PARTIE II

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Véronique TISSOT
Monique VOUTAZ

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux équations aux différences

Dans les exemples traités précédemment la modélisation conduit à des "lois de mises à jour" mettant en relation la variable d'état observée en des temps t et $t + \Delta t$. Ces lois sont récursives et ont une certaine forme. Elles peuvent être aussi considérées comme des *équations fonctionnelles aux différences*, que l'on se propose d'étudier dans les chapitres suivants.

Illustrons ces deux points de vue par deux exemples.

I. On considère la loi suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y_{n+1} & = & y_n + 2n + 1 & n \in \mathbb{N} \\ y_0 & = & 1 & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

C'est une suite donnée sous forme récurrente. On peut calculer $y_1, y_2, y_3, \ldots$ en posant respectivement $n = 0, n = 1, n = 2 \ldots$ dans la loi, en tenant compte de la condition initiale.

$$y_1 = 2\,, \qquad y_2 = 5\,, \qquad y_3 = 10\,, \qquad \text{etc.}$$

II. On considère $S = \{t_0 + n\Delta t \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble discret de points de $\mathbb{R}$ équidistants (t_0 et Δt fixés), ainsi que la loi récursive sur S suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcll} R_{t+\Delta t} & = & R_t + (b-d)\; R_t\; \Delta t & t \in S \\ R_{t_0} & = & C & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

En posant $t = t_0 + n\Delta t$, cette loi s'écrit ainsi

$$\left\{ \begin{array}{lcll} R_{t_0+(n+1)\Delta t} & = & R_{t_0+n\Delta t} + (b-d)\; R_{t_0+n\Delta t}\,\Delta t & n \in \mathbb{N} \\ R_{t_0} & = & C & \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Cette loi définit une suite donnée sous forme récurrente. On peut alors calculer $R_{t_0+\Delta t}$, $R_{t_0+2\Delta t}$,
$R_{t_0+3\Delta t}$, ... en posant respectivement $n = 0, n = 1, n = 2 \ldots$ dans la loi, en tenant compte de la condition initiale.

$$\begin{aligned} R_{t_0+\Delta t} &= C\ (\ 1+(b-d)\ \Delta t)\ ) \\ R_{t_0+2\Delta t} &= R_{t_0+\Delta t}\ (\ 1+(b-d)\ \Delta t\ ) = \\ &= C\ (\ 1+(b-d)\ \Delta t\ )^2 \end{aligned}$$

etc.

Maintenant on considère (1.1) comme une équation fonctionnelle. Une solution de (1.1) est alors une suite dont on peut dans ce cas déterminer la forme fonctionnelle du terme général.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y(n+1) &=& y(n)+2n+1 & n \in \mathbb{N} \\ y(0) &=& 1 & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.3}$$

En notant $y(n+1)-y(n) = \Delta y(n)$, la loi (1.3) s'écrit aussi

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \Delta y(n) &=& 2n+1 & n \in \mathbb{N} \\ y(0) &=& 1 & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.4}$$

c'est une équation aux différences. La résolution consiste à expliciter, à partir de la condition initiale, $y(1), y(2)$ etc. puis conjecturer la forme fonctionnelle de $y(n)$.

$$y(1)=2\,, \qquad y(2)=5\,, \qquad y(3)=10\,, \qquad \ldots \qquad y(n)=n^2+1\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Cette relation se prouve aisément par récurrence. Ainsi $y(n)=n^2+1$ est la solution ; on remarque que pour $n=0$, $y(0)=1$ qui est bien la condition initiale. Cette solution est unique.

On peut vérifier que $y(n)=n^2+1$ est aussi solution de (1.4), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta y(n) &= y(n+1)-y(n) = \\ &= (n+1)^2+1-(n^2+1) = \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on considère (1.2) comme une équation fonctionnelle. Une solution de (1.2) est une fonction $R(t)$ définie sur S vérifiant (1.2) ; on peut dans cet exemple déterminer la forme algébrique de $R(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} R(t_0+(n+1)\Delta t) &=& R(t_0+n\Delta t)+(b-d)\ R(t_0+n\Delta t)\ \Delta t & n \in \mathbb{N} \\ R(t_0) &=& C & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.5}$$

(1.5) s'écrit aussi comme une équation aux différences

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \Delta R(t_0+n\Delta t) &=& (b-d)\ R(t_0+n\Delta t)\ \Delta t & n \in \mathbb{N} \\ R(t_0) &=& C & \text{condition initiale} \end{array} \right. \tag{1.6}$$

La résolution consiste à expliciter, à partir de la condition initiale, $R(t_0+\Delta t)$,

$R(t_0+2\ \Delta t)\,, R(t_0+3\ \Delta t)\,, \ldots$ puis d'en conjecturer la forme fonctionnelle. On conjecture

$$R(t_0 + n\ \Delta t) = C\ [1 + (b-d)\ \Delta t)]^n \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

Cette relation se montre aisément par récurrence.

Ainsi $R(t) = C\ [1+(b-d)\ \Delta t)]^n$ est la solution et pour $n = 0\,,\ R(t_0) = C$ qui est bien la condition initiale. Cette solution est unique.
En faisant varier la constante C, on obtient toutes les solutions de l'équation.

On note que la fonction $R(t)$ de variable t s'exprime en fait comme une fonction $y(n)$ de variable n, c'est-à-dire $R(t) = y(n)$. Plus précisément

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\varphi} & S \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) = t_0 + n\ \Delta t = t & \longmapsto & R(t) = R\ (\varphi(n)) = y(n) \end{array}$$

On a donc

$$R(t) = (R \circ \varphi)(n) = y(n)$$

On peut "homogénéiser" les variables en exprimant $R(t)$ en fonction de t par le changement de variable

$$t = t_0 + n\ \Delta t \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = \frac{t-t_0}{\Delta t}$$

d'où

$$R(t) = y\left(\tfrac{t-t_0}{\Delta t}\right) \qquad\qquad t \in S$$

La solution de (1.6) est alors

$$R(t) = C\ \left(\ 1 + (b-d)\ \Delta t\ \right)^{\frac{t-t_0}{\Delta t}}$$

Remarque 1.

$y(n)$ est la solution de l'équation aux différences suivante

$$\left\{\begin{array}{lcll} \Delta y(n) & = & (b-d)\ y(n)\ \Delta t & \qquad n \in \mathbb{N} \\ y(0) & = & C & \qquad \text{condition initiale} \end{array}\right.$$

Cette équation se déduit de (1.6) en posant $R(t) = y(n)$ et $R(t+\Delta t) = y(n+1)$.

Si $y(n)$ est la solution de cette équation alors la solution de (1.6) est $R(t) = y\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)$.

Chapitre 2

Calcul aux différences

Ce chapitre introduit quelques rudiments du calcul aux différences qui sont essentiels pour l'étude des équations aux différences.

2.1 Notion d'opérateur

Aux opérations telles que additionner, élever au carré, au cube, dériver, intégrer, etc, on peut associer un *opérateur*, noté $A, B...$
Il indique l'action ou la transformation à appliquer sur les éléments d'un ensemble E.

Exemple 2.1.1.

D : opérateur dérivée première, agit sur une fonction ; $Df = f'$
C : élévation au carré, agit sur un nombre réel ; $Cx = x^2$
T : opérateur translation, agit sur une figure géométrique.

Dans ce qui suit, on suppose que E est un ensemble de fonctions réelles, $A, B,$ etc. sont des opérateurs agissant sur ces fonctions.
On note Af le résultat, qui est alors une nouvelle fonction.

Sur l'ensemble de ces opérateurs, on définit

1) l'égalité : $A = B \quad \Leftrightarrow \quad Af = Bf$ pour tout f,
2) la somme : $(A + B)f = Af + Bf$,
3) l'opérateur nul, noté O, tel que $(O + A)f = Af$,
4) l'opérateur opposé de A, noté $-A$, tel que $A + (-A) = O$,
5) le composé $(A\ B)f = A\ (Bf)$,

6) l'opérateur identité, noté I, tel que $If = f$.

Exemple 2.1.2.

D est l'opérateur dérivée première et C l'opérateur élévation au cube :

$(D+C)3x^2 = D3x^2 + C3x^2 = 6x + 27x^6$

$-D7x^4 = -28x^3$

$(DC)x^2 = D(Cx^2) = Dx^6 = 6x^5$

$(CD)x^2 = C(Dx^2) = C2x = 8x^3$

On remarque que la composition n'est pas commutative.

2.2 Opérateurs différence et translation

Soit $f(x)$ une fonction réelle et h une constante réelle positive telle que x et $x+h$ appartiennent au domaine de définition de f.

On note Δ l'opérateur *différence première*. Il opère sur f pour donner une nouvelle fonction, Δf, définie ainsi

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

On note E l'opérateur *translation* défini ainsi

$$Ef(x) = f(x+h)$$

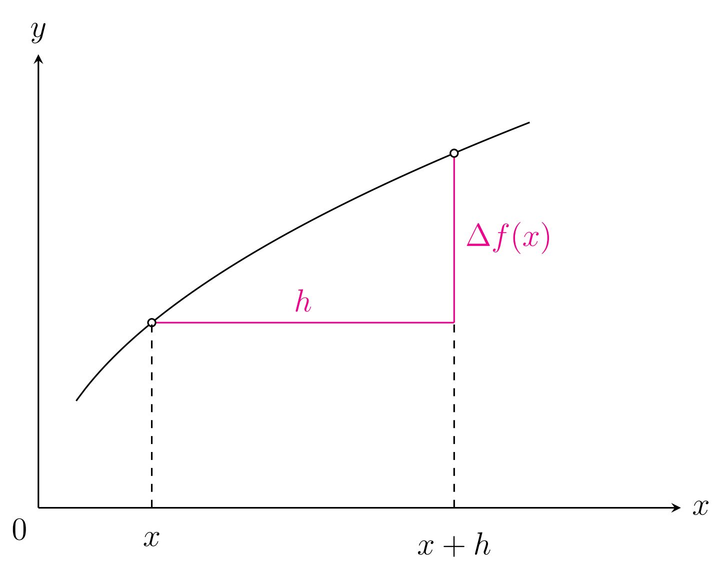


Figure 2.1

Exemple 2.2.1.

1) $f(x) = c$: fonction constante
$Ef(x) = c$
$\Delta f(x) = c - c = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
La fonction différence est la fonction nulle.

2) $f(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}$
$Ef(x) = x + h + a$
$\Delta f(x) = (x + h + a) - (x + a) = h \quad \forall x \in \mathbb{R}$
La fonction différence est la fonction constante h.

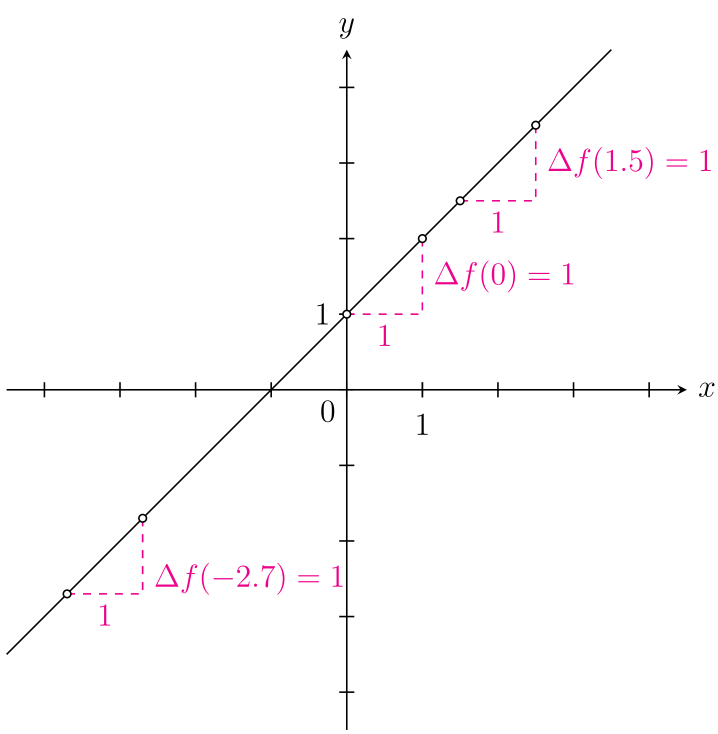


Figure 2.2 $\quad a = 1$, $h = 1$

3) $f(x) = x^2$ et on pose $h = 1$
$Ef(x) = (x + 1)^2$
$\Delta f(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$
La fonction différence est une fonction affine.

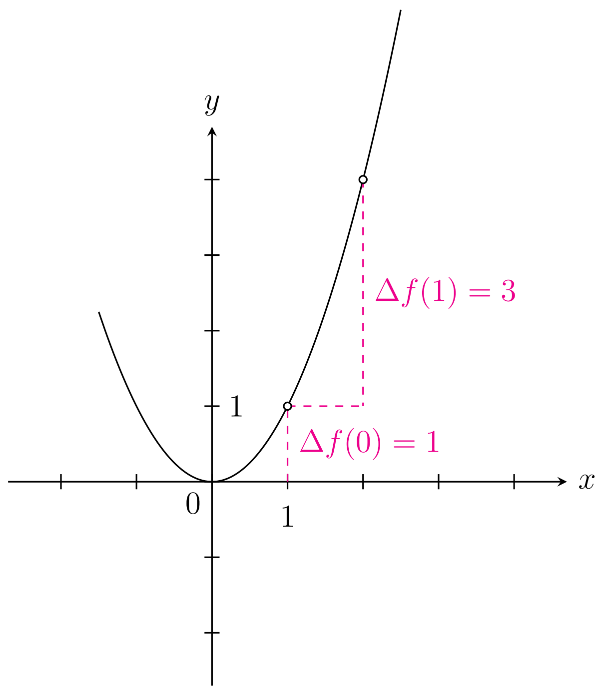


Figure 2.3

4)
$$\begin{aligned}(\Delta + E)f(x) &= \Delta f(x) + Ef(x) = \\ &= f(x+h) - f(x) + f(x+h) = \\ &= 2f(x+h) - f(x)\end{aligned}$$

On considère une fonction $f(x)$ et sa différence première $\Delta f(x)$. On définit la différence deuxième, notée Δ^2, ainsi

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\ (\Delta f(x))$$

Par définition de l'opérateur Δ, on a en posant $\Delta f(x) = g(x)$

$$\Delta\ (\Delta f(x)) = \Delta g(x) = g(x+h) - g(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

De même

$$E^2 f(x) = E\ (Ef(x)) = Ef(x+h)$$

Ce qui justifie les définitions d'opérateur différence d'ordre n et d'opérateur translation d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta^n f(x) = \Delta\ (\Delta^{n-1} f(x))$$

$$E^n f(x) = E\ (E^{n-1} f(x))$$

Exercices : montrer que

1) $E^2 f(x) = f(x+2h)$
   $E^3 f(x) = f(x+3h)$

2) Calculer Δ^2 et Δ^3 et montrer
   $\Delta^2 f(x) = E^2 f(x) - 2Ef(x) + If(x)$
   $\Delta^3 f(x) = E^3 f(x) - 3E^2 f(x) + 3Ef(x) - If(x)$

3) Calculer E^2 et E^3 et montrer
   $E^2 f(x) = \Delta^2 f(x) + 2\Delta f(x) + If(x)$
   $E^3 f(x) = \Delta^3 f(x) + 3\Delta^2 f(x) + 3\Delta f(x) + If(x)$

Remarque 2.

1) Les opérateurs Δ et E sont utilisés pour résoudre des problèmes d'interpolation et d'extrapolation.
2) Il est possible de définir les opérateurs Δ^{-1} et E^{-1}.

2.3 Quelques propriétés des opérateurs Δ et E

1) $E^n f(x) = f(x+nh)$

   Preuve
   Utiliser l'induction sur n

2) $E(fg)(x) = Ef(x) \cdot Eg(x)$

   Preuve
   $E(fg)(x) = (fg)(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h) = Ef(x) \cdot Eg(x)$

   Remarque
   L'opérateur Δ ne vérifie pas cette propriété.

3) Les opérateurs Δ et E sont linéaires. Pour tous réels c_1 et c_2,

$$\Delta(c_1 f + c_2 g) = c_1\ \Delta f + c_2\ \Delta g$$

$$E(c_1 f + c_2 g) = c_1\ Ef + c_2\ Eg$$

   Preuve pour l'opérateur Δ

- $$\begin{aligned} \Delta(f+g)(x) &= (f+g)(x+h)-(f+g)(x) = \\ &= f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x) = \\ &= \Delta f(x)+\Delta g(x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \Delta(cf)(x) &= (cf)(x+h)-(cf)(x) = \\ &= cf(x+h)-cf(x) = \\ &= c\,\Delta f(x) \end{aligned}$$

4) Soit $p(x)$ un polynôme en x de degré n : $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$
   Alors
   $\Delta^{n+1}p(x) = 0$
   $\Delta^{n+i}p(x) = 0$ pour $i \geq 1$

   Voir les exercices ci-dessous pour le cas $n = 2$

5) Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions

$$\Delta(u(x)\ v(x)) = Eu(x)\ \Delta v(x) + v(x)\ \Delta u(x)$$

   Preuve

$$\begin{aligned} \Delta(u(x)\ v(x)) &= u(x+h)\ v(x+h) - u(x)\ v(x) = \\ &= u(x+h)\ v(x+h) - u(x)\ v(x) + u(x+h)\ v(x) - u(x+h)\ v(x) = \\ &= u(x+h)\ [v(x+h)-v(x)] + v(x)\ [u(x+h)-u(x)] = \\ &= Eu(x)\ \Delta v(x) + v(x)\ \Delta u(x) \end{aligned}$$

6) Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions

$$\Delta\ \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\ \Delta u(x) - u(x)\ \Delta v(x)}{v(x)\ Ev(x)}$$

   Preuve
   On pose $\dfrac{u(x)}{v(x)} = u(x)\ \dfrac{1}{v(x)}$ et on applique 5).

Exercices : montrer les propriétés suivantes

- E est linéaire
- $E^n\ (c_1 f + c_2 g) = c_1\ E^n f + c_2\ E^n g\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $\Delta^n\ (c_1 f + c_2 g) = c_1\ \Delta^n f + c_2\ \Delta^n g\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$
- On considère le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*$
  Vérifier que $\Delta^3 p(x) = 0$.

L'égalité entre opérateurs étant définie, on constate que l'on *additionne* les opérateurs Δ, E et I comme on additionne les nombres réels.
De même Δ^{-1} et E^{-1} étant définis, on *compose* les opérateurs Δ, E et I comme on multiplie les nombres réels.

On a, par exemple, les égalités suivantes

$$\begin{array}{lcll}
\Delta & = & E - I & \\
E & = & \Delta + I & \\
\Delta^0 & = & I & \\
E^0 & = & I & \\
\Delta^2 & = & (E-I)^2 & = E^2 - 2\,E + I \\
E^2 & = & (\Delta + I)^2 & = \Delta^2 + 2\,\Delta + I \\
\Delta^m\ \Delta^n & = & \Delta^{m+n} & \\
E^m\ E^n & = & E^{m+n}\,, & m, n \in \mathbb{N}^*
\end{array}$$

On peut encore mettre en évidence les propriétés suivantes.

7) Les opérateurs Δ et E commutent, c'est-à-dire $\Delta E = E\Delta$.

Preuve
$(\Delta E)f(x) = \Delta(Ef(x)) = \Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$
$(E\Delta)f(x) = E(\Delta f(x)) = E(f(x+h) - f(x)) = Ef(x+h) - Ef(x) = f(x+2h) - f(x+h)$

8)
$$\begin{array}{rcl}
(E-\alpha I)(E-\lambda I) & = & (E-\lambda I)(E-\alpha I) = \\
& = & E^2 - (\alpha+\lambda)E + \alpha\lambda I
\end{array}$$

Preuve
$$\begin{array}{rcl}
(E-\alpha I)(E-\lambda I)f(x) & = & (E-\alpha I)(f(x+h) - \lambda f(x)) \;= \\
& = & E(f(x+h) - \lambda f(x)) - \alpha f(x+h) + \alpha\lambda f(x) \;= \\
& = & f(x+2h) - \lambda f(x+h) - \alpha f(x+h) + \alpha\lambda f(x) \;= \\
& = & f(x+2h) - (\lambda+\alpha) f(x+h) + \alpha\lambda f(x) \;= \\
& = & E^2 f(x) - (\alpha+\lambda)Ef(x) + \alpha\lambda f(x) \;= \\
& = & (E^2 - (\alpha+\lambda)E + \alpha\lambda I)f(x)
\end{array}$$

De même on montre
$(E-\lambda I)(E-\alpha I)f(x) \;=\; (E^2 - (\alpha+\lambda)E + \alpha\lambda I)f(x)$

Exemple 2.3.1.

$$\begin{aligned}(E^2-3E+2I)\ (2^{x/h}+x) &= E^2(2^{x/h}+x)-3E(2^{x/h}+x)+2(2^{x/h}+x)\ = \\ &= E^2 2^{x/h}+E^2x-3E2^{x/h}-3Ex+2\ 2^{x/h}+2x\ = \\ &= 2^{(x+2h)/h}+x+2h-3\ 2^{(x+h)/h}-3(x+h)+2\ 2^{x/h}+2x\ = \\ &= -h\end{aligned}$$

Ce calcul peut aussi se faire de la manière suivante

$$\begin{aligned}(E-2I)\ (E-I)\ (2^{x/h}+x) &= (E-2I)\ [E(2^{x/h}+x)-(2^{x/h}+x)]\ = \\ &= (E-2I)\ (2^{x/h}+h)\ = \\ &= E2^{x/h}+h-2(2^{x/h}+h)\ = \\ &= -h\end{aligned}$$

Pour calculer $\Delta^n = (E-I)^n$ et $E^n = (\Delta+I)^n$, il est possible d'appliquer le développement du binôme. D'où les deux résultats suivants dont la preuve se fait par induction sur n, entier positif.

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} (-1)^{n-k}\ E^k$$

$$E^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \Delta^k$$

Exercice
Calculer à l'aide du binôme $(E-\lambda I)^n$ et $(\Delta-\lambda I)^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

2.4 Analogie entre opérateur différence et dérivée

Etant donné une fonction $y(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la nouvelle fonction $Dy(x)$ est la dérivée de y en x.
On définit l'opérateur dérivée D ainsi

$$Dy(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x)$$

Si $g(x) = x$ est la fonction identité et h est une constante réelle, l'opérateur Δ appliqué à $g(x)$ s'identifie à la fonction constante h, c'est-à-dire $\Delta g(x) = \Delta x = h$.

