Corrigé 17

1. Etudier la courbe du plan Γ définie ci-dessous, déterminer les points remarquables et donner le tableau de variation, puis représenter graphiquement la courbe Γ (échelle : 4 carrés / unité).

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 + 2 \\ y(t) = -2t^3 + 9t^2 - 12t + 3 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$, domaine d'étude $I = [\,0\,,\,2\,]$.

- Dérivées.

  $\dot{x}(t) = -6t^2 + 6t = -6t\,(t-1)$.

  $\dot{y}(t) = -6t^2 + 18t - 12 = -6\,(t^2 - 3t + 2) = -6\,(t-1)\,(t-2)$.

- Points remarquables.

  ◦ En $t_0 = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\dot{y}(0) \neq 0$, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\infty$.

  $M_0\,(2\,,\,3)$ est un point de Γ à tangente verticale.

  ◦ En $t_1 = 1$, $\dot{x}(1) = 0$ et $\dot{y}(1) = 0$,

  $M_1\,(3\,,\,-2)$ est un point stationnaire.

  La pente de la tangente en M_1 est donnée par $m_1 = \displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -1$.

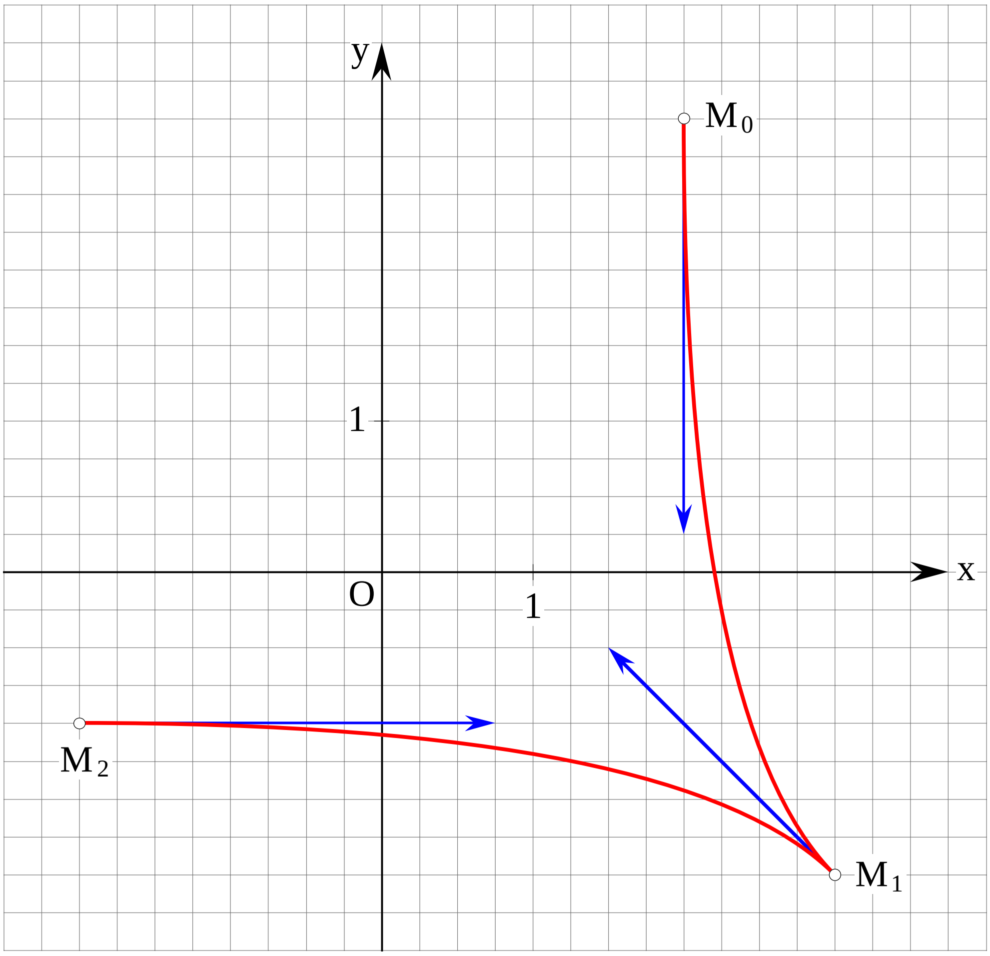
  ◦ En $t_2 = 2$, $\dot{x}(2) \neq 0$ et $\dot{y}(2) = 0$, $\dfrac{\dot{y}(2)}{\dot{x}(2)} = 0$.

