Corrigé 3

1. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une fonction trigonométrique de l'angle x uniquement.

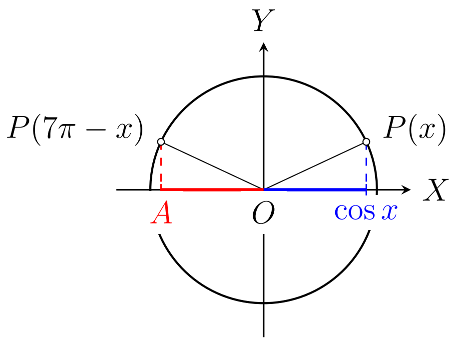
a) $A=\cos(7\pi-x)$ c) $C=\sin(\frac{3\pi}{2}-x)$ e) $E=\cot(-\frac{5\pi}{2}-x)$

b) $B=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ d) $D=\cos(x-\frac{9\pi}{2})$ f) $F=\sin(x+n\,\frac{\pi}{2})\,,\ n\in\mathbb{N}$

---

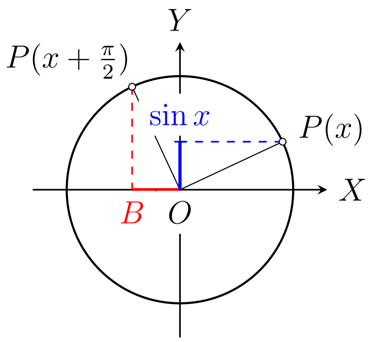
a)

$$\begin{aligned} A &= \cos(7\pi-x)\\ &= \cos\left[6\pi+(\pi-x)\right]\\ &= \cos(\pi-x)\\ &= -\cos x\,. \end{aligned}$$



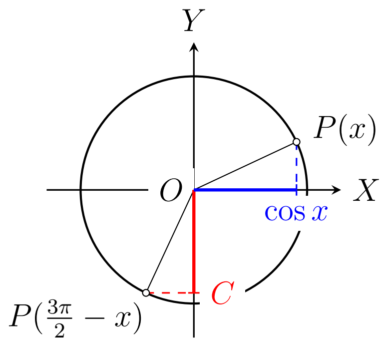
b)

$$\begin{aligned} B &= \cos(x+\tfrac{\pi}{2})\\ &= \sin\left[\tfrac{\pi}{2}-(x+\tfrac{\pi}{2})\right]\\ &= \sin(-x)\\ &= -\sin x\,. \end{aligned}$$



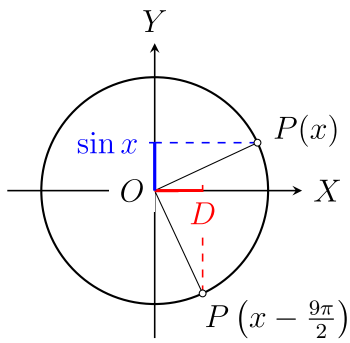
c)

$$\begin{aligned} C &= \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}-x\right)\\ &= \cos\left[\tfrac{\pi}{2}-\left(\tfrac{3\pi}{2}-x\right)\right]\\ &= \cos(-\pi+x)\\ &= \cos(\pi-x)\\ &= -\cos x\,. \end{aligned}$$



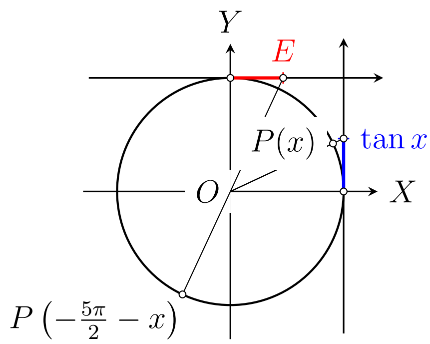
d)

$$\begin{aligned} D &= \cos\left(x-\tfrac{9\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left[\tfrac{\pi}{2}-\left(x-\tfrac{9\pi}{2}\right)\right]\\ &= \sin(5\pi-x)\\ &= \sin(\pi-x)\\ &= \sin x\,. \end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned} E &= \cot\left(-\tfrac{5\pi}{2} - x\right) \\ &= \tan\left[\tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{5\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \tan(3\pi + x) \\ &= \tan x\,. \end{aligned}$$



f) $F = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 0$: $\quad F = \sin x\,.$

- Si $n = 1$: $\quad F = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\,.$

