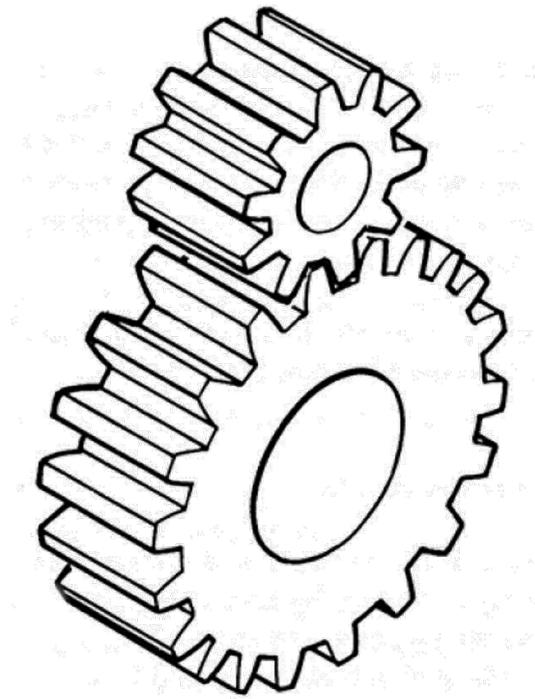


# Introduction à la théorie des engrenages

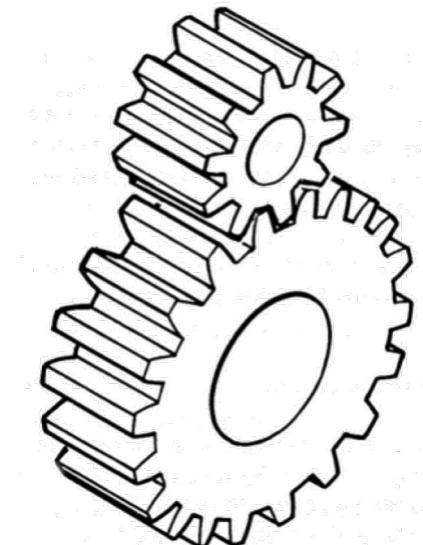


Prof. Simon Henein  
Patrick Flückiger

Décembre 2022

# Plan du chapitre

- Introduction
  - Définition
  - Aperçu historique
  - Types d'engrenages
- Cahier des charges d'engrenages
  - Rapport de transmission constant
  - Dentures avec le même pas
  - Transmisson 'lisse' sans à-coups
  - Pas de coincement/bloquage
- Exemples de profils
  - Développante
  - Cycloïdaux
  - Ogival
- Engrenages à profil en développante
  - Dimensions
  - Dimensionnement: résistance à la flexion
  - Dimensionnement: résistance à la pression
  - Usinage
- Pour aller plus loin:
  - Aperçu de la denture hélicoïdale
  - Denture déportée
  - Aperçu du réducteur planétaire

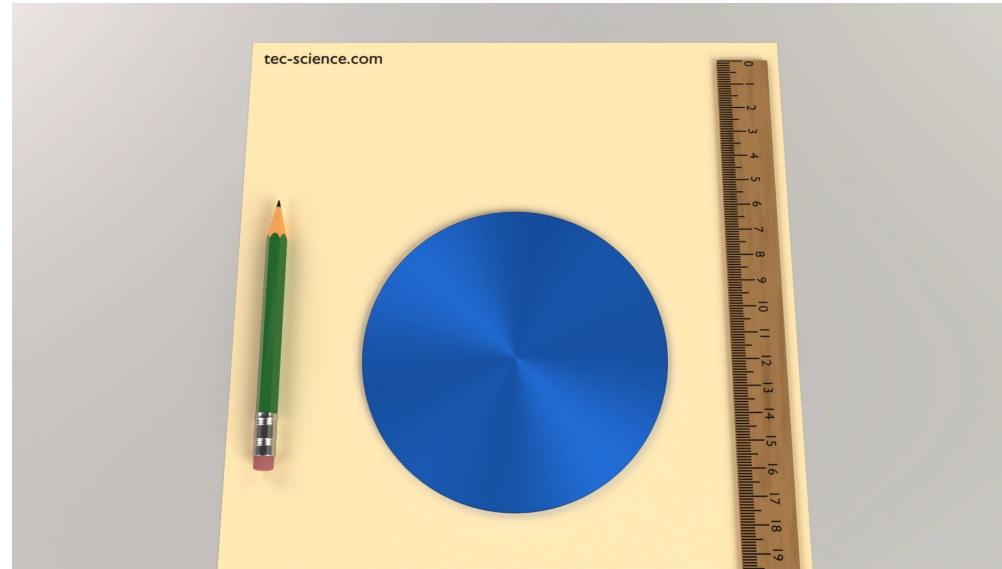


- Condition 1:** les profils de dents doivent être conjugués afin de produire un mouvement homocinétique.
- Condition 2 :** les dentures doivent avoir le même pas et donc le même module.
- Condition 3 :** l'arc d'engrènement doit être supérieur au pas pour assurer la continuité de l'engrènement.
- Condition 4:** les profils doivent être tels qu'il n'y ait pas d'interférence, c'est à dire que le contact entre dents doit toujours s'effectuer tangentiellement et que les profils ne doivent pas pénétrer l'un dans l'autre.

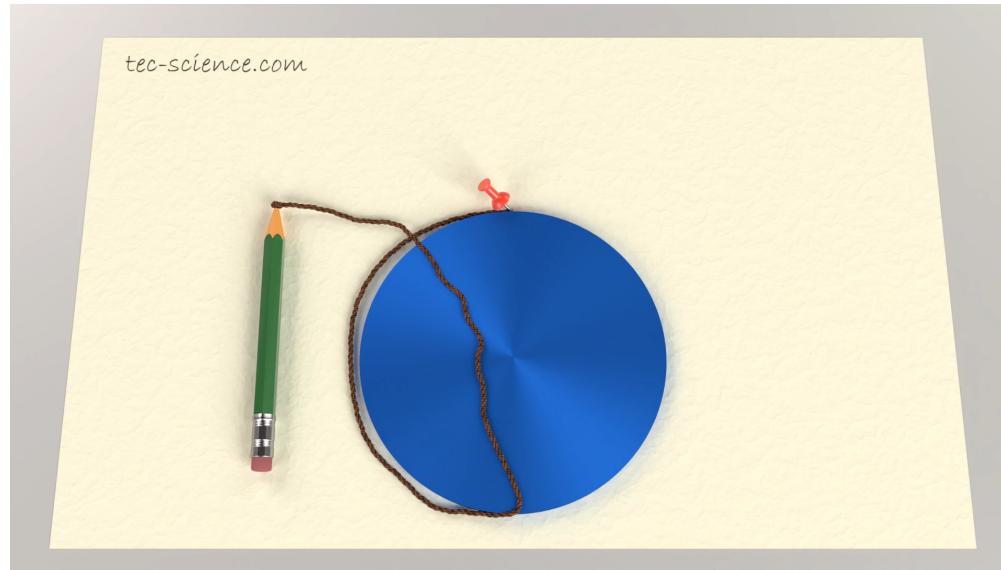
Il existe une infinité de profils conjugués. Seuls certains profils sont utilisés en pratique:

- Le profil en développante: pour la plupart des applications
- Le profil en cycloïde: utilisé en horlogerie par exemple

Exemple de profil supplémentaire: le profil ogival (pas conjugué), utilisé en horlogerie par exemple

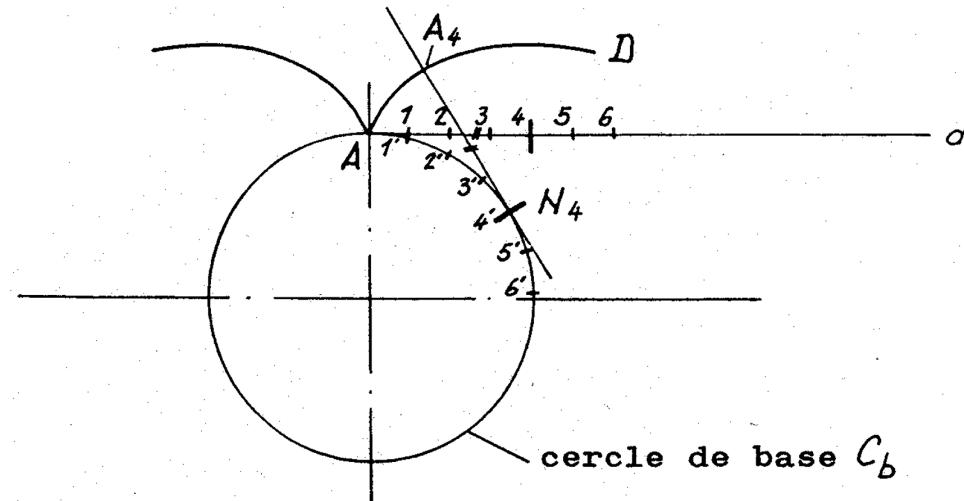


# Profils en développante de cercle



## Profils en développante de cercle

La développante de cercle est le lieu des points  $A$  lorsque la droite  $d$  (appelée droite génératrice) roule sans glisser sur le **cercle de base**  $C_b$ .



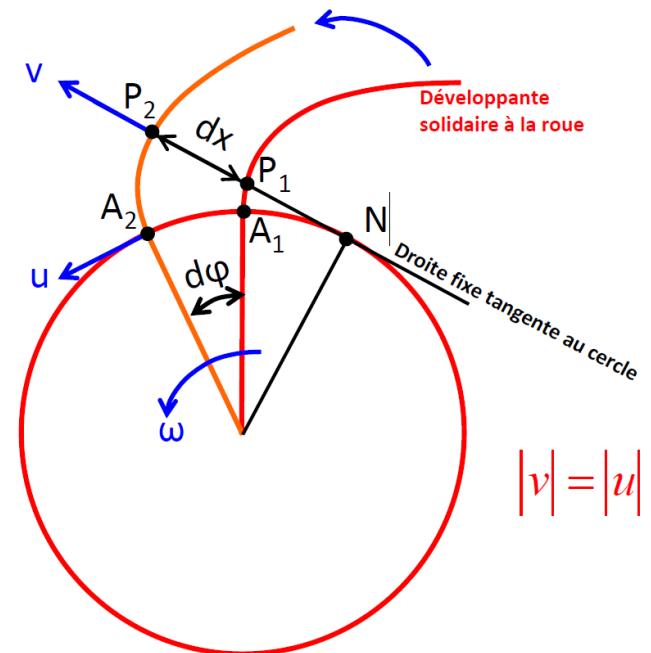
Propriétés d'une développante:

- $\overline{A_4N_4} = \widehat{AN_4}$
- $N_4$  est le centre instantané de rotation du segment  $A_4N_4$
- $A_4N_4$  est le rayon de courbure de la développante
- La tangente au profil est perpendiculaire à la droite  $A_4N_4$
- La tangente ne coupe jamais la développante
- La normale à la tangente est toujours tangente au cercle de base
- S'il y a contact avec une développante, alors la ligne d'action est tangente au cercle de base

