26 mai 2009

# Contrôle d'analyse II no 4

Durée: 1 heure 30'

Nom: ........................................................

Prénom: ........................................................ Groupe: ☐

1. On donne les polynômes P(x) et Q(x) :

$P(x) = x^4 + 4ix^2 + 12(1 + i)x - 45$ ; $Q(x) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 36x - 54$

Calculer toutes les racines de Q(x) sachant :

a) Le PGCD de P(x) et Q(x) est un polynôme réel du premier degré ; sa racine est l'unique racine réelle du polynôme P(x).

b) La division de Q(x) par $(x - 1 + i)$ donne un reste nul — 4 pts

2. Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - (\cos x)^{\frac{1}{x}}\ ; & x \neq 0 \\ 0\ ; & x = 0 \end{cases}$

a) Etablir le développement limité à l'ordre 3 de $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0.

b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et que la tangente à la courbe Γen ce point est la droite y = 0.

c) Esquisser la courbe Γ dans l'intervalle [-½ ; ½]. — 5 pts

3. On considère la transformation homographique **h**: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$h(z) = w = \frac{(3-4i)z}{z-3+4i}$$

où $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ et $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ — 6 pts

a) Déterminer le pôle et les points fixes de la transformation.

b) Dans le plan-w, on donne le cercle **γ'** : $u^2 + v^2 - 6u + 8v = 0$
et la droite d' : $4u + 3v = 0$.

Déterminer les équations et construire, dans le plan-z, l'image réciproque du domaine limité par le cercle **γ'** et la droite d', contenant le point P'(3 ; 4) par la transformation **h**.

☞ *[Tourner s.v.p.]*

*Formulaire pour le contrôle n° 4*

Développements limités (autour de x = 0) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$