Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 6**

Exercice 1. *Réduire les matrices suivantes à une forme échelonnée et déterminer le rang ligne de la matrice.*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Solution 1. a) Une forme échelonnée de la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -11 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 40 & -60 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -47 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de l'énoncé est de rang ligne 4.

b) Une forme échelonnée de la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -11 & 6 & -6 \\ 0 & 11 & 7 & -36 & 20 & -21 \\ 0 & 0 & 69 & -182 & 84 & -130 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de l'énoncé est de rang ligne 4.

Exercice 2. *Décrire l'ensemble des triplets* (a, b, c) *rendant le rang ligne de la matrice* A *égal à* 2, *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ -2 & -1 & c & a \end{pmatrix}$

Solution 2. On commence par échelonner la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ -2 & -1 & c & a \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\to\text{L2+L1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & a+b & b+c \\ -2 & -1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+2\cdot\text{L1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & a+b & b+c \\ 0 & 1 & c+2a & a+2b \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\leftrightarrow\text{L2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & c+2a & a+2b \\ 0 & 3 & a+b & b+c \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}-3\cdot\text{L2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & c+2a & a+2b \\ 0 & 0 & -5a+b-3c & -3a-5b+c \end{pmatrix}.$$

La matrice A est de rang ligne deux si et seulement si $-5a+b-3c=0$ et $-3a-5b+c=0$. Si ces deux équations sont vérifiées, on a $b = 5a+3c$ et $c = 3a+5b = 3a+5(5a+3c) = 28a+15c$, ce qui donne $c = -2a$, et $b = -a$, et a est arbitraire.

Exercice 3. *Trouver une base de chacun des sous-espaces W suivants.*

a) Soit $W := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\right)$ *(un sous-espace de* $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$*).*

b) Soit W l'espace lignes de la matrice $\begin{pmatrix}5 & 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ *(un sous-espace de* $\mathbb{R}^5$*).*

c) Soit W l'espace colonnes de la matrice $\begin{pmatrix}5 & 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ *(un sous-espace de* $\mathbb{R}^4$*).*

Solution 3. a) On considère la matrice où les vecteurs de la liste sont rentrés en lignes (via coefficients dans la base canonique)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Le procédé d'échelonnage donne

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Donc W est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ de dimension 3 (puisque le rang ligne de la matrice est 3). On considère la liste formée par les trois permiers vecteurs. Ainsi, une base de W est donnée par

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

b) Pour connaître la dimension de W, on échelonne la matrice et on obtient

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -29 & 49\end{pmatrix}.$$

Donc W est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ de dimension 4. Une base de W est alors donnée par les vecteurs lignes de la matrice de départ.

c) On échelone la matrice $\begin{pmatrix}5 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ et obtient une forme échelonnée (non unique) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
On dédutit que la dimesnion de l'espace des colonnes est égale à 4, qui est la même que la dimesnion de $\mathbb{R}^4$ et donc une base de l'espace des colonnes est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Exercice 4. *Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs dans l'ensemble S donné sont linéairement indépendants, et ensuite prolonger S en une base de V.*

a) $S \subseteq V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $S \subseteq V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $S = \{2x^2+1, x^4-3x^3+x^2+x+1, x^3+2x^2-1, x^4-1\}$

c) $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *où* V *est un espace vectoriel avec base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *et* $v_1 = e_1+e_2+e_4$, $v_2 = e_1-e_2+e_3-2e_4-e_5$ *et* $v_3 = -e_1+e_2+e_3+e_4$, $v_4 = 2e_3+e_5$.

