



+1/1/60+

Ens: Prof. Marco Picasso - Analyse numérique - XYZ

25 juin 2018 - Horaire : de 8h15 à 10h30

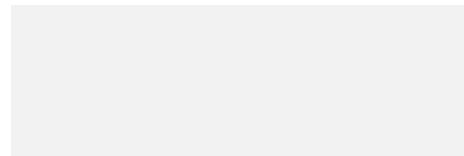


1

Lennon John

SCIPER: **XXXXX1**

Signature:



Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.

Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :

+1/ N points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,

0 point si vous ne cochez rien,

-1/ M point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :


+1 point si vous cochez la réponse correcte,

0 point si vous ne cochez rien,


-1 point si vous cochez la réponse incorrecte.

Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

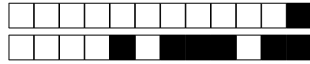
Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document. Des pages de brouillon sont à votre disposition à la fin de ce document. Elles ne seront pas corrigées.

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no





Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Cocher les affirmations vraies

☐ $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4$$

☐ $\exists C > 0, \forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4 \max_{-2 \leq x \leq 2} |u^{(5)}(x)|$$

☐ $\exists C > 0, \forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4$$



Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Soit $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on cherche à approcher numériquement $\int_{-1}^1 g(t)dt$ à l'aide de la formule de quadrature définie par:

$$J(g) = \omega g(-\alpha) + 2(1 - \omega)g(0) + \omega g(\alpha),$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $\omega > 0$.

Question 2 : On suppose $0 < \alpha \leq 1$ donné, pour quelle valeur de ω a-t-on

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2 ?$$

☐ $\omega = \frac{1}{3\alpha}$

☐ $\omega = \frac{1}{2\alpha}$

☐ $\omega = \frac{1}{3\alpha^2}$

☐ $\omega = \frac{1}{2\alpha^2}$

Question 3 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), a-t-on

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_3 ?$$

☐ VRAI☐ FAUX

Question 4 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), pour quelle valeur de α a-t-on

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_4 ?$$

☐ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$

☐ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

☐ $\alpha = 1$

Question 5 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), et pour celle de α trouvée dans la question), a-t-on

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_5 ?$$

☐ VRAI☐ FAUX

Question 6 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), et pour celle de α trouvée en), a-t-on

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_6 ?$$

☐ VRAI☐ FAUX



Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le problème suivant: étant donné la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, trouver la fonction $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + x(1 + \sin(u(x))) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Question 7 : Si $f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) + x(1 + \sin(\sin(2\pi x)))$, la solution de ce problème est donnée par $u(x) = \sin(2\pi x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : On utilise une méthode de différences finies centrées pour approcher u et la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire obtenu. Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ ainsi obtenue. Le fichier MatLAB/Octave `exam1.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

A la ligne `a(i)=2*coeff+????`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `cos(u(i))`
- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*cos(u(i))`
- ☐ `i*h*(1+sin(u(i)))`

Question 9 : A la ligne `b(i)=coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1)) + ???? -f(i*h)`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*(1+sin(u(i)))`
- ☐ `cos(u(i))`
- ☐ `i*h*cos(u(i))`

Question 10 : A la ligne `c(i)=????`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `c(i)/a(i)`
- ☐ `a(i+1)/c(i)`
- ☐ `a(i)/c(i)`
- ☐ `c(i)/a(i+1)`



Question 11 : A la ligne $a(i+1)=\text{sqrt}(a(i+1)-????)$;, il faut remplacer $????$ par:

- ☐ $c(i)*a(i+1)$
- ☐ $c(i)*a(i)$
- ☐ $a(i)*a(i)$
- ☐ $c(i)*c(i)$

Question 12 : A la ligne $b(i+1)=(b(i+1)-c(i)*b(i))/????$;, il faut remplacer $????$ par:

- ☐ $a(i)$
- ☐ $a(i+1)$
- ☐ $c(i)$
- ☐ $c(i+1)$

Question 13 : A la ligne $b(i)=(b(i)-c(i)*b(i+1))/????$;, il faut remplacer $????$ par:

- ☐ $a(i)$
- ☐ $c(i+1)$
- ☐ $a(i+1)$
- ☐ $c(i)$

Question 14 : A la ligne $u(i)=u(i) - ????;$;, il faut remplacer $????$ par:

- ☐ $a(i)$
- ☐ $c(i)$
- ☐ $u(i)$
- ☐ $b(i)$



Question 15 : Après avoir complété le fichier, les résultats obtenus sont les suivants:

```
>> err = exam1(9)
iter=1, stop = 1.649725e+00
iter=2, stop = 2.511976e-02
iter=3, stop = 7.045653e-06
iter=4, stop = 6.851657e-13
err = 0.031974
>> err = exam1(19)
iter=1, stop = 1.704753e+00
iter=2, stop = 2.564039e-02
iter=3, stop = 6.913912e-06
iter=4, stop = 6.217630e-13
err = 0.0082731
>> err = exam1(39)
iter=1, stop = 1.725976e+00
iter=2, stop = 2.577019e-02
iter=3, stop = 6.880664e-06
iter=4, stop = 6.025330e-13
err = 0.0020607
```

On déduit de ces résultats que :

- ☐ La méthode de Newton converge quel que soit le point de départ.
- ☐ La méthode des différences finies converge en $O(h)$.
- ☐ La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ.
- ☐ La méthode des différences finies converge en $O(h^2)$.



Fichier exam1.m:

```
function err = exam1(N)
%
% Resolution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
% par une methode de differences finies
% et une methode de Newton
% Etant donne u^n, trouver u^{n+1}
% tel que DF(u^n)(u^n - u^{n+1}) = F(u^n)
% En pratique on construit A=DF(u^n), b=F(u^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose u^{n+1}=u^n-y
%
% parametres
%
% N      : nombre d inconnues du systeme non lineaire
% a      : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
% c      : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
% b      : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
% u      : N-vecteur, contient u^n puis u^{n+1}
%
for i=1:N
    u(i) = 1;
end
h=1/(N+1);
coeff=(N+1)*(N+1);
stop=1;
iter=0;
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
        a(i) = 2*coeff + ???;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = ???;
    for i=2:N-1
        b(i) = coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1)) + ??? - f(i*h);
    end
    b(N) = ???;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = sqrt(a(1));
    for i=1:N-1
        c(i) = ???;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1) - ???);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Ly = b
```



```

b(1)=b(1)/a(1);
for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/????;
end

% Resolution du systeme lineaire  $L^T u^{n+1} = y$ 

b(N)=b(N)/a(N);
for i=N-1:-1:1
    b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/????;
end

%  $u^{n+1} = u^n - y$ 

for i=1:N
    u(i) = u(i) - ???;
end

% Calcul de  $\|b\|/\|u\|$ 

stop=norm(b)/norm(u);
fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)
end
err = 0;
for i=1:N
    err=max(err,abs(u(i)-uex(i*h)));
end
end
% second membre de l equation  $-u''(x)+x(1+\sin(u(x)))=f(x)$ 
function f=f(x)
    f=4*pi*pi*sin(2*pi*x)+x*(1+sin(sin(2*pi*x)));
end
% solution de l equation  $-u''(x)+x(1+\sin(u(x)))=f(x)$ 
function uex=uex(x)
    uex=????;
end

```



Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 16 : On cherche à résoudre le problème suivant: trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{array} \right.$$

La solution exacte du problème est donnée par $u(x, t) =$

- ☐ $\sin(\pi x)e^{-\pi t}$
☐ $\sin(\pi x) \cos(\pi t)e^{-\pi t}$
☐ $\sin(\pi x)e^{-\pi t}(\pi t + 1)$
☐ $\sin(\pi x) \cos(\pi t)$

Question 17 : En multipliant par $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ et en intégrant entre $x = 0$ et $x = 1$ on obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right) dx = 0$$

- ☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : En intégrant ensuite entre $t = 0$ et $t = 1$ on obtient:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 1) \right)^2 \right) dx + 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (\pi \cos(\pi x))^2 dx$$

- ☐ VRAI ☐ FAUX



Question 19 : Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, $\tau > 0$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, M$. On note u_i^n l'approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue en n'utilisant que des formulaes de différences finies centrées. Le fichier MatLAB/Octave `exam2.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

