Changement de bases

1. Soient $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :
$\begin{cases} \vec{v_1} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v_2} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$

a) Montrer que $\mathcal{B}_v = (\vec{v_1};\, \vec{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Chercher les composantes de $\vec{x} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}_v$.

2. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique.
Déterminer A', matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}_v = (\vec{v_1};\, \vec{v_2})$ avec :
$\begin{cases} \vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \end{cases}$
A l'aide de A', déterminer la nature de f.

3. Dans le plan, on considère deux vecteurs non-parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les applications linéaires suivantes :
f est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et de rapport $\lambda = 3$,
g est une affinité d'axe $(O, \vec{v})$, de direction $\vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$ et de rapport $\mu = -2$.

a) Déterminer le matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_u = (\vec{u};\, \vec{v})$ à la base $\mathcal{B}_v = (\vec{v};\, \vec{w})$.

b) Soit h l'endomorphisme du plan défini par $h = g \circ f$.
Déterminer la matrice de h relativement à la base $\mathcal{B}_u$.

4. Soient $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_v = (\vec{v_1};\, \vec{v_2})$ avec :
$\begin{cases} \vec{v_1} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} \\ \vec{v_2} = 2\vec{e_1} + 5\vec{e_2} \end{cases}$

a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_e$ à la base $\mathcal{B}_v$.

b) Déterminer la matrice de passage R de la base $\mathcal{B}_v$ à la base $\mathcal{B}_e$.

c) Soit f l'application linéaire définie par : $f(\vec{x}) = (2y; 3x - y)$. Déterminer :
A, matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}_e$;
A_1 matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}_v$;
A_2 matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_v$.

d) Déterminer de plusieurs manières les composantes de l'image de $\vec{x} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}_v$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2};\, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_v = (\vec{v_1};\, \vec{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$.
Soient les bases $\mathcal{B}_f = (\vec{f_1};\, \vec{f_2};\, \vec{f_3})$ et $\mathcal{B}_w = (\vec{w_1};\, \vec{w_2})$ définies par :

$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \vec{f_3} = \vec{e_3} \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{w_1} = \vec{v_1} - \vec{v_2} \\ \vec{w_2} = 2\vec{v_1} + \vec{v_2} \end{cases}$

a) Chercher les matrices de passage P de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_f$ et Q de $\mathcal{B}_v$ à $\mathcal{B}_w$.

b) Chercher la matrice A' de f par rapport aux bases :

i) $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_w$,

ii) $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_v$,

iii) $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_w$.

c) Soit $\vec{a} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$; calculer de différentes façons les composantes de $f(\vec{a})$ par rapport à la base $\mathcal{B}_w$.

6. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'application linéaire f de W dans $\mathbb{R}$ qui associe au polynôme p son terme constant.
On note : $\mathcal{B}_u$ la base canonique $(1;\, x;\, x^2;\, x^3)$ de W,
$\mathcal{B}_w$ la base $(2;\, x+1;\, x(x-1);\, x^3)$,
$\mathcal{B}_e$ la base canonique $(\vec{e}\,)$ de $\mathbb{R}$,
$\mathcal{B}_v$ la base $(\vec{v}\,)$ de $\mathbb{R}$ telle que $\vec{v} = 3/2\,\vec{e}$

a) Chercher les matrices de passages Q de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_v$ et P de $\mathcal{B}_u$ à $\mathcal{B}_w$.

b) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}_u$ et $\mathcal{B}_e$; puis, à l'aide des matrices P et Q, par rapport à $\mathcal{B}_w$ et $\mathcal{B}_v$.

c) Soit le polynôme $p(x) = 5 + 2x - x^3$. Donner ses composantes dans la base $\mathcal{B}_u$, puis dans la base $\mathcal{B}_w$. Chercher la composante de l'image de $p(x)$ dans la base $\mathcal{B}_v$ de différentes façons.

