(écrire lisiblement s.v.p)

## Nom : ..........................................................

## Prénom : ..........................................................

## Groupe : ...

| Question | Pts max. | Pts |
|---|---|---|
| 1 | 5½ | |
| 2 | 6½ | |
| 3 | 3 | |
| Total | 15 | |

Note : $\boxed{\phantom{00}}$

# Indications

- Durée de l'examen : **100 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

**Question 1** (à 5½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \,:\, 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 8 = 0$$

(a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère $R_u$ dans lequel l'équation est réduite. Donner la matrice $U$ du changement de repère.

(b) Soit le point $P\,(0\,,\, y_P)\,,\ y_P > 0\,,\ y_P \in \mathcal{C}\,,$ relativement à $R_e$ .
Déterminer les coordonnées de $P$ relativement à $R_u$ .

(c) Représenter avec soin et précision la conique dans le repère $R_e$ .
(1 unité = 3 carrés)

**Solution:**

(a) Equation réduite de l'hyperbole :
$8\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 - 8 = 0$ .
$R_u\,(\Omega,\, \vec{u}_1,\, \vec{u}_2)$ est le repère dans lequel l'équation est réduite.
$\Omega\,(0,\,0)$ , $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $\vec{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Matrice du changement de repère :

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $P\,(-\frac{2}{\sqrt{3}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,)$ relativement à $R_u$ .

(c) $(O,\, \vec{u}_1)$ est l'axe réel,
$(O,\, \vec{u}_2)$ est l'axe imaginaire.
$a = 1,\, b = 2$
Relativement au repère $R_u$ :
la pente des asymptotes est $\pm\frac{b}{a} = \pm 2,$
les sommets ont pour coordonnées $A,\, A'(\pm a,\, 0) = (\pm 1,\, 0)$.

**Question 2** (à 6½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit une famille de coniques $\mathcal{F}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{F} \,:\, x^2 - 2\,xy + y^2 + 2\,\lambda\,x + 4\,y = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer la (ou les) valeur(s) de $\lambda$ pour laquelle (ou lesquelles) les coniques de la famille $\mathcal{F}$ sont dégénérées.

(b) Pour la (ou les) valeur(s) trouvée(s) en (a), déterminer l'équation des droites de dégénérescence.

(c) Montrer que les coniques non dégénérées de la famille $\mathcal{F}$ sont toutes des paraboles.

(d) Déterminer l'équation réduite (en fonction de $\lambda$) de ces paraboles et donner l'expression de leur paramètre $2p$ $(p > 0)$.

**Solution:**

(a) $\lambda = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad$ la conique est dégénérée.

(b) $x - y - 4 = 0$ et $x = y$.

(c) $\delta = 0\,, \quad \forall\,\lambda \neq -2$.

(d) Equation réduite :
$2\,\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,|\lambda + 2|\,\bar{x} = 0\,, \quad \lambda \neq -2$
Paramètre :
$2p = \dfrac{|\lambda + 2|}{\sqrt{2}}$.

**Question 3** (à 3 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Pour les coniques à centre de la famille de coniques $\mathcal{F}$ suivante :

$$\mathcal{F} \;:\; (m-4)\,x^2 + 2\,m\,xy + 2\,y^2 - 8\,x - 6\,y = 0\,, \quad m \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer le lieu des centres.

(b) Déterminer la nature géométrique de ce lieu.

**Solution:**

(a) Equation du lieu :

$$4x^2 + 2xy + 2y^2 + x - 3y = 0$$

(b) Le lieu est une ellipse non-dégénérée.