Analyse I – Corrigé de la Série 6

Echauffement 1.

$$a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 2$$
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$$

et ainsi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}\left(a_n - a_{n-1}\right).$$

En itérant cette égalité $n-1$ fois, il suit que

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{2}{3}|a_n - a_{n-1}| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| = \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

car $a_2 - a_1 = \frac{4}{3}$.
Soient maintenant $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| = \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$$

et donc

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| \leq 2\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\underbrace{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}}_{\leq 1}\right) \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^m . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour avoir $|a_n - a_m| < \varepsilon$, il faut donc que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m < \frac{\varepsilon}{6} \qquad \Leftrightarrow \qquad m \operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right) < \operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad m > \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)}{\operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right)} .$$

Ainsi, en choisissant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n_0 > \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)}{\operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right)} ,$$

on a que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq n_0$. Comme on peut trouver un tel n_0 pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bien une suite de Cauchy.

Remarque : Montrer qu'une suite réelle est de Cauchy est un moyen de montrer sa convergence sans calculer sa limite.

Exercice 1.

Supposons que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$. Ceci veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que :

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq n_0, \quad \left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \rho \right| \leq \varepsilon \\
\iff\ &\forall n \geq n_0, \quad -\varepsilon \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \rho \leq \varepsilon \\
\iff\ &\forall n \geq n_0, \quad \rho - \varepsilon \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho + \varepsilon \qquad (1)
\end{aligned}$$

Cas $\rho > 1$: Dans ce cas on choisit ε tel que $\rho_1 := \rho - \varepsilon > 1$ $\left(\text{par example } \varepsilon = \frac{\rho - 1}{2}\right)$ et on obtient de (1) que

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq n_0, \quad 1 < \rho_1 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
\iff\ &\forall n \geq n_0, \quad |a_{n+1}| \geq \rho_1 |a_n| \quad \text{avec } \rho_1 > 1.
\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve que

$$|a_{n+1}| \geq \rho_1^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \infty$. La suite est donc non bornée ce qui exclut la convergence car toute suite convergente est bornée.

Cas $\rho < 1$: Dans ce cas on choisit ε tel que $\rho_1 := \rho + \varepsilon < 1$ $\left(\text{par example } \varepsilon = \frac{1 - \rho}{2}\right)$ et on obtient de (1) que

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq n_0, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho_1 < 1 \\
\iff\ &\forall n \geq n_0, \quad |a_{n+1}| \leq \rho_1 |a_n| \quad \text{avec } \rho_1 < 1.
\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve que

$$|a_{n+1}| \leq \rho_1^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = 0$ $\left(= \lim_{n\to\infty} |a_n|\right)$. Ceci implique que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \quad |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Cas $\rho = 1$: le critère ne donne aucun résultat.

Exercice 2.

Comme demandé nous suivons l'exemple donné au § 2.9 du cours. Il faut donc trouver d'abord la valeur de la limite sous l'hypothèse que celle-ci existe et ensuite démontrer la convergence de la suite. Pour la première étape, il faut passer à la limite dans l'équation qui définit la récurrence de la suite en utilisant les propriétés algébriques de la limite.

i) Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}(3a_{n-1} + 1)\right) = \frac{1}{4}\left(3 \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \lim_{n\to\infty} 1\right),$$

d'où l'équation $a = \frac{1}{4}(3a+1)$, et donc $a = 1$.
On montre par récurrence que la suite est majorée par a: On a $a_1 = 0 \leq a$, et si $a_{n-1} \leq a$, alors
$$a_n = \frac{1}{4}\,(3a_{n-1}+1) \leq \frac{1}{4}\,(3a+1) = 1 = a\,.$$
On montre que la suite est croissante. Pour $n = 2, 3, \dots$ on a
$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{4}\,(1-a_{n-1}) \geq \frac{1}{4}\,(1-a) = 0 \qquad \text{car} \quad a_{n-1} \leq a\,.$$
Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente (car croissante et majorée) et sa limite vaut $a = 1$.