- Si $n = 2$: $\quad F = \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x\,.$

- Si $n = 3$: $\quad F = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x\,.$

- Si $n = 4$: $\quad F = \sin\left(x + 2\pi\right) = \sin x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 0$
  et il en est de même pour $n = 8\,,\ 12\,,\ 16\,,\ \cdots\,,\ 4k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 5$:
  $F = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 1$
  et il en est de même pour $n = 9\,,\ 13\,,\ 17\,,\ \cdots\,,\ 4k+1\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 6$:
  $F = \sin\left(x + 3\pi\right) = \sin\left[2\pi + (x + \pi)\right] = \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 2$
  et il en est de même pour $n = 10\,,\ 14\,,\ 18\,,\ \cdots\,,\ 4k+2\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 7$:
  $F = \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 3$
  et il en est de même pour $n = 11\,,\ 15\,,\ 19\,,\ \cdots\,,\ 4k+3\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

En résumé :

$$F = \sin(x + n\,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k \\ \cos x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+1 \\ -\sin x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+3\,. \end{cases}$$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \le x \le 16\pi$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \le x \le 16\pi$

c) $\tan x = -1$, $-4\pi \le x \le -3\pi$

d) $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \le x \le 0$

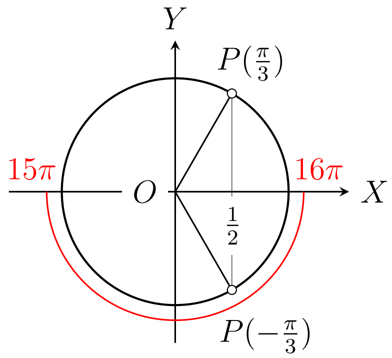
---

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \le x \le 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On en déduit toutes les autres :

$$\cos x = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[\,15\pi\,,\,16\pi\,]$:

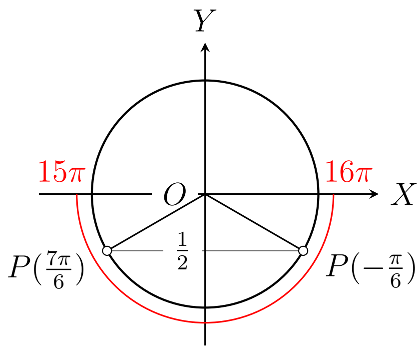
$$x = 16\pi - \tfrac{\pi}{3}\,, \qquad S = \left\{\tfrac{47\pi}{3}\right\}\,.$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \le x \le 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. On en déduit toutes les autres :

$$\sin x = \sin -\tfrac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[\,15\pi\,,\,16\pi\,]$: $x = 15\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = 16\pi - \frac{\pi}{6}$,

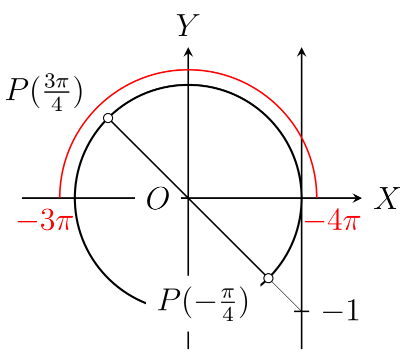
$$S = \left\{\tfrac{91\pi}{6}\,,\,\tfrac{95\pi}{6}\right\}\,.$$

c) $\tan x = -1$, $-4\pi \le x \le -3\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit toutes les autres :

$$\tan x = \tan\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



Résolution sur l'intervalle $[-4\pi\,,\,-3\pi\,]$:

L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est donnée par

$$x = -4\pi + \frac{3\pi}{4} \qquad \text{ou} \qquad x = -3\pi - \frac{\pi}{4}\,, \qquad S = \left\{-\tfrac{13\pi}{4}\right\}\,.$$

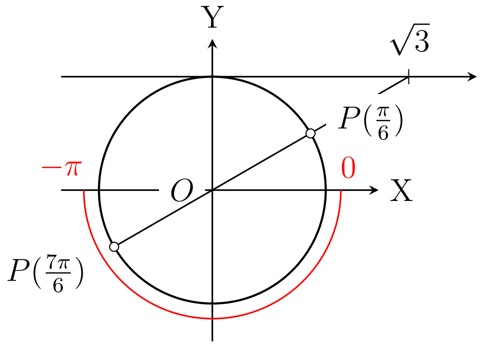
d) $\cot x = \sqrt{3}\,, \quad -\pi \le x \le 0$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit toutes les autres :

