Corrigés - Série 9

1. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3}\,, \quad x_0 = 1\,,$ b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}\,, \quad x_0 = 0\,,$

c) $c(x) = \left[\dfrac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right] \cdot \left[-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right]\,, \quad x_0 = -2\,.$

---

a) $\lim\limits_{x\to 1} a(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Si le numérateur et le dénominateur de $a(x)$ sont nuls en $x_0 = 1$, on peut simplifier cette fraction rationnelle par $(x-1)$.

Sur un voisinage pointé de $x_0 = 1$, $(x \neq 1)$, on a

$$a(x) = \frac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)\,(2x+3)}{(x-1)\,(x+3)} = \frac{2x+3}{x+3}\,, \qquad \lim_{x\to 1} a(x) = \frac{5}{4}\,.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} b(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

On cherche à débusquer le facteur x qui se cache dans l'expression du numérateur. Sur un voisinage pointé de $x_0 = 0$, $(x \neq 0)$, on a

$$b(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} = \frac{(x^2+1)-(x-1)^2}{x\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \frac{2x}{x\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}\,,$$

$$b(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-(x-1)}\,. \qquad \lim_{x\to 0} b(x) = 1\,.$$

c) On étudie séparément le comportement de $\left[\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos(\frac{\pi}{x+2})\right]$ et de $\left[-2+\sin(\frac{\pi}{x+2})\right]$ sur un voisinage pointé de $x_0 = -2$.

- $\cos(\frac{\pi}{x+2})$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers -2, mais est borné et $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} = -\infty\,,$ donc $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left[\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right] = -\infty\,.$
- D'autre part $\lim\limits_{x\to -2}\left[-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right]$ n'existe pas, mais $-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$ est de signe constant :

$$-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right) \leq -1 < 0\,, \quad \forall\, x \neq -2\,.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to -2} \underbrace{\left[\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos(\frac{\pi}{x+2})\right]}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\left[-2+\sin(\frac{\pi}{x+2})\right]}_{\leq -1 < 0} = +\infty\,.$

2. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{x - 2 \cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2 - 4}$, $x_0 = 0$, c) $c(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^6 + x^4}}$, $x_0 = 0$,

b) $b(x) = x - E(x^2)$, $x_0 = \sqrt{2}$, d) $d(x) = \dfrac{1}{2x - 6 + \sqrt{x^2 + x - 2}}$, $x_0 = 2$.

---

a) L'expression de $a(x)$ exige de distinguer deux cas selon que x est positif ou négatif :

- si $x < 0$, alors $a(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} a(x) = -\frac{1}{2}$,
- si $x > 0$, alors $a(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} a(x) = +\frac{1}{2}$.

Les limites à gauche et à droite de $a(x)$ en $x_0 = 0$ existent, mais sont différentes :

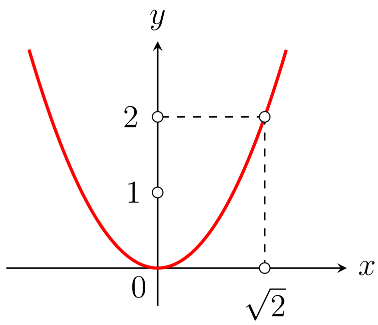
$$\lim_{x \to 0} a(x) \text{ n'existe pas.}$$

b) Ici aussi, la présence de la fonction partie entière, nous oblige à distinguer la gauche de la droite de $x_0 = \sqrt{2}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{2}^-} [x - E(x^2)] = \sqrt{2} - 1$,

  car $y = x^2$ est une fonction croissante au voisinage de $x_0 = \sqrt{2}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{2}^+} [x - E(x^2)] = \sqrt{2} - 2$.



Les limites à gauche et à droite de $b(x)$ en $x_0 = \sqrt{2}$ sont différentes, donc $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{2}} b(x)$ n'existe pas.

c) $c(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^6 + x^4}} = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^4\,(x^2+1)}} = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^2+1}} = \dfrac{-x}{|x| \cdot \sqrt[4]{x^2+1}}$.

On distingue deux cas selon que x est positif ou négatif :

- si $x < 0$, alors $c(x) = \dfrac{-x}{(-x) \cdot \sqrt[4]{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} c(x) = 1$,
- si $x > 0$, alors $c(x) = \dfrac{-x}{x \cdot \sqrt[4]{x^2+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} c(x) = -1$.

