Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 4

Applications linéaires : exercice 28

(a) On détermine les matrices de l et de l'affinité s en calculant l'image des vecteurs de la base.

- $l(\vec{u}) = k\,\vec{u} + \alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = (\alpha + k)\,\vec{u}$

  $l(\vec{v}) = k\,\vec{v} + \alpha\,(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = k\,\vec{v} + 3\alpha\,\vec{u}$

  D'où $\quad M_l = \begin{pmatrix} \alpha + k & 3\alpha \\ 0 & k \end{pmatrix}$

- $s(\vec{u}) = 1\vec{u} + 0\vec{v}$

  $s(\vec{v}) = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}$

  D'où $\quad M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $M = M_l \cdot M_s = \begin{pmatrix} \alpha + k & 3\alpha \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + k & -3\alpha \\ 0 & -k \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$

(b) On pose $k = -2$ d'où : $M = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & -3\alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Une projection n'est pas bijective donc

f pas bijective $\quad\Leftrightarrow\quad \det M = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = 2$

D'où $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det M = 0$ est une condition nécessaire pour que f soit une projection mais il faut encore s'assurer qu'elle n'est pas composée avec une autre application.

Il faut donc déterminer la nature géométrique de f.

On commence par chercher si il est possible de former une base à l'aide des directions de $\operatorname{Im} f$ et Ker.

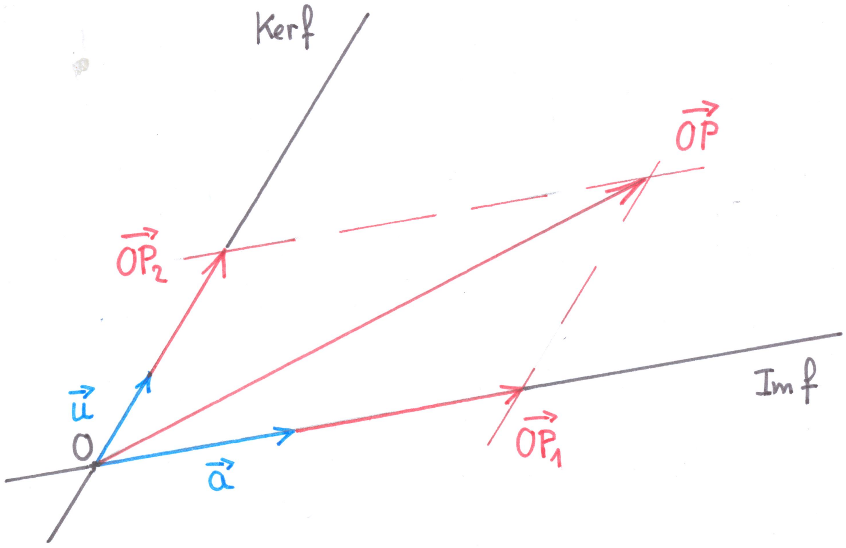
- $\operatorname{Im} f = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{sev} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{sev}$

  $\operatorname{Im} f$ est la droite $(O\,,\vec{a})$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $f(\vec{x}) = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad y = 0$

  $\operatorname{Ker} f$ est la droite $(O\,,\vec{u})$.

- Les directions $\vec{a}$ de $\operatorname{Im} f$ et $\vec{u}$ Ker étant linéairement indépendantes, on peut décomposer un vecteur quelconque $\overrightarrow{OP}$ suivant ces directions. Cette décomposition est unique.
  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{u}$



  $f(\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OP}_1) + f(\overrightarrow{OP}_2) = \alpha\, f(\vec{a}) + \beta\, f(\vec{u}) = \alpha\, f(\vec{a})$
  $(f(\vec{u}) = \vec{0}$ car $\vec{u} \in \operatorname{Ker} f)$.
  On calcule

  $$f(\alpha\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,\alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha\vec{a}$$

  Il y a donc aussi une homothétie de centre O et rapport 2.

