Peter Wittwer

Analyse I – Corrigé de la Série 10

Echauffement.

On a vu au cours que la dérivée de la valeur absolue $g(x) = |x|$ est

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

et que g n'est pas dérivable en $x = 0$. Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x > 0 \\ -1 + e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Notez que $f'(0)$ n'existe pas non plus.
Comme rappel, la Fig. 1 montre les graphes des fonctions e^x et $|x|$. Les graphes de f et f' sont donnés aux Fig. 2 et 3 respectivement.

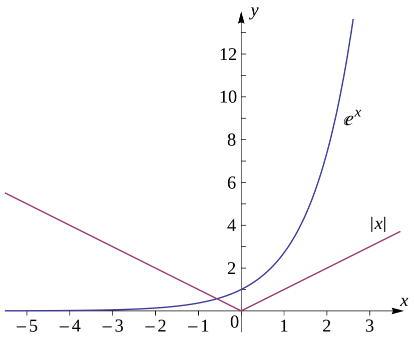

Fig. 1: Graphes de e^x et $|x|$.

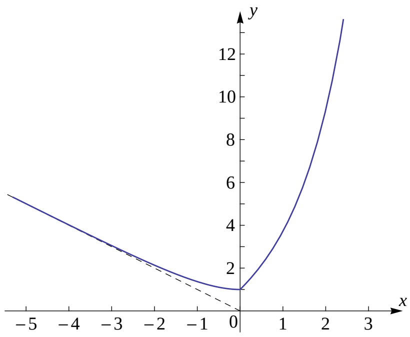

Fig. 2: Graphe de $f(x)$.

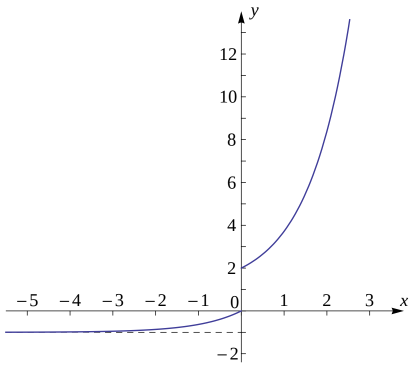

Fig. 3: Graphe de $f'(x)$.

Remarque: Les lignes hachurées dans les Fig. 2 et 3 sont les asymptotes à gauche de f et f' qui sont dues au fait que la fonction exponentielle admet une asymptote à gauche en $y = 0$.

Exercice 1.

Rappelons les deux limites suivantes (voir le cours et les exercices pour les démonstrations) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 \;.$$

Pour la dérivée de f en $x = 0$ on a par définition

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 \cdot 0 = 0 \,, \end{aligned}$$

où on a utilisé le rappel ci-dessus.

<u>*Autre manière de calculer la limite*</u> : Observer que

$$-|\sin(x)| \leq -\left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)|$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0}|\sin(x)| = 0$, on conclut par le théorème de deux gendarmes que la limite est 0.

Pour $x \neq 0$ on a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \\ &= \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ . \end{aligned}$$

On a déjà vu ci-dessus que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Pour le deuxième terme de f' on a

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\cos(x)\ \cdot\ \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1\cdot 0 = 0\ ,$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\ \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette dernière limite n'existe pas, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.
Puisque la limite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas, la fonction f' n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 2.

Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions élémentaires et donc dérivables sur leur domaine. Par un théorème du cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.
Les définitions des fonctions réciproques f^{-1} et leurs domaines respectifs ont été vus dans l'Ex. III.9 de la Série 1 pour $i) - vi)$ et dans l'Ex. 6 de la Série 7 pour $vii) - x)$.

i) $f^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(x)\,,\quad D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\mathrm{Arcsin}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \,]-1,1[\,.$$

ii) $f^{-1}(x) = \mathrm{Arccos}(x)\,,\quad D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\mathrm{Arccos}(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \,]-1,1[\,.$

iii) $f^{-1}(x) = \mathrm{Arctg}(x)\,,\quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos(\mathrm{Arctg}(x))^2}} = \cos(\mathrm{Arctg}(x))^2 \overset{*}{=} \frac{1}{1+\mathrm{tg}(\mathrm{Arctg}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\mathrm{tg}(x)$ à l'étape * :

