Exercice 1. *Soit* $A := \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer l'inverse de la matrice A.*
2. *Utiliser (a) pour résoudre le système*

$$\begin{cases} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1 \end{cases}.$$

Solution 1. 1. On traite la matrice $[A \mid I]$:

$$(A \mid I) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ -6 & 13 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -13 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13/3 & -7/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le système peut s'écrire sous la forme $A \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}$, avec

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{z} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -13/3 & -7/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x = 15$ et $y = 7$.

Exercice 2. *Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles et calculer l'inverse le cas échéant.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solution 2. 1. **Oui**. La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4. Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

et elle est donc inversible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4.5 & -1 & -2 & 0.5 \\ \frac{25}{12} & 0 & \frac{2}{3} & -0.25 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0.75 & -1 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}$$

2. **Oui**. La matrice B est carrée et de dimension 4×4. De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{40} & -\frac{21}{400} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{200} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{9}{80} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

3. **Oui**. Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la matrice B ci-dessus, qu'on vient de voir est inversible. De plus on peut utiliser l'inverse de B pour déterminer l'inverse de C, comme suit :
On rappelle que pour toute matrices E, F $(EF)^T = F^T E^T$. On montre que $C^{-1} = (B^{-1})^T$.
On a $BB^{-1} = I$, la matrice identité. Donc$(BB^{-1})^T = I^T = I$, car la matrice identité est symétrique (car diagonale).
Maintenant on utilise la propriété mentionnée pour la transposée d'un produit :

$$I = (BB^{-1})^T = (B^{-1})^T B^T = (B^{-1})^T C.$$

Par une proposition du cours, comme $(B^{-1})^T C = I$, C est inversible et ensuite on déduit que son inverse est

$$(B^{-1})^T = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{40} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{21}{400} & -\frac{1}{200} & -\frac{9}{80} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

4. **Non**. La matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.

Exercice 3. *Calculer l'inverse des matrices A et B, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d. \end{pmatrix}$$

Solution 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b & 1 & 0 \\ -c & -d & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *Soient*

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trouver une décomposition LU de la matrice A.*
2. *Resoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU de A.*

Solution 4. 1. On reduit la matrice A à une matrice triangulaire supérieure U en utilisant dans l'ordre les opérations élémentaires $E_{21}(1)$, $E_{31}(-2)$ et $E_{32}(5)$, c'est à dire

$$U := \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{32}(5)E_{31}(-2)E_{21}(1)A.$$

En posant

$$L := (E_{32}(5)E_{31}(-2)E_{21}(1))^{-1} = E_{21}(1)^{-1}E_{31}(-2)^{-1}E_{32}(5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

nous obtenons la factorization

$$A = LU.$$

Rappel : pour faire cette dernière étape, on peut effectuer la suite d'opérations "inverses" sur les colonnes de la matrice identité dans le même ordre que nous avons effectue les opérations sur les lignes de A ; donc on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a que x est une solution pour $Ax = b$ si et seulement si y est une solution de $Ly = b$ et x est une solution de $Ux = y$.
On trouve alors y comme la solution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

qui donne $y_1 = -7$, $y_2 = -2$ et $y_3 = 6$.
Ensuite on trouve x comme la solution du système

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

qui donne $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -6$.
On peut bien vérifier que

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = b.$$

Exercice 5. *Trouver une décomposition LU de la matrice A.*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Ensuite, utiliser la décomposition LU pour résoudre les deux systèmes d'équations linéaires suivantes :
$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Solution 5. On reduit la matrice A à une matrice triangulaire supérieure U en utilisant dans l'ordre les opérations élémentaires, $E_{21}(2)$, $E_{41}(3)$, $E_{51}(-4)$, $E_{31}(-\frac{3}{2})$, $E_{32}(2)$, $E_{42}(-2)$, $E_{52}(3)$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En même temps, on efectue la suite d'opérations $E_{21}(-2)$ $E_{41}(-3)$, $E_{51}(4)$, $E_{31}(\frac{3}{2})$, $E_{32}(-2)$, $E_{42}(2)$, $E_{52}(-3)$,sur les colonnes de la matrice identité 5×5 dans l'ordre pour obtenir :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le premier système, on résout d'abord $LY = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ensuite on résout $U \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, qui n'a aucune solution.

