Exercice 1* : Vitesse de libération T

Pour pouvoir se libérer du champ gravitationnel, un objet de masse m doit avoir une énergie cinétique suffisante. Comme l'énergie est conservée (frottements négligés), il faut que l'énergie mécanique de l'objet soit positive. En particulier, au moment du décollage, on peut écrire :

$$E_{mec}^{tot} = \underbrace{-\frac{GMm}{R_T}}_{\text{Energie potentielle au décollage}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energie cinétique au décollage}} \geq 0$$

D' où l'on tire que :

$$v \geq v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{2\frac{GM}{R_T{}^2}R_T} = \sqrt{2g_0R_T}$$

Où $g_0 = \frac{GM}{R_T{}^2} \approx 9.81\frac{m}{s^2}$ est l'accélération gravitationnelle à une altitude nulle. On a donc dérivée une expression pour la vitesse de libération:

$$v_{lib} = \sqrt{2g_0R_T} \approx 11.2\times10^3\,\frac{m}{s}$$

Exercice 2 : « Gravity – The retour »**

a) La seconde loi de Newton appliquée à l'ensemble {station + capsule} donne : $F = Ma_n$. Or, le mouvement étant circulaire uniforme on a : $a_n = \frac{v^2}{r}$.

De plus, la loi de la gravitation universelle énonce: $F = \frac{GM_TM}{r^2}$.

D'où : $\frac{GM_TM}{r^2} = \frac{Mv^2}{r}$

La vitesse, pour une trajectoire circulaire est $v = \frac{2\pi r}{T}$.

On a alors :

$$r = \left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

b) On a conservation de la quantité de mouvement lors du choc, donc : $Mv = 5\,m\,v = 4\,m\,v_1 + mv_2$. Avec v_1 la vitesse de la station et v_2 la vitesse de la capsule juste après l'éjection ($v_2 = 0$).

D'où $5\,m\,v = 4\,m\,v_1$.

$$v_1 = \frac{5}{4}\,v = \frac{5\pi r}{2T}$$

c) Comme on a une orbite circulaire, on a $E_{tot}^{méc} = \frac{-GM_T4m}{2r'}$. Juste après l'explosion, on a :

$E_p = \frac{-GM_T4m}{r}$ et $E_c = \frac{4mv_1{}^2}{2}$

Avec $E_{tot}^{méc} = E_p + E_c$, on trouve donc :

$$\frac{-GM_T4m}{2r'} = \frac{-GM_T4m}{r} + \frac{4mv_1{}^2}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-GM_T}{2r'} = \frac{-GM_T}{r} + \frac{25}{32}v^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-GM_T}{2r'} = \frac{-GM_T}{r} + \frac{25}{32}\frac{GM_T}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(2 - \frac{25}{16}\right) = \frac{1}{r}\frac{7}{16}$$
$$\Leftrightarrow r' = r\frac{16}{7}$$

Donc on a $r' \geq r$, la nouvelle orbite aura un plus grand rayon.

Exercice 3 : Vol vers la Station Spatiale Internationale**

a) Voies possibles : Moment cinétique constant / Newton dans le repère de Frenet (accélération tangentielle nulle pour une force centrale) / Faire $r = cte$ dans l'accélération en coordonnées polaire $\Longrightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow v = r\dot{\varphi} = cte$ …

b) Mouvement circulaire uniforme : l'accélération est l'accélération centripète :

$$m\frac{v_1^2}{R_1} = F_G = \frac{mMG}{R_1^2} \Longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R_1}}$$

c)

$$E_1 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1} - \frac{mMG}{R_1} = -\frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1}$$

d) $W_{12} = -\Delta E_p = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)mMG$

e) On utilise la conservation du moment cinétique $\vec{L}$:

$$\vec{L}\ cte \Longrightarrow R_1 v_\mathrm{A} = R_2 v_\mathrm{B} \Longrightarrow v_\mathrm{B} = \frac{R_1}{R_2}v_\mathrm{A}$$

f) L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en A est : $E_T = \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 - \frac{mMG}{R_1}$

