Exercice 1. *Soit* $A := \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer l'inverse de la matrice* A.
2. *Utiliser (a) pour résoudre le système*

$$\begin{cases} 3x - 7y & = -4 \\ -6x + 13y & = 1 \end{cases}.$$

Exercice 2. *Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles et calculer l'inverse le cas échéant.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *Calculer l'inverse des matrices* A *et* B*, où* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d. \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *Soient*

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trouver une décomposition LU de la matrice* A.
2. *Resoudre le système* $Ax = b$ *en utilisant la décomposition LU de* A.

Exercice 5. *Trouver une décomposition LU de la matrice* A.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Ensuite, utiliser la décomposition LU pour résoudre les deux systèmes d'équations linéaires suivantes :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *On suppose que* A *est une matrice de taille* 3×3 *et* B *est une matrice de taille* 3×2. *Démontrer ou réfuter les affirmations suivantes.*

1. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors la somme $A + A$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.
2. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors le produit $10A$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.

3. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors la transposée A^{T} est aussi une matrice triangulaire supérieure.

4. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure.

5. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, alors leur produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale.

Exercice 7. *On suppose que A est une matrice symétrique et B est une matrice diagonale, carrées de même taille. Démontrer ou réfuter les affirmations suivantes.*

1. $A + A$ est aussi une matrice symétrique.

2. Le produit $10A$ est aussi une matrice symétrique.

3. La transposée A^{T} est aussi une matrice symétrique.

4. $B + B$ est aussi une matrice diagonale.

5. Le produit $7B$ est aussi une matrice diagonale.

6. La transposée B^{T} est aussi une matrice diagonale.

7. Le produit AB est aussi une matrice symétrique.

8. Le produit BA est aussi une matrice diagonale.

Exercice 8. *Questions à Choix Multiple. Justifier les réponses ! Un système d'équations linéaires est dit* comptaible *ou* consistant *s'il possède au moins une solution. Justifier les réponses !*

a. Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrice augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

☐ $h = 5$,
☐ $h = 5/2$,
☐ $h \neq 5/2$,
☐ $h = -5/2$.

b. Même question pour la matrice :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right].$$

☐ *seulement si $h = 2$,*
☐ *seulement si $h = -2$,*
☐ $h \neq 2$,
☐ $h \neq -2$.

c. ☐ *Deux matrices qui sont lignes équivalentes ont le même nombre de colonnes.*
☐ *Deux matrices sont lignes équivalentes si elles ont le même nombre de lignes.*
☐ *Deux matrices peuvent être lignes équivalentes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de lignes.*
☐ *Deux matrices peuvent être lignes équivalentes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de colonnes.*

d. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

☐ *Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice A n'est pas compatible.*
☐ *Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice A est compatible.*
☐ *Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible.*
☐ *Un système d'équations linéaires inhomogène est toujours compatible.*

e. ☐ *Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.*

☐ *Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.*

☐ *Si la matrice des coefficients d'un système de trois équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est incompatible.*

☐ *Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à trois inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.*