Série 6

1. A l'aide du théorème des deux gendarmes, montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{(n+1)^n \, n!}{n^{2n}}$ admet une limite nulle.

2. Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Puis utiliser ce résultat pour calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-\sqrt{n})\,(\sqrt{n}+2)}{8n-4}$.

3. Etudier la convergence de la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

4. Soient $\{C_1\,,\ C_2\,,\ C_3\,,\cdots\}$ un ensemble infini de cubes. Sachant que le volume de C_{i+1} est égal à la moitié de celui de C_i $(i \in \mathbb{N}^*)$, déterminer, en fonction de l'arête c du premier cube, la hauteur H de la "tour" obtenue en superposant tous les cubes de l'ensemble.

5. La suite (b_n) est définie par son terme général :

$$b_n = 4{,}321\,321 \cdots 321 \quad \text{(partie décimale : } n \text{ fois "321").}$$

Calculer, si elle existe, la limite de cette suite.

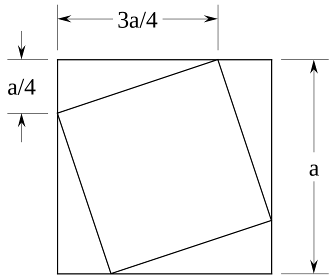
6. Depuis le sol, on lance une balle vers le haut de sorte qu'elle atteigne la hauteur $h_1 = 5\,\mathrm{m}$. Elle retombe et rebondit instantanément pour atteindre une hauteur $h_2 = p \cdot h_1$, $p = 0{,}81$, et ainsi de suite, chaque nouvelle hauteur atteinte étant p fois la précédente.

En utilisant la relation entre la hauteur et le temps

$$h = \frac{1}{2}\, g\, t^2\,, \quad g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,,$$

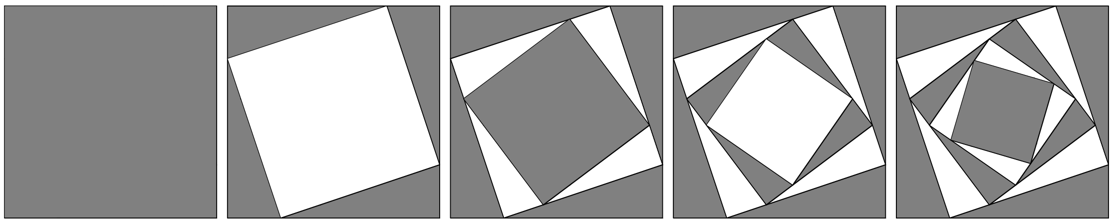
donner le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle.

7. Dans un carré de côté a, on inscrit un deuxième carré comme décrit ci-contre.



Dans le deuxième carré, on inscrit un troisième carré de la même manière, et ainsi de suite.

On grise le carré initial de côté a, étape par étape de la façon suivante :



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4 étape 5

On note A_n l'aire grisée à l'étape n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(étape 2 : de l'aire grisée à l'étape 1, on soustrait l'aire du deuxième carré ;
étape 3 : à l'aire grisée à l'étape 2, on ajoute l'aire du troisième carré ; etc...)

a) Déterminer l'expression de A_n en fonction de n.

b) Calculer, si elle existe, la limite de la suite (A_n) lorsque n tend vers l'infini.

Réponses de la série 6

2. $\forall\, A > 0\,, \quad \exists\, N(A) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad n \geq N(A) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > A\,.$

Il suffit de choisir $N(A) > A^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-\sqrt{n})\,(\sqrt{n}+2)}{8n-4} = -\frac{1}{8}\,.$$

3. La suite (a_n) diverge, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\,.$

4. $H = c\left(2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right).$

5. $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{4317}{999}\,.$

6. Le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle est égal à 20 secondes.

7. $A_n \;=\; a^2 \cdot \dfrac{1-(-\frac{5}{8})^n}{\frac{13}{8}}\;; \qquad A \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} A_n \;=\; \dfrac{8}{13}\,a^2\,.$
