Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 11

Rang-Systèmes : exercice 5

Dans un premier temps, il faut discuter le rang de la matrice M en fonction de α.

Puis utiliser l'équivalence :

$\vec{a} \in \operatorname{Im} g \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B \;=\; \operatorname{rg} M$ où B est la matrice augmentée de M :
$B \;=\; (M \quad \vec{a}) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,, \mathbb{R})$

Discussion du rang de M en fonction du paramètre α

Par définition, le rang de M est la dimension de $\operatorname{Im} g$, c'est donc la dimension du sous espace engendré par les vecteurs- colonne de M.

$$\operatorname{rg} M \;=\; \dim \operatorname{Im} g \;=\; \dim\,[\,g(\vec{e}_1)\,, g(\vec{e}_2)\,, g(\vec{e}_3)\,]_{sev} \;\leq\; 3$$

Déterminer le rang revient à tester la dépendance ou l'indépendance des trois vecteurs $g(\vec{e}_1)\,, g(\vec{e}_2)$ et $g(\vec{e}_3)$. On calcule le déterminant de la matrice M.

$$\det M \;=\; \begin{vmatrix} \alpha & 2(\alpha+1) & (\alpha+2)^2 \\ 0 & (\alpha+1) & 3(\alpha+1) \\ -\alpha & -2(\alpha+1) & -1 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\alpha+2)^2-1 \\ 0 & (\alpha+1) & 3(\alpha+1) \\ -\alpha & -2(\alpha+1) & -1 \end{vmatrix} \;=$$

$$=\; \alpha\,(\alpha+1)\,[(\alpha+2)^2-1] \;=\; \alpha\,(\alpha+1)^2\,(\alpha+3)$$

Il y a 4 cas à discuter en fonction des valeurs du paramètre α.

- $\alpha \notin \{\mathbf{-3}\,, \mathbf{-1}\,, \mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} M \;=\; 3 \;=\; \operatorname{rg} g$
- $\alpha = \mathbf{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \det M \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} M \quad \leq\; 2$ La matrice M devient : $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

  Le rang de M est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

  Soit : $P \;=\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad$ donc $\operatorname{rg} M \;=\; 2 \;=\; \operatorname{rg} g$
- $\alpha = \mathbf{-1} \;\Leftrightarrow\; \det M = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} M \;\leq 2$

  La matrice M devient : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Il est évident que $\operatorname{rg} M \;=\; 1$: il existe un déterminant principal P d'ordre 1 différent de 0.
  Soit : $P \;= \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix} \neq 0$

- $\alpha = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \det M = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, M \;\leq 2$

  La matrice M devient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

  Le rang de M est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

  Soit : $P \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\mathrm{rg}\, M \;=\; 2 \;=\; \mathrm{rg}\, g$

Conclusion :

$\alpha \notin \{-3\,,-1\,,0\} \;\Leftrightarrow\; \det M \;=\; 3 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g$

$\alpha \in \{-3\,,0\} \;\Leftrightarrow\; \det M \;=\; 2 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g$

$\alpha \;=\; -1 \;\Leftrightarrow\; \det M \;=\; 1 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g$

On a

$\vec{a} \in \mathrm{Im}\, g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\, B \;=\; \mathrm{rg}\, M$ où B est la matrice augmentée de M :

$B \;=\; (M \quad \vec{a}) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})$

Donc pour chaque valeur de α, on écrit la matrice augmentée B et on discute son rang en fonction du paramètre m.

Il y a 4 cas à discuter.

- $\alpha \notin \{\mathbf{-3}\,,\mathbf{-1}\,,\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, M \;=\; 3 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g$

  Dans ce cas : $\mathrm{Im}\, g \;=\; \mathbb{R}^3$

  et $\vec{a} \;\in \mathrm{Im}\, g$, quelque soit le paramètre m.