On peut alors écrire

$$Dy(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

Il y a donc une relation étroite entre les opérateurs D et Δ.
Il est possible de développer un calcul aux différences finies (h est une constante finie) analogue au calcul différentiel.

Par exemple

$$\begin{array}{lll} \Delta cf = c\,\Delta f & \Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g & \Delta^{n+1}(a_n x^n + ... + a_0) = 0 \\ Dcf = c\,Df & D(f+g) = Df + Dg & D^{n+1}(a_n x^n + ... + a_0) = 0 \end{array}$$

D'autre part, étant donné $y(x)$, la nouvelle fonction $dy(x)$ est la différentielle de y en x ; d est appelé l'opérateur différentiel. Il est défini grâce aux opérateurs D et Δ, c'est-à-dire

$$dy(x) = Dy(x)\,\Delta x$$

Pour déterminer Δx on évalue la différentielle de la fonction $y(x) = x$. Ce qui donne

$$dx = Dx\,\Delta x$$

Or $Dx = 1$ d'où

$$dx = \Delta x$$

En d'autre terme, la différentielle de x correspond à l' accroissement de la fonction x.

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} dy(x) &= Dy(x)\,dx \\ Dy(x) &= \frac{dy(x)}{dx} \end{aligned}$$

D'où la relation suivante entre les trois opérateurs Δ, D et d

$$D = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta}{\Delta x} = \frac{d}{dx}$$

Exemple 2.4.1.

$$D(2x^2+3x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(2x^2+3x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 3(x+h) - (2x^2+3x)}{h} = 4x+3 =$$
$$= \tfrac{d}{dx}(2x^2+3x)$$

Chapitre 3

Généralités sur les équations aux différences

3.1 Définitions générales

On considère une fonction g à variable et à valeurs réelles. Une équation aux différences met en relation x, une variable réelle "équi-discrète", une fonction g et ses différences.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ fixés et $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = a + nh\}$. S est un ensemble discret de points de $\mathbb{R}$ équidistants.
On considère une fonction g de variable x appartenant à S. On appelle équation aux différences toute relation de la forme suivante, k étant un entier strictement positif

$$\boxed{F\ (\ x\ ,\ g(x)\ ,\ \Delta g(x)\ ,\ \Delta^2 g(x)\ ,\ \ldots\ \ \Delta^k g(x)\ ) = 0} \qquad \text{(a)}$$

Exemple 3.1.1.

Soit l'équation aux différences définie sur S

$$\frac{\Delta^2 g(x)}{h^2} \;-\; 3\,\frac{\Delta g(x)}{h} \;+\; 2\,g(x) \;=\; 4x\,(x-h)$$

On l'explicite

$$g(x+2h) - 2\,g(x+h) + g(x) - 3\,h\,(g(x+h) - g(x)) + 2\,h^2\,g(x) = 4xh^2\,(x-h)$$

ou encore

$$g(x+2h) - (3h+2)\,g(x+h) + (1+2h^2+3h)\,g(x) = 4xh^2\,(x-h)$$

Cet exemple conduit à une nouvelle définition d'une équation aux différences équivalente à (a).

On appelle équation aux différences toute relation de la forme suivante, k étant un entier strictement positif

$$\boxed{\widetilde{F}\ \left(x\,,\ g(x)\,,\ g(x+h)\,,\ g(x+2h)\,,\ \ldots\ \ g(x+kh)\ \right)=0} \qquad \text{(b)}$$

On obtient (b) en explicitant Δ dans (a) ; inversément, on obtient (a) à partir de (b) en introduisant l'opérateur E.

Exemple 3.1.2.
Soit l'équation aux différences suivante

$$x\ g(x+3h)-(x-1)\ g(x+h)=0$$

Cette équation s'exprime en terme de différences. On explicite en utilisant l'opérateur E.

$$x\ Eg(x+2h)-(x-1)\ Eg(x)=0$$

$$x\ E^2g(x)-(x-1)\ Eg(x)=0$$

$$x\ (\Delta+I)^2g(x)-(x-1)\ (\Delta+I)g(x)=0$$

$$x\ (\Delta^2+2\ \Delta+I)g(x)-(x-1)\ (\Delta+I)g(x)=0$$

$$x\ \Delta^2g(x)+(x+1)\Delta g(x)+g(x)=0$$

Une équation de la forme (a) peut ne pas être réellement une équation aux différences.

Exemple 3.1.3.
Soit l'équation

$$\Delta^2g(x)+2\ \Delta g(x)+g(x)=1$$

$$(\Delta+I)^2g(x)=1$$

On introduit E

$$E^2g(x)=1$$

$g(x+2h)=1$ n'est pas une équation récursive.

3.2 Changement d'échelle

Comme on l'a vu au chapitre 1, on observe que toute équation aux différences définie sur S peut se résoudre sur $\mathbb{N}$ moyennant un changement d'échelle (changement de variable).

Dans l'équation en x, on pose

$$x = a + nh\,,\quad g(x) = y(n)\,,\quad g(x+h) = y(n+1)\,,\quad g(x+2h) = y(n+2)\quad \ldots$$

$y(n)$ étant la solution, on revient alors à x sachant que $n = \dfrac{x-a}{h}$.

Exemple 3.2.1.

Soit l'équation $\begin{cases} \Delta g(x) & = & x & \qquad x \in S \\ g(a) & = & C & \end{cases}$

On résoud par itération

$$\begin{cases} y(n+1) & = & y(n) + a + nh & \qquad n \in \mathbb{N} \\ y(0) & = & C & \qquad \text{condition initiale} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrcll}
n = 0 & y(1) & = & C + a & \\
n = 1 & y(2) & = & C + 2a + h & \\
n = 2 & y(3) & = & C + 3a + (1+2)\ h & \\
n = 3 & y(4) & = & C + 4a + (1+2+3)\ h & \qquad \text{etc.}
\end{array}$$

On conjecture

$$\begin{array}{rcll}
y(n) & = & C + na + (1 + 2 + \ \ldots\ + (n-1))\ h & \\
y(n) & = & C + na + \frac{n(n-1)}{2}\ h & \\
y(n) & = & C + \frac{1}{2}(2a-h)\ n + \frac{h}{2}\ n^2 & \qquad \text{(à montrer par récurrence)}
\end{array}$$

On revient à x en posant $g(x) = y(\frac{x-a}{h})$, d'où

$$g(x) = C + \frac{1}{2}\ (2a-h)\ (\frac{x-a}{h}) + \frac{h}{2}\ (\frac{x-a}{h})^2$$

On obtient alors la solution

$$g(x) = C + \frac{a}{2h}\ (h-a) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2h}\ x^2\,,\quad x \in S$$

Le changement d'échelle est sans effet sur l'équation, l'opérateur Δ restant invariant.
En effet

$$\Delta g(x) = g(x+h) - g(x)$$

Après changement d'échelle

$$g(x+h)-g(x)=y(n+1)-y(n)=\Delta y(n)$$

Donc

$$\Delta g(x)=\Delta y(n)$$

Les fonctions g et y prennent respectivement les mêmes valeurs en $a+nh$ et n.

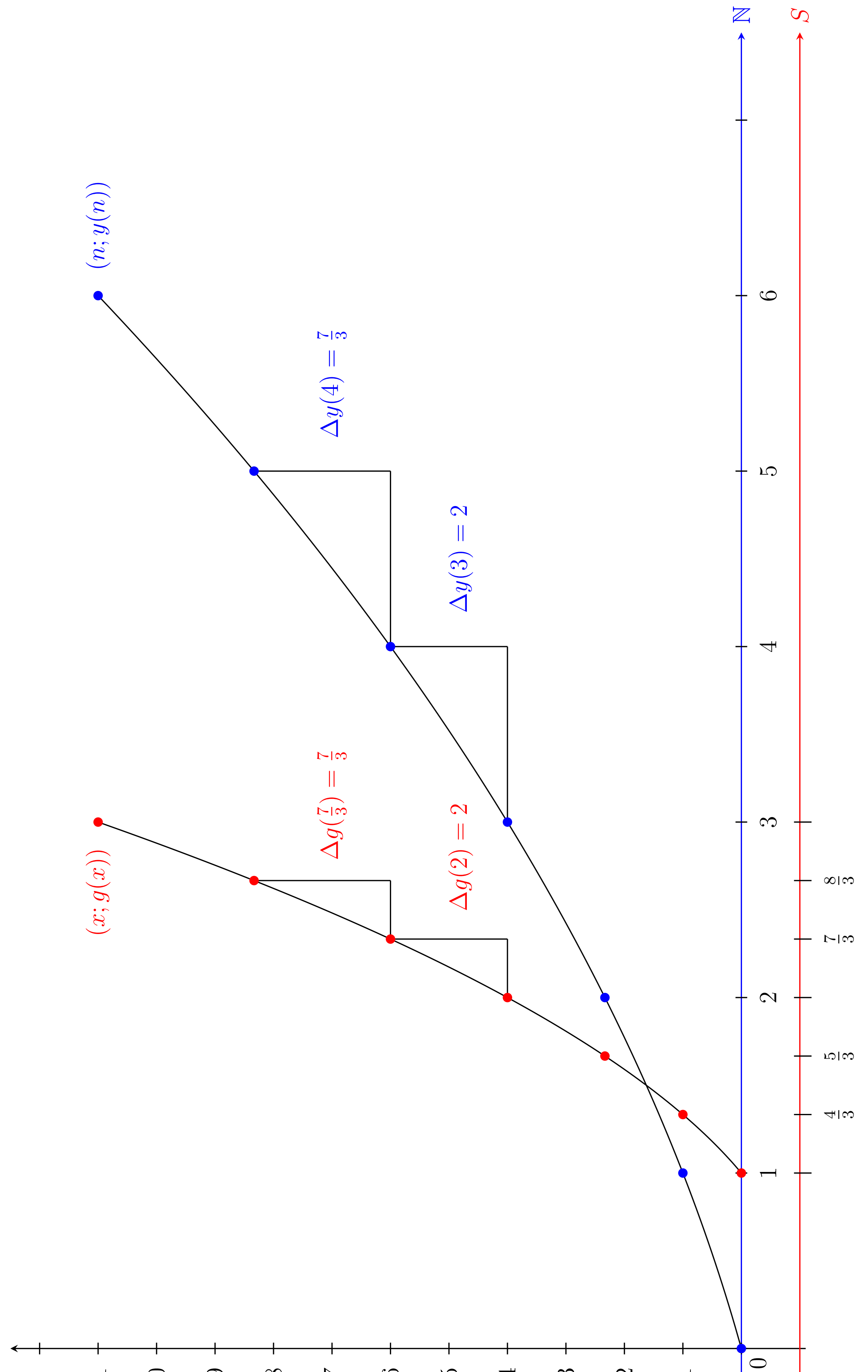
Illustration graphique

On reprend l'équation aux différences de l'exemple précédent.
On pose : $C=0$, $h=\frac{1}{3}$, $a=1$.
D'où les fonctions $y(n)$ et $g(x)$:

$y(n)=\frac{1}{6}n^2+\frac{5}{6}n$ et $g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$

$$\begin{array}{llllll}
n=0 & y(0) & = & 0 & = & g(1) \\
n=1 & y(1) & = & 1 & = & g(\frac{4}{3}) \\
n=2 & y(2) & = & \frac{7}{3} & = & g(\frac{5}{3}) \\
n=3 & y(3) & = & 4 & = & g(2) \\
n=4 & y(4) & = & 6 & = & g(\frac{7}{3}) \\
n=5 & y(5) & = & \frac{25}{3} & = & g(\frac{8}{3}) \\
n=6 & y(6) & = & 11 & = & g(3)
\end{array}$$

etc.



$(n; y(n))$
$(x; g(x))$
$\Delta y(4) = \frac{7}{3}$
$\Delta y(3) = 2$
$\Delta g(\frac{7}{3}) = \frac{7}{3}$
$\Delta g(2) = 2$
$\mathbb{N}$
S
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{3}$
$\frac{7}{3}$
$\frac{8}{3}$

Figure 3.1

En conséquence les équations aux différences s'écrivent en toute généralité á l'aide de la variable indépendante $n \in \mathbb{N}$.
On peut alors donner une nouvelle définition d'une équation aux différences, équivalente á la définition (b).

On appelle équation aux différences toute relation de la forme suivante, où y est une fonction de variable $n \in \mathbb{N}$, à valeurs réelles et k un entier strictement positif

$$\boxed{\tilde{\tilde{F}} \ (n \, , \ y(n) \, , \ y(n+1) \, , \ y(n+2) \, , \ \ldots \ \ y(n+k) \ ) = 0} \qquad \text{(c)}$$

On appelle *solution* de (c) toute *suite*, notée formellement $y(n)$, vérifiant (c) pour tout $n \geq n_0$.

Dans certain cas $y(n)$ peut s'exprimer sous forme fonctionnelle. On peut toujours calculer une solution $y(n)$ par itération, étant fixées une (des) condition(s) initiale(s). Celle-ci est alors unique : c'est une *solution particulière*. Lorsque les conditions initiales ne sont pas fixées, la solution est dite *générale* et dépend de celles-ci.

Remarque 3.

La présence de a et h dans une équation n'a pas d'incidence sur sa résolution ; ils jouent le rôle de paramètres.

Dans la suite, la théorie des équations aux différences portera sur des relations ne contenant ni a, ni h.

Exemple 3.2.2.

1. On reprend le modèle logistique en posant $r = 0.1$ et $K = 10^3$. On a l'équation suivante

$$\begin{cases} y(n+1) = 1.1 \ y(n) - 10^{-3} \ y^2(n) & n \in \mathbb{N} \\ y(0) = 10 & \text{condition initiale} \end{cases}$$

On explicite

$$\begin{array}{lrcl} n = 0 & y(1) & = & 1.1 \cdot 10 - 10^{-3} \ 10^2 = 10.9 \\ n = 1 & y(2) & = & 1.1 \cdot 10.9 - 10^{-3} \ (10.9)^2 = 11.871 \\ n = 2 & y(3) & = & 1.1 \cdot 11.871 - 10^{-3} \ (11.871)^2 = 12.917 \qquad \text{etc.} \end{array}$$

La solution unique est une *suite* dont on connaît les 4 premiers termes. Dans ce cas, on ne sait pas trouver une solution sous forme fonctionnelle

2. Soit l'équation

$$\begin{cases} \Delta y(n) = n^2 & n \in \mathbb{N} \\ y(0) = C & \text{condition initiale} \end{cases}$$

On explicite

$$\begin{array}{lll} n=0 & y(1) = C & \\ n=1 & y(2) = C + 1^2 & \\ n=2 & y(3) = C + 1^2 + 2^2 & \text{etc.} \end{array}$$

On conjecture
$y(n) = C + \left(1^2 + 2^2 + \ \dots \ + (n-1)^2 \right)$
ou encore
$y(n) = C + \frac{1}{6}\, n(n-1)(2n-1)$, ce qui peut être montré par récurrence.
Ainsi $y(n)$ est la solution générale de l'équation, étant donné la condition initiale.

3. Soit l'équation

$$\begin{cases} \Delta y(n+2) - y(n) = 0 & n \in \mathbb{N} \\ y(0) = C_0 \ \text{ et } \ y(1) = C_1 & \text{conditions initiales} \end{cases}$$

On explicite

$$\begin{array}{lll} n=0 & y(2) = y(0) = C_0 & \\ n=1 & y(3) = y(1) = C_1 & \\ n=2 & y(4) = C_0 & \\ n=3 & y(5) = C_1 & \\ n=4 & y(6) = C_0 & \\ n=5 & y(7) = C_1 & \text{etc.} \end{array}$$

On conjecture
$y(n) = \frac{C_0+C_1}{2} \ + \ (-1)^n \ \frac{C_0-C_1}{2}$, ce qui peut être montré par récurrence.
Ainsi $y(n)$ est la solution générale de l'équation, étant donné les conditions initiales.

3.3 Ordre d'une équation aux différences

Une équation aux différences est dite d'ordre k si elle contient aussi bien $y(n)$ que $y(n+k)$; il est donc nécessaire que leurs coefficients ne s'annulent pas.

Lorsque les coefficients de $y(n)$ et $y(n+k)$ sont des fonctions de n qui s'annulent en des valeurs n_i, alors l'ordre n'est pas défini sur $\mathbb{N}$. Cependant, il est possible de le définir sur un sous-ensemble adéquat de $\mathbb{N}$.

Il est à noter que contrairement aux équations différentielles, l'ordre d'une équation aux différences n'est pas affecté par un changement de variable.

Ces remarques sont illustrées par les exemples qui suivent.

Exemple 3.3.1.

On reprend 1.4.3 de la partie I : le modèle logistique dont la loi de mise à jour est

$R_{t+1} = R_t + r\ R_t\ (1 - \frac{R_t}{K})$

On considère cette loi comme une équation fonctionnelle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} R(t+1) &= R(t) + r\ R(t)\ (1 - \tfrac{R(t)}{K}) \\ &= (1+r)\ R(t) - r\ \tfrac{R^2(t)}{K} \end{aligned}$$

On pose $R(t+1) = y(n+1)$ et on résoud l'équation aux différences

$y(n+1) = (1+r)\ y(n) - r\ \frac{y^2(n)}{K}$

qui est d'ordre 1.

Exemple 3.3.2.

Soit l'équation à coefficients constants

$$3\ y(n+1) - y(n+3) = n$$

La récurrence a lieu sur $\mathbb{N}$. L'équation définit successivement $y(3)$, $y(4)$, $y(5)$, etc., lorsque les conditions initiales $y(1)$ et $y(2)$ sont données. Il est à noter que $y(0)$ n'est dans ce cas pas défini. L'ordre de cette équation est 2, ce que l'on peut montrer en effectuant le changement de variable suivant

$$m = n+1\,, \quad n \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = m-1\,, \quad m \geq 1$$

L'équation devient

$$3\ y(m) - y(m+2) = m - 1$$

La récurrence a lieu sur $\mathbb{N}^*$. L'équation définit successivement $y(3)$, $y(4)$, $y(5)$, etc., lorsque les conditions initiales $y(1)$ et $y(2)$ sont données.
L'équation est bien d'ordre 2.

Exemple 3.3.3.

Soit l'équation à coefficients non constants

$$(n-3)\ y(n+1) - y(n) = 0$$

Le coefficient de $y(n+1)$ s'annule pour $n = 3$.

Pour $n \geq 4$, les coefficients sont non-nuls. Sur cet ensemble, l'ordre de l'équation est 1.
La condition initiale $y(4) = C$ étant fixée, on a

$$\begin{array}{lrcl} n=4 & y(5) & = & y(4) = C \\ n=5 & y(6) & = & \frac{1}{2}y(5) = \frac{C}{2} \\ n=6 & y(7) & = & \frac{1}{3}y(6) = \frac{C}{2\cdot 3} \qquad \text{etc.} \end{array}$$

La solution unique est $y(n) = \frac{C}{(n-3)!}$ $\quad n \geq 4$ (se vérifie par récurrence).

Sur $\mathbb{N}$, l'ordre n'est pas défini.

En examinant les cas $n = 0\,,1\,,2\,,3$, on va observer que l'existence ou l'unicité de la solution dépendent de la condition initiale.

- On pose la condition initiale $\quad y(i) = 0\,,\quad i = 0\,,1\,,2$ ou 3.
  Dans ce cas, il y a une infinité de solutions.
  Par exemple, on pose $i = 2$, la condition initiale est $y(2) = 0$. On peut calculer $y(3)$, $y(1)$ et $y(0)$ qui sont tous nuls. Pour $n = 3$ on obtient $\quad 0\ y(4) = y(3)$, ce qui est vérifié pour tout réel $\alpha = y(4)$.
  Ainsi l'équation a une infinité de solutions qui sont $y(n) = \frac{\alpha}{(n-3)!}$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$
- On pose la condition initiale $\quad y(i) \neq 0\,,\quad i = 0\,,1\,,2$ ou 3.
  Dans ce cas, il n'y a pas de solutions.
  Par exemple, on pose $i = 2$, la condition initiale est $y(2) = C \neq 0$. On peut calculer $y(3)$, $y(1)$ et $y(0)$ qui sont tous non-nuls. Pour $n = 3$ on obtient $0\ y(4) = y(3)\ (\neq 0)$, il n'y a donc pas de solution pour $y(4)$.
  Ainsi l'équation n'a pas de solution.

Chapitre 4

Etude et discussion de l'équation y(n+1) = A y(n) + B

4.1 Etude des solutions

D'une manière générale, une équation linéaire du 1er ordre se présente ainsi

$$f(n)\ y(n+1) + g(n)\ y(n) = h(n) \tag{4.1.1}$$

Les fonctions $f(n)$ et $g(n)$ (à valeurs réelles) sont telles que $f(n) \neq 0$ et $g(n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si de plus $f(n)$, $g(n)$ et $h(n)$ sont des fonctions constantes, on peut réécrire (4.1.1) ainsi

$$y(n+1) = A\ y(n) + B\,, \qquad A \in \mathbb{R}^*,\ B \in \mathbb{R} \tag{4.1.2}$$

Pour étudier la solution de (4.1.2), on calcule $y(n)$ pour des valeurs successives de n.

$$\begin{array}{lrcll} n=0 & y(1) & = & A\ y(0) + B & \\ n=1 & y(2) & = & A\ y(1) + B & = A^2\ y(0) + B\ (1+A) \\ n=2 & y(3) & = & A\ y(2) + B & = A^3\ y(0) + B\ (1+A+A^2) \end{array}$$

Donc

$$y(3) = \begin{cases} A^3\ y(0) \quad + \quad B\ \frac{1-A^3}{1-A} & A \neq 1 \\ \quad y(0) \quad + \quad 3\ B & A = 1 \end{cases}$$

On conjecture alors

$$y(n) = \begin{cases} A^n\ y(0) \quad + \quad B\ \frac{1-A^n}{1-A} & A \neq 1 \\ \quad y(0) \quad + \quad n\ B & A = 1 \end{cases}$$

Preuve :

Pour $A \neq 1$, preuve par récurrence sur n.

- La relation est vraie pour $n = 0$. En effet $y(0) = y(0) + 0\ B$
- Hypothèse de récurrence : la relation est vraie au rang n.
- A montrer pour tout $n \geq 0$:

  $y(n) = A^n\ y(0) + B\ \frac{1-A^n}{1-A} \quad \Rightarrow \quad y(n+1) = A^{n+1}\ y(0) + B\ \frac{1-A^{n+1}}{1-A}$

  Preuve :

$$\begin{aligned} y(n+1) &= A\ y(n) + B \overset{hyp.rec.}{=} A\ [\ A^n\ y(0) + B\ \tfrac{1-A^n}{1-A}\ ] + B = \\ &= A^{n+1}\ y(0) + B\ [1 + A\ \tfrac{1-A^n}{1-A}\ ] = \\ &= A^{n+1}\ y(0) + B\ \tfrac{1-A^{n+1}}{1-A} \end{aligned}$$

Pour $A = 1$ la preuve est immédiate.

