CATALOGUE

MER S. Deparis - Algèbre Linéaire - (n/a)

22 janvier 2018 - durée : 180 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999** Signature :

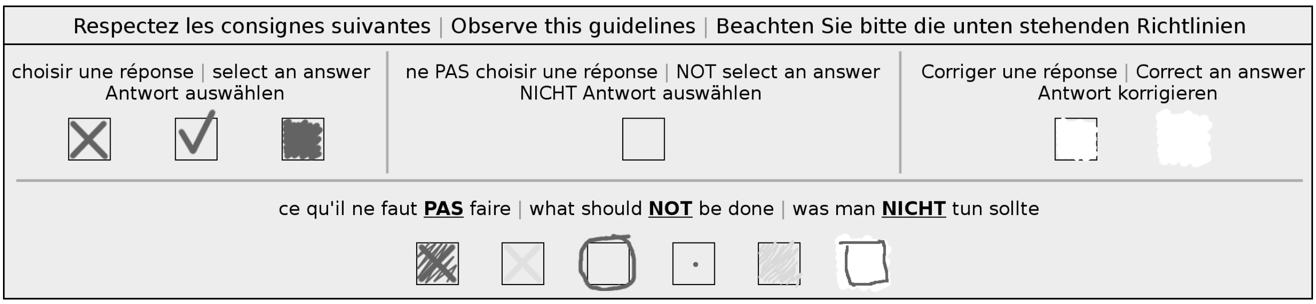
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  +3 points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :



Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`q:MC-calc-det`] : La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & x & 0 \\ 2 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si

■ $x \notin \left\{0\,,\, -\sqrt{2}\,,\, \sqrt{2}\right\}$.

□ $x \notin \left\{0\,,\, -\sqrt{3}\,,\, \sqrt{3}\right\}$.

□ $x \notin \left\{0\,,\, -2\,,\, 2\right\}$.

□ $x \notin \left\{0\,,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Question [`q:MC-calc-rank`] : Si A est une matrice de taille 7×6 telle que ses trois dernières colonnes sont linéairement dépendantes, alors

□ $\operatorname{rang} A \geq 2$.

■ $\operatorname{rang} A \leq 5$.

□ $\operatorname{rang} A = 3$.

□ $\operatorname{rang} A = 4$.

Question [`q:MC-calc-inverse`] : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□ n'est pas inversible.

□ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à $\frac{1}{2}$.

■ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à 1.

□ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à 2.

Question [MC-calc-LU] : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de la matrice A (en utilisant seulement des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous). Alors la matrice L est donnée par

- ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

Question [MC-calc-moindre-carres] : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ■ $\widehat{x}_1 = -4.$
- ☐ $\widehat{x}_2 = 5.$
- ☐ $\widehat{x}_1 = 5.$
- ☐ $\widehat{x}_2 = -4.$

Question [q:MC-calc-matrice-polynome] : Soit $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$ et $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t-1) + c(t-1)^2 \qquad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{C}$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Question [q:MC-calc-matrix] : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 - 6x_3 \end{pmatrix}. \quad \text{Soit } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, telle que $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = M[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$
- ■ $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

Question [`MC-calc-valeurs-propres`] : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de A sont

☐ 1 et 3.

☐ 1 et 2.

☐ 1, 2 et 3.

■ 1 et 4.

Question [`MC-calc-vecteurs-propres`] : Soit A la matrice de l'exercice précédent et E_1 l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$. Alors:

■ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

Question [`q:MC-calc-base-ker`] : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par
$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 3x_3 - 9x_4 \end{pmatrix}.$$
Alors

☐ $\operatorname{Ker} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $\operatorname{Ker} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

■ $\operatorname{Ker} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $\operatorname{Ker} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

Question [`q:MC-calc-base-im`] : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire de l'exercice précédent. Alors

☐ $\operatorname{Im} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

■ $\operatorname{Im} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $\operatorname{Im} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

☐ $\operatorname{Im} T = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$

Question [q:MC-calc-passage] : Soient

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ■ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question [q:MC-calc-proj-ortho] : Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $W = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique, alors la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W est

- ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Question [q:MC-calc-span] : Soit h un paramètre réel. Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\vec{v}_1$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ si et seulement si

- ☐ $h = 0$.
- ■ $h \in \{-2, 0, 2\}$.
- ☐ $h \in \{-2, 2\}$.
- ☐ $h \in \{0, 2\}$.

Question [`MC-calc-systeme-lineaire`] : Soient h un paramètre réel,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 14 & 1 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} h+11 \\ 6 \\ h-1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$

- ☐ admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ pour solution si $h = 7$.
- ☐ admet pour unique solution le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ si $h \neq 7$.
- ■ n'admet aucune solution si $h \neq 7$.
- ☐ admet pour unique solution le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ si $h = 7$.