- $\alpha \;=\; \mathbf{-3} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, M \;= 2 \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g$

  $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $P \;=\; \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ et $\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ m^2 - 3 \end{pmatrix}$

  On a les équivalences suivantes :

  $\vec{a} \in \mathrm{Im}\, g \;\Leftrightarrow\; \dim\, [\, g(\vec{e}_1)\,, g(\vec{e}_2)\,, g(\vec{e}_3)\,,\, \vec{a}]_{sev} \;=\; \dim \mathrm{Im}\, g \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, B \;=\; \mathrm{rg}\, M$

  et

  $\vec{a} \notin \mathrm{Im}\, g \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, B \;\neq\; \mathrm{rg}\, M$

  avec

  $B \;=\; (M \quad \vec{a}) \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & m^2 - 3 \end{pmatrix}$: matrice augmentée de M

  Or $\mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, M$ si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur P sont nuls.

  Il y a un seul déterminant caractéristique car :
  (nombre de ligne de M) $-$ (rang de M) $= 3 - 2 = 1$.

  Il est d'ordre 3. D'où :

  $$C_1 \;=\; \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & m^2 - 3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & m^2 - 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & m^2 - 3 \end{vmatrix} \;=\; -6\,(m^2 - 1)$$

Si $m \in \{-1\,,1\}$: $C_1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} M \Leftrightarrow \vec{a} \in \operatorname{Im} f$
Si $m \notin \{-1\,,1\}$: $C_1 \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} M \Leftrightarrow \vec{a} \notin \operatorname{Im} g$

- $\alpha = \mathbf{-1} \Leftrightarrow \operatorname{rg} M = 1 = \dim \operatorname{Im} g$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ m^2-3 \end{pmatrix}$$

$$B = (M \quad \vec{a}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & m^2-3 \end{pmatrix} : \text{matrice augmentée de } M$$

Il y a 2 déterminants caractéristiques construits sur P car :
(nombre de ligne de M) $-$ (rang de M) $= 3 - 1 = 2$.

Ils sont d'ordre 2. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} M \Leftrightarrow \vec{a} \notin \operatorname{Im} g$$

($C_1 \neq 0$ donc il est inutile de calculer le deuxième déterminant !)

- $\alpha = \mathbf{0} \Leftrightarrow \operatorname{rg} M = 2 = \dim \operatorname{Im} g$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ m^2-3 \end{pmatrix}$$

$$B = (M \quad \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & m^2-3 \end{pmatrix} : \text{matrice augmentée de } M$$

Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de ligne de M) $-$ (rang de M) $= 3 - 2 = 1$.

Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & m^2-3 \end{vmatrix} = 2\,(m^2+8) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} M \Leftrightarrow \vec{a} \notin \operatorname{Im} g$$

Conclusion :

$$\vec{a} \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \notin \{-3\,,-1\,,0\} \text{ et } \forall m \in \mathbb{R} \\ \alpha = -3 \text{ et } m = \pm 1 \end{cases}$$

Rang-Systèmes : exercice 6

(a) On écrit le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,,\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}(3 \times 1\,,\mathbb{R})$.

Le système possède des solutions ssi $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$ où B est la matrice augmentée de A, c'est-à-dire $B = (A \quad C) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})$.
On note (S) le système donné :

$$(S) : A\,X = C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A et le vecteur $\vec{c}$ de composantes la matrice C. Alors : $(S) \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{c}$

(S) possède des solutions $\quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\vec{c}) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}B = \operatorname{rg}A$

On commence donc par discuter le rang de A. Par définition, le rang de (S) est le rang de la matrice A.

Discussion du rang de A en fonction du paramètre k

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rg}A \leq 3$$

La matrice A est carrée d'ordre 3, discuter son rang revient à discuter son déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1-k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+k \\ 1 & 1-k & k \end{vmatrix} = (k-1)^2\,(k+2)$$

Il y a 3 cas à examiner en fonction des valeurs du paramètre k.

- $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{-2}\,,\mathbf{1}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 3$
- $\mathbf{k = -2} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

  Le rang de A est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

  Soit : $P = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A = 2$
- $\mathbf{k = 1} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \leq 2$

  La matrice A devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Il est évident que le rang de A est égal à 1 : il existe un déterminant principal P d'ordre 1 différent de 0.

