Applications

1. Soient $E = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ et $F = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels définissent le graphe d'une application de E dans F ?

a) $\{(b;\ 1);\ (c;\ 3);\ (d;\ 5);\ (e;\ 3);\ (a;\ 6)\}$,

b) $\{(d;\ 6);\ (c;\ 5);\ (a;\ 4);\ (d;\ 4);\ (b;\ 3)\}$,

c) $\{(a;\ 3);\ (b;\ 3);\ (c;\ 3);\ (d;\ 3)\}$,

d) $\{(a;\ 5);\ (b;\ 5);\ (d;\ 2)\}$.

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels définissent le graphe d'une application ?
Si il y a lieu, modifier les ensembles de départ ou d'arrivée de manière à définir une application.

a) $A = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid y = \frac{x^2}{x+2}\}$,

b) $B = \{(x;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2}{x+2}\}$,

c) $C = \{(x;\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x + 1\}$,

d) $D = \{(x;\ y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = \frac{x}{x^2-2}\}$.

3. Soient $A = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 0\}$
et l'application $f:\ A \longrightarrow B$ telle que $f(x) = x^2 - |x| - 2$.

a) Enumérer les éléments du graphe de f et le représenter graphiquement.

b) Enumérer les éléments de : $f(\{-1;\ 0\})$, $\operatorname{Im} f$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-3;\ -2;\ -1\})$.

4. Soit :

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Donner la représentation graphique de f (une unité = 4 carrés) et en déduire $\operatorname{Im} f$.

b) A l'aide de a), expliciter :
$f(\{2\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(f(\{1\}))$.

c) A l'aide de a), expliciter :
$f([1\,;\,3])$, $f([1\,;\,3[)$,
$f^{-1}([-1\,;\,0])$, $f^{-1}([-1\,;\,0[)$.

5. Soit :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Donner la représentation graphique de f (une unité = 4 carrés) et en déduire $\mathrm{Im} f$.

b) A l'aide de a), expliciter : $f^{-1}(\{3\})\,,\, f^{-1}(\{2\})$.

c) A l'aide de a), expliciter :

$f([1\,;\,2])\,,\, f([1\,;\,2[)\,,$

$f([1\,;\,3])\,,\, f([1\,;\,3[)\,,$

$f^{-1}(]1\,;\,4[)\,,\, f^{-1}(]0\,;\,4[)$.

6. Soit :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 - |x| - 2$$

a) Donner la représentation graphique de f (une unité = 4 carrés).

b) A l'aide de a), expliciter : $\mathrm{Im} f$, $f(\,]-1\,,\,0])$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B)$ où $A = [-3\,;\,-2[$ et $B = \,]-9/4\,;\,-1]$.

c) Comparer $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B)$, $f(f^{-1}(A))$ et A.

7. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall\, A\,,\, B \subset E\,,\, A \subset B \;\Rightarrow\; f(A) \subset f(B)$.
La réciproque est-elle vraie ?

b) $\forall\, A\,,\, B \subset E\,,\, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

c) $\forall\, A\,,\, B \subset F\,,\, f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

d) $\forall\, B \subset F\,,\, f(f^{-1}(B)) \subset B$.
A-t-on égalité en général ?

e) $\forall\, A \subset E\,,\, A \subset f^{-1}(f(A))$.
A-t-on égalité en général ?

f) $\forall\, B \subset F\,,\, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

8. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence :

$$f(A) \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

9. On considère l'application :

$$\begin{array}{rlcl} g: &]-1\,,\,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & g(a) = a^{E(1+a)} \end{array}$$

<u>Rappel</u> : $E(x)$ est la partie entière de x.
A l'aide de la représentation graphique de g, expliciter $g^{-1}([1\,,\,4[\,)$.

10. On donne les applications :

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2E(-\sin x) \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} g: & [0;\,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -(x-2)^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$

<u>Rappel</u> : $E(x)$ est la partie entière de x.

a) A l'aide des graphes de f et g, expliciter $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$.
b) Représenter graphiquement les éléments de $\operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} g$.
c) Déterminer $g^{-1}(F)$ lorsque $F = \,]-2\,,\,1]$.