$\cot x = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$



L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est donnée par

$$x = -\pi + \frac{\pi}{6}\,, \qquad S = \left\{-\tfrac{5\pi}{6}\right\}\,.$$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1$ b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t\,, \quad -\frac{11\pi}{2} \le t \le -5\pi$

---

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

C'est une équation du deuxième degré en $\cos t$:

$$(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0\,.$$

On la résout à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta = 3^2 - 8 = 1\,, \qquad \cos t = \frac{-3-1}{4} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}\,,$$

ou en devinant une factorisation :

$$2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\,\cos t + 1)\,(\cos t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = -\frac{1}{2}\,.$$

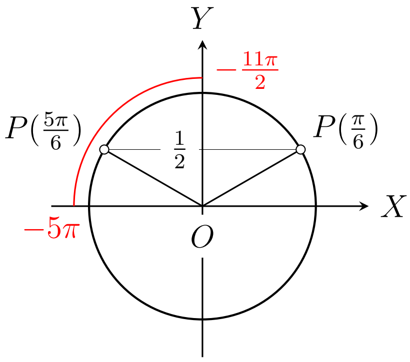
On résout chaque équation élémentaire :

- $\cos t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

L'ensemble solution est la réunion de toutes les solutions :

$$S = \left\{-\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \pi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t\,,\quad -\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$



$4 - 5\sin t = 2\,(1 - \sin^2 t)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin t - 1)\,(\sin t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin t = \frac{1}{2} \quad$ car $\quad \sin t \neq 2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

$\sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad$ ou $\quad t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}.$

Sur l'intervalle $[-\frac{11\pi}{2}\,,\,-5\pi\,]$, $\quad t = -5\pi - \frac{\pi}{6}\,,\quad S = \left\{-\frac{31\pi}{6}\right\}.$

4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.

a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

b) $4\,\sin^4(2x) - 11\,\sin^2(2x) + 6 = 0\,,\qquad x \in [-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\,]\,,$

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

d) $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\,,\qquad x \in \,]\,0\,,\,2\pi\,[\,.$

---

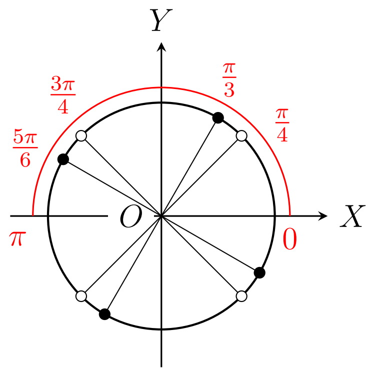
a) Résolution de l'équation $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = \sin(-\tfrac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$

  Il y a quatre solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$,

  - celles définies par $-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=1,2$: $\quad x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$
  - et celles définies par $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=0,1$: $\quad x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$S=\left\{\,\tfrac{\pi}{4}\,,\ \tfrac{\pi}{3}\,,\ \tfrac{3\pi}{4}\,,\ \tfrac{5\pi}{6}\,\right\}.$$

b) Résolution de l'équation $\quad 4\,\sin^4(2x)-11\,\sin^2(2x)+6=0\,.$

Domaine de définition : $\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

On résout cette équation bicarrée à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot 4\cdot 6=25\,,\qquad \sin^2(2x)=\frac{11-5}{8}=\frac{3}{4}\quad\text{ou}\quad \sin^2(2x)=\frac{11+5}{8}=2\,,$$

Seule la solution $\sin^2(2x)=\frac{3}{4}$ est acceptable :

$$\sin^2(2x)=\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{ou}\quad \sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

- $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=\sin(-\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$$

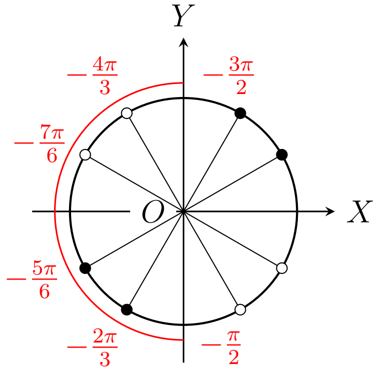
- $\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=\sin(\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Résolution sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\right]$

