Analyse I – Corrigé de la Série 8

Echauffement.

Pour $x \neq 1$, la fonction f est continue puisqu'elle est une composition de fonctions élémentaires qui sont continues sur leur domaine de définition (cf. théorème du cours). Il reste donc à vérifier si f est continue en $x = 1$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. D'une part on a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = f(1),$$

et d'autre part, en utilisant que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, on obtient

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+1) = 3 = f(1).$$

Ainsi f est aussi continue en $x = 1$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

i) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+2x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right).$$

Pour calculer cette limite, on utilise les propriétés algébriques :

$$\lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 2x + 2 = \left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 2\lim_{x\to 1} x + 2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 2 = 5.$$

ii) On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x+1}$ et $b = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = 0\,.$$

iii) En utilisant que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$, on peut récrire le numérateur comme $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 1 = -2\sin(x)^2$ et la limite devient

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)} = -2\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right)$$

$$= -2\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)} = -2\cdot 1^2\cdot 1 = -2$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (cf. cours).

iv) Comme $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{3}{3} = -1,.\end{aligned}$$

où on utilise de nouveau les propriétés algébriques pour calculer la dernière limite.

v) Avec une formule de trigonométrie on peut récrire le numérateur

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \\ &= -\left(\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right) = -\sin(a)\end{aligned}$$

car la deuxième limite vaut 1.

Exercice 2.

i) Observons que $\lim_{x\to\alpha}\frac{\operatorname{tg}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)^2}{x^2}$. Du cours on sait que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right) = 1$$

car les deux limites existent et valent 1. Il suit que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)^2}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

et donc la limite donnée existe pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii) Cette limite existe si et seulement si α est une racine double du polynôme au numérateur. Evalué en α, celui-ci devient

$$\alpha^4-2\alpha^4+4\alpha^2=\alpha^2(4-\alpha^2)=\alpha^2(2+\alpha)(2-\alpha).$$

Les candidats sont donc les racines de ce polynôme-ci, c.-à-d. $\alpha\in\{0,-2,2\}$.

Pour $\alpha=0$, le polynôme est $x^4+4x^2=x^2(x^2+4)$ dont 0 est bien une racine double.

Pour $\alpha=\pm 2$, on a

$$x^4\mp 4x^3+4x^2=x^2(x^2\mp 4x+4)=x^2(x\mp 2)^2$$

et donc 2 et -2 sont des racines doubles respectives.

Ainsi la limite existe si et seulement si $\alpha\in\{-2,0,2\}$.

iii) On distingue trois cas pour β.

1) Si $\beta = 0$, la limite vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0} \left(|x| \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + \alpha\right) = \alpha$$

car $0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, d'où il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim\limits_{x\to 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. La limite donnée existe donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\beta = 0$.

2) Si $\beta < 0$, $x^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ prend des valeurs négatives au voisinage de $x = 0$. En effet, pour $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n^2 + \beta \left|\cos\left(\tfrac{1}{x_n}\right)\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta\, |\cos(2n\pi)|\right) = \beta < 0.$$

Ainsi l'expression n'est pas définie et donc la limite n'existe pas.

3) Si $\beta > 0$, il faut encore distinguer si α est nul ou pas.
Si $\alpha = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 \leq \frac{x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} = \frac{|x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{x^2} \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} \leq |x|$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} = 0$$

pour tout $\beta > 0$.
Si $\alpha \neq 0$, la limite n'existe pas. En effet, en prenant les suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) + \alpha|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 \sin(2n\pi) + \frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta\, |\cos(2n\pi)|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta}} = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2 \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \alpha|y_n|}{\sqrt{y_n^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|y_n| \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \alpha}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{y_n^2} \left|\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + \alpha}{\sqrt{1 + \beta \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right|}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \alpha\right) = \alpha
\end{aligned}$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La limite n'existe donc pas (car $\alpha \neq 0$).

Pour résumer, la limite existe si et seulement si $\beta = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou si $\beta > 0$ et $\alpha = 0$.

