Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 2

Applications linéaires : exercice 12

Il suffit d'écrire la donnée sous forme matricielle.
On remarque également que les colonnes des matrices cherchées sont formées par les composantes des images des vecteurs de base, donc dépendent du choix des bases.

(a) On reprend la donnée :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) On reprend la donnée :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{x}) = (x + y + z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M_f = (1\,1\,1)$$

(c) On reprend la donnée :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{x}) = (3x - y)\,\vec{e}_1 + (-6x + 2y)\,\vec{e}_2 + (9x - 3y)\,\vec{e}_3$$

Donc

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x - y \\ -6x + 2y \\ 9x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Applications linéaires : exercice 13

(a) On détermine la matrice de g en calculant l'image des vecteurs de la base de $P_2[x]$.
Les colonnes de M_g sont les composantes de $g(x^2)$, $g(x)$ et $g(1)$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Si $p(x) = x^2$ alors $p(-1) = 1$ et $p(0) = 0$, d'où $g(x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Si $p(x) = x$ alors $p(-1) = -1$ et $p(0) = 0$, d'où $g(x) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Si $p(x) = 1$ alors $p(-1) = 1$ et $p(0) = 1$, d'où $g(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  D'où
  $$M_g = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les colonnes de M_g sont les composantes de $g((x-1)^2)$, $g(x-1)$ et $g(1)$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Si $p(x) = (x-1)^2$ alors $p(-1) = (-2)^2 = 4$ et $p(0) = (-1)^2 = 1$,
  d'où $g((x-1)^2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Si $p(x) = x - 1$ alors $p(-1) = -2$ et $p(0) = -1$, d'où $g(x-1) = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Si $p(x) = 1$ alors $p(-1) = 1$ et $p(0) = 1$, d'où $g(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  D'où
  $$M_g = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applications linéaires : exercice 14

(a)
- On écrit la donnée sous forme matricielle.
  $f(x;y) = (2x;y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  d'où :
  $$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Im}\, f = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)]_{sev} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{sev}$

  Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants donc $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$

- Pour trouver $\mathrm{Ker}\, f$, la résolution de l'équation n'est pas nécessaire car par le théorème de la dimension :
  $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \;\Rightarrow\; \dim \mathrm{Ker}\, f = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}\, f = \{(0\,;0)\}$

(b) Pour déterminer la matrice M_f, on cherche l'image des vecteurs de base.

$$f(1;1) = (3;0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= 3\vec{e}_1 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$f(4;2)=(10;2) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rcl} f(4\vec{e}_1+2\vec{e}_2) & = & 4f(\vec{e}_1)+2f(\vec{e}_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ & = & 10\vec{e}_1+2\vec{e}_2 \qquad (2) \end{array}$$

Il faut résoudre par rapport à $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$, le système formé par les équations (1) et (2).

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)+f(\vec{e}_2)=3\vec{e}_1 \\ \\ 4f(\vec{e}_1)+2f(\vec{e}_2)=10\vec{e}_1+2\vec{e}_2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)=2\vec{e}_1+\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(\vec{e}_2)=\vec{e}_1-\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad M_f=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ sont linéairement indépendants donc $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Ker} f=\{(0\,;0)\}$

(c) Les deux premiers cas, très simples, suggèrent une solution immédiate!

La projection étant orthogonale (et la base orthonormée), on utilise le produit scalaire pour calculer la projection d'un vecteur sur une droite dans les deux cas suivants.

Les images des vecteurs de base se calculent facilement (les axes de la projection sont Ox et Oy).

- Projection orthogonale sur Ox :
  $$\left.\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2)=\vec{0} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad M_f=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  $\operatorname{Im} f=$ axe Ox et $\operatorname{Ker} f=$ axe Oy
- Projection orthogonale sur Oy :
  $$\left.\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)=\vec{0} \\ f(\vec{e}_2)=\vec{e}_2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad M_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $\operatorname{Im} f=$ axe Oy et $\operatorname{Ker} f=$ axe Ox
- Soit $\vec{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de la bissectrice $x=y$:

  $$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = \dfrac{\vec{e}_1\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d} \\ \\ f(\vec{e}_2) == \dfrac{\vec{e}_2\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)=\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ f(\vec{e}_2)=\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

  $$\Rightarrow \quad M_f=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  $\operatorname{Im} f$ est l'axe de la projection
  $\operatorname{Ker} f$ est la droite perpendiculaire à l'axe : $x+y=0$
- Soit $\vec{d}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de l'axe $4x=5y$:

  $$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = \dfrac{\vec{e}_1\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d} \\ f(\vec{e}_2) == \dfrac{\vec{e}_2\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1)=\frac{5}{41}\vec{d}=\frac{5}{41}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f(\vec{e}_2)=\frac{4}{41}\vec{d}=\frac{4}{41}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad M_f = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f$ est l'axe de la projection.
$\operatorname{Ker} f$ est la droite perpendiculaire à l'axe : $\quad 5x + 4y = 0$

Remarque : pour les deux derniers cas, on peut aussi déterminer l'image d'un vecteur quelconque $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de f.

