Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Analyse III

Microtechnique

Semestre 3

Par
Munier Louis

Cours de M. Cibils

Table des matières

Première partie

Analyse Vectorielle

Chapitre 1

Opérateurs différentiels :

1.1 Préliminaires :

1.1.1 Motivations et Méthodes :

But :

Appliquer les règles de l'analyse au calcul vectoriel pour dériver des vecteurs.

Méthodes :

Mises en place au 19^e siècle.

1.1.2 Rappels, Notations et Terminologie :

- Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ on note $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de nombres réels.

  Pour $n = 2$ on écrit $(x_1, x_2) = (x, y)$.
  Pour $n = 3$ on écrit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Remarque : x ne désigne plus le couple de $\mathbb{R}^2$ ou le triplet de $\mathbb{R}^3$ mais sa première composante.

- Une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$f : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

  qui dépend de plusieurs variables $x_1, x_2, ..., x_n$ est appelée un champ scalaire.

  Pour $k \in \mathbb{N}$ on écrit $f \in C^k(\Omega)$ si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues sur le domaine où est décrit la fonction : Ω.

- Une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$F : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{avec} \quad F_i : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)) \qquad x \mapsto F_i(x) \text{ pour } i = 1, 2, ..., n$$

  est appelé un champ vectoriel.
  Pour $k \in \mathbb{N}$ on écrit $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $F_i \in C^k(\Omega)$ pour $i = 1, ..., n$

Remarque : un champ vectoriel F est définit par la donnée de n champs scalaires.

$$\{F_i\}_{i=1}^{n}$$

- L'opérateur différentiel vectoriel "nabla", noté ∇, et définit par

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Il a vocation à agir sur des champs scalaires ou vectoriels.

1.2 Définition :

1.2.1 Le Gradient :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et
$$f: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
Un champ scalaire tel que $f \in C^1(\Omega)$. Le gradient de f, noté grad$f$, est définit par :

$$\text{grad} f(x) = (\nabla f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right)$$

On dit que c'est le produit de l'opérateur ∇ et du champ scalaire f.

Remarque 1 : comme grad$f(x) \in \mathbb{R}$ alors grad$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définit un champ vectoriel.

Remarque 2 :
Pour $n = 2$ on a $f = f(x, y)$ et grad$f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$
Pour $n = 3$ on a $f = f(x, y, z)$ et grad$f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

1.2.2 La Divergence :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et
$$F: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$$
un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La divergence de F, notée div$F$, est définie par :

$$\text{div} F(x) = (\nabla \cdot F)(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

On dit que c'est le produit scalaire de l'opérateur ∇ et du champ vectoriel F.

Remarque : comme div$F(x) \in \mathbb{R}$ alors div$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.

Pour $n = 2$ on a $F = F(x, y) = F(F_1(x, y), F_2(x, y))$ et div$F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$
Pour $n = 3$ on a $F = F(x, y, z) = F(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ et div$F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

1.2.3 Le Rotationnel :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et
$$F: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$$
un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Le rotationnel de F, noté $\text{rot}F$, est défini par

Lorsque $n = 2$
$$\text{rot}F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

où $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Lorsque $n = 3$
$$\begin{aligned} rotF(x,y,z) &= (\nabla \wedge F)(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

On dit que c'est le produit vectoriel de l'opérateur ∇ et du champ vectoriel F.

Remarque 1 :
Procédé mnémotechnique de calcul (notion de déterminant) :
$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque 2 :
pour $n = 2$ $\text{rot}F(x,y) \in \mathbb{R}$ et $\text{rot}F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.
pour $n = 3$ $\text{rot}F(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\text{rot}F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définit un champ vectoriel.

1.2.4 Le Laplacien :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et
$$f: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
un champ scalaire tel que $f \in C^2(\Omega)$. Le Laplacien de f, noté Δf, est défini par :
$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

Remarque : comme $(\Delta f)(x) \in \mathbb{R}$ alors $\Delta f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.
Pour $n = 2$ on a $f = f(x,y)$ et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
Pour $n = 3$ on a $f = f(x,y,z)$ et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

1.3 Exemples :

Exemple 1: Calcul de gradient
Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2y^3\sin(z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) \\ &= \big(2xy^3\sin(z^2), 3x^2y^2\sin(z^2), 2zx^2y^3\cos(z^2)\big) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 2: Calcul de divergence
Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = \big(x^2 - e^y, \sin(xz), y^2e^{2xz}\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div} F(x,y,z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) \\ &= 2x + 0 + 2xy^2e^{2xz} \\ &= 2x(1 + 2y^2e^{2xz}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 3: calcul de rotationnel
Soit

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = \big(\sin y, e^{xyz}, z^2\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot} F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & e^{xyz} & z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(e^{xyz} \\ \frac{\partial}{\partial z}(\sin y) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 - xye^{xyz} \\ 0 - 0 \\ yze^{xyz} - \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xye^{xyz} \\ 0 \\ yze^{xyz} - \cos y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Exemple 4: Calcul de Laplacien
Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2yz^2 - z^3 + \sin(3x) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^2yz^3+\sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz^2+3\cos(3x)) \\
&= 2yz^2 - 9\sin(3x) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^2yz^3+\sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^3) \\
&= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x^2yz^3+\sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2yz^2) \\
&= 6x^2yz
\end{aligned}$$

$$\Delta f(x,y,z) = 2yz^2 - 9\sin(3x) + 6x^2yz \in \mathbb{R}$$

1.4 Formules de Différentiation :

1.4.1 Résultats importants :

Théorème :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soient un champ scalaire $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \in C^2(\Omega)$ et un champ vectoriel $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ alors

1. div grad $f = \Delta f$ pour tout entier $n > 1$.
2. pour $n = 2$ on a rot grad $f = 0(\in)\ \mathbb{R}$.
3. pour $n = 3$ on a rot grad$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ et div rot $F = 0$ $(\in \mathbb{R}^n)$.

Démonstration: *exercice 4 série 1*

1.4.2 Autres Formules :

exercice 5 série 1

Chapitre 2

Intégrales curvilignes et champs conservatifs :

2.1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$:

2.1.1 Définitions :

Soit $n \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$

Définition 1:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple et régulière, s'il existe un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction

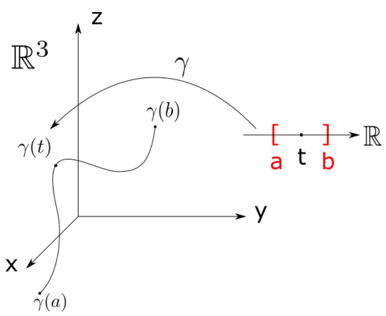
$$\gamma : \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$$

telle que :

- $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \exists t \in [a, b]$ avec $x = \gamma(t)\}$ Au plus une pré-image
  $\longrightarrow$ implique simple
- γ est injective sur $[a, b[$: $\forall t_1, t_2 \in [a, b[$ avec $t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
- $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
- $\|\gamma'(t)\| \overset{\text{déf}}{=} \left[\gamma'(t_1)^2 + \gamma'(t_2)^2 + \cdots + \gamma'(t_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \qquad \forall t \in [a, b]$
  $\longrightarrow$ implique régulière.

Remarque s :

1. γ s'appelle une paramétrisation de Γ par $t \in \mathbb{R}$
2. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$ est le vecteur "position" sur Γ à "l'instant" t.
3. $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), ..., \gamma_n'(t))$ est le vecteur tangent (vecteur "vitesse") à Γ au point $\gamma(t)$
4. Illustration dans $\mathbb{R}^3$



Définition 2:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière fermée si en plus $\gamma(a) = \gamma(b)$ (possible car injective sur $[a, b[$)

Définition 3:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière par morceau s'il existe $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k$ des courbes simples régulières telles que :

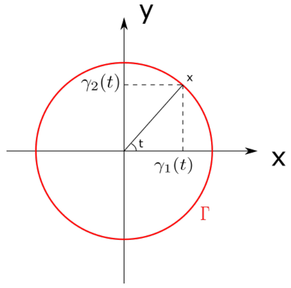
$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$$

2.1.2 Exemples :

Exemple 1:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Illustration dans $\mathbb{R}^3$



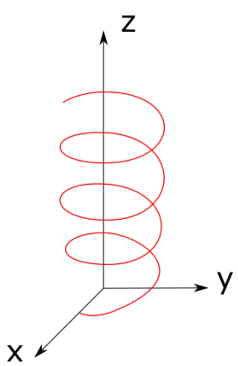
Γ : cercle de rayon $R = 1$
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\|\gamma'(t)\| = \left[(-\sin t)^2 + (\cos t)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0 \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$\longrightarrow$ régulière et simple

Exemple 2:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & [0, 6\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto \gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t) \end{aligned}$$

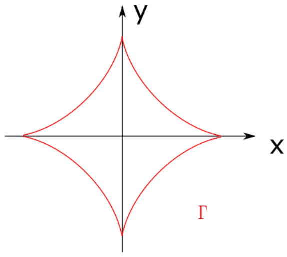


Γ : hélice circulaire dans $\mathbb{R}^3$
$\gamma'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4)$

$$\|\gamma'(t)\| = (9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16)^{\frac{1}{2}} = 5 \neq 0 \qquad \forall t \in [0, 6\pi]$$

Exemple 3:

$$\gamma : \quad [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$



Γ : astroïde dans $\mathbb{R}^2$
$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$

$$\|\gamma'(t)\| = \left[9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t\right]^{\frac{1}{2}} = [9\cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 3\|\cos t, \sin t\|$$

Courbe non régulière car $\|\gamma'(t)\|^2 = 0$ si $t = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

2.2 Intégrales curvilignes :

But : Définir la notion d'intégrale le long d'une courbe Γ.

2.2.1 Définitions :

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière de paramétrisation :

$$\gamma : \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \gamma(t)$$

Définition 1: Soit f un champ scalaire continu défini sur la courbe.

$$f : \quad \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

L'intégrale de f le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma f \; dl \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| \; dt$$

Remarque : On calcule la longueur de la courbe Γ en choisissant $f = 1$ (champ scalaire constant égal à 1 $\forall x \in \mathbb{R}^n$). On a

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_\Gamma \; dl = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt \qquad \textit{exercice 1 série 2}$$

Définition 2: Soit

$$\begin{aligned} F: \quad & \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)) \end{aligned}$$

Un champ vectoriel continu.

L'intégrale de F le long de Γ est définie par :

$$\int_\Gamma F \cdot dl \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\right]\ dt$$

Remarque : Cette intégrale donne le travail du champ F le long de la courbe Γ
exercice 5 série 2.

Définition 3: Si Γ est une courbe simple régulière par morceaux alors

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \quad \text{et} \quad \int_\Gamma f\ dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f\ dl \quad \text{et} \quad \int_\Gamma F \cdot dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot dl$$

2.2.2 Exemples :

Exemple 1:

Calculer $\int_\Gamma f\ dl$ pour

a) La fonction suivante :

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2} \end{aligned}$$

et la courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ paramétrée par

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \tfrac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (1,t)$ et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f\ dl &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}\sqrt{1+t^2}\ dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t^2(1+t^2)}\sqrt{1+t^2}\ dt = \int_0^1 t(1+t^2)\ dt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) La fonction suivante :

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = x \end{aligned}$$

et la courbe $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x \text{ pour } x \in [0,1]\right\}$
Paramétrisation :

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto \gamma(t) = (t, \cosh t) \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$ et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$. Donc

$$\int_\Gamma f \ dl = \int_0^1 f\left(\gamma(t)\right) \|\gamma'(t)\| \ dt = \int_0^1 t \cdot \cosh t \ dt$$

On pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v'(t) &= \cosh t \\ u'(t) &= 1 & v(t) &= \sinh t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{pp}}{=} t \sinh t\Big|_0^1 - \int_0^1 \sinh t \ dt = \sinh 1 - \cosh t\Big|_0^1 \\ &= \sinh 1 - \cosh 1 + 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} + 1 \\ &= -\frac{1}{e} + 1 \end{aligned}$$

Exemple 2: Calculer $\int_\Gamma F \cdot dl$ pour

a) La fonction suivante :

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = (x,z,y) \end{aligned}$$

et la courbe Γ paramétrée par

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ et

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t) \ dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \ dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \ dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t) \ dt = \frac{1}{4}\cos(2t)\Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

b) La fonction suivante :

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = (x^2, y^3, z^2) \end{aligned}$$

et la courbe $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^x \text{ et } z = x \text{ pour } x \in [0,1]\right\}$

Paramétrisation de Γ :

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto \gamma(t) = (t, e^t, t) \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (1, e^t, 1)$ et donc

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot dl &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_0^1 (t^2, e^{3t}, t^2) \cdot (1, e^t, 1)\ dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + e^{4t} + t^2)\ dt = \int_0^1 (2t^2 + e^{4t})\ dt \\ &= \frac{2t^3}{3} + \frac{e^{4t}}{4}\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5+3e^4}{12} \end{aligned}$$

Exemple 3: Calculer la longueur du cercle Γ de rayon R centré à l'origine

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2\right\}$$

Paramétrisation de Γ :

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,2\pi] \longrightarrow \Gamma \\ & t \mapsto (R\cos t, R\sin t) \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = R$
Donc la longueur vaut

$$\Gamma = \int_\Gamma dl = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\ dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

Autres exercices : *exercices 2,3 et 4 série 2*

2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel :

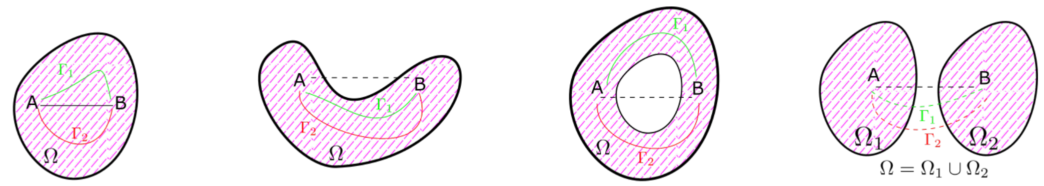
2.3.1 Notions de Topologie :

Définition 1:
Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $A \in \Omega$ et tout $B \in \Omega$ le **segment de droite** joignant A à B est entièrement contenu dans Ω.

Définition 2:
Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **connexe** si pour tout $A \in \Omega$ et tout $B \in \Omega$ il existe une **courbe** Γ continue joignant A et B qui est entièrement contenue dans Ω.

Définition 3:
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **simplement connexe** s'il est connexe et si deux courbes simples Γ_1 et Γ_2 quelconques contenues dans Ω joignant A et B peuvent être déformée continûment l'une en l'autre sans quitter Ω.

Illustrations dans $\mathbb{R}^2$:



convexe	pas convexe	pas convexe	pas convexe
connexe	connexe	connexe	pas connexe
simplement connexe	simplement connexe	pas simplement connexe	pas simplement connexe

Interprétation intuitive :

Un ensemble simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble sans trous.

Remarque : On a toujours :

$$\Omega \text{ convexe } \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \Omega \text{ simplement connexe } \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \Omega \text{ connexe}$$

2.3.2 Caractérisation des champs conservatifs :

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$F : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto F(x) \end{array}$$

un **champ vectoriel**. On dit que F **dérive d'un potentiel sur** Ω s'il existe un champ **scalaire**

$$f : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

appartenant à $C^1(\Omega)$ tel que

$$F(x) = \mathrm{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \qquad \forall x \in \Omega$$

Dans ce cas F est appelé un **champ conservatif** et f est appelé un **potentiel de** F.

Remarque : Si un potentiel de F existe alors il est défini à une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ près car $\mathrm{grad}(f + \alpha) = \mathrm{grad} f = F$ et donc $f + \alpha$ est aussi un potentiel de F.

2.3.3 Résultats Importants :

Théorème 1 : fondamental

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et un champ vectoriel

$$F: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$$

tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

a) Condition nécessaire : **si** F dérive d'un potentiel sur Ω **alors :**

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall i, j = 1, ..., n \text{ et } \forall x \in \Omega \tag{2.1}$$

b) Condition suffisante : **si** 2.1 a lieu et **si** Ω et **simplement connexe** alors F dérive d'un potentiel sur Ω

Remarque 1 :

La condition 2.1 du théorème 1 est une condition **nécessaire**, mais elle **n'est pas suffisante** pour garantir l'existence d'un potentiel.

