Langage ensembliste

1. Expliciter les ensembles suivants (si nécessaire, reformuler l'énoncé d'une manière plus compréhensible) :

a) $A = \{\, n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 2n+1 < 16 \,\}$

b) $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n^3 \text{ est impair} \,\}$

c) $C = \{\, 3y+1 \mid y \in \mathbb{N} \,\}$

d) $D = \{\, a \in \mathbb{Z}^* \mid \text{ le produit de } a \text{ par 6 est élément de } \mathbb{Z}^* \,\}$

e) $E = \{\, 4y \mid y \in \mathbb{Z} \,\}$

f) $F = \{\, x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } x^2 - 2 = 0 \,\}$

g) $G = \{\, n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 2 < 3n+1 < 20 \,\}$

h) $H = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -5 < x - 3 < 5 \text{ et } x > 2 \,\}$

i) $I = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x + 5 > 4 \text{ ou } x + 5 < -4 \,\}$

j) $J = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 14x + 8 = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{N} \,\}$

k) $K = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{N}^* \,\}$

Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan et U, V deux points fixés distincts :

l) $L = \{\, M \in \mathcal{E} \mid \text{distance de } U \text{ à } M = \text{distance de } V \text{ à } M \,\}$

m) $N = \{\, M \in \mathcal{E} \mid \text{distance de } U \text{ à } M \text{ est inférieure à } 2 \,\}$

n) $P = \{\, M \in \mathcal{E} \mid \text{l'angle saillant entre } MU \text{ et } MV \text{ est droit} \,\}$

2. Décrire les ensembles suivants à l'aide d'une propriété caractéristique de leurs éléments :

a) $K =$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls multiples de 5.

b) $L =$ l'ensemble des entiers compris entre $-3/2$ et $9/2$.

c) $A = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

d) $B = \{3;\ 10;\ 17;\ 24; \cdots\}$

e) $C = \{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$

f) $N =$ l'ensemble des points du demi-plan contenant A dont la frontière est la médiatrice du segment AB.

3. Est-il juste ou faux d'écrire les relations suivantes ?

a) $\sqrt{4} \notin \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

c) $\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$

d) $2 \in \emptyset$

e) $\{1\} \in \{1;\ 4;\ 5\}$

f) $\{1;\ 4\} \supset \{4\}$

g) $\emptyset \subset \mathbb{R}$

h) $\{2;\ 5\} \not\subset \{2;\ 4;\ 6\}$

4. Soient $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{1;\ 2;\ 3\}$, $C = \{2;\ 4\}$; trouver tous les ensembles X vérifiant :

a) $X \subset B$ et $X \subset C$,
b) $X \subset B$ et $X \not\subset C$,
c) $X \subset A$ et $X \not\subset B$,
d) $X \subset C$ et $X \not\subset B$.

5. Dans quels cas, les ensembles A et B sont-ils égaux ?

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \leq 4\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\}$,
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = -1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2\}$,
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \leq 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 = x\}$.

6. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E.
Soit $E = \{1;\ 2;\ 3\}$.

a) Enumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$.
b) Définir $F = \{\{1\};\ \{1;\ 2\};\ \{1;\ 3\};\ \{1;\ 2;\ 3\}\}$ par une propriété caractéristique de ses éléments.

7. Soit $A = \{a;\ b\}$. Est-il juste ou faux d'écrire les relations suivantes ?

a) $\{a\} \subset A$,
b) $\{a\} \in A$,
c) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$,
d) $\{\{a;\ b\}\} = A$,
e) $A \in A$,
f) $A \supset A$,
g) $A \in \mathcal{P}(A)$,
h) $\{\{a\};\ \{b\}\} = \mathcal{P}(A)$.

8. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Quels sont les éléments de A, B et E si :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}, \\ C_E A &= \{1;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 9\}, \\ C_E B &= \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\}. \end{aligned}$$

9. Soient $A, B, C \subset E$. Quels sont les éléments de A, B, C et E sachant que :

$C_E(A \cup B \cup C) = \{1;\ 8;\ 12\}$,
$B \cap C = \emptyset$,
$A \cup B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9\}$,
$C_E B = \{1;\ 2;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 11;\ 12\}$,
$A \cap C = \{5\}$,
$A \cup C = \{2;\ 3;\ 4; 5;\ 6;\ 10;\ 11\}$.

10. Trouver des ensembles A, B, C tels que : $A \cap B \cap C = \emptyset$ mais ni $A \cap B$, ni $A \cap C$, ni $B \cap C$ ne soient vides.

