Série 9

1. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3}\,, \quad x_0 = 1\,,$ b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}\,, \quad x_0 = 0\,,$

c) $c(x) = \left[\dfrac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right] \cdot \left[-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right]\,, \quad x_0 = -2\,.$

2. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{x - 2\cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2-4}\,, \quad x_0 = 0\,,$ c) $c(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^6+x^4}}\,, \quad x_0 = 0\,,$

b) $b(x) = x - E(x^2)\,, \quad x_0 = \sqrt{2}\,,$ d) $d(x) = \dfrac{1}{2x-6+\sqrt{x^2+x-2}}\,, \quad x_0 = 2\,.$

3. Calculer les limites suivantes :

a) $a = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x}$ d) $d = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2\cos x - 3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}$

b) $b = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^6)}{[1-\cos(3x)]^3}$ e) $e = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

c) $c = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ f) $f = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[2\sin x - \sin(2x)]^2}{x^6}\,\sin(\frac{1}{x^6})\,.$

4. a) La fonction définie par $f(x) = |\tan x|\cdot\cos^3(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$ est-elle continue en $x=0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

5. Peut-on trouver des valeurs des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes soient continues en $x=0$?

a) $a(x) = \dfrac{|x|(x+1)+x}{x^2(x+1)}$ si $x \neq 0$ et $a(0) = A\,,$

b) $b(x) = \dfrac{x\sqrt{3-4\,\cos x+\cos^2 x}}{|x|\,\sin x}$ si $x\neq 0$ et $b(0) = B\,.$

6. Exercice facultatif.

Soient $f,\, g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0.
Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} [\, f(x)\cdot g(x)\,] = a\cdot b\,.$$

Réponses de la série 9

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} a(x) = \frac{5}{4}\,.$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} b(x) = 1\,.$ c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} c(x) = +\infty\,.$

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} a(x) = -\frac{1}{2}\,,\quad \lim_{x\to 0^+} a(x) = +\frac{1}{2}\,.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{2}^-} b(x) = \sqrt{2}-1\,,\quad \lim_{x\to \sqrt{2}^+} b(x) = \sqrt{2}-2\,.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} c(x) = 1\,,\quad \lim_{x\to 0^+} c(x) = -1\,.$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} d(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to 2^+} d(x) = +\infty\,.$

3. a) $a = \dfrac{3}{2}$

b) $b = \dfrac{8}{729}$

c) $c = -1$

d) $d = 1$

e) $e = \dfrac{2}{\pi}$

f) f n'existe pas.

4. a) f est continue en $x = 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0\,.$

b) f est continue à droite en $x = \sqrt{2}$: $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}-2\,.$

5. a) A n'existe pas. b) $B = 1\,.$
