Contrôle de géométrie analytique N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Dans l'espace muni d'une origine O, on donne

- un plan α défini par le point O et un vecteur normal $\vec{n}$ unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$),
- une droite d passant par O et de direction $\vec{n}$,
- un point A, $A \notin d$, $A \notin \alpha$.

a) On note I la projection orthogonale de A sur la droite d.
Déterminer l'expression du rayon vecteur $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\vec{n}$.

Réponse : $\overrightarrow{OI} = (\vec{a} \cdot \vec{n})\ \vec{n}$

b) Soit B le symétrique de A par rapport à α et $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{n}$.
Déterminer, en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{n}$, les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BM}$.

Réponse : $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - 2(\vec{a} \cdot \vec{n})\ \vec{n}$ et $\overrightarrow{BM} = \vec{n} + 2(\vec{a} \cdot \vec{n})\ \vec{n}$

c) On pose $\|\vec{a}\| = a > 1$.
Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{n}$ lorsque $\|\overrightarrow{BM}\| = 1$.

Réponse : $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{a}\right)$

3.5 pts

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne les coordonnées de trois points A, C et M et les équations cartésiennes d'une droite g.

$$A\,(2\,;\,1\,;\,3)\ ,\quad C\,(2\,;\,-3\,;\,-5)\ ,\quad M\,(0\,;\,0\,;\,-1)\ ,\quad g:\ \frac{x}{2} = y = z$$

On note α le plan passant par les points A, C et M.

On considère un losange de sommets $ABCD$.

Déterminer les coordonnées de B et D sachant que :

- les points B et D sont dans α,

- le côté AB est contenu dans un plan qui est perpendiculaire à α et parallèle à la droite g.

Réponse : $B(-3\,;\,1\,;\,-2)$ et $D(7\,;\,-3\,;\,0)$ 5.5 pts

3. Dans l'espace muni d'une origine O, on donne un plan α passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un point A $(A \notin \alpha)$ et deux vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$.

On considère les droites $d = (A, \vec{d})$ et $g = (O, \vec{g})$.

On suppose que ces droites sont gauches et ne sont pas orthogonales à α.

a) Soit β le plan othogonal à α et contenant g.
On note I le point d'intersection de d et β.

Sans utiliser de coordonnées et en fonction des données, déterminer :

- le vecteur $\overrightarrow{OI}$.
- l'équation vectorielle d'une droite s orthogonale à α et qui coupe d et g.

(On ne demande pas de discuter les positions particulières.)

4 pts

Réponse :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AO} \cdot (\vec{g} \times (\vec{u} \times \vec{v}))}{\vec{d} \cdot (\vec{g} \times (\vec{u} \times \vec{v}))}\,\vec{d}$$

$$s : \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AO} \cdot (\vec{g} \times (\vec{u} \times \vec{v}))}{\vec{d} \cdot (\vec{g} \times (\vec{u} \times \vec{v}))}\,\vec{d} + \lambda\,(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) **Application numérique :** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\,(4\,;\,0\,;\,2)$.

Déterminer l'équation vectorielle de la droite s.

Réponse : $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2 pts