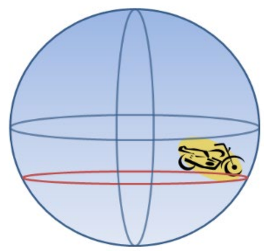
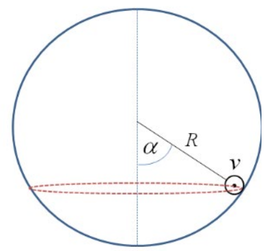
Exercice 1* (10 min) **: Le jouet**

Un enfant tire à l'aide d'une corde un jouet de masse m. Le jouet, dont les roues sont bloquées, ne peut pas rouler mais glisse sur le sol horizontal avec un coefficient de frottements μ et à vitesse constante $\vec{v}$. L'angle que fait la corde avec le sol est noté α. Trouvez la norme $\|\overrightarrow{F_e}\|$ de la force avec laquelle l'enfant tire le jouet.

Application numérique :
$\alpha = 45°$, $m = 1$ kg, $\|\vec{v}\| = 3.6\ \mathrm{km.h^{-1}}$, $\mu = 0.5$, et $g = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Exercice 2** (30 min) **: Boule de la mort**





Une attraction rencontrée parfois dans les fêtes foraines consiste pour un motard à entrer dans une « cage » sphérique et à tourner circulairement de plus en plus vite. Au début de la rotation, le motard se trouve dans le bas de la sphère, puis, à mesure que sa vitesse augmente, il « monte ». Il peut ainsi atteindre le milieu de la sphère. Dans cette situation, le corps du motard est à l'horizontal ($\alpha = 90°$).

Soit une cage sphérique de rayon R, et un motard (sur sa moto) que l'on considère comme un point matériel, de masse m, et dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. On négligera les frottements.

a) Calculer la vitesse v du motard en fonction de l'angle α (cf. figure) correspondant à une situation d'équilibre (mouvement circulaire uniforme et il ne tombe pas).
b) En s'appuyant sur un schéma où on indiquera les forces, montrez sans calcul que α ne peut pas être supérieur à 90°.

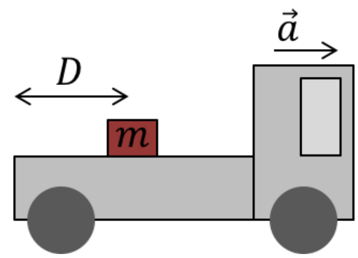
Formulaire :

Coordonnées polaires :
$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Coordonnées cylindriques :
$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques
$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$
$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$

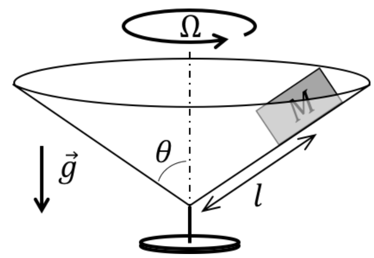
Exercice 3** (30 min) **: Le paquet perdu** *(extrait examen)*



Un camion démarre à vitesse nulle et accélère uniformément pour atteindre la vitesse v_0 en un temps t_0. Un paquet de masse m repose sur la remorque sans être attaché. Il est situé à la distance D du bord de la remorque. Quand le camion démarre, le paquet se met à glisser vers l'arrière de la remorque avec un coefficient de frottement sec dynamique μ_d.

a) Faites un schéma dans un repère lié au sol des différentes forces qui s'exercent sur le paquet.
b) Calculez l'accélération horizontale du paquet dans le référentiel lié au sol.
c) Déterminez le temps mis par le paquet pour atteindre le bord de la remorque et tomber.

