Algèbre Linéaire Tissot

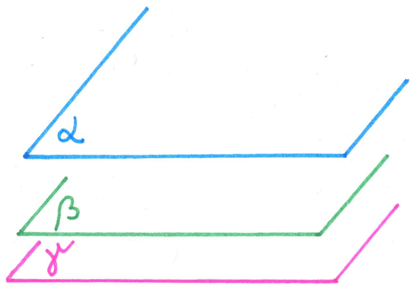
Semestre de printemps 2019

Corrigé 12

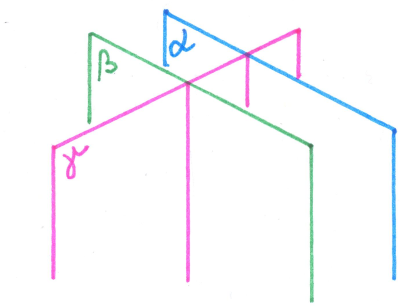
Rang-Systèmes : exercice 9

(a) On interpréte l'intersection de ces 3 plans comme un système d'équations dont on discute l'existence éventuelle de solutions au moyen de la notion de rang.

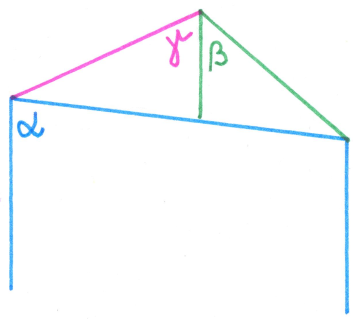
On veut $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$, géométriquement on a donc une des trois situations suivantes :



Les trois plans sont parallèles.



Deux plans sont parallèles et le troisième les coupe.



Les trois plans se coupent 2 à 2.

On considère le système noté (S), formé par les équations des plans α, β et γ :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ A\,X = C$$

$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (S)$ n'admet pas de solution $\quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}\, B \neq \text{rg}\, A$ où $B = (A\ C)$

On commence par calculer le déterminant de A, ce qui permet de connaître le nombre de cas à discuter en fonction du paramètre k.

$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,, \mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$. On calcule donc son déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & k+3 \\ 1 & k & 3+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3-k & 0 \\ 1 & k & 3+k \end{vmatrix} = (k+3)\,(2-k)$$

Il y a 3 cas à examiner en fonction des valeurs du paramètre k. Pour chaque cas, on détermine si le rang de B est égal au rang de A.

- $\mathbf{m} \notin \{\mathbf{-3}\,, \mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, A = 3 = \text{rg}\, B$

  car $B = (A \quad C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 4\,, \mathbb{R})$ et rg $B \leq 3$

  On peut donc extraire de B le déterminant de A, d'ordre 3, qui est différent de 0. Ainsi le rang de B est 3.
  Le système admet des solutions.

  En fait dans un tel cas (nombre d'équations = nb d'inconnues = rang de A), on a nécessairement que $\text{rg}\, B = \text{rg}\, A$!

- $\mathbf{k = -3} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, A \leq 2$

  La matrice devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\text{rg}\, A = 2$

  On choisit P comme déterminant principal.

  Il y a un seul déterminant caractéristique car :
  (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

  Il est d'ordre 3. D'où :

  $$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}\, B \neq \text{rg}\, A$$

  Le système n'admet pas de solutions.

- $\mathbf{k = 2} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{rg}\, A \leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\text{rg}\, A = 2$

  On choisit P comme déterminant principal.

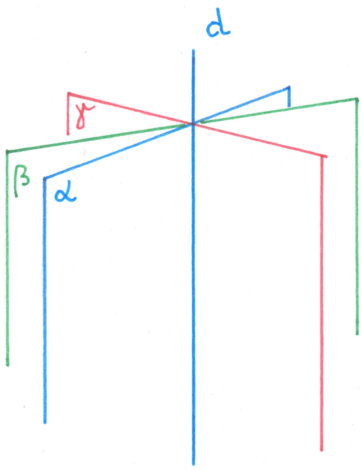
  Il y a un seul déterminant caractéristique car :
  (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

  Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$$

Le système admet des solutions.

(b) L'intersection des 3 plans est une droite dont les équations dépendent d'un paramètre. Géométriquement on a la situation suivante :



On considère le système noté (S), formé par les équations des plans α , β et γ :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A\,X = C$

$\alpha\ \cap\ \beta\ \cap\ \gamma = d$
$\Leftrightarrow$
(S) admet des solutions, donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$ où $B = (A\ C)$
et elles dépendent d'un seul paramètre.

On a :
nombre de paramètres = nombre d'inconnues - rang de A = 3 - rg $A = 1 \Rightarrow$ rg $A = 2$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha\ \cap\ \beta\ \cap\ \gamma = d \quad & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad k = 2 \quad \text{(voir partie a))} \end{aligned}$$

Pour $k = 2$, la matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

et on a choisit le déterminant principal suivant : $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

Le système se ramène aux équations principales :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales x et y (définies par P), en fonction du paramètre z (inconnue non principale).

$$(S') \; : \; \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1+z \\ 2x & + & 3y & = & 3-2z \end{array} \right. \qquad \text{et on pose : } \; z = \beta \in \mathbb{R}$$

$$(S'') \; : \; \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1+\beta \\ 2x & + & 3y & = & 3-2\beta \\ & & z & = & \beta \end{array} \right.$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = 1$). On détermine x et y en utilisant les formules :

$$x \;=\; \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1+\beta & 1 \\ 3-2\beta & 3 \end{vmatrix} \;=\; 5\beta\,, \qquad y \;=\; \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1+\beta \\ 2 & 3-2\beta \end{vmatrix} \;=\; 1-4\beta$$

D'où l'ensemble des solutions, c'est-à-dire les équations paramétriques de la droite d :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\beta \\ 1-4\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Remarque :
Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection des plans α et β. Il suffit de chercher un point commun aux 2 plans et un vecteur directeur de d ($\vec{d} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$) !

Rang-Systèmes : exercice 10

(a) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = 0\,,\; A \in \mathbb{M}(3\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) \; : \; \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S) \; : \; A\,X = 0 \;\text{ avec }\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :
Comme $C = 0$, il est évident que rg B = rg A : ce système admet *toujours* au moins la solution $X = 0$.

On détermine le rang de A.
$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,, \mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 11 \end{vmatrix} \;=\; -7 \neq 0$$ donc rg $A = 3 = $ rg (S)

(S) est un sytème de Cramer de rang 3 ($n = p = 3 = $ rg A).

Il admet pour solution unique $X = A^{-1}\,0 = 0$

c'est-à-dire : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(3\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S)\ :\ A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A.

$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ donc rg $A = 3$

(S) est un système de Cramer de rang 3 ($n = p = 3 = \text{rg } A$).

Il admet pour solution unique $X = A^{-1}C$, calculée grâce aux formules de Cramer.

$x = -\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\quad y = -\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $\quad z = -\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -3$

D'où la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = 0$, $A \in \mathbb{M}(3\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S)\ :\ A\,X = 0 \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A.

$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ donc rg } A \leq 2$$

Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc rg $A = 2$

Le rang de (S) est donc 2 et $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ est choisi comme déterminant principal.

(d) Comme $C = 0$, le système admet des solutions et il est équivalent aux équations principales définies par $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$:

$$(S') : \begin{cases} 2x + 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales x et z (définies par P), en fonction du paramètre y (inconnue non principale).

$$(S') : \begin{cases} 2x + z = -5y \\ x + z = 2y \end{cases} \quad \text{et on pose : } y = \beta \in \mathbb{R}$$

$$(S'') : \begin{cases} 2x + z = -5\beta \\ x + z = 2\beta \\ y = \beta \end{cases}$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = 1$). On détermine x et z en utilisant les formules :

$$x = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -5\beta & 1 \\ 2\beta & 1 \end{vmatrix} = -7\beta, \qquad z = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & -5\beta \\ 1 & 2\beta \end{vmatrix} = 9\beta$$

D'où l'ensemble des solutions : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\beta \\ \beta \\ 9\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R}$

(e) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = 0$, $A \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) : \begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ -6x + 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S) : A\,X = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que le rang de A est 1, ce qui est le rang de (S), les 3 lignes étant proportionnelles.

