Nous commençons cette série par montrer que le rang ligne d'une matrice est égal au rang colonne (ce qui sera démontré dans le MOOC dans le chapitre 6 (§6.6 et 6.7) et a été démontré dans le cours le 22.10.2020.)

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $T_A((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = A \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. On note que $\ker(T_A) = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\}$ qui est l'ensemble des solutions du système homogène associé à la matrice A. Donc la dimension du noyau de T_A est égal au nombre de variables libres dans l'ensemble des solutions, qui est égal à

$$(n - \text{le nombre de pivots dans une forme échelonnée de } A).$$

Le nombre de pivots dans une forme échelonnée de A est exactement égal au rang ligne de A.

Donc
$$\dim(\ker(T_A)) = n - \text{ rang ligne de } A.$$

On souhaite utiliser le théorème du rang donc on veut aussi faire intervenir la dimension de l'image de T_A. Soit $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ la base usuelle de $\mathbb{R}^n$ et soit C_i la i-ème colonne de A. Alors l'image de T_A est égale à l'espace $\text{Vect}\,(T_A(e_1),\ldots,T_A(e_n))$. On constate que $A\cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = C_1$, $A\cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = C_2$, et ainsi de suite, et donc $\text{Im}\,(T_A)$ est l'espace colonnes de A (où on identifie l'ensemble des vecteurs colonnes $\{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} \mid \beta_i \in \mathbb{R}\}$ avec $\mathbb{R}^m$.

Maintenant on applique le théorème du rang :

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Im}\,(T_A) + \dim\ker(T_A) = \text{ rang colonne de } A + n - \text{ rang ligne de } A,$$

et on déduit que
$$n = \text{ rang colonne de } A + n - \text{ rang ligne de } A,$$

et de suite
$$\text{rang colonne de } A = \text{ rang ligne de } A.$$

Par conséquent de ce qui précède, désormais nous parlerons du *rang* d'une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Le *rang* de A est le rang ligne de A qui est aussi le rang colonne de A.

Exercice 1. *Donner un exemple, ou expliquer pourquoi il n'existe aucun exemple, de*

a) une matrice 3×4 *dont le rang est 3.*

b) une matrice 4×3 *dont le rang est 3.*

c) une matrice 2×3 *dont le rang est 3.*

d) une matrice échelonnée de dimension 4×4 *dont le rang est 3.*

e) une matrice avec plus de lignes que de colonnes et dont le rang est égal au nombre de colonnes.

f) une matrice avec plus de lignes que de colonnes et dont le rang est égal au nombre de lignes.

Solution 1. a) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

b) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

c) Ce cas est impossible. En effet, soit $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes de A sont alors des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Donc l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$; il est donc au plus de dimension 2.

d) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

e) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, elle a donc plus de lignes que de colonnes. De plus, son rang est 2.

f) Soit $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, où $n > m$. Alors le rang de A est la dimension de l'espace engendré par des colonnes de A. Comme il y a m colonnes, le rang ne peut pas être plus grand que m, et ne peut donc pas être n.

Exercice 2. *1. Donner un exemple d'une transformation linéaire $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ qui n'est ni injective ni surjective.*

2. Donner un exemple d'une transformation linéaire $S : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ qui est injective et non surjective.

3. Trouver une condition sur des entiers positifs n et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ qui soit injective.

4. Trouver une condition sur des entiers positifs n et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ qui soit surjective.

Solution 2. 1. D'une manière générale, l'application linéaire $T : V \longrightarrow W$ qui envoie tout vecteur de V sur $\mathbf{0} \in W$ n'est pas injective si $\dim V > 0$ et pas surjective si $\dim W > 0$. On peut donc faire cela. Pour un exemple plus intéressant, on peut envoyer une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur le vecteur $(a, b, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Ici, il suffit de considérer l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \\ (a, b, c, d) &\longmapsto a + bx + cx^2 + dx^3. \end{aligned}$$

Il est clair que cette application est injective (seul le vecteur $\mathbf{0}$ est envoyé sur le polynôme 0) et qu'elle n'est pas surjective (puisque les polynômes créés sont de degré au plus 3) : on a $\operatorname{Im} S = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

