Semaine 8

Charges axiales
Composites

PARTIE 1: (slide 6 - 18)
Poutres chargées axialement
(Chapitre 5.12 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 19 - 36)
Poutres Composites
(Chapitre 6 de Gere et Goodno)

v. 2022

PROGRAMME DU COURS, semaines 7-10

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
		Herbert Shea		
7	mardi 01.11	Poutre: forces internes, relation différentielles, forces distribuées	x	
7	jeudi 03.11	ε et σ_normale en flexion pure. Moment inertie de poutre	x	Série 7
8	mardi 08.11	charge axiale (et normales). poutre composite		Série 7
8	jeudi 10.11	Flèche des poutres pt1	x	Série 8
9	mardi 15.11	Flèche des poutres pt 2	x	Série 8
9	jeudi 17.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 9
10	mardi 22.11	Energie déformation Flambage	x	Série 9+10
10	jeudi 24.11	fin Flambage	x	Série 10

Résumé chapitre précédent (semaine 7b)

Poutre en flexion pure ou forces en y

- Def. Relative normale:

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

  - y_0: Position de l'axe neutre
  - ρ: Rayon de courbure
  - $\kappa = \frac{1}{\rho}$: Courbure
  - $y - y_0$: Distance de l'axe neutre

- y_0= Centroïde de la section transverse pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y dy dz}{A}$$

- Contrainte normale:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

  - I_{z,y_0}: Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe z passant par l'axe neutre
  - $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dA$

- $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

- Contrainte normale maximum:

$$\left|\sigma_{x,max}(x)\right| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

  - c: Distance maximale vers l'axe neutre
  - $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$: Module d'inertie élastique

Résumé chapitre actuel (semaine 8a)

Poutre en flexion pure ou forces en y

- Contrainte normales pour poutre avec charge axiale:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E\frac{y - y_0}{\rho}$$

- F_x: Charge axiale, A: section de la poutre
- y_0: Position de l'axe neutre dans le boîtier de flexion pure.

- Position de l'axe neutre pour les poutres avec charge axiale :

$$y_0' = \frac{F}{M_z(x)}\frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$

- Contrainte normale pour les poutres composites:

$$\sigma_x(y) = -E(y)\frac{y - y_0}{\rho}$$

- Position de l'axe neutre pour les poutres composites: $y_0 = \frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i}$
  - $Q = \int_A \; y dA$

- Contrainte normale dans les poutres composites:

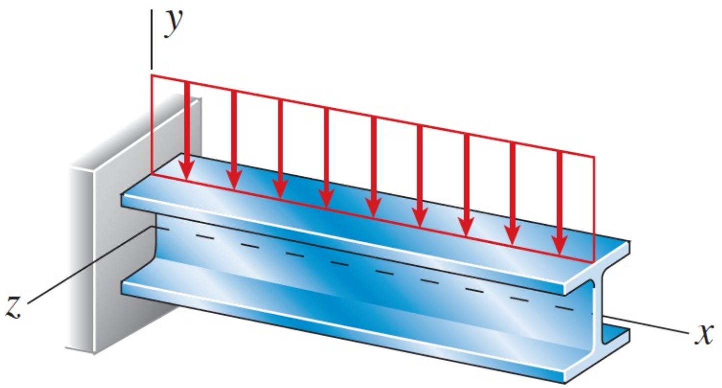
$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y - y_0)$$

- $\langle EI_{z,y_0}\rangle = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}$
- $M_z(x) = \frac{1}{\rho}\langle EI_{z,y_0}\rangle$

Semaine 8a – partie 1
Objectifs d’apprentissage de cette section

- Savoir utiliser la superposition pour trouver le nouvel **axe neutre d’une poutre mono-matériau sous charge combinée en x et en y**

Que ce passe-t-il si une charge axiale (en *x*) est ajoutée à charge en *y* ?

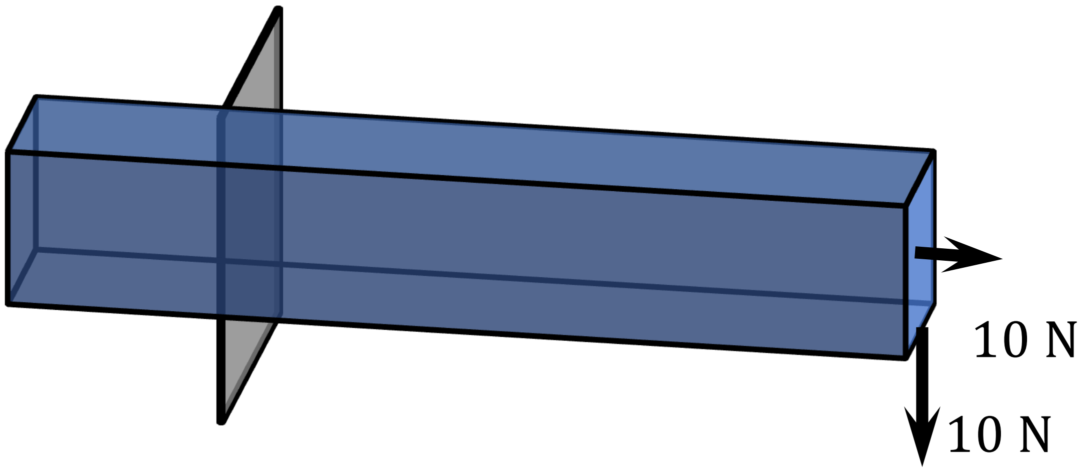


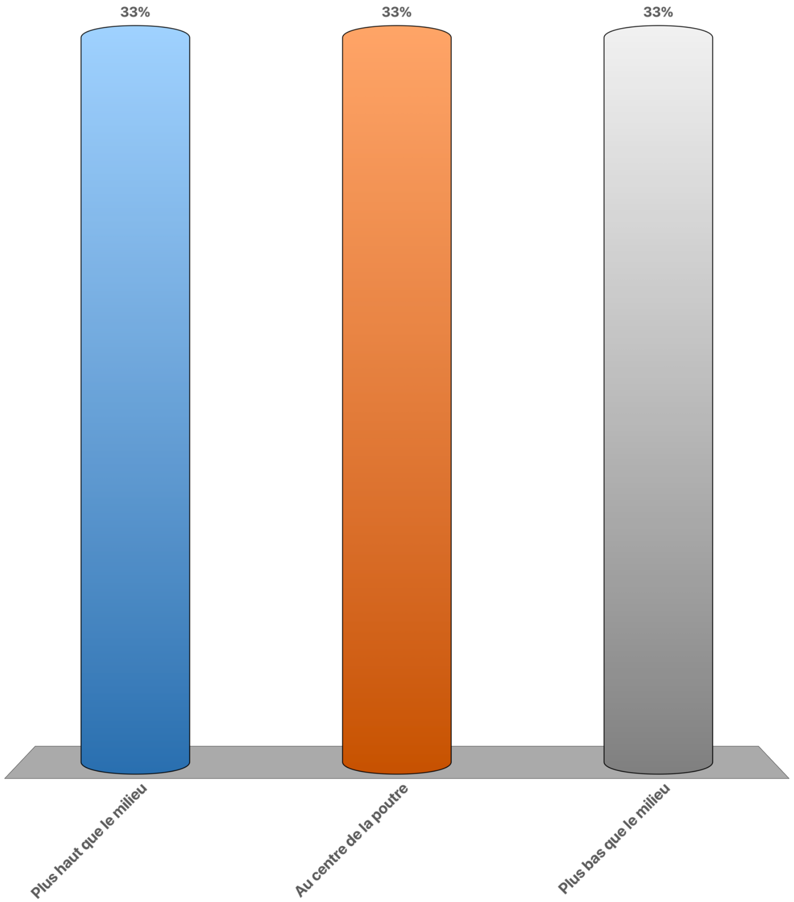
Semaine dernière (que des moments pure et des forces verticales)

