Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ on définit une famille de conique par son équation cartésienne :

$$\mathcal{F}: \quad m\,x^2 + 2xy + m\,y^2 - 2x + 2y = 0\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

a) Déterminer, en fonction du paramètre m, le genre et la dégénérescence des coniques de $\mathcal{F}$, (on ne demande pas l'équation des droites de dégénérescence).

b) On considère les coniques de $\mathcal{F}$ qui sont des hyperboles et on note R_u le repère dans lequel leur équation est réduite.
Déterminer l'équation réduite de ces hyperboles.
Puis déterminer la valeur de m correspondant à l'hyperbole dont les asymptotes ont pour équation $\overline{y} = \pm\sqrt{2}\,\overline{x}$ dans le repère R_u.

c) On fixe $m = 2$. Déterminer l'équation réduite de la conique. Déterminer les coordonnées dans R_e des sommets se trouvant sur l'axe focal.
Représenter avec soin et précision cette conique dans le repère R_e. 8 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Soient A et A' les deux sommets de $\mathcal{H}$, (A d'abscisse positive) et M un point courant de cette hyperbole.

On considère la tangente t à $\mathcal{H}$ en M, la perpendiculaire n à t passant par A et la droite d passant par A' et M.

Soit P le point d'intersection des droites n et d.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque le point M décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$. Caractériser avec précision la nature géométrique de ce lieu. 4.5 pts

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère une droite d d'équation $2x + y = 0$ et un point $S\,(-3\,,\,1)$.

Déterminer l'équation cartésienne de la parabole de directice d et de sommet S. 2.5 pts