Contrôle d'analyse I N°3

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 20 points

NOM : ____________________

Groupe ☐

PRENOM : ____________________

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = n\,x - |\,x^3 - 1\,|\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le graphe de f admet en $x_0 = 1$ un point anguleux.

b) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ de sorte que ce point anguleux soit un extremum.

c) Le point anguleux est-il un point d'inflexion du graphe de f ?
En déduire l'esquisse locale du graphe de f au voisinage de $x_0 = 1$ pour $n = 3\,.$ 6,5 pts

2. On considère l'arc paramétré suivant.

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\[2mm] y(t) = \dfrac{t^2 + a\,t}{t-1} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Déterminer le paramètre $a \in \mathbb{R}$ de sorte que Γ admette une asymptote oblique de pente $m = 3\,.$
Déterminer alors l'équation cartésienne de cette asymptote.

b) Déterminer le paramètre $a \in \mathbb{R}$ de sorte que Γ admette en $t = -1$ une tangente passant par le point $P\,(2\,,\,1)\,.$ 6,5 pts

3. Faire l'étude complète de la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = (t^2 + \frac{1}{4})\, e^{\,(\frac{1}{2} - 2t^2)} \\[2mm] y(t) = \frac{1}{2}\, t\, e^{\,(\frac{1}{2} - 2t^2)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Représenter, avec soin, l'arc Γ dans un repère orthonormé d'unité 20 cm (40 carrés).

7 pts