ii) Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existe, elle satisfait $a = \frac{1}{4}(a+4)$ (obtenue comme au *i*), donc $a = \frac{4}{3}$.
On montre par récurrence que la suite est minorée par a: On a $a_1 = 3 \geq a$, et si $a_{n-1} \geq a$, il s'en suit que
$$a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1}+4) \geq \frac{1}{4}(a+4) = \frac{4}{3} = a\,.$$
On montre que la suite est décroissante. Pour $n = 2, 3, \dots$ on a
$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{4}\,(4-3a_{n-1}) \leq \frac{1}{4}\,(4-3a) = 0 \qquad \text{car} \quad a_{n-1} \geq a\,.$$
Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente avec limite $a = \frac{4}{3}$.

Remarque : les fonctions g dans *i*) et *ii*) étant affines, ces deux exercices peuvent aussi être résolus en utilisant le théorème vu au § 2.13 du cours.

iii) Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existe, elle satisfait l'équation (utiliser les propriétés algébriques comme précédemment)
$$a = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \left(\frac{7}{3} - a\right)\left(1+a\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a - a^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$3a^2 - 4a - 4 = (3a+2)(a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \text{ ou } a = -\frac{2}{3}.$$
On montre par récurrence que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_1 = 1 \geq 0$. Si $a_{n-1} \geq 0$, alors
$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \geq \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \geq 0.$$
Ainsi la seule limite possible est $a = 2$.

On montre alors (encore par récurrence) que la suite est majorée par $a = 2$. On a $a_1 = 1 \leq a$. Si $0 \leq a_{n-1} \leq a$, on a alors
$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \leq \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} = 2 = a\,.$$
Montrons que la suite est croissante. Pour $n = 2, 3, \dots$ on a
$$a_n - a_{n-1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} - a_{n-1} \geq \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} - a = 0 \qquad \text{car} \quad 0 \leq a_{n-1} \leq a\,.$$
En étant croissante et majorée, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc convergente avec limite $a = 2$.

iv) Si la limite $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, elle satisfait l'équation

$$a = 1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a\,, \tag{2}$$

parce qu'en utilisant les propriétés algébriques de la limite, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right)^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\,.\end{aligned}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) = 0\,,$$

donc $a = 1$ ou $a = 2$.

On a

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = 1 + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{11}{8} < \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = a_1\,.$$

Montrons par récurrence que la suite est minorée par 1. On a

$$a_1 = \frac{3}{2} \geq 1\,,$$

et si $a_{n-1} \geq 1$, il suit que

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1} = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}\left(a_{n-1} - 1\right) \geq 1\,.$$

Montrons par récurrence que la suite est décroissante. On a déjà montré que $a_2 \leq a_1$. Supposons donc $a_n \leq a_{n-1}$. Puisque la suite est minorée par 1, on obtient

$$0 \leq a_n - 1 \leq a_{n-1} - 1\,,$$

et donc

$$a_n(a_n - 1) \leq a_{n-1}(a_{n-1} - 1)\,,$$

et finalement

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n = 1 + \frac{1}{2}a_n(a_n - 1) \leq 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}(a_{n-1} - 1) = a_n\,.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée. Ainsi elle est convergente et sa limite est $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Exercice 3.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

converge vers 0 mais (a_n) n'est évidemment pas bornée.

Q2 : VRAI.
Comme la suite est de Cauchy, elle converge vers $a \in \mathbb{R}$. Il existe alors $C > 0$ tel que $|a_n - a| < C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < 2C$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. On peut donc prendre $\varepsilon = 2C$ dans la proposition.

Q3 : VRAI.
Découle de la deuxième inégalité triangulaire de la valeur absolue : $\big||a_n| - |a_m|\big| \leq |a_n - a_m|$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple la suite constante $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Q2 : VRAI.
Comme $0 \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|$, on a $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ et donc (a_n) converge vers zéro aussi.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\operatorname{Sup} A_n = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} = \frac{1}{n}$ (cf. cours pour les détails), d'où $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Q4 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = (-1)^n - 1$ et $b_n = (-1)^n + 1$. Alors $\operatorname{Sup} A_n = \operatorname{Sup}\{0, -2\} = 0$ et $\operatorname{Inf} B_n = \operatorname{Inf}\{2, 0\} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $a_n - b_n = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

Q1 : VRAI.
$(|a_n|)$ est décroissante et minorée par 0.

