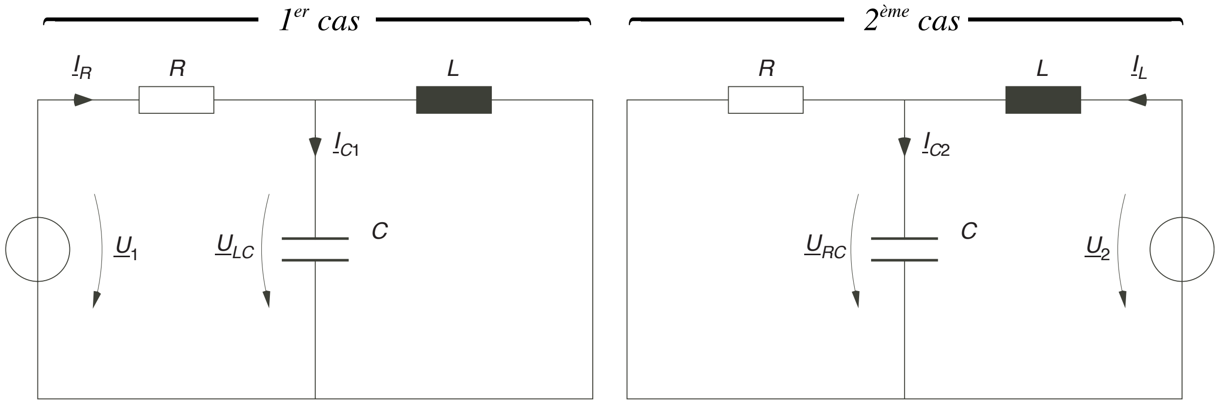
Superposition en régime alternatif – Corrigé Exercice 2

Pour résoudre le problème, on applique le principe de superposition. On considère donc séparément les deux circuits suivants:



Remarque : Pour chacun des schémas ci-dessus, la source étant unique et donc la fréquence également, la notation complexe peut être utilisée, contrairement à la donnée de l'exercice où deux fréquences sont présentes.

Dans chacun des cas et individuellement, on peut calculer le courant et la tension aux bornes de la capacité avec les phaseurs complexes:

1er cas : L'impédance équivalente $\underline{Z}_1$ s'écrit :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{\frac{1}{j\omega_1 L} + j\omega_1 C} = R + \frac{j\omega_1 L}{1-\omega_1^2 LC} = R_1 + jX_1 \qquad (R_1 = R)$$

D'après Kirchhoff on a :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_R + \underline{U}_{LC}$$

De plus :

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

Il vient :

$$\underline{U}_{LC} = \underline{U}_1 - R\cdot\underline{I}_R = \underline{U}_1 - R\cdot\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

D'où :

$$\underline{U}_{LC} = \underline{U}_1 \left(1 - \frac{R}{\underline{Z}_1} \right) = \underline{U}_1 \cdot \underline{A}_1$$

Avec :

$$\underline{A}_1 = 1 - R \frac{R_1 - jX_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{X_1^2}{R_1^2 + X_1^2} + j \frac{R_1 X_1}{R_1^2 + X_1^2} = \hat{A}_1 \cdot e^{j\alpha_1}$$

Donc : $\underline{U}_{LC} = \underline{U}_1 \cdot \underline{A}_1$ et $\underline{I}_{C1} = \underline{U}_{LC} \cdot j\omega_1 C$

2ème cas : L'impédance équivalente $\underline{Z}_2$ s'écrit :

$$\underline{Z}_2 = j\omega_2 L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega_2 C} = R_2 + jX_2 \qquad (R_2 \neq R)$$

D'après Kirchhoff on a :

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_L + \underline{U}_{RC}$$

De plus :

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$$

Il vient :

$$\underline{U}_{RC} = \underline{U}_2 - j\omega_2 L \cdot \underline{I}_L$$

D'où :

$$\underline{U}_{RC} = \underline{U}_2 - j\omega_2 L \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{U}_2 \left(1 - j \frac{\omega_2 L}{\underline{Z}_2} \right) = \underline{U}_2 \cdot \underline{A}_2$$

Comme précédemment, on obtient :

$$\underline{A}_2 = 1 - \frac{\omega_2 L X_2}{R_2^2 + X_2^2} - j \cdot \frac{\omega_2 L R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \hat{A}_2 \cdot e^{j\alpha_2}$$

Donc : $\underline{U}_{RC} = \underline{U}_2 \cdot \underline{A}_2$ et $\underline{I}_{C2} = \underline{U}_{RC} \cdot j\omega_2 C$

Grandeurs résultantes : Le principe de superposition est applicable. Cependant, la somme des deux systèmes individuels doit être effectuée dans le domaine temporel, car on ne peut pas combiner deux phaseurs qui n'ont pas la même pulsation ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Il vient :

$$u_1 = \hat{U}_1 \sin \omega_1 t$$
$$u_{LC} = \hat{A}_1 \cdot \hat{U}_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$i_{C1} = \omega_1 \cdot C \cdot \hat{A}_1 \cdot \hat{U}_1 \sin\left(\omega_1 t + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_2 = \hat{U}_2 \sin \omega_2 t$$
$$u_{RC} = \hat{A}_2 \cdot \hat{U}_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$i_{C2} = \omega_2 \cdot C \cdot \hat{A}_2 \cdot \hat{U}_2 \sin\left(\omega_2 t + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tension et courant aux bornes de la capacité s'écrivent :

$$u_C = u_{LC} + u_{RC} = \hat{A}_1 \cdot \hat{U}_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \hat{A}_2 \cdot \hat{U}_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$i_C = i_{C1} + i_{C2} = \omega_1 \cdot C \cdot \hat{A}_1 \cdot \hat{U}_1 \sin\left(\omega_1 t + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_2 \cdot C \cdot \hat{A}_2 \cdot \hat{U}_2 \sin\left(\omega_2 t + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Application numérique</u> :

R_1 = 30 Ω $\quad$ X_1 = 9.551 Ω (impédance inductive)

R_2 = 0.91 Ω $\quad$ X_2 = 4.909 Ω (impédance inductive)

$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = 141.4$ V

$\hat{A}_1$ = 0.303 $\quad$ $\hat{A}_2$ = 1.046

α_1 = 1.263 rad (= 72.36 °) $\quad$ α_2 = - 2.783 rad (= -159.5 °)

u_{LC} = 42.90 · sin($\omega_1 t$ + 1.263)

i_{C1} = 4.043 · sin($\omega_1 t$ + 2.833) $\quad$ α_1 + 90 ° = 162.4 °

u_{RC} = 147.96 · sin($\omega_2 t$ – 2.783)

i_{C2} = 27.89 · sin($\omega_2 t$ – 1.212) $\quad$ α_2 + 90 ° = -69.5 °

α_1 représente le déphasage entre la tension u_{LC} et u_1

$\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ représente le déphasage entre le courant i_{C1} et u_1

α_2 représente le déphasage entre la tension u_{RC} et u_2

$\alpha_2 + \frac{\pi}{2}$ représente le déphasage entre le courant i_{C2} et u_2

Les graphiques suivants montrent l'évolution temporelle des signaux i_C, i_{C1}, i_{C2}, u_C, u_1 et u_2.