CMS Analyse I

Semestre d'automne

2018–2019

15 octobre 2018 OW/GB

Table des matières

1 Algèbre élémentaire

1.1 Les ensembles numériques

Définition 1.1. L'ensemble des entiers naturels

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\} . \end{aligned}$$

Définition 1.2. L'ensemble des entiers relatifs

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ \mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} . \end{aligned}$$

Définition 1.3. L'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \right\} .$$

Définition 1.4. L'ensemble des nombres réels : il n'y a pas de correspondance biunivoque entre $\mathbb{Q}$ et la droite numérique (il y des "trous"). La complétion donne l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

1.2 Inégalités sur les réels

Définition 1.5. Soit $a \in \mathbb{R}$. a est négatif ssi $a < 0$. a est positif ssi $a > 0$.

Définition 1.6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $a < b$ ssi $a - b < 0$. $a > b$ ssi $a - b > 0$.

Définition 1.7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $a \leq b$ ssi $a - b$ est négatif ou nul. $a \geq b$ ssi $a - b$ positif ou nul.

Définition 1.8. $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a \geq 0\}$. $\mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a \leq 0\}$.

Axiome 1.9. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ a + b \in \mathbb{R}_+$.

Axiome 1.10. $\forall a, b \in \mathbb{R}_-,\ a + b \in \mathbb{R}_-$.

Propriétés.

1. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}$. $a \leq b$ *et* $b \leq c \implies a \leq c$.
2. *Soient* $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \leq y \implies x + a \leq y + a$.
3. *Soient* $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. $x \leq y$ *et* $a \leq b \implies x + a \leq y + b$.

Axiome 1.11. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ ab \in \mathbb{R}_+$.

Propriétés.

4. *Soient* $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \geq y$ *et* $a \geq 0 \implies ax \geq ay$.
5. *Soient* $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \geq y$ *et* $a \leq 0 \implies ax \leq ay$.

1.3 Valeur absolue et fonction signe

1.3.1 Valeur absolue

Définition 1.12. Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est le réel positif ou nul

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \, . \end{cases}$$

Propriétés. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

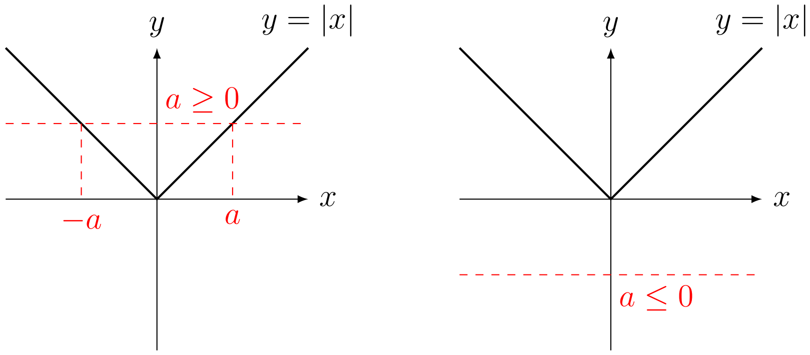
1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. $|x|^2 = x^2$.
4. $|x| = |-x|$.
5. $x \leq |x|$.
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

1.3.2 Equations avec valeur absolue

Théorème 1.1.

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On a l'équivalence*

$$|x| = a \iff a \geq 0 \ \textit{et} \begin{cases} x = a \\ \textit{ou} \\ x = -a \, . \end{cases}$$



Théorème 1.2.

Soient f *et* g *deux fonctions réelles. On a l'équivalence*

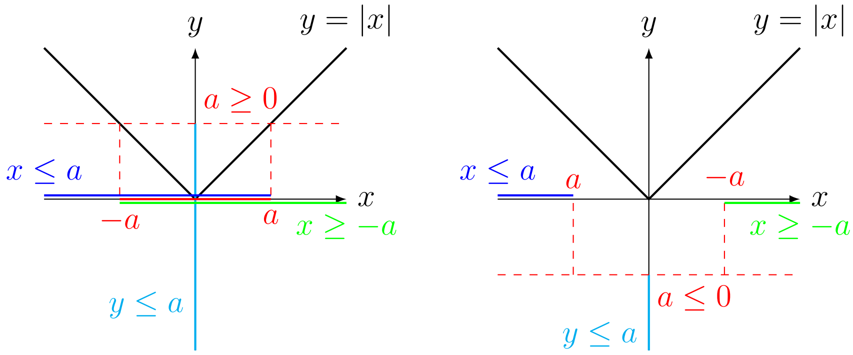
$$|f(x)| = g(x) \iff g(x) \geq 0 \ \textit{et} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \textit{ou} \\ f(x) = -g(x) \, . \end{cases}$$

1.3.3 Inéquations avec valeur absolue

Théorème 1.3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \leq a \iff \begin{cases} x \leq a \\ et \\ x \geq -a\,. \end{cases}$$



Théorème 1.4.

