**Algèbre Linéaire** Tissot

Semestre de printemps 2019

# Corrigé 3

## Applications linéaires : exercice 17

(a) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\operatorname{Im} f = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \mathbb{R}^2$$

  car ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
  Par le théorème de la dimension : $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
  La dimension du noyau est donc nulle ainsi $\ker f = \{\vec{0}\}$.
- Recherche des points fixes :
  $f(\vec{x}) = \vec{x} : MX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad$ vrai $\forall x$
  L'axe Ox est donc l'ensemble des points fixes.
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \quad f(\vec{x}) = f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) = x\,\vec{e}_1 - y\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
  $f$ est une symétrie orthogonale d'axe $Ox$ :
  $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}\,'$ avec $P = (x\,;\,y)$ et $P' = (x\,;\,-y)$.

(b) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\operatorname{Im} f = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \mathbb{R}^2$$

  car ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
  Par le théorème de la dimension : $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
  La dimension du noyau est donc nulle donc $\ker f = \{\vec{0}\}$.
- Recherche des points fixes :
  $f(\vec{x}) = \vec{x} : MX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x = x \\ -y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ;
  Le seul point fixe est donc l'origine $O = (0\,,\,0)$.
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \quad f(\vec{x}) = f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) = -x\,\vec{e}_1 - y\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
  $f$ est une symétrie centrale de centre $O$ ou aussi une rotation d'angle $\pi$ :
  $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}\,'$ avec $P = (x\,;\,y)$ et $P' = (-x\,;\,-y)$.

(c) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ici la matrice n'est pas diagonale mais elle est relativement simple à étudier.

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\mathrm{Im}\, f = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \mathbb{R}^2$$

car les deux vecteurs sont linéairement indépendants.
Par le théorème de la dimension : $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ;
la dimension du noyau est donc nulle, d'où : $\ker f = \{\vec{0}\}$.
- Recherche des points fixes :
$f(\vec{x}) = \vec{x} : MX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y = x \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ;
Le seul point fixe est donc l'origine $O = (0\,,\,0)$.
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ : $f(\vec{x}) = f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) = -y\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
- La norme d'un vecteur $\vec{x}$ et de son image $f(\vec{x})$ sont les égales :
$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Qu'en est-il des angles ?
Soit $\varphi$ l'angle entre deux vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ :
$\cos\varphi = \dfrac{\vec{x}\vec{x}'}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}'\|} = \dfrac{xx' + yy'}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}'\|}$
et soit $\varphi'$, l'angle entre leurs images $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ et $f(\vec{x}') = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ :
$\cos\varphi' = \dfrac{f(\vec{x})f(\vec{x}')}{\|f(\vec{x})\| \cdot \|f(\vec{x}')\|} = \dfrac{yy' + xx'}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}'\|} = \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \varphi'$
L'angle entre deux vecteurs et l'angle entre leurs images est donc le même.
- On peut conclure que $f$ est une rotation de centre $O$. On détermine l'angle $\alpha$ de rotation en calculant, par exemple, l'angle entre le vecteur $\vec{e}_1$ et son image : $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(d) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\mathrm{Im}\, f = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \quad \text{droite}\,(O\,,\,\vec{e}_1)$$

L'image de $\vec{e}_2$ est le vecteur $\vec{0}$; on a donc immédiatement : $\ker f$ est la droite $(O\,,\,\vec{e}_2)$.
- Recherche des points fixes :
On remarque directement que $\mathrm{Im} f$ est l'ensemble des points fixes.
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ : $f(\vec{x}) = f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) = x\,\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
$f$ est une projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur $Ox$.

(e) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\operatorname{Im} f = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \mathbb{R}^2$$

car les deux vecteurs sont linéairement indépendants.
Par le théorème de la dimension : $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ;
la dimension du noyau est donc nulle : $\ker f = \{\vec{0}\}$.

- Recherche des points fixes :
  L'ensemble des points fixes se réduit à l'origine O.
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ : $f(\vec{x}) = f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) = 2x\,\vec{e}_1 + 2y\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$
  $f$ est une homothétie de centre O et de rapport 2.

