Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 2**

Exercice 1. *Les opérations suivantes sont-elles valides pour résoudre un système d'èquations ?*

a) $\begin{array}{rl} x-y & =1 \\ -x+y & =-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1+L_2 \\ \rightsquigarrow \quad L_2+L_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0=0 \\ 0=0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} 3x+2y & =4 \\ 3x+2y & =4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1-L_2 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 0=0 \\ 3x+2y=4 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} 3x+2y & =4 \\ 3x+2y & =4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1\cdot 0 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 0=0 \\ 3x+2y=4 \end{array}$

Solution 1. a) Non ! On ne peut pas simultanément utiliser la ligne 1 pour modifier la ligne 2 et la ligne 2 pour modifier la ligne 1.

b) Oui.

c) Non ! Bien que le système obtenu soit le même que sous b), on ne peut JAMAIS multiplier une ligne par zéro. Le système obtenu ici est équivalent au système initial, mais c'est uniquement la chance qui a nous a aidé...

Exercice 2. *A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rl} w+2x-y & =4 \\ -y+x & =3 \\ w+3x-2y & =7 \\ 2u+4v+w+7x & =7 \end{array}\right.$$

Solution 2. En utilisant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w, on peut écrire la matrice augmentée suivante (la dernière colonne correspond aux termes constants), que l'on échelonne :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{L2}\to\text{L2}+(-2)\cdot\text{L1} \\ \text{L3}\to\text{L3}+(-3)\cdot\text{L1} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-7)\cdot\text{L1}\end{array}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{L3}\to\text{L3}+(-1)\cdot\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-7)\cdot\text{L2}\end{array}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L4}\to\frac{\text{L4}}{2}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{L4}\leftrightarrow\text{L3}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L1}\to\text{L1}+1\cdot\text{L2}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+w=1 \\ y+w=-2 \\ u+2v-3w=0 \end{array}\right.$$

qui a comme solutions

$$x=1-w, y=-2-w, u=3w-2v,$$

où v et w sont des nombres réels quelconques (il y a donc une infinité de solutions).

Exercice 3. *Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système*

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+(1-a)y+(1-a)z & = a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z & = a-a^2 \\ x+y+z & = 1-a \end{array}\right.$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas (b) et (c).

Solution 3. On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}-a\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}-a\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}-(1-2a)\text{L2}}{\overset{\text{L1}\to\text{L1}-\text{L2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2-a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. L'ensemble des solutions du système est vide.
- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramétrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1-a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient l'ensemble des solutions :

$$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 4. *Choix Multiple.*

a. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+y & = 1 \\ (a^2+1)x+2ay & = -2 \end{array}\right.$$

- ☐ *possède une solution unique lorsque $a \neq 1$*
- ☐ *possède une solution lorsque $a \neq \pm 1$*
- ☐ *possède une infinité de solutions lorsque $a = 1$*
- ☐ *possède une solution unique lorsque $a = 1$*

b. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+2y+2z & = 1 \\ 2y+2z & = 1-2a \\ 2x+4ay+2z & = 1 \\ 4x+4ay+2z & = 1+2a \end{array}\right.$$

- ☐ *possède une solution unique lorsque $a = 1/2$*
- ☐ *ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$*
- ☐ *possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$*

☐ *ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$*

Solution 4. a. On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ a^2+1 & 2a & -2 \end{array}\right) \underset{\text{L2}\to\text{L2}-2a\cdot\text{L1}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ -a^2+1 & 0 & -2-2a \end{array}\right)$$

On distingue les cas :
- Si $a = -1$, alors la ligne du bas ne contient que des zéros. Donc il reste l'équation $-x + y = 1$, ce qui donne les solutions $x = y - 1$ (infinité de solutions paramétrées par $y \in \mathbb{R}$).
- Si $a = 1$, alors la dernière ligne donne $0 = 2$, ce qui n'est pas possible. Donc il n'y a pas de solution.
- Si $a \neq \pm 1$, alors la dernière équation donne $x = -2\frac{1+a}{1-a^2} = -2\frac{1}{1-a}$. On en déduit de la première équation que $y = 1 + 2\frac{a}{1-a}$. Dans ce cas, il y a donc une solution (unique).

