Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 40 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Soient g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et l'application linéaire f telle que $8\,f = g$.
On note M_g la matrice de g, relativement à la base canonique E de $\mathbb{R}^3$.

$$M_g = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α la droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

est-elle un sous-espace propre de f ?
Quelle est la valeur propre de f associée à cet espace propre?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de α, M_g est-elle diagonalisable?
Justifiez rigoureusement votre réponse.

(c) On pose $\alpha = 4$.

Déterminer une base propre E' de g. Donner la matrice de g dans cette base, ainsi que la matrice de passage P de E à E'.
Déterminer avec précision la nature géométrique de g et de f. 5 pts

Réponse : *a)* $\alpha = 4$; $\lambda = 1$ *b)* $\alpha \in \mathbb{R} - \{8\}$

c) Base propre : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M' = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g est composée d'une homothétie de rapport 4 avec une affinité d'axe le plan $(O\,,\vec{u}_1\,,\vec{u}_2)$, de direction $\vec{u}_3$ et rapport 2

f est une affinit d'axe $(O\,,\vec{u}_3)$, de direction le plan $(O\,,\vec{u}_1\,,\vec{u}_2)$ et rapport $1/2$

2. Dans le plan muni de la base canonique orthonormée $\mathcal{B}= (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$, on considère un endomorphisme f de matrice M_f tel que :

- les valeurs propres de M_f sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$,
- les vecteurs propres associés sont respectivement $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer la matrice M_f dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Soit la projection g dont l'image est la droite $x - y = 0$ et le noyau est la droite $x - 2y = 0$.

(b) Chercher la matrice de $h = f - 2\,g$ dans la base canonique $\mathcal{B}$; puis étudier la nature géométrique de h. 4 pts

Réponse :

$M_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_h = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad M'_h = -3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

h est composée d'une homothétie de rapport -3 avec une affinité d'axe $3x - y = 0$, de direction $\vec{w} = \vec{e}_1$ et rapport -2

3. Dans l'espace, muni de la base canonique orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{e_3})$, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{a} \ + \ 2\,(\vec{x}\cdot\vec{b})\,\vec{b} \end{array}$$

où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux et $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$.

Par le calcul vectoriel, montrer, en le justifiant, que f est diagonalisable.
Donner les sous-espaces propres et une base propre.
Déterminer avec précision la nature géométrique de f.

2 pts

Réponse :

$\lambda_1 = 1\,, E(1) = (O\,,\vec{a})$

$\lambda_2 = 2\,, E(2) = (O\,,\vec{b})$

$\lambda_3 = 0\,, E(0) = (O\,,\vec{c})\,,\ \vec{c} \parallel \vec{a}\times\vec{b}$

$B' = (\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}) \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Discuter l'existence et l'unicité des solutions du système d'équations linéaires suivant en fonction des paramètres réels α et m.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (\alpha-1)\,y & + & z & = & 1 \\ (4-\alpha)\,x & + & 2\,y & + & z & = & m \\ (2\alpha-4)\,x & + & 4\,y & + & (\alpha-1)\,z & = & -3 \end{array}\right.$$

4 pts

Réponse :

$\alpha = 3\,, \forall m \in \mathbb{R}$: pas de solution

$\alpha = -2\,, m = 1$: infinité de solution

$\alpha = -2\,, m \neq 1$: pas de solution

$\alpha \neq -2\,,\ 3$: solution unique