  Finalement f est une projection sur la droite $(O\,,\vec{a})$, de direction parallèle à $\vec{u}$, composée avec l'homothétie de rapport 2 : $\quad f = h \circ p$.

  Si $k = -2$, il n'est pas possible que f soit uniquement une projection.

(c) On pose $k = -1$ d'où : $M = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f pas bijective $\quad\Leftrightarrow\quad \det M = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = 1$

D'où $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det M = 0$ est une condition nécessaire pour que f soit une projection mais il faut encore s'assurer comme dans le cas précédent qu'elle n'est pas composée avec une autre application.

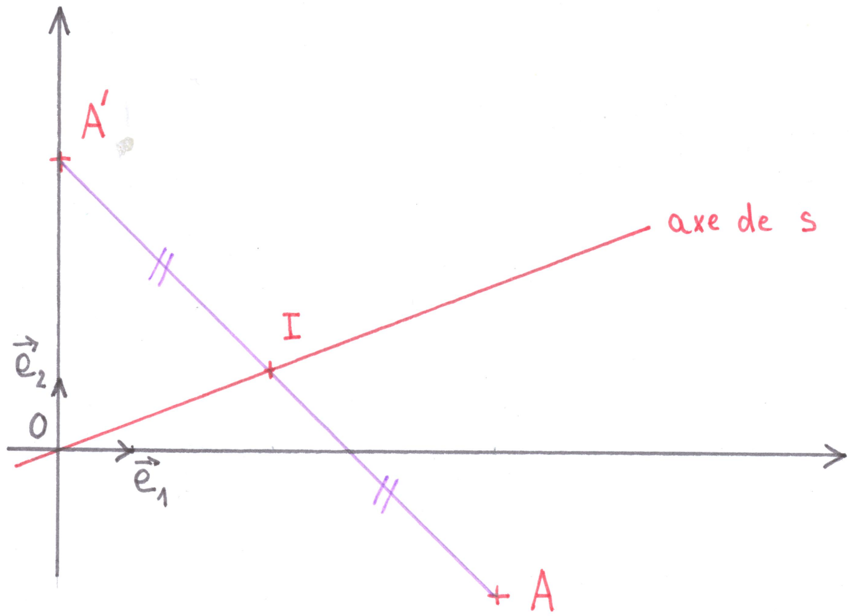
- $\operatorname{Im} f$ est la droite $(O\,,\vec{a})$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(\vec{x}) = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad y = 0$
  $\operatorname{Ker} f$ est la droite $(O\,,\vec{u})$.
- On calcule

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Dans ce cas il n'y a pas d'homothétie.
Si $k = -1$, f est une projection sur la droite $(O\,,\vec{a})$, de direction parallèle à $\vec{u}$.

Applications linéaires : exercice 30

(a) L'application étant linéaire, son axe passe par l'origine et par le point I, milieu de AA'.



- On détermine le point I, milieu de AA' : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

  L'axe de s est la droite $(O\,,\overrightarrow{OI})$, d'équation cartésienne $x - 3y = 0$.

- La direction de la symétrie est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\,\vec{d}$

- On va utiliser les points A, A' et le point I appartenant à l'axe pour calculer la matrice de s.

  Par hypothèse : $\begin{cases} s(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'} \\ s(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} \end{cases}$ et on pose $M_s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

  D'où :

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a - 2b = 0 \\ 6c - 2d = 4 \end{cases}$$

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 3c + d = 1 \end{cases}$$

  On obtient : $a = c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$

D'où la matrice de s : $M_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque : On peut aussi déterminer l'image des vecteurs de la base en utilisant les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} s(\overrightarrow{OA}) & = & \overrightarrow{OA'} \\ s(\overrightarrow{OI}) & = & \overrightarrow{OI} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 6s(\vec{e}_1) - 2s(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_2 \\ 3s(\vec{e}_1) + s(\vec{e}_2) = 3s(\vec{e}_1) + \vec{e}_2 \end{array}\right.$$