# Profils en développante de cercle

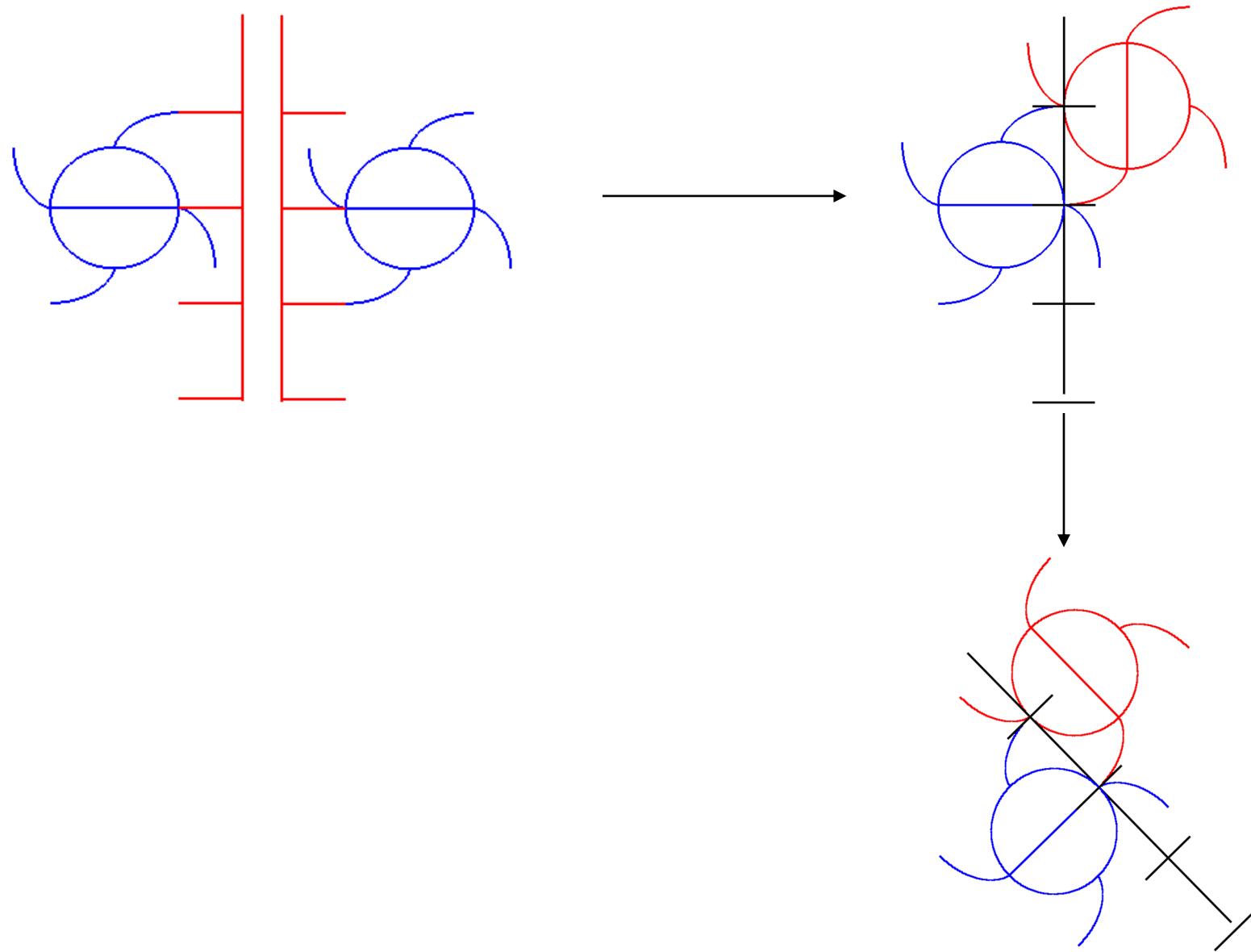
## Engrènement des profils en développante de cercle:

- On fixe la droite tangente et on fait tourner le cercle avec sa développante, ce qui est équivalent à avoir un premier engrenage en profil de développante.
- Les normales à la courbe aux points  $P_1, P_2, \dots$  restent fixes.
- Le profil conjugué du 2<sup>ème</sup> engrenage doit faire contact aux points  $P_1, P_2, \dots$
- Quel profil satisferait cette condition?  
→ Une développante qui a la même droite tangente comme génératrice



Source: Systèmes mécaniques, Schiffmann, 2018

# Profils en développante de cercle



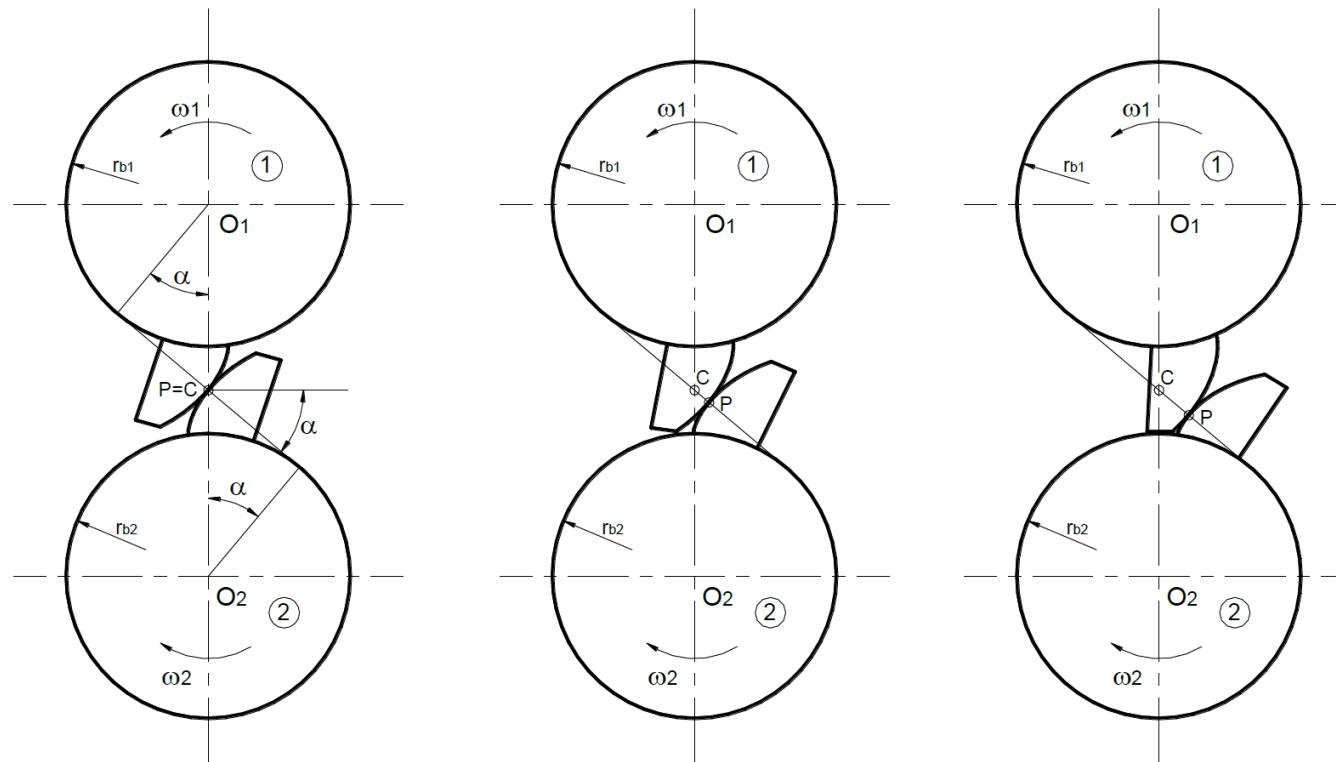
## Engrènement des profils en développante de cercle:

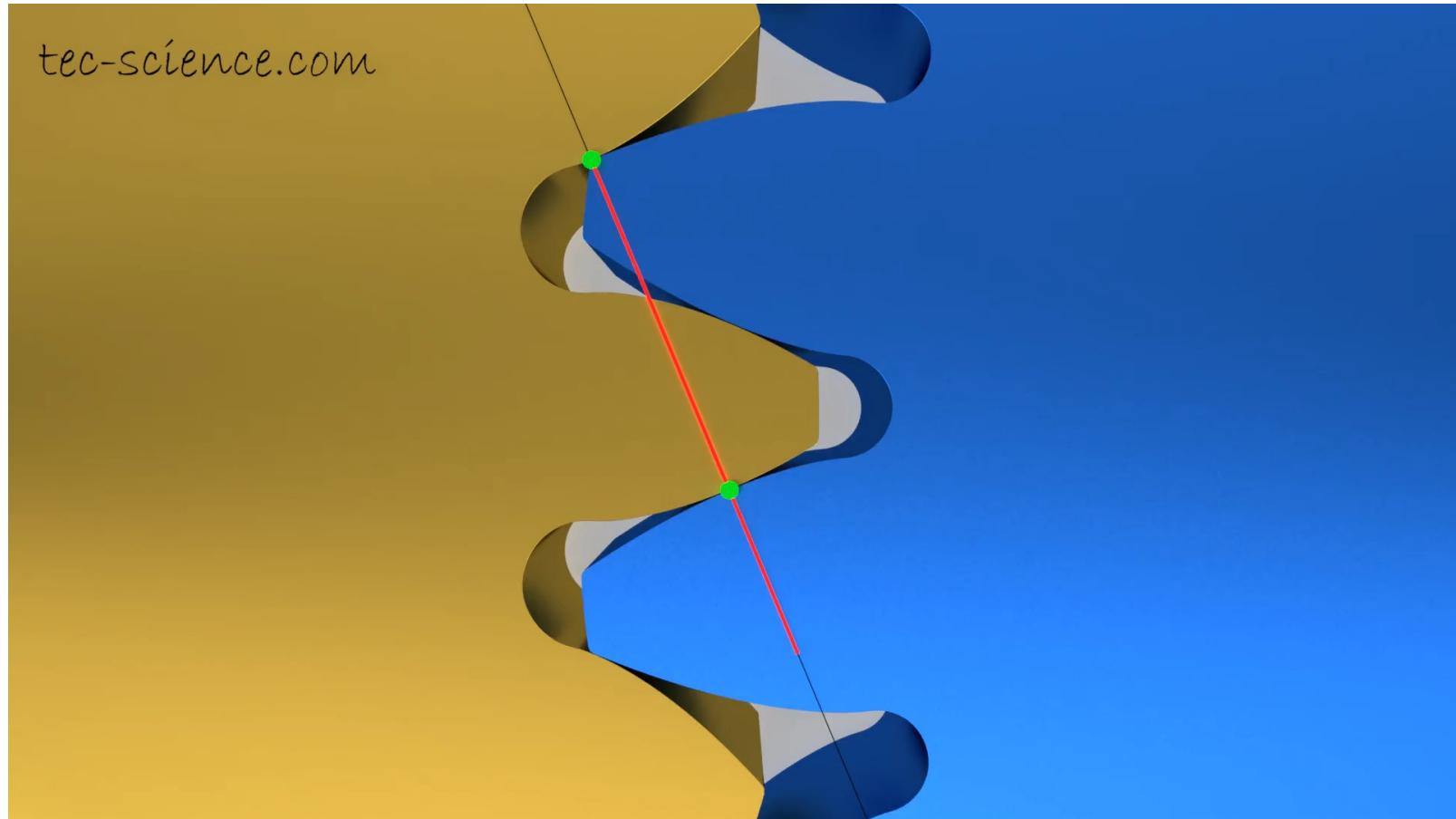
Une développante de cercle a pour conjugué une développante de cercle

La ligne de force au point de contact fait un angle  $\alpha$  avec la perpendiculaire à la ligne des centres  $O_1O_2$ . appelé "angle de pression".

L'angle de pression reste constant tout au long du contact.

Valeurs typiques: 14,5(rare) ; 20 (le plus courant); 25 ; 30 ; (dans certains cas 40° à 50° )



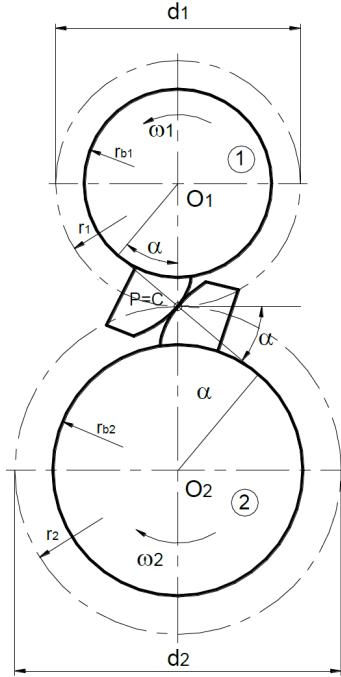
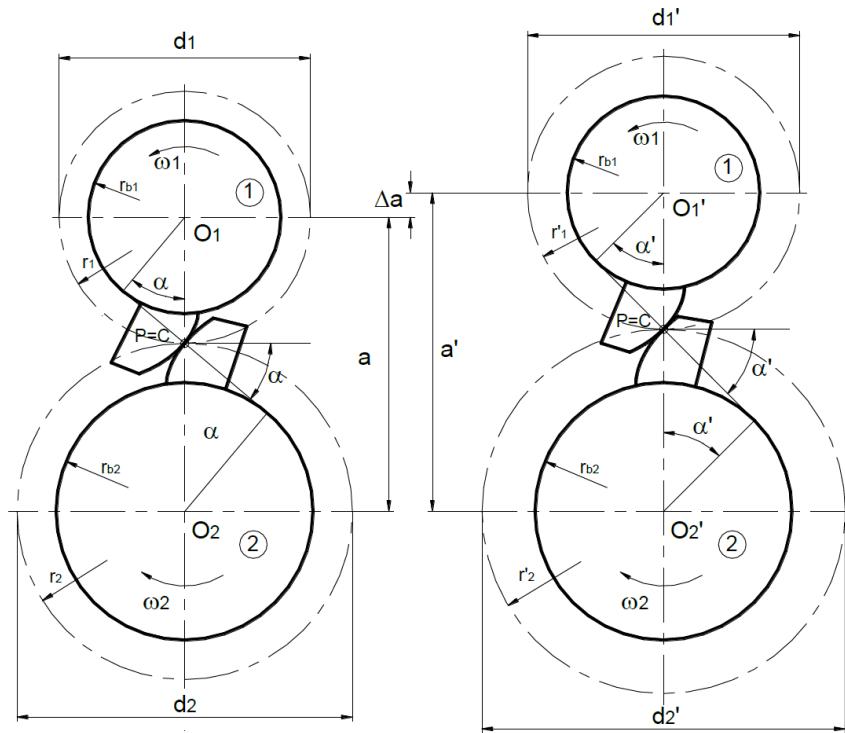


Il ne faut pas confondre cercle de base et cercle primitif:

- Cercle de base: crée la développante
- Cercle primitif: détermine le rapport de réduction

$$r_b = r \cos(\alpha), \text{ avec } r_b \text{ le rayon de base, } r \text{ le rayon primitif et } \alpha \text{ l'angle de pression}$$

Avec les mêmes cercles de base, en changeant l'entraxe on change l'angle de pression et les cercles pratiques  
Ceci ne change pas le rapport de transmission.