Exercice 3.

i) On calcule les limites de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ des deux côtés en introduisant une nouvelle variable u tel que $x = \frac{1}{u}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{u\to -\infty} f\big(\tfrac{1}{u}\big) = \lim_{u\to -\infty} \frac{1}{1+2^u} = 1 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{u\to \infty} f\big(\tfrac{1}{u}\big) = \lim_{u\to \infty} \frac{1}{1+2^u} = 0 \neq f(0).$$

Donc f n'est pas continue mais seulement continue à gauche en $x = 0$ (Fig. 1).

ii) Notons que f est paire parce que les fonctions $\cos(x)$ et x^2 sont paires. Ainsi il suffit de considérer la limite à droite (ou celle à gauche). On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)^2}{x^2\big(1+\cos(x)\big)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\cos(x)}$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(0),$$

où on a utilisé que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Big(= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\Big)$ (cf. cours) et la décomposition en produit de deux limites est valable parce que les deux limites existent. Ainsi f est continue en $x = 0$.

iii) Considérons les suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Ces suites satisfont $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\big(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\big) = 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas continue en $x = 0$ (Fig. 2).

iv) Comme la fonction sinus prend des valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$ (Fig. 3).

Exercice 4.

On a $f(1) = 3 \cdot [1] + a \cdot [1] = 3 + a$.
Pour étudier f dans le voisinage de 1, considérons $x = 1 \pm \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. On a

$$f(1 \pm \varepsilon) = 3\big[(1 \pm \varepsilon)(1 \mp \varepsilon)\big] + a \cdot \big[\cos(\pm\pi\varepsilon)\big] = 3\big[1 - \varepsilon^2\big] + a \cdot \big[\cos(\pi\varepsilon)\big] = 3 \cdot 0 + a \cdot 0 = 0.$$

En laissant $\varepsilon \to 0$, il suit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Donc f est continue en $x = 1$ si et seulement si $f(1) = 0$, c'est-à-dire si $a = -3$.

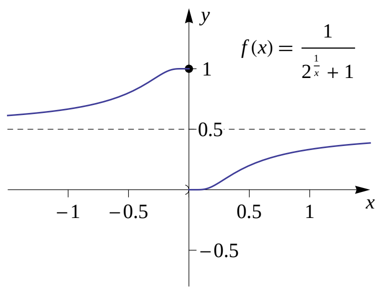

Fig. 1

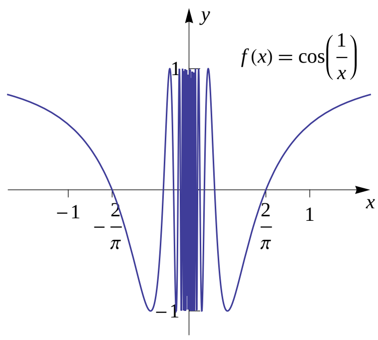

Fig. 2

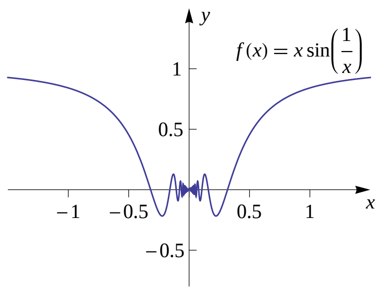

Fig. 3

Exercice 5.

i) Comme l'expression de f n'est pas définie en $x = 1$, on doit calculer sa limite en ce point. Pour $x \neq 1$, on peut écrire, en utilisant a que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

et donc le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1 \colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\,, & x \neq 1 \\ -\dfrac{\sqrt{6}}{4}\,, & x = 1 \end{cases}$$

Remarque: Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas:

$$\hat{f}_1 \colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}.$$

ii) Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x \in A \cup \{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons qu'on obtient pour $x \notin A \cup \{0\}$ avec un peu de trigonométrie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $a_n = \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-1} \in A$. Alors on a

$$\lim_{x\to a_n} f(x) = \lim_{x\to a_n}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n\cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a \in A$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x=0$. Le prolongement par continuité de f est donc

$$\hat{f}_A\colon\,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_A(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)^2\right), & x \notin A \\ 0\,, & x \in A \end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\hat{f}_A\colon\,]0,1] \to \mathbb{R}$, $\hat{f}_A(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

iii) L'expression de f n'étant pas définie pour $x=1$, on veut calculer la limite. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x+2}\cdot\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x+2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\cos(x-1)}\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(*Attention:* La décomposition en produit de deux limites à la deuxième ligne est valable parce que les deux limites existent.)

Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2}, & x>1 \\ \frac{1}{3}\,, & x=1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 6.

i) On a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}} = \begin{cases} 1, & x = k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi f n'est pas continue aux points $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et continue partout ailleurs.

ii) Comme x^4 est continue sur $\mathbb{R}$, on ne regarde que la valeur de la limite en fonction de x. Comme

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \\ \infty, & x>1 \\ \text{n'existe pas}, & x\le -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1<x<1 \\ 1, & x=\pm 1 \\ \infty, & x>1 \text{ ou } x<-1 \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} -1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \text{n'existe pas}, & x = -1 \\ 0, & x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

Le domaine de définition de la fonction f est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De plus f n'est pas continue en $x = 1$ (elle y est continue à droite mais pas à gauche) mais elle est continue en tout autre point de D.

Exercice 7. (QCM : Limite d'une fonction)

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ■ 1
- ☐ $\frac{1}{3}$

Exercice 8. (QCM : Prolongement par continuité)

- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ■ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

i) On a montré au cours que

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\sin(x) = x + r_0(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \frac{r_0(x)}{x} = 0}$.

ii) On a montré au cours que

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + r_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \frac{r_1(x)}{x^2} = 0}$.

iii) Considérons:

$$\begin{aligned}
c := \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3} &\overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-(2x)}{(2x)^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)-2x}{(2x)^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\left(1-\frac{1}{2}x^2+r_1(x)\right)-2x}{8x^3}\\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3}+\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{r_1(x)}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}c-\frac{1}{8}+1\cdot 0,
\end{aligned}$$

où dans l'égalité $\star$ nous avons utilisé le fait qu'on contrôle les mêmes suites.
Alors $\frac{3}{4}c=-\frac{1}{8}\Rightarrow c=-\frac{1}{6}$ et donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x^3}+\frac{1}{6}\right)=0\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^3}=0
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\sin(x)=x-\frac{1}{6}x^3+r_2(x)\quad\text{avec}\quad\lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{x^3}=0}$.

iv) Considérons:

$$\begin{aligned}
d := \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1+2x^2}{(2x)^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin(x)^2-1+2x^2}{16x^4}\\
&= \frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{-\left(x-\frac{1}{6}x^3+r_2(x)\right)^2+x^2}{x^4}\\
&= \frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\frac{1}{3}x^4+x^2}{x^4}-\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2+r_2(x)^2+2xr_2(x)-\frac{x^3}{3}r_2(x)\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(0+\lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)^2}{x^4}+0-\lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{3x}\right)\\
&= \frac{1}{24}-\left(\lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{x^3}\right)^2\lim_{x\to 0}x^2+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{x^3}\lim_{x\to 0}x^2=\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}-\frac{1}{24}\right)=0\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4}{x^4}=0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+r_3(x)\quad\text{avec}\quad\lim_{x\to 0}\frac{r_3(x)}{x^4}=0}$.

On peut maintenant calculer la limite en question:

$$
\begin{aligned}
\sin(\cos(x)-1) &= \sin\left(-\frac{1}{2}x^2 + r_1(x)\right) \\
&= \sin\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + r_3(x)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + r_3(x)\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x^2 + r_1(x)\right)^3 + r_2\left(-\frac{1}{2}x^2 + r_1(x)\right). \\
1-\cos(\sin(x)) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\sin(x)^2 + \frac{1}{24}\sin(x)^4 + r_3\left(\sin(x)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + r_2(x)\right)^2 - \frac{1}{24}\left(x + r_0(x)\right)^4 - r_3\left(\sin(x)\right).
\end{aligned}
$$

Et donc

$$
\sin(\cos(x)-1) + 1 - \cos(\sin(x)) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{24}x^4\right) + r_4(x),
$$

où

$$
\begin{aligned}
r_4(x) = & r_3(x) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x^2 + r_1(x)\right)^3 + r_2\left(-\frac{1}{2}x^2 + r_1(x)\right) \\
& + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) r_2(x) + \frac{1}{2}r_2(x)^2 - \frac{1}{24}\left(4x^3 r_0(x) + 6x^2 r_0(x)^2 + 4x r_0(x)^3 + r_0(x)^4\right) - r_3(\sin(x)).
\end{aligned}
$$

En inspectant chaque terme on voit que

$$
\lim_{x\to 0} \frac{r_4(x)}{x^4} = 0,
$$

et donc

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1) + 1 - \cos(\sin(x))}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}.
$$

Exercice 9. (Limites à gauche et à droite)

Voir les .pdf du cours du mercredi de la semaine 7.