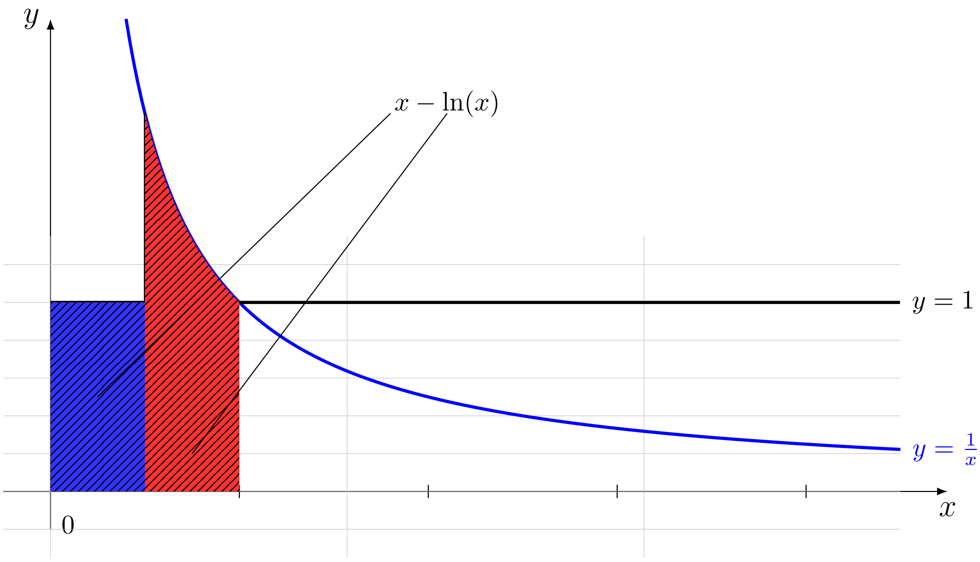
1.3.19

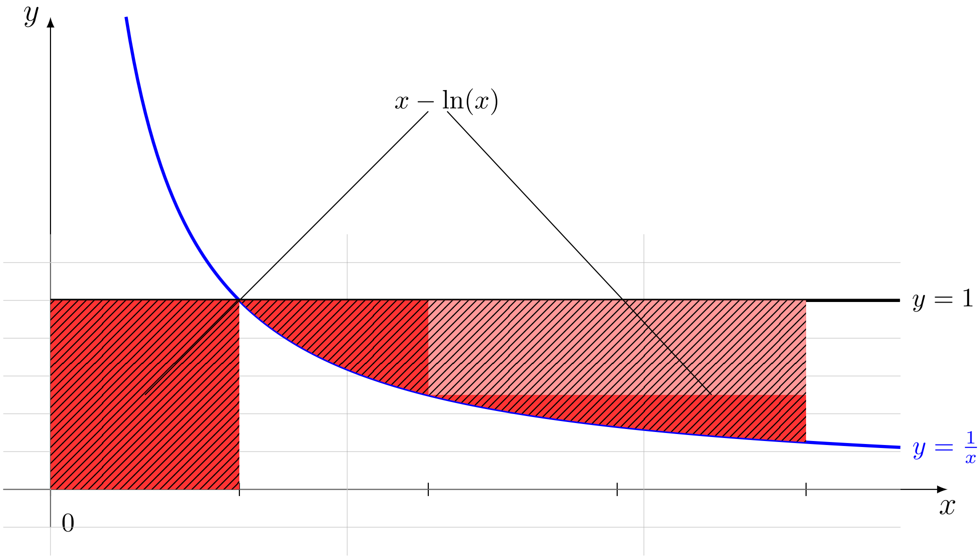
Corrigé de la Série 11

1. (a) Le logarithme est défini comme la surface en-dessous de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, en partant de $x = 1$. Pour des valeurs de x entre 0 et 1, cette surface est comptée négativement.
Similairement, la valeur x peut être vue comme la surface en dessous de $y = 1$, en partant de 0 et en s'arrêtant à x. Ainsi, $x - \ln(x)$ est la surface formée de la somme de ces deux surfaces:



Si x diminue en s'approchant de 0, la somme des surfaces en question sera plus grande que $-\ln(x)$ (surface en rouge). Or, celle-ci tend vers l'infini. On a donc $\lim_{x\to\infty}(x - \ln(x)) = \infty$.

