Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________ Groupe ☐

PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \,:\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y = 0$$

a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$, le repère R_u dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est réduite et la matrice de passage U de R_e à R_u.

b) Soit la droite d dont l'équation est $\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{x}$ dans le repère réduit.
Déterminer, dans le repère R_u, les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec la conique $\mathcal{C}$.
Pour le point d'abscisse positive dans R_u, déterminer, en utilisant la matrice de passage U, ses coordonnées dans R_e.

c) Représenter, avec précision, la conique $\mathcal{C}$ dans le repère R_e.
Unité 16 carrés.

8,5 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $R_e = (O\,,\, \vec{e}_1\,,\, \vec{e}_2)$, on définit une famille de conique par son équation cartésienne :

$$\mathcal{F} : \quad (m+2)\,x^2 - 4xy + (m-1)\,y^2 + 2\,(m+2)\,x - 4y + m + 7 = 0\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

a) Déterminer, en fonction du paramètre m, le genre et la dégénérescence des coniques de $\mathcal{F}$, (on ne demande pas l'équation des droites de dégénérescence).
Pour quelles valeurs de m les coniques ont-elles un centre ?

b) Pour la valeur $m = 0$, déterminer le centre Ω de la conique.
Montrer que Ω est le centre de toutes les coniques non-dégénérées de la famille $\mathcal{F}$.

Tournez, SVP

c) On considère les coniques de $\mathcal{F}$ qui sont des hyperboles et on note R_u le repère dans lequel leur équation est réduite.

- Déterminer, en fonction de m, leur équation réduite ;
- montrer que toutes les hyperboles ont un axe réel parallèle à une direction fixe à déterminer;
- dans le repère réduit R_u, on considère le point $A(\sqrt{5}\,;\,0)$;
  déterminer la valeur du paramètre m de sorte que A est un sommet d'une hyperbole de la famille $\mathcal{F}$; déterminer les coordonnées des sommets de cette hyperbole dans le repère R_e ;
- montrer que cette famille $\mathcal{F}$ possède une seule hyperbole équilatère et déterminer les équations cartésiennes de ses asymptotes dans le repère R_e .

11,5pts