Corrigé 10

1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos(\frac{1+2x}{x})$

b) $b(x) = \cos^2(\sin x)$

c) $c(x) = [\sin(p\,x^q)]^r\,,\ \ p, q, r \in \mathbb{N}^*$

d) $d(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

e) $e(x) = \arccos(3x - 1)$

f) $f(x) = \arctan\left(\frac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)$

---

a) La fonction $a(x) = \cos\left(\frac{1+2x}{x}\right)$ est de la forme $\cos[u(x)]$, sa fonction dérivée $a'(x)$ s'écrit $a'(x) = -\sin[u(x)] \cdot u'(x)$.

Mais la fonction $u(x) = \frac{1+2x}{x}$, est plus facile à dériver si préalablement on la réécrit sous la forme $u(x) = \frac{1}{x} + 2$.

$$\begin{aligned}
a'(x) &= \left[\cos\left(\tfrac{1+2x}{x}\right)\right]' \\
&= \cos'\left(\tfrac{1+2x}{x}\right) \cdot \left[\frac{1+2x}{x}\right]' \\
&= -\sin\left(\tfrac{1+2x}{x}\right) \cdot \left[\frac{1}{x} + 2\right]' \\
&= -\sin\left(\tfrac{1+2x}{x}\right) \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\tfrac{1+2x}{x}\right).
\end{aligned}$$

b) La fonction $b(x) = \cos^2(\sin x)$ est de la forme $[\,u(x)\,]^2$, sa dérivée s'écrit $b'(x) = 2\,u(x) \cdot u'(x)$, avec $u(x) = \cos[\,v(x)\,]$ et $u'(x) = -\sin[\,v(x)\,] \cdot v'(x)$.

$$\begin{aligned}
b'(x) &= \left[\cos^2(\sin x)\right]' \\
&= 2\,\cos(\sin x) \cdot [\cos(\sin x)]' \\
&= 2\,\cos(\sin x) \cdot [-\sin(\sin x) \cdot (\sin x)'] \\
&= -2\,\cos(\sin x) \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos x \\
&= -\cos x \cdot \sin(2\,\sin x).
\end{aligned}$$

c) La fonction $c(x) = [\sin(p\,x^q)]^r$ est de la forme $[\,u(x)\,]^r$, sa dérivée s'écrit $c'(x) = r\,[\,u(x)\,]^{r-1} \cdot u'(x)$, avec $u(x) = \sin[\,v(x)\,]$ et $u'(x) = \cos[\,v(x)\,] \cdot v'(x)$.

$$\begin{aligned}
c'(x) &= \left([\sin(p\,x^q)]^r \right)' \\
&= r\ [\sin(p\,x^q)]^{r-1} \cdot [\sin(p\,x^q)]' \\
&= r\ [\sin(p\,x^q)]^{r-1} \cdot \big[\cos(p\,x^q) \cdot (p\,x^q)'\big] \\
&= r\ [\sin(p\,x^q)]^{r-1} \cdot \big[\cos(p\,x^q) \cdot \big(p\,q\,x^{q-1}\big)\big] \\
&= p\,q\,r\ x^{q-1} \cdot \cos(p\,x^q) \cdot [\sin(p\,x^q)]^{r-1}, \quad p, q, r \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

d) Première méthode : on dérive $d(x)$ comme un quotient :

$$\begin{aligned}
d'(x) &= \left[\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right]' \\
&= \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{(\cos^2 x - 2\,\sin x\,\cos x + \sin^2 x) + (\cos^2 x + 2\,\sin x\,\cos x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{2\,(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on simplifie l'expression de $d(x)$ avant de dériver :

$$d(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{[\sin x - \cos x] + 2\,\cos x}{\sin x - \cos x} = 1 + 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\begin{aligned}
d'(x) &= \left[1 + 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\right]' \\
&= 2 \cdot \frac{(\cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{(-\sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{-\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}
\end{aligned}$$

e) La fonction $e(x) = \arccos(3x-1)$ est de la forme $\arccos[\,u(x)\,]$, sa dérivée s'écrit $e'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x)$.