Ces slides:
aussi des forces axiales

Où se trouve l'axe neutre?

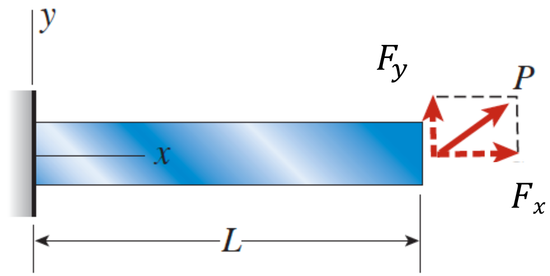
A. Plus haut que le milieu
B. Au centre de la poutre
C. Plus bas que le milieu



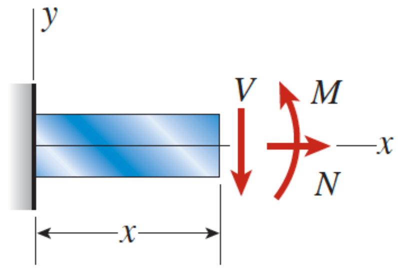


Contrainte des poutres mono-matériel sous charge axiale **et** transverse

- Nous pouvons appliquer le principe de superposition et séparer le problème en:
  - Élongation pure (force normale F_x selon x)
  - Flexion pure (due par exemple à une force selon y)



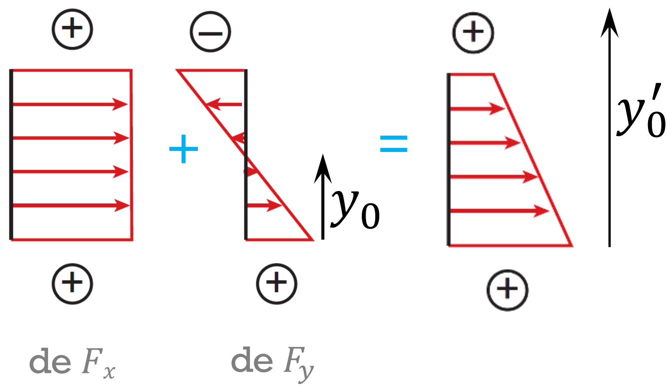
La contrainte normale (combinée) est alors:



$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E\,\frac{y-y_0}{\rho} = \frac{F_x}{A} - \frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y-y_0)$$

Attention y_0 est l'axe neutre en flexion pure

- rappel: axe neutre = axe où $\sigma_x(y_0') = 0$
- **l'axe neutre y_0 calculé pour la flexion pure n'est plus le « vrai » axe neutre y_0' !**



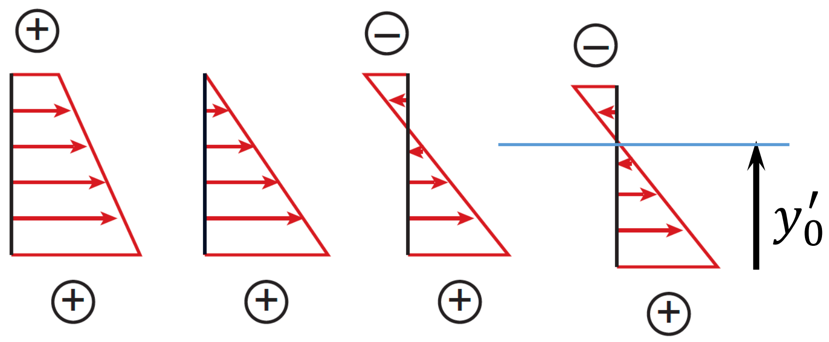
Contrainte des poutres sous charge axiale et transverse

- Pour calculer la position du nouvel axe neutre y_0' (où σ_x=0):

$$\sigma_x(y = y_0') = 0 = \frac{F_x}{A} - E\frac{y_0' - y_0}{\rho}$$

$$y_0' = \frac{F_x}{AE}\rho + y_0 = \frac{F_x}{AE}\frac{EI_{z,y_0}}{M_z(x)} + y_0$$

$$y_0' = \frac{F_x}{M_z(x)}\frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$



- y_0' peut être à l'extérieur de la poutre !

Voir Q1 et Q4 série semaine 8a

Exemple

Charge inclinée

- Calculer la position de l'axe neutre en fonction de α pour une poutre de section carrée t

- Nous appliquons la superposition et divisons le problème en deux :

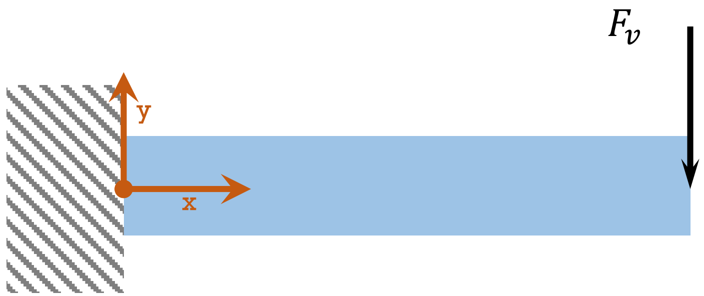
  - **Une force verticale appliquée à l'extrémité**
    $F_v = F_0 \cos(\alpha)$

