Cours de mathématiques spéciales (CMS)

Semestre de printemps ID: -999

(écrire lisiblement s.v.p)

Nom:

Question	Pts max.	Pts
1	$7\frac{1}{2}$	
2	5	
3	71/2	
Total	20	



Indications

- Durée de l'examen : 100 minutes.
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée à l'encre sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
 - Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants; chaque feuille supplémentaire doit porter nom, prénom, n° du contrôle, branche, ID et date. Elle ne peut être utilisée que pour une seule question.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues agrafées.

Question 1 (à $7\frac{1}{2}$ points)

Points obtenus: (laisser vide)

Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on définit la conique C par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C}: x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y - 2 = 0$$

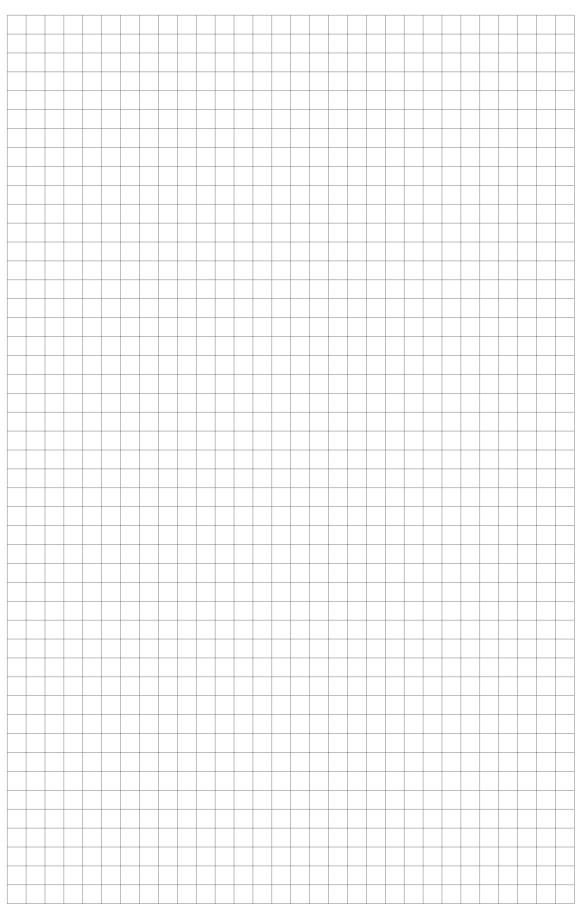
- (a) Déterminer l'équation réduite de \mathcal{C} et le nouveau repère R_u dans lequel l'équation est réduite.
- (b) Représenter avec soin et précision la conique dans le repère R_e . (1 unité = 3 carrés)
- (c) Déterminer, dans le repère R_e , les coordonnées des foyers de C.

Réponse à la question 1:

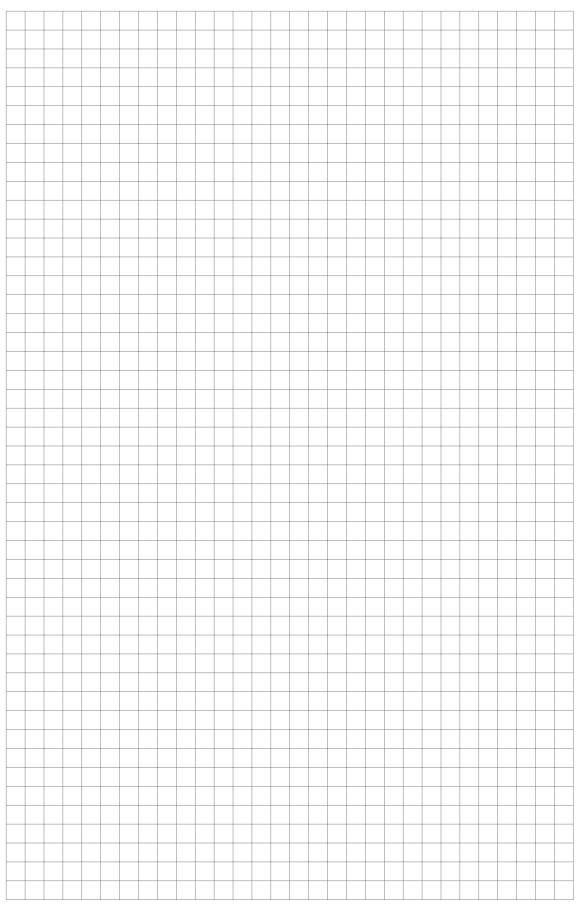
laisser la marge vide



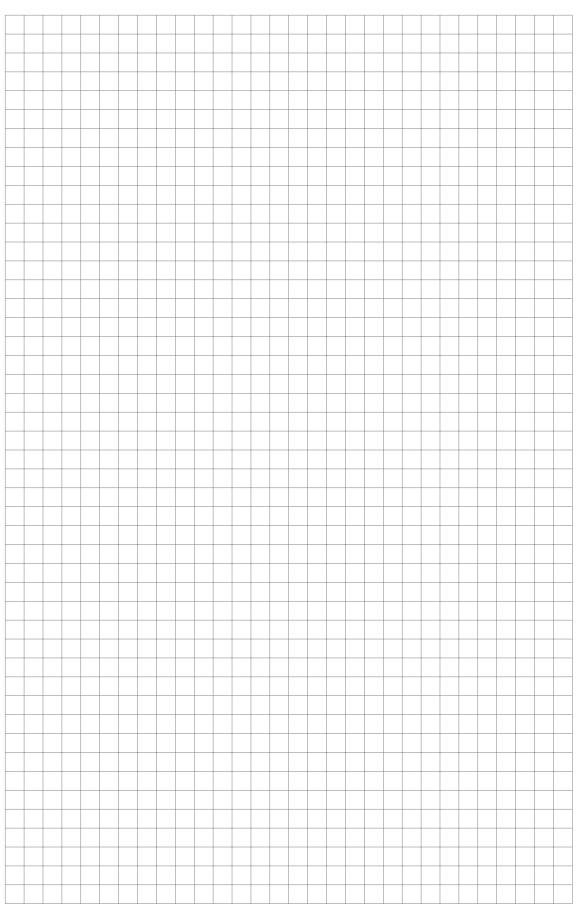
laisser la marge vide



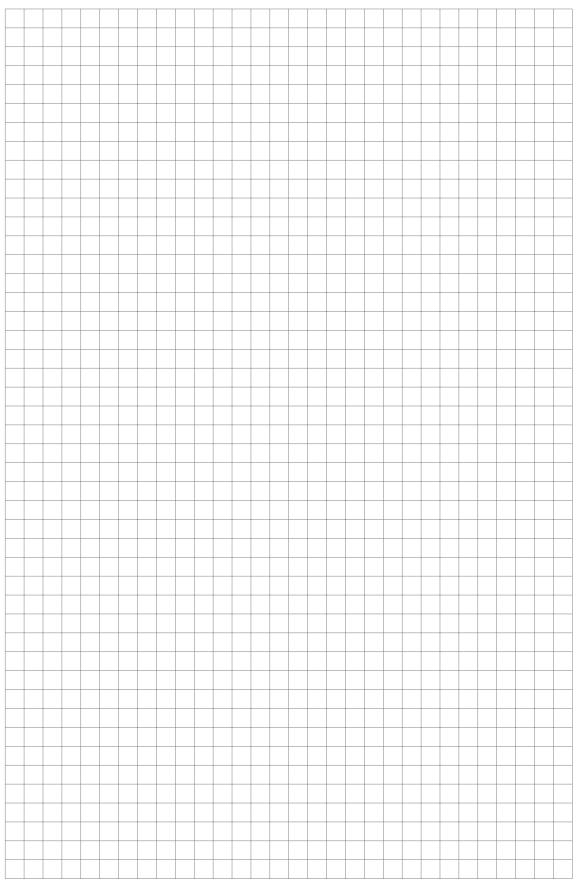
laisser la marge vide



laisser la marge vide



laisser la marge vide



Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:

Question 2 (à 5 points)

Points obtenus: (laisser vide)