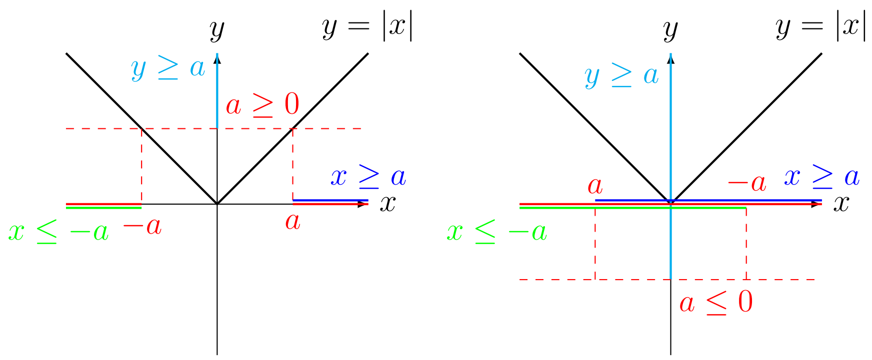
Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ et \\ f(x) \geq -g(x)\,. \end{cases}$$

Théorème 1.5.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ ou \\ x \leq -a\,. \end{cases}$$



Théorème 1.6.

Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ ou \\ f(x) \leq -g(x)\,. \end{cases}$$

1.3.4 Fonction signe

Définition 1.13. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Le signe de x , noté $\operatorname{sgn}(x)$, est le nombre

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \,. \end{cases}$$

Propriétés. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. $|a| = a \operatorname{sgn}(a)$. $a = |a| \operatorname{sgn}(a)$.
2. $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(b)$.
3. $|ab| = |a|\,|b|$.
4. $\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{sgn}(ab)$.

1.4 Trinôme du 2e degré

Définition 1.14. $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ est un trinôme du 2e degré en x .

Définition 1.15. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Définition 1.16. Si $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le discriminant réduit du trinôme $p(x) = ax^2 + 2b'x + c$, $a, b', c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1.4.1 Signe du trinôme

- $\Delta > 0$: les deux racines distinctes de $p(x) = ax^2 + bx + c$ sont $(b = 2b')$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \,.$$

  Signe de $p(x)$:

$$\operatorname{sgn} p(x) = \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(x - x_1) \operatorname{sgn}(x - x_2) \quad \text{si } x \neq x_1, x_2 \,.$$

- $\Delta = 0$: les deux racines de $p(x) = ax^2 + bx + c$ sont confondues

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \,.$$

  Signe de $p(x)$:

$$\operatorname{sgn} p(x) = \operatorname{sgn}(a) \quad \text{si } x \neq -\frac{b}{2a} \,.$$

- $\Delta < 0$: $p(x) = ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle.
  Signe de $p(x)$:

$$\operatorname{sgn} p(x) = \operatorname{sgn}(a) \,.$$

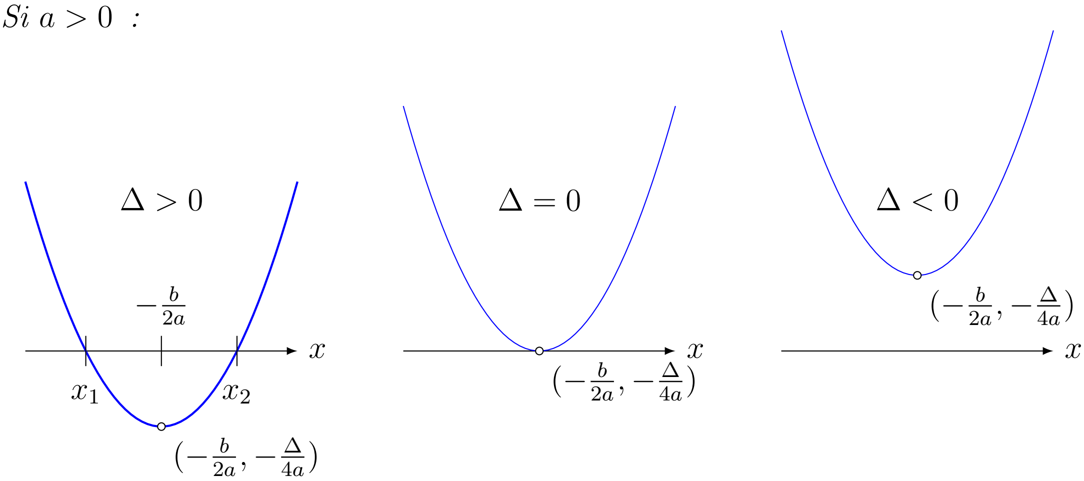
1.4.2 Représentation graphique et formules de Viète

Les points (x, y) du plan vérifiant $y = ax^2 + bx + c$ se trouvent sur la parabole d'équation

