Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 17

Exercice 2

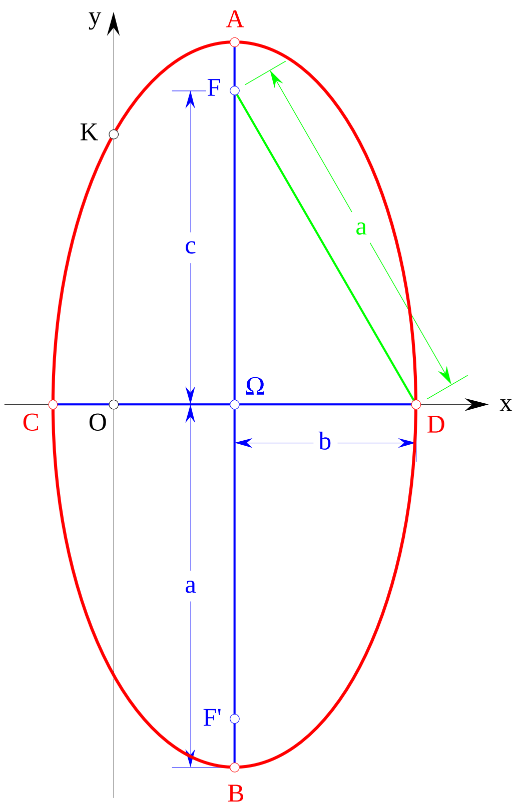
Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de la famille $\mathcal{F}$.

Décrire l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de grand axe vertical et de centre Ω, en fonction de a, b, x_Ω et y_Ω.

Puis exprimer a, b, x_Ω et y_Ω en fonction d'un seul paramètre en exploitant les trois conditions :

- le support du petit axe de $\mathcal{E}$ est l'axe Ox,
- l'excentricité de $\mathcal{E}$ vaut e,
- le point K appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$.

Figure d'étude



Equation cartésienne d'une ellipse $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$

$\mathcal{E}$ est une ellipse de grand axe vertical et de centre Ω, son équation cartésienne est donc de la forme

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-x_\Omega)^2}{b^2} + \frac{(y-y_\Omega)^2}{a^2} - 1 = 0 \qquad \text{avec} \quad a > b > 0,$$

où a est la longueur du demi-grand axe et b celle du demi-petit axe de l'ellipse $\mathcal{E}$.

Le support du petit axe de $\mathcal{E}$ est l'axe Ox

On en déduit donc que le centre Ω appartient à l'axe Ox :

$$\Omega \in Ox \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \Omega\,(\lambda\,,\,0)\,.$$

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-\lambda)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0\,.$$

L'excentricité de $\mathcal{E}$ vaut e

La donnée de l'excentricité e nous permet de trouver une relation entre a et b.

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,.$$

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = \frac{2}{3}\,a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 3\,b^2\,.$$

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-\lambda)^2}{b^2} + \frac{y^2}{3\,b^2} - 1 = 0\,.$$

Le point K appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$

$$K \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x_K-\lambda)^2}{b^2} + \frac{y_K^2}{3\,b^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{3}{3\,b^2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = \lambda^2 + 1\,.$$

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2+1} + \frac{y^2}{3\,(\lambda^2+1)} - 1 = 0\,.$$

Equation de l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{F}: \quad \frac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2+1} + \frac{y^2}{3\,(\lambda^2+1)} - 1 = 0\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Remarques :

Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{E}$ en K en fonction du paramètre λ.
Puis imposer que la pente de cette tangente soit égale à $m = \sqrt{3}$.