  - **Une force horizontale appliquée à l'extrémité**
    $F_h = F_0 \sin(\alpha)$

Exemple

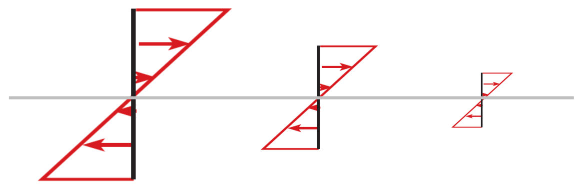
Charge inclinée

- **Premier problème : la force verticale**
- Force de cisaillement: $V(x) = F_v$
- Moment de flexion: $M_z(x) = F_v(x - L)$
- Distribution de la contrainte
  - $\sigma_{x,vert}(x,y) = -\dfrac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}y$
  - l'origine est située au milieu de la barre, donc ici $y_0 = 0$



$$\sigma_x(x,y) = -\frac{F_v(x-L)}{\frac{t^4}{12}}y$$

$$= -\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y$$



La valeur de la contrainte à la surface de la poutre dépend de x, mais l'axe neutre reste à $y = 0$

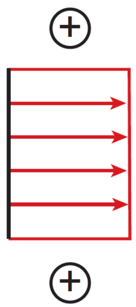
Exemple

Charge inclinée

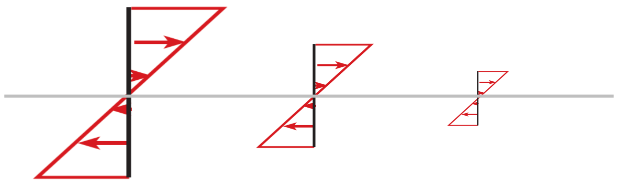
- **2ième problème : la force horizontale**
- Force interne: $N(x) = F_h$
- Répartition de la contrainte

$$\sigma_{x,horiz}(x,y) = \frac{F_h}{A}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{F_h}{A} = \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$

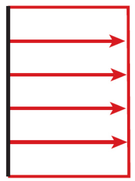


$$\sigma_x(x,y) = -\frac{12F}{t^4}(x-L)y$$



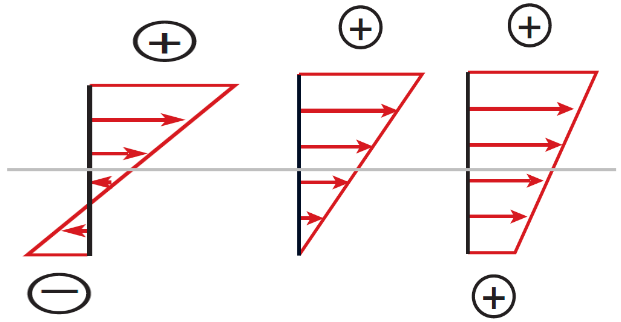
Contrainte du à F (l'axe neutre est au centre)

+

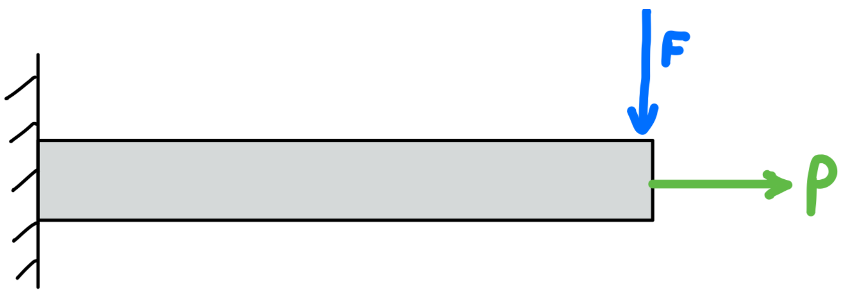


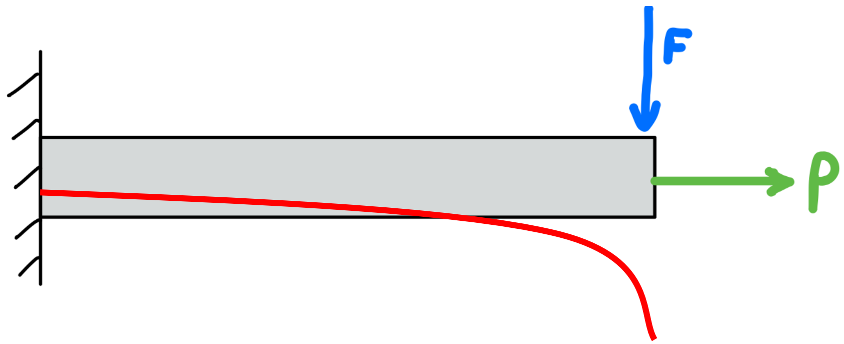
Contrainte due à P (constante partout)

=



Contrainte totale





Exemple

Charge inclinée

- **Combinons:**

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y + \frac{F_0\sin(\alpha)}{t^2}$$

- La position à laquelle le contrainte (et la déformation relative) valent zéro:

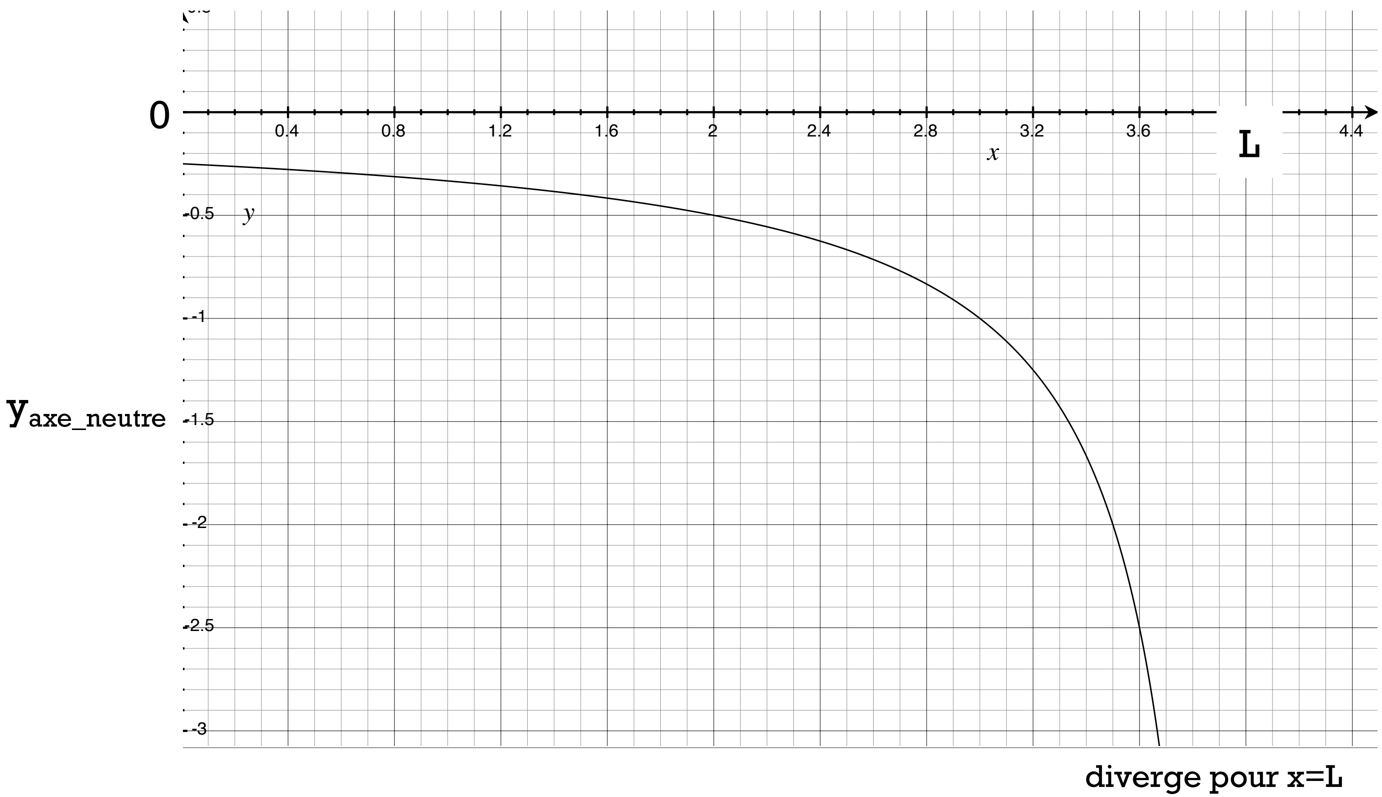
$$\sigma_x(x, y_{nouvel\_axe\_neutre}) = 0$$

