# Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

*NOM* : ______________________________

Groupe ☐

*PRENOM* : ______________________________

**1.** Dans le plan, muni d'une origine $O$ et de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les trois endomorphismes suivants :

- $h$ : une homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda = -\sqrt{2}$,
- $f$ : une affinité d'axe $(d)$ $3x - 2y = 0$, de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de rapport $k = -2$,
- $r$ : une rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Dans la base $B$, déterminer la matrice de l'application linéaire $g$ où $g = h^{-1} \circ f \circ r^6$.

3 pts

**2.** L'espace $\mathbb{R}^3$, d'origine $O$, est muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
Soit $f$ un endomorphisme sur $\mathbb{R}^3$.

On note : $\vec{e_i}' = f(\vec{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$.
$f$ est définie par :

$$\begin{cases} \vec{e_1}' - \vec{e_3}' = \vec{0} \\ \vec{e_3}' + 2\,\vec{e_2}' = \vec{0} \\ \vec{e_2}' = -2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3 \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice $M$ de $f$ relativement à la base $B$.

b) Chercher l'équation cartésienne de $\operatorname{Ker} f$ et l'équation paramétrique de $\operatorname{Im} f$.
Calculer $f(\vec{x})$ si $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$ et en déduire la nature géométrique de $f$.

c) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle la matrice de $f$ est diagonale.
Dans cette base, donner la matrice $M'$ de $f$.

3,5 pts

Tourner la page

**3.** Le plan $\mathbb{R}^2$, d'origine $O$, est muni de la base orthonormée $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
Relativement à $B$, on donne la matrice $A$ d'une application linéaire $f$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

a) $f$ est-elle bijective ? Justifier la réponse.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points fixes de $f$. Soit $\vec{v}$ un vecteur perpendiculaire au vecteur directeur de l'ensemble des points fixes. Calculer $f(\vec{v})$ et en déduire la nature géométrique de $f$.

Soit l'application linéaire $g$ déterminée par :

- Ker $g$, une droite d'équation $x - 3y = 0$,
- Im $g$, une droite d'équation $3x + y = 0$,
- $g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}$ où $\overrightarrow{OP} = 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$.

c) Déterminer une base $B' = (\vec{u}; \vec{w})$ de $\mathbb{R}^2$, formée des vecteurs $\vec{u} \in$ Ker $g$ et $\vec{w} \in$ Im $g$. Puis exprimer, relativement à cette base $B'$, la matrice $M'_g$ de $g$.

d) Relativement à la base $B'$, exprimer la matrice de l'application $l = f \circ g$ et en déduire directement son interprétation géométrique.

5,5 pts

**4.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et de la base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ définie par :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = 2\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et de la base $E' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ définie par :

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{e}_1 \\ \vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\,\vec{a} - \vec{b} + 2\,\vec{c} \\ f(\vec{u}_2) = -\vec{a} + 2\,\vec{b} + \vec{c} \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice $A$ de $f$ par rapport aux bases $B$ et $E'$, ainsi que la matrice de passage de $B$ à $B'$.

b) Soit $E = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = (1+k)\,\vec{a} + (1-k)\,\vec{b} + 2\,\vec{c}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \,\}$.
Déterminer l'équation cartésienne de $f^{-1}(E)$ dans la base $B'$.

c) Donner une relation matricielle permettant de déterminer $C$, matrice de $f$ par rapport à $B'$ et $E$. Puis calculer $C$.

3 pts