L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en B est : $E_T = \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{mMG}{R_2} = \frac{\mathrm{R}_1^2}{2\mathrm{R}_2^2}mv_\mathrm{A}^2 - \frac{mMG}{R_2}$

Comme E_T est constante sur l'orbite, on en tire :

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{\mathrm{R}_1^2}{2\mathrm{R}_2^2}mv_\mathrm{A}^2 - \frac{mMG}{R_2} \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = mMG\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = mMG\left(\frac{\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2}\right)\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) = mMG\frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1}$$

Et en reportant cette valeur de $\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2$ dans l'expression de E_T en A :

$$E_T = mMG\frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1} - \frac{mMG}{R_1} = mMG\frac{R_2 - R_2 - R_1}{(R_2 + R_1)R_1} = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)}$$

Note : On peut aussi procéder par élimination :

$$\begin{cases} E_T = \dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{mMG}{R_1} \\ E_T = \dfrac{R_1^2}{2R_2^2}mv_A^2 - \dfrac{mMG}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_T = \dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{1}{R_1}mMG \\ \dfrac{R_2^2}{R_1^2}E_T = \dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{R_2}{R_1^2}mMG \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)}_{\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1^2}} E_T = \underbrace{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1^2}\right)}_{\frac{R_1-R_2}{R_1^2}} mMG$$

$$\Rightarrow E_T = \frac{R_1 - R_2}{R_2^2 - R_1^2}mMG = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)}$$

g) On a vu en f) $E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1}$ et en c) $E_1 = -\frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1}$ donc :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2}mv_A^2 + 2E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = E_T - 2E_1 \Rightarrow v_A^2 = \frac{2E_T - 4E_1}{m}$$

Soit $v_A = \sqrt{\frac{2E_T - 4E_1}{m}}$

h) $\Delta v_B > 0$: les rayons de courbure en B montre que la vitesse est plus faible sur l'orbite de transfert que sur l'orbite circulaire. Il faut donc augmenter la vitesse pour passer sur l'orbite circulaire.

Exercice S12.1 : Swiss cube

a) L'énergie potentielle vaut : $E_p = -\frac{GM_T m}{r_0}$

L'énergie cinétique est donnée par : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

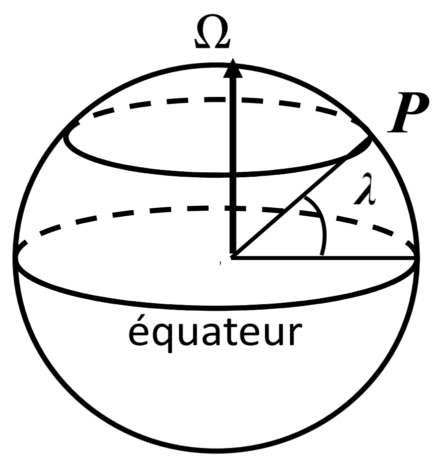
Or, pour un mouvement circulaire, nous savons que la norme de l'accélération radiale (centripète) est donnée par $a_r = \frac{v^2}{r_0}$. Par Newton, nous savons de plus que l'accélération centripète est due à la force de gravitation : $\frac{GM_T m}{r_0^2} = ma_r = m\frac{v^2}{r_0}$

Ainsi : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2r_0}$

Et donc l'énergie totale du satellite vaut :

$$E_{tot} = E_p + E_c = -\frac{GM_T m}{r_0} + \frac{GM_T m}{2r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0}$$

b) Schéma du problème :



La vitesse d'entraînement est donnée par :

$$V_e = \left\| \vec{\omega}_T \times \vec{R}_T \right\| = \omega_T R_T \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \omega_T R_T \cos(\lambda)$$