$$-\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y_{n.a.neutre} + \frac{F_0\sin(\alpha)}{t^2} = 0$$

$$y_{n.a.neutre} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{t^2}{12}\frac{1}{x-L} = \frac{t^2}{12}\frac{\tan(\alpha)}{x-L}$$

- La position de l'axe neutre (où $\sigma_x(x) = 0$) n'est pas constante le long de la poutre!

Positon axe neutre en fonction de *x*

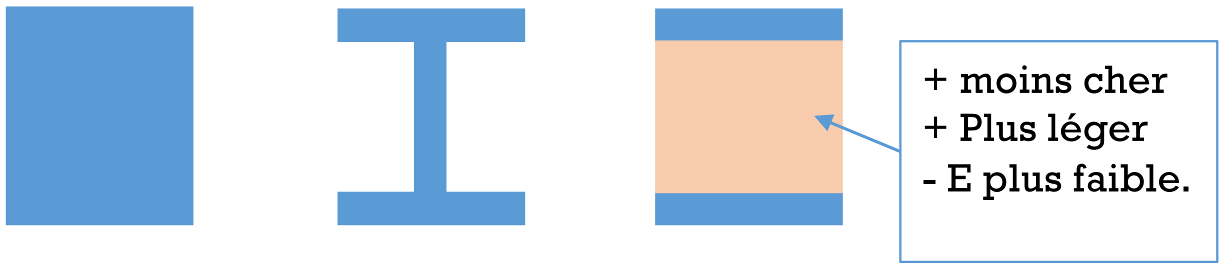


Semaine 8a – partie 2
Objectifs d'apprentissage de cette partie

- Pour des poutres composites:
  - Exprimer déformation relative dans les différente couches, et savoir qu'elle est continue
  - Exprimer contraintes dans les différente couches, et savoir qu'elle est dis-continue
  - Calculer axe neutre composite
  - Formule flexion pour poutres composites

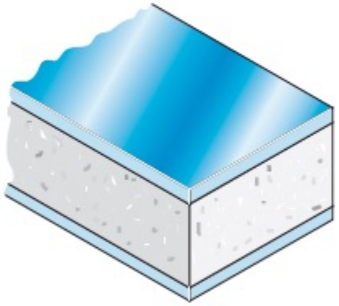
Poutres composites

- Jusqu'à maintenant, les poutres ont été homogènes, faites d'un seul matériau.
- Nous avons vu que certaines sections sont plus efficaces que d'autres; elles peuvent mieux résister aux charges
- nous pouvons faire (beaucoup) mieux avec des composites
  - comprendre la distribution des contraintes et déformations permet de concevoir des poutres plus performantes, plus légères, moins chères, plus efficaces

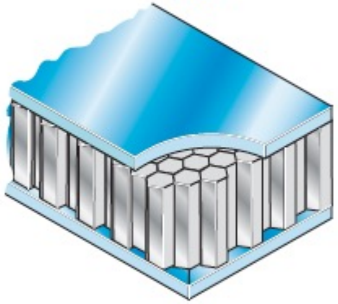


On met à l'extérieur de la poutre le matériau “costaud” car c’est la que les contraintes sont élevées:

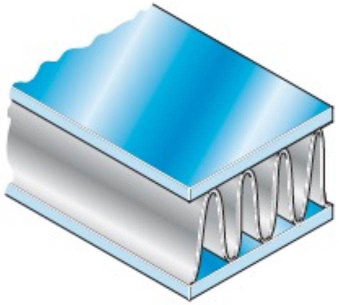
Au centre, peu de contraintes, on peut utiliser un matériau léger et « faible ».



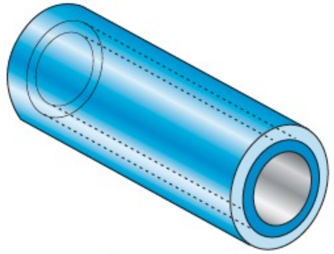
(a)



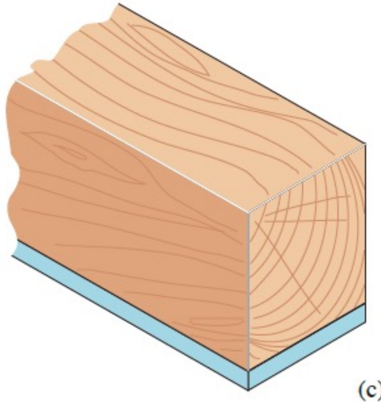
(b)



(c)

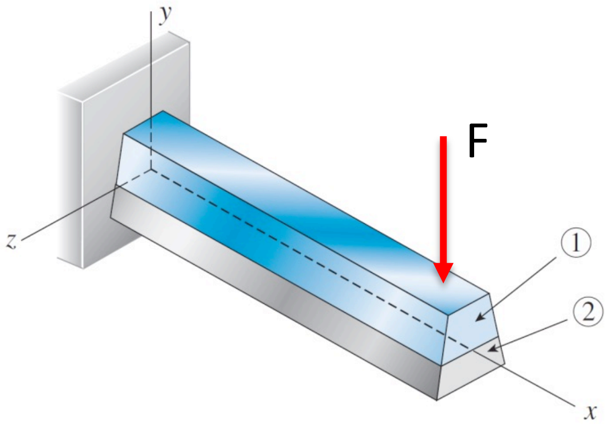


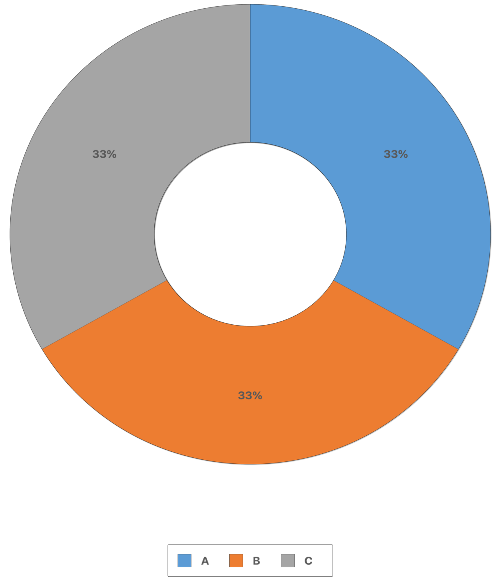
(b)



(c)

Déformation relative dans une poutre composite: quel graphe est juste?