Équations de la développante:

- Coordonnées cartésiennes:

$$\overline{A_4 N_4} = \widehat{AN_4}$$

$$\rightarrow \overline{A_4 N_4} = r_b \varphi$$

$$\begin{cases} x = r_b(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \\ y = r_b(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \end{cases}$$

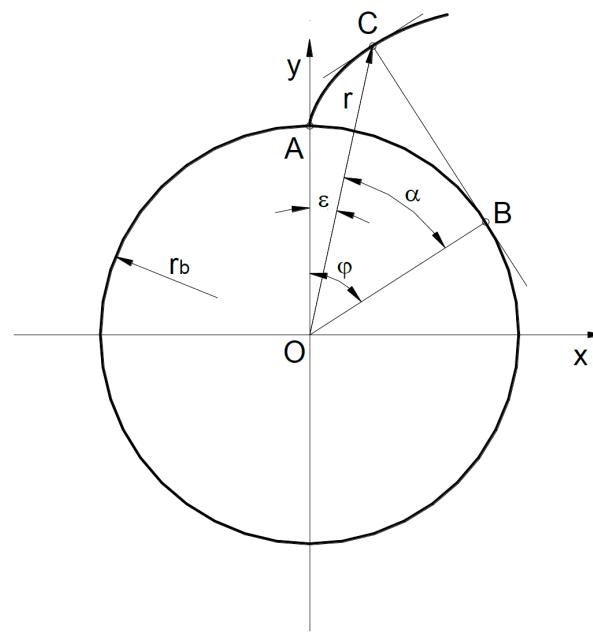
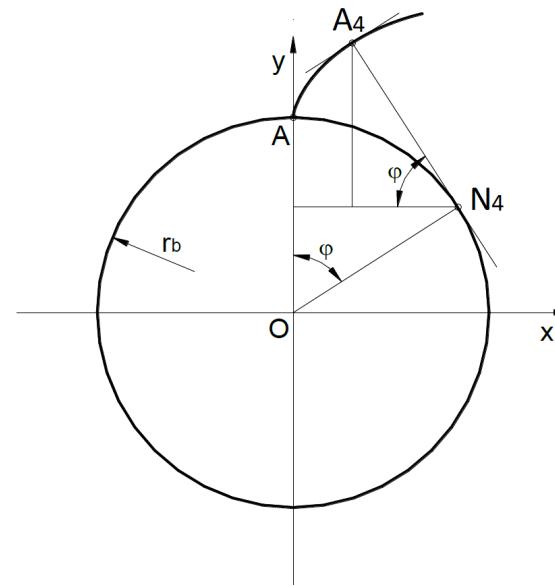
- Coordonnées polaires:

$$AN_4 = r_b \varphi = r_b \tan \alpha$$

$$\rightarrow \varphi = \tan \alpha$$

$$\epsilon = \varphi - \alpha = \tan \alpha - \alpha$$

$$\begin{cases} r = \frac{r_b}{\cos \alpha} \\ \epsilon = \tan \alpha - \alpha \end{cases}$$



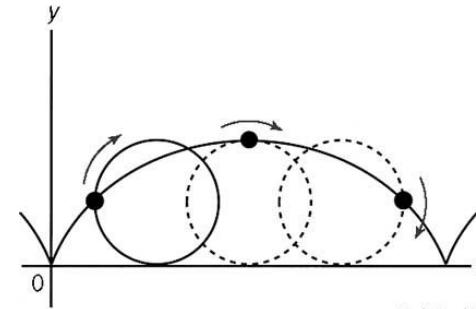
## Avantages des profils à développante

1. La base de la dent développante est plus large que celle de la dent cycloïde.
2. Le fonctionnement n'est pas altéré par une petite modification de l'entre-axe; celui-ci n'a pas besoin d'être réalisé avec une grande précision.
3. Possibilité de réaliser le profil exact par génération.
4. Les forces sur les paliers sont constantes, car l'angle de pression est constante.

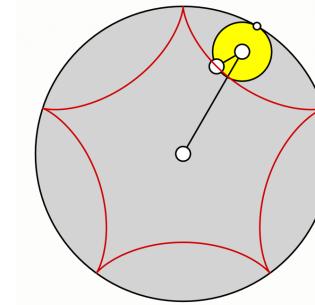
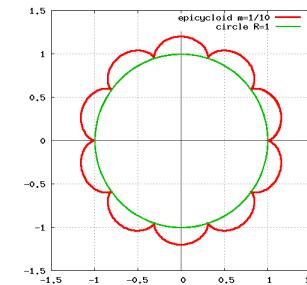
## Désavantages des profils à développante

1. Les rayons de courbure de 2 dents en prise sont opposés, ce qui entraîne une grande pression de contact.
2. Les dents à profil développante de cercle présentent un glissement relativement important (perte de rendement).
3. Les engrenages à petit nombre de dents risquent l'interférence.

- Cycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur une **droite**
- Epicycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur l'**extérieur d'un cercle**
- Hypocycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur l'**intérieur d'un cercle**



Tech-Graphics

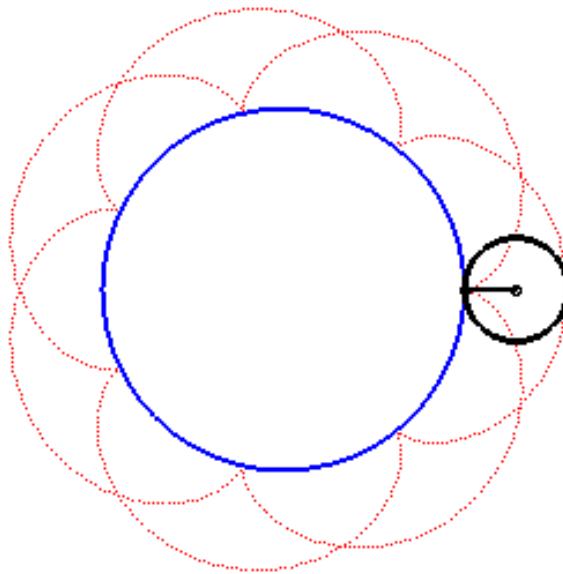


Un profil épicycloïdal a pour conjugué un profil hypocycloïdal et réciproquement:

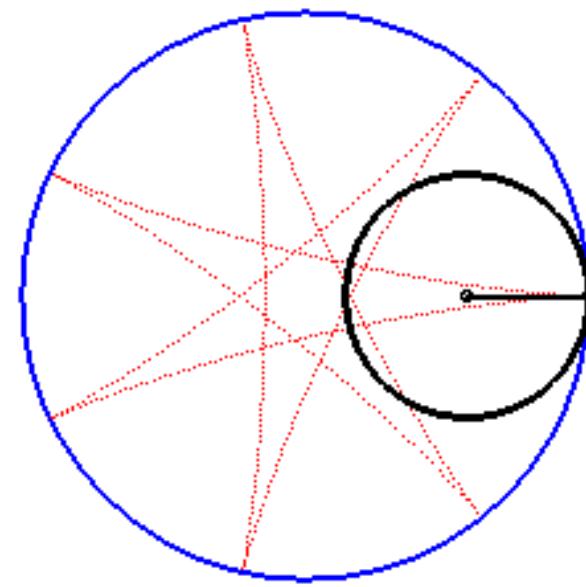
Cycloïde

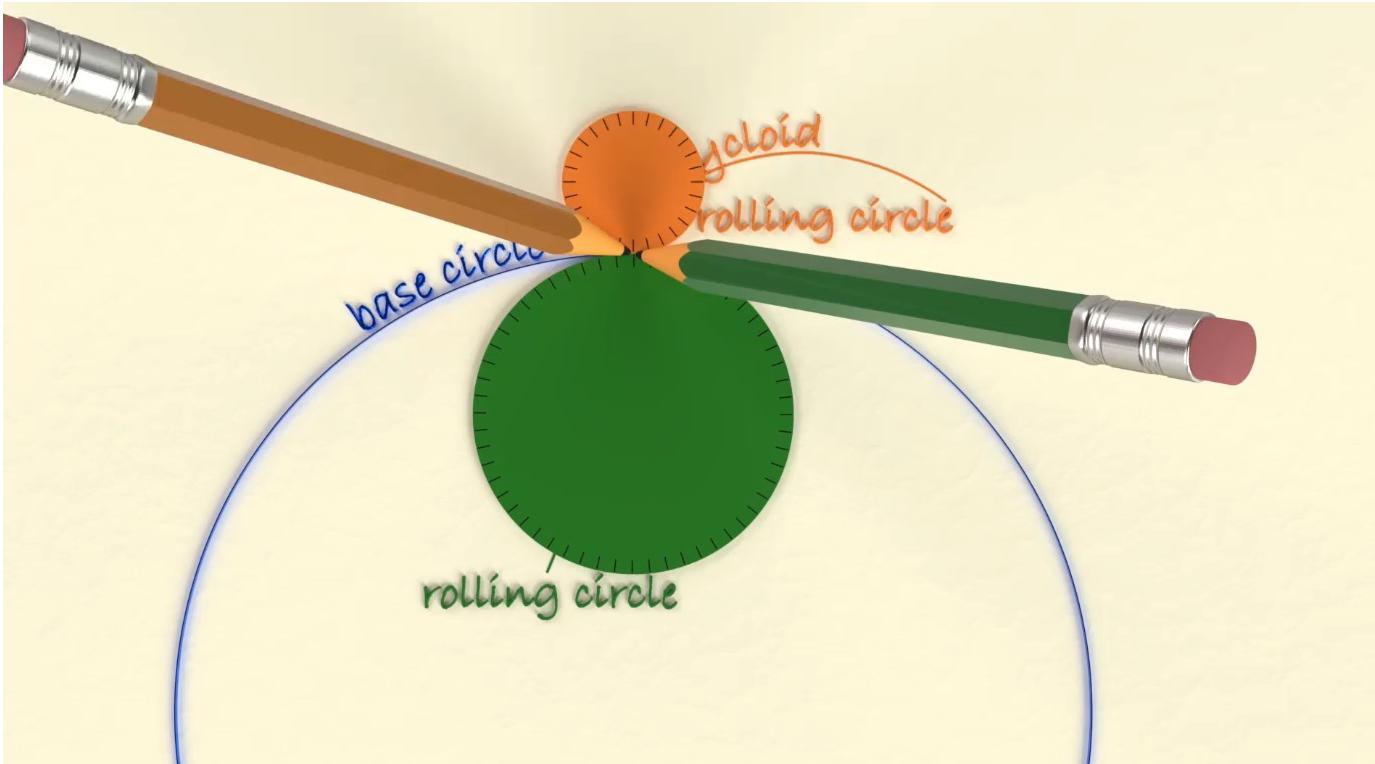


Epicycloïde

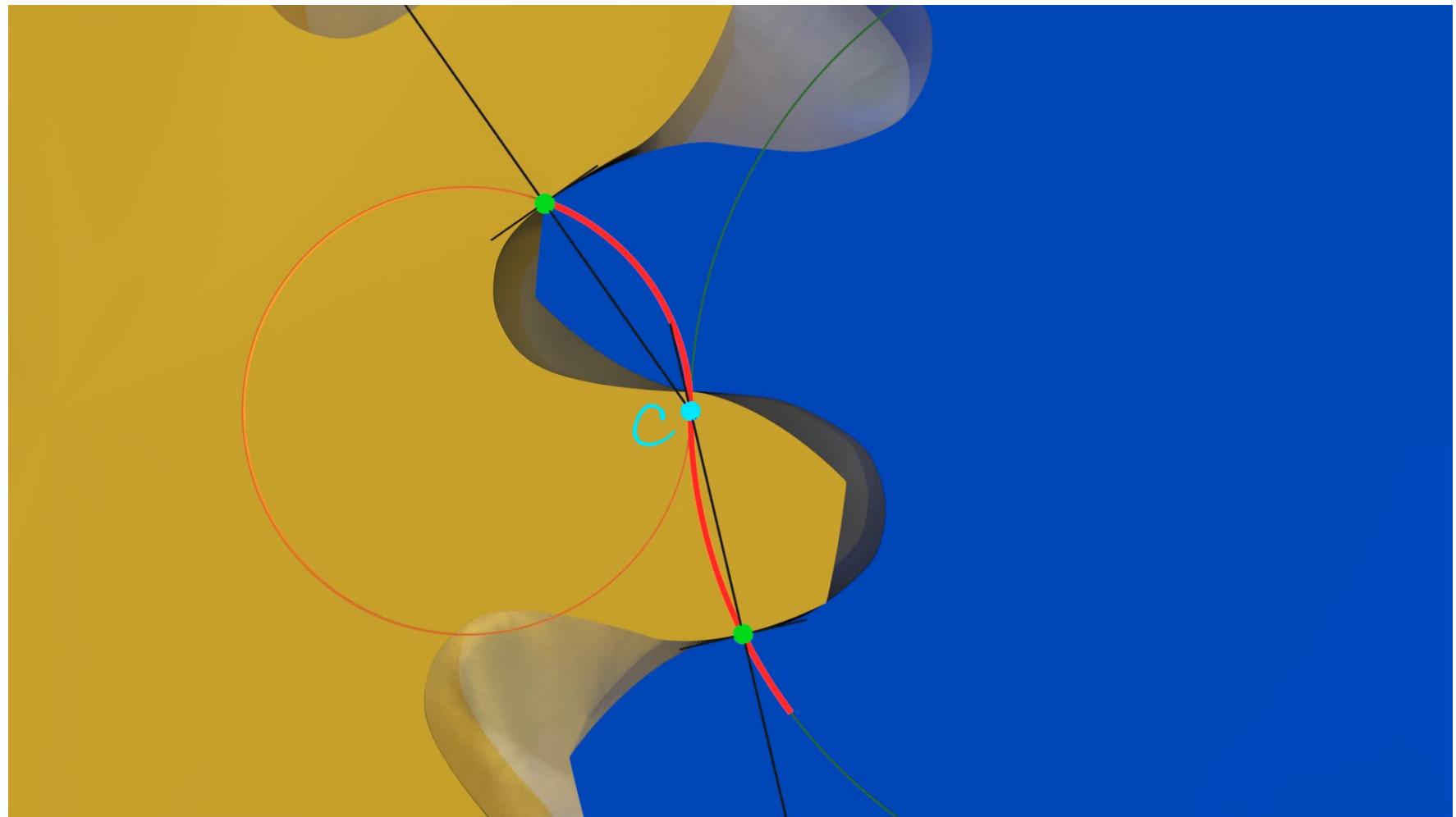


Hypocycloïde





Source: <https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/cycloidal-gear/geometry-of-cycloidal-gears/>



## Avantages des profils cycloïdaux

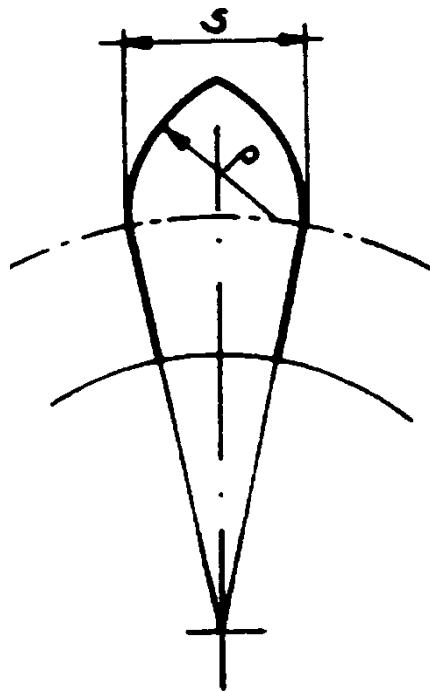
- 1) Pratiquement, ces profils ne donnent pas lieu à interférence ; ils permettent donc de réaliser des engrenages à petits nombres de dents.
- 2) Le glissement est très faible.
- 3) Les rayons de courbure des surfaces en contact sont du même côté des profils, ce qui conduit à une plus faible pression de contact (voir loi de Herz, chapitre 4, et fig. 6.51).

## Désavantages des profils cycloïdaux

- 1) Le pied de la dent est étroit (résistance plus faible)
- 2) Le taillage doit être effectué au moyen d'une fraise de forme (une fraise pour un module et un nombre de dents donnés).
- 3) Grande sensibilité à une variation (inexactitude) d'entraxe.

## Profil ogival

Ce profil est recommandé par la Norme de l'Industrie Horlogère Suisse: NIHS

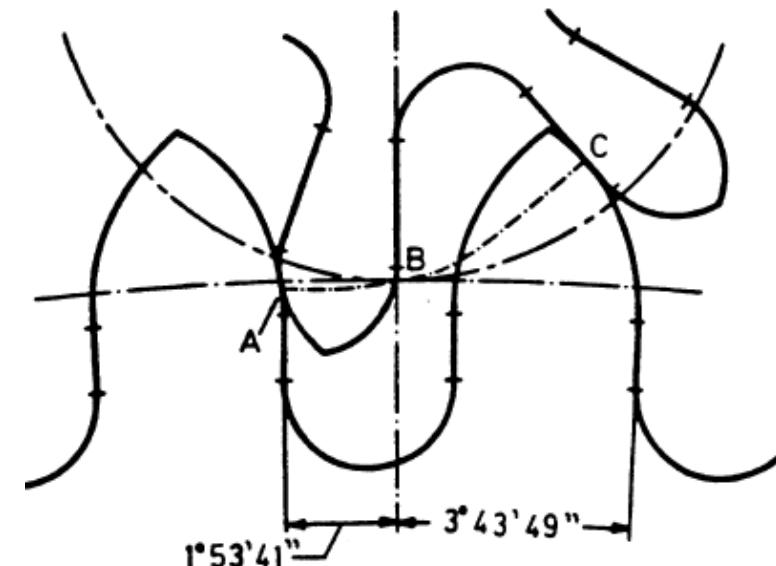


$\rho = s$  : pleine ogive

$\rho = \frac{5}{6} s$  :  $\frac{2}{3}$  ogive

$\rho = \frac{2}{3} s$  :  $\frac{1}{3}$  ogive

$\rho = \frac{1}{2} s$  :  $\frac{1}{2}$  cercle



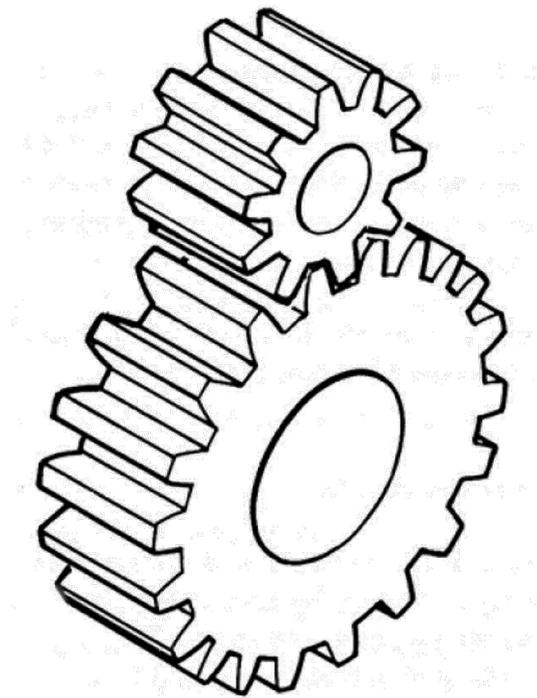
**Les avantages** de ce type de denture sont les suivants :

- Insensibilité aux variations d'entraxe
- Peu de pression sur les paliers
- Profils relativement simples à effectuer

**Les inconvénients :**

- Taillage par fraisage de forme : une fraise par module et par nombre de dents.

# Engrenages à profil en développante



# Dimensions caractéristiques

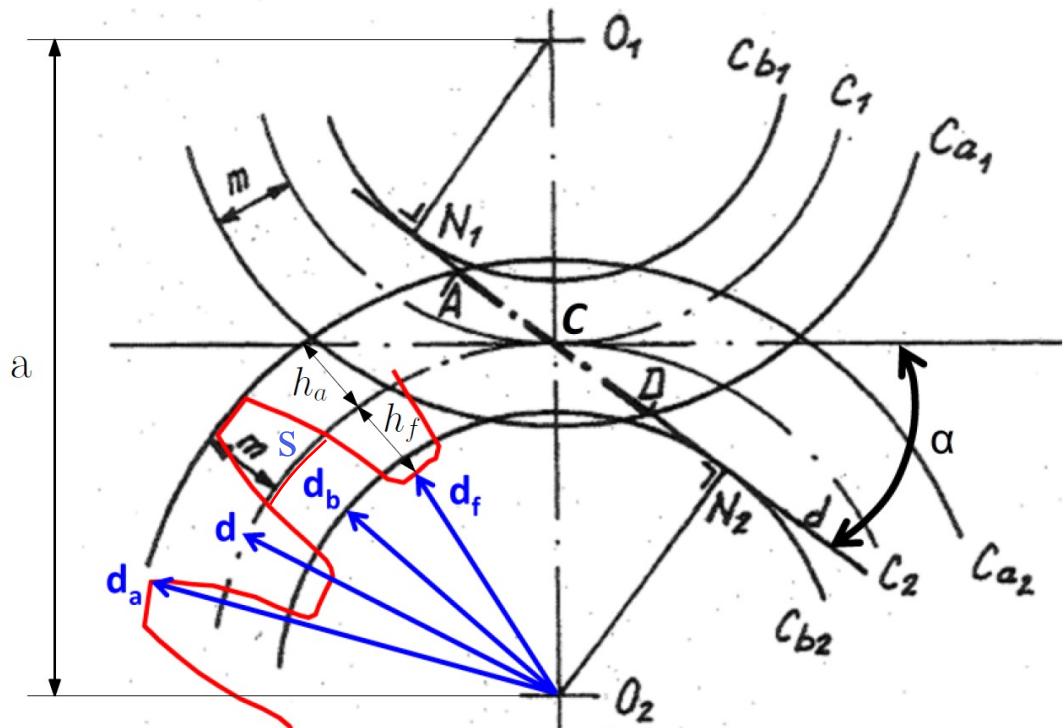
$d$	diamètre primitif
$d_f$	diamètre de pied
$d_b$	diamètre de base
$d_a$	diamètre de tête
$h_f$	creux
$h_a$	saillie
$a$	entraxe de référence
$d_b = d \cos(\alpha)$	
$s = p/2$	épaisseur curviligne de dent sur cercle primitif, avec $p$ le pas primitif

Les dimensions des dents sont rapportées au module et sont normalisées (VSM 15524):

$$h_a = 1 \cdot m$$

$$h_f = 1.25 \cdot m$$

$$h = h_a + h_f = 2.25 \cdot m$$



Source: Systèmes mécaniques, Schiffmann, EPFL, 2018

# Continuité de l'engrènement

Pour avoir transmission lisse: arc d'engrènement  $t$  doit être supérieur au pas  $p$ .

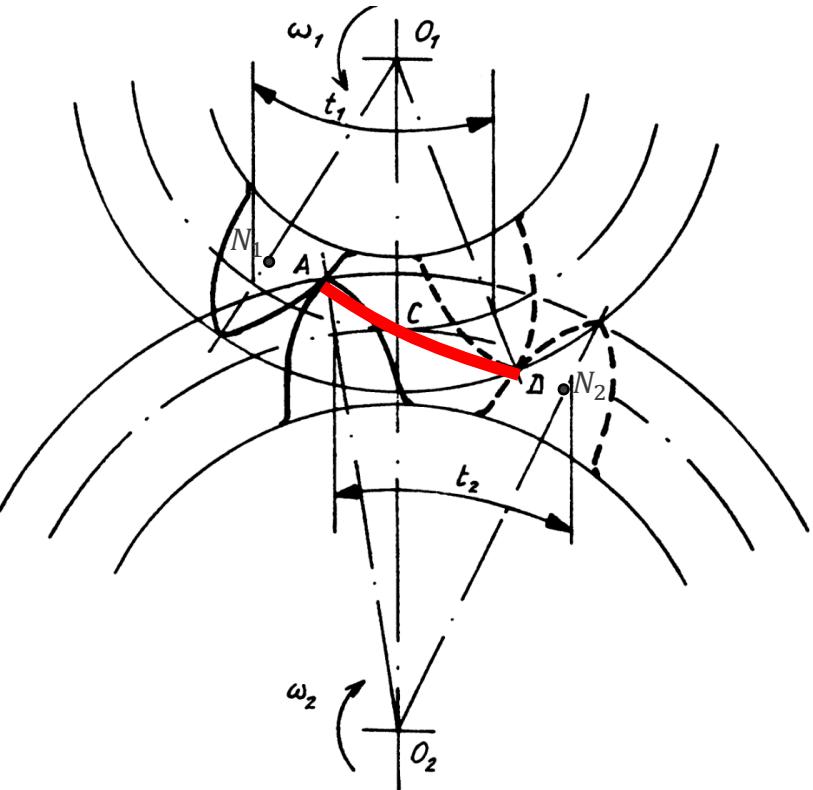
On définit  $\varepsilon_\alpha$  comme rapport de conduite le ratio  $\frac{t}{p}$ .

