Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 40 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \,:\, 8x^2 + 6xy - 2x + 6y - 1 = 0$$

(a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le repère R_u dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est réduite.

(b) Déterminer, relativement au repère R_e, les coordonnées des sommets.

(c) Représenter, avec précision, la conique $\mathcal{C}$ dans le repère R_e.
Unité 4 carrés et origine placée à 10 cm du bas de la feuille.

5 pts

2. Le plan est muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne l'équation d'une famille de coniques:

$$\mathcal{F} \,:\, (m+4)\,x^2 + 6\,xy + (m-4)\,y^2 - 2\,x + 6\,y - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

(a) Discuter, en fonction du paramètre m, la nature géométrique des coniques de la famille $\mathcal{F}$ (on ne demande que le genre).

(b) Déterminer l'équation réduite de la parabole non dégénérée de cette famille.

(c) On considère les coniques de la famille $\mathcal{F}$ qui sont des ellipses (réelles).
Déterminer, en fonction de m, l'équation réduite de ces ellipses.
Puis déterminer la valeur de m correspondant à l'ellipse dont le demi-grand axe a pour longueur $\sqrt{3}$.

6 pts

Tournez, SVP

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(-1\,;3)$ et la parabole $\mathcal{P}\,:\;y^2=4x$.

Soit Q un point de l'axe de cette parabole.
On considère la droite p passant par Q et perpendiculaire à (AQ).
On note $M(x_M\,,\,y_M)$ le pôle de p par rapport à la parabole $\mathcal{P}$.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de M lorsque le point Q décrit l'axe de la parabole.
Caractériser la nature géométrique de ce lieu (on ne demande pas de l'étudier).

4 pts