Physique
Semestre d'automne 2018

Simon Bossoney
Guido Burmeister
moodle.epfl.ch

Corrigé 12

Exercice 1

L'humidité relative H de l'air est le rapport entre la pression de vapeur d'eau et la pression de vapeur d'eau maximale dans l'air :

$$H = \frac{p_{\text{vap}}}{p_{\text{sat}}}\,.$$

Il convient donc de déterminer la pression de vapeur d'eau dans la pièce chaufée à 22°C. Juste après avoir aéré la pièce, l'air qui se trouve dans cette dernière se caractérise par

$$T_0 = 0°\text{C} \quad \text{et} \quad H = 100\%\,.$$

Par conséquent, on a alors

$$p_{\text{vap}} = p_{\text{sat}}(0°\text{C})\,.$$

Comme la pression à l'intérieur de la pièce ne change pas (la pièce n'est pas hermétique), la pression de vapeur reste identique lorsque la température augmente. Ainsi, après avoir chauffé la pièce jusqu'à une température de 22°C, l'humiditité relative de l'air qui s'y trouve est donnée par

$$H(22°\text{C}) = \frac{p_{\text{vap}}}{p_{\text{sat}}(22°\text{C})} = \frac{p_{\text{sat}}(0°\text{C})}{p_{\text{sat}}(22°\text{C})} \cong 23.23\%\,.$$

Exercice 2

Calculer les dérivées successives.
Selon $\vec{e}_x$, $v(t) = \dot{x}(t)$, $a(t) = \ldots$
La vitesse et l'accélération de l'objet sont données par

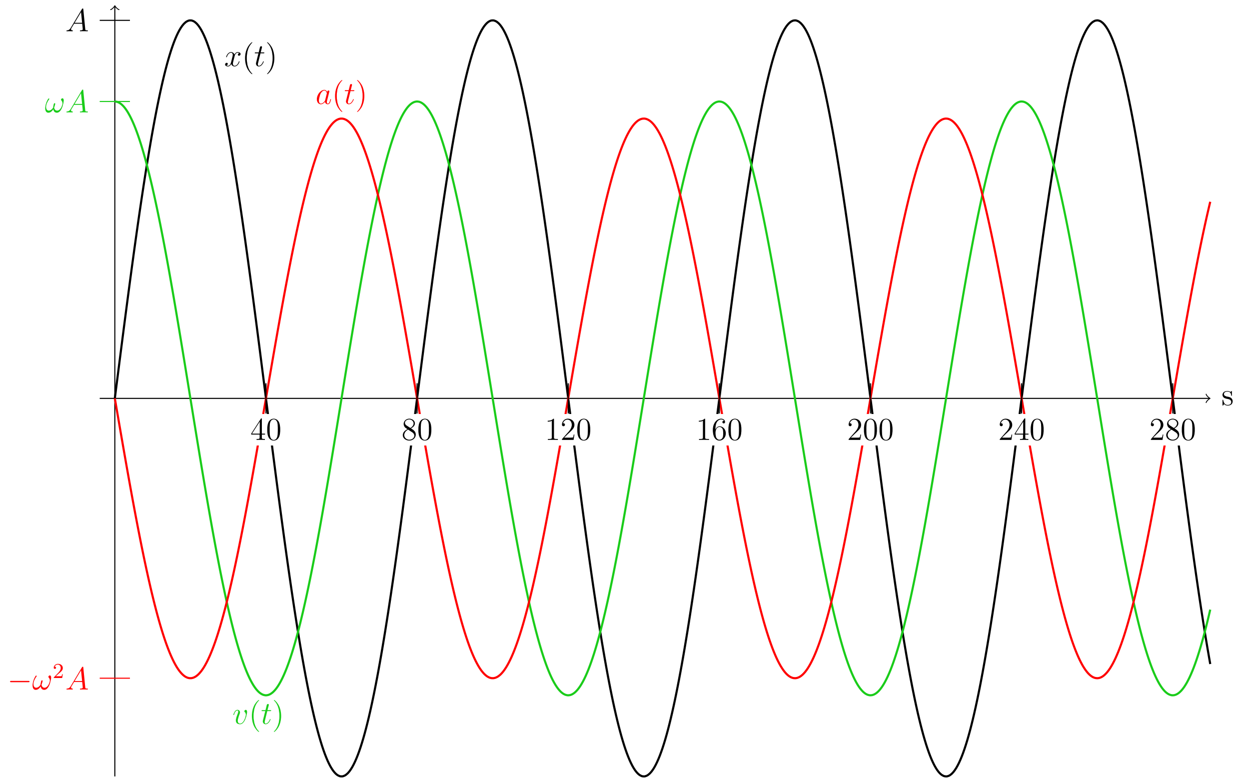
$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \qquad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)\,.$$

