Physique
Semestre d'automne 2018

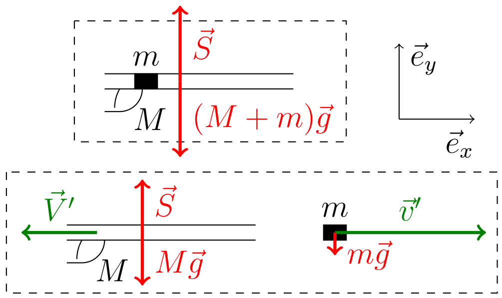
Simon Bossoney
Guido Burmeister
moodle.epfl.ch

Corrigé 5

Exercice 1

Le recul d'une arme est la vitesse qu'elle a acquise une fois que le projectile a été tiré.
Le recul a pour origine la force que le projectile exerce sur l'arme, égale et opposée à la force que l'arme exerce sur le projectile.
Il convient de choisir l'objet formé de l'arme et du projectile.

Remarque : on négligera les frottements dus à l'air et le mouvement des particules de poudre...



Objet : M et m

Forces : poids, soutien

Newton :

$$(M+m)\vec{g}+\vec{S}=\dot{\vec{P}}=(M+m)\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_x$, avant, pendant et après le tir la somme des forces (extérieures) est nulle. La quantité de mouvement horizontale est donc conservée :

$$P_x=\text{cte}\,.$$

Selon $\vec{e}_y$, avant et pendant le tir, les forces s'annulent. Après le tir, le projectile est en chute libre... sans influence sur le recul.
Exploiter la projection selon $\vec{e}_x$.
Selon $\vec{e}_x$,

- Avant le tir,
$$P_x=MV_x+mv_x=0+0=0\,.$$
- après le tir,
$$P'_x=MV'_x+mv'_x\,.$$

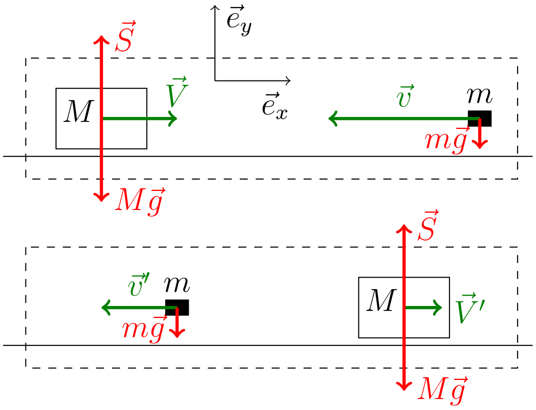
Ainsi, la conservation de la quantité de mouvement horizontale donne

$$MV'_x+mv'_x=0\Longrightarrow V'_x=-\frac{mv'_x}{M}=-\frac{4\,\mathrm{g}\cdot 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{600\,\mathrm{g}}=-2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Remarque : comme $V'_x<0$, la vitesse de recul est opposée à $\vec{e}_x$ (choisi de même sens que la vitesse de sortie $\vec{v}'$ du projectile).

Exercice 2

Les forces existant entre la balle et le wagonnet sont difficiles à décrire. En considérant comme objet la balle et le wagonnet, ce sont des forces internes.



Objet : M et m

Forces : poids, soutien

Newton :

$$(M+m)\vec{g}+\vec{S}=\dot{\vec{P}}=(M+m)\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_x$, avant, pendant et après le choc la somme des forces (extérieures) est nulle. La quantité de mouvement horizontale est donc conservée :

$$P_x = \text{cte}\,.$$

Selon $\vec{e}_y$, pendant le choc, les forces s'annulent. Avant et après le choc, la balle est en chute libre... sans influence sur le mouvement horizontal.
Exploiter la projection selon $\vec{e}_x$.
Selon $\vec{e}_x$,

- Avant le choc,
$$P_x = MV_x + mv_x$$
avec $V_x > 0$ et $v_x < 0$.
- après le tir,
$$P'_x = MV'_x + mv'_x$$
avec $v'_x < 0$.

