Contrôle d'analyse I N°4

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

Groupe

PRENOM : ______________________

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 10\ \mathrm{tg}(x)}{4 + \sin^2(x)}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f. 4 pts

2. Calculer la limite suivante en justifiant rigoureusement votre démarche :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1 \right] dt}{x^6}.$$ $\frac{1}{3}$ 2,5 pts

3. Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy, on considère l'arc de courbe Γ défini par

$$\Gamma : \quad y = \cos\left(\sqrt{x}\right), \qquad 0 \leq x \leq \pi^2.$$

Calculer l'aire géométrique du domaine fini limité par la courbe Γ, l'axe Ox, l'axe Oy et la droite verticale d'équation $x = \pi^2$. $A = 2\pi$ 3 pts

4. Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy, on considère le domaine fini D limité par la courbe d'équation $y = \mathrm{Arcsin}(x)$, l'axe Ox et la droite verticale d'équation $x = 1$.

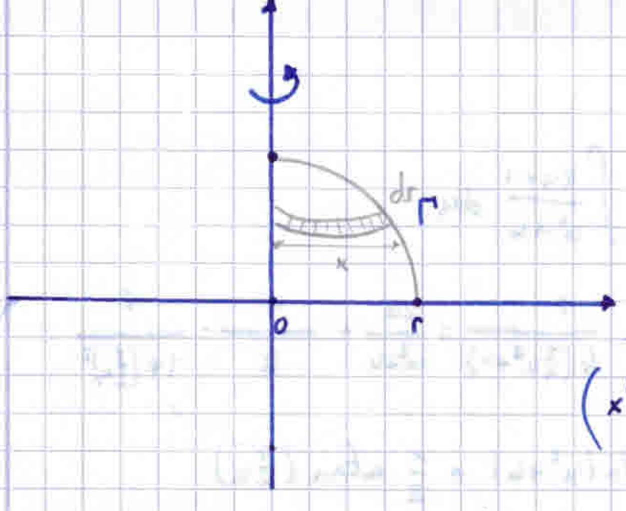
Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale d'équation $x = 1$. $\frac{3\pi^2}{4} - 2\pi$ 3 pts

5. Calculer l'aire d'une sphère de rayon r. 2,5 pts

$4\pi r^2$

---

5)



$t \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

$\Gamma : \begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \end{cases}$

$\left(x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2} \right)$

$dA = 2\pi x \, ds \qquad ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2(t)} \, dx$

$\frac{1}{2} A = \int_A^B 2\pi x \, ds = \int_0^r 2\pi x \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \, x(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}^2(t)} \, dt$

$= \int_0^{\pi/2} 2\pi \; r\cos(t) \sqrt{\dots} \, dt$

$\begin{cases} \dot{x}(t) = -r \sin(t) \\ \dot{y}(t) = r \cos(t) \end{cases} \qquad \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2(t) = r^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = r^2$

$\frac{1}{2} A = \int_0^{\pi/2} 2\pi \; r\cos t \sqrt{r^2} \, dt = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 2\pi r^2 \left[\sin t \right]_0^{\pi/2}$

$A = 4\pi r^2 \left[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \right] = 4\pi r^2$

---

1) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 10\,tg(x)}{4 + \sin^2(x)}$ invariance : $\pi - x$

On pose $\sin(x) = u$, $x = a\sin(u)$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$

$\cos(x) = \sqrt{1-u^2}$, $tg(x) = \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-u^2} + 10 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}}{4 + u^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \dfrac{1-u^2 + 10u}{(\sqrt{1-u^2})^2 (4+u^2)} du = \dfrac{-u^2 + 10u + 1}{(4+u^2)(1-u^2)} du$

$\int \dfrac{-u^2 + 10u + 1}{(4+u^2)(1-u^2)} du \qquad \dfrac{au+b}{4+u^2} + \dfrac{cu+d}{1-u^2} = \dfrac{au+b}{4+u^2} + \dfrac{c}{1+u} + \dfrac{d}{1-u}$