  $M_2\,(-2\,,\,-1)$ est un point de Γ à tangente horizontale.

- Tableau de variation.

t	0		1		2
$\dot{x}(t)$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2
$\dot{y}(t)$		$-$	0	$+$	0
$y(t)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

- Représentation graphique de Γ.



2. Faire l'étude complète de la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \dfrac{1+t^4}{t^2} \end{cases}$$

Définition du domaine d'étude

- Soit $D_{\text{déf}}$ le domaine de définition de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$:

$$D_{\text{déf}} = D_x \cap D_y = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*.$$

La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue sur $D_{\text{déf}}$.

- $\vec{r}(t)$ n'est ni périodique, ni paire ni impaire. Pas de restriction du domaine d'étude.

Limites aux points-frontière de $D_{\mathbf{def}}$.

Limites aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \;=\; \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1+t^4}{t^2\,(t^2-2t)} \;=\; 1\,.$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} [\,y(t)-x(t)\,] \;=\; \lim_{t\to\pm\infty} \left[\frac{1+t^4}{t^2} - (t^2-2t)\right] \;=\; \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1+2t^3}{t^2} \;=\; \pm\infty\,.$$

Γ admet, aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, deux branches paraboliques de direction de pente $m=1$.

Limites au voisinage de $t=0$.

$$\lim_{t\to 0} x(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} y(t) = +\infty\,.$$

Γ admet, lorsque $t \to 0$, une asymptote verticale d'équation $x=0$.

Dérivées.

$\dot{x}(t) \;=\; 2t-2 \;=\; 2\,(t-1)\,, \qquad \dot{x}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=1\,.$

$$\dot{y}(t) \;=\; \frac{4t^3\,(t^2)-(1+t^4)\,2t}{t^4} \;=\; \frac{2\,(t^4-1)}{t^3} \;=\; \frac{2\,(t+1)\,(t-1)\,(t^2+1)}{t^3}\,,$$

$\dot{y}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-1 \;\text{ ou }\; t=1\,.$

En $t=-1$, Γ admet un point à tangente horizontale de coordonnées $(3\,;\,2)$.

En $t=1$, $\dot{\vec{r}}(t)=\vec{0}$, Γ admet un point stationnaire de coordonnées $(-1\,;\,2)$.

La pente de la tangente à Γ en ce point est donnée par $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \;=\; \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)\,(t^2+1)}{t^3} \;=\; 4\,.$$

Tableau de variation.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\dot{x}(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0 ‖ 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$\dot{y}(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

A ce stade de l'étude de la courbe paramétrée, on peut faire une esquisse de la représentation de la courbe Γ. Celle-ci met en évidence l'existence d'un point double.

Recherche du point double.

Soient $t_1, t_2 \in D_{\text{def}}$, $t_1 \neq t_2$, tels que $(x(t_1)\,,\,y(t_1)) = (x(t_2)\,,\,y(t_2))$.

$$x(t_1) = x(t_2) \quad\Leftrightarrow\quad t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \quad\Leftrightarrow\quad (t_1 - t_2)\,(t_1 + t_2 - 2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_1 + t_2 = 2\,.$$