3. Pour commencer, on considère la condition sur des entiers n' et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{n'} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui soit injective. Le théorème du rang nous dit que $n' = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$. Ainsi, pour que φ soit injective, on doit avoir $n' = \dim \operatorname{Im} \varphi$. Puisque $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$, on a $\operatorname{Im} \dim \varphi \leq m$ et la condition devient $n' \leq m$. En revenant à notre question, comme $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$, on doit avoir $n+1 \leq m$. De plus, si $n+1 \leq m$, on peut trouver une application linéaire injective, par exemple, $\varphi(t^i)$ est le vecteur de base e_{i+1} dans $\mathbb{R}^m$ avec 1 dans la $(i+1)$-ième coordonnée et 0 ailleurs.
4. Comme avant, on considère pour commencer la condition sur les entiers n' et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{n'} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui soit surjective. Le théorème du rang nous dit que $n' = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$. Ainsi, pour que φ soit surjective, on doit avoir $n' = \dim \ker \varphi + m$. Comme $\dim \ker \varphi \geq 0$, cela donne la condition $n' \geq m$. En revenant à notre question, on doit avoir $n+1 \geq m$. De plus, si $n+1 \geq m$, on peut trouver une application linéaire surjective, par exemple $\varphi(t^i) = e_{i+1}$ pour $i \leq m-1$ et $\varphi(t^j) = 0$ pour $j \geq m$.

Exercice 3. *A l'aide de l'information donnée et sachant que la transformation T est linéaire, déterminer dans chacun des cas ci-dessous la dimension de* $\ker T$.

a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ *est de rang* 3.

b) $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *est de rang* 1.

c) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ *ayant pour image* $\mathbb{R}^3$.

Solution 3.

1. On a que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$. Or, le théorème du rang nous dit
$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\ker(T)).$$
Ainsi, $\dim(\ker(T)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = 5 - 3 = 2$.
2. A nouveau en utilisant le théorème du rang, on a
$$\dim(\ker(T)) = \dim(\mathcal{P}_4(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = 5 - 1 = 4.$$
3. L'énoncé nous dit que $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, donc $\operatorname{rg}(T) = \dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$. Donc par le théorème du rang, on a
$$\dim(\ker(T)) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = 6 - 3 = 3.$$

Exercice 4. *Soit $\varphi : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ l'application linéaire définie par*
$$\varphi\Big(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\Big) = (a+b, c+d, a+b+c+d, e, f).$$
Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(\varphi)$ *et trouver une base de* $\operatorname{Im}(\varphi)$ *et de* $\ker(\varphi)$.

Solution 4. Tout d'abord on s'intéresse au noyau, car c'est plus facile de calculer. Le noyau de φ est
$$\Big\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a+b = 0 = c+d = a+b+c+d = e = f = 0 \Big\}$$
$$= \Big\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a = -b, c = -d, e = f = 0 \Big\}$$
.
$$= \Big\{ \begin{pmatrix} -b & b & -d \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R} \Big\}.$$

On a que la dimension du noyau est égale à 2 avec base $\Big\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\}$. On déduit d'après le théorème du rang que l'image de φ est de dimension $6 - 2 = 4$. L'image est engendré par les images des vecteurs dans la base usuelle de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, donc $\varphi\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = (1,0,1,0,0)$, et de suite, $(1,0,1,0,0),(0,1,1,0,0),(0,1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)$. De cet ensemble de générateurs on peut extraire une base (on cherche un sous-ensemble de 4 vecteurs linéairement indépendants) donc

$$\{(1,0,1,0,0),(0,1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$$

est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Exercice 5. *(1) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :*

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, T((1,0)) = (1,2,0,5)$ *et* $T((0,1)) = (3,-6,1,0)$.

(ii) $\mathbf{T} : M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_4\\0\end{bmatrix}$.

(iii) La rotation dans $\mathbb{R}^3$ *d'axe* Oz *et d'angle* 60^o *(dans le sens trigonométrique).*

(2) Vrai-faux : Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application linéaire. Alors, si* T *est surjective alors elle est aussi injective.*

Solution 5. (1) (i) Par le théorème du rang, T ne peut pas être surjective car $\dim \mathrm{Im}\,(T) \leq 2$. Aussi, l'image de T est engendré par $T((1,0)$ et $T((0,1)$. Comme $(1,2,0,5)$ et $(3,-6,1,0)$ sont linéairement indépendants, on a aussi que $\dim \mathrm{Im}\,(T) \geq 2$. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(T) = 2$ et T est injective par le théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Im}\,(T) + \dim \ker(T) = 2 + \dim \ker(T)$ et donc $\dim \ker(T) = 0$ et T est injective.

(ii) De nouveau on voit que $\mathbf{T}$ n'est pas surjective car le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'image de $\mathbf{T}$.

Par le théorème du rang, $\mathbf{T}$ n'est pas injective.

(iii) Une rotation est injective car le seul vecteur qui est envoyé sur le vecteur nul est le vecteur nul. Par consèquent, le corollaire du théorème du rang implique qur la rotation est aussi surjective.

(2) Vrai : corollaire du théorème du rang.

Exercice 6. *Soit* $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *l'application définie par* $T(A) = A + A^T$.