Ainsi, la conservation de la quantité de mouvement horizontale donne

$$MV'_x + mv'_x = MV_x + mv_x$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow V'_x &= \frac{MV_x + mv_x - mv'_x}{M}\\ &= \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot 1.2\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 800\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 200\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1\,\mathrm{kg}}\\ &= -1.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}.\end{aligned}$$

Remarque : comme $V'_x < 0$, la vitesse du wagonnet a changé de sens !

Exercice 3

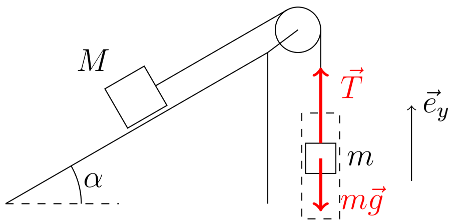
L'athlète peut être considéré comme un système formé de plusieurs parties (épaules, bassin, jambes). On étudie donc le mouvement de ces différentes parties, ainsi que celui du centre de masse.
L'athlète doit faire en sorte que l'ensemble de son corps passe au-dessus de la barre.

Nous allons admettre que le centre de masse du sauteur debout se trouve à 100 cm du sol. Grâce à sa détente, l'athlète parvient donc à faire atteindre à ce dernier une hauteur maximale de 100 cm + 80 cm = 180 cm.
Cette hauteur maximale de 180 cm n'est pas incompatible avec un saut réussi à 210 cm. En effet, l'athlète utilise la souplesse de son corps pour passer d'abord les épaules par-dessus la barre, le bassin et les jambes étant encore sous la barre. C'est ensuite au tour

du bassin, les épaules et les jambes étant sous la barre, et enfin des jambes, les épaules et le bassin étant sous la barre. De cette manière, le sauteur franchit la barre à 210 cm bien que son centre de masse reste en permanence en dessous de cette hauteur !

Exercice 4

Sur un dessin, on indique les éléments concernant l'objet considéré m .



Objet : m

Forces : poids, tension

Newton :

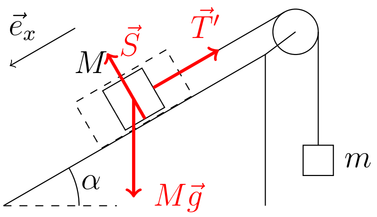
$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_m \, .$$

Remarque : il n'y a pas de mouvement horizontal.

Selon $\vec{e}_y$:

$$-mg + T = ma_m \, .$$

Remarque : il n'y a qu'une équation pour deux inconnues.
Le mouvement de m est lié à celui de M . Il convient alors de considérer l'objet M .



Objet : M

Forces : poids, tension, soutien

Newton :

$$M\vec{g} + \vec{T}' + \vec{S} = M\vec{a}_M \, .$$

Remarque : il n'y a pas de mouvement normal au plan incliné.

Selon $\vec{e}_x$:

$$Mg\sin\alpha - T' = Ma_M \, .$$

Remarque : il n'y a qu'une équation pour deux inconnues.
La liaison entre m et M s'exprime à deux niveaux :

- dans la norme de la tension (le fil transmet la tension en conservant la norme et en changeant la direction)
- dans la relation géométrique entre les mouvements de m et M (vitesse et donc accélération).

La tension est de même norme dans tout le fil :

$$||\vec{T}|| = ||\vec{T}'|| \, .$$

Si M avance avec une vitesse v_M selon $\vec{e}_x$, m avance avec une vitesse v_m égale selon $\vec{e}_y$:

$$v_m = v_M \quad \forall \, t \, .$$

Il en est donc de même pour les accélérations :

$$a_m = a_M \quad \forall \, t \, .$$

Ecrire et résoudre le système d'équations.
Notons T la norme de la tension dans le fil,

$$T = ||\vec{T}|| = ||\vec{T}'||$$

et a l'accélération de m selon $\vec{e}_y$,

$$a = a_m = a_M \, .$$

Ainsi

$$\begin{cases} -mg + T &= ma \\ Mg \sin\alpha - T &= Ma \, . \end{cases}$$

Par addition membre à membre, nous éliminons T :

$$-mg + Mg\sin\alpha = ma + Ma \Longrightarrow a = \frac{M\sin\alpha - m}{M+m}\, g \, .$$

