Exercice 1. *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les espaces propres des matrices A et B.

b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

c) Dans le cas où la matrice $X \in \{A, B\}$ est diagonalisable, trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}XP$ soit diagonale.

Solution 1. a) — Pour la recherche des valeurs propres de A, on cherche les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\det(A - \lambda I_4) = 0$. Or, on a

$$\det(A - \lambda I_4) = \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ (avec multiplicité deux), $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -2$. Pour trouver un vecteur propre $\mathbf{v}_1$ associé à λ_1, on suppose $\mathbf{v}_1 = (a, b, c, d)^t$ et on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} -a + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b - 3c = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Or, on a que le procédé d'échelonnage appliqué à $A - I_4$ nous donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, en prenant c, d comme variables libres, on obtient $\mathbf{v}_1 = (2c, 3c, c, d)^t$. Donc une base de S_1 est donnée par

$$\{(2, 3, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}.$$

On procède de la même manière pour les deux autres espaces propres, et on trouve

$$S_2 = \langle (-2, 1, 1, 0)^t \rangle$$

et

$$S_3 = \langle (-1, 0, 1, 0)^t \rangle.$$

— Pour la recherche des valeurs propres de B, on cherche les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\det(B - \lambda I_4) = 0$. Or, on a

$$\det(B - \lambda I_4) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 5\lambda^2 + 88\lambda - 176.$$

Comme 4 divise 176, on essaie de voir si c'est une racine, et ça marche. On obtient, via la division euclidienne

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_4) &= (\lambda - 4)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11x + 44) \\ &= (\lambda - 4)^2(\lambda^2 - 11) \\ &= (\lambda - 4)^2(\lambda - \sqrt{11})(\lambda + \sqrt{11}). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = 4$ (avec multiplicité algébrique deux), $\lambda_2 = \sqrt{11}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{11}$. Pour trouver un vecteur propre $\mathbf{v}_1$ associé à λ_1, on suppose $\mathbf{v}_1 = (a, b, c, d)^t$ et on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 6a - 9b = 0 \\ 4a - 6b = 0 \\ -6c + 7d = 0 \\ c - 2d = 0. \end{cases}$$

Or, le procédé d'échelonnage appliqué à la matrice $B - \lambda I_4$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, en prenant b comme variable libre, on obtient que $\mathbf{v}_1 = (\frac{3}{2}b, b, 0, 0)^t$. Ainsi S_1 est engendré par le vecteur $(3, 2, 0, 0)^t$. On procède de la même manière pour obtenir

$$S_2 = \langle (0, 0, -2 + \sqrt{11}, 1) \rangle$$

et

$$S_3 = \langle (0, 0, -2 - \sqrt{11}, 1)^t \rangle.$$

b) On remarque d'abord que A a deux valeurs propres de multiplicité une et une valeur propre, λ_1, de multiplicité deux. Or, pour cette valeur propre, l'espace propre, S_1, est de dimension deux. Donc la dimension des espaces propres (la multiplicité géométrique) est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre dans tout les cas. Par un résultat du cours, A est diagonalisable. Pour ce qui est de la matrice B, elle a également une valeur propre de multiplicité algébrique deux (λ_1). Mais dans ce cas, la dimension de l'espace propre, càd la multiplicité géométrique, est égale à un (car S_1 est engendré par un seul vecteur). Donc B n'est pas diagonalisable.

c) Notons C la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et notons

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (2, 3, 1, 0)^t, \mathbf{v}_2 = (0, 0, 0, 1)^t, \mathbf{v}_3 = (-2, 1, 1, 0)^t, \mathbf{v}_4 = (-1, 0, 1, 0)^t\}.$$

Au vu du fait que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres différentes sont linéairement indépendants, on obtient que B est une liste linéairement indépendante (on peut aussi le vérifier directement si ce fait semble trop obscur). En écrivant les vecteurs de B dans la base canonique, on obtient

$$P = [\mathrm{id}]_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$P^{-1}AP = [\mathrm{id}]_{BC} A [\mathrm{id}]_{CB} = [A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Noter qu'ici on confond la matrice A avec l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ associée.)
On pourra aussi vérifier l'égalité : Via la méthode de Gauss, on trouve l'inverse de P :

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

et on calcule

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Vérifier que $\pi - 1$ et $\pi + 3$ sont des valeurs propres de la matrice*

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

Solution 2. On rappelle que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_4) = 0$.

