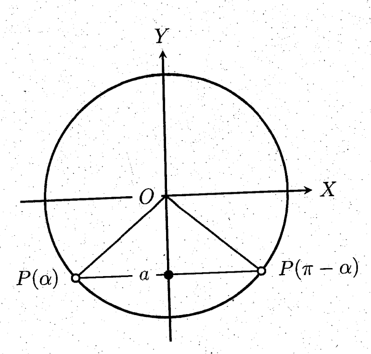
Résolution de l'équation $\sin x = a$

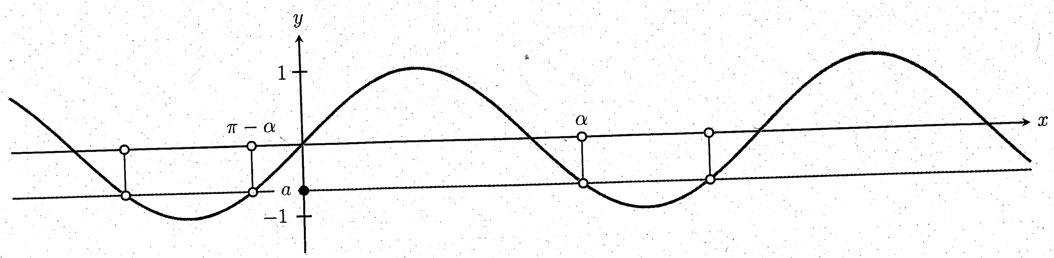
Cette équation n'admet des solutions que si $a \in [-1\,,\,1]$.

Soit α un angle tel que $\sin\alpha = a$.

Les solutions de l'équation $\sin x = a$ sont toutes les déterminations de α et de $\pi - \alpha$.



$$\sin x = \sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2\,k\,\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

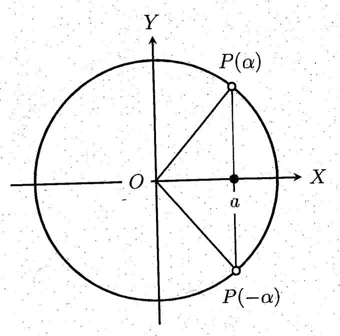


Résolution de l'équation $\cos x = a$

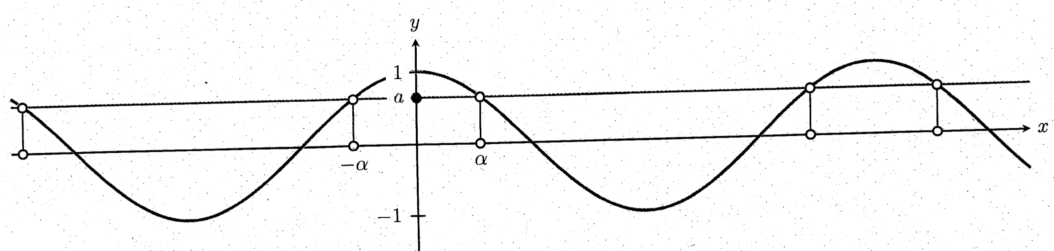
Cette équation n'admet des solutions que si $a \in [-1\,,\,1]$.

Soit α un angle tel que $\cos\alpha = a$.

Les solutions de l'équation $\cos x = a$ sont toutes les déterminations de α et de $-\alpha$.



$$\cos x = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2\,k\,\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

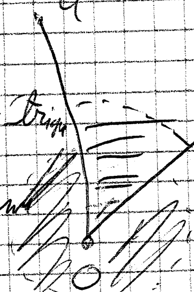


Analyse II

Chapitre 1 Trigonométrie circulaire

1.1 Notion d'angle

1.1.1 angle géométrique



définition de l'angle géométrique

est le domaine de deux demi droite de même origine

et de l'une des parti du plan défini

secteur d'arc

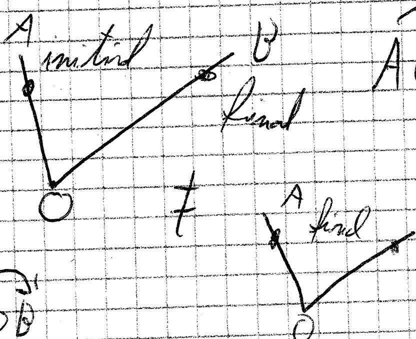
* angle saillant / plus petit
* angle plus grand / rentrant

1.1.2 angle trigonométrique

définition : l'angle orienté est la donné de 2 demi droite (OA) et (OB) de même ~~angle~~ origine définissant un coté initial et final

$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$\widehat{AOB} \neq \widehat{BOA}$



$\widehat{AOB} \neq \widehat{BOA}$

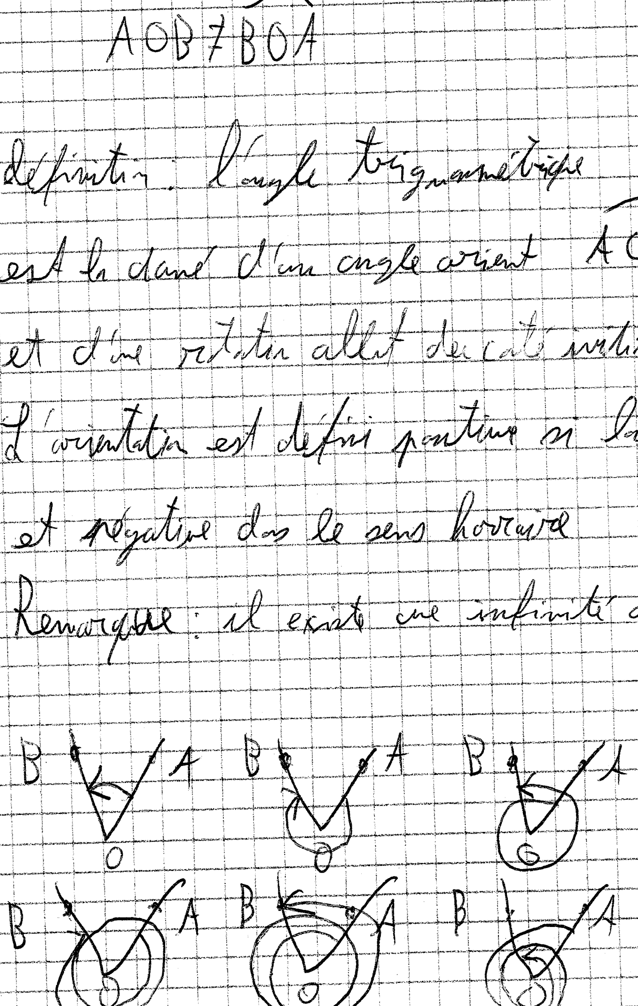
définition : l'angle trigonométrique est la donné d'un angle orient $\widehat{AOB}$

