Série 20

1. Soit $\mathcal{C}$ une conique dépendante d'un paramètre réel m.

$$\mathcal{C}: \ \frac{(x-1)^2}{m-1} + \frac{(y-m)^2}{(m-1)\,(m-2)} - 1 = 0\,.$$

a) Déterminer m pour que la conique $\mathcal{C}$ vérifie les deux conditions suivantes :

- $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'axe réel vertical,
- une des asymptotes de $\mathcal{C}$ passe par l'origine O.

b) On fixe $m = -1$. Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- les axes de symétrie de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ coïncident,
- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ se coupent orthogonalement en $M(0\,;\,2)$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Soient A et A' les deux sommets de $\mathcal{H}$, (A d'abscisse positive) et M un point courant de cette hyperbole.

On considère la tangente t à $\mathcal{H}$ en M, la perpendiculaire n à t passant par A et la droite d passant par A' et M.

Soit P le point d'intersection des droites n et d.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque le point M décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$. Caractériser avec précision la nature géométrique de ce lieu.

3. Dans le plan, on considère une droite d et un point A, $A \notin d$.

Un point D parcourt la droite d.

Soit M un point de la perpendiculaire à d passant par D tel que la distance de M à d soit égale à la distance de A à D.

a) Choisir un repère orthonormé adapté au problème.

b) Déterminer l'équation cartésienne, dans le repère choisi, du lieu de M lorsque D parcourt la droite d.

c) Représenter sur un dessin soigné le lieu de M.

4. Un segment AB de longueur constante $2\,d$ se déplace sur l'axe Ox. Des points A et B, on mène les tangentes au cercle γ d'équation : $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$.

On considère le point M intersection des tangentes distinctes de l'axe Ox.

a) Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M.

b) Etudier la nature de ce lieu en fonction de d.

Indications :

- Choix des paramètres : a abscisse du point A et b abscisse du point B, liés par l'équation $|\,a - b\,| = 2\,d$.
- Elimination des paramètres : exprimer $a + b$ et $a\,b$ en fonction de x et y, puis utiliser l'équation de liaison sous la forme $4\,d^2 = (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4\,a\,b$.

5. On donne un point du plan par ses coordonnées cartésiennes. Déterminer ses coordonnées homogènes.

a) $A\,(3\,;\,2)$, b) $B\,(-3\,;\,\frac{1}{2})$, c) $C\,(0\,;\,1)$, d) $D\,(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{5}{4})$.

6. On donne un point à l'infini du plan par les composantes d'un de ses vecteurs directeurs ou par sa pente. Déterminer ses coordonnées homogènes.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

d) $m_D = 2$, e) $m_E = -\frac{7}{3}$, f) $m_F = 0$.

7. On donne des points du plan par leurs coordonnées homogènes. Déterminer les coordonnées cartésiennes de chaque point ou un vecteur directeur si le point est à l'infini.

a) $A\,(-2\,;\,1\,;\,-3)$ b) $B\,(2\,;\,0\,;\,0)$ c) $C\,(4\,;\,-2\,;\,6)$ d) $D\,(6\,;\,4\,;\,0)$

e) $E\,(1\,;\,0\,;\,0)$ f) $F\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ g) $G\,(3\,;\,2\,;\,0)$ h) $H\,(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{2})$

Indiquer les points qui sont confondus.

Réponses de la série 20

1. a) $m = -2$.

b) $\mathcal{E}: \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{12} - 1 = 0$.

2. Equation cartésienne du lieu des points P : $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} - 1 = 0$.

3. a) L'origine O est confondue avec le point A et l'axe Ox est perpendiculaire à la droite d.

b) Lieu de M : $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} - 1 = 0$.

4. a) Equation cartésienne du lieu des points M :

$$R^2\,x^2 + (R^2 - d^2)\,y^2 + 2R\,(2d^2 - R^2)\,y - 4R^2\,d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2\,x^2 + (R^2 - d^2)\left[y + \frac{R\,(2d^2 - R^2)}{R^2 - d^2}\right]^2 - \frac{R^6}{R^2 - d^2} = 0\,,\ (R \neq d)\,.$$

b)
- Si $d < R$, le lieu de M est une ellipse.
- Si $d = R$, le lieu de M est une parabole.
- Si $d > R$, le lieu de M est une hyperbole.

5. a) $A\,(3\,;\,2\,;\,1)$ b) $B\,(-6\,;\,1\,;\,2)$ c) $C\,(0\,;\,1\,;\,1)$ d) $D\,(8\,;\,-15\,;\,12)$

6. a) $A\,(1\,;\,3\,;\,0)$ b) $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$ c) $C\,(1\,;\,2\,;\,0)$

d) $D\,(1\,;\,2\,;\,0)$ e) $E\,(3\,;\,-7\,;\,0)$ f) $F\,(1\,;\,0\,;\,0)$

7. $A \equiv C \equiv F \equiv H\,(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3})$

$B \equiv E$: point à l'infini de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D \equiv G$: point à l'infini de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$