Calcul matriciel

1. a) Soit les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer : $C + D$, $E + F$, $G + H$, $C - D$, $E - F$, $G - H$.

b) Soit les matrices $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer : $K + L$, $-L - K$ et $K - K$.

c) Calculer : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Déterminer D tel que $3A + 4B - 2C = D$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e) Déterminer B si : $2A - 3B + C = 0$ (Remarque : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)
avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

f) Déterminer x, y, z et w si :

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x + y \\ z + w & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soient A, B des matrices carrées d'ordre deux. Déterminer en fonction de A et B les matrices X et Y solutions des systèmes suivants :

a) $$\begin{cases} 2X - 5Y = A \\ -X + 3Y = B \end{cases}$$

Puis déterminer X et Y lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} 4X & = & 2A-4Y \\ \\ Y+2B & = & -5X+3B \end{array}\right.$

Puis déterminer X et Y lorsque $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

3. a) Déterminer le nombre de lignes et de colonnes des matrices suivantes, puis effectuer les produits.

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad F=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$G=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer les produits suivants en mettant en évidence les facteurs communs.

$H=\begin{pmatrix} 36 & 48 & 12 \\ 0 & 24 & -60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 30 & -40 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad J=\begin{pmatrix} 500 & 400 & 1000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 & 200 \\ 150 & 400 \\ 300 & 150 \end{pmatrix}$

4. Trouver des matrices d'ordre 2 telles que :

a) $AB \neq BA$

b) $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AB = 0$ (Remarque : $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

c) $A \neq 0$ et $A^2 = 0$ (Remarque : $A^2 = A \cdot A$)

d) $A^2 = A$ avec $A \neq 0$ et $A \neq I$ (Remarque : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

e) $A^2 = I$ avec $A \neq I$ et $A \neq -I$

5. Soient $A,\, B \in \mathbb{M}(n,\, \mathbb{R})$; calculer :

a) $(A+B)^2$

b) $(A-B)^2$

c) $(A-B)(A+B)$

6. Ecrire la transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculer : AA^t, BB^t, B^tB.

7. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculer les matrices M^2 et M^3.

b) Conjecturer l'expression de M^n, $n \in \mathbb{N}^*$, puis démontrer ce résultat par récurrence.

8. Soient $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

On définit des matrices W_n par

$$W_n = M^n A,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Calculer W_1 et W_2.

b) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_n = 7^{n-1} W_1.$$

9. a) Soient $X,\, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $XY = YX$.

Montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}\ :\ XY^p = Y^pX$

En déduire : $\forall p,\, r \in \mathbb{N}\ :\ X^pY^rX = X^{p+1}Y^r$

b) Utiliser (a) pour montrer par récurrence la formule du binôme de Newton lorsque $XY = YX$:

$$\forall p \in \mathbb{N}\ :\ (X+Y)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k X^k Y^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k X^{p-k} Y^k$$

10. On pose $A = I_2 + B$ où $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
(Indication : commencer par calculer B^k)

11. On pose $A = I_3 + B$ où $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
(Indication : calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B^{2k} et B^{2k+1})

12. On considère l'ensemble E suivant

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la proposition S suivante est fausse,

$$S \,:\, \forall M \in E\,,\; M^2 = M \Longrightarrow (M = 0 \text{ ou } M = I_2)\ .$$

13. Soit $M_2 = \{X \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \,|\, X \neq 0\}$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 différentes de la matrice nulle.

D'autre part, une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est dite *symétrique* si et seulement si $y = z$.

Soit S la proposition suivante :

$S :\ \forall A,\, B \in M_2$:
A et AB sont symétriques $\Longrightarrow$ B est symétrique.

a) Enoncer la négation de la proposition S.

b) On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Expliciter l'ensemble :

$$E = \{B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \mid AB \text{ est symétrique et } b \neq c\}.$$

c) Donner une matrice B (sous forme numérique) élément de l'ensemble E.

d) Que peut-on dire alors de la vérité de S ?

