

## Analyse I Série de révision

## Automne 2018

- Pour les questions à choix multiple, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type vrai-faux, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, −1 point si la réponse est incorrecte.



Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x + 4x^2}} \, \mathrm{d}x \; .$$

Alors:

**Question 2 :** Soit une fonction  $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  et la suite de nombre réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie récursivement par  $a_0 = 1$  et  $a_n = g(a_{n-1})$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Alors, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pour g définie par :

$$g(x) = 2x - 2$$

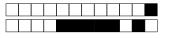
$$g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Question 3 : Soit la fonction  $f\colon \left]-\pi,\pi\right[\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{\left(\sin(x)\right)^2}.$$

Alors:



**Question 4 :** Soit la série numérique S définie par

$$S = -\sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{3} \right)^k .$$

Alors:

$$S=2$$

**Question 5 :** Soit  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$  le développement limité d'ordre trois de la fonction  $f: ]-1,1[ \to \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de x = 0. Alors :

$$a_3 = 5$$

Question 6 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx.$$

Alors:

$$I = -3e + 2$$

$$I = e - 2$$

$$I = 4e - 1$$

$$I = 5e - 2$$

**Question 7:** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors:

## Question 8: Soit le nombre complexe

$$z = \frac{e^{i\pi/2} + e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3} + e^{i\pi/6}} .$$

Alors:

**Question 9:** Soit la fonction  $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(x) e^{-x}$ . Alors:

| $\prod f$ atteint son minimum en $x=0$ en $x=\pi$ et en $x=2\pi$ . |
|--|
|  |
|  |

Question 10: Soit r le rayon de convergence de la série entière S, définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k .$$

Alors:

Question 11 : Soit la fonction bijective  $f\colon ]\,0,\infty\,[\,\,\to\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log}\left(\frac{2e + x}{x^2}\right) ,$$

et soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de f et  $y_0 := f(2e)$ . Alors :

$$(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4e}{3}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = 2e + 1$$

$$(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2e + 1}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4e}$$



**Question 12:** Soit le nombre complexe  $z = e^{i} + e^{i/3}$ . Alors :

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$$

$$|z| = \sqrt{1 + (e^{2i/3} + e^{-2i/3})}$$

$$|z| = \sqrt{2 + 2\left(e^{i/3} + e^{-i/3}\right)}$$

**Question 13 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  définie par

$$a_n = \frac{\operatorname{Log}(n + e^n)}{n+1} .$$

Alors:

 $a_n$  est une suite bornée et  $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ 

 $a_n$  est une suite bornée et  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 

 $a_n$  est une suite non bornée

Question 14 : Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \ge 0, \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

$$f(2) = 12$$

$$f(3) = 9$$

$$f(-3) + f(1) = 7$$

$$f'(2) = 2$$

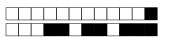
**Question 15:** Soit le sous-ensemble  $E \subset \mathbb{R}$ ,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Alors:

$$\square$$
 Inf  $E = -1$ 

$$\prod$$
 Inf  $E=0$ 



Question 16: Soit l'intégrale

$$I = \int_{1}^{e^3} \frac{\text{Log}(x)}{x \sqrt{\left(\text{Log}(x)\right)^2 + 1}} \, dx.$$

Alors:

$$I = \frac{1}{2} \left( \sqrt{10} - 1 \right)$$

$$I = 2(\sqrt{10} - 1)$$

**Question 17:** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \text{Log}(2 \operatorname{Arctg}(3 + 5x^2)).$$

Alors:

$$f'(x) = \frac{2x}{(5x^4 + 6x^2 + 2) \operatorname{Arctg}(3 + 5x^2)}$$

$$f'(x) = \frac{10x}{\text{Arctg}(3+5x^2)} \left(1 + \left(3+5x^2\right)^2\right)$$

$$f'(x) = \text{Log}(2) + \frac{x}{(5x^4 + 6x^2 + 2) \operatorname{Arctg}(3 + 5x^2)}$$

**Question 18:** Soit la série numérique S avec paramètre  $c \in \mathbb{R}$  définie par

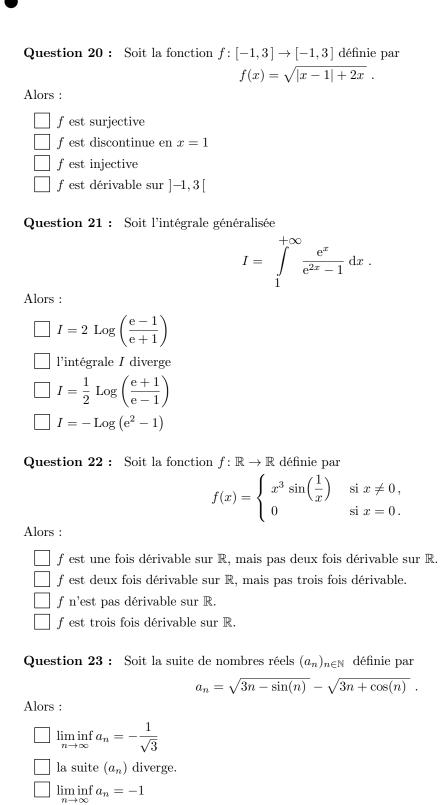
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

Alors:

|  | S converg | e si et | seulement | si 2 | > c | > ( | ) |
|--|-----------|---------|-----------|------|-----|-----|---|
|--|-----------|---------|-----------|------|-----|-----|---|

- $\hfill \hfill \hfill$
- $\square$  S converge si et seulement si  $c \ge 0$
- $\square$  S converge si et seulement si c > 3

Question 19: Soit  $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$  une suite de nombres réels et  $s_n=\sum_{k=0}^n a_k,\,n\in\mathbb{N}$ , la suite des sommes partielles. Si  $\lim_{n\to+\infty} s_n=1$ , alors :





## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 24 : Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  une série numérique divergente et  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite de nombres réels

telle que  $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ . Alors la série numérique  $\sum_{n=0}^\infty a_nb_n$  converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 25 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}$  et  $c = \operatorname{Sup} A$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $x \in A$  tel que  $x + \epsilon \geq c$ .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : L'intégrale  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13}) dx$  vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 27 :** La fonction  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  est prolongeable par continuité en x = 0.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 28:** Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 29 :** Soit  $f: ]-1,1[ \to \mathbb{R}$  une fonction qui admet autour de x=0 le développement limité  $f(x)=x-2x^3+x^3\varepsilon(x),$  où  $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$  Alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

VRAI FAUX