- Deux solutions correspondent à $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x=-\frac{4\pi}{3}$ et $x=-\frac{7\pi}{6}$.
- Deux solutions correspondent à $\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x=-\frac{5\pi}{6}$ et $x=-\frac{2\pi}{3}$.

$$S=\left\{-\frac{4\pi}{3}\,,\;-\frac{7\pi}{6}\,,\;-\frac{5\pi}{6}\,,\;-\frac{2\pi}{3}\right\}.$$



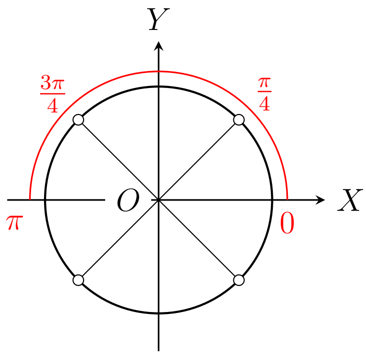
c) Résolution de l'équation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$D_{\text{def}}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\mid 2x+\tfrac{\pi}{3}\in D_{\tan}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{k\pi}{2}\,,\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$$\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right)=\tan(-\tfrac{\pi}{6})\quad\Leftrightarrow\quad 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$
  Il y a deux solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, celles qui correspondent à $k=1$ et $k=2$.

$$S=\left\{\tfrac{\pi}{4}\,,\;\tfrac{3\pi}{4}\right\}.$$

d) Résolution de l'équation $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{3}$ sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$.

$$D_{\text{def}}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\mid \tfrac{x}{2}\in D_{\cot}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{\,2k\pi\,,\;k\in\mathbb{Z}\,\}.$$

$$\cot^2\left(\tfrac{x}{2}\right)=\frac{1}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\cot\left(\tfrac{x}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

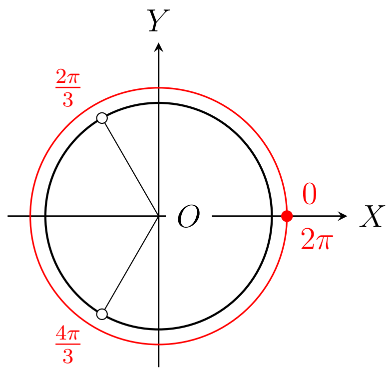
- Résolution sur $\mathbb{R}$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + k\,\pi$

    $\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + k\,\pi$

    $\Leftrightarrow\quad x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$



- Résolution sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$

  Il y a deux solutions sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$,

  - l'une correspond à $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi$ avec $k = 0$
  - et l'autre correspond à $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi$ avec $k = 1$.

$$S = \left\{\, \tfrac{2\pi}{3}\,,\ \tfrac{4\pi}{3}\,\right\}\,.$$

5. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3})$

c) $\cos(2x) = \sin(3x)$

d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})$

---

a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - (x + \frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$S = \left\{\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{x}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{x}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x}{3} = 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7x}{3} = 2k\pi \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6k\pi}{7} \end{array} \right. \qquad S = \left\{ \frac{6k\pi}{5}\,,\ \frac{6k\pi}{7}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\cos(2x) = \sin(3x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,]$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,] + 2k\pi \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = +\frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{array} \right. \qquad S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6}) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\frac{x}{3}) = \tan[\,\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6})\,]$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6}) + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{3} = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}\,, \quad 4\pi \leq x < 5\pi\,,$

b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0\,, \quad -5\pi \leq x < -3\pi\,,$

c) $\sin(\,3x + \frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\,\pi}{4}\,)\,, \quad -2\pi \leq x < 0\,,$

d) $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \quad 0 \leq x < 2\pi\,,$

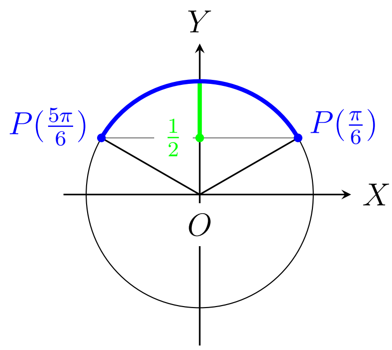
e) $\cot x > \sqrt{3}\,, \quad -2\pi \leq x < \pi\,,$

f) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \quad x \in [-\pi\,,\,0\,]\,.$

a) Résolution de l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[\,4\pi\,,\,5\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\sin x \geq \tfrac{1}{2}\,.$$

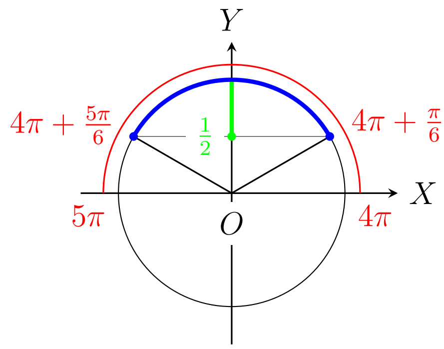


On représente, sur l'axe des sinus, les valeurs plus grandes que $\frac{1}{2}$.

Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $\frac{1}{2}$.

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6}+2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,4\pi\,,\,5\pi\,[$:



$$4\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 4\pi + \frac{5\pi}{6}\,,$$

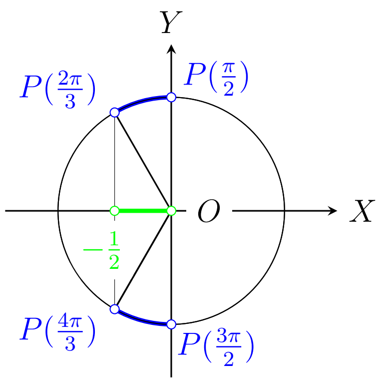
$$S = \left[\,\tfrac{25\pi}{6}\,,\,\tfrac{29\pi}{6}\,\right].$$

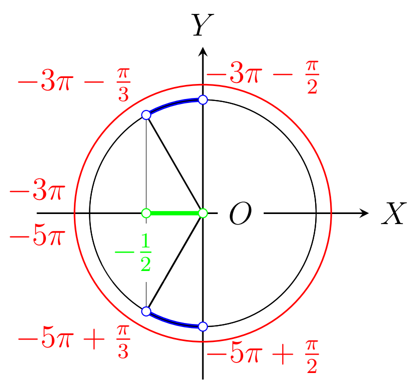
b) Résolution de l'inéquation $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$ sur l'intervalle $[-5\pi\,,\,-3\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $-\frac{1}{2} < \cos x < 0\,.$

On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et 0.
Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

$$-\tfrac{1}{2} < \cos x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$





- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-5\pi\,,\,-3\pi\,[$:

$$-5\pi + \frac{\pi}{3} < x < -5\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad -3\pi - \frac{\pi}{2} < x < -3\pi - \frac{\pi}{3}\,,$$

$$S = \left]-\tfrac{14\pi}{3}\,,\,-\tfrac{9\pi}{2}\right[\,\cup\, \left]-\tfrac{7\pi}{2}\,,\,-\tfrac{10\pi}{3}\right[.$$

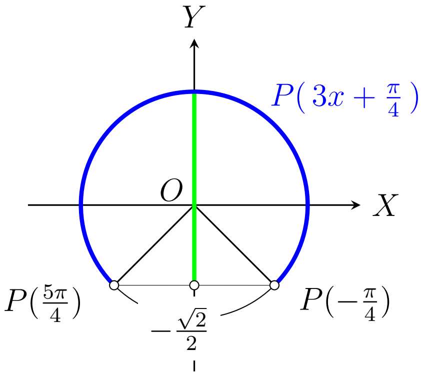
c) Résolution de l'inéquation $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$ sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,0\,[$

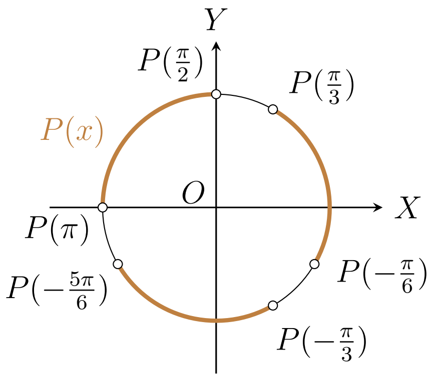
- Représentation des points $P(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)$ tels que $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$.