Faisons de même pour le deuxième système : $LY = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a solution (unique) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, on cherche x, y, z tels que $U \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette fois on trouve une infinité de solutions, avec z comme variable libre et x et y des variables principales qui dépendent de z :

$$x = -\frac{6}{7}z - \frac{3}{7}, y = \frac{5}{7}z - \frac{1}{7}, z \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. *On suppose que A est une matrice de taille 3×3 et B est une matrice de taille 3×2. Démontrer ou réfuter les affirmations suivantes.*

1. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors la somme $A+A$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.
2. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors le produit $10A$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.
3. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors la transposée A^{T} est aussi une matrice triangulaire supérieure.
4. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure.
5. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, alors leur produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale.

Solution 6.

1. Vrai. Si A est triangulaire supérieure, alors $a_{ij}=0$ pour tout $j<i$. L'entrée de $A+A$ en position (i,j) est $a_{ij}+a_{ij}=0$ pour tout $j<i$.
2. Vrai. Si A est triangulaire supérieure, alors $a_{ij}=0$ pour tout $j<i$. L'entrée de $10A$ en position (i,j) est $10a_{ij}=0$ pour tout $j<i$.
3. Faux. Par exemple la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
est triangulaire supérieure, tandis que sa transposée
$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
ne l'est pas.
4. Vrai. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures. Cela signifie que $a_{ik}=0$ si $i>k$ (le numéro de la ligne est plus grand, strictement, que celui de la colonne) et de même $b_{kj}=0$ si $k>j$. Appelons C la matrice AB. Puisqu'on peut multiplier les matrices entre elles, cela veut dire que A a autant de colonnes que B a de lignes, disons que ce nombre est n. Par définition du produit matriciel le coefficient
$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$
Autrement dit nous avons ici une somme de termes $a_{ik}b_{kj}$. Que se passe-t-il si $i>j$? Pour les petites valeurs de k, on aura alors que $i>k$ et donc $a_{ik}=0$. Mais si $k\geq i$, alors forcément $k>j$, si bien que $b_{kj}=0$. Dans tous les cas $a_{ik}b_{kj}=0$ et donc $c_{ij}=0$ lorsque $i>j$. La matrice C est donc triangulaire supérieure.
5. Vrai. Nous refaisons le même calcul que ci-dessus pour les coefficients c_{ii} de la diagonale de C. On a maintenant une somme de termes $a_{ik}b_{ki}$. Cette fois tous ces termes sont nuls, sauf $a_{ii}b_{ii}=1$.

Exercice 7. *On suppose que A est une matrice symétrique et B est une matrice diagonale, carrées de même taille. Démontrer ou réfuter les affirmations suivantes.*

1. $A+A$ est aussi une matrice symétrique.
2. Le produit $10A$ est aussi une matrice symétrique.
3. La transposée A^{T} est aussi une matrice symétrique.
4. $B+B$ est aussi une matrice diagonale.
5. Le produit $7B$ est aussi une matrice diagonale.
6. La transposée B^{T} est aussi une matrice diagonale.

7. Le produit AB est aussi une matrice symétrique.

8. Le produit BA est aussi une matrice diagonale.

Solution 7. 1. Vrai. Si A est symétrique, alors $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout j, i. L'entrée de $A + A$ en position (i, j) est $a_{ij} + a_{ij} = 2a_{ij} = 2a_{ji} = a_{ji} + a_{ji}$ pour tout j, i.

2. Vrai. Si A est symétrique, alors $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout j, i. L'entrée de $10A$ en position (i, j) est $10a_{ij} = 10a_{ji}$ pour tout i, j.
3. Vrai. Si A est symétrique, alors $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout j, i. L'entrée de A^T en position (i, j) est $a_{ji} = a_{ij}$ pour tout i, j.
4. Vrai. Si B est diagonale, alors $b_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$. L'entrée de $B + B$ en position (i, j) est $b_{ij} + b_{ij} = 2b_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$.
5. Vrai. Si B est diagonale, alors $b_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$. L'entrée de $7B$ en position (i, j) est $7b_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$.
6. Vrai. Si B est diagonale, alors $b_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$. L'entrée de B^T en position (i, j) est $b_{ji} = 0$ pour tout $i \neq j$.
7. Faux. Par exemple la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
est symétrique et
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
est diagonale, tandis que
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas symétrique.
8. Faux. Par exemple la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
est symétrique et
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est diagonale, tandis que
$$BA = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonale.

