Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 20

Exercice 1

(a) $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'axe réel vertical :

$i)$ $m-1<0 \Leftrightarrow 1-m>0$ et $b^2=1-m$
$ii)$ $a^2=(m-1)(m-2)>0$

Par $i)$ $m<1$
Par $ii)$ $m<1$ ou $m>2$

Au final, on a $m<1$ $(*)$.
Utiliser l'équation de l'asymptote de $\mathcal{C}$.
Une des asymptotes de $\mathcal{C}$ passe par l'origine.

On a : $\pm\frac{a}{b}=\pm\sqrt{2-m}, \quad m<1$ par $(*)$.

Les asymptotes ont comme équation :

$y-m=\pm\sqrt{2-m}(x-1)$ et si l'une passe par l'origine, on a :
$m=\pm\sqrt{2-m}$

1$^{\text{er}}$ cas : $\sqrt{2-m}=m, \quad 0<m<1$: condition de positivité sur $(*)$.
$\Leftrightarrow\ 2-m=m^2$
$\Leftrightarrow\ m^2+m-2=0$
$\Leftrightarrow\ (m-1)(m+2)=0$
$m=1$ ou $m=-2$: aucune solution vérifiant $0<m<1$.

2$^{\text{ème}}$ cas :
$\sqrt{2-m}=-m, \quad -m>0 \Leftrightarrow m<0$ condition de positivité sur $(*)$.
$\Leftrightarrow\ 2-m=m^2$
$\Leftrightarrow\ m^2+m-2=0$
$\Leftrightarrow\ (m-1)(m+2)=0$
$m=1$ ou $m=-2$
Seul $m=-2$ vérifie la condition $m<0$.

Au final : $m=-2$.

(b) **Remarques**

1) Obtenir les tangentes par dédoublement pour l'orthogonalité.

2) Faire attention au fait que l'ellipse peut être de grand axe vertical ou horizontal.

Pour $m=-1$, on a

$$\mathcal{C}:\ \frac{(x-1)^2}{-2}+\frac{(y+1)^2}{6}-1=0\,.$$

C'est une hyperbole d'axe réel vertical.

D'où l'équation de l'ellipse, le grand axe pouvant être horizontal ou vertical :

$$\mathcal{E}: \ \frac{(x-1)^2}{u^2} + \frac{(y+1)^2}{v^2} - 1 = 0\,.$$

$$v^2(x-1)^2 + u^2(y+1)^2 - u^2v^2 = 0, \quad u, v > 0\ (u > v \text{ ou } v > u)$$

Tangente à $\mathcal{C}$ en $M\,(0;2)$:
$t':\ -3(-1)(x-1) + 3(y+1) - 6 = 0$
$x + y - 2 = 0$
$m_{t'} = -1 \implies m_t = 1$ où $t \perp t'$

Tangente à $\mathcal{E}$ en $M\,(0;2)$:
$t: y - 2 = x$
$x - y + 2 = 0 \quad (1)$

Polaire de $\mathcal{E}$ en $M\,(0;2)$:
$v^2(-1)(x-1) + u^2 3(y+1) - u^2v^2 = 0$
$-v^2x^2 + 3u^2y + v^2 + 3u^2 - u^2v^2 = 0 \quad (2)$

La polaire en M est la tangente t : en comparant donc (1) et (2) on a :

$$\frac{-v^2}{1} = \frac{3u^2}{-1} = \frac{1}{2}(v^2 + 3u^2 - u^2v^2)$$

$$\begin{cases} v^2 = 3u^2 \\ -2v^2 = v^2 + 3u^2 - u^2v^2 \\ -6u^2 = v^2 + 3u^2 - u^2v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = 3u^2 \quad (1) \\ 0 = 3v^2 + 3u^2 - u^2v^2 \quad (2) \\ 0 = v^2 + 9u^2 - u^2v^2 \quad (3) \end{cases}$$

(1) dans (2) : $u^2(4 - u^2) = 0 \implies \begin{cases} u^2 = 0: \text{ exclu} \\ u^2 = 4: \text{ seule solution} \end{cases}$

par (1) : $v^2 = 12$
Alors (3) est vérifiée : $12 + 36 - 48 = 0$
On a la seule solution :
$a^2 = 12$
$b^2 = 4$
et

$$\mathcal{E}: \ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{12} - 1 = 0\,.$$

Le grand axe est vertical.

