Corrigé 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes :

a) $\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2-3x) \;\leq\; \frac{1}{3}\,(7x-1)\,,$

b) $\dfrac{x+2}{2x-4} \;\leq\; \dfrac{5-2x}{x-2} + 3\,,$

c) $\dfrac{1-x}{2+x} \;\leq\; -\dfrac{2}{3x-4}\,.$

---

a) L'inéquation $\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2-3x) \leq \frac{1}{3}\,(7x-1)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

On cherche à se ramener à une inéquation de la forme $a\,x \leq b$:

$$
\begin{aligned}
\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2-3x) \leq \frac{1}{3}\,(7x-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}\,x + \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\,x \leq \frac{7}{3}\,x - \frac{1}{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}\,x - \frac{3}{5}\,x - \frac{7}{3}\,x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{5} - \frac{7}{3}\right)\,x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{11\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 3 - 7\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 3}\right)\,x \leq \frac{-5-2\cdot 3}{3\cdot 5}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{165-36-140}{60}\,x \leq -\frac{11}{15}\\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{11}{60}\,x \leq -\frac{11}{15}\\
&\Leftrightarrow \quad x \geq \left(-\frac{11}{15}\right)\cdot\left(-\frac{60}{11}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 4\,.
\end{aligned}
$$

Soit S l'ensemble solution, $\quad S = [\,4\,,\,+\infty\,[\,.$

b) Définition du référentiel : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}\,.$

Résoudre une inéquation rationnelle revient à étudier le signe d'une fraction rationnelle. On se ramène donc à une comparaison à 0 :

$$\frac{x+2}{2x-4} \;-\; \frac{5-2x}{x-2} \;-\; 3 \;\leq\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+2 \;-\; 2\,(5-2x) \;-\; 3\,(2x-4)}{2x-4} \;\leq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+4}{2x-4} \;\leq\; 0\,.$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle Q à l'aide d'un tableau de signe :

x		2		4	
$-x+4$	$+$		$+$	0	$-$
$2x-4$	$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$$Q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,;2\,[\,\cup\,[\,4\,;+\infty\,[\,; \qquad S = \,]-\infty\,;2\,[\,\cup\,[\,4\,;+\infty\,[\,.$$

c) • Domaine de définition

$$D_{\text{déf}} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 2+x \neq 0 \quad \text{et} \quad 3x-4 \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\,,\, \tfrac{4}{3}\right\}.$$

• Comparaison à 0

$$\frac{1-x}{2+x} \leq -\frac{2}{3x-4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-x)(3x-4)+2(2+x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-3x^2+9x}{(2+x)(3x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(-3x)(x-3)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0\,.$$

• Etude de signe

x		-2		0		$4/3$		3	
$-3x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$3x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$$Q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[\,0\,,\,\tfrac{4}{3}\,[\,\cup\,[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

$$S = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[\,0\,,\,\tfrac{4}{3}\,[\,\cup\,[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

a) $mx - 4 \;=\; 2\,(x-m)\,,$ b) $\dfrac{2}{m-1}\,x \;\leq\; x - \dfrac{1}{m-1}\,, \quad m \neq 1\,.$

---

a) Cette équation est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$.

On se ramène à une équation du premier degré en x du type $a\,x \;=\; b$.

$$mx - 4 \;=\; 2\,(x-m) \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)\,x = 4 - 2m\,.$$

La résolution de cette équation dépend du coefficient $m - 2$.

- Si $m - 2 \neq 0$, l'équation devient

  $(m-2)\,x = 4 - 2m \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{4-2m}{m-2} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-2\,(m-2)}{m-2} \;\Leftrightarrow\; x = -2\,.$

  $S = \{-2\}\,.$

- Si $m - 2 = 0$, l'équation devient : $0\,x = 0\,.$

  L'équation est alors toujours vérifiée : $S = \mathbb{R}\,.$

En résumé :

- Si $m \neq 2$, alors $S = \{-2\}\,.$
- Si $m = 2$, alors $S = \mathbb{R}\,.$

b) Définition du référentiel : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré en x du type $a\,x \;\leq\; b$.

$$\left(\frac{2}{m-1} - 1\right) x \;\leq\; -\frac{1}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-m}{m-1}\,x \;\leq\; -\frac{1}{m-1}\,.$$

La résolution de cette inéquation dépend du signe du coefficient $\dfrac{3-m}{m-1}$.

