Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les endomorphismes suivants :

- s est une symétrie orthogonale d'axe $(O\,,\,\vec{a})$ telle que $\angle(\vec{e}_1\,,\,\vec{a}) = \frac{\pi}{6}$,
- p est une projection orthogonale sur la droite $4x - 3y = 0$,
- r est une rotation de centre O et d'angle $\varphi = \frac{\pi}{18}$,
- h est une homothétie de centre O et de rapport $k = 25$.

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $l = s^{11} \circ h \circ r^6 \circ p$ par rapport à la base B.

b) En le justifiant, déterminer, avec précision, la nature géométrique de l.

5.5 pts

Réponses :

a) $M_l = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix}$

b) l est une projection sur Im l parallèlement à $\ker l$, composée avec une homothétie de centre O et rapport -7.

2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéairement indépendants.

On considère une affinité g de direction $\vec{v}$, de rapport $k = -2$ et d'axe $(O\,,\,\vec{w})$, avec $\vec{w} = 3\,\vec{u} - 4\,\vec{v}$.

a) Déterminer $g(\vec{u})$ et $g(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
En déduire la matrice de g dans la base $B = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

Soit l'endomorphisme f défini par

$$\begin{cases} f(\vec{u} + \vec{v}) & = & 9\,\vec{v} \\ f(-\vec{u} + \vec{v}) & = & \vec{v} \end{cases}$$

b) Déterminer la matrice M_f de l'application f dans la base B.

c) Dans la base B, calculer la matrice de l'endomorphisme $l = g + f$ et en déduire directement sa nature géométrique.

3 pts

Réponses :

a) $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

b) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $M_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

l est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, direction $\vec{v}$ et rapport 3.

3. Dans l'espace, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme $f = h \circ p$ défini par :

- $\ker f$ est la droite d'équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- h est une homothétie de centre O et de rapport $k = 3$,
- p est une projection orthogonale de l'espace.

a) Déterminer $\operatorname{Im} f$, en le justifiant brièvement, et en donner deux générateurs notés $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Relativement à la base B, déterminer la matrice de f.

Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est M_g par rapport à B:

$$M_g = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que g est bijective et déterminer l'ensemble des points fixes de g.
Calculer $g(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ définis sous a))
En déduire, en le justifiant, la nature géométrique de g.

d) Dans une base judicieusement choisie, à préciser, calculer la matrice de l'endomorphisme $l = 4\,f + 6\,g$.
En déduire la nature géométrique de l.

8 pts

Réponses :

a) Im f est un plan orthogonal à $\ker f$, et passant par O.

Générateurs : par exemple $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\det M_g \neq 0$

Points fixes : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O, \vec{u})$, où $\vec{u}$ est le vecteur directeur de $\ker f$.

d) Soit la base $B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{u})$, où $\vec{u}$ est le vecteur directeur de $\ker f$, alors

$M_l = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

l est une homothétie de centre O et rapport 6.

4. On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ de leur base canonique usuelle.

On considère l'application linéaire f suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}$$

définie par sa matrice $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par rapport à ces bases.

a) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ et en donner une base.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $f^{-1}(\{M\})$.

3.5 pts

Réponses :

a) Base de Im f : $(A\,,B)$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Base de $\ker f$: $(\vec{a})$ avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $f^{-1}(\{M\}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$