A la ligne `u1(i)=(1-lambda)*u0(i)+????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `lambda/4*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `2*lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `lambda/2*(u0(i-1)+u0(i+1))`

Question 20 : A la ligne `u2(i)=(2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-(1-pi*tau)*u0(i))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `1-pi*tau`
- ☐ `1`
- ☐ `1+pi*tau`
- ☐ `tau`

Question 21 : Une fois le fichier complété, on obtient les résultats suivants:

```
>> u=exam2(9,10,0.1);
    erreur maximum au temps final  4.073375e-03
>> u=exam2(19,20,0.05);
    erreur maximum au temps final  1.029995e-03
>> u=exam2(39,40,0.025);
    erreur maximum au temps final  2.582139e-04
>> u=exam2(79,80,0.0125);
    erreur maximum au temps final  6.459797e-05
```

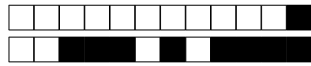
On en déduit:

- ☐ Le schéma est stable $\forall h > 0, \forall \tau > 0$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.



Fichier exam2.m:

```
function [u2]=exam2(N,M,tau)
%
% Schema de Newmark pour l'equation des ondes  $d^2u/dt^2 - d^2u/dx^2 + 2\pi$ 
%  $du/dt=0$ 
%
% parametres
%
% N      : nombre de points interieurs dans l'intervalle [0,1]
% h      : pas d'espace
% M      : nombre de pas de temps
% tau    : pas de temps
% t      : temps courant
% u0     : N-vecteur, u0(i) est une approximation de  $u(x_i, t_{n-1})$ 
% u1     : N-vecteur, u1(i) est une approximation de  $u(x_i, t_n)$ 
% u2     : N-vecteur, u2(i) est une approximation de  $u(x_i, t_{n+1})$ 
%
h=1./(N+1);
lambda=tau^2/h^2;
%
% condition initiale u0 et u1