et d'une rotation allant du coté initial au coté final $OA \to OB$

L'orientation est défini positive si la rotation se fait dans le sens anti horaire

et négative dans le sens horaire

Remarque : il existe une infinité de rotation différente amenant OA sur OB



détermination différente du même angle orienté

Deux déterminations différente d'un nombre entier de tour

1.1.3. Mesure d'un angle

On mesure un angle en le comparant à une référence. Cette unité fondamentale est le tour. On défini 2 unité de mesure d'angle. En math, le radian et dans la vie, le degrée

radian : $2\pi r = 1$ tour

degrée : $360° = 1$ tour

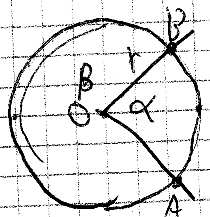
$= 1$ degrée

et ses subdivisions : la minute : $'60$ la seconde $''60 = 1$ minute

On attribut un signe à la mesure de l'angle trigonométrique + orientation anti horraire et − parer le sens horraire

La mesure d'un angle géométrique est sans signe donc positive et elle est comprise entre 0 et 2 pi

si α et α' sont les meme en radian de 2 déterminant d'un bien angle orienté alors $\exists h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha' = \alpha + 2h\pi$ (tout ceux qui diffère d'un nombre entier de tour



1.1.4 Mesure et longeur d'Arc

L'arc (AB) est caractérisé par le rayon et la mesure de l'angle

La mesure d'arc (AB) c'est la mesure de l'angle au centre

calcule de l'arc (AB) : la longeur d'une circonférence du rayon r est de $2\pi r$

la longeur de

La longueur d'une circonférence de rayon r est $2\pi r$

Par proportionnalité, on a

α	l
2π	$2\pi r$
π	πr
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} r$
α	αr

⚠ marche seulement en radiant !

$$L = |\alpha| \cdot r$$

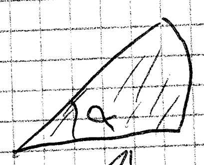
Cas particulier : le radian est la mesure d'un arc dont la longueur est égale est égale au rayon

$$L = \alpha r \Leftrightarrow \alpha = \frac{L}{r}$$

~~$\alpha =$~~

b) Secteur circulaire et son Aire

α = angle géométrique



Aire ?

il y a proportionnalité

$L = k(2r)$

$A = k'(r^2)$

α	A
2π	πr^2
π	$\frac{\pi}{2} r^2$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6} r^2$

$\frac{\alpha}{2} r^2$

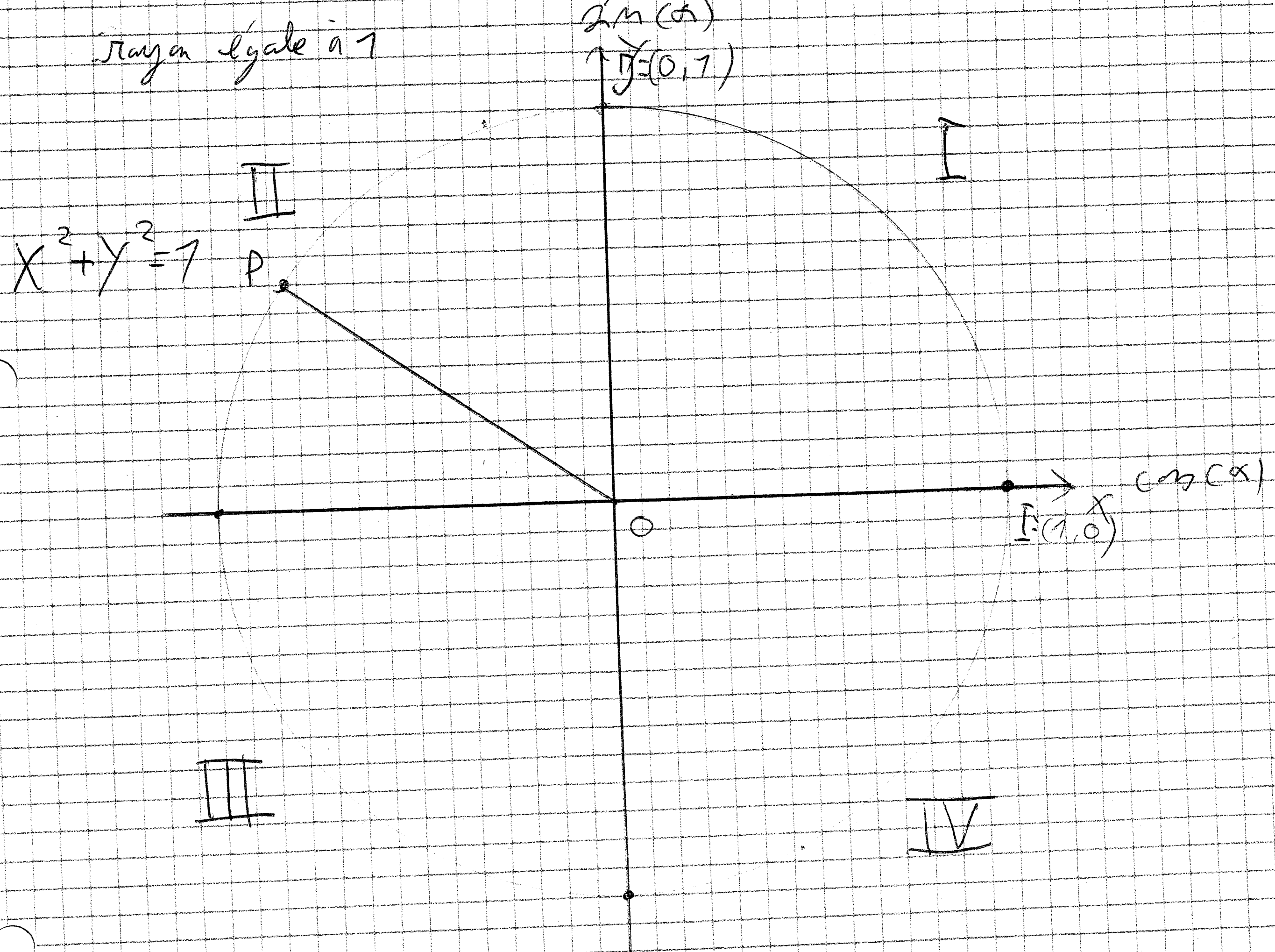
l'aire du disque vaut πr^2 par proportionnalité on a