$(au+b)(1-u^2) + c(1+u)(4+u^2) + d(4+u^2)(1-u) =$ $u^3(-a+c-d) + u^2(-b+c+d)$ $+ u(a+4c-4d) + b+4c+4d$

$au - au^3 + b - bu^2 + c(4 + u^2 + 4u + u^3) + d(4 - 4u + u^2 - u^3) =$

$\begin{cases} -a+c-d = 0 \\ -b+c+d = -1 \\ a+4c-4d = 10 \\ b+4c+4d = 1 \end{cases}$

~~$a+d = -1+b-d$~~
~~$a = -1+b-2d$~~
~~$c = a+d$~~
~~$c = -1+b-d$~~
~~$1-b+2d+a+d-d =$~~
~~$1-b+2d-1+b-2d = 0$~~

$-1+b-2d + 4(a+4c-4d) = 10 \qquad b-2d + 4(-1+b-2d) = 11$

$5b - 10d = 15 \qquad b = 3+2d \qquad a = -1+3+2d-2d = 2$

$a=2$
$b=1$
$c=-1$
$d=1$

$$\frac{2u+1}{u^2+4}+\frac{-1}{1+u}+\frac{1}{1-u}$$

$$-\ln|1+u|-\ln|1-u|+\int\frac{2u+1}{u^2+4}\,du$$

$$\frac{2u}{u^2+4}+\frac{1}{u^2+4}=\frac{2u}{u^2+4}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{4}u^2+1\right)}=\frac{2u}{u^2+4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}u\right)^2}$$

$$-\ln|1-u|-\ln|1-u|+\ln|u^2+4|+\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}u\right)$$

$$\ln\left|\frac{u^2+4}{1-u^2}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{u}{2}\right)+c$$

$$\ln\left|\frac{\sin^2(x)+4}{1-\sin^2(x)}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+c$$

---

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left[e^{(t^2)}-1\right]dt}{x^6}$$

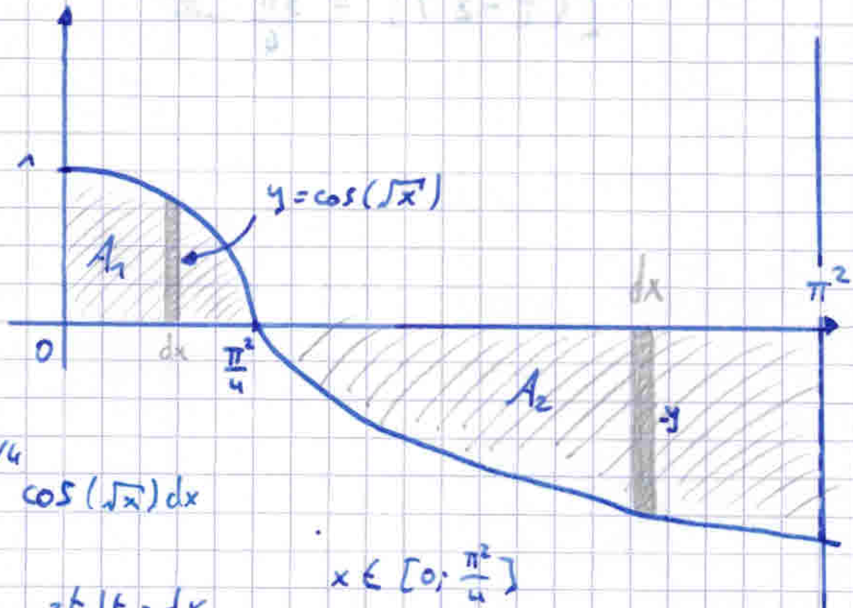
$$F(x)=\int_0^{x^2}\left[e^{(t^2)}-1\right]dt \qquad G(t)=\text{primitive de }\left[e^{(t^2)}-1\right]$$