On constate

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)\,.$$

C'est l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique (OH).
Donner les trois fonctions sur un même graphique, en veillant à préciser l'unité pour chacune des grandeurs.
La période T du mouvement est telle que

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 80\,\text{s}.$$

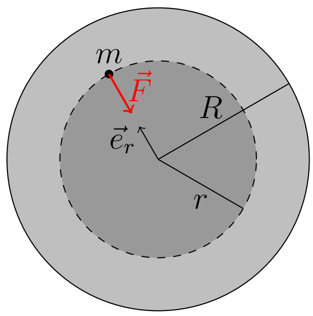


Exercice 3

Considérer l'objet et la force qu'il subit.
A l'intérieur d'une boule homogène, la gravitation exercée sur l'objet à une distance r du centre est celle due uniquement à la boule « intérieure » de rayon r.

La force de gravitation exercée sur un objet de masse m à une distance r du centre de l'astre est

$$\vec{F} = -G\frac{M(r)m}{r^2}\,\vec{e}_r\,,$$



où

$$M(r) = \varrho\frac{4}{3}\pi r^3$$

est la masse de la boule « intérieure » de rayon r. Ainsi

$$\vec{F} = m\frac{4}{3}\pi G\varrho\, r\,\vec{e}_r\,.$$

Ecrire la loi de Newton pour l'objet.
Pour l'objet soumis à la gravitation,

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_r$,

$$-m\frac{4}{3}\pi G\rho\, r = m\ddot{r} \quad \forall\, t$$

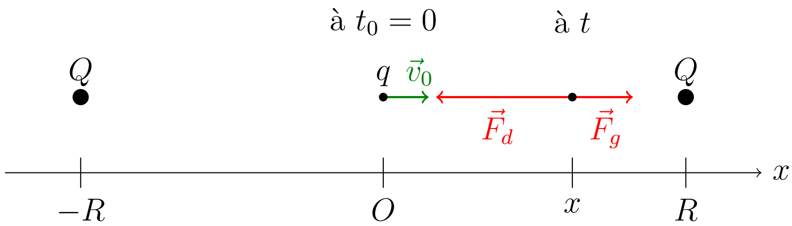
et les conditions initiales sont données par le lâcher à vitesse nulle. Pour $t_0 = 0$,

$$r(0) = R \quad v(0) = \dot{r}(0) = 0\,.$$

En posant
$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho\,,$$
nous avons l'évolution d'un OH :
$$\ddot{r} = -\omega_0^2\, r \quad r(0) = R \quad v(0) = 0\,.$$
La solution est
$$r(t) = R\cos(\omega_0 t) \quad \forall\, t\,.$$
L'objet va faire une oscillation dans le couloir creusé à travers l'astre.

Exercice 4

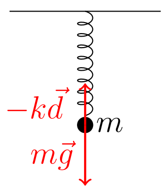
Considérer la charge q.
On négligera le poids de la charge q.



Selon $\vec{e}_x$ (axe défini par les charges) et pour l'origine au point milieu,
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_d + F_g \\ &= -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R-x)^2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R+x)^2} \\ &= -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Rx}{(R-x)^2(R+x)^2} \\ &= -\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0}\frac{Rx}{(R-x)^2(R+x)^2}\,. \end{aligned}$$
Si $\vec{v}_0$ est faible, x restera petit. On peut alors faire une approximation linéaire de force subie par la charge q.
Au premier ordre (approximation linéaire),
$$m\ddot{x} \simeq -\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{R^3} = -\omega_0^2 x \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$
avec
$$\omega_0^2 = \frac{qQ}{m\pi\varepsilon_0 R^3}\,.$$
C'est un OH et la solution est
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Exercice 5

Etudier la masse m.



Objet : m. Forces : poids et rappel.

Newton :
$$m\vec{g} - k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

(a) à l'équilibre,

$$m\vec{g} - k\vec{d} = \vec{0}\,.$$

Le ressort est en extension et de longueur

$$\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + d = \ell_0 + \frac{mg}{k}\,.$$

(b) hors équilibre, $m\vec{g} - k\vec{d} = m\vec{a}\,.$
Pour le choix de l'origine au plafond et selon le repère $\vec{e}_z$ vers le bas,

$$mg - kd = mg - k(z - \ell_0) = ma = m\ddot{z}\,.$$

Pour retrouver une forme plus habituelle du type $-kx = ma\,$, nous pouvons écrire

$$-k\left(z - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) = -k(z - \ell_{\text{éq}}) = m\ddot{z}\,.$$