Equation de l'ellipse $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ dont la tangente en K a pour pente $m = \sqrt{3}$

Soit t cette tangente, on obtient son équation cartésienne à l'aide de la règle du dédoublement :

$$t: \quad \frac{x_K-\lambda}{\lambda^2+1}\,(x-\lambda) + \frac{y_K}{3\,(\lambda^2+1)}\,y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\,(x-\lambda) + \frac{\sqrt{3}}{3\,(\lambda^2+1)}\,y - 1 = 0\,.$$

Soit m_t la pente de cette tangente :

$$m_t = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \cdot \frac{3\,(\lambda^2+1)}{\sqrt{3}} = \lambda\,\sqrt{3}\,.$$

$$m_t = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1\,.$$

On en déduit l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$.

$$\lambda = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}: \quad \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{6} - 1 = 0\,.$$

Exercice 3

Méthode :

Choix des paramètres : les coordonnées α et β du point M.
Le point M décrivant l'ellipse $\mathcal{E}$, les deux paramètres α et β sont liés par l'équation

$$\alpha^2 + 2\,\beta^2 - 2 = 0\,.$$

Schéma général de l'étude d'un lieu géométrique.

- **Figure d'étude et définition du repère.**
- **Choix du (des) paramètre(s).**
- **Mise en équations.**
- **Elimination du (des) paramètre(s) et interprétation géométrique du lieu.**

Figure d'étude

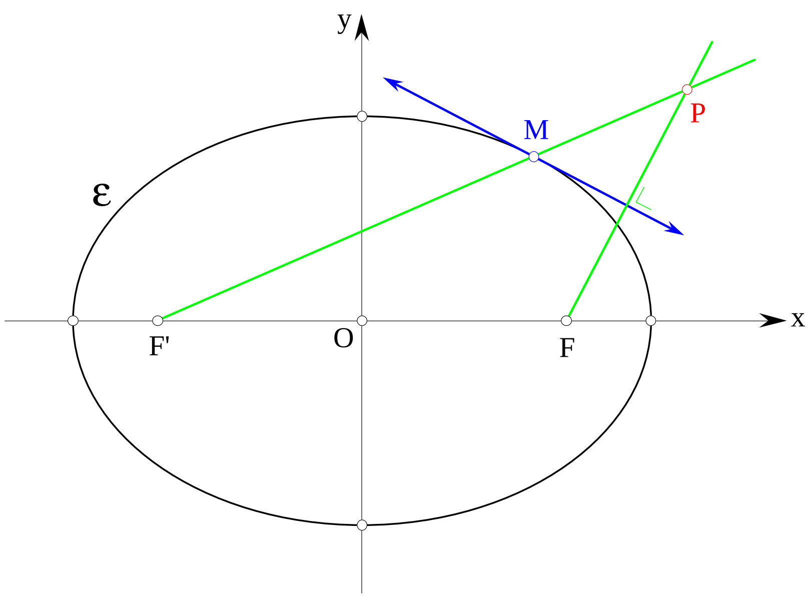
$$\mathcal{E}: \quad x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0\,.$$

$\mathcal{E}$ est une ellipse centrée à l'origine et de grand axe horizontal.

$$a = \sqrt{2}\,, \qquad b = 1\,, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1\,.$$

On en déduit les coordonnées des deux foyers :

$$F\,(1\,,\,0) \qquad \text{et} \qquad F'\,(-1\,,\,0)\,.$$



Choix des paramètres

Le "moteur" du lieu géométrique est le point M qui décrit $\mathcal{E}$.
On choisit comme paramètres du problème les coordonnées α et β du point M.
Le point M décrivant l'ellipse $\mathcal{E}$, son équation cartésienne fait office d'équation de liaison entre les deux paramètres α et β :

$$\alpha^2 + 2\,\beta^2 - 2 = 0\,.$$

Mise en équations

- **Equation de la tangente t à $\mathcal{E}$ en M**

  On obtient l'équation cartésienne de la tangente t à l'aide de la règle du dédoublement :

$$t: \quad x_M\, x \,+\, 2\, y_M\, y \,-\, 2 \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\, x \,+\, 2\,\beta\, y \,-\, 2 \,=\, 0\,.$$

