Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 8

Matrices : exercice 10

Rappel :
Si $XY = YX$, on a :
$\forall p \in \mathbb{N} \;:\; (X+Y)^p \;=\; \sum_{k=0}^{p} C_p^k\, X^k Y^{p-k}$

$A = I_2 + B$ et $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Il est évident que $B\, I_2 = I_2\, B$ donc la formule du binôme peut être utilisée pour calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$

On montrer d'abord que $B^2 = B$, puis par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = B$.

- On calcule :
  $B^2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
  On a donc : $B^2 = B$ (B est dite *idempotente*)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = B$. En effet on établit facilement par récurrence :
  $\star$ on vérifie pour $k = 1$, $B^1 = B$,
  $\star$ soit $k \in \mathbb{N}^*$, et on suppose $B^k = B$.
  On montre que la formule est vraie pour $k+1$: $B^{k+1} = B^k\, B = B\, B = B^2 = B$.

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
A^n &= (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B^k I_2^{n-k} = \\
&= I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, B^k = \\
&\quad \text{or } B^k = B \\
&= I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, B = I_2 + B \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= I_2 + (2^n - 1)\, B
\end{aligned}
$$

Car par la formule de Newton pour tout a, $b \in \mathbb{R}$:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k} = b^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}$

On pose $a = b = 1$ et on obtient :

$(1+1)^n = 2^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$

Finalement :

$A^n = (I_2 + B)^n = I_2 + (2^n - 1)\, B$ ce qui est vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2^n-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 \end{pmatrix}$$

Et donc : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}+1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Matrices : exercice 13

Dans l'ensemble $M_2 = \{X \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \,|\, X \neq 0\}$, on considère la proposition S suivante

$$S : \forall\, A, B \in M_2,\ A \text{ et } AB \text{ sont symétriques} \Rightarrow B \text{ est symétrique.}$$

(a) On détermine non S :

$$\text{non}S : \exists\, A, B \in M_2,\ A \text{ et } AB \text{ sont symétriques et } B \text{ n'est pas symétrique.}$$

(b) Pour expliciter $E = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \,\middle|\, AB \text{ est symétrique et } b \neq c \right\}$
on cherche à caractériser les éléments de E par une propriété sur les coefficients.
Soit $B \in E$. Alors B est de la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec AB symétrique et $b \neq c$.
Effectuons les produit :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}.$$

AB est symétrique :

$$2b+2d = 2a+c \Leftrightarrow c = 2(b+d-a)\,.$$

B n'est pas symétrique :

$$b \neq c = 2(b+d-a) \Leftrightarrow b \neq 2(a-d)\,.$$

Alors

$$E = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2(b+d-a) & d \end{pmatrix} \in M_2 \,\middle|\, a, b, d \in \mathbb{R}, b \neq 2(a-d) \right\}.$$

(c) Par exemple, pour $a = 0, b = 1, d = 0$ on a bien $1 = b \neq 2(a-d) = 0$ et alors

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in E\,.$$

(d) La matrice A et la matrice B donnée sous (c) sont des matrices avec les propriétés énoncées dans la proposition non$S$. Elles existent et non$S$ est donc vraie.
De manière équivalente, S est fausse.

Matrices : exercice 15

Rappel :
Soit la matrice $A == \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible ssi $\det A = ad - bc \neq 0$ alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(a) $M = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

M est inversible ssi $\det M \neq 0$.
On calcule : $\quad \det M = t - 0 = t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$

(b) $N = \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & -10 \end{pmatrix}$

N est inversible ssi $\det N \neq 0$.
On calcule : $\quad \det N = -10 - 2t(t-2) = -10 - 2t^2 + 4t$
On résoud : $\quad 2t^2 - 4t + 10 = 0$
or : $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 5 < 0$: $\quad$ cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc N est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Déterminants : exercice 1

(a) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > -\dfrac{5}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^*$