— Dans un premier temps, on remarque

$$A - (\pi - 1)I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a deux lignes identiques, donc son determinant est nul (la matrice échelonnée a une ligne de zéros). Ceci démontre que $\pi - 1$ est une valeur propre de A.

— Dans un second temps, on a

$$A - (\pi + 3)I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On applique l'opération $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_1$ pour obtenir la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

qui est telle que $\det(A) = \det(A')$. Or, A' contient une ligne de zéros, son déterminant est donc nul. Ceci démontre que $\pi + 3$ est une valeur propre de A.

Exercice 3. *a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10}.*

b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; \text{et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point a).

Solution 3. a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. On calcule A^2 en utilisant simplement le fait que $P^{-1}P = I_2$:

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Comme D est diagonale alors son carré est aussi une matrice diagonale. Les coefficients sur la diagonale sont les carrées des coefficients de la diagonale de D.

De manière générale, la puissance d'une matrice diagonalisable A est égale à $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots.$

Ceci est facile à montrer par un raisonnement par récurrence :

1. Par hypothèse, la propriété est satisfaite pour $n = 1$.
2. La ligne suivante montre que si la propriété est vraie pour n elle est vraie pour $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

3. On conclut par récurrence.

b) On calcule d'abord l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $A = PDP^{-1}$. Par a), on a $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$, où

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car D est diagonale et donc D^{10} aussi, et les coefficients de la diagonale de D^{10} sont les coefficients de la diagonale de D à la puissance 10. On calcule :

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 1 \\ 1024 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

b) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Ecrire la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution 4. On calcule les images des différents vecteurs de base :

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de l'application T par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule :

$$\begin{aligned} \det\big([T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot \mathrm{id}\big) &= (2 - \lambda)^2 \cdot (-1 - \lambda) - (1 - \lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 \\ &= -(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 3). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

b) Dans ce point, A désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. On cherche les différents espaces propres. Pour $\lambda = 1$, on aimerait que $T(A) = A$, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & -b \\ -b & -a+2d \end{pmatrix},$$

ce qui donne $b = -b$ et $2a - d = a$ et $-a + 2d = d$. On trouve ainsi $b = 0$ et $a = d$. Ainsi, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, pour $\lambda = -1$, on trouve les équations $b = b$, $2a - d = -a$ et $-a + 2d = -d$, ce qui donne $a = d = 0$ (et aucune condition sur b). Ainsi, on a $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on aurait pu le deviner, puisque $T(S_2) = -S_2$). Finalement, pour la dernière valeur propre, les équations sont $2a-d = 3a$, $3b = -b$ et $3d = -a + 2d$, ce qui donne $b = 0$ et $a = -d$. Ainsi, on a $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 est de dimension 3, il s'agit d'une base.

Noter : On pourrait également travailler avec la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ et résoudre les équations $([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I)X = \mathbf{0}$, pour les trois valeurs propres λ.

c) On remarque que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les composantes de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(2, 2, -1)$. Puisque

$$\left[T^{10}(A)\right]_{\mathcal{B}'} = [T^{10}]_{\mathcal{B}'} \cdot [A]_{\mathcal{B}'} = ([T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'})^{10} \cdot [A]_{\mathcal{B}'},$$

les composantes de $T^{10}(A)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10})M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *a) Vérifier que les vecteurs*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par rapport au produit scalaire

$$(A|B) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}, \text{ pour } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

b) Calculer ensuite les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) du vecteur $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Solution 5. a) Si $1 \leq i, j \leq 4$ avec $i \neq j$, on trouve que le produit scalaire de v_i avec v_j est 0. Par un résultat du cours, ces 4 vecteurs sont linéairement indépendants. Puisque l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 est de dimension 4, ces vecteurs en forment une base.

b) On aimerait trouver $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^4 a_i v_i$, où v est le vecteur $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Ici, on rappelle le fait général montré en cours que $a_j = \frac{(v|v_i)}{(v_j|v_j)}$.
Si $1 \leq j \leq n$, la bilinéarité du produit scalaire entraîne que

$$(v|v_j) = \sum_{i=1} a_i (v_i|v_j) = a_j (v_j|v_j),$$

où l'on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Ainsi, on a $a_j = \frac{(v|v_i)}{(v_j|v_j)}$. On trouve

$$(v|v_1) = -3, \quad (v|v_2) = \frac{11}{3}, \quad (v|v_3) = \frac{-1}{3}, \quad (v|v_4) = 1,$$