11. On note par $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des multiples de n dans $\mathbb{Z}$. Expliciter les ensembles suivants :

a) $6\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$,

b) $7\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z}$,

c) $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$.

12. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x + 12 > 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (x-1)^2 > 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 25 \leq 0\} \end{aligned}$$

Expliciter :

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $C_C(A \cap B)$

f) $C_C A \cup B$

g) peut-on trouver une formulation équivalente dans les cas c) et d) ?

13. On donne :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

a) Représenter graphiquement $A \times B$.

b) Trouver un sous-ensemble H' de $A \times B$ tel que H' s'écrit comme un ensemble produit.

c) Trouver un sous-ensemble H'' de $A \times B$ tel que H'' ne peut pas s'écrire comme un ensemble produit.

14. Soient $G = \{1;\, 2\}$, $F = \{-1;\, 0;\, 1\}$. Exprimer $K = ((\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})) \cup G^2$ comme produit de deux ensembles à déterminer.

15. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 3\} \\ C &= \{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\} \end{aligned}$$

Représenter graphiquement $(A \times B) \cap C$.

16. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \,]0; \to [\\ E &= \{x \in 2\mathbb{Z} \,|\, -4 \leq x < 4\} \\ B &= \bigcup_{k \in E}]k;\, k+1] \\ D &= \{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y + x - 3 = 0\} \end{aligned}$$

Représenter graphiquement $(B \times A) \cap D$.

17. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \,]-3; \to [\\ I &= \{-3;\, -1;\, 1;\, 3\} \\ B &= \bigcup_{k \in I}]k;\, k+1] \\ D &= \{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 4 \text{ ou } |y| \leq 2\} \end{aligned}$$

Représenter graphiquement $(A \times B) \cap D$.

18. Expliciter $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ où $E = \{(0;\, 1)\}$.

19. Soient P et Q deux propriétés définies sur un référentiel E. On considère les ensembles $A = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } P\}$ et $B = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } Q\}$.

a) Traduire en langage ensembliste la propriété :

R : quel que soit x appartenant à E, x vérifie $[\,(\text{non}P) \text{ ou } Q\,]$.

Traduire en langage ensembliste la propriété S : $P \Rightarrow Q$.

b) A l'aide d'un diagramme de Venn, illustrer l'équivalence entre les propriétés R et S.

20. Soient $E = \{\, n \in \mathbb{Z} \,|\, -20 \leq n \leq 20 \,\}$ et P, Q, R trois propriétés définies sur E.
P : "est divisible par 4", Q : "est divisible par 5" et R : "est divisible par 10".
Traduire en langage ensembliste, puis vérifier sur E l'implication : $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Réponses

1. a) $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$,

b) $B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7; \ldots\}$,

c) $C = \{1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16; \ldots\}$,

d) $D = \mathbb{Z}^*$

e) $E = \{\cdots - 8;\ -4;\ 0;\ 4;\ 8;\ 12; \ldots\}$,

f) $F = \emptyset$,

g) $G = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

h) $H =]2;\ 8[$,

i) $I =]\leftarrow;\ -9[\cup]-1;\ \rightarrow[$,

j) $J = \{2/3\}$

k) $K = \{-2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$,

l) L est l'ensemble des points de la médiatrice de UV.

m) N est l'ensemble des points du disque de centre U et de rayon 2, frontière non-comprise.

n) P est l'ensemble des points du cercle de Thalès du segment UV, extrémités non-comprises.

2. a) $K = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 5k\}$,

b) $L = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3/2 < x < 9/2\}$,

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$,

d) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ x = 3 + 7k\}$,

e) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$,

f) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan ; $N = \{M \in \mathcal{E} \mid d(M;\ A) \leq d(M;\ B)\}$, où d désigne la distance.

3. a) faux : $2 \in \mathbb{N}$,

b) juste,

c) faux : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$,

d) faux : $2 \notin \emptyset$,

e) faux : $\{1\} \subset \{1;\ 4;\ 5\}$,

f) juste,

g) juste,

h) juste.

4. a) $\emptyset$, $\{2\}$;

b) $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{1;\ 2;\ 3\}$;

c) $\{4\}$, $\{1;\ 4\}$, $\{2;\ 4\}$, $\{3;\ 4\}$, $\{1;\ 2;\ 4\}$, $\{1;\ 3;\ 4\}$, $\{2;\ 3;\ 4\}$, $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$;

d) $\{4\}$, $\{2;\ 4\}$.

5. a) $A \neq B$: par exemple : $-1 \in A$ mais $-1 \notin B$,
b) $A = B = \emptyset$,
c) $A = B = \{-1;\ 0;\ 1\}$.

6. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{1;\ 2\};\ \{1;\ 3\};\ \{2;\ 3\};\ \{1;\ 2;\ 3\}\}$,
$F = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid 1 \in X\}$.

7. a) juste,
b) faux : $\{a\} \subset A$,
c) juste,
d) faux : $\{\{a;\ b\}\} \subset \mathcal{P}(A)$,
e) faux : $A \subset A$,
f) juste,
g) juste,
h) faux : $\{\{a\};\ \{b\}\} \subset \mathcal{P}(A)$.

8. $A = \{2;\ 3;\ 7;\ 10\}$,
$B = \{5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$,
$E = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$.

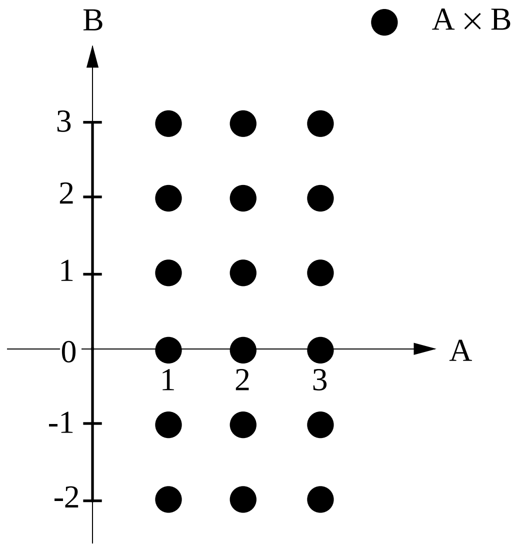
9. $A = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$,
$B = \{3;\ 4;\ 7;\ 9\}$,
$C = \{5;\ 6;\ 10;\ 11\}$,
$E = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12\}$.

10. $A = \{1;\ 2\}$, $B = \{1;\ 3\}$, $C = \{2;\ 3\}$, par exemple.

11. a) $6\,\mathbb{Z} \cap 4\,\mathbb{Z} = \{\cdots - 24;\ -12;\ 0;\ 12;\ 24;\ldots\} = 12\,\mathbb{Z}$, $12 =$ ppcm $(6, 4)$,
b) $7\,\mathbb{Z} \cap 2\,\mathbb{Z} = \{\cdots - 28;\ -14;\ 0;\ 14;\ 28;\ldots\} = 14\,\mathbb{Z}$,
c) $3\mathbb{Z} \cap 5\,\mathbb{Z} = \{\cdots - 30;\ -15;\ 0;\ 15;\ 30;\ldots\} = 15\,\mathbb{Z}$.

12. $A =]-3;\ 4[$, $B = \mathbb{R}_+ - \{1\}$, $C = [-5;\ 5]$.
a) $A \cap B = [0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ 4[$,
b) $A \cup B =]-3; \rightarrow [$,
c) $A \cup (B \cap C) =]-3;\ 5]$,
d) $A \cap (B \cup C) =]-3;\ 4[$,
e) $C_C(A \cap B) = [-5;\ 0[\ \cup\ \{1\}\ \cup\ [4;\ 5]$,
f) $C_C A {\cup} B = [-5;\ -3] \cup [0;\ 1[\ \cup\ ]1; \rightarrow [$,
g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

13. a)



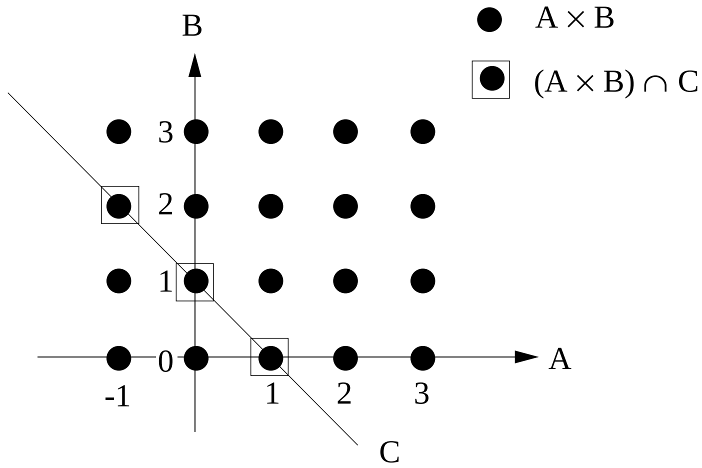
b) Par exemple :

— $H' = \{(3;\,-2);\,(3;\,-1);\,(3;\,0);\,(3;\,1);\,(3;\,2);\,(3;\,3)\} = \{3\} \times B$ est un ensemble produit ;

— $H'' = \{(1;\,1);\,(2;\,2)\} \subset A \times B$ n'est pas un ensemble produit.