Pour la rendre **suffisante** il faut imposer que Ω soit **simplement connexe** (en particulier si Ω est convexe, la condition 2.1 est suffisante).

Remarque 2 :

La condition 2.1 est équivalente à dire que rot$F$ est nul.

En effet :

- pour $n = 2$ $\quad F = (F_1, F_2) \quad x = (x_1, x_2)$ et 2.1 signifie :

$$i = 1, j = 2 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \iff \text{rot}F \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

- pour $n = 3$ $\quad F = (F_1, F_2, F_3) \quad x = (x_1, x_2, x_3)$ et 2.1 signifie :

$$\begin{array}{ll} i = 1, j = 2 & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ i = 1, j = 3 & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ i = 2, j = 3 & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{array} \iff \text{rot}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe et soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Alors les affirmations suivantes sont **équivalentes**

1. F dérive d'un potentiel.
2. $\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$ pour **toutes** les courbes simples régulières (par morceaux) Γ_1 et $\Gamma_2 \subset \Omega$ joignant deux points A et B **quelconques** de Ω.
3. $\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ pour **toute** courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) $\Gamma \subset \Omega$.

Autrement dit : Le champ vectoriel F dérive d'un potentiel $\iff$ Le travail de F est indépendant de la courbe choisie pour aller de A à B $\iff$ Le travail de F le long de n'importe quelle courbe **fermée** est nul.

Résumé de l'utilisation des théorèmes 1 et 2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et un champ vectoriel $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ avec $n = 2$ ou $n = 3$.

a) Si $\text{rot}F \neq 0$ sur Ω, alors F ne dérive pas d'un potentiel.

b) Si $\text{rot}F = 0$ sur Ω simplement connexe alors F dérive d'un potentiel.

c) Si $\text{rot}F = 0$ sur Ω qui **n'est pas** simplement connexe alors le théorème 1 ne donne **aucune** informations. *(voire exercice 3 série 3)*

d) Si on trouve une courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$ telle que $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ alors F ne dérive pas d'un potentiel.

Remarque : Attention, $\int_\Gamma F \cdot dl = 0$ pour une courbe fermée $\not\Rightarrow$ F dérive d'un potentiel.

2.3.4 Exemples :

Étudier si le champ F dérive d'un potentiel sur son domaine de définition, si c'est le cas, trouver ce potentiel.

Exemple 1:

$$\begin{aligned} F : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (4x^3y^2, 2x^4y + y) \end{aligned}$$

Domaine de définition : $\Omega = \mathbb{R}^2$ simplement connexe.

$$\begin{aligned} \text{rot}F &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y + y) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) \\ &= 8x^3y - 8x^3y = 0 \qquad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \text{ un potentiel } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ existe tel que } F = \text{ grad} f$$

Pour trouver x, y on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = 4x^3y^2 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = 2x^4y + y \tag{2.3}$$

Équation 2.2 $\Longrightarrow f(x, y) = x^4y^2 + \alpha(y)$ *où $\alpha(y)$ ne dépend que de y, constante pour x.*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4y + \alpha'(y)$$

Équation 2.3 $\Longrightarrow 2x^4y + \alpha'(y) = 2x^4y + y \Longrightarrow \alpha'(y) = y$

$$\alpha(y) = \frac{1}{2}y^2 + \beta \qquad \textit{où la constante } \beta \in \mathbb{R}$$

Le potentiel est donc :

$$f(x,y) = x^4y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \beta \qquad \text{où } \beta \text{ est une constante arbitraire.}$$

Exemple 2:

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) \mapsto F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(-\tfrac{y}{x^2+y^2}, \tfrac{x}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Domaine de définition : $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ pas simplement connexe.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega \end{aligned}$$

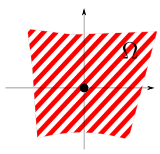
Attention : Ω n'est pas simplement connexe alors le théorème 1 ne donne aucune information.

Avec le théorème 2 on peut montrer que $F \neq \operatorname{grad} f$ sur Ω en trouvant **une** courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$ telle que $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$.

Par exemple, on peut choisir :

Le cercle unité, centré à l'origine.

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \subset \Omega$$



Paramétrisation :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

On a donc

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ F(\gamma(t)) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2(t))\ dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : F ne dérive pas d'un potentiel.

Exemple 3:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = (ye^x \sin z, 1 + e^x \sin z, ye^x \cos z + z) \end{aligned}$$

Domaine de définition : $\Omega = \mathbb{R}^3$ simplement connexe.

$$\mathrm{rot} F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x \sin z & 1 + e^x \sin z & ye^x \cos z + z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

$\implies$ F dérive d'un potentiel f sur Ω tel que $F = \mathrm{grad} f$.
On pose

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z) = ye^x \sin z \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 1 + e^x \sin z \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z) = ye^x \cos z + z \tag{2.6}$$

Équation 2.4 : $\qquad f(x, y, z) = ye^x \sin z + \alpha(y, z)$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^x \sin z + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y, z) = 1 + e^x \sin z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = ye^x \cos z + \frac{\partial \alpha}{\partial z}(y, z) = ye^x \cos z + z$$

$$\implies \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1 \tag{2.7}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = z \tag{2.8}$$

Équation 2.7 :

$$\alpha(y, z) = y + \beta(z) \implies \frac{\partial \alpha}{\partial z}(y, z) = 0 + \beta'(z)$$
$$\beta'(z) = z \implies \beta(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$$

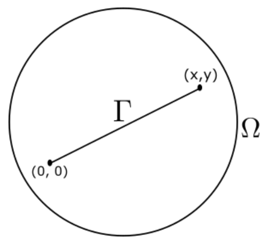
On trouve donc, au final :

$$f(x, y, z) = ye^x \sin z + y + \frac{1}{2}z^2 + C$$

2.3.5 Démonstration du Théorème 1 :

a) Si $F = \mathrm{grad} f \implies \mathrm{rot} F = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad} f = 0$ *voir série 1 exercice 4.1*

b) Esquisse de la preuve dans $\mathbb{R}^2$ lorsque $(0, 0) \in \Omega$ et Ω connexe.



Le segment de droite Γ reliant $(0, 0)$ à (x, y) paramétré par $\gamma(t) = (tx, ty)$ avec $t \in [0, 1]$ et entièrement contenu dans Ω.
On a

$$\gamma'(t) = (x, y) \quad \text{et on définit}$$

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \int_{\Gamma} F\cdot dl = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt \\
&= \int_0^1 (F_1(tx,ty),F_2(tx,ty))\cdot(x,y)\ dt \\
&= \int_0^1 [xF_1(tx,ty)+yF_2(tx,ty)]\ dt
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $\text{rot}F=0$ $\overbrace{\text{on montre que}}^{\textit{exercice 4 série 3}}$ $\frac{\partial\phi}{\partial x}=F_1$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y}=F_2$ c'est-à-dire que $F=\text{grad}\phi$ et donc F dérive du potentiel ϕ.

2.4 Théorème de Green :

Remarque : Tous les résultats de cette section sont formulés dans $\mathbb{R}^2$.

2.4.1 Rappels, notations et définitions :

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

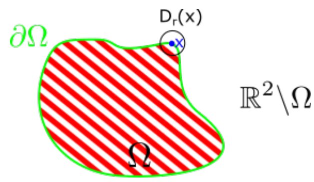
- On note $\partial\Omega$ le bord de Ω

$$\partial\Omega=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\Omega\cap D_r(x)\neq\varnothing \text{ et } \left(\mathbb{R}^2\backslash\Omega\right)\cap D_r(x)\neq\varnothing \quad \forall r>0\right\}$$

où

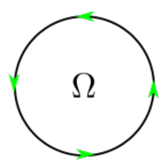
$$D_r(x)=\left\{y\in\mathbb{R}^2:\|y-x\|<r\right\}$$

et le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ centré en x et de rayon r.

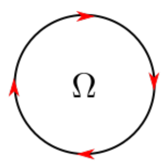


- On note $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ **l'adhérence** de Ω.

Définition 1:
Soit $\Omega\in\mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux). On dit que $\partial\Omega$ est orienté **positivement** *respectivement négativement* si lorsqu'on parcours $\partial\Omega$ on laisse Ω **à gauche** *respectivement à droite.*



$\partial\Omega$ orienté positivement



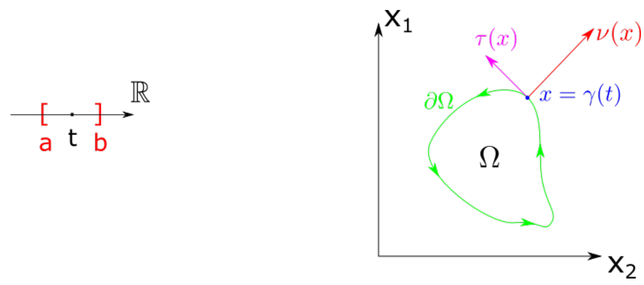
$\partial\Omega$ orienté négativement

Signification de l'orientation positive :

Pour une paramétrisation

$$\begin{aligned}
\gamma:\quad & [a,b]\longrightarrow\partial\Omega \\
& t\mapsto x=\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))
\end{aligned}$$

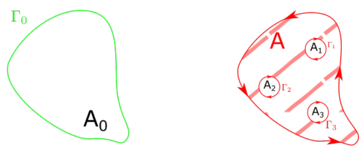
de $\partial\Omega$ le vecteur tangent à $\partial\Omega$ en x est $\tau(x) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ et le vecteur normal à $\partial\Omega$ en x donné par $\nu(x) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ est une normale **extérieure** à Ω



Définition 2:

On dit qu'un ouvert borné $A \subset \mathbb{R}^2$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $A_0, A_1, ..., A_m \subset \mathbb{R}^2$ tels que

- $\partial A_j = \Gamma_j$ pour $j = 0, 1, ..., m$ sont des courbes simples fermées régulière (par morceaux).
- $\overline{A}_j \subset A_0$ pour $j = 1, ..., m$.
- $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing \qquad \forall i, j = 1, ..., m$.
- $A = A_0 \backslash \bigcup_{j=1}^{m} \overline{A}_j$ Illustration typique :



On dit que $\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_m$ est orienté positivement si le sens de parcours sur chaque Γ_j pour $j = 0, ..., m$ laisse le domaine A à gauche. C'est-à-dire que le bord Γ_0 est orienté **positivement** (le parcours laisse A_0 à gauche) tandis que les bords $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ **négativement** (le parcours laisse $A_1, A_2, ..., A_m$) à droite.

2.4.2 Énoncé du Théorème de Green :

Théorème de Green :

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord est **orienté positivement**.
Soit

$$F : \quad \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y)$$

un champ vectoriel tel que $F \subset C^1\left(\overline{A}, \mathbb{R}^2\right)$. Alors

$$\underbrace{\iint\limits_A \mathrm{rot} F(x, y)\, dxdy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} = \underbrace{\int\limits_{\partial A} F \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel}}$$

Remarque 1 :

Le théorème de Green permet de remplacer le calcul d'une intégrale double du rot$F$ sur un domaine $A \subset \mathbb{R}^3$ par le calcul d'une intégrale curviligne de F le long du bord ∂A de A.

Remarque 2 : Si F dérive d'un potentiel sur $A \xRightarrow[\text{Th1 §2.3.3}]{} \text{rot}F = 0$ sur $A \xRightarrow[\text{Th. Green}]{} \int \partial AF \cdot dl$

Remarque 3 :

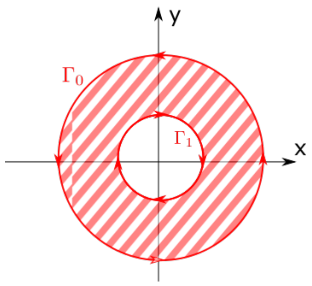
$$\iint\limits_A \underbrace{\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right]}_{\text{définition de rot}F} dxdy = \int\limits_{\partial A} F \cdot dl$$

2.4.3 Exemple :

Exemple : Vérification du théorème de Green.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\} \qquad \text{et} \qquad F(x,y) = (x^2y, 2xy)$$

Illustration du domaine :



Le domaine est bien régulier.

1. Calcul de $\iint\limits_A \text{rot}F(x,y)\ dxdy$

   On a $\text{rot}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = 2y - x^2$. Alors

$$\iint\limits_A \text{rot}F(x,y)\ dxdy = \iint\limits_A (2y - x^2)\ dxdy$$

   On passe en coordonnées polaires, on pose donc, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ et $dxdy = rdrd\theta$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2r\sin\theta - r^2\cos^2\theta) r\ drd\theta \\
&= 2\int_1^2 \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \sin\theta\ d\theta\right]}_{=0} r^2\ dr - \int_1^2 \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta\right]}_{=\pi} r^3\ dr \\
&= -\pi \int_1^2 r^3\ dr = -\left.\frac{\pi}{4}r^4\right|_1^2 = -\frac{\pi}{4}(16-1) = -\frac{15\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int\limits_{\partial A} F \cdot dl$ avec ∂A orienté **positivement**.

   Détermination de ∂A :

$$\begin{aligned}
A = A_0 \backslash \overline{A}_1 \text{ avec } A_0 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\} \text{ et} \\
A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}
\end{aligned}$$

   On a donc comme bord de A.

$$\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ avec } \Gamma_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\} \text{ et } \Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Paramétrisation de ∂A :

$$\Gamma_0 = \{\gamma_0(t) = (2\cos t, 2\sin t) \text{ avec } t \in [0, 2\pi]\}$$
$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in [0, 2\pi]\}$$

On a

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = \int_{\Gamma_0} F \cdot dl \overset{\substack{\gamma_1 \text{ orienté à l'envers} \\ \downarrow}}{-} \int_{\Gamma_1} F \cdot dl$$

Remarque :
Car ∂A doit être orienté positivement, Γ_0 doit être parcouru dans le sens positif (laisser A_0 à gauche) et Γ_1 doit être parcouru dans le sens négatif (laisser A_1 à droite).

D'une part $\gamma_0'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_0(t)) \cdot \gamma_0'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(8\cos^2 t \sin t, 8\cos t \sin t\right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\ dt \\
&= -16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ dt
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ dt &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\ dt \\
&= \frac{1}{8} 2\pi - \frac{1}{8} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 4t\ dt}_{=0} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\ dt = -\left. \frac{1}{3} \cos^3 t \right|_0^{2\pi} = 0$$
$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_0} F \cdot dl = -16 \frac{\pi}{4} = -4\pi$$

D'autre part $\gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t \sin t, 2\cos t \sin t\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\ dt \\
&= -\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\ dt}_{=\pi/4} + 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\ dt}_{=0} = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int\limits_{\partial A} F \cdot dl = -4\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$$

Remarque : Théorème de Green vérifié *autres exemples exercices 1 et 2 série 4.*

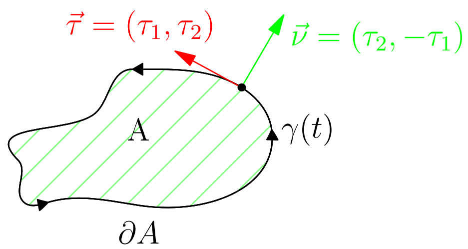
2.4.4 Corollaire du Théorème de Green :

Corollaire du Théorème de Green :

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord ∂A est orienté positivement.
Soit $\nu : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de normales unités extérieures à A.
Soient $F : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1\left(\overline{A}, \mathbb{R}^2\right)$ et $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $f \in C^2\left(\overline{A}\right)$.
Alors :

1. $$\iint\limits_{A} \mathrm{div} F(x,y)\; dxdy = \int\limits_{\partial A} (F \cdot \nu)\; dl$$

2. $$\iint\limits_{A} \Delta f(x,y)\; dxdy = \int\limits_{\partial A} (\mathrm{grad} f \cdot \nu)\;\; dl$$



Si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour $t \in [a,b]$ est une paramétrisation de ∂A alors

$$\vec{\tau} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))}{\|\gamma'(t)\|} = (\tau_1, \tau_2)$$

est le vecteur tangent unité (qui suit l'orientation positive de ∂A)

$$\vec{\nu} = (\tau_2, -\tau_1)$$

est le vecteur normal unité extérieur à A en $\gamma(t)$

$\vec{\nu}$: champ de normal unité extérieures à A

Remarque 1 : Avec $F = (F_1, F_2)$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ l'égalité 1 s'écrit :

$$\underbrace{\iint\limits_{A} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\right]\; dxdy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} = \underbrace{\int\limits_{\partial A} (F_1\nu_1 + F_2\nu_2)\;\; dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ scalaire}}$$

Théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^2$.