- Il représente le nombre moyen de dents en contact
- En pratique, on veut que  $\varepsilon_\alpha > 1.1$

La ligne d'engrènement est **délimitée par les diamètres de tête**. Pour un profil en développante de cercle, il s'agit d'une droite coïncidente avec la ligne d'action.

Calcul de  $\varepsilon_\alpha$  pour un profil à développante de cercle avec  $p_b = p \cos \alpha$  étant le pas de base:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AD}}{p_b} = \frac{1}{p_b} (N_1 D + A N_2 - N_1 N_2)$$



$$\begin{aligned} d_{ai} &= d_i + 2m = m(z_i + 2) \\ d_{bi} &= d_i \cos \alpha \end{aligned}$$

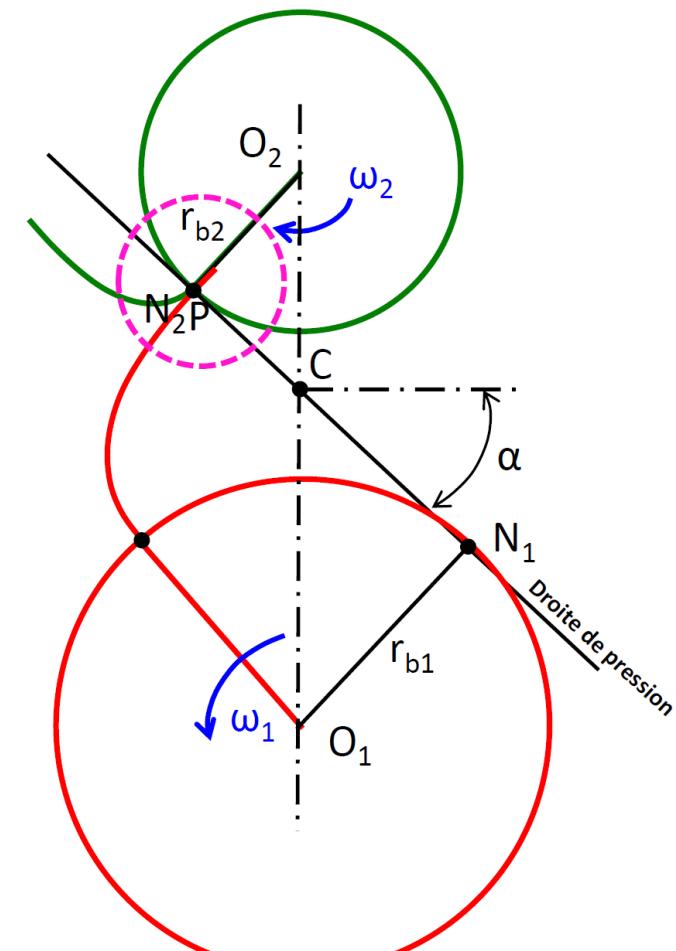
Diamètre de tête  
Diamètre de base

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{p_b} \left[ \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - a \sin \alpha \right]$$

Les profils doivent être tels qu'il n'y ait pas d'interférence, c'est-à-dire:

- que le contact entre dents doit toujours s'effectuer tangentiellement,
- et que les profils ne doivent pas pénétrer l'un dans l'autre.

Dans le cas particulier du profil à développante de cercle, il faut que la ligne d'engrènement soit limitée entre  $N_1$  et  $N_2$  (c'est-à-dire que le cercle de tête d'un engrenage ne pénètre pas dans le cercle de base de l'autre).



Source: Systèmes mécaniques, Schiffmann, EPFL, 2018

Avec un premier engrenage avec  $z_1$  dents, il existe une roue 2 avec un nombre de dent min et max pour éviter l'interférence:

$$z_{2 \max} = \frac{\left(\frac{z_1}{2} \sin \alpha\right)^2 - 1}{1 - \frac{z_1}{2} \sin^2 \alpha}$$

$$z_{2 \min} = \sqrt{z_1^2 + 4 \frac{1+z_1}{\sin^2 \alpha} - z_1}$$

Cas particulier: Nombre minimal de dents pour un système pignon-crémaillère:

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

Avec  $\alpha = 20^\circ$ :  $z_{\min} = 17.1$

Avec  $\alpha = 15^\circ$ :  $z_{\min} = 30$

L'engrenage menant est soumis à un couple et entraîne l'engrenage mené, via une force de contact

Cette force de contact sollicite les dents et les paliers des engrenages.

Sollicitation des dents:

- En flexion
- En pression

Sollicitation des paliers:

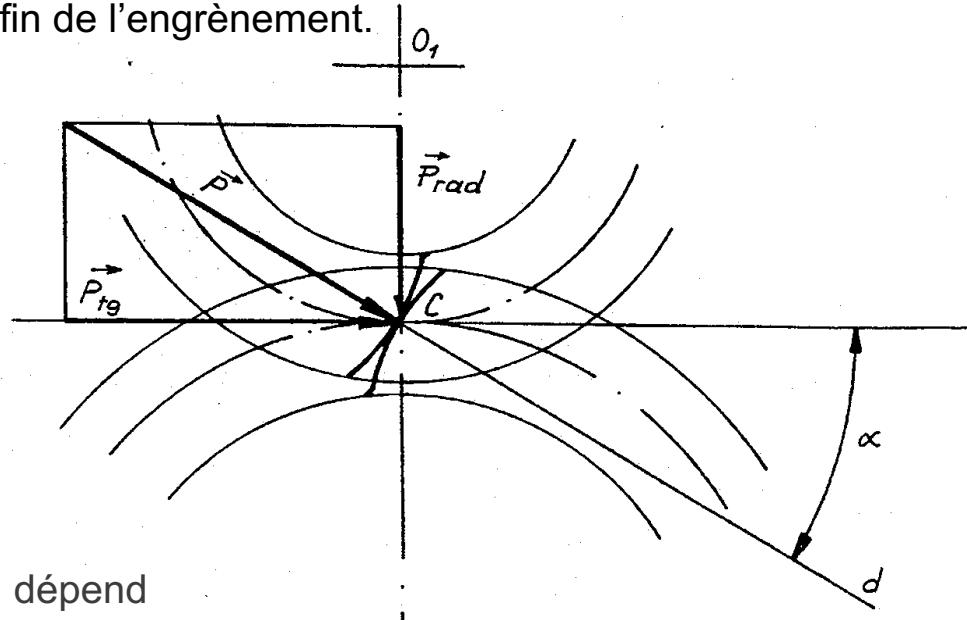
- Charge radiale
- Charge tangentielle
- (Charge axiale si engrenages hélicoïdales)

La roue menante est soumise au couple  $M_1 = P_{tg} \frac{d_1}{2}$

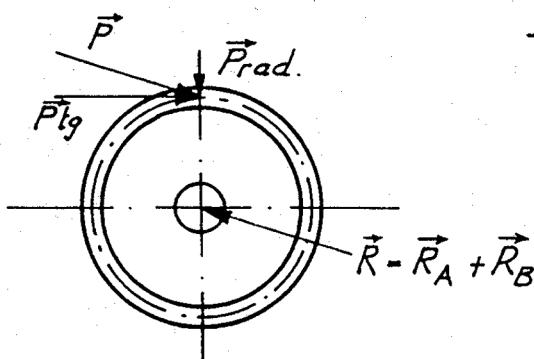
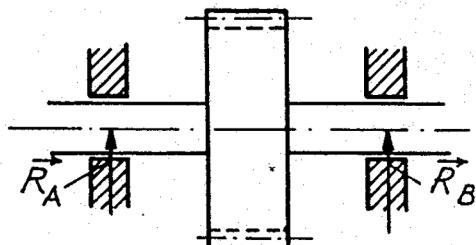
La roue menée a donc comme couple  $M_2 = i M_1 = M_1 \frac{d_2}{d_1}$  (pour un rendement de 100%)

La force  $P$  transmettant le couple est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la normale à la ligne des centres. L'angle  $\alpha$  reste invariable du début à la fin de l'engrènement.

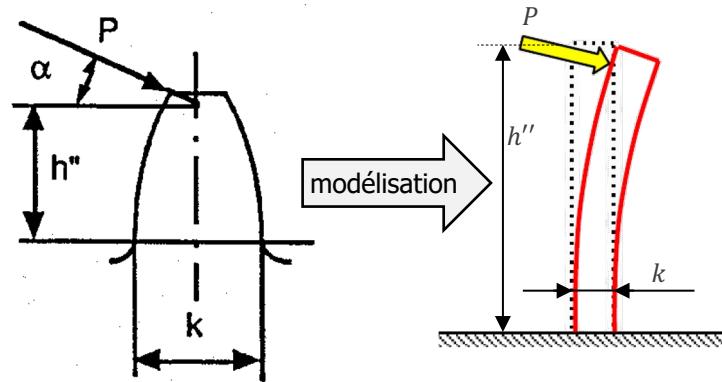
- Force tangentielle:  $P_{tg} = P \cos \alpha$
- Force radiale:  $P_{rad} = P \sin \alpha$



L'action sur les paliers supportant l'engrenage dépend directement de  $P_{tg}$  et  $P_{rad}$ .



On modélise la dent comme une poutre encastrée qui travaille en flexion.



Hypothèses:

- un seul couple de dents supporte toute la charge;
- on ne tient compte que de la flexion (la charge radiale de compression ainsi que le cisaillement sont négligés);
- on considère que la force tangentielle  $P_{tg} = P \cos \alpha$  agit sur le cercle primitif ( $M = P_{tg} \frac{d}{2}$ ), d'où  $P_{tg} = \frac{2M}{d}$ ,  $M$  étant le couple et  $d$  le diamètre primitif;
- $P$  est appliquée à la hauteur  $h'' = 2,1 \cdot m$  (rappel: la hauteur totale de la dent est  $h = 2,25 \cdot m$ ).

# Contrainte de flexion

Calcul de la contrainte maximale de flexion  $\sigma_{max}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{k}{2} P_{tg} h''}{I} = \frac{6 P_{tg} h''}{k^2 b}$$

Avec

$I = \frac{b k^3}{12}$ , le moment d'inertie surfacique de la poutre.

$k$  la largeur de la dent en fonction du module:  $k = \frac{p}{2}$ .

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{100,8 M}{\pi^2 m^3 z \Psi}$$

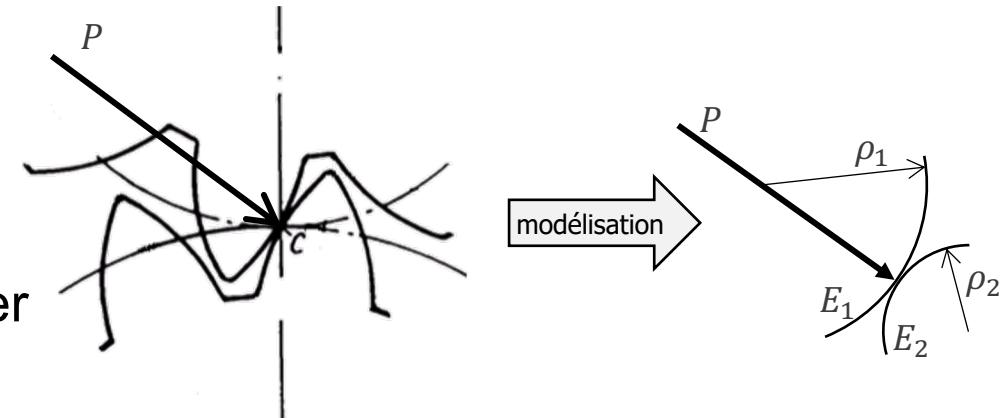
Avec  $\Psi = \frac{b}{m}$ , avec  $b$  l'épaisseur de l'engrenage

On cherche le module minimal admissible  $m_{min}$  en fonction de la contrainte admissible  $\sigma_{adm}$ :

$$m \geq m_{min} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{\sigma_{adm} z \Psi}}$$

## Pression de contact

- Modélisation des dents comme deux cylindres en contact. Ceci permet d'utiliser la théorie de Hertz
- Théorie de Hertz: permet d'étudier le contact entre deux sphères ou cylindres



$$\sigma_H = 1.18 \sqrt{\frac{M_1 E}{bm^2 z_1^2}} \sqrt{\frac{1}{\sin(2\alpha)}} \sqrt{\frac{i+1}{i}}$$