On obtient : $s(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\,\vec{e}_2 \quad$ et $\quad s(\vec{e}_2) = \frac{3}{2}\,\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\,\vec{e}_2$

(b) • $M_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• La rotation r^2 est d'angle $2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, d'où la base étant orthonormée :

$$M_{r^2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

• On détermine $g(\vec{e}_1)$ et $g(\vec{e}_2)$ en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{l} g(\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2) = g(\vec{e}_1) - 2\,g(\vec{e}_2) = -7\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 \\ g(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 \end{array}\right.$$

On obtient : $g(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 \quad$ et $\quad g(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3$.

D'où la matrice de g : $\quad M_g = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

• Finalement $\quad M_f = M_h \cdot M_s + \frac{\sqrt{2}}{2}\,M_g \cdot M_{r^2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $P(x\,,\,y)$ est un point fixe de f si et seulement si :

$$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On obtient la droite d'équation $x + y = 0$, de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Soit le point $M(x\,,\,y)$. On calcule $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ et on montre que ce vecteur est parallèle à une direction fixe $\vec{v}$.

$$f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ -2x - y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ -2x - y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 4y \\ -2x - 2y \end{pmatrix} = (2x + 2y)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\,\vec{v}$$

(e) Une "base judicieuse" est une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

On constate que la direction $\vec{u}$ de l'ensemble des points fixes et $\vec{v}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.
Soit la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$. On calcule l'image de ces vecteurs pour obtenir la matrice de f :

$f(\vec{u}) = \vec{u} = 1\vec{u} + 0\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$f(\vec{v}) = 3\vec{v} = 0\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Dans la base $\mathcal{B}$: $M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

La base choisie est donc "judicieuse". On reconnaît la matrice d'une affinité de direction $\vec{v}$, d'axe la droite $(O\,,\vec{u})$ et
de rapport 3.

Applications linéaires : exercice 31

(a) *Première méthode* :

On pose $M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Par hypothèse $g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$ et si $\vec{u}$ est la direction de l'axe alors $g(\vec{u}) = \vec{u}$.
On commence donc par chercher cette direction $\vec{u}$.
Par définition de l'affinité, la droite (PP') coupe l'axe en un point I tel que :

$\overrightarrow{IP'} = 3\overrightarrow{IP'} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'affinité étant linéaire, son axe est la droite $(O\,,\,\vec{u})$ de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par hypothèse : $\left\{ \begin{array}{l} g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} \\ g(\vec{u}) = \vec{u} \end{array} \right.$ et $M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

D'où :

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -a + 2b & = & 3 \\ -c + 2d & = & 0 \end{array} \right.$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a - b & = & 1 \\ c - d & = & -1 \end{array} \right.$

On obtient : $a = 5$, $b = 4$, $c = -2$ et $d = -1$

D'où la matrice de s : $M_g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Deuxième méthode :

On cherche l'image des vecteurs de la base en utilisant les relations vectorielles.

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} \\ g(\vec{u}) = \vec{u} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 \\ g(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -g(\vec{e}_1) + 2g(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 \\ g(\vec{e}_1) - g(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array} \right.$$

On obtient : $g(\vec{e}_1) = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \quad$ et $\quad g(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

D'où la matrice de s : $M_g = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(b)
- Le noyau de la projection p est la droite $(O\,,\,\vec{u})$. La projection étant orthogonale, son axe est perpendiculaire au noyau.

  Soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cet axe.