On trouve de plus :

$$(v_1|v_1) = 7, \quad (v_2|v_2) = 21, \quad (v_3|v_3) = 6, \quad (v_4|v_4) = 2.$$

ce qui donne

$$a_1 = \frac{-3}{7}, \quad a_2 = \frac{11}{63}, \quad a_3 = \frac{-1}{18}, \quad a_4 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. *Supposons que le polynôme caractéristique d'une matrice A soit de la forme*

$$p_A(x) = (x-1)(x-3)^2(x-4)^3.$$

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A ?

c) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A si on sait de plus que A est diagonalisable ?

d) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants associés au même espace propre de A, que peut-on dire sur la valeur propre ?

e) Donner deux matrices non semblables C et D avec polynôme caractéristique $(x-1)(x-3)^2(x-4)^3$.

Solution 6. a) Les valeurs propres de A sont 1, 3 et 4.

b) On utilise à chaque fois que la dimension de l'espace propre associé à une valeur propre λ, qui est par définition la multiplicité géométrique de λ, est au moins 1 et au plus la multiplicité algébrique de λ.
- L'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
- L'espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension au plus 2.
- L'espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension au plus 3.

c)
- L'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
- L'espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension 2.
- L'espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension 3.

En effet, puisque p est un polynôme de degré 6, A est une matrice de taille 6×6. Mais alors, pour que A soit diagonalisable, il faut qu'elle admette 6 vecteurs propres linéairement indépendants. Note : on peut aussi utiliser le résultat que A est diagonalisable si et seulement si toute valeur propre est réelle et la dimension de l'espace propre associé de λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique pour toute valeur propre λ de A.

d) Notons S_λ l'espace propre dans lequel vivent v_1, v_2 et v_3 (S_λ étant l'espace propre correspondant à la valeur propre λ). Comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une liste de vecteurs linéairement indépendants de S_λ, on doit avoir $3 \leq \dim(S_\lambda)$. Par le point (b), $S_\lambda = S_4$, la valeur propre cherchée est donc 4.

e) On peut prendre

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que D n'est pas diagonalisable (en calculant le rang de la matrice $D - 3I$, par exemple), et donc ne pourra pas être semblable à une matrice diagonale.

Exercice 7. *On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire euclidien. Soient*

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Representer les vecteurs et essayer de repondre aux questions suivantes sans faire des calculs. Vérifier après.

1. *Est-ce que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?*
2. *Est-ce que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ?*
3. *Ecrire un vecteur $\vec{z}$ orthogonal à $\vec{w}$ de norme* 30.
4. *Parmi $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui est le vecteur le plus distant de $\vec{w}$?*

Solution 7.

1. *Non.* En fait, on voit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles. On calcule
$$< \vec{u}, \vec{v} >= 4 \neq 0.$$
2. *Non.* On calcule
$$< \vec{u}, \vec{w} >= 1 \neq 0.$$
3. On prend, par exemple,
$$\vec{z} := \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$
4. *Le vecteur le plus distant de $\vec{w}$ est v.* On calcule
$$d(\vec{u}, \vec{w}) = 1 < \sqrt{5} = d(\vec{v}, \vec{w}).$$

Exercice 8. *On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien. Soient*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.*
2. *En utilisant le fait que $\mathcal{B}$ est orthogonale, écrire $[\vec{z}]_{\mathcal{B}}$.*
3. *Exprimer le vecteur $\vec{z}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*

Solution 8.

1. On vérifie que
$$< \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{u}, \vec{w} >=< \vec{v}, \vec{w} >= 0.$$
2. Comme $\mathcal{B}$ est orthogonale, on a que
$$[\vec{z}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{<\vec{z},\vec{u}>}{<\vec{u},\vec{u}>} \\ \\ \frac{<\vec{z},\vec{v}>}{<\vec{v},\vec{v}>} \\ \\ \frac{<\vec{z},\vec{w}>}{<\vec{w},\vec{w}>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$
3. Depuis (b), on a que
$$\vec{z} = 4/3\vec{u} + 1/3\vec{v} + 1/3\vec{w}.$$

Exercice 9. *Soit les vecteurs*

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}\|$ *et* $\|\overrightarrow{v}\|$.

(b) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

(c) Trouver une base de l'espace orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

Solution 9. (a) Les produits scalaires s'écrivent $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 35$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{v} = 49$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = 35$. Les normes s'écrivent $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} = \sqrt{35}$ et $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = 7$.