1. *Déterminer si* T *est linéaire.*
2. *Déterminer si* T *est surjective.*
3. *Déterminer si* T *est injective.*
4. *Déterminer l'ensemble* W *des matrices qui vérifient* $T(A) = 0$ *et démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solution 6. 1. On rappelle que $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$, pour tout $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$T(\alpha A + B) = (\alpha A + B) + (\alpha A + B)^T = \alpha A + B + (\alpha A)^T + B^T =$$
$$\alpha A + B + \alpha \cdot A^T + B^T = \alpha(A + A^T) + B + B^T = \alpha T(A) + T(B).$$

2. Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, alors T est donnée explicitement par la formule $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a & b+c\\ b+c & 2d\end{pmatrix}$. On voit ici que les coefficients $(1,2)$ et $(2,1)$ sont les mêmes si bien que la matrice $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, par exemple, ne peut pas être de la forme $T(A)$. L'application T n'est pas surjective.

3. T n'est pas injective non plus puisqu'il existe des matrices non nulles qui sont envoyées sur la matrice nulle par T, par exemple $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aussi par les corollaires du théorème du rang, T est injective si et seulement si T est surjective, car T est une application linéaire d'un espace de dimension 4 dans un espace de dimension 4. Comme nous avons vu que T n'est pas surjective, alors T n'est pas injective.
4. Pour trouver W on doit trouver toutes les matrices A dont les coefficients vérifient les équations $2a = 0, 2d = 0, b + c = 0$. On trouve donc

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   On a que $W = \ker(T)$ et donc est un sous-espace ou bien comme W est décrit ci-dessus on voir que W est un sous-espace de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 7. *Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.*

1. *Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).*
2. *Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).*
3. *Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).*

Solution 7. L'application T est linéaire ; nous avons vu en cours que $D(\lambda A + B) = \lambda DA + DB$. La matrice D est inversible pour $h \neq -4$. On traite ce cas d'abord et on s'occupera du cas $h = -4$ par la suite.

Lorsque D est inversible, l'équation $D \cdot A = B$ est équivalente à l'équation

$$A = I \cdot A = D^{-1} \cdot D \cdot A = D^{-1} \cdot B$$

Ainsi T est surjective puisque toute matrice B est obtenue comme $T(D^{-1} \cdot B)$. De plus T est injective puisque la seule matrice A qui est envoyée sur zéro est la matrice $D^{-1} \cdot (0) = (0)$.

On pourrait aussi raisonner comme suit : D'abord on remarque que si $DA = 0$ alors $A = D^{-1}0 = 0$ et donc T est injective. Ensuite, on utilise le théorème du rang pour voir que T est surjective.

Il reste à traiter le cas où $h = -4$. Ici T est donnée par la formule

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 2a - 4c & 2b - 4d \end{pmatrix}$$

On voit ici que les deux lignes de la matrice TA sont proportionnelles, ce qui signifie que T ne peut être surjective. Une matrice qui n'a pas cette propriété n'est pas de la forme TA. Par exemple il n'existe aucune matrice A telle que $TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette application n'est pas injective non plus puisque $T\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. *Vrai-faux*

(1) *Il existe une application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ telle que $T((1,0,0,0)) = (1,0,0,0,0)$ et $T((1,2,3,4)) = (0,1,0,0,0)$.*

(2) *Si les colonnes d'une matrice A de taille $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$, alors il y a un pivot dans chaque colonne de la forme échelonnée réduite de la matrice A.*

(3) *Si la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est une famille linéairement indépendante, alors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est aussi une famille linéairement indépendante.*

(4) *L'équation homogène* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *admet une solution si et seulement si elle possède (au moins) une inconnue libre.*

(5) *Les colonnes d'une matrice* A *de taille* $m \times n$ *sont des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*.*

(6) *Le cercle d'équation* $(x-10)^2 + y^2 = 100$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*.*

(7) *La demi-droite* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *est un sous-espace de* $\mathbb{R}$*.*

(8) *Le sous-ensemble des vecteurs* $\overrightarrow{x}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *qui vérifient les relations*

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 2$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$*.*

(9) *Le sous-ensemble des vecteurs* $\overrightarrow{x}$ *de* $\mathbb{R}^5$ *qui vérifient les relations*

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 0,\ 10x_4 - 11x_5 = x_3$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^5$*.*

Solution 8. (1) On rappelle le résultat du cours que dit que pour toute base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ d'un espace vectoriel V de dimension n et pour toute collection de vecteurs $w_1, \ldots, w_n$ dans un espace vectoriel W, il existe une application linéaire $T : V \to W$ avec $T(v_i) = w_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Donc ici comme $\{(1,0,0,0),(1,2,3,4)\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, on peut compléter cet ensemble pour faire une base $\{(1,0,0,0),(1,2,3,4),v_3,v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ et ensuite il existe une application linéaire : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ avec $T((1,0,0,0)) = (1,0,0,0,0)$ et $T((1,2,3,4)) = (0,1,0,0,0)$.