- La projection est définie par $p(\vec{x}) \;=\; \big(\vec{x} \cdot \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\big)\, \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

  On en déduit l'image des vecteurs de base

  $$p(\vec{e}_1) \;=\; \big(\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\big)\, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $$p(\vec{e}_2) \;=\; \big(\vec{e}_2 \cdot \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\big)\, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  D'où la matrice de la projection : $\quad M_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- La symétrie est une application telle que $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}$.
  On décompose s^{2k+1} et on utilise cette propriété.
  $s^{2k+1} = s^{2k} \circ s = (s^2)^k \circ s = (\mathrm{Id})^k \circ s = s$

  $\Leftrightarrow$

  $M_{s^{2k+1}} \;=\; M_s$

- $M_s = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & -\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $M_f = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

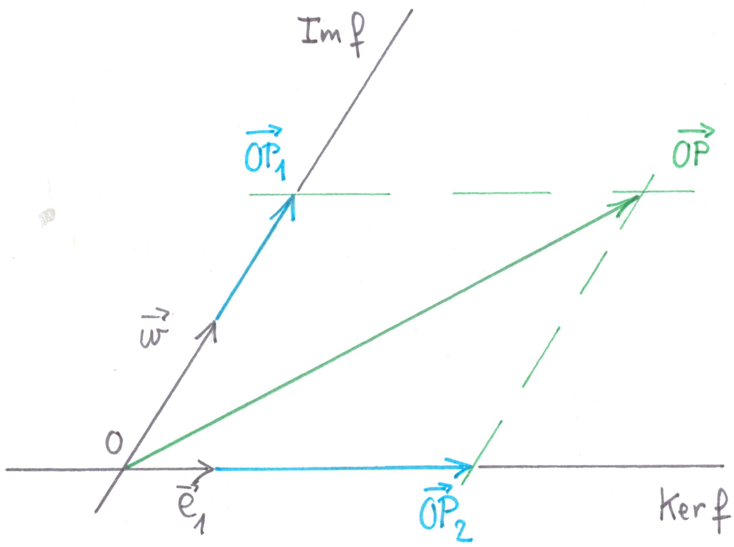
(c) On détermine les directions de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$. Si elles sont indépendantes, elles forment une base et on décompose un vecteur quelconque $\overrightarrow{OP}$ suivant ces directions, puis on cherche son image.

- Il est évident que $\mathrm{Im}\, f$ est la droite d'équations paramétriques
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\vec{w}\,.$

  $\mathrm{Ker}\, f$ est la droite d'équation cartésienne $\;y = 0$, de vecteur directeur $\vec{e}_1$.
- On décompose un vecteur quelconque suivant les directions linéairement indépendantes de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$. Cette décomposition est unique.

  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 \;+\; \overrightarrow{OP}_2$

  $\overrightarrow{OP}_1$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$,
  $\overrightarrow{OP}_2$ est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\mathrm{Ker}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, f$.



On calcule $f(\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OP}_1) + f(\overrightarrow{OP}_2) = f(\overrightarrow{OP}_1) + \vec{0} = f(\overrightarrow{OP}_1)$ car $\overrightarrow{OP}_2 \in \operatorname{Ker} f$

$\overrightarrow{OP}_1 \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP}_1 = \lambda\vec{w}$

$f(\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OP}_1) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{OP}_1$

On en conclut que f est une projection du plan sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$, composée avec une homothétie de rapport $-3\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f = h \circ p$.

Applications linéaires : exercice 32

(a) L'énoncé étant une équivalence, sa démonstration se fait en deux temps.

Première partie :
Hypothèse : il existe f de E vers E linéaire telle que $\ker f = \operatorname{Im} f$
Conclusion : la dimension de E est paire.

Preuve :
Par hypothèse, f existe ; elle est telle que $\ker f = \operatorname{Im} f$, donc :
$\dim\ \ker f = \dim \operatorname{Im} f = n$.
D'où par le théorème de la dimension :
$\dim E = \dim\ \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 2n$: la dimension de E est donc paire.