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 = 1-\sin(x)^2 = 1-\mathrm{tg}(x)^2\cos(x)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2\left(1+\mathrm{tg}(x)^2\right)=1\\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2 = \frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)^2}\end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

iv) $f^{-1}(x) = \mathrm{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{e^{\mathrm{Log}(x)}} = \dfrac{1}{x}\,, \qquad D\left((f^{-1})'\right) = \,]0,\infty[\,.$

v) $f^{-1}(x) = -\mathrm{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-e^{-(-\mathrm{Log}(x))}} = -\dfrac{1}{x}\,, \qquad D\left((f^{-1})'\right) = \,]0,\infty[\,.$

vi) $f^{-1}(x) = -\mathrm{Log}_2(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

On a $f'(x) = (2^{-x})' = \left(e^{-x\,\mathrm{Log}(2)}\right)' = -\mathrm{Log}(2)\,e^{-x\,\mathrm{Log}(2)} = -\mathrm{Log}(2)\,2^{-x}$

et donc $\;(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-\mathrm{Log}(2)\cdot 2^{-(-\mathrm{Log}_2(x))}} = -\dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}(2)}\,, \qquad D\left((f^{-1})'\right) = \,]0,\infty[\,.$

vii) $f^{-1}(x) = \mathrm{Argsh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x))^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$

viii) $f^{-1}(x) = \mathrm{Argch}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,[1,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x))^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$

$D((f^{-1})') = \,]1,\infty[\,.$

ix) $f^{-1}(x) = \mathrm{Argth}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]-1,1[\,.$

Comme $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)' = \dfrac{\mathrm{ch}(x)^2-\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$ on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argth}(x))^2}} = \mathrm{ch}(\mathrm{Argth}(x))^2 \overset{**}{=} \frac{1}{1-\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où l'étape ** et due à

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)^2 = 1+\mathrm{sh}(x)^2 = 1+\mathrm{th}(x)^2\,\mathrm{ch}(x)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{ch}(x)^2\left(1-\mathrm{th}(x)^2\right)=1\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{ch}(x)^2 = \frac{1}{1-\mathrm{th}(x)^2}\,.\end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D\big((f^{-1})'\big) = \,]-1,1[\,.$

x) $f^{-1}(x) = \mathrm{Argcoth}(x)\,, \quad D(f^{-1}) =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\,.$

Ici on a $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)' = \dfrac{\mathrm{sh}(x)^2 - \mathrm{ch}(x)^2}{\mathrm{sh}(x)^2} = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$ et donc

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argcoth}(x))^2}} = -\,\mathrm{sh}(\mathrm{Argcoth}(x))^2 \overset{\star\star}{=} \frac{1}{1-\coth(\mathrm{Argcoth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\ ,$$

où ** vient de

$$\mathrm{sh}(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - 1 = \coth(x)^2\,\mathrm{sh}(x)^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{sh}(x)^2\left(\coth(x)^2 - 1\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{1}{\coth(x)^2 - 1}\ .$$

Le domaine de définition la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Exercice 3.

Soit la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Observons d'abord qu'il suffit de montrer l'inégalité pour $x \geq 0$ puisque f est paire.
On a $f(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$. Par le corollaire 3, l'inégalité est satisfaite si on montre que $f'(x) \geq 0$ pour $x > 0$. On a $f'(x) = -\sin(x) + x$ dont on ne connaît à priori pas le signe. Mais on a $f'(0) = 0$. De nouveau par le corollaire 3 il suffit de montrer que $f''(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Or, $f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$ parce que $\cos(x) \in [-1,1]$. Donc on a successivement

$$\begin{array}{ccccc} f''(x) \geq 0 & \text{et} & f'(0) = 0 & \overset{\text{Cor. 3}}{\Longrightarrow} & f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 & \text{et} & f(0) = 0 & \overset{\text{Cor. 3}}{\Longrightarrow} & f(x) \geq 0 \end{array}$$

pour tout $x \geq 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'inégalité désirée.

Exercice 4.

Afin de calculer les limites demandées, on applique la règle de Bernoulli-l'Hospital (abrégée par BH) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

i) Posons $f(x) = \mathrm{Log}(x-1)$ et $g(x) = x - 2$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BH sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

ii) Ici, on doit utiliser la règle BH plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \mathrm{th}(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BH une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{th}(x) - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{th}(x)-1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{ch}(x)^2}$$
$$\overset{\text{BH}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{sh}(2x)} \overset{\text{BH}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\,\mathrm{ch}(2x)} = 0\,.$$

Pour la deuxième application de BH on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \mathrm{ch}(x)^2$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \to \infty$).

Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \mathrm{sh}(2x)$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2\,\mathrm{ch}(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BH les trois fois.

iii) On a $\big(1+\sin(x)\big)^{1/x} = \exp\big(\frac{1}{x}\operatorname{Log}\big(1+\sin(x)\big)\big)$. On va donc d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \operatorname{Log}\big(1+\sin(x)\big)$ et $g(x) = x$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+\sin(x))}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\,,$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x} = e^1 = e\,.$$

Exercice 5.

i) La fonction $f(x) = x\left(e^{1/x}-1\right)$ est une fonction d'interpolation de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par $a_n = f(n)$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (si cette limite existe). Il suit que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\,e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1\,,$$

où on a pu appliquer BH parce que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{1/x}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$.

ii) Comme au point *i)*, la fonction $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est une fonction d'interpolation de la suite $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. On va d'abord calculer la limite de l'exposant :

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-(1/x)}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1-\frac{1}{x}} = -1\,,$$

où on a pu utiliser BH parce que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$.
Finalement, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 6.

On donne ici trois méthodes différentes pour calculer la limite tout en sachant qu'il en existent probablement d'autres.

<u>Méthode 1</u> : Soit $x \in [-1,1]$, $x \neq 0$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction e^x sur l'intervalle $[0,x]$ si $x > 0$ et sur l'intervalle $[x,0]$ si $x < 0$:

$$\text{sur } [0,x] : \qquad e^u = \frac{e^x-1}{x-0} \quad\Leftrightarrow\quad xe^u = e^x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 1 + xe^u\,, \qquad \text{où } u \in\,]0,x[$$

$$\text{sur } [x,0] : \qquad e^u = \frac{1-e^x}{0-x} \quad\Leftrightarrow\quad -xe^u = 1 - e^x \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 1 + xe^u\,, \qquad \text{où } u \in\,]x,0[$$

Comme $|u| < 1$, on peut obtenir des bornes pour

$$e^x = 1 + e^u x, \qquad x \in [-1, 1].$$

En effet, on a

$$1 + e^0 x \le 1 + e^u x \le 1 + e^1 x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x \le e^x \le 1 + ex \qquad \text{pour } x \in [0, 1]\,,$$

et

$$1 + e^0 x \le 1 + e^u x \le 1 + e^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x \le e^x \le 1 + \frac{x}{e} \qquad \text{pour } x \in [-1, 0]\,.$$

Ainsi

$$1 + x \le e^x \le \max\left\{1 + ex, 1 + \frac{x}{e}\right\} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \le e^x - 1 \le \max\left\{ex, \frac{x}{e}\right\}.$$

Puisque pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$-1 \le x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big) \le 1,$$

on a

$$x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big) \ \le\ \exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1 \le\ \max\left\{ex^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big),\ \frac{1}{e} x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\right\}.$$

En divisant par $x \neq 0$, cette relation s'écrit

$$x^3 \cos\big(e^{1/x^2}\big) \ \underset{\ge}{\le}\ \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} \ \underset{\ge}{\le}\ \max\left\{ex^3 \cos\big(e^{1/x^2}\big), \frac{1}{e} x^3 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\right\}, \quad x \underset{<}{>} 0\,.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on trouve alors dans les deux cas que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} = 0\,.$$

<u>*Méthode 2*</u> : On observe que pour $x \neq 0$, on a $\Big|\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big| \le 1$ et donc

$$\exp(-x^4) \ \le\ \exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) \ \le\ \exp(x^4)\,, \qquad x \neq 0\,,$$

$$\frac{\exp(-x^4) - 1}{x} \ \underset{\ge}{\le}\ \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} \ \underset{\ge}{\le}\ \frac{\exp(x^4) - 1}{x}\,, \qquad x \underset{<}{>} 0\,.$$

En introduisant les fonctions $f(x) = \exp(-x^4)$ et $g(x) = \exp(x^4)$, la dernière inégalité s'écrit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ \underset{\ge}{\le}\ \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} \ \underset{\ge}{\le}\ \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\,, \qquad x \underset{<}{>} 0\,,$$

et donc en laissant $x \to 0$ on a

$$f'(0) \ \underset{\ge}{\le}\ \lim_{x \to 0,\, x \underset{<}{>} 0} \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} \ \underset{\ge}{\le}\ g'(0)\,.$$

Puisque $f'(0) = g'(0) = 0$, la limite cherchée vaut 0 par le théorème des deux gendarmes.

