Exercice 1* (15 min) **: freinage d'urgence**

1. On a $a = \gamma t$ et a[m·s^{-2}] , d'où γ[m·s^{-3}]. Le camion freine donc $\gamma < 0$.
2.

$$a(t) = \gamma t$$
$$v(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{6}\gamma t^3 + v_0 t + x_0$$

A $t = 0$, $x_0 = 0$ et on a

$$x(t) = \frac{1}{6}\gamma t^3 + v_0 t$$

3. A $t = t_f$,

$$\text{on a : } \begin{cases} v_f = 0 = \frac{1}{2}\gamma t_f^2 + v_0 \\ x_f = d = \frac{1}{6}\gamma t_f^3 + v_0 t_f \end{cases}$$

L'inconnue est γ et on cherche à éliminer t_f.

$$\begin{aligned} t_f^2 &= -\frac{2v_0}{\gamma} \\ t_f &= (2v_0)^{\frac{1}{2}}(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \\ d &= \frac{1}{6}\gamma(2v_0)^{\frac{3}{2}}(-\gamma)^{-\frac{3}{2}} + v_0(2v_0)^{\frac{1}{2}}(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \\ d &= -\frac{2\sqrt{2}}{6}v_0^{\frac{3}{2}}(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2}v_0^{\frac{3}{2}}(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \\ d &= \frac{2\sqrt{2}}{3}v_0^{\frac{3}{2}}(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \\ (-\gamma)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2\sqrt{2}}{3d}v_0^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

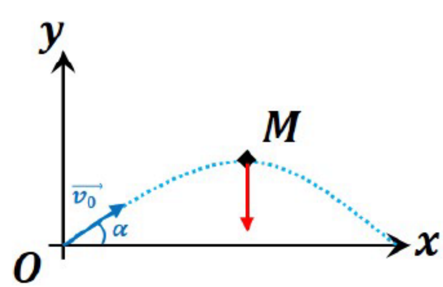
Soit finalement,

$$\gamma = \frac{-8v_0^3}{9d^2}$$

Exercice 2* (30 min) **: Boules de neige**

a) On a un tir balistique : c'est-à-dire que l'accélération est constante, égale à $\vec{g}$. La boule de neige est initialement à l'origine du repère en O, et a une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α avec le sol.

Pour trouver l'apogée de la trajectoire, on cherche les équations régissant la vitesse de la boule de neige notée M, que l'on projette sur les axes du repère (O, x, y) comme illutré ci-contre. M sera à l'apogée de sa trajectoire à l'instant t_{ap} quand sa vitesse est purement horizontale, c'est-à-dire quand $\dot{y}(t_{ap}) = 0$.



$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} et \begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$\dot{y}(t_{ap}) = 0 \Leftrightarrow -gt_{ap} + v_0 \sin\alpha = 0$. On trouve donc : $t_{ap} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

Soit maintenant h_{max} la hauteur maximale atteinte par le projectile. On intègre les coordonnées de la vitesse par rapport au temps pour obtenir les équations du mouvement. On calcule ensuite $h_{max} = y(t_{ap})$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} et \begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

$h_{max} = y(t_{ap}) = -\frac{g{t_{ap}}^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t_{ap} = -\frac{g(\frac{v_0 \sin\alpha}{g})^2}{2} + v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Finalement :

$$h_{max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

Pour calculer la portée p du projectile, il faut d'abord calculer le temps de vol du projectile, t_{vol}, que l'on trouve en écrivant $y(t_{vol}) = 0 = -\frac{g{t_{vol}}^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t_{vol}$. Cette équation a deux solutions, dont une triviale, $t = 0$. On trouve la deuxième solution, donc non nulle, en divisant par t_{vol} :

$$t_{vol} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Finalement, la portée est donnée par la grandeur $p = x(t_{vol}) = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, soit :

$$p = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

L'équation de la trajectoire s'écrit $y = f(x)$. En remplaçant dans l'expression de $y(t)$, le temps par son expression déduite de l'équation du mouvement selon x on trouve :

$y(x) = -\frac{g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2}{2} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$, donc on trouve l'équation d'une parabole :

$$y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + x \tan\alpha$$

b)

1. On peut écrire les expressions des portées de chaque boule : $p_1 = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$ et $p_2 = \frac{{v_1}^2 \sin 2\beta}{g}$. Pour que les deux boules tombent au même endroit, on doit avoir $p_1 = p_2$, soit : $\frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{{v_1}^2 \sin 2\beta}{g}$. La condition sur v_1 est donc :