(b) La distance est par définition $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})} = \sqrt{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{14}$.

(c) Soit

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

le vecteur qui forme une base de l'espace orthogonal au plan. On a les égalités $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, ce qui donne le système linéaire

$$\begin{aligned} 3a - b + 5c &= 0, \\ 6a - 2b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donné par l'équation $x + 3y = 0$.
En dimension 3 il existe une autre manière de résoudre l'exercice via le produit vectoriel. Le produit vectoriel fait correspondre à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, avec longueur $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Dans ce cas il suffit de calculer

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ce qui donne une autre base de l'espace orthogonal.

Exercice 10. *Démontrer que les applications*

$$(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}.$$

suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel V.

a) $V = C^\infty([0,1])$ *(l'espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables et définis sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*) avec*

$$(f|g) := \int_0^1 (f'(x)g'(x) + f(x)g(x))dx, \ \textit{pour } f, g \in V.$$

b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *avec*

$$(p|q) := a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2, \text{ où } p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ et } q = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

c) $V = \mathbb{R}^4$ *avec*

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) := v_1w_1 + 2v_2w_2 + v_3w_3 + 3v_4w_4,$$

lorsque $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ *et* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Solution 10. a) Il est clair que la la forme définie est symétrique (c'est-à-dire $(f|g) = (g|f)$). Ensuite, on a

$$(f|f) = \int_0^1 \big(f'(x)^2 + f(x)^2\big)dx,$$

ce qui entraîne que $(f|f) \geq 0$ (car il s'agit de l'intégrale d'une fonction qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Si $f = 0$, alors $(f|f) = 0$ et réciproquement

$$(f|f) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0, f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f = 0.$$

Finalement, si on suppose que $f, g, h \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(\alpha f + g, h) &= \int_0^1 \Big((\alpha f + g)'(x) \cdot h'(x) + (\alpha f + g)(x) \cdot h(x)\Big)dx \\
&= \int_0^1 \Big((\alpha f'(x) + g'(x)) \cdot h'(x) + (\alpha f(x) + g(x)) \cdot h(x)\Big)dx \\
&= \int_0^1 \Big(\alpha f'(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h'(x) + \alpha f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)\Big)dx \\
&= \int_0^1 \big(\alpha f'(x) \cdot h'(x) + \alpha f(x) \cdot h(x)\big)dx \\
&\quad + \int_0^1 \big(g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h(x)\big)dx \\
&= \alpha \cdot (f|h) + (g|h).
\end{aligned}$$

Ainsi, la forme est bilinéaire.

b) A nouveau, la symétrie est claire. Si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, on trouve

$$(p|p) = a_0^2 + 2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, c'est-à-dire si $p = 0$. Pour la bilinéarité, on considère : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$. On remarque que le coefficient constant de $\alpha p + q$ est $\alpha a_0 + b_0$. De même, les coefficients de degré 1 et 2 de $\alpha p + q$ sont respectivement $\alpha a_1 + b_1$ et $\alpha a_2 + b_2$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}
(\alpha p + q|r) &= (\alpha a_0 + b_0)c_0 + 2(\alpha a_1 + b_1)c_1 + 3(\alpha a_2 + b_2)c_2 \\
&= \alpha\big(a_0c_0 + 2a_1c_1 + 3a_2c_2\big) + \big(b_0c_0 + 2b_1c_1 + 3b_2c_2\big) \\
&= \alpha(f|h) + (g|h),
\end{aligned}$$

ce qui montre la bilinéarité.

c) Encore une fois, la symétrie est claire. Si $\mathbf{v}$, on trouve

$$(v|v) = v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2 + 3v_4^2.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, c'est-à-dire si $\mathbf{v} = 0$. Pour la bilinéarité, on considère : $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$. On trouve alors

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}|\mathbf{w}) &= (\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})_1 w_1 + 2(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})_2 w_2 \\ &\qquad + (\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})_3 w_3 + 3(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})_4 w_4 \\ &= (\alpha u_1 + v_1)w_1 + 2(\alpha u_2 + v_2)w_2 \\ &\qquad + (\alpha u_3 + v_3)w_3 + 3(\alpha u_4 + v_4)w_4 \\ &= \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{w}) + (\mathbf{v}|\mathbf{w}),\end{aligned}$$

ce qui montre la bilinéarité.

