Corrigé 10

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

a) $a(x) = \tan|x|$

b) $b(x) = x \sin|x|$

c) $c(x) = \sin(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $c(0) = 0$

d) $d(x) = \sin^2(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $d(0) = 0\,.$

---

a) La fonction a est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(0+h)-a(0)}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\tan|0+h| - \tan 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tan(-h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{\tan h}{h} = -1$$

$$\text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan|0+h| - \tan 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan h}{h} = 1\,.$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(h)-a(0)}{h}$ n'existe pas. La fonction a n'est pas dérivable en $x = 0\,.$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{b(h)-b(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,\sin|h| - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sin|h| = 0\,.$

La fonction b est donc dérivable en $x = 0$ et $b'(0) = 0\,.$

c) La fonction $c(x)$ est continue en $x = 0\,,$ car

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\sin(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{borné}} = 0 = c(0)\,.$$

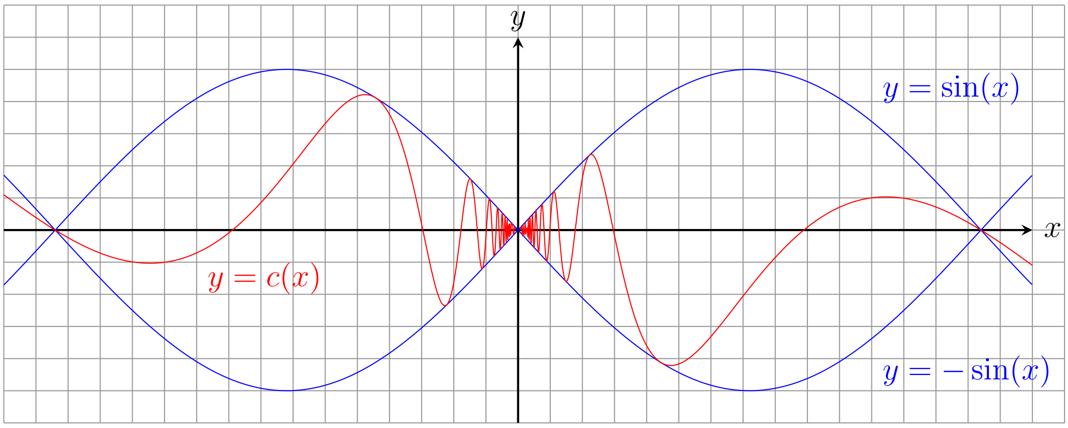
La question de la dérivabilité de $c(x)$ en $x = 0$ a donc du sens.

$$\lim_{h\to 0} \frac{c(h)-c(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\,\cos(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(\tfrac{1}{h})\,.$$

La fonction $\cos(\frac{1}{h})$ n'admet pas de limite lorsque $h \to 0\,,$ mais elle est bornée et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1 \neq 0\,.$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c(h)-c(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin(h)}{h}}_{\to 1 \neq 0} \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{1}{h})}_{\text{borné}}$ n'existe pas.

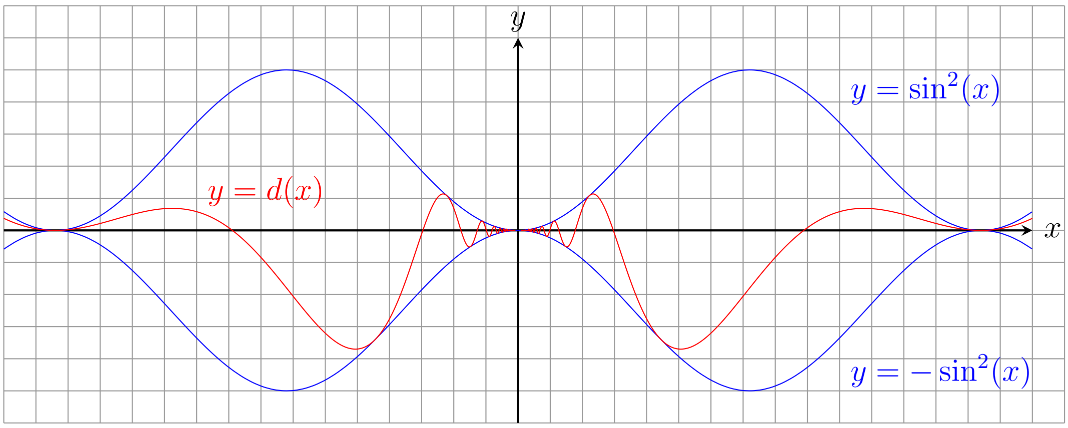
La fonction c n'est pas dérivable en $x = 0\,.$



d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{d(h)-d(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(h)\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\cdot\sin(h)\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right),$

$\cos\left(\frac{1}{h}\right)$ est borné et n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0, mais $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\cdot\sin(h) = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{d(h)-d(0)}{h} = 0$.

