(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	8	
2	4	
3	4	
4	4	
Total	20	

Note (barème sur 20 points) :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Les questions

Question 1

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

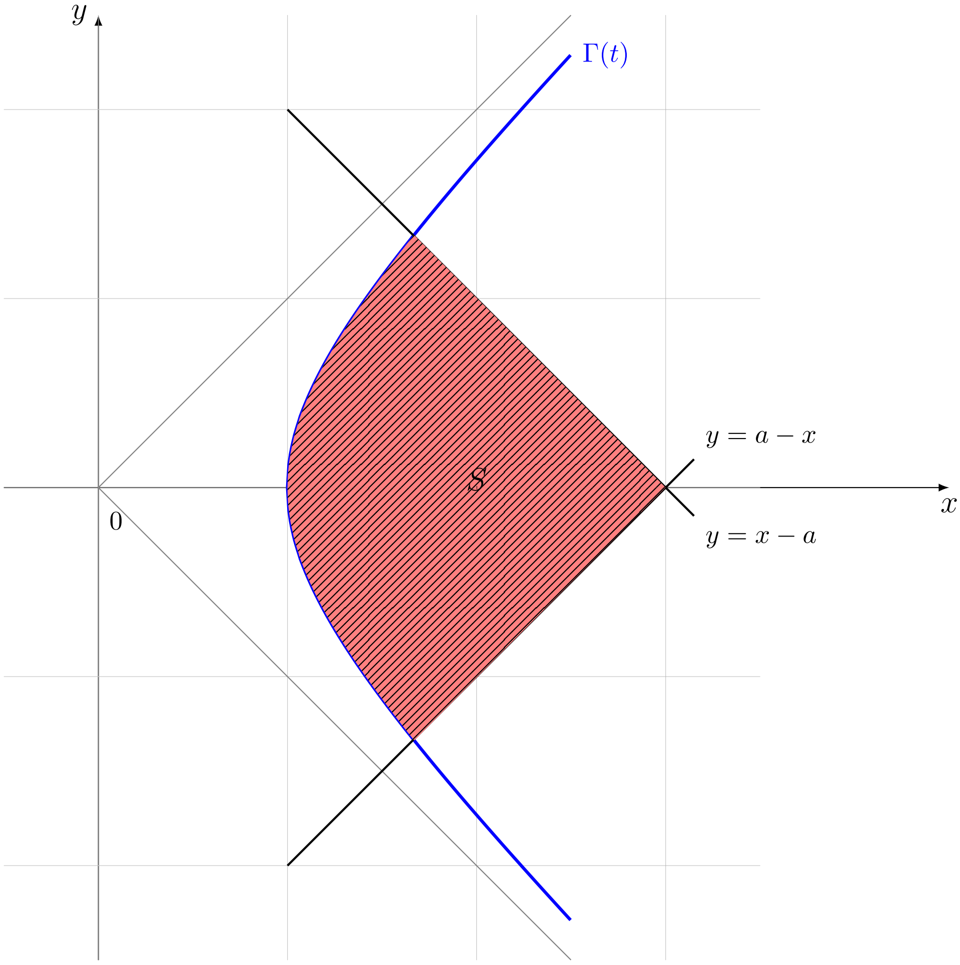
(a) (2 points) Dans le plan de Gauss, on considère la courbe

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \cosh(t) + i\sinh(t). \end{aligned}$$

Effectuez une rotation de $\pi/4$ dans le plan complexe de cette courbe autour du point $z = 0$. Quelle est la nouvelle courbe $\Gamma' = x(t) + iy(t)$ obtenue (expliciter les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$) ?

(b) (2 points) Trouvez une relation simple entre $x(t)$ et $y(t)$ où $\Gamma'(t) = x(t) + iy(t)$. Est-ce que y peut s'écrire en fonction de x ?

(c) (4 points) Calculez la surface S de la figure suivante, sans utiliser l'intégrale, mais en utilisant le résultat précédent ainsi que la définition du logarithme.



Solution:

(a) Puisque $[1,\varphi][|z|,\arg(z)] = [|z|,\arg(z)+\varphi]$, la multiplication dans $\mathbb{C}$ par un nombre de module 1 correspond à une rotation par l'argument de ce nombre. On a alors qu'une rotation de z de $\frac{\pi}{4}$ s'obtient en multipliant z par $[1,\frac{\pi}{4}] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ 1 pt .