(b) Le logarithme est défini comme la surface en-dessous de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, en partant de $x = 1$. Similairement, la valeur x peut être vue comme la surface en dessous de $y = 1$, en partant de 0 et en s'arrêtant à x. Ainsi, $x - \ln(x)$ est la surface formée de la différence de ces deux surfaces:

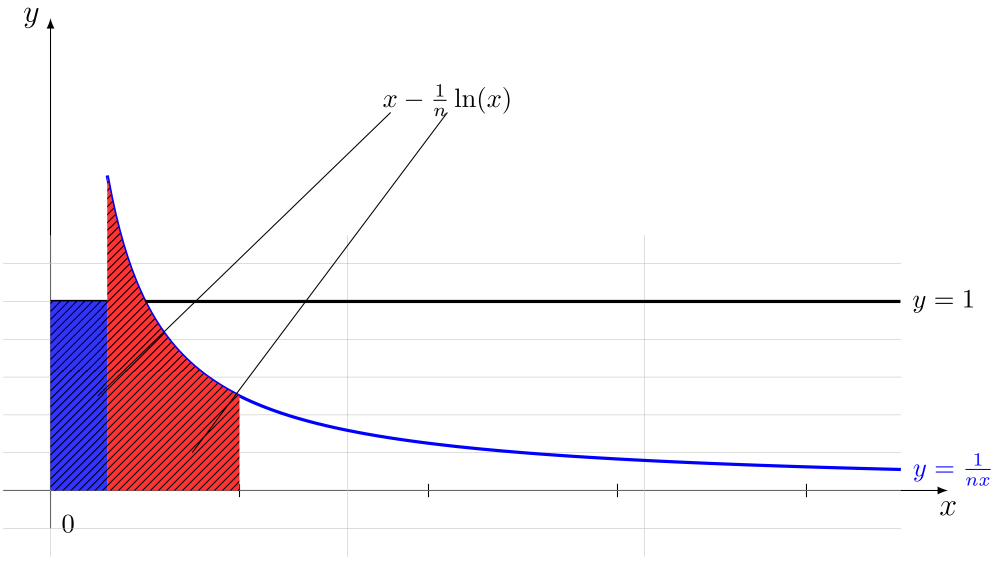


Clairement, si x augmente, $x - \ln(x)$ augmente, et $0 < \frac{1}{2}(x - 2) \leq x - \ln(x)$ pour $x \geq 2$. Ainsi, $\lim_{x\to\infty}(x - \ln(x)) = \infty$.

(c) En substituant x^n par y on obtient

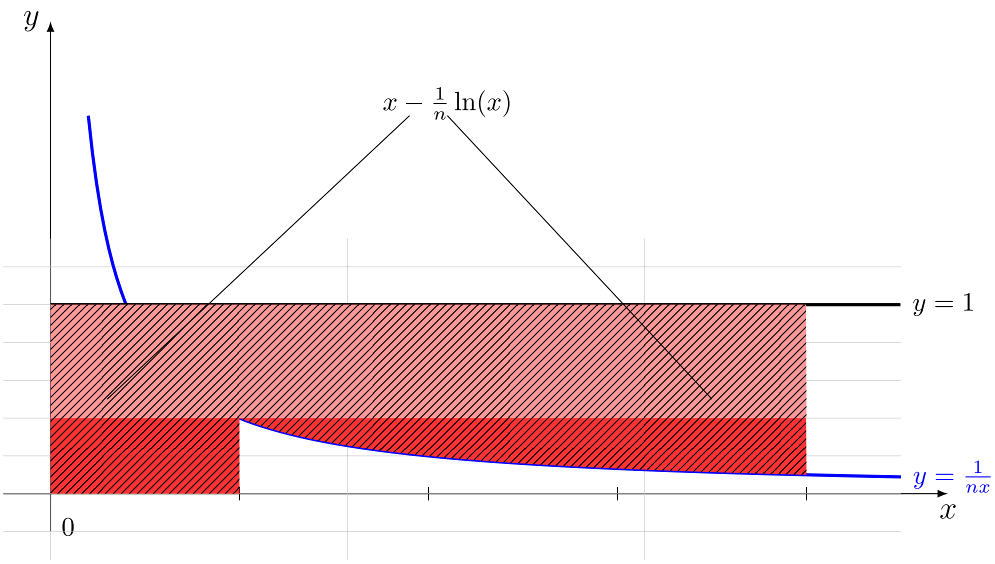
$$\lim_{x\to 0}(x^n - \ln(x)) = \lim_{y\to 0}(y - \ln(y^{1/n})) = \lim_{y\to 0}(y - \frac{1}{n}\ln(y)).$$