14. a) Soit les matrices d'ordre deux suivantes :

$M = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calculer : $\det M$, $\det N$, $\det(MN)$ et $\det(M+N)$.

Lorsque c'est possible, déterminer l'inverse de ces matrices.

Comparer $\det M + \det N$ avec $\det(M+N)$. Que peut-on conclure ?

b) Mêmes questions avec les matrices suivantes :

$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Généraliser au cas où $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, a et b sont des réels non nuls.

d) Déterminer l'inverse de la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Généraliser au cas où $D = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, a et b sont des réels non nuls.

15. Déterminer les valeurs du paramètre t pour que les matrices suivantes soient inversibles.

a) $M = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & -10 \end{pmatrix}$

Réponses

1. a) $C+D=\begin{pmatrix}3\\8\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad E+F=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$

$G+H=\begin{pmatrix}4 & -3 & 3 & 3\\2 & -5 & -1 & -4\end{pmatrix}$

$C-D=\begin{pmatrix}5\\12\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad E-F=\begin{pmatrix}-4 & 14\end{pmatrix}$

$G-H=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -9 & 5\\-2 & -5 & 3 & 2\end{pmatrix}$

b) $K+L=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad -L-K=-(K+L)$ $\qquad K-K=0=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

c) impossible

d) $\begin{pmatrix}10 & -25 & -5\\7 & -2 & 10\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}-4/3 & 5/3\\-1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

f) $x=2,\ y=4,\ z=1,\ w=3$

2. a) $X=3A+5B$ et $Y=A+2B$, $\quad X=\begin{pmatrix}13 & -1\\15 & 3\end{pmatrix}$, $\quad Y=\begin{pmatrix}5 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}$

b) $X=-\frac{1}{8}A+\frac{1}{4}B$ et $Y=\frac{5}{8}A-\frac{1}{4}B$, $\quad X=\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}$, $\quad Y=\begin{pmatrix}4 & 5\\5 & -5\end{pmatrix}$

3. a) $A=\begin{pmatrix}2 & 14 & 12\\4 & 8 & 14\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}14 & -8\end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\end{pmatrix}$

D : produit impossible à effectuer, $\qquad E=(17)$

$F=\begin{pmatrix}8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\\-4 & -5 & -6\end{pmatrix}$, $\quad G=\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\5 & -10 & 5\\7 & -14 & 7\end{pmatrix}$

b) $H=120\begin{pmatrix}21 & -1\\-24 & -8\end{pmatrix}$, $\quad J=5000\begin{pmatrix}77 & 82\end{pmatrix}$

5. a) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

b) $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

c) $(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$

6. $AA^t = \begin{pmatrix} 29 & -16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix}$, $\qquad BB^t = (35)$, $\qquad B^tB = \begin{pmatrix} 9 & -15 & 3 \\ -15 & 25 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

7. $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 - b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $\qquad M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^3 - b^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$ $\qquad M^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

8. a) $W_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $\qquad W_2 = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -21 & 42 & -21 \end{pmatrix} = 7\,W_1$.

10. $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2 & 2^n - 1 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$, $\quad n \in \mathbb{N}$

11. $A^n = 2^{n-1}\,A$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

13. a) non$S$: $\exists\ A, B \in \mathbb{M}_2$ telles que A et AB sont symétriques et B n'est pas symétrique.

c) Par exemple $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

14. a)
- $M^{-1} = \dfrac{1}{80}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$, $\quad N^{-1} = \dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad (MN)^{-1} = \dfrac{-1}{2080}\begin{pmatrix} -60 & 40 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}$, $M + N$ n'est pas inversible
- $\det(M+N) \neq \det M + \det N$

b)
- R, S et RS ne sont pas inversibles, $R + S$ est inversible.

  $$(R+S)^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\det(R+S) \neq \det R + \det S$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

15. a) $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $t \in \mathbb{R}$