Preuve du corollaire : *exercice 1 série 5.*

Exemple : *exercice 3 série 4.*

Chapitre 3

Intégrales de surface :

3.1 Surface dans $\mathbb{R}^3$

- **Nouvelles notations :**
  a) Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ on note $f(x,y) = \big(f^1(x,y), f^2(x,y), f^3(x,y)\big)$ où $f^i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1,2,3$ (indices en haut, repèrent les composantes).
  b) pour une fonction $g(x,y)$ de deux variables on note $\frac{\partial g}{\partial x} = g_x$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = g_y$ (indices en bas repèrent la variable de dérivation).

- **Définition 1:**
  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est appelée une surface **régulière** si
  a) il existe $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et tel que le bord ∂A soit une courbe simple fermée régulière (par morceaux)
  b) il existe une fonction : $\sigma : \quad \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = \big(\sigma^1(u,v), \sigma^2(u,v), \sigma^3(u,v)\big)$$

  avec les propriétés suivantes :
  — $\sigma \in C^1\left(\overline{A}, \mathbb{R}^3\right), \sigma(\overline{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A.
  — le vecteur

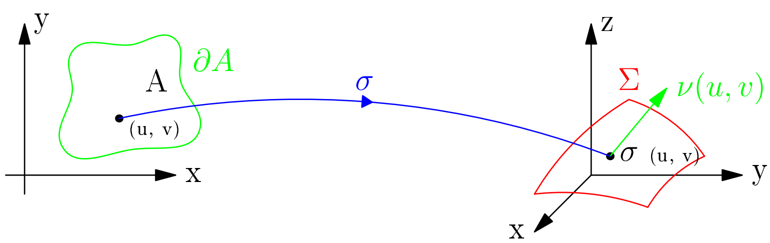
  $$\sigma_u \times \sigma_v \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2\sigma_v^3 - \sigma_u^3\sigma_v^2 \\ \sigma_u^3\sigma_v^1 - \sigma_u^1\sigma_v^3 \\ \sigma_u^1\sigma_v^2 - \sigma_u^2\sigma_v^1 \end{pmatrix}$$

  est tel que $\|\sigma_u \times \sigma_v\| \neq 0$ pour tout $(u,v) \in A$

Remarque 1 : σ s'appelle une **paramétrisation régulière** sur A de la surface Σ.

Remarque 2 : le vecteur $\nu(u,v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ s'appelle la **normale unité** à la surface Σ au point $\sigma(u,v)$.

Remarque 3 : Illustration :



Remarque 4 : Analogie avec les courbes dans $\mathbb{R}^3$:

courbe Γ(§2.1.1)	courbe Σ(§3.1.1)
$\gamma : \quad [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$	$\sigma : \quad \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$
$t \mapsto \gamma(t)$	$(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$
$\gamma([a,b]) = \Gamma$ et γ injective sur $[a,b[$	$\sigma\left(\overline{A}\right) = \Sigma$ et σ injective sur A
$\lVert\gamma'(t)\rVert \neq 0$	$\lVert\sigma_u \times \sigma_v\rVert \neq 0$

Définition 2:

On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière **par morceaux** s'il existe $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_k$ des surfaces régulières telles que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_k$.

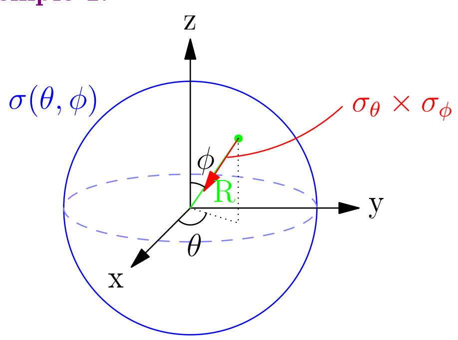
Définition 3:

Une surface régulière (par morceaux) est dite **orientable** s'il existe un champ de normales $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **continu**.

Un tel champ de normales s'appelle une **orientation** de Σ. Une surface orientée par un champ de normales ν est notée (Σ, ν).

3.2 Exemples :

Exemple 1:



Sphère (rayon R)

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$

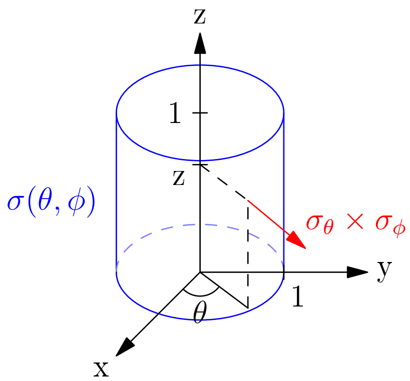
$$\begin{aligned} \sigma : \quad & \overline{A} \longrightarrow \Sigma \\ & (\theta,\phi) \mapsto \left(\sigma^1(\theta,\phi), \sigma^2(\theta,\phi), \sigma^3(\theta,\phi)\right) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) \end{aligned}$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_\phi^1 & \sigma_\phi^2 & \sigma_\phi^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & 0 \\ R\cos\phi\cos\theta & R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\phi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\phi\sin\theta \\ -R^2\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix}$$

$\sigma_\theta \times \sigma_\phi$ est une normale **intérieure** à la sphère.

Exemple 2:



Cylindre (rayon base $R = 1$ et une hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0,1[$

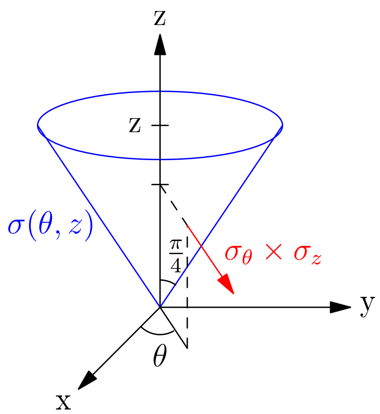
$$\sigma : \quad \overline{A} \longrightarrow \Sigma$$
$$(\theta, z) \mapsto \sigma(\theta, z) = \left(\sigma^1(\theta,z), \sigma^2(\theta,z), \sigma^3(\theta,z)\right) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_z \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_z^1 & \sigma_z^2 & \sigma_z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_\theta \times \sigma_z$ est une normale **extérieure** au cylindre.

Exemple 3:



Cône (angle $\frac{\pi}{2}$ et la hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0,1[$

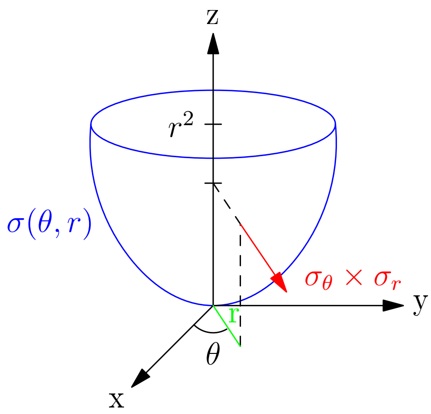
$$\sigma : \quad \overline{A} \longrightarrow \Sigma$$
$$(\theta, z) \mapsto \sigma(\theta, z) = \left(\sigma^1(\theta,z), \sigma^2(\theta,z), \sigma^3(\theta,z)\right) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_z \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_z^1 & \sigma_z^2 & \sigma_z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}$$

$\sigma_\theta \times \sigma_z$ est une normale **extérieure** au cône.

Exemple 4:



Paraboloïde symétrique (hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

$$\begin{aligned} \sigma : \quad & \overline{A} \longrightarrow \Sigma \\ & (\theta, r) \mapsto \left(\sigma^1(\theta, r), \sigma^2(\theta, r), \sigma^3(\theta, r)\right) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\right) \end{aligned}$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_r \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_r^1 & \sigma_r^2 & \sigma_r^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ -r \end{pmatrix}$$

$\sigma_\theta \times \sigma_r$ est une normale **extérieure** au paraboloïde.

Autre exemple : Tore exercice 2 série 5.

3.3 Intégrale de Surface :

But :

Définir une intégrale sur une surface Σ.

3.3.1 Intégrale de champs scalaires :

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière paramétrée par

$$\begin{aligned} \sigma : \quad & \overline{A} \longrightarrow \Sigma \\ & (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \end{aligned} \qquad \text{et soit} \qquad \begin{aligned} f : \quad & \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

un champ scalaire **continu**.

L'intégrale de Surface :

$$\iint_\Sigma f \, ds \overset{\text{déf}}{=} \iint_A f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv$$

Remarque 1 : On calcule l'aire de la surface Σ en posant $f = 1$ (champ scalaire constant égal à 1) :

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_\Sigma ds = \iint_A \underbrace{\|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv}_{\text{"élément d'aire"}}$$

Remarque 2 : Par exemple si $f(x)$ est la densité de masse au point x alors :

$$\text{masse}(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} f \ ds$$

Remarque 3 : Pour une surface régulière par morceaux $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \sum_i$ on définit :

$$\iint\limits_{\Sigma} f \ ds = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Sigma_i} f \ ds$$

Remarque 4 : Analogie avec l'intégrale curviligne d'un champ scalaire g le long de Γ (§2.2.1 chapitre 2)

$$\gamma : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \Gamma \\ t \mapsto \gamma(t) \end{array} \qquad \text{et soit} \qquad g : \begin{array}{l} \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) \end{array}$$

$$\int\limits_{\Gamma} g \ dl \overset{\text{déf}}{=} \int\limits_{a}^{b} g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \ dt$$

3.3.2 Exemples :

Exemple 1:

Soit

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

Calculer l'aire de Σ

Paramétrisation sphère de rayon R *voir exemple 1 §3.2.1*

$$A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[\qquad \sigma(\theta, \phi) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R\cos\phi)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi = \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2\phi \cos\theta \\ -R^2 \sin^2\phi \sin\theta \\ -R^2 \sin\phi \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\sigma_\theta \times \sigma_\phi\| &= \sqrt{R^2 \sin^2\phi}\sqrt{R^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + R^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + R^2 \cos^2\phi} \\ &= R^2 |\sin\phi| = R^2 \sin\phi \qquad \text{car } \phi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Sigma) &= \iint\limits_{\Sigma} ds = \iint\limits_{A} \|\sigma_\theta \times \sigma_\phi\| \ d\theta d\phi = R^2 \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{0}^{\pi} \sin\phi \ d\phi \\ &= 2\pi R^2 [-\cos\phi]\big|_0^{\pi} = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Exemple 2:

Soit
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$
et le champ scalaire $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z$

Calculer l'aire de Σ

Paramétrisation cylindre *voir exemple 2 §3.2.1*

$$A =]0,2\pi[\times]0,1[\qquad \sigma(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_z = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_z\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

On a donc :

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_\Sigma f\ ds = \iint_A f(\sigma(\theta,z))\|\sigma_\theta \times \sigma_z\|\ d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2z)\ dz$$
$$= 2\pi \int_0^1 (1+2z)\ dz = 2\pi\ \left[z+z^2\right]\Big|_0^1 = 4\pi$$

Autres exemples : exercices 1, 2 et 3 série 6.

3.3.3 Intégrales de champs vectorielles :

Définition : Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable paramétrée par :

$$\sigma : \begin{array}{l} \overline{A} \longrightarrow \Sigma \\ (u,v) \mapsto \sigma(u,v) \end{array} \qquad \text{et soit} \qquad F : \begin{array}{l} \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto F(x) \end{array}$$

un champ vectoriel **continu**.

L'intégrale de F sur Σ dans la direction de $\sigma_u \times \sigma_v$ est définie par :

L'intégrale de F sur Σ :

$$\iint_\Sigma F\cdot ds \overset{\text{déf}}{=} \iint_A \left[F(\sigma(u,v))\cdot(\sigma_u \times \sigma_v)\right]\ dudv$$

Avec la **normale unité** $\nu(u,v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ on peut aussi écrire :

L'intégrale de F sur Σ : en passant par la normale

$$\iint_\Sigma F\cdot ds \overset{\text{déf}}{=} \iint_A \left[F(\sigma(u,v))\cdot \nu(u,v)\right]\|\sigma_u \times \sigma_v\|\ dudv$$

Attention : Il faut toujours préciser la direction !

Remarque 1 : L'intégrale $\iint\limits_{\Sigma} F \cdot ds$ s'appelle le **flux** de F à travers la surface Σ dans la direction de ν

Remarque 2 : Pour une surface régulière orientable par morceaux $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Sigma_i$ on définit :

Surface régulière orientable

$$\iint\limits_{\Sigma} F \cdot ds \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Sigma_i} F \cdot ds$$

Remarque 3 : Analogie avec l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel G le long de Γ (§2.2.1)

$$\begin{aligned} \gamma :\quad & [a,b] \longrightarrow \Gamma \\ & t \mapsto \gamma(t) \end{aligned} \qquad \text{et soit} \qquad \begin{aligned} G :\quad & \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x \mapsto G(x) \end{aligned}$$

Analogie avec l'Intégrale Curviligne :

$$\int\limits_{\Gamma} G \cdot dl = \int\limits_{a}^{b} [G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] \ dt$$

3.3.4 Exemples :

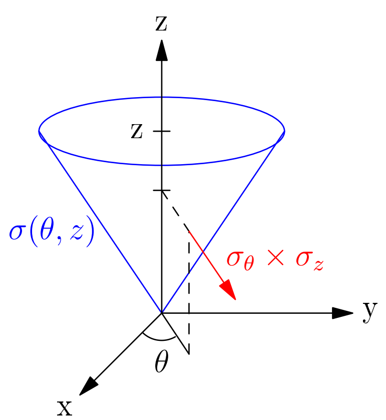
Exemple 1:

Soit

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

et le champ vectoriel $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $F(x,y,z) = (y, -x, z^2)$

Calculer le flux de F à travers Σ dans la direction ascendante.



Paramétrisation cône (exemple 3 §3.1.2)

$$A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$

$$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \text{ et } \sigma_\theta \times \sigma_z = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}$$

Comme $z \in [0,1]$ et $-z < 0$, la normal pointant vers le haut est $-\sigma_\theta \times \sigma_z$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} F \cdot ds &= -\iint_{A} \left[F(\sigma(\theta, z)) \cdot (\sigma_\theta \times \sigma_z) \right] \, d\theta dz \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (z^2 \cos\theta \sin\theta - z^2 \cos\theta \sin\theta - z^3) \, d\theta dz \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (z^3) \, d\theta dz = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"C'est formidable et non pas fort minable, comme dirait un certain Stromae"

Autres exemples : exercices 4 et 5 série 6.

3.4 Théorème de la Divergence :

3.4.1 Motivation :

But

Généralisation du théorème de la divergence de $\mathbb{R}^2$ à des domaines de $\mathbb{R}^3$

Rappel

Théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^2$ *exercice 1 série 5 et corollaire du Théorème de Green §2.4.4*

Théorème de la Divergence :

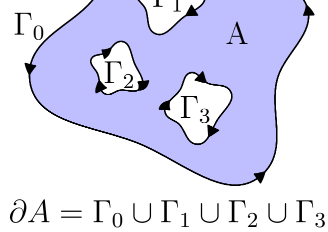
$$\iint_A \operatorname{div} F(x, y) \, dxdy = \int_{\partial A} (F \cdot \nu) \, dl$$

Avec :

$A \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier de bord ∂A orienté positivement.
$\nu : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de normales unités extérieures à A.
$F : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel $\in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^2)$

Motivation

Obtenir un théorème analogue en remplaçant A par un domaine de $\mathbb{R}^3$ et l'intégrale curviligne $\int_{\partial A}$ par une intégrale de surface.



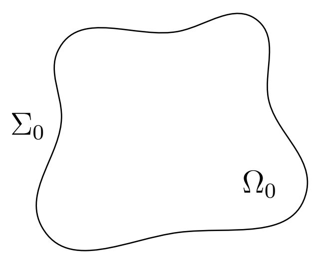
$\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

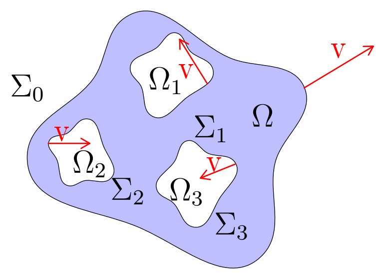
3.4.2 Définitions :

Définition : On a dit qu'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_m \subset \mathbb{R}^3$ tels que :

- $\partial\Omega_j = \Sigma_j$ pour $j = 0, 1, ..., m$ sont des surfaces régulières (par morceaux) orientables avec un champ de normales unités.
- $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0 \qquad \forall j = 1, 2, ..., m$
- $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., m$ avec $i \neq j$
- $\Omega = \Omega_0 \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_j$ possède un champ de normales **extérieures**.

Illustration typique :





$\partial\Omega = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

Champ de normales **extérieures à** Ω lorsqu'on considère les surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_m$. Elles sont **intérieures** par rapport aux ouverts $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m$.

3.4.3 Énoncé du théorème de la divergence :

Théorème de la Divergence :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales **unités extérieures à** Ω défini par $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.
Soit $F : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ défini par $F = (F_1, F_2, F_3)$. Alors

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} F(x, y, z)\ dxdydz = \iint\limits_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\ ds$$

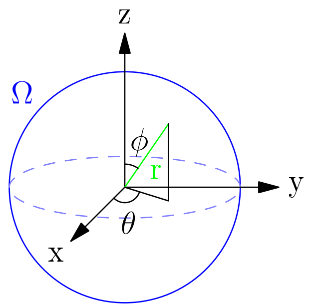
Le théorème de la divergence est la généralisation pour $\mathbb{R}^3$ du théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^2$ (corollaire du théorème de Green §2.4.4)

Explicitement on a :

$$\underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\ dxdydz}_{\text{intégrale triple d'un champ scalaire}} \quad = \quad \underbrace{\iint\limits_{\partial\Omega} (F_1\nu_1 + F_2\nu_2 + F_3\nu_3)\ ds}_{\text{intégrale de surface d'un champ scalaire}}$$

3.4.4 Exemples :

Exemple 1: Vérifier le théorème de la Divergence pour la boule unité.



$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$$

et

$$F(x, y, z) = (xy, y, z)$$

- Calcul de $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}F(x, y, z)\ dxdydz$

  On a :

$$\mathrm{div}F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = y + 1 + 1 = y + 2$$

  On calcul en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}F(x, y, z) dxdydz &= \int_0^1 \int_o^{2\pi} \int_0^{\pi} (r \sin\phi \sin\theta + 2) \underbrace{r^2 \sin\phi}_{|\text{jacobien}|}\ dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^1 r^3\ dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta\ d\theta}_{=0} \int_0^{\pi} \sin^2\phi\ d\phi + 2 \int_0^1 r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \\
&= 4\pi \frac{1}{3}\ r^3\big|_0^1 - \cos\phi|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

- Calcul de $\iint\limits_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\ ds$

$$\partial\Omega = \Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} = \text{sphère unité}$$

  Paramétrisation : $\quad \sigma(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) \qquad A =]0, 2\pi[\times]o, \pi[$

  voir exemple §3.1.2

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi = \begin{pmatrix} -\sin^2\phi\cos\theta \\ -\sin^2\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix} \text{ est une normale } \textbf{intérieure} \text{ à } \Omega$$

  Normale **unité extérieure** $\nu(\theta, \phi) = -\frac{\sigma_\theta \times \sigma_\phi}{\|\sigma_\theta \times \sigma_\phi\|}$

$$\Longrightarrow\ \nu(\theta, \phi)\|\sigma_\theta \times \sigma_\phi\| = -\sigma_\theta \times \sigma_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2\phi\cos\theta \\ \sin^2\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\phi \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\ ds &\overset{\text{déf}}{=} \iint\limits_{A} F(\sigma(\theta,\phi))\cdot\nu(\theta,\phi)\|\sigma_\theta\times\sigma_\phi\|\ d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\right)\cdot\begin{pmatrix}\sin^2\phi\cos\theta\\ \sin^2\phi\sin\theta\\ \sin\phi\cos\phi\end{pmatrix} d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[sin^4\phi\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\sin\phi\right]\ d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\ d\theta\int_0^{\pi}\sin^4\phi\ d\phi + \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\ d\phi + \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\phi\ d\phi$$

En calculant séparément, on obtient :

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\ d\theta = -\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\ d\theta = \pi - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\ d\theta}_{=0} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3\phi\ d\phi \overset{\text{pp}}{=} -\sin^2\phi\cos\phi\big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\sin\phi\cos^2\phi\ d\phi = -\frac{2}{3}\cos^3\phi\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

en ayant posé : $f' = \sin\phi \longrightarrow f = -\cos\phi \qquad g = \sin^2\phi \longrightarrow g' = 2\cos\phi\sin\phi$

$$\int_0^{\pi}\sin\phi\cos^2\phi\ d\phi = -\frac{1}{3}\cos^3\phi\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

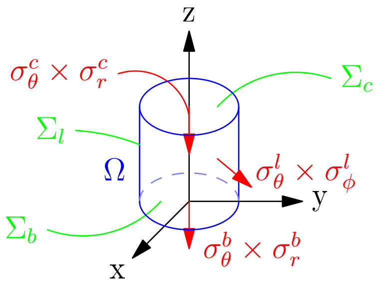
$$\Longrightarrow \iint\limits_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\ ds = 0 + \phi\cdot\frac{4}{3} + 2\phi\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Citation de M. Cibils:

"Tous les chemins mènent à Rome, à condition de prendre la bonne direction".

Exemple 2: Vérifier le théorème de la Divergence pour

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1, 0<z<1\} \qquad \text{et} \qquad F(x,y,z) = (x^2, 0, z^2)$$



$$\begin{aligned}
\Sigma_b &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1 \quad \text{et} \quad z=0\}\\
\Sigma_c &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1 \quad \text{et} \quad z=1\}\\
\Sigma_l &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1\}
\end{aligned}$$

$$\partial\Omega = \Sigma_b \cup \Sigma_c \cup \Sigma_l$$

- Calcul de $\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)\ dxdydz$

  On a $\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2z$

  On calcul en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} (2x+2z)\ dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\theta + 2z) \underbrace{r}_{|\text{jacobien}|}\ drd\theta dz\\
&= 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\ d\theta}_{=0} \int_0^1 r^2\ dr \int_0^1 dz + 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\ dr \int z\ dz\\
&= 2 \cdot 2\pi\ \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1\ \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

- Calcul de $\iint\limits_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\ ds = \iint\limits_{\Sigma_b} (F\cdot\nu)\ ds + \iint\limits_{\Sigma_c} (F\cdot\nu)\ ds + \iint\limits_{\Sigma_l} (F\cdot\nu)\ ds$

  1. Paramétrisation de Σ_b : $\qquad \sigma^b(\theta,r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \qquad A_b =]0,2\pi[\times]o,1[$

$$\sigma_\theta^b \times \sigma_r^b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -r \end{pmatrix} \text{ est une normale } \textbf{extérieur} \text{ à } \Omega$$

  Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^b(\theta,r) = \frac{\sigma_\theta^b \times \sigma_r^b}{\|\sigma_\theta^b \times \sigma_r^b\|}$

$$\Longrightarrow \nu^b(\theta,r)\|\sigma_\theta^b \times \sigma_r^b\| = \sigma_\theta^b \times \sigma_r^b = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -r \end{pmatrix}$$

  On a donc

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma_b} (F\cdot\nu)\ ds &\overset{\text{déf}}{=} \iint\limits_{A_b} F(\sigma^b(\theta,r)) \cdot \nu^b(\theta,r)\|\sigma_\theta^b \times \sigma_r^b\|\ d\theta dr\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta, 0, 0)\cdot(0,0,-r)\ d\theta dr\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 0\ d\theta dr = 0
\end{aligned}$$

2. Paramétrisation de Σ_c : $\sigma^c(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ $A_c =]0, 2\pi[\times]o, 1[$

$$\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$ est une normale **intérieure** à Ω

Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^c(\theta, r) = -\frac{\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c}{\|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\|}$

$$\Longrightarrow \nu^c(\theta, r)\|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\| = -\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\iint_{\Sigma_c} (F\cdot\nu)\ ds \overset{\text{déf}}{=} \iint_{A_c} F(\sigma^c(\theta, r))\cdot\nu^c(\theta, r)\|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\|\ d\theta dr$$

$$= -\iint_{A_c} F(\sigma^c(\theta, r))\ \sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\ d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta, 0, 1)\cdot(0, 0, r)\ d\theta dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\ dr = 2\pi\ \frac{1}{2}r^2\Big|_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

3. Paramétrisation de Σ_l : $\sigma^l(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ $A_l =]0, 2\pi[\times]o, 1[$
exemple 2 §3.1.2

$$\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$ est une normale **extérieure** à Ω

Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^l(\theta, z) = \frac{\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l}{\|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\|} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\| = 1$$

On a donc

$$\iint_{\Sigma_l} (F\cdot\nu)\ ds \overset{\text{déf}}{=} \iint_{A_l} F(\sigma^l(\theta, z))\cdot\nu^l(\theta, z)\|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\|\ d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\cos^2\theta, 0, z^2)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)\ d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\ d\theta \int_0^1 dz$$

$$\overset{\text{pp}}{=} \underbrace{\sin\theta\cos^2\theta\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + 2\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\ d\theta = \frac{2}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

en posant $f' = \cos\theta \longrightarrow f = \sin\theta$ $g = \cos^2\theta \longrightarrow g' = -2\cos\theta\sin\theta$

Finalement, on obtient :

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) ds = 0 + \pi + 0 = \pi$$

- *Autres exemples : exercices 1, 2, 3 et 4 série 7*

3.5 Théorème de Stokes :

3.5.1 Motivations :

But :

Généralisation du Théorème de Green pour des champs vectoriels à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Rappel : ***(chapitre 2 § 2.4.2)***

Théorème de Green :

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord est **orienté positivement**.
Soit

$$\begin{aligned} G : \quad & \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto G(x, y) \end{aligned}$$

un champ vectoriel tel que $G \subset C^1\left(\overline{B}, \mathbb{R}^2\right)$.
Alors

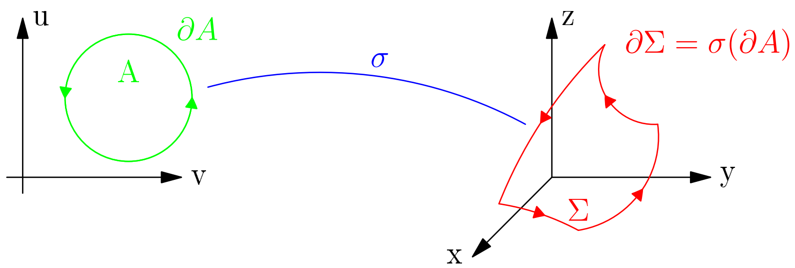
$$\underbrace{\iint_B \mathrm{rot} G(x, y)\ dxdy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} \quad = \quad \underbrace{\int_{\partial B} G \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel}}$$

Motivation :

Obtenir un théorème analogue en remplaçant B par une surface Σ dans $\mathbb{R}^3$ et G par un champ $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

3.5.2 Détermination du bord d'une surface et de son sens de parcours

1. Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière et $\sigma : \overline{A} \longrightarrow \Sigma$ est une paramétrisation de Σ alors le bord de Σ (noté $\partial\Sigma$) est donné par $\partial\Sigma = \sigma(\partial A)$ et il est indépendant du choix de la paramétrisation.
2. Le sens du parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation Σ est celui obtenu en parcourant ∂A dans le sens positif.



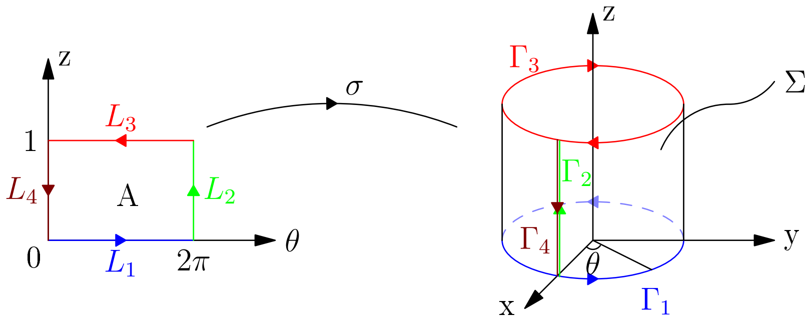
3. Si ∂A est une courbe simple fermée régulière par morceaux alors $\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_m$ et pour obtenir le bord de Σ on procède de la façon suivante :
   On supprime de $\sigma(\partial A)$ les courbes Γ_i qui se réduisent à un point et celles qui sont parcourues deux fois (une fois dans un sens et une fois dans l'autre).
   Ce qui reste après avoir appliqué ce procédé **est le bord de** Σ désigné par $\partial\Sigma$.

Exemple 1:

$$\text{Cylindre :} \qquad \Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \left\{(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), (\theta, z) \in \overline{A}\right\} \qquad \text{avec} \qquad A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$



On a

$$\begin{aligned}\sigma(\partial A) &= \sigma(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)\\ &= \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2) \cup \sigma(L_3) \cup \sigma(L_4)\\ &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4\end{aligned}$$

Déterminons les différents bords du cylindre :

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ avec } \theta : 0 \longrightarrow 2\pi\}$$

cercle parcouru dans le sens **positif**

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(2\pi, z) = (1, 0, z) \text{ avec } z : 0 \longrightarrow 1\}$$

droite parcourue vers le **haut**

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \text{ avec } \theta : 2\pi \longrightarrow 0\}$$

cercle parcouru dans le sens **négatif**

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(\theta, z) = (1, 0, z) \text{ avec } z : 1 \longrightarrow 0\}$$

droite Γ_2 parcourue vers le **bas**

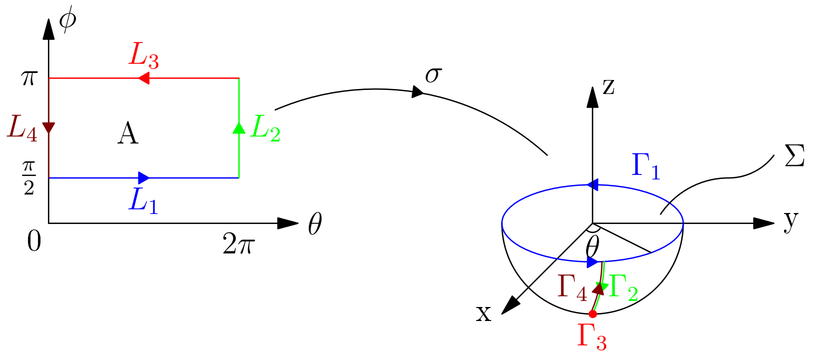
En appliquant le procédé on élimine Γ_2 et Γ_4 de $\sigma(\partial A)$ et on obtient $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ avec Γ_1 orienté positivement et Γ_3 orienté négativement.

Exemple 2:

Demi-sphère inférieure : $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ et } z \leqslant 0\right\}$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) : (\theta,\phi) \in \overline{A}\right\} \quad \text{avec} \quad A =]0,2\pi[\times]\frac{\pi}{2},\pi[$$



On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_i = \sigma(L_i) \text{ pour } i = 1,2,3,4$$

On détermine tous les bords du domaine :

$$\Gamma_1 = \left\{\gamma_1(\theta) = \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ avec } \theta : 0 \longrightarrow 2\pi\right\}$$

qui est un cercle parcouru dans le sens **positif**

$$\Gamma_2 = \left\{\gamma_2(\phi) = \sigma(2\pi,\phi) = (\sin\phi, 0, \cos\phi) \text{ avec } \phi : \frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi\right\}$$

qui est un demi-arc passant par le pôle sud parcouru vers le **bas**

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta,\pi) = (0,0,-1) \text{ avec } \theta : 2\pi \longrightarrow 0\}$$

qui est un seul point : pôle sud

$$\Gamma_4 = \left\{\gamma_4(\phi) = \sigma(0,\phi) = (\sin\phi, 0, \cos\phi) \text{ avec } \phi : \pi \longrightarrow \frac{\pi}{2}\right\}$$

qui est un demi-arc Γ_2 parcouru vers le **haut**

Citation de M. Cibils:

"Avec un plaisir non dissimulé, on enlève tout. C'est la description délicieuse d'un bord."

Procédé $\Longrightarrow$ on élimine Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de $\sigma(\partial A)$ et on obtient :

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \quad \text{orienté positivement}$$

Citation de M. Cibils:

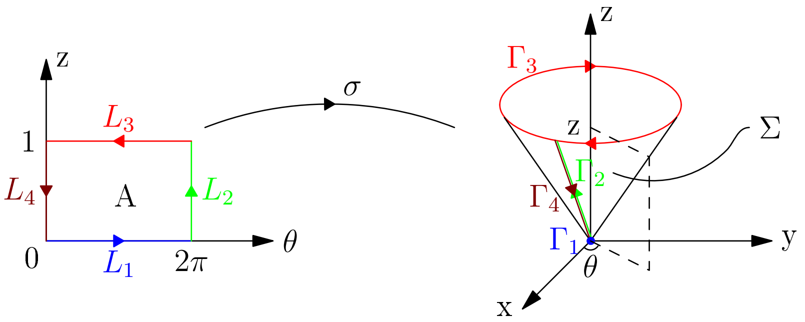
"Les nons scientifiques comprennent pas ça, mais la sphère n'a pas de bord."

Exemple 3:

$$\text{Cône :} \qquad \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) : (\theta, z) \in \overline{A}\right\} \qquad \text{avec} \qquad A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$



On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_i = \sigma(L_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Les différents bord du domaine sont :

Γ_1 :	un seul point : l'origine
Γ_2 :	droite sur le cône dans le plan (x, z) parcouru vers le haut
Γ_3 :	cercle parcouru dans le sens négatif
Γ_4 :	droite Γ_2 parcourue vers le bas

Procédé $\Longrightarrow$ éliminer Γ_1, Γ_2 et Γ_4 et on obtient $\partial\Sigma = \Gamma_3$ qui est orienté **négativement**.

Citation de M. Cibils:

"Et on passe au théorème de Stokes, deuxième moment solennel de ce cours."

3.5.3 Énoncé du Théorème de Stokes :

Théorème de Stokes :

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une surface régulière par morceaux et orientable.
Soit $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que $F \subset C^1\left(\Sigma, \mathbb{R}^3\right)$.
Alors

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds}_{\text{intégrale de surface d'un champ vectoriel dans } \mathbb{R}^3} \qquad = \qquad \underbrace{\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel dans } \mathbb{R}^3}$$

Remarque 1 : Une fois choisie, la paramétrisation : $\sigma : \begin{array}{l} \overline{A} \longrightarrow \Sigma \\ (u,v) \mapsto \sigma(u,v) \end{array}$

On considère $\sigma_u \times \sigma_v$ comme normale dans l'intégrale de surface. C'est-à-dire :

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot ds \overset{\text{déf}}{=} \iint\limits_{A} [\mathrm{rot}F(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)] \ dudv$$

Remarque 2 : Le sens de parcours de $\partial\Sigma$ dans l'intégrale curviligne est celui induit par la paramétrisation σ (c'est-à-dire celui obtenu en parcourant ∂A positivement).

Conseil : Pour simplifier, tenir compte des notations canoniques pour l'ordre
exemple : $dr d\theta \ dz \implies \sigma_r \times \sigma_\theta$

Citation de M. Cibils:

"Et je vous le recommande, dans la vie c'est toujours plus facile de prendre les choses positivement que négativement."

Exemple 1: Vérifier le Théorème de Stokes pour

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\} \qquad \text{et} \qquad F(x,y,z) = (z,x,y)$$

- Calcul de $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot ds$ $\qquad \mathrm{rot}F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Paramétrisation de Σ : $\quad \sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \quad$ et $\quad A =]0, 2\pi[\times]0,1[$

  Normale

$$\sigma_\theta \times \sigma_z = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot ds &= \iint\limits_{A} [\mathrm{rot}F(\sigma(\theta,z)) \cdot \sigma_\theta \times \sigma_z] \ d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (z\cos\theta + z\sin\theta - z) \ d\theta dz \\ &= \int_0^1 z \ dz \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \ d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta \ d\theta}_{=0} - \int_0^{2\pi} d\theta \right] = -2\pi \ \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = -\pi \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Moi j'ai une manie, j'aime bien intégrer entre 0 et 2π. Encore une fois, celui qui tient le stylo décide !"

- Calcul de $\int\limits_{\Sigma} F \cdot ds$

  Bord du cône : $\Sigma = \{\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$ avec $\theta : 0 \longrightarrow 2\pi\}$ est orienté **négativement**.
  Alors
$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= -\int\limits_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\ d\theta = -\int\limits_0^{2\pi} (1, \cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\ d\theta \\
&= -\int\limits_0^{2\pi} (-\sin\theta + \cos^2\theta)\ d\theta = \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\ d\theta}_{=0} - \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\ d\theta = -\frac{1}{2}\left[2\pi + \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2\theta}_{=0} \Big|_0^{2\pi} \right] = -\pi
\end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Je ressort l'étendard de la réussite."

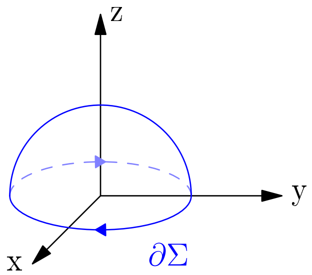
Autres exemples série 8

Exemple 2: Vérifier le Théorème de Stokes pour la demi sphère supérieure

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geqslant 1\right\} \qquad \text{et} \qquad F(x, y, z) = (z, x, y^2)$$

- Calcul de $\int\limits_{\partial\Sigma} F \cdot dl$

$$\partial\Sigma = \{\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ avec } \theta : 2\pi \longrightarrow 0\}$$



Ce qui nous donne le bord de la demi-sphère supérieure orienté **négativement**.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Sigma} &\overset{\text{déf}}{=} -\int\limits_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\ d\theta = -\int\limits_0^{2\pi} (0, \cos\theta, \sin^2\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\ d\theta \\
&= -\frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\theta\ d\theta}_{=0} = -\pi
\end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Je mets ma main au feu que le résultat est le même. A moins que vous ne changiez la paramétrisation, auquel cas je me brûle."

- Calcul de $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot ds$ $\qquad \mathrm{rot} F = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Paramétrisation de Σ : $\quad \sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) \quad$ et $\quad A =]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$

  Normale

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi = \begin{pmatrix} -\cos\theta \sin^2\phi \\ -\sin^2\phi \sin\theta \\ -\sin\phi \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot ds &= \iint\limits_{A} [\mathrm{rot} F(\sigma(\theta, \phi)) \cdot \sigma_\theta \times \sigma_\phi] \;\; d\theta d\phi \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2\pi} (-2\sin^3\phi \sin\theta \cos\theta - \sin^2\phi \sin\theta - \sin\phi\cos\phi) \;\; d\theta d\phi \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} sin^3\phi \cos 2\theta + sin^2\phi \cos\theta - \sin\phi \cos\phi\theta) \right]_0^{2\pi} \;\; d\phi \\
&= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} (-\sin\phi \cos\phi) \;\; d\phi = \left[\frac{1}{2} \pi \cos 2\phi \right]_0^{\pi/2} = -\pi
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Analyse Complexe

Chapitre 4

Fonctions holomorphe et équations de Cauchy-Riemann :

4.1 Introduction :

4.1.1 Motivation :

But

Étendre l'étude des fonctions réelles *du type f :* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à des fonctions qui dépendent **d'une** variable complexe à valeur complexe *du type f :* $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Rôle

Établir les notions de limites, continuité, dérivabilité et intégrabilité dans $\mathbb{C}$.

Intérêt

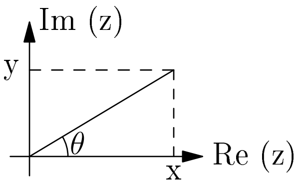
Fournir des méthodes pour calculer **facilement** des intégrales **réelles** compliquées.

Citation de M. Cibils:

"La plus grande frustration des mathématiciens est de voir une fonction réelle continue et de savoir qu'il existe une primitive, qui les regarde, sans pour autant réussir à la calculer. C'est grâce à l'analyse complexe qu'on va pouvoir conquérir ce nouveau monde."

4.1.2 Rappels sur les nombres complexes :

- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $z \in \mathbb{C} z = x + iy$ avec $x = Re(z) \in \mathbb{R}, y = Im(z) \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash 0$ où $0 = 0 + i0$
- Conjugué complexe : $\overline{z} = x - iy$
- Module de $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- Représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$ $\quad z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$.



θ est appelé **l'argument** de z et noté arg$z$.
L'argument est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

Convention : pour $z \in \mathbb{C}^*$ arg$z$ est l'unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta$

4.2 Fonctions complexes :

4.2.1 Définition :

Une fonction **d'une** variable complexe à valeur dans $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x+iy \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto u(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto v(x,y) \end{aligned}$$

sont deux fonctions à **valeur réelles** qui s'appellent respectivement la partie réelle de f *on note* $u = Re(f)$ et la partie imaginaire de f *on note* $v = Im(f)$.

Remarque : Les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v **sont** les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f.

4.2.2 Exemples :

Exemple 1:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x+iy \mapsto f(z) = \overline{z} = x - iy \end{aligned}$$

On a $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = -y$

Exemple 2:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x+iy \mapsto f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \end{aligned}$$

On a $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$

Exemple 3:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x+iy \mapsto f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

On a $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

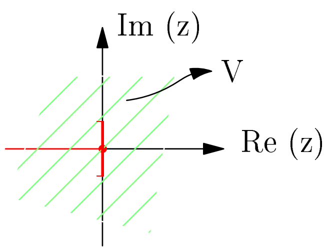
Exemple 4: Pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ la **fonction exponentielle** est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a $u(x,y) = e^x \cos y$ et $v(x,y) = e^x \sin y$

Remarque : Contrairement au cas réel, e^z n'est pas bijective sur $\mathbb{C}$ car $e^{z+2ik\pi} = e^z \forall k \in \mathbb{Z}$ *exercice 1 série 9.*

Exemple 5: Soit $V = \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0] = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ et } Re(z) \leqslant 0\}$



Pour $x \in V$ la **fonction logarithme** est définie par $\log z = ln|z| + i\arg(z)$ avec la convention de choisir $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

En écrivant $z = x+iy$ on a $u(x,y) = ln|z| = ln\sqrt{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = \arg(z)$

Remarque : Les choix de l'ensemble V et de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ garantissent la continuité et la bijectivité de $\log(z)$. Cette fonction ainsi définie s'appelle *"la détermination principale du logarithme"*.

Exemple 6:

Pour $z \in \mathbb{C}$ les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définies par :

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

exercice 2 série 9

4.3 Limites, continuité et dérivabilité :

4.3.1 Définitions :

- Les notions de topologie *ouvert, fermé etc...* de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogue à celles de l'analyse réelle.
- En particulier f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et est finie. La limite est appelée la dérivée de f en z_0 et notée $f'(z_0)$. Les règles de dérivation établies dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$.
- Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ on dit que la fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** *ou **analogue complexe** dans* V si f est **définie et dérivable** $\forall z \in \mathbb{C}$.

4.3.2 Équations de Cauchy-Riemann :

Remarque : abus de notation :
Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire qu'on écrira $\underbrace{z}_{\in\mathbb{C}} = x+iy \in V$ où $\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} \in V$ de façon équivalente.

Citation de M. Cibils:

"On peut se permettre de faire des bêtises à condition d'avoir conscience qu'on en fait."

Théorème : Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x+iy \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u: \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto u(x,y) = Re(f(x+iy)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v: \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto v(x,y) = Im(f(x+iy)) \end{aligned}$$

Sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe dans V
2. les fonctions $u, v \in C^1(V)$ et satisfont les équations de Cauchy-Riemann donnés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in V$

En particulier, si f est holomorphe dans V, alors on a :

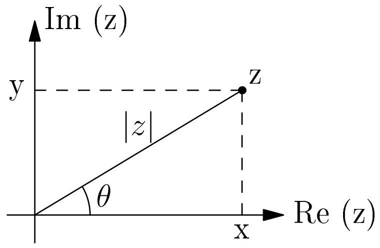
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \tag{4.1}$$

pour tout $z = x + iy \in V$

Remarque 1 : Utilité du Théorème : donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit holomorphe dans un ouvert V. Il faut et il suffit que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = Re(f) \in C^1$ et $v = Im(f) \in C^1$ soient satisfaite dans V.

Remarque 2 : On écrit souvent $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$; $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.
Les équations de Cauchy-Riemann sont : $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

Remarque 3 : Les équations de Cauchy-Riemann et la formule 4.1 donnant $f'(z)$ se démontrent avec l'hypothèse :



$$f \text{ holomorphe dans } V \implies f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existent pour tout $z_0 \in V$

4.3.3 Exemples :

Exemple 1: $f(z) = z^2$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \implies u(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } v(x,y) = 2xy$$

$$\begin{array}{llll} u_x(x,y) = 2x & u_y(x,y) = -2y & & \\ v_x(x,y) = 2y & v_y(x,y) = 2x \implies & u_x = v_y & u_y = -v_x \end{array}$$

$$\text{Cauchy-Riemann est satisfaite} \implies f \text{ holomorphe dans } \mathbb{C}$$

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

Exemple 2: $f(z) = \overline{z}$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \overline{(x+iy)} = x - iy \implies u(x,y) = x \text{ et } v(x,y) = -y$$

$$\begin{array}{llll} u_x(x,y) = 1 & u_y(x,y) = 0 & & \\ v_x(x,y) = 0 & v_y(x,y) = -1 \implies & u_x \neq v_y & u_y = v_x \end{array}$$

$$\text{Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite} \implies f \text{ n'est pas holomorphe dans } \mathbb{C}$$

Exemple 3: $f(z) = e^z$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y \implies u(x,y) = e^x \cos y \text{ et } v(x,y) = e^x \sin y$$

$$\begin{array}{llll} u_x(x,y) = e^x \cos y & u_y(x,y) = -e^x \sin y & & \\ v_x(x,y) = e^x \sin y & v_y(x,y) = e^x \cos y \implies & u_x = v_y & u_y = -v_x \end{array}$$

$$\text{Cauchy-Riemann est satisfaite} \implies e^z \text{ est holomorphe dans } \mathbb{C}$$

$$f'(z) = u_x(x+y) + iv(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

Exemple 4: $f(z) = log(z) = \ln|z| + iarg(z)$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

On montre que $\log(z)$ est holomorphe dans

$$V = \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ et } Re(z) \leqslant 0\}$$

De plus, on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in V$$

Autres exemples : ex 2 à 5 série 9

Chapitre 5

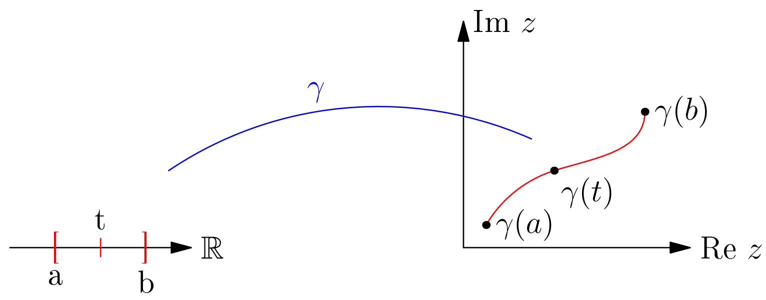
Théorème et formule intégrale de Cauchy

5.1 Intégration complexe :

5.1.1 Notations et définitions :

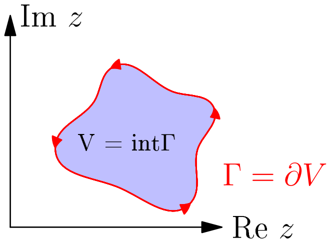
- On note $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière (par morceaux) du plan complexe et

$$\gamma : \quad \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C} \end{array}$$



En analyse complexe, par abus de langage et de notation, on identifie souvent la courbe Γ et sa paramétrisation. On dit "soit γ une courbe ..." au lieu de dire "soit Γ une courbe...".

- Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple **fermée** régulière (par morceau) de paramétrisation γ, on note int Γ (ou aussi int γ) l'ensemble ouvert borné $V \subset \mathbb{C}$ dont le bord est Γ (c-à-d $\partial V = \Gamma$).



γ est orientée positivement si le sens de son parcours laisse int γ à gauche.

- Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière de paramétrisation

$$\gamma : \quad \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \Gamma \\ t \mapsto \gamma(t) \end{array} \qquad \text{et soit} \qquad f : \quad \begin{array}{l} \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{array}$$

L'intégrale de f le long de Γ est définie par

Intégrale de f le long de Γ :

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$$

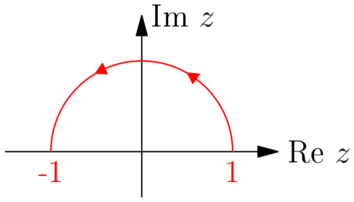
où le fait de remplacer Γ par γ est un abus de notation.

- Si $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$ est simple régulière (par morceaux), alors

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f(z)\ dz$$

5.1.2 Exemples

Exemple 1: Calculer $\int_\gamma f(z)\ dz$ pour $f(z) = z^2$ et γ : demi-cercle supérieur de rayon 1 centré à l'origine.

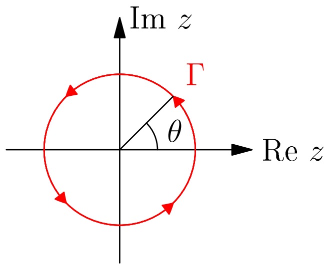


$$\gamma : \quad [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\theta \mapsto \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\gamma'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = ie^{\theta}$$

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_0^\pi f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)\ d\theta = \int_0^\pi \left(e^{i\theta}\right)^2 ie^{i\theta}\ d\theta$$
$$= i\int_0^\pi e^{3i\theta}\ d\theta = \frac{1}{3}e^{3i\theta}\Big|_0^\pi = \frac{1}{3}\left[e^{3i\pi} - 1\right] = \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}$$

Exemple 2: Calculer $\int_\gamma f(z)\ dz$ pour $f(z) = \frac{1}{z}$ et γ le cercle de rayon 1 centré à l'origine



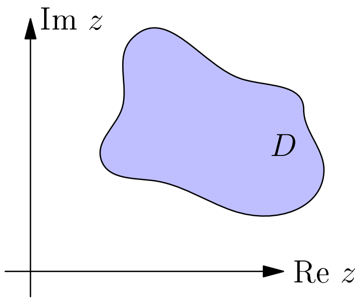
$$\gamma : \quad [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\theta \mapsto \gamma(\theta) = e^{i\theta}$$
$$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$$

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\ d\theta = 2\pi i$$

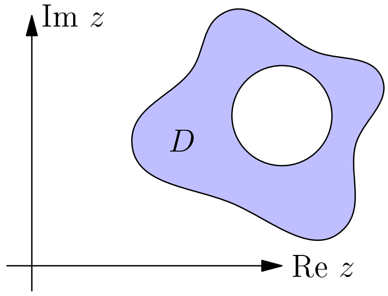
5.2 Théorème de Cauchy

5.2.1 Énoncé du théorème de Cauchy :

- **Terminologie :**
  On appelle **domaine simplement connexe** un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{C}$ qui "n'a pas de trous".



Simplement connexe



Pas simplement connexe

Théorème de Cauchy : Soit D un domaine simplement connexe,

$$f: \quad D \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z)$$

une fonction **holomorphe** dans D et γ une courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) telle que $\gamma \subset D$ (c-à-d : γ contenue dans D) alors :

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

5.2.2 Exemples :

Exemple 1: $D = \mathbb{C}, f(z) = z^2$ holomorphe dans $\mathbb{C}$ et γ une courbe simple **fermée** régulière par morceaux quelconque dans $\mathbb{C}$ donc

$$\text{Théorème de Cauchy} \implies \int_\gamma z^2\ dz = 0$$

Par exemple, si $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ (cercle unité centré à l'origine) on a bien

$$\int_\gamma z^2\ dz = \int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta}\right)^2\ d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\ d\theta = \frac{1}{3}e^{3i\theta}\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{3}\left[e^{6i\pi} - 1\right] = \frac{1}{3}(1-1) = 0$$

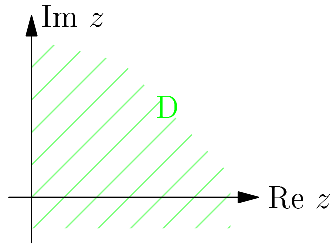
Exemple 2:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

a) $D = \mathbb{C}$ Le théorème ne s'applique pas car f n'est pas holomorphe en $z = 0$.

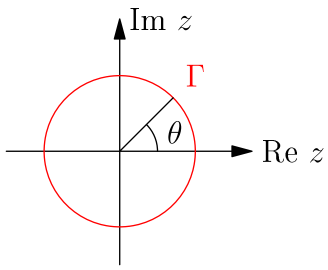
b) $D = \mathbb{C}^*$ Le théorème ne s'applique pas car D n'est pas simplement connexe.

c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$



Le théorème s'applique car D est simplement connexe et $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur D.

Théorème de Cauchy $\Longrightarrow \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = 0$ où $\gamma \subset D$ et (par exemple) le cercle unité centré en $z = 2$



Vérification

$$\gamma(\theta) = 2 + e^{i\theta}$$
$$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta} \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz &= \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+e^{i\theta}} ie^{i\theta}\, d\theta = \log(2+e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi} \\ &= \log(2+e^{2i\pi}) - \log(2+e^{i0}) = \log 3 - \log 3 = 0\end{aligned}$$

5.3 Formule intégrale de Cauchy

5.3.1 Énoncé

Formule intégrale de Cauchy : Soit $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement. Alors

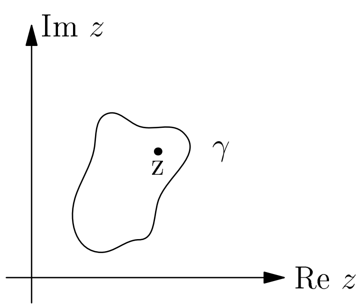
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad \forall z \in \ \mathrm{int}\gamma$$

Citation de M. Cibils:

"Le xi grecque c'est un serpentin qui se tortille. Voilà la formule de l'intégrale de Cauchy... Je vous laisse l'apprécier."

Illustration

$D \subset \mathbb{C}$



Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, la valeur de la fonction f en un point $z \in \mathbb{C}$ s'obtient en intégrant $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ le long de n'importe quelle courbe fermée *orientée positivement* telle que $z \in \ \mathrm{int}\gamma$.

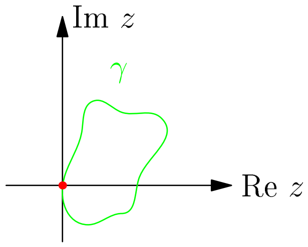
5.3.2 Exemples d'utilisations :

Exemple 1: Soit γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux). Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\, dz$$

Remarque : la fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ n'est pas définie en $z = 0 \implies$ distinction de plusieurs cas.

1. $0 \in \gamma$



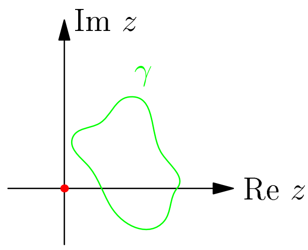
L'intégrale n'est pas définie puisque $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ possède une singularité en $z = 0$.

Citation de M. Cibils:

"Quand je vois une singularité, je pose le stylo et je m'éloigne. Je ne touche pas à ça."

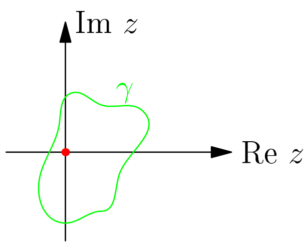
2. $0 \notin \overline{\text{int}\gamma}$

La fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D telle que $\overline{\text{int}\gamma} \subset D$.



Comme $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma}$ alors le théorème de Cauchy s'applique à g (§5.2.1) et on obtient $\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\, dz = 0$ pour tous γ de ce type.

3. $0 \in \text{int}\gamma$



La fonction $f(\xi) = \cos 2\xi$ et holomorphe dans $\mathbb{C}$. Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$ en lui appliquant la formule de Cauchy (§5.3.1) pour $z = 0$ (et $D = \mathbb{C}$).

On trouve

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos 2\xi}{\xi - 0}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos 2\xi}{\xi}\, d\xi$$

$$\implies \int_\gamma \frac{\cos 2\xi}{\xi}\, d\xi = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

pour toute courbe γ orientée positivement de ce type.

Avantage : Pour le cercle unité centré à l'origine $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta = [0, 2\pi]$ *exemple de courbe du* 3^e *cas* le calcul direct de l'intégrale serait :

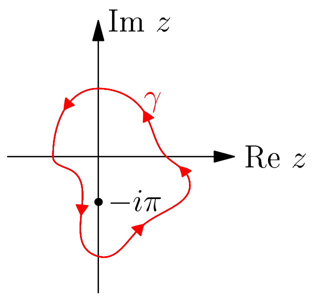
$$\int_\gamma \frac{\cos 2z}{2}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} \cos(2e^{i\theta})\, d\theta \qquad \textit{Laborieux, voir impossible à faire}$$

Exemple 2: Soit γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux). Calculer en fonction de γ l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z + i\pi}\, dz$$

La fonction $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ n'est pas définie en $z = -i\pi$

1. $-i\pi \in \gamma$: L'intégrale n'est pas définie car $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ possède une singularité en $z = -i\pi \in \gamma$
2. $-i\pi \notin \overline{\text{int}\gamma}$ La fonction $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ est holomorphe dans une domaine simplement connexe D tel que $D \subset \overline{\text{int}\gamma}$. Comme $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma} \subset D$ alors le Théorème de Cauchy s'applique à g et on trouve $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}\, dz = 0$ pour tous γ de ce type.
3. $-i\pi \in \text{int}\gamma$ La fonction $f(\xi) = e^{\xi^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$ en lui appliquant la formule de Cauchy pour $z = -i\pi$ et $D = \mathbb{C}$, on trouve :



$$f(-i\pi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi}\, d\xi$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi}\, d\xi = 2i\pi f(-i\pi) = 2i\pi e^{(i\pi)^2} = 2i\pi e^{-\pi^2}$$

Conclusion

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z + i\pi}\, dz = 2i\pi e^{-\pi^2}$$

Pour toute courbe γ orientée positivement de ce type.

Autres exemples exercices 2, 3 et 4 série 10

5.3.3 Corollaire de la formule intégrale de Cauchy :

Énoncé :

Corollaire de la formule intégrale de Cauchy : Avec les mêmes hypothèses :
Soit $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement.
On a :

1. f est infiniment dérivable dans D.
2. $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall z \in \text{ int}\gamma$$

Remarque 1 : Pour $n = 0$ le corollaire redonne la formule intégrale de Cauchy.

$$f(z) = f^{(0)}(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad (0! = 1)$$

Citation de M. Cibils:

"C'est vraiment remarquable. Dans votre langage, je dirais : C'est un truc de ouf!"

Remarque 2 : Résultat remarquable :

Le corollaire affirme qu'une fonction holomorphe sur D est en fait infiniment dérivable et que sa n-ième dérivée s'obtient en dérivant n fois par rapport à z sous l'intégrale de la formule de Cauchy.

En effet :

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right]' d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\right]' d\xi = \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}\, d\xi$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}\right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^5}\, d\xi$$

$$\vdots$$

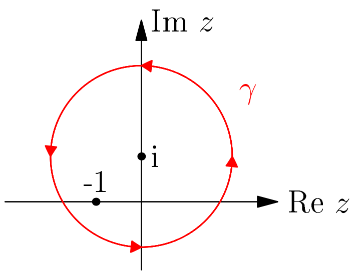
Récurrence : $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

5.3.4 Exemple d'utilisation :

Exemple 1: Calculer $\int_\gamma \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}\, dz$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$

Remarque 1 : La fonction $g(z) = \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}$ n'est pas définie en $z = -1$

Remarque 2 : γ est le cercle de rayon 2 centré en $z_0 = i$.



On considère γ orienté positivement et la fonction $f(\xi) = \xi e^{3\xi+5}$ qui est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Une fonction est holomorphe lorsqu'elle est une combinaison linéaire, un produit ou une puissance de fonctions élémentaires holomorphes.

En appliquant à f le corollaire de la formule de Cauchy pour $z = -1$ et $d = \mathbb{C}$, on obtient

$$f''(-1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3}\, d\xi \implies \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3}\, d\xi = \pi i f''(-1)$$

Mais

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \left(\xi e^{3\xi+5}\right)' = e^{3\xi+5} + 3\xi e^{3\xi+5} \\ f''(\xi) &= 3e^{3\xi+5} + 3e^{3\xi+5} + 9\xi e^{3\xi+5} \implies f''(-1) = -3e^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\int\limits_{\gamma} \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}\, dz = -3\pi i e^2$$

Autres exemples exercices 1 à 4 série 11

Chapitre 6

Série de Laurent, pôles et résidus

6.1 Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe :

6.1.1 Définitions et résultats :

Hypothèse :

soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ $\quad f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{array}$ $\quad$ une fonction holomorphe dans D et $z_0 \in D$.

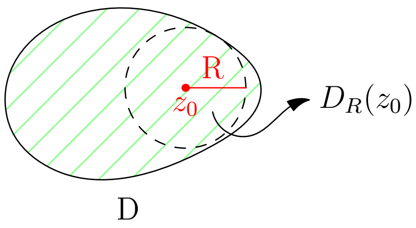
Définition : pour $n \in \mathbb{N}$, **le polynôme de Taylor de f de degré N au voisinage de z_0**

Polynôme de Taylor de f de degré N au voisinage z_0 :

$$T_N f(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Résultat : **séries de Taylor**

Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D



Convention

Si $D = \mathbb{C} \longrightarrow R = +\infty$ et $D_R(z_0) = \mathbb{C}$

Série de Taylor :

$$Tf(z) = \lim_{N \to \infty} T_N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Existe et est finie pour tout $z \in D_R(z_0)$. L'expression $Tf(z)$ s'appelle la **série de Taylor** de f au voisinage de z_0
De plus, on a $f(z) = Tf(z)$ $\forall z \in D_R(z_0)$ et R s'appelle le **rayon de convergence** de la série de Taylor.

Coefficients de la série de Taylor : Les **coefficients** de la série de Taylor sont reliés à la formule de Cauchy par le corollaire.

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

où $\gamma \subset D_R(z_0)$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int }\gamma$

Citation de M. Cibils:

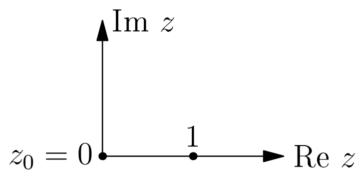
"J'ai lu vos commentaires sur le cours et j'ai été touché, mais... je les dédies à l'Analyse, c'est elle qui est responsable de tous ça."

6.1.2 Exemples :

Exemple 1: $f(z) = e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. On a $f^{(n)}(z) = e^z$ et $f^{(n)}(0) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Donc

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.



Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ et contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On a

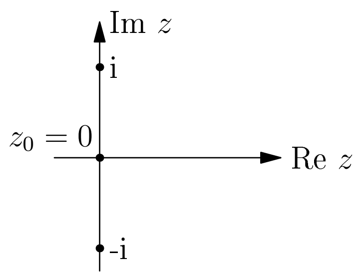
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \text{ et } f^{(n)}(0) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{avec } |z| < 1$$

C'est la série géométrique.

Exemple 3: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe dans $D = \mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$.



Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ et contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{avec } |z| < 1$$

La troisième égalité est possible grâce à l'exemple 2, la série géométrique telle que :

$$|-z^2| < 1 \iff |z| < 1$$

Autre exemple exercice 5 série 11

6.2 Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe

6.2.1 Motivations, définitions et résultats :

Le développement de Taylor d'une fonction f donne seulement une **série entière** en puissance positives de $(z - z_0)$ au voisinage d'un point z_0 où f est holomorphe.

But :

obtenir un développement en puissances **positives** et **négatives** de $z - z_0$ où z_0 peut être une **singularité** de f.

Hypothèse :

soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$ et $f : \begin{array}{l} D\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{array}$ une fonction holomorphe dans $D\backslash\{z_0\}$

Définition : pour $n \in \mathbb{N}$, le développement de degré N de Laurent de f du voisinage de z_0 est :

Développement de f de degré N de Laurent au voisinage de z_0 :

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_N (z - z_0)^N \end{aligned}$$

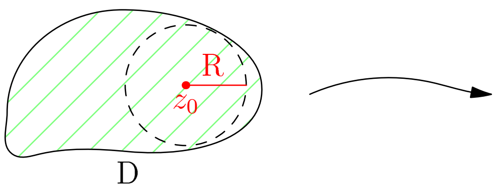
Avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

où $\gamma \subset D$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int}\gamma$.

Résultat : Série de Laurent

Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D



f non-holomorphe en $z_0 \in D$.

Série de Laurent :

1. $$Lf(z) = \lim_{N\to\infty} L_N f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$
   existe et est finie $\forall D_R(z_0)\backslash\{z_0\}$
2. De plus, on a $f(z) = Lf(z)\ \forall z \in D_R(z_0)\backslash\{z_0\}$ et R s'appelle le **rayon de convergence** de la série de Laurent.

Remarque 1 : La série de Laurent de f peut s'écrire sous la forme :

$$Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

On voit donc qu'on a deux séries différentes :

La première série

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$
$$= \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

s'appelle la **partie singulière** de la série de Laurent.

La deuxième série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

s'appelle la **partie régulière** de la série de Laurent.

Remarque 2 : Si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 alors la série de Laurent coïncide avec la série de Taylor.

La partie singulière de la série de Laurent est nulle puisque par définition pour $n = 1, 2, ...$ on a

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\, d\xi = 0 \qquad \text{Théorème de Cauchy}$$

Car $f(\xi)(z-z_0)^{n-1}$ est holomorphe dans D $(n-1 > a)$.

Les coefficients de la partie régulière donnent la série de Taylor puisque par définition pour $n = 0, 1, 2, ...$ on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \text{car } f(\xi) \text{ est holomorphe dans } D$$

Par le corollaire de la formule de Cauchy.

6.2.2 Définition issues de la série de Laurent :

Définition 1: $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point régulier** de f $\Longleftrightarrow$ partie singulière de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 est **nulle**. C'est-à-dire

Point régulier :

$$Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Définition 2: Soit $m \in \mathbb{N}^*, z_0 \in \mathbb{C}$ est un **pôle d'ordre m** de $f \iff c_{-m} \neq 0$ et $c_{-k} = 0$ pour tout $k \geqslant m+1$. C'est-à-dire

Pôle d'ordre m :

$$Lf(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Définition 3: $z_0 \in \mathbb{C}$ est une **singularité essentielle (isolée)** de $f \iff c_{-k} \neq 0$ pour une infinité d'indices k. C'est-à-dire

Singularité essentielle :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Définition 4: Le **résidu de f en** z_0, noté $\text{Rés}_{z_0}(f)$, est la valeur du coefficient c_{-1} de la série de Laurent de f au voisinage de z_0. C'est-à-dire

Résidu de f :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) \overset{\text{déf}}{=} c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi)\, d\xi \quad \text{où } \gamma \subset D \text{ avec } z_0 \in \text{int}\gamma$$

6.2.3 Exemples :

Exemple 1: Soit $f(z) = \frac{1}{z}$ définie dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

a) Au voisinage de $z_0 = 0$

$$Lf(z) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{0}_{\text{Partie régulière}}$$

$\implies c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geqslant 2 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 1$

Rappel : série géométrique

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{pour } w \in \mathbb{C} \text{ tel que } |w| < 1$$

b) Au voisinage de $z_0 = 1$ on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \underbrace{\sum_{z=0}^{\infty} (-1)^n (1-z)^n}_{\text{partie régulière}} = Tf(z) = Lf(z)$$

La série de Laurent coïncide avec la série de Taylor. La partie singulière est nulle $\implies z_0 = 1$ est un **point régulier** de f et $\text{Rés}_1(f) = 0$

Exemple 2: Soit $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Au voisinage de z_0 on a

$$Lf(z) = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{0}_{\text{Partie régulière}}$$

On a $c_{-1} = 2, c_{-2} = 0, c_{-3} = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geqslant 4 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 2$

Exemple 3: Soit $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$

Au voisinage de $z_0 = 0$ on a

$$\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-(-z)}$$

$$\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n}_{\text{Partie régulière}} = Lf(z)$$

$\implies c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geqslant 2 \implies z_0$ est un pôle d'ordre 1 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 1$

Exemple 4: Soient $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ et $g(z) = \frac{\cos z}{z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

a)

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^n}{5!} - \cdots}_{\text{Partie Régulière}} = Lf(z)$$

La partie singulière est nulle $\implies z_0 = 0$ est un **point régulier** de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 0$ ($z_0 = 0$ est une singularité éliminable).

b)

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} \cos z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Partie singulière}} - \underbrace{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots}_{\text{Partie régulière}} = Lg(z)$$

On a $c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geqslant 2 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de g et $\text{Rés}_0(g) = c_{-1} = 1$

Exemple 5: Soit $f = e^{\frac{1}{z}}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{Partie singulière}} = Lf(z)$$

On a $c_{-n} = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \geqslant 1 \implies z_0 = 0$ **singularité essentielle de** f et $\text{Rés}_0(f) = \frac{1}{1!} = 1$

Remarque : On ne l'a pas fait pour les exemples précédents, dans le but de les alléger, mais on doit toujours définir le rayon de convergence pour les séries de Laurent.

Autres exemples : exercices 1, 2 et 3 série 13

6.2.4 Détection des pôles, détermination de l'ordre et formules de calcul du résidu

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro d'ordre n d'une fonction f lorsque

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ mais } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Méthodes d'études :

a) Soit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ qui est un zéro d'ordre k de p et un zéro d'ordre l de q. Deux cas possibles :

Cas 1. si $l > k$ alors z_0 est un **pôle d'ordre** $l - k$ **de** f.

Cas 2. si $l \leqslant k$ alors z_0 est un **point régulier de** f.

On dit que z_0 *est une singularité éliminable de* f *en posant* $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)}$

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D \backslash \{z_0\}, m \in \mathbb{N}^*$ et

$$Lf(z) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Si L est fini et $L \neq 0 \implies L \in \mathbb{R}^*$ alors z_0 est un pôle d'ordre m de f.

Exemple 1: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ et $z_0 = 0$. Avec $p(z) = \sin z$ et $q(z) = z$.

On a

$$p(0) = \sin 0 = 0, \quad p'(0) = \cos 0 = 1, \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 1$$

Alors $k = l = 1$ et donc $z_0 = 0$ est un point régulier de f. $z_0 = 0$ est une singularité éliminable en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$ et $z_0 = 0$. Avec $p(z) = z$ et $q(z) = \sin^2 z$.

On a

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 1, \quad q(0) = 0, \quad q'(0)|_{z=0} = 2 \sin z \cos z|_{z=0} = 0, \quad q''(0) = 2\cos(2 \cdot 0) = 2$$

$k = 1$ et $l = 2$ $l > k \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre $l - k = 2 - 1 = 1$.

Exemple 3: $f(z) = \frac{\sin(\pi - z}{(z-\pi)^3}$ $\qquad z_0 = \pi$ est un pôle d'ordre 2 de f car pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$L = \lim_{z \to \pi} [(z - \pi)^m f(z)] = \lim_{z \to \pi} \left[(z - \pi)^m \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} \right]$$

$$= \lim_{z \to \pi} \left[(z - \pi)^{m-3} \sin(z - \pi) \right] = \begin{cases} \lim\limits_{z \to \pi} \frac{1}{z - \pi} \lim\limits_{z \to \pi} \frac{\sin(z-\pi)}{z - \pi} = \infty & \text{si } m = 1 \\ \lim\limits_{z \to \pi} \frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi} = 1 & \text{si } m = 2 \\ \lim\limits_{z \to \pi} (z - \pi)^{m-3} \lim\limits_{z \to \pi} \sin(z - \pi) = 0 & \text{si } m \leqslant 3 \end{cases}$$

Formules de calcul du résidu d'une fonction :

a) Soit f une fonction holomorphe dans $D\setminus\{z_0\}$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f alors

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

b) Soit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont deux fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de q et $p(z_0) \neq 0$. Alors

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Exemple 1: $f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$ alors $z_0 = -2$ est un pôle d'ordre 1 de f.

$$\Longrightarrow \text{Rés}_{-2}(f) = \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\frac{3z^2}{z+2}\right] = \lim_{z\to -2}[3z^2] = 12$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{e^z}{(z-5)^3}$ alors $z_0 = 5$ est un pôle d'ordre 3 de f.

$$\Longrightarrow \text{Rés}_5(f) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 5}\frac{d^2}{dt^2}\left[(z-5)^3\frac{e^z}{(z-5)^3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 5} e^z = \frac{e^5}{2}$$

Citation de M. Cibils:

"La formule tue, de manière civilisée, la singularité"

Exemple 3: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$ Comme $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ alors $z_0 = i$ et $z_0 = -i$ sont des pôles d'ordre 1 de f.

$$\Longrightarrow \text{Rés}_i(f) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}\right] = \frac{\sin i}{2i}$$

$$\text{Rés}_{-i}(f) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}\right] = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{\sin i}{2i}$$

Citation de M. Cibils:

"Évidemment, je prends des exemples pas trop longs car je n'ai pas le temps pendant les cours. Vous verrez pendant la séance d'exercices."

Exemple 4: $f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$ Avec $p(z) = 3z^2$ et $q(z) = z+2$. On a que $z_0 = -2$ est un zéro d'ordre 1 de q avec $p(-2) = 12 \neq 0$ $\quad q'(z) = 1 \forall z$

$$\text{Rés}_{-2}(f) = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{12}{1} = 12$$

Chapitre 7

Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales réelles

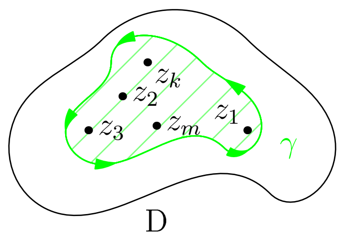
7.1 Théorème des résidus :

7.1.1 Énoncé du Théorème des résidus :

Théorème des résidus :
Soient $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) contenue dans D orientée positivement et $z_1, z_2, ..., z_m \in \text{int}\gamma$ tels que $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$.
Si une fonction $f : D \backslash \{z_1, z_2, ..., z_m\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Alors

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(f)$$

Remarque 1 :
Si f est une fonction holomorphe sauf peut-être en un nombre fini de points $z_1, z_2, ..., z_m$ alors l'intégrale de f le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière γ contenue dans D et orientée positivement est donnée par la somme (multipliée par $2\pi i$) des résidus de f aux points z_k (où f n'est pas holomorphe) qui sont enfermés à l'intérieur de γ.



Citation de M. Cibils:

"Parfois, les mathématiciens appellent ce théorème, le théorème de la poubelle, entre nous. [...] Mais bon, officiellement, c'est le théorème des résidus."

Remarque 2 : Si f est holomorphe dans D, alors pour toutes courbe simple γ fermée régulière dans D, il n'y a aucune singularité $z_k \in \text{int}\gamma$. Dans ce cas $\sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(f) = 0$ et le théorème des résidus redonne

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0 \qquad \text{résultat du Théorème de Cauchy §5.2.1}$$

7.1.2 Exemples :

Exemple 1: Soit $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}$ et $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple fermée régulière orientée positivement. Calculer en fonction de γ l'intégrale $\int_\gamma f(z)\, dz$

On a

$$f(z) = \frac{2z(z-1) + 3z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$z_1 = 0 \text{ est un pôle d'ordre 2 de f } \left(p(0) \neq 0, q(0) = 0, q'(0) = 0, q''(0) \neq 0\right)$$
$$z_2 = 1 \text{ est un pôle d'ordre 1 de f } \left(p(1) \neq 0, q(1) = 0, q'(1) \neq 0\right)$$

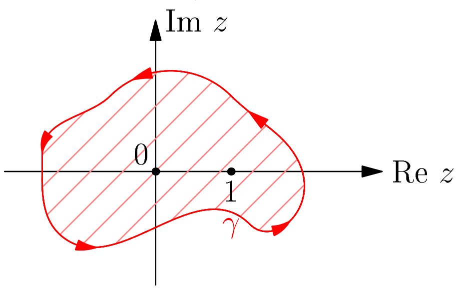
On a

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_{z_1}(f) = \text{Rés}_0(f) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[2z + \frac{3z^2}{z-1} + 1\right] = \lim_{z\to 0}\left[2 + \frac{6z(z-1) - 3z^2}{(z-1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\,[2+0] = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_{z_2}(f) = \text{Rés}_1(f) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)f(z)\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\left[\frac{2(z-1)}{z} + \frac{3(z-1)}{z-1} + \frac{z-1}{z^2}\right] = 0 + 3 + 0 = 3
\end{aligned}$$

On se retrouve avec 5 cas possibles :

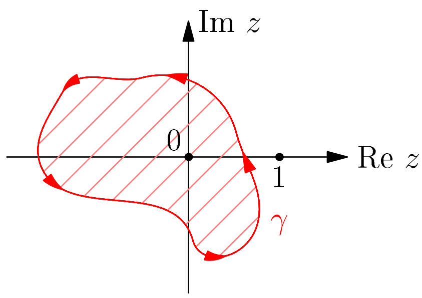
Cas 1. 0 **et** $1 \in \text{int}\gamma$



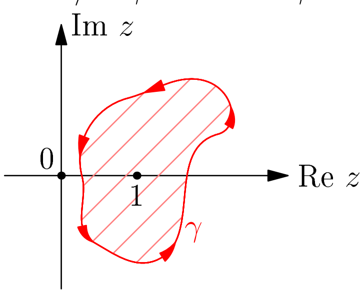
$$\begin{aligned}
f(z)\ dz &= 2\pi i\left[\text{Rés}_0(f) + \text{Rés}_1(f)\right] \\
&= 2\pi i[2+3] = 10\pi i
\end{aligned}$$

Cas 2. $0 \in \text{int}\gamma$ mais $1 \notin \text{int}\gamma$

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \text{Rés}_0 f(z) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$



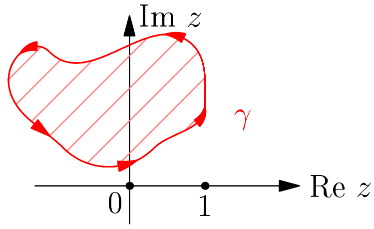
Cas 3. $0 \notin \text{int}\gamma$ mais $1 \in \text{int}\gamma$



$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \text{Rés}_1(f) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

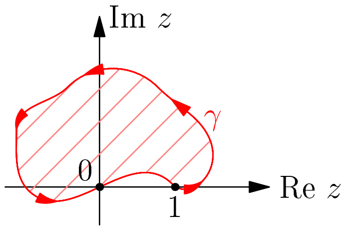
Cas 4. $0 \notin \overline{\text{int}\gamma}$ et $1 \notin \overline{\text{int}\gamma}$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \qquad \textit{Théorème de Cauchy}$$

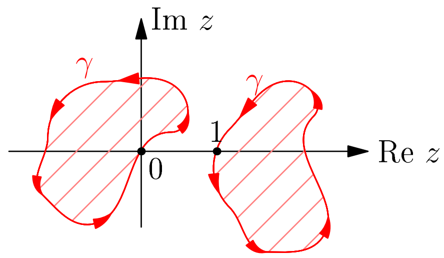


f holomorphe dans un domaine D simplement connexe tel que $\overline{\text{int}\gamma} \subset D$ et $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma} \subset D$

Cas 5. $0 \in \gamma$ ou $1 \in \gamma$ *(ou* 0 *et* $1 \in \gamma$*)*



ou



Dans ce cas, l'intégrale n'est pas bien définie.