On choisit $P = |1|$ comme déterminant principal.

Comme $C = 0$, le système admet des solutions et il est équivalent à l'équation principale (définie par P).

(S') : $-2x + {\color{red}y} + 3z = 0$ et on pose $x = \alpha\,,\ z = \beta \in \mathbb{R}$

que l'on résoud par rapport à l'inconnue principale y (définie par P), en fonction des paramètre x et z (inconnues non principales).

(S'') : ${\color{red}y} \ = \ 2x - 3z$ et on pose $x = \alpha\,,\ z = \beta \in \mathbb{R}$

$$(S'')\ \left\{\begin{array}{ccc} {\color{red}y} & = & 2\alpha - 3\beta \\ x & = & \alpha \\ z & = & \beta \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha - 3\beta \\ \beta \end{pmatrix} \ = \ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$$

(f) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C\,,\ A \in \mathbb{M}(3{\times}3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S)\ :\ A\,X = C \ \text{ avec } \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A.

$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

$$\det A \ = \ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & -2 \end{vmatrix} \ = \ 0$$ donc rg $A \leq 2$

Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P \ = \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \ \neq \ 0$

donc rg $A = 2 =$ rg (S).

On choisit P comme déterminant principal.

Il est nécessaire de se poser la question si ce système possède des solutions (car $C \neq 0$ et rg $A < 3$).

Le système admet des solutions si et seulement si rg B = rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{rg } B \leq 3$$

Or rg B = rg A ssi tous les déterminants caractéristiques construits sur ${\color{red}P \ = \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}$

sont nuls.
Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de lignes de A) - (rang de A) $= 3-2=1$

Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 10 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 10 \\ 5 & -7 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg } B \neq \text{rg } A$$

Le système n'admet pas de solution.

(g) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(3\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) \;:\; \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas : nombre d'équations (n) = nombre d'inconnues $(p) = 3$.

$$(S) \;:\; A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A.
$A \in \mathbb{M}(3\times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{donc rg } A \leq 2$$

Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc rg $A = 2 = \text{rg }(S)$.

On choisit P comme déterminant principal.
Il est nécessaire de se poser la question si ce système possède des solutions (car $C \neq 0$ et rg $A < 3$).
Le système admet des solutions si et seulement si rg B = rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rg } B \leq 3$$

Or rg B = rg A ssi tous les déterminants caractéristiques construits sur $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ sont nuls.
Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de lignes de A) - (rang de A) $= 3-2=1$

Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 0$$

Le système admet des solutions et il est équivalent aux équations principales.
Déterminer les solutions du système.
On considère le système (S') formé des équations principales :

$$(S') \;:\; \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales x et y (définies par P), en fonction du paramètre z (inconnue non principale).

$$(S') \;:\; \begin{cases} 2x + y = 1 + 3z \\ 3x + 2y = 2 + 2z \end{cases} \qquad \text{et on pose : } \; z = \beta \in \mathbb{R}$$

$$(S'') \;:\; \begin{cases} 2x + y = 1 + 3\beta \\ 3x + 2y = 2 + 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = 1$).
On détermine x et z en utilisant les formules :

$$x \;=\; \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1+3\beta & 1 \\ 2+2\beta & 2 \end{vmatrix} \;=\; 4\beta\,, \qquad y \;=\; \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 1+3\beta \\ 3 & 2+2\beta \end{vmatrix} \;=\; 1 - 5\beta$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$X \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4\beta \\ 1-5\beta \\ \beta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Rang-Systèmes : exercice 11

(a) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = 0\,,\; A \in \mathbb{M}(4\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) \;:\; \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 17y + 4z = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas : nombre d'équations $(n = 4) \neq$ nombre d'inconnues $(p = 3)$.

$$(S) \;:\; A\,X = 0 \;\text{ avec }\; A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A : $A \in \mathbb{M}(4 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

Si il existe au moins un déterminant non nul d'ordre 3 extrait de A alors son rang est 3. On calcule :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \;=\; 0$$

Il faut donc continuer ! Dans le pire des cas (rg $A < 3$) il faut encore calculer 3 déterminants. On change donc de méthode !