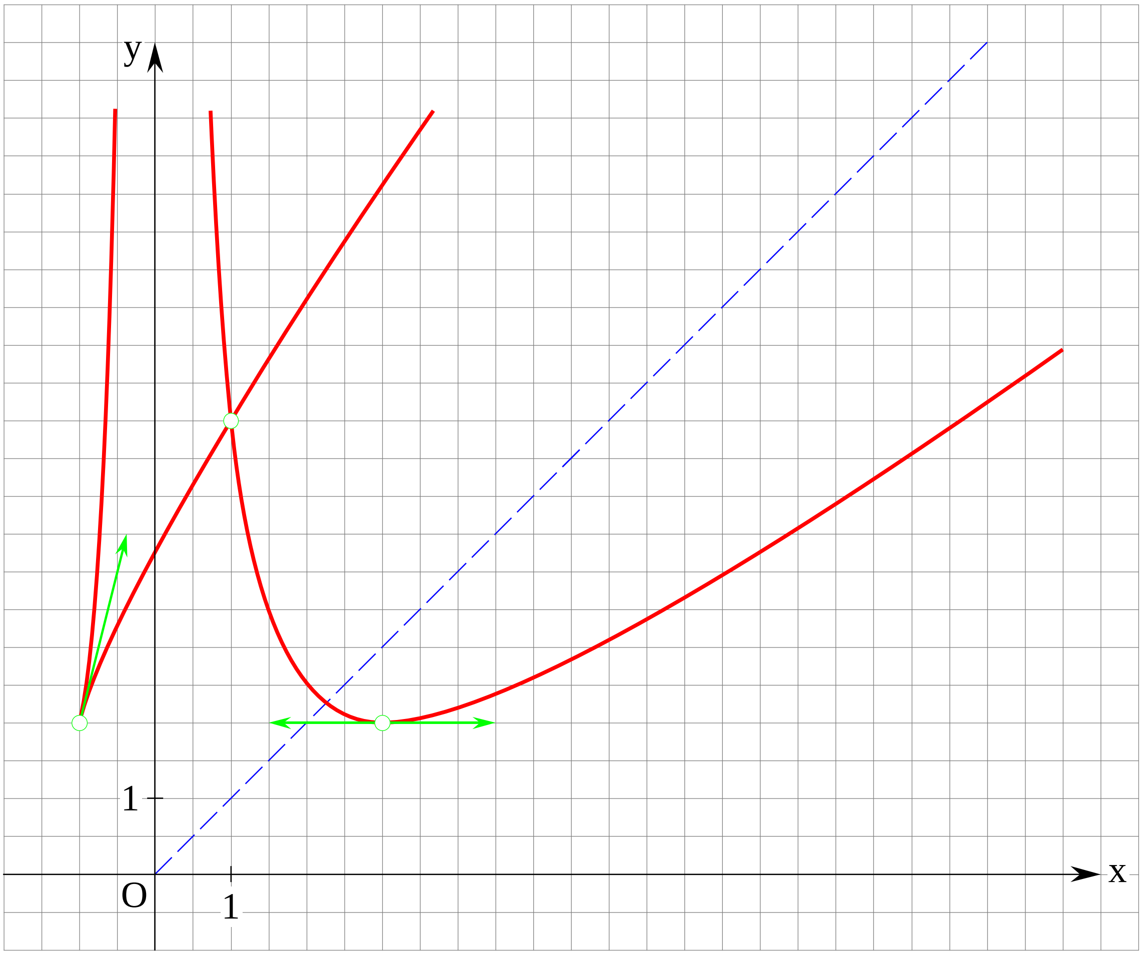
$$y(t_1) = y(t_2) \quad\Leftrightarrow\quad (1 + t_1^4)\,t_2^2 = (1 + t_2^4)\,t_1^2 \quad\Leftrightarrow\quad (t_1^2 - t_2^2)\,(t_1^2\,t_2^2 - 1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_1^2\,t_2^2 = 1\,,$$

car $t_1^2 - t_2^2 = (t_1 + t_2)\,(t_1 - t_2) = 2\,(t_1 - t_2) \neq 0\,,\quad (t_1 \neq t_2)\,.$

D'où $\left\{\begin{array}{l} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = -1 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = 1 \end{array}\right.$

L'unique solution est $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ qui correspond au point de coordonnées $(1\,;\,6)$.

Représentation graphique de la courbe Γ.



On déduit du tracé de la courbe Γ que le point stationnaire de coordonnées $(-1\,;\,2)$ est un point de rebroussement dont la demi-tangente est de pente $m = 4$.

3. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par

$$\vec{r}\,(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

Indication : En plus de la parité et de la périodicité des fonctions coordonnées de la fonction vectorielle $\vec{r}\,(t)$, tester l'évaluation des fonctions coordonnées en $\pi - t$.

b) Faire l'étude de la courbe paramétrée sur l'intervalle I, puis en déduire le tracé de la courbe Γ.