Question [`q:MC-calc-orthonormal-basis`] : Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique, laquelle des bases suivantes est orthonormée?

- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right\}$.

Question [`q:MC-theory-determinant`] : Soient A et B deux matrices inversibles de taille $n\times n$. Alors le nombre

$$\det(A^{-1})\det(A+B)\det(B^{-1})$$

- ■ est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.
- ☐ n'est pas défini car la matrice $A + B$ n'est pas forcément inversible.
- ☐ est égal à 2.
- ☐ est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$.

Question [q:MC-theory-diagonalisable] : Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n\times n$ telles que chaque espace propre de B est contenu dans un espace propre de A. Alors

- ☐ AB n'est jamais diagonalisable.
- ■ AB est toujours diagonalisable.
- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes espaces propres.

Question [q:MC-theory-moindres-carres] : Soient A une matrice de taille $m\times n$ et $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$. Soit $\vec{c}=\mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\vec{b}$.
Alors, il est toujours vrai que

- ☐ la solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x}=\vec{b}$ est $A^{-1}\vec{c}$.
- ☐ l'équation $A\vec{x}=\vec{b}$ n'admet aucune solution.
- ■ toute solution de $A\vec{x}=\vec{c}$ est une solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x}=\vec{b}$.
- ☐ l'équation $A\vec{x}=\vec{c}$ possède une solution unique.

Question [q:MC-theory-matrice-orthogonale] : Soit B une matrice de taille $n\times m$ telle que $B^TB=I_m$ et soit A la matrice de taille $n\times n$ définie par $A=I_n-2BB^T$.
Parmi les affirmations suivantes:

(a) $A^T=A\,,$ **(b)** $A^2=A\,,$ **(c)** $A^TA=I_n\,,$ **(d)** $A=-I_n\,,$

lesquelles sont toujours vraies?

- ☐ (a), (b), (c) et (d).
- ☐ seulement (a) et (b).
- ☐ seulement (a) et (d).
- ■ seulement (a) et (c).

Question [q:MC-theory-diag] : Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$ et soit P une matrice de taille $n\times n$ telle que chacune des colonnes de P est un vecteur propre de la matrice A.
Alors il est toujours vrai que

- ■ $AP=PD$ où D est une matrice diagonale.
- ☐ $PA=DP$ où D est une matrice diagonale.
- ☐ P est inversible et PAP^{-1} est une matrice diagonale.
- ☐ P est inversible et $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Question [`q:MC-theory-sous-espaces`] : Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_3$ suivants :

$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(0) = 2\,,\ p(2) = 0\}$, $\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p'(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$,

$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(t) = 2a - at^3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$, $\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(t) = ct^2 - c^2t \text{ avec } c \in \mathbb{R}\}$,

combien sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_3$?

- ☐ 1.
- ■ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 4.

Question [`q:MC-theory-valeurs-propres`] : Soit A une matrice de taille 3×3 telle que

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)\,.$$

Parmi les affirmations suivantes:

(a) la matrice A est diagonalisable,

(b) la matrice A est inversible,

(c) la dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 1$ est égale à 2,

lesquelles sont toujours vraies?

- ☐ seulement (a) et (c).
- ☐ toutes les trois.
- ■ seulement (b).
- ☐ aucune des trois.

Question [`q:MC-theory-systeme-lineaire`] : Soit A une matrice de taille $m\times n$. Supposons qu'il existe une matrice B de taille $m\times k$ et des vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^k$ tels que $A\vec{v} = B\vec{w}$. Alors il est toujours vrai que

- ☐ $\vec{w} = B^{-1}A\vec{v}$.
- ☐ le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet toujours au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- ☐ $n = k$.
- ■ $B\vec{w} \in \mathrm{Col}(A)$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Pour chaque question répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.
Il y a deux questions, A et B, subdivisées en plusieurs points.

Question A : *Cette question est notée sur 9 points et se compose des parties (a) et (b)*

Réservé au correcteur

Utiliser un language mathématique et un minimum de mots, les phrases ne seront pas corrigées. En (b) justifiez brièvement les passages en indiquant les propriétés définies en (a).

(a) Donner la définition d'un espace vectoriel (réel) V. *(5 points)*

Réservé au correcteur

(b) Démontrer que $\exists!\, \vec{v} \in V$ tel que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w}\ \forall \vec{w} \in V$. *(4 points)*

Rappel : Le symbole $\exists!$ signifie *il existe un unique.*

Question B : *Cette question est notée sur 9 points et se compose des parties (a), (b) et (c)*

Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^T A$.

Petite aide pour la suite : les vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B.

Réservé au correcteur

(a) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice $B = A^T A$. *(3 points)*

(b) Pour chaque valeur propre de B, donner une base de l'espace propre associé . *(3 points)*

(c) Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de B et écrire B sous la forme QDQ^T où D est diagonale et Q orthogonale. *(3 points)*