2 Les fonction trigonométrique

2.1 Le cercle trigonométrique

Soit (O X Y) un repère orthonormé

On apelle cercle trigonométrique centré sur le repère et le rayon égale à 1



On note en chiffre romain les 4 cadrat. On défini I(1;0) et J(0;1)

La position d'un point p peut être représenté par

Ses coordoné X et Y

$\overset{\frown}{IOP}$

La mesure en radian d'un angle en sachant qu'il y en a une infinit

2.2 Les fonction trigonométrique. Soit α un angle doné et P(α)

* L'abisse de P(α) = cosinus (α)

L'ordoné ~~de~~ P(α) = sinus

Remarque : Sinus et cosinus fonction des tout $\mathbb{R}$

Si $p(\alpha)$ appartient au cadrat $\hat{I}$, $\sin(x) \geq 0$, $\cos(x) \geq 0$

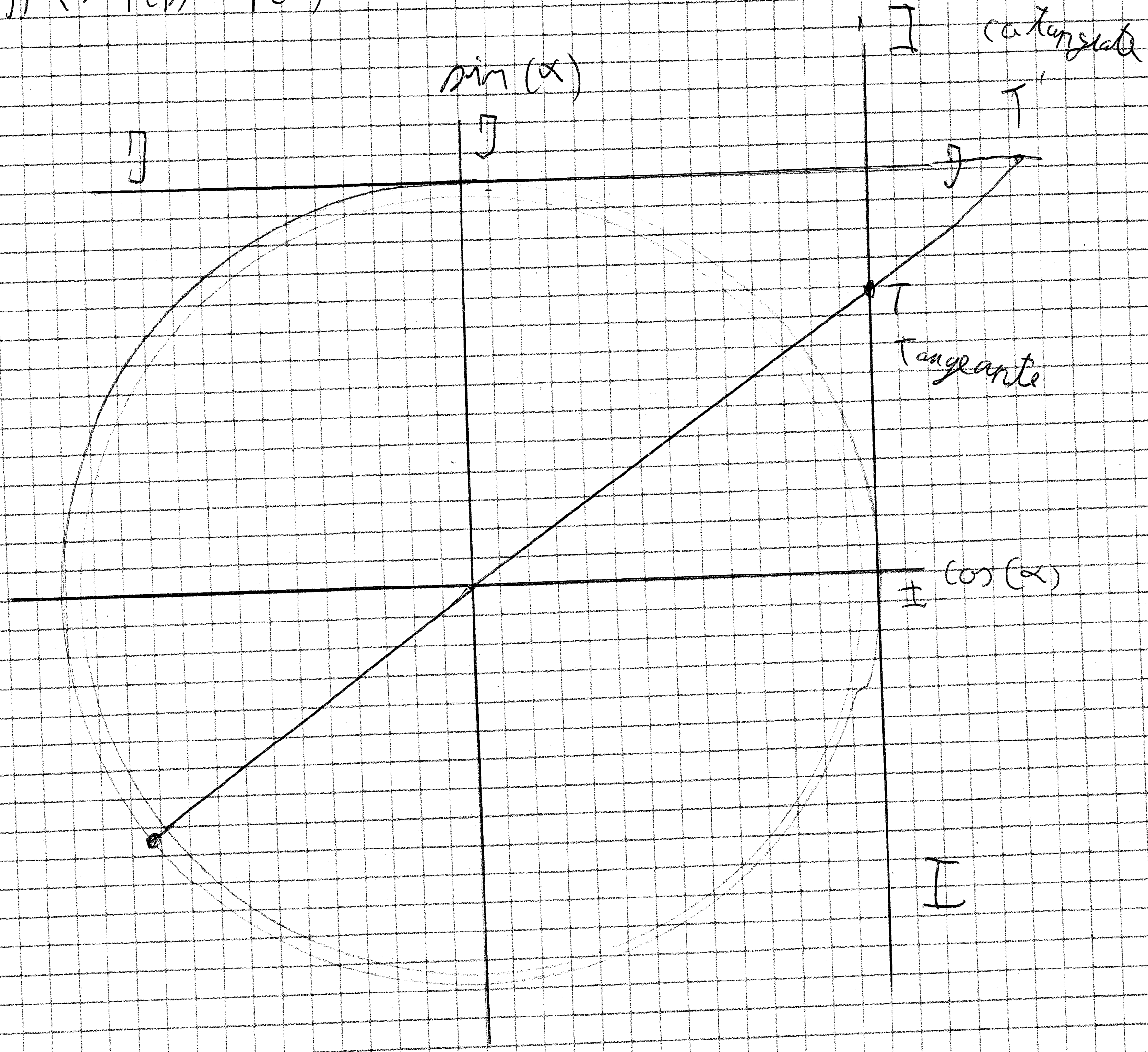
Si $p(\alpha)$ appartient au cadrat II, $\sin(\alpha) \geq 0$, $\cos(\alpha) \leq 0$

Si $P(\alpha)$ apartient au cadrat III, $\sin \leq 0$, $\cos \leq 0$

Si $P(\alpha) \in IV$, $\sin \leq 0$, $\cos \geq 0$

3)

$2k\pi \iff P(\beta) = P(\alpha)$



L'ordonnée de T est la tangente de l'angle α

T' est la cotangente de l'angle α

$\tan(\alpha)$

$\cot(\alpha)$

La fonction tangeante n'est pas définie en $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

La fonction co-tangente n'est pas défini en $\alpha = k\pi$

$$D_{tan} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \ k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$D_{cotan} = \mathbb{R} - \{k\pi \ \ k \in \mathbb{N}\}$$

2. Si $\alpha \in I$ $\begin{matrix} tan \geqslant 0 \\ cotan \geqslant 0 \end{matrix}$

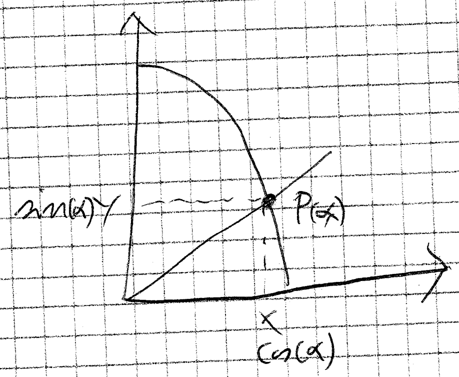
Si $\alpha \in II$ $\begin{matrix} tan \leqslant 0 \\ cotan \leqslant 0 \end{matrix}$

