Nous commençons cette série par montrer que le rang ligne d'une matrice est égal au rang colonne (ce qui sera démontré dans le MOOC dans le chapitre 6 (§6.6 et 6.7) et a été démontré dans le cours le 22.10.2020.)

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $T_A((\alpha_1,\dots,\alpha_n)) = A \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. On note que $\ker(T_A) = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\}$ qui est l'ensemble des solutions du système homogène associé à la matrice A. Donc la dimension du noyau de T_A est égal au nombre de variables libres dans l'ensemble des solutions, qui est égal à

$$(n - \text{le nombre de pivots dans une forme échelonnée de } A).$$

Le nombre de pivots dans une forme échelonnée de A est exactement égal au rang ligne de A.

Donc

$$\dim(\ker(T_A)) = n - \text{ rang ligne de } A.$$

On souhaite utiliser le théorème du rang donc on veut aussi faire intervenir la dimension de l'image de T_A. Soit $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ la base usuelle de $\mathbb{R}^n$ et soit C_i la i-ème colonne de A. Alors l'image de T_A est égale à l'espace $\mathrm{Vect}\,(T_A(e_1),\dots,T_A(e_n))$. On constate que $A \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = C_1$, $A \cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = C_2$, et ainsi de suite, et donc $\mathrm{Im}\,(T_A)$ est l'espace colonnes de A (où on identifie l'ensemble des vecteurs colonnes $\{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} \mid \beta_i \in \mathbb{R}\}$ avec $\mathbb{R}^m$.

Maintenant on applique le théorème du rang :

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Im}\,(T_A) + \dim \ker(T_A) = \text{ rang colonne de } A + n - \text{ rang ligne de } A,$$

et on déduit que

$$n = \text{ rang colonne de } A + n - \text{ rang ligne de } A,$$

et de suite

$$\text{rang colonne de } A = \text{ rang ligne de } A.$$

Par conséquent de ce qui précède, désormais nous parlerons du *rang* d'une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Le *rang* de A est le rang ligne de A qui est aussi le rang colonne de A.

Exercice 1. *Donner un exemple, ou expliquer pourquoi il n'existe aucun exemple, de*

a) une matrice 3×4 *dont le rang est 3.*

b) une matrice 4×3 *dont le rang est 3.*

c) une matrice 2×3 *dont le rang est 3.*

d) une matrice échelonnée de dimension 4×4 *dont le rang est 3.*

e) une matrice avec plus de lignes que de colonnes et dont le rang est égal au nombre de colonnes.

f) une matrice avec plus de lignes que de colonnes et dont le rang est égal au nombre de lignes.

Exercice 2. *1. Donner un exemple d'une transformation linéaire $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ qui n'est ni injective ni surjective.*

2. Donner un exemple d'une transformation linéaire $S : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ qui est injective et non surjective.

3. Trouver une condition sur des entiers positifs n et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ qui soit injective.

4. Trouver une condition sur des entiers positifs n et m pour qu'il existe une transformation linéaire $\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ qui soit surjective.

Exercice 3. *A l'aide de l'information donnée et sachant que la transformation T est linéaire, déterminer dans chacun des cas ci-dessous la dimension de $\ker T$.*

a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ est de rang 3.

b) $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ est de rang 1.

c) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ayant pour image $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. *Soit $\varphi : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ l'application linéaire définie par*

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\Big) = (a+b, c+d, a+b+c+d, e, f).$$

Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ et trouver une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ et de $\ker(\varphi)$.

Exercice 5. *(1) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :*

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, T((1,0)) = (1,2,0,5)$ et $T((0,1)) = (3,-6,1,0)$.

(ii) $\mathbf{T} : M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R}),\ \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(iii) La rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

(2) Vrai-faux : Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Alors, si T est surjective alors elle est aussi injective.

Exercice 6. *Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $T(A) = A + A^T$.*

1. Déterminer si T est linéaire.

2. Déterminer si T est surjective.

3. Déterminer si T est injective.

4. Déterminer l'ensemble W des matrices qui vérifient $T(A) = 0$ et démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 7. *Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.*

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Exercice 8. *Vrai-faux*

(1) Il existe une application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ telle que $T((1,0,0,0)) = (1,0,0,0,0)$ et $T((1,2,3,4)) = (0,1,0,0,0)$.

(2) *Si les colonnes d'une matrice A de taille $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$, alors il y a un pivot dans chaque colonne de la forme échelonnée réduite de la matrice A.*

(3) *Si la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est une famille linéairement indépendante, alors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est aussi une famille linéairement indépendante.*

(4) *L'équation homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet une solution si et seulement si elle possède (au moins) une inconnue libre.*

(5) *Les colonnes d'une matrice A de taille $m \times n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

(6) *Le cercle d'équation $(x-10)^2 + y^2 = 100$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

(7) *La demi-droite $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}$.*

(8) *Le sous-ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient les relations*

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 2$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

(9) *Le sous-ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^5$ qui vérifient les relations*

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 0,\ 10x_4 - 11x_5 = x_3$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 9. *(a) Soit* $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *l'application linéaire "trace" définie par*

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

Le noyau de Tr *est un sous-espace de* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *de dimension*

☐ 1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4.

(b) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *l'application linéaire "trace" définie à la question précédent. Les matrices suivantes forment une base du noyau de* Tr *:*

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 10. *Une matrice est dite* triangulaire *si elle satisfait à une des conditions suivantes :*

— $A_{ij} = 0$ *pour tout $i > j$; (on dit que$A$ est* triangulaire supérieure.

— $A_{ij} = 0$ *pour tout $i < j$, on dit que A est* triangulaire inférieure

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 0 & \frac{29}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 29 & 9 \end{pmatrix}.$$

Trouver des matrices élémentaires E_1, E_2, E_3, E_4 telles que :

1. $E_1 A = B$
2. $E_2 E_3 B = C$
3. $E_4 D$ *soit triangulaire supérieure.*

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Soient V un espace vectoriel et $\varphi : V \to V$ une application linéaire telle que* $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

1. *Démontrer que* $\varphi \circ \varphi = 0$ *(l'application nulle).*
2. *Démontrer que si* V *est de dimension finie alors* $\dim V$ *est un nombre pair.*
3. *Donner un exemple d'une application linéaire* T *d'un espace vectoriel* E *telle que* $T \circ T = 0$ *mais que* $\ker T \neq \operatorname{Im} T$.
4. *Donner un exemple d'une application linéaire* T *d'un espace vectoriel* E *telle que* $\operatorname{Im} T = \ker T$.