Série 5

Exercice 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la position relative des droites d et g :

a. $d : x + y = 1$, $g : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, g passe par $A(4, 5)$ et $B(6, 8)$.

c. $d : 3x - 4y + 3 = 0$, $g : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d. d passe par $A(1, 2)$ et a pour pente 3, $g : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Solution:

a. Etudions l'intersection de d et g. Pour cela, injectons les équations paramétriques de g dans l'équation cartésienne de d. On trouve :

$$(-1 + t) + (2 - t) = 1, \text{ c'est-à-dire } 1 = 1.$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout réel t, cela signifie que tous les points de g sont sur d, ou, autrement dit, que d et g sont confondues.

Autre façon de résoudre : la droite g passe par le point $A(-1, 2)$ et possède pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Or, le point A est aussi sur d, car $-1 + 2 = 1$, et le vecteur $\vec{v}$ est directeur de d, car $1 - 1 = 0$. On en déduit bien que d et g sont confondues.

b. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est directeur de d. Cette droite a donc pour pente $-\frac{2}{3}$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est directeur de g, qui a donc pour pente $\frac{3}{2}$. On en conclut que les droites d et g sont perpendiculaires, car $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$ (et le repère est orthonormé).

c. Etudions l'intersection de d et g. Pour cela, on injecte les équations paramétriques de g dans l'équation cartésienne de d. On trouve :

$$3(1 + 4t) - 4(4 + 3t) + 3 = 0, \text{ c'est-à-dire } -10 = 0.$$

Cette relation n'étant satisfaite pour aucune valeur de t, on voit que les droites d et g ne partagent aucun point en commun : elles sont donc parallèles.

d. La droite d possède une équation cartésienne de la forme :

$$y = 3x + \alpha$$

pour un certain réel α, car elle a pour pente 3. Exprimons maintenant qu'elle passe par $A(1, 2)$. On trouve :

$$2 = 3 + \alpha, \text{ c'est-à-dire } \alpha = -1.$$

La droite d possède donc pour équation cartésienne :

$$y = 3x - 1.$$

Etudions alors l'intersection de d et g. Le(s) point(s) dans cette intersection correspond(ent) au(x) paramètre(s) t tels que :

$$2t = 3(-1+t) - 1, \text{ c'est-à-dire } t = 4.$$

On voit donc que les droites d et g sont sécantes : elles s'intersectent en un unique point, celui de coordonnées $(3, 8)$.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(-3, -1)$ et $B\,(5, 9)$, ainsi que la droite d d'équation $2x - y + 12 = 0$.

a. Déterminer des équations paramétriques de la médiatrice m du segment AB.

b. Chercher un point M de la droite d qui soit équidistant des points A et B.

Solution:

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composante $\left(\begin{smallmatrix}8\\10\end{smallmatrix}\right)$, si bien que la droite (AB) a pour pente $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Comme le repère est orthonormé, toute droite perpendiculaire à (AB) a pour pente $-\frac{4}{5}$ et est donc dirigée par le vecteur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}5\\-4\end{smallmatrix}\right)$. Appelons alors O l'origine du repère utilisé. L'équation vectorielle de d vue depuis le point O est alors de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + t\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

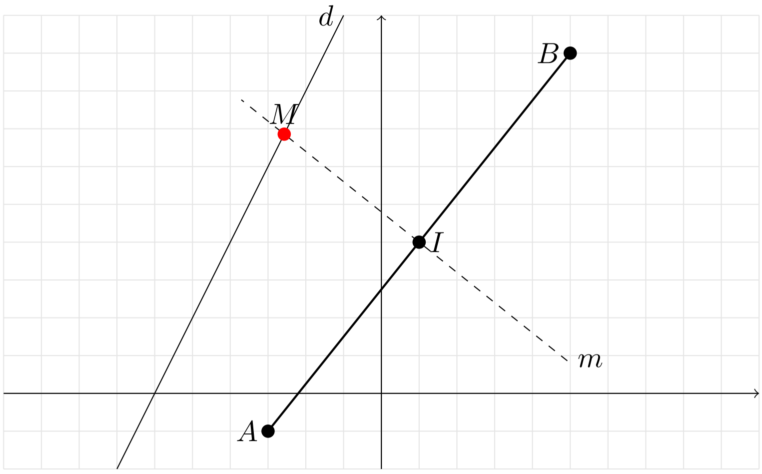
où I est le milieu du segment AB. Or I a pour coordonnées $(\frac{-3+5}{2}, \frac{-1+9}{2}) = (1, 4)$. On trouve alors les équations paramétriques suivantes pour la médiatrice :