Ainsi :

$$E_{p,1} = -\frac{GM_T m}{R_T}$$

$$E_{c,1} = \frac{1}{2}mV_e^2 = \frac{1}{2}m\omega_T^2 R_T^2 \cos^2(\lambda)$$

$$E_{tot,1} = E_{p,1} + E_{c,1} = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2}m\omega_T^2 R_T^2 \cos^2(\lambda)$$

c) Calcul de la différence d'énergie

$$\Delta E = E_{tot}(r_0) - E_{tot,1} = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r_0}\right) - \frac{1}{2} m\omega_T^2 R_T^2 \cos^2(\lambda)$$

Pour minimiser cette énergie, il faut maximiser le terme en $\cos^2(\lambda)$, c'est-à-dire pour λ =0 (base de lancement au niveau de l'équateur).
De plus pour que la vitesse de lancement sera minimale dans le cas où l'on souhaite faire tourner le satellite dans le même sens de rotation que la Terre.

d) Si la trajectoire reste circulaire, l'expression pour E_{tot} reste valable : $E_{tot}(t) = -\dfrac{GM_T m}{2r(t)}$

Or la donnée nous dit que : $E_{tot}(t) = E_{tot,0}(1+\alpha t)$, avec $E_{tot,0} = -\dfrac{GM_T m}{2r_0}$

Donc : $E_{tot}(t) = -\dfrac{GM_T m}{2r(t)} = -\dfrac{GM_T m}{2r_0}(1+\alpha t)$

Par identification on obtient :

$$r(t) = \frac{r_0}{(1+\alpha t)}$$

Pour déterminer *v(t)* on utilise comme précédemment $\dfrac{GM_T m}{r(t)^2} = ma_r = m\dfrac{v(t)^2}{r(t)}$

On obtient : $v(t) = v_0(1+\alpha t)^{\frac{1}{2}}$

On sait que pour une orbite circulaire $E_{tot} = -E_{cin}$, ce qui implique que si l'énergie totale diminue à cause des frottements, l'énergie cinétique augmente. Ce qui se passe, c'est que l'énergie potentielle diminue plus rapidement que n'augmente l'énergie cinétique.

Exercice S12.2 : La sonde lunaire**

Une sonde de masse m se dirige vers la Lune (rayon R_L, masse M_L). Dans un premier temps le vecteur vitesse pointe vers le centre de la Lune et la sonde s'écrase sur celle-ci. Au point A, la sonde a la vitesse v_A. Le point A est à la distance d_A du centre de la Lune.

a Calculer la variation d'énergie cinétique de la sonde au cours de l'impact, dans le référentiel de la Lune.

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - G m M_L \left[\frac{1}{d_A} - \frac{1}{R_L}\right]$ Remarquez les 2 signes sont OK

à l'impact la vitesse est v_I au point d'impact, elle est perdue

$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_I^2$ (ou $-\frac{1}{2} m v_I^2$)

E_{mec} conservé entre A et I   A: $\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G M_L m}{d_A}$

I: $\frac{1}{2} m v_I^2 - \frac{G M_L m}{R_L} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_I^2 = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - G m M_L \left[\frac{1}{d_A} - \frac{1}{R_L}\right]$

b Montrer qu'au point A, l'énergie potentielle de la sonde est, en norme, négligeable devant son énergie cinétique.

en A $E_{p,A} = -\frac{G M m}{d_A} = -m \cdot \frac{7 \cdot 10^{-11} \; 7 \cdot 10^{22}}{5 \cdot 10^{8}} = -m \frac{50 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{8}} = -m\, 10^{4}$ SI

$E_{c,A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = m \cdot 0{,}5 \cdot 10^{6} = m \cdot 5 \cdot 10^{5}$

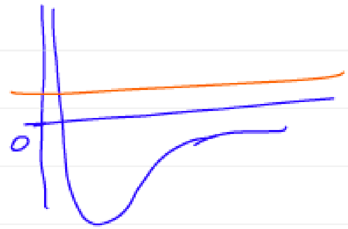
$|E_c| \sim 50\, |E_p|$

c La sonde est-elle en orbite autour de la Lune ? Justifier.

□Oui ☒Non

Comme $E_c \gg E_p$

$E_{mec} > 0$



trajectoire ouverte

d Calculer d en fonction de v_A, v_B et r_B.