Deuxième partie :
Hypothèse : la dimension de E est paire.
Conclusion : il existe f de E vers E linéaire telle que $\ker f = \operatorname{Im} f$

Preuve :
Une application linéaire f est complètement définie par l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ. Donc en posant

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) &= f(\vec{e}_2) = \ldots = f(\vec{e}_n) = \vec{0} \\ f(\vec{e}_{n+1}) &= \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_{n+2}) &= \vec{e}_2 \\ \vdots & \\ f(\vec{e}_{2n}) &= \vec{e}_n \end{cases}$$

l'endomorphisme f est bien défini.
Il faut montrer qu'il est tel que : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

- Soit $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\vec{e}_{2n}$

  $\vec{x} \in \ker f \;\Leftrightarrow\; f(\vec{x}) = \vec{0}$

  $$\begin{aligned} \text{Or} \quad f(\vec{x}) &= \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_{2n} f(\vec{e}_{2n}) && \text{car est } f \text{ linéaire} \\ &= \alpha_{n+1}\vec{e}_1 + \alpha_{n+2}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\vec{e}_n && \text{par définition de } f \end{aligned}$$

  Ainsi
  $f(\vec{x}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha_{n+1}\vec{e}_1 + \alpha_{n+2}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\vec{e}_n = \vec{0}$

  Or les n vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sont linéairement indépendants,
  donc $\alpha_{n+1} = \ldots = \alpha_{2n} = 0$.

  Finalement
  $$\begin{aligned} \vec{x} \in \ker f &\Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \in [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n]_{sev} \\ &\Leftrightarrow [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n]_{sev} = \ker f \end{aligned}$$

- On sait que $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_{2n})]_{sev}$

  donc par définition de f : $\operatorname{Im} f = [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n]_{sev}$

Ainsi : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

(b) On remarque que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ et f est donnée selon la même définition que dans la partie (a).

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{0} \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \end{cases}$$

La matrice de f relativement à cette base est : $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par (a) on a donc que $\ker f = \operatorname{Im} f$, ce que l'on peut facilement vérifier.
$\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_2)]_{sev} = [\vec{e}_1]_{sev}$

$\operatorname{Im} f$, et donc aussi $\ker f$, est l'axe Ox.

Détermination de la nature géométrique de f :

- $\det M = 0$: f comporte dans sa décomposition une projection.
- On cherche d'éventuels points fixes :

  $MX = X \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

  Seul l'origine $O(0, 0)$ est fixe.

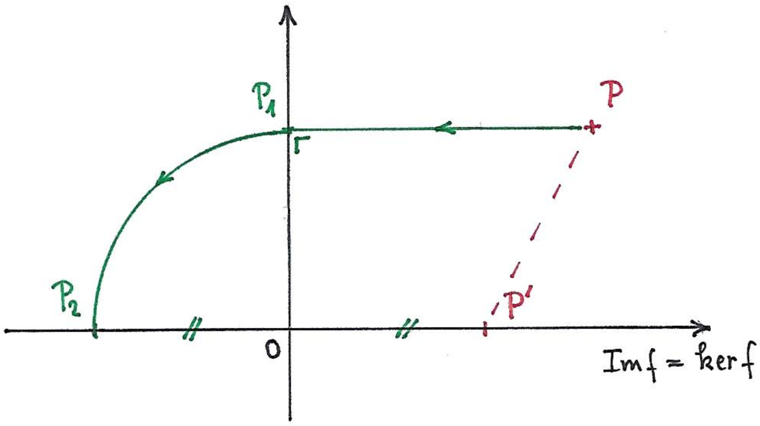
  Il y a une homothétie ou une rotation ou les deux dans la décomposition de f.

Soit par exemple la décomposition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire : $\quad f = h_{-1} \circ r_{\frac{\pi}{2}} \circ p$
où

p est une projection sur $(O, \vec{e}_2)$, de direction parallèle à $\vec{e}_1$,
r est une rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{2}$,
h est une homothétie de centre O et rapport -1.



$$f(\overrightarrow{OP}) \ = \ h\,(r\,(p\,(\overrightarrow{OP}))) \ = \ h\,(r\,(\overrightarrow{OP}_1)) \ = \ h(\overrightarrow{OP}_2) \ = \ (-1)\overrightarrow{OP}_2 \ = \ \overrightarrow{OP'}$$