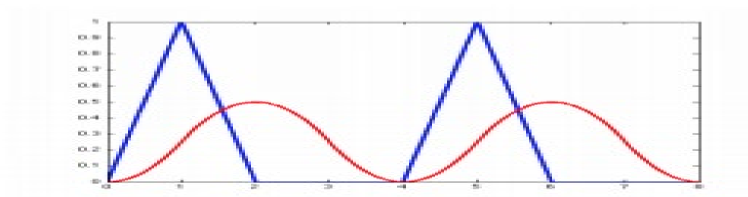
M2.L2 : Série d'exercices sur les signaux [Solutions]

1 Filtre à moyenne mobile (suite)

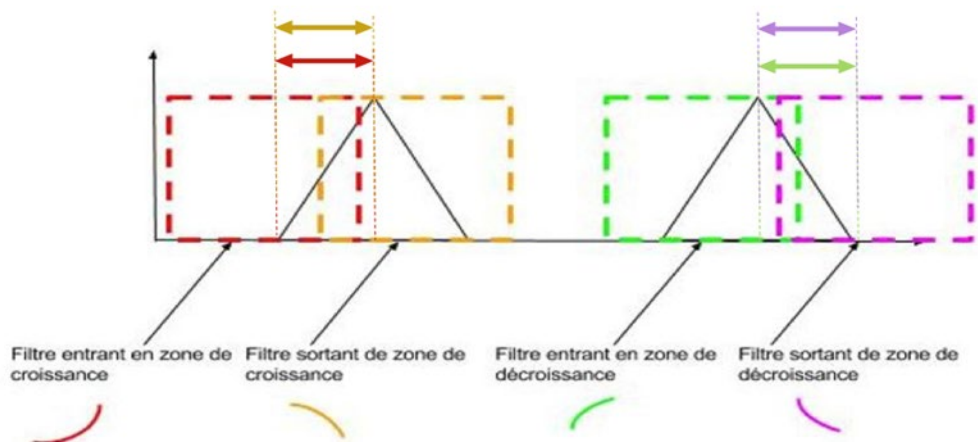
a) Après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$, on vérifie d'abord que le signal $\hat{X}_3(t)$ est constant au cours du temps et prend la valeur 1/2. Voici maintenant la forme du signal $\hat{X}_4(t)$ après passage à travers le même filtre à moyenne mobile (sur les graphes ci-dessous, $T = 2$):



$\hat{X}_4(t)$

Attention : **la courbe de $\hat{X}_4(t)$ est constituée de morceaux de paraboles**

Le signal $\hat{X}_4(t)$ est en fait constitué d'un enchaînement de bouts de paraboles comme expliqué à l'aide de la figure ci-dessous :



En effet, lorsque le filtre est en train de "sortir" d'une zone de signal croissant (filtre orange de la figure ci-dessus), pour chaque unité de déplacement supplémentaire "dx", l'intégrale $\hat{X}_4(t)$ perd aussi "(x - x0) dx". Donc, d$\hat{X}_4(t)$ / dx = -(x - x0) où *x0 correspond à l'abscisse du pied gauche du triangle*.
De la même manière lorsque le filtre "entre" dans une zone de signal croissant (filtre rouge de la figure ci-dessus), l'intégrale gagne "dx" et d$\hat{X}_4(t)$ / dx = (x - x0).
On fait le même raisonnement pour les périodes où le filtre entre (filtre vert) et sort (filtre violet) de zones décroissantes. On obtient ainsi la certitude que le signal est composé de bouts de paraboles et on a le signe du terme de plus haut degrés. Comme le fait que le signal de base est continu, on sait que la dérivée de la version filtrée est continue. En outre, on connaît les extrema de la fonction $\hat{X}_4(t)$ -- 0 et 1--, ce qui nous permet de dessiner le graphe du résultat son filtrage à moyenne mobile assez fidèlement.

