APPLICATIONS DES MATHEMATIQUES: contrôle n^0 4

Durée: 1 heure 45'

25 pts donnent la note 6

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

---

1. Soit le programme linéaire: <u>maximiser</u> $\mathbf{Z} = 2x_1 + 6x_2 + 6x_3$ où $\mathbf{D}$: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 72 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 60 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \end{cases}$.

Dans la forme standard de ce PL, soient $s_1 \ge 0$ **et** $s_2 \ge 0$ **les variables d'écart** .

1.1. Donner le (premier) tableau du simplexe, correspondant à la solution de base réalisable: $(x_1 = x_2 = x_3 = 0\ ,\ s_1 = ?,\ s_2 = ?)$.

1.2. L'introduction de la variable x_3 dans la base conduit au tableau du simplexe (incomplet):

c_B	B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Solution de base b	Quotients caractéristiques
0	s_1	-1	2	0	1	-1/2	42	
6	x_3	2/3	1/3	1	0	1/6	10	
Δ_j	$\rightarrow$						- Z=	$\leftarrow$ - Z

Compléter le tableau précédent et indiquer s'il est optimal (justifier!).

Donner la solution de base réalisable correspondante?

1.3. Déterminer une autre solution de base réalisable adjacente à celle obtenue en 1.2 et qui permettrait d'améliorer la valeur de **Z**. Cette solution est-elle optimale (justifier!) ?

1.4. Il existe **plusieurs solutions** de base réalisables qui donnent la même valeur maximale de **Z**. En poursuivant les itérations du simplexe, de **manière appropriée**, déterminer les sommets du domaine admissible $\mathbf{D}$ qui leur correspondent .

1.5. Décrire alors, dans l'espace des variables $x_1, x_2, x_3,$ l'ensemble des solutions optimales. En donner une représentation paramétrique ainsi qu'une représentation cartésienne. **8 pts**

---

2. Soit le PL: Maximiser $\mathbf{Z} = (\frac{1}{2} + \lambda)x_1 + x_2$ où $\mathbf{C}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0\ ;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ où $\lambda \ge \mathbf{0}$.

Résoudre graphiquement ce PL (en fonction de λ et <u>en illustrant très soigneusement</u>) . **6 pts**

☞ *[Tourner s.v.p.]*

3. Soit **F** la famille des courbes Γ: $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ à un paramètre réel **a**.

3.1. Ecrire l'équation différentielle des courbes de la famille **F**.

3.2. Déterminer la famille **F'** des trajectoires orthogonales Γ' aux courbes Γ de **F**.

3.3. Déterminer la courbe Γ passant par le point **I**(1; 1) ainsi que la trajectoire orthogonale Γ' correspondante. Représenter graphiquement Γ et Γ'.

7 pts

---

4. On considère l'équation différentielle: $(1 - x^2)y' - xy = 1$.

4.1. Déterminer la solution générale de cette équation sur l'intervalle ouvert $\mathbf{I} =]-1, 1[$.

4.2. Définir (**en justifiant**) <u>la solution unique</u> $\overline{y}$ sur l'intervalle fermé à gauche $\mathbf{J} = [-1, 1[$.

Indication. Il s'agit du problème de prolongement au point $x = -1$.

<u>**Rappel**</u>. $\text{Arccos}x = t \Leftrightarrow x = \cos t$, où $-1 \le x \le 1$ et $0 \le t \le \pi$; $(\text{Arccos}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$.

6 pts