  Sur l'axe des sinus, on représente les valeurs supérieures à $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  $$\sin(\,3x+\tfrac{\pi}{4}\,) > \sin(-\tfrac{3\pi}{4}\,) \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}+2k\pi < 3x+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$





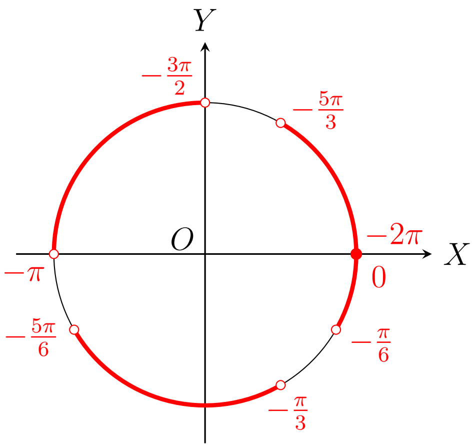
- On en déduit les points $P(x)$ vérifiant $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$:

  $$-\frac{\pi}{4}+2k\pi < 3x+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi < 3x < \pi+2k\pi$$

  $$\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-2\pi\,,\,0\,[$:

  $$S = [-2\pi\,,\,-\tfrac{5\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{3\pi}{2}\,,-\pi\,[\,\cup\,]-\tfrac{5\pi}{6}\,,-\tfrac{\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{\pi}{6}\,,0\,[\,.$$



d) Résolution de l'inéquation $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$

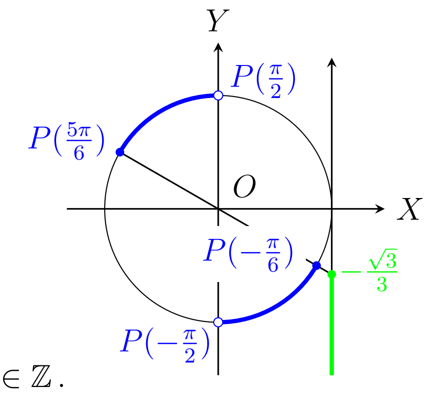
- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\tan x \leq -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

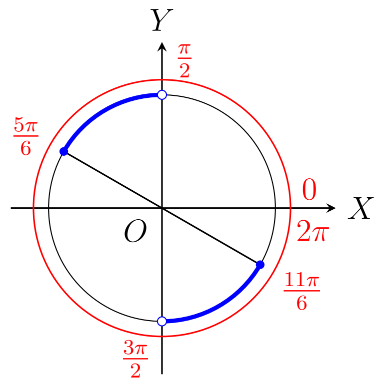
$$\tan x \leq -\tfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$:

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}$$

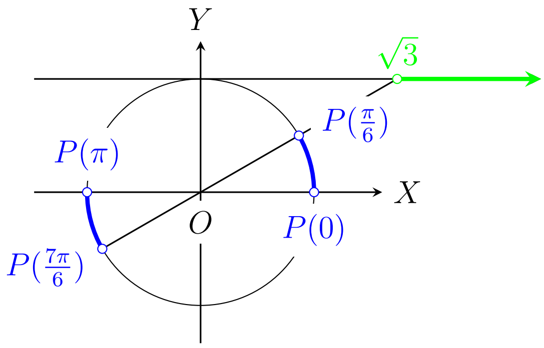
$$S = \left]\,\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{5\pi}{6}\,\right] \,\cup\, \left]\,\tfrac{3\pi}{2}\,,\,\tfrac{11\pi}{6}\,\right].$$

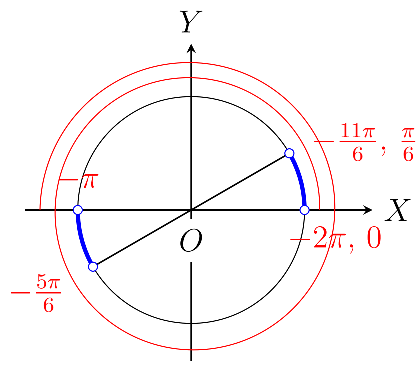


e) Résolution de l'inéquation $\cot x > \sqrt{3}$ sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x > \sqrt{3}$.
On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $\sqrt{3}$.
Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



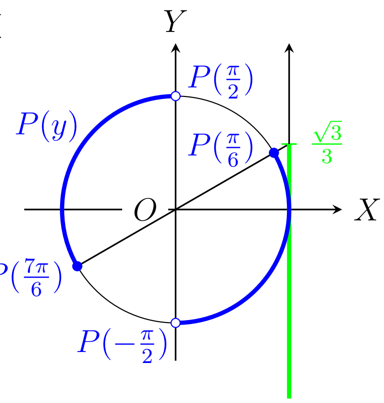


- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$:

$$-2\pi < x < -2\pi+\frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad -\pi < x < -\pi+\frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{6}\,,$$

$$S = \left]-2\pi\,,\,-\tfrac{11\pi}{6}\,\right[\,\cup\, \left]-\pi\,,\,-\tfrac{5\pi}{6}\,\right[\,\cup\, \left]\,0\,,\,\tfrac{\pi}{6}\,\right[.$$

f) Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$



- Représentation des points $P(y)$ tels que $\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

  On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

  Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

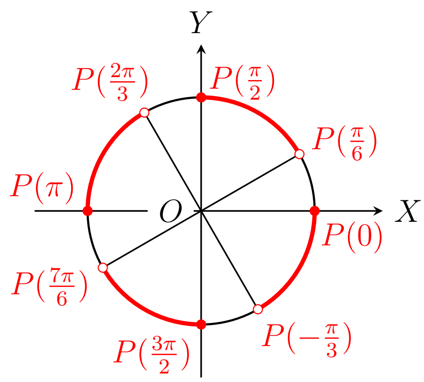
$$\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < y \leq \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Solutions de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

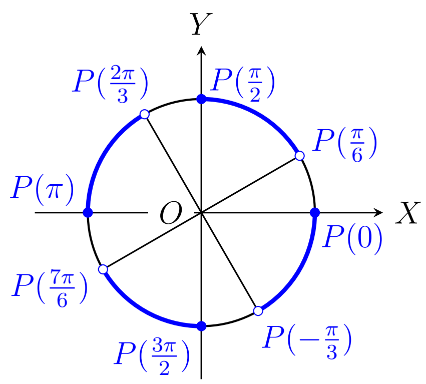
$$\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < 2x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

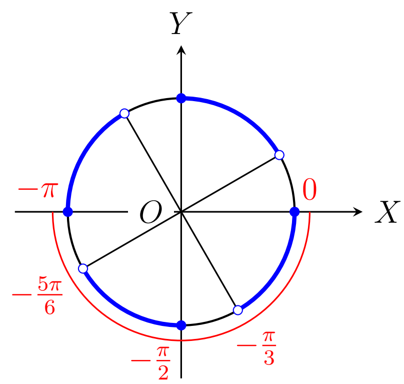
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{3}+k\pi \ < \ 2x \ \leq \ k\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \ < \ x \ \leq \ \frac{k\pi}{2}\,.$$

On en déduit la représentation, sur le cercle trigonométrique, des points $P(x)$ représentant les solutions de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$:



Recherche des solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\,0]$





$$S = \{-\pi\} \cup \left]-\tfrac{5\pi}{6}\,,\,-\tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left]-\tfrac{\pi}{3}\,,\,0\right].$$

7. Soit A l'expression définie par $A = \dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x)}{\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)}$.

a) Déterminer le domaine de définition de A .

b) Simplifier cette expression.

---

a) $D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \tan(\frac{3\pi}{2}+x) \text{ soit défini et } \sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x) \neq 0\right\}$

- $\tan(\frac{3\pi}{2}+x)$ est défini si et seulement si $\frac{3\pi}{2}+x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

  $\Leftrightarrow \quad x \neq \ell\pi\,, \quad \ell \in \mathbb{Z}$.

- Résolvons l'équation $\sin(x+\frac{5\pi}{2}) = \cos(\pi - x)$.

  - $\sin(x+\frac{5\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin[\pi-(x+\frac{\pi}{2})] = \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$
  - $\cos(\pi - x) = -\cos x$

  L'équation devient :

  $\cos x = -\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}+k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$.

D'où $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b)
- Simplification du numérateur

  - $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \cos[-(x-\frac{\pi}{2})] = \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$.
  - $\tan(\frac{3\pi}{2}+x) = \cot[\frac{\pi}{2}-(\frac{3\pi}{2}+x)] = \cot(-\pi-x) = \cot(-x) = -\cot x$.

  Le numérateur s'écrit donc

  $\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x) = -\sin x\cdot\cot x = -\cos x$.

- La simplification du dénominateur a déjà été faite sous a) :

  $\sin(x+\frac{5\pi}{2}) = \cos x$ et $\cos(\pi-x) = -\cos x$.

  Le dénominateur s'écrit donc $\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x) = 2\cos x$.

Sur son domaine de définition :

$$A = \frac{\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x)}{\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)} = \frac{-\cos x}{2\cos x} = -\frac{1}{2}\,.$$
