Peter Wittwer

Analyse I – Série 4

Echauffement 1. (Formule d'Euler)

Vérifier les égalités suivantes :

i) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ *ii)* $e^{-i\pi} = -1$ *iii)* $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$

Echauffement 2. (Forme polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants :

i) e^{i+1} *ii)* $e^{-(i+1)}$ *iii)* $e^{-(i-1)}$ *iv)* $e^{(i-50)}$

v) $e^{(1-50i)}$

Exercice 1. (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

i) $(2-3i)(3+2i)$ *ii)* $\dfrac{2-3i}{4-5i}$ *iii)* $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{4567}$

iv) $(1+i\sqrt{3})^{10}$ *v)* $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$ *vi)* $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

vii) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$ *viii)* $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i}$ *ix)* $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Exercice 2. (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

i) $2+2i$ *ii)* $-1+i\sqrt{3}$ *iii)* $-1+i\,\mathrm{tg}(3)$

iv) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$ *v)* 2^i

Exercice 3. (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^5 = 1$ *ii)* $z^2 = -3+4i$ *iii)* $z^4 = -2i$ *iv)* $z^3 = -\sqrt{3}+i$

Représenter les résultats graphiquement.

Tourner la page svp.

Exercice 4. (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ *ii)* $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Exercice 5. (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8 .$$

Exercice 6. (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

Exercice 7. (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{z \in \mathbb{C} :\ z \neq 0,\ z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \{z \in \mathbb{C} :\ z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0, \text{ ou } |z| = 1\}.$$

Exercice 8. (V/F : Nombres complexes)

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.

Q2 : Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ soit purement imaginaire (c.-à-d. sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ soit réel.

Exercice 9. (QCM : Raçines de nombres complexes)

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \dfrac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

☐ $\left\{-3\,\mathrm{i},\ \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\right\}$ ☐ $\left\{3\,\mathrm{i},\ \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\right\}$

☐ $\left\{-3\,\mathrm{i},\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)\right\}$ ☐ $\left\{3\,\mathrm{i},\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right),\ -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\right\}$