(f) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\operatorname{Im} f = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \text{axe}\, Ox$$

  L'image de $\vec{e}_2$ est le vecteur $\vec{0}$ ; on a donc immédiatement : $\ker f = (O\,,\,\vec{e}_2)$ ;
- On décompose l'endomorphisme $f$ en deux applications plus simples !
  $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  $f$ est la composition d'une projection orthogonale sur $Ox$ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport 2.

**Applications linéaires : exercice 19**

La base de $\mathbb{R}^2$ est supposée orthonormée.

Dans e cas, la matrice d'une rotation de centre $O$ et d'angle $\varphi$ est : $M_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

La projection étant orthogonale, on peut utiliser le produit scalaire. Pour déterminer la matrice de la projection, on cherche l'image d'un vecteur $\vec{x}$ quelconque ou on calcule l'image des vecteurs de la base.

- Matrice de l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k = 2$ : $M_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Matrice de la rotation de centre $O$ et d'angle $\varphi$ tel que $\arccos\varphi = \frac{4}{5}$.
  $\varphi \in [0\,;\,\pi]$ donc $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ et $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, d'où

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matrice de la projection orthogonale sur la droite $(O\,,\,\vec{u})$ :

$$p(\vec{x}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} = \frac{1}{5}\left[(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M_p = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit la matrice de $f = r + (h \circ p)$ : $\quad M_f = M_r + M_h \cdot M_p$

$$M_f = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- Recherche de l'ensemble des points fixes :

$f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad M_f\, X = X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12x + y = 5x \\ 7x + 6y = 5y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 7x + y = 0$

L'ensemble des points fixes est donc la droite d'équation $7x + y = 0$.

**Applications linéaires : exercice 20**

Rappel : lorsqu'une application $f$ est linéaire $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Autrement dit, l'origine $O$ est un point fixe de toute application linéaire.

(a) La symétrie $s$ étant un endomorphisme du plan, elle est linéaire donc $O$ est un point fixe de $s$. De plus toute symétrie admet son axe comme ensemble de points fixes : $s(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}$, pour tout point $M$ de l'axe.

L'axe de $s$ passe donc par le point $O$.

Elle est orthogonale lorsque son axe est perpendiculaire à la direction $\overrightarrow{PP'}$.

L'axe de la symétrie est donc la droite passant le point $O$ et par $I$, milieu de $(PP')$.

$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ -3+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{PP'} = (3+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})(-3+\sqrt{3}) = 0$

L'axe $(O\,, I)$ de la symétrie est perpendiculaire à $(PP')$ : la symétrie est bien orthogonale.

D'où la pente de l'axe : $m = \dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

et son équation : $\quad y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$

(b) La base étant orthonormée, on peut utiliser la matrice d'une symétrie orthogonale et la matrice d'une rotation suivantes

$M_s = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad$ et $\quad M_r = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

- On a besoin de l'angle entre $Ox$ et l'axe de la symétrie.

  Soit $\alpha = \angle(\vec{e}_1\,, s)$, alors $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

  $$M_s = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque :
On peut aussi utiliser les points $P$ et $P'$ car : $s(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$ donc

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 1/2 + \sqrt{3}/2 \\ \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1/2 + \sqrt{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 2\alpha = 1/2 \\ \sin 2\alpha = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

- $r^4$ est une rotation de centre $O$ et angle $4\varphi = -\frac{\pi}{6}$
  d'où :
  $$M_{r^4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
- $M_g = M_s \cdot M_{r^4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) On commence par déterminer la matrice de $f$.

$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors

$$M_h = M_f - M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : tout point $P$ de l'axe $Ox$ a pour image le point $O$.

$h(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$ : tout point $M$ de l'axe $Oy$ a pour image lui-même. L'axe $Oy$ est donc l'ensemble des points fixes de $h$.

L'application $h$ est donc une projection orthogonale du plan sur la droite $(O\,,\,\vec{e}_2)$.

