Série 11

Exercice 1. Dans un repère orthonormé direct, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Déterminer les composantes des vecteurs suivants :

a. $\vec{u}\times\vec{v}$.

b. $\vec{v}\times\vec{u}$.

c. $(3\vec{u}+47\vec{v})\times(4\vec{u}+59\vec{v})$.

d. $(36\vec{u}+72\vec{v})\times(48\vec{u}+96\vec{v})$.

Solution:

a. Le repère utilisé étant orthonormé direct, les composantes de $\vec{u}\times\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)-2\cdot(-2)\\-(3\cdot(-1)-1\cdot(-2))\\3\cdot 2-(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix}$

b. Le produit vectoriel est antisymétrique. Le vecteur $\vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}$ a donc pour composantes $\begin{pmatrix}-5\\-1\\-7\end{pmatrix}$.

c. Par bilinéarité du produit vectoriel, on a :

$$(3\vec{u}+47\vec{v})\times(4\vec{u}+59\vec{v})=3\cdot 4\vec{u}\times\vec{u}+3\cdot 59\vec{u}\times\vec{v}+47\cdot 4\vec{v}\times\vec{u}+47\cdot 59\vec{v}\times\vec{v}.$$

Par ailleurs, du fait que le produit vectoriel est antisymétrique, on a :

$$\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}\text{ et }\vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}.$$

On trouve donc :

$$(3\vec{u}+47\vec{v})\times(4\vec{u}+59\vec{v})=-11\vec{u}\times\vec{v}.$$

Le vecteur $(3\vec{u}+47\vec{v})\times(4\vec{u}+59\vec{v})$ a donc pour composantes $\begin{pmatrix}-55\\-11\\-77\end{pmatrix}$.

d. En utilisant les propriétés du produit vectoriel, on trouve :

$$(36\vec{u}+72\vec{v})\times(48\vec{u}+96\vec{v})=36\cdot 48(\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{u}+2\vec{v})=\vec{0}.$$

Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $A(7,-4,5)$, $B(1,2,4)$ et $C(3,5,10)$. A l'aide du produit vectoriel :

a. calculer la distance de C à la droite (AB).

b. déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution:

a. La distance recherchée est égale à :

$$\delta=\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\9\\5\end{pmatrix}$ donc, comme le repère employé est orthonormé, les composantes de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ sont $\pm\begin{pmatrix}39\\34\\-30\end{pmatrix}$ (+ si le repère est direct, - s'il est indirect). On en déduit alors :

$$\delta=\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\sqrt{3577}}{\sqrt{73}}=7.$$

b. D'après le a., le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ -30 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC). On en déduit que ce plan a pour équation cartésienne :

$$39x + 34y - 30z = \text{ constante } = 39 \cdot 1 + 34 \cdot 2 - 30 \cdot 4 = -13.$$

Exercice 3. Dans un repère orthonormé, on donne $A\,(1, -2, 1)$ et :

$$\pi : x - 2y + z - 3 = 0 \text{ et } \rho : x + y - z + 2 = 0.$$

A l'aide du produit vectoriel, déterminer une équation du plan σ contenant A et perpendiculaire à $\pi \cap \rho$.

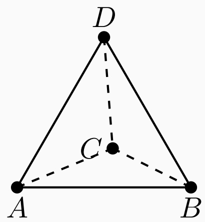
Solution: Les plans π et ρ ne sont pas parallèles. Ils s'intersectent donc selon une droite, qui est à la fois orthogonale au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et au vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cette droite est donc dirigée par le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ qui, comme le repère est orthonormé, a pour composantes $\pm\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le plan σ cherché à pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par A. Il a donc pour équation cartésienne :

$$\sigma : x + 2y + 3z = 0.$$

Exercice 4.

La figure ci-contre représente un tétraèdre régulier. Pour chacune des familles suivantes, dire s'il est orientée directement ou indirectement dans l'espace :

a. $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. b. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$. c. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}$.