Par exemple pour le troisième cas :

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ d'où la matrice de } f\,.$$

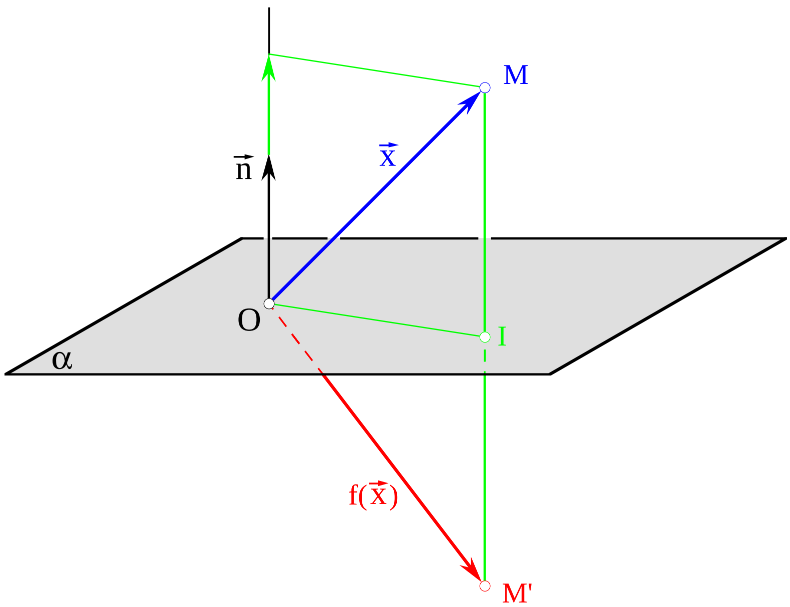
Applications linéaires : exercice 15

(a) **Première méthode pour déterminer la matrice de f**

A l'aide des outils de la géométrie analytique, on détermine l'image par f des trois vecteurs de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par son rayon vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$.

Le symétrique du point M par rapport au plan α est le point M' repéré par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM'} = f(\vec{x})$.



$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2\,\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{OM} - 2\,\overrightarrow{IM}\,.$$

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan α. Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est la projection vectorielle de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{IM} = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2\,\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,.$$

En d'autres termes :

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \qquad \text{avec} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{n}\|^2 = 14\,.$$

On utilise l'expression vectorielle de $f(\vec{x})$ pour calculer les images $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$ des vecteurs de base.

- Image par f du vecteur $\vec{e}_1$

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 2\,\frac{\vec{e}_1\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \qquad \vec{e}_1\cdot\vec{n} = 1\,,$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Image par f du vecteur $\vec{e}_2$

$$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - 2\,\frac{\vec{e}_2\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \qquad \vec{e}_2\cdot\vec{n} = -3\,,$$

$$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Image par f du vecteur $\vec{e}_3$

$$f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 - 2\,\frac{\vec{e}_3\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \qquad \vec{e}_3\cdot\vec{n} = 2\,,$$

$$f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Matrice de l'application f

$$M_f = \Big(f(\vec{e}_1),\, f(\vec{e}_2),\, f(\vec{e}_3)\Big) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode pour déterminer la matrice de f

On détermine l'image par f d'un vecteur $\vec{x}$ quelconque de $\mathbb{R}^3$, puis on en déduit la matrice de l'application f.

