Test blanc Sections MT et SV 28 avril 2016

— Tous vos calculs et raisonnements doivent être justifiés et figurer sur votre copie.
— Durée pour le test : 1h45.
— Les seuls documents autorisés sont :
- un résumé personnel manuscrit de 4 pages (2 feuilles A4 recto-verso) maximum,
- une photocopie des pages 118 et 127 du livre de Dacorogna et Tanteri (Tables des transformées de Fourier et Laplace),
- Tables Numériques et Formulaires (CRM ou équivalent).

Exercice 1. (20 minutes)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $\frac{\pi}{2}$-périodique définie par $f(x) = |\sin(2x)|$, si $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

(a) Calculer sa série de Fourier Ff.

(b) À l'aide du théorème de Dirichlet, dont on vérifiera les hypothèses, comparer Ff et f sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

(c) Déduire de (b) que

$$\pi = 2 - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Exercice 2. (30 minutes)

(a) À l'aide de la Table et des propriétés de $\mathcal{L}$, trouver sans long calcul la transformée de Laplace, en précisant l'abscisse de convergence, de :

(i) $g(t) = -t\cos(t)$

(ii) $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{2s}\cosh(s)\,ds$

(iii) $k(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(s)\sinh(t-s)\,ds$.

(b) Soit $f(t) = e^t$, si $t \geqslant 0$ (et $f(t) = 0$, si $t < 0$). Pour $n \geqslant 2$, on pose $g_n = f * f * \cdots * f$ (n facteurs). En commençant par le cas $n = 2$, puis en procédant par récurrence, montrer que

$$g_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^t, \quad t \geqslant 0.$$

Tournez la page, s.v.p.

Exercice 3. (20 minutes)

(a) Sans utiliser le théorème des résidus, trouver une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dont la transformée de Laplace est

$$F(z) = \frac{1}{z^3 + z^2 + 3z + 3}.$$

(b) Quelle est l'abscisse de convergence de la fonction f trouvée en (a) ?

Exercice 4. (20 minutes)

À l'aide d'un calcul de résidus, trouver la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$