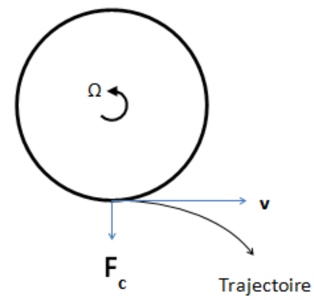
Physique Générale (Mécanique) STI-I et STI-II **Sections EL, MT & MX**

Daniele Mari & Nicolas Grandjean Corrigé **Série 4** 7/10/2020

Exercice 1* (15 min) **: Tir à l'arc**

Pour résoudre cet exercice, on utilise la règle des 3 doigts !



❑ Traitons tout d'abord le cas où l'archer tire vers l'Est. Comme représenté sur le schéma ci-contre (Terre vue de dessus), la force de Coriolis aura deux composantes : elle sera dirigée vers le haut et vers le nord. Pour corriger cet effet, il devra viser légèrement plus bas et vers le sud.

De façon similaire, on trouve les autres cas :

❑ tir vers l'Ouest : la force de Coriolis sera dirigée vers le bas et vers le sud. Pour corriger cet effet, il devra viser légèrement plus haut et au nord.

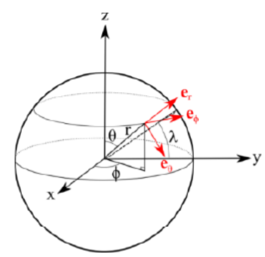
❑ tir vers le Nord : la force de Coriolis sera dirigée vers l'ouest. Pour corriger cet effet, il devra viser légèrement à l'est.

❑ tir vers le Sud : la force de Coriolis sera dirigée vers l'est. Pour corriger cet effet, il devra viser légèrement à l'ouest.

Exercice 2** (25 min) **: Bowling à Vidy**

1. On écrit la force de Coriolis dans le système de coordonnées sphériques $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$:

$$\overrightarrow{F_c} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\Omega v_0 \sin\lambda \, \overrightarrow{e_\varphi}.$$



La déviation se fait selon $-\overrightarrow{e_\varphi}$, c'est-à-dire vers l'Ouest ou vers la droite par rapport à la trajectoire de la boule de bowling.

Pour déterminer la distance de déviation, il faut intégrer deux fois la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = \overrightarrow{F_c} = m\vec{a} \Rightarrow a = -2m\Omega v_0 \sin\lambda \Rightarrow \delta = \Omega v_0 \sin\lambda \, T^2$, avec T le temps de parcours de la boule entre le point de départ et les quilles. La vitesse étant supposée constante, $T = \frac{L}{v_0}$. On obtient donc $\boxed{\delta = \Omega \sin\lambda \frac{L^2}{v_0}}$.

On constate que la déviation varie selon l'inverse de la vitesse. Plus la boule sera lancée rapidement, moins la force de Coriolis aura d'influence sur la trajectoire.

2. Ordre de grandeur de la déviation : $\delta = \Omega \sin\lambda \frac{L^2}{v_0} = 7 \times 10^{-5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{20^2}{5} \approx \frac{7\times 4}{1.4\times 5} \times 10^{-3} \approx 4\text{mm}$

Cette valeur est faible comparée à la taille de la boule et des quilles, donc la réussite du strike ne devrait pas être influencée par la force de Coriolis.

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen

Exercice 2** (50 min) **: Curling dans la SSH**

a) La force qui permet de simuler la pesanteur dans la SSH est la force d'entrainement due à la rotation de la station.

$\vec{F}_e = -mR\Omega^2\vec{e}_z$ ($\vec{e}_r$ vecteur unitaire radial)

b) On en déduit $g(z) = (R - z)\Omega^2$ (z : altitude au-dessus du sol de la SSH). Le critère s'écrit donc :

$$\frac{g(pieds) - g(tête)}{g(pieds)} = \frac{R\Omega^2 - (R - H)\Omega^2}{R\Omega^2} = \frac{H}{R} < \alpha \Longrightarrow \frac{H}{\alpha} < R$$

Cette inégalité exprime bien une valeur minimale pour R avec $R_{min} = \frac{H}{\alpha}$

c) La force de Coriolis est $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$. La vitesse $\vec{v}$ est dirigée vers le bas lors de la chute. La règle des doigts ou le produit vectoriel $-\vec{e}_y \times (-\vec{e}_z) = \vec{e}_x$ nous donne la direction de $\vec{F}_c$ vers $+\vec{e}_x$. La déviation se fait donc vers $+\vec{e}_x$.

d) Pour estimer d, on calcule la chute selon $\vec{e}_z$ en négligeant la force de Coriolis, puis on estime la déviation due à Coriolis selon $\vec{e}_x$ sur cette chute.