<u>*Méthode 3*</u> : On écrit la limite comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x} = \lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)}$$

Puisque $\big|\cos\big(e^{1/x^2}\big)\big| \le 1$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big) = 0$. Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)} &= \Big(\lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\cdot\Big(\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\Big) \\
&= \Big(\lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\cdot (e^u)'\big|_{u=0} \\
&= 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

La règle de Bernoulli-l'Hospital ne marche pas pour cette fonction. En prenant

$$f(x) = \exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\,,$$

on a bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$ mais la dernière hypothèse n'est pas satisfaite, à savoir que la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}$ existe. En fait, la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}&\left(\frac{d}{dx}\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\Big(4x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big) + 2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\right)
\end{aligned}$$

n'existe pas parce que le terme $2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big)$ n'a pas de limite. En effet

$$\lim_{x\to 0} 2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big) = \lim_{u\to\infty}\frac{2}{\sqrt{u}}\,e^u\sin(e^u)$$

et en prenant les suites $a_n = \mathrm{Log}(2n\pi)$ et $b_n = \mathrm{Log}\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ mais

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{a_n}}{\sqrt{a_n}}\sin(e^{a_n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n\pi}{\sqrt{\mathrm{Log}(2n\pi)}}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{b_n}}{\sqrt{b_n}}\sin(e^{b_n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}{\sqrt{\mathrm{Log}\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big)}}\underbrace{\sin\Big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\Big)}_{=1} = \infty$$

parce que $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u}{\mathrm{Log}(u)} = \infty$ (cette fois on *peut* utiliser Bernoulli-l'Hospital).
Le fait que Bernoulli-l'Hospital ne marche pas ne veut donc pas dire que la limite initiale n'existe pas.

Exercice 7.

- [ ] $+\infty$
- [ ] 0
- [x] $-\frac{1}{2}$
- [ ] e^2

Puisque
$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
et
$$e^{\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^2}$$
on a que
$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)-1\right)\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\left(\cos(x)-1\right)\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$
On peut aussi utiliser BH deux fois (mais ce n'est pas recommandé) :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)-1}{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^2} &\overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}}{2e^{-\frac{1}{x^2}}e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)}{2e^{-\frac{1}{x^2}}} \\ &\overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}}{2e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos\left(\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos(0) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
où $\star$ indique que nous avons appliqué le théorème de BH pour la forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Exercice 8.

Q1 : FAUX.
La formule pour la dérivée de la fonction réciproque est $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Ici on a $f'(x) = 1 + e^x$ et $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Ainsi
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}.$$

Q2 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction f de l'Ex. 1, $f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$.

Alors f est dérivable sur $]-1,1[$ (en fait sur $\mathbb{R}$) mais sa dérivée n'est pas continue en 0 (cf. Ex. 1).

Exercice 9.

Q1 : VRAI.
Résultat du cours (point i du corollaire 2 du § 5.9.2).
Preuve: Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis il existe $u \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2 - x_1)$. Puisque $f'(u) \geq 0$ il suit que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, c.-à-d. f est croissante.

Q2 : VRAI.
Pour tout $x \in]a,b[$, la dérivée de f est par définition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Comme f est croissante sur $[a,b]$, $f(x+h) - f(x)$ est du même signe que h. Ainsi le quotient dans la limite est toujours positif et donc $f'(x) \geq 0$.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante sur $[-1,1]$ mais $f'(0) = 0$.

Q4 : VRAI.
Résultat du cours (point ii du corollaire 2 du § 5.9.2). Preuve comme à la Q1 en remplaçant $\geq$ par $>$.

Q5 : VRAI.
Soit $x \in]a,b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Comme $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe par hypothèse et que $\lim\limits_{x \to a^+} c_x = a$, on a

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) \overset{*}{=} \lim_{x \to a^+} f'(c_x) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{déf}}{=} f'_d(a)\,,$$

où * découle de la définition de la limite d'une fonction.