Estimation pessimiste du module nécessaire pour résister en pression hertzienne:

$$m \geq m_{min} = 1,12 \sqrt[3]{\frac{M_1 E}{\Psi z_1^2 p_{adm}^2 \sin(2\alpha)} \frac{i+1}{i}}$$

Avec:

$M_1$  = le moment appliqué au pignon

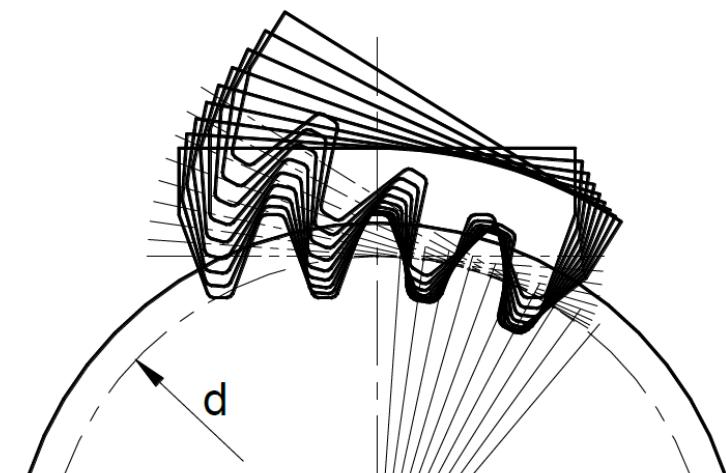
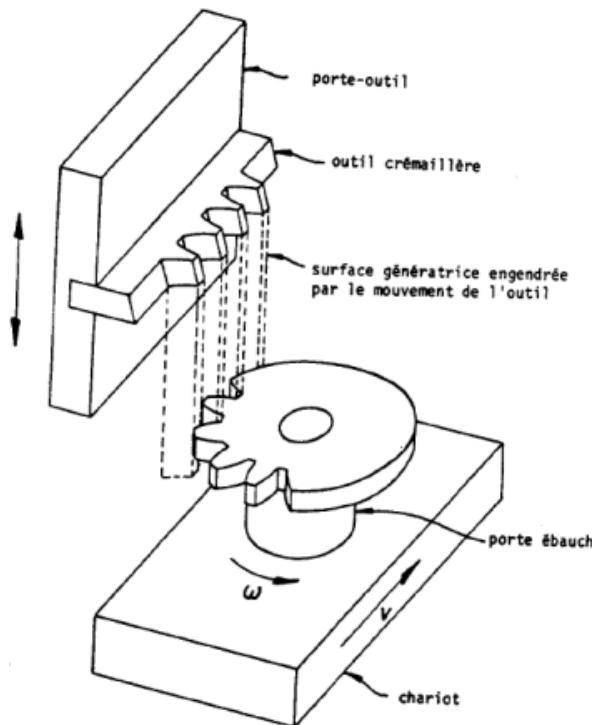
$\Psi = \frac{b}{m}$ , où  $b$  = l'épaisseur de l'engrenage

$p_{adm}$  = la contrainte de compression maximale admissible

$E = \frac{2(E_1 E_2)}{E_1 + E_2}$ , le module de Young résultant

## Taillage par génération:

- crée une développante
- Avec un outil coupant avec un profil de crémaillère
- $z_{min}$  limité à 17 dents ( $\alpha = 20^\circ$ )



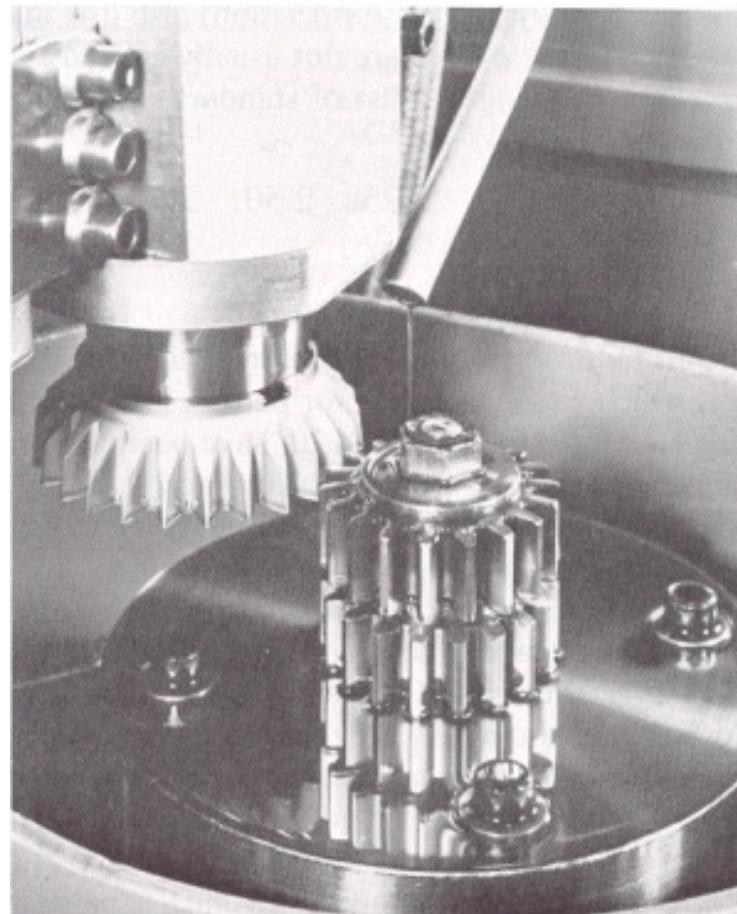
Taillage par génération:



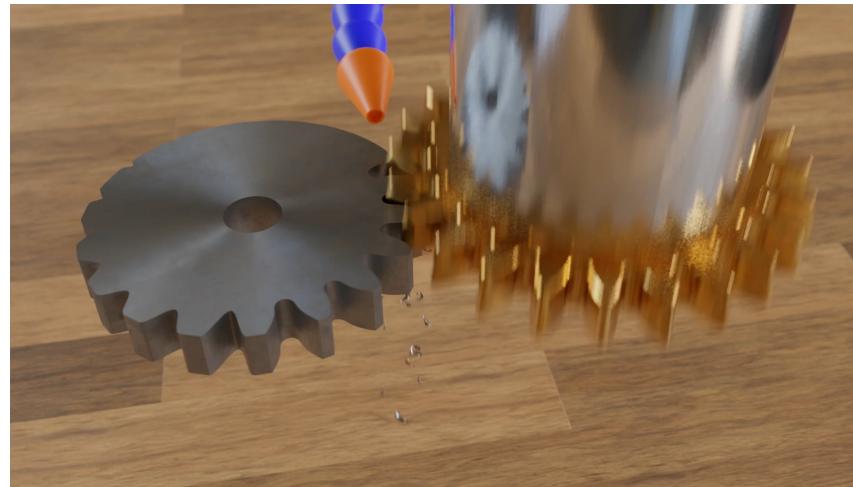
Source: <https://www.tec-science.com>

## Taillage par outil pignon (procédé Fellows):

- crée une développante
- Comme la génération, mais avec outil pignon plutôt que crémaillère
- $z_{min}$  limité à 13 dents ( $\alpha = 20^\circ$ )
- Permet d'usiner des dentures intérieures

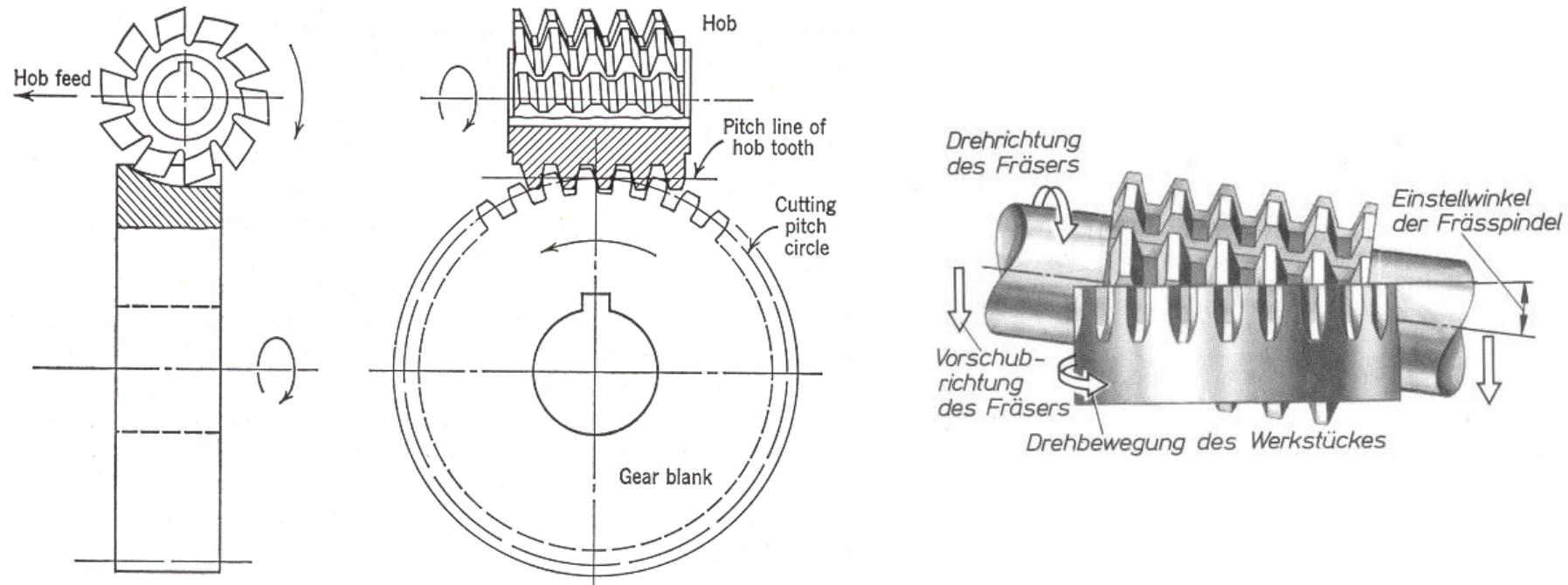


Taillage par outil pignon (procédé Fellows):