14. $K = \{-1;\,0;\,1;\,2\} \times \{1;\,2\}$.

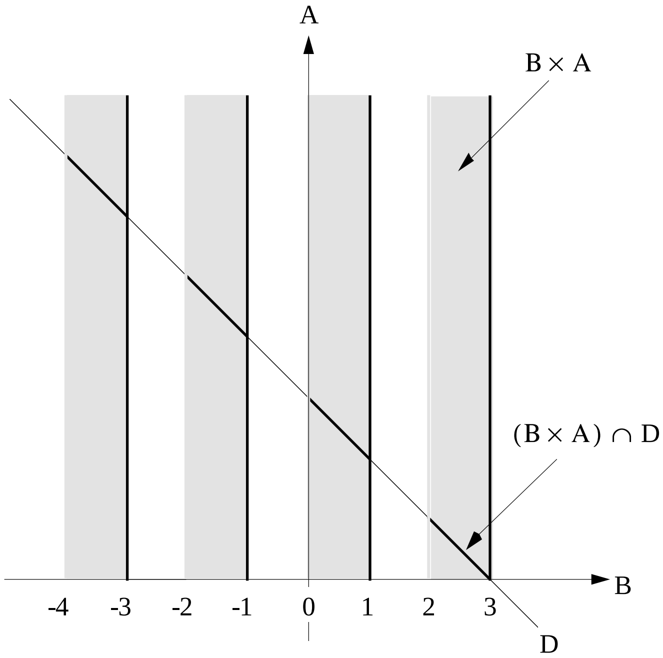
15. $A = \{-1;\,0;\,1;\,2;\,3\}$, $\quad B = \{0;\,1;\,2;\,3\}$, $\quad C = \{(x;\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -x + 1\}$.



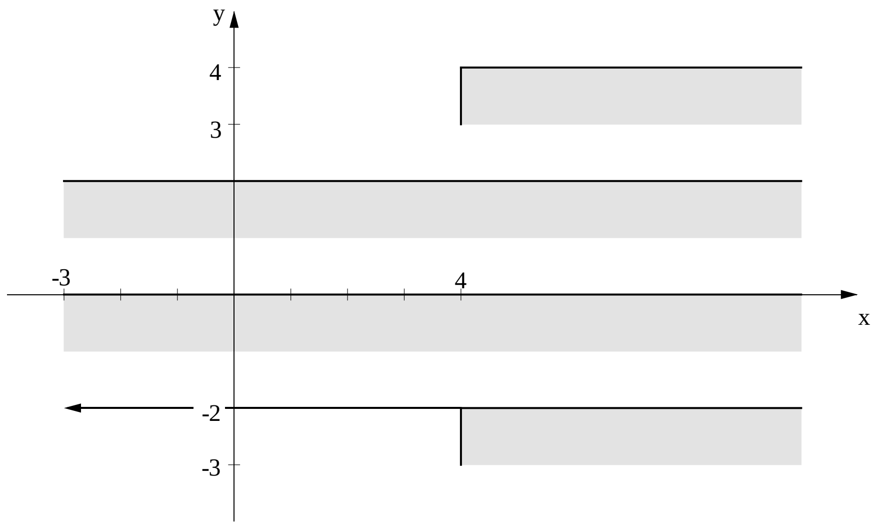
16. $A =]0;\rightarrow[$,

$B =]-4;\,-3] \cup]-2;\,-1] \cup]0;\,1] \cup]2;\,3]$,

$D = \{(x;\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y - 3 = 0\}$.



17. $A =]-3; \to [$,
$B =]-3;\, -2] \cup]-1;\, 0] \cup]1;\, 2] \cup]3;\, 4]$,
$D = \{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 4 \;\text{ ou }\; |y| \leq 2\}$.



18. $\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset;\, \{(0;\, 1)\}\}$,
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset;\, \{\emptyset\};\, \{\{(0;\, 1)\}\};\, \{\emptyset;\, \{(0;\, 1)\}\}\}$.

19. $R \;\Leftrightarrow\; \overline{A} \,\cup\, B \;=\; E$
$S \;\Leftrightarrow\; A \subset B$

20. Soient $A = \{\, n \in E \mid n \text{ vérifie } P \,\}$, $B = \{\, n \in E \mid n \text{ vérifie } Q \,\}$ et
$C = \{\, n \in E \mid n \text{ vérifie } R \,\}$.
Il suffit de vérifier que $(A \cap B) \subset C$.