Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 2**

Exercice 1. *Les opérations suivantes sont-elles valides pour résoudre un système d'èquations ?*

a) $$\begin{aligned} x - y &= 1 & \rightsquigarrow \quad L_1 + L_2 \qquad 0 &= 0 \\ -x + y &= -1 & \rightsquigarrow \quad L_2 + L_1 \qquad 0 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 & \rightsquigarrow \quad L_1 - L_2 \qquad 0 &= 0 \\ 3x + 2y &= 4 & 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 & \rightsquigarrow \quad L_1 \cdot 0 \qquad 0 &= 0 \\ 3x + 2y &= 4 & 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Exercice 2. *A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$$

Exercice 3. *Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système*

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas (b) et (c).

Exercice 4. *Choix Multiple.*

a. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} ax + y &= 1 \\ (a^2+1)x + 2ay &= -2 \end{cases}$$

- ☐ *possède une solution unique lorsque $a \neq 1$*
- ☐ *possède une solution lorsque $a \neq \pm 1$*
- ☐ *possède une infinité de solutions lorsque $a = 1$*
- ☐ *possède une solution unique lorsque $a = 1$*

b. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

- ☐ *possède une solution unique lorsque $a = 1/2$*
- ☐ *ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$*
- ☐ *possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$*
- ☐ *ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$*

Exercice 5.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer AC, BC et CB.

Exercice 6. *On se donne les matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Exercice 7. *Considérons le système suivant d'équations linéaires aux inconnues x, y, z, t, (où a est un paramètre réel) :*

$$ax - 2y + t = 5z - 1$$
$$2t + 3z = 4y - x$$
$$-1 = 2x + y$$

Trouver des matrices A et b telle que l'ensemble des solutions du système correspond à l'ensemble des solutions de l'équation matricelle

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b.$$

Exercice 8. *Ecrire les matrices élémentaires 3×3 suivantes :*

— *la matrice A qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes ;*
— *la matrice B qui multiplie la deuxième ligne par 8 ;*
— *la matrice C qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.*

1. *Calculer AB. La matrice AB correspond à quel type d'opération ?*
2. *Ecrire les inverses des matrices A, B et C. La matrice B^{-1} correspond à quel type d'opération ?*
3. *Calculer le produit $(AB)(B^{-1}A^{-1})$.*
4. *Est-ce que la matrice AB est inversible ?*
5. *Calculer A^T, B^T, $(AB)^T$, $A^T B^T$ et $B^T A^T$.*
6. *Calculer $(A + B)^T$ et $A^T + B^T$.*
7. *Calculer $3A^T$ et $(3A)^T$.*