$2 \cdot 2x - 2 - 7x > -\dfrac{5}{x}$

$\dfrac{5}{x} - 3x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x} = \dfrac{3(x+\frac{5}{3})(x-1)}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+\frac{5}{3})(x-1) > 0 & x < 0 \\ (x+\frac{5}{3})(x-1) < 0 & x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in]-\infty\,; -\frac{5}{3}\,[& x < 0 \\ x \in]\,0\,; 1\,[& x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left]-\infty\,; -\frac{5}{3}\right[\cup]\,0\,; 1\,[$$

(b) $\begin{vmatrix} x & 3/x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14, \qquad x \in \mathbb{R}^*$

$2 \cdot x^2 - \dfrac{12}{x} \leq 14$

$2 \cdot x^2 - \dfrac{12}{x} - 14 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^3 - 14x - 12}{x} = \frac{2(x+1)(x^2-x-6)}{x} = \frac{2(x+1)(x+2)(x-3)}{x} \leq 0$$

Le signe de cette fonction est le même que celui de la fonction donnée par :
$f(x) = x(x+1)(x+2)(x-3)$
Signe de la fonction $f(x)$:

x		-2		-1		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad x \in [-2\,; -1\,] \cup]\,0\,; 3\,]$

Déterminants : exercice 2

Indications :
Ne pas développer les déterminants mais utilisez les propriétés suivantes :

- La permutation d'une ligne ou d'une colonne change le signe de la valeur du déterminant
- Multiplier par un scalaire λ une ligne ou une colonne multiplie par λ la valeur du déterminant
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes ne change pas la valeur du déterminant (idem pour les colonnes)

(a) $\det A = -6 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

i) $\det B = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$
$= 1\cdot\det A = -6$

ii) $\det C = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-12)\cdot\det A = 72$

iii) $\det D = \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det A = -6$

On a ajouté la $3^{\text{ème}}$ ligne à la $1^{\text{ère}}$ ligne de A pour obtenir D, ce qui ne change pas la valeur du déterminant.

iv) $\det E = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} =$
$= (-3)\cdot\det A = 18$
On a soustrait 4 fois la $1^{\text{ère}}$ ligne à la $3^{\text{ème}}$ ligne de A pour obtenir E

(b) $\det A = 10 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

i) $\det B = \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = (-1)(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det A = 10$

ii) $\det C = \begin{vmatrix} -a & 2b & -c \\ -d & 2e & -f \\ -g & 2h & -i \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\cdot\det A = 20$

iii) $\det D = \begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix} = \det A = 10$

On a ajouté la $2^{\text{ème}}$ colonne à la $1^{\text{ère}}$ colonne de A pour obtenir D.

iv) $\det E = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-2a & e-2b & f-2c \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-2a & e-2b & f-2c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot \det A = 30$

On a soustrait 2 fois la $1^{\text{ère}}$ ligne à la $2^{\text{ème}}$ ligne de A pour obtenir E, ce qui ne change pas la valeur du déterminant.

Déterminants : exercice 4

Les opérations d'invariance sur les lignes et les colonnes permettent de simplifier les calculs, tout en ne modifiant pas la valeur du déterminant.

(a) La troisième colonne contient un seul coefficient non nul : développer selon la troisième colonne.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{selon } c_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-6-2) = 8\,.$$

(b) b) La troisième colonne contient un zéro et il est facile de faire apparaître un second zéro en remplaçant la deuxième ligne par la deuxième ligne plus la première ligne.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 4 \\ 15 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\ell_2'=\ell_2+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 5 & -9 & 0 \\ 15 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Développer selon la troisième colonne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 4 \\ 15 & 3 & 0 \end{vmatrix} &\overset{\ell_2'=\ell_2+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 5 & -9 & 0 \\ 15 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{selon } c_3}{=} (-4) \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \cdot 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -60\,(1+9) = -600\,. \end{aligned}$$

(c) La différence entre chaque coefficient de la première ligne et le coefficient de la deuxième ligne, situé dans la même colonne, vaut toujours 3 : remplacer la deuxième ligne par la deuxième ligne moins la première ligne.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Faire apparaître deux zéros sur la deuxième ligne en remplaçant

- la deuxième colonne par la deuxième moins la première
- la troisième colonne par la troisième moins la première

et développer selon la deuxième ligne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} &\overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_2'=c_2-c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -7 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_2}{=} (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} \\
&= -3\,(-7-2) = 27\,.
\end{aligned}$$

(d) Mettre les coefficients d'une même ligne au même dénominateur qui sera mis en évidence.

