Série 23

1. Réduire à la forme canonique et représenter les coniques définies par les équations suivantes :

a) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 16y = 0\,,$

b) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\,.$

c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0\,.$

Si les coniques sont dégénérées, déterminer l'équation cartésienne des droites de dégénérescence.

2. Dans le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C}:\ x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 18y + 27 = 0\,.$$

a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère $\mathcal{R}'$ dans lequel l'équation est réduite.

b) Calculer, relativement au repère $\mathcal{R}$, les coordonnées d'un foyer de $\mathcal{C}$.

3. On considère la famille $\mathcal{F}$ des coniques définie par l'équation

$$\mathcal{F}:\ x^2 + 2m\,xy + y^2 - 2x + 2y = 0\,,\quad m \in \mathbb{R}\,.$$

a) Déterminer m de sorte que les coniques de $\mathcal{F}$ soient dégénérées.
Donner alors l'équation cartésienne des droites de dégénérescence.

b) Déterminer en fonction de m le genre des coniques non dégénérées de $\mathcal{F}$.

c) Déterminer l'équation cartésienne de l'axe et les coordonnées du sommet de la parabole non dégénérée de $\mathcal{F}$.

d) La conique de $\mathcal{F}$ définie par $m = \frac{1}{2}$ est une ellipse.
Déterminer la longueur de son grand axe.

4. Soient $A(4\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3)$ deux points donnés et s une sécante variable de pente $\frac{1}{2}$ qui coupe la droite AB en E et la droite OB en D.

a) Déterminer l'équation du lieu des points M, intersections de (OE) et (AD).

b) Déterminer la nature du lieu, donner les coordonnées du centre et les équations des asymptotes.

Réponses de la série 23

1. a) Parabole d'équation réduite :

$\bar{y}^2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}\,\bar{x} = 0$.

Axe d'équation : $2x + y = 0$,

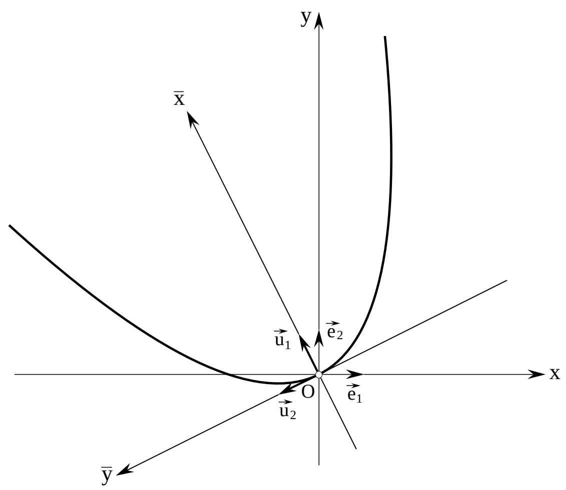
sommet : $S\,(0\,,\,0)$.

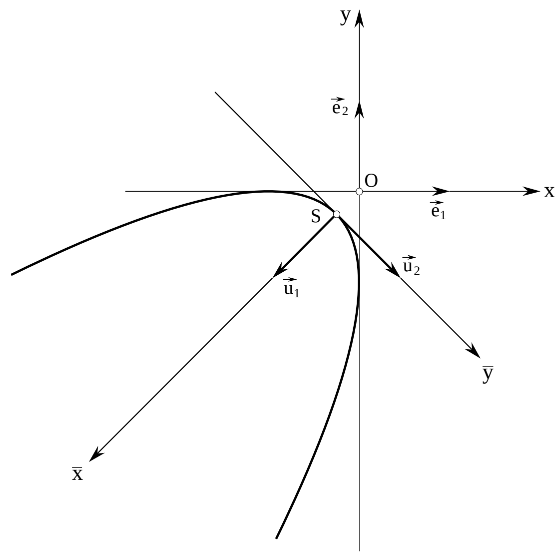
b) Parabole d'équation réduite :

$\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} = 0$.

Axe d'équation : $x - y = 0$,

sommet : $S\,(-\frac{1}{4}\,,\,-\frac{1}{4})$.





c) Conique de genre parabole, dégénérée en deux droites confondues d'équation $x - 3y + 2 = 0$.

2. a) Equation réduite de $\mathcal{C}$: $3\,\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2} - 6 = 0$.

Repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\Omega(4,1)$, $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Coordonnées des foyers : $F_1\,(6,3)$ et $F_2\,(2,-1)$.

3. a) $m = -1$, $d_1 :\ x - y - 2 = 0$ et $d_2 :\ x - y = 0$.

b)
- $m \in\ ]-1\,,\,1\,[$: la conique est de genre ellipse.
- $m = 1$: la conique est une parabole non dégénérée.
- $m \in\ ]-\infty\,,\,-1\,[\ \cup\ ]\,1\,,\,+\infty\,[$: la conique est de genre hyperbole.

c) Axe : $x + y = 0$, sommet : $S\,(0\,,\,0)$.

d) Longueur du grand axe : $2\,a = 4\sqrt{2}$.

4. a) Equation du lieu : $3x^2 - 12xy - 8y^2 - 12x + 24y = 0$,

b) Le lieu est une hyperbole de centre $\Omega\,(2\,,\,0)$ et les pentes des asymptotes sont égales à $-\frac{1}{4}\,(3 \pm \sqrt{15})$.