Série 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x-3 \;>\; \sqrt{x^2+3x}\,,$ b) $\sqrt{\dfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \;\geq\; 2-x\,.$

2. On considère l'équation suivante :

$$\sqrt{\sqrt{x^2-5x+4}+5x-2} \;=\; 5\,.$$

a) Déterminer le domaine de définition de cette équation.

b) Résoudre cette équation sur son domaine de définition.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

a) $\left|\,3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\,\right| \geq -x+11-\sqrt{-x^2+x+42}\,,$

b) $\sqrt{x^2-|3x+4|} \;\leq\; x-2\,.$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} \;=\; x-m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

5. Calculer le terme en x^{18} du développement de $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$.

6. Calculer le terme en x^{26} dans le développement de $(x^{1/2}+x)^3\,(1-x^{3/2})^{18}$.

7. A l'aide du développement de $(1+x)^5$, évaluer $(1,04)^5$ à quatre décimales près.

8. Exercice facultatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{|x^2-5m^2|} \;\leq\; x-m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Réponses de la série 4

1. a) $S = \emptyset$.

b) $S = [-2\sqrt{2}\,;\,-1\,[\,\cup\,[\,\frac{5}{2}\,;\,+\infty\,[$.

2. a) $D_{\text{def}} = [\,0\,,\,1\,] \cup [\,4\,,\,+\infty\,[$.

b) $S = \{\,5\,\}$.

3. a) $S = [-6\,,\,3\,] \cup [\,4\,,\,7\,]$.

b) $S = [\,4\,,\,8\,]$.

4.
- si $m \in \,]-\infty\,,\,-1\,]$, alors $S = \left\{-m-\sqrt{2\,(m^2-1)}\,,\,-m+\sqrt{2\,(m^2-1)}\right\}$,
- si $m \in \,]-1\,,\,+\infty\,[$, alors $S = \emptyset$.

5. Le terme en x^{18} est : $3^4\,a^4\,\mathrm{C}_{15}^4\,x^{18}$.

6. Le terme en x^{26} est : $\mathrm{C}_3^1\,\mathrm{C}_{18}^{16}\,x^{26}$.

8.
- Si $m < 0$ alors $S = [\,-m\,,\,\infty\,[$.
- Si $m = 0$ alors $S = \mathbb{R}_+$.
- Si $m > 0$ alors $S = [\,2m\,,\,3m\,]$.