Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM :

PRENOM :

Groupe

1. Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les trois endomorphismes suivants :

- r : rotation de centre O et d'angle $\varphi = -\frac{\pi}{27}$,
- s : symétrie orthogonale telle que l'image du point $P(0, 4)$ est $P'(2, 2\sqrt{3})$,
- g est donné par sa matrice dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$
  $M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 2\alpha + 1 \end{pmatrix}$ par rapport à B.

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $l = g + s \circ r^{18}$ par rapport à B.

b) Déterminer α sachant que l est composée d'une homothétie et d'une projection sur l'axe $(O, \vec{e}_2)$, de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Puis déterminer k, rapport de l'homothétie.

3,5 pts

2. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On considère une affinité f d'axe une droite a passant par le point $A(-2, 3)$, de rapport $\lambda = 2$ et de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice M'_f de l'application f dans une base B', à préciser, où la matrice M'_f est diagonale.

b) Déterminer la matrice M_f de l'application f dans la base B.

Soit $h = g \circ f$ où g est une projection orthogonale sur la droite $b : 2x - y = 0$.

c) Déterminer $\operatorname{Im} h$ et $\operatorname{Ker} h$.

d) Déterminer, avec précision, la nature géométrique de h.

4,5 pts

3. L'espace $\mathbb{R}^3$, d'origine O est muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3)$.
Soit f l' endomorphisme sur $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice M_f par rapport à B :

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les équations paramétriques de $\operatorname{Ker} f$.

Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un plan et en donner deux générateurs, notés $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Calculer $f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$, $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}$.
Déterminer, avec précision, la nature géométrique de f . 3 pts

4. Soient $B_v = (\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2)$ et $B_a = (\vec{a}_1\,,\,\vec{a}_2\,,\,\vec{a}_3)$ des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

On donne les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = 2\,\vec{e}_2 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1 - \vec{e}_2 = \vec{0} \\ \vec{e}_2 - \vec{a}_3 - \vec{e}_3 = \vec{0} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{2}\,(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ \vec{u}_2 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 \end{cases}$$

a) Montrer que $B_e = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3)$ et $B_u = (\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Soit la droite d dont l'équation cartésienne dans la base B_u est la suivante :

$$d\,:\,x' + 2y' - 3 = 0\,.$$

Déterminer l'équation cartésienne de d dans la base B_v .

c) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$f(\vec{a}_1) = \vec{0}$
$f(\vec{a}_2) = -\vec{v}_2$
$f(\vec{a}_3) = \vec{v}_1$.

Déterminer la matrice, notée M', de f relativement aux bases B_e et B_u .

Soit le vecteur $\vec{x} = \vec{e}_1 - 12\,\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
Déterminer les composantes du vecteur $\vec{y} = f(\vec{x})$ dans la base B_v .

4 pts