11. Soients $E = \{a;\,4;\,b;\,3\}$, $F = \{3;\,e;\,i;\,5\}$ et $G = \{c;\,d;\,e\}$.
On considère les applications $f : E \longrightarrow F$ définie par : $\{(a;\,3);\,(4;\,e);\,(b;\,5);\,(3;\,5)\}$ et l'application $g : F \longrightarrow G$ définie par : $g(3) = g(e) = g(i) = c$ et $g(5) = d$.

a) Définir $g \circ f$.
b) Enumérer les éléments de $(g \circ f)(A)$ où $A = \{a;\,b;\,3\}$.
c) Enumérer les éléments de $(g \circ f)^{-1}(B)$ où $B = \{d;\,e\}$.

12. Soient :

$$\begin{array}{rlcl} f & : [-2;\,2] & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & -|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} g & : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$$

Déterminer tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ tels que f et g soient des applications, puis définir $g \circ f$.

13. Soient $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ ou } -1 < x < 2\}$ et les deux applications :

$$\begin{array}{rlcl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x;\,-x^2+x) \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x;\,y) & \longmapsto & (-x;\,|y|) \end{array}$$

a) Définir $g \circ f$.
b) Définir $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et le représenter graphiquement.

14. Soit :

$$\begin{array}{rlcl} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & (x^2+1;\,x^4-1) \end{array}$$

a) Déterminer le plus grand intervalle A de $\mathbb{R}$ pour que f soit une application.

b) Expliciter $\operatorname{Im} f$ et faire sa représentation graphique.

c) Soit :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x;\, y) & \longmapsto & \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Déterminer $(g \circ f)^{-1}(\{2\})$.

15. Déterminer l'ensemble image des applications suivantes.

a) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x+2;\ x^2+6x) \end{array}$

b) $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+5x+6 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x-1} \end{array}$

d) $\begin{array}{rccl} j: & \mathbb{R}-\{-1;\, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \end{array}$

16. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto (x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$$

a) Expliciter $\operatorname{Im} f$ et le représenter graphiquement.

b) Déterminer $f^{-1}(K)$ où $K = \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \,|\, y' = -\frac{1}{2}x'\right\}$ et le représenter graphiquement.

c) Enumérer les éléments de $f^{-1}(f(\{(3,1)\}))$.

17. On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : $f(x) = |x^2-1|$, $g(x) = x|x-1|$ et $h(x) = \sin|x|$.
Esquisser leur graphe, puis choisir un ensemble de départ et (ou) d'arrivée afin qu'ainsi restreinte, ces applications soient :

a) injective

b) surjective

18. Montrer que les applications suivantes sont injectives :

a) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}-\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{x-3} \end{array}$

b) $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_- - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{array}$

c) $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x;\, y) & \longmapsto & (x^2+y^2;\ x^2-y^2) \end{array}$

d) $j : \begin{array}{ccl}]-\infty;\,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x^2+1;\ x^2+4x) \end{array}$

e) $k : \begin{array}{ccl} [1;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

19. Les applications suivantes sont-elles injectives ? justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

a) $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+12}{2x-1} \end{array}$

b) $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+9}{2x} \end{array}$

c) $h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;\,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x+y}{x+y-2} & \text{si } x+y\neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x+y=2 \end{cases} \end{array}$

20. Déterminer l'image des applications suivantes et montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'elles ne sont pas surjectives. Puis restreindre leur ensemble d'arrivée pour qu'elles soient surjectives.

a) $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}-\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x+1} \end{array}$

b) $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x+4}{x^2} \end{array}$

c) $h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2} \end{array}$

d) $j : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+12}{x^2+1} \end{array}$

e) $k : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x+1;\ x^2+4x) \end{array}$

f) $l : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

21. a) Soient

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;\, y) & \longmapsto & (x^2+y^2;\, x^2-y^2) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u;\, v) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{u+v}{u+v-2} & \text{si } u+v \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } u+v = 2 \end{cases} \end{array}$$

Définir $g \circ f$.

Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective.