La fonction d est donc dérivable en $x=0$ et $d'(0)=0$.



2. On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \frac{\cos(2x)+\sin x}{\sin(2x)} \quad \text{si } x \neq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad g(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Montrer à l'aide de la définition que la fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

La fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(\frac{\pi}{2}+h)-g(\frac{\pi}{2})}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(\frac{\pi}{2}+h)-g(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]+\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{\sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi+2h)+\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{h\cdot\sin(\pi+2h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cos 2h+\cos h}{-h\cdot\sin 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cos^2 h+\cos h+1}{-h\cdot\sin 2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)(1+2\cos h)}{-h\cdot\sin 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\frac{h^2}{2})\cdot(1+2\cos h)}{-h\cdot(2h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{4}\,(1+2\cos h) = -\frac{3}{4}\,.$$

La fonction g est donc dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}$.

3. Montrer que la fonction $b(x)$ de l'exercice **1.** b) de la série 9 peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$.

Est-elle alors dérivable en $x_0 = 0$? $\qquad b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$.

Nous avons montré dans la série 9 que $\displaystyle\lim_{x\to 0} b(x) = 1$.

On peut donc prolonger la fonction b par continuité en $x = 0$ en posant $\widehat{b}(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} b(x) = 1$.

$$\widehat{b}(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $\widehat{b}$ est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{h^2+1}+h-1}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2+1}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est donc dérivable en $x = 0$ et $\widehat{b}\,'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x)=x^6+15\sqrt[5]{x^2}-\dfrac{6}{x}$

b) $b(x)=\dfrac{4x-1}{2x+1}$

c) $c(x)=\sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

d) $d(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $e(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

f) $f(x)=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}$

g) $g(x)=(x-1)^5(2x+1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

h) $h(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x=-1$?

---

a) $a(x) \;=\; x^6+15\sqrt[5]{x^2}-\dfrac{6}{x}\,, \qquad D_a=\mathbb{R}^*\,.$

On dérive la fonction $a(x)$ terme à terme :

$$a'(x) \;=\; \left(x^6+15\,x^{2/5}-6\,x^{-1}\right)' \;=\; \left(x^6\right)'+\left(15\,x^{2/5}\right)'-\left(6\,x^{-1}\right)'$$

$$a'(x) \;=\; 6\,x^5+15\cdot\tfrac{2}{5}\,x^{-3/5}-6\,(-1)\,x^{-2} \;=\; 6\left(x^5+\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{1}{x^2}\right), \quad D_{a'}=\mathbb{R}^*\,.$$

b) $b(x)=\dfrac{4x-1}{2x+1}\,, \qquad D_b=\mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\}\,.$

- On dérive la fonction $b(x)$ comme un quotient :

$$b'(x) \;=\; \frac{4\cdot(2x+1)-(4x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} \;=\; \frac{6}{(2x+1)^2}\,, \qquad D_{b'}=\mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\}\,.$$

- En effectuant la division euclidienne de $4x-1$ par $2x+1$, on obtient

$$b(x) \;=\; \frac{4x-1}{2x+1} \;=\; \frac{(4x+2)-3}{2x+1} \;=\; \frac{2\,(2x+1)-3}{2x+1} \;=\; 2-\frac{3}{2x+1}\,.$$

Et on obtient $b'(x)$ en dérivant $\dfrac{1}{2x+1}$:

$$b'(x)=\left[2-3\cdot\frac{1}{2x+1}\right]'=-3\left[\frac{1}{2x+1}\right]'=-3\left[\frac{-2}{(2x+1)^2}\right]=\frac{6}{(2x+1)^2}\,,$$

$$D_{b'}=D_b=\mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\}\,.$$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}\,, \quad D_c = \left]-1\,;\,\tfrac{1}{2}\right].$ On dérive $c(x)$ comme une racine :

$$c'(x) = \left[\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}\right]' = \frac{\left[\frac{1-2x}{x+1}\right]'}{2\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{1-2x}}\cdot\frac{-2\,(x+1)-(1-2x)}{(x+1)^2}$$

$$c'(x) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3\,(1-2x)}}\,, \qquad D_{c'} = \left]-1\,;\,\tfrac{1}{2}\right[\,.$$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,, \qquad D_d = \mathbb{R}_+\,.$