Si $\alpha \in III$ $\begin{matrix} tan \geqslant 0 \\ cotan \geqslant 0 \end{matrix}$

Si $\alpha \in IV$ $\begin{matrix} tan \leqslant 0 \\ cotan \leqslant 0 \end{matrix}$

Les fonction tan et cotan son non injective et π périodique

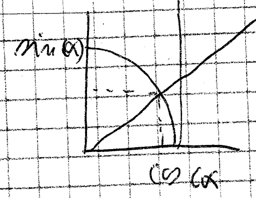
Quelques propriété



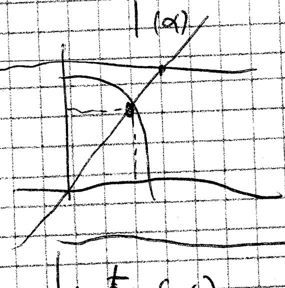
$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

$\cos^2(\alpha)$

Par thalèze



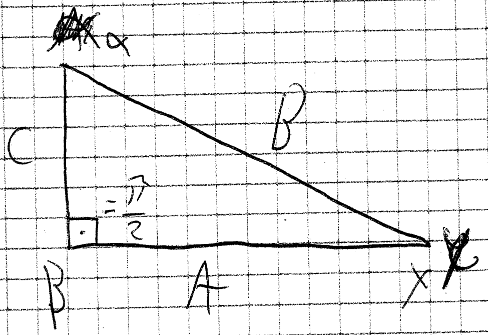
$$\boxed{\frac{Tan(\alpha)}{1} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$



$$cot(\alpha) = \frac{1}{Tan(\alpha)} \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{cotan(\alpha)}{1} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

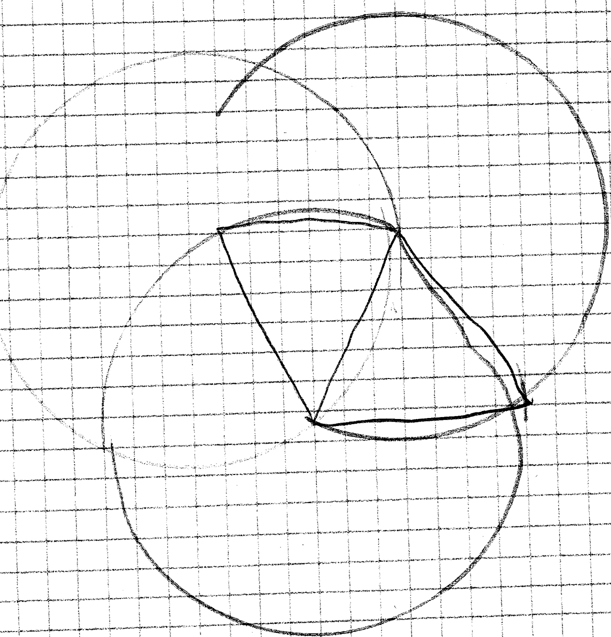
Cas particulier : triangle rectangle en B



$$\sin(\alpha) = \frac{A}{B}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$$



$$\boxed{\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{4}}{2}}$$

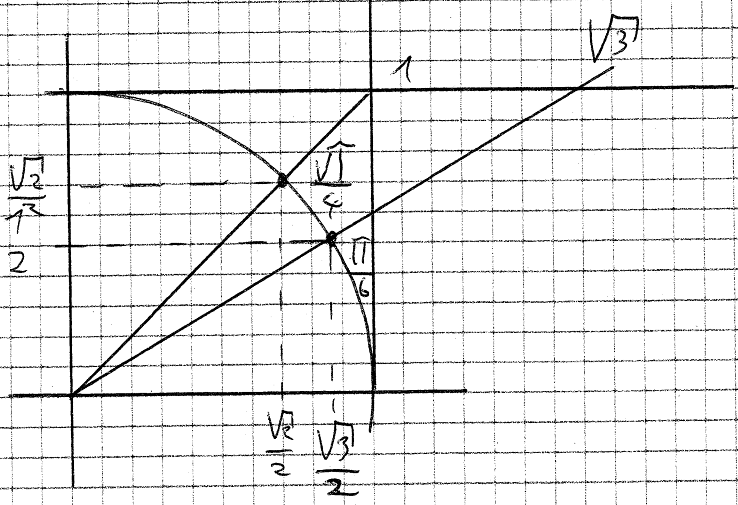
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	0
sin (α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos (α)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
tan (α)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0
cotan (α)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/


1
$\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.4 Symétrie

a) angle opposé

Les point $P(\alpha)$ et $P(-\alpha)$ sont symétrique par rapport à l'axe Ox

donc $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

b) angle supplémentaire

Les points $P(\pi-\alpha)$ et $P(\alpha)$ sont symétrique par rapport à l'axe Oy

donc $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$

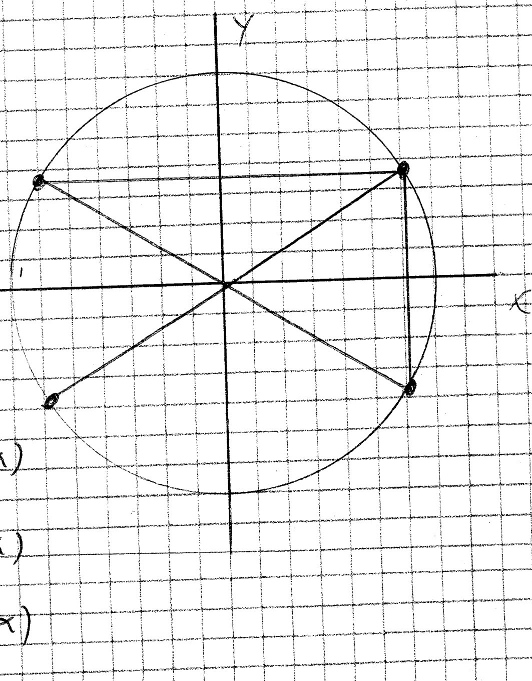
c) On en déduit les fonction trigonométrique de $(\pi+\alpha)$

$\cos(\pi+\alpha) = \cos(\pi-(-\alpha)) = -\cos(-\alpha)$

$\sin(\pi+\alpha) = \sin(\pi-(-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$

$P(\pi+\alpha)$ et $P(\alpha)$ sont symétrique en O



d) angle complémentaire

Les point $P(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ et $P(\alpha)$ sont symétrique par rapport à $y=x$ donc $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha)$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot(\alpha)$

