Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}(1 \times n; \mathbb{R})$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{M}(1 \times n; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R}) \\ & & X & \longmapsto & f(X) = BX^tC \end{array}$$

a) Montrer que f est linéaire.
Déterminer, en fonction de n, le nombre de lignes et de colonnes de la matrice de f.

On fixe $n = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques usuelles à préciser.

3.5 pts

2. Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les endomorphismes suivants :

- r est une rotation de centre O et d'angle $\varphi = \frac{\pi}{48}$,
- s est une symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{a})$ telle que $\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = \frac{\pi}{12}$,
- g est donnée par sa matrice M_g par rapport à B :

$$M_g = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f = r^{-8} \circ s \circ g$ par rapport à la base B. Déterminer, avec précision, la nature géométrique de f.

On note d l'ensemble des points fixes de l'endomorphisme $\frac{1}{3}\, g$. On considère l'affinité h dont l'axe est d, la direction est parallèle à $\ker g$ et le rapport $k = -5$.

b) Déterminer une base B' par rapport à laquelle la matrice de h est diagonale.
Puis à l'aide d'un changement de base, calculer la matrice de h relativement à la base B.

c) Soit l'endomorphisme l défini par

$$\begin{cases} l(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = \vec{e}_2 \\ l(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \end{cases}$$

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que l'application $h + \alpha\ l$ soit composée d'une homothétie et d'une symétrie d'axe $(O, \vec{e}_1)$.

En déduire le rapport de l'homothétie et la direction de la symétrie.

7 pts

3. Dans l'espace muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme f défini par

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \alpha\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \alpha\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 & \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ f(\vec{e}_3) = (2\ \alpha + 1)\ \vec{e}_1 + 3\ \vec{e}_2 + (\alpha + 2)\ \vec{e}_3 \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B et déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est bijective.

b) On pose $\alpha = -2$.

Déterminer les équations (paramétriques ou cartésiennes) de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

4.5 pts

4. On note P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à deux. On munit P_2 de la base canonique $E = (x^2\,, x\,, 1)$ et de la base $E' = (x^2+x\,, 1-x\,, 2)$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ et de la base $B' = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ définie par

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \end{cases}$$

Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans P_2 dont la matrice associée est

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

par rapport à B et E'.

a) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B', ainsi que la matrice de passage Q de la base E à la base E'.

b) A l'aide des matrices de passage, déterminer la matrice M de f par rapport aux bases B et E.

c) Soit $p = ax^2 - 2x - 3a + 14$, $a \in \mathbb{R}$ par rapport à E. Déterminer l'équation cartésienne de $f^{-1}(\{p\})$ dans B'.

5 pts