Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 23

Exercice 2

(a)

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 18y + 27 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -9 \\ -6 & -9 & 27 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 18$
$\delta = -3$
$\mathcal{C}$ est une hyperbole non dégénérée.

Valeurs propres de B :
$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1$ et 3

$H = \frac{\Delta}{\delta} = -6$

Equation réduite : $\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + H = 0$
et on choisit, par convention, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$ (car $H < 0$).

$3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 6 = 0$
$\Leftrightarrow$
$\dfrac{\bar{x}^2}{2} - \dfrac{\bar{y}^2}{6} - 1 = 0$

Centre de l'hyperbole : $\Omega\,(x, y)$ est solution de : $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$
On obtient $\Omega(4; 1)$

Sev (sous-espaces vectoriels) propres de B :

E_3 : $BX = 3X \implies x - y = 0$; direction de l'axe réel : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$E_{-1} \perp E_3 \implies x + y = 0$; direction de l'axe imaginaire : $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée directe et donc le nouveau repère $\mathcal{R}'$ est $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

(b) $\overrightarrow{OF}_{1,2} = \overrightarrow{O\Omega} \pm c\,\vec{u}_1$.

Distance de Ω à F vaut c.
$a^2 + b^2 = c^2$

On a : $a^2 = 2, \quad b^2 = 6$ et donc $c^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

D'où :

$\overrightarrow{OF}_{1,2} = \overrightarrow{O\Omega} \pm c\,\vec{u}_1$

$\overrightarrow{OF}_1 = \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: $F_1\,(6; 3)$

ou

$\overrightarrow{OF}_2 = \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $F_2\,(2; -1)$

Exercice 3

(a) Les coniques sont dégénérées si et seulement si $\Delta = \det A = 0$.
La matrice A associée à l'équation du deuxième degré en x et y est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ m & 1-m & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (m+1)(-2) =$

$= -2(m+1) = 0$ pour $m = -1$.

Prendre x comme variable et y comme paramètre (par exemple) et résoudre l'équation en fonction du paramètre y.

La seule conique dégénérée est pour la valeur $m = -1$, que l'on remplace dans l'équation :

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

En prenant x comme variable et y comme paramètre, on obtient :

$$x^2 + (-2y - 2)x + y^2 + 2y = 0.$$

Discriminant de cette expression :

$$\Delta' = y^2 + 2y + 1 - y^2 - 2y = 1.$$

Et donc :

$$x_{1,2} = y + 1 \pm 1.$$

Ce qui donne :

$$x = y + 2 \text{ ou } x = y.$$

Les équations des droites de dégénerescence sont : $x - y - 2 = 0$ et $x - y = 0$.

(b) $\delta = \det B$ détermine le genre de la conique.

$\delta = \det B = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$.

La seule valeur où l'on a une conique dégénérée $(\Delta = 0)$ est $m = -1$. Pour cette valeur, il s'agit d'une parabole $(\delta = 0)$ dégénérée.

Pour les autres valeurs du paramètre m $(m \neq -1)$, les coniques sont non-dégénérées et leur genre est le suivant :

$m = 1$: conique genre parabole (non-dégénérée)
$m \in]-1; 1[$: conique genre ellipse
$m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$: conique genre hyperbole.

(c) **Remarques :**
Pour trouver le sommet, imposer que l'intersection entre la perpendiculaire (mobile) à l'axe et la parabole, soit unique.
Le sous-espace propre de la valeur propre non-nulle de la matrice B donne la direction de la perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Pour $m = 1$, la conique est une parabole non-dégénérée. Son équation est :

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0\,.$$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \mathrm{tr}B = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 2\,.$

La direction de la perpendiculaire à l'axe de la parabole est donnée par E_2 :

$$X \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad (B - 2I_2)X = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = 0$$

La perpendiculaire (mobile) à l'axe est : $\quad x - y + c = 0\,.$

On veut que l'intersection entre la parabole et cette perpendiculaire (mobile) à l'axe, soit unique. C'est-à-dire que le système suivant ne possède qu'une seule solution :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad (1) \\ y = x + c \quad (2) \end{cases}$$

Résolvons ce système : (2) dans (1)

$$\Rightarrow x^2 + 2x(x+c) + x^2 + 2cx + c^2 - 2x + 2x + 2c = 0 \Leftrightarrow \; 4x^2 + 4xc + c^2 + 2c = 0 \quad (\star)$$

Cette équation a une unique solution ssi le discriminant vaut 0 :

$$\Delta' = 4c^2 - 4c^2 - 8c = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$$

Et la tangente au sommet de la parabole est donc $x - y = 0\,.$

Remplaçons $c = 0$ dans $(\star)$: $\quad 4x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \quad$ et $\quad y = 0\,.$

D'où le sommet est : $S(0,0)\,.$

L'équation cartésienne de l'axe de la parabole est : $x + y = 0\,.$

(d) **Rappel :**
L'équation canonique de l'ellipse est :

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} - 1 = 0\,.$$

Pour $m = \frac{1}{2}$ on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta = \det B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $\operatorname{tr} B = 2$ et donc

$$p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{car} \quad H = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = -4 \quad \text{et} \quad \frac{-H}{\lambda_1} > \frac{-H}{\lambda_2}\,.$$

Et l'équation canonique de cette ellipse est :

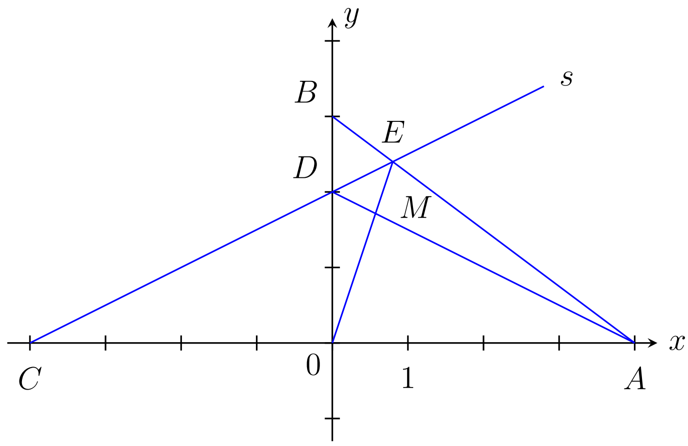
$$\frac{\overline{x}^2}{8} + \frac{\overline{y}^2}{\frac{8}{3}} - 1 = 0\,.$$

D'où : $a^2 = 8$, et la longueur du grand axe de l'ellipse est : $2a = 4\sqrt{2}$.

Exercice 4

(a) L'étude des lieux géométriques se fait de la manière suivante :
1) Figure d'étude.
2) Choix du paramètre.
3) Mise en équations.
4) Elimination du paramètre.

1) Figure d'étude :



2) Choix du paramètre : λ, abscisse du point C, $C(\lambda, 0)$.
3) Mise en équations :

Equation de la sécante s :

$$y = \frac{1}{2}x + h$$

Or $C(\lambda, 0)$ est un point de s, on en déduit donc que $h = -\frac{1}{2}\lambda$.

D'où l'équation de la sécante s :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\lambda$$

La sécante s coupe l'axe Oy en $D\,(0; -\frac{1}{2}\,\lambda)$ d'où l'équation de la droite (AD) :

$$\frac{y}{x-4} = \frac{-\frac{1}{2}\,\lambda}{-4} = \frac{1}{8}\,\lambda$$

$$(AB)\ :\ y = \frac{1}{8}\,\lambda(x-4) \quad (1)$$

Equation de la droite (AB) :

$$3x + 4y - 12 = 0$$

La sécante s coupe la droite (AB) en E :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ y = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{2\lambda+12}{5} \\ y_E = \frac{-3\lambda+12}{10} \end{cases}$$

D'où l'équation de la droite (OE) :

$$\frac{y_E}{x_E} = \frac{-3\lambda+12}{10} \cdot \frac{5}{2\lambda+12} = \frac{-3(\lambda-4)}{4\lambda+24}$$

$$(OE)\ :\ y = -\frac{3}{4}\left(\frac{\lambda-4}{\lambda+6}\right)\,x \quad (2)$$

On remplace dans la deuxième équation le paramètre en fonction de x et y tiré de la première équation.

4) Elimination du paramètre :

Un point M du lieu est déterminé par : $\{M\} = (AD) \cap (OE)$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{8}\,\lambda(x-4) & (AD) \quad (1) \\ y = -\frac{3}{4}\left(\frac{\lambda-4}{\lambda+6}\right)\,x & (OE) \quad (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire le paramètre : $\lambda = \dfrac{8y}{x-4}$

et en l'introduisant dans (2) on obtient l'équation du lieu :

$$3x^2 - 12xy - 8y^2 - 12x + 24y = 0$$

(b) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -6 & -8 & 12 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

On détermine ensuite si la conique est dégénérée ou non :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -6 & -8 & 12 \\ -6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 720 \neq 0$$

Elle n'est pas dégénérée.

On détermine ensuite son genre :

$$\delta = \det B = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

Il s'agit donc d'une hyperbole.
On recherche ses asymptotes par la métode des points à l'infini :

$$\left\{\begin{array}{l} 3X^2 - 12XY - 8Y^2 - 12XT + 24YT = 0 \\ T = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \; 3X^2 - 12XY - 8Y^2 = 0 \; \Leftrightarrow \; 3 - 12m - 8m^2 = 0 \quad \text{où} \quad m = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow \; m = -\frac{1}{4}(3 - \sqrt{15}) \quad \text{où} \quad m = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{15})$$

On détermine le centre Ω grâce aux deux premières lignes de la matrice A.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 6y - 6 & = & 0 \\ -6x - 8y + 12 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \; x = 2\,, \; y = 0 \; \Rightarrow \; \Omega\,(2;0)$$

Equations des asymptotes :

$y = -\frac{1}{4}(3 - \sqrt{15})(x - 2) = -\frac{1}{4}(3 - \sqrt{15})\,x + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{15})$

$y = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{15})(x - 2) = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{15})\,x + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{15})$