$$\begin{aligned} e'(x) &= [\,\arccos(3x-1)\,]' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} \cdot (3x-1)' \\ &= -\frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}\,. \end{aligned}$$

f) La fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)$ est de la forme $\arctan[\,u(x)\,]$, sa dérivée s'écrit $f'(x) = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\,\arctan\left(\tfrac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)\,\right]' \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)^2} \cdot \left[\frac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right]' \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)^2} \cdot 12 \cdot \frac{(\sin x)' \cdot (5+13\,\cos x) - \sin x \cdot (5+13\,\cos x)'}{(5+13\,\cos x)^2} \\ &= \frac{(5+13\,\cos x)^2}{(5+13\,\cos x)^2+(12\,\sin x)^2} \cdot 12 \cdot \frac{\cos x \cdot (5+13\,\cos x) + 13\,\sin^2 x}{(5+13\,\cos x)^2} \\ &= \frac{12\,(13+5\,\cos x)}{25+130\,\cos x+169\,\cos^2 x+144\,\sin^2 x} \\ &= \frac{12\,(13+5\,\cos x)}{169+130\,\cos x+25\,\cos^2 x} \\ &= \frac{12\,(13+5\,\cos x)}{(13+5\,\cos x)^2} \\ &= \frac{12}{13+5\,\cos x}\,. \end{aligned}$$

2. Soit Γ la courbe d'équation $y = 3\,\arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right)$, $x \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

a) Montrer que la courbe Γ admet une tangente de pente $m = 3$.
Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente.

b) Pour quelle valeur de x, la courbe Γ admet-elle au point $(x, f(x))$, une normale de pente $m = -\frac{1}{2}$?

---

a) Soit $f(x) = 3\,\arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right)$. La courbe Γ admet une tangente de pente $m = 3$ en $x = x_0$ si et seulement si $f'(x_0) = 3$.

Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3\,\frac{1}{1+(\frac{\tan x}{3})^2}\,\left[\frac{\tan x}{3}\right]' = \frac{1}{1+\frac{\tan^2 x}{9}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{9}{(9+\tan^2 x)\,\cos^2 x}$$

$$= \frac{9}{9\,\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{9}{1+8\,\cos^2 x}\,.$$

Résolution de l'équation $f'(x_0) = 3$, $x_0 \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

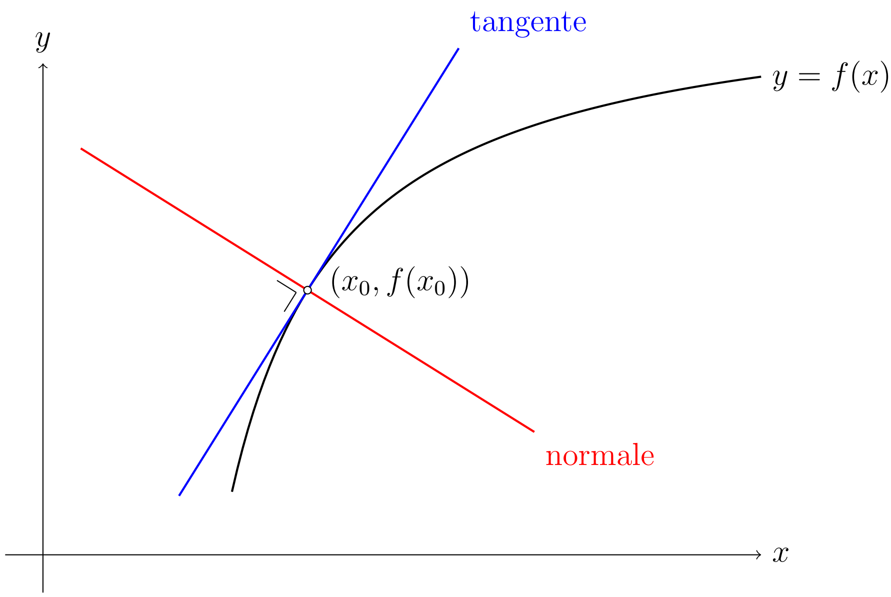
$$f'(x_0) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{1+8\,\cos^2 x_0} = 3 \quad\Leftrightarrow\quad 3 = 1 + 8\,\cos^2 x_0$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos^2 x_0 = \frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \cos x_0 = \pm\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_0 = \frac{\pi}{3}\,.$$