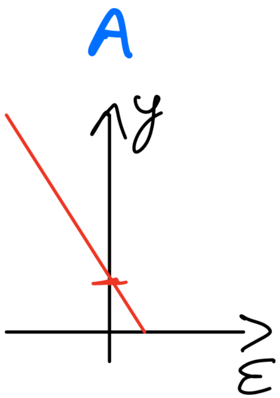




A

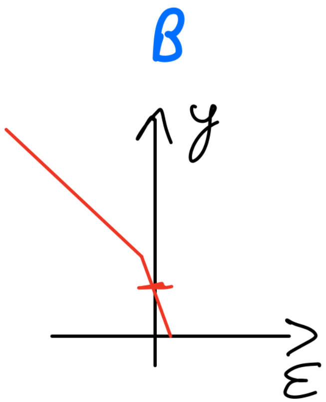
B

C



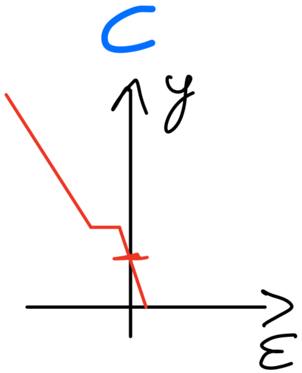
$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$

partout



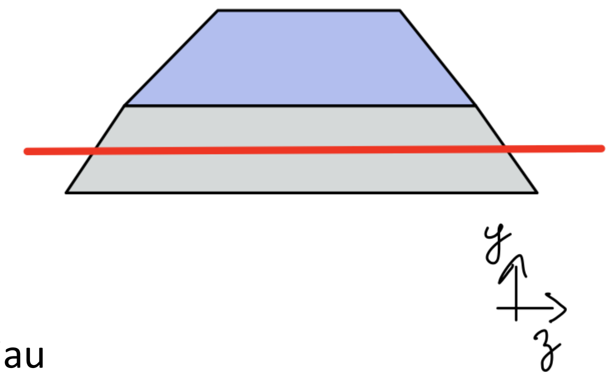
$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$

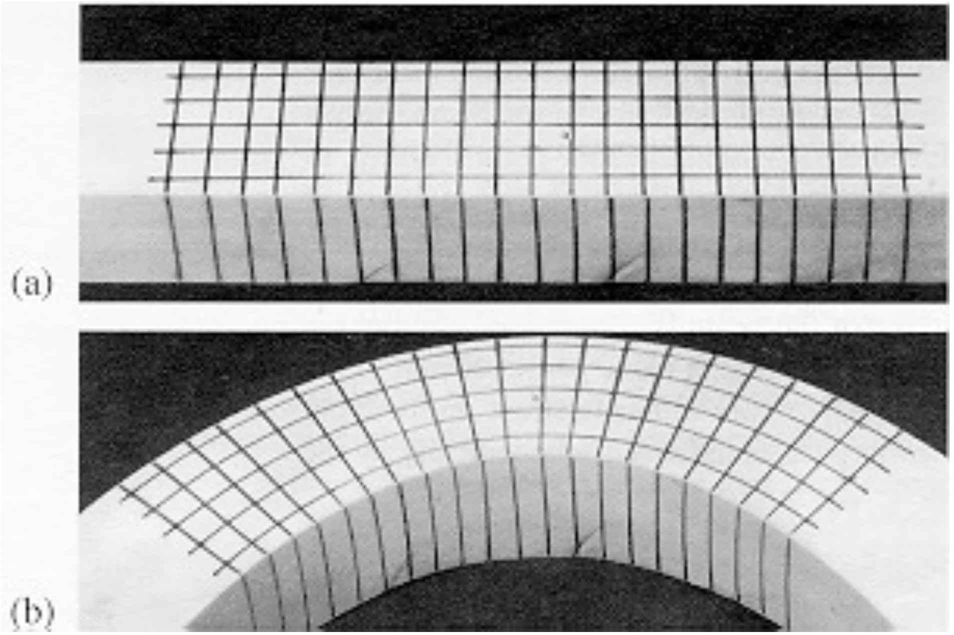
Pour chaque matériau (pente différente)



$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$

Pour chaque matériau et discontinuité à l'interface





Les plans normaux à l'axe de la poutre avant
la flexion resteront plan après fléchissement

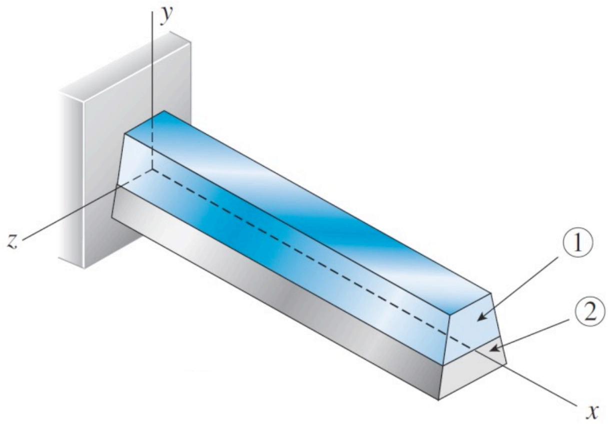
Déformation relative ε_x dans une poutre Composite

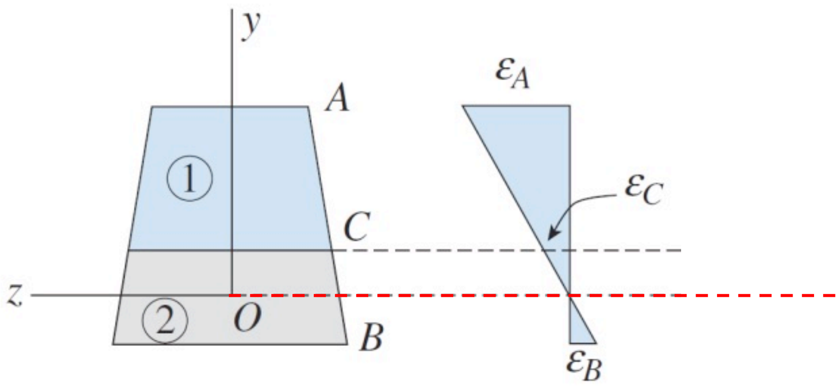
en flexion pure

- Les plans normaux à l'axe de la poutre avant la flexion restent plan après fléchissement
- Après déformation, l'axe neutre garde la même longueur
- mais pour toute autre ligne parallèle:

$$ds = \left(\rho - (y - y_0)\right) d\theta = ds_0 - (y - y_0)\frac{ds_0}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}}$$

(comme poutre mono-matériau, même raisonnement)





- Dans cette figure, $y = 0$ a été placé à l'axe neutre
- attention: l'axe neutre d'un composite n'est pas situé au centroïde de l'objet!