7. Soit l'application g de $\mathbb{M}(2;\,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{M}(2;\,\mathbb{R})$ telle que :

$$g(X) = A(X + X^t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Chercher la matrice de g par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_e$ de $\mathbb{M}(2;\,\mathbb{R})$. Puis à l'aide de la matrice de passage P, chercher la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_v = (E_1';\, E_2';\, E_3';\, E_4')$ définie par :

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Soit $C = 2E_1' - 3E_3'$, donner ses composantes dans la base $\mathcal{B}_e$, puis dans $\mathcal{B}_v$. Chercher les composantes de l'image de C dans la base $\mathcal{B}_v$.

8. On munit $P_2[x]$, ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal à 2, de la base canonique $\mathcal{B}_v = (x^2;\, x;\, 1)$ et de la base $\mathcal{B}_w = (x-1;\, 1;\, x^2)$.
On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2})$ et de la base $\mathcal{B}_u = (\vec{u_1};\, \vec{u_2})$, définie par :

$$\begin{cases} \vec{u_1} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \\ \vec{u_2} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} \end{cases}$$

On considère l'application linéaire h de $P_2[x]$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice associée est $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par rapport à $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_u$.

a) Déterminer A'', matrice de h par rapport à $\mathcal{B}_w$ et $\mathcal{B}_e$.

b) Soit $\overrightarrow{OP'} = 9\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$.

Calculer, dans $\mathcal{B}_w$, les composantes des polynômes de $h^{-1}(\overrightarrow{OP'})$; puis expliciter ces polynômes.

9. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par sa matrice $M_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement aux bases $\mathcal{B}_e(\vec{e_1};\, \vec{e_2};\, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_u(\vec{u_1};\, \vec{u_2})$ de $\mathbb{R}^2$.

On introduit deux nouvelles bases $\mathcal{B}_f(\vec{f_1};\, \vec{f_2};\, \vec{f_3})$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_v(\vec{v_1};\, \vec{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} \\ \vec{f_3} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} - \vec{e_3} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2} \\ \vec{v_2} = 2\vec{u_1} - 3\vec{u_2} \end{cases}$$

Soient

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ les équations paramétriques d'une droite d exprimée dans la base $\mathcal{B}_f$.

Déterminer l'image de d par f relativement à la base $\mathcal{B}_v$ de $\mathbb{R}^2$.

10. On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2};\, \vec{e_3})$ et de la base $\mathcal{B}_v = (\vec{v_1};\, \vec{v_2};\, \vec{v_3})$ définie par :

$$\begin{cases} \vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{v_3} = -3\vec{e_1} - \vec{e_3} \end{cases}$$

On considère l'application linéaire identité (notée i) suivante :

$$\begin{array}{cccc} i & : & \mathbb{R}^3,\, \mathcal{B}_v & \longrightarrow & \mathbb{R}^3,\, \mathcal{B}_e \\ & & \vec{x} & \longmapsto & i(\vec{x}) = \vec{x} \end{array}$$

Chercher la matrice notée I_e^v de cette application relativement aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_e$. Puis la matrice notée I_v^e de i relativement aux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_v$.

En déduire une interprétation en terme d'application linéaire des matrices de passage de $\mathcal{B}_v$ à $\mathcal{B}_e$ et de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_v$.

Refaire le diagramme de changement de bases en notant ces applications.

Réponses

1. b) $\vec{x} = -2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$

2. $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

f est composée d'une homothétie de centre O et rapport 2 avec une affinité d'axe $(O,\ \vec{v}_1)$, de direction $\vec{v}_2$ et rapport 2.

3. a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

b) $M_h = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $R = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = -6\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$

5. a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e\,\mathcal{B}_w}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_f\,\mathcal{B}_v}$

$A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -7 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_f\,\mathcal{B}_w}$

c) $f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_w}$

6. a) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = (3/2)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_u\,\mathcal{B}_e}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_w\,\mathcal{B}_v}$

c) $p(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_u}$

$$p(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_w} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ $\qquad M' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 6 & 6 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 27 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_v}$

$$f(C) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -21 \\ -9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_v}$$

8. a) $A'' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_w\,\mathcal{B}_e}$

b) $p(x) = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_w}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$p(x) = 3x^2 + ax - 3$

9. $f(d) = \begin{pmatrix} -17-\lambda \\ 13+\lambda \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_v}$