Solution 4. On écrit les matrices comme vecteurs coordonnées par rapport à la base usuelle de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) On échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs est bien 4 et donc les vecteurs sont linéairement indépendants. On voit également que si on rajoute les lignes 0 0 0 0 1 0 et 0 0 0 0 0 1 à cette matrice, ces 6 lignes sont linéairement indépendants. Donc on peut rajouter les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

b) On écrit les matrices comme vecteurs coordonnées par rapport à la base usuelle de $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. En échelonnant la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc ces 4 vecteurs sont bien linéairement indépendants et un vecteur de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas engendré par S est $p(x) = x^4$. En rajoutant le vecteur $p(x) = x^4$ à la liste S, on obtient une liste linéairement indépendante composée de cinq vecteurs de V, donc une base.

c) En échelonnant la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc un vecteur de V qui n'est pas engendré par S est e_5. En rajoutant le vecteur $v_5 = e_5$ à la liste S, on obtient une liste linéairement indépendante composée de cinq vecteurs de V, donc une base.

Exercice 5. *Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a, la matrice suivante est-elle de rang ligne maximal ? Quel est le rang ligne de la matrice pour les autres valeurs de a ?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solution 5. Noter d'abord que le rang ligne de cette matrice est au plus 4 car c'est la dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par 4 vecteurs. Le procédé d'échelonnage de la matrice nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}-\text{L2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\text{L3}\leftrightarrow\text{L2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+a\text{L2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a(1-a) & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, on remarque que si a est différent de 0 et 1, la matrice est de rang ligne 4, qui est le rang ligne maximal. De plus, si $a = 0$, la matrice échelonnée de la matrice de départ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc, dans ce cas le rang ligne est 3. Enfin, si $a = 1$, la matrice échelonnée de la matrice de départ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et donc, le rang ligne est 4. Donc le rang ligne est maximal si $a \neq 0$.

Exercice 6. *Démontrer que $\mathcal{B} = \{x^3 - 1, x^2 + 1, 2x - 3, 2x^3 - 2x + 5\}$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ et ensuite trouver les composantes du vecteur $\mathbf{p}(x) = x^2$ par rapport à la base ordonnée $\mathcal{B}$.*

Solution 6. Comme $\mathcal{B}$ est une liste composée de quatre vecteurs et comme $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, il suffit de vérifier que les vecteurs forment une liste génératrice ou bien qu'ils sotn linéairement indépendants. (Voir les critères dans dans §4.5 du MOOC. On échelonne la matrice (composée des vecteurs exprimés dans la base canonique $\{1, x, x^2, x^3\}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on obtient la matrice identité qui est de rang ligne quatre. Ainsi les vecteurs de $\mathcal{B}$ engendrent tout $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Pour determiner les coefficients de $p(x) = x^2$ dans la base $\mathcal{B}$, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\alpha(x^3 - 1) + \beta(x^2 + 1) + \gamma(2x - 3) + \delta(2x^3 - 2x + 5) = x^2.$$

En échelonnant la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{4}$ et $\delta = -\frac{1}{4}$ et $p(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 1) + (x^2 + 1) - \frac{1}{4}(2x - 3) - \frac{1}{4}(2x^3 - 2x + 5)$.

Exercice 7. *Pour chacune des applications suivantes, déterminer (en justifiant) s'il s'agit d'une application linéaire. Si c'est le cas, en déterminer le noyau et l'image.*

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_1((x, y, z))) = (x - y, x + |z|)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_2((x, y, z))) = (-3y, y)$.
3. $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *donnée par* $f_3(p) = xp(x) + p(1)$.
4. $f_4 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *donnée par* $f_4(p) = p(x)p(x)$.
5. $f_5 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ *donnée par* $f_5(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a, b)$.

Solution 7.