Nous trouvons T soit en remplaçant a dans l'une des équations, soit en amplifiant et additionnant les deux équations comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl|l} -mg + T &=& ma & \cdot M \\ Mg \sin\alpha - T &=& Ma & \cdot(-m) \end{array} \right.$$

d'où

$$-mMg - mMg\sin\alpha + (M+m)T = 0 \Longrightarrow T = \frac{mMg(1+\sin\alpha)}{M+m} \, .$$

Remarque :

- si $M\sin\alpha > m$, $a = a_m = a_M > 0$ et l'accélération de m est vers le haut et celle de M vers le bas.
- si $M\sin\alpha = m$, $a = a_m = a_M = 0$ et les accélération de m et de M sont nulles : repos ou mouvement rectiligne uniforme.
- si $M\sin\alpha < m$, $a = a_m = a_M < 0$ et l'accélération de m est vers le bas et celle de M vers le haut.
- pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nous retrouvons un exercice déjà fait.

Dans tous les cas, la norme de la tension est bien positive !

Exercice 5

Avec ou sans raquettes, le poids de la personne est le même. La grandeur physique qui intervient ici est la pression car celle-ci fait également intervenir la surface de contact entre la personne et la neige.
Imaginons une personne de masse m se tenant debout sur un sol horizontal recouvert de neige. La personne exerce sur la neige une pression moyenne donnée par

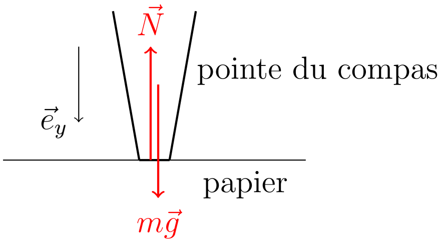
$$p = \frac{mg}{S} \, ,$$

où mg est le poids de la personne et S représente la surface de contact entre la personne et la neige.

Une personne se déplaçant dans la neige avec des raquettes répartit son poids sur une surface plus importante que celle de ses pieds ($S_{\text{raquettes}} > S_{\text{pieds}}$). La pression exercée sur la neige est donc plus faible et la personne s'enfonce moins facilement.

Exercice 6

Il convient de choisir un objet subissant cette pression : la feuille de papier, ou alors, par le principe action=réaction, le compas.
Faire un dessin et y apporter les éléments concernant l'objet choisi.



Objet : compas de masse m

Forces : poids, soutien

Newton :

$$m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}\,.$$

Exploiter la projection selon le repère choisi.
Selon $\vec{e}_y$: $mg - N = 0 \Longrightarrow N = mg\,.$

La pression moyenne exercée par le papier (donc la pression sous la pointe du compas) est la norme du soutien $\vec{N}$ par unité de surface,

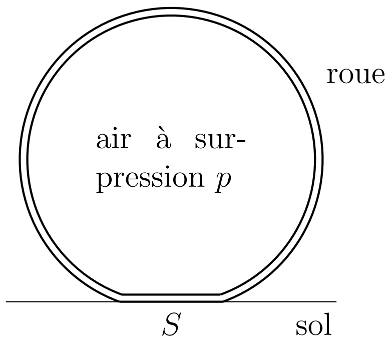
$$p = \frac{N}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{0.1\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}}{0.1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 9.81\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\,.$$

