Corrigé 12

1. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : \quad f_1(x) = -2x^2 + 6 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad f_2(x) = -(x-1)^2 .$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente commune aux courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative.

Soit m_1 la pente de la tangente à Γ_1 en $T_1\,(x_1\,,\,y_1)$:

$$m_1 = f_1'(x_1) = -4\,x_1 .$$

Soit m_2 la pente de la tangente à Γ_2 en $T_2\,(x_2\,,\,y_2)$:

$$m_2 = f_2'(x_2) = -2\,(x_2 - 1) .$$

La tangente à Γ_1 en T_1 coïncide avec la tangente à Γ_2 en T_2 donc les pentes m_1 et m_2 sont égales.

$$m_1 = m_2 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,x_1 = -2\,(x_2 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2\,x_1 + 1 .$$

La tangente t commune aux deux paraboles Γ_1 et Γ_2 passe par T_1 et T_2 et a pour pente $m = m_1 = m_2$:

$$y_1 - y_2 = m\,(\,x_1 - x_2\,) \quad \text{avec} \quad y_1 = f_1(x_1)\,, \quad y_2 = f_2(x_2) \quad \text{et} \quad x_2 = 2\,x_1 + 1 .$$

On exprime cette relation en fonction de x_1 (ou de x_2) uniquement :

$$f_1(x_1) - f_2(2\,x_1 + 1) = -4\,x_1\,\left[\,x_1 - (2\,x_1 + 1)\,\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-2\,x_1^2 + 6\right) - \left[-(2\,x_1)^2\right] = -4\,x_1\,[-x_1 - 1] \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_1^2 + 4\,x_1 - 6 = 0$$

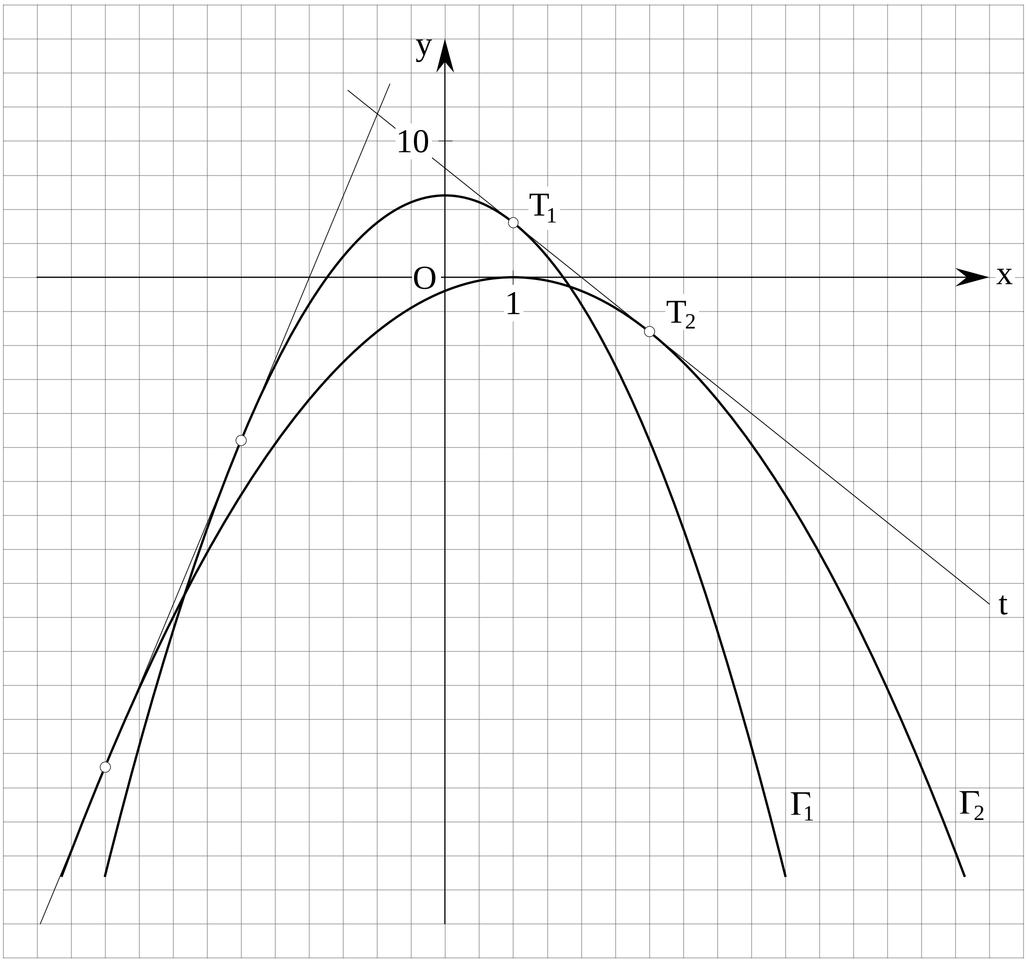
$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + 2\,x_1 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + 3)\,(x_1 - 1) = 0 .$$

La pente de la tangente commune est négative : $-4\,x_1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > 0$.
On retient donc la solution $x_1 = 1$.