On décrit $d(x)$ à l'aide d'exposants fractionnaires :

$$d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}\,.$$

Puis on dérive l'expression obtenue :

$$d'(x) = \frac{7}{8}\cdot x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8}\cdot x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}\,, \qquad D_{d'} = \mathbb{R}_+^*\,.$$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\,, \qquad D_e = \mathbb{R}\,.$

- On dérive $e(x)$ comme un quotient :

$$\begin{aligned}
e'(x) &= \left[\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]' \\
&= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{[\,(x^2+1)-x^2\,]-[\,x^2-(x^2+1)\,]}{\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{[\,(x^2+1)-x^2\,]^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2\,, \qquad D_{e'} = \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

- On commence par simplifier l'expression de $e(x)$ en amplifiant le dénominateur par son expression conjuguée :

$$e(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{(x^2+1)-x^2} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 .$$

Puis on dérive l'expression obtenue comme un carré :

$$e'(x) = 2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)' = 2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)$$

$$e'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 , \qquad D_{e'} = \mathbb{R}\,.$$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}$, $\qquad D_f = \mathbb{R}_+$. $\qquad f(x) = \left(1-x^{3/2}\right)^{2/3}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(1-x^{3/2}\right)^{-1/3}\left(1-x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3}\left(1-x^{3/2}\right)^{-1/3}\left(-\frac{3}{2}\,x^{1/2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}} , \qquad D_{f'} = \mathbb{R}_+ - \{1\}\,.$$

g) $g(x) = (x-1)^5(2x+1)^5$, $\qquad D_g = \mathbb{R}$.

- On dérive $g(x)$ comme un produit :

$$g'(x) = \left[\,5\,(x-1)^4\right]\cdot(2x+1)^5 + (x-1)^5\cdot\left[\,5\,(2x+1)^4\cdot 2\,\right],$$

puis on met en évidence les facteurs communs :

$$g'(x) = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,\left[\,(2x+1)+2\,(x-1)\,\right] = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,(4x-1)\,.$$

$D_{g'} = \mathbb{R}$ $\qquad$ et $\qquad g'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;1\}$.

- On dérive $g(x)$ exprimé sous la forme $w^5(x)$:

$$g'(x) = \left(\left[\,(x-1)\,(2x+1)\,\right]^5\right)' = 5\left[\,(x-1)\,(2x+1)\,\right]^4\left[\,(x-1)\,(2x+1)\,\right]',$$

$$g'(x) = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\left[\,2x^2-x-1\,\right]' = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,(4x-1)\,.$$

$D_{g'} = \mathbb{R}$ $\qquad$ et $\qquad g'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;1\}$.

h) $h(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2\cdot(x+a)}\,,\qquad D_h=\mathbb{R}\,,\qquad h(x)=(x-1)^{2/3}\cdot(x+a)^{1/3}\,.$

On dérive $h(x)$ comme un produit :

$$h'(x)\;=\;\left[\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{-1/3}\right]\cdot(x+a)^{1/3}+(x-1)^{2/3}\cdot\left[\frac{1}{3}\,(x+a)^{-2/3}\right],$$

$$h'(x)\;=\;\frac{2\,(x+a)^{1/3}}{3\,(x-1)^{1/3}}+\frac{(x-1)^{2/3}}{3\,(x+a)^{2/3}}$$

et en mettant les deux termes de cette somme au même dénominateur :

$$h'(x)=\frac{2\,(x+a)+(x-1)}{3\,\sqrt[3]{(x-1)\,(x+a)^2}}=\frac{3x+2a-1}{3\,\sqrt[3]{(x-1)\,(x+a)^2}}\,,\qquad D_{h'}=\mathbb{R}\setminus\{1\,;\,-a\}\,.$$

$$h'(-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad 3\,(-1)+2a-1=0\quad\Leftrightarrow\quad a=2\,.$$

5. Dériver sur $\mathbb{R}^*$ les deux fonctions suivantes :

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x\geq 0\\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x<0\end{cases}$

b) $g(x)=\sqrt[5]{x^2}=\begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x\geq 0\\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x<0\end{cases}$

---

a) Rappel : l'expression x^q, $q\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ n'est définie que sur les x positifs.

On peut donc dériver $\sqrt[3]{x}$ sur les x positifs en dérivant la fonction $x^{\frac{1}{3}}$.

