Contrôle d'analyse I N°4

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln\left[\,1 - 2\cos^2(x)\,\right]}{\cos^2(x)}\,, \qquad \tfrac{\pi}{4} < x < \tfrac{\pi}{2}\,.$$ 4,5 pts

2. Dans le plan, on considère les deux courbes Γ_1 et Γ_2 suivantes :

$$\Gamma_1 : \; y = \sqrt{3\,(1-x)}\,, \quad x \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \; y + 1 = \frac{4}{9}\,(x-1)^2\,.$$

Calculer l'aire du domaine fini contenu dans le demi-plan $y \geq 0$ et limité par les deux arcs Γ_1 et Γ_2.

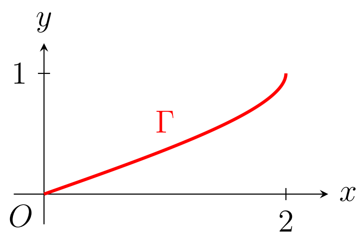
Indication : les deux courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent en $x = -2$. 3 pts

3. Soit D le domaine fini du plan limité par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^3}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 8$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $x = 1$. 2,5 pts

4. Dans l'espace muni d'un système d'axes cartésien $(Oxyz)$, on considère un arc Γ situé dans le plan (Oxy) :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\sqrt{2t - t^2} \\ y(t) = \sqrt{t} \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1\,.$$



On considère le corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe (Ox) sont des disques dont le centre appartient à l'arc Γ et dont le cercle frontière coupe l'axe Ox. Calculer le volume du corps ainsi défini. 5 pts

Tourner la page

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\,\operatorname{tg} y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\operatorname{Sh}(x+y) = \operatorname{Sh} x\,\operatorname{Ch} y + \operatorname{Ch} x\,\operatorname{Sh} y \qquad \operatorname{Ch}(x+y) = \operatorname{Ch} x\,\operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} x\,\operatorname{Sh} y$$

$$\operatorname{Th}(x+y) = \frac{\operatorname{Th} x + \operatorname{Th} y}{1 + \operatorname{Th} x\,\operatorname{Th} y}$$

Formules de bissection :

$$\operatorname{Sh}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{2} \qquad \operatorname{Ch}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x + 1}{2} \qquad \operatorname{Th}(\tfrac{x}{2}) = \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\operatorname{Sh} x} = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$
$\operatorname{Th} x$	$\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Réponses :

1. $\displaystyle\int f(x)\,dx \;=\; \mathrm{tg}(x)\cdot\ln\big[1-2\cos^2(x)\big] - \ln|\,\mathrm{tg}(x)-1| + \ln|\,\mathrm{tg}(x)+1| - 2x + C\,.$

2. $A = 4\,.$

3. $V = \pi\,.$

4. $V = \dfrac{\pi}{2}\,(4-\pi)\ .$