Les limites à gauche et à droite de $c(x)$ en $x_0 = 0$ sont différentes, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} c(x)$ n'existe pas.

d) La fonction $d(x)$ diverge vers l'infini lorsque $x \to 2$.

On cherche à être plus précis en déterminant le signe de $d(x)$ selon que x est dans un voisinage à gauche ou à droite de $x_0 = 2$.

Soit $D(x) = 2x - 6 + \sqrt{x^2 + x - 2}$, le dénominateur de $d(x)$.

- Dans un voisinage à gauche de $x_0 = 2$, x peut s'écrire $x = 2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

$$D(x) = D(2-\varepsilon) = 2\,(2-\varepsilon) - 6 + \sqrt{(2-\varepsilon)^2 + (2-\varepsilon) - 2}$$

$$D(x) = -2 - 2\,\varepsilon + \underbrace{\sqrt{(2-\varepsilon)^2 - \varepsilon}}_{<\ 2-\varepsilon} < -2 - 2\,\varepsilon + (2-\varepsilon) = -3\,\varepsilon < 0.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} d(x) = -\infty$.

- Dans un voisinage à droite de $x_0 = 2$, x peut s'écrire $x = 2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

$$D(x) = D(2+\varepsilon) = 2\,(2+\varepsilon) - 6 + \sqrt{(2+\varepsilon)^2 + (2+\varepsilon) - 2}$$

$$D(x) = -2 + 2\,\varepsilon + \underbrace{\sqrt{(2+\varepsilon)^2 + \varepsilon}}_{>\ 2+\varepsilon} > -2 + 2\,\varepsilon + (2+\varepsilon) = 3\,\varepsilon > 0.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} d(x) = +\infty$.

Autre méthode

Le dénominateur est nul en $x_0 = 2$. On fait apparaître le facteur $(x-2)$ en amplifiant le dénominateur par son expression conjuguée.

$$d(x) = \frac{1}{2x - 6 + \sqrt{x^2 + x - 2}} = \frac{2x - 6 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{(2x-6)^2 - (x^2 + x - 2)} = \frac{2x - 6 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{3x^2 - 25x + 38},$$

$$d(x) = \frac{2x - 6 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{(x-2)\,(3x-19)} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{2x - 6 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{3x - 19}.$$

Or $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 6 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{3x - 19} = \dfrac{4}{13} > 0$.

On en déduit qu'au voisinage de $x_0 = 2$, $d(x)$ est du signe de $x - 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} d(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^+} d(x) = +\infty.$$

3. Calculer les limites suivantes :

a) $a = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x}$

b) $b = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^6\right)}{[1-\cos(3x)]^3}$

c) $c = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

d) $d = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2\cos x - 3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}$

e) $e = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

f) $f = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[2\sin x - \sin(2x)]^2}{x^6}\,\sin(\frac{1}{x^6})\,.$

---

a) On factorise le numérateur pour pouvoir utiliser les IPE au voisinage de $x_0 = 0$.

$$\frac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x} = \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\,\sin x}\,.$$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\,\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2} \\ &= \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

b) Lorsque x tend vers 0, x^6 et $3x$ tendent vers 0. Donc

$$\sin\left(x^6\right) \sim x^6 \qquad \text{et} \qquad 1-\cos(3x) \sim \frac{(3x)^2}{2}\,, \qquad \text{au voisinage de } 0\,.$$

$$b = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^6\right)}{[1-\cos(3x)]^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{\left(\frac{(3x)^2}{2}\right)^3} = \frac{8}{729}\,.$$

c) A l'aide d'un changement de variable, on se ramène dans un voisinage de 0.