L'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ s'écrit :

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0) \quad\Leftrightarrow\quad y - f(\tfrac{\pi}{3}) = 3\,(x - \tfrac{\pi}{3}) \quad\Leftrightarrow\quad y - \tfrac{\pi}{2} = 3\,(x - \tfrac{\pi}{3})\,.$$

b) La normale à la courbe Γ d'équation $y = f(x)$ au point x_0 est la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et perpendiculaire à la tangente à Γ en ce point.



La courbe Γ admet une normale de pente $m = -\frac{1}{2}$ au point $(x, f(x))$, si elle admet en ce point une tangente de pente $m' = 2$.

Résolution de l'équation $f'(x) = 2$, $x \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$:

$$f'(x) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{9-8\,\sin^2 x} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad 9 = 18 - 16\,\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin^2 x = \frac{9}{16} \quad\Leftrightarrow\quad x = \arcsin\left(\tfrac{3}{4}\right)\,, \quad \left(x \in [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,]\right).$$

3. Soit Γ la courbe d'équation $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Montrer que la droite t d'équation $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1+\sqrt{3}\,x)$ est tangente à Γ.

- Pente m_t de la droite t

$$t: \quad y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}\,x\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}\,x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

La pente m_t de la droite t vaut $m_t = -\dfrac{3}{2}$.

- Abscisse x_0 du point de tangence

Si la droite t est tangente à la courbe Γ en $x = x_0$ alors la pente m_t de la droite t est égale à $f'(x_0)$ (condition nécessaire mais non suffisante).

  - Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\arccos\left(\tfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]' \\ &= -\frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \cdot \frac{-2x\,(1+x^2)-(1-x^2)\,2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{1+x^2} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{2}{1+x^2}\,, \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \qquad\qquad D_{f'} = \mathbb{R}^*.$$

  - Résolution de l'équation $f'(x_0) = m_t$

$$f'(x_0) = m_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2}{1+x_0^2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_0 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

- Vérification

L'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ en $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ s'écrit :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

car $\quad f(x_0) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arccos\left(\frac{2/3}{4/3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\,.$

La droite t est donc bien la tangente à la courbe Γ en $x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Montrer que la fonction dérivée de la fonction f est identiquement nulle.

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)$$

En déduire l'expression de $\arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)$ en fonction de $\arctan x$ sur chaque intervalle de son domaine de continuité.

Puis déduire le graphe de la fonction $\arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)$ de celui de la fonction $\arctan x$.

Vérifions que la fonction dérivée de f est nulle pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\arctan x + \arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left[\frac{1-x}{1+x}\right]' \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2}{2+2x^2} = 0\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur chaque intervalle de son domaine de continuité.

- Sur l'intervalle $]-\infty\,, -1\,[$, $f(x)$ est constant.

  On détermine cette constante en calculant, par exemple, $f(-2)$:

  $$f(-2) = \arctan(-2) + \arctan(-3) = -(\arctan 2 + \arctan 3) = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

  (c.f. série 8 exercice 6).

- Sur l'intervalle $]-1\,, +\infty\,[$, $f(x)$ est constant.

  On détermine cette constante en calculant, par exemple, $f(0)$:

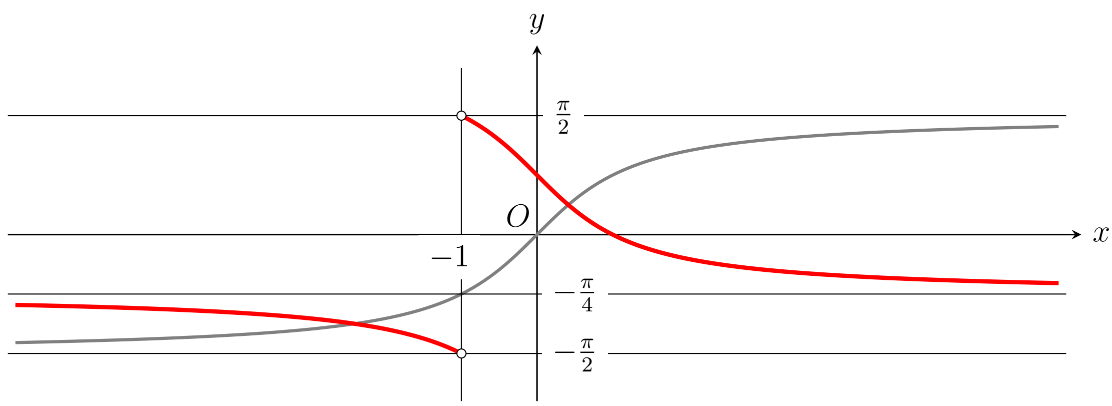
  $$f(0) = \arctan 0 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

