APPLICATION DES MATHEMATIQUES : Contrôle N° 4

Durée : 1 heures 45 minutes - Barème sur 20 points

NOM : ________________________________

PRENOM : ________________________________

GROUPE ☐

Exercice I (4 pts)
Résoudre graphiquement, en fonction de λ et en illustrant très soigneusement, le programme linéaire suivant :

$$\textbf{maximiser } Z = \left(\frac{1}{3} + \lambda\right) x_1 + x_2 \quad \text{où} \quad D\ : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 22 \leq 0 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0$$

Exercice II (6 pts)
Soit le programme linéaire : **maximiser** $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ où

$$D\ : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Soient $s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0$ les variables d'écart.

1. Donner la forme standard du PL puis le premier tableau du simplexe correspondant à la solution de base réalisable : $(x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = \ ?,\ s_2 = \ ?,\ s_3 = \ ?)$.
2. Résoudre ensuite ce problème en utilisant la méthode du simplexe (et la feuille ci-jointe) et en commentant les résultats des tableaux successifs du simplexe. Donner l'ensemble des solutions.
3. Sans faire les calculs, décrire une autre méthode qui permet de retrouver le résultat trouvé ci-dessus.

Exercice III (4 pts)

Soit G le graphe qui a pour matrice d'adjacence la matrice :

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe G.

2. Est-ce que G est k-régulier ? Si oui, pour quelle valeur de k ?

3. Expliquer sans calcul pourquoi $\lambda = 2$ est une valeur propre de $A(G)$.

4. Sans calcul supplémentaire, dire si la valeur propre $\lambda = 2$ de $A(G)$ est simple ou de multiplicité > 1.

5. Donner une valeur, exacte ou approchée, de la constante d'expansion $i(G)$ et commenter le résultat (au sujet de la robustesse).
Rappel : Inégalité de Cheeger-Buser : $\dfrac{k - \lambda_2}{2} \leq i(G) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2)}$

Exercice IV (6 pts)

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\mathrm{Sh}(x)\ y' - \mathrm{Ch}(x)\ y + 1 = 0$$

1. Déterminer la solution générale de cette équation sur chacun des intervalles :
$I_1 =]-\infty,\ 0[$ et $I_2 =]0,\ +\infty[$.
Rappel :
Les dérivées des fonctions : $\mathrm{Sh}(x)$, $\mathrm{Ch}(x)$, $\mathrm{Th}(x)$, $\coth(x)$ sont respectivement : $\mathrm{Ch}(x)$, $\mathrm{Sh}(x)$, $\dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2(x)}$, $-\dfrac{1}{\mathrm{Sh}^2(x)}$.

2. Déterminer, en justifiant, les solutions définies sur tout $\mathbb{R}$.

Question Bonus (1,5 pts)

Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$