On reprend :

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\,, \qquad \text{avec} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{n}\|^2 = 14\,.$$

Pour tout vecteur $\vec{x} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2}{14} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{7} (x - 3y + 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6x + 3y - 2z \\ 3x - 2y + 6z \\ -2x + 6y + 3z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On en déduit la matrice de l'application f :

$$M_f = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Image et noyau de l'application f

- **Espace Image**
  Tout point P de l'espace peut être considéré comme le symétrique d'un point M de l'espace :

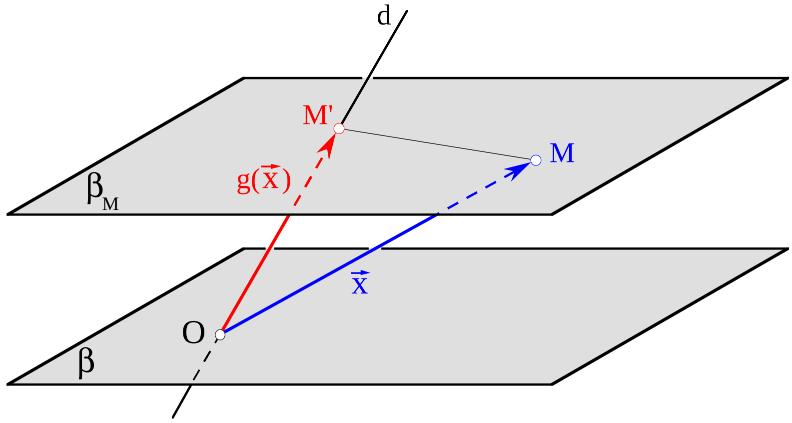
  $$\forall \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3, \quad \exists\, \overrightarrow{OM} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{OP} = f(\overrightarrow{OM}), \quad \left(\overrightarrow{OM} = f(\overrightarrow{OP}) \right).$$

  On en déduit donc que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

- **Noyau**
  L'origine O est invariante par symétrie car $O \in \alpha$.
  De plus tout point distinct de O a pour symétrique un point distinct de O.
  On en déduit donc que $\ker f = \{\vec{0}\}$.
  Ce résultat est corroboré par le théorème de la dimension :

  $$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ker f = \{\vec{0}\}.$$

(b) A l'aide des outils de la géométrie analytique, on détermine l'image par g d'un vecteur $\vec{x}$ quelconque de $\mathbb{R}^3$, puis on en déduit la matrice de l'application g.
Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^3$ et M' sa projection sur la droite d parallèlement à β. Alors M' est l'intersection de la droite d et du plan passant par M et parallèle à β.



Soit β_M le plan parallèle à β passant par le point M,

$$\beta_M : \; x + y + z - (x_M + y_M + z_M) \; = \; 0 \, .$$

Le point M' est l'intersection du plan β_M et de la droite d.

$$d : \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 3\,\lambda \\ 2\,\lambda \end{pmatrix}, \quad \beta_M : \; x + y + z - (x_M + y_M + z_M) \; = \; 0 \, ,$$

$$\Rightarrow \quad (-\lambda) + (3\,\lambda) + (2\,\lambda) - (x_M + y_M + z_M)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{x_M + y_M + z_M}{4} \, ,$$

$$\overrightarrow{OM'} \; = \; \begin{pmatrix} -\lambda \\ 3\,\lambda \\ 2\,\lambda \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -x_M - y_M - z_M \\ 3\,x_M + 3\,y_M + 3\,z_M \\ 2\,x_M + 2\,y_M + 2\,z_M \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM'} \; = \; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice de l'application g :

$$M_g \; = \; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Image et noyau de l'application g.

- **Espace Image**
  Tout point M de l'espace se projette en un point de la droite d. D'autre part, tout point P de la droite d est le projeté d'un point de l'espace (par exemple le point P lui-même).
  On en déduit donc que $\operatorname{Im} g = d$.
- **Noyau**
  Par le théorème de la dimension, on sait que le noyau de g est de dimension 2.
  Or tous les points du plan β se projettent sur l'origine O.
  On en déduit donc que $\ker g = \beta$.

(c) On détermine les composantes des images par f des vecteurs de la base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

- Image par f de E_1.
  $$f\,(E_1) \; = \; A \cdot E_1 \; = \; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

  D'où les composantes de cette matrice dans la base canonique de $\mathbb{M}_2\mathbb{R}$:

  $$f\,(E_1) \; = \; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \; = \; \text{première colonne de } M_f$$

- Image par f de E_2.

$$f(E_2) = A \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Image par f de E_3.

$$f(E_3) = A \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Image par f de E_4.

$$f(E_4) = A \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice M_f est une matrice à 4 lignes et 4 colonnes car la dimension des espaces de départ et d'arrivée est de 4.

