Analyse 1

Algèbre élémentaire

Suite de nombre réels

Étude de fonction / fonction réels

Calcul différentiel

1. Algèbre élémentaire

1.1 Ensemble numérique

L'ensemble des entier naturelle $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

ensemble infini (infini dénombrable) $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

c'est l'ensemble à compter mais est algébriquement pauvre

L'ensemble des entier relatif $\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$

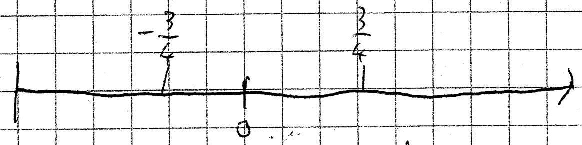
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ pourtant il y a autant $\mathbb{Z}^* = \{\dots -1, 1, 2, 3, \dots\}$

d'élément dans les deux ensemble

l'équation $x + b = a$ $a, b \in \mathbb{Z}$ a toujours une unique solution dans $\mathbb{Z}$

L'ensemble des nombre rationnel $\mathbb{Q} = \{q = \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$\mathbb{Q}$ est aussi un ensemble dénombrable



rationel négatif   rationel positif

$\mathbb{Q}^- =$ ensemble des nombre négatif

$\mathbb{Q}^+ =$ ensemble des nombre positif. fonctionne aussi pour les autre ensemb

Il semble que les points puissent être infiniment proche.

En effet : quel que soit deux rationel $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ il existe to

un $r \in \mathbb{Q}$ tel que $p < r < q$ $[r = \frac{1}{2} \cdot (p+q) \in \mathbb{Q}]$

Or, les points représentant les rationels ne suffisent pas à combler

tout les trou (par exemple, $\sqrt{2}$, π) (il n'y a pas de bijection

pas toute les corresp
entre la droite des nombre
et l'ensemble $\mathbb{Q}$

L'ensemble des nombre réel $\mathbb{R}$, c'est l'ensemble des points de la droite numérique qui peuvent être représenté. Cette ensemble est dit infini non dénombrable. (infini plus grand à celui des entier naturelle)

On distinge deux sous ensemble de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rati

dénombrable $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ c'est le reste

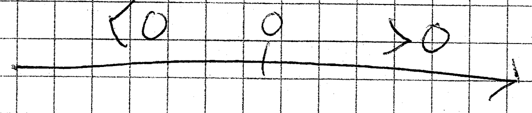
non dénombrable

entre 2 réels il y a toujours un rationel.

Ex : il y a toujours un un rationel qui approche $\sqrt{2}$

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{Q}$

1.2 Inégalité sur les réels



$a > b$ ssi [si et seulement si] $a - b > 0$

$a < b$ ssi $a - b < 0$

La somme de 2 réel positif (ou nul) est positive où nul

La somme de 2 réel négatif (ou nul) est négative ou nul

Propriété

1) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

[$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$, $b \leq c \Leftrightarrow b - c \leq 0$ donc

$(a-b) + (b-c) \leq 0 \Leftrightarrow a - c \leq 0 \Rightarrow a \leq c$]

2) Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$ $\underbrace{x \leq y}_{\text{hypothèse}} \Rightarrow \underbrace{a + x \leq a + y}_{\text{conclusion}}$

[$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow x - y + a - a \leq 0$

$(x+a) - (y+a) \leq 0 \Leftrightarrow x + a \leq y + a$

3) Soit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ et $x \leq y \Rightarrow x + a \leq b + y$

[$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$, $x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0$

Donc $(a-b) + (x-y) \leq 0 \Leftrightarrow (a+x) - (b+y) \leq 0 \Leftrightarrow x + a \leq b + y$]

Règle de calcule : le produit de 2 réel positif (ou nul) est positif (ou nul)

Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$ $x \geq y$ et $a \geq 0 \Rightarrow ax \geq ay$

[$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow a(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow ax - ay \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq ay$]

Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$ $x \geq y$ et $a \leq 0 \Rightarrow ax \leq ay$

[$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$, $a \leq 0 \Rightarrow (-a) \geq 0$

$(-a)(x-y) \geq 0 \Rightarrow ay - ax \geq 0$ $ax \leq ay$]

Exemple 1 $a, b, x \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$$ax \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{b}{a} & si\ a > 0 \\ x \leq \frac{b}{a} & si\ a < 0 \end{cases}$$

Exemple 2 Résoudre l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{m} \cdot x + 2 > \frac{1}{2} x + m \qquad m \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) x > m - 2$$

$$\left(\frac{2-m}{2m}\right) x > m - 2$$

m		0		2	
$2-m$	+		+	0	−
$2m$	−	0	+		+
$\frac{2-m}{2m}$	−		+	0	−

$$\frac{2-m}{2m} > 0 \Leftrightarrow m \in]0, 2[$$

$$x > (m-2) \cdot \left(\frac{2m}{2-m}\right)$$

$$x > -2m$$

$$\frac{2-m}{2m} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

alors $0x > 0$ jamais verifier pour tout x réel

$$\frac{2-m}{2m} < 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

alors $x < -2m$ en resumé

si $m \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ $S =]-\infty; -2m[$

si $m \in]0; 2[$ $S =]-2m; +\infty[$

si $m = 2$ $S = \emptyset$

Ex 3 Attention

. $x(x-1) \geqslant x-1 \cancel{\Rightarrow} x \geqslant 1$

[$x^2 - x \geqslant x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ $\boxed{(x-1)^2 \geqslant 0 \text{ toujours Vrai}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $S = \mathbb{R}$]

Ex 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x+1}{2x+6} \leqslant \frac{x-1}{x+3}$$

$D_{def} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

On se ramène à une inéquation du type $Q \leqslant 0$ ou $Q \geqslant 0$

$$\frac{x+1}{2(x+3)} - \frac{x-1}{x+3} \leqslant 0$$

$$\frac{(x+1) - 2\cdot(x-1)}{2(x+3)} \leqslant 0$$

numérateur → $-x+3$

dénominateur → $2(x+3)$ $\leqslant 0$

x		-3		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$2(x+3)$	$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

$S =]-\infty ; -3[\cup [3 ; +\infty[$

Ex 5 Soient $x \in [2;5]$ et $y \in [1;4]$ comment peut l'on borner $x-y$?

$$\cancel{\begin{array}{l} 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 \leqslant y \leqslant 4 \\ \hline 1 \leqslant x-y \leqslant 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \leqslant x \leqslant 5 & a \\ 1 \leqslant y \leqslant 4 & b \\ -4 \leqslant -y \leqslant -1 & c \\ -2 \leqslant x-y \leqslant 4 & (a)+(c) \end{array}$$