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}}$$

2. On cherche maintenant à ce que les boules aient le même temps de vol (cf. question 1. Pour la formule) : $t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = t_2 = \frac{2v_1 \sin\beta}{g}$. Donc finalement on trouve la condition sur v_1 :

$$v_1 = v_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

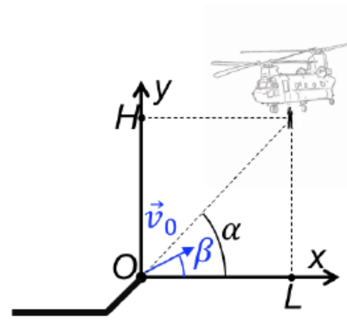
c) On note d et h les coordonnées de la tête à viser. Calculons donc le temps le temps qu'il faut à la boule pour parcourir la distance d. $d = v_0 \cos\alpha\, T \Rightarrow T = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$. On réinjecte ce temps dans l'expression de y et on cherche v_0 pour $y = h$: $h = -\frac{gT^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, T = -\frac{g\left(\frac{d}{v_0 \cos\alpha}\right)^2}{2} + v_0 \sin\alpha \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$. On peut ainsi finalement trouver la condition sur v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2d \cos\alpha \sin\alpha - 2h \cos^2\alpha}}$$

Exercice 3** (25 min) **: James Bond parabolique**

On met l'origine du repère au point de départ de la moto de l'amie de James. Soit α l'angle entre la rampe et le sol, et β l'angle entre $\overrightarrow{v_0}$ et le sol. D'après le schéma, on a : $\tan\alpha = \frac{H}{L}$.

On suppose ici qu'a priori le vecteur vitesse ne vise pas Bond.
On va montrer qu'il faut β=α pour que la moto récupère Bond.



Pour résoudre les équations de mouvement on considère la moto et James Bond comme des points matériels soumis seulement à la gravité et à aucune autre force. Pour chaque sous-système, on projette l'accélération selon les axes du repère (O, x, y).

❒ Système = moto

Au temps $t = 0$, la moto est à l'origine du repère, en O, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$. On intègre successivement l'accélération puis la vitesse pour trouver les équations du mouvement de la moto.

$$\begin{cases} \ddot{x}_m(t) = 0 \\ \ddot{y}_m(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m(t) = \int_0^t 0 = cte = \dot{x}_m(t=0) = v_0\cos\beta \\ \dot{y}_m(t) = \int_0^t -g\,dt = -gt + cte = -gt + \dot{y}_m(t=0) = -gt + v_0\sin\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m(t) = v_0\cos\beta\, t + cte = v_0\cos\beta\, t + x_m(t=0) = v_0\cos\beta\, t \\ y_m(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0\sin\beta\, t + cte = -\frac{gt^2}{2} + v_0\sin\beta\, t + y_m(t=0) = -\frac{gt^2}{2} + v_0\sin\beta\, t \end{cases}$$

❒ Système = James Bond

Au temps $t = 0$, James est au niveau de l'avion, donc au point de coordonnées (L, H), et avec une vitesse nulle. De la même façon que pour la moto, on intègre l'accélération deux fois pour avoir les équations du mouvement de James, en prenant soin de remplacer par les conditions initiales correspondantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{JB}(t) = 0 \\ \ddot{y}_{JB}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{JB}(t) = 0 \\ \dot{y}_{JB}(t) = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{JB}(t) = L \\ y_{JB}(t) = -\frac{gt^2}{2} + H \end{cases}$$

Si James Bond peut se mettre sur le siège arrière de la moto, c'est qu'il existe un temps T non nul tel que la moto et lui se trouvent à la même position, et pour lequel on peut donc écrire : $\begin{cases} x_m(T) = x_{JB}(T) \\ y_m(T) = y_{JB}(T) \end{cases}$. Alors on a :

$$\begin{cases} v_0\cos\beta\, T = L \\ -\frac{gT^2}{2} + v_0\sin\beta\, T = -\frac{gT^2}{2} + H \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} v_0\cos\beta\, T = L \\ v_0\sin\beta\, T = H \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T = \frac{L}{v_0\cos\beta} \\ \tan\beta = \frac{H}{L} \end{cases}$$

On trouve que ce système d'équations ne peut avoir une solution que si :

$$\tan\beta = \frac{H}{L} = \tan\alpha\text{ , donc il faut que } \beta = \alpha$$

On vérifie donc bien que si l'amie de James part d'une rampe qui vise l'avion elle réussira à le sauver.