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

La somme des colonnes une et deux donne les coefficients 0, 4 et -4. En remplaçant la première par la première plus la deuxième, il est facile d'y faire apparaître deux zéros. Développer selon la première colonne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 3 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_1'=c_1+c_2}{=} \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & -8 & 3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_3'=\ell_3+\ell_2}{=} \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_2}{=} \frac{1}{24}(-4)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{6}\,(0-7) = \frac{7}{6}\,.
\end{aligned}$$

(e) Mettre les coefficients d'une même ligne au même dénominateur qui sera mis en évidence.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 4 & 3 & 7/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

La différence des colonnes deux et trois donne les coefficients 1, 1 et -1. En remplaçant la deuxième par la deuxième moins la troisième, il est facile d'y faire apparaître deux zéros.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 4 & 3 & 7/2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_2'=c_2-c_3}{=} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 7 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_3'=\ell_3+\ell_2}{=} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

A ce stade, on peut aussi facilement faire apparaître un deuxième zero sur la troisième ligne à la place d'un 10 : remplacer la troisième colonne par la troisième moins la première. Développer selon la troisième ligne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 4 & 3 & 7/2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_2'=c_2-c_3}{=} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 7 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_3'=\ell_3+\ell_2}{=} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_1}{=} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_3}{=} \frac{1}{30}10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(1+3) = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

(f) En additionnant les colonnes une et deux, on obtient les coefficients $-a-b-c$, $a+b+c$ et 0 : il sera alors facile de faire apparaître un deuxième zéro. Donc remplacer la première colonne par la première plus la deuxième et effectuer une opération similaire sur les lignes une et deux.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{c_1'=c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ a+b+c & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_2'=\ell_2+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ 0 & b-c+a & 2a+2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } c_1}{=} -(a+b+c) \begin{vmatrix} b-c+a & 2a+2b \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Avant de calculer le déterminant 2×2, on peut encore simplifier les coefficients : en additionnant les lignes une et deux, on obtient les mêmes coefficients $a+b+c$. Après remplacement de la première ligne par la première plus la seconde, la factorisation par $a+b+c$ est évidente.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{c_1'=c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ a+b+c & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_2'=\ell_2+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ 0 & b-c+a & 2a+2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } c_1}{=} -(a+b+c) \begin{vmatrix} b-c+a & 2a+2b \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_1'=\ell_1+\ell_2}{=} -(a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)^2(c-a-b-2c) = (a+b+c)^3 .$$

(g) Développer les carrés de la forme $(a-t)^2$ et simplifier par une soustraction de la deuxième colonne à la troisième pour faire tomber les termes de la forme a^2.

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2-2at+t^2 \\ b & b^2 & b^2-2bt+t^2 \\ c & c^2 & c^2-2ct+t^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3'=c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at+t^2 \\ b & b^2 & -2bt+t^2 \\ c & c^2 & -2ct+t^2 \end{vmatrix}$$

Scinder le déterminant en une somme de deux déterminants.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2-2at+t^2 \\ b & b^2 & b^2-2bt+t^2 \\ c & c^2 & c^2-2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at+t^2 \\ b & b^2 & -2bt+t^2 \\ c & c^2 & -2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at \\ b & b^2 & -2bt \\ c & c^2 & -2ct \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & t^2 \\ b & b^2 & t^2 \\ c & c^2 & t^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Le premier déterminant est nul par colinéarité des colonnes une et trois. Le second permet une mise en évidence de t^2 .

