Contrôle 3 - Application des Mathématiques

Durée : 1 heure 45 minutes - Barème sur 10 points

NOM : ______________________________ PRENOM : ______________________________

Problème	1	2	3	Bonus	Total
Points	$3\,\text{pts}$	$3\,\text{pts}$	$4\,\text{pts}$	$1\,\text{pts}$	$11\,\text{pts}$
Obtenus					

1. Soit la suite récurrente définie par $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.

a) Trouvez le plus grand ss-sensemble D de $\mathbb{R}$ et une fonction $g : D \to D$ tels que $x_{n+1} = g(x_n)$ soit bien définie en tant que suite récurrente. Trouvez les points fixes de g.

b) Dessinez sur un graphique les premières itérations de x_n partant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) Trouvez un nombre positif $a > 0$ tel que $x_n \in (0, a) \Rightarrow x_{n+1} \in (a, \infty)$ et $x_n \in (a, \infty) \Rightarrow x_{n+1} \in (0, a)$.

d) Montrez que si $x_0 > 0$, alors x_n converge.

2. Le nombre d'or Φ est défini comme étant le nombre positif tel que si on lui soustrait 1 on trouve son inverse. Utilisez une méthode de Newton pour calculer cinq décimales significatives. Combien d'itérations vous faut-il pour en calculer 18?

3. On considère la fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie comme suit:

1 : On exprime $x \in [0, 1]$ en base 3.

2 : La première décimale de x qui est égale à 1, si elle existe, est changée en 0 et on pose toutes les décimales suivantes à 1.

3 : On remplace toutes les décimales de x qui sont égales à 2 par 1.

4 : On interprète la suite de 0 et de 1 obtenue comme un nombre $y \in [0, 1]$ en base 2 et on pose $y = f(x)$.

Cette fonction est appelée "l'escalier du diable".

Tournez la page svp

a) Calculez $f(\frac{1}{2}),\ f(\frac{1}{5})$ et $f(\frac{5}{7})$

b) Quels sont les images par f des intervalles $I_1 := [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $I_2 := [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ et $I_3 := [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$? Faites un graphe qui illustre la fonction sur $I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

c) Montrez que l'image de f est $[0, 1]$.

d) Montrez que f est monotone croissante.

Bonus: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n + 1$ fois dérivable. Montrez que pour tout $a \leq x < y \leq b$, il existe un $\xi \in (x, y)$ tel que

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \ldots + f^{(n)}(x)\frac{(y - x)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(y - x)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Indication: Adaptez à vos besoins la fonction auxiliaire $F(z) = f(y) - f(z) - f'(z)(y - z) - c(y - z)^2$ avec $c = (f(y) - f(x) - f'(x)(y - x))\,\frac{1}{(y-x)^2}$.