Solution: Dans chacun des cas, on applique la règle de la main droite.

a. Si l'on place l'index dans le sens de $\overrightarrow{BA}$ et le majeur dans le sens de $\overrightarrow{BC}$, alors le pouce pointe "vers le bas". Or $\overrightarrow{BD}$ pointe "vers le haut". Par conséquent, la famille $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ est orientée indirectement.
b. En raisonnant de façon similaire, on voit que la famille $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ est orientée directement.
c. En raisonnant de façon similaire, on voit que la famille $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}$ est orientée indirectement.

Exercice 5. Dans l'espace, on donne un plan π et deux droites gauches d et g.

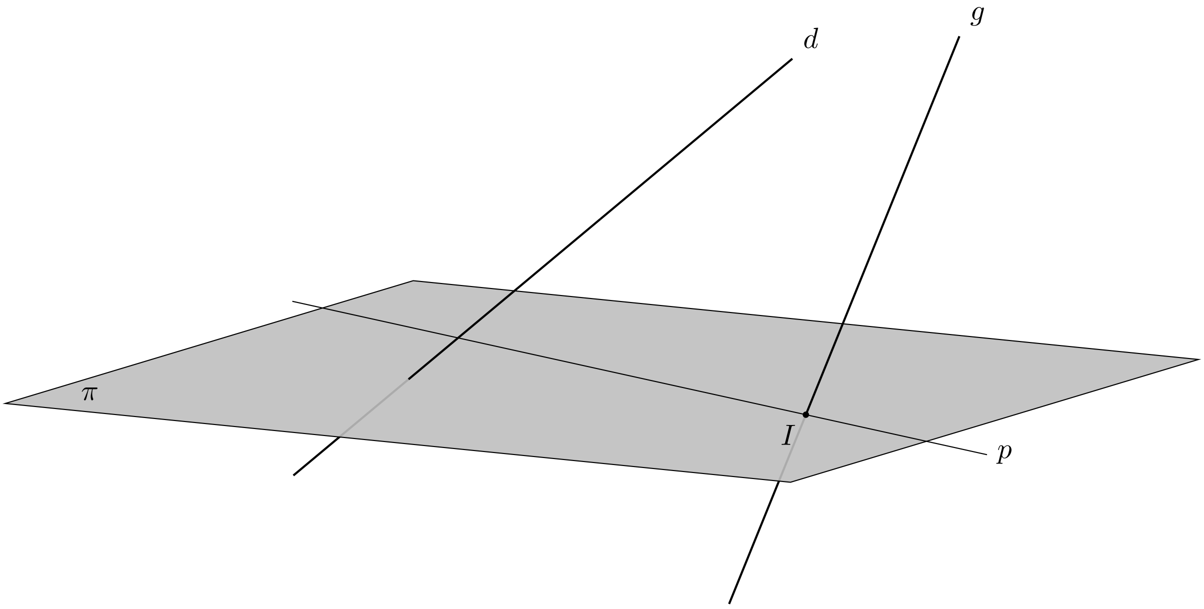
a. Existe-t-il une droite p contenue dans π, orthogonale à d et intersectant g ? On discutera selon la position relative des données.
b. Application numérique. Dans un repère orthonormé direct :

$$\pi : 2x + y + z - 11 = 0\,, \quad d : x + 1 = -(y + 2) = \tfrac{z+3}{2}\,, \quad g : \tfrac{x+2}{2} = \tfrac{y-14}{-3} = z + 5\,.$$

Déterminer des équations paramétriques de p.

Solution:

a. Figure d'étude :



On note $\vec{n}$ un vecteur normal de π et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d. La droite p recherchée, si elle existe, est incluse dans π et intersecte g. Elle doit donc passer par un point de $\pi \cap g$. On distingue deux cas :

- g est parallèle à (et non incluse dans) π. Alors il n'y a pas de solution au problème posé.
- g est sécante à π ou incluse dans π. Dans ce cas, toute droite passant par un point de $\pi \cap g$ et dirigée par un vecteur normal à $\vec{n}$ et $\vec{u}$ convient. Il existe alors une ou plusieurs solutions. Par exemple, si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si d est perpendiculaire à π, alors toute droite contenue dans π et intersectant g convient. Dans le cas "général", il n'y aura qu'une seule solution : la droite passant par le point $\pi \cap g$ et dirigée par $\vec{n} \times \vec{u}$.