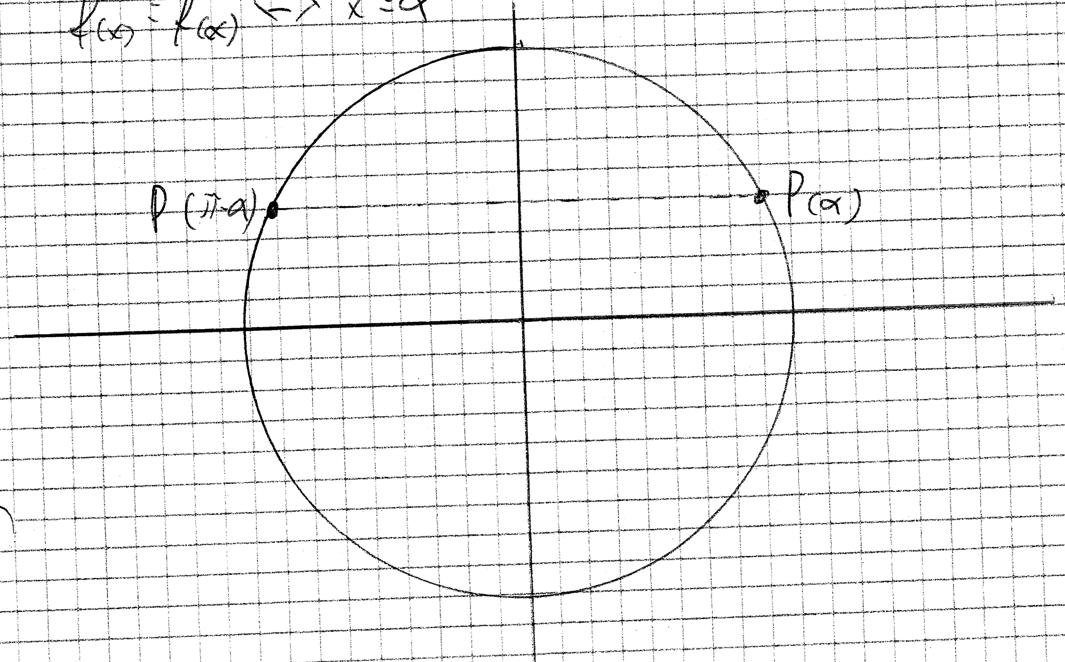
$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan(\alpha)$

3. Equation trigonométrique élémentaire

1) $\sin(x) = a$ $\quad D_{def} = \mathbb{R}$

Solution ssi $a \in [-1;1]$

$f(x) = f(\alpha) \iff x = \alpha$



alors toutes les solution de sin(α) et sin(π-α)

$\sin(x) = \sin(\alpha) \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

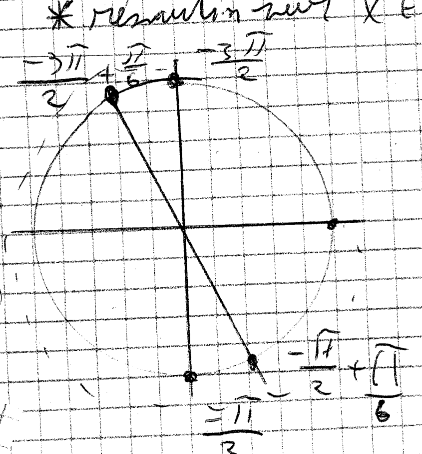
Exemples :

a) $\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right.$

b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in \left[\frac{-3\pi}{2} ; 0\right]$ $\quad$ * résolution sur $\mathbb{R}$

* résolution sur $x \in \left[\frac{-3\pi}{2} ; 0\right]$



$S = \left\{\frac{-3\pi}{2} ; \frac{-4\pi}{3} ; \frac{-\pi}{2} ; \frac{-\pi}{3}\right\}$

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

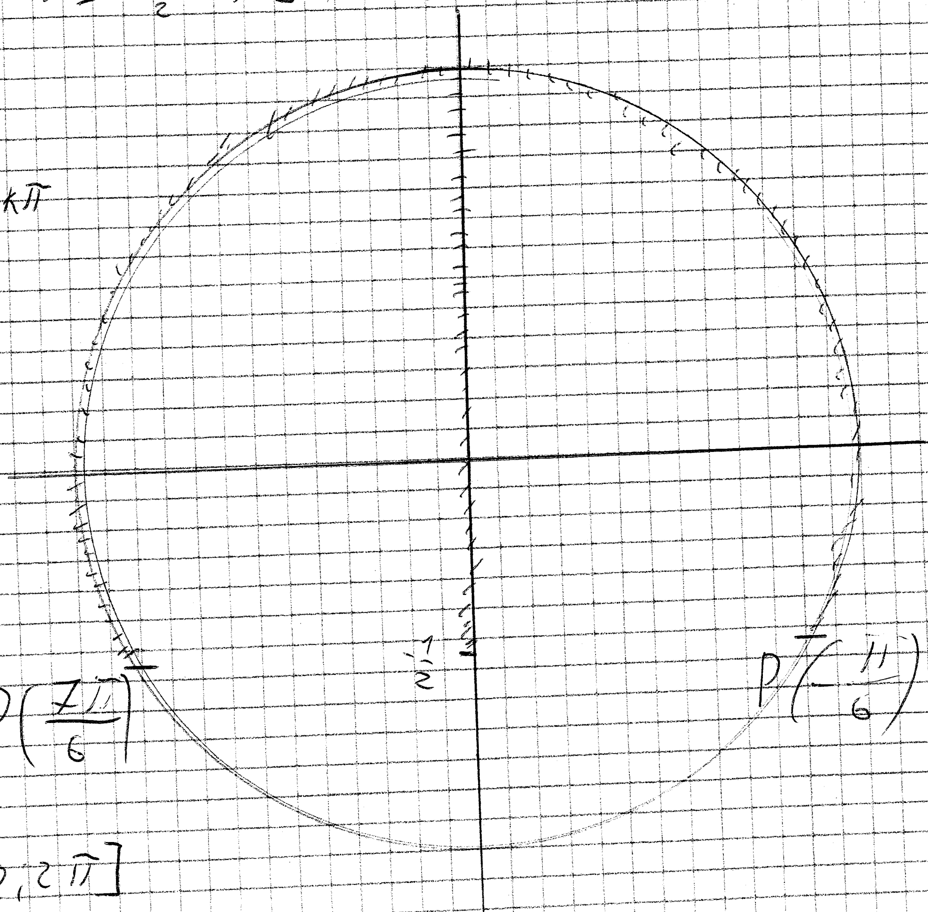
c) Inéquation $\sin(x) \geq -\frac{1}{2}$ $x \in [0 ; 2\pi]$

