Physique
Semestre d'automne 2018

Simon Bossoney
Guido Burmeister

moodle.epfl.ch

Corrigé 2

Exercice 1

On décompose le vecteur position $\vec{r}_i$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\vec{r}_i = (\vec{r}_i)_x\,\vec{e}_x + (\vec{r}_i)_y\,\vec{e}_y\,.$$

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_1$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_1)_x = +1\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_1)_y = +2\,\mathrm{cm}$.

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_2$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_2)_x = -2\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_2)_y = +1\,\mathrm{cm}$.

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_3$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_3)_x = +0.5\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_3)_y = -1\,\mathrm{cm}$.

Exercice 2

On décompose le vecteur position $\vec{r}_i$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\vec{r}_i = (\vec{r}_i)_x\,\vec{e}_x + (\vec{r}_i)_y\,\vec{e}_y\,.$$

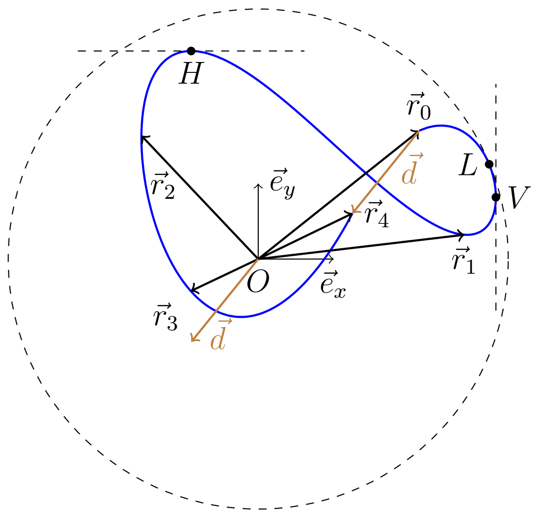
- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_1$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_1)_x = 0\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_1)_y = -1.5\,\mathrm{cm}$.

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_2$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_2)_x = -2\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_2)_y = 0\,\mathrm{cm}$.

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_3$
  selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_3)_x = +||\vec{r}_3||\sin\alpha = +1\,\mathrm{cm}$
  selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_3)_y = +||\vec{r}_3||\cos\alpha = +\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Exercice 3

Le vecteur position est un vecteur allant de l'origine O à l'objet. Il fournit donc la position de l'objet dans le référentiel. On obtient les vecteurs position cherchés en observant les positions possibles de l'objet (c'est-à-dire la trajectoire de ce dernier).
Sur la figure ci-dessous, les vecteurs position ont été représentés pour les cinq instants $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 1\,\mathrm{s}$, $t_2 = 2.5\,\mathrm{s}$, $t_3 = 3\,\mathrm{s}$ et $t_4 = 4\,\mathrm{s}$. Le vecteur déplacement total $\vec{d}$ est également donné.



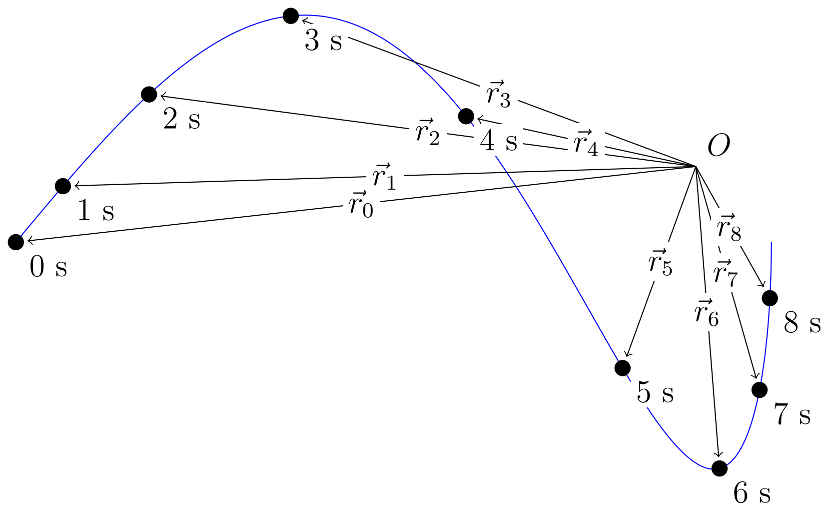
La position sur la trajectoire la plus éloignée de O est le point $L(3.06\,\text{cm}, 1.25\,\text{cm})$.

La position sur la trajectoire la plus éloignée de O selon $\vec{e}_x$ est le point $V(3.15\,\text{cm}, 0.82\,\text{cm})$.