## Applications linéaires : exercice 21

(a) 
- $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 6x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  D'où la matrice de $g$ :
  $$M_g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

  On en déduit l'image des vecteurs de base : $g(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et

  $g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,\vec{e}_1$
- $\operatorname{Im} g = [g(\vec{e}_1)\,,g(\vec{e}_2)]_{sev} = [g(\vec{e}_1)]_{sev} = [\vec{a}]_{sev}$ où $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\operatorname{Im} g$ est une droite passant par $O$, d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Pour déterminer $\operatorname{Ker} g$ on résoud : $g(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 0$

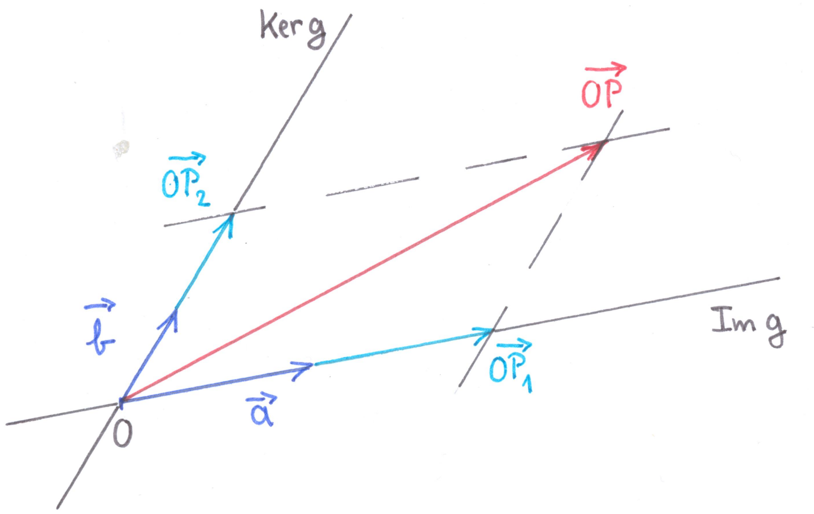
  $\operatorname{Ker} g$ est une droite de vecteur directeur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Les vecteurs $\vec{a} \in \operatorname{Im} g$ et $\vec{b} \in \operatorname{Ker} g$ étant linéairement indépendants, ils définissent une base $\mathcal{B}'(\vec{a}\,,\,\vec{b})$.

(b) Décomposer un vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ suivant les directions de $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$, revient à décomposer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'(\vec{a}\,,\,\vec{b})$. Cette décomposition est unique.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 \; + \; \overrightarrow{OP}_2$

$\overrightarrow{OP}_1$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\operatorname{Im} g$ parallèlement à $\operatorname{Ker} g$,
$\overrightarrow{OP}_2$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\operatorname{Ker} g$ parallèlement à $\operatorname{Im} g$.




On calcule $g(\overrightarrow{OP}) = g(\overrightarrow{OP}_1) \; + \; g(\overrightarrow{OP}_2) = g(\overrightarrow{OP}_1) + \vec{0} = g(\overrightarrow{OP}_1)$ car $\overrightarrow{OP}_2 \in \operatorname{Ker} g$

$\overrightarrow{OP}_1 \in \operatorname{Im} g \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP}_1 \; = \; \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'où $g(\overrightarrow{OP}_1) \; = \; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 7\lambda \\ 14\lambda \end{pmatrix} \; = \; \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; 7\,\overrightarrow{OP}_1$