Donc,

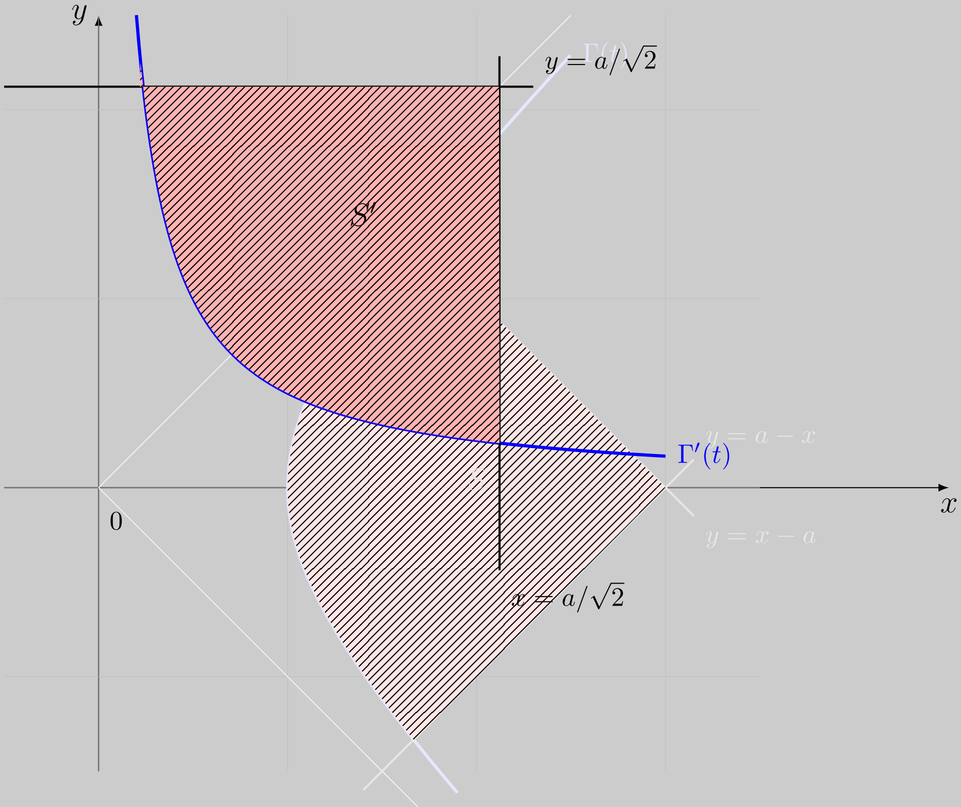
$$\begin{aligned}\Gamma' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\Gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(\mathrm{ch}(t) + i\mathrm{sh}(t))\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\frac{1}{2}(e^t + e^{-t} + ie^t - ie^{-t})\\ &= \frac{1}{\sqrt{8}}(e^t + e^{-t} + ie^t - ie^{-t} + ie^t + ie^{-t} - e^t + e^{-t})\\ &= \frac{1}{\sqrt{8}}(2e^{-t} + 2ie^t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-t} + ie^t). \quad 1\,pt\end{aligned}$$

On en conclut, que

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}.$$

(b) Clairement, $\forall t$, $x(t)y(t) = \frac{1}{2}$ 1 pts , et ainsi, $y = \frac{1}{2x}$ 1 pts .

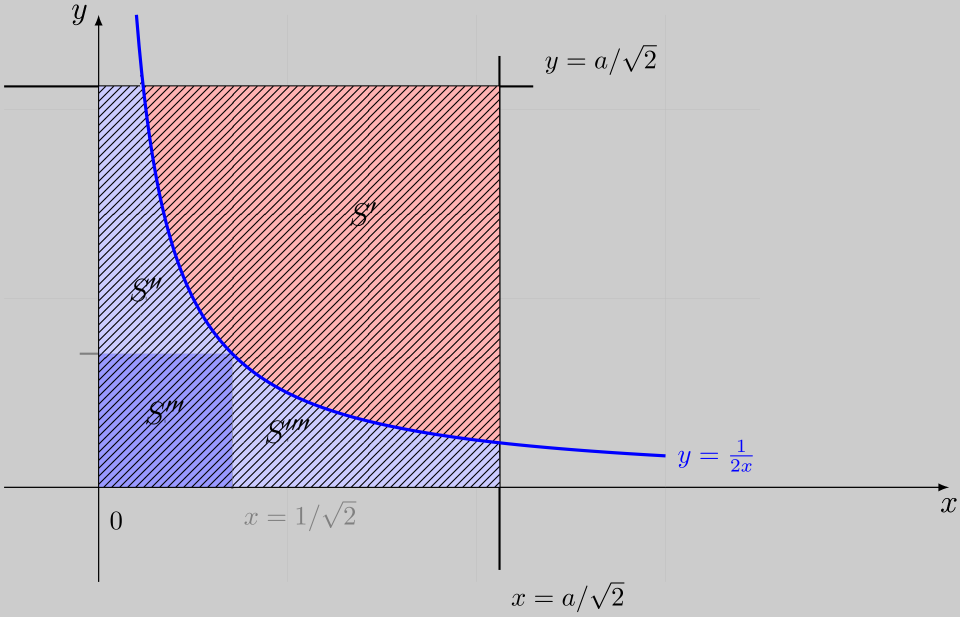
(c) Puisqu'une rotation ne change pas les surfaces, on peut calculer S en calculant la surface de sa rotation par $\frac{\pi}{4}$. On obtient la figure suivante :