$z - \ell_{\text{éq}}$ étant l'écart par rapport à la position d'équilibre, nous pouvons choisir l'origine sur la position d'équilibre. Cela revient à faire le changement de variable

$$x = z - \ell_{\text{éq}} \qquad \ddot{x} = \ddot{z}$$

et l'équation de Newton devient

$$-kx = m\ddot{x}\,.$$

Posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, nous retrouvons l'équation de l'oscillateur harmonique

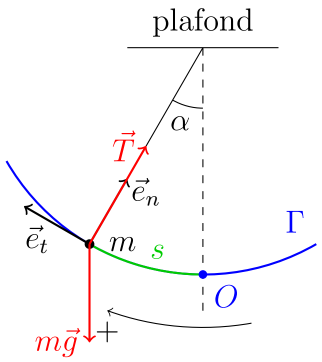
$$-\omega_0^2\, x = \ddot{x}$$

aux solutions connues. La pulsation et la période sont

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Exercice 6

Considérer la masse $m\,$.
Travailler avec le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$ et bien définir l'abscisse curviligne et sa relation avec l'angle que fait le fil avec la verticale.



Objet : m

Forces : poids et tension.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$-mg\cos\alpha + T = ma_n = m\frac{v^2}{L}$$

Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\alpha = ma_t = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha}\,.$$

Au point le plus bas, m est en virage.

(a) à la verticale $\alpha = 0$:

$$-mg + T = m\frac{v_0^2}{L} \Longrightarrow T = m\left(g + \frac{v_0^2}{L}\right) .$$

Comparer le point le plus bas et le point le plus haut.

(b) toutes les forces étant conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée : $E_{\text{méc,bas}} = E_{\text{méc,haut}}$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{\max} \Longrightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} .$$

Faire l'approximation des petits angles.

(c) pour de petits angles, $\sin\alpha \simeq \alpha$: $-mg\alpha = mL\ddot{\alpha}$. Posant

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} ,$$

nous retrouvons l'équation de l'oscillateur harmonique $-\omega_0^2\,\alpha = \ddot{\alpha}$ de solution

$$\alpha(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

avec les conditions initiales

$$\alpha(0) = A\sin(0 + \varphi) = 0 \qquad \dot{\alpha}(0) = \omega_0 A\cos(0 + \varphi) = \frac{v_0}{L} .$$

Nous avons donc $\varphi = 0$ et $A = \frac{v_0}{L\omega_0} = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}$ d'où

$$\alpha(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}\sin(\omega_0 t) .$$

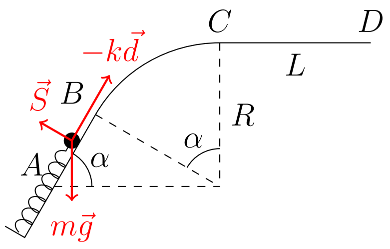
Utiliser la définition de la fréquence.

(d) nous cherchons la fréquence. Elle est donnée par

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} .$$

Exercice 7

Appliquer la méthode générale de résolution d'un problème de mécanique.
Faire le choix d'un objet.
Considérant la masse m sur le trajet de A à C (sous l'hypothèse elle ne décolle pas).



Objet : masse m

Forces : poids (conservatif), force élastique (conservative), soutien du plan (de travail nul)

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} + \vec{S} = m\vec{a} .$$

Toutes les forces étant conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée :

$$E_{\text{méc}}(A) = E_{\text{méc}}(C) .$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (A) et (C).

Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de m.
En A :

$$E_{\text{méc}}(A) = \frac{1}{2}kd_0^2\,.$$

En C :

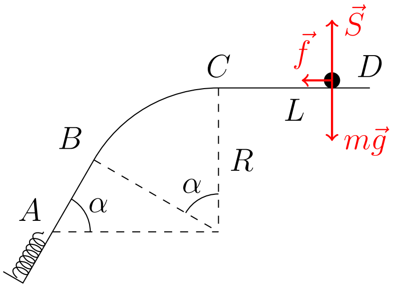
$$E_{\text{méc}}(C) = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgR\,.$$

La masse m passe en C signifie que $v_C \geq 0$ (ou $\frac{1}{2}mv_C^2 \geq 0$).
Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(A) = E_{\text{méc}}(C) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd_0^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgR$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kd_0^2 - mgR \geq 0 \Leftrightarrow d_0^2 \geq \frac{2mgR}{k} \Leftrightarrow d_0 \geq \sqrt{\frac{2mgR}{k}}\,.$$

Poursuivre par la méthode usuelle.
Considérer les forces exercées sur m durant le trajet $C \to D$.
Considérant la masse m sur le trajet de A à C (sous l'hypothèse elle ne décolle pas).



Objet : masse m

Forces : poids (conservatif), soutien du plan (de travail nul), frottement (non conservatif)

Newton :

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

Le poids ne travaillant pas, le théorème de l'énergie cinétique entre C et D s'écrit

$$E_{\text{cin}}(D) - E_{\text{cin}}(C) = W_{C\to D}(\vec{f})$$

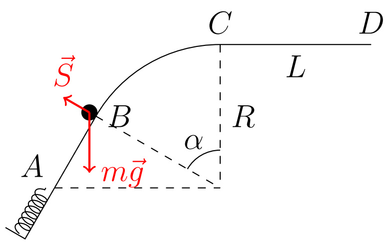
avec

$$\begin{array}{rcl} E_{\text{cin}}(D) &=& 0 \quad (m \text{ s'arrête en } D) \\ E_{\text{cin}}(C) &=& \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kd_0^2 - mgR \quad (\text{cf (a)}) \\ W_{C\to D}(\vec{f}) &=& -fL \quad (f \text{ constante.}) \end{array}$$

Ainsi

$$0 - \frac{1}{2}kd_0^2 + mgR = -fL \Leftrightarrow f = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}kd_0^2 - mgR\right)\,.$$

Si la bille va trop vite lorsqu'elle passe en B, elle décolle : il convient d'appliquer la condition de non-décrochement en B.
Considérer les forces exercées sur m lorsqu'elle passe en B.



Objet : masse m

Forces : poids (conservatif), soutien du plan (ne travaillant pas)

Newton :

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

La condition de non-décrochement s'écrit $S = ||\vec{S}|| > 0$.
Selon $\vec{e}_n$ (dirigé vers le centre du cercle) :

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v_B^2}{R}\,.$$

D'autre part, l'énergie mécanique est conservée entre A et B (cf (a)),

$$E_{\text{méc}}(A) = E_{\text{méc}}(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos\alpha \Leftrightarrow mv_B^2 = kd_0^2 - 2mgR\cos\alpha\,.$$

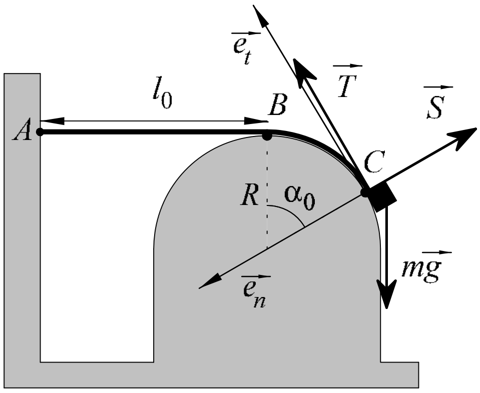
Ainsi,

$$S = mg\cos\alpha - m\frac{v_B^2}{R} = mg\cos\alpha - \frac{1}{R}(kd_0^2 - 2mgR\cos\alpha) = 3mg\cos\alpha - \frac{kd_0^2}{R} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3mg\cos\alpha > \frac{kd_0^2}{R} \Leftrightarrow d_0^2 < \frac{3mgR\cos\alpha}{k} \Leftrightarrow d_0 < \sqrt{\frac{3mgR\cos\alpha}{k}}\,.$$

Exercice 8

Considérer la masse m.
A l'équilibre...



Les forces exercées sur la masse m sont son poids, le soutien et la force de rappel.

(a) à l'équilibre en α_0,

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = \vec{0}\,.$$

Selon la tangente $\vec{e}_t$:

$$kR\alpha_0 - mg\sin\alpha_0 = 0$$

$$\Longrightarrow m = \frac{kR\alpha_0}{g\sin\alpha_0} = \frac{2\pi Rk}{3\sqrt{3}g}\,.$$

Comparer les énergies aux points au plus bas et au plus haut.