1.3 Valeur absolue et fonction signe

1) Valeur absolue

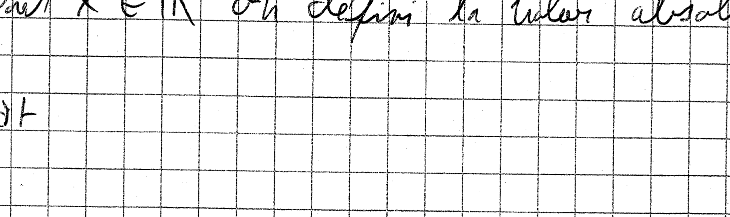
Definition : soit $x \in \mathbb{R}$ on défini la valeur absolue de x notée $|x|$ par

$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$ $|x|$ est donc toujours positif ou nul

$|x| = 0 \iff x = 0$

Ex $|3| = 3$ $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

représentation graphique de la fonction valeur absolue de x



résoudre l'équation

$|x| = a$

$S = [0 ; +\infty[$

si $a < 0$ $S = \emptyset$

si $a = 0$ $S = \{0\}$

si $a > 0$ $S = \{a ; -a\}$

Exemple d'équation avec valeur absolue

$|x^2 + 2x - 5| = x - 1$

D def $\mathbb{R}$

$S = [-1 ; +\infty[$

$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ $S = \emptyset$

cas $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ ~~$S = \{x ; -x\}$~~

$S = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 5 = x + 1 \\ x^2 + 2x - 5 = -(x + 1) \end{array} \right\}$

$\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x-2) = 0 \\ (x+4)(x-1) = 0 \end{array} \right\}$

$S_2 = \{1, 2\}$

$S_1 = \emptyset$

$S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \{1, 2\}$

Résolution de l'inéquation $|\cancel{x}| \leq a$

$|x| \leq a \Leftrightarrow \{x \leq a$ <u>et</u> $x \geq -a \ \forall a \in \mathbb{R}\}$

$[$ Si $a \geq 0$ 1) $x \geq 0$ $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ $S_1 = [0; a]$

$x < 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a$, $S_2 = [-a, 0[$

Si $a < 0$ l'équation est aussi vérifiée $S = \emptyset$ $]$

Ex 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|x^2 + 3x - 1| > x^2 + x + 1$ $\qquad D_{def} = \mathbb{R}$

$x^2 + 3x - 1 > x^2 + x + 1$

ou

$x^2 + 3x - 1 < -(x^2 + x + 1)$

$2x - 2 > 0$

$2x^2 + 4 < 0$

$x > 1$

$2x(x+2) < 0$

$S_a =]1; +\infty[$

$S_b =]-2; 0[$

$S = S_a \cup S_b =]-2; 0[\cup]1; +\infty[$

Ex 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\left|x-\frac{1}{x-1}\right| \leq -\frac{1}{x-1}$$

$$\boxed{D_{def}\ \mathbb{R}-\{1\}}$$

$$\left|x-\frac{1}{x-1}\right| \leq \frac{-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{x-1} \leq \frac{-1}{x-1} \\ \text{et} \\ x-\frac{1}{x-1} \geq \left(-\frac{1}{x-1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \ (a) \\ \text{et} \\ x-\frac{2}{x-1} \geq 0 \ (b) \end{cases}$$

$$\frac{x(x-1)-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)} \geq 0$$

x		-1		1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$S_b = [-1;1[\cup [2;+\infty[$

$S = S_A \cap S_B = [-1;0]$

5) $|xy| = |x| \cdot |y| , \forall x, y \in \mathbb{R}$

[$x \neq 0$ et $y \neq 0$, $|xy| = xy \cdot \operatorname{sgn}(xy) = |x| \cdot |y|$

$|x^2| = |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

conséquence de la propriété n° 5

6) Inégalité triangulaire

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x| = A \Leftrightarrow a \geq 0$ et $\begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$

≥ 0

$|h(x)| = g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ et $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ \text{et} \\ x \leq a \end{cases}$

$|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$

4. Trinôme du deuxième degré et Application

1. Signe du trinôme du deuxième degré

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right)\right]$$

on pose $\Delta = b^2 - 4ac$, on l'apelle discriminant de mon trinome $(P_2(x))$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$ est strictement positif

$sgn(P_2(x)) = sgn(a)$ si $\Delta = 0$ alors $P_2(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

s'annule en $x = \frac{-b}{2a}$ et $sgn(P_2(x)) = sgn(a) \; \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

$P(x)$ s'annule si la quantité entre crochet s'annule si $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a^2} = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit x_1 et x_2 les deux racines de $P_2(x)$ on a alors $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$sgn(P_2(x)) = sgn\left[a(x - x_1)(x - x_2)\right] = sgn(a)\; sgn((x - x_1)(x - x_2))$

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$sgn(P_2(x)) = -sgn(a)$ à l'intérieur des racine $\forall x \in]x_1, x_2[$

$sgn(P_2(x)) = sgn(a)$ à l'extérieur des racine $\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

2) représentation graphique de $y = P_2(x)$, $a \neq 0$

$y = P_2(x) \Leftrightarrow y = \left(a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\right)$

$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, c'est l'équation d'une parabole

* axe symétrie verticale d'équation $x = \frac{-b}{2a}$
* de sommet S et d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$