Les doubles flèches <-->, correspondent à la zone où le signal est non nul et qui cause l'évolution de la valeur de l'intégrale sur le filtre. Si cette zone est linéaire, l'intégrale est une parabole. Si celle-ci est constante, l'intégrale est linéaire. De la même manière, si la zone était une parabole, l'intégrale serait un polynôme de degré 3.

b) On a vu en cours que :

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f s)\, ds = \frac{\cos(2\pi f(t-T_c)) - \cos(2\pi f t)}{2\pi f T_c}.$$

En utilisant une des formules du rappel de trigonométrie, on trouve que :

$$\hat{X}(t) = \frac{2\sin(2\pi f(t-T_c/2))\, \sin(\pi f T_c)}{2\pi f T_c}.$$

Après simplification du 2, l'amplitude de la sinusoïde est majorée, pour tout $t \in$ R, par :

$$|\hat{X}(t)| \leq \left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right| = |\mathrm{sinc}(f T_c)|.$$

Lorsque que la période $T = 1/f$ de la sinusoïde coïncide avec la période T_c du filtre à moyenne mobile, le signal sortant est nul.

2 Filtrer avant d'échantillonner

a) La bande passante du signal est infinie, car celui-ci possède un nombre infini de fréquences nf0 allant jusqu'à l'infini et toutes les amplitudes a_n des harmoniques correspondantes sont supposées strictement positives ici. Bien sûr, ceci est un peu théorique, car la valeur de a_n décroît rapidement avec n; les harmoniques correspondant à de grandes valeurs de n sont donc à peine audibles en pratique (aussi parce que notre oreille ne perçoit simplement pas les fréquences au-delà de 22 kHz).

b) Pour assurer que la condition d'échantillonnage soit satisfaite, il faut que fe > 2B, où B est la bande passante du signal après filtrage.

1. Si f0 = 440 Hz et fe = 44.1 kHz, il faut que B < 22.05 kHz: en filtrant le signal avec une fréquence de coupure fc comprise entre 22 kHz (50x 440Hz) et 22'049 Hz (= 51x 440Hz – 1Hz), on s'assure de préserver les 50 premières harmoniques jusqu'à f_{50} = 22 kHz, tout en évitant l'effet stroboscopique lors de la reconstruction. Remarquez qu'il n'y a pas besoin que fe > 2fc, car le signal ne contient aucune composante entre 22 kHz et 22'439 Hz (= 51x 440Hz – 1Hz); on peut donc filtrer celui-ci avec n'importe quelle fréquence de coupure fc dans cet intervalle.

2. Avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure fc comprise entre 21'780 Hz et 22'274 Hz, on préserve les 44 premières harmoniques du signal.

3. Encore avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure fc comprise entre 4'290 Hz et 4'619 Hz, on préserve les 13 premières harmoniques du signal.

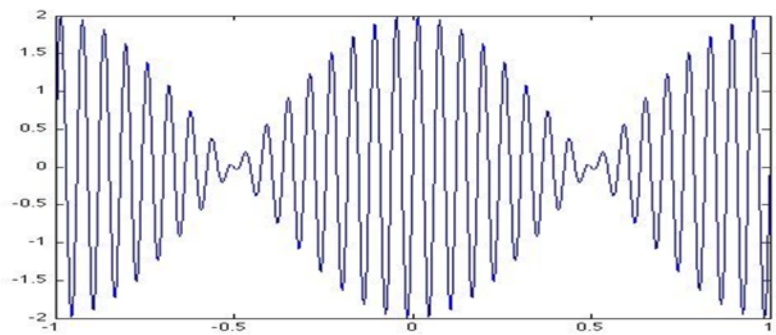
c) Pour échantillonner correctement le signal, il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage juste au-dessus de 6'800 Hz (disons égale à ce chiffre pour simplifier), donc le nombre de bits à enregistrer est de 300 (secondes)* 6'800 * 64 = 130'560'000 bits   soit environ 131 Mégabits.

