3.5.19

Série 17

1. Parmi les sous-ensembles des anneaux suivants, déterminer lesquelles sont des idéaux des dits anneaux:

$$I := \{3n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}, \quad J := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad K := \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R},$$

$$L := C^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}), \quad M := \{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(1) = 0\} \subset C^0(\mathbb{R}),$$

$$N := \{(X^2 + 1)P(X) : P(X) \in \mathbb{R}[X]\} \subset \mathbb{R}[X].$$

2. (a) Inspirez-vous du cours pour montrer, que tout idéal $I \subset \mathbb{Z}$ est de la forme

$$I = n\mathbb{Z} := \{np : p \in \mathbb{Z}\},$$

pour un certain $n \in \mathbb{Z}$ fixé.

(b) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont les idéaux triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

(c) Vérifier, que pour $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$,

$$M_{P,Q} := \{AP + BQ : A, B \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

3. Trouver le coefficient du terme :

(a) en x^4 de $\quad (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 2)(x^2 - x - 2)$;

(b) en x^{n+1} de $\quad x^n(x-1)^2 - 3x^{n-2}(x+1)^3$.

4. Déterminer le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $D(x)$

(a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6\,, \quad D(x) = x^2 - 3x + 1$;

(b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8\,, \quad D(x) = x - 1$;

(c) $P(x) = x^4 + 4y^4\,, \quad D(x) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

5. Chercher le PGCD des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

(a) $P(x) = x^3 + 1\,, \quad Q(x) = x^2 + 1$;

(b) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3\,, \quad Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3$.

6. Soit $D(x)$ le PGCD de $P(x)$ et $Q(x)$, pour les deux cas suivants :

(a) $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2\,, \qquad Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

(b) $P(z) = z^3 - z^2 + 2 \quad$ et $\quad Q(z) = z^3 - i(z+1) + 1$.

Trouver les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ vérifiant la relation du théorème de Bezout:

$$D(x) = A(x)\,P(x) + B(x)\,Q(x)\,.$$

oblème récréatif: Trouver $x > 0$, tel que

$$5 - x^2 = \sqrt{5 - x}.$$

Solutions

S1 Sont des idéaux: I, M, N.

S3 (a) 1 (b) -5

S4 (a) $Q(x) = 2x^2 + 3x + 11,\ R(x) = 25x - 5$
(b) $Q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3,\ R(x) = 5$
(c) $Q(x) = x^2 + 2xy + 2y^2,\ R(x) = 0$

S5 (a) $\text{PGCD} = 1$ (b) $\text{PGCD} = x^2 + 2x + 3$

S6 (a) $D(x) = x^2 - 2,\ A(x) = -x - 1,\ B(x) = x + 2$
(b) $D(x) = z^2 - i(z+1) - 1,\ A(x) = -1,\ B(x) = 1$