- **Equation de la droite p perpendiculaire à t passant par F**

  A partir de la pente de t, on obtient la pente de la perpendiculaire p :

$$m_t \,=\, -\frac{\alpha}{2\,\beta} \quad \Rightarrow \quad m_p \,=\, -\frac{1}{m_t} \,=\, \frac{2\,\beta}{\alpha}\,.$$

$$p: \quad y - y_F \,=\, m_p\,(x - x_F) \quad \Leftrightarrow \quad y \,=\, \frac{2\,\beta}{\alpha}\,(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\beta\, x \,-\, \alpha\, y \,-\, 2\,\beta \,=\, 0\,.$$

- **Equation de la droite $d \,=\, (F'\, M)$**

$$d: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \beta\, x \,-\, (\alpha+1)\, y \,+\, \beta \,=\, 0\,.$$

- **Définition du lieu de P**

  Le point $P\,(x,\, y)$ définissant le lieu est l'intersection des deux droites p et d, ses coordonnées vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2\,\beta\, x \,-\, \alpha\, y \,-\, 2\,\beta \,=\, 0 \quad (p) \\ \beta\, x \,-\, (\alpha+1)\, y \,+\, \beta \,=\, 0 \quad (d) \\ \alpha^2 \,+\, 2\,\beta^2 \,=\, 2 \quad \text{(équation de liaison des paramètres)} \end{cases}$$

Elimination des paramètres et interprétation géométrique du lieu

- **Elimination des paramètres α et β**

$$\begin{cases} 2\,\beta\, x \,-\, \alpha\, y \,-\, 2\,\beta \,=\, 0 \quad (p) \\ \beta\, x \,-\, (\alpha+1)\, y \,+\, \beta \,=\, 0 \quad (d) \\ \alpha^2 \,+\, 2\,\beta^2 \,=\, 2 \quad \text{(équation de liaison des paramètres)} \end{cases}$$

  On résout le système formé par les deux équations (p) et (d) par rapport aux deux paramètres α et β et en fonction de x et y. On obtient :

$$\alpha \,=\, \frac{2\,(x-1)}{3-x} \qquad \text{et} \qquad \beta \,=\, \frac{y}{3-x}\,.$$

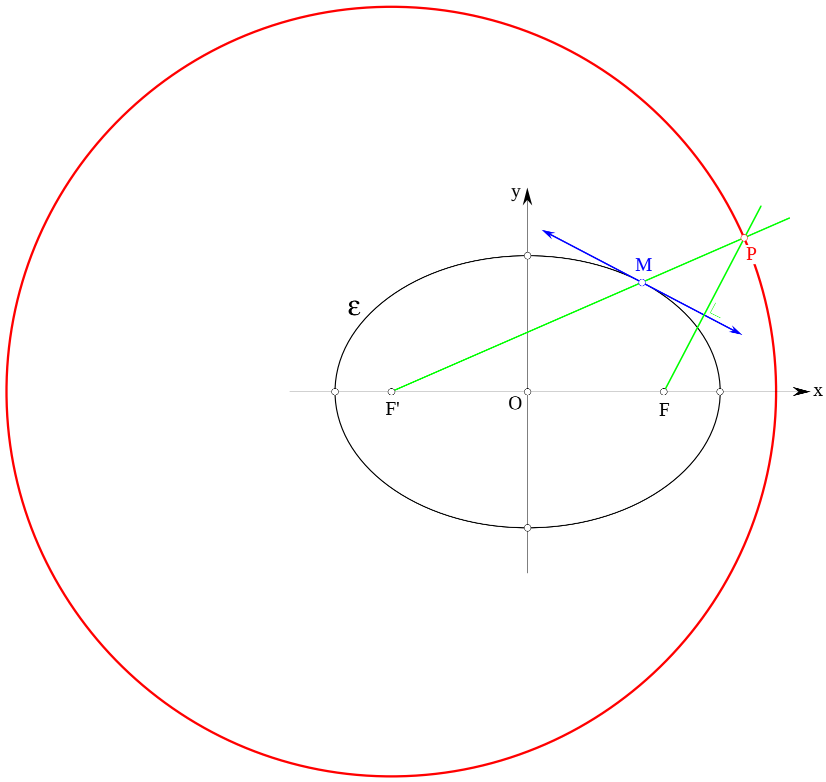
On introduit les expressions de α et β en fonction de x et y dans l'équation de liaison et on obtient l'équation cartésienne du lieu du point P :

$$\alpha^2 + 2\,\beta^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\,(x-1)}{3-x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{3-x}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 - 8 = 0\,.$$