Déterminer B , sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de $g \circ f$, de sorte que $g \circ f$ soit surjective.

b) Même questions avec les applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & f(t) = (\sqrt{|t|}\,,\ t^2-4\,) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,,\, y) & \longmapsto & g(x\,,\, y) = (\,x^2\,,\ y-3x^2\,) \end{array}$$

22. Même donnée que l'exercice numéro 15. Choisir un ensemble de départ et (ou) d'arrivée afin qu'ainsi restreinte, ces applications soient bijectives.

23. Montrer que les applications suivantes sont injectives. Puis restreindre leur ensemble d'arrivée pour qu'elles soient bijectives et définir alors l'application réciproque.

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{10}{x^2+4} \end{array}$

b) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{x-3} \end{array}$

c) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{array}$

24. Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n\,,\, p) & \longmapsto & f(n\,,\, p) = 2^n\,(2p+1) \end{array}$$

a) Montrer que f est bijective.

b) Définir une application g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ telle que $g \circ f$ soit une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

25. Soient E et F deux ensembles.
f est une application de E vers F et g est une application de F vers E.
On note I_E l'application identité sur E et I_F l'application identité sur F.
Montrer :

a) $g \circ f = I_E \ \Rightarrow\ f$ est injective.

b) $f \circ g = I_F \ \Rightarrow\ f$ est surjective.

26. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

a) Démontrer l'implication suivante :

$$\forall\, A\,,\, B\, \subset\, E\,, \quad f \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad f(A) \cap f(B)\, \subset\, f(A \cap B)\,.$$

b) Montrer, en construisant un contre-exemple, que la proposition suivante est fausse :

$$\forall\, A\,,\, B\, \subset\, E\,, \quad f(A) \cap f(B)\, \subset\, f(A \cap B)\,.$$

27. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Démontrer l'implication suivante :

$$f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$$

28. Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et $A \neq \emptyset$ une partie fixée de E. On considère les applications :

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & C_E X \end{array} \qquad\qquad g:\ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A \cup X \end{array}$$

a) Définir $f \circ g$.

b) Montrer que $f \circ g$ n'est pas surjective.

29. Montrer par la géométrie élémentaire que toute rotation de centre O et d'amplitude φ est la composée de deux symétries d'axes a et b passant par O et tels que l'angle orienté entre a et b soit $\frac{\varphi}{2}$.

30. Etudier les bijections g^{-1}, $f \circ g$ et $g \circ f$ du plan, dans les cas suivants :

a) f est la translation de vecteur $\vec{a}$ et g est la translation de vecteur $\vec{b}$.

b) f est la symétrie d'axe a et g est la symétrie d'axe b.

c) f est la rotation de centre O et d'amplitude φ et g est la rotation de centre O et d'amplitude θ.

31. Soient r une rotation de centre O et d'amplitude φ, et s une symétrie d'axe a passant par O.

a) Montrer que $r \circ s \neq s \circ r$, et $(r \circ s)^2 = Id$.

b) Etudier les applications $(r \circ s)^{-1}$ et $r^2 \circ s^{-3}$.

32. Parmi les applications f de E dans F suivantes, lesquelles sont bijectives ?

a) $E = F$ est l'ensemble des points du plan,
f est la projection des points du plan sur une droite d donnée, parallèle à une direction $\vec{v}$ ($\vec{v}$ non-parallèle à d).

b) $E = F$ est l'ensemble des points d'un cercle,
f fait correspondre à tout point du cercle le point diamétralement opposé.

c) E est l'ensemble des points d'une sphère Σ, excepté un point fixé N,
F est le plan tangent à Σ en O, point diamétralement opposé à N,
f est la projection de centre N, des points de E sur F.

d) Même situation que c), mais on restreint E aux points de la demi-sphère contenant N.

Réponses

1. a) Non car $e \notin E$.

b) Non car d a deux images.

c) Oui.

d) Non car c n'a pas d'image.

2. a) Oui.

b) Non car $-2 \in \mathbb{Z}$ n'a pas d'image,
oui par exemple si $(x;\, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

c) Non car $\forall x \geq -1$, x a deux images dans $\mathbb{R}$ définies par $y^2 = x + 1$,
oui par exemple si $(x;\, y) \in [-1\,, \to [\, \times \mathbb{R}_-$ (image définie par $y = -\sqrt{x+1}$).

d) Oui.

3. $B = \{-4;\, -3;\, -2;\, -1;\, 0\}$.

a) $\mathcal{G}_f = \{(-2;\, 0);\, (-1;\, -2);\, (0;\, -2);\, (1;\, -2);\, (2;\, 0)\}$.

b) $f(\{-1;\, 0\}) = \{-2\}$, $\operatorname{Im} f = \{-2;\, 0\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \{-1;\, 0;\, 1\}$,
$f^{-1}(\{-3;\, -2;\, -1\}) = f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{0\}) = \{-2;\, 2\}$.

4. a) $\operatorname{Im} f =]-\infty\,;\, 1]$.

b) $f(\{2\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = \{3\}$,
$f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\}) = \{1\,;\, 3{,}5\}$.

c) $f([1\,;\,3]) = [-\frac{1}{2}\,;\, 1]$, $f([1\,;\,3[) = [-\frac{1}{2}\,;\, 0[\, \cup\,]0\,;\, 1]$,
$f^{-1}([-1\,;\,0]) = [0\,;\,2[\, \cup\, [3\,;\,4]$, $f^{-1}([-1\,;\,0[) = [0\,;\,2[\, \cup\,]3\,;\,4]$.

5. a) $\operatorname{Im} f =]-\infty\,;\, 1[\, \cup \{3\}$.

b) $f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$, $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

c) $f([1\,;\,2]) = [-\frac{1}{2}\,;\, 0[\, \cup \{3\}$, $f([1\,;\,2[) = [-\frac{1}{2}\,;\, 0[$,
$f([1\,;\,3]) = [-\frac{1}{2}\,;\, 1[\, \cup \{3\}$, $f([1\,;\,3[) = [-\frac{1}{2}\,;\, 0[\, \cup\,]0\,;\, 1[\, \cup \{3\}$,
$f^{-1}(]1\,;\,4[) = \{2\}$, $f^{-1}(]0\,;\,4[) = [2\,;\,3[$.

6. b) $\operatorname{Im} f = [-9/4\,, \to [$, $f(\,]-1\,,\, 0]) = [-9/4\,,\, -2]$,
$f^{-1}(A) =]-1\,,\, 0[\, \cup\,]0\,,\, 1[$,
$f^{-1}(B) = [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,\, -\frac{1}{2}[\, \cup\,]-\frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}\,,\, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$,
$f^{-1}(A \cap B) = \,]-1\,,\, -\frac{1}{2}[\, \cup\,]-\frac{1}{2}\,,\, 0[\, \cup\,]0\,,\, \frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}\,,\, 1[$,

c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
$f(f^{-1}(A)) = [-9/4\,,\, -2[$, $f(f^{-1}(A)) \neq A$ mais $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

9. $g^{-1}([1\,,\,4[) =]-1\,,\,0[\cup [1\,,\,2[\,.$

10. a) $\operatorname{Im} f = \{-2;\,0;\,2\}\,,\qquad \operatorname{Im} g = [-4;\,0[\cup \{2\}\,.$
c) $g^{-1}(F) =]2-\sqrt{2}\,,\,2[\cup]2\,,\,3]\,.$

11. a)
$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & c \\ & 4 & \longmapsto & c \\ & b & \longmapsto & d \\ & 3 & \longmapsto & d \end{array}$$

b) $(g\circ f)(A) = \{c;\,d\}\,.$

c) $(g\circ f)^{-1}(B) = \{b;\,3\}\,.$

12. $A = [-2\,,\,a]\,,\qquad a \in \mathbb{R}_+\,.$
$g\circ f:\ [-2\,,\,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $(g\circ f)(x) = \sqrt{-|x|+2}\,.$

13. a)
$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (-x;\,|-x^2+x|) \end{array}$$

b) $\operatorname{Im}(g\circ f) = \{(x'\,,\,y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' \in]-2\,,\,2]\ \text{ et }\ y' = |x'^2+x'|\,\}\,.$

14. a) $A =]\leftarrow,\,-1]\ \cup\ [1\,,\rightarrow[\,.$

b) $\operatorname{Im} f = \{(x';\,y') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid y' = x'(x'-2)\ \text{ et }\ x' \geq 2\}\,.$

c) $(g\circ f)^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{3/2};\,-1;\,1;\,\sqrt{3/2}\,\}\,.$