Ainsi

$$y(n) = \begin{cases} A^n\ y(0) \ + \ B\ \frac{1-A^n}{1-A} & A \neq 1 \\ y(0) \ + \ n\ B & A = 1 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

La condition initiale $y(0)$ étant fixée, $y(n)$ est solution unique de l'équation (4.1.2). En faisant varier $y(0)$ dans $\mathbb{R}$, on obtient toutes les solutions de (4.1.2).

Il est possible d'étudier le comportement des solutions de l'équation (4.1.2) en faisant appel à quelques propriétés connues sur les suites.

Premier cas : on suppose $A = 1$

D'où l'équation $y(n+1) = y(n) + B$ dont on sait que les solutions sont du type $y(n) = y(0) + n\ B$.
On distingue trois sous-cas.

i) $B = 0$: $y(n) = y(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y(n)$ est une fonction constante.

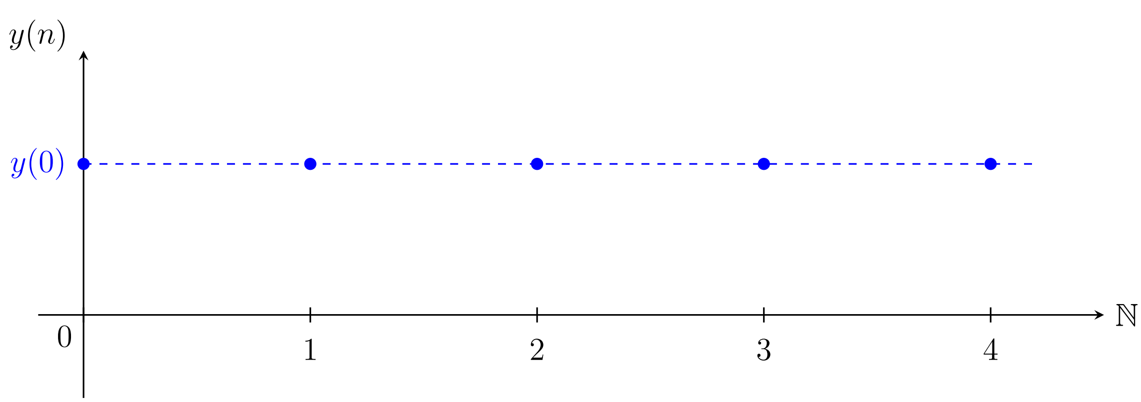


Figure 4.1

ii) $B > 0 \;:\; y(n) = y(0) + n\,B \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y(n) = +\infty$

Preuve :
A montrer : soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall P > 0$, $\exists N(P) > 0$ tel que $n \geq N \Rightarrow y(0)+n\,B > P$.
$\forall P > 0$ donné,

$$\begin{aligned} y(0) + n\,B > P \quad &\Leftrightarrow \quad n\,B > P - y(0) \\ &\Leftrightarrow \quad n > \tfrac{P-y(0)}{B} \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $N > \frac{P-y(0)}{B}$.

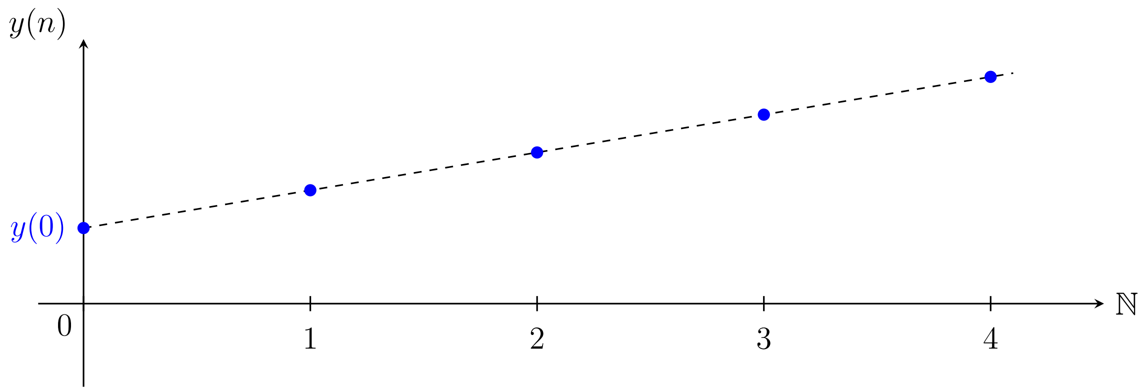


Figure 4.2

iii) $B < 0 \;:\; y(n) = y(0) + n\,B \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y(n) = -\infty$

Preuve :
A montrer : soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall P > 0$, $\exists N(P) > 0$ tel que $n \geq N \Rightarrow y(0)+n\,B < -P$.
D'une manière analogue à *ii)*, il suffit de choisir $N > \frac{-P-y(0)}{B}$.

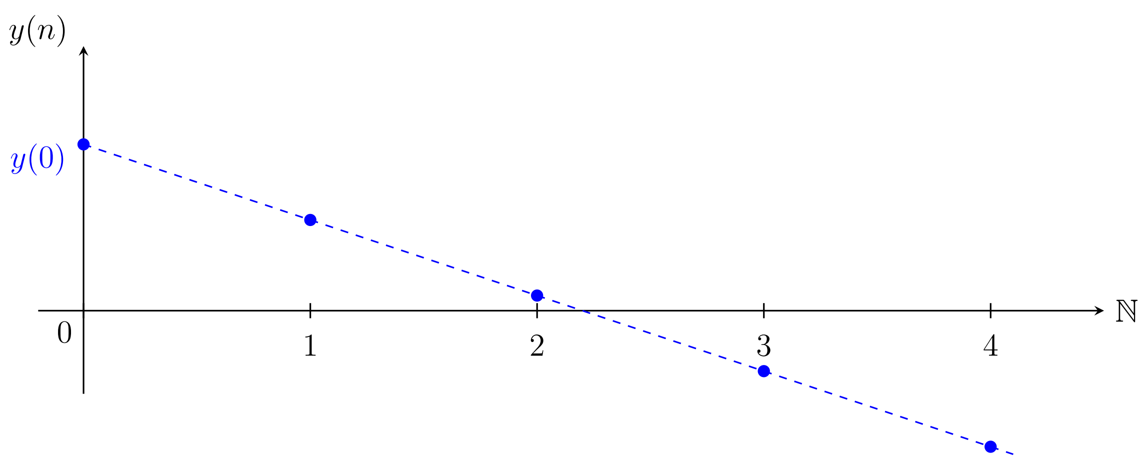


Figure 4.3

Deuxième cas : on suppose $A \neq 1$

D'où l'équation $y(n+1) = A\ y(n) + B$ dont on sait que les solutions sont du type $y(n) - \frac{B}{1-A} = A^n\ (\ y(0) - \frac{B}{1-A}\ )$.

On distingue deux sous-cas suivant la valeur de $y(0)$.

i) $y(0) = \frac{B}{1-A}$: $y(n) = \frac{B}{1-A} = y(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$y(n)$ est une fonction constante.

ii) $y(0) \neq \frac{B}{1-A}$: le comportement de $y(n)$ dépend de celui de A^n.

On examine quatre comportements possibles de A^n.

- $-1 < A < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$

- $A > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = +\infty$

  En effet par comparaison :
  il existe $r > 0$ tel que $A^n = (1+r)^n \geq 1 + rn$ pour tout $n \geq 0$.

  Or $\lim\limits_{n\to\infty} (1+rn) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = +\infty$.

- $A = -1$: $A^n = 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ ...$

- $A < -1$: A^n oscille infiniment.

Finalement lorsque $A \neq 1$, on a les cinq possibilités suivantes pour $y(n)$.

1) $A < -1$:

$y(0) = \frac{B}{1-A}$ et $y(n) = \frac{B}{1-A}$
ou
$y(0) \neq \frac{B}{1-A}$ et $y(n)$ oscille infiniment

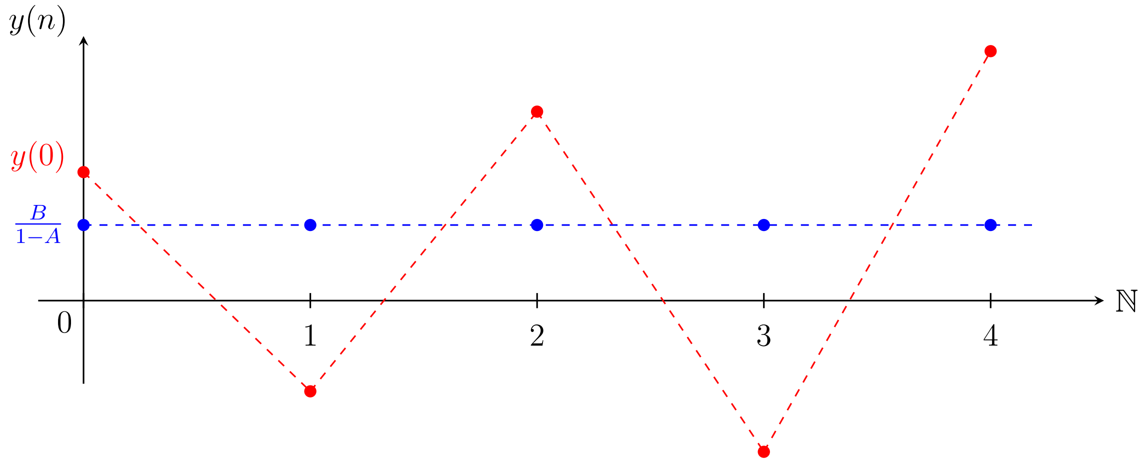


Figure 4.4

2) $A = -1$:

$y(0) = \frac{1}{2}\ B$ et $y(n) = \frac{1}{2}\ B$
ou
$y(0) \neq \frac{B}{1-A}$ et $y(n)$ oscille entre les valeurs $y(0)$ et une constante $K = B - y(0)$

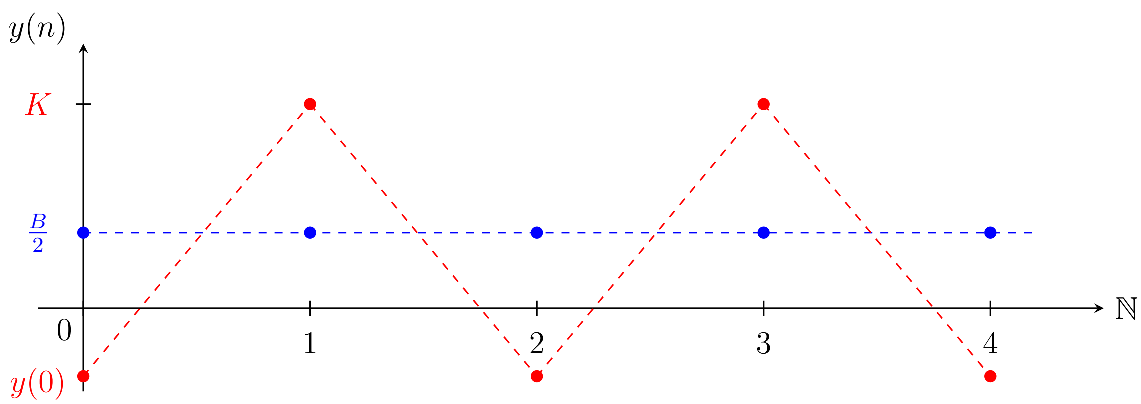


Figure 4.5

3) $-1 < A < 0$:

$y(0) = \frac{B}{1-A}$ et $y(n) = \frac{B}{1-A}$
ou
$y(n)$ oscille avec amortissement , $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \frac{B}{1-A}$ et $y(0) \neq \frac{B}{1-A}$

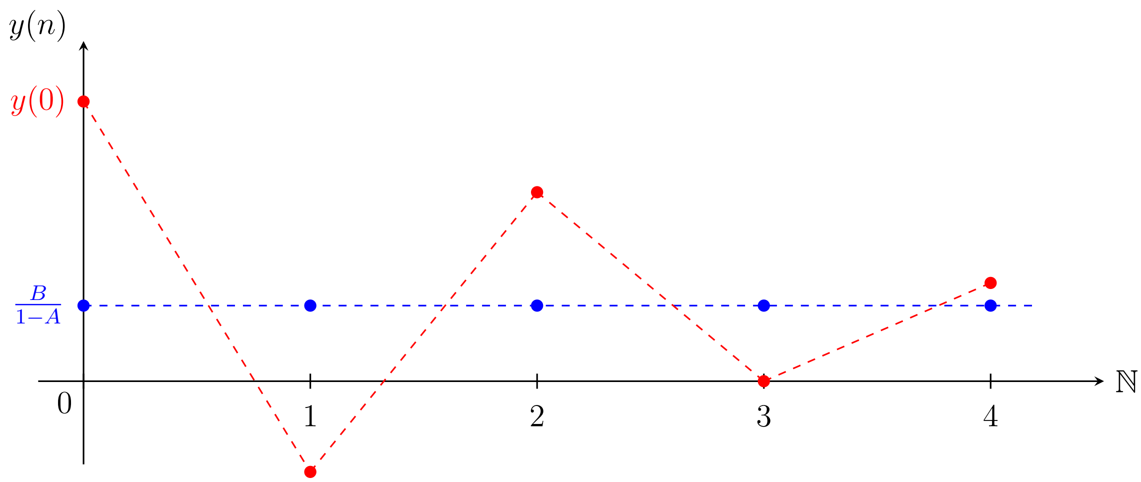


Figure 4.6

4) $0 < A < 1$:

$y(0) = \frac{B}{1-A}$ et $y(n) = \frac{B}{1-A}$

ou

$y(0) > \frac{B}{1-A}$, $y(n)$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \frac{B}{1-A}$

ou

$y(0) < \frac{B}{1-A}$, $y(n)$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \frac{B}{1-A}$

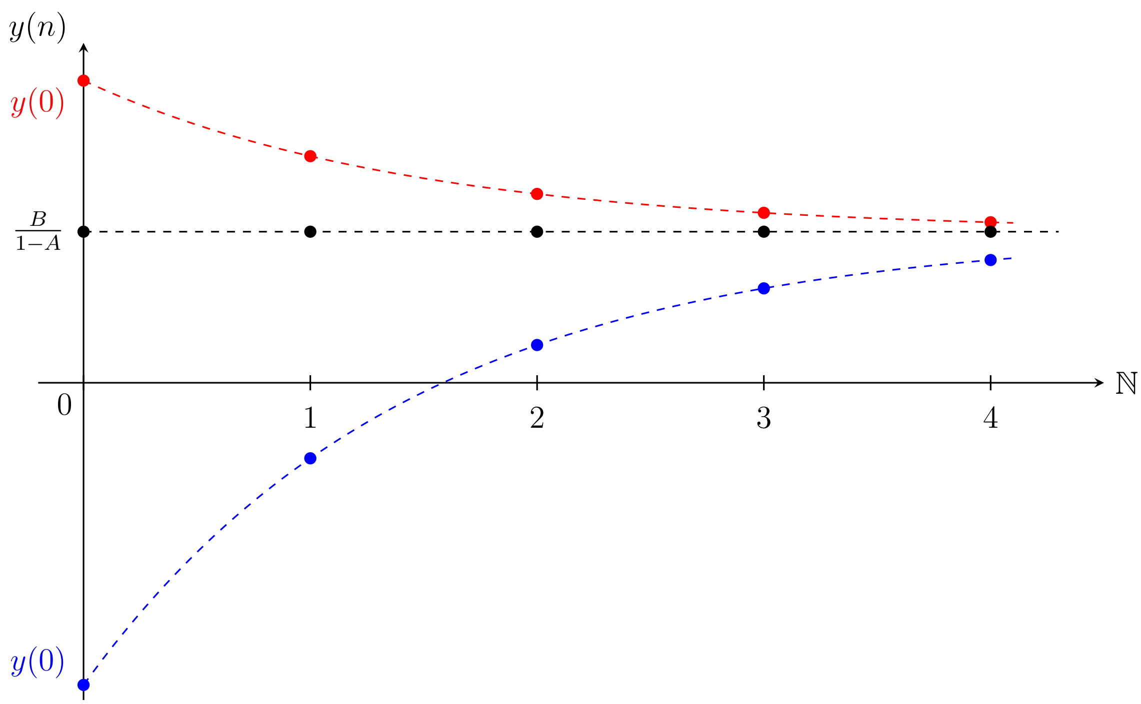


Figure 4.7

5) $A > 1$:

$y(0) = \frac{B}{1-A}$ et $y(n) = \frac{B}{1-A}$

$y(0) > \frac{B}{1-A}$, $y(n)$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = +\infty$
ou
$y(0) < \frac{B}{1-A}$, $y(n)$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = -\infty$

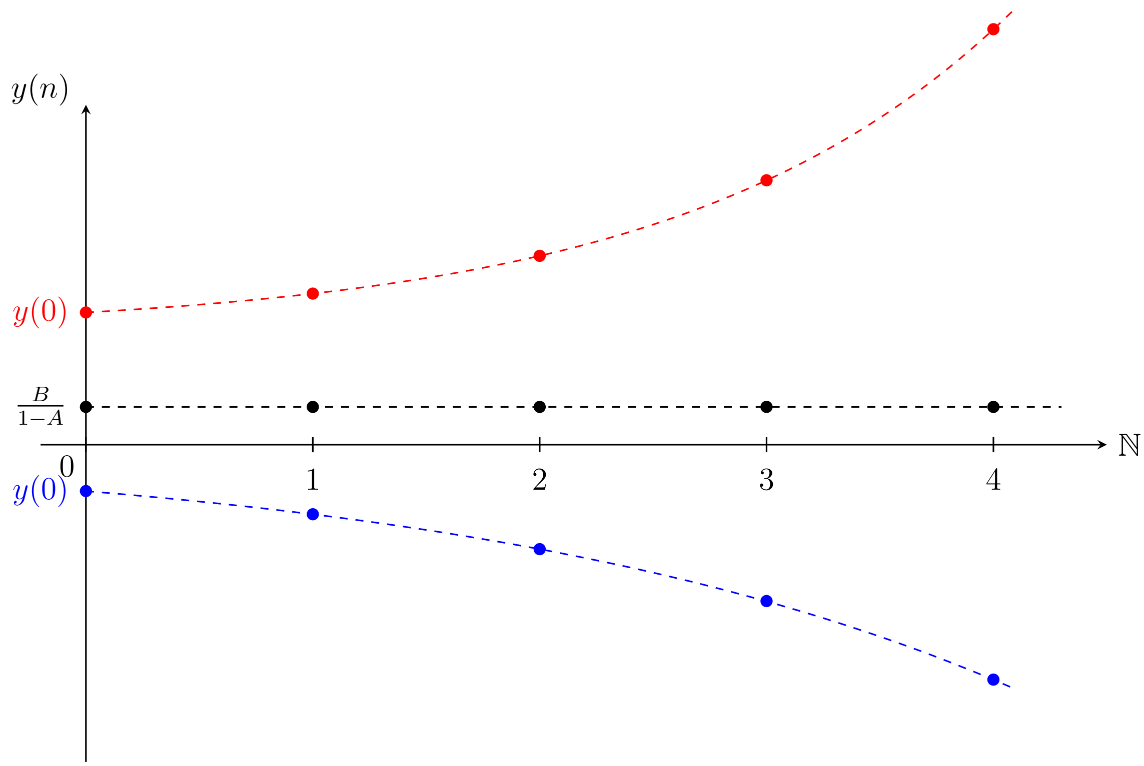


Figure 4.8

4.2 Exemples

1. Soit l'équation :
$2\ y(n+1) - y(n) = 2$ avec $y(0) = 4$

Elle se met sous la forme :
$y(n+1) = \frac{1}{2}\ y(n) + 1$ avec $A = \frac{1}{2}\,,\ B = 1\,,\ \frac{B}{1-A} = 2$

On a donc : $0 < A < 1$ et $y(0) > \frac{B}{1-A}$

La solution unique est de la forme :
$y(n) = 2\ (\frac{1}{2})^n + 2$
$y(n)$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 2$.

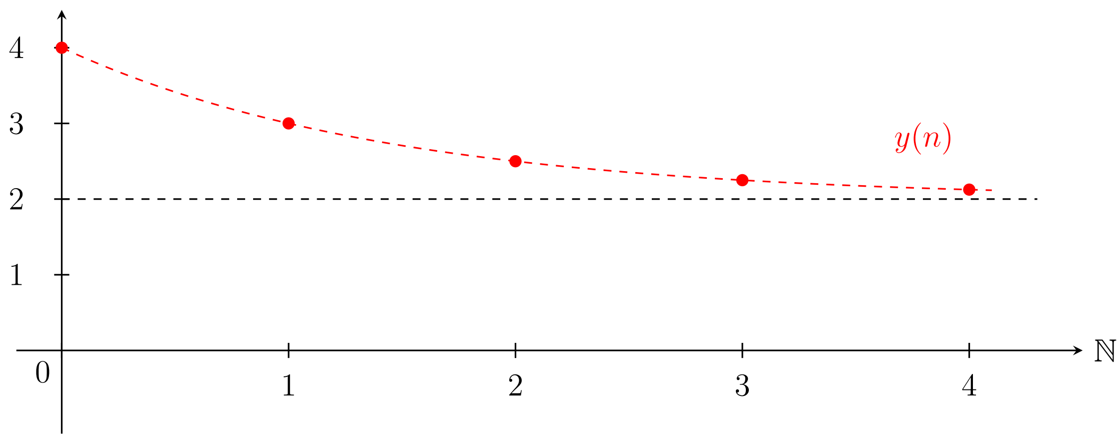


Figure 4.9

2. Soit l'équation :
$y(n+1) + y(n) = 1 \quad$ avec $\quad y(0) = 0$

Elle se met sous la forme :
$y(n+1) = -y(n) + 1 \quad$ avec $\quad A = -1\,,\ B = 1\,,\ \frac{B}{1-A} = \frac{1}{2}$

On a donc : $A = -1 \quad$ et $\quad y(0) \neq \frac{B}{1-A}$

La solution unique est de la forme :
$y(n) = -\frac{1}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2}$
$y(n)$ oscille entre 0 et 1 .

