22.3.19

Série 15

1. Trouver le module et l'argument de :

(a) $z = 5 + 12i$;

(b) $z = \sqrt{3} + i$;

(c) $z = \dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $z = -2$;

(b) $z = 7i - \dfrac{3}{i}$;

(c) $z = -1 + i$;

(d) $z = \sqrt{3} + i$;

(e) $z = \dfrac{1}{1 - i}$;

(f) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Mettre sous la forme $a + bi$:

(a) $z = \left[5; -\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(b) $z = \left[2; \dfrac{\pi}{8}\right]$;

(c) $z = [\pi; \pi - t]$;

(d) $z = \dfrac{\left[2; -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right]}$;

(e) $z = \dfrac{\left[2; -\frac{\pi}{3}\right]^4}{\left[4; \frac{\pi}{4}\right]}$.

4. Déterminer $\varphi \in [0, \pi]$ pour que $\mathrm{Re}\left(\left[\sqrt{3}; \dfrac{2}{3}\right]^3 \cdot [4; \varphi]\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{[6; 1 + \varphi]^2}{[3; \varphi]}\right)$.

5. Résoudre :

(a) $z - i\overline{z} = 0$ et $|z| = 2\sqrt{2}$;

(b) $2iz + \overline{z} = 0$ et $|z| = 2$;

(c) $z^{11} = \overline{z}$ et $0 < \mathrm{Im} z < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Trouver parmi les solutions de l'équation : $(z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z}^2 - z^2) = 0$ celle(s) satisfaisant $2\mathrm{Re} z > |z|$.

7. Calculer les racines carrées de :

(a) $z = 9i$;

(b) $z = 5 - 12i$;

(c) $z = \dfrac{1}{1 - i} + \dfrac{1}{i}$.

8. (a) Trouver les racines cubiques de $z = 1 - i\sqrt{3}$ et $z = \dfrac{1}{(1 + i)^2}$;

(b) Calculer $z = \dfrac{\sqrt{(-1 + i)^3}}{\sqrt[7]{i}}$.

9. Dans le plan complexe soient les deux groupes de points M d'affixes z et M' d'affixes z' tels que :

$$z' = z\overline{z} - (1 + 3i)z - 6 + 9i$$

Déterminer dans le plan complexe le lieu des points M tels que les points M' soient situés sur l'axe des imaginaires.

Solutions

S1 (a) $|z| = 13$, $\varphi = \arccos(\frac{5}{13})$
(b) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$
(c) $|z| = 1$, $\varphi = 2\alpha$

S2 (a) $z = [2; \pi]$
(b) $z = [10; \pi/2]$
(c) $z = [\sqrt{2}; 3\pi/4]$
(d) $z = [2; \pi/6]$
(e) $z = [\sqrt{2}/2; \pi/4]$
(f) $z = [3; -3\pi/4]$

S3 (a) $z = -5i$
(b) $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(c) $z = -\pi \cos t + i\pi \sin t$
(d) $z = -4i$
(e) $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

S4 $\varphi = 4\pi/3 - 2$

S5 (a) $z = \pm(2 + 2i)$
(b) $S = \emptyset$
(c) $z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$

S6 $z = [2^{1/3}; -\pi/9 + 2k\pi/3]$, $k = 0, 1, 2$

S7 (a) $z = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
(b) $z_k = [\sqrt{13}; \varphi/2 + k\pi]$, $k = 0, 1$
(c) $z = [2^{-1/4}; -\pi/8 + k\pi]$, $k = 0, 1$

S8 (a) $z = [2^{1/3}; -\pi/9 + 2k\pi/3]$, $k = 0, 1, 2$
(b) $z = [2^{3/4}; 59\pi/56 + (l - 2k/7)\pi]$, $l = 0, 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

S9 le cercle de centre $\Omega(1/2; -3/2$ et de rayon $r = \sqrt{17/2}$