En conclusion : $\quad g(\overrightarrow{OP}) \; = \; 7\,\overrightarrow{OP}_1$

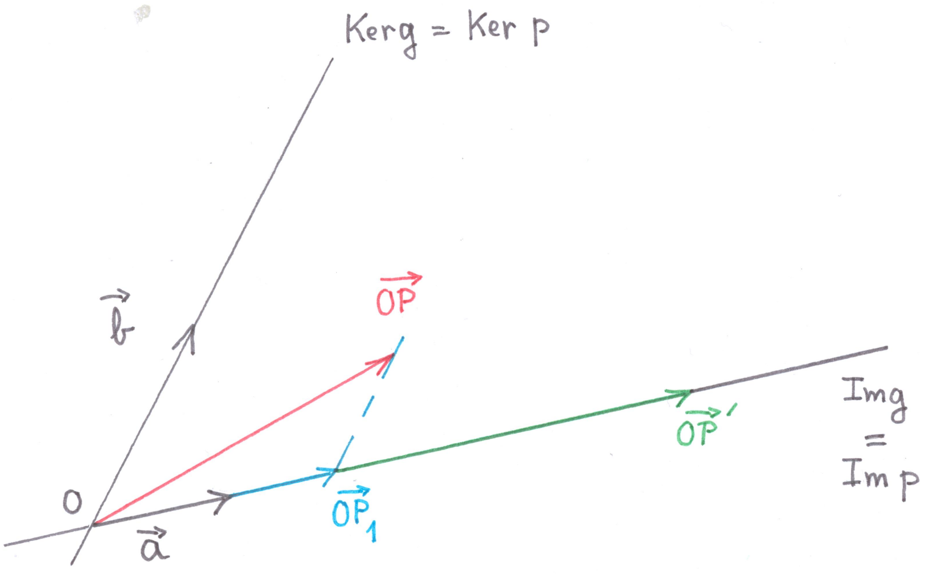
- Interprétation géométrique de $g$ :

  soit $h$ l'homothétie de centre $O$ et rapport 7,
  et $p$ la projection du plan sur la droite $\operatorname{Im} g$, de direction parallèle à $\operatorname{Ker} g$.

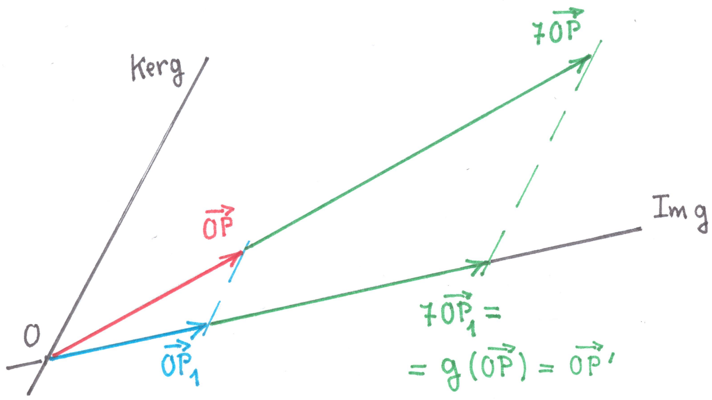
  On a : $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} g$.

  Alors $g = h \circ p$ car :

$$
\begin{array}{rcll}
g(\overrightarrow{OP}) & = & (h \circ p)(\overrightarrow{OP}) \; = \; h\,(p(\overrightarrow{OP})) \; = & \\
& = & h\,(p(\overrightarrow{OP}_1) \; + \; h\,(p(\overrightarrow{OP}_2)) \; = & \text{(car } h \text{ et } p \text{ sont linéaires)} \\
& = & h\,(\overrightarrow{OP}_1) \; + \; h(\vec{0}) \; = & \text{(car } \overrightarrow{OP}_2 \in \operatorname{Ker} p \text{ et } p(\overrightarrow{OP}_1) = \overrightarrow{OP}_1) \\
& = & h\,(\overrightarrow{OP}_1) \; + \; \vec{0} \; = \; 7\,\overrightarrow{OP}_1 \; = \; \overrightarrow{OP'} &
\end{array}
$$




*Remarque* :
Il est évident, par Thalès, que $(h \circ p)(\overrightarrow{OP}) = (p \circ h)(\overrightarrow{OP}) = p(7\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$



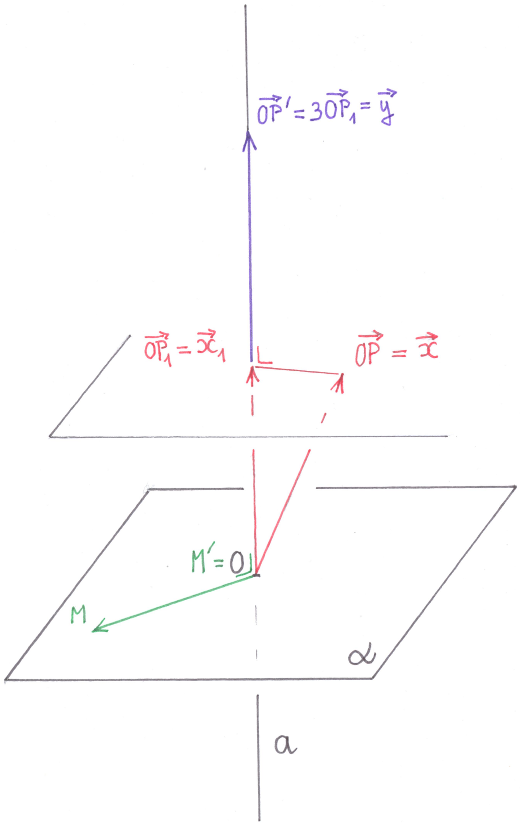

- Matrice de $g$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{a}\,,\,\vec{b})$.

$g(\vec{a}) = 7\,\vec{a} + 0\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $g(\vec{b}) = 0\,\vec{a} + 0\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Ainsi : $M'_g = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Applications linéaires : exercice 23**

(a) On représente à l'aide d'un schéma dans l'espace l'application $f$.




- $\operatorname{Im} f = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}\,.$

  Pour tout $\vec{y} \in \operatorname{Im} f\,$, il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que

  $\vec{y} = f(\vec{x}) = h(p(\vec{x})) = h(\vec{x}_1)$ et $\vec{x}_1 \in a \;\Leftrightarrow\; \vec{x}_1 = \lambda\vec{a}$

  $\vec{y} = h(\lambda\vec{a}) = 3\lambda\vec{a} = k\vec{a} \;\Leftrightarrow\; \vec{y} \in a$

  $\operatorname{Im} f$ est donc la droite $a = (O\,,\vec{a})$.

- $\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

  Pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ :

  $$\begin{aligned} f(\vec{x}) = h(p(\vec{x})) = \vec{0} \;&\Leftrightarrow\; p(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\qquad \text{car } h \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow\; \vec{x} \in \alpha(O\,,\vec{n}_\alpha = \vec{a}) \end{aligned}$$

  $\operatorname{Ker} f$ est donc le plan $\alpha$ passant par $O$ et de vecteur normal $\vec{a}\,$.

(b)
- La matrice de l'homothétie est $M_h = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- La projection étant orthogonale, on peut utiliser le produit scalaire pour calculer l'image des vecteurs de la base canonique.

  La projection est définie par $p(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|})\, \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

  On en déduit l'image des vecteurs de la base

  $$p(\vec{e}_1) = (\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|})\, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  $$p(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|})\, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$p(\vec{e}_3) = (\vec{e}_3 \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|})\, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

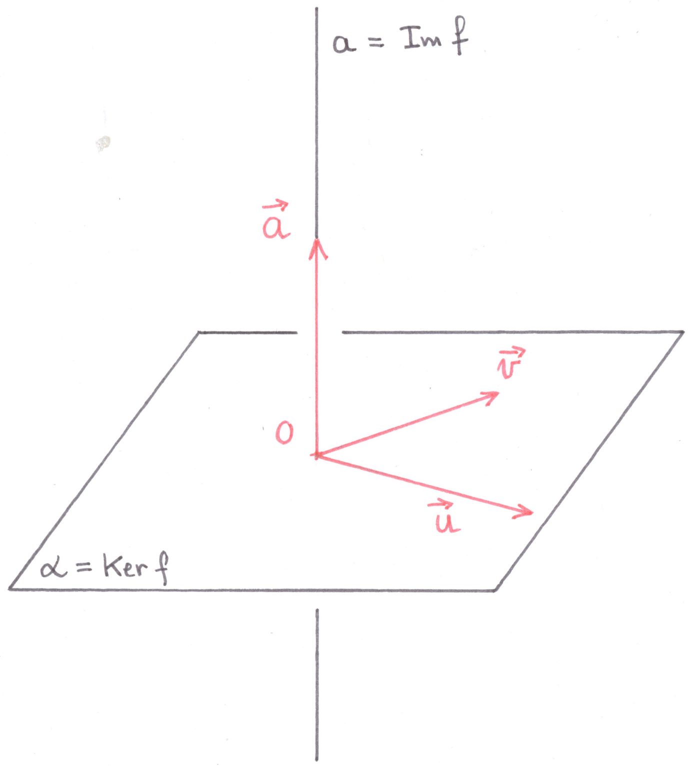
  D'où la matrice $M_p$ de la projection