1)

* résolution dans $\mathbb{R}$

$S = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left[\frac{\pi}{6} ; 2k\pi \right. \ldots \cup$



* résolution dans $x \in [0, 2\pi]$

$S = \left[0, 7\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

2) $\cos(x) = a$ $D_{def} = \mathbb{R}$ solution ssi $a \in [-1 ; 1]$

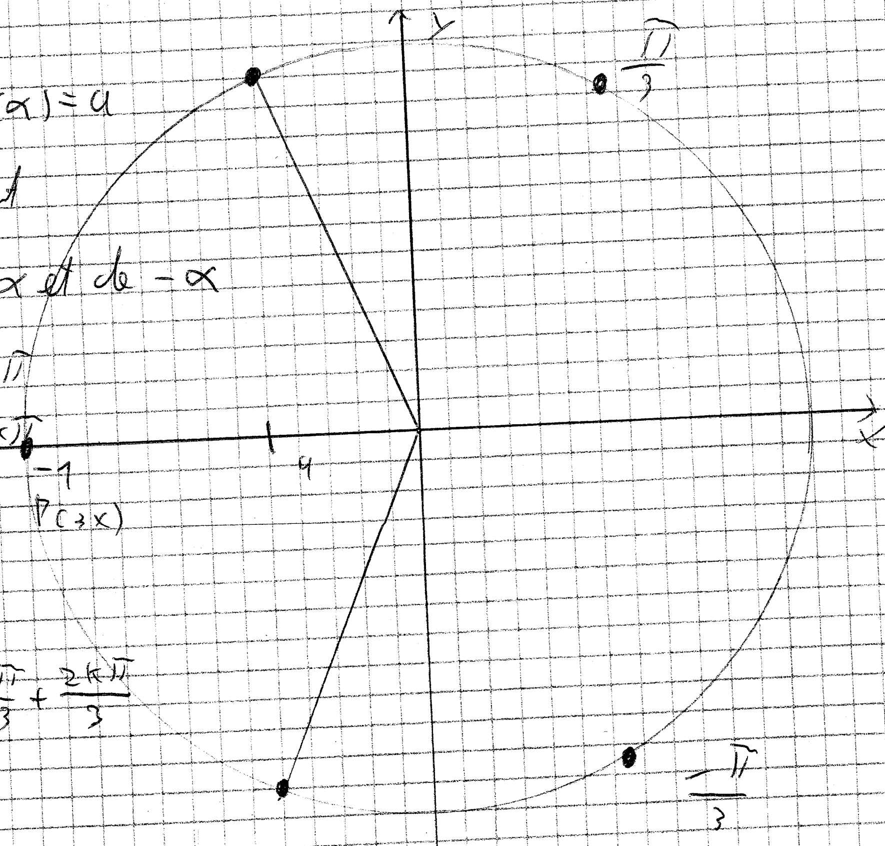
$\cos(x) = a$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = a$

alors, toutes les solutions sont

toutes les déterminations de α et de $-\alpha$

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$



a) $\cos(2x) = \sqrt{2} > 1$ $S = 0$

b) $\cos(3x) = -1$

$\cos(3x) = \cos(\pi) \iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

4 Formule de transformation

$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin(\alpha) + \sin(\beta)$

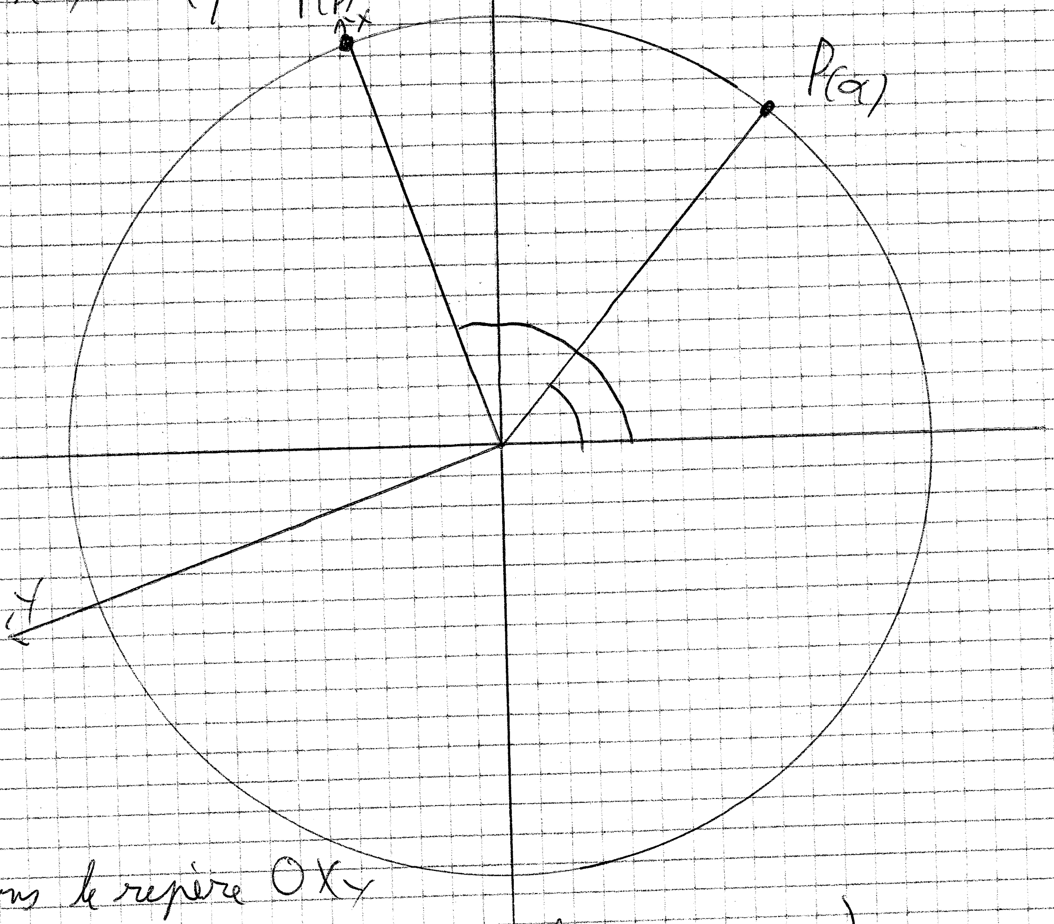
Formule d'addition

on cherche à exprimé $\sin(\alpha \pm \beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta)$ et $\tan(\alpha \pm \beta)$ à l'aide des fonction trigonométrique de α et β