On considère les 3 vecteurs colonne de la matrice : $A = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

Il est relativement facile de voir que : $\vec{b} = -11\,\vec{a} + 7\,\vec{c}$ et que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ne sont pas colinéaires.

Donc : rg $A = 2 =$ rg (S).

On choisit le déterminant d'ordre 2 suivant comme déterminant principal :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Le système étant homogène $(C = 0)$, il admet des solutions et il est équivalent aux équations principales définies par P,

$$(S') : \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{et on pose : } z = \beta \in \mathbb{R}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales x et y (définies par P), en fonction du paramètre z (inconnue non principale).

$$(S'') : \begin{cases} x + 3y = -2\beta \\ 2x - y = -3\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = -7$). On détermine x et y en utilisant les formules :

$$x = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} -2\beta & 3 \\ -3\beta & -1 \end{vmatrix} = -\frac{11}{7}\beta, \qquad y = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & -2\beta \\ 2 & -3\beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}\beta$$

D'où l'ensemble des solutions : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11\beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

On peut aussi déterminer l'ensemble des solutions en considérant (S'') comme l'intersection de 2 plans α et β passant par l'origine. L'ensemble des solutions est donc une droite d ; elle passe par O et a pour vecteur directeur

$$\vec{d} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(b) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(4\times 3, \mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas : nombre d'équations $(n = 4) \neq$ nombre d'inconnues $(p = 3)$.

$$(S)\ :\ A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\ , \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A : $A \in \mathbb{M}(4 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

Si il existe au moins un déterminant non nul d'ordre 3 extrait de A alors son rang est 3. On calcule :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 = P$$

Donc : rg $A = 3 =$ rg (S) et on choisit ce déterminant P comme principal.
Il est nécessaire de se poser la question si ce système possède des solutions (car $C \neq 0$ et rg $A = 3 < 4$).
Le système admet des solutions si et seulement si rg $B =$ rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad \text{rg } B \leq 4$$

Or rg $B =$ rg A ssi tous les déterminants caractéristiques construits sur $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ sont nuls.
Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de lignes de A) - (rang de A) $= 4 - 3 = 1$

Il est d'ordre 4. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4\,(-6+7) \neq 0$$

$\Leftrightarrow \quad$ rg $B \neq$ rg A

Le système n'admet pas de solution.

(c) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C\,,\ A \in \mathbb{M}(4{\times}3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ -2x & + & y & + & 4z & = & 4 \\ 10x & - & 5y & - & 6z & = & -10 \end{array}\right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations $(n = 4) \neq$ nombre d'inconnues $(p = 3)$.

$$(S)\ :\ A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 10 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A : $A \in \mathbb{M}(4 \times 3\,, \mathbb{R})$ et $\text{rg}\ A \leq 3$.

On considère les 3 vecteurs colonne de la matrice : $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$.

Il est évident que : $\vec{a} = -2\,\vec{b}$ et que $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas colinéaires.

Donc : $\text{rg}\ A = 2 = \text{rg}\ (S)$.

On choisit le déterminant d'ordre 2 suivant comme déterminant principal :

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Il est nécessaire de se poser la question si ce système possède des solutions (car $C \neq 0$ et $\text{rg}\ A = 2 < 4$).

Le système admet des solutions si et seulement si $\text{rg}\ B = \text{rg}\ A$ où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 10 & -5 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}\ B \leq 4$$

Or $\text{rg}\ B = \text{rg}\ A$ ssi tous les déterminants caractéristiques construits sur $P = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ sont nuls.

Il y a 2 déterminants caractéristiques car :

(nombre de lignes de A) - (rang de A) $= 4 - 2 = 2$

Ils sont d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & -6 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -15 & -6 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Le système admet des solutions et il est équivalent aux équations principales.

