Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 22

Exercice 3

(a) $\mathcal{C}$: $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 18y - 3 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -9 \\ 1 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

$\Delta = -\dfrac{5}{2}$

$\delta = 16$

$\mathrm{tr}A = 10\,.$

C'est une ellipse non-dégénérée réelle.

$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 2$ et 8

$H = \frac{\Delta}{\delta} = -32 \implies$

Equation réduite :

$$2\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2 - 32 = 0$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} - 1 = 0$$

$\implies a = 4$ et $b = 2\,.$

Centre :

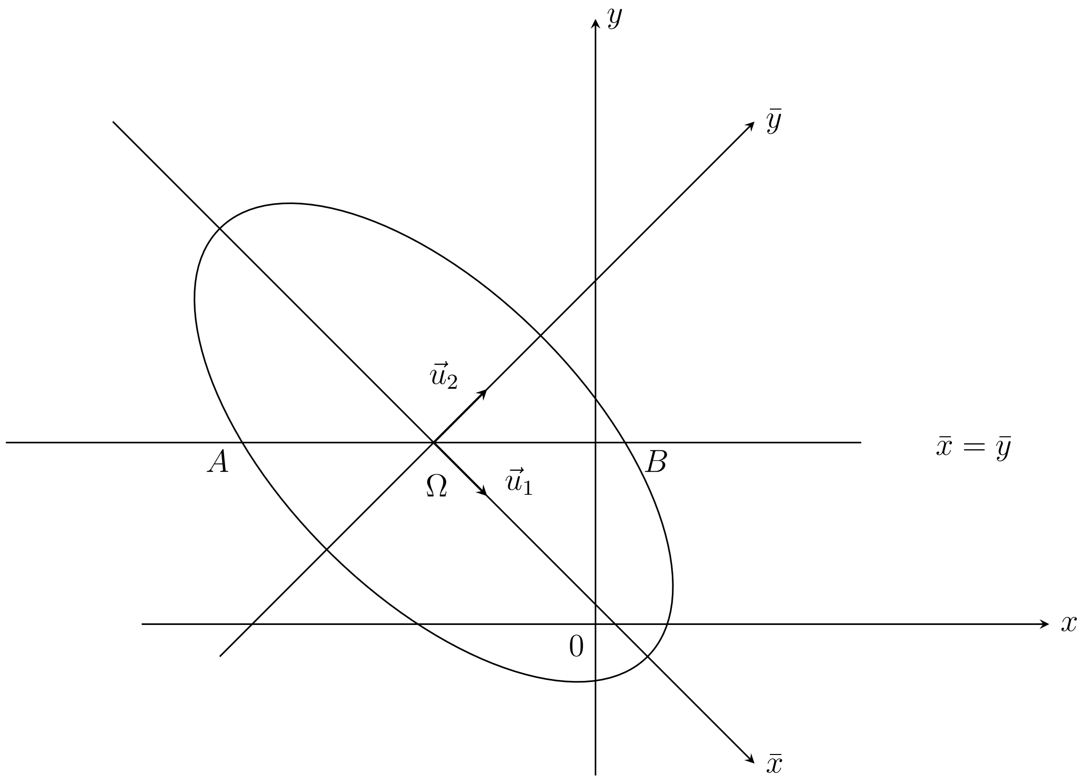
$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + 5y - 9 = 0 \end{array} \right. \implies \Omega\,(-2; 3)$$

Grand axe parallèle à $E(2) : x + y = 0 \implies \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Petit axe parallèle à $x - y = 0 \implies \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\mathcal{R}_u = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$: orthonormé direct.

Voici un schéma de l'ellipse. Noter que l'angle entre l'axe Ox et l'axe $\Omega\bar{x}$ est de $-\frac{\pi}{4}$.

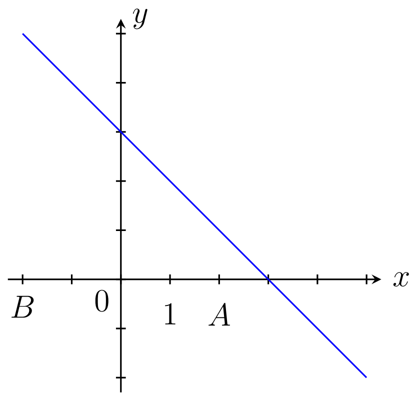


(b) Dans $\mathcal{R}_u$, la droite $(\Omega, \vec{e}_1)$ a pour équation :
$\bar{x} = \bar{y}$
$\Longrightarrow$
dans $\mathcal{R}_u$:
$2\bar{x}^2 + 8\bar{x}^2 - 32 = 0$
$10\bar{x}^2 = 32$
$\bar{x} = \pm 4\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\Longrightarrow$
les 2 points : $A\,(-4\frac{\sqrt{5}}{5}, -4\frac{\sqrt{5}}{5})$ et $B\,(4\frac{\sqrt{5}}{5}, 4\frac{\sqrt{5}}{5})$.

Exercice 4

(a) L'étude des lieux géométriques se fait de la manière suivante :
1) Figure d'étude.
2) Choix du paramètre.
3) Mise en équations.
4) Elimination du paramètre.

1) Figure d'étude :



Le point C varie sur la droite $x+y-3=0$, il suffit de paramétriser le point C.

2) Choix du paramètre : λ, abscisse du point C, $C(\lambda, 3-\lambda)$.
L'orthocentre se trouve à l'intersection de la droite d perpendiculaire à Ox passant par le point C, et de la droite g perpendiculaire à CA passant par B.

3) Mise en équations :

La première équation est :

$$d \;:\; x = \lambda \quad (1)$$

On détermine $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ \lambda-3 \end{pmatrix}$, puis le vecteur perpendiculaire $\begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 2-\lambda \end{pmatrix}$ et donc la droite g est d'équation :

$$g: \; \frac{y-0}{x+2} = \frac{2-\lambda}{3-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow g: \; (3-\lambda)y = (2-\lambda)(x+2) \quad (2)$$

On remplace dans la deuxième équation le paramètre en fonction de x.

4) Elimination du paramètre :

(1) dans (2) :

$$(3-x)y = (2-x)(x+2)$$
$$\Leftrightarrow 3y - xy = 4 - x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - xy + 3y - 4$$

(b) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

On détermine ensuite si la conique est dégénérée ou non :

$$\Delta = \det A = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} \neq 0$$

Elle n'est pas dégénérée.

On détermine ensuite son genre :

$$\delta = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Il s'agit donc d'une hyperbole.
On recherche ses asymptotes par la métode des points à l'infini :

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 - XY + 3YT - 4T^2 = 0 \\ T = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ X^2 - XY = 0 \ \Leftrightarrow\ X(X-Y) = 0$$

$\Rightarrow\ X = 0$ (pente infinie) ou $X - Y = 0$ et donc $\dfrac{Y}{X} = 1\,,$ la pente vaut 1.

On détermine le centre Ω grâce aux deux premières lignes de la matrice A.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - \frac{1}{2}y & = & 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ x = 3\,,\ y = 6\ \Rightarrow\ \Omega\,(3,6)$$

Equations des asymptotes :

$x = 3$ (pente infinie)

$\dfrac{y-6}{x-3} = 1\ \Leftrightarrow\ x - 3 = y - 6\ \Leftrightarrow\ x - y + 3 = 0$