---

a) Restriction du domaine d'étude à l'intervalle $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

i) Période de $\vec{r}\,(t)$:

$\vec{r}\,(t)$ est de période T ssi $\vec{r}\,(t+T) = \vec{r}\,(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.
La période de $x(t)$ est $T_x = \pi$, celle de $y(t)$ est $T_y = \frac{2\pi}{3}$.
La période T de $\vec{r}\,(t)$ est le PPCM (plus petit multiple commun) de T_x et T_y, d'où $T = 2\pi$.
On peut donc restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi\,]$.

ii) Parité des fonctions coordonnées :

$x(-t) = \cos 2\,(-t) = \cos 2t = x(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ est paire.
$y(-t) = \sin 3\,(-t) = -\sin 3t = -y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ est impaire.
La courbe Γ est donc symétrique par rapport à l'axe Ox et on peut restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[\,0\,;\,\pi\,]$.

iii) Evaluation en $\pi - t$:

$x(\pi - t) = \cos 2\,(\pi - t) = \cos 2t = x(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

$y(\pi - t) = \sin 3\,(\pi - t) = \sin 3t = y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

En d'autres termes : $x(\frac{\pi}{2} + t) = x(\frac{\pi}{2} - t)$ et $y(\frac{\pi}{2} + t) = y(\frac{\pi}{2} - t)$.

On peut donc restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$, car

$$\vec{r}\,(\tfrac{\pi}{2} + t) \;=\; \vec{r}\,(\tfrac{\pi}{2} - t)\,, \quad t \in [\,0\,;\,\tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

b) Dérivées.

i) Calcul de $\dot{\vec{r}}(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{d\,x}{dt} = -2\,\sin 2t\,, \quad \dot{y}(t) = \frac{d\,y}{dt} = 3\,\cos 3t\,, \quad \dot{\vec{r}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} -2\,\sin(2t) \\ 3\,\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

ii) Points remarquables.

- $t=0$: Γ admet une tangente verticale en $A\,(1,0)$.
- $t=\frac{\pi}{6}$: Γ admet une tangente horizontale en $B\,(\frac{1}{2},1)$.
- $t=\frac{\pi}{2}$: le point $C\,(-1,-1)$ est un point stationnaire de Γ.

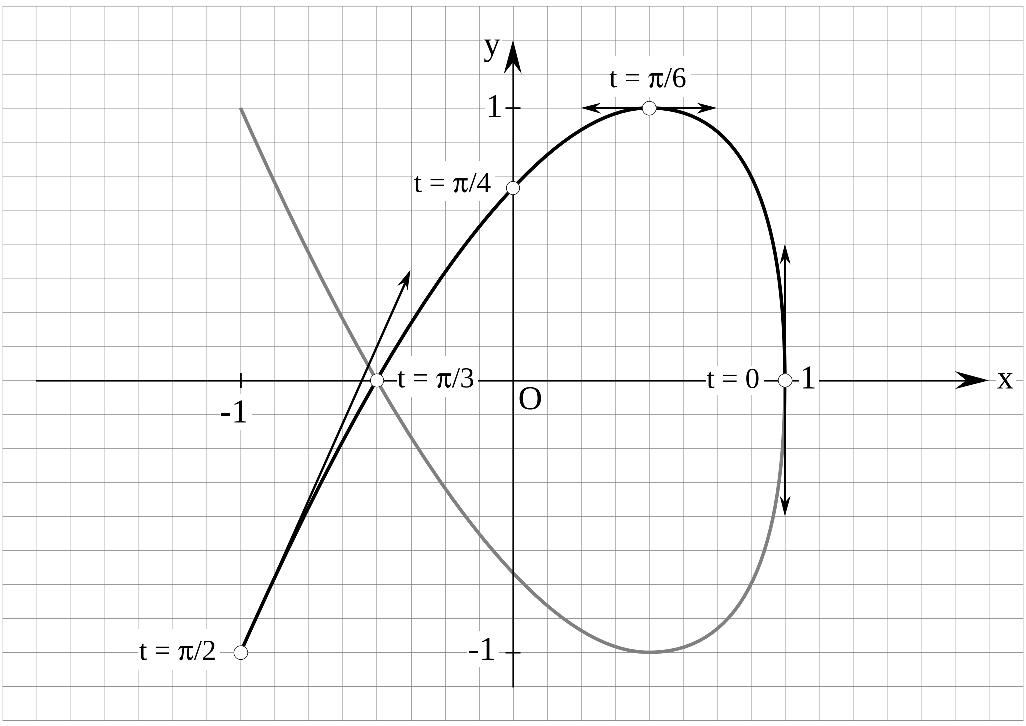
  Soit m la pente de la tangente à Γ en $C\,(-1,-1)$.

$$m=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3t}{\sin 2t}=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\,\sin 3t}{2\,\cos 2t}=\frac{9}{4}.$$

c) Tableau de variation.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\dot{x}(t)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	-1
$\dot{y}(t)$	3	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

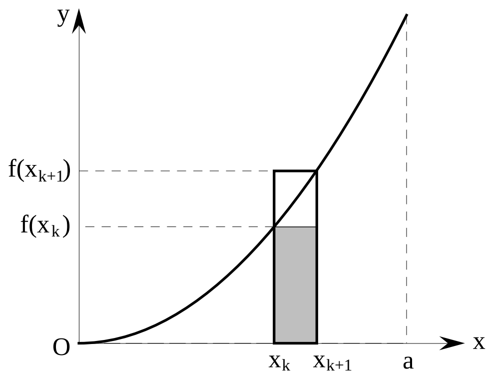
d) Représentation graphique.