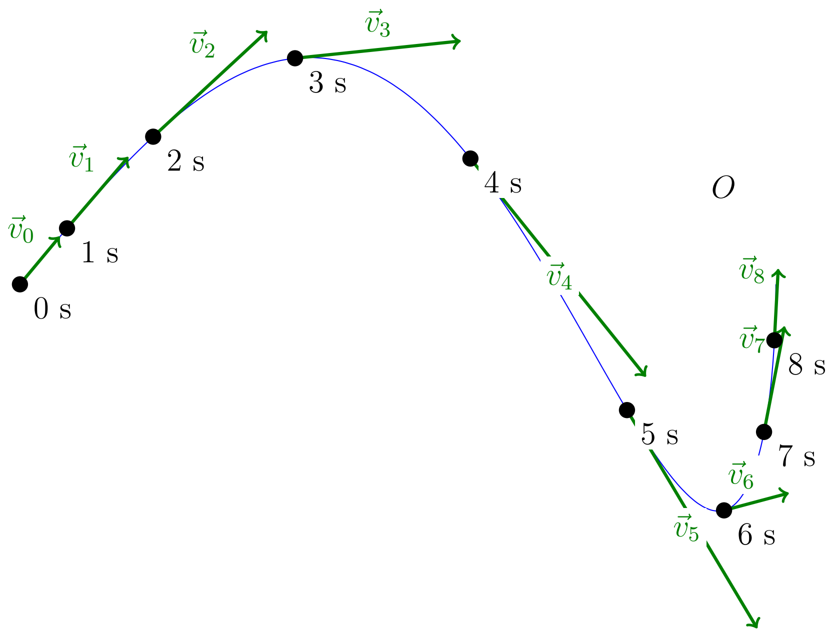
La position sur la trajectoire la plus éloignée de O selon $\vec{e}_y$ est le point $H(-0.89\,\text{cm}, 2.75\,\text{cm})$.

Exercice 4

Utiliser la définition du vecteur position.
Choisir une origine.

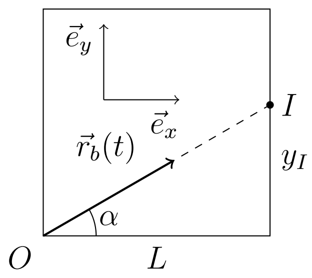


Imaginer le mouvement de l'objet.
Se rappeler la définition intuitive de la vitesse (grandeur vectorielle) : elle est tangente à la trajectoire, donne le sens du mouvement et indique le taux de variation de la position par rapport au temps.
On peut comparer les normes des différents vecteurs vitesse en se basant sur les distances parcourues en 1 seconde par l'objet. On en déduit par exemple que la norme de la vitesse est plus grande à l'instant $t = 4\,\text{s}$ qu'à l'instant $t = 6\,\text{s}$.



Exercice 5

Sur la base d'un dessin muni d'un repère, on caractérise la trajectoire de la bille.
On esquisse la trajectoire de la bille.
Le mouvement de la bille est rectiligne et uniforme (MRU).



Le point I où la bille quitte la table est aisément décrit par rapport à une origine O au point de départ de la bille et avec un repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ parallèle aux bords de la table :

$$I = (L, y_I)\,.$$

Il reste à déterminer la composante y_I .
Un peu de trigonométrie...

$$\tan\alpha = \frac{y_I}{L} \quad\Longrightarrow\quad y_I = L\tan\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}}\,.$$

La connaissance de la position de la bille à chaque instant $\vec{r}_b(t)$ permet de résoudre toutes les questions relatives à sa cinématique.
Ecrire l'équation horaire de la bille, vectoriellement, $\vec{r}_b(t)$.
En choisissant l'instant de départ $t_0 = 0$, l'horaire est donné par

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

Ecrire cette équation horaire dans le repère choisi.

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t) &= v_{0x}\, t = v_0 \cos\alpha\, t\,, \\ y_b(t) &= v_{0y}\, t = v_0 \sin\alpha\, t\,. \end{aligned}$$

Exploiter le critère caractérisant le temps de séjour de la bille sur la table.
Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$\vec{r}_b(t_s) = \overrightarrow{OI}\,.$$

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t_s) &= v_0 \cos\alpha\, t_s = L\,, \\ y_b(t_s) &= v_0 \sin\alpha\, t_s = y_I\,. \end{aligned}$$

La première de ces équations donne le temps nécessaire à la bille pour parcourir une distance L (selon $\vec{e}_x$) :

$$t_s = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

Remarque : la seconde équation permet alors de déterminer y_I. Plus simplement encore, le quotient membre à membre des deux équations permet d'éliminer t_s :

$$\frac{y_b(t_s)}{x_b(t_s)} = \frac{v_0 \sin\alpha\, t_s}{v_0 \cos\alpha\, t_s} = \tan\alpha = \frac{y_I}{L} \Longrightarrow y_I = L\tan\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}}\,.$$

Si la trajectoire et le sens du mouvement sont connus, la connaissance de la distance parcourue à chaque instant permet de résoudre certains problèmes de cinématique.
Ecrire la distance de la bille à l'origine à chaque instant.
Notons $s_b(t)$ cette distance :

$$s_b(t) = v_0\, t\,.$$

Exploiter le critère caractérisant le temps de séjour de la bille sur la table.
Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$s_b(t_s) = ||\overrightarrow{OI}||\,,$$

la distance entre O et I étant donnée par le théorème de Pythagore.
Alors

$$s_b(t_s) = v_0\, t_s = \sqrt{L^2 + y_I^2} = L\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2L}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t_s = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

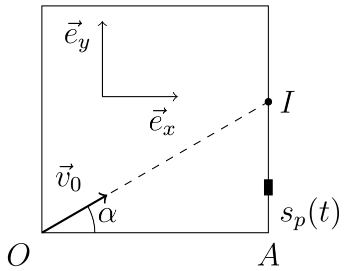
Remarque : cette méthode est certes tout à fait valable. Cependant, elle n'est de loin pas aussi générale que la première méthode proposée.