Exercice 7

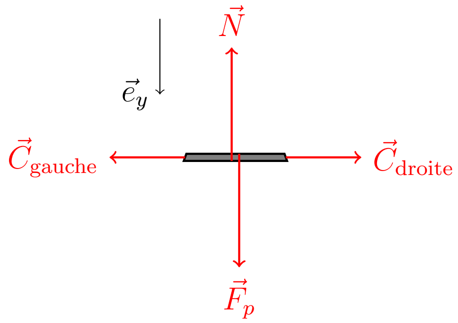
On peut être tenté par une solution rapide : on connaît le poids de la voiture et une pression et “on sait que” $p = \frac{F}{S}\ldots$
On applique la “formule”

$$p = \frac{Mg}{4S} \Rightarrow S = \frac{Mg}{4p} = \frac{10^3\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m\,s}^{-2}}{4\cdot 2\cdot 1.013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = 0.0121\,\mathrm{m}^2.$$

Le résultat est certes correct, mais ne repose sur aucun raisonnement dépassant une application de formule.
Reprenons donc ce problème ! Il convient de choisir un objet où intervient la surface de contact S.
Commencer par le dessin.



Remarque : le produit pS est la force de pression de l’air intérieur exercée sur la partie du pneu en contact avec le sol. Considérons donc cet objet.
Faire un dessin de l’objet considéré : la partie du pneu en contact avec le sol.



Objet : partie du pneu en contact avec le sol, de masse négligeable

Forces : force de pression, soutien, forces de cohésion du pneu

Newton :

$$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{C}_{\text{gauche}} + \vec{C}_{\text{droite}} = \vec{0}\,.$$

Selon $\vec{e}_y$: $pS - N = 0\,.$

Que vaut le soutien $\vec{N}$? Choisissons un autre objet subissant cette force.
Objet : la voiture (reposant sur le sol avec ses 4 roues)

Forces : poids, soutien

Newton :

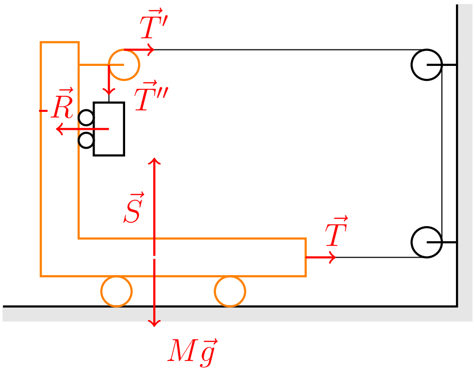
$$M\vec{g} + 4\vec{N} = \vec{0}\,.$$

Selon $\vec{e}_y$: $Mg - 4N = 0\,.$
Résoudre le système d'équations.
En combinant les 2 équations, nous obtenons

$$p = \frac{N}{S} = \frac{Mg}{4S} \Rightarrow S = \frac{Mg}{4p} = \frac{10^3\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{4\cdot 2\cdot 1.013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = 0.0121\,\mathrm{m}^2.$$

Exercice 8

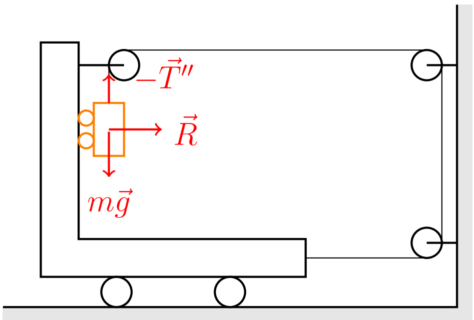
On applique la deuxième loi de Newton à un ou plusieurs objets.
On commence par s'intéresser aux forces s'exerçant sur le grand chariot de masse M :



La deuxième loi de Newton appliquée au grand chariot s'écrit ainsi, sous forme vectorielle,

$$\vec{T} + \vec{T}' + \vec{T}'' - \vec{R} + \vec{S} + M\vec{g} = M\vec{a}_M \,.$$

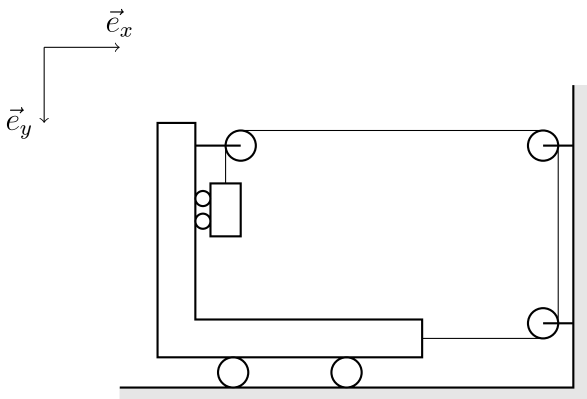
Le petit chariot de masse m subit quant à lui trois forces :



La deuxième loi de Newton appliquée au petit chariot s'écrit donc, sous forme vectorielle,

$$\vec{R} - \vec{T}'' + m\vec{g} = m\vec{a}_m \,.$$

Nous allons choisir un repère et projeter les forces selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:



En supposant le fil inextensible et en négligeant les frottements, nous avons :

$$T'' = T' = T \,.$$

Ainsi, selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} 2T - R &= Ma_M \,, \\ R &= ma_{m,x} \,, \end{aligned}$$

et selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} Mg + T - S &= 0\,, \\ mg - T &= ma_{m,y}\,. \end{aligned}$$

De plus, si M avance de x vers la droite, m avance également de x vers la droite et descend de $y = 2x$. Il en découle que

$$v_M = v_{m,x} = v\,, \quad v_{m,y} = 2v\,,$$

et

$$a_M = a_{m,x} = a\,, \quad a_{m,y} = 2a\,.$$

On obtient

$$a = \frac{2m}{M+5m}\,g\,.$$

Exercice 9

(a) M est en chute libre :

$$\vec{r}_M(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t\,.$$

Selon $\rightarrow \vec{e}_x$ et $\downarrow \vec{e}_y$:

$$x_M(t) = v_0 t \qquad y_M(t) = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Au sol à l'instant t_s :

$$y_M(t_s) = \frac{1}{2}gt_s^2 = h \Rightarrow t_s = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

et

$$x_M(t_s) = v_0 t_s = v_0\sqrt{2\frac{h}{g}} = \sqrt{2\frac{v_0^2 h}{g}} = \sqrt{2\frac{gdh}{g}} = \sqrt{2dh}\,,$$

d'où l'endroit de l'impact

$$\vec{r}_M(t_s) = \begin{pmatrix} \sqrt{2dh} \\ h \end{pmatrix}.$$

(b) m est également en chute libre :

$$\vec{r}_m(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{d} \quad \text{avec } \vec{d} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rencontre à t_r :

$$\begin{aligned} \vec{r}_M(t_r) &= \vec{r}_m(t_r) \\ \frac{1}{2}\vec{g}t_r^2 + \vec{v}_0 t_r &= \frac{1}{2}\vec{g}t_r^2 + \vec{d} \\ \vec{v}_0 t_r &= \vec{d}. \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}_0$ et $\vec{d}$ sont parallèles,

$$t_r = \frac{d}{v_0} = \frac{d}{\sqrt{gd}} = \sqrt{\frac{d}{g}}\,.$$

D'où l'endroit de la rencontre

$$\vec{r}_r = \vec{r}_m(t_r) = \frac{1}{2}\vec{g}t_r^2 + \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{g}\,\frac{d}{g} + \vec{d} = \begin{pmatrix} d \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) L'objet formé des deux masses M et m est en chute libre :

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_{\text{CM},0}t + \vec{r}_{\text{CM},0}\,.$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\text{CM},0} &= \frac{1}{M+m}\big(M\vec{r}_M(0) + m\vec{r}_m(0)\big) = \frac{m\vec{d}}{M+m} = \frac{1}{3}\vec{d} \\
\vec{v}_{\text{CM},0} &= \frac{1}{M+m}\big(M\vec{v}_M(0) + m\vec{v}_m(0)\big) = \frac{M\vec{v}_0}{M+m} = \frac{2}{3}\vec{v}_0\,,
\end{aligned}$$

et donc

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \frac{2}{3}\vec{v}_0 t + \frac{1}{3}\vec{d}.$$

(d) Avant la rencontre, M et m sont en chute libre séparément. Après la rencontre, leur position coïncide avec celle du centre de masse.