- **Interprétation géométrique du lieu**

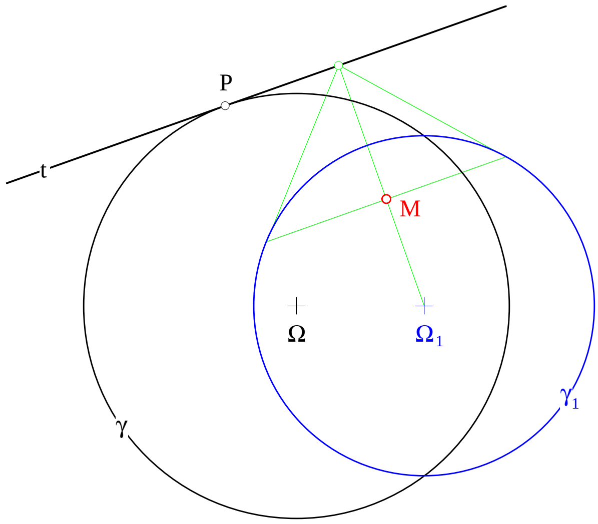
Le lieu géométrique des points P est le cercle de centre $F'\,(-1\,,\,0)$ et de rayon $r = 2\,a = 2\sqrt{2}\,.$



Exercice 4

L'étude des lieux géométriques se fait de la manière suivante :
1) Figure d'étude.
2) Choix du paramètre.
3) Mise en équations.
4) Elimination du paramètre.

1) Figure d'étude.



2) Choix du paramètre.

Le "moteur du lieu" est le point P qui décrit le cercle γ.
On choisit comme paramètres les coordonnées α et β du point P, liés par l'équation : $\alpha^2+\beta^2-25=0$.

3) Mise en équations.

Equation de la tangente t :

$$t: \; x_P\,x+y_P\,y-25=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\,x+\beta\,y-25=0\,.$$

Polaire de $M\,(x_M,y_M)$ par rapport au cercle γ_1 :

$$(x_M-3)\,(x-3)+y_M\,y-16=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_M-3)\,x+y_M\,y-7-3x_M=0\,.$$

Identification de ces deux droites :

$$\frac{x_M-3}{\alpha}=\frac{y_M}{\beta}=\frac{-7-3x_M}{-25} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{25\,(x_M-3)}{7+3x_M} \\ \beta=\dfrac{25\,y_M}{7+3\,x_M} \end{cases}$$

4) Elimination des paramètres et équation cartésienne du lieu.

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{25\,(x_M-3)}{7+3x_M} \\ \beta=\dfrac{25\,y_M}{7+3x_M} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \alpha^2+\beta^2-25=0$$

$$\left(\frac{25\,(x_M-3)}{7+3x_M}\right)^2+\left(\frac{25\,y_M}{7+3x_M}\right)^2-25=0 \quad \Leftrightarrow \quad 25\,(x_M-3)^2+25\,y_M^2-(7+3x_M)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16\,x_M^2-192\,x_M+25\,y_M^2+176=0 \quad \Leftrightarrow \quad 16\,(x_M-6)^2+25\,y_M^2-400=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x_M-6)^2}{25}+\frac{y_M^2}{16}-1=0\,.$$

Caractérisation du lieu de M.

Le lieu de M est une ellipse de centre $C\,(6\,,\,0)$, de grand axe horizontal de longueur $2a = 10$, de petit axe de longueur $2b = 8$ et de foyers $F\,(9\,,\,0)$ et $F'\,(3\,,\,0)$.