$$m : \quad \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 4 - 4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b. Au point M recherché il doit correspondre une valeur du paramètre t dans les équations trouvées en a., car M est à même distance de A et B, et donc se trouve sur la médiatrice m. Il existe donc un réel t tel que M a pour coordonnées $(1 + 5t, 4 - 4t)$. Par ailleurs, M est aussi sur la droite d, si bien que ses coordonnées satisfont l'équation de d. On a donc :

$$2(1 + 5t) - (4 - 4t) + 12 = 0, \text{ autrement dit, } t = -\frac{5}{7}.$$

Le point M recherché a donc pour coordonnées $(-\frac{18}{7}, \frac{48}{7})$.



Exercice 3. On se donne trois points A, B, C dans le plan muni d'un repère orthonormé.

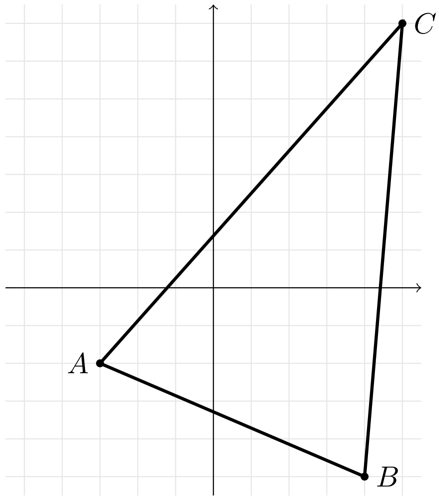
a. Les coordonnées de A, B, C sont : $A\,(-3, -2), B\,(4, -5), C\,(5, 7)$. Le triangle ABC est-il isocèle ?

b. Même question en supposant maintenant que $A\,(0, 6), B\,(-5, 3), C\,(3, 3)$.

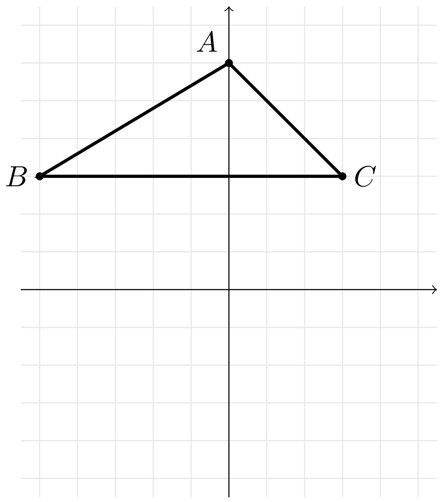
c. Sachant que les coordonnées de A, B et C sont $A\,(7, 1), B\,(5, 5), C\,(5, -3)$, calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution:

a. Calculons les longueurs des côtés du triangle ABC. Pour cela, on commence par calculer les composantes des vecteurs :
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}.$$
Comme le repère est orthonormé, on a alors :
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7^2+(-3)^2} = \sqrt{58} \text{ et, de même } \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{145}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{145}\,.$$
Comme $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, on en conclut que ABC est isocèle, de base AB.



b. En raisonnant de la même façon qu'à la question précédente, on trouve :
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{34}\,, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{18} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = 8\,.$$
Les trois côtés de ABC sont tous de longueurs différentes, il n'est donc pas isocèle.



c. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est situé à égale distance des trois sommets. Il se trouve donc à l'intersection de deux quelconques des médiatrices de ce triangle. Cherchons d'abord une équation cartésienne de la médiatrice du segment AB. D'après les données, on voit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et est donc colinéaire au vecteur de composantes $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Par conséquent la droite (AB) a pour pente -2, si bien que la médiatrice du segment AB, qui lui est perpendiculaire, a pour pente $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Elle possède donc une équation cartésienne de la forme :
$$y = \frac{1}{2}x + \alpha.$$
Pour trouver α, on exprime que cette médiatrice passe par le milieu du segment AB, qui a pour coordonnées $(\frac{7+5}{2}, \frac{1+5}{2}) = (6, 3)$. Par conséquent, on a :
$$3 = \frac{1}{2}\cdot 6 + \alpha \text{ si bien que } \alpha = 0.$$

