EPFL
Section MT Peter Wittwer
26 septembre 2020

# Analyse I – Série 1

**Avant-propos.**
La plupart des exercices suivants sont tirés du livre « Analyse : Concepts et Contextes, Volume 1 : Fonctions d'une variable » de James Stewart, édition De Boeck.
Le but est de repérer les faiblesses que vous pourriez avoir. Si vous avez des difficultés pour résoudre ces exercices, il est vivement conseillé de rattraper le matériel en question.
♦ Les sujets des exercices avec ce symbole vont (brièvement) réapparaître dans le cours ou les exercices. Néanmoins ces concepts devraient déjà être connus (et donc ces exercices aussi résolus maintenant).

**Partie I : Algèbre.**

Pour réviser cette partie (si nécessaire), voir le fichier `http://www.stewartcalculus.com/data/default/upfiles/AlgebraReview.pdf`.

**1.** Calculer, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

*a*) $(-3)^4$ *b*) $-3^4$ *c*) $3^{-4}$ *d*) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ *e*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ *f*) $16^{-3/4}$

**2.** Simplifier chaque expression. Ecrire la réponse sans exposants négatifs.

*a*) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ *b*) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ *c*) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

**3.** Développer et simplifier.

*a*) $3(x+6) + 4(2x-5)$ *b*) $(x+3)(4x-5)$ *c*) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$
*d*) $(2x+3)^2$ *e*) $(x+2)^3$ *f*) $(a^{4/3}-a^{2/3}+1)(a^{2/3}+1)$

**4.** Factoriser chaque expression.

*a*) $4x^2 - 25$ *b*) $2x^2 + 5x - 12$ *c*) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
*d*) $x^2 + 27x$ *e*) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ *f*) $x^3y - 4xy$

**5.** Simplifier l'expression rationnelle.

*a*) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ *b*) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9} \cdot \dfrac{x+3}{2x+1}$ *c*) $\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x+2}$ *d*) $\dfrac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

**6.** Rendre le dénominateur rationnel et simplifier.

*a*) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ *b*) $\dfrac{h}{\sqrt{9+h}+3}$

**7.** Simplifier les expressions, où $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}^*$.

*a*) $(ab)^p b^{q-p}$ *b*) $a^{p-q}(ab)^q$ *c*) $\dfrac{a^p}{b^{-q}}$ *d*) $\dfrac{b^q}{a^{-p}}$ *e*) $\left(ab^{\frac{q}{p}}\right)^p$

*f*) $\left(a^{\frac{p}{q}}b\right)^q$ *g*) $\left(a^{\frac{1}{q}}b^{\frac{1}{p}}\right)^{pq}$ *h*) $\sqrt{a^{2p}}\, b^q$ *i*) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^q + \left(\frac{1}{b}\right)^p\right)\dfrac{a^p(ab)^q}{1+\frac{a^q}{b^p}}$

*j*) $a^q b^p \dfrac{\frac{a^p+b^q}{\left(\frac{1}{a}\right)^p+\left(\frac{1}{b}\right)^q}}{\frac{a^q+b^p}{\left(\frac{1}{b}\right)^p+\left(\frac{1}{a}\right)^q}}$ *k*) $a^{p-q}b^{q-p}\,(a^q+b^p)\left(\left(\frac{1}{a}\right)^q+\left(\frac{1}{b}\right)^p\right)^{-1}$ *l*) $a^q b^p\left(\left(a^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q$

*m*) $\left(\sqrt{a^p(b^q+a^{-p})}-1\right)\left(\sqrt{b^q(a^p+b^{-q})}+1\right)$

**8.** Compléter le carré.

*a*) $x^2+x+1$ *b*) $2x^2-12x+11$

**9.** Résoudre l'équation. (Chercher seulement les solutions réelles.)

*a*) $x+5=14-\frac{1}{2}x$ *b*) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$ *c*) $x^2-x-12=0$

*d*) $2x^2+4x+1=0$ *e*) $x^4-3x^2+2=0$ *f*) $3\,|x-4|=10$

*g*) $2x(4-x)^{-1/2}-3\sqrt{4-x}=0$

**10.** ♦ Résoudre chaque inégalité. Ecrire les réponses sous forme d'intervalles.

*a*) $-4<5-3x\leq 17$ *b*) $x^2<2x+8$ *c*) $x(x-1)(x+2)>0$

*d*) $|x-4|<3$ *e*) $\dfrac{2x-3}{x+1}\leq 1$

**11.** Ces équations sont-elles vraies ou fausses ? Pour chaque équation, le domaine des variables est supposé tel que tout soit bien défini.

