EPFL
Section MT

Peter Wittwer
5 octobre 2020

Analyse I – Corrigé de la Série 3

Echauffement 1. Supposons que r est rationnel. Alors, puisque q est aussi rationnel $n(r-q)$ est rationnel. Mais par definition de r on a que $n(r-q) = \sqrt{2}$ et puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel $n(r-q)$ est irrationnel; en contradiction avec $n(r-q)$ rationnel. Donc r est irrationnel.

Exercice 1.

i) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers naturels tels que $\text{pgcd}(p,q) = 1$. Il s'en suit que $p^2 = 3q^2$, c.-à-d. que p^2 est donc un multiple de 3, ce qui n'est possible que si p est un multiple de 3. On a donc $p = 3a$ pour un entier naturel a. Par conséquent, $3^2a^2 = 3q^2$ et donc $q^2 = 3a^2$. Ainsi q^2 est un multiple de 3, ce qui n'est possible que si q est un multiple de 3. Mais ceci implique que le plus grand commun diviseur de p et de q n'est pas égal à 1, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

ii) On a

$$r^2 = 7 + \sqrt{17} \ ,$$

ou

$$\sqrt{17} = r^2 - 7 \ .$$

Si r est un nombre rationnel, il s'en suit que $r^2 - 7$ en est aussi un et donc $\sqrt{17}$ aussi, ce qui est une contradiction. (La preuve que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel se fait comme pour $r = \sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ ou r la racine carrée de tout autre nombre premier, cf. *i.*) Donc $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ est irrationnel.

iii) On a

$$\left(r - \sqrt{2}\right)^3 = 3 \ ,$$

et donc

$$r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3r \cdot 2 - 2\sqrt{2} - 3 = 0 \ ,$$

d'où on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2} \ .$$

Cette égalité implique que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel si r est un nombre rationnel, ce qui est une contradiction. Donc r est irrationnel.

Exercice 2.

i) $A = \,]-\infty, 1\,[$

ii) $A = \,]-\infty, 1\,]$

iii) $A = [\,-1, \infty\,[$

iv) $A = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right]$

v) $A = \left]-\infty, -\sqrt{2}\,\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$

vi) $A = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\,\right]$

Exercice 3.

i) On a $\operatorname{Inf} A = -1$ et $\operatorname{Sup} A = \sqrt{2}$. Comme $\operatorname{Sup} A = \sqrt{2} \in A$, il s'agit d'un maximum. Par contre $\operatorname{Inf} A = -1 \notin A$, donc ce n'est pas un minimum.

ii) On a $\operatorname{Inf} B = \sqrt{3} \notin B$ et $\operatorname{Sup} B = +\infty$ puisque B n'est pas majoré. Ainsi B n'admet ni minimum ni maximum.

iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = [0, 1]$. Ainsi $\operatorname{Inf} C = \min C = 0$ et $\operatorname{Sup} C = \max C = 1$.

iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 - 2 < 1\} =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$. Ainsi $\operatorname{Inf} D = -\sqrt{3}$ et $\operatorname{Sup} D = \sqrt{3}$ qui ne sont pas minimum et maximum car pas dans D.

v) $E = \left\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$. Ainsi $\operatorname{Inf} E = 1 - \frac{1}{0+1} = 0 = \min E$ et $\operatorname{Sup} E = 1$.
En effet, $1 \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc 1 est un majorant de E. Pour montrer que c'est le plus petit majorant, soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver un élément $x \in E$ qui satisfait $x \geq 1 - \varepsilon$. En prenant $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$, l'élément $x = 1 - \frac{1}{n_\varepsilon + 1} \in E$ satisfait la condition voulue. Ainsi on a bien $\operatorname{Sup} E = 1$. Comme $1 \notin E$, E n'a pas de maximum.

vi) $F = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots\right\}$. Ainsi $\operatorname{Inf} F = -1$ et $\operatorname{Sup} F = 1$. On procède de manière similaire qu'à la question précédente. Clairement -1 et 1 sont minorant respectivement majorant de F. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ comme dans *v)*. Pour éliminer l'effet du $(-1)^n$, on considère les éléments $x, y \in F$ correspondant à $2n_\varepsilon$ et $2n_\varepsilon + 1$. On a alors d'une part

$$x = (-1)^{2n_\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{2n_\varepsilon + 1}\right) = 1 - \frac{1}{2n_\varepsilon + 1} \geq 1 - \varepsilon,$$

c.-à-d. $\operatorname{Sup} F = 1$, et d'autre part

$$y = (-1)^{2n_\varepsilon + 1} \left(1 - \frac{1}{(2n_\varepsilon + 1) + 1}\right) = -1 + \frac{1}{(2n_\varepsilon + 1) + 1} \leq -1 + \varepsilon,$$

d'où $\operatorname{Inf} F = -1$. Comme $-1, 1 \notin F$, F n'a pas de minimum ni maximum.

vii) Comme $\mathbb{Q}$ n'est ni minoré ni majoré, on a $\operatorname{Inf} G = -\infty$ et $\operatorname{Sup} G = +\infty$ et G n'a pas de minimum ni maximum.

viii) Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe des nombres irrationnels aussi proche de 0 et 1 qu'on veut. Donc $\operatorname{Inf} H = 0$ et $\operatorname{Sup} H = 1$. Comme ces deux nombres rationnels n'appartiennent pas à H, il ne sont pas minimum et maximum.

