Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 15 minutes. Barème sur 10 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère la matrice A dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1-a \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ? 2.5 pts

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = k \neq 0$.

Soit f l'endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ défini par la projection orthogonale de l'espace sur le plan $\Pi(0, \vec{u}, \vec{v})$.

(a) Donner une base propre de f et la matrice de f relativement à cette base.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} g\,:\, \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\longmapsto (\vec{x} \cdot \vec{u})\,\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{x}\,. \end{aligned}$$

(b) A l'aide d'une base propre de g, donner une interprétation géométrique de g.

(c) En utilisant une base propre commune à f et g à construire, déterminer k tel que l'endomorphisme h défini par

$$h = k^2 f - g + i_3$$

comporte dans sa décomposition une projection de $\mathbb{R}^3$ sur une droite (i_3 étant l'application identité dans $\mathbb{R}^3$). 4 pts

Tourner svp

3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$M_f = \begin{pmatrix} 2m & m-1 & (m+1)^2 \\ -2m & 1-m & -1 \\ m & 0 & 3m \end{pmatrix},$$

m étant un paramètre réel.

(a) Déterminer $m \geq 0$ pour que le noyau de f soit une droite de $\mathbb{R}^3$. Donner alors une base de $\ker f$.

On pose $m = -2$. Soit $\vec{b}$ donné par

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ \alpha + 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Déterminer α pour que $f^{-1}(\{\vec{b}\})$ soit l'ensemble vide. 3.5 pts