15. a) $\operatorname{Im} f = \{(x';\,y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = x'^2+2x'-8\,\}\,.$
b) $\operatorname{Im} g = [-\frac{1}{4}\,;\,+\infty[$
c) $\operatorname{Im} h =]-\infty\,;0]\ \cup\ [4\,;\,+\infty[$
d) $\operatorname{Im} j =]-\infty\,;-1] \cup]2\,;\,+\infty[$

16. a) $\operatorname{Im} f = \{(x';\,y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'+y' \geq 0 \text{ et } x'-y' \geq 0\}\,.$
b) $f^{-1}(K) = \{\sqrt{3}x - y = 0 \text{ ou } \sqrt{3}x + y = 0\}$
c) $f^{-1}(\{(10;\,8)\}) = \{(3;\,1);\,(-3;\,1);\,(3;\,-1);\,(-3;\,-1)\}\,.$

19. Aucune de ces applications est injective.

20. a) $\operatorname{Im} f =]-\infty;\,-4] \cup [0;\,+\infty[$
b) $\operatorname{Im} g = [\frac{15}{16};\,+\infty[$
c) $\operatorname{Im} h = [-1\,,\,1[$
d) $\operatorname{Im} j =]1;\,12]$

e) $\operatorname{Im} k = \{(x'; y') \in \mathbb{R}^2 |\, y' = (x'+3)(x'-1), x' \in \mathbb{R}\}$

f) $\operatorname{Im} l = [-1\,,\,1]$

21. a) $$g \circ f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;\, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

$B =]-\infty\,,\,0] \,\cup\, \{\frac{1}{2}\} \cup]1\,,\,+\infty[\,.$

b) $$g \circ f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (u;\, v) = (|t|;\, t^2 - 3|t| - 4) \end{array}$$

$B = \{(u;\, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0,\, v = (u+1)(u-4)\}$

23. a) $$f^{-1} : \begin{array}{ccl}]0;\, \frac{5}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{10-4x}{x}} \end{array}$$

b) $$g^{-1} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x-2}{x-1} \end{array}$$

c) $$h^{-1} : \begin{array}{ccl}]-\infty;\, 0] \cup]1;\, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- - \{-1\} \\ x & \longmapsto & -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \end{array}$$

26. b) Il faut choisir une application f non injective, par exemple :

f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, avec $A = [-2\,,\,-1]$ et $B = [1\,,\,2]$.

28. $$f \circ g : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & C_E A \,\cap\, C_E X \end{array}$$

30. a) g^{-1} est la translation de vecteur $-\vec{b}$,

$f \circ g = g \circ f$ est la translation de vecteur $\vec{a} + \vec{b}$.

b) g^{-1} est la symétrie d'axe b.

Si a et b se coupent en O, l'angle orienté entre a et b étant α, alors :

- $f \circ g$ est la rotation de centre O et d'amplitude -2α,
- $g \circ f$ est la rotation de centre O et d'amplitude 2α.

Cas particulier : si $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $f \circ g = g \circ f$ est la symétrie centrale de centre O.

Si a et b sont parallèles, avec a translatée de b de vecteur $\vec{v}$, alors :

- $f \circ g$ est la translation de vecteur $2\vec{v}$,
- $g \circ f$ est la translation de vecteur $-2\vec{v}$.

c) g^{-1} est la rotation de centre O et d'amplitude $-\theta$,
$f \circ g = g \circ f$ est la rotation de centre O et d'amplitude $\varphi + \theta$.

31. b) $(r \circ s)^{-1}$ est la symétrie d'axe b telle que l'angle orienté entre a et b vaut $\dfrac{\varphi}{2}$.
$r^2 \circ s^{-3}$ est la symétrie d'axe d telle que l'angle orienté entre a et d vaut φ.

32. a) Non, car deux points M et P tels que (MP) soit parallèle à $\vec{v}$ ont même image.

b) Oui.

c) Oui.

d) Non, car si M' appartient au disque ouvert dont la frontière est l'image de l'équateur, alors $(NM') \cap E = \emptyset$.