1. L'application f_1 n'est pas linéaire. En effet, l'image du vecteur $w = (-1, -1, -1)$ est $\mathbf{0}$ tandis que l'image du vecteur $v = (1, 1, 1)$ est le vecteur $(0, 2)$. Si l'application était linéaire, on aurait du avoir
$$(0, 2) = f_1(v) = f_1((-1)w) = (-1)f_1(w) = (-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}, une$$
contradiction.
2. L'application f_2 est linéaire. En effet, si on considère les vecteurs $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f_2\big(\alpha \cdot (x, y, z) + (x', y', z')\big) &= f_2\big((\alpha x + \ x', \alpha y + y', \alpha z + z')\big) \\ &= (-3(\alpha y + y'), \alpha y + y') = \alpha(-3y, y) + (-3y', y') \\ &= \alpha f_2\big((x, y, z)\big) + f_2\big((x', y', z')\big). \end{aligned}$$
3. L'application f_3 est linéaire. Pour voir cela, on considère un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ ainsi que deux polynômes $p, q \in \mathcal{P}$. Ensuite, on calcule
$$\begin{aligned} \big(f_3(\alpha p + q)\big) &= x \cdot \big(\alpha p + q\big)(x) + \big(\alpha p + q\big)(1) \\ &= x \cdot \big(\alpha p(x) + q(x)\big) + \big(\alpha p(1) + q(1)\big) \\ &= \alpha \cdot \big(x \cdot p(x) + p(1)\big) + \big(x \cdot q(x) + q(1)\big) \\ &= \alpha \cdot f_3(p) + f_3(q). \end{aligned}$$
4. L'application f_4 n'est pas linéaire. En effet, le polynome $x + 1$ est envoyé sur $x^2 + 2x + 1$ tandis que les sommes des images des polynômes x et 1 est $x^2 + 1$. On peut aussi constater que $f_4\big(\lambda p\big) = \lambda^2 \cdot f_4\big(p\big)$ pour tout polynôme p et tout scalaire λ ; ensuite, spécialiser en $\lambda = 2$, par exemple.

5. L'application est linéaire. Pour voir cela, on considère deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ainsi qu'un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f_5\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f_5\left(\begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\alpha a + a', \alpha b + b') = \alpha(a,b) + (a', b') \\ &= \alpha f_5\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f_5\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, f_5 est linéaire.

Exercice 8. *Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que*

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = x^3 - 1; \quad T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = x^2 - 1,$$

$$T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = x - 1, \quad T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = x^3 - 1.$$

Trouver une expression pour l'image $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ et montrer que T n'est pas injective.

Solution 8. Comme T est linéaire on sait que

$$T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a \cdot T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + b \cdot T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + c \cdot T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) + d \cdot T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) + d(x^3 - 1) = (a + d)x^3 + bx^2 + cx - (a + b + c + d).$$

L'application T n'est pas injective car $T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = x^3 - 1 = T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Exercice 9. *Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par :*

$$\mathcal{B} := \{(1, -4, 3), (5, 2, -2), (4, -7, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. Quel vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ satisfait

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ?$$

2. Trouver $[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$, le vecteur qui représente $\vec{y} = (10, -9, 1)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$?

Solution 9. 1. Soient $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, nous avons que $\vec{x} = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_3 = (-1, -5, 9)$.

2. On cherche des nombres réels a, b et c tels que

$$a(1, -4, 3) + b(5, 2, -2), +c(4, -7, 0) = (10, -9, 1),$$

d'où on obtiendra

$$[\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est

$$[\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. *Soit $\mathcal{F}$ la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

$$\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

1. *Quel polynôme $g(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ satisfait*
$$[g(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$
2. *Trouver $[f(t)]_{\mathcal{F}}$, les coordonnées de $f(t)$ par rapport à la base $\mathcal{F}$, pour le polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$.*

Solution 10.

1. Comme $[g(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous avons que
$$g(t) = 1(1+t^2) + 2(t+t^2) = 1 + t^2 + 2t + 2t^2 = 3t^2 + 2t + 1.$$
2. On cherche des nombres réels a, b et c tels que
$$a(1+t^2) + b(t+t^2) + c(1+2t+t^2) = (1+4t+t^2),$$
d'où on obtiendra
$$[f]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est
$$[f]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. *Vrai ou faux :*