(2) C'est faux. Pour montrer cela il suffit de trouver un contre-exemple à cette affirmation. On choisira par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les colonnes engendrent $\mathbb{R}^2$, mais il n'y a que 2 pivots, la troisième colonne étant le vecteur nul.

(3) C'est vrai. Pour montrer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendante, il faut montrer que la seule combinaison linéaire

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

est la combinaison linéaire triviale. On voit que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + 0 \cdot \mathbf{v}_4$ et on conclut par le fait que la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est linéairement indépendante que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(4) C'est faux. Ici aussi un contre-exemple nous convaincra. Le système $x + y = 0$, $x - y = 0$ admet une solution, mais il n'y a pas d'inconnues libres.

(5) C'est faux. Les colonnes d'une matrice de taille $m \times n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

(6) C'est faux. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ se trouve sur le cercle, ainsi que le vecteur nul, mais pas $2\overrightarrow{u} + 0$.

(7) C'est faux. Le vecteur 1 et le vecteur 0 appartiennent à cette demi-droite, mais pas $-3 \cdot 1 + 0$.

(8) C'est faux. Le vecteur nul n'appartient pas au sous-ensemble de vecteurs décrit par cette équation.

(9) C'est vrai. Ces vecteurs vérifient un système d'équations linéaires homogènes.

Exercice 9. *(a) Soit* $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *l'application linéaire "trace" définie par*

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

Le noyau de Tr *est un sous-espace de* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *de dimension*

☐ 1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4.

(b) *Soit* Tr: $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *l'application linéaire "trace" définie à la question précédent. Les matrices suivantes forment une base du noyau de* Tr *:*

☐ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Solution 9. (a) ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Pour avoir $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right) = 0$, il faut que $a + d = 0$, autrement dit que $d = -a$. Ainsi le noyau de l'application Tr correspond au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

qui est de dimension 3.

(b) ☐ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

Comme le noyau de Tr est de dimension 3, par la question f., il faut 3 matrices de ce sous-espace pour l'engendrer. De plus, les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr. Elles forment donc une base du noyau de Tr.

Exercice 10. *Une matrice est dite* triangulaire *si elle satisfait à une des conditions suivantes :*

— $A_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *;(on dit que*A *est* triangulaire supérieure*.*

— $A_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$*, on dit que* A *est* triangulaire inférieure

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}2 & -7 & -1\\ 0 & \frac{29}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & 29 & 9\end{pmatrix}.$$

Trouver des matrices élémentaires E_1*,* E_2*,* E_3*,* E_4 *telles que :*

1. $E_1 A = B$
2. $E_2 E_3 B = C$
3. $E_4 D$ *soit triangulaire supérieure.*

Solution 10. Voici les matrices à considérer.

1. On prend $E_1 = E_{12}(-1)$.
2. On prend $E_2 = T_{12}$ et $E_3 = D_1(-1)$.
3. On prend $E_4 = E_{32}(-2)$, ce qui donne $\begin{pmatrix}2 & -7 & -1\\ 0 & \frac{29}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Soient* V *un espace vectoriel et* $\varphi : V \to V$ *une application linéaire telle que* $\ker\varphi = \mathrm{Im}\,\varphi$.

1. *Démontrer que* $\varphi \circ \varphi = 0$ *(l'application nulle).*
2. *Démontrer que si* V *est de dimension finie alors* $\dim V$ *est un nombre pair.*

3. *Donner un exemple d'une application linéaire T d'un espace vectoriel E telle que $T \circ T = 0$ mais que $\ker T \neq \operatorname{Im} T$.*
4. *Donner un exemple d'une application linéaire T d'un espace vectoriel E telle que $\operatorname{Im} T = \ker T$.*

Solution 11.

1. Soit $\mathbf{v} \in V$. Puisque $\varphi(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} \varphi = \ker \varphi$, on a $\varphi\big(\varphi(\mathbf{v})\big) = \mathbf{0}$. Ainsi, on a bien $\varphi \circ \varphi = 0$.
2. Le théorème du rang dit que $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$. Comme $\operatorname{Im} \varphi = \ker \varphi$, on a l'égalité $\dim V = 2 \cdot \dim \ker \varphi$, ce qui entraîne que la dimension de V est paire.
3. On prend $E = \mathbb{R}^2$ et l'application T qui envoie tout vecteur sur $\mathbf{0}$. Alors, $\ker T = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im} T = \{\mathbf{0}\}$. Ou peut-être plus intéressant : on définit une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\mathbf{e_1} \mapsto \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_i} \mapsto \mathbf{0}$ pour $i = 2, 3$.
4. On prend $E = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ et $D : E \longrightarrow E$ est la dérivation usuelle des polynômes. Dans ce cas, on a $\ker D = \operatorname{Im} D = \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, les polynômes constants.
