Analyse I – Série 10

Echauffement. (Dérivée de la valeur absolue)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Calculer f' et tracer les graphes de f et f'.

Exercice 1. (Continuité de la dérivée)

Calculer la dérivée de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Est-ce que la fonction f' est continue en $x = 0$?

Exercice 2. (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

i) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ii) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

iii) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

iv) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

v) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

vi) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

vii) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

viii) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

ix) $f(x) = \mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$

x) $f(x) = \coth(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 3. (Théorème des accroissements finis)

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0\,.$$

Exercice 4. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{th}(x) - 1\right)$ *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(1 + \sin(x)\big)^{1/x}$

Exercice 5. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

i) $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ *ii)* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 6. (Réciproque de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x}.$$

Peut-on utiliser Bernoulli-l'Hospital dans ce cas?

Exercice 7. (QCM : Calcul d'une limite)

La limite

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)-1\right)\right)$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ e^2

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.

Q1 : Si $f(x)=x+e^x$, alors $(f^{-1})'(1)=1+\frac{1}{e}$.

Q2 : Si f est dérivable sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]\subset D(f)$, $a<b$, et dérivable sur $]a,b[$.

Q1 : Si $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.

Q2 : Si f est croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

Q3 : Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

Q4 : Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

Q5 : Si $\lim_{x\to a^+} f'(x)=\ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a)=\ell$.