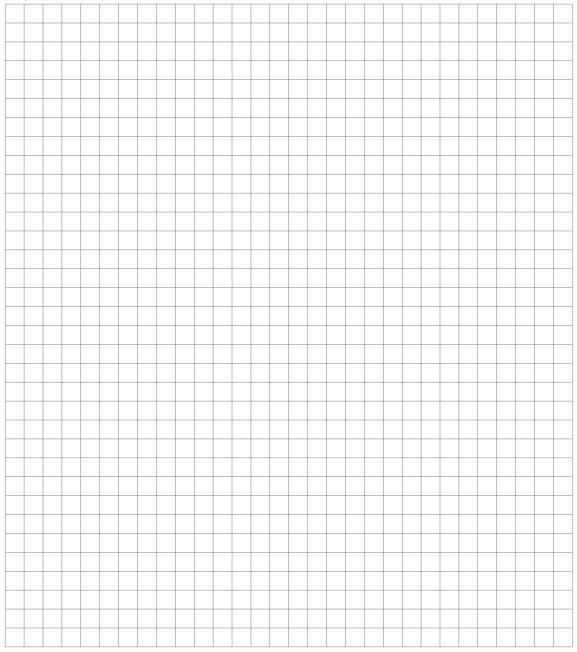
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne l'équation d'une famille de coniques dépendante d'un paramètre $\,m\,$:

$$\mathcal{F}: (3-m)x^2 + 2(m+2)xy - y^2 - 2mx + 4y + 3m - 5 = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

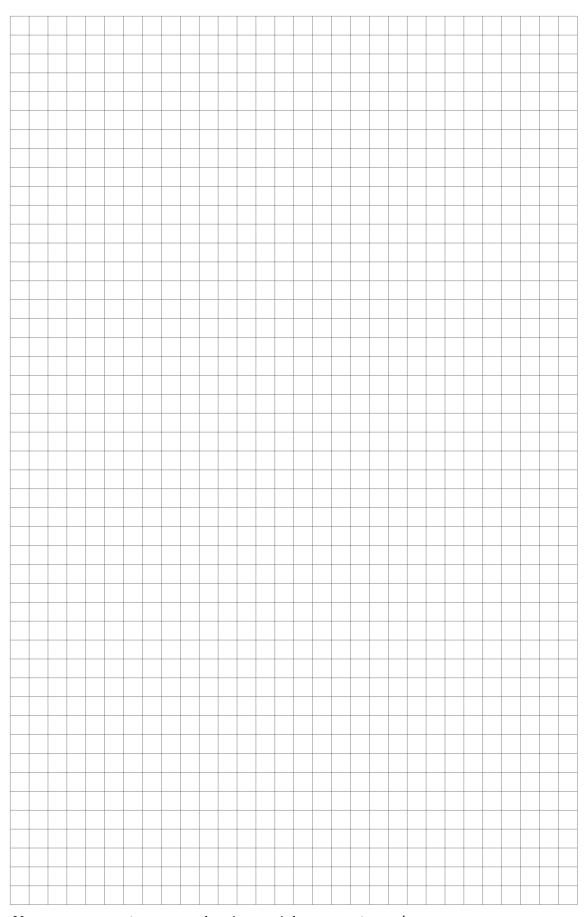
- (a) Déterminer en fonction du paramètre m, le genre des coniques de la famille \mathcal{F} (on ne demande pas les cas de dégénérescence).
- (b) On considère les coniques de \mathcal{F} qui possèdent un centre. Déterminer l'équation cartésienne du lieu des centres des coniques. Déterminer la nature de ce lieu (sans en faire l'étude).

Réponse à la question 2:

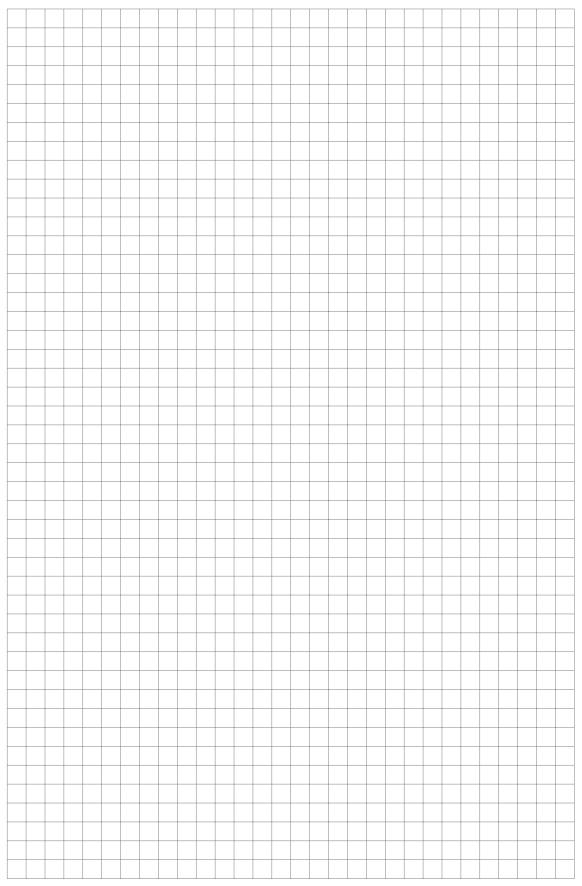
laisser la marge vide



laisser la marge vide



laisser la marge vide



Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:

Question 3 (à 7½ points)

Points obtenus: (laisser vide)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole \mathcal{H} d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$ et le point $M(-2, 0) \in \mathcal{H}$.