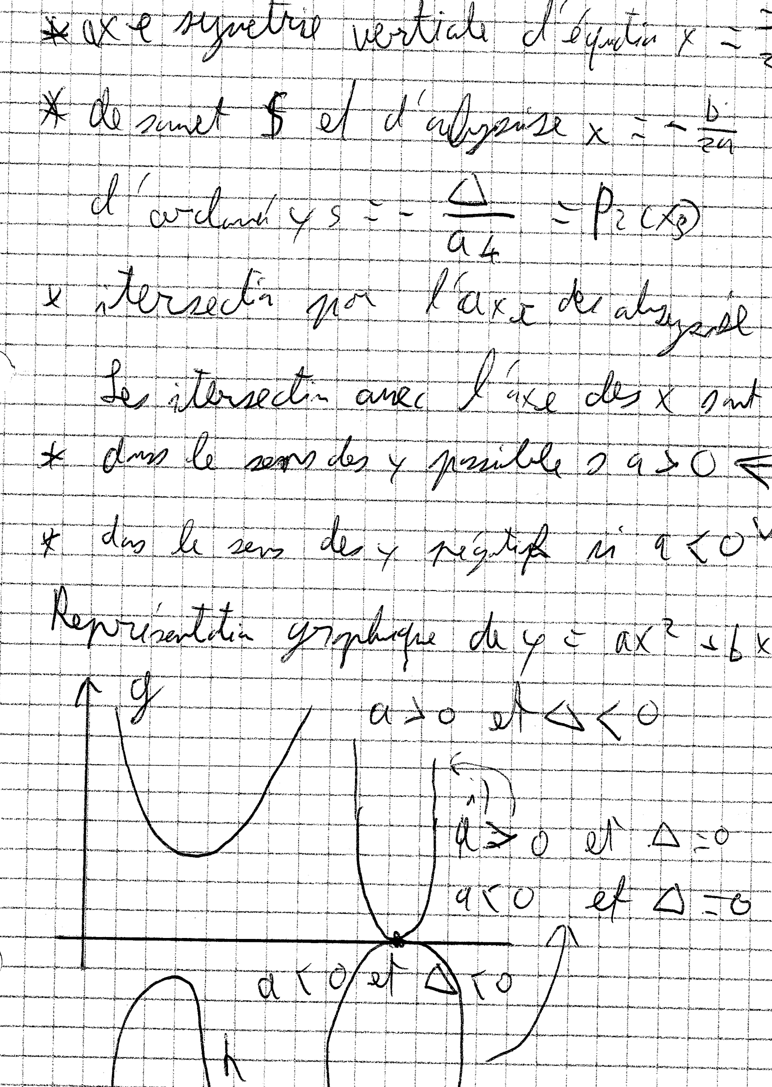
d'ordonnée $y_S = -\frac{\Delta}{a4} = P_2(x_S)$

x intersection par l'axe des abscisses

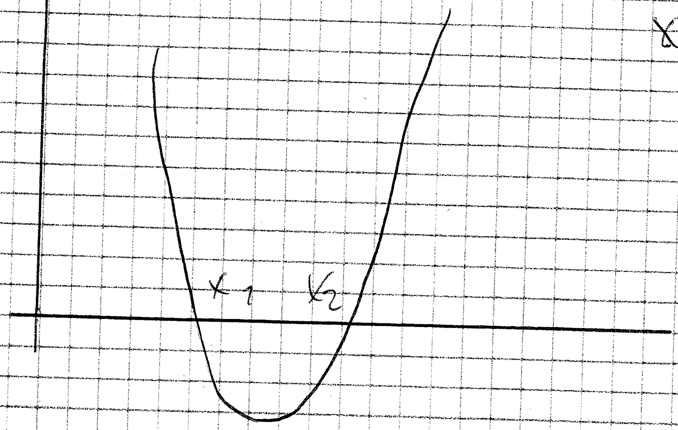
Les intersection avec l'axe des x sont dus racine éventuelle de $P_2(x)$

* dans le sens des y positifs si $a > 0$ ← concavité
* dans le sens des y négatifs si $a < 0$

Représentation graphique de $y = ax^2 + bx + c$

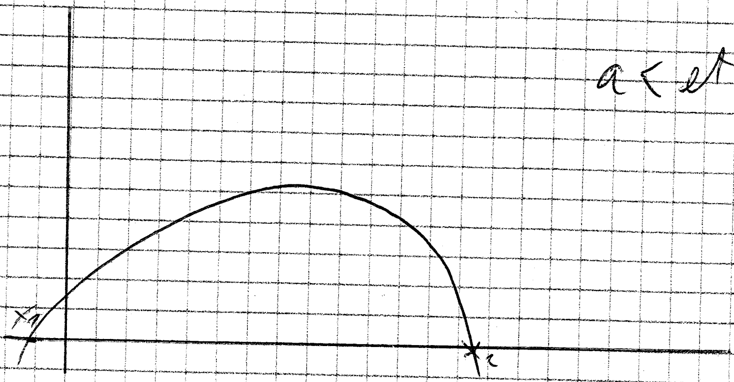


$x = x^2$



$a > 0$ et $\Delta 0$

$a <$ et $\Delta > 0$



3) Formules de Viète

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$

Soient x_1 et x_2 les deux racines distinctes ou confondues de $P_2(x) = a(x - x_1)(x_a - x_2)$

La somme des racines est égale à $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Le produit des racines vaut $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque : l'abscisse du sommet est la moyenne arithmétique des racines.

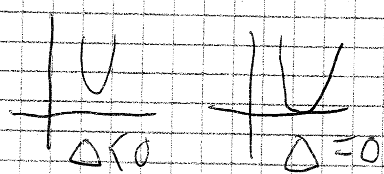
$$\boxed{x_s = \frac{x_1 + x_2}{2a} = \frac{-b}{2a}}$$

4) Quelques exemples :

a) Pour quelle valeur de $m \in \mathbb{R}$ le trinôme suivant est-il positif ou nul quels que soit $x \in \mathbb{R}$

$P_2(x) = (2m+1)x^2 + 2(m-1)x + (m-3)$

$P_2(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ssi $\begin{cases} \Delta \leq 0 & i \\ a > 0 & u \end{cases}$



i) $\Delta = 4(m-1)^2 - 4(2m+1)(m-3) = 4(m^2 - 2m + 1) - 4(2m^2 - 5m - 3)$

$= -4(m^2 - 3m - 4) = -4(m+1)(m-4)$

$\Delta \leq 0 \iff m \in]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$

u) $2m + 1 > 0 \iff m \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$S = S_i \cap S_u = [4; +\infty[$

b) $P_2(x) = mx^2 - mx - (m+1)$

pour quelle valeur de m dans $\mathbb{R}$ $P_2(x)$ as A'il 2 racine distincte satisfaisant la relation $-2 \leq x_1 < 1 \leq x_2$

La relation est vérifié ssi ... les condition suivantes

$$\begin{cases} \Delta > 0 \text{ et } a \neq 0 \text{ (existence de 2 deux racine distincte)} \\ -2 \text{ est à l'extérieur de racines et 1 est entre les racines} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \text{ et } m \neq 0 \\ P(-2) \text{ et } m \text{ ont le même signe} \\ P(1) \text{ et } m \text{ ont de signe contraire} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \text{ et } m \neq 0 \quad i) \\ m \cdot P(-2) \geq 0 \quad j) \\ m \cdot P(1) < 0 \quad k) \end{cases}$$

inéquation multiplier truc négatif attention inversion sig !!!

