Analyse combinatoire

1. Calculer :

a) $A = \dfrac{9!}{7!\,2!}$ b) $B = \dfrac{9!\cdot 8\cdot 7!}{9\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}$ c) $C = \dfrac{\mathrm{C}_7^3\,\mathrm{P}_4}{\mathrm{A}_5^3}$

2. Factoriser ou simplifier :

a) $A = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$

b) $B = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!}$

c) $C = \dfrac{1}{n\cdot n!} - \dfrac{1}{n\,(n+1)!}$

d) $D = (n+2)! - (n+1)!$

e) $E = \dfrac{(2n)!}{2\cdot n!}$

3. Montrer que :

a) $\mathrm{C}_n^k\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \mathrm{C}_n^p\,\mathrm{C}_p^k\,, \qquad 0 < k \le p \le n$

b) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = 2n$

4. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ fixé, et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \mathrm{C}_p^p + \mathrm{C}_{p+1}^p + \mathrm{C}_{p+2}^p + \cdots + + \mathrm{C}_{p+n}^p$$

Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ S_n = \mathrm{C}_{p+n+1}^{p+1}$.

b) Soit $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+3)\,(k+2)\,(k+1)\,,\ n \in \mathbb{N}$.

Calculer A_n en utilisant la relation démontrée sous a).

5. Soient $E = \{a; b\}$ un ensemble à deux éléments et $n \in \mathbb{N}$. On considère toutes les applications f de E dans $\mathbb{N}$ qui satisfont à la condition suivante : $f(a) + f(b) \le n$.

a) On appelle graphe de f, que l'on note $\mathcal{G}_f$, l'ensemble de tous les couples $(\,x\,,\,f(x)\,)\,,\ x \in E$.

Expliciter le graphe de toutes ces applications pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

b) Pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, on note $Q(n)$ le nombre de ces applications.

Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad Q(n) = \mathrm{C}_{n+2}^2$.

6. Avec les voyelles a, e, i, o, u et les consonnes b, c, d, m, n, p, r on écrit des "mots" de 8 lettres distinctes, contenant 4 voyelles et 4 consonnes de façon alternée.

a) Combien de tels "mots" peut-on écrire ?

b) Combien y a-t-il de tels "mots" contenant les lettres a et r et commençant par m ?

7. On donne les chiffres 1, 3, 5, 7 et 4, 6, 8.

a) Combien de nombres à 5 chiffres distincts ayant 3 chiffres impairs et deux pairs peut-on former ?

b) Combien d'entre eux commencent par 1 et se terminent par 8 ?

c) Combien d'entre eux contiennent 5 ?

d) Combien d'entre eux contiennent 5 ou 6 ?

e) Combien d'entre eux contiennent 5 et 6 inséparables ?

8. On tire trois cartes d'un jeu de 36 cartes.
Indications :
— il y a 4 "couleurs" dans un jeu de cartes : pique, coeur, trefle, carreau ;
— la "hauteur" d'une carte est sa valeur : par exemple 10, valet, etc ;
— il y a 9 hauteurs dans un jeu de 36 cartes.
Combien existe-t-il de façons d'extraire 3 cartes sachant que :

a) les trois cartes sont de même "couleur",

b) les trois cartes sont des as,

c) les trois cartes sont de même "hauteur",

d) il n'y a pas de coeur parmi les trois cartes,

e) il y a au moins un coeur,

f) il y a un coeur exactement.

9. a) Combien peut-on écrire de nombres à 4 chiffres distincts ?

b) Combien y en a-t-il d'impairs ?

c) Combien y en a-t-il qui soient à la fois divisibles par 5, contenant 7 et deux chiffres pairs ? (On considère 0 comme un chiffre pair).

10. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts choisis parmi ceux de l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \text{ et } x^2 + 6 > 5x\}$, tels que :

a) le nombre est pair,

b) le chiffre du milieu est impair.

11. Soient

$$\begin{aligned} D &= \,]0;\, 12[\\ B &= \bigcup_{k \in I} \,]3k;\, 3k+3[\,, \qquad I = \{0;\, 1;\, 2;\, 3\} \end{aligned}$$

a) Expliciter l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C_D B \text{ ou } |x| \leq 5\}$.

b) On forme des nombres de 5 chiffres distincts choisis dans E.
Combien peut-on former de ces nombres qui ne sont pas divisibles par 25 ?

Réponses

1. a) $A = 36$ b) $B = 8 \cdot 8\,!$ c) $C = 14$

2. a) $A = \dfrac{1}{n(n+1)}$

b) $B = \dfrac{-1}{n(n+1)}$

c) $C = \dfrac{1}{(n+1)!}$

d) $D = (n+1)!\,(n+1)$

e) $E = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!} =$
$= (2n-1)(2n-2)...(n+1)n$

3. b) pas de solution

4. b) $A_n = 3!\, \mathrm{C}_{n+4}^4$

5. a) $n = 0: \quad \mathcal{G}_{f_1} = \{(a;\, 0);\; (b;\, 0)\}$

$n = 1: \quad \mathcal{G}_{f_1} = \{(a;\, 0);\; (b;\, 0)\}$

$\mathcal{G}_{f_2} = \{(a;\, 0);\; (b;\, 1)\}$

$\mathcal{G}_{f_3} = \{(a;\, 1);\; (b;\, 0)\}$

6. a) $2\, 4!\, \mathrm{C}_5^4\, 4!\, \mathrm{C}_7^4$

b) $4!\, 3!\, \mathrm{C}_4^3\, \mathrm{C}_5^2$

7. a) $5!\, \mathrm{C}_4^3\, \mathrm{C}_3^2$

b) $3!\, \mathrm{C}_3^2\, \mathrm{C}_2^1$

c) $5!\, \mathrm{C}_3^2\, \mathrm{C}_3^2$

d) $5!\, \left(\mathrm{C}_4^3\, \mathrm{C}_3^2 - 1\right) = 11 \cdot 5!$

e) $3!\, 8\, \mathrm{C}_3^2\, \mathrm{C}_2^1$

8. a) $4\, \mathrm{C}_9^3$

b) C_4^3

c) $9\, \mathrm{C}_4^3$

d) C_{27}^3

e) $\mathrm{C}_{36}^3 - \mathrm{C}_{27}^3$

f) $9\, \mathrm{C}_{27}^2$

9. a) $4!\, \mathrm{C}_{10}^4 - 3!\, \mathrm{C}_9^3$

b) $5\, \left(3!\, \mathrm{C}_9^3 - 2!\, \mathrm{C}_8^2\right)$

c) 148

10. a) $4\, 4!\, \mathrm{C}_7^4 - 3\, 3!\, \mathrm{C}_6^3$

b) $4\, 4!\, \mathrm{C}_7^4 - 4\, 3!\, \mathrm{C}_6^3$

11. a) $E = \{0;\, 1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6;\, 9\}$

b) $5!\, \mathrm{C}_8^5 - 4!\, \mathrm{C}_7^4 - 2\, 3!\, \mathrm{C}_6^3 + 2!\, \mathrm{C}_5^2$