Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 6**

Exercice 1. *Réduire les matrices suivantes à une forme échelonnée et déterminer le rang ligne de la matrice.*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. *Décrire l'ensemble des triplets (a, b, c) rendant le rang ligne de la matrice A égal à 2, où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ -2 & -1 & c & a \end{pmatrix}$

Exercice 3. *Trouver une base de chacun des sous-espaces W suivants.*

a) Soit $W := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ (un sous-espace de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$).

b) Soit W l'espace lignes de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(un sous-espace de $\mathbb{R}^5$).*

c) Soit W l'espace colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(un sous-espace de $\mathbb{R}^4$).*

Exercice 4. *Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs dans l'ensemble S donné sont linéairement indépendants, et ensuite prolonger S en une base de V.*

a) $S \subseteq V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $S \subseteq V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $S = \{2x^2 + 1, x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1, x^3 + 2x^2 - 1, x^4 - 1\}$

c) $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *où V est un espace vectoriel avec base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *et* $v_1 = e_1 + e_2 + e_4$, $v_2 = e_1 - e_2 + e_3 - 2e_4 - e_5$ *et* $v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v_4 = 2e_3 + e_5$.

Exercice 5. *Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a, la matrice suivante est-elle de rang ligne maximal ? Quel est le rang ligne de la matrice pour les autres valeurs de a ?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *Démontrer que $\mathcal{B} = \{x^3 - 1, x^2 + 1, 2x - 3, 2x^3 - 2x + 5\}$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ et ensuite trouver les composantes du vecteur $\mathbf{p}(x) = x^2$ par rapport à la base ordonnée $\mathcal{B}$.*

Exercice 7. *Pour chacune des applications suivantes, déterminer (en justifiant) s'il s'agit d'une application linéaire.*

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_1((x,y,z))) = (x-y, x+|z|)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_2((x,y,z))) = (-3y, y)$.
3. $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *donnée par* $f_3(p) = xp(x) + p(1)$.
4. $f_4 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *donnée par* $f_4(p) = p(x)p(x)$.
5. $f_5 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_5(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a,b)$.

Exercice 8. *Soit* $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une application linéaire telle que*

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = x^3 - 1; \quad T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = x^2 - 1,$$

$$T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = x - 1, \quad T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = x^3 - 1.$$

Trouver une expression pour l'image $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ *et montrer que* T *n'est pas injective.*

Exercice 9. *Soit* $\mathcal{B}$ *la base de* $\mathbb{R}^3$ *donnée par :*

$$\mathcal{B} := \{(1,-4,3), (5,2,-2), (4,-7,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. *Quel vecteur* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ *satisfait*
$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ?$$
2. *Trouver* $[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$, *le vecteur qui représente* $\vec{y} = (10, -9, 1)$ *par rapport à la base* $\mathcal{B}$ *?*

Exercice 10. *Soit* $\mathcal{F}$ *la base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

1. *Quel polynôme* $g(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *satisfait*
$$[g(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$
2. *Trouver* $[f(t)]_{\mathcal{F}}$, *les coordonnées de* $f(t)$ *par rapport à la base* $\mathcal{F}$, *pour le polynôme* $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$.

Exercice 11. *Vrai ou faux :*

1. *Soit* A *une matrice* $m \times n$ *et on considère un système d'équations linéaires* $AX = b$, *pour* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *et* $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. *Enfin, soit* A' *la matrice augmentée du système. Si* $AX = b$ *possède au moins une solution, alors le rang colonne de* A *est égal au rang colonne de* A'.
2. *Soit* A *une matrice* $m \times n$ *et on considère un système d'équations linéaires* $AX = b$, *pour* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *et* $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. *Enfin, soit* A' *la matrice augmentée du système. Si le rang colonne de* A *est égal au rang colonne de* A', *alors* $AX = b$ *possède au moins une solution.*
3. *Soit* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Alors le rang ligne de* A *est au plus* n.
4. *Soit* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Alors le rang ligne de* A *est au plus* m.
5. *Soit* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Alors le rang colonne de* A *est au plus* n.
6. *Soit* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Alors le rang colonne de* A *est au plus* m.

7. *Soit A une matrice $m \times n$ et on considère un système d'équations linéaires $AX = 0$. On suppose que le système possède une infinité de solutions. Alors $m \leq n$ et le rang ligne de A est égal à m.*
8. *Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V où V est de dimension finie. Alors $W = V$ si et seulement si $\dim W = \dim V$.*

Exercice 12. *Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :*

a. *A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.*

b. *A est une matrice 4×2, $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, où $\vec{a}_i \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ est la i-ème colonne de A, et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.*

c. *A est une matrice 4×3, $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ ($\vec{a}_i \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ la i-ème colonne de A). Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.*

Exercice 13. *Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs données engendrent linéairement $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*

1. *p_1, p_2, p_3, p_4, où $p_1(t) = t^2 + t + 1$, $p_2(t) = -2t^3 - 3$, $p_3(t) = t^3 + 2t$ et $p_4(t) = 4$.*
2. *p_1, p_2, p_3, où $p_1(t) = t^2 + 5t$, $p_2(t) = -2t^3 - 100$ et $p_3(t) = t^3 - 2t + 3$.*