(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Question	Pts max.	Pts
1	6	
2	4	
3	4	
4	6	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 6 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

$\mathbb{R}^2$ est muni de la base orthonormée $B\,(\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.

(a) Soient les deux endomorphismes suivant
- h est une homothétie de centre O et rapport 3,
- a est une affinité d'axe la droite $x + 2y = 0$, de direction parallèle à la droite $x - 3y = 0$ et de rapport $-2/3$.

Déterminer la matrice de $f = h \circ a$ relativement à une base propre, notée $\mathcal{B}'$, puis par rapport à la base orthonormée B.

(b) On considère l' endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base B est

$$M_g = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec précision la nature géométrique de g.

(c) Soit l'endomorphisme $l = g + f$. Calculer la matrice de l relativement à $\mathcal{B}'$, base propre de f.

(d) Soit le point K tel que $\overrightarrow{OK} = 2\,b\,\vec{e}_1 - b\,\vec{e}_2\,,\, b \in \mathbb{R}$.

On considère les points K_i tels que

$\overrightarrow{OK}_1 = l\,(\overrightarrow{OK})\,,\ \overrightarrow{OK}_2 = l\,(\overrightarrow{OK}_1)\,,\ ......\,,\ \overrightarrow{OK}_{n+1} = l\,(\overrightarrow{OK}_n)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Relativement à la base $\mathcal{B}'$, déterminer les composantes de $\overrightarrow{OK}_{n+1}\,,\ n \in \mathbb{N}$, et montrer que les points K_i sont alignés.

Solution:

(a) $M'_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$M_f = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f = h \circ p$ où h est une homothétie de centre O et rapport 5, et p est une projection sur la droite $(O, \vec{u})$, de direction $\vec{v}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $M'_l = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\overrightarrow{OK}_{n+1} = 8^{n+1}\,b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Question 2 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soit f l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice M relativement à la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & p+1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } p \text{ est un paramètre réel.}$$

(a) Déterminer toutes les valeurs du paramètre p telles que f admette une valeur propre double.
Dans le cas où la valeur propre est négative, déterminer si f est diagonalisable ou non. (Justifier rigoureusement votre réponse)

(b) On pose $p = 0$.
Déterminer avec précision la nature géométrique de f.

Solution:

(a)
- Premier cas : $\lambda = 0$ est une valeur propre double alors $p = -1$.
- Deuxième cas : $\lambda_1 = -1$ est une valeur propre double alors $p = -2$.
  Dans ce cas f n'est pas diagonalisable.

(b) Base propre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f est composée d'une symétrie s d'axe le plan $\alpha(O,\ \vec{u},\ \vec{w})$ et de direction parallèle à $\vec{v}$ et d'une projection p de direction parallèle à $\vec{u}$ sur le plan $\beta(O,\ \vec{v},\ \vec{w})$.

Question 3 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

L'espace est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

(a) On considère les applications linéaires suivantes :

- p est la projection orthogonale sur le plan α passant par le point O et dirigé par les vecteurs
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
- a est l'affinité orthogonale d'axe la droite $(O, \vec{b})$ et de rapport $k = -2$.

Soit $f = p \circ a$.
Déterminer une base propre notée $\mathcal{B}'$ de f ainsi que la matrice de f par rapport à cette base.

(b) Soit g un nouvel endomorphisme défini par sa matrice M relativement à la base canonique B
$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
Calculer l'image par g des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ trouvée sous (a).
En déduire directement les valeurs et sous-espaces propres de g ainsi que la relation entre les applications f et g.

Solution:

(a) $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \vec{b} \times \vec{n} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'\,(\vec{b},\, \vec{v},\, \vec{n})$, base propre de f :

$M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Les endomorphismes f et g ont la même base propre et on constate que $3\,g = f$.

Question 4 (à 6 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

On considère l'équation matricielle $A\,X = C$ où

$$A = \begin{pmatrix} a^2-3 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}\,, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Discuter en fonction du paramètre réel a le rang de la matrice A.
Pour quelle(s) valeur(s) de a l'équation possède des solutions quel que soit $C \in \mathbb{M}\,(3 \times 1, \mathbb{R})$.

(b) On pose $a = 2$ et $C = \begin{pmatrix} -2m+3 \\ 0 \\ m^2 - m \end{pmatrix}$ $m \in \mathbb{R}$.

Discuter l'existence et le nombre de paramètres des solutions de l'équation $A\,X = C$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

(c) Résoudre le système dans le cas où $a = 2$ et $C = 0$.

Solution:

(a) • rg $A = 3$ ssi $a \neq \pm 2$,
• rg $A = 2$ ssi $a \in \{-2,\, 2\}$

L'équation possède des solutions quel que soit $C \in \mathbb{M}\,(3 \times 1, \mathbb{R})$ ssi rg $A = 3$, donc ssi $a \neq \pm 2$

(b) Si $m \in \{2,\, 3\}$ le système possède des solutions qui dépendent de 2 paramètres. Si $m \notin \{2,\, 3\}$ le système ne possède pas de solution.

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\alpha - 5\beta \\ -4\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.