(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Question	Pts max.	Pts
1	$7\frac{1}{2}$	
2	5	
3	$7\frac{1}{2}$	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **100 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 7½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \; : \; x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y - 2 = 0$$

(a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère R_u dans lequel l'équation est réduite.

(b) Représenter avec soin et précision la conique dans le repère R_e.
(1 unité = 3 carrés)

(c) Déterminer, dans le repère R_e, les coordonnées des foyers de C.

Réponse à la question 1: laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Question 2 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne l'équation d'une famille de coniques dépendante d'un paramètre m :

$$\mathcal{F} \; : \; (3-m)x^2 + 2\,(m+2)\,xy - y^2 - 2m\,x + 4y + 3\,m - 5 = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer en fonction du paramètre m, le genre des coniques de la famille $\mathcal{F}$ (on ne demande pas les cas de dégénérescence).

(b) On considère les coniques de $\mathcal{F}$ qui possèdent un centre. Déterminer l'équation cartésienne du lieu des centres des coniques. Déterminer la nature de ce lieu (sans en faire l'étude).

Réponse à la question 2: laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Question 3 (à 7½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$ et le point $M(-2\,,\,0) \in \mathcal{H}$.

(a) Représenter avec soin l'hyperbole $\mathcal{H}$ dans un système d'axes cartésien d'unité 1cm.

(b) Déterminer l'équation cartésienne d'une parabole $\mathcal{P}$ dont l'axe coïncide avec l'axe imaginaire de $\mathcal{H}$ et telle que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ se coupent orthogonalement en M.

Donner les coordonnées du foyer F et l'équation de la directrice d de $\mathcal{P}$.

Réponse à la question 3: laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Solutions :

Question 1

(a) Equation réduite de $\mathcal{C} : 3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 6 = 0$.
Repère $R_u = (\Omega\,, \vec{u_1}\,, \vec{u_2})$ où $\Omega(0,-2)$, $\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $F(2,0)$ et $F'(-2,-4)$.

Question 2

(a) Les coniques de la famille $\mathcal{F}$ sont toutes de genre hyperbole.
(b) $5x^2 - xy + y^2 + 4x - 3y + 2 = 0$
Le lieu des centres des coniques est une ellipse non-dégénérée.

Question 3

(b) $\mathcal{P} \,:\, (x-1)^2 = -6(y - \frac{3}{2})$, $F(1,0)$ et $d : y = 3$