Exercice 4.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple l'intervalle borné $A = [1, 2[$. Alors $\operatorname{Sup} A = 2 \notin A$.

Q2 : VRAI.
Si un intervalle borné A n'est pas fermé, au moins une de ses extrémités n'appartient pas à l'intervalle. Mais les extrémités de A sont $\operatorname{Inf} A$ et $\operatorname{Sup} A$ qui sont dans A par hypothèse. Ainsi A est forcément fermé.

Q3 : VRAI.
Un intervalle fermé et borné est de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Ainsi $\operatorname{Inf} A = a$ et $\operatorname{Sup} A = b$ qui sont bien dans A.

Q4 : VRAI.
Comme $a = \operatorname{Inf} A \notin A$, on a $a < x$ pour tout $x \in A$. Par définition de l'infimum il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $x \in A$ tel que $x \leq a + \varepsilon$, ce qui assure qu'il n'y a pas de "trou" entre a et les éléments A. De même on montre à partir de la définition du supremum que $x < \operatorname{Sup} A =: b$ pour tout $x \in A$. Ainsi $A =]a, b[$ est un intervalle ouvert.

Q5 : VRAI.
Par l'absurde, supposons que $a = \operatorname{Inf} A \in A$. Alors $a \leq x$ pour tout $x \in A$ et comme $a \in A$, A ne peut être ouvert. Donc $\operatorname{Inf} A \notin A$. De même pour $b = \operatorname{Sup} A$.

Echauffement 2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a que $2xy \leq 2|x||y|$. Si on additionne $x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$ des deux cotés de l'inegalité on obtient

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

donc

$$(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

ce qui est équivalent à

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Exercice 5.

Noter que l'identité en question est invariante sous les changements $y \mapsto -y$ et/ou $x \mapsto -x$. Donc on peut supposer sans perte de généralité que $x, y \geq 0$. Pour $x, y \geq 0$ on a $|x| = x$, $|y| = y$ et $|x + y| = x + y$, et les deux côtés de l'identité sont donc égaux à $x + y + |x - y|$.

Exercice 6. On récrit l'inégalité sous la forme

$$\frac{x}{|x| - 2} \geq \frac{-|x|}{x + 1} .$$

Il faut distinguer cinq cas : $x < -2$, $-2 < x < -1$, $-1 < x \leq 0$, $0 \leq x < 2$, $x > 2$.

i) Pour $x < -2$ on a $|x| - 2 = -x - 2 > 0$ et $x + 1 < 0$, et l'inégalité peut donc être récrite comme

$$x\,(x + 1) \leq x\,(-x - 2) ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 + 3x = x(2x + 3) \leq 0$. Cette inégalité n'est pas satisfaite.

ii) Pour $-2 < x < -1$ on a $|x| - 2 = -x - 2 < 0$ et $x + 1 < 0$, et l'inégalité peut donc être récrite comme

$$x\,(x + 1) \geq x\,(-x - 2) ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 + 3x = x(2x + 3) \geq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $-2 < x \leq -\dfrac{3}{2}$.

iii) Pour $-1 < x \leq 0$, on a $|x| - 2 = -x - 2 < 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être récrite comme

$$x\,(x+1) \leq x\,(-x-2)\ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 + 3x = x(2x+3) \leq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $-1 < x \leq 0$.

iv) Pour $0 \leq x < 2$ on a $|x| - 2 = x - 2 < 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être récrite comme

$$x\,(x+1) \leq -x\,(x-2)\ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 - x = x(2x-1) \leq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

v) Pour $x > 2$ on a $|x| - 2 = x - 2 > 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être récrite comme

$$x\,(x+1) \geq -x\,(x-2)\ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 - x = x(2x-1) \geq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $x > 2$

Pour résumer, l'inégalité est donc satisfaite pour

$$x \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right] \bigcup \left]-1, \frac{1}{2}\right] \bigcup\ ]2, \infty[\ .$$

Exercice 7.

- ☐ $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty[$.
- ■ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.
- ☐ $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.
- ☐ $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup]1, 2[$.

Exercice 8.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ qui satisfont $(f \circ g)(x) = x^2 = (g \circ f)(x)$ avec $f \neq g$.

Q2 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme f est injective, on a $g(x_1) = g(x_2)$, et par l'injectivité de g, il suit que $x_1 = x_2$. Ainsi $f \circ g$ est bien injective.

Q3 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on a $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Comme $f \circ f$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.

Q4 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc on a $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme $f \circ g$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc g est injective.

Q5 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ qui sont définies de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Alors f n'est pas injective mais $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ est injective.

Q6 : VRAI.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = y$. En posant $z = g(x)$ on a trouvé un $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. Ainsi f est surjective.