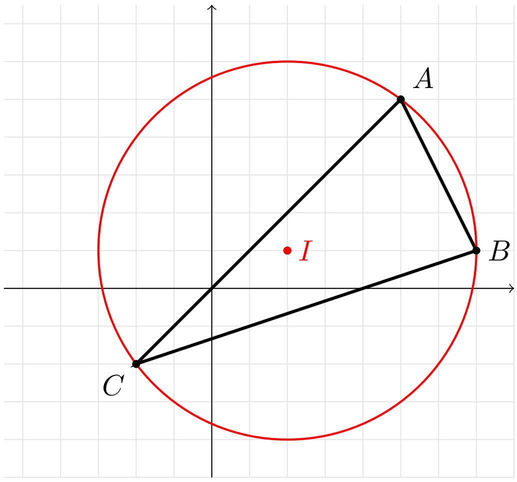
La médiatrice du segment AB a donc pour équation cartésienne :

$$y = \frac{1}{2}x.$$

En raisonnant de la même manière, on trouve une équation cartésienne de la médiatrice du segment BC :

$$y = -3x + 7.$$

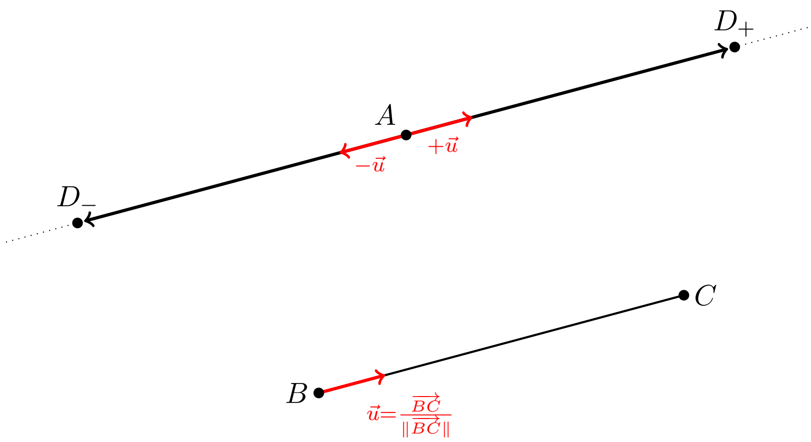
On trouve alors que le centre du cercle circonscrit a pour coordonnées $(2, 1)$.



> **Exercice 4.** On considère trois points A, B, C dans le plan, ainsi qu'un nombre réel positif α.
>
> a. Localiser vectoriellement depuis le point A, en fonction des données, un point D tel que le segment AD soit parallèle à BC et qu'il ait pour longueur α.
>
> b. Application numérique : $A\,(-2, -1)$, $B\,(6, 3)$, $C\,(3, 4)$ (dans un repère orthonormé du plan) et $\alpha = 10$.

Solution:

a. Sur une figure d'étude, on voit qu'il existe deux solutions pour le point D cherché :



Tout d'abord, comme les segments AD et BC doivent être parallèles, on voit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ doivent être colinéaires. Par conséquent, il doit exister un réel t tel que :

$$\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{BC}.$$

Il vient alors :

$$\alpha = \|\overrightarrow{AD}\| = |t|\|\overrightarrow{BC}\| \text{ et donc } t = \pm\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

On obtient finalement :

$$\overrightarrow{AD} = \pm\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{BC}\|}\overrightarrow{BC}.$$

b. Calculons tout d'abord les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC}$. On trouve :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}.$$

Comme le repère utilisé est orthonormé, on obtient :