- $\dfrac{3-m}{m-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\ 1\,[\, \cup \,]\,3\,,\ +\infty\,[\,.$

  L'inéquation devient : $x \;\geq\; -\dfrac{1}{m-1} \cdot \dfrac{m-1}{3-m} \quad \Leftrightarrow \quad x \;\geq\; \dfrac{1}{m-3}\,.$

  $S = \left[\,\frac{1}{m-3}\,,\ +\infty\,\right[\,.$

- $\dfrac{3-m}{m-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3\,.$

  L'inéquation devient : $0\,x \leq -\dfrac{1}{2}\,; \qquad S = \emptyset\,.$

- $\dfrac{3-m}{m-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]\,1\,,\ 3\,[\,.$

  L'inéquation devient : $x \leq -\dfrac{1}{m-1} \cdot \dfrac{m-1}{3-m} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{1}{m-3}\,.$

  $S = \,\left]-\infty\,,\ \frac{1}{m-3}\right]\,.$

En résumé :

- Si $m \in \,]-\infty\,,\ 1\,[\,\cup\,]\,3\,,\ +\infty\,[\,,$ alors $S = [\,\frac{1}{m-3}\,,\ +\infty\,[\,.$
- Si $m \in \,]\,1\,,\ 3\,[\,,$ alors $S = \,]-\infty\,,\ \frac{1}{m-3}\,]\,.$
- Si $m = 3\,,$ alors $S = \emptyset\,.$

3. Exercice facultatif

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 2$ et $g(x) = -3\,x - \frac{11}{2}\,.$

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f et de $g\,,$ puis en déduire celui de $|f|\,.$

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)\,.$

b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

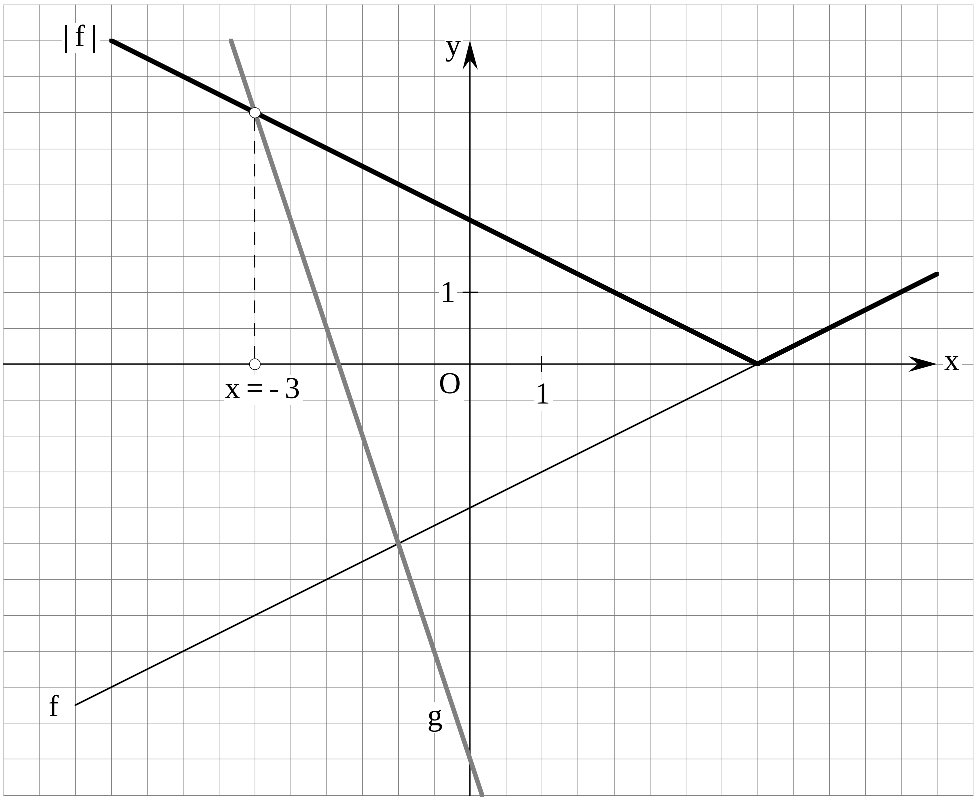
$$|\,f(x)\,| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right.$$