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2-2at+t^2 \\ b & b^2 & b^2-2bt+t^2 \\ c & c^2 & c^2-2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at+t^2 \\ b & b^2 & -2bt+t^2 \\ c & c^2 & -2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at \\ b & b^2 & -2bt \\ c & c^2 & -2ct \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & t^2 \\ b & b^2 & t^2 \\ c & c^2 & t^2 \end{vmatrix}
\\
&= 0 + t^2 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

La troisième colonne ne contenant que des 1, il est facile d'y faire apparaître des 0. Mettre également le plus possible de facteurs en évidence.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2-2at+t^2 \\ b & b^2 & b^2-2bt+t^2 \\ c & c^2 & c^2-2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at+t^2 \\ b & b^2 & -2bt+t^2 \\ c & c^2 & -2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at \\ b & b^2 & -2bt \\ c & c^2 & -2ct \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & t^2 \\ b & b^2 & t^2 \\ c & c^2 & t^2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + t^2 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} t^2 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_3'=\ell_3-\ell_1}{=} t^2(b-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & b+a & 0 \\ c-a & c^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= t^2(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & b+a & 0 \\ 1 & c+a & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalement, développer selon la troisième colonne.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2-2at+t^2 \\ b & b^2 & b^2-2bt+t^2 \\ c & c^2 & c^2-2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at+t^2 \\ b & b^2 & -2bt+t^2 \\ c & c^2 & -2ct+t^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a^2 & -2at \\ b & b^2 & -2bt \\ c & c^2 & -2ct \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & t^2 \\ b & b^2 & t^2 \\ c & c^2 & t^2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + t^2 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} t^2 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_3'=\ell_3-\ell_1}{=} t^2(b-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & b+a & 0 \\ c-a & c^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= t^2(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & b+a & 0 \\ 1 & c+a & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } c_3}{=} t^2(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\
&= t^2(b-a)(c-a)(c+a-b-a) = t^2(a-b)(b-c)(c-a)\,.
\end{aligned}
$$

(h) Faire apparaître directement deux zéros sur une ligne ou une colonne. Par exemple, remplacer la quatrième ligne par la quatrième moins la troisième.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}
\overset{\ell_4'=\ell_4-\ell_3}{=}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}
$$

Remplacer la troisième colonne par la troisième plus la quatrième. Développer selon la quatrième ligne.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-2&2&2\\1&2&-2&2\\1&2&2&-2\end{vmatrix} \overset{\ell_4'=\ell_4-\ell_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-2&2&2\\1&2&-2&2\\0&0&4&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3'=c_3+c_4}{=} \begin{vmatrix}1&1&2&1\\1&-2&4&2\\1&2&0&2\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } \ell_4}{=} (-4)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&4\\1&2&0\end{vmatrix}$$

Faire apparaître un deuxième zéro dans la troisième colonne en remplaçant la deuxième ligne par la deuxième moins deux fois la première. Développer selon la troisième colonne.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-2&2&2\\1&2&-2&2\\1&2&2&-2\end{vmatrix} \overset{\ell_4'=\ell_4-\ell_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-2&2&2\\1&2&-2&2\\0&0&4&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3'=c_3+c_4}{=} \begin{vmatrix}1&1&2&1\\1&-2&4&2\\1&2&0&2\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } \ell_4}{=} (-4)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&4\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_2'=\ell_2-2\ell_1}{=} (-4)\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&-4&0\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } c_3}{=} -4\cdot 2\begin{vmatrix}-1&-4\\1&2\end{vmatrix}$$

