Série 5

Exercice 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la position relative des droites d et g :

a. $d : x + y = 1$, $g : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, g passe par $A(4, 5)$ et $B(6, 8)$.

c. $d : 3x - 4y + 3 = 0$, $g : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d. d passe par $A(1, 2)$ et a pour pente 3, $g : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(-3, -1)$ et $B\,(5, 9)$, ainsi que la droite d d'équation $2x - y + 12 = 0$.

a. Déterminer des équations paramétriques de la médiatrice m du segment AB.

b. Chercher un point M de la droite d qui soit équidistant des points A et B.

Exercice 3. On se donne trois points A, B, C dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a. Les coordonnées de A, B, C sont : $A\,(-3, -2), B\,(4, -5), C\,(5, 7)$. Le triangle ABC est-il isocèle ?

b. Même question en supposant maintenant que $A\,(0, 6), B\,(-5, 3), C\,(3, 3)$.

c. Sachant que les coordonnées de A, B et C sont $A\,(7, 1), B\,(5, 5), C\,(5, -3)$, calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4. On considère trois points A, B, C dans le plan, ainsi qu'un nombre réel positif α.

a. Localiser vectoriellement depuis le point A, en fonction des données, un point D tel que le segment AD soit parallèle à BC et qu'il ait pour longueur α.

b. Application numérique : $A\,(-2, -1)$, $B\,(6, 3)$, $C\,(3, 4)$ (dans un repère orthonormé du plan) et $\alpha = 10$.

Exercice 5. On considère trois points A, B et C dans le plan. On note δ la distance de C à la droite (AB). Soit α un réel strictement positif.

a. Localiser vectoriellement depuis le point A, en fonction des données, le point D tel que $ABCD$ soit un trapèze de base CD, et d'aire fixée α.

b. Application numérique : $A\,(2, 4)$, $B\,(-2, 2)$, $C\,(-3, -3)$ (dans un repère orthonormé du plan), $\delta = \frac{9}{5}$, et $\alpha = \frac{27\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un triangle ABC, isocèle de base BC, dont on connaît :

- une équation cartésienne de la hauteur issue de A : $3x + y - 26 = 0$,
- les coordonnées du sommet $B\,(-4, -2)$,
- l'aire $S = 120$ unités d'aire.

Calculer les coordonnées des deux sommets A et C. Retenir pour A la solution d'ordonnée positive.

Exercice 7. Dans un plan, on considère un point A ainsi que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note d (resp. g) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).

a. Déterminer des équations vectorielles des bissectrices de l'angle formé par les deux droites d et g, vues depuis le point A.

b. Déterminer des équations cartésiennes de ces bissectrices dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

c. On fixe un repère orthonormé du plan tel que $A(8, -7)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Calculer des équations cartésiennes de ces bissectrices dans le repère utilisé.

Exercice 8. Dans le plan, on considère un triangle ABC (non aplati). On note d la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et g la parallèle à (AB) passant par C.

a. Donner des équations vectorielles des droites d et g vues depuis le point A. Ces droites sont-elles parallèles ?

b. On note I le point d'intersection de d et g. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des données.

c. Déterminer une équation vectorielle de la droite (BI) en fonction des données. Cette droite intersecte-t-elle la droite (AC) ? Si oui, donner la valeur du paramètre correspondant au point d'intersection.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. confondues, b. perpendiculaires, c. parallèles, d. sécantes.
Ex. 2 : a. $m:\ x = 1 + 5t,\ y = 4 - 4t,\ t \in \mathbb{R}$, b. $(-\frac{18}{7}, \frac{48}{7})$.
Ex. 3 : a. oui, b. non, c. $(2, 1)$.
Ex. 4 : a. $\overrightarrow{AD} = \pm\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{BC}\|}\overrightarrow{BC}$, b. $(-2 - 3\sqrt{10}, -1 + \sqrt{10})$, $(-2 + 3\sqrt{10}, -1 - \sqrt{10})$.
Ex. 5 : a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - (\frac{2\alpha}{\delta} - \|\overrightarrow{AB}\|)\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, b. $D\,(5, 1)$.
Ex. 6 : $A\,(5, 11)$, $C\,(20, 6)$.
Ex. 7 : a. $\overrightarrow{AM} = t(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \pm \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v})$, $t \in \mathbb{R}$, b. $\|\vec{u}\|x \pm \|\vec{v}\|y = 0$, c.$-x + y + 15 = 0$, $x + y - 1 = 0$.
Ex. 8 : a. $d : \overrightarrow{AM} = t(\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC})$, $t \in \mathbb{R}$, $g : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$, b. $\overrightarrow{AI} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,
c. $(BI) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t((\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $t \in \mathbb{R}$.