Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe ☑

PRENOM : ______________________________

1. On considère l'équation en $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$A^n X^t B = C\,,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices fixées tel que $\det B \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Pour quelle valeur du paramètre a l'équation a-t-elle une solution unique ?

b) Dans le cas $a = -1$ et $n = 2$, déterminer l'ensemble solution S de cette équation si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = 0\,.$$

c) Dans le cas $a = 1$ et $n = 1$, déterminer l'ensemble solution S' de cette équation si

$$B = I_2 \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

3.5 pts

2. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel m ,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Déterminer m tel que $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. 2 pts

Tourner svp

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un sous espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.

On considère
$$V = \left\{ X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists\, P \in U \text{ t.q. } X = AP^t \right\} .$$

a) Montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $n = 2$ et
$$U = [\, M, N, R, S \,]_{\text{sev}}$$
avec
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
et encore
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} .$$

b) Déterminer l'expression générale de $X \in V$ et donner une base et la dimension de V .

3.5 pts

4. Soit U le sous-espace vectoriel de $P_3[x]$ défini par
$$U = \left\{ P \in P_3[x] \,\middle|\, P(1) = P'(1) \right\} .$$

a) Donner une base et la dimension de U .

b) Le polynôme $R = x(x-1)^2$ appartient-il à U ? Si c'est le cas, donner ses composantes dans la base choisie de U .

Soit encore $V = [\, F_1, F_2, F_3, F_4 \,]_{\text{sev}} \subset P_3[x]$, où
$$\begin{aligned} F_1 &= x^3 - 3x - 1 \\ F_2 &= -5x^3 + 7x^2 + 3 \\ F_3 &= -3x^3 + 6x^2 + x + 9 \\ F_4 &= 3x^3 - x^2 - 2x + 5 . \end{aligned}$$

c) Donner une base et la dimension de V .

d) Donner une base et la dimension de $U \cap V$.

6 pts

Total 15 pts