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 3\,, \quad T_1\,(1\,,\,4)\,, \quad T_2\,(3\,,\,-4) \quad \text{et} \quad m = -4 .$$

L'équation de la tangente t commune aux deux arcs de courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative, s'écrit donc :

$$t : \quad y - 4 = -4\,(x - 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x + y - 8 = 0 .$$



2. Calculer la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ de la fonction donnée sous forme paramétrique :

$$(x(t)\,;\,y(t)) = (t^3 + t\,;\,t^4 - t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

En quels points P de la courbe, la pente de la tangente vaut-elle -1 ?

La dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ s'exprime en fonction de la dérivée par rapport à t des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\,.$$

$$\dot{y}(t) = 4\,t^3 - 1\,, \qquad \dot{x}(t) = 3\,t^2 + 1\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4\,t^3 - 1}{3\,t^2 + 1}\,.$$

La pente de la tangente en $P\,(x(t_0)\,,\,y(t_0))$ vaut -1 si et seulement si

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4\,t_0^3 - 1}{3\,t_0^2 + 1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,t_0^3 + 3\,t_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t_0 = 0 \\ \text{ou} \\ t_0 = -\frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Seuls deux points de la courbe admettent une tangente de pente -1 :
$P_1\,(0\,,\,0)$ et $P_2\,(-\frac{75}{64}\,,\,\frac{273}{256})$.

3. Soit Γ la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$.

Calculer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ passant par le point $P\,(4\,;\,-8) \notin \Gamma$.

- Equation de la tangente à Γ en $T\,(x(t_0)\,,\,y(t_0))$.

$$y - y(t_0) \;=\; m\,(x - x(t_0))\,, \qquad \text{avec} \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_T .$$

- Calcul de la pente m.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3\,t^2 - 2\,t}{2\,t}\,, = \frac{3\,t-2}{2}\,, \quad t \neq 0\,, \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_T = \frac{3\,t_0 - 2}{2}\,.$$

- Equation de la tangente à Γ en T.

$$y + t_0^3 - t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0 - 2}{2}\,(x + t_0^2 - 1)\,.$$

- La tangente à Γ en T passe par le point P.

$$y_P + t_0^3 - t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,(x_P + t_0^2 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad -8 + t_0^3 - t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,(4 + t_0^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad t_0^3 + 9\,t_0 + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t_0+1)\,(t_0^2 - t_0 + 10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = -1\,.$$

- Equation de la tangente à Γ issue de P.

$$t_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad T\,(0\,,\,2) \quad \text{et} \quad m = -\frac{5}{2}\,.$$

  D'où l'équation de la tangente cherchée :

$$y - 2 = -\frac{5}{2}\,x \quad \Leftrightarrow \quad 5\,x + 2\,y - 4 = 0\,.$$

4. On considère Γ la courbe du plan définie par $y^3+x^2+a^2xy=1$ où a est un paramètre réel strictement négatif.

Soit $P\,(x_P\,;\,a)\in\Gamma\,,\ \ x_P<0\,$. Déterminer a pour que la normale à la courbe Γ en P passe par le point $Q\,(-\frac{5}{2}\,;\,0)\,$.

- Le point P de Γ est défini par $y_P=a$ et $x_P<0\,$.

$$a^3+x_P^2+a^3\,x_P=1 \quad\Leftrightarrow\quad a^3\,(x_P+1)+x_P^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_P+1)\,(a^3+x_P-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x_P=-1\\ \text{ou}\\ x_P=1-a^3\end{array}\right.$$

Or $1-a^3\ >\ 0$ car $a<0\,$, donc $x_P=-1$, $P\,(-1\,,\,a)\,$.

- Soit m la pente de la tangente à Γ en P : $\displaystyle m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_P\,$.