En posant $y = x - \frac{\pi}{2}$, on a $x = y + \frac{\pi}{2}$. Et si $x \to \frac{\pi}{2}$, alors $y \to 0$.

$$c = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+2\cos(y+\frac{\pi}{2})}-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y}$$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

On lève cette indétermination en amplifiant le numérateur par son expression conjuguée, puis en utilisant les IPE au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y}=\frac{[\,1-2\sin(y)\,]-1}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]}=\frac{-2\sin(y)}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]}\,.$$

Et au voisinage de 0, $\sin y$ et y sont des infiniment petits équivalents :

$$c=\lim_{y\to 0}\ \frac{-2\sin(y)}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]}=\lim_{y\to 0}\ \frac{-2}{\sqrt{1-2\sin(y)}+1}=-1\,.$$

d) On factorise le numérateur pour pouvoir utiliser les IPE au voisinage de $x_0=0$:

$$\frac{1+2\cos x-3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}\;=\;\frac{(1-\cos x)\,(1+3\cos x)}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}\,.$$

Lorsque x tend vers 0, $x^2\sqrt{4-x}$ tend aussi vers 0. Donc

$$\sin(x^2\sqrt{4-x}\,)\sim x^2\sqrt{4-x}\qquad\text{au voisinage de } 0\,.$$

$$d=\lim_{x\to 0}\ \frac{(1-\cos x)\,(1+3\cos x)}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\ \frac{\frac{x^2}{2}\,(1+3\cos x)}{x^2\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\ \frac{1+3\cos x}{2\,\sqrt{4-x}}=1\,.$$

e) Là aussi, on se ramène dans un voisinage de 0 à l'aide d'un changement de variable, en posant $y=1-x$:

$$y=1-x\quad\Leftrightarrow\quad x=1-y\,,\qquad \text{on a alors}\qquad x\to 1\quad\Leftrightarrow\quad y\to 0\,.$$

$$e=\lim_{x\to 1}\ \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\ \frac{(1-x)\,(1+x)}{\sin(\pi x)}=\lim_{y\to 0}\ \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi-\pi y)}=\lim_{y\to 0}\ \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi y)}\,.$$

Au voisinage de $y=0$, $\sin(\pi y)$ et πy sont des infiniment petits équivalents :

$$e=\lim_{y\to 0}\ \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi y)}=\lim_{y\to 0}\ \frac{y\,(2-y)}{\pi y}=\lim_{y\to 0}\ \frac{2-y}{\pi}=\frac{2}{\pi}\,.$$

f) La fonction $\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x\to 0$, mais est bornée.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \frac{[2\sin x-\sin(2x)]^2}{x^6}\ \sin\left(\tfrac{1}{x^6}\right)$ existe et vaut 0 si et seulement si

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \frac{[2\sin x-\sin(2x)]^2}{x^6}\;=\;0$. Calculons cette limite.

$$\frac{[\,2\sin x-\sin(2x)\,]^2}{x^6}\;=\;\frac{[\,2\sin x-2\sin x\ \cos x\,]^2}{x^6}\;=\;\frac{[\,2\sin x\,(1-\cos x)\,]^2}{x^6}\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{[\,2\sin x-\sin(2x)\,]^2}{x^6}\;=\;\lim_{x\to 0}\ \frac{[\,2x\,(\frac{x^2}{2})\,]^2}{x^6}\;=\;1\;\neq\;0\,.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \frac{[2\sin x-\sin(2x)]^2}{x^6}\ \sin\left(\tfrac{1}{x^6}\right)$ n'existe pas.

4. a) La fonction définie par $f(x) = |\tan x|\,(\cos\frac{1}{x})^3$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue en $x = 0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

---

a) La fonction f est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0} |\tan x| = 0$ et $\cos^3(\frac{1}{x})$ est borné $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} |\tan x|\cdot\cos^3(\frac{1}{x}) = 0$.

Donc f est continue en $x = 0$.

b) La fonction f est continue à droite en $x = \sqrt{2}$ ssi $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2}\,)$.

$f(\sqrt{2}\,) = \sqrt{2} - E(2) = \sqrt{2} - 2$, calculons $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)$:

Sur un voisinage à droite de $x = \sqrt{2}$: $x \in\,]\sqrt{2}, \sqrt{2}+\delta[$, $(0 < \delta < \sqrt{3} - \sqrt{2})$, on a $E(x^2) = 2$ car la fonction x^2 est croissante sur ce voisinage, donc

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \left[x - E(x^2)\right] = \sqrt{2} - 2 = f(\sqrt{2}).$$

La fonction f est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

5. Peut-on trouver des valeurs des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes soient continues en $x = 0$?

a) $a(x) = \dfrac{|x|(x+1)+x}{x^2(x+1)}$ si $x \neq 0$ et $a(0) = A$,

b) $b(x) = \dfrac{x\sqrt{3 - 4\cos x + \cos^2 x}}{|x|\,\sin x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = B$.