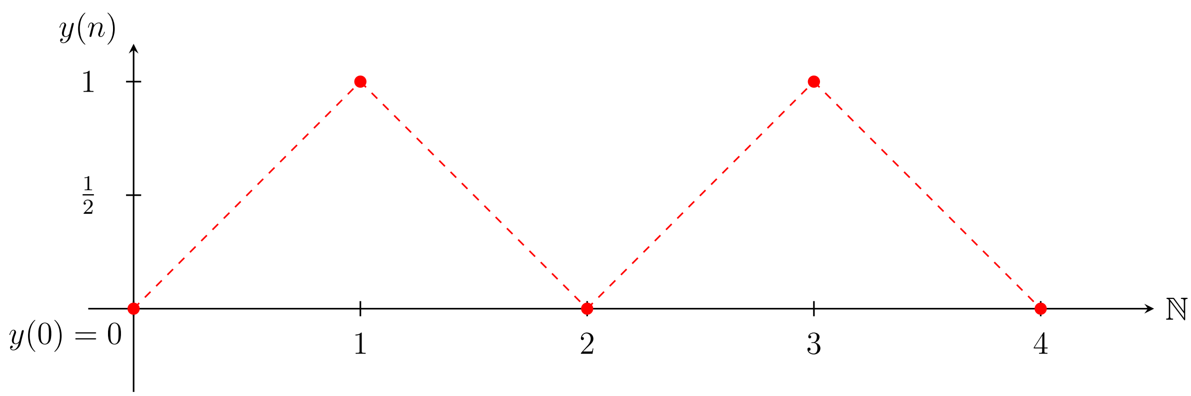


Figure 4.10

On revient à la partie I, paragraphe 1.4.

- En 1.4.1 on a développé un modèle dont la règle de mise à jour est

  $$R_{t+\Delta t} \;=\; R_t + (b-d)\; R_t\; \Delta t$$

  Cette loi peut être vue comme l'équation aux différence suivante

  $y(n+1) = y(n) + (b-d)\; y(n)$ (on a posé $\Delta t = 1$)
  $\Longleftrightarrow$
  $y(n+1) = (1+b-d)\; y(n)$

  Cette équation est du type $y(n+1) = A\; y(n)$ $(B=0)$.

- En 1.4.2 on a étudié la fluctuation d'une population de moules dont la loi de mise à jour est

  $$R_{t+\Delta t} \;=\; R_t + (I - \beta\; R_t)\; \Delta t$$

  Comme précédemment, on obtient l'équation aux différence suivante

  $y(n+1) = (1-\beta)\; y(n) + I$ (on a posé $\Delta t = 1$)

  Cette équation est du type $y(n+1) = A\; y(n) + B$.

Chapitre 5

Théorie générale des équations aux différences linéaires

5.1 Généralités

Afin de pouvoir développer une théorie générale des équations aux différences linéaires, il est nécessaire de se placer dans un contexte plus général. On considère l'équation

$$y(n+k) + p_1(n)\ y(n+k-1) + \ \dots\ + p_k(n)\ y(n) \ = \ g(n) \tag{5.1.1}$$

où $y(n)$ est une fonction de variable n entières à valeurs *complexes*. Les coefficients $p_1(n), \dots, p_k(n)$ et $g(n)$ sont des fonctions définies pour $n \geq n_0$ et à valeurs complexes ; de plus, $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 5.1.1.
Soit l'équation :

$$y(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}\ y(n+1) + \frac{2n}{n-1}\ y(n) \ = \ n\ 2^n$$

définie sur $n \geq 2$

Cette équation est linéaire et d'ordre 2 car $p_2(n) = \frac{2n}{n-1} \neq 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exemple 5.1.2.
Soit l'équation :

$$y(n+1) - i\ y(n) = 0$$

définie sur $n \geq 0$

Cette équation est linéaire et d'ordre 1 car $p_1(n) = i \neq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Elle a pour solution $y(n) = C\, i^n$ pour toutes constantes $C \in \mathbb{C}$ (ce que l'on peut vérifier par substitution).

Concernant l' équation (5.1.1), il est légitime de poser les deux questions suivantes :

- existe-t-il toujours au moins une solution ?
- quelles conditions et combien doit-on en donner pour avoir une solution unique ?

La réponse à ces deux questions est apportée par le théorème d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 5.1.1.

On considère l'équation aux différences (5.1.1).
Si $n_i,\ n_i+1,\ \dots,\ n_i+k-1$ sont k entiers consécutifs et si $a_0,\ a_1,\ \dots, a_{k-1}$ sont k complexes fixés, alors

- il existe au moins une solution à l'équation (5.1.1),
- la solution $y(n)$ satisfaisant les k conditions suivantes
  $y(n_i) = a_0,\ y(n_i+1) = a_1,\ \dots,\ y(n_i+k-1) = a_{k-1}$
  est unique.

Ces conditions sont appelées *conditions initiales*.
On peut toujours supposer $n_i = n_0$.

Preuve :

La preuve se fait en deux parties.

1. On suppose $n_i = n_0$.
On considère les k entiers consécutifs $n_0,\ n_0+1,\ \dots,\ n_0+k-1$ et les k conditions

$$\begin{aligned} y(n_0) &= a_0 \\ y(n_0+1) &= a_1 \\ &\vdots \\ y(n_0+k-1) &= a_{k-1} \end{aligned}$$

On va montrer par induction, que $y(n)$ est déterminée de manière unique pour tout $n \geq n_0$.

De (5.1.1) on a

$$y(n+k) = g(n) - p_1(n)\, y(n+k-1) - \dots - p_k(n)\, y(n), \quad n \geq n_0 \tag{5.1.2}$$

- On pose $n = n_0$ dans (5.1.2)

$$\begin{aligned} y(n_0+k) &= g(n_0) - p_1(n_0)\, y(n_0+k-1) - \dots - p_k(n_0)\, y(n_0) \\ &= g(n_0) - p_1(n_0)\, a_{k-1} - \dots - p_k(n_0)\, a_0 \end{aligned}$$

  ce qui montre l'existence et l'unicité de $y(n_0+k)$.

- On suppose (hypothèse d'induction) que $y(n)$ est déterminée pour tout n de n_0 à $n_0 + j$, avec $j \geq k$.
  Par hypothèse, on connait donc les k valeurs
  $y(n_0 + j)$
  $y(n_0 + j - 1)$
  $\vdots$
  $y(n_0 + j - (k - 2))$
  $y(n_0 + j - (k - 1))$
- Par (5.1.2) et en utilisant l'hypothèse d'induction, on a

$$\begin{aligned} y(n_0 + j + 1) &= g(n_0 + j + 1 - k) - p_1(n_0 + j + 1 - k)\ y(n_0 + j) - \\ &\quad - p_2(n_0 + j + 1 - k)\ y(n_0 + j - 1) - \ \dots - \\ &\quad - p_k(n_0 + j + 1 - k)\ y(n_0 + j - (k - 1)) \end{aligned}$$

  ce qui montre l'existence et l'unicité de $y(n_0 + j + 1)$ pour $j \geq k$.

2. On suppose $n_i > n_0$.
On considère les k entiers consécutifs n_i, $n_i + 1$, ..., $n_i + k - 1$ et les k conditions

$$\begin{aligned} y(n_i) &= a_0 \\ y(n_i + 1) &= a_1 \\ &\vdots \\ y(n_i + k - 1) &= a_{k-1} \end{aligned}$$

On détermine d'abord $y(n_i - 1), y(n_i - 2), \dots, y(n_0)$.

De (5.1.1) on a pour $n_0 \leq n \leq n_i - 1$
$p_k(n)\ y(n) = g(n) - y(n + k) - p_1(n)\ y(n + k - 1) - \ \dots\ - p_{k-1}(n)\ y(n + 1)$

On pose $n = n_i - 1$, d'où
$p_k(n_i - 1)\ y(n_i - 1) = g(n_i - 1) - y(n_i - 1 + k) - p_1(n)\ y(n + k - 1) - \ \dots\ - p_{k-1}(n_i - 1)\ y(n_i)$

Par hypothèse $p_k(n_i - 1) \neq 0$, on obtient donc $y(n_i - 1)$ en fonction des k valeurs initiales fixées. On peut alors déterminer $y(n_i - 2), \dots, y(n_0)$ de la même manière.

Puis on procède comme dans la partie (1) pour montrer par induction l'existence et l'unicité de la solution $y(n)$, pour tout $n \geq n_i$.

Remarque 4.

1) Le théorème a des similarités avec le théorème de Cauchy concernant les équations différentielles.
2) On appelle *solution générale* de (5.1.1) une famille de fonctions $y(n, C_0, \dots, C_{k-1})$ à k paramètres complexes $C_0, \dots, C_{k-1}$ telle que :

a) toute fonction de la famille est une solution de (5.1.1) ;

b) les k conditions initiales étant fixées : $y(n_0) = a_0, \; ... \; , y(n_0 + k - 1) = a_{k-1}$, on peut alors trouver la valeur des paramètres $C_0, \; ... \; , C_{k-1}$ en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} y(n, \; C_0, \; ... \; , C_{k-1}) & = \; a_0 \\ \vdots & \\ y(n_0 + k - 1, \; C_0, \; ..., \; C_{k-1}) & = \; a_{k-1} \end{cases}$$

La solution ainsi obtenue est une solution particulière de l'équation (5.1.1). Le théorème 1 montre qu'elle est unique.

Il en résulte que si $y(n)$ et $Y(n)$ sont deux solutions particulières de (5.1.1) admettant mêmes valeurs sur k entiers consécutifs, alors elles coïncident pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 5.1.3.

On considère l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$$y(n + 2) = y(n) + 1$$

et les deux conditions initiales fixées : $y(0) = a_0 \, , y(1) = a_1 \, , \quad a_i \in \mathbb{C}$.
On construit de proche en proche la solution unique :

$$\begin{array}{lcccl} n = 0 & : & y(2) & = & y(0) + 1 = \\ & & & = & a_0 + 1 \\ n = 1 & : & y(3) & = & y(1) + 1 = \\ & & & = & a_1 + 1 \\ n = 2 & : & y(4) & = & y(2) + 1 = \\ & & & = & a_0 + 2 \\ n = 3 & : & y(5) & = & y(3) + 1 = \\ & & & = & a_1 + 1 \end{array}$$

...

pour n pair : $y(n) = a_0 + \frac{n}{2}$

pour n impair : $y(n) = a_1 + \frac{n-1}{2}$

D'où l'unique solution :

$y(n) = \frac{1}{2}\ [\ a_0 + \frac{n}{2} + a_1 + \frac{n-1}{2}\ ]\ +\ \frac{1}{2}(-1)^n\ [\ a_0 + \frac{n}{2} - (a_1 + \frac{n-1}{2})\ ]$

ou encore

$y(n) = a_0\big(\frac{1}{2}\ +\ \frac{1}{2}(-1)^n\big)\ +\ a_1\big(\frac{1}{2}\ -\ \frac{1}{2}(-1)^n\big)\ +\ \frac{1}{2}\ \frac{n}{2}\ +\ \frac{1}{2}\ \frac{n-1}{2}\ +\ \frac{1}{2}(-1)^n\ \frac{n}{2}\ -\ \frac{1}{2}(-1)^n\ \frac{n-1}{2}$

On pose : $C_0 = \frac{1}{2}\ (a_0 + a_1)$ et $C_1 = \frac{1}{2}\ (a_0 - a_1)$

Alors

$y(n) = C_0\ +\ C_1\ (-1)^n\ +\ \frac{2n-1}{4}\ +\ \frac{1}{4}\ (-1)^n\,, \quad C_i \in \mathbb{C}$

Remarque 5.
Pour $C_0 = C_1 = 0$ $\quad y(n) = \frac{2n-1}{4}\ +\ \frac{1}{4}\ (-1)^n$ est une solution particulière de l'équation.

Exemple 5.1.4.
On considère l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) - n\ y(n+1) - y(n) = 0$$

et les deux conditions initiales fixées : $y(0) = a_0\,, y(2) = a_1\,, \quad a_i \in \mathbb{C}$.

On procède comme à l'exemple 3.

$$\begin{array}{lcll} n = 0 & : & y(2) - 0\ y(1) - y(0) & = & 0 \\ & & a_2 - 0\ y(1) - a_0 & = & 0 \end{array}$$

c'est-à-dire : $0\ y(1) = a_2 - a_0$

- si $a_2 - a_0 = 0$: il y a une infinité de solutions pour $y(1)$,
- si $a_2 - a_0 \neq 0$: il n'y a pas de solution pour $y(1)$.

Les conditions initiales n'étant pas données sur deux entiers consécutifs, les hypothèses du théorème 1 ne sont pas vérifiées !

Exemple 5.1.5.

On considère l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) - 4\ y(n+1) + 4y(n) = 0$$

qui a pour solution générale $y(n) = C_0\ n\ 2^n\ +\ C_1\ 2^n\,,\quad C_i \in \mathbb{C}\,.$

C'est une famille de fonctions dépendant de deux paramètres C_0 et C_1.

Il s'agit de trouver la solution particulière vérifiant les deux conditions initiales $y(2) = 3$ et $y(3) = 8$.

On résoud le système

$$\begin{cases} 8\ C_0 +\ 4\ C_1 & = \ 3 \\ 24\ C_0 +\ 8\ C_1 & = \ 8 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_0 & = \ \frac{1}{4} \\ C_1 & = \ \frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où la solution particulière $y(n)\ =\ \frac{n}{4}\ 2^n\ +\ \frac{1}{4}\ 2^n$

qui peut aussi s'écrire $y(n)\ =\ \frac{n+1}{4}\ 2^n\,.$

Exemple 5.1.6.

On considère l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) - 5\ y(n+1) + 6y(n) = 0$$

qui a pour solution générale $y(n) = C_0\ 2^n\ +\ C_1\ 3^n\,,\quad C_i \in \mathbb{C}\,.$

Il s'agit de trouver la solution particulière vérifiant les deux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y(1) = 3 - i$.

On résoud le système

$$\begin{cases} C_0 + C_1 & = \ 1 \\ 2\ C_0 +\ 3\ C_1 & = \ 3 - i \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_0 & = \ i \\ C_1 & = \ 1 - i \end{cases}$$

D'où la solution particulière $y(n)\ =\ i\ 2^n\ +\ (1-i)\ 3^n$

Exemple 5.1.7.

Soit $Y(n) = \frac{n+5}{3}\ 2^n$ une solution particulière de l'équation de l'exemple 5.
On va montrer qu'il existe C_0 et C_1 tels que $Y(n) = y(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par le théorème 1, il suffit que $Y(n)$ et $y(n)$ prennent les mêmes valeurs sur deux entiers consécutifs :

$$\begin{array}{lclcl} n=0 & : & Y(0) & = & y(0) \\ & & \frac{5}{3} & = & C_1 \\ n=1 & : & Y(1) & = & y(1) \\ & & 4 & = & 2\ C_0 + \frac{10}{3} \quad \text{d'où} \quad C_0 = \frac{1}{3} \end{array}$$

Ainsi $Y(n) = \frac{n}{3}\ 2^n + \frac{5}{3}\ 2^n$

$Y(n)$ fait partie de la famille de fonctions exprimant la solution générale de l'équation de l'exemple 5.

Exemple 5.1.8.

On considère l'équation aux différences d'ordre 3 définie pour $n \geq 1$ suivante

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}\ y(n+2) + n\ y(n+1) - 3\ y(n) = n$$

et les conditions initiales fixées : $y(1) = 0\,,\ y(2) = -1\,,\ y(3) = 1.$

On procède comme à l'exemple 3.

$$\begin{array}{lclclcl} n=1 & : & y(4) & = & \frac{1}{2}\ y(3) - y(2) + 3\ (1) & = & \frac{5}{2} \\ n=2 & : & y(5) & = & \frac{2}{3}\ y(4) - 2\ y(3) + 3\ y(2) + 2 & = & -\frac{4}{3} \\ n=3 & : & y(6) & = & \frac{3}{4}\ y(5) - 3\ y(4) + 3\ y(3) + 3 & = & -\frac{3}{2} \\ n=4 & : & y(7) & = & \frac{4}{5}\ y(6) - 4\ y(5) + 3\ y(4) + 4 & = & 20.9 \end{array}$$

...

La solution est la suite unique $(\,y(n)\,)$, $n \in \mathbb{N}^*$, formellement $y(n)$, dont on a calculé les 4 premiers termes.

La question qu'il reste à se poser est : peut-on toujours trouver une solution sous forme algébrique à l'équation (5.1.1) ?
La réponse est affirmative dans le cas où cette équation est d'ordre 1 comme on le montre ci-après. Sinon cela reste un problème difficile. Par contre, dans le cas où les coefficients sont des fonctions constantes, le problème est résolu (voir le chapitre 6).

5.2 Equation aux différences linéaire d'ordre 1

On s'intéresse à une équation du type

$$\begin{cases} y(n+1) - a(n)\ y(n) \ = \ g(n) \qquad n \geq n_0 \\ y(n_0) = y_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

et $a(n) \neq 0$.

L'unique solution de l'équation peut être trouvée par itération.

$$\begin{array}{lcrcl}
n = n_0 & : & y(n_0+1) & = & a(n_0)\ y_0 \ + \ g(n_0) \\
n = n_0+1 & : & y(n_0+2) & = & a(n_0+1)\ y(n_0+1) \ + \ g(n_0+1) = \\
 & & & = & a(n_0+1)\ [a(n_0)\ y_0 \ + \ g(n_0)] \ + \ g(n_0+1) = \\
 & & & = & a(n_0+1)\ a(n_0)\ y_0 \ + \ a(n_0+1)\ g(n_0) \ + \ g(n_0+1) \\
n = n_0+2 & : & y(n_0+3) & = & a(n_0+2)\ y(n_0+2) \ + \ g(n_0+2) = \\
 & & & = & a(n_0+2)\ a(n_0+1)\ a(n_0)\ y_0 \ + \ a(n_0+2)\ a(n_0+1)\ g(n_0) + \\
 & & & & + \ a(n_0+2)\ g(n_0+1) \ + \ g(n_0+2)
\end{array}$$

etc

On conjecture

$$\begin{array}{rcl}
y(n) & = & y\big(n_0 + (n-n_0)\big) = \\
 & = & y_0\ a(n_0)\ a(n_0+1)\ a(n_0+2) \cdot ...... \cdot a\big(n_0 + (n-n_0-1)\big) + \\
 & & + \ g(n_0)\ a(n_0+1)\ a(n_0+2) \cdot ...... \cdot a\big(n_0 + (n-n_0-1)\big) + \\
 & & + \ g(n_0+1)\ a(n_0+2)\ a(n_0+3) \cdot ...... \cdot a\big(n_0 + (n-n_0-1)\big) + \\
 & & + \ .... \ + \ g\big(n_0 + (n-n_0-1)\big) \ = \\
 & = & y_0\ a(n_0)\ a(n_0+1)\ a(n_0+2) \cdot ...... \cdot a(n-1) + \\
 & & + \ g(n_0)\ a(n_0+1)\ a(n_0+2) \cdot ...... \cdot a(n-1) + \\
 & & + \ g(n_0+1)\ a(n_0+2)\ a(n_0+3) \cdot ...... \cdot a(n-1) + \\
 & & + \ .... \ + \ g(n-1)
\end{array}$$

ou encore

$$y(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\ y_0 \ + \ \sum_{i=n_0}^{n-1} \Big[\prod_{r=i+1}^{n-1} a(r) \Big]\ g(i)$$

Remarque 6.

Le dernier terme de la somme s'écrit

$g(n-1) = \sum_{i=n-1}^{n-1} \ \big[\ \prod_{r=n}^{n-1} \ a(r) \big] \ g(i)$ avec la convention $\prod_{r=n}^{n-1} \ a(r) = 1$

Preuve

Par récurrence sur n

- La relation est vraie pour $n = n_0$ en effet
  $y(n_0) = y_0$ est la condition initiale
  et
  $y(n_0) = \prod_{i=n_0}^{n_0-1} a(i)\, y_0 + \sum_{i=n_0}^{n_0-1} \left(\prod_{r=i+1}^{n_0-1} a(r)\right) g(i) = y_0 + 0 = y_0$
  car
  $\prod_{i=n_0}^{n_0-1} a(i) = 1$ et $\sum_{i=n_0}^{n_0-1} \left(\prod_{r=i+1}^{n_0-1} a(r)\right) g(i) = 0$
  avec la convention $\sum_{i=n_0}^{n_0-1} g(i) = 0$

- On suppose la relation vraie pour n et on montre qu'elle est encore vraie pour $n+1$, et ceci pour tout $n \geq n_0$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.
  On a $y(n+1) = a(n)\, y(n) + g(n)$
  On utilise l'hypothèse de récurrence :
  $y(n+1) = a(n)\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\, y_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left(\prod_{r=i+1}^{n-1} a(r)\right) g(i)\right] + g(n)$
  $y(n+1) = \prod_{i=n_0}^{n} a(i)\, y_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left(\prod_{r=i+1}^{n} a(r)\right) g(i) + \sum_{r=i+1}^{n} a(r)\, g(n)$
  car $\sum_{r=n+1}^{n} a(r) = 1$, d'où
  $y(n+1) = \prod_{i=n_0}^{n} a(i)\, y_0 + \sum_{i=n_0}^{n} \left(\prod_{r=i+1}^{n} a(r)\right) g(i)$

5.3 Structure de la solution générale d'une équation aux différences linéaire homogène d'ordre k

Dans ce qui suit, on considère les équations linéaires *homogènes* d'ordre k, donc du type

$$y(n+k) + p_1(n)\, y(n+k-1) + \ ...\ + p_k(n)\, y(n) = 0 \qquad (5.3.1)$$

Sachant que toute solution de (5.3.1) dépend de k paramètres $C_0, C_1, ..., C_{k-1}$, l'idée est d'exprimer la solution générale comme combinaison linéaire de k solutions particulières (voir les exemples du paragraphe précédent) et de déterminer le(s) conditions(s) que doivent vérifier ces k solutions.
L'exemple suivant éclaire ces intentions.

5.3.1 Exemple introductif

Soit l'équation

$$y(n+2) - 5\, y(n+1) + 6\, y(n) = 0$$

On peut vérifier aisément que $u(n) = 2^n$ et $v(n) = 3^n$, $n \geq 0$, sont des solutions particulières de l'équation, de même que $C_0\, 2^n + C_1\, 3^n$ le sont aussi, pour toutes constantes $C_0\,, C_1$.

On va montrer que la famille de fonctions $Y(n) = C_0\ 2^n + C_1\ 3^n$, $C_0\,, C_1 \in \mathbb{C}$ est la solution générale de l'équation .

- On sait que $Y(n)$ est une solution de l'équation et ceci pour toutes constantes $C_0\,, C_1$.
- Pour toute solution $y(n)$, il faut montrer qu'il existe $C_0\,, C_1$ uniques telles que $y(n) = Y(n)$.