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

Appelons (x, y) les coordonnées de D dans le repère utilisé. La relation trouvée au point a. nous donne alors :

$$\begin{pmatrix}x+2\\y+1\end{pmatrix} = \pm\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},$$

d'où l'on tire facilement les deux solutions possibles pour D :

$$D(-2-3\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}) \text{ ou } D(-2+3\sqrt{10}, -1-\sqrt{10}).$$

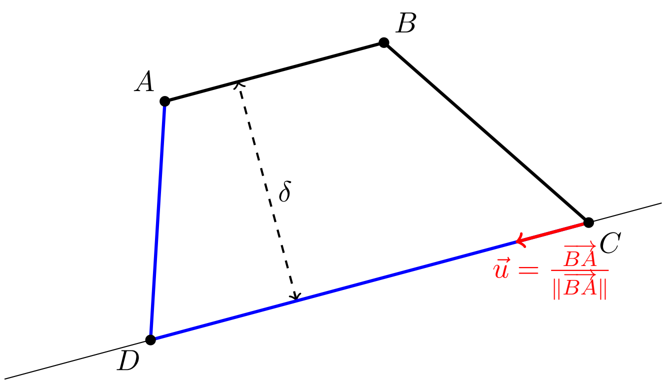
Exercice 5. On considère trois points A, B et C dans le plan. On note δ la distance de C à la droite (AB). Soit α un réel strictement positif.

a. Localiser vectoriellement depuis le point A, en fonction des données, le point D tel que $ABCD$ soit un trapèze de base CD, et d'aire fixée α.

b. Application numérique : $A\,(2,4)$, $B\,(-2,2)$, $C\,(-3,-3)$ (dans un repère orthonormé du plan), $\delta = \frac{9}{5}$, et $\alpha = \frac{27\sqrt{5}}{5}$.

Solution:

a. Figure d'étude :



On cherche la position de D (sur la droite parallèle à (AB), passant par C) de façon à ce que l'aire du trapèze $ABCD$ soit égale à α. En utilisant a formule donnant l'aire d'un tel trapèze, on obtient :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{CD}\| + \|\overrightarrow{BA}\|)\cdot\delta.$$

On sait donc que le côté CD doit être de longueur $\|\overrightarrow{CD}\| = \frac{2\alpha}{\delta} - \|\overrightarrow{BA}\|$. On détermine alors le vecteur $\overrightarrow{AD}$, à l'aide de l'unique vecteur unitaire de la droite (CD) ayant même sens que $\overrightarrow{BA}$, à savoir $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|}$. On obtient :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{CD}\|\vec{u} = \overrightarrow{AC} + (\tfrac{2\alpha}{\delta} - \|\overrightarrow{BA}\|)\vec{u}.$$

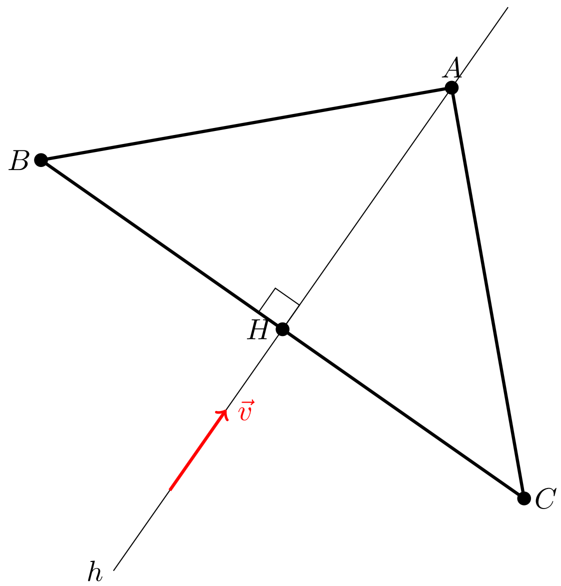
b. En insérant les valeurs données, on obtient $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$, ce qui donne $D\,(5,1)$.
Remarque : À partir de A, B et C, on peut calculer la distance δ (voir plus loin dans le cours), donc elle n'aurait en principe pas besoin d'être donnée dans l'énoncé du problème.

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un triangle ABC, isocèle de base BC, dont on connaît :

- une équation cartésienne de la hauteur issue de A : $3x + y - 26 = 0$,
- les coordonnées du sommet $B\,(-4, -2)$,
- l'aire $S = 120$ unités d'aire.