4. Soit P_n une partition en n intervalles de même longueur de l'intervalle $[\,0\,,\,a\,]$, $a > 0$.

Calculer les deux sommes de Riemann de la fonction $f(x) = x^3$, en considérant pour l'intervalle $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$ un rectangle de hauteur $f(x_k)$, puis de hauteur $f(x_{k+1})$.

Montrer que ces deux sommes convergent vers la même valeur lorsque n tend vers l'infini.



Indication :
On pourra démontrer par récurrence le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.

- **Description de la partition**

Soit P_n la partition de l'intervalle $[\,0\,,\,a\,]$ en n intervalles isométriques $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$, $0 \le k \le n-1$, avec $x_0 = 0$ et $x_n = a$.

  - Chaque intervalle $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$ a pour longueur

$$\Delta\,x_k \;=\; x_{k+1} - x_k \;=\; \frac{a}{n}\,, \quad 0 \le k \le n-1\,.$$

  - Et chaque abscisse de la partition vaut $x_k = k \cdot \dfrac{a}{n}$, $\quad 0 \le k \le n$.

- **Rectangles de hauteur** $f\,(x_k)$

Soit A_k l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$:

$$A_k \;=\; (x_{k+1} - x_k)\cdot f\,(x_k) \;=\; \frac{a}{n}\cdot f\,(\tfrac{k\cdot a}{n}) \;=\; \frac{a}{n}\cdot\left[\frac{k\cdot a}{n}\right]^3 \;=\; k^3\cdot\frac{a^4}{n^4}\,.$$

Soit s_n la somme de Riemann définie par la somme des A_k, $0 \le k \le n-1$:

$$s_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} A_k \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} k^3\cdot\frac{a^4}{n^4} \;=\; \frac{a^4}{n^4}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k^3 \;=\; \frac{a^4}{n^4}\cdot\left[\frac{(n-1)\,n}{2}\right]^2,$$

$$s_n \;=\; \frac{a^4}{4}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2} \;=\; \frac{a^4}{4}\cdot\frac{n^2-2n+1}{n^2} \;=\; \frac{a^4}{4}\cdot\left[1-\frac{2n-1}{n^2}\right] \;=\; \frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{4}\cdot\frac{2n-1}{n^2}\,.$$

- **Rectangles de hauteur** $f\,(x_{k+1})$

Soit B_k l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$:

$$B_k \;=\; (x_{k+1}-x_k)\cdot f\,(x_{k+1}) \;=\; \frac{a}{n}\cdot f\,(\tfrac{(k+1)\cdot a}{n}) \;=\; \frac{a}{n}\cdot\left[\frac{(k+1)\cdot a}{n}\right]^3 \;=\; (k+1)^3\cdot\frac{a^4}{n^4}\,.$$

Soit S_n la somme de Riemann définie par la somme des B_k, $0 \leq k \leq n-1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3 \cdot \frac{a^4}{n^4} = \frac{a^4}{n^4} \cdot \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{a^4}{n^4} \cdot \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$S_n = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{a^4}{4} \cdot \left[1 + \frac{2n+1}{n^2}\right] = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n+1}{n^2}.$$

- **Conclusion**

  * $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n-1}{n^2}\right] = \frac{a^4}{4}.$

  * $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n+1}{n^2}\right] = \frac{a^4}{4}.$

  Les deux sommes de Riemann convergent bien vers la même valeur.

Annexe

Démonstration par récurrence de la proposition suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

- Vérification pour $n = 1$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} k^3 \right|_{n=1} = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \left.\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2\right|_{n=1} = \left[\frac{2}{2}\right]^2 = 1.$$

- Démonstration du pas de récurrence

  * Hypothèse : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

  * Conclusion : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2$.

  * Preuve :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \cdot \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$