Q2 : FAUX.
Prendre par exemple $a_n = (-1)^n \, \frac{n+1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 3$. Comme cette suite alterne ($a_n a_{n+1} < 0$) et que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$, elle ne converge pas.

Q3 : VRAI.
$(|a_n|)$ est bornée puisque $|a_n| < |a_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(a_n) \subset \,]-|a_0|, |a_0|[$ est aussi bornée. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Q4 : VRAI.
Comme $(|a_n|)$ converge (cf. Q1), la suite des carrés (a_n^2) converge aussi : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\right)^2$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n^2$.

Q5 : VRAI.
Si a est un point d'accumulation, il existe une sous-suite (a_{n_k}) de (a_n) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Comme $\big||a_{n_k}| - |a|\big| \leq |a_{n_k} - a|$ (2^{e} inégalité triangulaire), il suit que $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{n_k}| = |a|$.

Or, $(|a_{n_k}|)$ est une sous-suite de $(|a_n|)$ et on sait par la Q1 que cette dernière converge. Soit donc $\ell = \lim_{n\to\infty} |a_n|$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\big||a_n| - \ell\big| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Comme $k \geq n_0$ implique $n_k \geq n_0$, on a $\big||a_{n_k}| - \ell\big| < \varepsilon$ pour $k \geq n_0$, d'où $\ell = |a|$ par unicité de la limite. Finalement $a = \pm\ell$, c.-à-d. a peut prendre au plus deux valeurs distinctes.

Echauffement 2.

i) Pour la série géométrique, le critère de d'Alembert s'écrit (pour $q \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| = |q|.$$

Donc par le critère, la série géométrique converge absolument si $|q| < 1$ (la convergence absolue pour $q = 0$ est triviale) et diverge si $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

ii) Le critère de Cauchy appliqué à la série géométrique s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|q^n|} = |q|.$$

Donc par le critère, la série converge absolument pour $|q| < 1$ et diverge pour $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Exercice 6.

i) Par le critère de Cauchy, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n+2}{4n+5}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

ii) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^4}{3n^4}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

iii) Cette série converge par le critère de Leibniz. En effet, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n-2}$ satisfait les trois conditions de ce critère :

- le signe de a_n change avec la parité de n,
- la suite des valeurs absolues $|a_n| = \dfrac{1}{3n-2}$ est décroissante,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Noter que la série des valeurs absolues $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne converge pas parce que $\dfrac{1}{3n-2} \geq \dfrac{1}{3n}$ et que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

iv) On a
$$\sqrt{n^2+7}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)\left(\sqrt{n^2+7}+n\right)}{\sqrt{n^2+7}+n}=\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}\ .$$
Observons que pour $n>3$, on a $n^2+7<(n+1)^2$ et donc
$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}>\frac{7}{\sqrt{(n+1)^2}+n}>\frac{7}{3n}\ .$$
Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3n}=\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

v) On a
$$1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\overset{(1)}{=}2\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2\overset{(2)}{\leq}2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2=\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}<\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2},$$
où on a utilisé la trigonométrie en $^{(1)}$ et l'inégalité $\sin(x)\leq x$ pour $x\geq 0$ en $^{(2)}$.
Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ converge (absolument) par le critère de comparaison.

vi) Cette série diverge car $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}=\frac{1}{7}\neq 0$ (critère nécessaire).