i) $\Delta = m^2 + 4m(m+1)$

$= 5m^2 + 4m$

$= m(5m+4)$

$\Delta > 0 \Rightarrow m \in]-\infty ; \frac{-4}{5}[\cup]0 + \infty[$

j) $m \cdot P(-2) \geqslant 0$

$4m^2 + 2m - \cancel{2}m(m+1)$

$P(x) = mx^2 - mx - (m+1)$

$P(-2) = m(-2)^2 - m(-2) - (m+1) =$

$4m + 2m - (m+1)$

$5m^2 - m \geqslant 0$

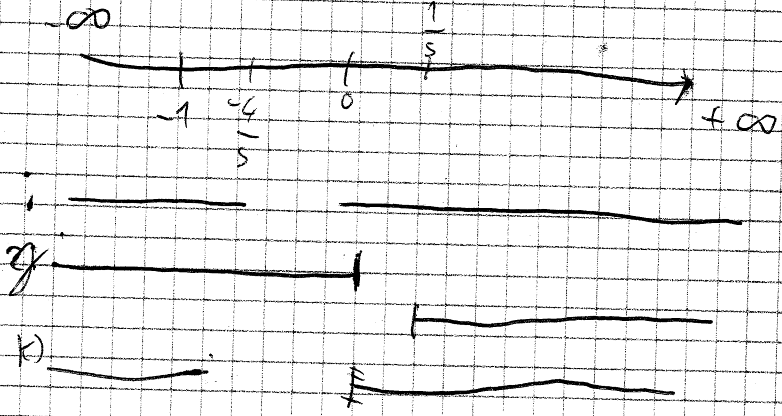
$m(5m-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty ; 0] \cup [-\frac{1}{5} ; +\infty[$

K) $m \cdot P(1) < 0$

$P(1) = m - m - (m+1) = -(m+1)$

$P(1) < 0 \Leftrightarrow - m \cdot (m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$S = S_i \cap S_j \cap S_k$



$S = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left[\frac{1}{5} ; +\infty\right[$

$P_2(x) = ax^2 + bx + c \ ; \ a,b,c \in \mathbb{R} \ \ a \neq 0$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

a et Δ sont les seuls condition pour avoir $P_2(x)$ positive ou négative

si $\Delta < 0$ $\ sgn(P_2(x)) = sgn(a), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta = 0$ $\ sgn(P_2(x)) = sgn(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Si $\Delta > 0$ $\ sgn(P_2(x)) = sgn(a)$

à l'exterieur des racines $\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$

$sgn(P_2(x)) = - sgn(a)$

à l'interieur des racine $\forall x \in]x_1 ; x_2[$

$P_2(x) = X^2 + 4X + 3$

$\underbrace{X^2 + 4X} + 3 = 0 \qquad a^2 + \cancel{b^2}\, 2ab = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2} - b^2$

$(X)^2 + 2 \cdot (2) X + 3 = 0$

a b

$x^2 + 2 \cdot 2X + 2^2 - 2^2 + 3 = 0$

$(X+2)^2 - 4 + 3 = 0$

$(X^2+2)^2 - 1 = 0$

$(X+2-1)(\cancel{X}+2+1) = 0$

$\boxed{(X+1)(X+3) = 0} \qquad X = -1 \quad X = -3$

Puissance et racine

1) Puissance à exposant entier

Def : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On définit la puissance n-ième de a (a puissance n, a exposant n)

noté a^n par

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}$$

Ex : $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Ex : $\left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{-1}{27}$

Par convention, si $a \in \mathbb{R}^*$ on pose $a^0 = 1$

Quelques propriété et règles de calculs

1) $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\operatorname{sgn}(a^n) = \begin{cases} n \text{ pair} : \text{positif } (+1) \\ n \text{ impair} : \operatorname{sgn}(a) \end{cases}$

2) $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$a, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3) $a \in \mathbb{R}^*, n, m \in \mathbb{N}^*$, $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$

4) $a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}^*$, $(a^n)^m = \cancel{a^n}\, a^{(m \cdot n)}$

5) $a \in \mathbb{R}^*, n, m \in \mathbb{N}^*$, $n > m$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}$, alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$

Remarque : 0^0 n'est pas défini pour ce semestre

2) Racine Positive ou arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ ~~le nombre réel~~, $x \in \mathbb{R}_+$

x est la racine n-ième si $x^n = a$ $\sqrt{x^2} = x = x^{\frac{1}{2} \cdot 2}$

$x = \sqrt[n]{a}$

Quelques propriété $a, b \in \mathbb{R}_+$ $n, p \in \mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ $\cancel{\sqrt[n]{a^p} = (a)^p}$

$\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$

3) Racine réel d'un nombre réel a

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

X est une racine n-ième de a si $x^n = a$

n est pair et $a > 0$ alors il existe deux racine réel tel que $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \\ -\sqrt[n]{a} \end{array} \right.$

n est pair et $a < 0$ alors il n'existe pas de solution

n est impair ~~et a~~ alors il existe une racine réel tel que $\begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \\ -\sqrt[n]{-a} \end{array}$

Ex = $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

Ex = $\sqrt[4]{16}$ $S = \{-2 ; 2\}$

Ex = $x^3 - 27 = 0$ $S = \{3\}$

4 Exposant rationel

Définition : $\boxed{\text{soit } a \in \mathbb{R}_+^*,\ a, n \in \mathbb{N}^*}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \cancel{\ \ } = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Les règles de calculs 1 à 5 restent valable pour $m, n \in \mathbb{Q}$

Ex $a>0$ $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

Attention : la racine carré d'un nombre positif est positif

$$\sqrt{y^2} = |y| = \begin{cases} y \text{ si } y \geq 0 \\ -y \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

Conséquence :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $\sqrt[n]{a^n}$, $a \in \mathbb{N}^* = \begin{cases} a \text{ si } n \text{ impair} \\ |a| \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ $\boxed{\text{(Condition de positivité)}}$ $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$a = b \iff a^n = b^n$

$a < b \iff a^n < b^n$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $\boxed{n \text{ impair}}$

$a = b \iff a^n = b^n$

$a < b \iff a^n < b^n$

Exercice d'aplication

1. résoudre $\sqrt{x^2-3x+6} = 4x-6$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+6 \geq 0\}$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15 < 0$

$D_{def} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2-3x+6 &= (4x-6)^2 & \Big| \ ^2 \\ x^2-3x+6 &= 16x^2-48x+36 \\ 0 &= 15x^2-45x+30 & \Big| : 15 \\ 0 &= x^2-3x+2 \\ (x-1)\cdot(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Si $x < \frac{3}{2}$ $S = \emptyset$ $\qquad 4x-6 \iff \frac{3}{2} = x$

Si $x \geq \frac{3}{2}$ $S = \{2\}$, 1 est rejeté

2. résoudre dans $\mathbb{R}$ par rapport à la variable x en fonction de m

$$\underbrace{\sqrt{3x^2+m^2}}_{\geq 0} = 2x+m \ , m \in \mathbb{R}$$

$D_{def} = \mathbb{R}$

$$\underbrace{\sqrt{3x^2+m^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2x+m}_{<0}$$