Calculer les coordonnées des deux sommets A et C. Retenir pour A la solution d'ordonnée positive.

Solution: Figure d'étude :



On note h la hauteur issue de A dans le triangle ABC, et H le pied de cette hauteur. La droite h a pour pente -3, si bien que la droite (BC), qui lui est perpendiculaire, a pour pente $\frac{1}{3}$. En imposant que cette droite passe par B, on trouve qu'elle a pour équation cartésienne :

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \text{ ou encore } -x + 3y + 2 = 0.$$

Le point H se trouve à l'intersection des droites h et (BC). Ses coordonnées sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + y - 26 = 0 \\ -x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système montre que H a pour coordonnées $(8, 2)$. La relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BH}$$

permet maintenant de prouver que les coordonnées de C sont $(20, 6)$. On peut maintenant calculer :

$$\overrightarrow{BC}\left(\begin{smallmatrix} 24 \\ 8 \end{smallmatrix}\right), \text{ donc } \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{24^2 + 8^2} = 8\sqrt{3^2 + 1^2} = 8\sqrt{10}.$$

L'aire du triangle ABC vaut alors :

$$\tfrac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| = 120, \text{ ce qui donne } \|\overrightarrow{AH}\| = 3\sqrt{10}$$

On trouve alors A en cherchant un point situé sur h, obtenu en reportant la distance $3\sqrt{10}$ depuis H. Pour ce faire, on utilise un vecteur directeur *unitaire* pour h, par exemple le vecteur $\vec{v}$ de composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc deux possibilités pour la position de A :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \pm 3\sqrt{10}\,\vec{v},$$

où on note O l'origine du repère utilisé. En utilisant les coordonnées de H calculées plus haut, cela donne $\overrightarrow{OA}\left(\begin{smallmatrix}11\\-7\end{smallmatrix}\right)$ ou $\overrightarrow{OA}\left(\begin{smallmatrix}5\\11\end{smallmatrix}\right)$. Comme on ne garde que la solution dont l'ordonnée est positive, le point cherché est $A\,(5, 11)$.

Exercice 7. Dans un plan, on considère un point A ainsi que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note d (resp. g) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).

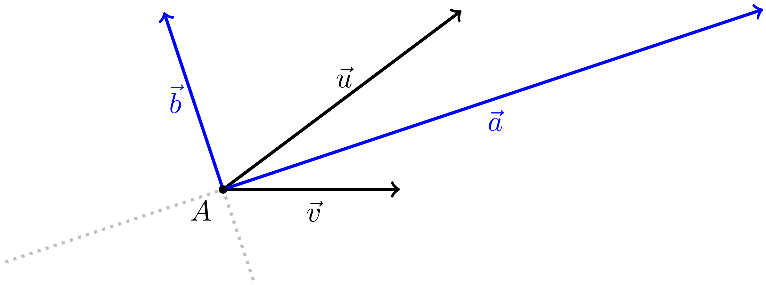
a. Déterminer des équations vectorielles des bissectrices de l'angle formé par les deux droites d et g, vues depuis le point A.

b. Déterminer des équations cartésiennes de ces bissectrices dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

c. On fixe un repère orthonormé du plan tel que $A(8, -7)$, $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right)$. Calculer des équations cartésiennes de ces bissectrices dans le repère utilisé.

Solution:

a. Figure d'étude :



On a vu au cours que les bissectrices recherchées sont dirigées par :

$$\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \text{ et } \vec{b} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} - \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

On obtient alors les équations vectorielles suivantes (vues depuis le point A) :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{a},\ t \in \mathbb{R} \text{ d'une part, et } \overrightarrow{AM} = t\vec{b},\ t \in \mathbb{R} \text{ d'autre part.}$$

b. Dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, on obtient donc pour la première bissectrice les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}t \\ y = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre t, on trouve donc l'équation cartésienne suivante :

$$\|\vec{u}\|x = \|\vec{v}\|y.$$

En travaillant de même avec l'autre bissectrice, on trouve l'équation cartésienne :

$$\|\vec{u}\|x = -\|\vec{v}\|y.$$

c. Pour les valeurs données dans l'énoncé, on trouve, comme le repère est orthonormé :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