%
for i=1:N
    u0(i)=sin(pi*i*h);
end
u1(1)=????;
for i=2:N-1
    u1(i)=(1-lambda)*u0(i)+????;
end
u1(N)=????;
%
% schema de Newmark
%
t=tau;
for n=2:M
    t=t+tau;
    u2(1)=????;
    for i=2:N-1
        u2(i)=(2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-(1-pi*tau)*u0(i))/????;
    end
    u2(N)=????;
    for i=1:N
        u0(i)=u1(i);
        u1(i)=u2(i);
    end
end
%
% imprimer l'erreur maximum au temps final
%
```



```
err = 0;
for i=1:N
    erri = abs(u2(i)-????);
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```



Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Réservé au correcteur

Soit $u: [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

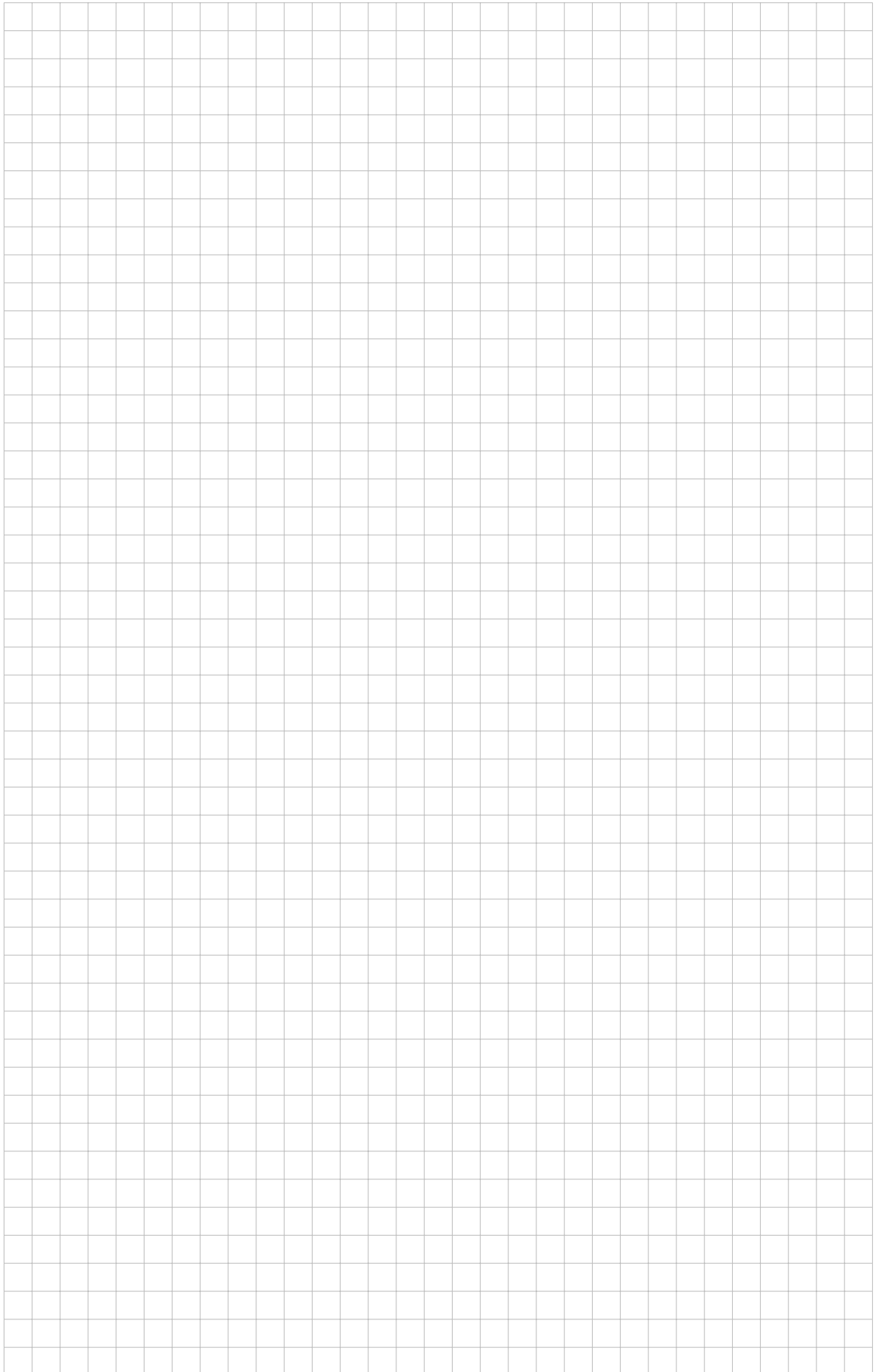