Autres exemples, exercices 1 et 2 série 13.

7.2 Applications du Théorème des résidus au calcul d'intégrales réelles

7.2.1 Calcul d'intégrales de fonctions périodiques :

But

Calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

avec $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \end{array}$ où p et q sont des fonctions polynômiales avec $q(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$

Méthode

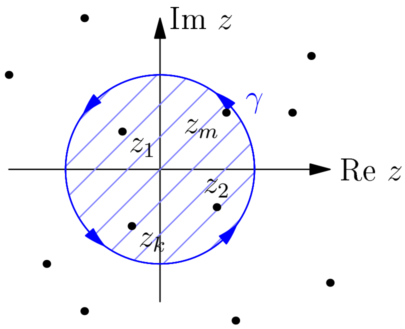
- On pose $z = e^{i\theta}$ et on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

- On définit $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$z \mapsto \tilde{f}(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

Soit $gamma$ le cercle **unité** centré en $z = 0$ orienté positivement z_k pour $k = 1, ..., m$ les singularités de $\tilde{f}$ **à l'intérieur** de γ.



$z_k \notin \gamma$ car $q(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$
$\Longrightarrow$ pas de singularité de $\tilde{f}$ sur γ.

- On applique le Théorème des résidus **à la fonction** $\tilde{f}$ intégrée le long de γ :

$$\int_\gamma \tilde{f}(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$$

Citation de M. Cibils:

"Et je pense que l'excitation est à son comble !"

Remarque : On voit que :

$$\begin{aligned} \int_\gamma \tilde{f}(z)\ dz &= \int_\gamma \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\ dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} f\left(\cos\theta, \sin\theta\right) ie^{i\theta}\ d\theta \end{aligned}$$

En ayant posé $z = \gamma(\theta) = e^{i\theta}$: cercle de rayon unité centré en 0 orienté positivement. On a exactement l'intégrale qu'on veut calculer ! Le résultat est donc

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(f)$$

où z_k pour $k = 1, 2, ..., m$ sont les singularités de $\tilde{f}$ à l'intérieur du cercle unité γ centré en zéro.

Citation de M. Cibils:

"Je ne sais pas si vous vous rendez compte de la performance."

Exemples

Exemple 1: Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\sin\theta}$$

On a $f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}-\sin\theta}$ où $\sqrt{5}-\sin\theta \neq 0$ pour $\theta = [0, 2\pi]$ et

$$\tilde{f}(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz}\left[\frac{1}{\sqrt{5}-\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{iz}\left[\frac{1}{\frac{2i\sqrt{5}z-z^2+1}{2iz}}\right] = \frac{2}{-z^2+2i\sqrt{5}z+1}$$

Les singularités de $\tilde{f}$ sont les zéros de $-z^2+2i\sqrt{5}z+1$

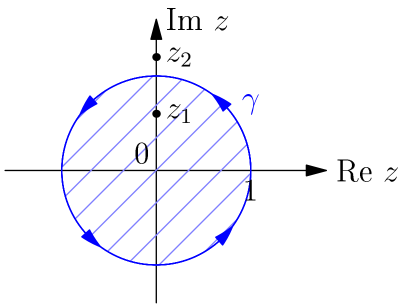
$$\Delta = (2i\sqrt{5})^2 + 4 = -20+4 = -16$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$z_1 = \frac{-2i\sqrt{5}+4i}{-2} = i(\sqrt{5}-2) \qquad z_2 = \frac{-2i\sqrt{5}-4i}{-2} = i(\sqrt{5}+2)$$

On a

$$z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1 = -(z-z_1)(z-z_2) = -[z-i(\sqrt{5}-2)][z-i(\sqrt{5}+2)]$$
$$\tilde{f}(z) = \frac{-2}{\left[z-i(\sqrt{5}-2)\right]\left[z-i(\sqrt{5}+2\right]}$$

Soit γ le cercle unité en $z=0$ et orienté positivement :



$$0 < \mathrm{Im} z_1 = \sqrt{5}-2 < 1 \implies z_1 \in \mathrm{int}\gamma$$
$$\mathrm{Im} z_2 = \sqrt{5}+2 > 1 \implies z_2 \notin \mathrm{int}\gamma$$

$z_1 = i(\sqrt{5}-2)$ est un pôle d'ordre 1 de $\tilde{f}$ et

$$\text{Rés}_{z_1}(\tilde{f}) = \lim_{z\to i(\sqrt{5}-2)} \left(\left[z-i(\sqrt{5}-2)\right] \frac{-2}{\left[z-i(\sqrt{5}-2)\right]\left[z-i(\sqrt{5}+2\right]}\right)$$
$$= \lim_{z\to i(\sqrt{5}-2)} \left[\frac{-2}{z-i(\sqrt{5}-2)}\right] = \frac{-2}{-4i} = \frac{1}{2i}$$

Le résultat est donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\sin\theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Exemple 2: Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

On a $f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta}$ où $2+\cos\theta \neq 0$ pour $\theta = [0, 2\pi]$ et

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz}\frac{1}{2+\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \\
&= \frac{1}{iz}\frac{1}{\frac{4z+z^2+1}{2z}} = \frac{2}{i(z^2+4z+1)}
\end{aligned}$$

Les singularités de $\tilde{f}$ sont les zéros de z^2+4z+1

$$\Delta = 16-4 = 12$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

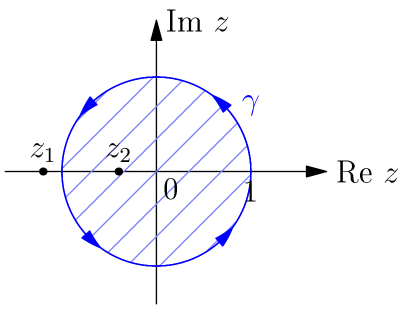
$$z_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-2 \qquad z_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-2$$

On a

$$\begin{aligned}
z^2+4z+1 = (z-z_1)(z-z_2) &= \left[z-(\sqrt{3}-2)\right]\left[z+(\sqrt{3}+2)\right] \\
\tilde{f}(z) &= \frac{2}{i(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}
\end{aligned}$$

Soit γ le cercle unité en $z=0$ et orienté positivement :

$$\begin{aligned}
-1 < z_1 = \sqrt{3}-2 < 0 &\implies z_1 \in \text{int}\gamma \\
z_2 = -(2+\sqrt{3}) < -1 &\implies z_2 \notin \text{int}\gamma
\end{aligned}$$



$z_1 = \sqrt{3}-2)$ est un pôle d'ordre 1 de $\tilde{f}$ et

$$\text{Rés}_{z_1}(\tilde{f}) = \lim_{z\to z_1)}(z-z_1)\tilde{f} = \lim_{z\to\sqrt{3}-2}(z-\sqrt{3}+2)\frac{2}{i(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

Le résultat est donc :

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Autres exemples : exercices 3 *et* 4 *série série* 13 *exercice* 1 *et* 2 *série* 14.

7.2.2 Calcul d'intégrales généralisées

But

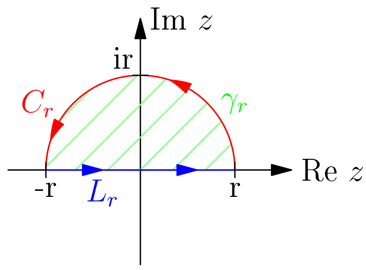
Calculer des intégrales de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+ (\alpha \geqslant 0)$$

et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des fonctions polynômiales telles que

$$q(x) \neq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$$
$$\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geqslant 2$$

Méthode
On choisit un nombre réel $r > 0$ et on considère la courbe $\gamma_r \overset{\text{déf}}{=} L_r \cup C_r$ orientée positivement où L_r et le **segment de droite** $[-r, r]$ sur **l'axe réel** C_r est le **demi-cercle** de rayon r centré en $z = 0$ situé **dans le demi-plan supérieur**



$\gamma_r = L_r \cup C_r$ est une courbe simple régulière orientée positivement.

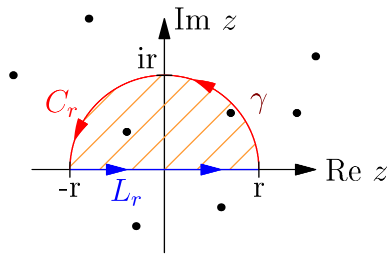
On définit la fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto g(z) = f(z)e^{i\alpha z} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}$ *variable $x \in \mathbb{R}$ remplacée par $z \in \mathbb{C}$ dans l'intégrant.*

Citation de M. Cibils:

"Et là évidemment je suis en manque, en manque de fonction complexe."

Constatation

les seules singularités de g sont les zéros de q. Comme q est une fonction polynômiale et $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors q possède un nombre **fini** de zéros et **aucun** est situé **sur** l'axe réel.



Idée

On choisit $r > 0$ suffisamment grand pour que **tout** les zéros de q situés dans **le demi-plan supérieur** soient à **l'intérieur** de γ_r *possible car **nombre fini** de zéros.* En appliquant le Théorème des résidus à $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ intégrée à la fonction le long de la courbe γ_r

On a :

$$\int_{\gamma_r} \underbrace{f(z)e^{i\alpha z}}_{g(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$$

où z_k pour $k = 1, ..., m$ sont les singularités de f *c'est à dire les zéros de q* situés dans le demi-plan **supérieur**. D'autre part; puisque $\gamma_r = L_r \cup C_r$ on a

$$\int \gamma_r f(z)e^{i\alpha z}\, dz = \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\, dz + \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\, dz$$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to+\infty} \int \gamma_r f(z)e^{i\alpha z}\, dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\, dz + \lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\, dz$$

Étude de chaque limites :

1. $$\lim_{r\to+\infty}\int \gamma_r f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \lim_{r\to+\infty}\underbrace{\left[2\pi i\sum_{k=1}^{m}\text{Rés}_{z_k}(g)\right]}_{\text{indépendantes de } r} = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\text{Rés}_{z_k}(g)$$

2. $$\lim_{r\to+\infty}\int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz \overset{z=x\in[-r,r]\subset\mathbb{C}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{r\to+\infty}\int_{r}^{r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

   est l'intégrale que l'on veut calculer.

3. On montre que si $\deg(q)-\deg(p)\geqslant 2$ alors

   $$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0 \qquad \text{on l'admet sans preuve.}$$

Citation de M. Cibils:

"Je sors le drapeau vert de l'optimisme, car c'est pas fini mais c'est déjà ça."

Résultat final
l'étude des trois limites donne la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\text{Rés}_{z_k}(g)$$

où $g(z) \overset{\text{déf}}{=} f(z) = e^{i\alpha z}$ et z_k pour $k=1,...,m$ sont les singularités de f situées dans le demi-plan supérieur *c'est-à-dir les zéros de* q *tels que* $Imz_k > 0$.

Citation de M. Cibils:

"On a les singularité de f situées dans le demi-plan supérieur. Pas celles sur le demi-plan inférieur, et permettez moi de vous le dire, vous vous en foutez... et moi aussi !"

7.2.3 Exemples

Exemple 1: Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+16}\,dx$$

Ici $\alpha=0$ et $f(x)=\frac{x^2}{x^4+16}$. On a donc $p(x)=x^2$ et $q(x)=x^4+16$
Les conditions sont satisfaites :

$$q(x)\neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$
$$\deg(q)-\deg(p) = 4-2 = 2 \geqslant 2$$

Calcul par la méthode des résidus avec $g(z)\overset{\alpha=0}{=} f(z)=\frac{z^2}{z^4+16}$.
Recherche des singularités de $f \iff$ recherche des zéros de $q \iff q(z)=0$

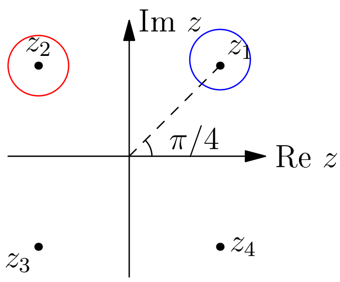
$$\begin{aligned}
\implies z^4+16=0 &\iff z^4=-16\\
&\iff z^4 = 16e^{i\pi}\\
&\iff z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2n\pi}{4}\right)} \qquad \text{avec } n=0,1,2,3
\end{aligned}$$

Les singularités sont :

pour n = 0 : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$
pour n = 1 : $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i)$
pour n = 2 : $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2}(1+i)$
pour n = 3 : $z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = -\sqrt{2}(-1+i)$

Ce sont des pôles d'ordre 1 de f et on a

$$z^4 + 16 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$



Les seuls résidus qui contribuent à l'intégrale sont z_1 et z_2

Calcul des résidus de f en z_1 et z_2

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_{z_1}(f) &= \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}(1+i)} \\
&= \frac{1-i}{4\sqrt{2}(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{1-i}{8\sqrt{2}} \\
\text{Rés}_{z_2}(f) &= \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}(-1+i)} \\
&= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}\cdot 2} = -\frac{1+i}{8\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,dx = 2\pi i\left(\frac{1-i}{8\sqrt{2}} + \left(-\frac{1+i}{8\sqrt{2}}\right)\right) = 2\pi i \cdot \frac{-2}{8\sqrt{2}} \\
&= \frac{-4\pi}{8\sqrt{2}} i^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Une séance d'exercices sans étudiants c'est comme un réveillon sans champagne ! Mais attention, j'ai pas dis qu'il y aurait du champagne pendant la série."

Exemple 2: Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2+1}\,dx$$

On se ramène à la forme adéquate avec la formule d'Euler : $e^{i5x} = \cos(5x) + i\sin(5x)$
On peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2+1}\,dx = \text{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5x}}{x^2+1}\,dx\right]$$

On considère

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

Avec $\alpha = 5$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On a donc $p(x) = 1$ et $q(x) = x^2 + 1$ donc $\deg(q) - \deg(p) = 2$ et $q(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(z)e^{i5z} = \frac{e^{i5z}}{z^2+1}$$

On veut $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1 \implies z_1 = i$ ou $z_2 = -i$
Le seul pôle que l'on considère est z_1 qui est un pôle d'ordre 1 (demi-plan supérieur).

$$\begin{aligned}\text{Rés}_{z_1}(g) &= \lim_{z\to z_i} g(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{i5z}}{(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{e^{i5z}}{2i} = \frac{e^{-5}}{2i}\end{aligned}$$

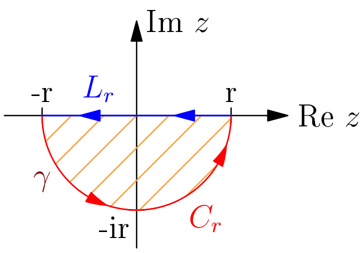
Alors

$$\begin{aligned}I &= \text{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5z}}{z^2+1}\,dz\right] = \text{Re}\left[2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)\right] \\ &= \text{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-5}}{2i}\right) = \frac{\pi}{e^5}\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^5}$$

Remarque : Pour des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{i\alpha z}\,dz$ avec $\alpha \leqslant 0$, on applique la même méthode en choisissant le demi-cercle C_r situé dans la partie **inférieure** et en considérant les singularités de f dans le **demi-plan** inférieur.



Attention aux signes venant de l'orientation positive du parcours de $\gamma_r = L_r \cup C_r$

Esquisse de preuve

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz \overset{z=i^n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i^n)\,du \text{ Cours}$$

En posant : $C_r = \gamma(u)$

Annexe A

Formules utiles :

A.1 Séries de Taylor :

Toutes les séries suivantes sont évaluées autour de $x = 0$.

Exponentielle

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Logarithme

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Somme d'une série géométrique

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Fonctions trigonométriques

sinus $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

cosinus $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

A.2 Identités Trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right) \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) \\
\cos x + 1 &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1
\end{aligned}$$