  - Dérivation implicite de la relation définissant $\Gamma\,$.

$$3\,y^2\,y'+2\,x+a^2\,y+a^2\ x\,y'=0\,.$$

  - Evaluation en $P\,$.

$$3\,y_P^2\ m+2\,x_P+a^2\,y_P+a^2\ x_P\ m=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=\frac{2-a^3}{2\,a^2}\,,\quad (a<0)\,.$$

- Equation de la normale n à Γ en $P\,$.

$$n:\ \ y-y_P\ =\ m'\ (x-x_P)\,,\qquad \text{avec}\qquad m'=-\frac{1}{m}\,.$$

$$n:\ \ y-a\ =\ \frac{2\,a^2}{a^3-2}\,(x+1)\,,\quad (a<0)\,.$$

- La normale n passe par le point $Q\,$.

$$y_Q-a\ =\ \frac{2\,a^2}{a^3-2}\,(x_Q+1)\quad\Leftrightarrow\quad -a\ =\ \frac{2\,a^2}{a^3-2}\left(-\frac{5}{2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad a^4-3\,a^2-2\,a=0\quad\Leftrightarrow\quad a\,(a+1)^2\,(a-2)=0\quad\Leftrightarrow\quad a=-1\,,\quad (a<0)\,.$$

5. On considère un point matériel M décrivant la trajectoire Γ définie par l'équation : $x\,y^3 + x^2\,y^2 + x^3\,y = 99 - 20x$.

Sachant que l'abscisse de M se déplace en fonction du temps t selon la loi $x(t) = 1 + \sqrt{t} + t$, $t \geq 0$, déterminer :

a) le(s) point(s) P de Γ pour le(s)quel(s) la vitesse de l'abscisse vaut $\frac{3}{2}$,

b) l'équation cartésienne de la tangente à la trajectoire en ce(s) point(s).

---

a) La vitesse de l'abscisse de $P \in \Gamma$ vaut $\frac{3}{2}$ si et seulement si $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1\,, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1 = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1\,.$$

D'où $x_P = 3$, on en déduit son ordonnée y_P.

$3\,y_P^3 + 9\,y_P^2 + 27\,y_P = 39 \quad \Leftrightarrow \quad (y_P - 1)\,\underbrace{(y_P^2 + 4\,y_P + 13)}_{\Delta<0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_P = 1\,.$

Il y a un seul point P de Γ dont la vitesse de l'abscisse vaut $\frac{3}{2}$: $P\,(3\,,\,1)$.

b) Equation de la tangente t à Γ en P.

$$t: \;\; y - y_P \;=\; m\,(x - x_P)\,, \qquad \text{avec} \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P .$$

- Dérivation implicite de la relation définissant Γ.

$$y^3 + 3\,x\,y^2\,y' + 2\,x\,y^2 + 2\,x^2\,y\,y' + 3\,x^2\,y + x^3\,y' = -20\,.$$

- Evaluation en P.

$$y_P^3 + 3\,x_P\,y_P^2\;m + 2\,x_P\,y_P^2 + 2\,x_P^2\,y_P\;m + 3\,x_P^2\,y_P + x_P^3\;m = -20\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 9\,m + 6 + 18\,m + 27 + 27\,m = -20 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1\,.$$

- Equation cartésienne de la tangente t.

$$y - 1 = -(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 4 = 0\,.$$

6. Soit Γ la courbe du plan définie par les équations suivantes, où x est défini en fonction du paramètre t à l'aide d'une relation implicite.

$$\Gamma\;: \quad \left\{ \begin{array}{l} x\,t - x^2\,t^2 + x^3\,t^2 = 2 \\ y(t) = 3\,\sqrt{2\,t} + t - 2\,t^2 \end{array} \right. \qquad t \geq 0\,.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la normale à la courbe Γ au point P de Γ défini par $x_P = 2$.

- Détermination de P.
  - Recherche de la valeur de t correspondante.

    $x_P = 2 \;\Leftrightarrow\; 2\,t - 4\,t^2 + 8\,t^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 2\,t^2 + t - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2\,t - 1)\,(t + 1) = 0\,.$

    D'où $t = \dfrac{1}{2}$ car $t \geq 0\,.$
  - Détermination de y_P : $t = \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y_P = 3\,.$

  D'où $P\,(2\,,\,3)\,.$

- Equation de la normale à Γ en P.

