(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	4	
2	11	
3	5	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les coordonnées d'un point P et l'équation cartésienne d'une droite p :

$$P\,(3\,;-1)\,, \qquad p:\ 2x+y-9=0$$

Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle γ de centre Ω tel que

- la polaire du point P par rapport à γ est la droite p,
- la distance du point P au centre Ω du cercle vaut $\frac{5}{2}\sqrt{5}$.
  Donner la solution pour laquelle $x_\Omega \leq 0$.

Solution:

$$(x+2)^2+(y+\frac{7}{2})^2-\frac{165}{4}=0$$

Question 2 (à 11 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

On considère l'ensemble des coniques d'équation :

$$x^2+\lambda\,y^2-2\,\lambda\,x=0\,, \quad \lambda \text{ paramètre réel.}$$

(a) Discuter la nature de ces coniques en fonction de λ.
Pour chaque cas, déterminer avec précision la direction des axes de symétrie.

(b) Déterminer le centre, tous les sommets et les foyers de la conique de l'ensemble pour $\lambda=\frac{1}{2}$.

(c) Montrer que cet ensemble comporte une seule hyperbole équilatère.
Déterminer l'équation cartésienne, le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes de cette hyperbole.
Puis la représenter graphiquement (centre, sommets, foyers, asymptotes,...).
Echelle : 1 unité = 3 carreaux.

(d) Déterminer le paramètre λ tel que la conique de l'ensemble admette une tangente de pente $m=\frac{1}{2}$ au point $T\,(\frac{1}{3}\,;\,y_T)$, où $y_T>0$.

Solution:
a)
i) $\lambda>0$: ellipse de centre $\Omega\,(\lambda,0)$

- $\lambda\ \in\,]\,1;+\infty\,[$
  le grand axe est horizontal : $y=0$
  le petit axe est vertical : $x=\lambda$
- $\lambda\ \in\,]\,0;1\,[$
  le grand axe est vertical : $x=\lambda$
  le petit axe est horizontal : $y=0$

ii) $\lambda<0$: hyperbole de centre $\Omega\,(\lambda,0)$.
Toutes les hyperboles sont d'axe réel horizontal : $y=0$
et d'axe imaginaire vertical : $x=\lambda$.

b)
Le centre est $\Omega\left(\frac{1}{2};0\right)$.
Les sommets sont : $A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A'\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(1;0\right), B'\left(0,0\right)$.
Les foyers sont : $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

c)
Equation cartésienne : $(x+1)^2-y^2-1=0$
$\Omega\left(-1;0\right)$, $A\left(0;0\right)$, $A'\left(-2;0\right)$, $F\left(-1+\sqrt{2};0\right)$, $F'\left(-1-\sqrt{2};0\right)$
Asymptotes : $y=\pm(x+1)$

d)
$\lambda=\frac{1}{2}$

Question 3 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Un point M décrit l'hyperbole d'équation $x^2-y^2-1=0$, de foyers F et F', où F' est le foyer d'abscisse négative.
Déterminer le lieu des points P intersection de la droite $(F'M)$ et de la droite passant par F et perpendiculaire à la tangente en M. Donner, avec précision, la nature géométrique de ce lieu.

Solution: Equation cartésienne du lieu :

$$(x+\sqrt{2})^2+y^2-4=0$$

Le lieu géométrique est un cercle de centre $\Omega\left(-\sqrt{2};0\right)$ et de rayon $r=2$.