Contraintes normales σ_x dans poutre Composite

Flexion pure - Contrainte normale σ_x en fonction de y

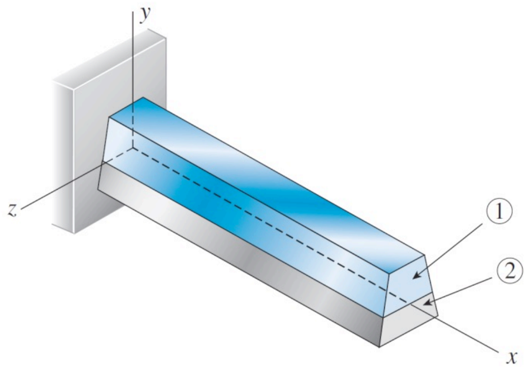
- $\varepsilon_x = -\frac{y-y_0}{\rho}$
- Mais le calcul de la contrainte σ_x est différent que mono-matériau
- Utiliser la loi de Hooke?

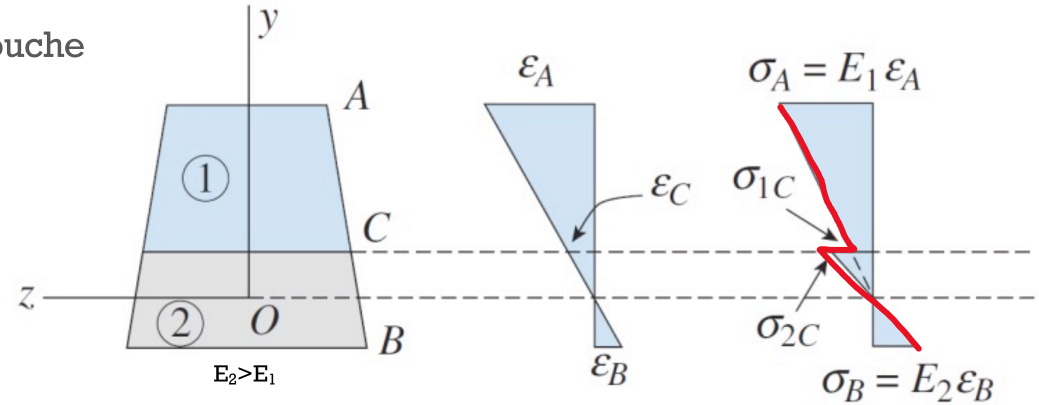
$$\cancel{\sigma_x = E\varepsilon_x = -E\frac{y-y_0}{\rho}}$$

pas de façon globale, faut le faire couche par couche

$$\sigma_A = E_1\varepsilon_A \qquad \sigma_B = E_2\varepsilon_B$$

$$\boxed{\sigma_{x,i} = E_i\varepsilon_x = -E_i\frac{y-y_0}{\rho}}$$





$\varepsilon(y)$ est continue, mais $\sigma(y)$ peut être discontinue aux interfaces

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

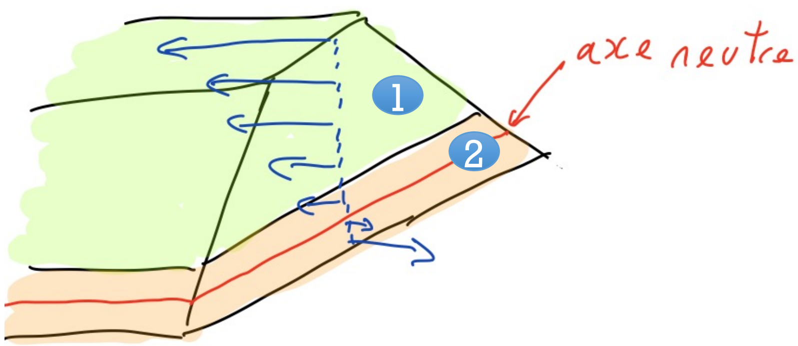
Sans forces axiales

- Nous « coupons » (méthode des sections) puis

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\iint_{\text{section1}} \sigma_{x1}\, dA + \iint_{\text{section2}} \sigma_{x2}\, dA = 0$$

$$\sigma_{x,i} = -E_i \frac{y - y_0}{\rho}$$



$$E_1 \iint_{\text{section1}} (y - y_0)\, dydz + E_2 \iint_{\text{section2}} (y - y_0)\, dxdz = 0$$

$$y_0 = \frac{E_1 \iint_1 \; y\, dA + E_2 \iint_2 \; y\, dA}{E_1 \iint_1 \; dA + E_2 \iint_2 \; dA}$$

Attention au choix de l'origine pour les intégrales

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales

- Plus généralement

$$\sum F_x = N = 0$$

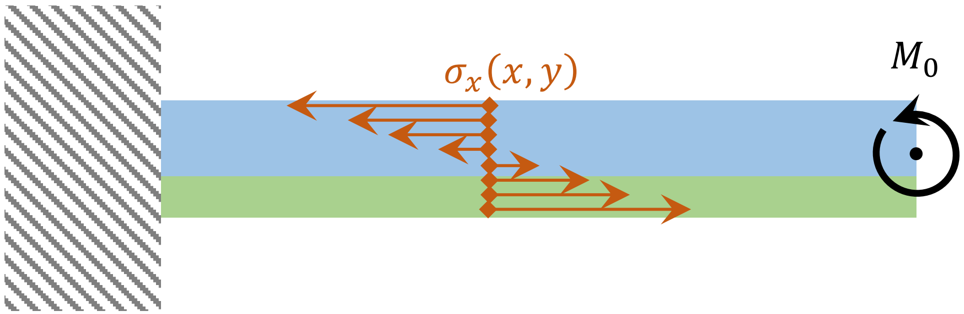
$$N = \iint \sigma_x(x,y)\, dy\, dz = \sum_i \iint E_i \varepsilon_x(x,z)\, dy\, dz = -\sum_i \iint E_i \frac{(y-y_0)}{\rho} dy\, dz = 0$$

chaque intégrale est seulement sur la section yz du matériau i: $dA = dxdz$

$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i \frac{y}{\rho} dA_i}{\sum_i \int \frac{E_i}{\rho} dA_i} = \frac{\sum_i \int E_i y\, dA_i}{\sum_i \int E_i\, dA_i} = \frac{\sum_i E_i \int y\, dA_i}{\sum_i E_i \int dA_i} = \boxed{\frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i} = y_0}$$