Or, $\frac{1}{n}\ln(y)$ est la surface délimitée par la courbe $\frac{1}{nx}$ entre $x=1$ et $x=y$. On obtient donc, géométriquement:



A nouveau, la surface totale est plus grande que la surface rouge. Or, celle-ci a comme limite $\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\ln(x) = \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$, d'où $\lim_{x\to 0}(x - \ln(x^{1/n})) = \lim_{x\to 0}(x^n - \ln(x)) = \infty$.

(d) En remplaçant x^n par y, on obtient $\lim_{x\to\infty}(x^n - \ln(x)) = \lim_{y\to 0}(y - \frac{1}{n}\ln(y))$. Géométriquement,



Clairement, si x augmente, $x - \ln(x)$ augmente, et $0 < (1 - \frac{1}{n})\,x \leq x - \ln(x)$. Ainsi, $\lim_{x\to\infty}(x - \ln(x)) = \infty$.

(e) On sait déjà, que $\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$. Cela veut donc dire, que pour tout $1 > \epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que si $0 < x < \delta$, $\ln(x) < -\frac{1}{\epsilon}$. Ceci implique alors, que pour tout $0 < x < \delta$, $\frac{\ln(x)}{x} < \ln(x) < -\frac{1}{\epsilon}$, et $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

2. (a) $A = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2 \frac{1}{2^4} = \log_2(2^{-4}) = -4 \cdot \underbrace{\log_2(2)}_{=1} = -4\,.$

(b) $B=\log_4\,2=\log_4\,\sqrt{4}=\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\log_4(4)}_{=1}=\frac{1}{2}\,.$

(c) $C=\log_\pi\,1=\log_\pi(\pi^0)=0\cdot\underbrace{\log_\pi(\pi)}_{=1}=0\,.$

Remarque : le logarithme de 1 est nul quel que soit sa base :

$$\log_b\,1=\frac{\ln 1}{\ln b}=0\,,\qquad (b>0).$$

(d) $D=\log_{1/2}\,8=\log_{1/2}\,(2^3)=\log_{1/2}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3\cdot\underbrace{\log_{1/2}\,\left(\frac{1}{2}\right)}_{=1}=-3\,.$

(e) $E=\log\left[\,\log(10^{10})\,\right]=\log\left[\,10\cdot\underbrace{(\log 10)}_{=1}\,\right]=\log\left[\,10\,\right]=1\,.$

(f) $F=e^{2\cdot\ln 5}=e^{\ln(5^2)}=5^2=25\,.$

3. (a)

$$\begin{aligned} A &= \log 15-\log 6+3\cdot\log 2\\ &= \log 15+\log\left(\tfrac{1}{6}\right)+\log\left(2^3\right)\\ &= \log\left(15\cdot\tfrac{1}{6}\cdot 2^3\right)\\ &= \log(10\cdot 2)\\ &= \log(10)+\log(2)\\ &= 1+\log(2)\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{e^9}\cdot e^{2-\ln 3}\cdot e^{-3/2}\\ &= e^{9/2}\cdot e^2\cdot e^{\ln\frac{1}{3}}\cdot e^{-3/2}\\ &= \frac{1}{3}\cdot e^{9/2}\cdot e^{-3/2}\cdot e^2\\ &= \frac{1}{3}\cdot e^{9/2-3/2+2}\\ &= \frac{1}{3}\cdot e^5. \end{aligned}$$

4. (a) Résolution de l'équation $\quad e^{3x/2}-e^{-3x/2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{x/2}+5\,e^{-x/2}\right)\,,\qquad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

- Amplification par $2\,e^{3x/2}>0$

$$e^{3x/2}-e^{-3x/2}=\frac{1}{2}\left(e^{x/2}+5\,e^{-x/2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad 2\,e^{3x}-2=e^{2x}+5\,e^{x}.$$

- Changement de variable

  On pose $z=e^x\,,\ z>0$ et l'équation devient :

$$2\,z^3-2=z^2+5\,z\quad\Leftrightarrow\quad 2\,z^3-z^2-5\,z-2=0\,.$$

- Résolution de l'équation polynomiale

  $z = -1$ est une racine évidente, on factorise donc le polynôme par $z+1$

$$\begin{aligned} 2\,z^3 - z^2 - 5\,z - 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+1)\left(2\,z^2 - 3\,z - 2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z+1)\,(z-2)\,(2z+1) = 0\,. \end{aligned}$$

  La seule solution positive est $z = 2$.

- Conclusion

$$z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2\,.$$

(b) Résolution de l'équation $\quad e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\,\left(1 + e^{-\sin x}\right)\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

- Amplification par $e^{\sin x} > 0$

$$e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\,\left(1 + e^{-\sin x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\,\sin x} - 1 = 2\,\left(e^{\sin x} + 1\right).$$

- Changement de variable

  On pose $z = e^{\sin x}$, $z > 0$ et l'équation devient :

$$z^2 - 1 = 2\,(z+1) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2\,z - 3 = 0\,.$$

- Résolution de l'équation polynomiale

$$z^2 - 2\,z - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)\,(z-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3\,, \quad (z > 0).$$

- Conclusion

$$z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sin x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \ln 3\,.$$

  Or $3 > e$ $(e \approx 2,718)$ et la fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln 3 > 1$.

  L'équation $\sin x = \ln 3$ n'admet donc pas de solution. $\qquad S = \emptyset$.

(c) Résolution de l'équation $\quad \ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)\,.$

- Domaine de définition

$$D_{\text{def}} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0 \text{ et } \cos x > 0 \,\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \,\left]\,2k\pi\,,\, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,\right[\,.$$

- On se ramène à une expression de la forme $\ln(u) = \ln(v)$

$$\ln(\sin x) - \ln(\cos x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\tan x) = \ln e$$

- La fonction logarithme est injective

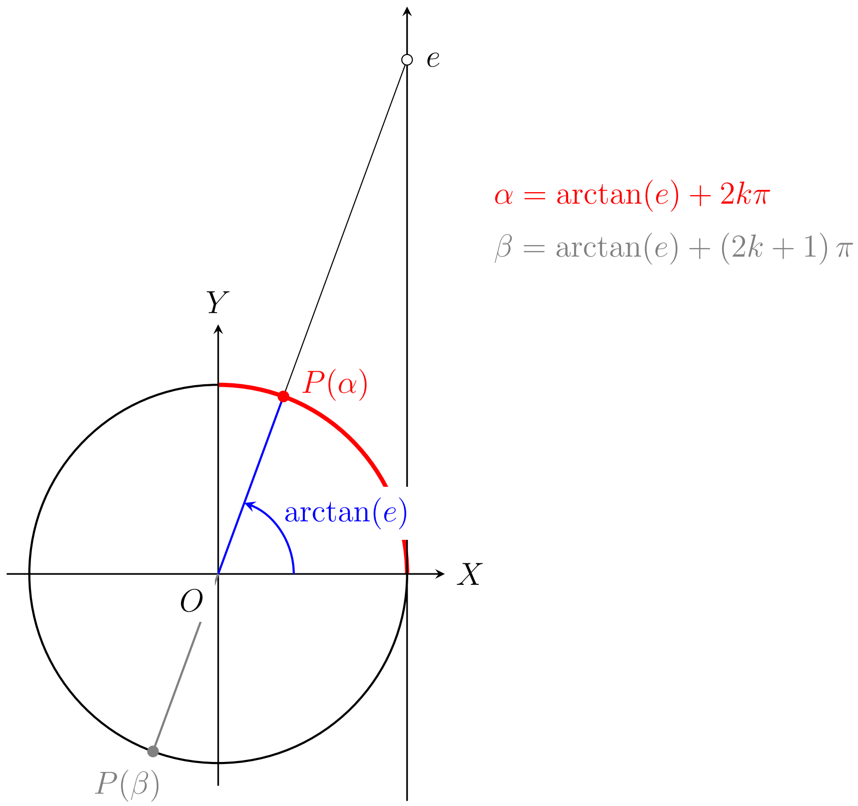
$$\ln(\tan x) = \ln e \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = e$$

- Conclusion

$$\tan x = e \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(e) + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Les seules solutions acceptables sont celles qui appartiennent au premier quadrant :

$$x = \arctan(e) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



(d) Résolution de l'équation $\quad 3 + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$.

- Domaine de définition

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \tfrac{1}{2} - x > 0 \text{ et } \tfrac{x-9}{x+1} > 0 \right\} = \left]-\infty\,, -1\right[\,.$$

- On se ramène à une expression de la forme $\log_2(u) = \log_2(v)$

$$\log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(\tfrac{1}{2} - x\right) - \log_2\left(\tfrac{x-9}{x+1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2\left[2^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \cdot \tfrac{x+1}{x-9}\right] = \log_2(1)$$

- La fonction logarithme est injective

$$\log_2\left[2^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \cdot \tfrac{x+1}{x-9}\right] = \log_2(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{x+1}{x-9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^2 + 5x - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (8x+13)\,(x-1) = 0\,.$$

- Conclusion

  $x=1$ n'est pas dans le domaine de définition, la seule solution est $x=-\dfrac{13}{8}$.

(e) Résolution de l'équation $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)-\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\left[2\,(x-15)\right]+\dfrac{1}{2}$.

- Domaine de définition

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2x-13-\tfrac{15}{x}>0\ \text{ et }\ 2\,(x-15)>0\right\}\ =\ ]\,15\,,\,+\infty\,[\,.$$

- On se ramène à une expression de la forme $\log_{\frac{1}{2}}(u)=\log_{\frac{1}{2}}(v)$

  $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left[2\,(x-15)\right]=1 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-13x-15}{2x\,(x-15)}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

- La fonction logarithme est injective

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{2x^2-13x-15}{2x\,(x-15)}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x^2-13x-15}{2x\,(x-15)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+2x-15=0\quad\Leftrightarrow\quad (x+5)\,(x-3)=0\,.$$

- Conclusion

$$x=-5\notin D_{\text{def}}\quad\text{et}\quad x=3\notin D_{\text{def}}\,,\quad \text{d'où}\quad S=\emptyset\,.$$

5. (a) Résolution de l'inéquation $\ln\sqrt{3-x}+\ln\sqrt{x+1}\leq\ln\sqrt{10-6x}$.

- Domaine de définition

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 3-x>0\,,\quad x+1>0\ \text{ et }\ 10-6x>0\right\}\ =\ \left]-1\,,\,\tfrac{5}{3}\right[\,.$$

- Simplification de l'expression de l'inéquation sur son domaine de définition

$$\begin{aligned}&\ln\sqrt{3-x}+\ln\sqrt{x+1}\leq\ln\sqrt{10-6x}\\ \Leftrightarrow\quad&\frac{1}{2}\cdot\ln(3-x)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x+1)\leq\frac{1}{2}\cdot\ln(10-6x)\\ \Leftrightarrow\quad&\ln(3-x)+\ln(x+1)\leq\ln(10-6x)\,.\end{aligned}$$

- On se ramène à une expression de la forme $\ln(u)\leq\ln(v)$

  $\ln(3-x)+\ln(x+1)\leq\ln(10-6x)\quad\Leftrightarrow\quad\ln\left[\,(3-x)\,(x+1)\,\right]\leq\ln(10-6x)\,.$

- La fonction logarithme de base e est strictement croissante $(e>1)$

$$\ln[\,(3-x)\,(x+1)\,]\leq\ln(10-6x)\quad\Leftrightarrow\quad(3-x)\,(x+1)\leq 10-6x$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-8x+7\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad(x-1)\,(x-7)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad x\leq 1\quad\text{ou}\quad x\geq 7\,.$$