---

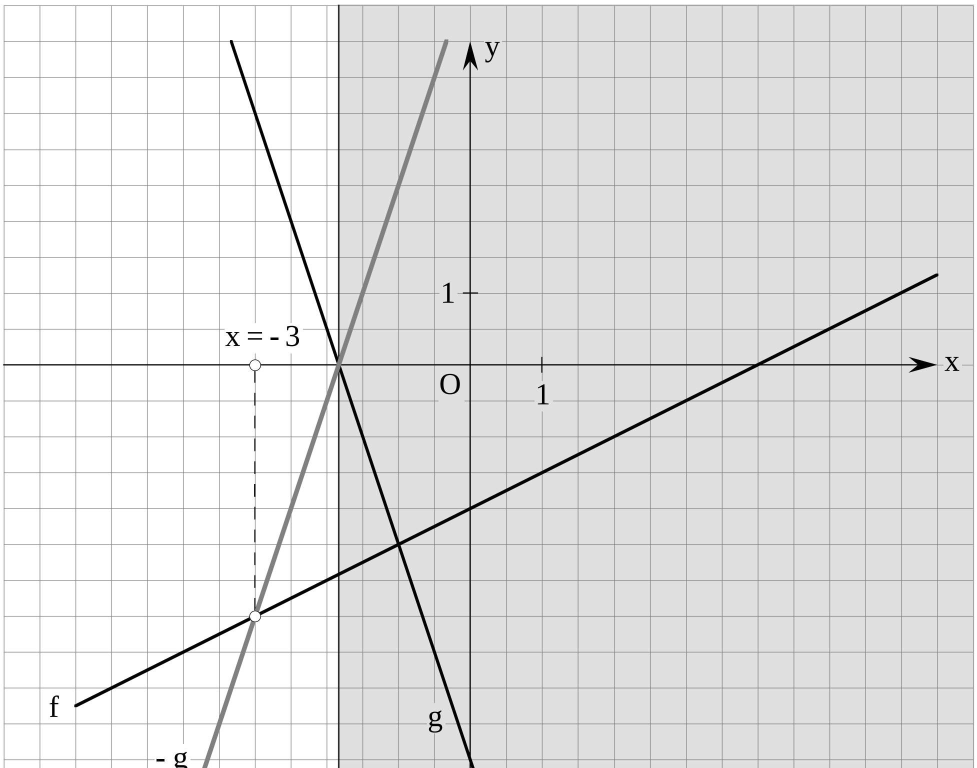
a) Les graphes de f et g sont des droites.

On obtient le graphe de $|f|$ en symétrisant par rapport à l'axe Ox les points du graphe de f d'ordonnée négative.

On en déduit graphiquement que l'unique solution de $|\,f(x)\,| = g(x)$ est $x = -3\,.$



b) Sur le domaine $I = \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \,\}$, l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solution, l'équation $f(x) = -g(x)$ admet une unique solution $x = -3$.



Remarque : il est essentiel de tenir compte de la condition de positivité $g(x) \geq 0$; l'étude du signe de f est alors inutile.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

a) $|-x+4| = -\dfrac{3}{x}$, b) $\left|x^3-2x^2-4x+3\right| = (x^2+1)(x-3)$.

---

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

Cette équation admet d'éventuelles solutions seulement si $-\frac{3}{x} \geq 0$.

$$-\frac{3}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{(condition de positivité)}.$$

Sous cette condition, l'équation devient :

$$-x+4 = \pm\frac{3}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,(-x+4) = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \text{ou} & \\ x^2-4x-3=0 & (2). \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $(x-1)(x-3)=0$. Sur le référentiel $\mathbb{R}_-^*$: $S_1 = \emptyset$.

(2) $\Leftrightarrow$ $x = 2 \pm \sqrt{7}$. Sur le référentiel $\mathbb{R}_-^*$: $S_2 = \left\{2-\sqrt{7}\right\}$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{2-\sqrt{7}\right\}.$$

b) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $(x^2+1)(x-3) \geq 0$.

$$(x^2+1)(x-3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3,\ +\infty[.$$

Sous cette condition (condition de positivité), l'équation devient :

$$x^3-2x^2-4x+3 = \pm(x^2+1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-2x^2-4x+3 = \pm(x^3-3x^2+x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x^2-5x+6=0 & (1) \\ \text{ou} & \\ 2x^3-5x^2-3x=0 & (2). \end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation (1) : $x^2-5x+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-2)=0$.

  Sur le référentiel $[3,\ +\infty[$, $S_1 = \{3\}$.

- Résolution de l'équation (2) :

  $2x^3-5x^2-3x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(2x^2-5x-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(2x+1)(x-3)=0$.