  Soit m la pente de la tangente à Γ en P : $m = \left.\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_P\,.$

  L'équation de la normale à Γ en P s'écrit

$$y - y_P = m'\ (x - x_P)\,, \qquad \text{avec} \qquad m' = -\frac{1}{m}\,.$$

- Détermination de $\dot{x}(t)$ en P.
  - Dérivation implicite de la relation définissant $x(t)$.

$$\dot{x}\ t + x - 2\ x\ \dot{x}\ t^2 - 2\ x^2\,t + 3\ x^2\,\dot{x}\ t^2 + 2\ x^3\,t = 0\,.$$

  - Evaluation en P.

$$\frac{1}{2}\ \dot{x} + 2 - \dot{x} - 4 + 3\,\dot{x} + 8 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dot{x} = -\frac{12}{5}\,.$$

- Détermination de $\dot{y}(t)$ en P.
  - Dérivation de $y(t)$: $\dot{y}(t) = \dfrac{3}{\sqrt{2\,t}} + 1 - 4\,t\,.$
  - Evaluation en P : $\dot{y} = 2\,.$

- Equation de la normale à Γ en P.

$$m = \left.\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_P = 2\cdot\left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{5}{6} \quad\Leftrightarrow\quad m' = \frac{6}{5}\,.$$

  Equation de la normale : $y - y_P = m'\ (x - x_P)$

$$y - 3 = \frac{6}{5}\ (x - 2) \quad\Leftrightarrow\quad 6\,x - 5\,y + 3 = 0\,.$$

7. Soient $f(x) = x^2 - x$, Γ la courbe définie par $y = f(x)$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Déterminer $x_0 \in \,]\,0\,;b\,[$ tel que la tangente à Γ en x_0 soit parallèle à la sécante définie par les deux points de Γ d'abscisses $x = 0$ et $x = b$.

b) Faire une représentation graphique de cette situation qui illustre le théorème des accroissements finis.

La pente de la tangente à Γ en x_0 est

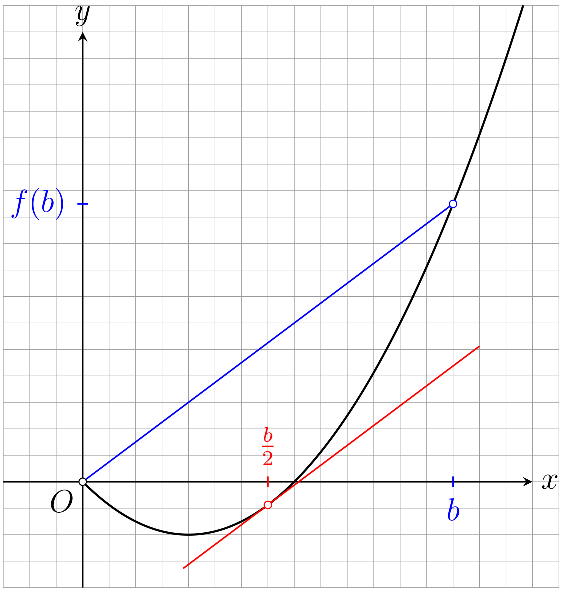
$$f'(x_0) = 2\,x_0 - 1\,.$$

La pente de la sécante définie par les deux points $(0\,;\,f(0))$ et $(b\,;\,f(b))$ est

$$m = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{f(b)}{b} = b - 1\,.$$

Si la sécante et la tangente sont parallèles alors

$$f'(x_0) = \frac{f(b)}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{b}{2}\,.$$



8. On considère la fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in \,]\,0\,,\,2\,[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)\,f'(c)$.

b) Déterminer toutes les valeurs de c.

---

a) Montrons que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\,]$.

Il faut donc vérifier que f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$ et dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, car $y = \dfrac{3-x^2}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $y = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

  Que se passe-t-il en $x_0 = 1$?

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1\,.$$

  On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. Or $f(1) = \dfrac{3-x^2}{2}\Big|_{x=1} = 1$, donc f est continue en $x = 1$.

  f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, car $y = \dfrac{3-x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

  Que se passe-t-il en $x_0 = 1$?

  ◦ $$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{3-(1+h)^2}{2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2\,h - h^2}{2\,h} = -1\,.$$

  ◦ $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h\,(1+h)} = -1\,.$$

  Les nombres dérivés $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$ coïncident, donc f est dérivable en $x = 1$.

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$.

- Conclusion :

  f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$ et dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :

  $$\exists\, c \in \,]\,0\,,\,2\,[\ \text{ tel que } \ \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)\,, \quad f(2)-f(0) = (2-0)\,f'(c)\,.$$

b) On cherche à résoudre sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\,[$, l'équation suivante :

$$f(2)-f(0) = (2-0)\,f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2\,f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = -\frac{1}{2}\,.$$

Mais l'expression de f étant différente à gauche et à droite de $x = 1$, on distingue les deux cas suivants :

- si $c \in \,]\,0\,,\,1\,[$, $f'(c) = -\dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ -c = -\dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ c = \dfrac{1}{2}$,
- si $c \in \,]\,1\,,\,2\,[$, $f'(c) = -\dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ -\dfrac{1}{c^2} = -\dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ c = \pm\sqrt{2} \ \Leftrightarrow \ c = +\sqrt{2}$.

Illustration :