  Par le théorème 5.1, $y(n)$ et $Y(n)$ doivent coïncider pour deux valeurs successives de n :

  $$\begin{cases} n = 0 & : \quad Y(0) = y(0) \\ n = 1 & : \quad Y(1) = y(1) \end{cases}$$

  Il vient

  $$\begin{cases} C_0\ u(0) + C_1\ v(0) = y(0) \\ C_0\ u(1) + C_1\ v(1) = y(1) \end{cases}$$

  Or $u(0) = v(0) = 1$ et $u(1) = 2\,, v(1) = 3$. Le système est donc équivalent à

  $$\begin{cases} C_0 + C_1 = y(0) \\ 2\ C_0 + 3\ C_1 = y(1) \end{cases}$$

  ce qui s'écrit sous forme matricielle

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}$$

  Ce système possède une solution unique si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul et ceci pour tout $y(0)\,, y(1)$.

  Dans ce cas

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u(1) & v(1) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Le système possède donc la solution unique

  $$\begin{cases} C_0 = 3\ y(0) - y(1) \\ C_1 = y(1) - 2\ y(0) \end{cases}$$

  En conclusion, toute solution $y(n)$ s'écrit

  $y(n) = (3\ y(0) - y(1))\ 2^n + (y(1) - 2\ y(0))\ 3^n$ pour tout $n \geq 0$

  Donc $y(n)$ fait partie de la famille de fonctions $Y(n) = C_0\ 2^n + C_1\ 3^n$ avec

$$\left\{\begin{array}{lcccc} C_0 & = & 3\,y(0) & - & y(1) \\ C_1 & = & y(1) & - & 2\,y(0) \end{array}\right.$$

D'où la solution générale : $Y(n,\ C_0,\ C_1) = C_0\ 2^n + C_1\ 3^n\,, \quad C_0\,, C_1 \in \mathbb{C}\,.$

Supposons maintenant que l'on choisisse les deux solutions particulières suivantes : $u(n) = 2^n$ et $v(n) = 5 \cdot 2^n$.

En procédant comme précédemment, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}$$

Ce système n'a pas de solution unique car

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u(1) & v(1) \end{vmatrix} = 0$$

Or $u(n)$ et $v(n)$ sont des solutions multiples l'une de l'autre et donc $\begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u(1) & v(1) \end{vmatrix} = 0$

Précédemment ce même déterminant était non nul, $u(n)$ et $v(n)$ n'étant pas multiple l'une de l'autre ; la solution du système est alors unique.

On constate donc que ce déterminant joue un rôle important.

On pose

$$W(0) = \begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u(1) & v(1) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad W(1) = \begin{vmatrix} u(1) & v(1) \\ u(2) & v(2) \end{vmatrix}$$

On peut alors mettre en relation $W(0)$ et $W(n)$.
Par exemple pour les solutions $u(n) = 2^n$ et $v(n) = 3^n$:

$$W(1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

Or $u(2)$ et $v(2)$ vérifient l'équation, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} u(2) & - & 5\,u(1) & + & 6\,u(0) & = & 0 \\ v(2) & - & 5\,v(1) & + & 6\,v(0) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcccc} u(2) & = & 5\,u(1) & - & 6\,u(0) \\ v(2) & = & 5\,v(1) & - & 6\,v(0) \end{array}\right.$$

On remplace dans $W(1)$:

$$W(1) \; = \; \begin{vmatrix} u(1) & v(1) \\ 5\;u(1) - 6\;u(0) & 5\;v(1) - 6\;v(0) \end{vmatrix} \; = \; \begin{vmatrix} u(1) & v(1) \\ 5\;u(2) & 5\;v(2) \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} u(1) & v(1) \\ u(0) & v(0) \end{vmatrix} \; =$$

$$= \; 0 - 6\;(-\;W(0)) \; = \; 6\;W(0)$$

On remarque que 6 est le coefficient de $y(n)$ dans l'équation ; il est non nul car cette équation est d'ordre 2.

En conclusion, les deux fonctions 2^n et 3^n non multiples l'une de l'autre permettent d'exprimer la solution générale de l'équation comme combinaison linéaire de celles-ci.

La généralisation des résultats ci-dessus exige l'introduction de quelques définitions et théorèmes.

Remarque 7.

On arrive à la même conclusion dans le cas où les fonctions sont complexes comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 5.3.1.

Soit l'équation

$$y(n+2) + i\;y(n+1) + 2\;y(n) = 0$$

On peut vérifier que $u(n) = i^n$ et $v(n) = (-1)^n\;(2i)^n$ sont des solutions particulières de l'équation, de même que $Y(n) = C_0\;i^n + C_1\;(-1)^n\;(2i)^n$, pour toutes constantes $C_0\,, C_1\; \in \mathbb{C}$.

Pour toute solution $y(n)$ il faut montrer qu'il existe $C_0\,, C_1\; \in \mathbb{C}$ uniques tels que $y(n) = Y(n)$. Il faut donc que $y(n)$ et $Y(n)$ coincident pour 2 valeurs successives de n.

$$\begin{cases} n = 0 \;:\; Y(0) \;=\; y(0) \\ n = 1 \;:\; Y(1) \;=\; y(1) \end{cases}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} C_0 + C_1 & = \; y(0) \\ C_0\;i + C_1\;(-1)\;2i & = \; y(1) \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}$$

Ce système possède une solution unique car

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -2i \end{vmatrix} = -3i \neq 0$$

Après calcul on obtient la solution unique

$$\begin{cases} C_0 = \frac{2}{3}\, y(0) - \frac{i}{3} y(1) \\ C_1 = y(1) - \frac{i}{3}\, y(0) \end{cases}$$

En conclusion, toute solution $y(n)$ s'écrit

$$y(n) = \left(\tfrac{2}{3}\, y(0) - \tfrac{i}{3} y(1) \right) i^n + \left(y(1) - \tfrac{i}{3}\, y(0) \right) (-1)^n\, (2i)^n$$

5.3.2 Dépendance, indépendance de fonctions

On considère l'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Cet ensemble est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire appartenant à $\mathbb{C}$.

Définition 5.3.1.
Soient r fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $(\alpha_1, \ldots .\alpha_r) \in \mathbb{C}^r$.

Les r fonctions sont dites *linéairement dépendantes* sur $A \subset \mathbb{C}$ si et seulement si il existe r réels $\alpha_1, \ldots .\alpha_r$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f_i(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in A$$

La négation de la dépendance est l'indépendance.

Définition 5.3.2.
Les r fonctions sont *linéairement indépendantes* sur $A \subset \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f_i(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0 \qquad \text{pour tout } x \in A$$

Remarque 8.

1. $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement dépendantes si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f_1(x) = \alpha\, f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

2. Une famille de r fonctions est linéairement dépendante sur $A \subset \mathbb{C}$ si et seulement si l'une est une combinaison linéaire des autres.
3. On note que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les définitions 1 et 2 restent valables sur cet espace vectoriel, les scalaires appartenant alors à $\mathbb{R}$.

Exemple 5.3.2.

On considère les deux fonctions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = 2x$ définies sur $\mathbb{R}$.

On forme

$$\alpha_1\ x + \alpha_2\ 2x = 0\,, \quad \alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha_1 + 2\ \alpha_2)\ x = 0$$

Pour $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_1 = -2\ \alpha_2$, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 + 2\ \alpha_2 & = & 0 \\ (\alpha_1 + 2\ \alpha_2)\ x & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (\text{par exemple } \ \alpha_1 = 1 \text{ et } \ \alpha_2 = -2)$$

En conclusion $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement dépendantes (ici proportionnelles) sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5.3.3.

On considère les trois fonctions $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = x$ et $f_3(x) = x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

On forme

$$\alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ x^2 = 0$$

ce qui implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ces trois fonctions sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5.3.4.

On considère les deux fonctions $f_1(x) = ix$ et $f_2(x) = x + 2 - 3i$ définies sur $\mathbb{C}$.

On forme

$$\alpha\ ix + \beta\ (x + 2 - 3i) = 0\,, \quad \alpha\,, \beta \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha\ i + \beta)\ x + \beta\ (2 - 3i) = 0$$

ce qui implique pour tout $x \in \mathbb{C}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha i + \beta & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Exemple 5.3.5.

On donne

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

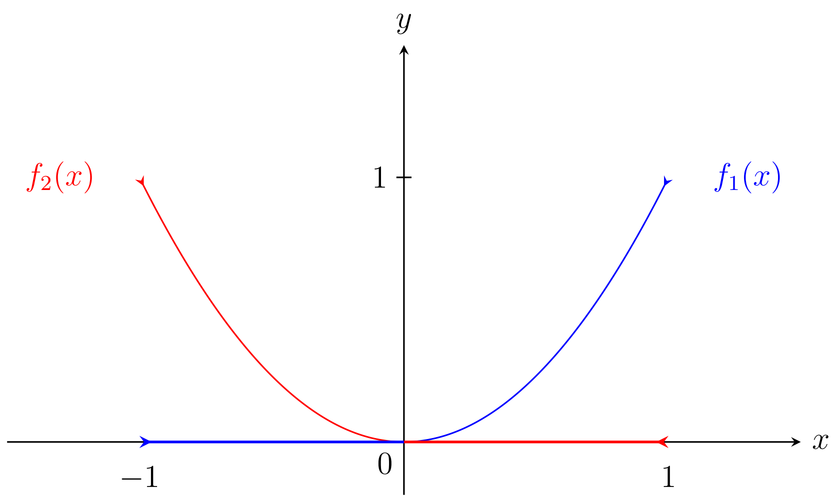


Figure 5.1

- Pour $x \in]-1;\ 0[$, on forme

  $\alpha\ f_1(x) + \beta\ f_2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha\ x^2 + \beta\ 0)\ x^2 = 0$

  Cette équation est vérifiée pour $\alpha = 0$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in]-1;\ 0[$.
  Les deux fonctions sont linéairement dépendantes sur $x \in]-1;\ 0[$.

- Même conclusion sur $]0;\ 1[$.

- Pour $x \in]-1;\ 1[$, on forme

  $\alpha\ f_1(x) + \beta\ f_2(x) = 0$

  Il s'agit de déterminer α et β vérifiant le système

  $$\begin{cases} \alpha\ x^2 + \beta\ 0 = 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \alpha\ 0 + \beta\ x^2 = 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

  La première équation est vérifiée pour $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $-1 < x < 0$.
  On remplace dans la deuxième : $0 \cdot 0 + \beta\ x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta\ x^2 = 0$, pour tout $0 \le x < 1$.
  La seule possibilité est donc $\alpha = \beta = 0$, pour tout $x \in]-1;\ 1[$.

On a montré : $\alpha\, f_1(x) + \beta\, f_2(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$, pour tout $x \in]-1;1[$.
En conclusion $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement indépendantes sur $]-1;1[$.

En fait $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont linéairement indépendantes sur tout intervalle "à cheval" sur 0, de type $]a;b[$ avec $a < 0$ et $b > 0$.

Remarque 9.

Ces définitions sont encore valables pour des fonctions définies sur en ensemble discret. L'ensemble de ces fonctions est encore un $\mathbb{C}$ ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 5.3.6.

On considère les deux fonctions $f_1(t) = 2$ et $f_2(t) = 1 + \cos \pi t$. On va montrer qu'elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{N}$ et dépendantes sur $J = \{ \frac{1}{2} + n \mid n \in \mathbb{N} \}$.

- Sur $\mathbb{N}$:

  $$f_2(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad t \text{ pair} \\ 0 & \text{si} \quad t \text{ impair} \end{cases}$$

  On forme $\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t) = 0$, d'où le système

  $$\begin{cases} 2\,\alpha + 2\,\beta = 0 & \text{si } t \text{ pair} \\ 2\,\alpha + 0\,\beta = 0 & \text{si } t \text{ impair} \end{cases}$$

  La seule solution est $\alpha = \beta = 0$, pour tout $t \in \mathbb{N}$.

  En conclusion $f_1(t)$ et $f_2(t)$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{N}$.

- Sur J :

  $f_2(t) = 1$ pour tout $t \in J$

  On forme $\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,\alpha + 1\,\beta = 0$ pour tout $t \in J$.

  Ainsi $\beta = -2\alpha$. Il existe donc α, β non nuls tels que $2\,\alpha + 1\,\beta = 0$ pour tout $t \in J$, (par exemple $\alpha = 1$, $\beta = -2$).

  En conclusion $f_1(t)$ et $f_2(t)$ linéairement dépendantes sur J (ici proportionnelles).

Exemple 5.3.7.

Les fonctions $f_1(n) = n$, $f_2(n) = n^2 + 1$ et $f_3(n) = (n-1)^2$ sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathbb{N}$?

On forme

$$\alpha\, n + \beta\, (n^2+1) + \gamma\, (n-1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\beta+\gamma)\, n^2 + (\alpha - 2\gamma)\, n + \beta + \gamma = 0$$

Ce polynôme étant nul, on a

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & 2\,\gamma & = & 0 \\ \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à $\beta = -\gamma$ et $\alpha = 2\gamma$. Il existe donc $\alpha\,,\beta$ et γ non tous nuls tels que $\alpha\, n + \beta\, (n^2+1) + \gamma\, (n-1)^2 = 0$.

En conclusion les trois fonctions sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{N}$.

Par exemple pour $\alpha = 2\,,\beta = -1$ et $\gamma = 1$, on a : $(n-1)^2 = -2n + (n+1)^2$.

Exemple 5.3.8.

Les fonctions 2^n et 3^n de l'exemple introductif du paragraphe 5.3.1 sont-elles linéairement indépendantes ?

On forme : $\alpha\, 2^n + \beta\, 3^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où le système

$$\left. \begin{array}{ccccccc} n=0 & : & \alpha & + & \beta & = & 0 \\ n \geq 1 & : & \alpha\, 2^n & + & \beta\, 3^n & = & 0 \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & = & -\beta & & \\ -\beta\, 2^n & + & \beta\, 3^n & = & 0, \qquad n \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\beta \\ \beta\, (3^n - 2^n) = 0, \qquad n \geq 1 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

En conclusion les deux fonctions sont linéairement indépendantes.

5.3.3 Notion de Casoratien

Le déterminant $W(0)$ introduit dans l'exemple du paragraphe 5.3.1, appelé Casoratien, peut être défini pour tout $n \geq n_0$ et être généralisé à p fonctions.

Définition 5.3.3.

Le *Casoratien* de p fonctions $u_1(n)\,, u_2(n)\,, \ldots\,, u_p(n)$ définies pour $n \geq n_0$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, noté $W(n)$ est défini par

$$W(n) = \begin{vmatrix} u_1(n) & u_2(n) & \dots & u_p(n) \\ u_1(n+1) & u_2(n+1) & \dots & u_p(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(n+p-1) & u_2(n+p-1) & \dots & u_p(n+p-1) \end{vmatrix}$$

$W(n)$ est un déterminant d'ordre p.

Exemple 5.3.9.

1. Soient $u_1(n) = n$, $u_2(n) = n^2+1$, $u_3(n) = (n-1)^2$ définies sur $\mathbb{N}$.

$$W(n) = \begin{vmatrix} u_1(n) & u_2(n) & u_3(n) \\ u_1(n+1) & u_2(n+1) & u_3(n+1) \\ u_1(n+2) & u_2(n+2) & u_3(n+2) \end{vmatrix}$$

$$W(n) = \begin{vmatrix} n & n^2+1 & (n-1)^2 \\ n+1 & (n+1)^2+1 & n^2 \\ n+2 & (n+2)^2+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} n & (n-1)^2+2n & (n-1)^2 \\ n+1 & n^2+2(n+1) & n^2 \\ n+2 & (n+1)^2+2(n+2) & (n+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient $u_1(n) = 2^n$, $u_2(n) = 3^n$, $u_3(n) = 5^n$ définies sur $\mathbb{N}$.

$$W(n) = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 5^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 5^{n+1} \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 5^{n+2} \end{vmatrix} = (2\cdot 3\cdot 5)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= (2\cdot 3\cdot 5)^n \cdot 6 \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3. Soient $u_1(n) = i^n$, $u_2(n) = (-1)^n\,(2i)^n$ définies de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$W(n) = \begin{vmatrix} i^n & (-1)^n\,(2i)^n \\ i^{n+1} & (-1)^{n+1}\,(2i)^{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n\,2^n\,i^{n^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -2i \end{vmatrix} =$$

$$= 3\ (-1)^{n+1}\ 2^n\ i^{n^2+1} \neq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

5.3.4 Relation entre Casoratien et indépendance linéaire de fonctions

Le premier théorème de ce paragraphe constitue un test d'indépendance de p fonctions ; le deuxième théorème donne deux critères d'indépendance de k fonctions *solutions* de l'équation (5.3.1).

Les résultats obtenus lors de l'étude des systèmes linéaires à coefficients réels, d'inconnues $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^r$, restent valables pour des systèmes linéaires à coefficients complexes, d'inconnues $\overrightarrow{x} \in \mathbb{C}^r$. De même pour les déterminants.

Théorème 5.3.1.

Soient $u_1(n)\,, u_2(n)\,, \dots, u_p(n)$ p fonctions définies pour $n \geq n_0$.
Si il existe $a \geq n_0$ tel que $W(a) \neq 0$, alors les p fonctions sont linéairement indépendantes.

Preuve

La preuve se fait par la contraposée : si les p fonctions sont linéairement dépendantes alors $W(n) = 0\,, \forall n \geq n_0$.

On suppose donc que les p fonctions sont linéairement dépendantes. Il existe alors p constantes $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \dots, \alpha_p$ non toutes nulles telles que :

$$\alpha_1\ u_1(n) + \alpha_2\ u_2(n) + \dots + \alpha_p\ u_p(n) = 0 \qquad \text{pour tout } n \geq n_0\,.$$

On a donc aussi pour tout $n \geq n_0$

$$\alpha_1\ u_1(n+1) + \alpha_2\ u_2(n+1) + \dots + \alpha_p\ u_p(n+1) = 0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\ u_1(n+p-1) + \alpha_2\ u_2(n+p-1) + \dots + \alpha_p\ u_p(n+p-1) = 0$$

Pour tout $n \geq n_0$, le système de p équations ci-dessus, dont les inconnues sont $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \dots, \alpha_p$, est linéaire, homogène et admet une solution non-triviale. Donc le déterminant associé $W(n)$ est non nul pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 5.3.10.

Soient les trois fonctions $f_1(n) = 1\,, f_2(n) = n$ et $f_3(n) = n^2$, on calcule $W(0)$.

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc les trois fonctions sont linéairement indépendantes.

Lorsqu'on considère k fonctions solutions de l'équation (5.3.1), leur Casoratien $W(n)$ peut être mis en relation avec $W(n_0)$.

Lemme 5.3.1.

Lemme d'Abel
Soient $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ k fonctions solutions de l'équation (5.3.1) et $W(n)$ leur Casoratien.
Alors pour tout $n \geq n_0$, on a

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0)$$

Preuve pour $k = 3$

Pour $k = 3$, l'équation (5.3.1) devient

$$y(n+3) + p_1(n)\ y(n+2) + p_2(n)\ y(n+1) + p_3(n)\ y(n) = 0$$

Soient $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$, trois solutions. Par définition du Casoratien, on a

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+3) & y_2(n+3) & y_3(n+3) \end{vmatrix}$$

Or $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$ vérifient l'équation, on a donc pour tout $1 \leq i \leq 3$

$$y_i(n+3) = -p_3(n)\ y_i(n) - [\ p_1(n)\ y_i(n+2) + p_2(n) y_i(n+1)\ ]$$

On utilise cette relation pour substituer $y_i(n+3)$ dans la dernière ligne de $W(n+1)$.
On obtient

$$W(n{+}1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ \begin{gathered} -\ p_3(n)\ y_1(n) - \\ -\ [\ p_1(n)\ y_1(n+2) + \\ +\ p_2(n) y_1(n+1)\ ] \end{gathered} & \begin{gathered} -\ p_3(n)\ y_2(n) - \\ -\ [\ p_1(n)\ y_2(n+2) + \\ +\ p_2(n) y_2(n+1)\ ] \end{gathered} & \begin{gathered} -\ p_3(n)\ y_3(n) - \\ -\ [\ p_1(n)\ y_3(n+2) + \\ +\ p_2(n) y_3(n+1)\ ] \end{gathered} \end{vmatrix}$$

En utilisant les propriétés des déterminants, il s'ensuit que

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_3(n)\ y_1(n) & -p_3(n)\ y_2(n) & -p_3(n)\ y_3(n) \end{vmatrix}$$

En permutant les lignes, on obtient

$$W(n+1) = -p_3(n)\ (-1)^2 \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix}$$

Finalement : $\quad W(n+1) = p_3(n)\ (-1)^3\ W(n)$

Cette relation est une équation aux différences linéaires, homogène du premier ordre. On obtient sa solution par itération étant donnée la condition initiale $W(n_0)$.

$$\begin{array}{lrcl} n = n_0 & W(n_0+1) & = & p_3(n_0)\ (-1)^3\ W(n_0) = \\ n = n_0+1 & W(n_0+2) & = & p_3(n_0+1)\ (-1)^3\ W(n_0+1) = \\ & & = & p_3(n_0+1)\ (-1)^3\ p_3(n_0)\ (-1)^3\ W(n_0) = \\ & & = & (-1)^{2\cdot 3}\ p_3(n_0+1)\ p_3(n_0)\ W(n_0) \\ & \vdots & & \end{array}$$

On conjecture pour tout $n \geq n_0$,

$$W(n) = W(n_0 + (n - n_0)) = (-1)^{3(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i)\ W(n_0)$$

La démonstration se fait par récurrence.

Le cas général peut être établi d'une manière analogue.

On tire le corollaire suivant de cette formule.

Corollaire 5.3.1.

Soient $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ k fonctions solutions l'équation (5.3.1).

$W(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si $W(n_0) \neq 0$.

Preuve

Elle est immédiate car l'équation étant d'ordre k, $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Théorème 5.3.2.

Soient $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ k fonctions solutions de l'équation (5.3.1) définies pour $n \geq n_0$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(a) Les k solutions sont linéairement indépendantes pour $n \geq n_0$.
(b) $W(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$.
(c) Il existe $a \geq n_0$ tel que $W(a) \neq 0$.

Preuve

- (c) $\Rightarrow$ (a) : c'est le théorème 5.2 appliqué aux k fonctions solutions.
- (b) $\Rightarrow$ (c) : évident.
- (a) $\Rightarrow$ (b) : on montre par la contraposée :
  s'il existe $a \geq n_0$ tel que $W(a) = 0$ alors les k fonctions sont linéairement dépendantes.

