Analyse I – Série 7

Echauffement. (Périodicité)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

i) La période de f est-elle toujours définie?

ii) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi périodique.

iii) La réciproque de *ii*) est-elle vraie?

iv) La période de $|f|$ est-elle égale à celle de f (si elle est définie)?

Exercice 1. (Convergence de séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$ avec $c \neq 1$ *ii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$ *iii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$ *iv*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

Quelle est la somme de la série *iii*) lorsqu'elle converge?

Exercice 2. (Suite de sommes partielles)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}.$$

i) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.

ii) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

Exercice 3. (Fonctions périodiques)

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant :

i) $f(x) = \dfrac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2}$ *ii*) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ *iii*) $f(x) = \operatorname{tg}(3x) + \cos(\pi x)$

iv) $f(x) = \big(x - [x]\big)^2$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (c.-à-d. $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x] + 1$).

Exercice 4. (Fonctions monotones)

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

i) f et g sont croissantes,

ii) f et g sont décroissantes,

iii) f est croissante et g est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f \circ g$ dans le cas *iii*)?

Exercice 5. (Fonctions hyperboliques)

Vérifier les égalités suivantes :

i) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$

ii) $\big(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\big)^k = \operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous.

i) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ *ii)* $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ *iii)* $f(x) = \operatorname{th}(x)$

iv) $f(x) = \operatorname{coth}(x)$

- Donner le domaine de définition et l'image de f.
- Si nécessaire restreindre le domaine pour rendre f bijective.
- Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
- Esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Exercice 7. (Fonctions bijectives)

i) Soient les fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

ii) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

Exercice 8. (Transformations affines)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction représentée à la page 3. Tracer sur la même figure les graphes des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

i) $g(x) = f(-x)$ *ii)* $g(x) = f(x-5)$ *iii)* $g(x) = f(2x)$ *iv)* $g(x) = f\big(\frac{1}{2}x + 1\big)$

Exercice 9. (Composition de fonctions)

Pour les deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$:

i) $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

ii) $$f(x) = \begin{cases} |2x - 1|, & x \geq -1 \\ -x(x + 2), & x < -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x - 4}, & x \geq 4 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & x < 4 \end{cases}$$

Exercice 10. (V/F : Propriétés de fonctions)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Q1 : Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Q2 : Si f est injective, alors f est monotone.

Q3 : Si f est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque f^{-1} est décroissante.

Q4 : Si $f \circ g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Complément à l'Exercice 8.