  Soit : $P = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Conclusion :

$k \notin \{-2\,,1\} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}(S) = 3$

$k = -2 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}(S) = 2$

$k = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}(S) = 1$

Discussion du rang de B et de l'existence des solutions en fonction du paramètre k

$$B = (A \quad C) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rg}B \leq 3$$

Il y a 3 cas à discuter.

- $\mathbf{k} \notin \{-\mathbf{2}\,,\mathbf{1}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;=\; 3 \;=\; \mathrm{rg}\, B$

  Le système admet des solutions.

- $\mathbf{k} \;=\; -\mathbf{2} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;= 2 \quad \text{et} \quad P \;=\; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

  La matrice B devient : $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

  Or $\mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, A$ si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur P sont nuls.

  Il y a un seul déterminant caractéristique car :
  (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

  Il est d'ordre 3. D'où :

  $$C_1 \;=\; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; (-3)\,(-2-1) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, B \neq \mathrm{rg}\, A$$

  Le système n'admet pas de solutions.

- $\mathbf{k} \;=\; \mathbf{1} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}\, A \;= 1 \quad \text{et} \quad P \;=\; |\; 1 \;|$

  La matrice B devient : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Il est évident que $\mathrm{rg}\, B \;= 1 =\; \mathrm{rg}\, A$.
  (Il y a 2 déterminants caractéristiques et, de manière évidente, ils sont nuls.)

  Le système admet des solutions.

(b) On écrit le système sous forme matricielle :
$A\,X = C\,,\;\; A \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}(3 \times 1\,,\mathbb{R})$.

Le système possède des solutions ssi $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A$ où B est la matrice augmentée de A, c'est-à-dire $B = (A \quad C) \in \mathbb{M}(3 \times 5\,,\mathbb{R})$.
On note (S) le système donné :

$$(S) \;:\; A\,X = C \;\text{ avec }\; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$, de matrice A et le vecteur $\vec{c}$ de composantes la matrice C. Alors : $(S) \;\Leftrightarrow\; f(\vec{x}) = \vec{c}$

(S) possède des solutions $\;\Leftrightarrow\; f^{-1}(\vec{c}) \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \vec{c} \in \mathrm{Im}\, f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A$

On commence donc par calculer le rang de A.
Calcul du rang de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rg}\; A \leq 3$$

On a plusieurs méthodes à disposition pour déterminer le rang de A. Il faut choisir la plus efficace c'est-à-dire celle qui demande le moins de calcul.

Pour déterminer si le rang est 3, il faut extraire de A au moins 1 déterminant d'ordre 3 différent de zéro. Si le rang est 2, on a dû calculer 4 déterminants d'ordre 3 !

On peut considérer les 4 vecteurs colonne de $\mathbb{R}^3$, mais le problème est identique.

On peut considérer les 3 vecteurs ligne de $\mathbb{R}^4$, comme ils ne sont pas proportionnels : rg $A > 1$. On teste si l'un d'entre eux est combinaison linéaire des 2 autres. Cette méthode semble ici plus rapide.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3 \ \text{ et } \beta = -1$$

Les 3 vecteurs sont linéairement dépendants : rg $A < 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} : \text{ces 2 vecteurs sont indépendants : } \operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(S).$$

On choisit un déterminant principal P d'ordre 2, par exemple : $P = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Discussion du rang de B et de l'existence des solutions en fonction du paramètre k

$$\operatorname{rg} A = 2 \quad \text{et} \quad P = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B = (A \quad C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & k \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rg} B \leq 3$$

Or rg $B =$ rg A si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur P sont nuls.

Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1-2k & 7+k & k \end{vmatrix} = 5\,(k-5)$$

Il y a 2 cas à discuter.

- $k \neq 5 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$

  Le système n'admet pas de solutions.

- $k = 5 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$

  Le système admet des solutions.

Rang-Systèmes : exercice 7

(a) On observe que le nombre d'équations est égal aux nombre d'inconnues. Dans ce cas la solution existe et est unique ssi le système est de Cramer.