On note ici, que les droites $y = \pm(x-a)$ ont aussi été tournées d'un angle de $\pi/4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(x \pm i(x-a)) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm i(x-a) + ix \pm (a-x))\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm (a-x) + i(x \pm (x-a))) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad 1\,pts\end{aligned}$$

Bien sûr, $S = S'$ et on observe la figure suivante :



On a clairement $S' + S'' + S''' + S'''' = \frac{a^2}{2}$ 1 pts , $S''' = \frac{1}{2}$ et $S'' = S'''' = \frac{1}{2}(\ln(a/\sqrt{2}) - \ln(1/\sqrt{2})) = \ln(\sqrt{a})$ 1 pts , d'où

$$S = S' = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - 2\ln(\sqrt{a}) = \frac{a^2-1}{2} - \ln(a). \quad 1\,pts$$

Question 2

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Calculez le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

(a) (2 points)

$$z = \left(\cos(\frac{\pi}{7}) + i\sin(\frac{\pi}{7})\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)\,.$$

(b) (2 points)

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Solution:

(a)

$$z = [1, \frac{\pi}{7}]\,[1, -\frac{\pi}{3}]\,[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] = [\sqrt{2}, \frac{(12-28+21)\pi}{84}] = [\sqrt{2}, \frac{5\pi}{84}]. \quad 1\,pts$$

On a alors

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \arg(z) = \frac{5\pi}{84}. \quad 1\,pts$$

(b)

$$z = [1, \frac{\pi}{3}]^{2010} = [1^{2010}, \frac{2'010\pi}{3}] = [1, 670\pi] = [1, 335\,2\pi] = [1, 0], \quad 1\,pts$$

d'où

$$|z| = 1, \quad \arg(z) = 0. \quad 1\,pts$$

Question 3 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \left(x^{-x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)^{x^2}\right)^{\frac{-1}{\mathrm{Arsinh}(1/x)}}.$$

Restreindre si nécessaire son ensemble de définition pour qu'elle soit bijective et trouver sa fonction réciproque.

Solution: x^{-x^2} n'est bien définie que pour $x > 0$ 0.5 pts . Les autres fonctions en jeu ne posent pas de problèmes sur cet ensemble de définition. On a alors par définition

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\exp(-x^2\ln(x))\exp(x^2\ln(\sqrt{1+x^2}+1))\right)^{-\frac{1}{\mathrm{Arsh}(1/x)}} \\ &= \left(\exp(-x^2\ln(x)+x^2\ln(\sqrt{1+x^2}+1))\right)^{-\frac{1}{\mathrm{Arsh}(1/x)}} \\ &= \exp\left(x^2(-\ln(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}+1))(-\frac{1}{\mathrm{Arsh}}(1/x))\right) \\ &= \exp\left(x^2\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x})(-\frac{1}{\mathrm{Arsh}}(1/x))\right). \quad 1.5\,pts \end{aligned}$$

Or, une simple vérification donne

$$\mathrm{sh}\left(\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2+1+2\sqrt{1+x^2}-x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{(1+\sqrt{1+x^2})}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right) = \frac{1}{x}, \quad 1\,pts$$

d'où $\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}) = \mathrm{Arsh}(1/x)$, et

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x > 0 \text{ et } \mathrm{im}(f) =]0,1[. \quad 0.5\,pts$$

La fonction $f(x)$ est inversible sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \exp(-x^2) \Leftrightarrow \ln(y) = -x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{-\ln(y)} = x, \quad 0.5\,pts \end{aligned}$$

qui est bien définie pour $0 < y < 1$. On a dès lors que

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln(x)}, \quad D_{f^{-1}} =]0,1[, \ \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}_+^*.$$

Question 4 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Déterminez un ensemble de définition et des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, composées que de produits, de sommes, de divisions et de racines, telles que

$$\mathrm{Arsh}(x) = \mathrm{Arth}(f(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Arch}(x) = \mathrm{Arth}(g(x)).$$

Solution: Arsh(x) est défini pour tout x puisque sh(x) est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. th(x) est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. L'application de cette dernière au deux termes d'une équation ne modifie donc pas l'ensemble des solutions 1 pts , et on trouve

$$f(x) = \mathrm{th}(\mathrm{Arsh}(x)) = \frac{\mathrm{sh}}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2}}(\mathrm{Arsh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 1\,pts$$

Le domaine $D_f = \mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(f) =]-1,1[$.
La deuxième équation est vérifié au plus pour $x \geq 1$. Comme th est une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$, et que sh restreint à cet ensemble est positive 1 pts , on a pour $x \geq 1$,

$$g(x) = \mathrm{th}(\mathrm{Arch}(x)) = \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2 - 1}}{\mathrm{ch}}(\mathrm{Arch}(x)) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \quad 1\,pts$$

et on a bien $D_g = [1, \infty[$, $\mathrm{im}(g) = \mathbb{R}_+$.