  Pour $a \geq n_0$, on considère le système de k équations, linéaire homogène suivant

$$\begin{array}{lllllll} y_1(a)\ C_1 & + & y_2(a)\ C_2 & + & \dots & + & y_k(a)\ C_k & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ y_1(a+k-1)\ C_1 & + & y_2(a+k-1)\ C_2 & + & \dots & + & y_k(a+k-1)\ C_k & = & 0 \end{array}$$

  dont $(C_1, C_2, \dots, C_k)$ constitue une solution.
  Ce système a pour déterminant $W(a)$ qui est nul par hypothèse, donc $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont non tous nuls.

  On considère la fonction
  $y(n) = C_1\ y_1(n) + C_2\ y_2(n) + \dots + C_k\ y_k(n)$ définie pour $n \geq n_0$.

  Alors $y(n)$ est aussi solution de l'équation (5.3.1) comme combinaison linéaire de solutions (preuve par substitution dans l'équation : voir le chapitre suivant).
  D'autre part, soit la fonction identiquement nulle $Y(n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.
  Elle est solution triviale de 5.3.1 car l'équation est homogène.
  D'autre part $y(n) = 0$ pour tout $0 \leq n \leq a + k - 1$, donc par le théoréme 5.1 $y(n) = Y(n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

  Ainsi $y(n) = C_1\ y_1(n) + C_2\ y_2(n) + \dots + C_k\ y_k(n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont non tous nuls.
  Les k fonctions sont donc linéairement dépendantes.

La double équivalence $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ est en conséquence prouvée.

Au vu du théorème 3, on peut énoncer un deuxième corollaire du lemme d'Abel, plus général.

Corollaire 5.3.2.
Soient $y_1(n)\,, y_2(n)\,, \ldots\,, y_k(n)$ k fonctions solutions de l'équation (5.3.1).

$W(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ si et seulement s'il existe $a \geq n_0$ tel que $W(a) \neq 0\,.$

Exemple 5.3.11.
Soit l'équation

$$y(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}\,y(n+1) + \frac{2n}{n-1}\,y(n) = 0$$

définie pour $n \geq 2\,.$

Elle est d'ordre 2 et admet $y_1(n) = n$ et $y_2(n) = 2^n$ comme solutions. On calcule

$$W(3) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Le théorème 3 permet d'affirmer

$$\begin{aligned} W(3) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad W(n) \neq 0 \quad \text{pour tout } n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad n \text{ et } 2^n \text{ sont linéairement indépendantes pour } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

5.3.5 L'espace vectoriel des solutions. Ensemble fondamental de solutions

Etant donné une équation de type (5.3.1), l'ensemble V des solutions constituent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Le but de ce paragraphe est de le montrer et en déduire finalement la structure de la solution générale de l'équation (5.3.1).

On munit V des deux lois d'addition et de multiplication par un scalaire suivantes

- $$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (y\,;\,y') &\longmapsto y + y' \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{C} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda\,;\,y) &\longmapsto \lambda\,y \end{aligned}$$

Ces deux lois sont stables ; on le montre pour l'addition.

Soient $y(n)\,,y'(n)\in V$; il s'agit de montrer que $(y+y')(n)$ vérifie l'équation (5.3.1).

$$\begin{aligned}
&(y+y')(n+k)+p_1(n)\ (y+y')(n+k-1)+\ \dots\ +p_k(n)\ (y+y')(n)=\\
&=\ y(n+k)+p_1(n)\ y(n+k-1)+\ \dots\ +p_k(n)\ y(n)+\\
&\quad +y'(n+k)+p_1(n)\ y'(n+k-1)+\ \dots\ +p_k(n)\ y'(n)=\\
&=\ 0+0=0
\end{aligned}$$

car $y(n)$ et $y'(n)$ vérifient l'équation (5.3.1).

De plus, il est aisé de montrer que ces deux lois vérifient les 8 axiomes caractérisant un espace vectoriel.

Ainsi V est un espace vectoriel dont on va donner une base. Ce qui consiste à montrer qu'il existe une famille maximale génératrice de solutions linéairement indépendantes de l'équation (5.3.1).

5.3.5.1 Famille maximale linéairement indépendante

Lemme 5.3.2.

Soient k solutions de l'équation (5.3.1) ; elles sont soit linéairement dépendantes, soit linéairement indépendantes.

Preuve pour $k=3$

Soient $y_1(n)\,,y_2(n)\,,y_3(n)$ trois solutions de l'équation (5.3.1) d'ordre 3.
Donc pour tout $n\geq n_0$

$$\begin{aligned}
y_1(n+3)+p_1(n)\ y_1(n+2)+p_2(n)\ y_1(n+1)+p_3(n)\ y_1(n) &= 0\\
y_2(n+3)+p_1(n)\ y_2(n+2)+p_2(n)\ y_2(n+1)+p_3(n)\ y_2(n) &= 0\\
y_3(n+3)+p_1(n)\ y_3(n+2)+p_2(n)\ y_3(n+1)+p_3(n)\ y_3(n) &= 0
\end{aligned}$$

D'où pour $i=1\,,2\,,3$ on a

$$y_i(n)=-\ \frac{y_i(n+3)}{p_3(n)}\ -\ \frac{p_1(n)}{p_3(n)}\ y_i(n+2)\ -\ \frac{p_2(n)}{p_3(n)}\ y_i(n+1)$$

($p_3(n)\neq 0$ pour tout $n\geq n_0$ car l'ordre de l'équation est 3)

Pour tester la dépendance ou l'indépendance, on forme

$\alpha\ y_1(n)+\beta\ y_2(n)+\gamma\ y_3(n)=0$

et aussi

$$\begin{aligned}
\alpha\ y_1(n+1)+\beta\ y_2(n+1)+\gamma\ y_3(n+1) &= 0\\
\alpha\ y_1(n+2)+\beta\ y_2(n+2)+\gamma\ y_3(n+2) &= 0
\end{aligned}$$

Ce système linéaire homogène a-t-il des solutions en α, β, γ ?
On calcule

$$\begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{y_1(n+3)}{p_3(n)} - \\ -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_1(n+2) - \\ -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_1(n+1) \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{y_2(n+3)}{p_3(n)} - \\ -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_2(n+2) - \\ -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_2(n+1) \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{y_3(n+3)}{p_3(n)} - \\ -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_3(n+2) - \\ -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_3(n+1) \end{matrix} \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{y_1(n+3)}{p_3(n)} & -\frac{y_2(n+3)}{p_3(n)} & -\frac{y_3(n+3)}{p_3(n)} \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_1(n+2) & -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_2(n+2) & -\frac{p_1(n)}{p_3(n)}\, y_3(n+2) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_1(n+1) & -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_2(n+1) & -\frac{p_2(n)}{p_3(n)}\, y_3(n+1) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix}$$

Les deux derniers déterminants sont nuls car ils contiennent deux lignes proportionnelles. En ce qui concerne le premier, on ne peut rien conclure quant à sa nullité ; en conséquence les 3 solutions peuvent être linéairement indépendantes ou non.

Lemme 5.3.3.

Soient $k+1$ solutions de l'équation (5.3.1) ; elles sont toujours linéairement dépendantes.

Preuve pour $k = 3$

Soient $y_1(n)\,,y_2(n)\,,y_3(n)\,,y_4(n)$ quatre solutions de l'équation (5.3.1) d'ordre 3.
Donc pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
y_1(n+3)+p_1(n)\ y_1(n+2)+p_2(n)\ y_1(n+1)+p_3(n)\ y_1(n) &= 0\\
y_2(n+3)+p_1(n)\ y_2(n+2)+p_2(n)\ y_2(n+1)+p_3(n)\ y_2(n) &= 0\\
y_3(n+3)+p_1(n)\ y_3(n+2)+p_2(n)\ y_3(n+1)+p_3(n)\ y_3(n) &= 0\\
y_4(n+3)+p_1(n)\ y_4(n+2)+p_2(n)\ y_4(n+1)+p_3(n)\ y_4(n) &= 0
\end{aligned}$$

Pour tester la dépendance linéaire on forme

$\alpha\ y_1(n)+\beta\ y_2(n)+\gamma\ y_3(n)+\delta\ y_4(n)=0$
et aussi

$$\begin{aligned}
\alpha\ y_1(n+1)+\beta\ y_2(n+1)+\gamma\ y_3(n+1)+\delta\ y_4(n+1) &= 0\\
\alpha\ y_1(n+2)+\beta\ y_2(n+2)+\gamma\ y_3(n+2)+\delta\ y_4(n+2) &= 0\\
\alpha\ y_1(n+3)+\beta\ y_2(n+3)+\gamma\ y_3(n+3)+\delta\ y_4(n+3) &= 0
\end{aligned}$$

Ce système linéaire homogène a-t-il des solutions en $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$?
On calcule

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix}
y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) & y_4(n)\\
y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) & y_4(n+1)\\
y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) & y_4(n+2)\\
y_1(n+3) & y_2(n+3) & y_3(n+3) & y_4(n+3)
\end{vmatrix}$$

Or pour $i = 1\,,2\,,3\,,4$ on a

$$y_i(n+3) = -p_1(n)\ y_i(n+2) - p_2(n)\ y_i(n+1) - p_3(n)\ y_i(n)$$

Par substitution dans la 4ième ligne du déterminant Δ on obtient

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix}
y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) & y_4(n)\\
y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) & y_4(n+1)\\
y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) & y_4(n+2)\\
-\ p_1(n)\ y_1(n+2) & -\ p_1(n)\ y_2(n+2) & -\ p_1(n)\ y_3(n+2) & -\ p_1(n)\ y_4(n+2)
\end{vmatrix} \;+$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) & y_4(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) & y_4(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) & y_4(n+2) \\ -\ p_2(n)\ y_1(n+1) & -\ p_1(n)\ y_2(n+1) & -\ p_2(n)\ y_3(n+1) & -\ p_4(n)\ y_4(n+1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) & y_4(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) & y_4(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) & y_4(n+2) \\ -\ p_3(n)\ y_1(n) & -\ p_3(n)\ y_2(n) & -\ p_3(n)\ y_3(n) & -\ p_3(n)\ y_4(n) \end{vmatrix} = 0$$

car chacun de ces déterminants possède deux lignes proportionnelles, donc est nul. Il en résulte que le système a une infinité de solutions ; les 4 solutions sont dépendantes pour tout $n \geq n_0$.

On déduit des lemmes 3 et 4 que k est le nombre maximal de solutions linéairement indépendantes.

5.3.5.2 Construction d'une base de l'espace vectoriel des solutions

On considère k entiers consécutifs $n_0\,, n_0+1\,,\ \ldots\ , n_0+k-1$; il existe certainement k solutions $y_1(n)\,,\ y_2(n)\,,\ \ldots\ ,\ y_k(n)$ de l'équation (5.3.1) qui prenne les valeurs suivantes sur ces k entiers

- $y_i(n_0+i-1) = 1$ pour $1 \leq i \leq k$
  c'est-à-dire $y_1(n_0) = y_2(n_0+1) = y_3(n_0+2) = \ \ldots\ = y_k(n_0+k-1) = 1\,,$
- les y_i valent zéro en tout autre entier.

Plus précisément

- pour $i = 1$, on définit y_1 ainsi
  $y_1(n_0) = 1$
  $y_1(n_0+1) = y_1(n_0+2) = \ \ldots\ldots\ = y_1(n_0+k-1) = 0$
- pour $i = 2$, on définit y_2 ainsi
  $y_2(n_0+1) = 1$
  $y_1(n_0) = y_2(n_0+2) = y_2(n_0+3) = \ \ldots\ldots\ = y_1(n_0+k-1) = 0$

  $\vdots$
- pour $i = k$, on définit y_k ainsi
  $y_2(n_0+k-1) = 1$
  $y_1(n_0) = y_2(n_0+1) = y_2(n_0+2) = \ \ldots\ldots\ = y_1(n_0+k-2) = 0$

Ces k solutions sont toutes distinctes car par le théorème 1, prises 2 à 2, elles ne prennent pas les mêmes valeurs sur k entiers consécutifs.

Le Casoratien $W(n_0)$ de ces k solutions coïncide avec le déterminant de la matrice unité et vaut donc 1. Ce déterminant étant différent de zéro, par le théorème 3 $(a = n_0)$ on en déduit que les k solutions sont linéairement indépendantes. De plus par les lemmes 3 et 4 elles constituent une famille maximale.

Il reste à montrer que $y_1(n)\,, y_2(n)\,,\ \ldots.\ , y_k(n)$ est une famille génératrice.

Soit $y(n)$ une solution quelconque de l'équation (5.3.1) ; on va prouver qu'il existe des constantes $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ ,\ a_k \in \mathbb{C}$ telles que

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i\ y_i(n)$$

Cette relation a aussi lieu pour $n+1\,,\ \ldots\ ,\ n+k-1$:

$$y(n+1) = \sum_{i=1}^{k} a_i\ y_i(n+1)$$

$$\vdots$$

$$y(n+k-1) = \sum_{i=1}^{k} a_i\ y_i(n+k-1)$$

Ces k relations s'écrivent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+k-1) \end{pmatrix} = Y(n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

où $$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}$$

et on sait, par construction, que $W(n_0) = 1 \neq 0$; on en déduit par le corollaire 1 du lemme d'Abel du paragraphe 5.3.4 :

$$W(n) = \det Y(n) \neq 0 \qquad \text{pour tout } n \geq n_0$$

et $Y(n)$ est inversible pour tout $n \geq n_0$. L'équation matricielle devient

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = Y^{-1}(n) \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+k-1) \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve l'existence des a_i.

En conclusion $(y_1(n), \ y_2(n), \ \ldots \ , \ y_k(n))$ constitue une base de V, qui est donc de dimension k.

La dimension de V étant k, toute base de V est une famille de k solutions linéairement indépendantes.

Définition 5.3.4.

Toute base de V est appelée *système fondamental* de solutions de l'équation (5.3.1).

A ce stade, on est en mesure de donner la structure de la solution générale $y(n)$ de l'équation (5.3.1) lorsque $(y_1(n), \ y_2(n), \ \ldots \ , \ y_k(n))$ est un système fondamental :

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \ y_i(n) \qquad \text{pour toutes constantes } a_1, \ldots, \ a_k \in \mathbb{C}$$

Exemple 5.3.12.

Exprimer la solution générale de l'équation d'ordre 2 $y(n+2)+y(n) = 0$ sachant que $(\cos n\frac{\pi}{2} \, ; \ \sin n\frac{\pi}{2})$ est un système fondamental

$y(n) = \ a_1 \ \cos n\frac{\pi}{2} \ + \ a_2 \ \sin n\frac{\pi}{2} \qquad a_1 , \ a_2 \in \mathbb{C}$

On vérifie que $(\cos n\frac{\pi}{2} \, ; \ \sin n\frac{\pi}{2})$ est un système fondamental.

Il suffit de calculer

$$W(0) = \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$W(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(n) \neq 0 \quad$ pour tout $n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos n\frac{\pi}{2} , \ \sin n\frac{\pi}{2}$ sont linéairement indépendants

Chapitre 6

Cas particulier : construction d'un ensemble fondamental de solutions des équations aux différences linéaires

6.1 Equation homogène

On considère l'équation aux différences d'ordre k suivante

$$y(n+k) \; + \; p_1 \, y(n+k-1) \; + \; p_2 \, y(n+k-2) \; + \; ... \; + \; p_k \, y(n) = 0 \tag{6.1.1}$$

où $p_i \in \mathbb{C}\,, p_k \neq 0\,, y(n)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $n \geq n_0\,.$

Le but est de déterminer un ensemble fondamental de k solutions ainsi que la solution générale de cette équation.

On suppose dans un premier temps que les solutions sont de la forme $y(n) = \lambda^n$ où λ est un nombre complexe non nul ($y(n) = 0$ ne peut pas appartenir à l'ensemble fondamental car les solutions doivent être linéairement indépendantes).

On substitue $y(n) = \lambda^n$ dans l'équation (6.1.1).

$$\lambda^{n+k} \; + \; p_1 \, \lambda^{n+k-1} \; + ... \; + \; p_k \, \lambda^n \; = 0$$

En simplifiant par $\lambda^n \neq 0$, on obtient l'équation

$$\lambda^{k} \; + \; p_1 \, \lambda^{k-1} \; + ... \; + \; p_k \; = 0 \tag{6.1.2}$$

appelée *équation caractéristique* de 6.1.1 et dont les racines, réelles ou non réelles, sont appelées les *racines caractéristiques*. On note $\lambda_1, \; \lambda_2, \; ... \lambda_r,$ les racines distinctes de (6.1.2). Elles sont d'ordre de multiplicité respectivement $m_1, m_2, \; ... \, , m_r$ tels $\sum_{i=1}^{r} \, m_i =$

k. L'ordre de (6.1.1) étant k, $p_k \neq 0$ et donc aucune racine caractéristique est nulle.

On réécrit (6.1.1) à l'aide de l'opérateur E (et en négligeant l'opérateur I), ce qui donne

$E^k y(n) \ + \ p_1 \ E^{k-1} y(n) \ + \ ... \ + p_k \ y(n) = 0$

$\Longleftrightarrow$

$(E^k \ + \ p_1 \ E^{k-1} \ + \ ... \ + \ p_k) \ y(n) = 0$

$\Longleftrightarrow$

$$p(E) \ y(n) = 0 \tag{6.1.3}$$

où $p(E)$ est un polynôme en E de degré k.

On remarque que $p(E)$ admet les mêmes racines que (6.1.2), d'où la décomposition en facteurs irréductibles (qui commutent)

$p(E) \ = \ (E - \lambda_1)^{m_1} \ (E - \lambda_2)^{m_2} \ ... \ (E - \lambda_r)^{m_r}$

L'équation (6.1.3) peut donc s'écrire ainsi

$$(E - \lambda_1)^{m_1} \ (E - \lambda_2)^{m_2} \ ... \ (E - \lambda_r)^{m_r} \ y(n) = 0 \tag{6.1.4}$$

Pour i fixé, $1 \leq i \leq r$, on considère l'équation aux différences d'ordre m_i suivante

$(E - \lambda_i)^{m_i} \ y(n) = 0$

Elle possède m_i solutions notées $\varphi_1(n), \ ... \ , \varphi_{m_i}(n)$. Soit $\varphi_s(n)$ une de ces solutions ; on montre que $\varphi_s(n)$ est aussi solution de (6.1.1).

On évalue le premier membre de (6.1.4) en $\varphi_s(n)$:

$(E - \lambda_1)^{m_1} \ (E - \lambda_2)^{m_2} \ ... \ (E - \lambda_i)^{m_i} \ ... \ (E - \lambda_r)^{m_r} \ \varphi_s(n) =$

$= \ \left[\ (E - \lambda_1)^{m_1} \ (E - \lambda_2)^{m_2} \ ... \ (E - \lambda_r)^{m_r} \ \right] \ \left[\ (E - \lambda_i)^{m_i} \ \varphi_s(n) \ \right] \ = \ 0$

Connaissant un ensemble fondamental G_i de solutions pour chaque équation $(E - \lambda_i)^{m_i} \ y(n) = 0$, on va montrer que leur réunion $\bigcup_{i=1}^{r} \ G_i$ est un ensemble fondamental de (6.1.1).

Deux cas se présentent

- le polynôme caractéristique admet k racines distinctes λ_i ;
  donc $r = k$ et $m_i = 1, \ 1 \leq i \leq k$,
- le polynôme caractéristique admet r racines distinctes d'ordre de multiplicité $m_1, ..., m_r$.

CAS 1

L'équation (6.1.4) s'écrit

$$(E-\lambda_1)\ (E-\lambda_2)\ ...\ (E-\lambda_k)\ y(n)=0 \tag{6.1.5}$$

Il est évident que $(E-\lambda_i)\ y(n)=0,\ i=1,...,k$ est une équation aux différences d'ordre 1.

Elle s'écrit

$$(E-\lambda_i)\ y(n)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(n+1)-\lambda_i\ y(n)=0$$

Elle admet comme solution $y(n)=\lambda_i^n$ car

$$\lambda_i^n(\lambda_i-\lambda_i)=0$$

Donc $G_i=\{\lambda_i^n\}$ est un ensemble fondamental de solution de l'équation (6.1.5).

Il reste à montrer que $G=\bigcup_{i=1}^k G_i=\{\lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ ...\ ,\lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (6.1.1).

Pour cela il suffit de montrer que $W(0)\neq 0$. On calcule donc le *Casoratien* d'ordre k suivant

$$W(n)\ =\ \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{vmatrix}$$

En posant $n=0$, on obtient un déterminant de type Vandermonde.

$$W(0)\ =\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

dont on montre facilement que son développement est

$$W(0)\ =\ \prod_{1\leq i<j\leq k}(\lambda_j-\lambda_i)\ \neq\ 0 \quad \text{car} \quad \lambda_i\neq\lambda_j\neq 0$$

La solution générale de l'équation (6.1.1) est

$$y(n)=\sum_{i=1}^{k}\ C_i\ \lambda_i^n \qquad\qquad C_i\in\mathbb{C}\,,\quad \lambda_i\in\mathbb{C}^*$$

Exemple 6.1.1.

On considère l'équation d'ordre 3 suivante

$$y(n+3) - 6\ y(n+2) + 11\ y(n+1) - 6\ y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Les trois racines caractéristiques sont distinctes donc $y_1(n) = 1$, $y_2(n) = 2^n$, $y_3(n) = 3^n$ sont des solutions particulières. Autrement dit $G = \{1\,, 2^n\,, 3^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions et la solution générale est

$$y(n) = C_1 + C_2\ 2^n + C_3\ 3^n\,, \quad C_i \in \mathbb{C}$$

Exemple 6.1.2.

On considère l'équation d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) + i\ y(n+1) + 2y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$\lambda^2 + +i\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - i)(\lambda + 2i) = 0$$

Les deux racines caractéristiques sont distinctes.

Elle a comme solutions particulières $y_1(n) = i^n$ et $y_2(n) = (-2i)^n = (-1)^n\ (2i)^n$.

L'ensemble fondamental est $G = \{i^n\,, (-1)^n\ (2i)^n\}$

et la solution générale est $y(n) = C_1\ i^n + C_2\ (-1)^n\ (2i)^n\,, \quad C_1\,, C_2 \in \mathbb{C}$.

CAS 2

Avant de développer ce deuxième cas, quelques rappels et compléments sur l'opérateur E sont nécessaires.

1) $E(u\ v) = Eu\ Ev$ où u et v sont des fonctions de n.

