(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	$6\frac{1}{2}$	
2	4	
3	4	
4	$5\frac{1}{2}$	
Total	20	

Note : $\boxed{}$

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 6½ points) Points obtenus: (laisser vide) .....

On note P_n l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'application linéaire f de P_1 vers P_2 définie par

$$\begin{cases} f(x+2) &= 2x^2+x-5 \\ f(2x-4) &= -x^2-2x-3 \end{cases}$$

(a) Déterminer la matrice A de f relativement aux bases $\mathcal{B}_1\,(x+2;\,2x-4)$ de P_1 et $\mathcal{B}_2\,(2x^2+x-5;\,x+2;\,-x^2+1)$ de P_2.

(b) Au moyen d'un changement de bases, calculer la matrice B de f relativement aux bases $\mathcal{E}_1\,(1;\,x)$ de P_1 et $\mathcal{E}_2\,(1;\,x;\,x^2)$ de P_2. (Donner le schéma de votre changement de bases).

(c) L'application est-elle injective ? Justifier avec précision votre réponse.

(d) Soit X' la matrice des composantes d'un polynôme p relativement à $\mathcal{B}_1$ et Y celle des composantes de $f(p)$ relativement à $\mathcal{E}_2$.
Donner en utilisant un changement de bases, une relation matricielle qui permet de calculer Y

- en fonction de la matrice A,
- puis une autre en fonction de B.

Préciser dans les deux cas les étapes du raisonnement à effectuer.

Solution:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & -26 \\ 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(c) f est injective car $\ker f = \{0\}$

(d)
- $Y = Q\,A\,X'$
- $Y = B\,P\,X'$

Question 2 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soit $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ d'origine O.

On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ suivant :

g est une projection de l'espace sur une droite, de direction parallèle à un plan.
Cette projection est telle que la droite d'équations paramétriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k \\ k \\ 1-k \end{pmatrix} \quad \text{a pour image le point } \; I\,(1;\,1;\,2).$$

(a) Déterminer les équations paramétriques de $\ker g$ et de $\operatorname{Im} g$.
(On ne demande pas la matrice de g)

On considère l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ qui est une projection sur le plan $(O,\,\vec{e}_1,\,\vec{e}_2)$ et dont le noyau est une droite parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer la matrice de p par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(c) A l'aide des natures géométriques de p et g, déterminer $p \circ g$ en le justifiant.

Solution:

(a) • $\operatorname{Im} g = (O,\,I)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Equations paramétriques de $\ker g$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) L'application $(p \circ g)$ est l'application nulle :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad (p \circ g)(\vec{x}) = \vec{0}$$

Question 3 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Le plan, d'origine O, est muni de la base canonique orthonormée $\mathcal{B}\,(\vec{e}_1,\,\vec{e}_2)$.
On considère les endomorphismes suivants

- f est une affinité orthogonale de rapport 2 et d'axe $(O,\,\vec{u})$, tel que l'angle entre $\vec{e}_1$ et $\vec{u}$ vaut $\dfrac{\pi}{6}$,
- s est une symétrie orthogonale dont l'axe est perpendiculaire à la droite $(O,\,\vec{u})$.

Déterminer relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice de l'application $g = 4\,f - 2\,s$.
En déduire directement la nature géométrique de g.

Solution:
$M_f = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$
$M_s = \dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$M_g = 4M_f - 2M_s = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
L'application g est une homothétie de centre O et rapport 6.

Question 4 (à 5½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Le plan, d'origine O, est muni de la base canonique orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$.
On considère les endomorphismes suivants

- r est une rotation de centre O et angle α tel que $\alpha = \arccos\dfrac{3}{5}$,
- s est une symétrie oblique.

On considère l'endomorphisme $f = s \circ r$ tel que l'image par f du point $P_0\,(5;\, 5)$ est le point $P_2\,(3;\, -7)$.

(a) Relativement à la base $\mathcal{B}$, déterminer
- la matrice de la rotation,
- l'axe et la direction de la symétrie,
- la matrice de la symétrie.

(b) Pour la suite du problème, relativement à $\mathcal{B}$, on donne la matrice de la symétrie :

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et un endomorphisme l tel que

$$\begin{cases} l(\vec{e}_1) = \vec{0} \\ l(\vec{e}_2) = -2\,\vec{e}_1 + 7\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

Déterminer en le justifiant avec précision la nature géométrique de l'application $g = s \circ l$.

Solution:

(a) $M_r = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

L'axe de la symétrie est la droite $(O,\, \vec{e}_1)$ et la direction est parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$M_s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) L'application g est une homothétie de centre O et de rapport -7, composée avec une projection sur la droite $\operatorname{Im} g$, de direction parallèle à $y = 0$.