Exercice 3

(a) **Remarque**

On choisit un point fixe du problème comme origine des axes Ox et Oy. On choisit un système d'axes de manière à ce que les droites du problèmes aient une équation cartésienne simple.

Définition du repère orthonormé.

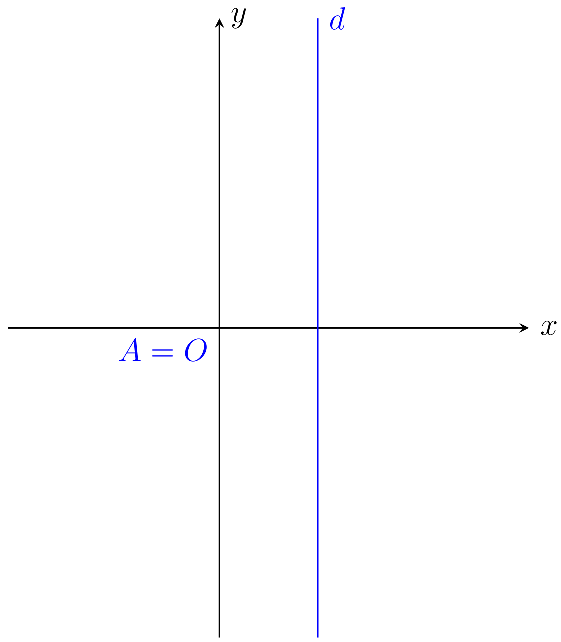
L'origine O confondue avec le point A et l'axe Ox perpendiculaire à la droite d.

$A\,(0\,,\,0)\,,\quad$ équation de la droite $d:\ x = a\,.$

(b) L'étude des lieux géométriques se fait de la manière suivante :

1) Figure d'étude.
2) Choix du paramètre.
3) Mise en équations.
4) Elimination du paramètre.

1) Figure d'étude :



2) Choix du paramètre :

Soit D parcourant la droite d : $D\,(a\,,\,\beta)\,,\quad \beta\in\mathbb{R}$ paramètre.
$M\,(x\,,\,y)$ décrit le lieu.

3) Mise en équations :

$M\,(x_M\,,\,y_M)$ appartient à la perpendiculaire à d passant par D donc

$$y_M=\beta\,.$$

La distance de M à d est égale à la distance de $A\,(0\,,\,0)$ à $D\,(a\,,\,\beta)$ donc

$$(x_M-a)^2=a^2+\beta^2$$

Le point $M\,(x_M\,,\,y_M)$ est donc défini par $\left\{\begin{array}{l} y_M=\beta \\ (x_M-a)^2=a^2+\beta^2\end{array}\right.$