Soient α et β 2 angles et $P(\alpha)$, $P(\beta)$ corespondant sur le cercle trigonométique on considère un nouveau repère orthonormé

$O X'Y'$ telque $P(\beta) \in OX'$



Dans le repère OXY

$P(\alpha) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ $P(\beta) = (\cos(\beta); \sin(\beta))$

Dans le repère $OX'Y'$

$P(\alpha) = (\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$

$P(\beta) = (1; 0)$

On calcule la distance entre les 2 point

dans le repère O, X, Y

$\delta(P(\alpha); P(\beta)) = \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\alpha) - \sin(\beta$

dans le repère O, X', Y'

$\delta(P(\alpha); P(\beta)) = \sqrt{[\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha-\beta) - 0$

On en déduit donc

$$[\cos(\alpha)-\cos(\beta)]^2+[\sin(\alpha)-\sin(\beta)]^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+\cos^2(\beta)+\sin^2(\alpha)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)+\sin^2(\beta)=$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$=-2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\beta)=\boxed{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\sin(-\beta)=\boxed{\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

$\uparrow$ $\nearrow$

Si $(\alpha+\beta)\in D_{\tan}$ et $\alpha,\beta\in D_{\tan}$ et $\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)\neq 1$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan(\alpha+-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)} \qquad \alpha-\beta,\alpha,\beta\in D_{\tan}$$

Cas particulier : les formules de duplication

En posant $\beta=\alpha$, on a

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \text{ avec } \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Example : $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$= \sin\left(\frac{3\pi + 4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

2. Formule de bissection

On cherche à exprimer les fonctions trigonométrique de $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de celle de α $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin(\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1$

et en prenant $\alpha = 2\beta$ $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

d'où $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$ $\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos\alpha}$ $\quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Exemple : α est défini par

$\sin(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Calculer $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Calcule de $\cos(\alpha)$

localisation de $P(\alpha)$

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow P(\alpha) \in II \cup III \Rightarrow \cos\alpha \leq 0$

$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$

localisation de $P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

$P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in I \cup II$ localisation insuffisante, on essaie d'être plus précis

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in \left[\frac{\pi}{2} \; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in \underline{II} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ \cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases}$

Calcul de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\text{ou } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \right)$$

3 Formule de transformation Somme - Produit

A partir de $\cos(\alpha+\beta) \cancel{\text{ et } \cos(\alpha-\beta)} = \cos\alpha\cos\beta - \sin(\alpha)\sin\beta$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin\alpha\sin\beta$$

On obtient : $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

de même, à partir de :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

On obtient : $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

En posant $\alpha+\beta = p$ et $\alpha-\beta = q \Leftrightarrow \alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$ on a

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Example : Résoudre

$$\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos\left[\frac{x + \left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{x - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{2}\right] = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Longleftrightarrow 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

2)

$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3}$

$\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$ donc pas de solution $S = \emptyset$

3) $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{12}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

$a = 2 \quad b = \sqrt{12} \quad \sqrt{4+12} = 4$

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = 4k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \end{cases}$$

$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{4k\pi \,;\, \frac{4\pi}{3} + 4k\pi\right\}$

4) Résolution d'une inéquation linéaire

$\sin 2x + \cos(2x) \geq 1 \quad x \in [-\pi ; \pi]$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. résolution d'équation trigonométrique

1. équation linéaire

Ce sont des équations du type $a\cos x + b\cos x = c \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

Cette méthode consiste à se ramener à une équation élémentaire en sinus ou en cosinus

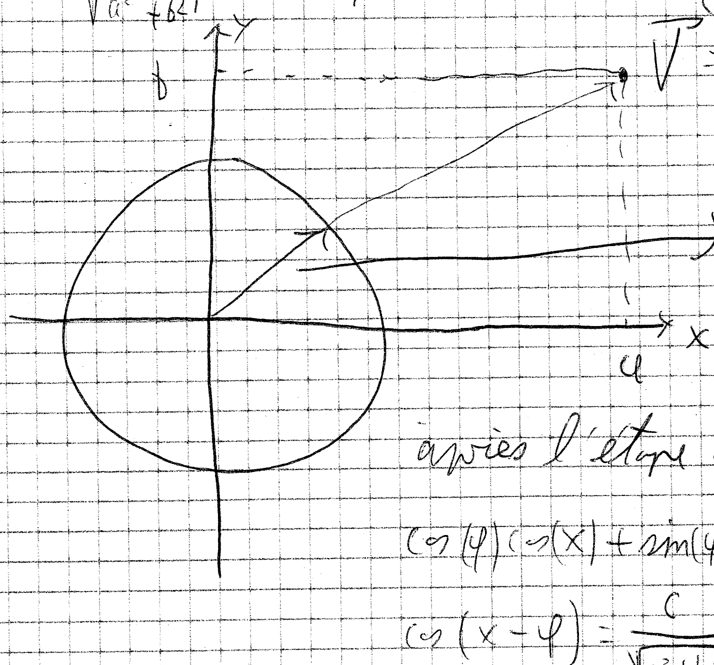
i) choisissons le cosinus, le membre de gauche doit être de la forme

$\cos(\varphi)\cos x + \sin(\varphi)\cdot\sin(x) = c'$

et cela est possible en divisant les 2 membres de l'équations par $\sqrt{a^2+b^2}$. en effet, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

donc il existe φ (par exemple $\varphi \in [0;2\pi[$) tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$



$\vec{V} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

après l'étape de normalisation, l'équation devient

$\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

On déduit les conditions d'existences de solutions:

$-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant +1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow c^2 \leqslant a^2+b^2$

Il suffit de résoudre l'équation élémentaire $\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et alors, on a $\cos(x-\varphi) = \cos(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\varphi = \alpha + 2k\pi \\ x-\varphi = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \varphi + \alpha + 2k\pi \\ x = \varphi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Si on choisit le sinus, le membre de gauche doit être de la forme :

$\sin(\varphi')\cos(x) + \cos(\varphi')\sin(x) = c'$

après normalisation, on a :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin(\varphi')}\cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos(\varphi')}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(\varphi')\cos(x) + \cos(\varphi')\cos(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\varphi') = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (c^2 \leq a^2+b^2)$$

