(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	7	
2	6	
3	7	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Anne-Marie Dovi, Sacha Friedli, Véronique Tissot

Question 1 (à 7 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans un repère orthonormé direct, on considère trois points $M\,(2,2,-1)$, $N\,(1,0,1)$ et $P\,(1,-1,2)$.

1. Vérifier que M, N, et P ne sont pas alignés, et qu'ils définissent un plan α dont on donnera l'équation cartésienne.
2. On considère deux droites, données par

$$a: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Donner une marche à suivre permettant de trouver une droite d qui intersecte à la fois a et b, et dont la projection orthogonale sur α passe par M et N. Ensuite, déterminer les équations paramétriques de d.

Solution: 1.

$$\alpha : y + z - 1 = 0$$

2.

$$d: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Question 2 (à 6 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé et d'une origine O, on considère un point A, et on pose $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. On donne, de plus, une droite d passant par O et dirigée par $\vec{v}$, ainsi qu'une droite g passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, tel que $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$. On considère le losange $ABCD$ sachant que

- B est l'intersection de d avec g,
- $D \in d$.

À l'aide du calcul vectoriel uniquement, déterminer $\overrightarrow{OB}$, puis $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$, en fonction de $\vec{a}, \vec{n}, \vec{v}$.

Solution:

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\vec{v}, \quad \overrightarrow{OC} = 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \left(2\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\right)\vec{v}.$$

Question 3 (à 7 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

L'espace est muni d'une origine O. On considère trois points A, B, M, tels que $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM}$ soient linéairement indépendants. On note d la droite $(O, \vec{a})$ et g la droite $(O, \vec{b})$.

1. On considère un point P appartenant à d et situé à distance $\delta > 0$ de g. **À l'aide du calcul vectoriel uniquement**, déterminer $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et δ.

2. Utiliser le calcul vectoriel pour déterminer (en fonction de $\overrightarrow{OM}, \vec{a}$ et $\vec{b}$) le rayon-vecteur d'un point C tel que le triangle OMC soit isocèle de base OM, et que la droite (MC) soit orthogonale au plan défini par d et g.
3. Calculer les coordonnées de C avec les données numériques suivantes (dans un repère orthonormé direct) : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M\,(2, 2, -4)$.

Solution: 1.

$$\overrightarrow{OP_{\pm}} = \pm \frac{\delta \|\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})\|}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))} \vec{a}\,.$$

2.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} - \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2}{2\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})} \vec{a} \times \vec{b}\,.$$

3. $C\,(14, 8, 8)$.