Contrôle d'analyse I N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM :

PRENOM :

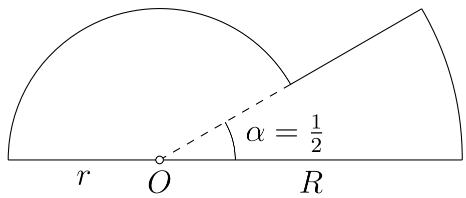
Groupe

1. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ les deux trinômes, dépendant d'un paramètre réel m, définis par

$$P(x) = -mx^2 + 4x \quad \text{et} \quad Q(x) = -x^2 + 2mx - 4\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer m tel que les deux points d'intersection, distincts, des courbes d'équation $y = P(x)$ et $y = Q(x)$ aient leur abscisse strictement à l'extérieur de l'intervalle défini par les deux racines de $P(x)$. 4.5 pts

2. On considère le domaine $\mathcal{D}$ décrit ci-contre. Il est formé de deux secteurs circulaires, l'un de rayon variable R et d'angle au centre $\alpha = 1/2$ (radian) et l'autre de rayon variable r ($r \leq R$) et d'angle au centre $\pi - \alpha$ (on admettra $\pi = 3$).
Le périmètre L du domaine $\mathcal{D}$ est fixé et vaut 15 unités.
On choisit R comme variable indépendante.



a) Déterminer le domaine de la variable R.

b) Représenter graphiquement l'aire A du domaine $\mathcal{D}$ en fonction de R. (Echelle horizontale : 2 carrés par unité. Echelle verticale : 2 carrés pour 5 unités.)

c) Pour quelle valeur de R l'aire A est-elle minimale ? 4.5 pts

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante en fonction du paramètre réel m :

$$\sqrt{|x^2 - 4mx|} \geq x + 2m\,.$$

4.5 pts

4. En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = 1\,.$$

1.5 pts