : $x + y + 6 = 0$.

 - b) La courbe Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.
-