Preuve

$E((uv)(n)) = (uv)(n+1) = u(n+1)\ v(n+1) = Eu(n)\ Ev(n)$

2) $(b\ E)^k = b^k\ E^k\,, \qquad b \in \mathbb{C}\,,\ k \in \mathbb{N}$

Preuve

- vrai pour $k = 1$ car
$$\begin{aligned} (b\ E)u(n) &= (E + E + ... + E)u(n) = \\ &= Eu(n) + Eu(n) + ... + Eu(n) = \\ &= b\ Eu(n) \end{aligned}$$
- On suppose vrai pour k
- On évalue en $k+1$
$$\begin{aligned} (b\ E)^{k+1}u(n) &= (b\ E)((b\ E)^k u(n)) &&= (b\ E)(b^k\ E^k u(n)) = \\ &= (b\ E)(b^k\ u(n+k)) &&= b^k\ (b\ E)u(n+k) = \\ &= \quad b^{k+1}\ E^{k+1}u(n) \end{aligned}$$

3) Si $p(E) = \sum_{i=0}^k a_i\ E^i$ est un polynôme en E de degré k,
alors
$p(E)\ (b^n\ g(n)) = b^n\ p(b\ E)\ g(n) \qquad b \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Preuve
$$\begin{aligned} p(E)\ (b^n\ g(n)) &= (\ \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ E^i\ )\ (b^n\ g(n)) &&= \textstyle\sum_{i=0}^k\ (a_i\ E^i\ )\ (b^n\ g(n)) = \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ E^i b^n\ E^i g(n) &&= \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ b^{n+i}\ E^i g(n)\ = \\ &= b^n\ \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ b^i\ E^i g(n) &&= b^n\ \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ (b\ E)^i g(n) = \\ &= b^n\ (\ \textstyle\sum_{i=0}^k\ a_i\ (b\ E)^i\ )g(n) &&= b^n\ p(b\ E)\ g(n) \end{aligned}$$

4) La propriété 3 s'applique dans le cas particulier où $p(E) = (E - \lambda)^k$. On obtient
$(E - \lambda)^k\ (b^n g(n)) = b^n\ (bE - \lambda)^k\ g(n)$

Preuve
$$\begin{aligned} (E-\lambda)^k\ (b^n g(n)) &= (\ \textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^i\ C_k^i\ \lambda^i\ E^{k-i}\ )\ (b^n g(n)) &= \\ &= (\ \textstyle\sum_{i=0}^k\ \alpha_i\ E^{k-i}\ )(b^n g(n)) &= \\ &= p(E)(b^n\ g(n))\ =\ b^n\ p(bE)\ g(n) &= \\ &= b^n\ (\ \textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^i\ C_k^i\ \lambda^i\ (bE)^{k-i}\ )\ g(n) &= \\ &= b^n\ (bE - \lambda)^k\ g(n) \end{aligned}$$

On reprend l'équation (6.1.4).

$$(E - \lambda_1)^{m_1}\ (E - \lambda_2)^{m_2}\ ...\ (E - \lambda_r)^{m_r}\ y(n) = 0$$

L'idée est de déterminer dans un premier temps, pour i fixé et $1 \le i \le r$, un ensemble fondamental G_i de m_i solutions de l'équation d'ordre $m_i > 1$ suivante

$$(E-\lambda_i)^{m_i}\ y(n)=0 \tag{6.1.6}$$

On suppose que les solutions sont du type $y(n)=\lambda_i^n\ v(n)$ et on cherche à déterminer m_i fonctions $v(n)$.
Ces solutions vérifient l'équation (6.1.6) et en utilisant les points 4 et 2 précédants on obtient

$$(E-\lambda_i)^{m_i}\ \lambda_i^n\ v(n)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_i^n\ (\lambda_i\ E-\lambda_i)^{m_i}\ v(n)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_i^n\ \lambda_i^{m_i}\ (E-I)^{m_i}\ v(n)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_i^{n+m_i}\ \Delta^{m_i}\ v(n)=0 \tag{6.1.7}$$

L' équation (6.1.7) est vérifiée par tout polynôme en n de degré strictement inférieur à m_i (voir le paragraphe 2.3, propriété 4). On peut donc choisir pour $v(n)$ les m_i polynômes

$$1,\ n,\ n^2,\ n^3,\ ...\ ,\ n^{m_i-1}$$

D'où un ensemble de solutions pour l'équation (6.1.4)

$$G_i\ =\ \{\ \lambda_i^n,\ \ n\ \lambda_i^n,\ \ n^2\ \lambda_i^n,\ \ n^3\ \lambda_i^n,\ ....\ ,\ \ n^{m_i-1}\ \lambda_i^n\ \}$$

Il faut vérifier que ces solutions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que $W(0)\neq 0$.
On calcule donc le *Casoratien* d'ordre m_i suivant

$$W(n)\ =\ \begin{vmatrix} \lambda_i^n & n\lambda_i^n & \dots & n^{m_i-1}\ \lambda_i^n \\ \lambda_i^{n+1} & (n+1)\lambda_i^{n+1} & \dots & (n+1)^{m_i-1}\ \lambda_i^{n+1} \\ \lambda_i^{n+2} & (n+2)\lambda_i^{n+2} & \dots & (n+2)^{m_i-1}\ \lambda_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n+m_i-1} & (n+m_i-1)\lambda_i^{n+m_i-1} & \dots & (n+m_i-1)^{m_i-1}\ \lambda_i^{n+m_i-1} \end{vmatrix}$$

En posant $n=0$, on obtient le déterminant suivant

$$W(0)\ =\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i & \dots & \lambda_i \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i^2 & \dots & 2^{m_i-1}\lambda_i^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & (m_i-1)\lambda_i^{m_i-1} & \dots & (m_i-1)^{m_i-1}\lambda_i^{m_i-1} \end{vmatrix}\ =$$

$$= \lambda_i \;\; \lambda_i^2 \; \dots \; \lambda_i^{m_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{m_i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (m_i-1) & (m_i-1)^2 & \dots & (m_i-1)^{m_i-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_i \;\; \lambda_i^2 \; \dots \; \lambda_i^{m_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{m_i-1} \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^{m_i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m_i-1) & (m_i-1)^2 & \dots & (m_i-1)^{m_i-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m_i-1) \;\cdot\; \lambda_i \;\; \lambda_i^2 \; \dots \; \lambda_i^{m_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{m_i-2} \\ 1 & 3 & \dots & 3^{m_i-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (m_i-1) & \dots & (m_i-1)^{m_i-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \; (m_i-1)! \; \lambda_i \;\; \lambda_i^2 \; \dots \; \lambda_i^{m_i-1} \prod_{1 \le i < j \le m_i-2} (\alpha_j - \alpha_i) \; \neq \; 0$$

en posant $\alpha_1 = 1\,,\ \alpha_2 = 2\,,\ \dots,\ \alpha_{m_i-1} = m_i - 1$

Ainsi G_i est un ensemble fondamental de solutions de l'équation $(E-\lambda_i)^{m_i}\, y(n) = 0$. Il est donc aussi un ensemble de solutions de l'équation (6.1.1).

Il reste à montrer que la réunion des ensembles G_i est un ensemble fondamental de solutions de (6.1.1).

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i = \{\, \lambda_1^n,\ n\,\lambda_1^n,\ \dots,\ n^{m_1-1}\,\lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ n\,\lambda_2^n,\ \dots,\ n^{m_2-1}\,\lambda_2^n,\ \dots,\ \dots,\ \lambda_r^n,\ n\,\lambda_r^n,\ \dots,\ n^{m_r-1}\,\lambda_r^n \,\}$$

Il faut vérifier que ces k solutions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que $W(0) \neq 0$.
On calcule donc le *Casoratien* d'ordre k suivant

$$W(n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^n & \dots & \lambda_i^n & \dots & \dots & n^{m_r-1}\ \lambda_r^n \\ \lambda_1^{n+1} & (n+1)\lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_i^{n+1} & \dots & \dots & (n+1)^{m_r-1}\ \lambda_r^{n+1} \\ \lambda_1^{n+2} & (n+2)\lambda_1^{n+2} & \dots & \lambda_i^{n+2} & \dots & \dots & (n+2)^{m_r-1}\ \lambda_r^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & (n+k-1)\lambda_1^{n+k-1} & \dots & \lambda_i^{n+k-1} & \dots & \dots & (n+k-1)^{m_r-1}\ \lambda_r^{n+k-1} \end{vmatrix}$$

En posant $n = 0$ on obtient le déterminant suivant qui est un déterminant de Vandermonde généralisé (voir annexe A).

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & \dots & \lambda_i^2 & \dots & 2^{m_r-1}\ \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_i^{k-1} & \dots & (k-1)^{m_r-1}\ \lambda_r^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \ \left[\prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=0}^{m_i-1} j! \right) \right] \times \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{\binom{m_i}{2}} \times \prod_{1\leq i<j\leq r} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_i m_j} \quad \neq \quad 0$$

D'ou la solution générale de (1)

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \ \lambda_i^n \ (a_{i0} + a_{i1}\ n + a_{i2}\ n^2 + ... + a_{i,m_i-1}\ n^{m_i-1})$$

les a_{ij} étant des constantes dans $\mathbb{C}$.

Exemple 6.1.3.

On considère l'équation d'ordre 3 suivante

$$y(n+3) - 2y(n+2) - 15y(n+1) + 36y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-3)^2(\lambda+4) = 0$$

Les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 3$ d'ordre de multiplicité $m_1 = 2$
$\lambda_2 = -4$ d'ordre de multiplicité $m_2 = 1$

Les solutions particulières sont $y_1(n) = 3^n$, $y_2(n) = n3^n$, $y_3(n) = (-4)^n$ et la solution générale est

$$y(n) = C_1 \ 3^n + C_2 \ n3^n + C_3 \ (-4)^n \qquad C_i \in \mathbb{C}$$

Exemple 6.1.4.

On considère l'équation d'ordre 5 suivante

$$(E-3)^3 \ (E^2 + 2E + 5)y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$(\lambda - 3) \ (\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)^3 \ (\lambda + 1 - 2i) \ (\lambda + 1 + 2i) = 0$$

Les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 3$ d'ordre de multiplicité $m_1 = 3$
$\lambda_2 = -1 + 2i$ d'ordre de multiplicité $m_2 = 1$
$\lambda_3 = -1 - 2i$ d'ordre de multiplicité $m_3 = 1$

Les solutions particulières sont $y_1(n) = 3^n$, $y_2(n) = n3^n$, $y_3(n) = n^2 \ 3^n$,
$y_4(n) = (-1+2i)^n$, $y_5(n) = (-1-2i)^n$, et la solution générale est

$$y(n) = 3^n \ (C_1 + C_2 \ n + C_3 \ n^2) + (C_4 \ (-1+2i)^n + C_5 \ (-1-2i)^n \qquad C_i \in \mathbb{C}$$

Exemple 6.1.5.

On considère l'équation d'ordre 4 suivante

$$y(n+4) + 2y(n+2) + y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

Les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = i$ d'ordre de multiplicité $m_1 = 2$
$\lambda_2 = -i$ d'ordre de multiplicité $m_2 = 2$

d'où quatre solutions particulières

$y_1(n) = i^n\,, \qquad y_2(n) = ni^n$
$y_3(n) = (-i)^n\,, \quad y_4(n) = n(-i)^n$

La solution générale est

$$y(n) = C_1\ i^n + C_2 n i^n + C_3\ (-i)^n + C_4\ n(-i)^n \qquad C_i \in \mathbb{C}$$

6.2 Equation non homogène

On considère l'équation non homogène suivante

$$y(n+k) + p_1\ y(n+k-1) + p_2\ y(n+k-2) + ... + p_k\ y(n) = g(n) \tag{6.2.1}$$

On constate que l'ensemble des solutions de l'équation (6.2.1) n'est pas un espace vectoriel.

Il suffit pour le vérifier de montrer par un contre-exemple qu'il n'y a pas stabilité. Autrement dit, si $y_1(n)$ et $y_2(n)$ sont des solutions particulières, on montre que $y_2(n) - y_1(n)$ n'est pas solution.

Soit l'équation d'ordre 2 suivante

$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 3^n$

dont $y_1(n) = \frac{1}{2}\ 3^n$ et $y_2(n) = \frac{1}{2}\ (2^n + 3^n)$ sont des solutions particulières (on peut le vérifier par substitution).

On calcule $y_2(n) - y_1(n) = \frac{1}{2}\ 2^n$ et on remplace dans l'équation, on obtient

$\frac{1}{2}\ 2^{n+2} - 3\ \frac{1}{2}\ 2^{n+1} + 2\ \frac{1}{2}\ 2^n = 0 \neq 3^n$

On constate que $y_2(n) - y_1(n)$ est une solution de l'équation homogène associée. D'où le théorème suivant.

Théorème 6.2.1.

Si $y_1(n)$ et $y_2(n)$ sont des solutions particulières de l'équation (6.2.1)
alors
$y_1(n) - y_2(n)$ est une solution de l'équation homogène associée.

Preuve

Immédiate par substitution

On peut alors énoncer le théorème qui permet de donner la structure générale de la solution d'une équation non homogène.

Théorème 6.2.2.

Toute solution $y(n)$ de l'équation (6.2.1) peut s'écrire comme la somme d'une solution particulière $y_p(n)$ et d'une solution $y_h(n)$ du système homogène associé, c'est-à-dire

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Preuve

Soit $\{y_1(n)\,, y_2(n)\,, ...\,, y_k(n)\}$ un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène associée. Toute solution de cette équation s'écrit

$$y_h(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(n)$$

Par le théorème précédent, $y(n) - y_p(n)$ est une solution du système homogène. Donc $y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(n)$ pour un certain choix des constantes.

Par définition

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(n)$$

est appelée la *solution générale* de l'équation (6.2.1).

Pour la déterminer on doit donc chercher un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène associée et une solution particulière de l'équation inhomogène.

On dispose de plusieurs méthodes pour déterminer une solution particulière, par exemple

- la méthode de variation des constantes (ou variation des paramètres),
- une méthode utilisant un opérateur,
- la méthode des coefficients indéterminés.

On va illustrer la méthode des coefficients indéterminés à l'aide de quelques exemples dans le cas d'équations d'ordre 2. Cette méthode est efficace lorsque $g(n)$ est une combinaison linéaire de termes du type $a^n\,, \sin bn\,, \cos bn$ ou n^k.

Exemple 6.2.1.

On considère l'équation d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) - 3\ y(n+1) + 2\ y(n) = 3^n$$

L'équation homogène associée a pour équation caractéristique :

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, d'où les 2 solutions : $y_1(n) = 1$ et $y_2(n) = 2^n$. La solution générale est donc

$$y(n) = C_1 + C_2\ 2^n$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(n) = A\ 3^n$ où A est un coefficient constant à déterminer.
Donc, si A existe, on a :

$$\begin{array}{rcll} 3^n & = & x_p(n+2) - 3\ x_p(n+1) + 2\ x_p(n) & = \\ & = & A\ 3^{n+2} - 3A\ 3^{n+1} + 2\ A\ 3^n & = \\ & = & 2\ A\ 3^n & \end{array}$$

D'où $A = \frac{1}{2}$ et $x_p(n) = \frac{1}{2}\ 3^n$ est une solution particulière. La solution générale est

$$y(n) = C_1 + C_2\ 2^n + \tfrac{1}{2}\ 3^n$$

Exemple 6.2.2.

On reprend l'équation de l'exemple 1 en posant $g(n) = a^n$ c'est-à-dire

$$y(n+2) - 3\ y(n+1) + 2\ y(n) = a^n \quad \Leftrightarrow \quad p(E) = g(n)$$

On veut déterminer si une solution particulière de la forme $y_p(n) = A\ a^n$ existe toujours.

En remplaçant dans l'équation on obtient

$$\begin{array}{rcll} a^n & = & y_p(n+2) - 3\ y_p(n+1) + 2\ y_p(n) & = \\ & = & A\ a^{n+2} - 3A\ a^{n+1} + 2\ A\ a^n & = \\ & = & A\ a^n\ (a-1)(a-2) & \end{array}$$

D'où $A = \frac{1}{(a-1)(a-2)}$ si $a \neq 1$ et 2,

c'est-à-dire

$y_p(n) = \frac{1}{(a-1)(a-2)}\ a^n$ si a n'est pas une racine de l'équation caractéristique.

Que se passe-t-il si $a = 1$ ou $a = 2$?

Dans ce cas la solution particulière ne peut pas être du type $\alpha\ a^n$. Car par exemple si $a = 2$, la solution générale s'écrit $y(n) = C_1 + C_2\ 2^n + \alpha\ 2^n = C_1 + C_2'\ 2^n$ ce qui est la solution de l'équation homogène $p(E) = 0$ et non de $p(E) = g(n)$.

On suppose que alors que la solution particulière est du type $y_p(n) = A\ n\ a^n$.

En remplaçant dans l'équation on obtient

$A\ (n+2)\ a^{n+2} - 3A\ (n+1)\ a^{n+1} + 2A\ n\ a^n = a^n$

$\Longleftrightarrow$

$A\ (\ n(a^2 - 3a + 2) + a(2a-3)\ ) = 1$

Or $a^2 - 3a + 2 = 0$ car a est racine de l'équation caractéristique. D'où

$A = \frac{1}{a(2a-3)}$ et $y_p(n) = \frac{1}{a(2a-3)}\ n\ a^n$ avec $a = 1$ ou 2.

Exemple 6.2.3.
On considère l'équation d'ordre 2 suivante

$$8\ y(n+2) - 6\ y(n+1) + y(n) = 5\ \sin n\frac{\pi}{2}$$

dont on veut déterminer une solution particulière.

On suppose que cette solution est du type $y_p(n) = A\ \sin n\frac{\pi}{2} + B\ \cos n\frac{\pi}{2}$ où A et B sont des coefficients à déterminer.

En remplaçant dans l'équation de départ et en utilisant les relations trigonométriques de changement de quadrant, on obtient

$$(-7A + 6B)\ \sin n\frac{\pi}{2} + (-6A - 7B)\ \cos n\frac{\pi}{2} = 5\ \sin n\frac{\pi}{2}$$

D'où le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -7\ A & + & 6\ B & = & 5 \\ -6\ A & - & 7\ B & = & 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\tfrac{7}{17}\,,\ B = \tfrac{6}{17}$$

et la solution particulière $y_p(n) = \frac{1}{17}\ (-7\ \sin n\frac{\pi}{2} + 6\ \cos n\frac{\pi}{2})$

En conclusion, on voit que la forme de la solution particulière est en étroite relation avec la fonction $g(n)$. Le tableau suivant donne quelques types de solutions particulières à essayer en fonction de $g(n)$.

$g(n)$	$y_p(n)$
a	$c_1\ a$
a^n	$c_1\ a^n$
n^k	$c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k$
$n^k a^n$	$c_0 a^n + c_1 n a^n + ... + c_k n^k a^n$
$\sin bn,\ \cos bn$	$c_1 \sin bn + c_2 \cos bn$
$a^n \sin bn,\ a^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn) a^n$
etc	

Exemple 6.2.4.

Déterminer la solution générale de l'équation suivante

$$y(n+2) - 4\ y(n+1) + 4\ y(n) = 3n + 2^n$$

- On détermine la solution de l'équation homogène associée
  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
  d'où les deux solutions $y_1(n) = 2^n$ et $y_2(n) = n2^n$ et la solution générale $y(n) = 2^n(C_1 + n\ C_2)$.
- Il est facile de montrer que si
  $y_1(n)$ est une solution particulière de $y(n+2) + p_1\ y(n+1) + p_2\ y(n) = g_1(n)$
  et si
  $y_2(n)$ est une solution particulière de $y(n+2) + p_1\ y(n+1) + p_2 y(n) = g_2(n)$
  alors
  $y_p(n) = y_1(n) + y_2(n)$ est une solution particulière de l'équation
  $y(n+2) + p_1\ y(n+1) + p_2\ y(n) = g_1(n) + g_2(n)$.
- Dans l'exemple on pose
  $g_1(n) = 3n$ et on teste une solution du type $y_1(n) = A_0 + A_1\ n$,
  $g_2(n) = 2^n$; or 2^n est une solution de l'équation homogène, on devrait donc tester une solution du type $A_2\ n\ 2^n$; mais $n\ 2^n$ est aussi une solution de l'équation homogène, il faut donc tester une solution du type $y_2(n) = A_2\ n^2\ 2^n$.
- Finalement, on détermine les coefficients A_i de la solution particulière

  $$y_p(n) = A_0 + A_1\ n + A_2\ n^2\ 2^n$$

  en remplaçant dans l'équation de départ, ce qui donne $A_0 = 6$, $A_1 = 3$ et $A_2 = \frac{1}{8}$.

La solution générale est donc $y(n) = 2^n(C_1 + n\ C_2) + 6 + 3\ n + \frac{1}{8}\ n^2\ 2^n$.

On peut formaliser la recherche d'une solution particulière. La méthode consiste à utiliser un opérateur qui annule le terme $g(n)$ afin d'obtenir une équation homogène.

Définition 6.2.1.

On considère le polynôme en E à coefficients constants noté $N(E)$, tel que $g(n)$ est une solution de ce polynôme, c'est-à-dire

$$N(E)\ g(n) = 0$$

Alors $N(E)$ est appelé un *annihilateur* de $g(n)$.

Exemple 6.2.5.

- Un annihilateur de $g(n) = 3^n$ est le polynôme $N(E) = E - 3$
  car
  $(E-3)\ 3^n = E\ 3^n - 3 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 3^{n+1} = 0$
- Un annihilateur de $g(n) = n$ est le polynôme $N(E) = (E-1)^2$
  car
  $(E-1)^2\ n = (E^2 - 2E + 1)\ n = E^2\ n - 2E\ n + n = n + 2 - 2(n+1) + n = 0$
- Un annihilateur de $g(n) = n + 3^n$ est le polynôme $N(E) = (E-1)^2\ (E-3)$
  car
  $(E-1)^2\ (E-3)(n + 3^n) = (E-1)^2\ (E-3)\ n + (E-1)^2\ (E-3)\ 3^n = 0$

On remarque que si $g(n) = g_1(n) + g_2(n)$ et si $N_1(E)$ et $N_2(E)$ sont les annihilateurs de $g_1(n)$ et $g_2(n)$ respectivement, alors $N(E) = N_1(E)\ N_2(E)$ est l'annihilateur de $g(n)$.

Le tableau suivant donne les annihilateurs de quelques fonctions $g(n)$.

$g(n)$	$N(E)$
constante a	$E-1$
polynôme $p_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
a^n	$E-a$
$a^n\ p_k(n)$	$(E-a)^{k+1}$
etc	

Exemple 6.2.6.

Un annihilateur de $g(n) = n\ 3^n$ est le polynôme $N(E) = (E-3)^2$

On reprend l'équation (6.2.1) d'ordre k

$$y(n+k) + p_1\ y(n+k-1) + \ ...\ + p_k\ y(n) = g(n)$$

et on pose $p(E) = E^k + p_1\ E^{k-1} + \ \dots\ + p_k$.

