Série 13

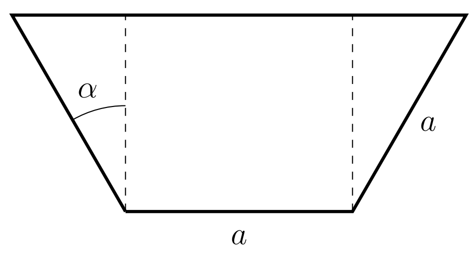
1. A l'aide d'une feuille de carton carrée de côté a , on construit une boîte rectangulaire ouverte en découpant des carrés sur les angles et en pliant les rebords du domaine ainsi obtenu.

Comment faut-il couper la feuille pour que le volume de la boîte soit maximum ?

2. On considère le trapèze isocèle décrit ci-contre et défini par les grandeurs $a > 0$ et $\alpha \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

La valeur de a est fixe, mais α est variable.

Pour quelle valeur de α l'aire du trapèze est-elle maximale ?



3. Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

a) $a(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$,

b) $b(x) = x + \sqrt{1-x}$,

c) $c(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$,

d) $d(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$,

e) $e(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}$,

f) $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|}$.

4. Trouver sur la courbe d'équation $4x^3 + y^3 = 1$ le point P du premier quadrant tel que l'aire du triangle déterminé par la tangente à la courbe en P et les axes de coordonnées soit minimum.

Réponses de la série 13

1. Le volume est maximum lorsque la hauteur de la boîte vaut $h = \frac{a}{6}$.

2. L'aire du trapèze est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

3. a) $D_a = \mathbb{R}$, $(-2\,;\,16)$ maximum à tangente horizontale, $(1\,;\,-11)$ minimum à tangente horizontale.

b) $D_b = \left]-\infty\,;\,1\right]$, $(\frac{3}{4}\,;\,\frac{5}{4})$ maximum à tangente horizontale, $(1\,;\,1)$ minimum à demi-tangente verticale (borne de D_b).

c) $D_c = \mathbb{R} - \{-1\}$, $(1\,;\,0)$ minimum (point anguleux de demi-tangentes de pente $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$).

d) $D_d = \mathbb{R}$, $(\frac{1}{8}\,;\,-\frac{1}{4})$ minimum à tangente horizontale, $(0\,;\,0)$ point à tangente verticale (sans extremum).

e) $D_e = \mathbb{R}$, $(1\,;\,\sqrt[3]{4})$ maximum à tangente horizontale, $(3\,;\,0)$ minimum (point de rebroussement), $(0\,;\,0)$ point à tangente verticale (sans extremum).

f) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, $(-2\,;\,0)$ minimum (point de rebroussement).

4. $P\left(\frac{1}{2}\,;\,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.