---

a) La fonction a est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} a(x) = a(0)$.

La présence de la valeur absolue nous oblige à calculer les limites à gauche et à droite de a en $x = 0$:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} a(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\,(x+1)+x}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1$,
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,(x+1)+x}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,(x+2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x\,(x+1)} = +\infty$.

La fonction a n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0, donc $\forall A \in \mathbb{R}$, la fonction a n'est pas continue en $x = 0$.

b) La fonction b est continue en $x=0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = b(0)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} b(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{3-4\cos x+\cos^2 x}}{|x|\,\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{(1-\cos x)\,(3-\cos x)}}{|x|\,\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\frac{x^2}{2}\,(3-\cos x)}}{|x|\,x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|\sqrt{\frac{3-\cos x}{2}}}{|x|\,x} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{\tfrac{3-\cos x}{2}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

La fonction b est donc continue en $x=0$ si et seulement si $B=1$.

6. Soient $f,\, g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0.
Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} [\,f(x)\cdot g(x)\,] = a\cdot b\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on cherche à déterminer $\delta > 0$ vérifiant

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,] - (a\cdot b)\Big| < \varepsilon\,,$$

sachant que

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, c'est à dire que
  $\forall\, \varepsilon_1 > 0\,,\ \exists\, \delta_1 > 0,\ (\delta_1 = \delta_1\,(\varepsilon_1)\,)$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |\,f(x) - a\,| < \varepsilon_1$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, c'est à dire que
  $\forall\, \varepsilon_2 > 0\,,\ \exists\, \delta_2 > 0,\ (\delta_2 = \delta_2\,(\varepsilon_2)\,)$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |\,g(x) - b\,| < \varepsilon_2$.

On cherche donc à exprimer $\Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,] - (a\cdot b)\Big|$ en fonction de $|\,f(x)-a\,|$ et de $|\,g(x)-b\,|$:

$$\begin{aligned}
\Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,]-(a\cdot b)\Big| &= \Big|\,[\,f(x)-a\,]\cdot g(x)+[\,g(x)-b\,]\cdot a\Big| \\
&\le \Big|\,[\,f(x)-a\,]\cdot g(x)\Big| + \Big|\,[\,g(x)-b\,]\cdot a\Big| \\
&= \big|f(x)-a\,\big|\cdot|\,g(x)\,| + \big|g(x)-b\,\big|\cdot|\,a\,|
\end{aligned}$$

Donc pour majorer $\Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,]-(a\cdot b)\Big|$ par ε, il suffit, par exemple, de majorer $\big|f(x)-a\,\big|\cdot|\,g(x)\,|$ et $\big|g(x)-b\,\big|\cdot|\,a\,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

- Majoration de $\big|f(x)-a\,\big|\cdot|\,g(x)\,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ donc $\exists\,\xi>0$ tel que $0<|x-x_0|<\xi \;\Rightarrow\; |\,g(x)\,|<|b|+1$
  - $\big|f(x)-a\,\big|$ est aussi petit que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0 :

    $$\exists\,\delta_1>0 \quad \text{tel que} \quad 0<|x-x_0|<\delta_1 \quad\Rightarrow\quad |\,f(x)-a\,|<\frac{\varepsilon}{2\,(|b|+1)}\,.$$

- Majoration de $\big|g(x)-b\,\big|\cdot|\,a\,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$:

  de même, $\exists\,\delta_2>0$ tel que $0<|x-x_0|<\delta_2 \quad\Rightarrow\quad |\,g(x)-b\,|<\dfrac{\varepsilon}{2\,|a|}\,.$

- Conclusion : pour tout $\delta\le\min\{\xi\,,\,\delta_1\,,\,\delta_2\}$, on a

$$0<|x-x_0|<\delta$$

$$\Rightarrow\quad \Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,]-(a\cdot b)\Big| \le \underbrace{\big|f(x)-a\,\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2\,(|b|+1)}}\cdot\underbrace{|\,g(x)\,|}_{<|b|+1}+\underbrace{\big|g(x)-b\,\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2\,|a|}}\cdot|\,a\,|<\varepsilon\,.$$