Puis on montrera que le résultat obtenu est aussi valable sur les x négatifs.

- Dérivée de $f(x)$ sur les x positifs :

$$f'(x)\;=\;\left[\sqrt[3]{x}\right]'\;=\;\left[x^{\frac{1}{3}}\right]'\;=\;\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}\;=\;\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\;=\;\frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,,\quad\forall\,x>0\,.$$

- Dérivée de $f(x)$ sur les x négatifs :

$$f'(x)\;=\;\left[\sqrt[3]{x}\right]'\;=\;\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right]'\;=\;-\frac{1}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(-x)'\;=\;-\frac{1}{3}\cdot(-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)\,,$$

$$f'(x)\;=\;\frac{1}{3}\cdot(-x)^{-\frac{2}{3}}\;=\;\frac{1}{3\,\sqrt[3]{(-x)^2}}\;=\;\frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,,\quad\forall\,x<0\,.$$

On en déduit que l'expression obtenue en dérivant $\sqrt[3]{x}$ sur les x positifs, reste valable pour les x négatifs :

$$(\sqrt[3]{x}\,)'\;=\;\frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^*.$$

Remarque : la dérivée d'une fonction impaire est paire, donc sachant que $f(x)$ est impaire, on pouvait directement conclure :

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

b) On dérive la fonction $\sqrt[5]{x^2}$ sur les x positifs en dérivant la fonction $x^{\frac{2}{5}}$, puis on vérifie que le résultat obtenu est aussi valable sur les x négatifs.

- Dérivée de $g(x)$ sur les x positifs :

$$g'(x) = \left[\sqrt[5]{x^2}\right]' = \left[x^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x > 0\,.$$

- Dérivée de $g(x)$ sur les x négatifs :

$$g'(x) = \left[\sqrt[5]{x^2}\right]' = \left[(-x)^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5}\cdot(-x)^{\frac{2}{5}-1}\cdot(-x)' = \frac{2}{5}\cdot(-x)^{-\frac{3}{5}}\cdot(-1)\,,$$

$$g'(x) = -\frac{2}{5}\cdot(-x)^{-\frac{3}{5}} = -\frac{2}{5\sqrt[5]{(-x)^3}} = -\frac{2}{5\sqrt[5]{-x^3}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x < 0\,.$$

On en déduit que l'expression obtenue en dérivant $\sqrt[5]{x^2}$ sur les x positifs, reste valable pour les x négatifs :

$$(\sqrt[5]{x^2})' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque : la dérivée d'une fonction paire est impaire, donc sachant que $g(x)$ est paire, on pouvait directement conclure

$$g'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x > 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

6. On considère la courbe Γ d'équation $y = (\pi - x)^2 \sin^2 x$.

Déterminer l'équation de la tangente t à la courbe Γ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Soit $f(x) = (\pi - x)^2 \cdot \sin^2 x$. L'équation de la tangente t à Γ en x_0 s'écrit :

$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

- Calcul de $f(x_0)$

$$f(x_0) = f(\tfrac{\pi}{2}) = (\tfrac{\pi}{2})^2 \sin^2(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

- Calcul de $f'(x_0)$.

- Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(\pi - x)^2\right]' \cdot \sin^2 x + (\pi - x)^2 \cdot \left[\sin^2 x\right]' \\ &= 2\,(\pi - x) \cdot (-1) \cdot \sin^2 x + (\pi - x)^2 \cdot 2\,\sin x \cdot \cos x \\ &= -2\,(\pi - x) \cdot \sin^2 x + 2\,(\pi - x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos x\,. \end{aligned}$$

- Evaluation en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f'(x_0) = f'(\tfrac{\pi}{2}) = -2\,(\pi - \tfrac{\pi}{2})\,\sin^2(\tfrac{\pi}{2}) + (\pi - \tfrac{\pi}{2})^2\,2\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = -\pi\,.$$

On en déduit l'équation de la tangente t

$$t: \quad y - \tfrac{\pi^2}{4} = -\pi\,(x - \tfrac{\pi}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\pi\,x + \tfrac{3\,\pi^2}{4}\,.$$

7. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ tangente à la droite d'équation $y - 3x - 1 = 0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

Soit $f(x) = x^2 + px + q$.

