Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 6

Chgt de Bases : exercice 8

(a) *Première méthode* :

La matrice M est donnée relativement aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_u$. On peut donc supposer ces bases comme étant les "anciennes" bases.

On doit déterminer la matrice M' de h par rapport aux bases $\mathcal{B}_w$ et $\mathcal{B}_e$. Ces bases sont les "nouvelles" bases. Ce qui donne le diagramme de changement de bases suivant.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(P_2[x], \mathcal{B}_v)\\ X_v\end{array} \arrow[rr, "M"] \arrow[d, squiggly, shift left] & & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_u)\\ Y_u = M X_v\end{array} \arrow[d, squiggly, shift right] \\
\begin{array}{c}(P_2[x], \mathcal{B}_w)\\ X'_w\end{array} \arrow[rr, "M'"] \arrow[u, "P", shift left] & & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_e)\\ Y'_e = M' X'_w\end{array} \arrow[u, "Q"', shift right]
\end{tikzcd}
$$

On a la relation : $\quad M' = Q^{-1}\, M\, P$

Il faut donc déterminer les deux matrices de passage.

- P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_v(x^2;\ x;\ 1)$ de $P_2[x]$ à la base $\mathcal{B}_w(x-1;\ 1;\ x^2)$.

  $$x-1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_v \qquad 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_v \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_v$$

  Donc : $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_u$ de $\mathbb{R}^2$ à la base canonique $\mathcal{B}_e$.

  Or pour calculer M', on a besoin de Q^{-1} qui est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_e$ à la base $\mathcal{B}_u$. Pour construire Q^{-1} il faut connaître les composantes des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans la base $\mathcal{B}_e$. Ce qui est donné dans l'énoncé.

  Donc : $\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- Ainsi : $\quad M' = Q^{-1}\, M\, P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Deuxième méthode :

- On considère les bases canoniques $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$ comme les "anciennes" bases.
  Les "nouvelles" bases sont $\mathcal{B}_w$ et $\mathcal{B}_u$.
  On appelle A la matrice de h par rapport à $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$.
  Ce qui donne le diagramme de changement de bases suivant.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(P_2[x],\mathcal{B}_v)\\ X_v\end{array} \arrow[rr, "A"] \arrow[drr, red, "M"] \arrow[d, squiggly] & & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_e)\\ Y_e = AX_v\end{array} \arrow[d, squiggly] \\
\begin{array}{c}(P_2[x],\mathcal{B}_w)\\ X'_w\end{array} \arrow[rr] \arrow[u, "P"] \arrow[urr, blue, "M'"'] & & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_u) \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

  On a les relations :

$$\left.\begin{array}{lcl} M = Q^{-1}\, A & \Leftrightarrow & A = Q\, M \\ M' = A\, P & \Leftrightarrow & A = M'\, P^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q\, M = M'\, P^{-1}$$

  Finalement : $\quad M' = Q\, M\, P$

- P est la matrice de passage de la base canonique de $P_2[x]$ à la base $\mathcal{B}_w$.

$$x - 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_v \qquad 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_v \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_v$$

  Donc : $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_e$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}_u$.

  Il faut donc connaître, pour la construire, les composantes des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans la base $\mathcal{B}_e$. Ce qui est donné dans l'énoncé.

  Donc : $\quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- Ainsi : $\quad M' = Q\, M\, P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) - $\overrightarrow{OP'} = 9\vec{e}_1 + 6\vec{e}_1$

$\overrightarrow{OP'}$ est donné dans la base $\mathcal{B}_e$ et il faut calculer les composantes de $h^{-1}(\overrightarrow{OP'})$ dans $\mathcal{B}_w$.
On utilise donc la matrice M' .

- $h^{-1}(\overrightarrow{OP'}) = \{\, p(x) \in P_2[x] \;|\; h(p(x)) = \overrightarrow{OP'} \,\} \subset P_2[x]$

  On pose $p(x) = a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot x^2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_w = X_w$

  et $\quad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}_e = Y'_e$

  $$\begin{aligned} h(p(x)) = \overrightarrow{OP'} \quad &\Leftrightarrow \quad M'\, X_w = Y'_e \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}_e \end{aligned}$$

  On obtient les relations suivantes :

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} 3a - 3b & = & 9 \\ 2c & = & 6 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & a - 3 \\ c & = & 3 \end{array} \right.$$

  D'où $p(x) = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ 3 \end{pmatrix}_w$ composantes de $p(x)$ dans $\mathcal{B}_w$.