Soit $\alpha' \in \mathbb{R}$ tel que

$\sin(\alpha') = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \sin(x+\varphi') = \sin(\varphi')$

$$\begin{cases} x+\varphi' = \alpha' + 2k\pi \\ x+\varphi' = (\pi-\alpha') + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \begin{matrix} x = -\varphi' + \alpha' + 2k\pi \\ x = -\varphi' + \pi - \alpha' + 2k\pi \end{matrix}$$

Exemples

1 $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$

$a = \sqrt{3}$, $b = 1$ $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{6})}\cos x - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{-5\pi}{12} + 2k\pi\right\} \quad \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{-12} + 2k\pi \end{cases}$$

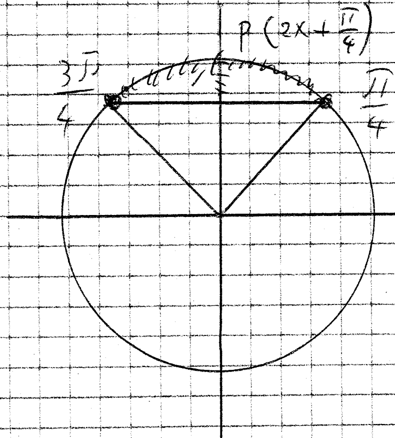
1. Transformation en sinus

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin(2x)+\sin\frac{\pi}{4}\cos(2x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Résolution sur le cercle trigonométrique

* résolution sur $\mathbb{R}$



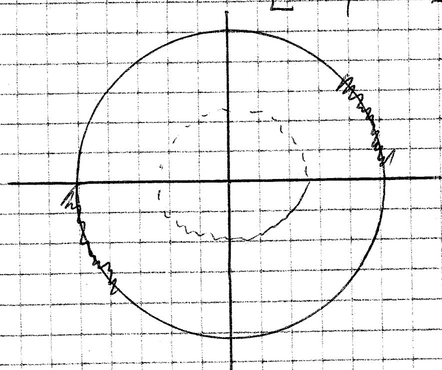
$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2x+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+k\pi$$

* Résolution $[-\pi, +\pi]$



$$S=\left[-\pi, -\pi+\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \{\pi\}$$

autre méthode : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\qquad\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

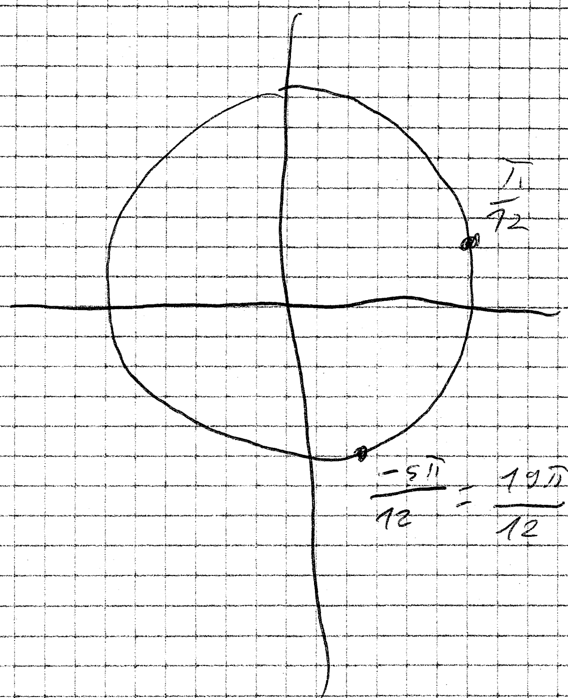
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \,;\, \frac{19\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right\}$$

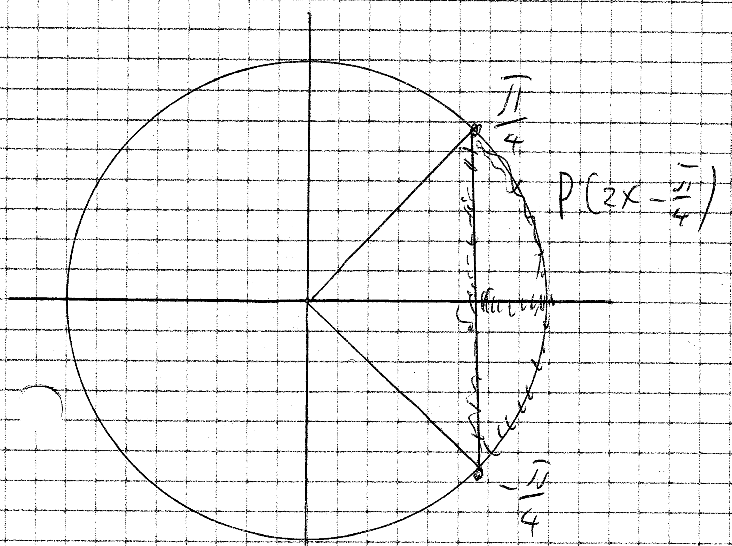


2 Transformation en cosinus

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Résolution sur $\mathbb{R}$

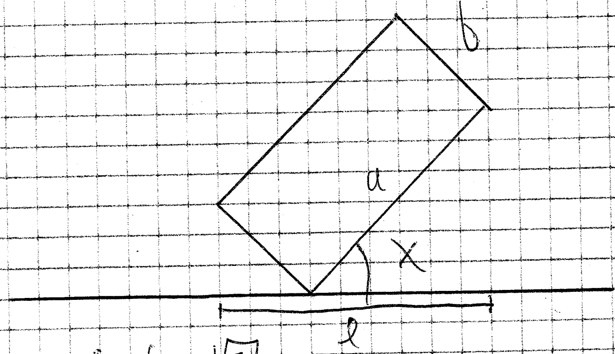


$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2x-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$S\ \left[-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] \cup \{\pi\}$$

5) Problème d'optimisation



$a = 6 \quad b = \sqrt{12}$

pour quelles valeurs de x, l est il maximum

$l = l_1 + l_2$ avec $l_1 = a\cos(x)$
$l_2 = b\cos(y) = b\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = b\sin(x)$

$l(x) = x + \frac{\pi}{2} + y = \pi \qquad y = \frac{\pi}{2} - x$

$l = a\cos x + b\sin x = 6\cos x + \sqrt{12}\sin x$

expression de l à l'aide d'une seule fonction trigonométrique

$l = \sqrt{48}\left[\frac{6}{\sqrt{48}}\cos x + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}}\sin x\right]$

$l = 4\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right]$

$4\sqrt{3} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ le sinus est maximal lorsque qu'il vaut 1

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

or $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $x = \frac{\pi}{6}$