Cette équation n'a pas de solution si $2x+m<0 \overset{\Leftrightarrow}{} \ \text{si } x<\frac{-m}{2}$

$$\underbrace{\sqrt{3x^2+m^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2x+m}_{\geq 0} \Leftrightarrow 3x^2+m^2=(2x+m)^2 \Leftrightarrow 3x^2+m^2=4x^2+4mx+m^2$$

$\Leftrightarrow x^2+4mx=0$

$x(x+4m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-4m \end{cases}$

On cherche les valeurs de m pour lequels x_1 et x_2 vérifie la condition de positivité

$x_1 \geq -\frac{m}{2} \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{m}{2} \Leftrightarrow m \geq 0$

$x_2 \geq -\frac{m}{2} \Leftrightarrow -4m \geq -\frac{m}{2} \Leftrightarrow -4m+\frac{m}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-8m+m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}m \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}m \leq 0$

$m \leq 0$ alors $S=\{4m\}$

Si $m \geq 0$ alors $S=\{0\}$

5) identité algébrique

propriété: identité remarquable Soit $a, b \in \mathbb{R}$

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $(a+b)$ = expresia conjugată de $a-b$

4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; (a^2+ab+b^2) = expresia conjugată de $(a-b)$

5) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \dots + a^{n-3}b^{b} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Ex 1 $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Ex 2 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$

Ex 3 $= \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-(-1)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-(-1)} \cdot \dfrac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + (-1)^2}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + (-1)^2}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - (-1)^3} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{x+1}, \ x \neq -1$

Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ $\boxed{\text{(condition de positivité)}}$ $n \in \mathbb{N}^*$

Alors, $a = b \iff a^n = b^n$

$a < b \iff a^n < b^n$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{n \in \text{impair}}$

Alors $a = b \iff a^n = b^n$

$a < b \iff a^n < b^n$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{6-x} \leq 3 + 2x$

$D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 - x \geq 0\} =]-\infty, 6]$

i) Si $3 + 2x < 0 \iff x < -\frac{3}{2} \iff x \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[$

$\underbrace{\sqrt{6-x}}_{\geq 0} \not\leq \underbrace{2x+3}_{< 0}$ $S = \emptyset$

ii) Si $3 + 2x \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2} \iff x \in [-\frac{3}{2} ; +\infty[$

$\underbrace{\sqrt{6-x}}_{\geq 0} \leq \underbrace{3x+2}_{\geq 0} \iff (\sqrt{6-x})^2 \leq (3+2x)^2 \iff S_i =]-\frac{3}{2} ; +\infty[$

$6 - x \leq 9 + 12x + 4x^2$

$4x^2 + 13x + 3 \geq 0 \iff (4x+1)(x+3) \geq 0$

$\iff x \in]-\infty ; -3] \cup [-\frac{1}{4} ; +\infty[$

$S_0 = [-\frac{1}{4} ; +\infty[$

$S = S_0 \cup S_i \cap D_{def} = S_0 \cap D_{def} = [-\frac{1}{4} ; 6]$

Ex $\sqrt{-x^2-x+6} \geq x+1$

$\frac{1 \pm 5}{-2}$ $1+24$ $\sqrt{25}$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{-2a}$

$D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2-x+6 \geq 0\} = [-3;2]$

$-a \Rightarrow$ positif à l'itérieur des racines

a) Si $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in [-\infty ; -1[$

$\underbrace{\sqrt{-x^2-x+6}}_{\geq 0} \geq \underbrace{x+1}_{<0} \Leftrightarrow x \in [-\infty ; -1[$ donc $S_a = [-\infty ; -1[$

b) $\underbrace{\sqrt{-x^2-x+6}}_{\geq 0} \geq \underbrace{x+1}_{\geq 0} \Leftrightarrow -x^2-x+6 \geq x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x-5 \leq 0 \Leftrightarrow (2x+5)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{5}{2} ; 1\right]$

$S_b = \left[-\frac{1}{2} ; 1\right]$

$S = S_a \cup S_b =]-\infty ; 1]$

Ex Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x-2}{x+1-\sqrt{x^2+5}} > x+3$$

$D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1-\sqrt{x^2+5} \neq 0\}$

résoudre $x-1-\sqrt{x^2+5} = 0$

$\sqrt{x^2+5} = x+1$

si $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ $S_1 = \emptyset$

si $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$(\sqrt{x^2+5})^2 = (x+1)^2$

$x^2+5 = x^2+2x+1$

$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ $S_2 = \{2\}$

$D_{def} = \mathbb{R} - \{2\}$

Résolution amplification par le terme dans la fraction (conjugué)

$$\frac{x-2}{\underbrace{x+1}_{a}-\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{b}} > x+3 \iff \frac{x-2}{\underbrace{x+1}_{a}-\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{b}}\cdot\frac{x+1+\sqrt{x^2+5}}{\underbrace{x+1}_{a}+\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{b}} > x+3$$

$$\frac{(x-2)(x+1+\sqrt{x^2+5})}{(x+1)^2-(\sqrt{x^2+5})^2} > x+3 \iff \frac{\cancel{(x-2)}(x+1+\sqrt{x^2+5})}{2\cancel{(x-2)}}$$

$$\iff x+1+\sqrt{x^2+5} > 2\cdot(x+3) \iff (x+1)^2-(\sqrt{x^2+5})^2 = x^2+2x+1-(x^2+5)$$

inverse le signe si produit par nbre négatif

$$x+1+\sqrt{x^2+5} > 2(x+3)$$

$$\sqrt{x^2+5} > x+5$$

$x+5<0 \iff x<-5$

l'inéquation est toujours vérifiée pour tout $x \in]-\infty;-5[$

$S_1 =]-\infty;-5[$

Si $x+5 \geq 0 \iff x \geq -5$ et $x \neq 2$

$$(\sqrt{x^2+5})^2 > (x+5)^2 \iff x^2+5 > x^2+10x+25$$

$10x+20<0 \iff x<-2$

$S_2 = [-5;-2[\qquad S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;-2[$

Rappel : C_n^k compte le nombre de combinaisons de element de E à "a" élément

6. Binome de Newton

On considère le polynome (Binome de Newton) $P_n(x) = (x+a)^n$

on cherche a calculer les coéficient des termes $x^n, x^{n-1}a, x^{n-2}a^2, \dots, x^2a^{n-2}, xa^{n-1}, a^n$

Calculons :