Exercice 11. *Choix Multiple.*

a. *Soit A une matrice de taille 3×3 telle que $A^3 = I_3$. Parmi les affirmations suivantes laquelle est toujours vraie ?*

☐ *Alors dim Ker$A = 1$ et 0 est valeur propre de A.*

☐ *Alors dim Ker$A = 0$ et 0 est valeur propre de A.*

[X] *Alors dim Ker$A = 0$, mais 0 n'est pas valeur propre de A.*

☐ *Alors 2 est une valeur propre de A.*

b. *Soit A une matrice de taille 3×3 avec $c_A(t) = (t-1)^2(t+1)$.*

☐ *Alors A est toujours diagonalisable.*

[X] *Alors A a pour valeurs propres 1 et -1.*

☐ *Alors A n'est jamais diagonalisable.*

☐ *Si A est diagonalisable, alors il existe des vecteurs linéairement indépendants $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $Av_i = -v_i$ pour $i = 1, 2$*

Solution 11. Choix Multiple.

a. ☐ Alors dim Ker$A = 0$, mais 0 n'est pas valeur propre de A.

On note que 0 ne peut pas être une valeur propre de A : Si $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors aussi $A^3\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Donc $I_3\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. En particulier le noyau de A est nul, ce qui signifie que 0 ne peut être une valeur propre.
On remarque également que 2 ne peut être valeur propre. En effet, si $\overrightarrow{x}$ était un vecteur propre pour la valeur propre 2, alors $A\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{x}$, donc $A^3\overrightarrow{x} = A^2(2\overrightarrow{x}) = 2A^2\overrightarrow{x} = 4A\overrightarrow{x} = 8\overrightarrow{x}$, ce qui est impossible puisque $A^3 = I_3$.

b. ☐ Alors A a pour valeurs propres 1 et -1.

En effet, les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la matrice. La matrice A n'est diagonalisable que si l'espace propre E_1 est de dimension 2. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable, car l'espace propre E_1 est de dimension 1, mais la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1, 1 et -1 est diagonal(isabl)e.
La dernière réponse n'est pas correcte car A ne peut pas avoir deux vecteurs linéairement indépendants qui satisfont à $Av_i = -v_i$ car la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre -1 est au plus la multiplicité algébrique de -1, qui est 1. Donc cet énoncé serait vrai seulement si A n'est jamais diagonalisable, ce qui a déjà été montré faux.

Exercice 12. *Vrai ou faux, avec justification.*

a) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

b) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si 0 est une valeur propre de A, alors A n'est pas inversible.

c) Soit $T : V \to V$ une transformation linéaire avec polynôme caractéristique

$$p_T(t) = (1-t^2)(t-1)(t-2).$$

Alors, T est diagonalisable.

d) Soit $A, P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, avec P inversible, telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Alors, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$ sont les valeurs propres de A et par conséquent A est diagonalisable.

Solution 12. a) Faux. La matrice qui ne contient que des 0 est diagonale mais non inversible. Un autre exemple est la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Vrai. Si 0 est une valeur propre de A, c'est qu'il existe un vecteur $\mathbf{v}$ non-nul tel que $A \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = 0$, ce qui entraîne que le noyau de l'application linéaire associé à A est non nul et donc cette application n'est pas injective. Ainsi, A n'est pas inversible.

c) Faux. Le polynôme caractéristique $p_T(t)$ est $(t-1)^2 \cdot (1+t) \cdot (2-t)$. Si l'on considère la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

on constate qu'elle admet p_T comme polynôme caractéristique. En effet, elle est sous forme triangulaire supérieure ce qui entraîne que les éléments de la diagonale sont les valeurs propres. Si on regarde l'espace propre associé à la valeur propre 1, on constate qu'il n'est engendré que par le vecteur $(1, -1, 0, 0)^t$, donc la valeur propre 1 est de multiplicité géométrique 1, alors que sa multiplicité algébrique est 2.

d) Vrai. Puisque $P^{-1}AP$ possède 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible $Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = QDQ^{-1}$. En multipliant à gauche par Q^{-1} et à droite par Q, on trouve $Q^{-1}P^{-1}APQ = D$, c'est-à-dire que l'on a $(PQ)^{-1}A(PQ) = D$. Ainsi, A est diagonalisable. On aimerait voir que A possède les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$. Nous avons vu en cours que le polynôme caractéristique de A et celui de $P^{-1}AP$ sont le même ; le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est égal à $p(t) = -t(1-t)(2-t)$ et donc les valeurs propres de A sont bien 1 et 2 et 0.

