Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. Soit E un ensemble. On considère la proposition suivante :

$$T : \quad \forall\, A, B, C \subset E,\ \big(A \subset B \text{ et } A \cap C \neq \emptyset\big) \Longrightarrow B \cap C \neq \emptyset\,.$$

a) Démontrer la proposition T par la méthode directe.

b) Enoncer la proposition réciproque de T , notée R .

c) Enoncer la négation de la proposition réciproque R , notée non$R$.

d) Montrer que non$R$ est vraie pour $E = \mathbb{N}$.

3.5 pts

2. On définit $S(n)$ par

$$S(n) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Montrer par récurrence que

$$S(n) = (n+1)! - 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

2.5 pts

3. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & f(x) = (-x^2, x^4 - 4x^2)\,. \end{array}$$

a) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$ et en donner sa représentation graphique.

b) L'application f est-elle surjective ? Justifier rigoureusement la réponse.

c) On pose $C = [\,-5, 0\,] \times [\,0, 5\,]$. Déterminer rigoureusement $f^{-1}(C)$.

4 pts

Tourner la page

4. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^2_- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y)\,. \end{array}$$

a) Montrer que f est injective.

b) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$ et en donner sa représentation graphique.

c) f est-elle surjective ? Justifier rigoureusement votre réponse. Si f n'est pas surjective, modifier l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$ pour rendre f surjective.

d) Déterminer alors l'application réciproque f^{-1} .

On donne encore l'application g définie par

$$\begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{u+v-1} & \text{si } u+v \neq 1 \\ 0 & \text{si } u+v = 1\,. \end{cases} \end{array}$$

e) g est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

f) g est-elle surjective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

g) Déterminer $g \circ f$.

10 pts