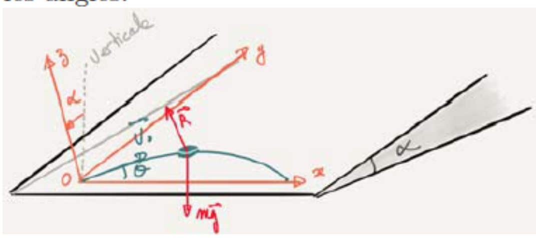
Condition sur la norme de la vitesse v_0 :

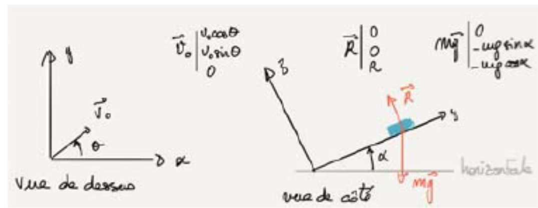
Cette démonstration suppose que la moto et James Bond restent en régime balistique jusqu'à leur rencontre… on peut imaginer un tel scénario en plaçant la rampe sur une haute falaise. Par contre, si la scène a lieu dans un désert plat il faut éviter que notre héro rencontre le sol avant la moto ! Dans ce cas, cela revient à dire que la portée de la moto doit être supérieure à L (voir exercice 1 pour le calcul de la portée). Cet argument impose une vitesse minimale à la moto :

$$p = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g} \geq L \Longrightarrow v_0 \geq \left(\frac{gL}{\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = v_{min}$$

Exercice 4** (20 min) **: Parabole sur plan incliné**

Ici la difficulté principale est de bien visualiser le problème en 3 dimensions. On a choisi un repère tel que $\vec{v}_0$ est situé dans le plan (Oxy) et $\vec{g}$ dans la plan (Oyz). De plus, on voir que le plan de la table est le plan (Oxy) Faisons les dessin dans ces plans pour visualiser les angles.





$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} = m\vec{g} + \vec{R}$$

$$m\vec{a}\begin{cases} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{cases} + \vec{R}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ R \end{cases}$$

Le palet reste sur la table donc $a_z = 0$

$$v_z(t) = v_{0z} = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = z_0 = 0$$

et de plus $R - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow R = mg\cos\alpha$.

Dans le plan $(0, x, y)$:

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} 0 \\ -g\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(t)\begin{cases} v_{0x} \\ -(g\sin\alpha)t + v_{0y} \end{cases} = \begin{cases} v_0\cos\theta \\ -(g\sin\alpha)t + v_0\sin\theta \end{cases}$$

Où on a trouvé $\vec{v}(t)$ par intégration. $\vec{r}(t)$ se trouve aussi par intégration et avec $\vec{r}(0) = \vec{0}$

$$\vec{r}(t)\begin{cases} (v_0\cos\theta)t \\ -\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + (v_0\sin\theta)t \end{cases}$$

Dans (O, x, y, z) $\vec{r}(t) = \begin{cases} (v_0\cos\theta)t = x(t) \\ -\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + (v_0\sin\theta)t = y(t) \\ 0 = z(t) \end{cases}$

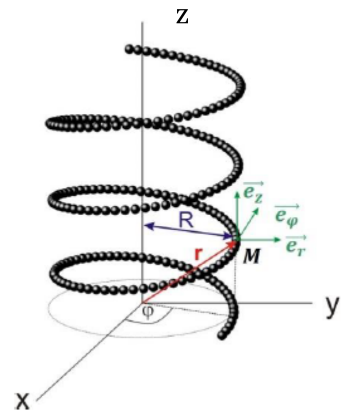
L'equation de la trajectoire est donée par $z = 0$ et $y(x)$:

$$x = (v_0\cos\theta)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}(g\sin\alpha)\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} + v_0\sin\theta\frac{x}{v_0\cos\theta} = -\frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha}{v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta x$$

On trouve, comme dans le cours, l'équation d'une parabole. Ici $(g\sin\alpha)$ "remplace" g ce qui revient à simuler une gravité plus faible.