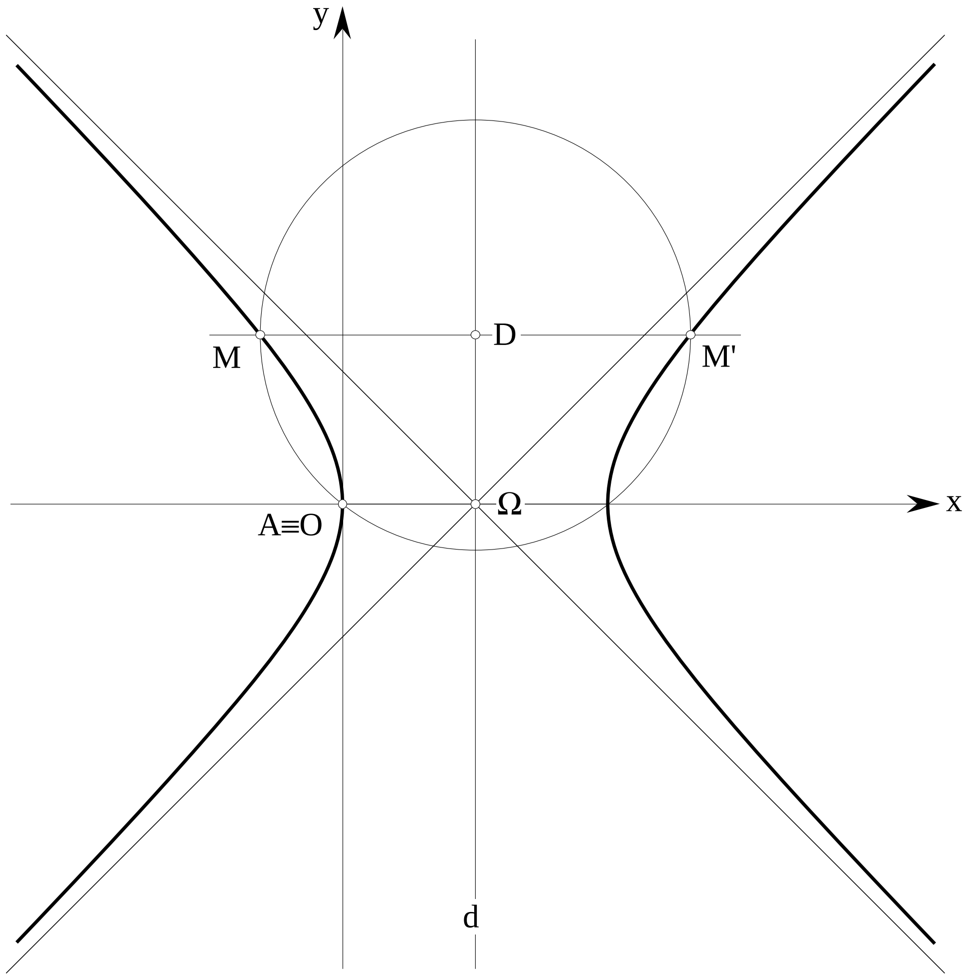
4) Elimination du paramètre :

L'équation du lieu de M s'écrit :

$$(x-a)^2=a^2+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x-a)^2-y^2=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}-1=0\,.$$

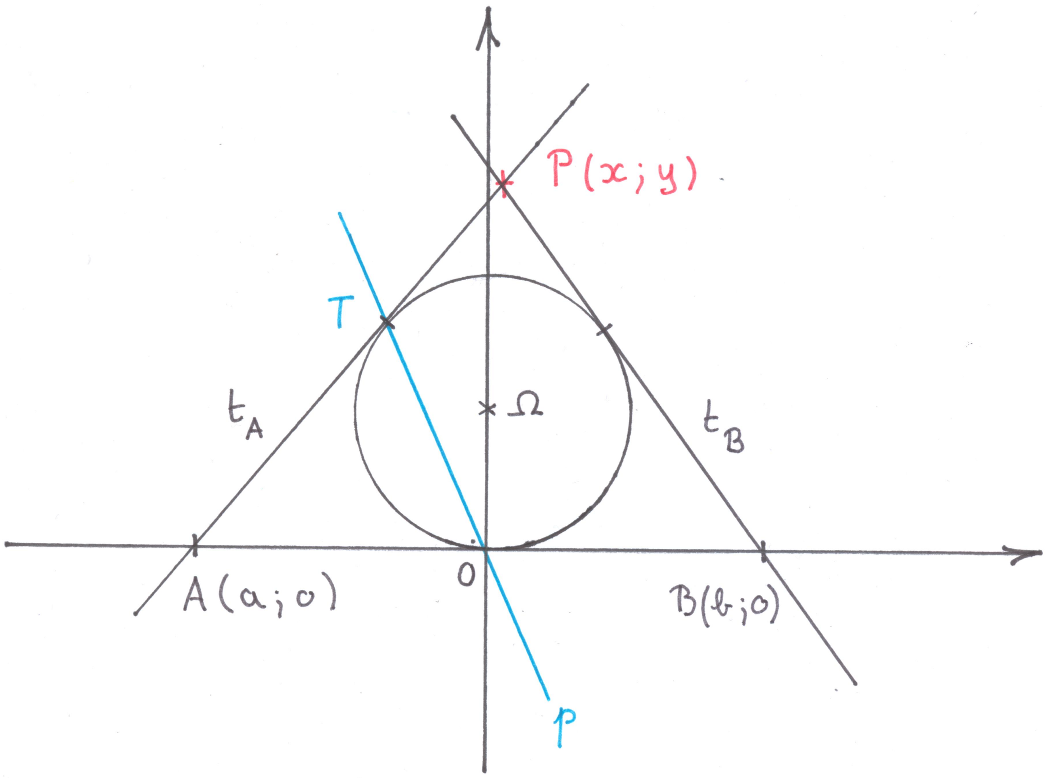
Le lieu de M est l'hyperbole équilatère de centre $\Omega\,(a\,,\,0)\,,$ d'axe réel l'axe $Ox\,,$ d'axe imaginaire la droite $d\,,$ dont les asymptotes ont pour équations $y=\pm(x-a)$ et dont l'un des sommets est le point $A\,.$