- La chute selon $-\vec{e}_z$ est un mouvement uniformément accéléré (la seule force est $m\vec{g}$) :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -mg \\ \dot{z}_{(t=0)} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{z} = -gt \\ z_{(t=0)} = h \end{cases} \longrightarrow z = h - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow t_{(z=0)} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Seule $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\Omega\dot{z}\vec{e}_x$ ($\dot{z} < 0$) agit selon $\vec{e}_x$. La 2eme loi de Newton projetée sur $\vec{e}_x$ donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\Omega\dot{z} = 2m\Omega gt \\ \dot{x}_{(t=0)} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \Omega gt^2 \\ x_{(t=0)} = 0 \end{cases} \longrightarrow x = \frac{\Omega g}{3}t^3$$

$$\longrightarrow d = x_{(t_{(z=0)})} = \frac{\Omega g}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Omega(2h)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{g}}$$

La gravité locale est $g = R\Omega^2$ (c'est celle au niveau du sol, localement constante d'après l'énoncé). Ceci permet l'expression de d en fonction de R et h :

$$d = \frac{\Omega(2h)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R\Omega^2}} = \frac{(2h)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R}}$$

e) La règle des doigts ou les produits vectoriels de $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\Omega\, \vec{e}_y \times \pm\vec{e}_i$ donnent :

$\vec{F}_c$ est dirigée vers $+\vec{e}_z$(le haut) pour un lancer vers $+\vec{e}_x$, dirigée vers $-\vec{e}_z$(le bas) pour un lancer vers $-\vec{e}_x$ et $\vec{F}_c$ est nulle pour un lancer vers $+\vec{e}_y$ ou $-\vec{e}_y$.

La pierre va le plus loin quand elle est lancée en direction de $+\vec{e}_x$: c'est la direction pour laquelle la force de Coriolis s'oppose au poids, ce qui diminue les frottements.

Exercice supplémentaire S3.1* (25 min) **: Guillaume Tell tire vite**

1. Le révérenciel terrestre est considéré comme Galiléen, la seul force est le poids: $m\vec{g} = m\vec{a}$

On projette sur les axes Oz, vertical, et Ox, horizontal (dans le sens du mouvement) :

$$\begin{aligned} 0 &= ma_x \\ -mg &= ma_z \end{aligned}$$

et donc, en intégrant l'accélération une puis deux fois, on obtient respectivement la vitesse et la position du projectile:

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \Rightarrow v_x(t) = v_{0,x} \Rightarrow x(t) = v_{0,x}t + x_0 \\ a_z = -g \Rightarrow v_z(t) = -gt + v_{0,z} \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t + z_0 \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} x_0 = z_0 = 0 \\ v_{0,z} = 0 \\ v_{0,x} = v_0 \end{cases}$$

On cherche t_{max} tel que $x(t_{max})=D$:

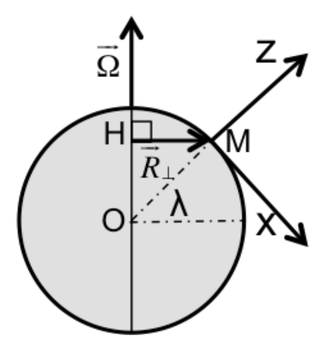
$$x(t_{\max}) = D \Leftrightarrow v_0 t_{\max} = D \Leftrightarrow t_{\max} = \frac{D}{v_0}$$

Et donc la déviation verticale sera de $z(t_{max})$:

$$z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} = 4.9cm$$

2. La force de Coriolis va incurver la trajectoire vers l'ouest.
La force centrifuge va légèrement diminuer la valeur apparente de g et l'incliner vers le sud.