Exercice supplémentaire S3.1* (25 min) **: Vis d'Archimède**



1.

a) Voir schéma ci-contre.

b) Pour traiter le problème, les coordonnées cylindriques sont les mieux adaptées. Dans le repère cylindrique, le point M est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r} + h\varphi\overrightarrow{e_z}$

c) Pour calculer la vitesse on dérive la position par rapport au temps, ce qui donne : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + h\varphi\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt} + \frac{d(h\varphi)}{dt}\overrightarrow{e_z} = R\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + h\dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$. Comme nous l'avons démontré dans la Série 2, $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$. Donc finalement on trouve la vitesse du point M :

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + h\dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}}$$

On dérive une nouvelle fois par rapport au temps pour obtenir l'accélération :
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + R\dot{\varphi}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} + h\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$. Or $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_r}$ (cf. Série 2), donc finalement on a :

$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + h\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_z}}$$

2. Soit α l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ comme illustré sur le schéma ci-contre. Si on note v_z et v_φ les composantes du vecteur vitesse sur les axes $\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$, respectivement, on a $\tan\alpha = \frac{v_z}{v_\varphi}$. Avec l'expression de $\vec{v}$ trouvée à la question précédente, on a donc :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h}{R} = cte}$$

On trouve bien que α est constant, que le mouvement soit uniforme ou accéléré.

3.

a) Si le mouvement est uniforme, alors on peut écrire $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\varphi}^2(h^2 + R^2)} = cte$, ce qui implique que $\dot{\varphi} = cte$. On note alors $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Donc $\ddot{\varphi} = 0$, et on trouve pour l'accélération :

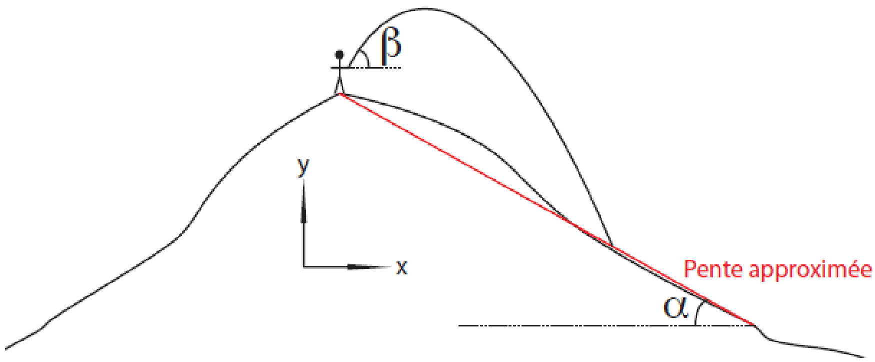
$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\varphi}_0{}^2\overrightarrow{e_r}}$$

$\vec{a}$ est portée par $\overrightarrow{e_r}$ donc elle est dans le plan (Oxy), et passe par l'axe (Oz).

b) Pour calculer le rayon de courbure, il est plus simple d'utiliser un repère de Frenet noté généralement $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n})$, avec $\overrightarrow{e_t}$ vecteur tangentiel, et $\overrightarrow{e_n}$ vecteur normal. Par rapport aux coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{e_n} = -\overrightarrow{e_r}$. Donc dans le nouveau repère on a : $\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{e_n}$, avec ρ_c le rayon de courbure. Par identification, on trouve donc $\rho_c = \frac{v^2}{R\dot{\varphi}_0{}^2}$. Comme vu à la question précédente, $v^2 = \dot{\varphi}_0{}^2(h^2 + R^2)$, donc finalement, on trouve le rayon de courbure :

$$\boxed{\rho_c = \frac{h^2 + R^2}{R}}$$

Exercice supplémentaire S3.2* (25 min) **: Tir parabolique là-haut sur la montagne**



Les équations du mouvement sont :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \\ -gt + v_0 \sin\beta \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\beta\, t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\beta)t \end{pmatrix}$$

En remplaçant $t = \frac{x}{v_0 \cos\beta}$ dans la deuxième équation de la position, on obtient l'équation de la parabole de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\beta}\right)^2 + (v_0 \sin\beta)\frac{x}{v_0 \cos\beta} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\beta}x^2 + x\tan\beta$$

Le sol est une droite d'équation $y = -x\tan\alpha$.
L'intersection du sol et de la trajectoire de la pierre donne :

$$-x\tan\alpha = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}x^2 + x\tan\beta$$

d'où l'on tire :

$$x_I = (\tan\alpha + \tan\beta)\frac{2v_0^2\cos^2\beta}{g}$$

On demande à maximiser x_I en fonction de β :

$$\frac{\mathrm{d}x_I}{\mathrm{d}\beta} = \frac{2v_0^2}{g}\tan\alpha(-2\sin\beta\cos\beta) + \frac{2v_0^2}{g}[-\sin^2\beta + \cos^2\beta] = 0$$

soit

$$2\tan\alpha\sin\beta\cos\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$

En utilisant les relations

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

on obtient :

$$\tan\alpha\sin 2\beta = \cos 2\beta$$

qui se simplifie en

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan 2\beta}$$

En inversant cette relation, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\arctan\left[\frac{1}{\tan\alpha}\right]}$$