14 juin 2005

Contrôle d'analyse II no 4

Durée: 1 heure 30'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

---

1. Soit la transformation homographique f appliquant le plan des $z = x + iy$ dans le plan $w = u + iv$, définie par: $w = z_1 - \dfrac{2+2i}{z - z_0}$ $(= f(z))$.

1.1. Déterminer z_0 et z_1 sachant que le cercle Γ: $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ a pour image par f la droite **d'**: $u - v + 2 = 0$ et que z_0 est un complexe imaginaire pur.

1.2. Soient $z_0 = -1 + i$ et $z_1 = 1$. Trouver l'image par f de la droite **a** passant par les points d'affixes $z_A = 2$ et $z_B = 1 + i$ et l'image par f du cercle γ : $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

4 pts

2. En utilisant les développements limités, calculer:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right].$$

$3\frac{1}{2}$ pts

3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + \sin x}$.

$3\frac{1}{2}$ pts

4. Soit f la fonction définie au voisinage de $\mathbf{x_0 = \pi/4}$ par $\mathbf{f(x) = \ln(tg x)}$.

4.1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre **3** au voisinage de x_0 .

4.2. En déduire la dérivée de f en x_0 et l'équation de la tangente **t** à son graphe au point d'abscisse x_0.

4.3. Esquisser (en justifiant) le graphe de f au voisinage du point **T** d'abscisse x_0. (préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point).

4 pts

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Petit formulaire pour le contrôle 4 d'analyse II

1) Développements limités (autour de $u = 0$)

$$(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2!}u^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}u^n + o(u^n), \text{ a réel}$$

$$\operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \ldots + o(u^7);$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + o(u^n).$$

2) Relations trigonométriques

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ où } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \text{ où } t = \operatorname{tg} x.$$

Analyse II

Contrôle n°4 été 05 Ex n°1

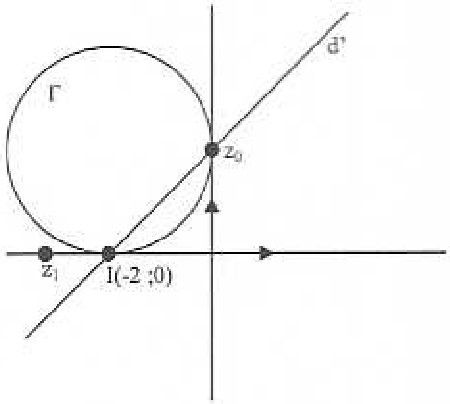
Soit la transformation homographique $w = f(z) = z_1 - \frac{2(1+i)}{z - z_0}$.

a) Déterminer z_0 et z_1 sachant que le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$ a pour image la droite **d'** : x - y + 2 = 0 et que z_0 est un nombre imaginaire pur.

b) Soient $z_0 = -1 + i$ et $z_1 = 1$. Trouver l'image par f de la droite **a** passant par les points d'affixes $z_A = 2$ et $z_B = 1 + i$ et l'image par f du cercle $\boldsymbol{\gamma}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Solution :

a) $\Gamma : (x+2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$; le seul point imaginaire pur est le pôle : $z_0 = 2i$ 1 pt



½ pt

Le point I est un point fixe car il se trouve sur le cercle et son image et n'est pas le pôle.

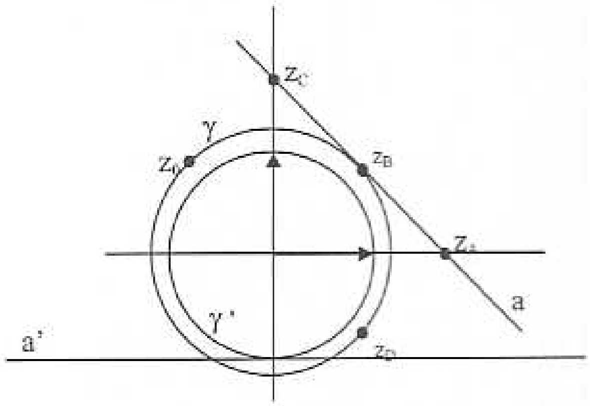
On a donc f(I) = I ou plutôt : $f(z = -2) = -2 \Rightarrow z_1 = -3$ ½ pt

En résumé : $f(z) = -3 - \frac{2(1+i)}{z - 2i}$.

b) Avec les conditions imposées, la fonction homographique devient :

$$f(z) = 1 - \frac{2(1+i)}{z+1-i} \quad = \quad \frac{z-1-3i}{z+1-i}$$

On constate, d'après le dessin, que la droite a ne passe pas par le pôle $z_0 = -1+i$, donc son image est un cercle γ' : ½ pt



On cherchera les images des trois points z_A, z_B et z_C :

$f(1+i) = -i$; $f(2) = \frac{1}{5}(3-4i)$; $f(2i) = -1$ et ces trois points sont sur le cercle γ' ½ pt

d'équation : $u^2 + v^2 - 1 = 0$ ½ pt

Par contre, le cercle donné passe par le pôle ; son image est alors une droite qui passe par le point z = -i, image de de z_B.
L'image de z_D, par exemple, nous donne un deuxième point de cette droite image :

