Analyse II : Contrôle N° 3

Corrigé

1. (a) Trouver l'expression de a en fonction de x pour que : 2 pts

$$\ln(x+a) = \ln(x) + \ln(a)$$

Cond. d'existence : $x > 0$ et $a > 0$ $\frac{1}{2}$

Utilisation des propriétés du logarithme : $\ln\left(\dfrac{x+a}{xa}\right) = 0$ $\frac{1}{2}$

Compte tenu de la stricte monotonie positive de la fonction logarithme, on prend l'exponentielle de l'équation et on obtient :

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \dfrac{x}{x-1} \qquad x \neq 1$ $(-0.25\,\text{pt}$ si absent$)$ 1

En fait, les plus futés remarquent que : $a > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1\,!$

(b) Soient les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^e$; trouver leurs points d'intersection. L'une de ces affirmations est-elle correcte ? $e^\pi < \pi^e$ ou $e^\pi > \pi^e$

Justifiez rigoureusement votre réponse. 2 pts

$f(x) = e^x = g(x) = e^{(e \ln x)} \quad \Rightarrow \quad x = e \ln x\,;$ on a pris le logarithme vu qu'on a une fonction puissance (cond. $x > 0$). $\frac{1}{2}$

Par la dérivée, nous obtenons le seul point solution : $x = e$ $\frac{1}{2}$

On a l'égalité uniquement pour $x = e$; on peut écrire : $g(x) = e^{(e \ln x)}$;

comme les deux fonctions sont monotones croissantes, on aura $f(x) > g(x)$ si l'inégalité est vraie pour une seule valeur $> e$;

pour faire un calcul simple, on choisit par exemple $x_0 = e^2$ et on obtient pour les exposants : $e^2 > 2e$ donc $f(x) > g(x)$ pour $x > e$, en particulier pour $x = \pi$;

ainsi $e^\pi > \pi^e$. (un simple calcul machine ne donne qu'un quart de point) 1

2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{Arsh} y &= 2\operatorname{Arsh} x \\ \operatorname{Arch} y &= 3\operatorname{Arch} x \end{cases}$$

3 pts

La première équation est partout définie et vu la monotonie du Arsh on va prendre le Sh en utilisant la formule d'addition des arguments :

$y = 2x\operatorname{Ch}(\operatorname{Arsh} x) = 2x\sqrt{\operatorname{Sh}^2(\operatorname{Arsh} x) + 1} = 2x\sqrt{x^2+1} \quad (1)$ 1

On procède de la même manière pour la deuxième équation dont on va prendre le Ch :

$y = \operatorname{Ch}(3\operatorname{Arsh} x) = \operatorname{Ch}(\operatorname{Arsh} x + 2\operatorname{Arsh} x) = ... = 4x^3 - 3x \quad (1)$ 1

(utilisation répétitive de la formule de la somme)

Attention ! pour utiliser la deuxième formule, il faut tenir compte des conditions d'existence : $x > 1$ et $y > 1 \quad (3)$ $\frac{1}{2}$

(1) et (2) $\quad\Rightarrow\quad 2x\sqrt{x^2+1} = 4x^3 - 3x \quad\Rightarrow\quad 16x^4 - 28x^2 + 5 = 0 \quad$ car $x \neq 0$

Solution de l'équation bicarrée : $x^2 = \dfrac{7 \pm \sqrt{29}}{8} = \dfrac{7+\sqrt{29}}{8}$ (condition (3)) $\Rightarrow$

$$x = \sqrt{\frac{7+\sqrt{29}}{8}} \cong 1.244$$

$\frac{1}{2}$

3. Résoudre $\mid z \mid -9i = 3z - 7$ 2.5 pts

Posons $z = x + iy$:

$\mid z \mid -9i = 3z - 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} - 9i = 3x + 3iy - 7 \quad \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$

$\left\{ \begin{array}{lcl} \sqrt{x^2+y^2} & = & 3x - 7 \\ -9 & = & 3y \end{array} \right. \quad \Rightarrow y = -3$ $\frac{1}{2}$

on a donc : $\sqrt{x^2+9} = 3x - 7$ avec la condition de positivité $x > \frac{7}{3} \quad (*)$

$x^2+9 = 9x^2-42x+49 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2-42x+40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-21x+20 = 0$ $\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)(4x-5) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4 \\ x & = & \frac{5}{4} \end{array} \right.$ $\frac{1}{2}$

$x = \frac{5}{4}$ est exclu à cause de $(*)$ $\frac{1}{2}$

D'où : $z = 4 - 3i$

4. (a) Déterminer la valeur du paramètre λ pour que les nombres complexes donnés par :

$z = \dfrac{[2^\lambda ; \frac{3\pi}{8}]}{\sqrt{1+i}}$ satisfassent Im(z) = -1 3 pts

---

On écrit le nombre complexe du dénominateur sous forme d'un module et d'un argument :

$$z = \frac{[2^\lambda ; \frac{3\pi}{8}]}{[2^{\frac{1}{2}} ; \frac{\pi}{4} + 2k\pi]^{\frac{1}{2}}} = \frac{[2^\lambda ; \frac{3\pi}{8}]}{[2^{\frac{1}{4}} ; \frac{\pi}{8} + k\pi]} = [2^{\lambda - \frac{1}{4}} ; \frac{\pi}{4} + k\pi] \qquad \text{où} \quad k = 0 \text{ ou } 1$$ 1

$$Im(z) = 2^{\lambda - \frac{1}{4}} sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -1 \qquad \text{où} \quad k = 0 \text{ ou } 1$$ $\frac{1}{2}$

Pour $k = 0$ la solution est impossible : le nombre est positif donc $\neq -1$ $\frac{1}{2}$

Pour $k = 1$ on obtient : $2^{\lambda - \frac{1}{4}} sin\dfrac{5\pi}{4} = 2^{\lambda - \frac{1}{4}} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -1 \qquad \Rightarrow$

$2^{(\lambda - \frac{3}{4})} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \dfrac{3}{4}$ 1

(b) Soient les quatre nombres complexes suivants :

$$z_0 = 7 + 6i\,; \quad z_1 = 7i\,; \quad z_2 = -1\,; \quad z_3 = 6 - i\,.$$

Déterminer les nombres complexes ω_0 et ω tels que :

$$z_i = \sqrt[4]{\omega - \omega_0} + \omega_0 \qquad \forall i = 0, ..., 3$$

. 2.5 pts

On peut écrire : $\tilde{z}_i = \sqrt[4]{\tilde{\omega}} \qquad \forall i = 0, ..., 3$; les racines quatrièmes de $\tilde{\omega}$ sont situées sur un carré centré en O.

Par un dessin, on constate que ces quatre nombres complexes sont situés sur un carré (polynôme régulier) ; vu de son centre, on peut considérer qu'ils représentent les racines quatrièmes du nombre $\omega - \omega_0$;

Le centre du carré est donc $\omega_0(3; 3)$. 1

En exprimant l'équation par rapport à ω , on obtient :

$$(z_i - \omega_0)^4 + \omega_0 = \omega \qquad \forall i = 0, ..., 3$$

$\frac{1}{2}$

Il suffit alors de résoudre l'équation pour un seul de ces points :

$\omega = (7 + 6i - 3 - 3i)^4 + 3 + 3i = (4 + 3i)^4 + 3 + 3i = (7 + 24i)^2 + 3 + 3i = -527 + 336i + 3 + 3i = -524 + 339i = \omega$ 1

On accepte aussi:

$[625\,; 4 \cdot \arctan(\frac{3}{4})] + [3\sqrt{2}\,; \frac{\pi}{4}] = \omega$ [1]