1. *Soit A une matrice $m \times n$ et on considère un système d'équations linéaires $AX = b$, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Enfin, soit A' la matrice augmentée du système. Si $AX = b$ possède au moins une solution, alors le rang colonne de A est égal au rang colonne de A'.*
2. *Soit A une matrice $m \times n$ et on considère un système d'équations linéaires $AX = b$, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Enfin, soit A' la matrice augmentée du système. Si le rang colonne de A est égal au rang colonne de A', alors $AX = b$ possède au moins une solution.*
3. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang ligne de A est au plus n.*
4. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang ligne de A est au plus m.*
5. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang colonne de A est au plus n.*

6. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang colonne de A est au plus m.*
7. *Soit A une matrice $m \times n$ et on considère un système d'équations linéaires $AX = 0$. On suppose que le système possède une infinité de solutions. Alors $m \leq n$ et le rang ligne de A est égal à m.*
8. *Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V où V est de dimension finie. Alors $W = V$ si et seulement si $\dim W = \dim V$.*

Solution 11. 1. vrai, résultat du cours.

2. vrai, résultat du cours.
   Les deux énoncés 1. et 2. sont vrais car le système peut être écrit comme $x_1C_1+x_2+C_2+\cdots+x_nC_n = b$, ou C_i est la i-ème colonne de A. Donc il existe une solution $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ si et seulement si b s'écrit comme une combinaison linéaire des colonnes de A, donc si et seulement si b appartient à l'espace des colonnes de A. Par conséquent il existe une solution si et seulement si l'espace des colonnes de A et de A' sont le même et donc si et seulement si le rang colonne de A est égal au rang colonne de A'.
3. vrai : L'espace lignes de A est un sous-esapce de $\mathbb{R}^n$ et donc est de dimension au plus n.
4. vrai : l'espace lignes de A est engendré par m vecteurs et donc est un espace de dimension au plus m.
5. vrai
6. vrai
   (Pour 5. et 6. utiliser le même type de raisonnment que pour le rang ligne)
7. faux : Considérons le système $AX = 0$ ou $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ de $m = 3$ équations à $n = 2$ inconnues. Il possède une infinité de solutions mais le rang ligne est égal à $1 \neq m$ et et $m > n$.
8. vrai : résultat du cours. Ici je rappelle l'idée de la preuve : Si $V = W$ il est clair que $\dim V = \dim W$. Supposons que $\dim V = \dim W$. L'idée est qu'on prend une base B de W. Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, on peut compléter cet ensemble pour faire une base de V. Mais comme $\dim V = \dim W$, on ne peut pas "rajouter" des vecteurs à la base de W et la base B de W est aussi une base de V. Et $W = \mathrm{Vect}\,(B) = V$.

Exercice 12. *Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :*

a. *A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.*

b. *A est une matrice 4×2, $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, où $\vec{a}_i \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ est la i-ème colonne de A, et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.*

c. *A est une matrice 4×3, $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ ($\vec{a}_i \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ la i-ème colonne de A). Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.*

Solution 12. a. Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$, alors il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_1$. Deux cas sont possibles.
Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, alors les deux vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si $\vec{a}_1$ est le vecteur nul, alors le vecteur $\vec{a}_2$ est non nul (car non multiple de $\vec{0}$), et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un espace de dimension 2. Le vecteur $\vec{a}_3$ n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Par conséquent, les trois vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

D'où la forme échelonnée réduite de A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. *Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs données engendrent linéairement* $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

1. p_1, p_2, p_3, p_4, *où* $p_1(t) = t^2 + t + 1$, $p_2(t) = -2t^3 - 3$, $p_3(t) = t^3 + 2t$ *et* $p_4(t) = 4$.
2. p_1, p_2, p_3, *où* $p_1(t) = t^2 + 5t$, $p_2(t) = -2t^3 - 100$ *et* $p_3(t) = t^3 - 2t + 3$.

Solution 13.

1. Ici il suffit de voir si ces 4 vecteurs sont linéairement indépendants, car la dimension de V est égal à 4 et on utilise le critère donné dans §4.5
2. Ces trois vecteurs ne peuvent engendré V car la dimension de V est 4 et on sait qu'on peut extaire une base d'un ensemble de générateurs. Donc tout ensemble de générateurs doit comporter au moins 4 vecteurs.