$f(1-i) = 1-i$; c'est un point fixe du reste ; donc la droite image **a'** s'écrit : v = -1 ½ pt

14 juin 2005

Corrigé du Contrôle d'analyse II no 4

2. En utilisant les développements limités, calculer:

$$\lim_{x \to \infty} [\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}].$$ **$3\frac{1}{2}$ pts**

- On a $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x [\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}]$.
- On pose $t = \frac{1}{x}$ de sorte que $(x \to \pm\infty) \Leftrightarrow (t \to 0\pm)$. D'où $\Phi(t) = \frac{1}{t}[\sqrt[3]{1+t} - \sqrt[3]{1-t}]$
- Pour chercher la limite quand $t \to 0\pm$ de $\Phi(t)$, on développe le terme entre crochet à l'ordre 1 autour de $t = 0$. On obtient:

$(1 + t)^{1/3} - (1 - t)^{1/3} = (1 + \frac{1}{3}t + t\varepsilon_1(t)) - (1 - \frac{1}{3}t + t\varepsilon_2(t))$, $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0 = \lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_2(t)$.

D'où: $(1 + t)^{1/3} - (1 - t)^{1/3} = \frac{2}{3}t + t\varepsilon(t)$ où $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

- Finalement: $\lim\limits_{t \to 0} \boldsymbol{\Phi(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}[\sqrt[3]{1+t} - \sqrt[3]{1-t}] = \lim\limits_{t \to 0} [\frac{2}{3} + \varepsilon(t)] = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

et ainsi $\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}] = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$.

---

3. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + \sin x}$. **$3\frac{1}{2}$ pts**

- sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x + \cos x$ est toujours > 0; donc I est bien définie.
- On a $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sin u}$ .où $u = x + \frac{\pi}{4}$.
- Or $\frac{d(-u)}{\sin(-u)} = \frac{du}{\sin u}$; d'où (une règle de Bioche) on pose $\mathbf{\cos u = t}$. Par suite: $-\sin u\, du = dt$

et il vient $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{-dt}{\sin^2 u}$; ainsi $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1 - t^2}$ soit

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} [\int \frac{dt}{1 + t} + \int \frac{dt}{1 - t}] = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}\right|$$

puis: $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln([\,|\frac{1 - \cos(x + \frac{\pi}{4})}{1 + \cos(x - \frac{\pi}{4})}|\,]_0^{\pi/2}$ soit: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})}$.

---

4. Soit f la fonction définie au voisinage de $\mathbf{x_0 = \pi/4}$ par $\mathbf{f(x) = \ln(tgx)}$.

4.1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre **3** au voisinage de x_0 .

4.2. En déduire la dérivée de f en x_0 et l'équation de la tangente **t** à son graphe au point d'abscisse x_0.

4.3. Esquisser (en justifiant) le graphe de f au voisinage du point **T** d'abscisse x_0. (préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point).

4 pts

• Ci-dessous, on a: $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_i(t) = 0,\ i = 1, 2, \dots$.

4.1. Posons $x = t + \frac{\pi}{4}$. Alors $\ln(tgx) = \ln(tg(t + \frac{\pi}{4}))$.

• On introduit des développements limités à l'ordre 3 autour de t = 0:

$tg(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + tg\,t}{1 - tg\,t} = \frac{1 + t + \frac{1}{3}t^3 + 0(t^3)}{1 - t - \frac{1}{3}t^3 + 0(t^3)}$ soit en divisant selon les puissances croissantes de t: $tg(t + \frac{\pi}{4}) = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)$.

• D'où $\ln(tg(t + \frac{\pi}{4})) = \ln(1 + u(t))$ où $u(t) = 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3\varepsilon_2(t)$ avec $u(0) = 0$.

Or $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_3(u)$ autour de u = 0. Par suite:

$\ln(tg(t + \frac{\pi}{4})) = 2t + \frac{4}{3}t^3 + t^3\varepsilon_4(t)$ puis:

• $\mathbf{f(x) = \ln(tgx) = 2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + (x - \frac{\pi}{4})^3\,\varepsilon_5(x - \frac{\pi}{4})}$.

4.2. Puisque f(x) possède le développement limité à l'ordre 1 autour de $x_0 = \pi/4$ donné ci-dessus, on a: $f(\pi/4) = 0$ et $f'(\pi/4) = 2$ et ainsi la tangente au point $T(\pi/4;0)$ au graphe de f est **t**: $\mathbf{y = 2(x - \frac{\pi}{4})}$.

4.3. Le développement limité à l'ordre 3 en $x = \pi/4$ de f montre par ailleurs que le graphe de f admet au point T un point d'inflexion.

Le graphe est au-dessous de **t** à gauche de T et au-dessus de **t** à droite de T (en effet $\mathbf{f(x) - 2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + (x - \frac{\pi}{4})^3\,\varepsilon_5(x - \frac{\pi}{4})}$).