On voit alors aisément que les bissectrices recherchées sont respectivment dirigées par le vecteur de composantes $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ et celui de composantes $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Les parties variables des équations cartésiennes correspondantes peuvent donc être prises égales à $-x+y$ et $x+y$. En imposant maintenant la condition que ces droites passent par A, on trouve :

$$-x + y + 15 = 0 \text{ et } x + y - 1 = 0.$$

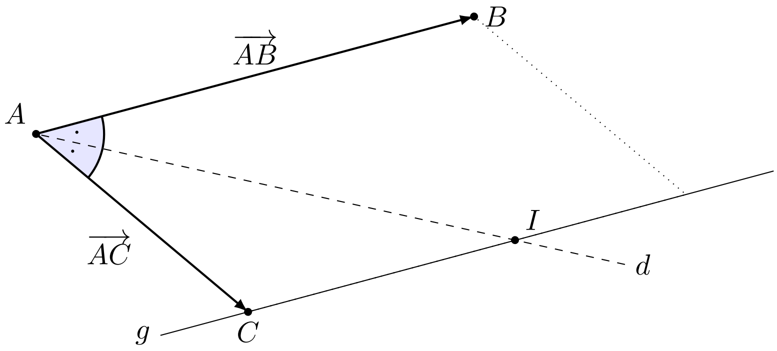
Exercice 8. Dans le plan, on considère un triangle ABC (non aplati). On note d la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et g la parallèle à (AB) passant par C.

a. Donner des équations vectorielles des droites d et g vues depuis le point A. Ces droites sont-elles parallèles ?

b. On note I le point d'intersection de d et g. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des données.

c. Déterminer une équation vectorielle de la droite (BI) en fonction des données. Cette droite intersecte-t-elle la droite (AC) ? Si oui, donner la valeur du paramètre correspondant au point d'intersection.

Solution: Figure d'étude :



a. Commençons par écrire une équation vectorielle de d vue depuis le point A. On sait d'après le cours que la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ est dirigée par le vecteur $\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC}$. Comme cette bissectrice passe par A, elle a pour équation vectorielle :

$$d : \overrightarrow{AM} = t(\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, la droite g passe par C et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Vue depuis le point A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$g : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}.$$

En comparant les vecteurs directeurs de ces deux droites on se rend compte qu'ils ne sont pas colinéaires. Par conséquent, d et g ne sont pas parallèles.

b. Le point I correspond à la position du point courant de d pour une certaine valeur t du paramètre, et à la position du point courant de g pour une certaine valeur s du paramètre. On a donc :

$$\overrightarrow{AI} = t(\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AB}.$$

Le triangle ABC n'étant pas aplati, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{t}{\|\overrightarrow{AB}\|} = s \\ \dfrac{t}{\|\overrightarrow{AC}\|} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } t = \|\overrightarrow{AC}\| \text{ et } s = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

En injectant ces valeurs plus haut, on trouve :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

c. La droite (BI) passe par B et est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = (\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Vue depuis A, elle admet donc comme équation vectorielle :

$$(BI) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t((\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (AC) possède, vue depuis A, l'équation vectorielle suivante :

$$(AC) : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC},\ t \in \mathbb{R}.$$

Pour décider si les droites (BI) et (AC) s'intersectent, on cherche à savoir s'il existe des réels s et t tels que :

$$\overrightarrow{AB} + t((\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = s\overrightarrow{AC},$$

ce qui, en raisonnant comme ci-dessus, conduit au système :

$$\begin{cases} 1 + t(\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} - 1) = 0 \\ \hfill t = s \end{cases}$$

On distingue alors deux cas. Tout d'abord, si $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$. Dans ce cas, la première équation devient $1 = 0$, qui est impossible à satisfaire. Dans ce cas les deux droites considérées sont parallèles et ne s'intersectent donc pas (c'est le cas où le triangle ABC est isocèle en A). Si maintenant on suppose que $\|\overrightarrow{AB}\| \neq \|\overrightarrow{AC}\|$, alors il y a une unique solution au système ci-dessus :

$$t = s = \frac{1}{1 - \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}.$$