  Sur le référentiel $[3,\ +\infty[$, $S_2 = \{3\}$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \{3\}.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\left| m\,x + m + 2 \right| \;=\; x + 3\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $x + 3 \geq 0$.

Condition de positivité : $x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I = [-3\,,\, +\infty\,[$.

Sur ce référentiel restreint I, l'équation devient équivalente au système suivant :

$$\left| m\,x + m + 2 \right| \;=\; x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\,x + m + 2 \;=\; x + 3 & (a) \\ \text{ou} & \\ m\,x + m + 2 \;=\; -(x + 3) & (b) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (a) :

$$m\,x + m + 2 \;=\; x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)\,x \;=\; -m + 1\,,$$

- si $m = 1$, l'équation devient $0\,x = 0$, elle est vérifiée pour tout x dans I, $S_a = I = [-3\,,\, +\infty\,[$,
- si $m \neq 1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m+1}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$, or $-1 \in I$ donc $S_a = \{-1\,\}$.

Résolution de l'équation (b) :

$$m\,x + m + 2 \;=\; -(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad (m+1)\,x \;=\; -m - 5\,,$$

- si $m = -1$, l'équation devient $0\,x = -4$, elle n'est jamais vérifiée, $S_b = \emptyset$,
- si $m \neq -1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m-5}{m+1}$.

  Mais $x = \frac{-m-5}{m+1}$ n'est solution que s'il appartient à l'intervalle I :

  $$\frac{-m-5}{m+1} \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,(m-1)}{m+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup [\,1\,,\, +\infty\,[\,,$$

  donc si $m \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup [\,1\,,\, +\infty\,[$ alors $S_b = \{-\frac{m+5}{m+1}\,\}$.

Détermination de l'ensemble solution S de l'équation initiale en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$S = S_a \cup S_b\,.$$

- si $m \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$ alors $S = \{-1\,,\,-\frac{m+5}{m+1}\,\}$,
- si $m \in \,[-1\,,\,1\,[$ alors $S = \{-1\,\}$,
- si $m = 1$ alors $S = [-3\,,\,+\infty\,[$.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$,

b) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x - 1$,

c) $\Big|\,2\,(x+3) - |x-1|\,\Big| \leq |x-1|$,

d) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \dfrac{2}{3x-4}\right|$.

---

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

On utilise l'équivalence suivante :

$$|x^2+3x-1| \geq x^2+x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+3x-1 \geq x^2+x+1 \\ \text{ou} \\ x^2+3x-1 \leq -(x^2+x+1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 2x-2 \geq 0 & (1) \\ \text{ou} & \\ 2x^2+4x \leq 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

  $2x - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$, $\qquad S_1 = [\,1\,,\,+\infty\,[$.

- Résolution de l'inéquation (2) :

  $2x^2 + 4x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(x+2) \leq 0$, $\qquad S_2 = [-2\,,\,0\,]$.

- Conclusion :

$$S = S_1 \cup S_2 = [-2\,,\,0\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

b)
- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x-1}{x+1} < x-1 & (1) \\ \text{et} & \\ \dfrac{x-1}{x+1} > -(x-1) & (2) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$$\frac{x-1}{x+1} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}-(x-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\;[1-(x+1)]}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x\,(x-1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_1 = \dfrac{x\,(x-1)}{x+1}$:

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Q_1	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

$Q_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}+(x-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\;[1+(x+1)]}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_2 = \dfrac{(x+2)\,(x-1)}{x+1}$:

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q_2	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$Q_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Conclusion : $S = S_1 \cap S_2\,,$

  avec $S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$ et $S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

$$S = \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

c) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Cette inéquation est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,(x+3) - |x-1| \;\leq\; |x-1| \\ \text{et} \\ 2\,(x+3) - |x-1| \;\geq\; -|x-1| \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} |x-1| \;\geq\; x+3 & (1) \\ \text{et} & \\ x+3 \;\geq\; 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x-1 \;\geq\; x+3 \\ \text{ou} \\ x-1 \;\leq\; -(x+3) \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 0\,x \;\geq\; 4 \\ \text{ou} \\ x \;\leq\; -1 \end{array}\right. \,, \qquad S_1 = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

$$(2) \quad\Leftrightarrow\quad x \geq -3\,, \qquad S_2 = [-3\,,\,+\infty\,[\,.$$

En conclusion : $S = S_1 \cap S_2 = [-3\,,\,-1\,]\,.$

d)
- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\setminus\{-2\,,\,\frac{4}{3}\}\,.$