On considère le système (S') formé des équations principales :

$$(S')\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{et on pose : } x = \beta \in \mathbb{R}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales y et z (définies par P), en fonction du paramètre x (inconnue non principale).

$$(S'') : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -y & + & 3z & = & 1-2\beta \\ 2y & + & z & = & 3+4\beta \\ & & x & = & \beta \end{array} \right.$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = -7$). On peut déterminer y et z en utilisant les formules :

$$y \;=\; -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1-2\beta & 3 \\ 3+4\beta & 1 \end{vmatrix} \;=\; \frac{8}{7} + 2\beta\,, \qquad y \;=\; -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} -1 & 1-2\beta \\ 2 & 3+4\beta \end{vmatrix} \;=\; \frac{5}{7}$$

D'où l'ensemble des solutions : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$

On peut aussi déterminer l'ensemble des solutions en considérant (S'') comme l'intersection de 2 plans α et β. L'ensemble des solutions est une droite d dont on cherche un point quelconque I et un vecteur directeur.

$$\vec{d} \;=\; \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \;=\; \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On détermine un point I en posant par exemple : $x_I = 0$ et on résoud le système :

$$(S') \;:\; \left\{ \begin{array}{rcrcl} -y & + & 3z & = & 1 \\ 2y & + & z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad y_I = 8/7\,,\; y_I = 5/7$$

(d) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C\,,\; A \in \mathbb{M}(4\times 3\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S) \;:\; \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 5z & = & -7 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 14 \end{array} \right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations $(n = 4) \neq$ nombre d'inconnues $(p = 3)$.

$$(S) \;:\; A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A : $A \in \mathbb{M}(4 \times 3\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

Si il existe au moins un déterminant non nul d'ordre 3 extrait de A alors son rang est 3. On calcule :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 22 = P$$

Donc : rg $A = 3 =$ rg (S).

On choisit le déterminant P d'ordre 3 comme déterminant principal.

Il est nécessaire de se poser la question si ce système possède des solutions (car $C \neq 0$ et rg $A = 3 < 4$).

Le système admet des solutions si et seulement si rg $B =$ rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}, \quad \text{rg } B \leq 4$$

Or rg $B =$ rg A ssi tous les déterminants caractéristiques construits sur $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ sont nuls.

Il y a 1 déterminant caractéristique car :

(nombre de lignes de A) - (rang de A) $= 4 - 3 = 1$

Il est d'ordre 4. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & -4 & 5 & -7 \\ -12 & 6 & -3 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

Le système admet des solutions et il est équivalent aux équations principales.

On considère le système (S') formé des équations principales définies par P :

$$(S') : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \end{cases}$$

ce qui est un système de Cramer de 3 équations à 3 inconnues de rang 3 dont la solution est unique. On la détermine en utilisant les formules :

$$x = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad y = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad z = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2, \qquad \text{D'où la solution : } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Rang-Systèmes : exercice 12

(a) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(3\times 4, \mathbb{R})$ et déterminer son rang.

Montrer que le système possède des solutions.

$$(S) : \begin{cases} 2x - 2y + 3z + t = 2 \\ 4x - 3y + 4z + 2t = 5 \\ 10x - 8y + 11z + 5t = 12 \end{cases}$$

Dans ce cas : nombre d'équations ($n = 3$) $\neq$ nombre d'inconnues ($p = 4$).

$$(S) : A\,X = C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 4 & 2 \\ 10 & -8 & 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de A : $A \in \mathbb{M}(3 \times 4 , \mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

On considère les 3 vecteurs ligne de la matrice A : $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, et $\vec{l}_3$.
Il est évident que : $\vec{l}_3 = \vec{l}_1 + 2\,\vec{l}_2$ et que $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$ ne sont pas colinéaires.

Donc : rg $A = 2$.

On choisit le déterminant d'ordre 2 suivant comme déterminant principal :

$$P = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Le système admet des solutions si et seulement si rg $B =$ rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ 10 & -8 & 11 & 5 & 12 \end{pmatrix} , \quad \text{rg } B \leq 3$$

Il est évident que : $\vec{l}_3 = \vec{l}_1 + 2\,\vec{l}_2$ et que $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$ ne sont pas colinéaires.

Donc : rg $B = 2$.

Le système admet des solutions.

