Contrôle d'analyse I N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2n\,|x-2|}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe de f admet-il un point anguleux qui soit un extremum ? Réponse : $n \geq 2$

b) On fixe $n = 3$. Le graphe de f admet-il un point d'inflexion ? oui
Représenter avec précision le graphe de f au voisinage de $x_0 = 2$. 5,5 pts

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \left[\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)\right]^x$.

Déterminer, si elles existent, les deux limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\,, \quad = e^{-\frac{2}{\pi}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\,. \quad = 1$ 5 pts

3. Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \ln\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right) \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}\,.$$

Etudier les branches infinies de l'arc Γ. 5 pts

$t \to 0^+\,, \; AO: \; y = 2x - \ln(2)\,, \qquad t \to +\infty\,, \; AO: \; y = x$

4. Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + a\,t + b\,\arctan(t) \\ y(t) = t^2 + c\,t + \ln(1+t^2) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer les paramètres réels $a\,, b\,, c$ de sorte que l'arc Γ admette en $t = -1$ un point stationnaire à tangente verticale. $a = 4\,, \; b = -4\,, \; c = 3$

Esquisser alors la courbe Γ au voisinage de ce point. 4,5 pts