vii) On a pour tout $n\geq 1$
$$0<\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}=\frac{4}{n(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}<\frac{2}{n^{3/2}}\ .$$
Par le critère de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$ converge (absolument) car $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Ceci se démontre comme pour la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: la suite des sommes partielles $\displaystyle s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3/2}}$ est croissante et bornée car pour $n=2m(+1)$ selon la parité
$$\begin{aligned}
s_n&=1+\left(\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}\right)+\left(\frac{1}{4^{3/2}}+\frac{1}{5^{3/2}}\right)+\cdots+\begin{cases}\left(\frac{1}{(2m)^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}}\right), & n \text{ impair}\\ \frac{1}{(2m)^{3/2}}, & n \text{ pair}\end{cases}\\
&\leq 1+2\left(\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{4^{3/2}}+\cdots+\frac{1}{(2m)^{3/2}}\right)\qquad \text{vrai dans les deux cas}\\
&\leq 1+\frac{2}{2^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2^{3/2}}+\cdots+\frac{1}{m^{3/2}}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,s_m\leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,s_n
\end{aligned}$$
et donc $s_n\leq\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

viii) $\underline{d=1}$: $a_n = \frac{n!}{n!} = 1$. La série diverge, car pour une série convergente on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (critère nécessaire pour la convergence).

On écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^d}{(dn)!} = 1 + \frac{1}{d!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^d}{(dn)!}$$

$\underline{d=2}$: Pour $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}
0 \leq a_n &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{(n!)^2}{2^n n!(2n-1)(2n-3)\cdots 3} \\
&\leq \frac{n!}{2^n(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \\
&= \frac{n!}{2^n 2^{n-1}(n-1)!} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n 2n =: b_n
\end{aligned}$$

La série converge par le critère de comparaison car la série $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge. En effet, par le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{4}\frac{2(n+1)}{2n}\right| = \frac{1}{4} < 1.$$

$\underline{d=3}$: Ce cas est très similaire au cas $d=2$. Pour $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}
0 \leq a_n &= \frac{(n!)^3}{(3n)!} \\
&= \frac{(n!)^3}{3^n n!(3n-1)(3n-2)(3n-4)(3n-5)\cdots} \\
&\leq \frac{(n!)^3}{3^n n!(3n-3)(3n-3)(3n-6)(3n-6)\cdots} \\
&\leq \frac{(n!)^3}{3^{n+2(n-1)}(n-1)!^2} \\
&= \left(\frac{1}{27}\right)^n 9n^2 =: b_n
\end{aligned}$$

avec les mêmes conclusions.

Une deuxième possibilité qui s'applique à tous les valeurs de $d > 1$ est d'utiliser directement le critère de d'Alambert. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1}\frac{1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{((n+1)!)^d}{(d(n+1))!}\frac{(dn)!}{(n!)^d}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^d(n!)^d}{(dn+d)\cdots(dn+1)(dn)!}\frac{(dn)!}{(n!)^d}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^d}{(dn+d)\cdots(dn+1)}\right| = \frac{1}{d^d}
\end{aligned}$$

et $\frac{1}{d^d} < 1$ pour $d > 1$.

Exercice 7.

$$i)\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 1 = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$ii)\quad \sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

Exercice 8.

On distingue pour chacun des deux critères les cas de convergence et de divergence.

Critère de Cauchy - cas convergent.

Le but est de trouver une suite (b_n) de la forme $b_n = Cq^n$ avec $|q| < 1$ et $C > 0$ telle que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$. On choisit q tel que $\rho < q < 1$ (par exemple $q = \frac{1+\rho}{2}$, mais la valeur précise n'a pas d'importance ici). Puisque la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, on peut trouver un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ pour tout $n \geq n_0$ (en effet, écrire la définition de la limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ pour $\varepsilon = q - \rho > 0$). Par conséquent on a

$$|a_n| \leq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Il reste à choisir la constante $C > 0$ de sorte que les termes $|a_n|$ pour $n < n_0$ soient aussi inférieurs au b_n correspondants, c.-à-d. que

$$|a_0| \leq C, \quad |a_1| \leq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \leq Cq^{n_0-1}$$

ce qui revient à choisir $C \geq \max\left\{1, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. Ainsi on a

$$|a_n| \leq b_n := Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, car

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \lim_{n\to\infty} \left(C\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = C\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{C}{1-q}\ .$$

Critère de Cauchy - cas divergent.

