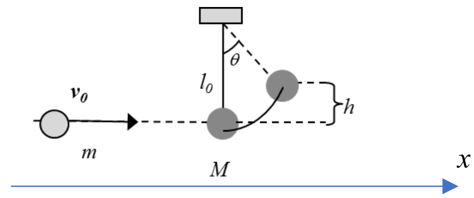
Exercice 1 : Le pendule balistique

a) Nous avons ici un choc mou (100% inélastique) car la balle reste dans le bloc. Dans ce cas seule la quantité de mouvement est conservée, l'énergie cinétique, quant à elle, ne l'est pas.

Conservation de la quantité de mouvement, puis projection sur *Ox* :

$$m\overrightarrow{v_0} + M\vec{0} = (m+M)\overrightarrow{v_m}$$
$$mv_0 = (m+M)v_m$$



On a donc :

$$v_m = \frac{m}{(m+M)}v_0$$
$$\overrightarrow{v_m} = \frac{m}{(m+M)}v_0\overrightarrow{e_x}$$

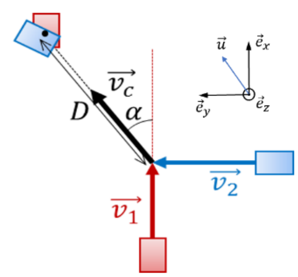
b) Après le choc, on peut appliquer la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{tot,1} = E_{tot,2}$$
$$\frac{1}{2}(M+m){v_m}^2 = (M+m)gh$$
$$h = \frac{1}{2g}{v_m}^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{(m+M)}v_0\right)^2$$

c) $h = l_0(1-cos\theta)$ d'où $v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl_0(1-cos\theta)}$

Exercice 2 : Accident sur le Campus

Nous avons ici un choc mou (les deux voitures restent « collées »). Il y a donc seulement conservation de la quantité de mouvement. Attention : après le choc, la quantité de mouvement n'est pas conservée car force de frottement.



❐ Nous pouvons calculer la vitesse v_c des deux voitures accrochées, juste après le choc :

Le système {voitures encastrées} est soumis à 3 forces, que l'on projette dans un repère $(Oxyz)$. Nous avons

- Le poids : $\overrightarrow{F_P} = (m_1+m_2)\vec{g} = -(m_1+m_2)g\overrightarrow{e_z}$
- La réaction normale de la route $\overrightarrow{F_N} = N\overrightarrow{e_z}$
- La force de frottements avec la route, colinéaire au déplacement $\overrightarrow{F_f} = -\mu_d N\vec{u}$ avec $\vec{u} = cos\alpha\, \vec{e}_x + sin\alpha\vec{e}_y$

Etant donné que les voitures ne décollent pas, le poids et la réaction du sol se compensent selon $\overrightarrow{e_z}$, donc : $(m_1+m_2)g = N$.

Ecrivons que la variation d'énergie mécanique égale le travail des forces de frottement (non conservatives) :

Dans notre cas, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique (il n'y a pas de variation de hauteur). Donc, entre le choc et l'arrêt total des véhicules, on peut écrire :

$\Delta E_m = E_c^{final} - E_c^{initial} = W_{F_f}$

avec $E_c^{final} = 0$ (véhicules arrêtés), $E_c^{initial} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_c}^2$,

et $W_{F_f} = -\int_0^D \mu_d N\vec{u}d\vec{l} = -\mu_d ND = -\mu_d(m_1 + m_2)gD$.

Au final : $\frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_c}^2 = \mu_d(m_1 + m_2)gD \Rightarrow v_c = \sqrt{2\mu_d gD}$

- Calcul des vitesses initiales de chacune des voitures

On applique la conservation de la quantité de mouvement lors du choc (choc mou) :

$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v_c}$. On projette ensuite sur les axes du repère $\boldsymbol{e_x}$ et $\mathbf{e_y}$:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_c \cos\alpha \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_c \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)\sqrt{2\mu_d gD}\cos\alpha}{m_1} \\ v_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)\sqrt{2\mu_d gD}\sin\alpha}{m_2} \end{cases}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(950+1350)\sqrt{2\times0.6\times9.81\times5}\cos 37}{950} = 14.86\ \mathrm{m.s^{-1}} \sim 53.5\ \mathrm{km/h} \\ v_2 = \frac{(950+1350)\sqrt{2\times0.6\times9.81\times5}\sin 37}{1350} = 7.84\ \mathrm{m.s^{-1}} \sim 28.2\ \mathrm{km/h} \end{cases},$$

Le véhicule rouge roulait donc trop vite, en plus d'avoir refusé la priorité à droite !

Exercice 3 : Ressort oscillant vertical

1. Immobile : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ forces : $\vec{F_k}$ et $m\vec{g}$

$$\vec{F_k} = -kd_0\vec{e_x} \qquad m\vec{g} = mg\vec{e_x}$$
$$\Rightarrow -kd_0\vec{e_x} + mg\vec{e_x} = \vec{0} \qquad d_0 = \frac{mg}{k}$$

2. a) Par les forces :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$mg\vec{e_x} - kx\vec{e_x} = m\ddot{x}\vec{e_x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Par l'énergie :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$
$$E = cte \quad conservation\ de\ l'énergie$$
$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m2\ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{2}k2\dot{x}x - mg\dot{x} = \dot{x}[m\ddot{x} + kx - mg] = 0$$

La solution non triviale est $m\ddot{x} + kx - mg = 0$ *soit* $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$

b) Une solution particulière : $x_1(t) = \text{cte} = C \Rightarrow \ddot{x} = 0$

$$0 + \frac{k}{m}C = g$$
$$C = \frac{gm}{k} = d_0 = x_1(t)$$

Solution générale de l'équation sans second membre (cf. supplement equations différentielles): $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$x_2(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$$

Solution générale :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t + d_0$$
$$\dot{x}(t) = -A\Omega_0\sin\Omega_0 t + B\Omega_0\cos\Omega_0 t$$

En appliquant les conditions initiales : $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow 0 + B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$\dot{x}(0) = 0$ *et* $x(0) = x_0 + d_0$

$$x(t) = A\cos\Omega_0 t + d_0$$

$x(0) = x_0 + d_0$ et $x(0) = A + d_0$

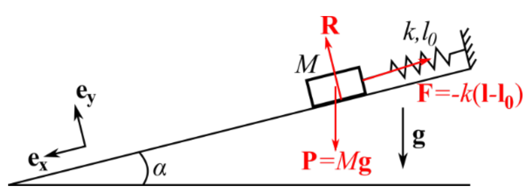
donc $A = x_0$

$$x(t) = x_0\cos\Omega_0 t + d_0$$

Autre approche : on fait un changement de repère et on place l'origine au point d'équilibre (voir cours 15, diapo 10)

Exercice 4 : **Choc et ressort**

a) Position d'équilibre



Pour calculer la longueur d'équilibre du ressort, on fait un bilan des forces sur la masse M et on applique la seconde loi de Newton qu'on projette dans notre repère (Oxy) comme schématisé ci-contre :

- ❑ Poids : $\vec{P} = M\vec{g} = Mg(\sin\alpha\,\vec{e_x} - \cos\alpha\,\vec{e_y})$
- ❑ Réaction du plan incliné : $\vec{R} = R\vec{e_y}$
- ❑ Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$

À l'équilibre, on a : $\sum\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} Mg\sin\alpha - k(l_{éq} - l_0) = 0 \\ -Mg\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$

Donc la longueur d'équilibre est :

$$l_{éq} = l_0 + \frac{Mg\sin\alpha}{k}$$

b) Equation du mouvement

- En prenant comme origine le point d'attache du ressort. On applique la seconde loi de Newton au ressort en mouvement, le déplacement se faisant selon $\overrightarrow{e_x}$ uniquement. La longueur du ressort est dans ce cas égale à x :

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} Mg\sin\alpha - k(x - l_0) = M\ddot{x} \\ -Mg\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$$

L'équation du mouvement est :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{k}{M}l_0 + g\sin\alpha$$

- Si on prend comme origine la position d'équilibre, la longueur du ressort est dans ce cas égale à $l = x + l_{éq}$. Newton projetée sur $\overrightarrow{e_x}$ devient :

$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - k(l - l_0) = Mg\sin\alpha - k\left(x + l_0 + \frac{Mg\sin\alpha}{k} - l_0\right)$ et finalement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

La deuxième méthode est plus judicieuse car on s'affranchit de toutes les constantes dans l'équation différentielle.

c) On a une équation différentielle du type (avec origine à la position d'équilibre):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ , avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Sa solution s'écrit $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

Les conditions initiales nous permettent de déterminer les constantes A et B :

$$\begin{cases} x(t=0) = A = 0 \\ \dot{x}(t=0) = B\omega_0 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{v_1}{\omega_0} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$x(t) = \frac{v_1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\text{, avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

d) On a un choc élastique entre une masse m de vitesse v_0, et une masse M au repos. On a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pendant le choc. En notant $v_0{}'$ la vitesse de la masse m après le choc et v_1 celle de la masse M, on a les équations suivantes (on projette suivant un axe Ox' avec **e$_x$'**=-**e$_x$**):