b. On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1+2a \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+(-1)\cdot\text{L1} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-2)\cdot\text{L1}}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 4a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a-4 & -2 & 2a-1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+(-2a)\cdot\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-2a)\cdot\text{L2}}}{\widetilde{\quad}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a+4a^2 \\ 0 & -4 & -2-4a & 4a^2-1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}+2\cdot\text{L2}}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \end{array}\right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si $(1-2a) = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, alors on a les équations : $2x + 2y + 2z = 1$ ainsi que $2y + 2z = 0$, ce qui donne les solutions $x = \frac{1}{2}$, $y = -z$ (infinité de solutions paramétrées par $z \in \mathbb{R}$).
- Si $(1-2a) \neq 0$, alors la dernière équation donne $z = \frac{1-2a}{2}$. On trouve ensuite $y = 0$ et, finalement, $x = a$. Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Trois remarques :

(a) Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement. Il suffit de se rendre compte que la matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes constants pour conclure que :

(b) Le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).

(c) Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus dur.

Exercice 5.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer AC, BC et CB.

Solution 5.

$$AC = \begin{bmatrix} -21 & 35 \\ 21 & 4 \\ 10 & -21 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} -8 & 35 \\ 23 & -20 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad CB = \begin{bmatrix} -12 & 25 & 11 \\ 31 & -15 & -10 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. *On se donne les matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Solution 6.

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 28 \\ -21 & -4 \\ -9 & -4 \end{bmatrix},$$

CA n'est pas définie car on ne peut pas multiplier une matrice 2×1 par une matrice 3×2,

$$CD = \begin{bmatrix} 56 & 14 \\ -24 & -6 \end{bmatrix}, \qquad DC = [50],$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 51 & -7 \\ -7 & 29 \end{bmatrix}, \qquad AA^T = \begin{bmatrix} 49 & -7 & -7 \\ -7 & 26 & 11 \\ -7 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7. *Considérons le système suivant d'équations linéaires aux inconnues x, y, z, t, (où a est un paramètre réel) :*

$$ax - 2y + t = 5z - 1$$
$$2t + 3z = 4y - x$$
$$-1 = 2x + y$$

Trouver des matrices A et b telle que l'ensemble des solutions du système correspond à l'ensemble des solutions de l'équation matricelle

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b.$$

Solution 7. On écrit le système sous la forme : $\begin{array}{ccccccccc} ax & - & 2y & - & 5z & + & t & = & -1 \\ x & - & 4y & + & 3z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & -1 & & \end{array}$

Ensuite $A = \begin{pmatrix} a & -2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. *Ecrire les matrices élémentaires 3×3 suivantes :*

— *la matrice A qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes ;*
— *la matrice B qui multiplie la deuxième ligne par 8 ;*
— *la matrice C qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.*

1. *Calculer AB. La matrice AB correspond à quel type d'opération ?*

2. *Ecrire les inverses des matrices A, B et C. La matrice B^{-1} correspond à quel type d'opération ?*
3. *Calculer le produit $(AB)(B^{-1}A^{-1})$.*
4. *Est-ce que la matrice AB est inversible ?*
5. *Calculer A^T, B^T, $(AB)^T$, A^TB^T et B^TA^T.*
6. *Calculer $(A+B)^T$ et A^T+B^T.*
7. *Calculer $3A^T$ et $(3A)^T$.*

Solution 8. Les matrices sont

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Multiplier une matrice par AB à gauche correspond à multiplier la deuxième ligne par 8 puis permuter la deuxième et troisième ligne.

2. Les matrices inverses sont

   $$A^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Multiplier une matrice par B^{-1} à gauche correspond à multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{8}$.

3. $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   On peut aussi remarquer que, comme la multiplication de matrices est associative,

   $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_3)A^{-1} = AA^{-1} = I_3.$$

4. Oui et l'inverse est la matrice $B^{-1}A^{-1}$. En effet, on peut vérifier que

   $$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_3.$$

5. $$A^{\mathrm{T}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^{\mathrm{T}} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   $$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = AB \text{ et } B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $$(A+B)^{\mathrm{T}} = A + B = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}.$$

7. $$3A^{\mathrm{T}} = 3A = (3A)^{\mathrm{T}}.$$