Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe [ ]

PRENOM : ______________________________

1. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation

$$A^3 - A^2 - I_n = 0\,.$$

a) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que la solution en $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de l'équation

$$A^k(A - I_n)X = I_n \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

est unique et donner cette solution.

Soient la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a & 7 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

et l'équation en $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$B^k(B - I_2)X = 0 \qquad k \in \mathbb{N}^*\,.$$

c) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que l'équation ci-dessus ait d'autres solutions que la solution triviale $X = 0$.

d) Résoudre cette équation pour $k = 1$ et $a = 2$.

2. Soient U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'ensemble

$$W = \left\{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, P^{-1}AP \in U \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On choisit $n = 2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et U le sous-espace vectoriel formé des matrices diagonales de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Donner une base et la dimension de W.

3. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un paramètre réel p,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p+1 \\ p+3 \\ p \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} p+1 \\ p+3 \\ p \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -2p \end{pmatrix},$$

et $W = \left[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,\right]_{\text{sev}}$.

Pour quelles valeurs de p le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartient-il à W ?

4. Soit $V = \left[\,q, r, s, t\,\right]_{\text{sev}}$ le sev de $P_3[x]$ engendré par les polynômes

$$p = x^3 + x + 1 \quad r = x^3 - 2x^2 + 2 \quad s = x^3 + 2x^2 + 2x \quad t = x^2 + x^2 + 2x + 1\,.$$

Soit encore U le sev de $P_3[x]$ défini par

$$U = \left\{ p \in P_3[x] \;\middle|\; p(-1) = 0 \right\}.$$

a) Déterminer une base et la dimension de $W = U \cap V$.

b) Soit $w = x^2 + mx + 3$, $m \in \mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de m a-t-on $w \in W$? Donner alors les composantes de w relativement à la base choisie.

Total 15 pts