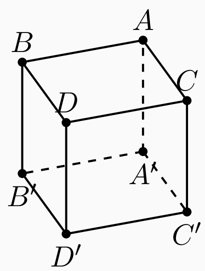
b. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à π et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est directeur de d. Comme le repère est orthonormé direct, on sait que $\vec{n} \times \vec{u}$, qui donne la direction de p, a pour composantes $\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$. Par ailleurs, un petit calcul montre que π et g se coupent au point $I(4,5,-2)$. On en déduit qu'il y a une unique droite répondant au problème posé, à savoir :

$$p : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 5 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Dans un repère orthonormé direct, on donne $A(1,1,4)$, $B(0,3,2)$ et $C(3,0,2)$.

a. Montrer que ABC est rectangle et isocèle en A.

b. On peut donc compléter ABC en un cube comme dans la figure ci-contre. Calculer les coordonnées des sommets de ce cube.



Solution:

a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par conséquent, comme le repère employé est orthonormé, on obtient :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,\ \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3 \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 - 2 + 4 = 0.$$

Le triangle ABC est donc bien rectangle et isocèle en A.

b. Le quadrilatère $ABDC$ étant un carré, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. On voit donc que $\overrightarrow{AD}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, si bien que D a pour coordonnées $(2, 2, 0)$. En utilisant la formule du produit vectoriel en repère orthonormé direct, on obtient que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, le vecteur :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$$

est colinéaire à $\vec{u}$, car il est normal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Ecrivons alors $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ pour un certain α. Comme la famille $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{u}$ est orientée négativement, on voit que α est négatif. Par ailleurs, la norme du produit vectoriel $\vec{u}$ est égale à l'aire du carré $ABDC$, qui vaut 9. On en déduit :

$$\|\vec{v}\| = 3 = \|\alpha\vec{u}\| = 9\,|\alpha|\,.$$

On peut donc conclure que $\alpha = -\frac{1}{3}$ et donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalement, on trouve :

$$A'(3, 3, 5),\ B'(2, 5, 3),\ C'(5, 2, 3) \text{ et } D'(4, 4, 1).$$

Exercice 7. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne $d : \frac{x-7}{2} = y - 3,\ z = 4$, $A(3, 2, 1)$, et $B(1, 2, 3)$. Déterminer les coordonnées du point C sachant que :

- ABC est isocèle en C et a pour aire 6.
- (AC) est orthogonale à d.
- l'ordonnée de C est positive.

Solution: Le point C est équidistant de A et B. Il se trouve donc sur le plan médiateur π de AB, qui a pour équation cartésienne :

$$\pi : x - z = 0,$$

car il est normal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par le milieu $(2, 2, 2)$ de AB. Par ailleurs, C est aussi sur le plan ρ passant par A et perpendiculaire à d, qui a pour équation cartésienne :

$$\rho : 2x + y = 8,$$

car il est normal au vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de d. On en déduit que C se trouve sur la droite d'intersection $\pi \cap \rho$, qui admet pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 8 - 2t\ ,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

La condition sur l'aire va nous permettre de trouve t. En effet, l'aire de ABC est donnée par la formule $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. On trouve alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} t-3 \\ 6-2t \\ t-1 \end{pmatrix} \text{ et donc } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -12+4t \\ 4t-8 \\ -12+4t \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient l'équation :

$$(-6 + 2t)^2 + (2t - 4)^2 + (-6 + 2t)^2 = 36 \text{ autrement dit, } 12t^2 - 64t + 52 = 0.$$

La résolution de cette équation du second degré donne $t = 1$ ou $t = \frac{26}{2}$, ce qui donne les points $C(1, 6, 1)$ ou $C(\frac{26}{2}, -18, \frac{26}{2})$. Comme l'ordonnée de C est positive, on voit qu'il faut retenir la première solution.