Dans ce cas on veut trouver (b_n) avec $|q| > 1$ telle que $|a_n| \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$. On choisit q tel que $\rho > q > 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\sqrt[n]{|a_n|} > q$ pour tout $n \geq n_0$ (écrire la définition de la limite pour $\varepsilon = \rho - q > 0$). Par conséquent on a

$$|a_n| \geq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{3}$$

Pour avoir en plus

$$|a_0| \geq C, \quad |a_1| \geq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \geq Cq^{n_0-1},$$

on pose $C = \min\left\{1, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. Ainsi

$$|a_n| \geq Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge parce que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \geq \lim_{n\to\infty} \left(C \sum_{k=0}^{n} q^k\right) = C \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty\ .$$

Remarque : Pour montrer la divergence de la série sans passer par le critère de comparaison, il suffit de constater à partir de (3) que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Ainsi la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge parce que le critère nécessaire pour la convergence n'est pas satisfaite.

Critère de d'Alembert - cas convergent.
La stratégie est la même que pour le cas convergent du critère de Cauchy.
Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho < 1$, choisir q tel que $\rho < q < 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ pour tout $n \geq n_0$ (poser $\varepsilon = \rho - q$). Par conséquent on a pour tout $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq |a_{n-1}|\, q \leq |a_{n-2}|\, q^2 \leq \cdots \leq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n.$$

Pour les autres termes de la suite on doit de nouveau avoir

$$|a_0| \leq C, \quad |a_1| \leq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \leq Cq^{n_0-1}$$

si bien qu'on doit choisir une constante $C \geq \max\left\{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. Ainsi

$$|a_n| \leq b_n := Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ceci implique comme pour le critère de Cauchy la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Critère de d'Alembert - cas divergent.
Même stratégie que pour le critère de Cauchy.
Soit $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho > 1$. On choisit q tel que $\rho > q > 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q$ pour tout $n \geq n_0$ (poser $\varepsilon = \rho - q > 0$). Par conséquent on a pour tout $n \geq n_0$

$$|a_n| \geq |a_{n-1}|\, q \geq |a_{n-2}|\, q^2 \geq \cdots \geq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n.$$

Pour avoir en plus

$$|a_0| \geq C, \quad |a_1| \geq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \geq Cq^{n_0-1},$$

on pose $C = \min\left\{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. Ainsi

$$|a_n| \geq Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge comme pour le critère de Cauchy.

Exercice 9.

Q1 : VRAI.
Comme la série converge, on a $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = 0$ par le critère nécessaire. Ainsi $0 = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$. La proposition en suit par le théorème des deux gendarmes.

Q2 : FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{1}{n}$. Elle converge vers 0, mais on a vu au cours que la série harmonique diverge.
Noter que cet énoncé est la réciproque du critère nécessaire pour la convergence qui justement est seulement nécessaire mais pas suffisant.

Q3 : VRAI.
Comme $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge par le critère de comparaison.

Q4 : FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = -n$ qui est strictement décroissante. Comme $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$ ne converge pas vers zéro, la série diverge.

Q5 : FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par le critère de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Par contre $a_n^2 = \frac{1}{n}$ et on obtient la série harmonique qui diverge.

Q6 : VRAI.
Comme $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| < 1$ pour tout $n \geq n_0$ (définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$). Donc $|a_n|^2 < |a_n|$ pour tout $n \geq n_0$ et ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.
Remarque : Ici l'hypothèse du critère de comparaison n'est vérifiée que pour $n \geq n_0$ et pas pour tout n comme énoncé au cours. Cet assouplissement n'affecte pourtant pas la conclusion. En effet, on peut "découper" la série à $n = n_0$ en une somme d'un nombre fini de termes et une série commençant en n_0 qui converge par le critère de comparaison.

Q7 : FAUX.
On a pour tout $n \geq 1$ que $\sqrt{n} \leq n$ et donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique diverge, on conclut par le critère de comparaison que la série en question diverge aussi.