Le système homogène (S') : $AX = 0$ admet toujours des solutions. Il est équivalent aux équations principales définies par $P = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

$$(S') : \begin{cases} 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \quad \text{et on pose : } z = \alpha \text{ et } t = \beta \in \mathbb{R}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales x et y (définies par P), en fonction des paramètres z et t (inconnues non principales).

$$(S'') : \begin{cases} 2x - 2y = -3\alpha - \beta \\ 4x - 3y = -4\alpha - 2\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = 2 \neq 0$).
On détermine x et y en utilisant les formules :

$$x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3\alpha - \beta & -2 \\ -4\alpha - 2\beta & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) , \qquad y = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3\alpha - \beta \\ 4 & -4\alpha - 2\beta \end{vmatrix} = 2\alpha$$

D'où l'ensemble des solutions du système homogène :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha , \beta \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R}$$

Il reste à déterminer une solution particulière du système (S') des équations principales.
On pose par exemple : $x = 0\,,\; y = 0\,,\; (S')$ devient :

$$(S)\; : \left\{ \begin{array}{ccccc} 3z & + & t & = & 2 \\ 4z & + & 2t & = & 5 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}\,, \quad t = \frac{7}{2}$$

D'où la solution particulière :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (S) est égale à la somme de la solution particulière et de la solution du système homogène :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R}$$

10mm

(b) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C\,,\; A \in \mathbb{M}(3\times 4\,,\mathbb{R})$ et déterminer son rang.

$$(S)\; : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & + & 5t & = & 5 \end{array} \right.$$

Dans ce cas : nombre d'équations $(n = 3) \neq$ nombre d'inconnues $(p = 4)$.

$$(S)\; : \; A\,X = C \;\text{ avec }\; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\,, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On détermine le rang de $A\;:\; A \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$.

On considère les 4 vecteurs colonne de la matrice A : $\vec{c}_1\,,\; \vec{c}_2\,,\; \vec{c}_3\,,$ et $\vec{c}_4\,.$
Il est évident que : $\vec{c}_2 = -2\vec{c}_1 = -2\,\vec{c}_3$ et que $\vec{c}_3$ et $\vec{c}_4$ ne sont pas colinéaires.

Donc : rg $A = 2\,.$

On choisit le déterminant d'ordre 2 suivant comme déterminant principal :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Le système admet des solutions si et seulement si rg $B =$ rg A où B est la matrice augmentée de A. C'est-à-dire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{rg } B \leq 3$$

Or $\vec{c}_2 = -2\vec{c}_1 = -2\,\vec{c}_3$, $\vec{c}_4 = \vec{c}_5$ et $\vec{c}_3$ et $\vec{c}_4$ ne sont pas colinéaires.

Donc : rg $B = 2$.

Le système admet des solutions.

Le système homogène (S') : $AX = 0$ admet toujours des solutions. Il est équivalent aux équations principales définies par $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$(S') \; : \; \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{et on pose : } x = \alpha \text{ et } y = \beta \in \mathbb{R}$$

que l'on résoud par rapport aux inconnues principales z et t (définies par P), en fonction des paramètres x et y (inconnues non principales).

$$(S'') \; : \; \left\{ \begin{array}{ccccc} z & + & t & = & -\alpha + 2\beta \\ z & - & t & = & -\alpha + 2\beta \\ & & z & = & \alpha \\ & & t & = & \beta \end{array} \right.$$

Les 2 premières équations forment un système de Cramer de rang 2 (car $P = 2 \neq 0$). On détermine x et y en utilisant les formules :

$$x = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\alpha + 2\beta & 1 \\ -\alpha + 2\beta & -1 \end{vmatrix} = -\alpha + 2\beta , \qquad y = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -\alpha + 2\beta \\ 1 & -\alpha + 2\beta \end{vmatrix} = 0$$

D'où l'ensemble des solutions du système homogène :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha + 2\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha , \beta \in \mathbb{R}$$

Il faut encore déterminer une solution particulière du système (S') des équations principales.

On a la solution particulière évidente :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (S) est égale à la somme de la solution particulière et de la solution du système homogène :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha , \beta \in \mathbb{R}$$