Exercice 8. *Questions à Choix Multiple. Justifier les réponses ! Un système d'équations linéaires est dit* comptaible *ou* consistant *s'il possède au moins une solution. Justifier les réponses !*

a. Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrice augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

☐ $h = 5$,
X $h = 5/2$,
☐ $h \neq 5/2$,
☐ $h = -5/2$.

b. Même question pour la matrice :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right].$$

☐ *seulement si* $h = 2$,
☐ *seulement si* $h = -2$,
☐ $h \neq 2$,
X $h \neq -2$.

c. vrai *Deux matrices qui sont lignes équivalentes ont le même nombre de colonnes.*

faux *Deux matrices sont lignes équivalentes si elles ont le même nombre de lignes.*

faux *Deux matrices peuvent être lignes équivalentes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de lignes.*

faux *Deux matrices peuvent être lignes équivalentes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de colonnes.*

d. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

faux *Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice A n'est pas compatible.*

faux *Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice A est compatible.*

vrai *Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible.*

faux *Un système d'équations linéaires inhomogène est toujours compatible.*

e. ☐ *Vrai : Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne de sa forme échelonnée, alors le système est compatible.*
☐ *Faux : Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne de sa forme échelonnée, alors le système est compatible.*
☐ *Faux : Si la matrice des coefficients d'un système de trois équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne de sa forme échelonnée, alors le système est incompatible.*
☐ *Faux : Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à trois inconnues a un pivot dans chaque colonne de sa forme échelonnée, alors le système est compatible.*

Solution 8. a. On a l'équivalence

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right] \sim_{L_2+2L_1=newL_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right].$$

Le système linéaire correspondant à cette matrice est :

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5; \end{aligned}$$

il est consistant si et seulement si $2h - 5 = 0$, c'est-à-dire si $h = 5/2$.

b. On a l'équivalence :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right] \sim_{L_2-3L_1=newL_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 0 & -3h+6 & -4 \end{array}\right].$$

Le système linéaire correspondant à la dernière matrice est

$$\begin{aligned} x + hy &= 4 \\ (3h-6)y &= 4\,. \end{aligned}$$

Il est consistant si et seulement si $3h - 6 \neq 0$, c'est à dire si $h \neq 2$.

c. Vrai : Deux matrices qui sont lignes équivalentes sont forcément de la même taille, c'est-à-dire elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes, car on effectue les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, et ça ne modifie ni le nombre de lignes ni le nombre de colonnes de la matrice.

   Faux : Noter bien que cet énoncé est le même que "Si deux matrices ont le même nombre de lignes, alors elles sont lignes équivalentes." Deux matrices qui ont le même nombre de lignes ne sont pas forcément lignes équivalentes. Par exemple, la matrice (0) de taille 1×1 n'est pas lignes équivalente à (1).

   Faux : voir la première réponse.

   Faux : voir la première réponse.

d. Noter ici que comme le système est homogène, cette matrice doit forcément représenter la matrice des coefficients du système car la colonne des termes constantes consistent qu'en des zéros. L'énoncé est faux car un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible !

   non, car la ligne $(0\ 0\ 0\ 7)$ montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible, ce qui prouve également qu'un système d'équations linéaires inhomogène n'est pas toujours compatible.

   donc oui pour la troisième affirmation et non pour la quatrième.

e. ☐ Vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. Comme on parle de la matrice des coefficients, cela implique aussi qu'il n'y a pas de lignes de la forme $(0\ 0\ 0\ 0\ d)$ avec $d \neq 0$ dans la matrice echelonnée correspondant à la matice augmentée du système. On conclut alors par un résultat du cours que le système possède une solution unique et donc est compatible.

   ☐ Faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme $(0\ 0\ 0\ 0\ 7)$ par exemple pour que le système soit incompatible.

   ☐ Faux. La matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires de 3 équations à 4 inconnues est une matrice 3×4. Comme ici on suppose qu'il existe un pivot dans chaque ligne de cette matrice, dans la matrice augmentée associée au système (après échelonnage) on ne trouvera aucune ligne de la forme $(0\ 0\ 0\ 0\ d)$ avec $d \neq 0$, et donc le système possède au moins une solution, même le système possède une infinté de solutions, car il y a une variable libre. En particulier le système est compatible.

   ☐ Faux. La matrice augmentée d'un système de quatre équations à trois inconnues est constituée de quatre lignes, une pour chaque équation, et quatre colonnes, celles des inconnues et celle des termes constants. Un pivot dans chaque colonne implique donc un pivot dans chaque ligne, ce qui implique que la dernière ligne soit de la forme $(0\ 0\ 0\ c)$, pour $c \neq 0$ et le système n'est pas compatible.