  Il faut encore expliciter ces polynômes dans la base canonique :

  $$\begin{aligned} h^{-1}(\overrightarrow{OP'}) &= \{\, p(x) \in P_2[x] \mid p(x) = a(x-1) + (a-3) + 3x^2 \,,\; a \in \mathbb{R} \,\} = \\ &= \{\, p(x) \in P_2[x] \mid p(x) = 3x^2 + ax - 3 \,,\; a \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

Chgt de Bases : exercice 9

La matrice M de l'application f de la base $\mathcal{B}_e$ à la base $\mathcal{B}_u$ est donnée ; voici le diagramme avec les différentes bases proposées :

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_e) \\ X_e\end{array} \arrow[r, "M_f"] \arrow[d, squiggly, shift left] & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_u) \\ Y_u = M_f X_e\end{array} \arrow[d, squiggly, shift right] \\
\begin{array}{c}\color{red}(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_f) \\ X'_f\end{array} \arrow[r, red, "\color{red}M'_f"] \arrow[u, "P", shift left] & \begin{array}{c}\color{red}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_v) \\ Y'_v = M'_f X'_f\end{array} \arrow[u, "Q"', shift right]
\end{tikzcd}$$

Dans la donnée, les vecteurs $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ sont déjà connus en fonction de l'ancienne base $\mathcal{B}_e$:

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} \\ \vec{f_3} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} - \vec{e_3} \end{cases} \qquad \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_e \ , \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_e \quad \text{et} \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}_e$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_f$ est donc immédiate : $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ avec évidemment $\det P \neq 0$.

La nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B}_v$. Dans la donnée, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont déjà connus en fonction de l'ancienne base $\mathcal{B}_v$:

$$\begin{cases} \vec{v_1} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2} \\ \vec{v_2} = 2\vec{u_1} - 3\vec{u_2} \end{cases} \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_v \quad \text{et} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}_v$$

La matrice de passage Q de $\mathcal{B}_u$ à $\mathcal{B}_v$ est donc immédiate : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ avec évidemment $\det Q \neq 0$.

Une des deux matrices inverses sera utile dans le point suivant, la voici :

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a la relation (le diagramme s'avère très utile) : $M_f' = Q^{-1} M_f P$

Ainsi :

$$M_f' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 2 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Il faut utiliser cette matrice pour chercher l'image de la droite d donnée.
On cherche : $\vec{y} = f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in d$ et $\vec{y}$: image de la droite d
On a la relation matricielle : $\Leftrightarrow Y' = M_f' X'$: dans les bases $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_v$.

$$Y' = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 2+8\lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-21\lambda+4+16\lambda-14-7\lambda \\ 5+15\lambda-2-8\lambda+10+5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17-12\lambda \\ 13+12\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \end{pmatrix} + 12\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Il s'agit donc d'une droite passant par le point $\begin{pmatrix} -17 \\ 13 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Chgt de Bases : exercice 10

Si les bases au départ et à l'arrivée sont les mêmes alors la matrice associée à l'application identité est la matrice unité I_3.

Mais attention, relativement à deux bases différentes, ce n'est pas la matrice unité.

On va déterminer directement les images des vecteurs de la base. Leurs composantes sont alors les colonnes de la matrice de l'application.

On considère l'application : $\begin{array}{rccc} i & : & \mathbb{R}^3,\, \mathcal{B}_v & \longrightarrow & \mathbb{R}^3,\, \mathcal{B}_e \\ & & \vec{x} & \longmapsto & i(\vec{x}) = \vec{x} \end{array}$

Pour déterminer la matrice I_e^v relativement aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$, il faut connaître les images des vecteurs de la base de l'ensemble de départ, c'est-à-dire de $\mathcal{B}_v$.

Or par définition de l'application i, on a : $\quad i(\vec{v}_1) = \vec{v}_1\,, \qquad i(\vec{v}_2) = \vec{v}_2\,, \qquad i(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$

Il faut maintenant les composantes de ces images dans la base $\mathcal{B}_e$. Ce sont précisément les composantes des vecteurs de la nouvelle base ! D'où :

$$i(\vec{v_1}) = \vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e = \text{ 1ère colonne de } I_e^v$$

$$i(\vec{v_2}) = \vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_e = \text{ 2ième colonne de } I_e^v$$

$$i(\vec{v_3}) = \vec{v_3} = -3\vec{e_1} - \vec{e_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_e = \text{ 3ième colonne de } I_e^v$$

Ainsi

$$I_e^v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate donc que I_e^v est la matrice de passage P du changement de bases de $\mathcal{B}_v$ à $\mathcal{B}_e$.

Ce qui va permettre de décrire avec précision comment change la matrice associée à une application linéaire, lorsqu'on change de base.

Remarques :

- Au produit matriciel $M_g\, M_f$ correspond la composition des applications $g \circ f$ (on commence par f puis on applique g).
- Quelle que soit la base, lorsqu'elle est la même au départ et à l'arrivée, la matrice de l'application identité est la matrice unité I_n.

On considère le diagramme de changement de bases suivant

$$\begin{tikzcd}
i \,:\, (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_e) \arrow[r, "I_e^e = I_3"] \arrow[d, squiggly, "P"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_e) \arrow[d, squiggly, "P"] \\
i \,:\, (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_v) \arrow[r, "I_v^v = I_3"] \arrow[ur, blue, "I_e^v"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_v)
\end{tikzcd}$$

Selon la relation entre la matrice de passage et celles de l'application, on a

$$I_e^v \;=\; I_e^e \cdot P \;=\; I_3 \cdot P \;=\; P$$

On retrouve le résultat obtenu auparavant : la matrice P est la matrice de l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$.

La matrice P^{-1} est la matrice de l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_v$.

Ce qui permet de réinterpréter le diagramme général lorsque f est une application linéaire de E vers F.

On note i_E l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$, et i_F l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}_w$ et $\mathcal{B}_f$.

$$\begin{tikzcd}
f \;:(E,\mathcal{B}_e) \arrow[r, "M"] & (F,\mathcal{B}_f) \arrow[d, "i_F^{-1}", "Q^{-1} = I_w^f"'] \\
f \;:(E,\mathcal{B}_v) \arrow[u, "P = I_e^v", "i_E"'] \arrow[r, "M'"] & (F,\mathcal{B}_w)
\end{tikzcd}$$

$$M' \;=\; Q^{-1}\, M\, P \;=\; I_w^f\; M\; I_e^v$$

ce qui correspond à la composition des applications

$$f \;=\; i_F^{-1} \circ f \circ i_E$$

(i_F^{-1} désigne l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_v$)

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(E,\mathcal{B}_e)\\ X_e\end{matrix} & \textbf{ancienne base} \\
\begin{matrix}(E,\mathcal{B}_v)\\ X'_v\end{matrix} \arrow[u, "I_e^v = P", "i_E"'] & \textbf{nouvelle base}
\end{tikzcd}$$

$$X_e \;=\; P\, X'_v \quad\Leftrightarrow\quad X_e \;=\; I_e^v\; X'_v \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x} \;=\; i_E\,(\vec{x})$$

Valeurs propres : exercice 1

(a) *Hypothèse* : λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre $\vec{x}$.

Conclusion : $k\,\lambda$ est une valeur propre de $k\,f$ associée au vecteur propre $\vec{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Preuve :

Par hypothèse :

$$
\begin{array}{lll}
f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} \;\Rightarrow & k\,(f(\vec{x})) = k\,(\lambda\,\vec{x}) & k \in \mathbb{R}^* \\
 & (k\,f)(\vec{x}) = (k\,\lambda)\,\vec{x} & \text{par défintion du produit d'une application par un scalaire et de la multiplication des scalaires dans un espace vectoriel}
\end{array}
$$

Ainsi $k\,\lambda$ est une valeur propre de $k\,f$ associée au vecteur propre $\vec{x}$.

(b) *Hypothèse* : λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre $\vec{x}$.

Conclusion : λ^k est une valeur propre de f^k associée au vecteur propre $\vec{x}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Preuve par induction :

- L'énoncé est vrai pour $n = 1$ car c'est l'hypothèse de départ : $f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$
- Hypothèse d'induction : on suppose que l'énoncé est vérifié pour k, c'est-à-dire : $\lambda^k\,\vec{x} = f^k(\vec{x})$
- En utilisant l'hypothèse d'induction, il faut montrer : $\lambda^{k+1}\,\vec{x} = f^{k+1}(\vec{x})$

  On a donc :

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(\vec{x}) &= f\,(f^k(\vec{x})) \\
&= f(\lambda^k\,\vec{x}) \quad \text{par hyp. d'induction} \\
&= \lambda^k\,f(\vec{x}) \\
&= \lambda^k\,\lambda\,\vec{x} \\
&= \lambda^{k+1}\,\vec{x}
\end{aligned}
$$

  Ainsi λ^{k+1} est une valeur propre de f^{k+1} associée au vecteur propre $\vec{x}$.

