Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 40 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$.

Dans $\mathcal{B}$, on note M la matrice de f avec

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Donner la nature géométrique de f.

2,5 pts

2. Soit le système noté (S) suivant:

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 4 \\ x + z - t = 3 \\ -x + 2y - z - t = -1 \end{cases}$$

(a) Sans calculer les solutions de (S), déterminer le nombre de paramètres dont vont dépendre ces solutions (s'il y en a).
Justifier avec précision votre réponse.

(b) Résoudre le système (S). Sans calcul supplémentaire, en déduire le noyau de l'application linéaire f associée au système.

2,5 pts

Tournez, SVP

3. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{R}^2$.
Soit f l'endomorphisme dans $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{b} \end{aligned}$$

avec $\vec{a}\cdot\vec{b} = k \neq 0\,,\ \ k \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer, en le justifiant, que f est diagonalisable.
Déterminer les sous-espaces propres de f, ainsi qu'une base propre.

(b) Soient g et h les deux endomorphismes du plan suivants :

- g est une affinité d'axe $(O, \vec{b})$, de direction perpendiculaire à $\vec{a}$ et de rapport $\lambda = 3$,
- h est une homothétie de rapport k.

Déterminer la matrice de $i = h + g$ dans une base propre de i à préciser.

(c) Déterminer toutes les valeurs de $k \in \mathbb{R}^*$ pour que $j = f \circ i$ comporte dans sa décomposition une projection.
Pour chaque valeur de k, donner avec précision la nature géométrique.

4 pts

4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$.

Dans $\mathcal{B}$, on note M la matrice de f avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ sachant que $\ker f = \{\vec{0}\}$.

(b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ sachant que $\lambda = 2$ est valeur propre de f.

(c) Soit le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3-2m \\ m^2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

Discuter en fonction des paramètres a et m de sorte que $\vec{c} \in \mathrm{Im} f$.

(d) On pose $a = 1$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse.

6 pts