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Base et dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

$$\mathrm{Im}\, f = [\, f(E_1),\ f(E_2),\ f(E_3),\ f(E_4)\,]_{\text{sev}}.$$

Or ces quatre générateurs de $\dim \mathrm{Im}\, f$ sont linéairement dépendants :

$$f(E_1) = -2\, f(E_3) \qquad \text{et} \qquad f(E_2) = -2\, f(E_4).$$

Donc

$$\mathrm{Im}\, f = [\, f(E_1),\ f(E_2),\ f(E_3),\ f(E_4)\,]_{\text{sev}} = [\, f(E_3),\ f(E_4)\,]_{\text{sev}}.$$

De plus $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sont linéairement indépendants car ils ne sont pas colinéaires.
Donc $(\, f(E_3),\ f(E_4)\,)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
$\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 2.

Base et dimension de $\ker f$.

$$\ker f = \{\, X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ f(X) = 0 \,\}.$$

Résolution de l'équation $f(X) = 0$.

$$f(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ 4x - 2z & 4y - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \\ 4x - 2z = 0 \\ 4y - 2t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 2x \\ t = 2y \end{cases}$$

Expression générale des matrices X de $\ker f$.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x\,,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

$$\ker f = \left\{ X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ \exists\, x\,,\ y \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker f = [\,U\,,\ V\,]_{\text{sev}} \qquad \text{en posant} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux générateurs U et V sont linéairement indépendants car ils ne sont pas colinéaires.

Donc $(U\,,\ V)$ est une base de $\ker f$.

$\ker f$ est de dimension 2.

L'espace vectoriel de départ de l'application f et l'espace vectoriel d'arrivée coïncident.

De plus, dans ce cas particulier, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont égaux.

On peut donc en déduire que l'application linéaire $f^2 = f \circ f$ est l'application identiquement nulle.

$$\begin{array}{rccl} f^2 \ : & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Applications linéaires : exercice 16

(a) Pour déterminer la matrice de f, on cherche l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ et on détermine leurs composantes dans la base de l'ensemble d'arrivée.

Base de $P_n[x]$: $(1\,,\ x\,,\ x^2\,,\ \dots\,,\ x^n)$, $\quad \dim P_n[x] = n+1$

Base de $\mathbb{R}$: (1) , $\quad \dim \mathbb{R} = 1$

donc $M_f \in \mathbb{M}(1 \times n+1\,,\ \mathbb{R})$

On calcule quelques images : $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(x^4)$, $f(x^5)$, etc

$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 = (0)$ composante de 0 dans la base (1) de $\mathbb{R}$, etc

$f(x) = 0$

$f(x^2) = 0$

$f(x^3) = 3!$

$f(x^4) = 4!\sqrt{2}$

$f(x^5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{5!}{2!} \cdot (\sqrt{2})^2$

$f(x^6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{6!}{3!} \cdot (\sqrt{2})^3$

$\vdots$

$f(x^k) = \frac{k!}{(k-3)!} \cdot (\sqrt{2})^{k-3} \qquad , \quad k \leq n$

D'où : $M_f =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3! & 4!\sqrt{2} & \frac{5!}{2!} \cdot (\sqrt{2})^2 & \dots & \frac{k!}{(k-3)!} \cdot (\sqrt{2})^{k-3} & \dots & \frac{n!}{(n-3)!} \cdot (\sqrt{2})^{n-3} \end{pmatrix}$$

(b) Pour déterminer la matrice de f , on cherche l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ et on détermine leurs composantes dans la base de l'ensemble d'arrivée.

Base de l'ensemble de départ : $\mathcal{B}\,(1\,,\,x\,,\,x^2\,,\,\dots\,,\,x^n)\,,$
Base de l'ensemble d'arrivée : $\mathcal{E}\;(1,\,1+x,\,1+x^2,\,1+x^3,\,...\,,\,1+x^n)$
donc $M_f \in \mathbb{M}(n+1\times n+1\,,\,\mathbb{R})$
On calcule quelques images : $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$, etc, et on détermine leurs composantes dans la base $\mathcal{E}$.

$$f(1) = 1 = 1\cdot 1 + 0(1+x) + ... + 0(1+x^n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}$$

$$f(x) = -x = (1)1 + (-1)(1+x) + ... + 0(1+x^n) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}$$

$$f(x^2) = x^2 = (-1)1 + 0(1+x) + 1(1+x^2) + ... + 0(1+x^n) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1} \qquad ...$$

D'où la matrice de f relativement à aux bases données :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & .... & (-1)^{n+1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .... & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .... & (-1)^n \end{pmatrix}_{n+1}$$