3. Si l'on veut tenir compte de la rotation de terrestre, la seconde loi de Newton doit inclure les forces d'entrainement et de Coriolis, ce qui donne :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\sum \vec{F} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v} - m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{HM}\right) = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v} + m\Omega^2\vec{R}_\perp$$
$$\Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v} + m\Omega^2\vec{R}_\perp$$

Avec $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre, $\vec{v}$ la vitesse du projectile et $\vec{R}_\perp = \overrightarrow{HM}$ le vecteur distance à l'axe de rotation de la Terre (voir schéma).

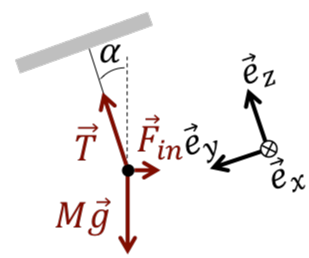
Note : On à utilisé ici la formulation de l'accélération centripète vue dans le cours: pour tout point O situé sur l'axe de rotation, $\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OM}\right) = -\Omega^2\, \vec{R}_\perp$

Ce qui nous donne en projection (les axes x et z sont dirigés comme précédemment, l'axe y est dirigé vers l'est, λ est la latitude) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \Omega^2 R_\perp \sin\lambda \\ \ddot{y} = -2\Omega\left(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda\right) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y}\cos\lambda + \Omega^2 R_\perp \cos\lambda \end{cases}$$

4. Pour estimer l'effet de la force de Coriolis, on négligera les termes en $\dot{z}$ et en $\dot{y}$ devant ceux en $\dot{x}$, et on négligera l'effet de l'accélération centrifuge.
   On trouve pour la seconde équation :
   $$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin\lambda$$
   En intégrant deux fois, et en approximant $\dot{x}$ par sa valeur calculée en 1. :
   $$\dot{y}(t) = -2\Omega x(t)\sin\lambda = -2\Omega v_0 t\sin\lambda$$
   $$y(t) = -\Omega v_0 t^2 \sin\lambda$$
   Avec $t_{\max} = \dfrac{D}{v_0}$ on obtient finalement :
   $$y(t_{\max}) = -\Omega v_0 t_{\max}^2 \sin\lambda = -\Omega\frac{D^2}{v_0}\sin\lambda = -\ 0.53\ \text{mm}$$ soit 0.53 mm vers l'ouest

Exercice supplémentaire S342** (60 min) **: Tir de fléchette dans un train pendulaire**



a) On peut considérer la Terre comme un référentiel galiléen parce que la vitesse angulaire du train dans le virage est très grande devant la vitesse angulaire de la terre. (On peut estimer $\Omega = \frac{v_t}{R} = 2\cdot 10^{-2}\ rd/s$ devant celle de la terre $\Omega_T \approx 2\pi\ rd/jour \approx 10^{-4}\ rd/s$)

b) Les forces réelles sont le poids $M\vec{g}$ et la force de tension du fil $\vec{T}$. Il faut y ajouter les forces fictives puisque le référentiel du train n'est pas galiléen. La force de Coriolis est nulle (cible au repos). Le mouvement est une rotation uniforme, la force d'entrainement est la force centrifuge $\vec{F}_{in}$. ($\vec{F}_{in}$ est perpendiculaire à $\vec{\Omega}$, donc à $\vec{g}$. Sa norme est $MR\Omega^2$)

c) Ecrivons ces forces dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au train :
- $M\vec{g} = Mg\sin\alpha\,\vec{e}_y - Mg\cos\alpha\,\vec{e}_z$
- $\vec{T} = T\vec{e}_z$
- $\vec{F}_{in} = -MR\Omega^2\cos\alpha\,\vec{e}_y - MR\Omega^2\sin\alpha\,\vec{e}_z$

La condition d'équilibre est $M\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = \vec{0} = (Mg\sin\alpha - MR\Omega^2\cos\alpha)\vec{e}_y + (T - Mg\cos\alpha - MR\Omega^2\sin\alpha)\vec{e}_z$