Alors (6.2.1) s'écrit

$$p(E)\ y(n) = g(n) \tag{6.2.2}$$

Soit $N(E)$ un annihilateur de $g(n)$. On applique $N(E)$ aux deux membres de l'équation (6.2.2) ; on obtient

$$N(E)\ p(E)\ y(n) = 0 \tag{6.2.3}$$

Cette nouvelle équation est homogène.

Exemple 6.2.7.

On considère l'équation d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) - 5\ y(n+1) + 6\ y(n) = 3^n$$

Soit le polynôme $p(E) = E^2 - 5\ E + 6$, alors cette équation s'écrit

$$p(E)\ y(n) = 3^n \quad \Leftrightarrow \quad (E-3)\ (E-2)\ y(n) = 3^n \tag{6.2.4}$$

L'équation homogène $p(E)\ y(n) = 0$ a pour racines caractéristiques $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3$ et pour ensemble fondamental $G_h = \{2^n\,;\ 3^n\}$.

Un annihilateur de $g(n)$ est $N(E) = E - 3$. L'équation homogène $N(E)\ y(n) = 0$ a pour racine caractéristique $\lambda_3 = 3$ et pour ensemble fondamental $G_N = \{3^n\}$.

On applique $N(E)$ à (6.2.4)

$$(E-3)\ [(E-3)\ (E-2)]\ y(n) = (E-3)\ 3^n$$

d'où l'équation homogène d'ordre 3 :

$$(E-3)^2\ (E-2)\ y(n) = 0 \tag{6.2.5}$$

dont un ensemble fondamental est $G = \{2^n\,; 3^n\,; n\ 3^n\}$.

On constate que les racines caractéristiques de (6.2.5) sont celles des équations homogènes $p(E)\ y(n) = 0$ et $N(E)\ y(n) = 0$ et que $\lambda = 3$ est une racine commune, son ordre de multiplicité a donc été modifié. Ce qui se traduit par le fait que G contient G_h , G_N et la solution $y(n) = n3^n$ (elle n'appartient ni à G_h ni à G_N) .

Il est évident que si $y^*(n)$ est une solution de (6.2.1), alors elle est aussi solution de (6.2.3).

car

par hypothèse $p(E)y^*(n) = g(n)$, donc $N(E)\ p(E)\ y^*(n) = N(E)\ g(n) = 0$.

Mais que peut-on dire des solutions de (6.2.3) ? quelles sont leurs relations avec celles de (6.2.1) ?

L'exemple précédent a montré que l'ensemble fondamental de (6.2.3) contient toujours G_h. On écrit alors G comme la réunion de deux ensembles disjoints :

$G = G_h \cup \widehat{G}$ où $\widehat{G}$ est le complémentaire de G_h dans G

La solution générale $y^*(n)$ de $N(E)\ p(E)\ y(n) = 0$ s'écrit alors $y^*(n) = y_h(n) + \widehat{y}(n)$

et

$y_h(n)$ est la solution générale de l'équation $p(E)\ y(n) = 0$,

$\widehat{y}(n)$ est une combinaison linéaire des solutions appartenant à $\widehat{G}$.

On veut déterminer sous quelle condition $y^*(n)$ est solution de (6.2.2). On calcule

$$\begin{aligned} p(E)\ y^*(n) &= p(E)\ (y_h(n) + \widehat{y}(n)) = \\ &= p(E)\ y_h(n) + p(E)\ \widehat{y}(n) = \\ &= 0 + p(E)\ \widehat{y}(n) \end{aligned}$$

Ainsi $y^*(n)$ est solution de (6.2.2) si $p(E)\ \widehat{y}(n) = g(n)$.

L'idée est donc de tester si $\widehat{y}(n)$ peut être une solution particulière de (6.2.2).

Exemple 6.2.8.

On reprend l'exemple précédent.

On constate que dans ce cas $\widehat{G} = G_N = \{n\ 3^n\}$. Il faut tester pour quelle constante C la fonction $\widehat{y}(n) = C\ n\ 3^n$ est une solution particulière. Pour cela on remplace $y(n)$ par $\widehat{y}(n)$ dans l'équation aux différence de départ ; on obtient :

$C\ (n+2)\ 3^{n+2} - 5\ C\ (n+1)\ 3^{n+1} + 6\ C\ n\ 3^n = 3^n \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3}$

Ainsi $\widehat{y}(n) = \frac{1}{3}\ n\ 3^n$ est une solution particulière et la solution générale est

$$y(n) = \frac{1}{3}\ n\ 3^n + C_1\ 2^n + C_2\ 3^n + C_3\ n\ 3^n$$

Exemple 6.2.9.

On considère l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$y(n+2) - 4\ y(n+1) + 4\ y(n) = 3n + 2^n$

qui s'écrit aussi

$(E-2)^2\ y(n) = 3n + 2^n$

Un ensemble fondamental de l'équation homogène associée est $G_h = \{2^n\ ;\ n\ 2^n\}$.

L'annihilateur de $g(n) = 3n + 2^n$ est $N(E) = (E-1)^2(E-2)$.

Après avoir appliqué $N(E)$ des deux côté de l'équation $p(E)\ y(n) = g(n)$, on obtient l'équation homogène suivante

$(E-1)^2(E-2)^3\ y(n) = 0$

dont un ensemble fondamental est $G = \{\ 1\ ;\ n\ ; 2^n\ ;\ n\ 2^n\ ;\ n^2\ 2^n\ \}$ et $\widehat{G} = \{\ 1\ ;\ n\ ; n^2\ 2^n\}$.

Il faut tester pour quelles constantes C_i la fonction $\widehat{y}(n) = C_0 + C_1\ n + C_2\ n^2\ 2^n$ est une solution particulière.

On remplace dans l'équation aux différence de départ et après calcul, on obtient :
$C_0 = 6$, $C_1 = 3$ et $C_2 = \frac{1}{8}$.

D'où la solution générale $y(n) = 2^n(A_1 + n\ A_2) + 6 + 3\ n + \frac{1}{8}\ n^2\ 2^n$.

6.3 Cas des équations linéaires homogènes à coefficients constants réels

On considère le cas particulier de l'équation aux différences d'ordre k suivante

$y(n+k) + p_1\ y(n+k-1) + \ ..... \ + p_k y(n) = 0$

où $p_i \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, $n \geq n_0$

et on s'intéresse uniquement aux solutions à valeurs réelles.

Deux cas se présentent.

Cas I

Toutes les solutions du polynôme caractéristique sont dans $\mathbb{R}$.

Le système fondamental des solutions est constitué de k fonctions réelles. Pour que la solutions générale soit réelle, il suffit de prendre les constantes réelles. L'espace vectoriel des solutions est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Cas II

Le polynôme caractéristique a des solutions complexes.

Le système fondamental des solutions est constitué de k fonctions complexes. On peut alors construire un nouveau système fondamental constitué de k fonctions réelles.

Les coefficients du polynôme caractéristique étant réelles, les solutions complexes sont conjuguées deux à deux. Il suffit donc de traiter le cas où l'équation est d'ordre 2 et le polynôme caractéristique est de discriminant négatif.

On considère l'équation $y(n+2) + p_1\ y(n+1) + p_2\ y(n) = 0$ (6.3.1)
L'équation caractéristique est un polynôme du 2ième degré. On suppose que les racines caractéristiques sont deux nombres complexes λ_1 et λ_2 ; ils sont conjugués car p_1 et p_2 sont réels.

$\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv\,,\quad u\,, v \in \mathbb{R}$

On pose $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $\varphi = \arctan \frac{v}{u}\,,$ d'où

$\lambda_1 = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $\lambda_2 = r\ (\cos\varphi - i\sin\varphi)$

L'équation (6.3.1) a pour solutions particulières

$y_1(n) = \lambda_1^n = r^n\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n\ (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
et
$y_2(n) = \lambda_2^n = r^n\ (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = r^n\ (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$

L'ensemble fondamental $G = \{\ r^n\ (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,,\ r^n\ (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)\ \}$ est donc constitué de deux fonctions complexes.
La solution générale est

$y(n) = c_1\ r^n\ (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + c_2\ r^n\ (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)\,,\quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{C}$

On choisit alors les constantes c_1 et c_2 telles que $c_1 = a + ib$ et $c_2 = \overline{c}_1 = a - ib$. Ainsi

$$\begin{aligned} y(n) &= r^n\ [\ (c_1 + \overline{c}_1)\ \cos n\varphi + i\ (c_1 - \overline{c}_1)\ \sin n\varphi\ ] \\ &= r^n\ [\ 2a\ \cos n\varphi + i\ 2ib\ \sin n\varphi\ ] \\ &= r^n\ [\ 2a\ \cos n\varphi -\ 2b\ \sin n\varphi\ ] \end{aligned}$$

On pose $C_1 = 2a$ et $C_2 = -2b$, et la solution générale s'écrit maintenant

$y(n) = r^n\ [\ C_1\ \cos n\varphi +\ C_2\ \sin n\varphi\ ]\,,\quad C_1\,, C_2 \in \mathbb{R}$

En posant $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, puis $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$, on obtient les deux solutions particulières réelles $y_1(n) = r^n \cos n\varphi$ et $y_2(n) = r^n \sin n\varphi$.

L'ensemble fondamental $G = \{ r^n \cos n\varphi ; r^n \sin n\varphi \}$ est donc constitué de deux fonctions réelles. Pour obtenir toutes les solutions réelles, il suffit de choisir des constantes réelles. D'où la solution générale

$y(n) = c_1 r^n \cos n\varphi + c_2 r^n \sin n\varphi, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exemple 6.3.1.

On considère l'équation d'ordre 2 suivante

$$y(n+2) + 4\, y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$$

Elle a comme solutions particulières réelles $y_1(n) = 2^n \cos n\frac{\pi}{2}$ et $y_2(n) = 2^n \sin n\frac{\pi}{2}$,

et comme solution générale réelle $y(n) = 2^n (C_1 \cos n\frac{\pi}{2} + C_2 \sin n\frac{\pi}{2}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 6.3.2.

On reprend l'équation d'ordre 5 de l'exemple 4 du paragraphe 6.1 (cas II)

$$(E-3)^3 (E^2 + 2E + 5) y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$(\lambda - 3)^3 (\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) = 0$$

Les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 3$ d'ordre de multiplicité $m_1 = 3$
$\lambda_2 = -1 + 2i$ d'ordre de multiplicité $m_2 = 1$
$\lambda_3 = -1 - 2i$ d'ordre de multiplicité $m_3 = 1$

L'ensemble fondamental est $\{ 3^n, n3^n, n^2 3^n, (-1+2i)^n, (-1-2i)^n \}$ et la solution générale est

$$y(n) = 3^n (C_1 + C_2\, n + C_3\, n^2) + C_4 (-1+2i)^n + C_5 (-1-2i)^n \qquad C_i \in \mathbb{C}$$

Les deux solutions particulières réelles $(\sqrt{5})^n \cos n\varphi$ et $(\sqrt{5})^n \sin n\varphi$ vont remplacer les solutions complexes (φ tel que $\varphi = \arctan(-1/2)$).

On a alors le nouvel ensemble fondamental $\{\, 3^n\,,\ n3^n\,,\ n^2\,3^n\,,\ (\sqrt{5})^n\ \cos n\varphi\,,\ (\sqrt{5})^n\ \sin n\varphi \,\}$ et la solution générale réelle est

$$y(n) = 3^n\ (C_1 + C_2\ n + C_3\ n^2) + (\sqrt{5})^n\ (C_4\ \cos n\varphi + C_5\ \sin n\varphi) \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

Exemple 6.3.3.

On reprend l'équation d'ordre 4 de l'exemple 5 du paragraphe 6.1 (cas II)

$$y(n+4) + 2y(n+2) + y(n) = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

Les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = i$ d'ordre de multiplicité $m_1 = 2$
$\lambda_2 = -i$ d'ordre de multiplicité $m_2 = 2$

d'où quatre solutions particulières réelles

$y_1(n) = \cos n\frac{\pi}{2}\,,\qquad y_2(n) = n\cos n\frac{\pi}{2}$
$y_3(n) = -\sin n\frac{\pi}{2}\,,\qquad y_4(n) = -n\sin n\frac{\pi}{2}$

La solution générale est

$$y(n) = C_1\ \cos n\frac{\pi}{2} + C_2 n\cos n\frac{\pi}{2} + C_3\ \sin n\frac{\pi}{2} + C_4\ n\sin n\frac{\pi}{2} \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

Annexe A

Il existe plusieurs types de matrices de Vandermonde. Ces matrices, ainsi que leur déterminant, apparaissent de manière naturelle dans divers problèmes mathématiques, entre autre dans les équations aux différences.

Par exemple, la matrice suivante

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

est une *matrice de Vandermonde*. On montre facilement que son déterminant est

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Définition

Soient r nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, d'ordre de multiplicité respectivement $m_1, m_2, \dots, m_r$, avec $\Sigma_{i=1}^r m_i = k$.

A ces r nombres complexes, on associe une matrice $\mathbb{V}$ d'ordre k appelée *matrice de Vandermonde généralisée* définie ainsi

$$\mathbb{V} = (V_1, V_2, \dots, V_r)$$

$V_i \in \mathbb{M}\ (k \times m_i\ ;\ \mathbb{C})$ et avec pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$V_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i & \lambda_i & \dots & \lambda_i & \lambda_i \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i^2 & 2^2\lambda_i^2 & \dots & 2^{m_i-2}\lambda_r^2 & 2^{m_i-1}\lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_i^{k-2} & (k-2)\lambda_i^{k-2} & (k-2)^2\lambda_i^{k-2} & \dots & (k-2)^{m_i-2}\lambda_i^{k-2} & (k-2)^{m_i-1}\lambda_r^{k-2} \\ \lambda_i^{k-1} & (k-1)\lambda_i^{k-1} & (k-1)^2\lambda_i^{k-1} & \dots & (k-1)^{m_i-2}\lambda_i^{k-1} & (k-1)^{m_i-1}\lambda_r^{k-1} \end{pmatrix}$$

Théorème

$$\det V = \quad [\ \prod_{i=1}^{r} \left(\ \prod_{j=0}^{m_i-1} j!\ \right)\ ] \times \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{\binom{m_i}{2}} \times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_i m_j}$$

Il existe plusieurs méthodes pour démontrer ce résultat mais toutes sont assez ardues (voir par exemple [9]).

Ce type de déterminant apparaît lorsqu'on s'intéresse aux solutions d'une équations aux différences dont les solutions ont des ordres de multiplicité plus grand que 1. Le Casoratien du système fondamental de solutions, évalué en $n = 0$, livre une matrice de type Vandermonde généralisée.

On va développer "à la main" un déterminant de Vandermonde d'ordre 5 afin d'illustrer le théorème.

On suppose que $G = \{\lambda_1^n\ ;\ n\ \lambda_1^n\ ;\ \lambda_2^n\ ;\ n\ \lambda_2^n\ ;\ n^2\ \lambda_2^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions d'une équation aux différences d'ordre 5.

On pose :

$m_1 = 2$ et $G_1 = \{\lambda_1^n\ ;\ n\ \lambda_1^n\}$

$m_2 = 3$ et $G_2 = \{\lambda_2^n\ ;\ n\ \lambda_2^n\ ;\ n^2\ \lambda_2^n\}$

$r = 2$ et $k = m_1 + m_2 = 5$

On a le *Casoratien* d'ordre 5 suivant

$$W(n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^n & \lambda_2^n & n\lambda_2^n & n^2\lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & (n+1)\lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+1)\lambda_2^{n+1} & (n+1)^2\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+2} & (n+2)\lambda_1^{n+2} & \lambda_2^{n+2} & (n+2)\lambda_2^{n+2} & (n+2)^2\lambda_2^{n+2} \\ \lambda_1^{n+3} & (n+3)\lambda_1^{n+3} & \lambda_2^{n+3} & (n+3)\lambda_2^{n+3} & (n+3)^2\lambda_2^{n+3} \\ \lambda_1^{n+4} & (n+4)\lambda_1^{n+4} & \lambda_2^{n+4} & (n+4)\lambda_2^{n+4} & (n+4)^2\lambda_2^{n+4} \end{vmatrix}$$

En posant $n = 0$ on obtient le déterminant de type Vandermonde généralisé d'ordre 5 suivant

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\ \lambda_2^2 & 2^2\ \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\ \lambda_2^3 & 3^2\ \lambda_2^3 \\ \lambda_1^4 & 4\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & 4\ \lambda_2^4 & 4^2\ \lambda_2^4 \end{vmatrix} = \Big[\prod_{i=1}^{2}\Big(\prod_{j=0}^{m_i-1} j!\Big)\Big] \times \prod_{i=1}^{2} \lambda_i^{\binom{m_i}{2}} \times \prod_{1\le i<j\le 2} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_i m_j}$$

Pour le développer, on utilise les propriétés des déterminants.

- On met en évidence λ_1 dans la 2ère colonne et λ_2 dans la 4ième et 5ième colonne. Puis on remplace la 3ième colonne par $c_3 - c_1$.

$$V = \lambda_1\ \lambda_2^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\ \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & 2\ \lambda_2 & 2^2\ \lambda_2 \\ \lambda_1^3 & 3\ \lambda_1^2 & \lambda_2^3 - \lambda_1^3 & 3\ \lambda_2^2 & 3^2\ \lambda_2^2 \\ \lambda_1^4 & 4\ \lambda_1^3 & \lambda_2^4 - \lambda_1^4 & 4\ \lambda_2^3 & 4^2\ \lambda_2^3 \end{vmatrix}$$

- On développe suivant la 1ère ligne. On factorise la 2ième colonne. Puis on remplace la 4ième colonne par $c_4 - c_3$.

$$V \;=\; \lambda_1\;\lambda_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 2\;\lambda_1 & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_1) & 2\;\lambda_2 & 2\;\lambda_2 \\ 3\;\lambda_1^2 & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2) & 3\;\lambda_2^2 & 6\;\lambda_2^2 \\ 4\;\lambda_1^3 & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2) & 4\;\lambda_2^3 & 12\;\lambda_2^3 \end{vmatrix}$$

- On met en évidence $2\lambda_2$ dans la 4ième colonne et $\lambda_2-\lambda_1$ dans la 2ième colonne.

$$V \;=\; 2\;\lambda_1\;\lambda_2^3\;(\lambda_2-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2\;\lambda_1 & \lambda_2+\lambda_1 & 2\;\lambda_2 & 1 \\ 3\;\lambda_1^2 & \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2 & 3\;\lambda_2^2 & 3\;\lambda_2 \\ 4\;\lambda_1^3 & \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2 & 4\;\lambda_2^3 & 6\;\lambda_2^2 \end{vmatrix}$$

- On remplace la 2ième colonne par c_2-c_1 et la 3ième colonne par c_3-c_2 .

$$V \;=\; 2\;\lambda_1\;\lambda_2^3\;(\lambda_2-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\;\lambda_1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2-\lambda_1 & 1 \\ 3\;\lambda_1^2 & -2\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1^2+2\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & 3\;\lambda_2 \\ 4\;\lambda_1^3 & -3\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2 & -\lambda_1^3+3\lambda_2^3-\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2 & 6\;\lambda_2^2 \end{vmatrix}$$

- On développe suivant la 1ière ligne. Puis on factorise par $\lambda_2-\lambda_1$ la 1ière et 2ième colonne et on met $(\lambda_2-\lambda_1)^2$ en évidence.

$$V \;=\; 2\;\lambda_1\;\lambda_2^3\;(\lambda_2-\lambda_1) \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2-\lambda_1 & 1 \\ (\lambda_2-\lambda_1)(2\lambda_1+\lambda_2) & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+2\lambda_2) & 3\lambda_2 \\ (\lambda_2-\lambda_1)(3\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2) & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_2^2) & 6\lambda_2^2 \end{vmatrix} \;=$$

$$=\;\; 2\;\lambda_1\;\lambda_2^3\;(\lambda_2-\lambda_1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1+2\lambda_2 & 3\lambda_2 \\ 3\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2 & \lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_2^2 & 6\lambda_2^2 \end{vmatrix}$$

- On remplace la 1ière colonne par $c_1 - c_3$ et la 2ième colonne par $c_2 - c_3$. Puis on développe suivant la 1ère ligne et on met $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$ en évidence.

$$V = 2\ \lambda_1\ \lambda_2^3\ (\lambda_2 - \lambda_1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 & 3\lambda_2 \\ 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 5\lambda_2^2 & \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_2^2 & 6\lambda_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\ \lambda_1\ \lambda_2^3\ (\lambda_2 - \lambda_1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 & \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\ \lambda_1\ \lambda_2^3\ (\lambda_2 - \lambda_1)^6$$

- Au final on voit que

$$2 = \prod_{i=1}^{2} \left(\prod_{j=0}^{m_i - 1} j! \right) = \prod_{j=0}^{m_1 - 1} j! \times \prod_{j=0}^{m_2 - 1} j! = \prod_{j=0}^{1} j! \times \prod_{j=0}^{2} j! = 1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 2!$$

$$\lambda_1\ \lambda_2^3 = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i^{\binom{m_i}{2}} = \lambda_1^{\binom{m_1}{2}} \times \lambda_2^{\binom{m_2}{2}} = \lambda_1^{\binom{2}{2}} \times \lambda_2^{\binom{3}{2}} = \lambda_1\ \lambda_2^3$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^6 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_i m_j}$$

Bibliographie et références

Nos principales références sont les livres [2] et [3] .

[1] P. Cull, etc, Difference equations from rabbits to chaos, Robson.

[2] S. Elaydi, An introduction to difference equations, third edition, Springer.

[3] S. Goldberg, Introduction to difference equations with illustrative examples, Dover Publications.

[4] A. Guelfond, Calcul des différences finies, Edition Dunod.

[5] W. Kelly, A. Peterson, Difference equations, an introduction with applications, HAP, Harcourt Academic Press.

[6] M. Krasnov, etc, Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytechniciens.

[7] S. Lang, Algèbre linéaire - les cours de Serge Lang, InterEditions.

[8] H. Levy, F. Lessman, Finite difference equations, Dover Publications.

[9] H. C. Li, Studies on Generalized Vandermonde Matrices : Their Determinants, Inverses, Explicit LU Factorizations, with Applications, Partie 1, chapitre 2.

[10] R. Mickens, Difference equations, Van Nostrand Company

[11] Richardson, An introduction to the calculus of finite differences, Van Nostrand Company.

[12] Schaum's outline of theory and problems of calculus of finite differences and difference equations.

MV-VT/03.02.18