En résumé

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,, \qquad f(x) = \arctan x + \arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} & \text{si} \quad x < -1 \\ +\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

On exprime $\arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)$ en fonction de $\arctan x$, puis on en déduit sa représentation graphique à partir de celle de $\arctan x$.

$$\arctan\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} - \arctan x & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$



5. Montrer que les fonctions suivantes ont même fonction dérivée sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{12\sin x}{5+13\cos x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right).$$

Puis en déduire que $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$ sur $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

On a déjà déterminé la fonction dérivée de f dans l'exercice 1 :

$$f'(x) = \frac{12}{13+5\cos x}.$$

Il suffit donc de dériver la fonction g et de vérifier que les deux fonctions dérivées coïncident sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[2\arctan\left(\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right)\right]' \\ &= \frac{2}{1+\left(\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right)^2}\cdot\left[\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right]' \\ &= \frac{2\,[\,3-2\tan(x/2)\,]^2}{[\,3-2\tan(x/2)\,]^2+[\,3+2\tan(x/2)\,]^2}\cdot\left[\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right]', \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left[\frac{3+2\tan(x/2)}{3-2\tan(x/2)}\right]' &= \left[\frac{-\,[\,3-2\tan(x/2)\,]+6}{3-2\tan(x/2)}\right]' \\ &= \left[-1+\frac{6}{3-2\tan(x/2)}\right]' \\ &= \frac{-6}{[\,3-2\tan(x/2)\,]^2}\cdot[\,3-2\tan(x/2)\,]' \\ &= \frac{-6}{[\,3-2\tan(x/2)\,]^2}\cdot\left[-2\,\left[\,1+\tan^2(x/2)\,\right]\cdot\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{6\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{[\,3-2\tan(x/2)\,]^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2\,[\,3-2\,\tan(x/2)\,]^2}{[\,3-2\,\tan(x/2)\,]^2+[\,3+2\,\tan(x/2)\,]^2}\cdot\frac{6\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{[\,3-2\,\tan(x/2)\,]^2}\\
&= \frac{12\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{[\,3-2\,\tan(x/2)\,]^2+[\,3+2\,\tan(x/2)\,]^2}\\
&= \frac{12\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{18+8\,\tan^2(x/2)}\\
&= \frac{6\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{9+4\,\tan^2(x/2)}\,.
\end{aligned}$$

En vu de comparer les deux expressions

$$g'(x)=\frac{6\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{9+4\,\tan^2(x/2)}\qquad\text{et}\qquad f'(x)=\frac{12}{13+5\,\cos x}\,,$$

on transforme l'expression de $g'(x)$ en utilisant la relation $\tan^2(x/2)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{6\,[\,1+\tan^2(x/2)\,]}{9+4\,\tan^2(x/2)}\\
&= \frac{6\,\left(1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}{9+4\cdot\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\\
&= \frac{6\,[\,(1+\cos x)+(1-\cos x)\,]}{9\,(1+\cos x)+4\,(1-\cos x)}\\
&= \frac{12}{13+5\,\cos x}\,.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ sont donc égales.

$$f'(x)=g'(x)\quad\Leftrightarrow\quad f'(x)-g'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad [\,f(x)-g(x)\,]'=0\,.$$

Or la fonction $f(x)-g(x)$ est continue sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$, donc elle est constante sur cet intervalle.

