Exercice 1. *Montrer que* 3 *est une valeur propre de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer le polynôme caractéristique de la matrice.) Ensuite trouver une base de l'espace propre associé.

Solution 1. Ici, on identifie $\mathbb{R}^5$ avec l'ensemble des vecteurs colonnnes in $M_{5\times 1}(\mathbb{R})$. Posons A la matrice donnée. Alors, on a

$$A - 3I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a la première ligne égale à la cinquième. Sa forme échelonnée contient alors une ligne de zéros, c.-à-d. $\text{rang}(A - 3I_5) < 5$. On déduit qu'il existe une solution non triviale du système $(A - 3I_3)X = 0$ et l'ensemble des solutions est l'espace propre pour la valeur propre 3.
On cherche $\mathbf{v} = (a, b, c, d, e)^t \in \mathbb{R}^5$ tel que $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$, c.-à-d. $(A - 3I_3)\mathbf{v} = 0$. Par le procédé d'échelonnage, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L3\to L3+(-1)\cdot L1 \\ L5\to L5+(-1)\cdot L1}}{\widetilde{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L4\to L4+(-1)\cdot L2}{\widetilde{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par consééquent, $\mathbf{v} = (-2c - e, -2d - e, c, d, e)^t$ pour $c, d, e \in \mathbb{R}$ quelconques. Alors une base de l'éspace propre associé à la valeur propre 3 est

$$\{(-2, 0, 1, 0, 0)^t, (0, -2, 0, 1, 0)^t, (-1, -1, 0, 0, 1)^t\}.$$

Exercice 2. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a) Trouver les valeurs propres de A.

b) Trouver des bases des sous-espaces propres de A.

c) Peut-on déduire de a) si A *est inversible ou non ?*

d) Donner les valeurs propres de A^2.

e) Donner des bases des sous-espaces propres de A^2.

Solution 2. De nouveau dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^3$ avec l'ensemble des vecteurs colonnes dans $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

a) On rappelle que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. L'équation ci-dessus se réécrit $(A - \lambda I_3) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Or ceci implique en particulier que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible (en effet, si c'était le cas, on obtiendrait $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ par injectivité). Mais si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, on a alors que sont determinant est nul. Tout cela nous permet de dire que pour chercher une valeur propre λ de A, il suffit de chercher les solutions de l'équation $\det(A - \lambda I_3) = 0$, c'est-à-dire, les racines du polynôme caractéristique de A.
Au vu de l'énoncé, on a
$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6/5 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ -5 & 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$
Alors, $\det(A - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$. Si on veut $\det(A - \lambda I_3) = 0$, on obtient les solutions $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ (qui sont les valeurs propres de A).

b) (1) On cherche $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A\mathbf{v}_1 = 0\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Via le procédé d'échelonnage, on obtient
$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L1}\to\text{L1}\cdot(-\tfrac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+5\cdot\text{L1}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\text{L2}\to\text{L2}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+(-2)\cdot\text{L2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ce qui veut dire que que l'ensemble des solutions du système $A\mathbf{v}_1 = 0$ est $\{(\frac{8}{5}c, c, c)^t \mid c \in \mathbb{R}\}$ Ainsi, l'espace propre correspondant à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}\,(\frac{8}{5}, 1, 1)^t)$.

(2) On cherche $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$. Via le procédé d'échelonnage, et en posant $x = \sqrt{2}$, on obtient
$$\begin{pmatrix} -2-x & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1-x & 1 \\ -5 & 5 & 3-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L1}\leftrightarrow\text{L3}} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3-x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -2-x & \frac{6}{5} & 2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\text{L3}\to 5\cdot\text{L3}}{\overset{\text{L1}\to(-1)\cdot\text{L1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -10-5x & 6 & 10 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+(2+x)\text{L1}}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 4-x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 6-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+(-5)\cdot\text{L2}}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & -1-x & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+(1+x)\cdot\text{L2}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 2-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Donc $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{5}(-2+4\sqrt{2})c, (\sqrt{2}-1)c, c)^t$ où $c \in \mathbb{R}$ est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{2}$ est
$$\mathrm{Vect}\,((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t).$$

(3) On cherche $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$. On peut utiliser le même échelonnage que ci-dessus mais avec $x = -\sqrt{2}$ (ce qui marche bien puisqu'on a toujours $x^2 = 2$). On obtient alors $\mathbf{v}_3 = (\frac{-1}{5}(2+2\sqrt{2})c, (-1-\sqrt{2})c, c)^t$ où $c \in \mathbb{R}$ est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ est
$$\mathrm{Vect}\,((-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t).$$

c) Puisque 0 est valeur propre de A, on sait qu'il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $A \cdot \mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Mais alors, l'application linéaire correspondant à A ($T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbf{v}$) n'est pas injective (puisque $\mathbf{u} \in \ker(T_A)$) et donc en particulier n'est pas bijective. Mais alors, puisque A correspond à une application linéaire qui n'est pas inversible, A n'est pas inversible.

d) On note que si $Av = \lambda v$ alors $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Donc si λ est une valeur propre de A alors λ^2 est une valeur propre de A^2. Dans le cas précis où A est la matrice donnée, on a donc que 0 et 2 sont des valeurs propres de A^2.

e) — On cherche $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A^2\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Il suffit de remarquer que si $\mathbf{v}_1$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre 0 (c.-à-d. $\mathbf{v}_1 \in \langle(\frac{8}{5}, 1, 1)^t\rangle_{\mathbb{R}}$), on a $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, donc $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Donc l'espace propre associé à μ_1 contient $(\frac{8}{5}, 1, 1)^t$.

— On cherche $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A^2\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_2$. On remarque que si $\mathbf{v}_2$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{2}$ (c.-à-d. $\mathbf{v}_2 \in \langle(-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t\rangle_{\mathbb{R}}$), on a $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$, donc $A^2\mathbf{v}_2 = A(A\mathbf{v}_2) = \sqrt{2}A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$. De même, si $\mathbf{v}_3$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ (c.-à-d. $\mathbf{v}_3 \in \langle(-2(1+\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t\rangle_{\mathbb{R}}$), on a $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$, donc $A^2\mathbf{v}_3 = A(A\mathbf{v}_3) = -\sqrt{2}A\mathbf{v}_3 = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2})\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$. Donc l'espace propre associé à μ_1 contient

$$\text{Vect}\left((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t, (-2(1+\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t\right).$$

— On note que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et comme le polynôme caractéristique de A^2 est de degré 3, et la multiplicité d'une valeur propre dans ce polynôme caractéristique est au moins la dimension de l'espace propre pour la valeur propre, il n'existe aucune autre valeur propre pour A^2, ni vecteur propre linéairement indépendant des trois déja trouvés.

Exercice 3. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices A et B, leurs valeurs propres, ainsi que les espaces propres associés.

Solution 3. 1. On calcule le polynôme caractéristique c_A :

$$c_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 5-t & 3 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (5-t)(1-t) + 3 = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4),$$

d'où on a que les valeurs propres de A sont 2 et 4.
L'espace propre E_2 est

$$E_2 = \ker(A - 2I_2) = \cdots = \text{Vect}((1, -1)),$$

L'espace propre E_4 est

$$E_4 = \ker(A - 4I_2) = \cdots = \text{Vect}((3, -1)).$$

2. On calcule le polynôme caractéristique c_B :

$$c_B(t) = \det(B - tI) = \cdots = (2-t)(-1-t)(4-t),$$

d'où on a que les valeurs propres sont 2, -1 et 4.
Les espaces propres sont

$$E_2 = \ker(B - 2I_3) = \cdots = \text{Vect}((1/3, 1/2, 1)),$$

$$E_{-1} = \ker(B + I_3) = \cdots = \text{Vect}((5/3, 1, 0)),$$

$$E_4 = \ker(B - 4I_3) = \cdots = \text{Vect}((0, 1, 0)).$$

Exercice 4. *Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des polynômes, muni de la base $(p_0, p_1, p_2, \ldots)$ définie par $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3, \ldots$. On considère le sous-espace vectoriel W engendré par les polynômes $q_1(t) = t^2 + 2$, $q_2(t) = t^2 - 2$, $q_3(t) = t^3 + 3$.*

a) Montrer que $B = (q_1, q_2, q_3)$ et $B' = (p_0, p_2, p_3)$ sont des bases de W.

b) Ecrire la matrice de passage $[\mathrm{id}]_{B,B'}$.

c) Utiliser la matrice $[\mathrm{id}]_{B,B'}$ pour calculer les composantes dans la base B des polynômes

$$p(t) = -1 + 3t^2 - 5t^3,\ q(t) = (t+a)(t+b)(t+c),$$

après avoir déterminé les conditions sur a, b, c pour que q appartienne à W.

d) Soit $T : W \to W$ une transformation linéaire telle que $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de T et déterminer la multiplicité algébrique et géométrique de chaque valeur propre.

Solution 4. a) Pour cette partie, on regarde W comme sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

— On vérifie d'abord que q_1, q_2 et q_3 sont linéairement indépendants. Pour cela, on considère la base canonique de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ qui est $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ et on écrit les vecteur de B dans cette base. Le procédé d'échelonnage nous donne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Et comme cette matrice à 3 pivots, les vecteurs q_1, q_2 et q_3 sont linéairement indépendants et donc forment une base de W.

— Comme $\dim W = 3$, et les vecteurs p_0, p_2, p_3 appartiennent à W, $B' = \{1, t^2, t^3\}$ est aussi une base (vérification de l'indépendance linéaire facile).

b) Il faut donc exprimer les vecteurs de la base B' en termes de la base B. Puisque

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{4}(q_1 - q_2) \\ p_2 &= q_1 - 2p_0 = \ldots = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\ p_3 &= q_3 - 3p_0 = \ldots = \frac{-3}{4}(q_1 - q_2) + q_3, \end{aligned}$$

on a

$$[\mathrm{id}]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) — Tout d'abord, on écrit $p(t) = -1p_0(t) + 3p_2(t) - 5p_3(t)$. Ainsi, $[p(t)]_{B'} = (-1, 3, -5)^t$. Alors, on a

$$[p(t)]_B = [\mathrm{id}]_{BB'}[p(t)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

— On commence par développer $q(t)$, et on obtient

$$q(t) = t^3 + (a+b+c)t^2 + (ab+ca+cb)t + abc.$$

Comme B' est une base de W, q appartient à W si et seulement si il s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de B' (note : $W = \{r(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$). Donc q appartient à W si et seulement si $ab+ca+cb=0$. Dans cette situation, on a $[q(t)]_{B'}=(abc, a+b+c, 1)^t$, et donc

$$[q(t)]_B = [\mathrm{id}]_{BB'}[q(t)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ a+b+c \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} abc+2a+2b+2c-3 \\ -abc+2a+2b+2c+3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $[T]_{B'}-\lambda I_3$ ne soit pas inversible. En resolvant l'équation $\det([T]_{B'}-\lambda I_3)=0$, on obtient que les valeurs propres de $[T]_{B'}$ sont $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=2$ (apparaissant avec multiplicité 2). On va cherche un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Pour cela on cherche $p(t)=at^3+bt^2+c \in W$ tel que $[T]_{B'}[p(t)]_{B'}=2[p(t)]_{B'}$. Comme $[p(t)]_{B'}=(a,b,c)^t$, on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} a+c=2a \\ a+2b=2b \\ a+c=2c. \end{cases}$$

Or, la solution à ce système est $a=0$, $c=0$ et $b\in\mathbb{R}$ libre. Donc l'espace propre associé à la valeur propre 2 est $\mathrm{Vect}\,(t^2)$. Note : cet espace propre est de dimension 1 bien que $\lambda_2=2$ soit une valeur propre de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique. Donc 2 est une valeur propre de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 1. La valeur propre 0 est de multiplicité algébrique et géométrique 1.

Exercice 5. *Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que*

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{32}+a_{33}=a$$

Calculer $A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *et conclure que a est une valeur propre de A.*

Solution 5. Calculons donc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On en conclut que a est une valeur propre de A puisque $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

Exercice 6. *Soient*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Est-ce que 4 est une valeur propre de A ? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.*
2. *Est-ce que*

$$\vec{v} := \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de B ?

3. *Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre* 3 *de* C*. Quelle est la dimension de cet espace propre ? Trouver la multiplicité géométrique de la valeur propre* 3 *de la matrice* C*.*
4. *Montrer que* 0 *et* 6 *sont des valeurs propres de* D*, calculer les espaces propres associés et déterminer les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre.*

Solution 6. 1. Il faut calculer $\ker(A - 4I_3)$. On échélonne la matrice $A - 4I_3$:

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où on voit que

$$\ker(A - 4I_3) = \dim(\ker(A - 4I_3)) = 1 > 0.$$

Donc 4 est une valeur propre. Le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre 4, où

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A - 4I_3) = E_4.$$

2. On calcule

$$B\vec{v} = \vec{0} = 0\vec{v}.$$

Donc $\vec{v}$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre 0.

3. On a que

$$E_3 = \ker(C - 3I_3) = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)).$$

Donc une base pour E_3 est donnée par $\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$. On déduit que la multiplicité gémétrique est égale à 2.

4. On calcule

$$c_D(0) = \det(D - 0I_3) = \det(A) = 0,$$

d'où 0 est une valeur propre, et

$$c_D(6) = \det(D - 6I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 1 & 2-6 & 3 \\ 1 & 2 & 3-6 \end{pmatrix} = 0,$$

d'où 6 est une valeur propre. Pour les espaces propres associés, on a que

$$E_0 = \ker(D - 0I_3) = \ker(A) = \mathrm{Vect}((-3, 0, 1), (-2, 1, 0)),$$

$$\text{et } E_6 = \ker(D - 6I_3) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)).$$

On a que la multiplicité géométrique de 0, respectivement de 6, est égale à 2, resp. 1. Comme la multiplicié algébrique est plus grand ou égale à la multiplicité géométrique et la somme des multiplicités algébriques est $3 =$ degré du polynôme caractéristique de D, on déduit que les multiplicités algébriques respectives sont aussi 2 et 1.

Exercice 7. *Vrai ou Faux ? Montrer ou donner un contre-exemple.*
Soient A *une matrice de taille* 3×3 *inversible et* λ *une valeur propre de* A*.*

1. *Alors* $-\lambda$ *est une valeur propre de* $-A$*.*
2. *Alors* λ *est une valeur propre de* $-A$*.*
3. *Alors* $\lambda \neq 0$ *et* λ^{-1} *est une valeur propre de* A^{-1}*.*
4. *On a que* λ *est une valeur propre de* A^{-1}*.*
5. *On a que* $\lambda \neq 0$*.*

Solution 7. 1. *Vrai.* En effet, si $\vec{v}$ est un vecteur propre pour A correspondant à la valeur propre λ, alors

$$(-A)(-\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v} = (-\lambda)(-\vec{v}),$$

qui montre que $-\lambda$ est une valeur propre pour $-A$.

2. *Faux.* En effet, 1 est une valeur propre pour I_3. Pourtant 1 n'est pas une valeur propre de $-I_3$.
3. *Vrai.* En effet, si $\vec{v}$ est un vecteur propre pour A correspondant à la valeur propre λ, alors

$$\vec{v} = I_3\vec{v} = A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\lambda\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

qui montre que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre pour A^{-1}.

4. *Faux.* En effet, 2 est une valeur propre pour $2I_3$. Pourtant 2 n'est pas une valeur propre de $(2I_3)^{-1} = \frac{1}{2}I_3$.
5. Vrai : comme un vecteur propre associé à une valeur propre nulle appartient au noyau de A et comme $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, puisque A est inversible, $\lambda \neq 0$.

Exercice 8. *Sans poser d'équations, en utilisant les propriétés géométriques des applications décrites, trouver une valeur propre de T et décrire son espace propre dans les cas suivants :*

1. *T est la rotation dans $\mathbb{R}^3$ dont l'axe est la droite $x = y = z$.*
2. *T est une symétrie dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = 2x$.*
3. *T est une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.*

Solution 8. 1. Soit T la rotation dans $\mathbb{R}^3$ dont l'axe est la droite $x = y = z$. L'axe étant fixé par la rotation, on voit que le vecteur $(1, 1, 1)$, qui engendre l'axe de rotation, est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

2. Soit T la symétrie dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = 2x$. On voit que le vecteur $(1, 2)$, qui engendre l'axe de symétrie, est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. D'autre part la droite perpendiculaire à l'axe de symétrie, et passant par l'origine, engendrée par le vecteur $(2, -1)$, se trouve dans E_{-1}, et en fait

$$E_{-1} = \operatorname{Vect}((2, -1)).$$

3. Soit T la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$. On constate d'une part que ce plan est fixé par T, et en fait

$$E_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

D'autre part la droite perpendiculaire au plan, et passant par l'origine, engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$ se trouve dans le noyau de T, et en fait

$$E_0 = \operatorname{Vect}((1, 1, 1)).$$

(Ici on utilise le fait que le vecteur (a, b, c) est perpendiculaire au plan $ax + by + cz = 0$. Si vous ne connaissez pas ce fait, vous verrez la justification au chapitre 9.)

Exercice 9. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— *Ecrire pour chaque matrice le polynôme caractéristique.*

— *Trouver pour chaque matrice les valeurs propres et les espaces propres correspondants.*

Solution 9. 1. Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(t) = \det(A - tI) = (t-1)(-t^2 + t + 1),$$

avec les trois racines $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = (1+\sqrt{5})/2, \lambda_3 = (1-\sqrt{5})/2$. Ces trois racines sont trois valeurs propres relles distinctes.Les espaces propres sont

$$E_1 = \text{Vect}((0,1,0)),$$

$$E_{1+\sqrt{5})/2} = \text{Vect}((-2,-2,1-\sqrt{5})),$$

$$E_{1-\sqrt{5})/2} = \text{Vect}((-2,-2,1+\sqrt{5})).$$

(Chaque valeur propre est de multiplicité algébrique et géométrique égales à 1.)

2. Le polynôme caractéristique de B est

$$c_B(t) = \det(B - tI) = (1-t)(t^2+1),$$

avec la seule racine réelle 1. L'espace propre correspondant à la valeur propre 1 est

$$E_1 = \text{Vect}((0,0,1)).$$

Cela implique que la multiplicité géométrique de 1 est égale à 1.

3. $$c_C(t) = \det(C - tI) = (1-t)^2,$$

avec une racine double $\lambda = 1$. L'espace propre est

$$E_1 = \text{Vect}((1,0)).$$

Exercice 10. *Questions à Choix Multiples.*

a. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ *Alors seulement* 6 *est une valeur propre de* A.
☐ *Alors* -6 *et* -4 *sont valeurs propres de* A.
☐ *Alors* 6 *et* 0 *sont valeurs propres de* A.
X *Alors* -4 *et* 6 *sont valeurs propres de* A.

b. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ *et* $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ *Alors* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *mais pas* $\mathcal{C}$.
X *Alors* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *et* $\mathcal{C}$ *aussi.*
☐ *Alors* $\mathcal{C}$ *est une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *mais pas* $\mathcal{B}$.
☐ *Alors* $\mathcal{B}$ *n'est pas une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *et* $\mathcal{C}$ *non plus.*

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ *et* $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$, *deux bases de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *On pose encore* $S = (Id)_{\mathcal{CB}}$ *et* $T = (Id)_{\mathcal{BC}}$ *et on considère les coefficients* s_{ij} *de* S *et les coefficients* t_{ij} *de* T.

☐ *Alors* $s_{13} = 3/2$ *et* $t_{23} = 0$.
☐ *Alors* $s_{13} = 9/16$ *et* $t_{23} = 3/2$.
☐ *Alors* $s_{13} = -1$ *et* $t_{23} = -3/4$.
X *Alors* $s_{13} = 3/2$ *et* $t_{23} = -9/8$.

d. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

X 0 est une valeur propre de A.
☐ A est la matrice nulle.
☐ A n'a pas de valeur propre réelle.
☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

Solution 10. Choix Multiple.

a. ☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

On calcule $c_A(t) = (t-6)(t+4)$.

b. ☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{C}$ aussi.

Les deux familles proposées forment des bases. On peut le voir par exemple pour chacune des bases en écrivant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des polynômes donnés par rapport à la base canonique. Cette matrice est inversible dans les deux cas.

c. ☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

On ne doit pas calculer les matrices de passage en entier. Pour s_{13} on doit exprimer le troisième vecteur de la base $\mathcal{B}$ en terms de la base $\mathcal{C}$. On placera ces coordonnées dans la troisième colonne de S. On trouve que $1 + t + t^2 = (3/2) \cdot 1 + (3/2)(t - \frac{1}{2}) + 1 \cdot (t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$ et la troisième colonne de S est $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul similaire donne la troisième colonne de T égale à $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$.

d. ☐ 0 est une valeur propre de A.

Comme A n'est pas inversible, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ admet une solution non nulle. Autrement dit, 0 est une valeur propre de A. En particulier, cela implique que A a une valeur propre réelle. Ensuite, considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible et non nulle. Finalement, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A, par exemple.

Exercice 11. *Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, et λ une valeur propre de A. Montrer que λ^k est une valeur propre de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.*

Solution 11. Soit λ une valeur propre de A et soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre non nul associé à λ. On a alors $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. On démontre par récurrence sur k que $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$.

Cas k=1 Le cas $k = 1$ découle directement du fait que $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ.

Pas d'induction On suppose $A^{k-1}\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\mathbf{v}$. Alors, on obtient

$$A^k\mathbf{v} = (AA^{k-1})\mathbf{v} = A(A^{k-1}\mathbf{v}) = A(\lambda^{k-1}\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v},$$

ce qui termine le pas de récurrence.

Ainsi, $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais comme $\mathbf{v}$ est un vecteur non nul, cela implique que λ^k est une valeur propre de A^k.