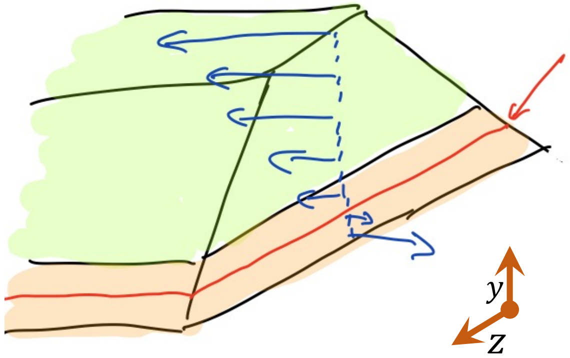
Ce un centroïde pondéré par le module de Young

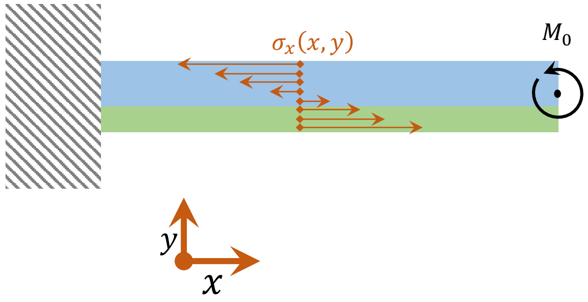
$$\boxed{Q_i = \int_{matériau\ i} y\, dydz}$$



Contraintes normales dans une poutre Composite

Lien entre Moment de flexion $M_z(x)$ et contraintes normales





Moment de flexion $M_z(x) \; = \; M_0$ dans cet exemple

$\sum$M =0 pour chaque section dans le plan *yz*

$$M_z(x) + \iint \sigma_x(x,y)(y - y_0)\, dA = 0$$

Contraintes normales dans une poutre Composite

Lien entre Moment de flexion et contraintes normales

Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales (par rapport à l'axe neutre)

$$M_z(x) = -\iint \sigma_x(x,y)(y-y_0)\,dA = \sum_i \iint E_i \frac{(y-y_0)^2}{\rho}\,dA$$

$$M_z(x) = \frac{1}{\rho}\langle EI_{z,y_0}\rangle;$$

avec $\boxed{\langle EI_{z,y_0}\rangle = \sum_i E_i \iint (y-y_0)^2\,dA = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}}$ Rigidité en flexion

$$\boxed{\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y-y_0)}$$

Formule flexion pour poutres composites

- Note: Si l'origine est prise sur l'axe neutre: $y_0 = 0$

$I_{z,y_0,i}$ = moment d'inertie de l'objet "i" par rapport à l'axe neutre y_0 du composite (pas par rapport à l'axe neutre de l'objet *i* !)

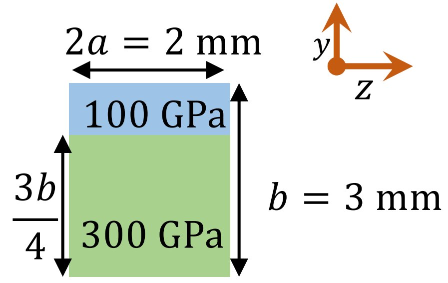
Exemple. Charges uniquement en *y*

Poutre composite avec 2 charges ponctuelles

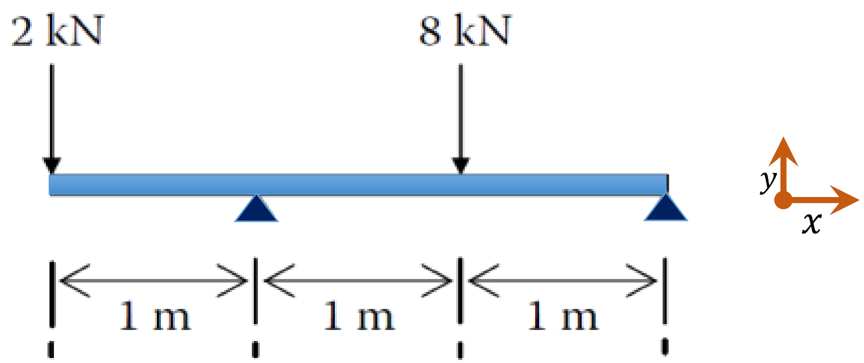
- **Trouver les coordonnées x et y des points où la contrainte normale sera maximum**

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y-y_0)$$

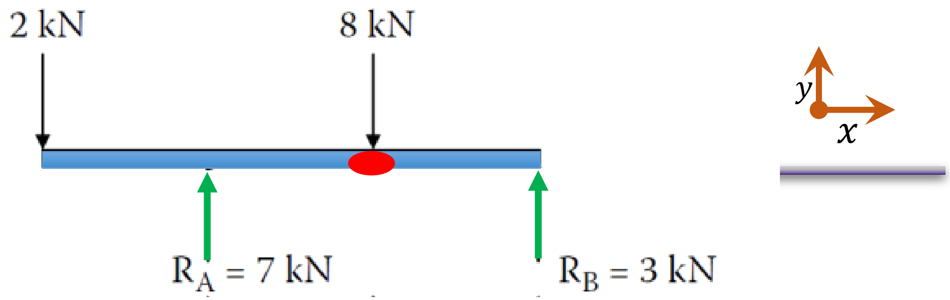
- Pour maximiser σ_x nous devons:
  1. trouver x où $M_z(x)$ est maximum
  2. trouver y où $E(y)(y-y_0)$ est maximum
  3. calculer $\langle EI_{z,y_0}\rangle$