  $$M_p = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On a alors la matrice de $f$ dans la base canonique

$$M_f = M_h \cdot M_p = \; 3\,I_3 \cdot M_p \; = \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On choisit la base suivante : $\mathcal{B}\,(\vec{a}\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ telle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\alpha$ , $\vec{a}$ est le vecteur directeur du noyau. Il est évident que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants.
  On calcule les composantes des images de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ pour déterminer les colonnes de la matrice.




On calcule les composantes des images de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ pour déterminer les colonnes de la matrice.

$$f(\vec{a}) = 3\,\vec{a} = 3\,\vec{a} + 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} \; = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{u}) = \vec{0} = 0\,\vec{a} + 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} \; = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = \vec{0} = 0\,\vec{a} + 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} \; = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

D'où la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}\,(\vec{a}\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ : $\quad M'_f \; = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Applications linéaires : exercice 24**

(a) • On détermine la matrice de $f$ :

$$M_f = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -2f(\vec{e}_1)$ , $\quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2f(\vec{e}_1)$

  D'où : $\quad \mathrm{Im}\, f = [f(\vec{e}_1)]_{sev}$

  $\mathrm{Im}\, f$ est donc la droite d'équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

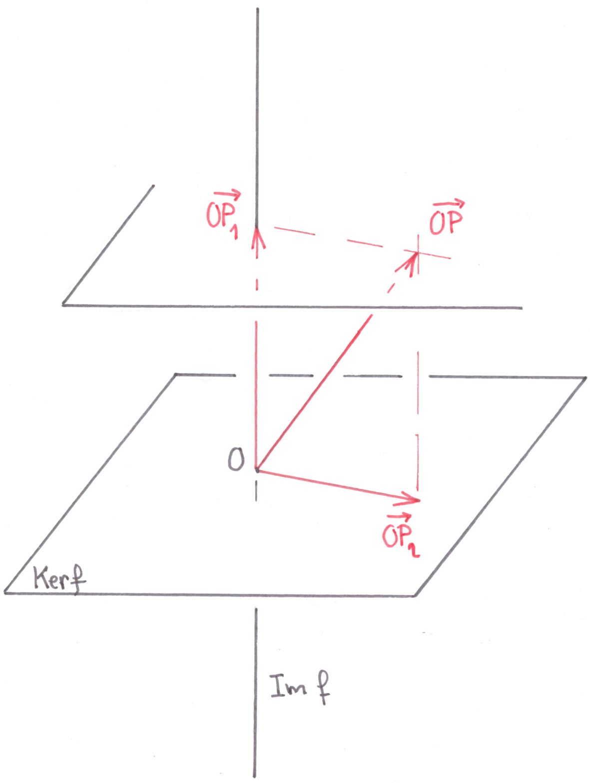
- $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ -2x + 4y - 4z & = 0 \\ 2x - 4y + 4z & = 0 \end{cases}$

  $\mathrm{Ker}\, f$ est le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$ .

  On remarque que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont orthogonaux.

On utilise $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ pour donner une interprétation géométrique.
On décompose un vecteur quelconque $\overrightarrow{OP}$ suivant les directions de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ ,
Cette décomposition est unique car les vecteurs directeurs de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont linéairement indépendants.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2$
$\overrightarrow{OP}_1$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$ ,
$\overrightarrow{OP}_2$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\mathrm{Ker}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, f$ .