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_0{}'} + \overrightarrow{p_1} \Rightarrow mv_0 = mv_0' + Mv_1 \\ \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}'^2 + \frac{1}{2}M{v_1}^2 \end{cases}.$$

En résolvant le système on trouve finalement :

$$v_1 = \frac{2m}{M+m}v_0$$

e) Prenons l'origine des x à la position d'équilibre. Il n'y a aucune force non conservative dans ce système, donc il y a conservation de l'énergie mécanique totale.

Il y a deux termes d'énergie potentielle à prendre en compte : celui de la force de gravitation et celui de la force de rappel du ressort. L'énergie potentielle totale s'écrit donc, à une constante près :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x + l_{éq} - l_0\right)^2 - Mgx\sin\alpha = \frac{1}{2}k\left(x + \frac{Mg\sin\alpha}{k}\right)^2 - Mgx\sin\alpha = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{Mg\sin\alpha}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2 + cste$$

On peut poser pour l'énergie potentielle (ressort + gravité) $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ car l'énergie potentielle est définie à une constante près et ce d'après sa définition :
$W = E_p(A) - E_p(B)$.

On aurait pu directement arriver à cette conclusion en arguant que la force de rappel du ressort et la gravitation agissent sur la masse M comme une seule force de rappel de constance de raideur k autour de la position d'équilibre.

Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique. A l'instant initial (juste après le choc), on a $x = 0$ et $v = v_1$. Par contre, lorsque la compression du ressort est maximale, la vitesse est nulle :

$$E_m^f - E_m^i = 0 \Rightarrow \left(0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2\right) - \left(\frac{1}{2}Mv_1^2 + 0\right) \Rightarrow x_{max}^2 = \frac{M}{k}v_1^2$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{M}{k}}v_1 = \frac{v_1}{\omega_0} \quad avec \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Ce qui correspond bien à l'amplitude calculée au point c) quand le sinus est maximal.

Exercice S8.1 : Lutte suisse

a. Avant le choc on a :

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1v_1\vec{e}_x$$
$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = -m_2v_2(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$$

On a un choc mou, donc les deux lutteurs restent attachés après le choc et on a la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_3 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

On en déduit la norme de $\vec{v}_3$:

$$\|\vec{v}_3\| = \frac{1}{m_1 + m_2}\|\vec{p}_1 + \vec{p}_2\| = \frac{\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + 2\vec{p}_1.\vec{p}_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{{m_1}^2{v_1}^2 + {m_2}^2{v_2}^2 - 2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha}}{m_1 + m_2}$$

Pour le calcul de l'angle, on utilise la formule suivante :

$$\tan\beta = \frac{v_{3_y}}{v_{3_x}} = \frac{p_{3_y}}{p_{3_x}} = \frac{p_{1_y} + p_{2_y}}{p_{1_x} + p_{2_x}}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{-m_2 v_2 \sin\alpha}{m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos\alpha} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 v_2 \sin\alpha}{m_2 v_2 \cos\alpha - m_1 v_1}\right)$$

b. Calcul de l'énergie dissipée pendant le choc

L'énergie cinétique avant le choc s'écrit :

$$E_{c_{ini}} = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

Après le choc, on a :

$$E_{c_{fin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_3}^2 = \frac{{m_1}^2 {v_1}^2 + {m_2}^2 {v_2}^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

L'énergie dissipée s'écrit donc :

$$E_{c_{dissipée}} = E_{c_{ini}} - E_{c_{fin}} = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 - \frac{{m_1}^2 {v_1}^2 + {m_2}^2 {v_2}^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{(m_1 {v_1}^2 + m_2 {v_2}^2)(m_1 + m_2) - {m_1}^2 {v_1}^2 - {m_2}^2 {v_2}^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{m_1 m_2 ({v_1}^2 + {v_2}^2 + 2 v_1 v_2 \cos\alpha)}{2(m_1 + m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{1}{2}\mu \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2 \text{ avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Rem: l'énergie dissipée est maximale lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour un choc frontal

Exercice S8.2 : Condition de stabilité

Lorsque le bloc m est en mouvement sans pour autant tomber du bloc M, il se déplace selon un mouvement harmonique de même fréquence f et la même amplitude que le bloc M. Il est simplement soumis à la force de frottement en plus.