L'angle α est donné par la condition d'équilibre sur $\vec{e}_y$:

$$Mg\sin\alpha - MR\Omega^2\cos\alpha = 0 \Longrightarrow \frac{R\Omega^2}{g} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{R\Omega^2}{g}\right) = \arctan\left(\frac{v_t^2}{Rg}\right)$$

d) le poids apparent de la cible est $\vec{P}_a = M\vec{g} + \vec{F}_{in} = -\vec{T} = -T\vec{e}_z$:

$$\begin{cases} T = Mg\cos\alpha + MR\Omega^2\sin\alpha \ \ (\text{équilibre sur } \vec{e}_z) \\ R\Omega^2 = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}g \qquad (\text{équilibre sur } \vec{e}_y) \end{cases} \Longrightarrow T = Mg\cos\alpha + Mg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= Mg\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$T = \frac{Mg}{\cos\alpha} \ \Longrightarrow \ \vec{P}_a = -\frac{Mg}{\cos\alpha}\vec{e}_z$$

e) Sur la portion de voie rectiligne, le référentiel du train est Galiléen. La fléchette n'est soumise qu'a son poids. La deuxième loi de Newton s'exprime $m\vec{a} = -m\vec{g}$: c'est un mouvement uniformément accéléré (parabolique).

On intègre l'équation du mouvement en tenant compte des conditions initiales:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0\,, \dot{x}(0) = \cos\beta\, v \\ \ddot{y} = 0\,, \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{z} = -g\,, \dot{z}(0) = \sin\beta\, v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \cos\beta\, v\,, x(0) = 0 \\ \dot{y} = 0\,, y(0) = 0 \\ \dot{z} = \sin\beta\, v - gt\,, z(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \cos\beta\, v\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin\beta\, v\, t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

f) Calcul de β :
La flèche touche la cible au temps t_l :

$$l = \cos\beta\, v\, t_l \Longrightarrow t_l = \frac{l}{\cos\beta\, v}$$

La hauteur de l'impact sur la cible est :

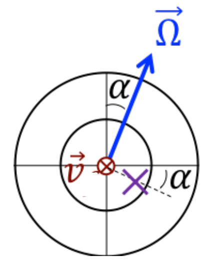
$$z(t_l) = \sin\beta\, v\, t_l - \frac{1}{2}g{t_l}^2$$

$$z(t_l) = 0 \Longrightarrow \sin\beta\, v - \frac{1}{2}gt_l = 0 \Longrightarrow \sin\beta\, v = \frac{1}{2}g\frac{l}{\cos\beta\, v} \Longrightarrow 2\sin\beta\cos\beta = \frac{gl}{v^2} = \sin(2\beta)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gl}{v^2}\right)$$

g) Dans le repère lié au train, $\vec{\Omega}$ est dans le plan (y, z) et fait un angle α avec (Oz). $\vec{v}$ est dirigée selon $\vec{e}_x$ (tir à quasiment à l'horizontale) . La force de Coriolis $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ dévie donc la fléchette vers le bas et à droite, dans la direction faisant un angle α avec la ligne horizontale de la cible.

L'impact est dans le cadre inférieur droit de la cible, voir ci-contre.



h) Par projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha\,\Omega \\ \cos\alpha\,\Omega \end{pmatrix} \;;\; \vec{v} \approx \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; \vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m\Omega\cos\alpha\, v \\ -2m\Omega\sin\alpha\, v \end{pmatrix}$$

i) La déviation dans la direction $\vec{e}_y$ est donnée par l'intégration de la seconde loi newton, avec l'approximation usuelle $\vec{v} = cte = v\,\vec{e}_x$ sur la trajectoire :

$$m\,\ddot{y}_d = -2m\Omega\cos\alpha\, v \Longrightarrow \dot{y}_d = -2\Omega\cos\alpha\, v\, t \Longrightarrow y_d(t) = -\Omega\cos\alpha\, v\, t^2$$

Calcul similaire pour déviation dans la direction $\vec{e}_z$:

$$m\,\ddot{z}_d = -2m\Omega\sin\alpha\, v \Longrightarrow \dot{z}_d = -2\Omega\sin\alpha\, v\, t \Longrightarrow z_d(t) = -\Omega\sin\alpha\, v\, t^2$$

La déviation par rapport au centre de la cible est donnée par :

$$d(t) = \sqrt{y_d^2(t) + z_d^2(t)} = \Omega\, v\, t^2\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \Omega\, v\, t^2$$

D'où la déviation D du point d'impact de la fléchette :

$$D = d(t_l) = \frac{1}{2}\Omega\, v\left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{\Omega\, l^2}{v}$$

Application numérique :

$$\Omega = \frac{v_t}{R} = \frac{10^2}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-2}\, rd/s$$

$$D = \frac{\Omega\, l^2}{v} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{10} = 0{,}018\, m$$