On cherche cette constante en calculant, par exemple, $(f-g)(0)$.

$$\begin{aligned}
(f-g)(0) &= \left[\arctan\left(\tfrac{12\,\sin x}{5+13\,\cos x}\right)-2\,\arctan\left(\tfrac{3+2\,\tan(x/2)}{3-2\,\tan(x/2)}\right)\right]_{x=0}\\
&= \arctan(0)-2\,\arctan(1)\\
&= -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

D'où $\qquad f(x)=g(x)-\dfrac{\pi}{2}\,,\qquad \forall\,x\in[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]\,.$

6. On considère la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

a) Donner le domaine de définition de la fonction f.

b) Déterminer la fonction dérivée de f ainsi que son domaine de définition.

c) En déduire la représentation graphique de f.

---

a) Domaine de définition de la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \leq \tfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \tfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \right\}.$$

$*$ $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2$

$\Leftrightarrow \quad -(x+1)^2 \leq 0 \leq (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

$*$ $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq 0 \leq 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$

b) Dérivée de $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

- Dérivée de $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$$\begin{aligned}
\left[\arcsin\left(\tfrac{2x}{1+x^2}\right)\right]' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{2x}{1+x^2}\right]' \\
&= \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(2x)^2}} \cdot \frac{2\,(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \cdot \frac{2-2x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)\,\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
&= \frac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} \\
&= \frac{2}{(1+x^2)} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2).
\end{aligned}$$

- Dérivée de $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$\begin{aligned}
\left[\arccos\left(\tfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]' &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]' \\
&= \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \cdot \frac{-2x\,(1+x^2)-(1-x^2)\,(2x)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{4x}{(1+x^2)\,\sqrt{4x^2}} \\
&= \frac{4x}{(1+x^2)\,|2x|} \\
&= \frac{2}{(1+x^2)} \cdot \operatorname{sgn}(x)\,.
\end{aligned}$$

- Conclusion

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\,\big[\operatorname{sgn}(1-x^2)+\operatorname{sgn}(x)\big]\,, \qquad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1\,,\,0\,,\,1\}\,.$$

c) On cherche à expliciter $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}\,\big[\operatorname{sgn}(1-x^2)+\operatorname{sgn}(x)\big]$ en fonction de $\operatorname{sgn}(x)$ et de $\operatorname{sgn}(1-x^2)$.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$\operatorname{sgn}(x)$	-1	-1	$+1$	$+1$
$\operatorname{sgn}(1-x^2)$	-1	$+1$	$+1$	-1
somme	-2	0	$+2$	0

- si $x<-1$, $f'(x) = \dfrac{-4}{1+x^2}$,
- si $-1<x<0$, $f'(x)=0$,
- si $0<x<1$, $f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$,
- si $x>1$, $f'(x)=0$.

On en déduit une nouvelle expression de $f(x)$ en fonction de $\arctan(x)$, en remarquant que si $f'(x) = \dfrac{\lambda}{1+x^2}$, alors $f(x) = \lambda\cdot\arctan(x)+C$:

- si $x<-1$, $f'(x) = \dfrac{-4}{1+x^2}$, d'où $f(x) = -4\,\arctan(x)+c_1$,
- si $-1<x<0$, $f'(x)=0$, d'où $f(x)=c_2$,
- si $0<x<1$, $f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$, d'où $f(x) = 4\,\arctan(x)+c_3$,
- si $x>1$, $f'(x)=0$, d'où $f(x)=c_4$.

Or la fonction f est une fonction continue, comme somme et composée de fonctions continues.

En particulier, la fonction f est continue à gauche et à droite aux points d'abscisse $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -4\arctan(x) + c_1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ c_2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 4\arctan(x) + c_3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ c_4 & \text{si} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

On détermine les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 en évaluant la fonction f :

- $f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(0) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$, donc $c_1 = -\pi$ et $c_2 = 0$,
- $f(1) = \arcsin(1) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc $c_3 = 0$ et $c_4 = \pi$.

$$f(x) = \begin{cases} -4\arctan(x) - \pi & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 4\arctan(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \pi & \text{si} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

On déduit le graphe de $f(x)$ de celui de la fonction $\arctan(x)$: