8.3.19

Série 13

1. Démontrer les deux formules d'addition suivantes :

$$\begin{cases} \sinh(x+y) & = & \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) & = & \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y) \end{cases}$$

2. Résoudre :

(a) $\cosh x + 2\sinh x = 3$

(b) $\sinh\dfrac{x}{2} + \cosh\dfrac{x}{2}\coth x = -\dfrac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}}$

3. Exprimer $\cosh(2x)$ en fonction de $t = \tanh x$.

4. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\ln\sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;

(b) $\operatorname{Arsh}\left(xy + \sqrt{x^2y^2+y^2-x^2-1}\right)$, avec $y > 1$.

5. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 + 2e^y\sinh(1-x) = e^{2y} \\ \operatorname{Arsh}(\sqrt{5}x) + \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}\frac{1}{y} \qquad \text{tel que} \quad 0 \le x \le y \end{cases}$$

6. Calculer les dérivées de :

(a) $\arcsin(\tanh x)$;

(b) $\arccos\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)$;

(c) $\operatorname{Arth}(\tan x)$;

(d) $(2x^2+1)\operatorname{Arsh}(x) - x\sqrt{1+x^2}$.

7. Simplifier l'expression :

(a) $\operatorname{Arsh}\dfrac{x^2-1}{2x}$;

(b) $\operatorname{Arch}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

8. Résoudre :

$$(\cosh x + \sinh x)^{\operatorname{Arch} x} = (\cosh x - \sinh x)^{\operatorname{Arsh}(2-x)} .$$

Solutions

S2 (a) $\ln 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\ln \frac{1}{3}$

S3 $\cosh 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$

S4 (a) $\ln \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = x$

(b) $\text{Arsh}\left(xy + \sqrt{x^2y^2 + y^2 - x^2 - 1}\right) = \text{Arsh}x + \text{Arch}y$

S5 $S = \{x = 0,\, y = 1;\, x = \frac{1}{2} = y\}$

S6 (a) $\frac{d}{dx}\text{arcsin}\,(\tanh x) = \frac{1}{\cosh x}$

(b) $\frac{d}{dx}\text{arccos}\left(\frac{1}{\cosh x}\right) = \text{sgn}(x)\frac{1}{\cosh x}$

(c) $\frac{d}{dx}\text{Arth}\,(\tanh x) = \frac{1}{\cos 2x}$

(d) $\frac{d}{dx}\left((2x^2+1)\text{Arsh}x - x\sqrt{1+x^2}\right) = 4x\text{Arsh}x$

S7 (a) $\text{Arsh}\frac{x^2-1}{2x} = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ -\ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (b) $\text{Arch}\frac{1+x^2}{1-x^2} = \begin{cases} 2\text{Arth}x & \text{si } 1 > x \geq 0 \\ -2\text{Arth}x & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$

S8 $S = \{\}$.