Cramer's rule

mercredi, 22 mai 2019 10:08

Système de Cramer

Démonstration dans le cas particulier $n = 3$.

$$AX = C \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

On suppose $\operatorname{rg} A = 3$

La matrice A est donc inversible et $X = A^{-1}C$ est la solution unique.

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t C$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \det A_{13} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & -\det A_{23} \\ \det A_{31} & -\det A_{32} & \det A_{33} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Rappels :
$\tilde{A}$ est la matrice des cofacteurs de A.
cofacteur de $a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Par exemple : cofacteur de $a_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\det A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, etc

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

On calcule par exemple x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{\det A}(\det A_{11}c_1 - \det A_{21}c_2 + \det A_{31}c_3) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} c_3 \right) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

De même on obtient

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad x_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$