(c) Représentation du lieu de M .



Exercice 5

(a) On utilise la méthode des lieux.



(1) <u>Paramètres :</u> a, b abscisses de A et B.

(2) <u>Mise en équations :</u>

$p : ax - Ry = 0$: polaire de $A(a, 0)$.

$p \cap \gamma = O, T$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2Ry = 0 \\ x = \frac{R}{a}\, y \quad a \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{R^2}{a^2}\, y^2 + y^2 - 2Ry = 0$$

$$y\left(\left(\frac{R^2}{a^2} + 1\right) y - 2R\right) = 0$$

$y = 0$ à exclure, donc $y_T = \frac{2Ra^2}{R^2+a^2}$ et $x_T = \frac{2R^2a}{R^2+a^2}$

$$t_A = (AT) : \frac{y}{x-a} = \frac{\frac{-2Ra^2}{R^2+a^2}}{a - \frac{2R^2a}{R^2+a^2}} = \frac{(-2Ra^2)(R^2+a^2)}{(R^2+a^2)\,(a\,(R^2+a^2) - 2R^2a)} =$$

$$\frac{(-2Ra^2)}{(a\,(R^2+a^2) - 2R^2a)} = \frac{-2Ra^2}{aR^2 + a^3 - 2R^2a} = \frac{-2Ra}{a^2 - R^2} = \frac{2Ra}{R^2 - a^2} \quad a \neq \pm R$$

$t_A : a^2(2R - y) - 2aRx + R^2y = 0 \quad (1)$

On a de même :

$t_B : b^2(2R - y) - 2bRx + R^2y = 0 \quad (2)$

Equation de liaison : $|a - b| = 2d \quad (3)$

a et b sont solutions de $(2R-y)\,X^2 - 2Rx\,X + R^2y = 0$

(3) Elimination des paramètres :

En comparant (1) et (2), on déduit :

$a+b = \frac{2Rx}{2R-y}$ et $ab = \frac{R^2y}{2R-y}$ $y \neq 2R$

$4d^2 = (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$$4d^2 = \frac{4R^2x^2}{(2R-y)^2} - \frac{4R^2y}{2R-y}$$

D'où l'équation du lieu :

$$R^2x^2 + (R^2-d^2)\,y^2 + 2R\,(2d^2-R^2)\,y - 4R^2d^2 = 0$$

(b) Equation du lieu :

$$R^2x^2 + (R^2-d^2)\,y^2 + 2R\,(2d^2-R^2)\,y - 4R^2d^2 = 0$$

Si $y = 2R$, on a $x = 0$ $P(0,2R) \in \gamma$: impossible.

Si $d = R$, on a une parabole.

Retravaillons l'équation du lieu :

$$R^2x^2 + (R^2-d^2)\left(y + \frac{R\,(2d^2-R^2)}{R^2-d^2}\right)^2 - 4R^2d^2 - \frac{R^2\,(4d^4+R^4-4d^2R^2)}{R^2-d^2} = 0$$

$$R^2x^2 + (R^2-d^2)\left(y + \frac{R\,(2d^2-R^2)}{R^2-d^2}\right)^2 + \frac{-4R^4d^2+4R^2d^4-4d^4R^2+4d^2R^4-R^6}{R^2-d^2} = 0$$

$$R^2x^2 + (R^2-d^2)\left(y + \frac{R\,(2d^2-R^2)}{R^2-d^2}\right)^2 + \frac{-R^6}{R^2-d^2} = 0$$

Si $d < R$: genre ellipse.

Si $d > R$: genre hyperbole.