On note (S) le système donné :

$$(S)\ :\ AX = C \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 8 & 3k & 1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(S) est un système de 3 équations à 3 inconnues. Il possède une solution et elle est unique ssi (S) est un système de Cramer de rang 3. L'application linéaire associée à A étant alors bijective, le système possède toujours une solution.

Géométriquement chaque équation est un plan, et la solution unique est le point où ils s'intersectent.

Ainsi :
(S) est de rang 3 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\text{rg } A = 3$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 8 & 3k & 1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\,(k+3)\,(k-1) \neq 0$$

Conclusion : le système possède une solultion unique ssi $k \notin \{-3\,,\,1\}$.

(b) On observe que le nombre d'inconnues est plus petit que le nombre d'équations.
La solution existe et est unique ssi le nombre d'inconnues est égal aux nombre d'équations et est égal au rang du système.
Il faut donc d'abord discuter le rang du système afin qu'il corresponde au nombre d'inconnues. Puis discuter de l'existence de la solution.
On note (S) le système donné :

$$(S)\ :\ AX = C \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} k & -2 \\ -3 & 6k \\ 2k & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$B = (A\ C)$: matrice augmentée de A.

(S) est un système de 4 équations à 2 inconnues. Donc il possède une solution et elle est unique ssi (S) est un système de Cramer de rang 2.
Géométriquement chaque équation est une droite ; vouloir que la solution soit unique revient à dire que ces 4 droites doivent se couper en un même point.

Ainsi :
(S) est de rang 2 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\text{rg } A = 2$ (le système se réduit à l'intersection de 2 droites)
et
$\text{rg } B = \text{rg } A$ ((S) a une solution : les 4 droites se coupent au même point)

Il faut déterminer k pour que le rang de A soit égal à 2.
Le plus simple est de calculer le rang en considérant la colinéarité des deux vecteurs colonnes de A :

$$\vec{c}_1 = \lambda\ \vec{c}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} k \\ -3 \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6k \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k & = & -2\,\lambda \\ -3 & = & 6\,\lambda\,k \\ 2k & = & -4\,\lambda \\ 1 & = & 2\,\lambda \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k & = & -1 \\ \lambda & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$\mathrm{rg}\ A = 2 \ \Leftrightarrow\ \vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow\ k \neq -1\,.$

Il faut choisir un déterminant principal d'ordre deux.

Soit par exemple : $P = \begin{vmatrix} k & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Il faut déterminer k pour que le rang de la matrice augmentée B soit aussi égal à 2.

$k \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\, A = 2 \qquad$ et $\qquad P = \begin{vmatrix} k & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Soit la matrice augmentée $B = (A\ C) = \begin{pmatrix} k & -2 & k \\ -3 & 6k & 0 \\ 2k & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rg}\, B \leq 3$

Or $\mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, A$ si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur P sont nuls.

Il y a 2 déterminants caractéristiques car :
(nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 4 - 2 = 2\,.$

Ils sont d'ordre 3. D'où :

$$C_1 = \begin{vmatrix} k & -2 & k \\ -3 & 6k & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 0 & k+3 \\ -3 & 6k & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6\,(k+1)\,(2k-3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} k & -2 & k \\ 2k & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 0 & k+3 \\ 2k-1 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(k+1)\,(2k-3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Donc $\ \mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{3}{2}$

Conclusion : (S) possède une solution unique ssi $k = \dfrac{3}{2}\,.$

Rang-Systèmes : exercice 8

(a) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C\,,\ \ A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,,\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}(3 \times 1\,,\mathbb{R})\,.$

Le système possède des solutions ssi $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A$ où B est la matrice augmentée de A, c'est-à-dire $B = (A \quad C) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,,\mathbb{R})\,.$

On note (S) le système donné :

$$(S) \ : \ A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} m-1 \\ 1 \\ -m^2 \end{pmatrix}$$

On détermine d'abord le rang de A.
$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,, \mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$. On calcule donc son déterminant.

$$\det A \ = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \ = \ 0 \quad \text{donc rg } A \leq 2$$

Le rang de A est égal à 2 si et seulement si il existe un déterminant principal P d'ordre 2 différent de 0.

$$\text{Soit} \ : P \ = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{donc} \ \ \text{rg}\, A \ = \ 2$$

Discussion du rang de B et de l'existence des solutions en fonction du paramètre m

$$B = \ (A \quad C) \ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m-1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -m^2 \end{pmatrix} , \quad \text{rg}B \leq 3 \quad \text{et} \quad P \ = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Or rg $B =$ rg A si et seulement si tous les déterminants caractéristiques construits sur P sont nuls.