(c) *Hypothèse* : f est bijective et λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre $\vec{x}$.

Conclusion : λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}.

Preuve : Par hypothèse :

$$
\begin{array}{llll}
f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} & \Rightarrow & f^{-1}\,(f(\vec{x})) = f^{-1}\,(\lambda\,\vec{x}) & \text{f est inversible par hypothèse} \\
 & \Rightarrow & \vec{x} = \lambda\,f^{-1}(\vec{x}) & \text{car } f \circ f^{-1} = Id \text{ et } f^{-1} \text{ est linéaire} \\
 & \Rightarrow & f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\,\vec{x} & \lambda \text{ étant non nul par hypothèse}
\end{array}
$$

Ainsi λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}.

Valeurs propres : exercice 2

Rappel :

$$
\begin{aligned}
\ker f &= \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\,\} \\
\operatorname{Im} f &= \{\vec{y} \in E \mid \exists\,\vec{x} \in E \text{ tel que } f(\vec{x}) = \vec{y}\,\}
\end{aligned}
$$

(a) *Preuve* :

Par hypothèse $\vec{x}$ est un vecteur propre de f associé à $\lambda = 0$, d'où

$f(\vec{x}) = 0\,\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \in \ker f$

Pour montrer la réciproque de b), utiliser une preuve par l'absurde.

(b) **Sens direct** :
Hypothèse : $\lambda \neq 0$
Conclusion : $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$

Preuve :

Par hypothèse $\vec{x}$ est un vecteur propre de f associé à $\lambda \neq 0$, d'où

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) \;=\; \lambda\,\vec{x} \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{\lambda}\,f(\vec{x}) \;=\; \vec{x} \\ &\Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{\lambda}\,\vec{x}) \;=\; \vec{x} \end{aligned}$$

Donc : $\exists\, \vec{x'} \;=\; \frac{1}{\lambda}\,\vec{x}$ tel que $f(\vec{x'}) \;=\; \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \in \operatorname{Im} f$

Réciproque :
Hypothèse : $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$
Conclusion : $\lambda \neq 0$

Preuve par l'absurde :

On considère les deux hypothèses H et non C : $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda = 0$.

On a alors : $f(\vec{x}) = 0\,\vec{x} = \vec{0}$ donc $\vec{x} \in \ker f$.

Ainsi : $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$ et $\vec{x} \in \ker f$.

Or par hypothèse, $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont linéairement indépendants
donc $\operatorname{Im} f \,\cap\, \ker f = \{\vec{0}\}$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$.

On a donc simultanément $\vec{x} = \vec{0}$ et $\vec{x} \neq \vec{0}$ (car $\vec{x}$ est vecteur propre).
Ce qui est impossible.

D'où $\lambda \neq 0$.

Valeurs propres : exercice 5

Il faut utiliser la définition et la caractérisation des valeurs propres et des espaces propres d'une matrice.
On pose $A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Soit f l'endomorphisme de matrice A.

- $\vec{u}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 si et seulement si $f(\vec{u}) \;=\; \vec{u}$.

  $\vec{v}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2 si et seulement si $f(\vec{v}) \;=\; 2\,\vec{v}$.

- $f(\vec{u}) = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad AU \;=\; U$

  $f(\vec{v}) \;=\; 2\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad AV \;=\; 2V$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 3c + d = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2c + d = 2 \end{cases}$$

- On a donc le système de 4 équations suivant :

  $$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ 2a + b = 4 \\ 3c + d = 1 \\ 2c + d = 2 \end{cases}$$

  qui a pour solutions : $a = -1$, $b = 6$, $c = -1$ et $d = 4$.

  D'où la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

A^3 est donc la matrice de f^3.

On a montré que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est aussi un vecteur propre de f^3. Mais la valeur propre de f^3, et donc de A^3, est λ^3.

Les valeurs propres de A^3 sont : $1^3 = 1$ et $2^3 = 8$.
Ainsi 6 n'est pas une valeur propre de A^3 .