- Conclusion

$$S = \Big(\,]-\infty\,,1\,] \cup [\,7\,,+\infty\,[\,\Big) \cap D_{\text{def}} \;=\;]-1\,,1\,]\,.$$

(b) Résolution de l'inéquation $\quad \ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$

$$\ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x - \tfrac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right)\ .$$

- Domaine de définition

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \;\text{ et }\; 2x - \tfrac{1}{x} > 0 \right\} \;=\; \left]\, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\, +\infty \,\right[\ .$$

- On se ramène à une expression de la forme $\ln(u) < \ln(v)$

$$\ln\left(2x - \tfrac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\tfrac{2x^2-1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right) + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right) < 2\,.$$

- La fonction logarithme de base e est strictement croissante $(e > 1)$

$$\ln\left(2x^2 - 1\right) < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 < e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1+e^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\tfrac{1+e^2}{2}} < x < \sqrt{\tfrac{1+e^2}{2}}\,.$$

- Conclusion

$$S = \left]\, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \tfrac{\sqrt{2\,(1+e^2)}}{2} \,\right[\ .$$

(c) Résolution de l'inéquation $\quad 3^{x+4} - 1458 \leq 9^x\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

$$\begin{aligned} 3^{x+4} - 1458 \leq 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x - 3^{x+4} + 1458 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3^2)^x - 3^x \cdot 3^4 + 1458 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3^x)^2 - 81 \cdot 3^x + 1458 \geq 0\,. \end{aligned}$$

En posant $\quad z = 3^x\,, \quad z > 0\,, \quad$ l'inéquation devient :

$$z^2 - 81\,z + 1458 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-27)\,(z-54) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \leq 27 \quad \text{ou} \quad z \geq 54\,.$$

$*\ z \leq 27 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 27 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3\,,$

$*\ z \geq 54 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 54 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 2 \cdot 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3 + \log_3(2)\,,$

car la fonction exponentielle de base $b = 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où

$$S = \;]-\infty\,,\,3\,] \;\cup\; [\,3 + \log_3(2)\,,\,+\infty\,[\,.$$

6. • Domaine de définition de l'inéquation $\log_a\left(\frac{x-4}{x-6}\right) \leq -1 + \log_a(2x) - 2\,\log_a|x-6|$

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x-6 \neq 0\,,\quad 2x > 0 \ \text{ et } \ \tfrac{x-4}{x-6} > 0\right\} \ = \ ]\,0\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,+\infty\,[\,.$$

• On se ramène à une expression de la forme $\log_a(u) \leq \log_a(v)$

$$\begin{aligned} & \log_a\left(\tfrac{x-4}{x-6}\right) \leq -1 + \log_a(2x) - 2\,\log_a|x-6| \\ \Leftrightarrow\quad & \log_a\left(\tfrac{x-4}{x-6}\right) + 2\,\log_a|x-6| + 1 \leq \log_a(2x) \\ \Leftrightarrow\quad & \log_a\left(\tfrac{x-4}{x-6}\right) + \log_a(x-6)^2 + \log_a(a) \leq \log_a(2x) \\ \Leftrightarrow\quad & \log_a[\,a\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_a(2x)\,. \end{aligned}$$

$\underline{a=2}$: Résolution de l'inéquation $\log_2[\,2\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_2(2x)\,.$

La fonction logarithme de base $a=2$ est strictement croissante :

$$\log_2[\,2\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_2(2x) \quad\Leftrightarrow\quad 2\,(x-4)\,(x-6) \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2 - 11x + 24 \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)\,(x-8) \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in [\,3\,,\,8\,]\,.$$

D'où

$$S = [\,3\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,8\,]\,.$$

$\underline{a=\frac{1}{2}}$: Résolution de l'inéquation $\log_{\frac{1}{2}}\left[\,\frac{1}{2}\,(x-4)\,(x-6)\,\right] \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x)\,.$

La fonction logarithme de base $a=\frac{1}{2}$ est strictement décroissante :

$$\log_{\frac{1}{2}}\left[\,\tfrac{1}{2}\,(x-4)\,(x-6)\,\right] \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x) \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\,(x-4)\,(x-6) \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2 - 14x + 24 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)\,(x-12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x \in \ ]-\infty\,,\,2\,] \ \cup \ [\,12\,,\,+\infty\,]\,.$$