poutre de section rectangulaire, 2 matériaux

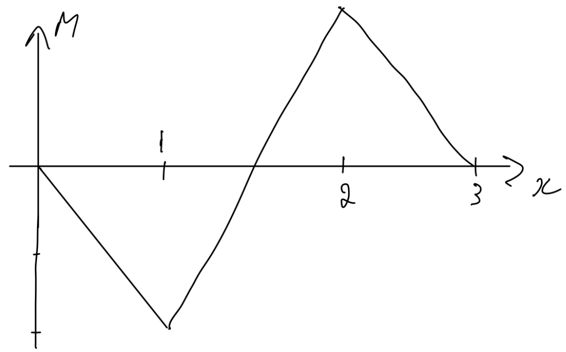


Exemple



- Partie 1:
  - Calculer (puis maximiser) $M_z(x)$

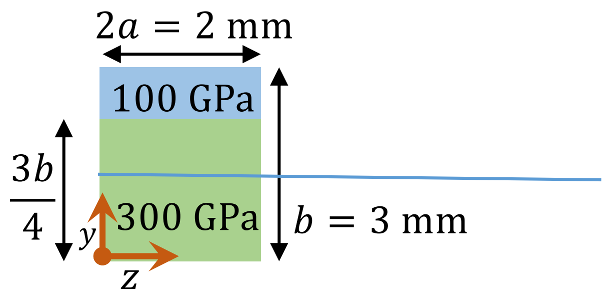
$$V(x) = \begin{cases} -2\text{ kN} & 0 \leq x \leq 1 \\ 5\text{ kN} & 1 \leq x \leq 2 \\ -3\text{ kN} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad M_z(x) = \begin{cases} -2x\ kN.m & 0 \leq x \leq 1 \\ 5x - 7kN.m & 1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 9kN.m. & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



- $M_z(x)$ est maximum pour $x = 2$ m; $\quad M_z(x = 2\text{ m}) = 3\,\dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$

Exemple

- Partie 2
  - Maximiser $E(y)(y-y_0)$
  - Nous calculons d'abord la position de l'axe neutre:



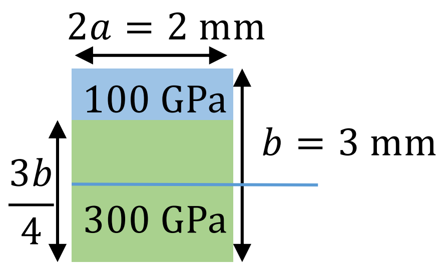
$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i y \, dA}{\sum_i \int E_i \, dA}$$

$$= \frac{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_0^{\frac{3b}{4}} y \, dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{3b/4}^{b} y \, dy}{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_0^{\frac{3b}{4}} dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{3b/4}^{b} dy}$$

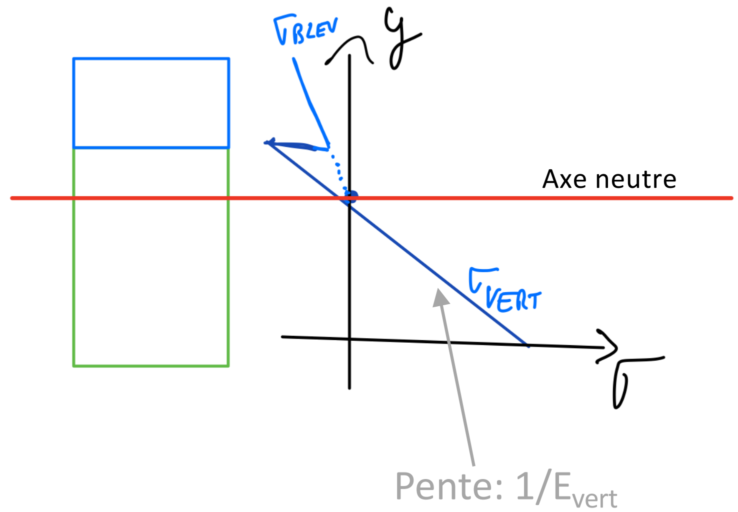
$$= \frac{300\text{GPa} \cdot 2a \cdot \int_0^{\frac{3b}{4}} y \, dy + 100\text{GPa} \cdot 2a \cdot \int_{\frac{3b}{4}}^{b} y \, dy}{300\text{GPa} \cdot 2a \cdot \frac{3b}{4} + 100\text{GPa} \cdot 2a \cdot \frac{b}{4}}$$

$$= \frac{17}{40} b = 0.425 b$$

Exemple



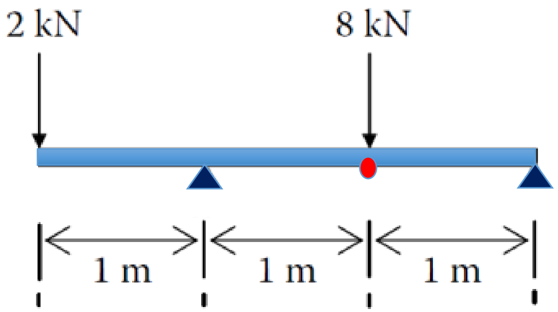
- Partie 2: Maximiser $E(y)(y - y_0)$
  - Nous avons trouvé l'axe neutre: $y_0 = \frac{17}{40}b$
  - Maintenant, nous maximisons en comparant $E_i(y - yo)$ sur la surface supérieure etla surface inférieure de la poutre, car c'est la que $y - y_0$ sera le plus grand
    - $E(y_{top})|y_{top} - y_0| = E(b)\left|b - \frac{17}{40}b\right| = 100\text{GPa} \cdot \frac{23}{40}b = 57.5$ GPa. b
    - $E(y_{bot})|y_{bot} - y_0| = E(0)\left|0 - \frac{17}{40}b\right| = 300\text{GPa} \cdot \frac{17}{40}b = 127.5$ GPa. b
  - Le maximum de $E(y)(y - y_0)$ est donc tout en bas de la poutre à $y = 0$



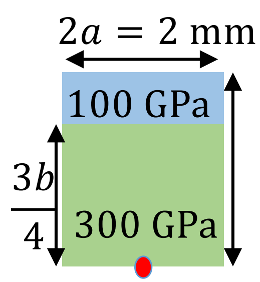
Exemple

- Partie 3

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y - y_0)$$



- La contrainte est maximum pour x=2 m et y=0 m



$$\langle EI_{z,y_0}\rangle = E_1 I_{1,yo} + E_2 I_{2,yo} =$$

$$= E_1(I_{1,y1} + A_1(y_1 - y_0)^2) + E_2(I_{2,y2} + A_2(y_2 - y_0)^2)$$

(Steiner pour décaller les axes pour le calcul des I_i, y_o)

$$I_{1,y1} = \frac{(2a)(3b/4)^3}{12} \qquad I_{2,y2} = \frac{(2a)(b/4)^3}{12}$$

Est-ce que le max de $E(y)(y - y_0)$ aurait pu être à l'interface? Par exemple, si la partie bleu est souple, eg E_{bleu} = 1 GPa ?

- Dans ce cas, les contrainte à $y = 0$ (en bas) et à $y = 3b/4$ (l'interface) seront quasi-égales, et toutes 2 beaucoup plus grandes qu'à y=b (le dessus)
- Mais toujours contrainte bas > contrainte à interface, car y_0 sera toujours juste un poil plus haut que $3b/8$, car la partie blue décallera toujours l'axe neutre vers le haut