Examen Analyse 4 juin 2017 (**Attention** : copie non-officielle)

Exercice 1 : (30 minutes)

I.

a) posons : $g_1(x) = e^{-|x-1|}$, $g_2 = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

A l'aide de la table, déterminer sans longs calculs la transformée de Fourier de g_1 et de g_2

b) posons : $g_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y-1|}\, e^{-(x-y)^2}\, dy$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer $\mathcal{F}g_3(\alpha)$

II.

Pour $\alpha \leq 0$, déterminer à l'aide d'un calcul de résidus la valeur de la transformée de Fourier $\mathcal{F}f(\alpha)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : (25 minutes)

a) A l'aide des propriétés de la transformée de Laplace et de la table, déterminer $\mathscr{L}$f(z), où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont définies par :

$f(t) = t^2 e^{-t}$ et $g(t) = t^5 e^{-t}$

b) En utilisant la méthode du cours basée sur les transformées de Laplace, déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = t^2 e^{-t} \quad , t > 0$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 1,\ y'(0) = 1\ et\ y''(0) = -2$

(On ne demande pas de contrôler que la fonction y trouvée est effectivement solution du problème !)

Exercice 3 : (25 minutes)

a) Trouver la série de Fourier en sinus de la fonction $f(x) = \pi x - x^2$, $x \in [0, \pi]$

b) On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in]0,\pi[, \qquad t > 0$$

Avec les conditions aux limites $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$

Et la condition initiale $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,\pi]$, où $f(t) = \pi x - x^2$ est la fonction définie dans la partie a).

b1) En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver des fonctions qui vérifient l'équation aux dérivées partielles et les conditions au limites.

b2) En superposant les solutions trouvées en b1), donner la solution de l'équation aux dérivées partielles qui vérifie à la fois les conditions aux limites et la condition initiale.

<u>Exercice 4 :</u> (25 minutes pour les parties a), b) et c))

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Soient T_f et T_g les fonctionnelles associées respectivement à f et à g. À l'aide de la définition de la dérivée $(T_f)'$ de T_f au sens des distributions, montrer que : $(T_f)' = T_g + \delta_1 + \delta$

b) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et soit T_H la fonctionnelle associée à H.

b1) A l'aide des propriétés des distributions tempérées, trouver la transformée de Fourier $\mathcal{F}T_H$ de T_H

b2) A l'aide des propriétés de la transformée de Fourier, trouver $\mathcal{F}(e^{-ix}T_H)$ et $\mathcal{F}(e^{ix}T_H)$

c) On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + y(x) = \delta(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Où δ est la fonctionnelle de Dirac. Trouver une solution de cette équation.