$n=0 \quad (x+a)^0 = 1$

$n=1 \quad (x+a)^1 = 1, 1$

$n=2 \quad (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = 1, 2, 1$

$n=3 \quad (x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3 = 1, 3, 3, 1$

$n=4 \quad (x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 1, 4, 6, 4, 1$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

triangle de pascale (nombre de combinaison)

Donc pour n quelquonque, $(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x^1 a^{n-1} + C_n^n x^0 a^n$

Preuve par récurrence

1) partir $n=0 \qquad (x+a)^0 = 1 \qquad C_0^0 x^0 a^0 = 1$

$T(n)$ Vrai

2) Hypothèse $\quad (x+a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$

Conclusion $(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n+1-k} a^k$

Preuve : $(x+a)^{n+1} = (x+a)^n \cdot (x+a) \overset{\text{hypothèse}}{\underset{\text{récurrence}}{=}} \Big[C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots$

$+ C_n^{n-1} x^1 a^{n-1} + C_n^n x^0 a^n \Big] (x+a)$

$= \Big[C_n^0 x^{n+1} a^0 + C_n^1 x^n a^1 + C_n^2 x^{n-1} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_n^n x^1 a^n \Big] + \Big[C_n^0 x^n a^1 + C_n^1 x^{n-1} a^2 + C_n^2 x^{n-2} a^3$

$C_n^{n-1} x^2 a^n + C_n^n n^{n+1} x^1 \Big] = \underbrace{C_n^0 x^{n+1} a^0}_{C_{n+1}^0} + \underbrace{(C_n^0 + C_n^1)}_{C_{n+1}^0} x^n a^1 + \underbrace{(C_n^1 + C_n^2)}_{C_{n+1}^0} x^{n-2} a^2 + \dots$

$+ \underbrace{(C_n^{n-1} + C_n^n)} x^1 a^n + \underbrace{C_n^n x^0 a^{n+1}} \Big] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k$

Le $p+1$ terme de la somme du developpement $(x+a)^n$ est $C_n^p x^{n-p} a^p$

Ex 1) Le developpement de $(x-1)^6$

$a=-1 \quad n=6$

$(x-1)^6 = C_6^0 x^6 a^0 + C_6^1 x^5 a^1 + C_6^2 x^4 a^2 + C_6^3 x^3 a^3 + C_6^4 x^2 a^4 + C_6^5 x^1 a^5 + C_6^6 x^0 a^6$

$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

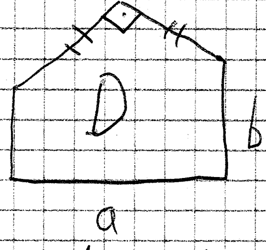
Ex Calculer le terme en x^8 dans le développement de $\left(4x^3 + \frac{3}{x^2}\right)^{11}$

$p+1$ en terme $C_{11}^p (4x^3)^{11-p} \left(\frac{3}{x^2}\right)^p = 4^{11-p} \cdot 3^p C_{11}^p X^{33-3p-2p}$

Existe t-il $p \in \mathbb{N}$ tel que $33-3p-2p=8$ $\quad 5p=25 \quad p=5$

le terme cherché est donc le 6ème terme $C_{11}^5 4^{11-5} \cdot 3^5 x^8 = 459'841'536\, x^8$

c) domaine D délimité par un rectangle de côté a et b surmonté d'un triangle rectangle isocèle a pour périmètre une valeur donné L (a et b variables)



1. Représenter avec soin la variation de l'aire A du domaine D en fonction de a
2. déterminer la relation entre a et b lorsque que l'aire D est maximale

$L = 2b + a + \sqrt{2}\cdot a \Leftrightarrow L = (1+\sqrt{2})a + 2b$

$A = a\cdot b + \frac{a^2}{4}$ $\qquad b = \frac{L-(1+\sqrt{2})a}{2}$

$$\boxed{A_{(a)} = a\cdot\frac{L-(1+\sqrt{2})a}{2} + \frac{a^2}{4}}$$

$a>0$ et $\frac{L-(1+\sqrt{2})a}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{0<a<\frac{L}{(1+\sqrt{2})}}$

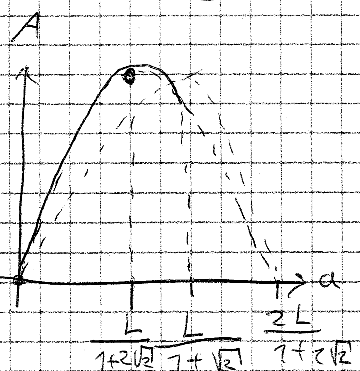
$A(a) = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4}a^2 + \frac{L}{2}a$

Sa représentation graphique est un arc de parabole dont la concavité est tournée vers les A négatif

$A(a) = a\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{4}a + \frac{L}{2}\right)$

$a1 = 0 \qquad a2 = \frac{2L}{1+2\sqrt{2}}$

$A(max) = \frac{a1+a2}{2} = 0 + \frac{L}{1+2\sqrt{2}} = \frac{L}{1+2\sqrt{2}}$



L'aire est maximale à $\frac{L}{1+2\sqrt{2}}$

$b_m = A(a_m) = \frac{L - a_m(1+\sqrt{2})}{2}$

$A = \frac{L\cdot(2\sqrt{2}) - L(1+\sqrt{2})}{2(1+2\sqrt{2})} = \frac{L\sqrt{2}}{2(1+2\sqrt{2})} = \frac{a_m}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{l'aire est maximale lorsque que } a = \sqrt{2}b}$

Chapitre II Suite de nombre réel

Notion préliminaire pour la suite d'une fonction.

1. Définition

On appelle suite de nombre réel $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Toute application de N^* dans $\mathbb{R}$ (numératation des elements)

notation des éléments : $\{A_n\}$ a_n terme général défini en fonction de n

n rang ~~supérieur~~ a_n

Par example, $\{A_n\}$ avec $A_n = \frac{1}{n}$ est la suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

2) 2, 3, ~~4~~, 5, 7, 11, 13 est la suite des nombre premier dont on ne peut décrire le terme général.