$d = r_B \dfrac{v_B}{v_A}$

Conserva° moment cinétique

$\vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = \vec{OB} \wedge (m\vec{v}_B)$

$d \cancel{m} v_A = r_B \cancel{m} v_B$ $\qquad d = r_B \dfrac{v_B}{v_A}$

e Calculer d en fonction de r_B, G, M_L et v_A.

$$d = \frac{r_B}{v_A}\sqrt{v_A^2 + \frac{2GM_L}{r_B}}$$

Conservation E_{mec} entre A et B

$$\underbrace{\frac{1}{2}m v_A^2}_{E_{c,A}} - \underbrace{\cancel{\frac{GM_L m}{OA}}}_{E_{pA}} = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{GM_L m}{r_B}$$

négl (cf 3b)

$$v_A^2 = v_B^2 - \frac{2GM_L}{r_B} \qquad v_B^2 = v_A^2 + \frac{2GM_L}{r_B}$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2GM_L}{r_B}} \;\; \$ \;\; \Rightarrow \;\; d = \frac{r_B}{v_A}\sqrt{v_A^2 + \frac{2GM_L}{r_B}}$$

f En déduire la valeur minimale de d telle que la sonde ne s'écrase pas sur la Lune.

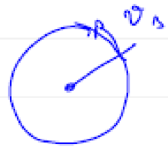
$$d_{\min} = \sqrt{R_L^2 + \frac{2GM_L R_L}{v_A^2}}$$

$$d = \sqrt{r_B^2 + \frac{2GM_L r_B}{v_A^2}}$$ Comme on doit avoir $r_B > R_L$

$$d > d_{min} = \sqrt{R_L^2 + \frac{2GM_L R_L}{v_A^2}}$$

g Calculer la vitesse que devrait avoir la sonde en B pour avoir une orbite circulaire de rayon r_B.

$v_{B,\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM_L}{r_B}}$



Sur une orbite circulaire $m a_n = m \frac{v^2}{R} = F_G = \frac{GM_L}{R^2}$

donc $m \frac{v_{B,circ}^2}{\cancel{r_B}} = \frac{GM_L m}{r_B^2}$

$v_{B,circ} = \sqrt{\frac{GM_L}{r_B}}$

h Pour mettre la sonde sur une orbite circulaire en B faut-il diminuer ou augmenter sa vitesse ? Justifier.

☒ Diminuer ☐ Augmenter

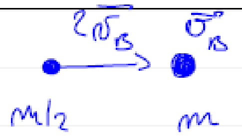
La sonde est sur une trajectoire hyperbolique, son énergie méca. est trop élevée. On ne peut la diminuer qu'en diminuant E_c donc v

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen

i Calculer la vitesse de la sonde juste après le choc en fonction de v_B

$v'_B = \frac{4}{3}\vec{v}_B$



choc inélastique : conservation de $\vec{p}$
2 particules collés

avant: $\vec{p} = \frac{m}{2} \cdot 2\vec{v}_B + m\vec{v}_B = 2m\vec{v}_B$ $\quad \frac{3m}{2}\vec{v}\,'_B = 2m\vec{v}_B$

après $\vec{p}\,' = \left(\frac{3m}{2}\right)\vec{v}\,'_B$ $\quad \vec{v}\,'_B = \frac{4}{3}\vec{v}_B$

j Quelle est la nouvelle trajectoire ? Justifier. Shématisez-la.

trajectoire circulaire $E_p = -\frac{GMm}{r_B} = -\frac{\cancel{GM}m \cdot v_B^2}{\cancel{GM}} = m v_B^2$

par la sonde

$E_{tot,après} = -m v_B^2 + \frac{1}{2} m v_B'^2 = -m v_B^2 + \frac{1}{2} m\left(\frac{4}{3} v_B\right)^2$

$= m v_B^2\left(-1 + \frac{16}{18}\right) = -\frac{1}{9} m v_B^2 < 0 \Rightarrow$ ellipse