3 Accordage de guitare et phénomène dit de “battement”

a) Lorsque $f_2 = f_1 + \varepsilon$, avec ε petit mais non nul, on trouve que (cf. encore une fois le rappel de trigonométrie)

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos(\pi(f_2 - f_1)t)\,\sin(\pi(f_1 + f_2)t) = 2\cos(\pi\varepsilon t)\,\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t).$$

Cette onde est donc faite d’une composante qui oscille lentement ($\cos(\pi\varepsilon t)$) et d’une autre qui oscille rapidement ($\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t)$). Elle ressemble à ceci (pour f_1 = 16Hz et f_2 = 17Hz):



C’est la composante qui oscille lentement que l’on entend clairement à l’oreille.

b) Lorsque $f_2 = f_1$, l’onde résultante est simplement:

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_1 t) = 2\sin(2\pi f_1 t).$$

Dans ce cas, l’amplitude est doublée (remarquez qu’on avait aussi un facteur 2 dans le premier cas), mais on n’entend pas de battement.

Deux illustrations intéressantes du phénomène de battement sont disponibles ici:
http://fr.wikipedia.org/wiki/Battement
http://fr.wikipedia.org/wiki/Battement binaural

4 Un peu de radio

a) On considère d’abord un système qui transmet directement $S(t)$. La longueur de l’antenne L est donc fixée au minimum à un quart de la longueur d’onde $\lambda = \frac{c}{f_s}$, c’est-à-dire

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_s} = \frac{3\times 10^8}{4\times 10^3} = \frac{3}{4}\times 10^5 \text{ m} = 75 \text{ km}.$$

Une antenne de 75 km de long ne se prête pas à des applications concrètes! Par contre, pour le signal $A(t)$ dont les fréquences sont proches de 300kHz, une longueur d’antenne de

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_p} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 3 \times 10^5} = \frac{1}{4} \times 10^3 \text{ m} = 250 \text{ m.}$$

est suffisante (dans la pratique, on se débrouille avec des antennes plus petites encore).

b) Observons la figure fournie avec la donnée de l'exercice : le signal utile est S(t). Or S(t) est multiplié par la porteuse qui produit de très nombreuses oscillations quasiment symétriques autour de l'axe des X. Or un filtre à moyenne mobile calcule l'intégrale sur une fenêtre qui va englober plusieurs périodes de la porteuse et lorsqu'on intègre une fonction sin sur une ou plusieurs périodes la surface au-dessus de l'axe des X équilibre celle en-dessous de l'axe des X et on obtient 0. Donc on n'arrive pas à extraire S(t) en appliquant un tel filtre à moyenne mobile sur le signal modulé.

Par contre en multipliant une seconde fois par la porteuse, comme expliqué dans la réponse suivante, sa contribution passe au carré et est toujours positive. Lorsqu'on filtre avec un filtre à moyenne mobile il n'y a plus cet équilibre entre surface au-dessus et au-dessous de l'axe des X, et cela permet de récupérer la forme du signal utile S(t).

c) Dans cet exercice, il s'agit de récupérer le signal $S(t)$ à partir de $A(t)$ seulement, la valeur de f_p étant connue. Etant donné que nous connaissons f_p, nous pouvons multiplier $A(t)$ par $2P(t)$:

$$\begin{aligned}
A(t)\,2P(t) &= 2S(t)\,P(t)\,P(t) = 2\,\sin(2\pi f_s t)\sin(2\pi f_p t)\sin(2\pi f_p t) \\
&= \sin(2\pi f_s t)\,(\cos(2\pi(f_p - f_p)t) - \cos(2\pi(f_p + f_p)t)) \\
&= \sin(2\pi f_s t)\,(1 - \cos(4\pi f_p t)) \\
&= \sin(2\pi f_s t) - \sin(2\pi f_s t)\cos(4\pi f_p t) \\
&= \sin(2\pi f_s t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p - f_s)t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p + f_s)t)
\end{aligned}$$

Nous observons que nous avons maintenant la somme du signal $S(t) = \sin(2\pi f_s t)$ auquel nous sommes intéressés et de deux termes supplémentaires avec les fréquences respectives

$$2f_p - f_s = 599 \text{ kHz} \qquad \text{et} \qquad 2f_p + f_s = 601 \text{ kHz.}$$

Nous pouvons supprimer ces deux termes en appliquant un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure plus basse que 599 kHz (p. ex. $f_c = f_p = 300$ kHz), et ainsi récupérer le signal $S(t)$.