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, considérons le produit scalaire*

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Montrer que pour tout n la famille de vecteurs $\{\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$ est orthogonale (c'est-à-dire que ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux).

Solution 13. Soient $n \neq m$ deux entiers. On doit montrer que $(\cos mx | \cos nx) = 0$. Une formule trigonométrique connue (voir par exemple dans la table CRM), donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos\big((m+n)x\big) + \cos\big((m-n)x\big)\Big)dx.$$

Puisque m, n sont non-nuls et distincts, la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{m+n}\sin\big((m+n)x\big) + \frac{1}{m-n}\sin\big((m-n)x\big)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Puisque n et m sont des entiers, chaque sin est évalué en un multiple de π et donne donc 0. Ainsi, le produit scalaire de $\cos(mx)$ et $\cos(nx)$ donne 0, comme désiré.

Exercice 14 (A faire plus tard si vous souhaitez voir d'autres exercices sur la diagonalisation, pendant la période de révision.)**.** *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Ecrire pour chaque matrice le polynôme caractéristique.*
2. *Trouver pour chaque matrice les valeurs propres et les espaces propres correspondants.*
3. *Dites lesquelles sont diagonalisables et trouver une base et une forme diagonale où elle existe.*

Solution 14.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(t) = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2,$$

avec la seule racine (double) 4. L'espace propre est

$$E_A(4) = \mathrm{Vect}((-1, 1)),$$

qui a dimension $1 < 2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

— Comme B est triangulaire, on lit les valeurs propres sur la diagonale : elles sont 4 et 5. Les espaces propres sont

$$E_B(4) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0)),$$

qui a dimension 1, et

$$E_B(5) = \mathrm{Vect}((0, 0, 1)).$$

Aussi $c_B(t) = (t-4)^2(5-t)$. La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

— Pour simplifier le calcule du polynôme caractéristique de C, on fait d'abord des opérations élémentaires sur la matrice $C - tI_3$:

$$\begin{pmatrix} -1-t & 4 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ -3 & 1 & 3-t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1-t & 4 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & t-3 & 3-t \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1-t & 4 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1-t & 2 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: M.$$

Maintenant, on écrit comment le déterminant de $C - tI_3$ change à chaque opération. Donc

$$c_C(t) = \det(C - tI_3) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 4 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ -3 & 1 & 3-t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-t & 4 & -2 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & t-3 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$= (3-t)\det\begin{pmatrix}-1-t & 4 & -2\\ -3 & 4-t & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = (3-t)\det\begin{pmatrix}-1-t & 2 & -2\\ -3 & 4-t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= (3-t)\det\begin{pmatrix}-1-t & 2\\ -3 & 4-t\end{pmatrix} = (3-t)(t^2-3t+2) = (3-t)(t-1)(t-2).$$

Il y a donc trois valeurs propres distinctes, égales à $1, 2$ et 3. Donc C est diagonalisable. Les espaces propres sont

$$E_C(1) = \mathrm{Vect}((1,1,1)),$$

$$E_C(2) = \mathrm{Vect}((\frac{2}{3},1,1)),$$

$$E_C(3) = \mathrm{Vect}((\frac{1}{4},\frac{3}{4},1)).$$

Donc une forme diagonale est

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

avec une base $((1,1,1),(\frac{2}{3},1,1),(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1))$.

La matrice M obtenue à partir de $C-tI_3$ pour en simplifier le calcule du déterminant n'a pas le même noyau, parce que une opération sur les colonnes est aussi impliquée (dans la dérnière étape). Donc il ne faut pas utiliser cette matrice pour calculer les espaces propres de C.

— Le polynôme caractéristique de D est

$$c_D(t) = -(t-8)(t-2)^2,$$

avec les racines 8 et 2. Les espaces propres sont

$$E_D(8) = \mathrm{Vect}((1,1,1)),$$

qui a dimension 1, et

$$E_D(2) = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1)),$$

qui a dimension 2. La matrice D est donc diagonalisable. Donc une forme diagonale est

$$\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

avec une base $((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1))$.

— Le polynôme caractéristique de E est

$$c_E(t) = (t-5)^2,$$

avec la seule racine (double) 5. L'espace propre est

$$E_E(5) = \mathrm{Vect}((1,0)),$$

qui a dimension $1 < 2$. La matrice E n'est donc pas diagonalisable.