Exercice 6

On connaît le mouvement de la cible et celui de la paroi. On peut donc calculer le temps du parcours vers le point I, point où la bille quitte la table.
Les calculs pour la bille ayant déjà été faits dans un exercice précédent, il suffit de les faire pour la paroi mobile.

Notons $s_p(t)$ la distance de la paroi mobile au point A. Celle-ci quittant le point A au même instant $t = 0$ que la bille le point O, on a

$$s_p(t) = v_0\, t\,.$$



Pour rappel, le point I est donné par $I(L, y_I)$, avec

$$y_I = L \tan\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}}\,.$$

Notons t_I l'instant où la paroi mobile passe au point I :

$$s_p(t) = v_0\, t_I = y_I \Longrightarrow t_I = \frac{y_I}{v_0} = \frac{L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

Ce temps est la moitié du temps de séjour de la bille sur la table (en effet, celle-ci parcourt un chemin deux fois plus long). Les deux objets ne se rencontrent pas.
Le problème pose la question d'une rencontre éventuelle entre la bille et la paroi mobile : se trouvent-elles au même endroit à un instant donné ?
Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O.
Il y a rencontre entre ces deux objets ssi

$$\exists\, t_r \text{ t.q. } \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r)\,,$$

c'est-à-dire ssi il existe un instant auquel les positions (vectorielles !) coïncident.
Ecrire l'équation horaire de la bille $\vec{r}_b(t)$ d'une part et celle de la paroi mobile $\vec{r}_p(t)$ d'autre part (par rapport à la même origine).
La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p\, t + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.
Appliquer le critère de rencontre vectoriellement et sur les composantes des positions.
On cherche à déterminer l'existence de t_r tel que

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0\, t_r &= \vec{v}_p\, t_r + \vec{r}_{p0}\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha\, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha\, t_r = v_0\, t_r\,.$$

La seconde équation impose que $\sin\alpha = 1$ pour $t_r \neq 0$, ce qui est faux.
Un tel temps de rencontre n'existe donc pas.

La rencontre doit avoir lieu : la bille et la paroi mobile doivent se trouver au même endroit à un instant donné.
Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O.
Il y a rencontre entre ces deux objets ssi

$$\exists\, t_r \text{ t.q. } \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r)\,,$$

c'est-à-dire ssi il existe un instant auquel les positions (vectorielles !) coïncident.
Ecrire l'équation horaire de la bille $\vec{r}_b(t)$ d'une part et celle de la paroi mobile $\vec{r}_p(t)$ d'autre part (par rapport à la même origine).
La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant t_{p0} :

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p\,(t - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.
Appliquer le critère de rencontre vectoriellement et sur les composantes des positions.
On cherche à déterminer t_{p0} tel que t_r existe avec

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0\, t_r &= \vec{v}_p\,(t_r - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha\, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha\, t_r = v_0\,(t_r - t_{p0})\,.$$

Remarque : la rencontre doit avoir lieu dans les deux composantes ! Autrement dit, l'instant de départ t_{p0} de la paroi doit être tel que t_r vérifie les deux équations simultanément.
La première équation donne

$$t_r = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

La seconde équation donne finalement

$$t_{p0} = (1 - \sin\alpha)\, t_r = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{2L}{v_0\sqrt{3}} = \frac{L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 7

Reprendre les définitions, intuitives et exactes, des vecteurs position, vitesse et accélération.
Le vecteur position (grandeur vectorielle) indique la position de l'objet à partir de l'origine choisie.

La vitesse (grandeur vectorielle) donne le sens du mouvement et indique le taux de variation de la position par rapport au temps. Elle est tangente à la trajectoire.

L'accélération (grandeur vectorielle) donne le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. Elle est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage.
Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas réalistes :

- La vitesse $\vec{v}$ doit être tangente à la trajectoire ;

- l'accélération $\vec{a}_1$ doit être dirigée vers l'intérieur du virage ;
- la vitesse $\vec{v}_2$ doit être tangente à la trajectoire.

Exercice 8

Imaginer le mouvement de l'objet.
Se rappeler la définition intuitive de l'accélération (grandeur vectorielle) : elle indique le taux de variation de la vitesse par rapport au temps (et est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage).
Les changements dans la norme de la vitesse permettent alors d'approximer la composante de l'accélération tangente à la trajectoire. On obtient ainsi par exemple que l'accélération tangentielle doit être dirigée vers l'arrière à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$. La composante de l'accélération normale à la trajectoire est absente (lorsque l'objet se déplace en ligne droite) ou dirigée vers l'intérieur du virage.