$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u(t) & 0 < t \leq 100, \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

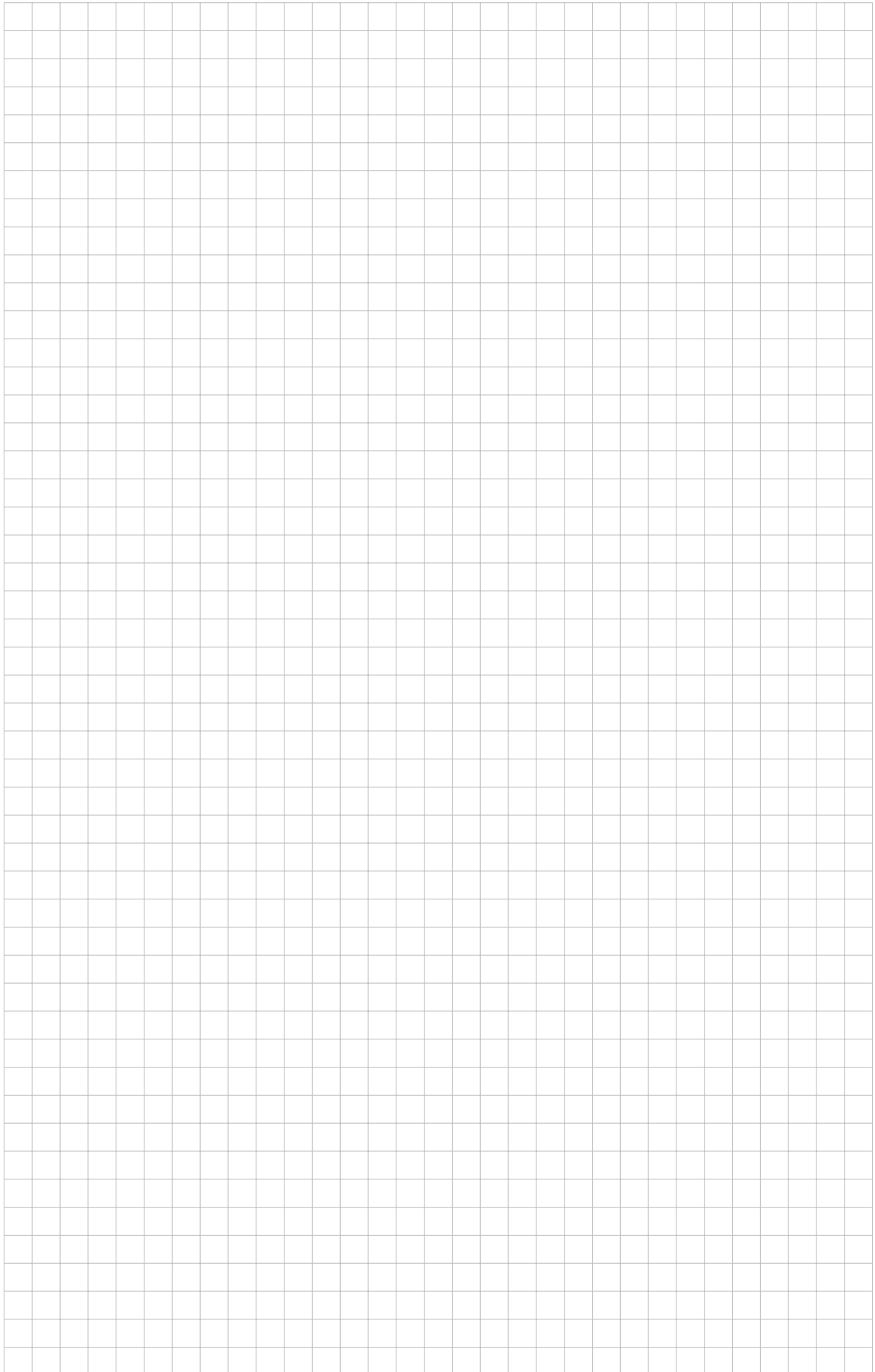
Soit N un entier positif, $h = \frac{100}{N}$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$. On note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue avec le schéma suivant :

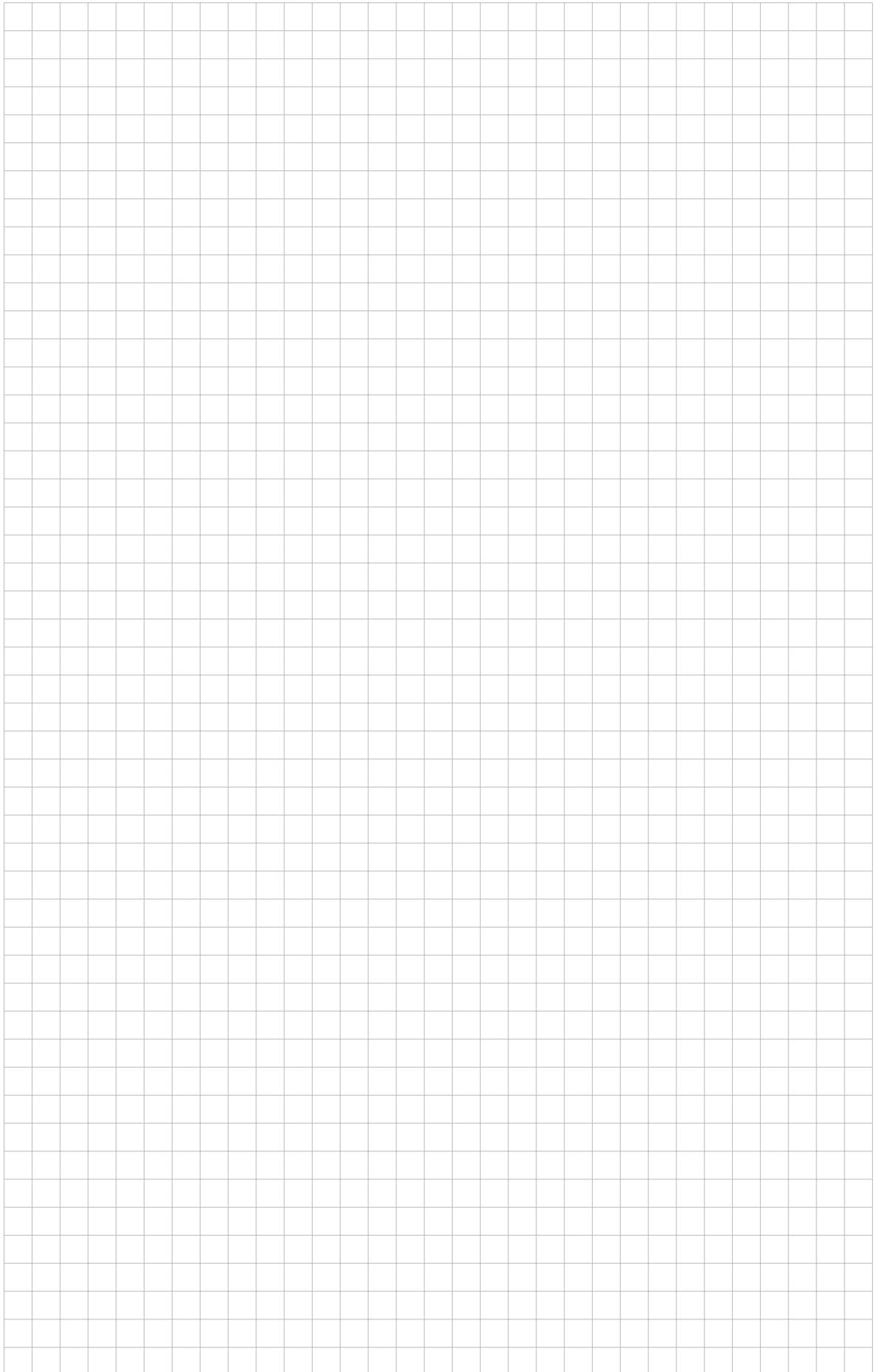
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -u^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

où on a posé $u^0 = 1$.

- (a) Montrer que $u(t_N) - u_N = e^{-Nh} - (1-h)^N$.
- (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $|e^{-x} - (1-x)| \leq \frac{x^2}{2}$.
- (c) En déduire que si $h \leq 2$, on a $|u(t_N) - u_N| \leq 50h$.









Question ouverte 2: Cette question est notée sur 7 points.

0 1 2 3 4 5 6 7

Réservé au correcteur