- (a) Représenter avec soin l'hyperbole \mathcal{H} dans un système d'axes cartésien d'unité 1cm.
- (b) Déterminer l'équation cartésienne d'une parabole $\mathcal P$ dont l'axe coïncide avec l'axe imaginaire de $\mathcal H$ et telle que les courbes $\mathcal P$ et $\mathcal H$ se coupent orthogonalement en M

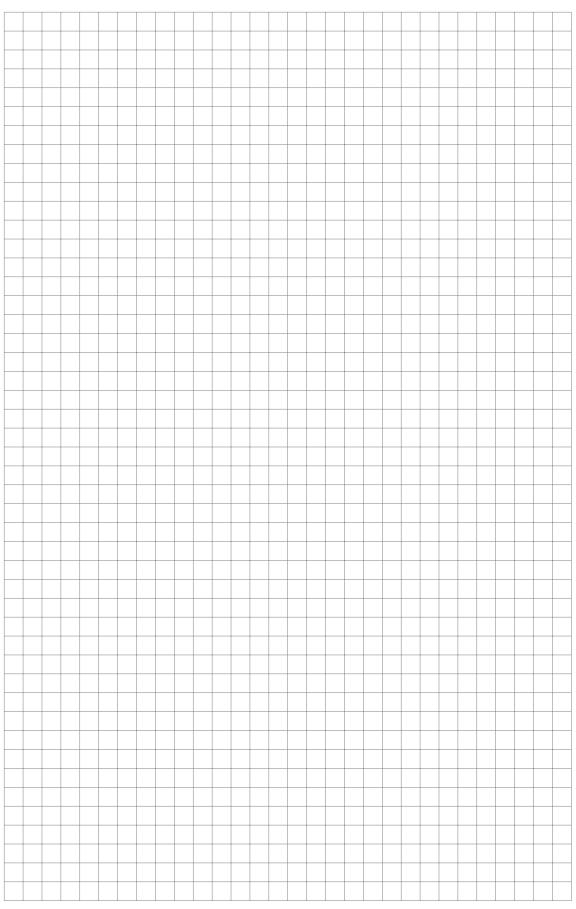
Donner les coordonnées du foyer F et l'équation de la directrice d de \mathcal{P} .

Réponse à la question 3:

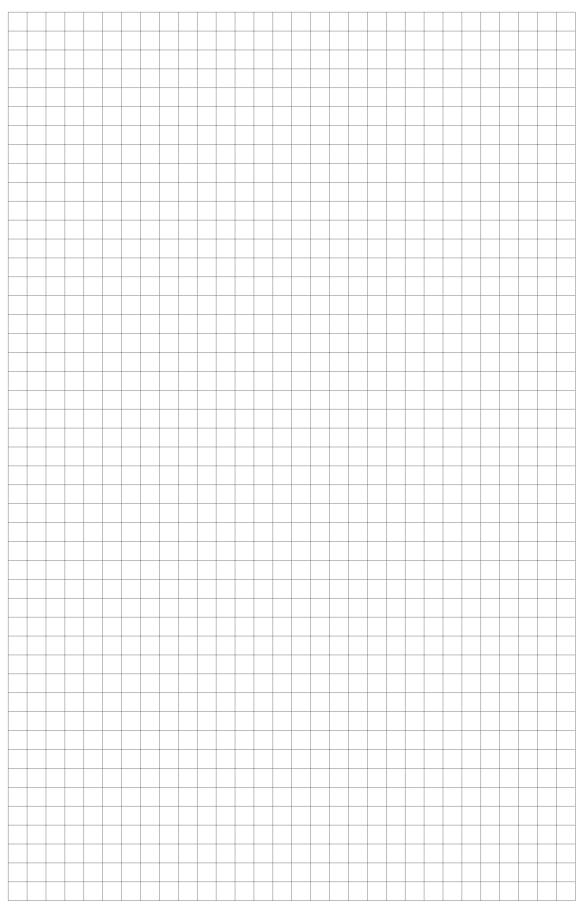
laisser la



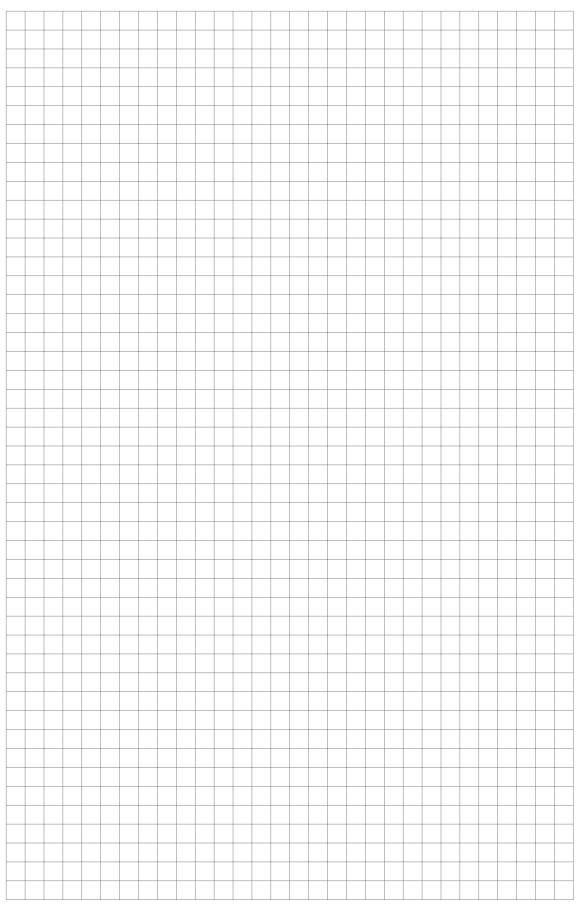
laisser la marge vide



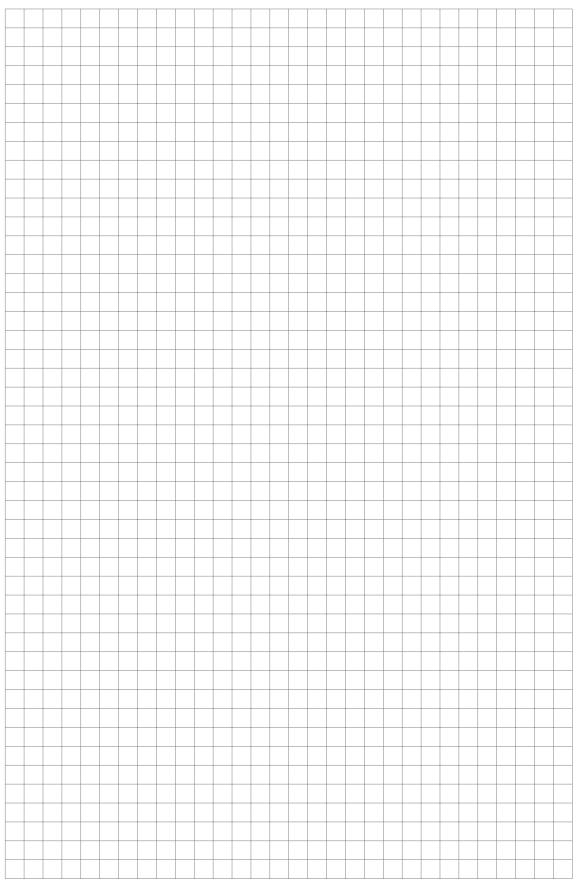
laisser la marge vide



laisser la marge vide



laisser la marge vide



Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit:

Solutions:

Question 1

(a) Equation réduite de $\mathcal{C}: 3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 6 = 0$.

Repère
$$R_u = (\Omega, \vec{u_1}, \vec{u_2})$$
 où $\Omega(0, -2)$, $\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1\\1 \end{pmatrix}$

(c)
$$F(2,0)$$
 et $F'(-2,-4)$.

Question 2

(a) Les coniques de la famille \mathcal{F} sont toutes de genre hyperbole.

(b)
$$5x^2 - xy + y^2 + 4x - 3y + 2 = 0$$

Le lieu des centres des coniques est une ellipse non-dégénérée.

Question 3

(b)
$$\mathcal{P}: (x-1)^2 = -6(y-\frac{3}{2}), F(1,0) \text{ et } d: y=3$$