On parle de suite constante $\{A_n\}$ telque $a_n = a$ $\forall n \in N^*$

On parle de suite majoré $\{A_n\}$ tel que $\exists M \in \mathbb{R}, A_n \leqslant M$ $\forall n \in N^*$

On parle de suit minoré $\{A_n\}$ tel que $\exists M \in \mathbb{R}\ A \geqslant M$ $\forall n \in N^*$

On parle de suite borne $\{A_n\}$ telque est minoré et majoré

On parle de suite croissante $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$

décroissante $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1}$

On parle de suite strictement croissante $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \ldots$

décroissante $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Par example :

1. $\{A_n\}, A_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante donc monotone et borné

$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ $\forall n \in N^*$

2. $\{A_n\}, A_n = n$ est strictement croissante donc monotone. elle est minoré, mais non majoré

3. $\{A_n\}, A_n = n(-1)^n$ n'est ni monotone ni majoré ni minoré $-1, 2, -3, 4, \ldots$

2. Limite fini d'une suite: propriété et opération

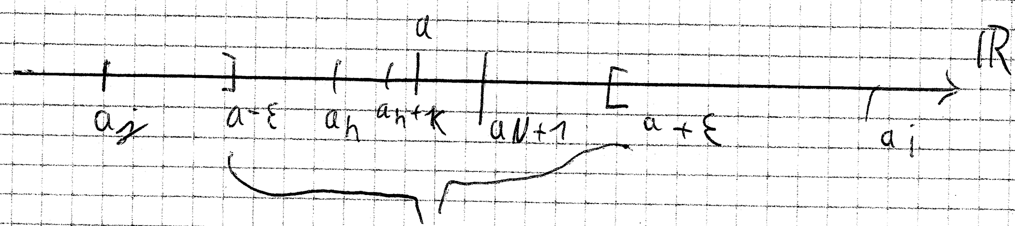
Pour une suite donné, on observe donc, on observe souvent que plus n augment, plus on se rapproche d'une valeur A fixé.

Ex: $\frac{1}{n}$ tend vers 0, ou encore, que tout intervalle $]a+\varepsilon\,;\,a-\varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$ contient tout les terme de la suite, sauf un nombre fini

Définition 2: Une suite A_n admet $A \in \mathbb{R}$ comme limite fini ou converge vers A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N entier naturel associé à ε tel que pour tout $\underbrace{n \geq N}$
$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ ou bien $n \geq N \Rightarrow a_n \in\,]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[$ — a partir d'un certain rang N

Notation: $\lim a_n = a$ ou $\{A_n\} = a$

illustration:



$i, j < N$

nombre fini en dehors de l'intervalle

Tout les terme à partir du rang N dans l'intervalle en nombre infini

Une suite n'admettant pas de limite fini A est une suite non convergente. Intuitivement, on ne peux trouver un intervalle $[a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$ contenant tout les termes de la suite sauf un nombre fini et ε peut etre pris aussi petit que l'on ~~veut~~ veut.

Example. 1) Montrons que $\frac{1}{n}$ converge vers 0

On doit avoir pour tout $\forall \varepsilon > 0$ $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ à parit d'un certain rang N qui dépend de ε. il faut le donne en fonction ε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Il suffit donc de choisir $N > \frac{1}{\varepsilon}$

On a bien $\forall \varepsilon > 0$ il existe N entier naturel Réel, $N > \frac{1}{\varepsilon}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Contre example: $\{(-1)^n\}$ est non convergente

$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, +1, -1, +1, -1$$

$$a, b \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$$

Intuitivement, tout intervalle $1-\varepsilon, 1+\varepsilon$ contient une infinité de terme de la suite mais tout intervalle $-1-\varepsilon\,;\,-1+\varepsilon$ aussi une infinité de terme à -1 et une infinité de terme à 1

Théorème des deux gendarmes

Soit trois suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{s_n\}$ tel que

. $a_n \leqslant s_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

. si $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} b_n$ alors $\lim_{n\to\infty} s_n = l$

.

Exemple : montrer à l'aide du théorème des deux gendarmes que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

On a $\frac{n!}{n^2} \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'autre part, $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot n\dots n}_{n \text{ fois}}}$

$\leqslant \frac{n^{n-1}\dots n}{n^n} = \frac{1}{n}$

donc $0 \leqslant \frac{n!}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

> ne pas confondre n et x $n \in \mathbb{N}$ $x \in \mathbb{R}$. une suite
>
> n'est pas une fonction réel

$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right\}$: $0, 0, 0, 0, 0, \dots$ → converge vers 0

$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right\} \to 0$ mais $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\pi\right)$ n'existe pas !!!

Propriété

1.) Si $\{a_n\} \to a$ alors a est unique

2.) Si $\{a_n\} \to a$ alors $\{|a_n|\} \to |a|$

3) Toute suite convergente est borné ; par exemple, $\frac{1}{n} \to 0$ et $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

mais toute suite borné n'est pas forcément convergente

Contre exemple : $\{(-1^n)\}$ est borné car $-1 \leq -1^n \leq 1$ mais pas forcément convergente

4) Toute suite monotone borné est convergente par ex $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est décroissante et borné, elle converge

5) Soit une suite $\{a_n\} \to a$ et $\{b_n\} \to b$; si $a_n \leq b_n$ $\underbrace{\text{pour tout } n \geq N}_{\text{à partir d'un certain rang } N}$ alors $a \leq b$

6) Si $a_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ alors $\{a_n\} \to a$ est constante

$$\text{Si } \begin{cases} \{a_n\} \to a \\ \{b_n\} \to b \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} a_n \pm b_n \to a \pm b \\ \{a_n b_n\} \to ab & b_n \neq 0 \\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b} & \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b \neq 0 \end{cases}$$

Exemple : Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \{a_n\}$ avec $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

On utilise $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ + opération

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2} \lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}} = 0 \, \frac{1+0}{1+0 \cdot 0}$$ Donc $\{A_n\} \to 0$

Conséquences

1 Soit $\{a_n\}$ est une suite telle que

$$\{|a_n|\} \to \text{ alors } \{a_n\} \to 0$$

en effet $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Comportement de $\{q^n\}$, $q \in \mathbb{R}$

$$\{q^n\} \begin{cases} \text{si } q > 1 : \text{ diverge (admet une limite infini)} \\ \text{si } q = 1 : \text{ suit constante, (converge vers 1)} \\ \text{si } q \leqslant -1 : \text{ non convergeante, suite qui oscille} \\ \text{si } -1 < q < 1 : \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

Suite définie par récurrence

$\{a_n\}$ définie par récurrence $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ et $a_1 = 2$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Preuve par récurrence

Vrai pour $n=1$ $\quad a_1 = \frac{2}{1} = 2$

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

et l'on peut montrer (voir exemple précédents) que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