- $$\frac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x}\,.$$

  On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} 1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} & (1) \\ \text{et} & \\ 1 + \frac{2}{3x-4} \geq -1 + \frac{1-x}{2+x} & (2) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$$1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0\,.$$

  On retrouve l'inéquation de l'exercice 1 (c) : $S_1 = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[\,0\,,\,\frac{4}{3}\,[\,\cup\,[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$$1 + \frac{2}{3x-4} \geq -1 + \frac{1-x}{2+x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{3x-4} + \frac{x-1}{2+x} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2\,(2+x) + (x-1)\,(3x-4) + 2\,(3x-4)\,(2+x)}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9x^2 - x - 8}{(3x-4)(2+x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(9x+8)(x-1)}{(3x-4)(2+x)} \geq 0$$

Signe de la fraction rationnelle $Q = \dfrac{(9x+8)(x-1)}{(3x-4)(2+x)}$.

x		-2		$-\frac{8}{9}$		1		$\frac{4}{3}$	
$9x+8$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$3x-4$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
Q	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$

$$Q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\, -2\,[\, \cup \,[-\tfrac{8}{9}\,,\, 1\,]\, \cup \,]\,\tfrac{4}{3}\,,\, +\infty\,[\,.$$

$$S_2 = \,]-\infty\,,\, -2\,[\, \cup \,[-\tfrac{8}{9}\,,\, 1\,]\, \cup \,]\,\tfrac{4}{3}\,,\, +\infty\,[\,.$$

- Conclusion :

$$S = S_1 \cap S_2 = \,]-\infty\,,\, -2\,[\, \cup \,[\,0\,,\, 1\,]\, \cup \,[\,3\,,\, +\infty\,[\,.$$

7. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

On définit la moyenne arithmétique m_a , la moyenne géométrique m_g et la moyenne harmonique m_h de ces deux nombres de la façon suivante :

$$m_a = \frac{1}{2}\,(a+b) \qquad m_g = \sqrt{a\,b} \qquad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

a) Comparer la moyenne arithmétique m_a et la moyenne géométrique m_g .

b) Déduire de a) une comparaison entre la moyenne géométrique m_g et la moyenne harmonique m_h .

---

a) Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence. Etudions le signe de $m_a - m_g$.

$$m_a - m_g = \frac{1}{2}\,(a+b) - \sqrt{a\,b} = \frac{1}{2}\left(a + b - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

Donc $m_a - m_g \geq 0$ et $m_a \geq m_g$.

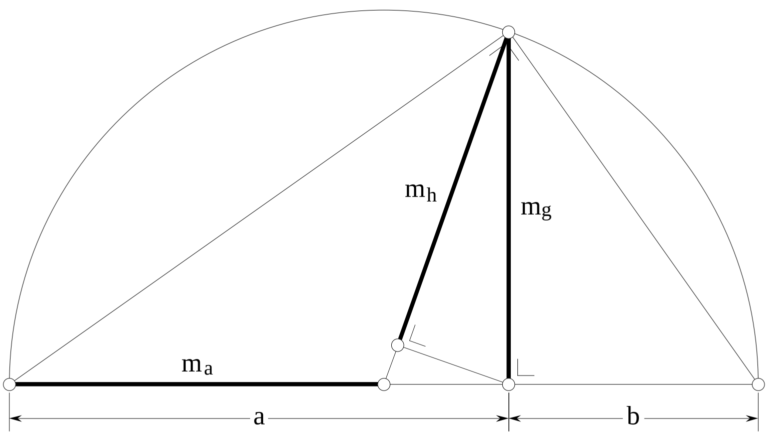
b) Posons $p = \frac{1}{a}$ et $q = \frac{1}{b}$; d'après a) nous savons que $\frac{1}{2}\,(p+q) \geq \sqrt{p\,q}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{a\,b}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m_h} \geq \frac{1}{m_g}\,.$$

Donc $m_g \geq m_h$ car m_g et m_h sont strictement positifs.

En résumé : $m_a \geq m_g \geq m_h$.

Représentation géométrique des moyennes arithmétique m_a , géométrique m_g et harmonique m_h de deux nombres réels a et b strictement positifs :



La représentation de la moyenne géométrique m_g est une conséquence du théorème de la hauteur.

La représentation de la moyenne harmonique m_h se déduit de la relation $m_g^2 = m_a \cdot m_h$ (à vérifier) et du théorème d'Euclide.