Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 25 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère l'équation matricielle en $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$AX = B\,,$$

où A et B sont des matrices dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 2(1-k) & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -k \\ 3k-2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Résoudre cette équation en fonction du paramètre k. 6 pts

2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, avec A non diagonale et $\det B \neq 0$, et $k \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$(A + kI_n)^2 B = 2B\,.$$

a) Calculer $\det(A + kI_n)$.

b) Discuter l'existence de A^{-1} selon la valeur de k. 5 pts

3. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel m,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m^2 \\ m+1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \\ m+3 \end{pmatrix}.$$

a) Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont-ils linéairement dépendants ?

Soient

$$W = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Dans chaque cas où $\dim W \leq 2$, donner une base et la dimension de W. Déterminer également si $\vec{v} \in W$. Si c'est le cas, donner les composantes de $\vec{v}$ relativement à la base choisie de W. 6.5 pts

Tourner s.v.p.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, r un polynôme de $P_n[x]$ et V le sous-ensemble de $P_n[x]$ défini par

$$V = \left\{ p \in P_n[x] \;\middle|\; \big(r \cdot p\big)'(1) = 0 \right\}.$$

Rappel : $\big(r \cdot p\big)'(1)$ est la dérivée du polynôme $r(x) \cdot p(x)$ évaluée en $x_0 = 1$.

a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $P_n[x]$.

Pour la suite, on fixe $n = 3$ et $r(x) = x - 2$ dans la définition de V .

b) Pour quelle valeur de $c \in \mathbb{R}$ le polynôme $s = x^3 + c$ appartient-il à V ?

Soit encore $W = [\, t_1, t_2, t_3, t_4 \,]_{\text{sev}}$ le sous-espace vectoriel de $P_3[x]$ défini par

$$\begin{aligned} t_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ t_2 &= x^3 + 5x^2 - 2x - 3 \\ t_3 &= 3x^3 + x + 3 \\ t_4 &= 2x^2 + x - 6 \,. \end{aligned}$$

c) Donner une base et la dimension de W .

d) Donner une base et la dimension de $V \cap W$. 7.5 pts

Quelques éléments de réponses

1. • $k \notin \{-1\,, 2\}$: $X = A^{-1}\, B = \begin{pmatrix} \frac{-(3k+4)}{2(k+1)} & 0 \\ \frac{1}{4(k+1)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• $k = -1$: pas de solution

• $k = 2$: $X = \begin{pmatrix} 4z - 2 & 4w - 2 \\ z & w \end{pmatrix}$

2. a) $\det\, (A + kI_n) = \sqrt{2^n}$

b) $A(A + 2kI_n) = (2 - k^2)I_n$

- si $k^2 \neq 2$: A est inversible.
- si $k^2 = 2$: A n'est pas inversible (car si $\det\, A \neq 0$, alors A serait diagonale)

3. a) $m \in \{-2\,, 0\,, 1\}$

b) • $m = -2$: $\mathcal{B} = (\vec{a}\,, \vec{b})$, $\dim W = 2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

• $m = 0$: $\mathcal{B} = (\vec{a}\,, \vec{b})$, $\dim W = 2$, $\vec{v} \notin W$

• $m = 1$: $\mathcal{B} = (\vec{a})$, $\dim W = 1$, $\vec{v} \notin W$

4. b) $c = 2$

c) $t_2 = -t_1 + t_3 + t_4$ et on montre que t_1 , t_3 et t_4 sont linéairement indépendants. Donc $\mathcal{B} = (t_1\,, t_3\,, t_4)$, $\dim\ W = 3$.

d) $\mathcal{B} = (t_3 - 3t_1\,, t_4 - 8t_1)$, $\dim\ V \cap W = 2$.