On calcule $f(\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OP}_1) + f(\overrightarrow{OP}_2) = f(\overrightarrow{OP}_1) + \vec{0} = f(\overrightarrow{OP}_1)$ car $\overrightarrow{OP}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$

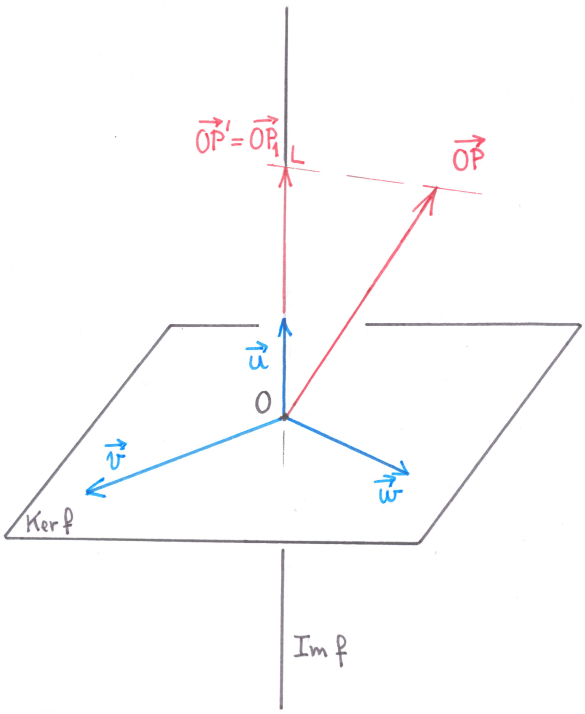
$$\overrightarrow{OP}_1 \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } f(\overrightarrow{OP}_1) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9\lambda \\ -18\lambda \\ 18\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \overrightarrow{OP}_1$$

En conclusion : $\quad f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}_1$

L'application $f$ est donc une projection orthogonale de l'espace sur la droite $\operatorname{Im} f$ d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On choisit la base suivante : $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ telle que $\vec{u} \in \operatorname{Im} f$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de $\operatorname{Ker} f$.
On calcule les composantes des images de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.




$$f(\vec{u}) = \vec{u} = 1\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = \vec{0} = 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{w}) = \vec{0} = 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

D'où la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ :

$$M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Applications linéaires : exercice 26**

(a) • On calcule $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2)]_{sev} = \mathbb{R}^2$

Pour déterminer $\text{Ker}\, f$ on résoud :
$f(\vec{x}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \text{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$

- Le point $P(x\,,\; y)$ est un point fixe de $f$ si et seulement si
$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = x \\ -3x + 4y = y \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; y = x$
L'ensemble des points fixes de $f$ est la droite d'équation $y = x$, de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- L'endomorphisme $f$ admet un ensemble de points fixes, ce n'est donc ni une homothétie ni une rotation. Ce n'est pas une projection car $\text{Im}\, f = \mathbb{R}^2$.
$f$ est peut être une symétrie ou une affinité.

(b) Il faut montrer que quelque soit $M$, si $M'$ est son image alors $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à une direction fixe $\vec{v}$.
Soit $M(x\,, y)$ alors $f(OM) = OM'$, d'où

- $f(OM) = OM' = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ -3x + 4y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ -3x + 4y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3y \\ -3x + 3y \end{pmatrix} = (3x - 3y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 - 3(-1) \\ -3 + 4(-1) \end{pmatrix} = 7\,\vec{v}$

(c) On calcule $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{u}\,,\; \vec{v})$ pour déterminer la matrice de $f$.
$f(\vec{u}) = \vec{u} = 1\,\vec{u} + 0\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $f(\vec{v}) = 7\,\vec{v} = 0\,\vec{u} + 7\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

D'où $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$f$ est doncune affinité d'axe la droite $(O\,, \vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et rapport 7.