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$, N un entier positif, $h = \frac{1}{N}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

(a) Soit $f_h^1 \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ l'interpolant de degré 1 par intervalles de f défini par :

$$\begin{aligned} f_h^1(x_i) &= f(x_i), & i &= 0, 1, \dots, N, \\ f_h^1|_{[x_i, x_{i+1}]} &\in \mathbb{P}_1, & i &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

On suppose $f \in \mathcal{C}^2[0, 1]$.

- Soit $i = 0, 1, \dots, N-1$. Montrer qu'il existe $w_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que :

$$(f - f_h^1)'(w_i) = 0.$$

- En déduire que

$$|(f - f_h^1)(x)| \leq h^2 \max_{0 \leq t \leq 1} |f''(t)|$$

pour tout $0 < x < 1$.

(b) Soit $f_h^2 \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ l'interpolant de degré 2 par intervalles de f défini par :

$$\begin{aligned} f_h^2(x_i) &= f(x_i), & i &= 0, 1, \dots, N, \\ f_h^2(x_i + \frac{h}{2}) &= f(x_i + \frac{h}{2}), & i &= 0, 1, \dots, N-1, \\ f_h^2|_{[x_i, x_{i+1}]} &\in \mathbb{P}_2, & i &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

On suppose $f \in \mathcal{C}^3[0, 1]$.

- Soit $i = 0, 1, \dots, N-1$. Montrer qu'il existe $z_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que :

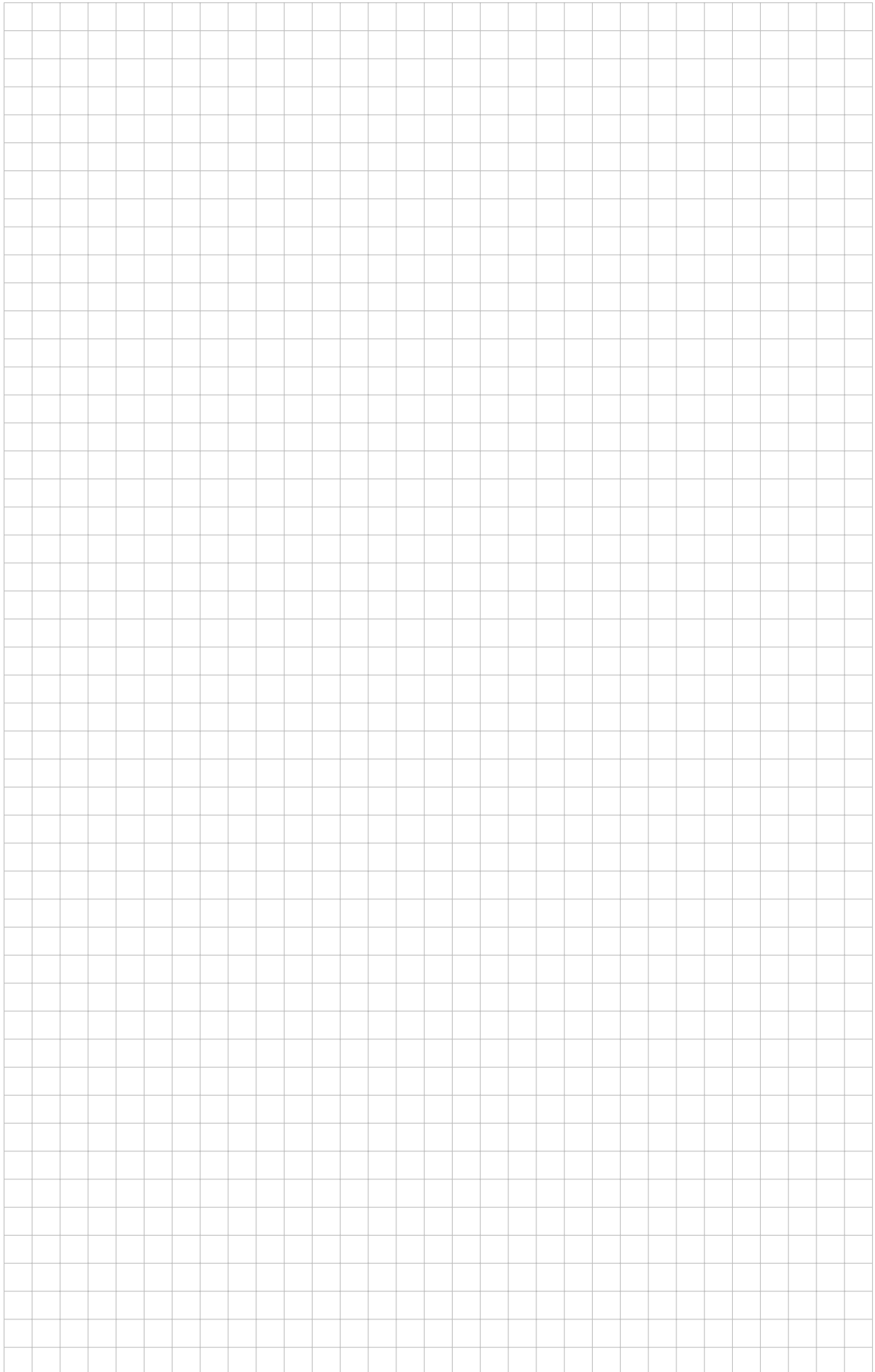
$$(f - f_h^2)''(z_i) = 0$$

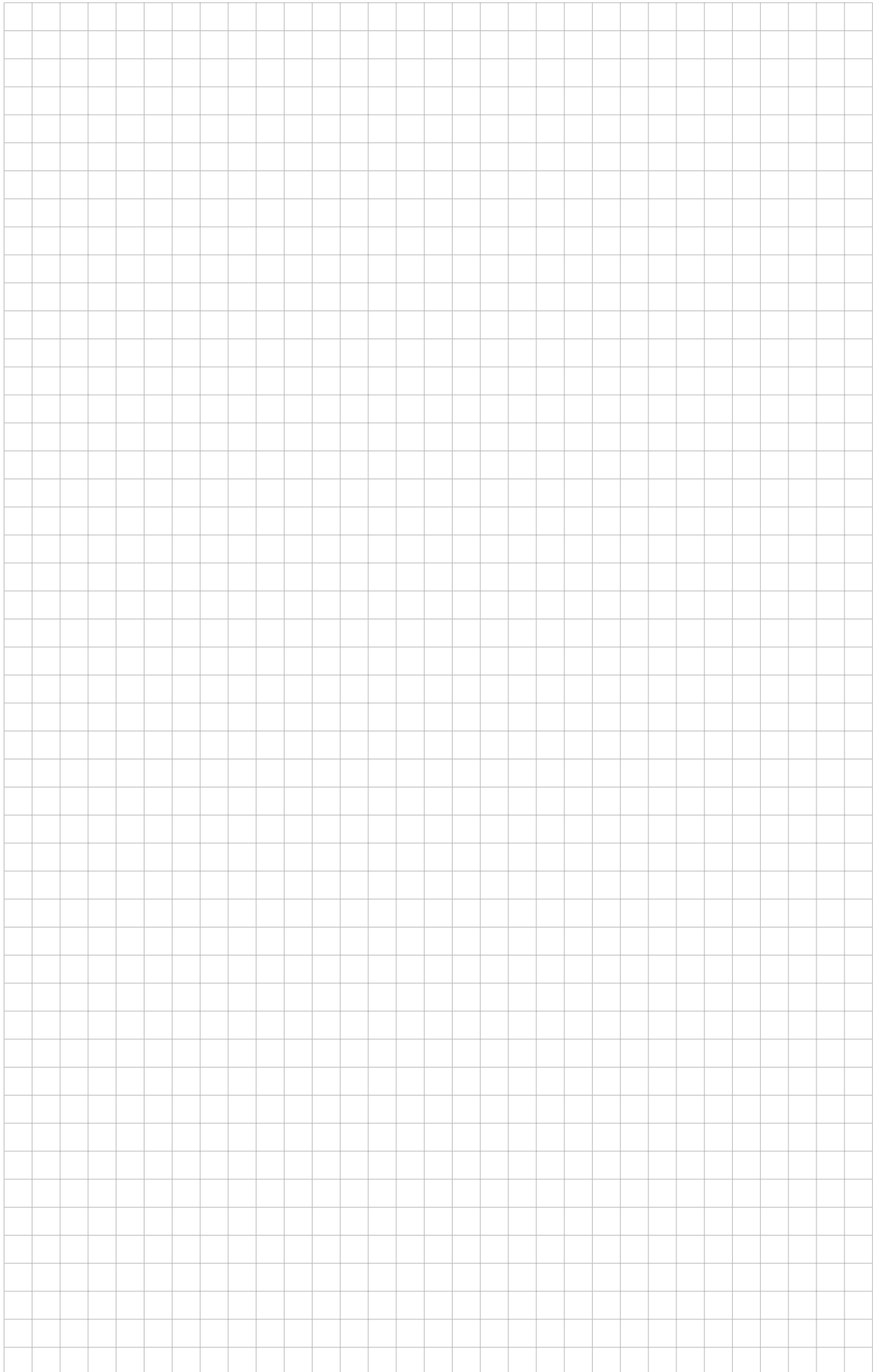
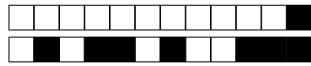
- En déduire que

$$|(f - f_h^2)(x)| \leq h^3 \max_{0 \leq t \leq 1} |f'''(t)|$$

pour tout $0 < x < 1$.









CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)