Mettons nous dans le cas où le bloc m est dans un cas extrême, sur le point de glisser au moment où le sens du mouvement change.

La deuxième loi de Newton sur l'axe vertical nous donne la valeur de la force de réaction, on obtient $R = mg$. En appliquant même loi de Newton sur l'axe horizontal, on obtient

$$ma_{max} = \mu_s R = \mu_s mg$$

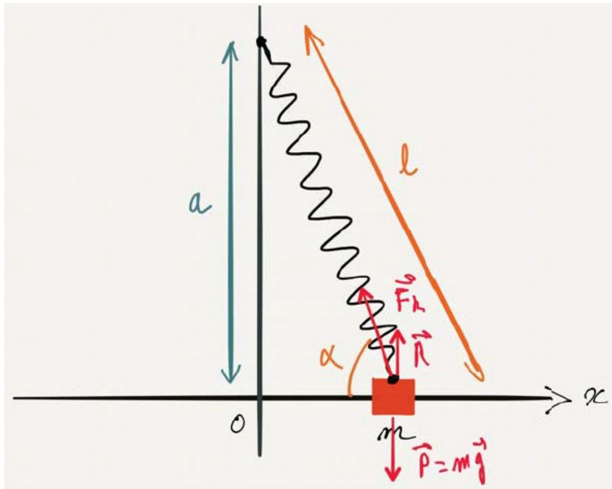
avec $a_{max} = A\omega^2$ avec A l'amplitude des oscillations et ω leur pulsation.

Dès lors, on a

$$mA\omega^2 = \mu_s mg \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s g}{(2\pi f)^2}}$$

<u>Note</u> : On se place au moment où le bloc change de sens car c'est à cet endroit que l'accélération est la plus forte et donc l'endroit où le bloc est le plus susceptible de décrocher.

Exercice S8.3 : Ressort et rail



1. La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction du rail $\vec{R}$ à la force du ressort $\vec{F_k}$
   la 2° loi de Newton nous donne :
   $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_k}$$
   Le mouvement est uniquement sur l'axe x. On peut donc projeter l'équation sur cet axe.
   On choisit comme origine l'intersection entre la barre et la verticale pour obtenir :
   $$0 + 0 - F_k \cos\alpha = m\ddot{x}$$
   La tension du ressort est : $F_k = kd$ avec d l'allongement, soit $d = l - l_0$. Donc $F_k = k(l - l_0)$.
   $$m\ddot{x} + F_k \cos\alpha = 0$$
   $$m\ddot{x} + k(l - l_0)\cos\alpha = 0$$
   On cherche à exprimer l et $\cos\alpha$ en fonction de x et a.
   $$l = \sqrt{a^2 + x^2}$$
   $$\cos\alpha = \frac{x}{l}$$

On obtient donc :

$$m\ddot{x} + k(l - l_0)\frac{x}{l} = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}\right)x = 0$$

et, puisque $x \ll a$, on peut faire l'approximation

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

pour obtenir

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]x = 0$$

qui s'exprime aussi comme

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a} + \frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0 \qquad (1)$$

Cette équation est valable dans tous les cas (pour $x \ll a$).

Pour $x \ll a$, le dernier terme de cette équation devient négligeable et l'équation (1) devient alors :

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$

C'est une équation différentielle de type $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ avec

$$\boxed{\Omega_0^2 = \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]}$$

Le mouvement est sinusoïdal de pulsation Ω_0. C'est un oscillateur harmonique.

2. Dans le cas $a = l_0$, si on garde l'équation trouvée précédemment, on se rend compte que le facteur devant x tombe car $\frac{l_0}{a} = 1$ et on n'a plus d'équation différentielle de mouvement, on trouve un mouvement à vitesse constante, car il reste $m\ddot{x} = 0$ ce qui n'a pas de sens.

   L'explication de ce non sens est assez naturelle. Pour arriver au résultat, des simplifications ont été faites. Si on revient à l'équation (1), sans négliger le terme en x^2, on retrouve bien une équation différentielle

$$m\ddot{x} + k\left[\frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\ddot{x} + \left[\frac{k}{m}\frac{1}{2a^2}\right]x^3 = 0}$$

Il n'existe pas de résolution algébrique pour ce type d'équation.

Pour encore plus de précision, il faudrait aussi prendre un ordre supérieur lors du développement limité. Cela rendrait l'équation encore un peu plus compliquée mais toujours plus réaliste.