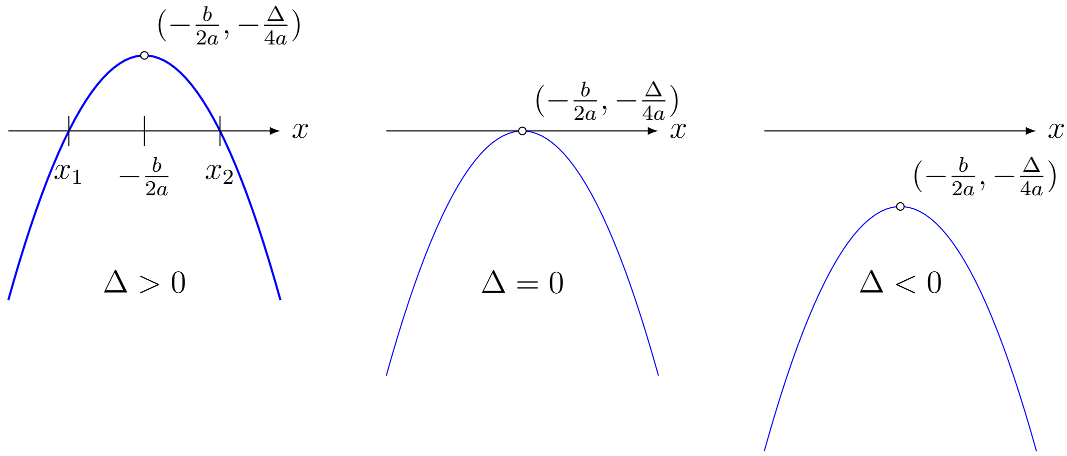
$$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 .$$

Propriétés.

1. *Si* $a > 0$ *:*



2. *Si* $a < 0$ *:*



3. *Si* x_1 *et* x_2 *sont les deux racines distinctes ou confondues du trinôme* $p(x) = ax^2 + bx + c$*, alors (formules de Viète)*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} . \end{aligned}$$

1.5 Puissances et racines

1.5.1 Puissances à exposants entiers

Définition 1.17. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La puissance n^{e} de a, notée a^n, est le nombre

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} .$$

Propriétés. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *.*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.
2. $(a^m)^n = a^{mn}$.
3. *Si* $a \neq 0$ *,*
$$\operatorname{sgn}(a^n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a) & \textit{si } n \textit{ impair} \\ 1 & \textit{si } n \textit{ pair.} \end{cases}$$
4. $(ab)^n = a^n b^n$.

Définition 1.18. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1\,.$$

Remarque. 0^0 n'est pas défini.

Remarque. Les propriétés 1 à 4 restent valables.

1.5.2 Racines positives (ou arithmétiques)

Définition 1.19. Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre $x \in \mathbb{R}_+$ est la racine n^{e} positive de a ssi $x^n = a$. On note alors $x = \sqrt[n]{a}$.

Propriétés. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *,* $m, n \in \mathbb{N}$ *.*

5. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
6. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
7. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Remarque. Les propriétés 1, 2 et 4 restent valables en posant
$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad a \in \mathbb{R}_+^*, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\,.$$

1.5.3 Racines réelles

Définition 1.20. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est une racine n^{e} réelle de a si x vérifie $x^n = a$.

Conséquences.

- *Soit* $a \in \mathbb{R}^*$ *. Alors*
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \textit{si } n \textit{ impair} \\ |a| & \textit{si } n \textit{ pair.} \end{cases}$$
- *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* n *impair. Alors*
$$\begin{aligned} a = b \quad &\Longleftrightarrow \quad a^n = b^n \\ a \leq b \quad &\Longleftrightarrow \quad a^n \leq b^n\,. \end{aligned}$$
- *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *(condition de positivité),* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors*
$$\begin{aligned} a = b \quad &\Longleftrightarrow \quad a^n = b^n \\ a \leq b \quad &\Longleftrightarrow \quad a^n \leq b^n\,. \end{aligned}$$

1.5.4 Equations irrationnelles

Théorème 1.7.

Soient f et g deux fonctions réelles. $\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \geq 0$, on a l'équivalence

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) = g^2(x)\,.$$

1.5.5 Inéquations irrationnelles

Théorème 1.8.

Soient f et g deux fonctions réelles. $\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \geq 0$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} \leq g(x) &\iff g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) \leq g^2(x) \\ \sqrt{f(x)} < g(x) &\iff g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) < g^2(x)\,. \end{aligned}$$

Théorème 1.9.

Soient f et g deux fonctions réelles. $\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \geq 0$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} \geq g(x) &\iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ ou \\ g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \\ \sqrt{f(x)} > g(x) &\iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ ou \\ g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) > g^2(x)\,. \end{cases} \end{aligned}$$

1.6 Binôme de Newton

Définition 1.21. Le polynôme en x

$$P_n(x) = (x+a)^n\,, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

est appelé binôme de Newton ($x + a$: binôme).

Corolaire 1.10.

Le développement du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} + \cdots \\ &\qquad + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n x^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}\,. \end{aligned}$$