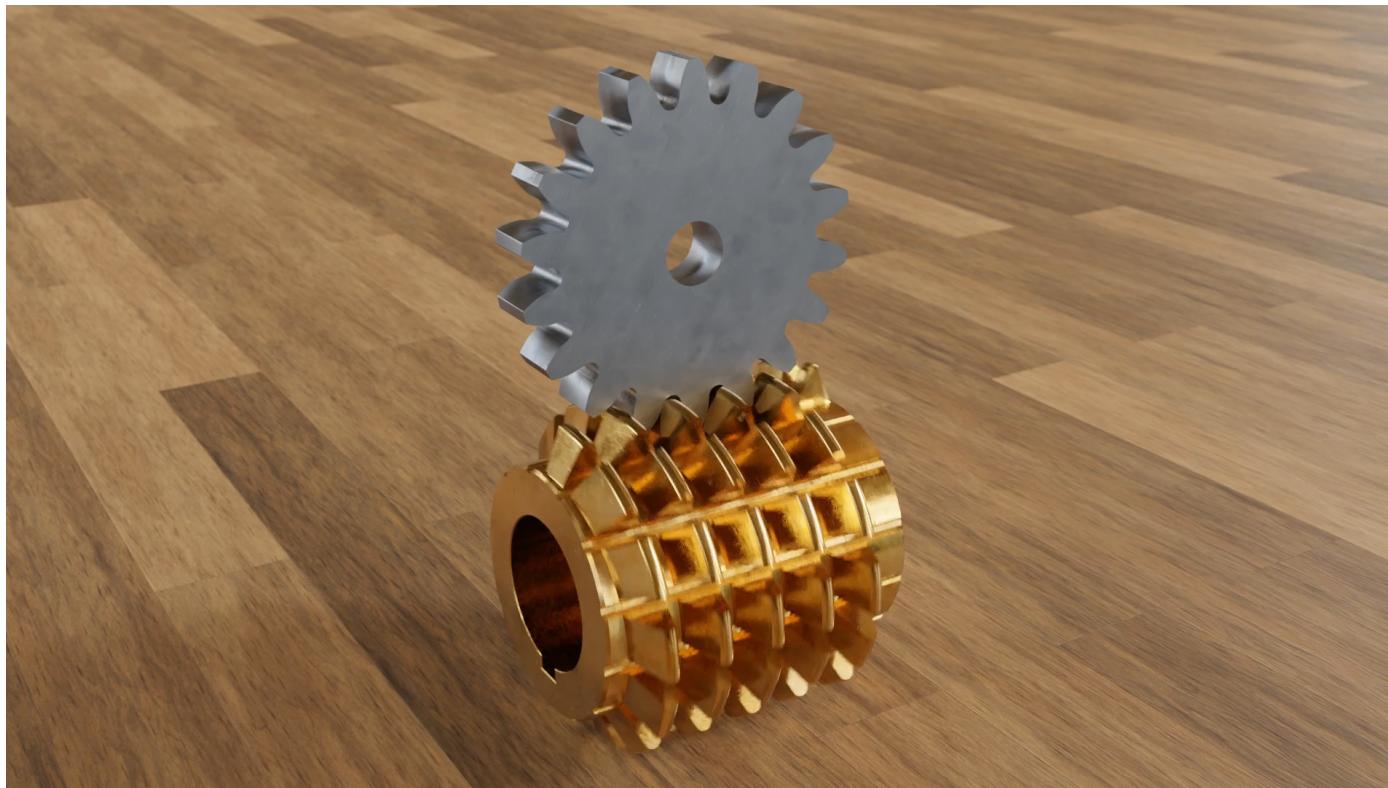


Source: <https://www.tec-science.com>

## Taillage par fraise-mère: crée une développante

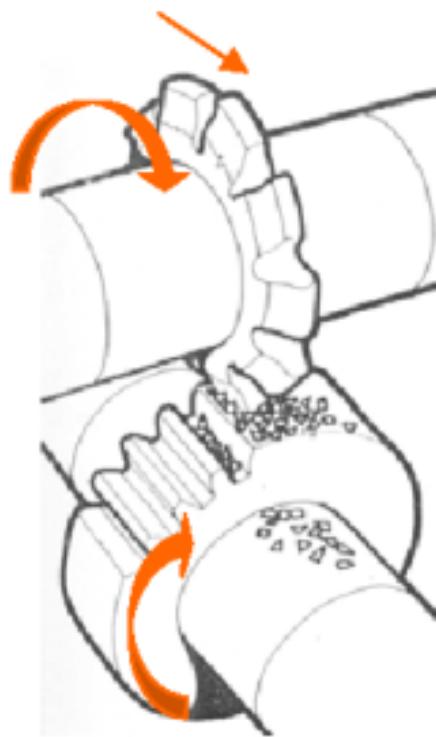


Taillage par fraise-mère:

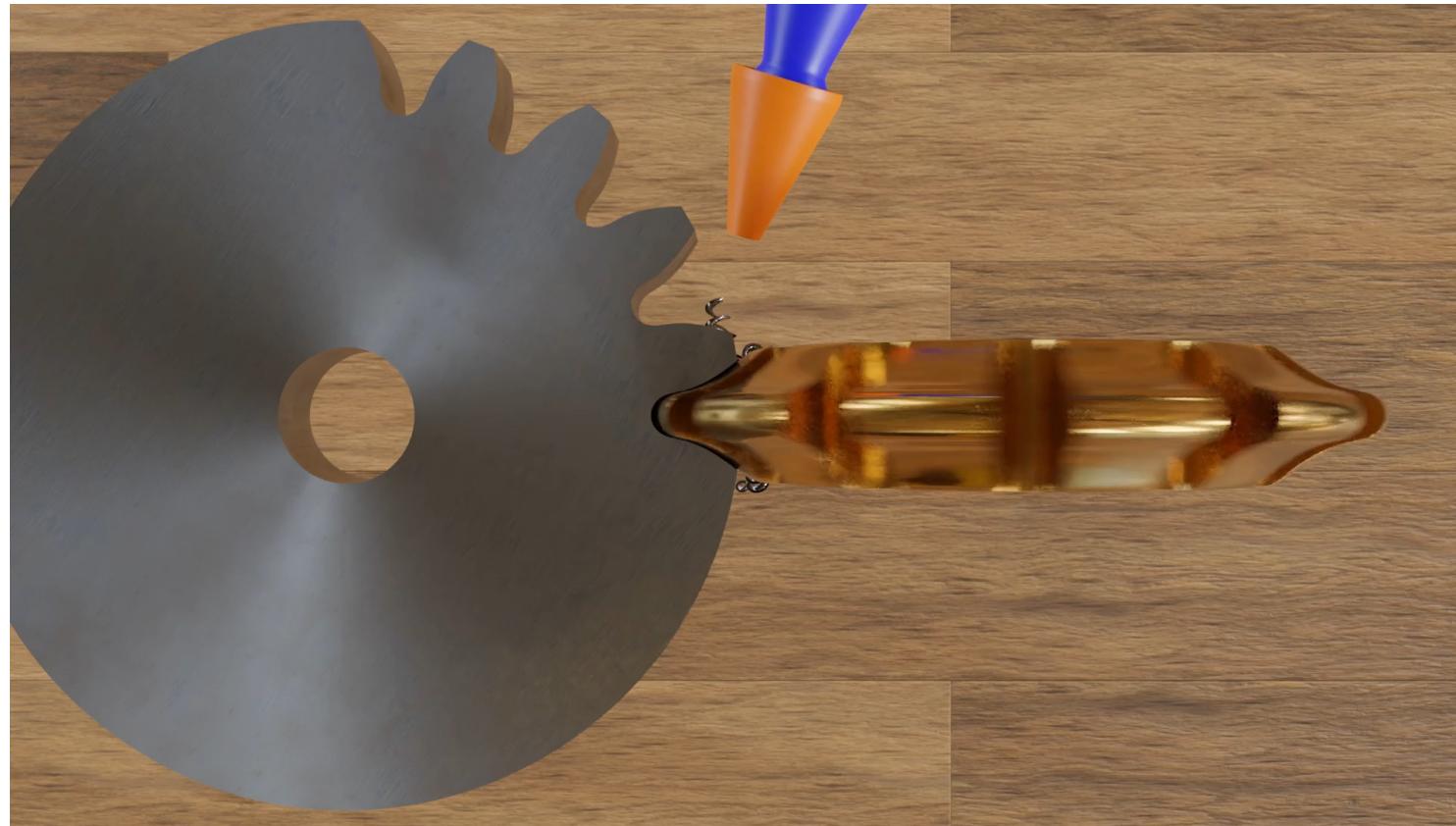


Source: <https://www.tec-science.com>

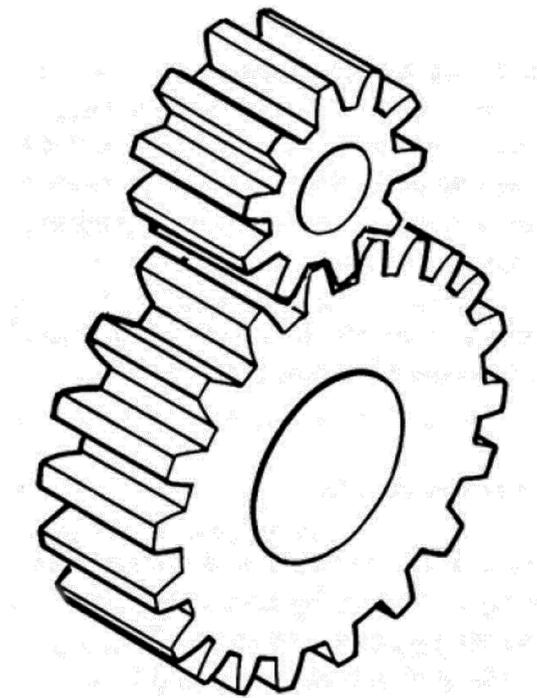
Taillage par fraise de forme (fraise module): réalise n'importe quel profil

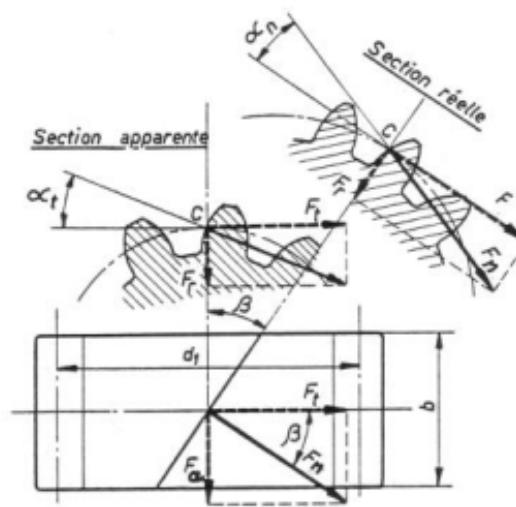
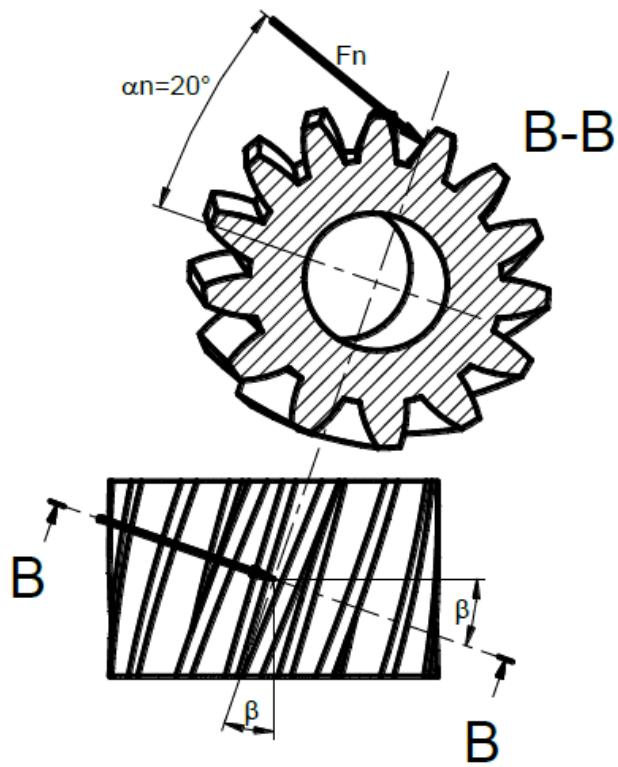


Taillage par fraise de forme (fraise module):

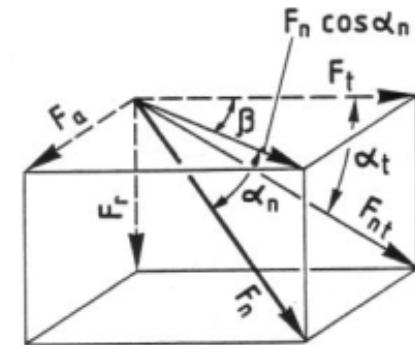
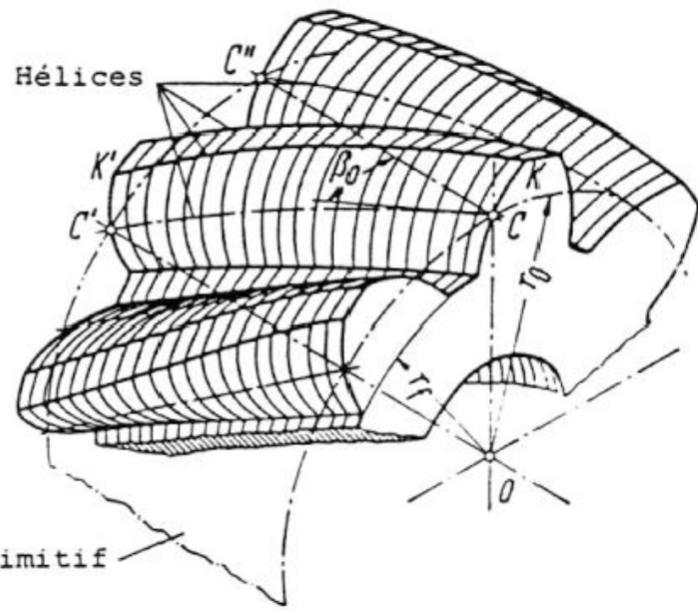


# Sélection de thèmes plus avancés



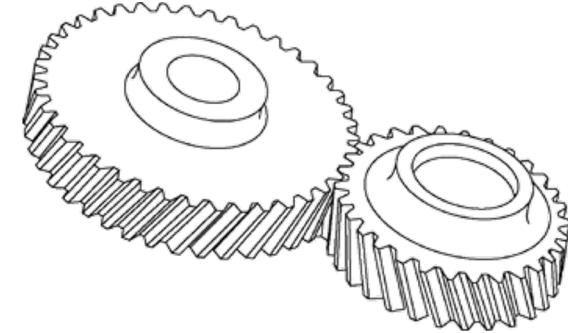


Cylindre primitif  
de taillage



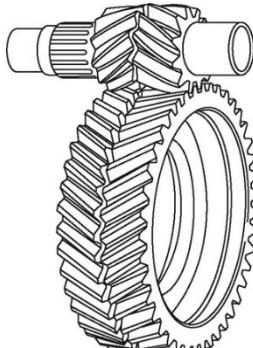
- Avantages:

- Rapport de conduite plus élevé
  - Plus silencieux
  - Meilleure continuité d'engrènement
  - Supporte des couples plus élevés
- Permet la transmission entre deux arbres gauches
- Limite les risques d'interférences, le nombre de dents minimal peut être réduit



