Peter Wittwer

Analyse I – Série 6

Echauffement 1. (Suites de Cauchy)

Montrer que la suite (a_n) est une suite de Cauchy en vérifiant qu'elle satisfait la définition :

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{2}{3}\,a_{n-1} + 2 \quad \text{pour } n = 2, 3, \ldots$$

Exercice 1. (Règle de d'Alembert pour les suites)

Démontrer la règle de d'Alembert pour les suites (voir le chapitre 2.10 du cours).

Exercice 2. (Limites de suites définies par récurrence)

Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n = 2, 3, \ldots$. En suivant l'exemple donné au § 2.9 du cours, montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour

i) $g(x) = \dfrac{1}{4}(3x+1)$, $\quad a_1 = 0$

ii) $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+4)$, $\quad a_1 = 3$

iii) $g(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{1+x}$, $\quad a_1 = 1$

iv) $g(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x$, $\quad a_1 = \frac{3}{2}$

Exercice 3. (V/F : Suites)

Soit (a_n) une suite numérique.

Q1 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$, alors (a_n) est une suite bornée.

Q2 : Si (a_n) est de Cauchy, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Q3 : Si (a_n) est de Cauchy, alors $(|a_n|)$ est de Cauchy.

Exercice 4. (V/F : Limite inférieure et supérieure)

Soient (a_n) et (b_n) des suites numériques.

Q1 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = a$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -a$.

Q2 : Si $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.

Q3 : Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4 : Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Exercice 5. (V/F : Suite à valeurs absolues décroissantes)

Soit (a_n) une suite numérique telle que $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q1 : Alors $(|a_n|)$ converge.

Q2 : Alors (a_n) converge.

Q3 : Alors (a_n) a une sous-suite convergente.

Q4 : Alors $\liminf_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup_{n\to\infty} a_n^2$.

Q5 : Alors (a_n) a au plus deux points d'accumulation.

Echauffement 2. (Série géométrique)

Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

i) le critère de d'Alembert,

ii) le critère de Cauchy.

Exercice 6. (Convergence de séries)

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$ *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - n\right)$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$ *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n}$

viii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^d}{(dn)!}$ pour les cas $d = 1, 2, 3$.

Exercice 7. (Sommes de séries)

Calculer les sommes des séries suivantes

i) $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ *ii)* $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

Exercice 8. (Critères de convergence)

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de Cauchy et de d'Alembert à cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Exercice 9. (V/F : Séries)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique.

Q1 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Q2 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Q3 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Q4 : Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Q5 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q6 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q7 : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.