Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. On considère l'équation en $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$(B + 2I_2)X^t A = C\,,$$

où $C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice fixée,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'ensemble solution de cette équation dans le cas $C = 0$. Cet ensemble étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ (à ne pas montrer), en donner une base et la dimension.

b) Déterminer l'ensemble solution de cette équation dans le cas où

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

5.5 pts

2. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel m,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -m+2 \\ m+1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3m+3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m-2 \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

On considère le sous-espace vectoriel $V = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}}$.

a) Déterminer m tels que $\dim V < 3$. Dans chaque cas, donner une base et la dimension de V.

b) On pose $m = -3$ et on considère le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il à V ? Si c'est le cas, donner ses composantes dans une base de V, contenant $\vec{b}$.

4.5 pts

3. Soit W le sous-ensemble de $\mathbb{R}[x]$ défini par

$$W = \left\{ Q \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; \exists\, P \in P_n[x],\, Q = (xP)' \right\}.$$

a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

b) Donner la forme générale d'un polynôme Q de W.

c) Donner une base et la dimension de W.

3.5 pts

4. Soient A, B, C et D quatre polynômes de $P_3[x]$ donnés par

$$A = 2x^3+x^2+5x+3 \quad B = x^3-2x^2-5x-1 \quad C = 2x^3-x^2-x+1 \quad D = 5x^3-2x^2-x+3$$

et le sous-espace vectoriel $U = [\,A, B, C, D\,]_{\text{sev}}$ de $P_3[x]$.

a) Donner une base et la dimension de U.

b) Le polynôme $E = x^3 + x + 1$ appartient-il à U ? Si c'est le cas, donner ses composantes dans la base de U choisie.

c) Soit V le sous-espace vectoriel de $P_3[x]$

$$V = \left\{ P \in P_3[x] \;\middle|\; P(1) = 0 \right\}.$$

Donner une base et la dimension de $U \cap V$.

4 pts

5. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée. On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & f(X) = X^t A\,. \end{array}$$

a) Montrer que f est linéaire.

On considère quatre matrices B, C, M et N telles que

$$f(B) = M \qquad f(2B+3C) = N\,.$$

b) Déterminer $f(B-C)$ en fonction de M et N uniquement.

2.5 pts

Total 20 pts