$$F(x)=\left[G(t)\right]_0^{x^2}=G(x^2)-G(0)$$
$$F'(x)=\left[G(x^2)-G(0)\right]'=\left[G(x^2)\right]'-G'(0)=G'(x^2)\cdot(x^2)'-0$$

$$G'(x)=e^{(x^2)}-1 \iff G'(x^2)=e^{(x^4)}-1$$
$$F'(x)=\left[e^{(x^4)}-1\right]\cdot 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\left[e^{(x^4)}-1\right]}{6x^5}=\frac{1}{3x^4}\left[e^{(x^4)}-1\right]=\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\overset{BH}{=}\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(e^{(x^4)}\cancel{4x^3}\right)}{\cancel{4x^3}}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot e^0=\frac{1}{3}$$

(3) $\Gamma : y = \cos(\sqrt{x}) \qquad 0 \leq x \leq \pi^2$



- $A_1 = \int_0^{\pi^2/4} y \cdot dx = \int_0^{\pi^2/4} \cos(\sqrt{x})\,dx$

$t = \sqrt{x} \quad , \quad t^2 = x \quad , \quad 2t\,dt = dx \quad , \quad x \in [0; \frac{\pi^2}{4}] \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$A_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,2t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot t\,dt \qquad v(x) = t \quad v'(x) = 1 \quad u'(x) = \cos t \quad u(x) = \sin(t)$

$= 2\left[t\sin t - \int_0^{\pi/2} \sin(t) \right] = \left[2t\sin t + 2\cos t\right]_0^{\pi/2} = (\pi - 2)$

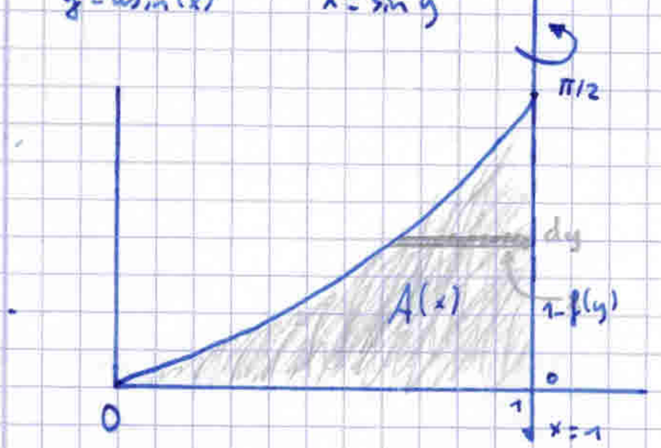
- $A_2 = \int_{\pi^2/4}^{\pi^2} -y\,dx = -2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\,t\,dt = -\left[2t\sin t + 2\cos t\right]_{\pi/2}^{\pi}$

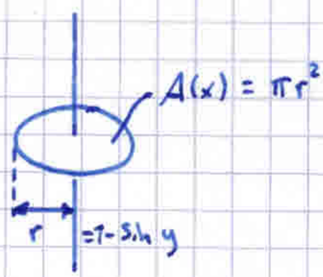
$= -\left[-2 - (\pi)\right] = 2 + \pi$

$A = A_1 + A_2 = \pi - 2 + 2 + \pi = 2\pi$

---

(4) $y = \operatorname{asin}(x) \qquad x = \sin y$





$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$V = \int_0^{\pi/2} \pi(1 - \sin y)^2\,dy = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin y + \sin^2 y)\,dy \qquad \cancel{\left[y - \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\pi/2}}$

$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\sin y + \frac{1}{2}(1 - \cos(2y))\right) dy = \pi\left[y + 2\cos y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)\right]_0^{\pi/2}$

$$V = \pi \left[\frac{3}{2} y + 2\cos y - \frac{1}{4} \sin(2y) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$\pi \left[\left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \right] = \frac{3\pi^2}{4} - 2\pi$$