On a
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} f(x)\,dx$$

On fait le changement de variable
$$x = \frac{i}{N} + \frac{1}{N}\,\frac{t+1}{2} \qquad \left(\begin{array}{c} \frac{i}{N} \le x \le \frac{i+1}{N} \\ -1 \le t \le 1 \end{array} \right)$$
$$dx = \frac{1}{2N}\,dt$$

et on obtient
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i + \frac{t+1}{2}\right)\right) dt$$

$$L_N(f) = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} 2 f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx - L_N(f) = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{N}\left(i + \frac{t+1}{2}\right)\right) dt - 2 f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{t+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N} f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \underbrace{\frac{t^2}{8N^2} f''(\alpha)}_{r(t)}$$

$$\frac{i}{N} < \alpha < \frac{i+1}{N}$$

attention α dépend de t, i et N

La formule du rectangle est exacte pour les polynômes de degré 1 et donc
$$\int_{-1}^{1} \left(f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{t}{2N} f'\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) \right) dt = 2 f\left(\frac{1}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Par conséquent
$$\int_0^1 f(x)\,dx - L_N(f) = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{t^2}{8N^2} f''(\alpha)}_{r(t)}\,dt$$

Finalement
$$\left| \quad \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad \right| \le \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} \left| \frac{t^2}{8N^2} f''(\alpha) \right| dt$$
$$\le \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2}{8N^2} \max_{0 \le x \le 1} |f''(x)|$$
$$= \frac{1}{8N^2} \max_{0 \le x \le 1} |f''(x)|$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}^3[x_0, x_0+2]$, soit $0 < h \leq 1$, on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\alpha),$$

$$\text{où } x_0 < \alpha < x_0+h.$$

De même on a

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) + \frac{8h^3}{6} f'''(\beta),$$

$$\text{où } x_0 < \beta < x_0+2h.$$

Par conséquent

$$4 f(x_0+h) - f(x_0+2h) = 3 f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^3}{6} f'''(\alpha) - \frac{8h^3}{6} f'''(\beta),$$

en prenant la valeur absolue

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} \right| = \left| \frac{2h^2}{6} f'''(\alpha) - \frac{4h^3}{6} f'''(\beta) \right|$$

$$\leq h^2 \left(\frac{1}{3} |f'''(\alpha)| + \frac{2}{3} |f'''(\beta)| \right)$$

$$\leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0+2h} |f'''(x)|$$

Puisque $h \leq 1$

$$\leq h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_0+2} |f'''(x)|$$