21.2.19

Série 11

1. Calculez les limites suivantes, en utilisant la définition géométrique du logarithme:

(a) $\lim_{x\to 0}(x - \ln(x))$ (c) $\lim_{x\to 0}(x^n - \ln(x))$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to \infty}(x - \ln(x))$ (d) $\lim_{x\to \infty}(x^n - \ln(x))$ (f) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

2. Calculer sans machine les quantités suivantes:

(a) $A = \log_2 \frac{1}{16}$ (c) $C = \log_\pi 1$ (e) $E = \log(\log 10^{10})$

(b) $B = \log_4 2$ (d) $D = \log_{1/2} 8$ (f) $F = e^{2\ln 5}$

3. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une seule fonction logarithme ou exponentielle :

(a) $A = \log 15 - \log 6 + 3\,\log 2,$

(b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2-\ln 3} \cdot e^{-3/2}.$

4. Résoudre les équations suivantes:

(a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{x/2} + 5\,e^{-x/2}\right)$ (c) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$

(b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\left(1 + e^{-\sin x}\right)$ (d) $3 + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

(e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \dfrac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}}\left[\,2\,(x-15)\,\right] + \dfrac{1}{2}$

5. Résoudre les trois inéquations suivantes:

(a) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x$ (c) $\ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\ln\sqrt{3-x} + \ln\sqrt{x+1} \leq \ln\sqrt{10-6x}$

6. Résoudre l'inéquation suivante :

$$\log_a\left(\frac{x-4}{x-6}\right) \leq -1 + \log_a(2x) - 2\,\log_a|x-6|$$

i) avec $a = 2\,,$ ii) puis avec $a = \frac{1}{2}\,.$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants:

(a) $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^x = \left[2^{(x-1)}\right]^y \\ 1 + \log_2(2y-3) = \log_2 \frac{10-8x}{2x-1} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2 \\ (e^x - e^y)^2 - 4 > 0 \end{cases}$

Solutions

S1 (a) $+\infty$ (b) $+\infty$ (c) $+\infty$ (d) $+\infty$ (e) $-\infty$ (f) 0

S2 (a) $A = -4$ (b) $B = \frac{1}{2}$ (c) $C = 0$ (d) $D = -3$ (e) $E = 1$ (f) $F = 25$

S3 (a) $A = 1 + \log(2)$,
(b) $B = \frac{1}{3} \cdot e^5$.

S4 (a) $S = \{\ln 2\}$
(b) $S = \emptyset$
(c) $S = \{\arctan(e) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\}$
(d) $S = \{-\frac{13}{8}\}$
(e) $S = \emptyset$

S5 (a) $S = \,]-\infty\,,\,3]\,\cup\,[\,3 + \log_3(2)\,,\,+\infty\,[$
(b) $S = \,]-1\,,1\,]$
(c) $S = \left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2\,(1+e^2)}}{2}\,\right[$

S6 $S_i = [\,3\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,8\,]\,,\qquad S_{ii} = \,]\,0\,,\,2\,]\,\cup\,[\,12\,,\,+\infty\,[$

S7 (a) $S = \{\,(1\,,\,2)\,\}$ (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y \ \text{ et } \ y \in \,]\,\ln 2\,,\,3\,[\,\}$