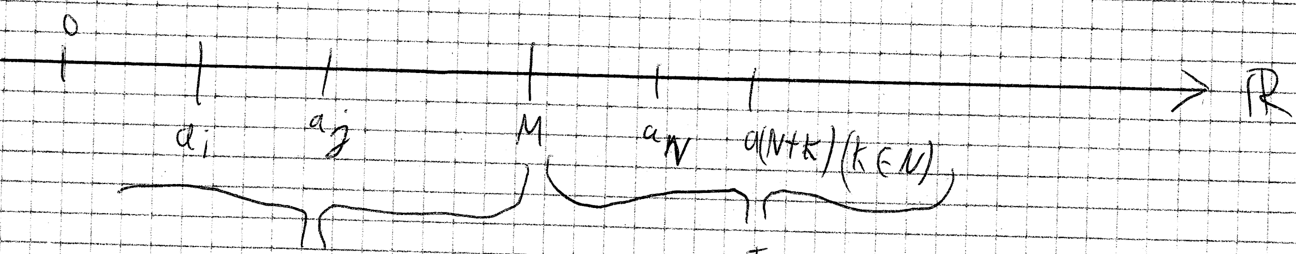
3. limite infinie d'une suite - opération - propriétés

Intuitivement : à partir d'un certain rang N tous les termes de la suite sauf un nombre fini sont supérieurs à tout nombre fini M

Définition 3 : une suite $\{a_n\}$ tend vers l'infini ∞ (ou diverge vers l'infini) lorsque n tend vers ∞ si et seulement si $\forall M>0$, il existe N, entier positif, associé à M tel que $n \geq N \Rightarrow a_n > M$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\{a_n\} \to \infty$

Illustration :



Terme inférieur à N de rang infini

Termes de rang supérieur ou égaux à N ou tous les termes sauf un nombre fini (nombre fini)

Définition 3 bis : Une suite $\{a_n\}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) lorsque n tend vers ∞ ssi $\forall M>0$ il existe N, entier positif associé à M tel que $n \geq N \Rightarrow a_n < -M$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Opération :

1) Si on a $\begin{cases} \{a_n\} \to \infty \\ \{b_n\} \to b \in \mathbb{R} \\ \quad\quad \searrow \infty \end{cases}$ alors $\{a_n + b_n\} \begin{cases} \nearrow \infty + b = \infty \\ \searrow \infty + \infty = \infty \end{cases}$

2) Si $\begin{cases} \{a_n\} \to \infty \\ \{b_n\} \to b \in \mathbb{R}^* \\ \quad\quad \searrow \infty \end{cases}$ alors $\{a_n \cdot b_n\} \begin{cases} \nearrow \infty \cdot b = \infty , b > 0 \\ \to \infty \cdot b = -\infty , b < 0 \\ \searrow \infty \cdot \infty = \infty \end{cases}$

3) Si $\{a_n\} \to \infty$ alors $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to 0$

4) Si $\{a_n\} \to 0$ alors $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \begin{cases} \to \infty , a_n > 0 \\ \searrow -\infty , \text{ si } a_n < 0 \end{cases}$

Ces 4 opération reste valable si à l'infini on substitue $-\infty$

sauf $\infty - \infty$ qui est un cas indeterminé

Autre cas indeterminé $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$

Propriétés :

(A) Toute suite croissante et non majorée diverge vers ∞

Toute suite décroissante non minoré diverge vers $-\infty$

(B) Si $\{a_n\} \to +\infty$ et $\{b_n\}$ tq $b_n \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

alors $\{b_n\} \to +\infty$

Si $\{a_n\} \to -\infty$ et $\{b_n\}$ tq $b_n \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

alors $\{b_n\} \to -\infty$

Example :

1) a) $\{n\} \to \infty$ car c'est une suite croissante non majoré

de même $\{n^2\}$ au plus généralement $\{n^p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$ divergent vers ∞

car croissante non majoré

1) b) $\{q^n\} \to \infty$ pour $q > 1$ car croissante non majorée

2) $\{-n^2\} \to -\infty$ car décroissante non minoré

3) calculer la limite de $n \to \infty$ de $\frac{-2n^3+n^2+1}{n+1} =$ $\frac{\infty + \infty + 1}{\infty + 1} = \frac{\overset{\text{indéterminé}}{-\infty + \infty}}{\infty}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\overset{2}{\cancel{3}}}\left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

$= \infty \cdot (-2) = -\infty$

4. Série géométrique

Soit $a, r \in \mathbb{R}$, on définit une suite géométrique $\{a_n\}$ ainsi $a_1 = a$

$a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$, $\underbrace{a_n = ar^{n-1}}_{\text{terme général}}$

Série géométrique $\{S_n\}$ ainsi, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ soit

$S_1 = a$, $S_2 = a + ar$, ..., $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{(n-1)}$

Montrons que $S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r}$ $r \neq 1$ On écrit $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$

$S_n - rS_n = S_n(1-r) = a - ar^n = a \cdot (1-r^n) = \frac{a}{1-r}(1-r^n)$ $r \neq 1$

Convergeance de $\{S_n\}$ $a \neq 0$

1) $r \geq 1$ $S_n = a(1 + r + \ldots + r^{n-1})$

$a > 0$ $S_n \geq a(1+1+1) = an$ or $\{a_n\}$ diverge vers $+\infty$ (croissante non bornée) donc divergence vers $+\infty$ d'une de limite par le théorème des deux gendarmes. $a < 0$ $\lim_{n \to \infty} S_n = -\infty$

2) $|r| < 1$ $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{1-r}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}$

3) $r \leq -1$

$S_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n)$ Or $\{r^n\}$ diverge pour $r \leq -1$ posons $r = -q$ $q \geq 1$

$r^n = (-1)^n q^n$ $\{(-1)^n q^n\}$ $-q, q^2, -q^3, q^4$ diverge donc $\{S_n\}$ diverge

~~(pour $q = 1$, on a la suite $-1, 1, -1, 1$ qui est divergente, donc S_n diverge aussi pour $q = 1$)~~

5 nombre e

On considère la suite $\{e_n\}$ défini par $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$= 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$\{e_n\}$ est minoré par 2 $\quad e_n \geq 2 \ \forall n \in N^*$

D'autre part, e_n est majoré par 3

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{\underbrace{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}} \leq \frac{1}{2^{n-1} \cdot 1}$$

Ainsi, $e_n \leq 2 + \overbrace{\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}}^{n-1 \text{ terme}} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$

série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{2}^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3 \ \forall n \in N^*$$

car $0 \leq \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\right) < 1$

e_n est croissante borné donc convergente $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \ \forall n \in N^*$

$\{e_n\}$ borné et croissante, elle converge vers une limite e, dont la valeur approché

est 2,7182... $\quad e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$

On montre par ailleurs que la suite de terme général $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

converge vers la même limite (voir exercice supplémentaire sur moodle)

Donc $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exemple. Calculer $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} = \frac{1}{e}$