$$= -8\,(-2+4) = -16\,.$$

(i) Remplacer la première ligne par la première moins la troisième fait apparaître deux zéros. Les autres coefficients sont alors 2 et 6. La colonne contenant 6 est à remplacer par elle-même moins trois fois la colonne contenant 2.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 17 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 21 \end{vmatrix}
&\overset{\ell_1'=\ell_1-\ell_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_4'=c_4-3c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_1}{=} 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Remplacer la troisième colonne par la troisième moins la première fait apparaître les coefficients 2, 0 et 2. Un deuxième zéro s'obtient facilement par remplacement d'une ligne contenant 2 par elle-même moins l'autre contenant 2.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 17 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 21 \end{vmatrix}
&\overset{\ell_1'=\ell_1-\ell_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_4'=c_4-3c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_1}{=} 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3'=c_3-c_1}{=} 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\ell_1'=\ell_1-\ell_3}{=} 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } c_3}{=} 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 4\,(6+4) = 40\,.
\end{aligned}$$

(j) Deux zéros apparaissent directement sur la deuxième ligne en remplaçant la deuxième ligne par la deuxième moins la première.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & b(c-a) \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

$$= (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

Un troisième zéros vient en remplaçant la quatrième colonne par la quatrième moins b fois la deuxième. Développer alors selon la deuxième ligne.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & b(c-a) \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

$$= (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_4'=c_4-bc_2}{=} (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & d & a(d-b) \\ 1 & c & d & c(d-b) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } \ell_2}{=} (c-a)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & d & a \\ 1 & d & c \end{vmatrix}$$

Un deuxième zéros vient en remplaçant la deuxième colonne par la deuxième moins b fois la première. Développer alors selon la première ligne.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}
&\overset{\ell_2'=\ell_2-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & b(c-a) \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \\
&= (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \\
&\overset{c_4'=c_4-bc_2}{=} (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & d & a(d-b) \\ 1 & c & d & c(d-b) \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_2}{=} (c-a)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & d & a \\ 1 & d & c \end{vmatrix} \\
&\overset{c_2'=c_2-bc_1}{=} (c-a)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & d-b & a \\ 1 & d-b & c \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_1}{=} (c-a)(d-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} \\
&= (c-a)(d-b)^2(c-a) = (c-a)^2(d-b)^2\,.
\end{aligned}
$$

(k) Développer selon n'importe quelle ligne ou colonne.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
&\overset{\text{selon } \ell_1}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{selon } \ell_1}{=} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,.
\end{aligned}
$$

(l) Remplacer la première colonne par la première moins la troisième fait apparaître les coefficients 1, 0 et 2. Il suffit alors de remplacer ensuite la troisième ligne par la troisième moins 2 fois la première.

$$\begin{vmatrix} 3-x & 6-x & 2-x \\ 7-x & 2-x & 7-x \\ 5-x & 6-x & 3-x \end{vmatrix} \overset{c_1'=c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6-x & 2-x \\ 0 & 2-x & 7-x \\ 2 & 6-x & 3-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_3'=\ell_3-2\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6-x & 2-x \\ 0 & 2-x & 7-x \\ 0 & -6+x & -1+x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } c_1}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 7-x \\ -6+x & -1+x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1'=c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} -5 & 7-x \\ -5 & -1+x \end{vmatrix}$$

$$= (-5)\begin{vmatrix} 1 & 7-x \\ 1 & -1+x \end{vmatrix}$$

$$= -5\,(-1+x-7+x) = -5(-8+2x)\,.$$

L'inéquation s'écrit donc

$$-5(-8+2x) > 0 \Longleftrightarrow -8+2x < 0 \Longleftrightarrow x < 4\,.$$

L'ensemble solution est donc

$$S =]\leftarrow, 4\,[\,.$$

(m) Remplacer la première colonne par la première moins la deuxième donne les coefficients $1-\lambda$, $-1+\lambda$ et 0. Un remplacement avec une addition fournit un deuxième zéro à la première colonne.

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1'=c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1+\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_2'=\ell_2+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{selon } c_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-0\big) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0\,.$$

Ainsi

$$\lambda \in S = \{1,2,3\}\,.$$

Remarque : faire apparaître un deuxième zéro sur la première ligne en remplaçant la première colonne par la première plus $(1-\lambda)$ fois la troisième mène à des calculs plus compliqués.