*a*) $(p+q)^2=p^2+q^2$ *b*) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ *c*) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

*d*) $\dfrac{1+TC}{C}=1+T$ *e*) $(bc+1)\dfrac{a}{b}=\dfrac{(bc+1)ad}{bd}$ *f*) $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$

*g*) $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}=\dfrac{1}{a-b}$ *h*) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$

**12.** Vérifier les identités.

*a*) $3^{2(n+1)+4}-2^{n+1}=9\left(3^{2n+4}-2^n\right)+7\cdot 2^n\,,\quad$ où $\;n\in\mathbb{N}$

*b*) $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{7}a^k\right)(1-a)=(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

**13.** Soient $b>0$ et $m\in\mathbb{Z}$. Simplifier l'expression $A=\left(-b(-b^{-2})^m\right)^{-2m}$. Déterminer $m$ pour que $A$ soit égal à $16^5$ lorsque $b=2$.

## Partie II : Trigonométrie.

Si vous avez des difficultés avec cette partie, consultez l'annexe C du livre de Stewart.

**1.** Convertir de degrés en radians.

*a*) $300°$ *b*) $-18°$

**2.** Convertir de radians en degrés.

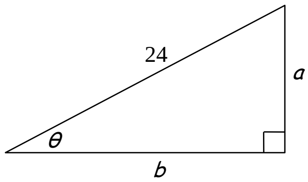
*a*) $\frac{5\pi}{6}$ *b*) $2$

**3.** Calculer la longueur de l'arc d'un cercle de 12 cm de rayon sous-tendu par un angle au centre de $30°$.

**4.** Quelles sont les valeurs exactes ?

*a*) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ *b*) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ *c*) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**5.** Exprimer les longueurs $a$ et $b$ de la figure ci-dessous en termes de $\theta$.




**6.** Calculer $\sin(x+y)$ sachant que $\sin(x) = \frac{1}{3}$, $\cos(y) = \frac{4}{5}$ et que $x$ et $y$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

**7.** Démontrer ces identités en supposant que tout soit bien défini.

*a*) $\operatorname{tg}(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$ *b*) $\dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}(x)^2} = \sin(2x)$

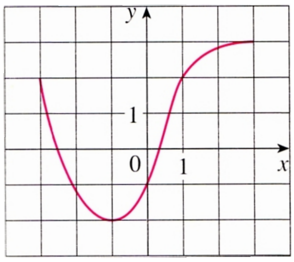
**8.** Chercher toutes les valeurs de $x$ comprises entre 0 et $2\pi$ telles que $\sin(2x) = \sin(x)$.

**9.** Dessiner le graphe de la fonction $y = 1 + \sin(2x)$ sans faire usage de la calculatrice.

## Partie III : Fonctions réelles.

Si vous avez des difficultés avec cette partie, consultez les sections 1.1 à 1.3 du livre de Stewart.

**1.** La figure ci-dessous montre le graphe d'une fonction $f$.




*a*) Quelle est la valeur $f(-1)$ ?
*b*) Que vaut $f(2)$ ?
*c*) Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $f(x) = 2$ ?
*d*) Chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x) = 0$.
*e*) Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de $f$.

**2.** Pour $f(x) = x^3$, calculer le quotient différentiel $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et le simplifier.

**3.** Déterminer le domaine de définition de la fonction.

*a*) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^{1/3}}{x^2+1}$ *c*) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

**4.** ♦ Par quelles transformations du graphe de $f$ obtient-on les graphes des fonctions suivantes ?

*a*) $y = -f(x)$ *b*) $y = 2f(x) - 1$ *c*) $y = f(x-3) + 2$

**5.** Esquisser à la main et sans l'aide d'une calculatrice les graphes suivants.

*a*) $y = x^3$ *b*) $y = (x+1)^3$ *c*) $y = (x-2)^3 + 3$ *d*) $y = 4 - x^2$

*e*) $y = \sqrt{x}$ *f*) $y = 2\sqrt{x}$ *g*) $y = -2^x$ *h*) $y = 1 + x^{-1}$

**6.** ♦ Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

*a*) Calculer $f(-2)$ et $f(1)$. *b*) Dessiner le graphe de $f$.

**7.** ♦ Soient $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Déterminer les fonctions suivantes.

*a*) $f \circ g$ *b*) $g \circ f$ *c*) $g \circ g \circ g$

**8.** Soit $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

*a*) $\exp\big(p \operatorname{Log}(a) + q \operatorname{Log}(b)\big)$ *b*) $\exp\big(p\big(\operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(b)\big) + \operatorname{Log}(b)(p+q)\big)$

*c*) $\exp\big(p \operatorname{Log}(ab^{-1}) + \operatorname{Log}(b^{p+q})\big)$ *d*) $\exp\big(q \operatorname{Log}\big(\frac{b}{a}\big) + \operatorname{Log}(a^q) + p \operatorname{Log}(a)\big)$

**9.** ♦ Pour chaque fonction $f$ définie sur l'intervalle $I$, trouver le domaine de définition de la fonction réciproque $f^{-1}$ et dessiner les graphes de $f$ et $f^{-1}$.
*N.B.* : Tous les domaines $I$ sont choisis en sorte que la fonction réciproque existe.

*a*) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *b*) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

*c*) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *d*) $f(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

*e*) $f(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$ *f*) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

*Rappel* : La fonction réciproque d'une fonction bijective $f\colon X \to Y$ fait correspondre à tout élément $y$ de $Y$ l'unique élément $x$ de $X$ qui est solution de l'équation $f(x) = y$. On a donc $f^{-1}(y) = x$.

## ♦ Partie IV : Calcul propositionnel.

Une "proposition (logique)" est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit $p$ et $q$ des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations $\neg$ ("non" logique), $\wedge$ ("et" logique), $\vee$ ("ou" logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

**1.** (Équivalences logiques)
Soient $p$, $q$ et $r$ des propositions. Montrer que :

(a) $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$ (loi de la double négation).
(b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ et $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (idempotence).
(c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ et $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (commutativité).
(d) $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ et $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$ (lois de DE MORGAN).
(e) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ et $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (associativité).
(f) $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ et $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ (distributivité).
(g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ (définition de l'implication).
(h) $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$ (négation de l'implication).
(i) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication).
(j) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (propositions équivalentes).
(k) $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (contraposé de l'implication).

A noter que la véracité de la réciproque de la proposition $p \Rightarrow q$ c'est-à-dire la proposition $q \Rightarrow p$ n'a aucun rapport avec la véracité de la proposition $p \Rightarrow q$.

Dans la suite, pour économiser des parenthèses, nous utiliserons les priorités habituelles sur les opérations et, si convenable, nous écrirons que $p \Leftarrow q$ au lieu de $q \Rightarrow p$.

**2.** (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)
Soit $E$ un ensemble et pour $x \in E$ soit $p(x)$ et $q(x)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de $x$). On écrira $\forall x \in E$, $p(x)$ pour dire que “pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie“, et $\exists x \in E$, $p(x)$ pour dire que “il existe $x \in E$ tel que la proposition $p(x)$ est vraie”. Se convaincre que :

(a) $(\neg(\forall x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg(p(x)))$.
(b) $(\neg(\exists x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg(p(x)))$.
(c) $(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, p(x)) \wedge (\forall x \in E, q(x)))$.
(d) $(\exists x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \vee (\exists x \in E, q(x)))$.
(e) $(\forall x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftarrow ((\forall x \in E, p(x)) \vee (\forall x \in E, q(x)))$.
(f) $(\exists x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \wedge (\exists x \in E, q(x)))$.

Pour les deux cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

**3.** (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)
Soit $E$ et $F$ des ensembles et pour $x \in E$ et $y \in F$ soit $p(x, y)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de $x$ et de $y$). Se convaincre que :

(a) $((\forall x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in F), (\forall x \in E), p(x, y))$.
(b) $((\exists x \in E), (\exists y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in F), (\exists x \in E), p(x, y))$.
(c) $((\exists x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in F), (\exists x \in E), p(x, y))$.

Pour le cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.