(b) toutes les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée. Pour l'origine des hauteurs au niveau du centre du demi-cercle,

- en C :

$$E_C = mgR\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}k(R\alpha_0)^2\,,$$

- en B :

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\,.$$

La masse décolle en B : le soutien s'annule.
Selon $\vec{e}_n$ à la verticale :

$$mg = ma_n = m\frac{v_B^2}{R} \Longrightarrow v_B^2 = gR\,.$$

Ainsi

$$mgR\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}k(R\alpha_0)^2 = \frac{1}{2}mgR + mgR \Longrightarrow m = \frac{kR\alpha_0^2}{2g} = \frac{kR\pi^2}{18g}\,.$$

Exercice 9

Nous allons exploiter la loi des gaz parfaits et le premier principe de la thermodynamique. Le système constitué des deux gaz est isolé et son énergie interne U est donc conservée :

$$U = U_1 + U_2 = \text{constante}\,.$$

Les gaz sont monoatomiques et toute l'énergie est sous forme thermique (énergie cinétique). Initialement,

$$U_1 = \frac{3}{2}N_1kT_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{3}{2}N_2kT_2 = \frac{3}{2}p_2V_2\,,$$

où N_1 et N_2 désignent respectivemet le nombre d'atomes du premier gaz et du second gaz. Après le retrait de la cloison, l'équilibre du mélange (un seul gaz) s'écrit

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}pV,$$

avec $N = N_1 + N_2$ et $V = V_1 + V_2$. Ainsi, la pression et la température d'équilibre ont pour expression

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}$$

et

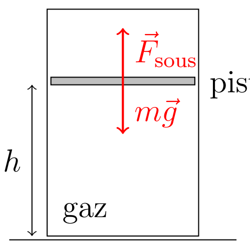
$$T = \frac{N_1T_1 + N_2T_2}{N_1 + N_2}\,.$$

Exercice 10

On admet que le gaz enfermé sous le piston peut être considéré comme un gaz parfait. L'état du gaz enfermé sous le piston est décrit par la loi des gaz parfaits.
Pour le gaz sous le piston :

$$p_0Sh_0 = NkT_0 \Leftrightarrow \frac{2mg}{S}Sh_0 = NkT_0 \Leftrightarrow 2mgh_0 = NkT_0 \Leftrightarrow N = \frac{2mgh_0}{kT_0}\,.$$

La pression du gaz donne lieu à une force de pression : choisir un objet subissant cette force.
Considérer le piston.



Objet : piston

Forces : poids, force de pression

Newton (équilibre) :

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{sous}} = \vec{0}\,.$$

Selon $\vec{e}_y \downarrow$:

$$mg - pS \Rightarrow p = \frac{mg}{S}\,.$$

La loi des gaz parfaits est une relation entre la pression, la température et le volume (et donc la nouvelle hauteur).
Pour le gaz sous le piston dans la nouvelle situation (la température peut avoir changé) :

$$pSh = NkT \quad \text{avec } p = \frac{mg}{S}\,.$$

D'autre part (cf (a)),

$$p_0Sh_0 = NkT_0 \quad \text{avec } p_0 = \frac{2mg}{S} = 2p\,.$$

Alors

$$\frac{pSh}{p_0Sh_0} = \frac{NkT}{NkT_0} \Leftrightarrow \frac{h}{2h_0} = \frac{T}{T_0} \Leftrightarrow hT_0 = 2h_0T\,.$$

Considérer l'énergie totale $E_{\text{tot}} = E_{\text{méc}} + U$ du système formé du gaz et du piston.
Le piston s'est-il déplacé vers le haut ou vers le bas ?
La pression initiale du gaz étant supérieure à celle nécessaire à l'équilibre du piston, celui-ci a été poussé vers le haut et le gaz s'est dilaté.
Le système formé du gaz et du piston ne subit aucune force extérieure et n'échange pas non plus de chaleur avec son environnement :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{méc,piston}} + U_{\text{gaz}} = \text{cte} \Leftrightarrow \Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_{\text{méc,piston}} + \Delta U_{\text{gaz}} = 0\,.$$

L'énergie mécanique du piston a augmenté au détriment de l'énergie interne du gaz : sa température baisse :

$$\Delta U_{\text{gaz}} = -\Delta E_{\text{méc,piston}} < 0\,.$$

Considérer l'énergie interne du gaz mono-atomique.
Pour un gaz mono-atomique, l'énergie interne est donnée par l'énergie cinétique moyenne de ses molécules qui ne dépend que de la température du gaz, $U = \frac{3}{2}NkT$.
Pour le gaz mono-atomique,

- l'énergie interne initiale est $U_0 = \frac{3}{2}NkT_0$
- l'énergie interne finale est $U = \frac{3}{2}NkT$.

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta U_{\text{gaz}} &= -\Delta E_{\text{méc,piston}} \\
\frac{3}{2}Nk\Delta T &= -(mgh - mgh_0) \\
&= -\left(mg\frac{2h_0T}{T_0} - mgh_0\right) \\
&= -2mgh_0\left(\frac{T}{T_0} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -NkT_0\frac{2T - T_0}{2T_0} \\
3(T - T_0) &= -2T + T_0 \\
T &= \frac{4}{5}T_0\,.
\end{aligned}$$