D'où

$$S = \ ]\,0\,,\,2\,] \ \cup \ [\,12\,,\,+\infty\,[\,.$$

7. (a) • **Domaine de définition du système**

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^x = \left[2^{(x-1)}\right]^y \\ 1 + \log_2(2y-3) = \log_2\left(\frac{10-8x}{2x-1}\right) \end{cases}$$

$$D_{\text{def}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y-3>0\,,\quad 2x-1 \neq 0 \text{ et } \tfrac{10-8x}{2x-1}>0\right\},$$

$$D_{\text{def}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left]\tfrac{1}{2}\,,\,\tfrac{5}{4}\right[\text{ et } y>\tfrac{3}{2}\right\} = \left]\tfrac{1}{2}\,,\,\tfrac{5}{4}\right[\times \left]\tfrac{3}{2}\,,+\infty\right[\,.$$

- **Résolution sur D_{def} de la première équation**
  - On se ramène à une équation de la forme $2^u = 2^v$

$$\frac{1}{2}\cdot 2^x = \left[2^{(x-1)}\right]^y \quad\Leftrightarrow\quad 2^{-1}\cdot 2^x = 2^{(x-1)\,y} \quad\Leftrightarrow\quad 2^{(x-1)} = 2^{(x-1)\,y}.$$

  - La fonction exponentielle de base $b=2$ est injective

$$2^{(x-1)} = 2^{(x-1)\,y} \quad\Leftrightarrow\quad (x-1) = (x-1)\,y\,.$$

  - Conclusion

$$(x-1) = (x-1)\,y \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)\,(y-1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1\,,\quad \text{car} \quad y>\tfrac{3}{2}\,.$$

- **Résolution de la deuxième équation en $x=1$**

$$1+\log_2(2y-3) = \log_2(2) \quad\Leftrightarrow\quad 1+\log_2(2y-3) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2(2y-3)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_2(2y-3) = \log_2(1) \quad\Leftrightarrow\quad 2y-3=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=2\,.$$

- **Solution**

$$S = \{\,(1\,,\,2)\,\}\,.$$

(b)

- **Domaine de définition du système**

$$\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2 \\ (e^x - e^y)^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$D_{\text{def}} = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6-x \neq 0\,,\quad y>0 \text{ et } \tfrac{6-x}{4x}>0\,\right\},$$

$$D_{\text{def}} = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left]0\,,\,6\right[\text{ et } y \in \mathbb{R}_+^*\,\right\} = \left]0\,,\,6\right[\times \left]0\,,\,+\infty\right[\,.$$

- **Résolution de l'équation** $\ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\,\ln 2$

$$\ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\tfrac{6-x}{4x}\right) + 3\,\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(6-x) - \ln y = \ln(6-x) - \ln(4x) + \ln(2^3)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln y = \ln(4x) - \ln 8 \quad\Leftrightarrow\quad \ln y = \ln\left(\tfrac{x}{2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{x}{2}\,,$$

avec $x \in \left]0\,,\,6\right[$ et $y \in \left]0\,,\,3\right[$.

- **Résolution du système**

$$\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2 \\ (e^x - e^y)^2 - 4 > 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = 2y \quad \text{avec} \quad y \in \left]0\,,\,3\right[\\ (e^x - e^y)^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

On résout l'inéquation $(e^{2y}-e^y)^2-4>0$ à l'aide d'un changement de variable, en posant $e^y=z$, $(z>0)$:

$$\big(z^2-z\big)^2-4>0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\big(z^2-z+2\big)}_{>0\ \forall z}\big(z^2-z-2\big)>0\,,$$

$$\Leftrightarrow\quad \big(z^2-z-2\big)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{(z+1)}_{>0\ \forall z>0}(z-2)>0 \quad\Leftrightarrow\quad z>2$$

$$\Leftrightarrow\quad e^y>2 \quad\Leftrightarrow\quad y>\ln 2\,.$$

- **Solution**

$$S=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2y \ \text{ et }\ y\in\,]\,\ln 2\,,\ 3\,[\,\big\}\ .$$