La droite t d'équation $y - 3x - 1 = 0$ est tangente à la parabole Γ d'équation $y = f(x)$ au point T d'abscisse $x_T = 1$ si et seulement si

- $T \in t \quad \Leftrightarrow \quad y_T = 4\,, \qquad T\,(1\,,\,4)\,.$
- $T \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 1 + p + q \quad \Leftrightarrow \quad p + q = 3\,.$
- La pente de la droite t est égale à la dérivée de f en x_T.

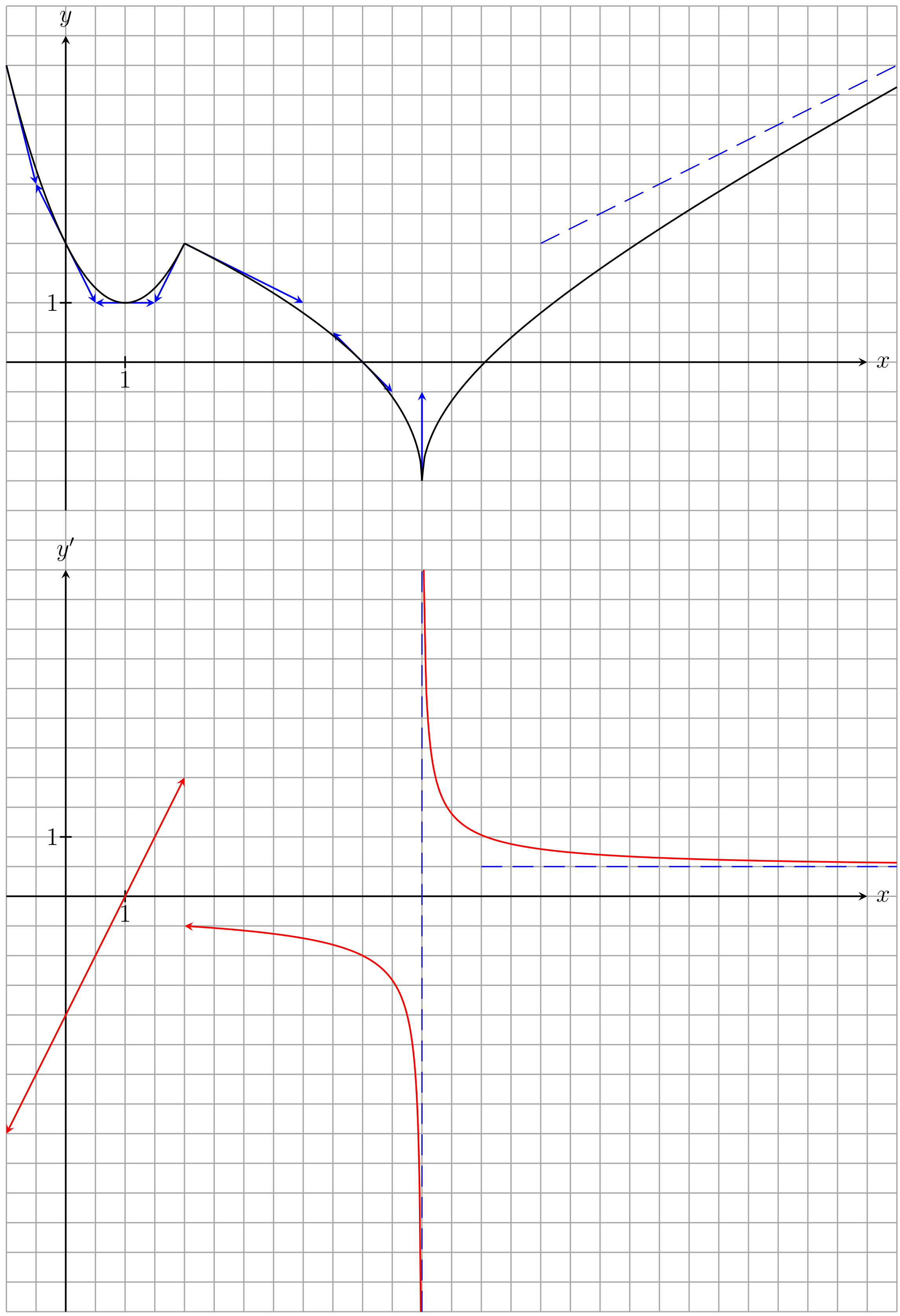
  $f'(x_T) = 2\,x_T + p = 2 + p\,, \qquad f'(x_T) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + p = 3 \quad \Leftrightarrow \quad p = 1\,.$

D'où : $p = 1$ et $q = 2\,, \qquad \Gamma:\ y = x^2 + x + 2\,.$

---

8. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



9. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.