

10.5.19

Série 18

1. (a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que les deux polynômes $P(x) = x^3 - ax^2 - x + 2$ et $Q(x) = x^2 - 3x + a$ aient deux racines communes réelles;
- (b) Déterminer $b \in \mathbb{R}$ pour que les deux polynômes $P(x) = x^3 - x^2 + (b-2)x - 2b$ et $Q(x) = x^3 + bx^2 + (b+1)x + 2$ aient deux racines communes réelles.
2. (a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $x^4 - a^2x + 3 - a$ admette 4 comme reste après division par $x - 3$ et 24 comme reste après division par $x + 1$;
- (b) Trouver un polynôme réel $P(x)$ du troisième degré admettant 5 comme racine double, -5 comme reste de la division par $x + 1$, et tel que $x - 2$ divise $P(x)$.
3. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[x]$.
 - (a) $A(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$,
 - (b) $B(x) = x^4 - 1$,
 - (c) $C(x) = x^4 + 4$.
4. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.
 - (a) $A(x) = x^4 + 1$,
 - (b) $B(x) = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$.
5. Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$, sachant que $x = 2 - i$ est une racine de P .

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 46x^2 + 90x - 25.$$

6. On considère les deux polynômes P et Q à coefficients complexes.

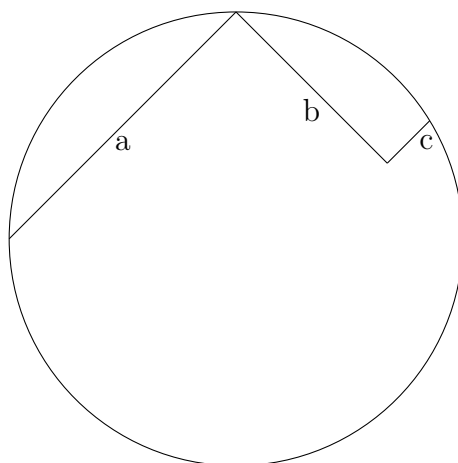
$$P(x) = x^3 - ix^2 + 2k - 2 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^3 - ix^2 - ix + k - 2, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Déterminer $k \in \mathbb{C}$ sachant que :

- les deux polynômes P et Q ont une racine commune,
 - le produit des racines de P est un nombre imaginaire pur non nul.
7. Déterminer le polynôme réel P du quatrième degré vérifiant les quatre conditions suivantes :

- $1 + i$ est une racine de P ,
- le reste de la division de P par $(x - 1)$ est égal à 2,
- la somme des racines de P vaut 3,
- P et $Q(x) = 18x^3 + 9x^2 - 23x + 6$ ont deux racines communes.

Problème récréatif: On se donne un cercle et trois segments formant des angles droits et de longueurs a , b et c respectivement, comme décrits par la figure suivante:



Calculer le rayon du cercle en fonction de a , b et c .

Solutions

S1 (a) 2

(b) -2

S2 (a) 5

(b) $\frac{5}{108}(x-5)^2(x-2)$

S3 (a) $(x-1)(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$

(b) $(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

(c) $(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i)$

S4 (a) $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

(b) $(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

S5 $(3x-1)(x+5)(x^2-4x+5)$

S6 $1-i$