- Désavantages

- Engendre une force axiale
  - Possibilité de compenser la force axiale par des doubles chevrons (logo Citroën)
- A nombre de dents et module égaux l'entraxe est plus grande
- Difficulté d'usinage plus élevée par rapport à la denture droite

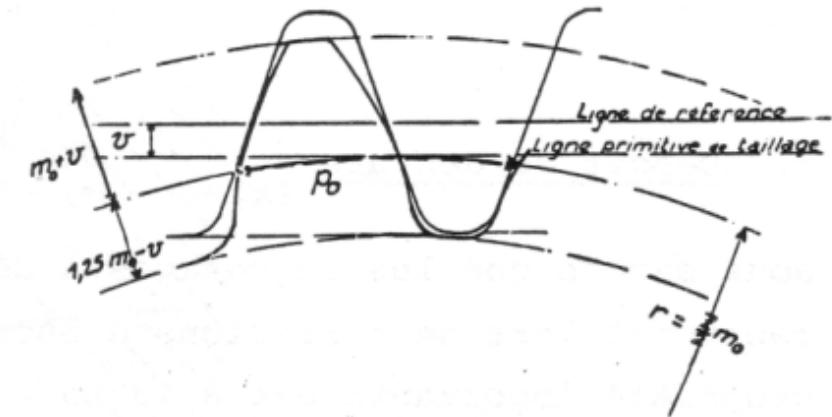
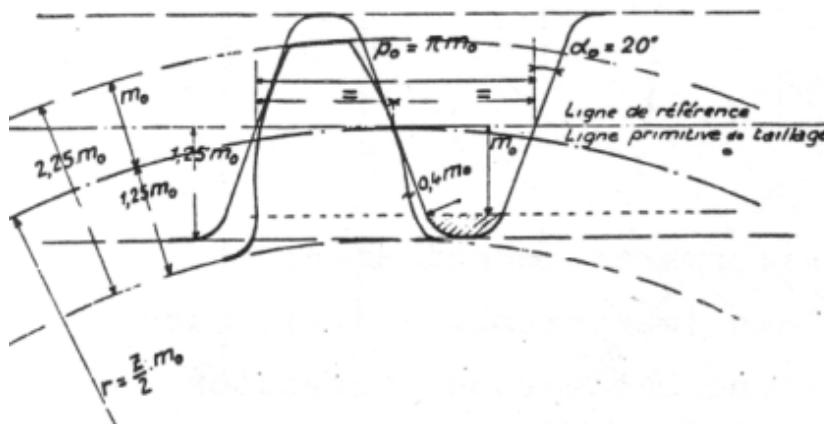


Engrenage sans déport de denture (standard) :

On "roule" la ligne de référence de l'outil de taillage (crémaillère) autour du diamètre primitif de l'engrenage ( cercle primitif de taillage).

Engrenage avec déport:

On décale la ligne de référence de l'outil de taillage et en roulant cette ligne de référence décalée autour du cercle primitif de taillage.

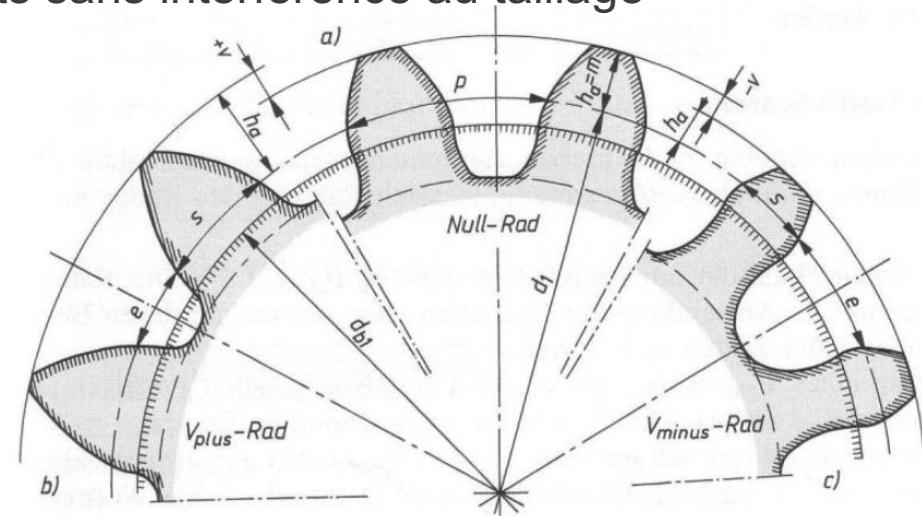


# Denture déportée

- Déport positif: tend à renforcer le pied de la dent (et affaiblir le sommet)
- Déport négatif: tend à affaiblir le pied de la dent et peut provoquer une interférence de taillage

## Utilités:

- adapter l'entraxe à une distance fixée
- augmenter la résistance à la flexion des dents (augmentation des efforts transmissibles)
- réaliser des pignons avec  $z < 17$  dents sans interférence au taillage

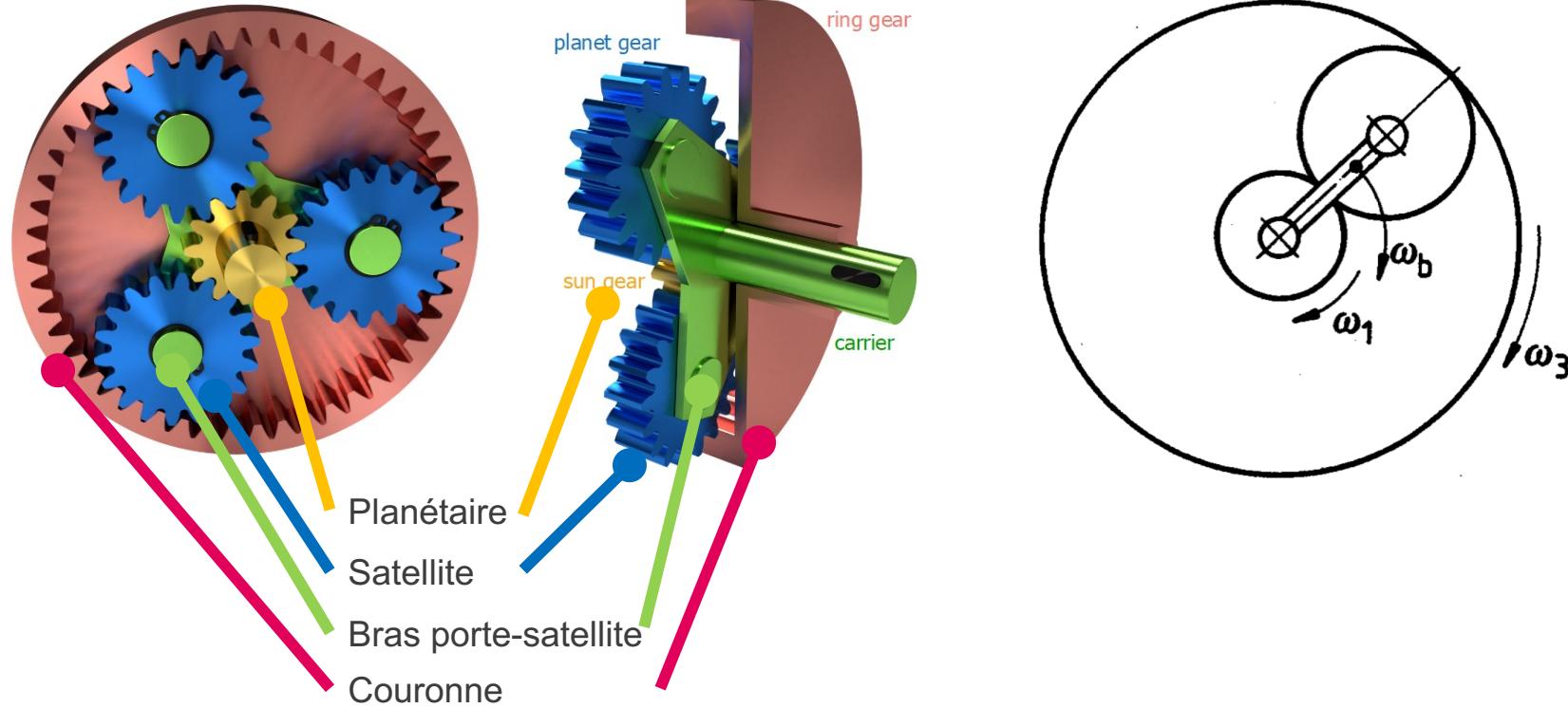


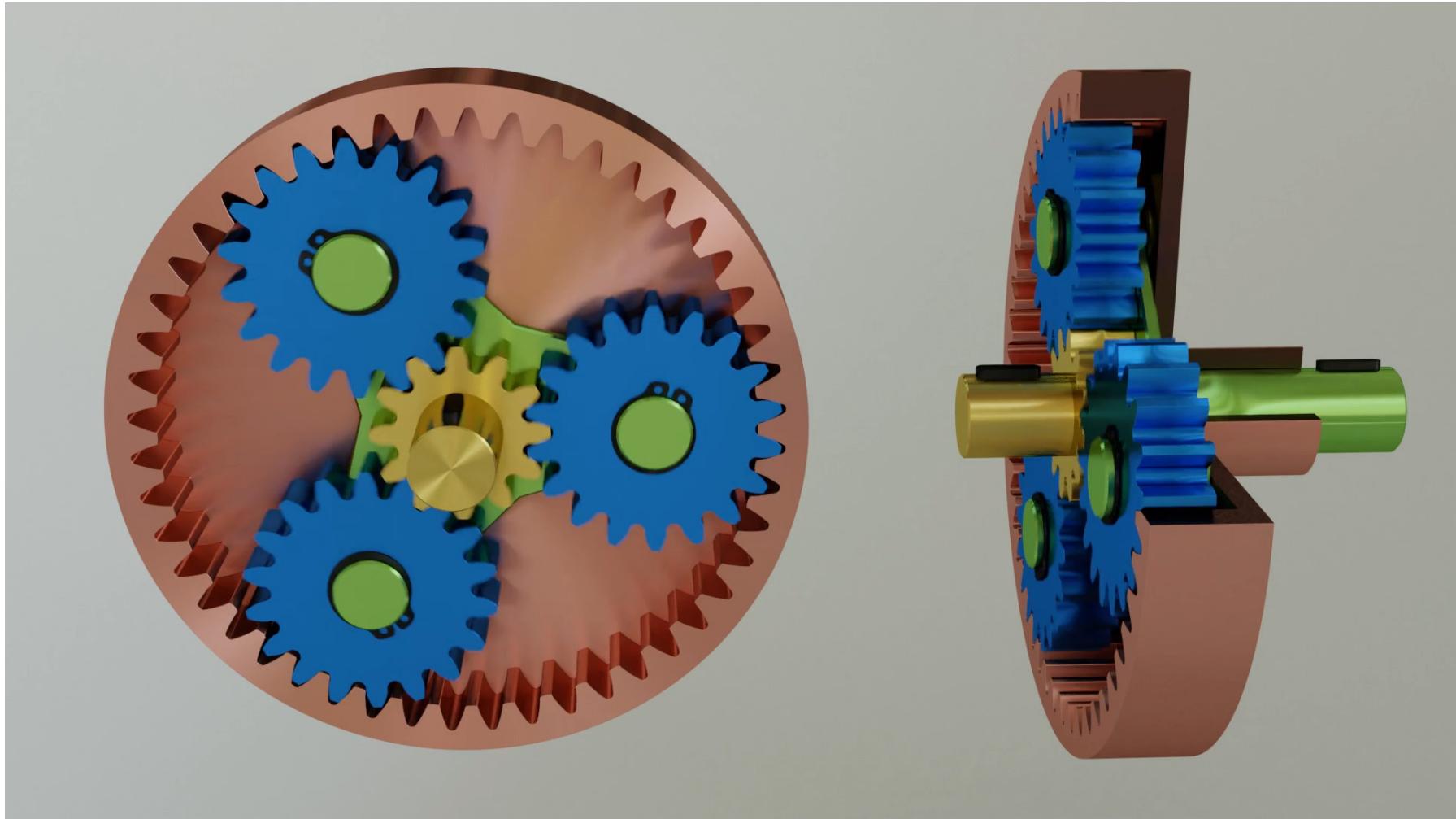
Zone a)  
Zone b)  
Zone c)

sans déport de denture (denture V-zéro ou "standard")  
avec déport de denture positif (denture V-plus)  
avec déport de denture négatif (denture V-moins)

Train ordinaire: ensemble d'engrenages où les axes de rotation restent fixe

Train épicycloïdal: certains engrenages tournent autour d'axes mobiles





Source: <https://www.tec-science.com>

