Contrôle de géométrie analytique N°2

Durée : 1 heure 30 minutes   Barème sur 15 points

NOM : ____________________

Groupe ☐

PRENOM : ____________________

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3)$ direct.

On considère deux points $A(1;\ 1;\ 2)$ et $B(0;\ 0;\ 1)$ et le plan α d'équation :

$$\alpha\ :\ x - y + z + 1 = 0\,.$$

Déterminer le lieu des points P appartenant à α, tels que le volume géométrique du parallélépipède construit sur $OABP$ soit égal à 2. Exprimer ce lieu sous forme paramétrique.

Réponse: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda - 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda + 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 4,5 pts

2. Dans l'espace, un plan α est défini par les points O et A et par un vecteur $\vec{u}$.

Soit encore le point D, $D \notin \alpha$.

a) Déterminer vectoriellement, en fonction des données, le rayon-vecteur $\overrightarrow{OH}$, où le point H est la projection orthogonale de D sur le plan α.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

On pose : $A(2;\ -2;\ -3)$ $D(2;\ 1;\ 3)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer les coordonnées du point H défini sous a).

c) On considère un triangle de sommets $A\,, B$ et C, contenu dans le plan α. Déterminer les coordonnées de B et C sachant que :

- le point H est le pied de la hauteur issue de C,
- le côté AC est parallèle à un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
- les droites (BD) et $(O\,,\vec{v})$ sont orthogonales.

Réponses: $\overrightarrow{OH} = \vec{d} - (\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{u}))\dfrac{\vec{a}\times\vec{u}}{\|\vec{a}\times\vec{u}\|^2}$, $H(0;2;1)$, $B(-1;4;3)$, $C(-4;-2;3)$. 6 pts

Tourner la page SVP

3. Dans le plan muni d'une origine O, on donne un vecteur unitaire $\vec{u}$, $(\|\vec{u}\| = 1)$, et un point A défini par le rayon-vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. On pose $\|\vec{a}\| = a$.

On suppose $\vec{a} \cdot \vec{u} \neq 0$.

On considère le triangle OAB isocèle de base AB. La droite $(O, \vec{u})$ est la médiane issue de O.

A l'aide du calcul vectoriel uniquement,

a) déterminer, en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{u}$, le rayon-vecteur $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,

b) déterminer, en fonction de $\vec{a}$, $\vec{u}$ et de $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{a})$, le rayon-vecteur $\overrightarrow{OC}$ sachant que :

- $OABC$ est un trapèze de bases AB et OC,
- la diagonale OB est perpendiculaire au côté BC.

Réponses: $\vec{b} = -\vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}((\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{a}),\ \varphi \neq \frac{\pi}{2}$. 4,5 pts