Exercice 4** (30 min) **: Stabilité dans un cône**

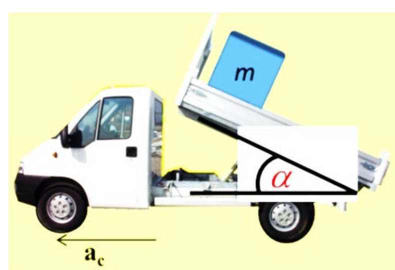


Un cube de masse M est placé dans un cône de demi-angle au sommet θ comme illustré sur la figure ci-contre. Le cube est à la distance l du sommet du cône. Le cube est dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et il est soumis à une force de frottement sec de coefficient μ avec la surface du cône. Dans ce qui suit, on considérera le cube comme un point matériel.

a) Dans un premier temps, le cône ne tourne pas. Montrez que la condition pour que le cube ne glisse pas est $\theta > \theta_{lim}$. Exprimez θ_{lim} en fonction du coefficient de frottement μ. μ représente-t-il ici le coefficient de frottement dynamique ou statique ?
b) Le cône, avec $\theta > \theta_{lim}$, est ensuite mis en rotation à la vitesse angulaire Ω constante (voir schéma). On observe que le cube se met à glisser vers le haut si Ω dépasse une valeur Ω_{lim} . Exprimez Ω_{lim} en fonction de μ, g, l et θ.

***

Exercice supplémentaire S5.1** (30 min) **: Le camionneur**



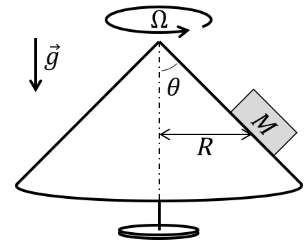
Un camionneur a oublié de redescendre la benne de son camion. Celle-ci fait un angle α avec l'horizontale (*cf.* schéma). Un paquet de masse m, initialement au repos grâce à la force de frottement sec, se trouve en haut de la benne *(on note* μ_s *et* μ_d *les coefficients de frottement statique et dynamique).*

a) Déterminez l'angle limite α, lorsque le camion est à l'arrêt, pour que le paquet ne glisse pas.
b) On suppose que l'angle α est inférieur à l'angle limite. Déterminez la norme minimale de l'accélération horizontale a_c du camion qui va faire que le paquet se mette en mouvement par rapport à la benne (décrochage du paquet). *On suppose que le paquet reste toujours en contact avec la benne.*

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen

Exercice supplémentaire S5.2** (25 min) **: Stabilité sur un cône**

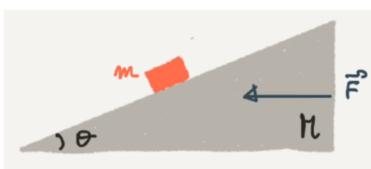


Un cube de masse M est placé sur un cône dont la forme est définie par angle θ comme illustré sur la figure ci-contre. Le cube est à la distance R de l'axe du cône. Le cube est dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ et il est soumis à une force de frottement sec de coefficient μ avec la surface du cône. Dans ce qui suit, on considérera le cube comme un point matériel.

a) Lorsque l'angle θ est très grand, le cube ne glisse pas. Cependant, il existe un angle θ_{lim} pour lequel le cube n'est plus stable et se met en mouvement. Exprimez cet angle en fonction du coefficient de frottement μ. Préciser le type de coefficient de frottement (dynamique ou statique).

b) Le cône, avec $\theta > \theta_{lim}$, est ensuite mis en rotation à la vitesse angulaire Ω (voir schéma). Il existe une valeur de Ω_{lim} au-delà de laquelle le cube se met à glisser. Exprimez Ω_{lim} en fonction de μ, $\vec{g}$, R et θ.

Exercice supplémentaire S5.3*** (25 min) **: Bloc sur plan incliné**



Un petit bloc (d'une masse m) est placé sur le côté pentu d'un bloc triangulaire (d'une masse M) lui-même posé sur une table horizontale. En supposant qu'il n'y ait aucun frottement sur ces surfaces, déterminez la force qu'il faut exercer sur M pour que m garde une position fixe par rapport au bloc triangulaire (c'est-à-dire qu'il ne glisse pas le long de la pente)