Il y a un seul déterminant caractéristique car :
(nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1$.

Il est d'ordre 3. D'où :

$$C_1 \ = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m-1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -m^2 \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} 2 & 1 & m-1 \\ 1 & 0 & m \\ 3 & 0 & -m^2+m-1 \end{vmatrix} \ = \ (m+1)^2 \ = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$m = -1$

Le système admet des solutions ssi $m = -1$.
Comme le rang est plus petit que le nombre d'inconnues n ($n = 3 > 2$), il a une infinité de solutions.

(b) Ecrire le système sous forme matricielle : $A\,X = C$, $A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,, \mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}(3 \times 1\,, \mathbb{R})$.

Le système possède des solutions ssi rg$B$ = rg$A$ où B est la matrice augmentée de A, c'est-à-dire $B = (A \quad C) \in \mathbb{M}(3 \times 4\,, \mathbb{R})$.
On note (S) le système donné :

$$(S) \ : \ A\,X = C \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 3-m & 2 & 1 \\ 2m-2 & 4 & m \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} m+1 \\ m^2-1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On commence par déterminer le rang de A.

$A \in \mathbb{M}(3 \times 3\,, \mathbb{R})$ et rg $A \leq 3$. On calcule donc son déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 3-m & 2 & 1 \\ 2m-2 & 4 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 3-m & m-1 & 1 \\ 2m-2 & 6-2m & m \end{vmatrix} = (m-2)^2\,(m+3)$$

Il y a 3 cas à examiner en fonction des valeurs du paramètre m. Pour chaque cas, on détermine si le rang de B est égal au rang de A.

- $\mathbf{m} \notin \{-\mathbf{3}\,,\mathbf{2}\} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} B$

  car $B = (A \quad C) = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & m+1 \\ 3-m & 2 & 1 & m^2-1 \\ 2m-2 & 4 & m & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3\times 4\,,\mathbb{R})$ et $\operatorname{rg} B \leq 3$

  On peut donc extraire de B le déterminant de A, d'ordre 3, qui est différent de 0. Ainsi le rang de B est 3. Le système admet des solutions.

  En fait dans un tel cas (nombre d'équations = nb d'inconnues = rang de A), on a nécessairement que $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$!
  Comme le rang est égal au nombre d'inconnues ($r = n = 3$), la solution est unique ((S) est un système de Cramer).
  Géométriquement, le système est l'intersection en un seul point de 3 plans.

- $\mathbf{m} = -\mathbf{3} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \leq 2$

  La matrice devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

  Soit le déterminant d'ordre 2 suivant : $P = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A = 2$

  On choisit P comme déterminant principal.

  Il y a un seul déterminant caractéristique car :
  (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 2 = 1\,.$

  Il est d'ordre 3. D'où :

  $$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -8 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$$

  Le système admet des solutions.

  Comme le rang est plus petit que le nombre d'inconnues n ($n = 3 > 2$), il a une infinité de solutions.

- $\mathbf{m} = \mathbf{2} \;\Leftrightarrow\; \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A \leq 2$

  La matrice devient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

  Il est évident que $\operatorname{rg} A = 1$ car les vecteurs colonne sont colinéaires.
  On choisit $P = |1|$ comme déterminant principal.

  Il y a deux déterminants caractéristiques car :
  (nombre de ligne de A) $-$ (rang de A) $= 3 - 1 = 2\,.$

  Ils sont d'ordre 2. D'où :

  $$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$$

  Le système n'admet pas de solutions.