Série 17

1. Soit l'ellipse $\mathcal{E}:\ x^2+4\,y^2-25=0$, déterminer les tangentes à $\mathcal{E}$

a) en $P\,(-3\,;\,y_P)\in\mathcal{E}$, b) issues de $Q\,(-1\,;\,\frac{7}{2})$.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses de petit axe Ox, passant par $K(0;\ \sqrt{3})$ et d'excentricité $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

a) Donner l'équation cartésienne (dépendante d'un paramètre) de la famille $\mathcal{F}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}\in\mathcal{F}$ dont la tangente en K a pour pente $m=\sqrt{3}$.

3. Un point M décrit l'ellipse d'équation $x^2+2y^2-2=0$, de foyers F et F'.

Déterminer le lieu des points P intersection de la droite $(F'M)$ et de la droite passant par F et perpendiculaire à la tangente en M.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère deux cercles γ et γ_1.

$$\gamma:\ x^2+y^2-25=0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1:\ (x-3)^2+y^2-16=0\,.$$

Soient P un point du cercle γ et t la tangente au cercle γ en P.

On considère le point $M\,(x_M,y_M)$ pôle de la droite t par rapport au cercle γ_1.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de M lorsque P décrit le cercle γ.

Caractériser avec précision ce lieu.

5. Déterminer l'équation de l'ellipse donnée par :

a) les directrices $d:\ x=-1$, $d':\ x=7$, $e=\frac{3}{4}$ et le grand axe $y=\frac{3}{2}$,

b) la directrice $d:\ y+3=0$ correspond au foyer $F\,(-4;\ 1)$ et $e=\frac{1}{2}$.

6. Dans le plan, muni d'un repère orthonormé, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{E}:\ \frac{x^2}{2}+y^2-1=0\,.$$

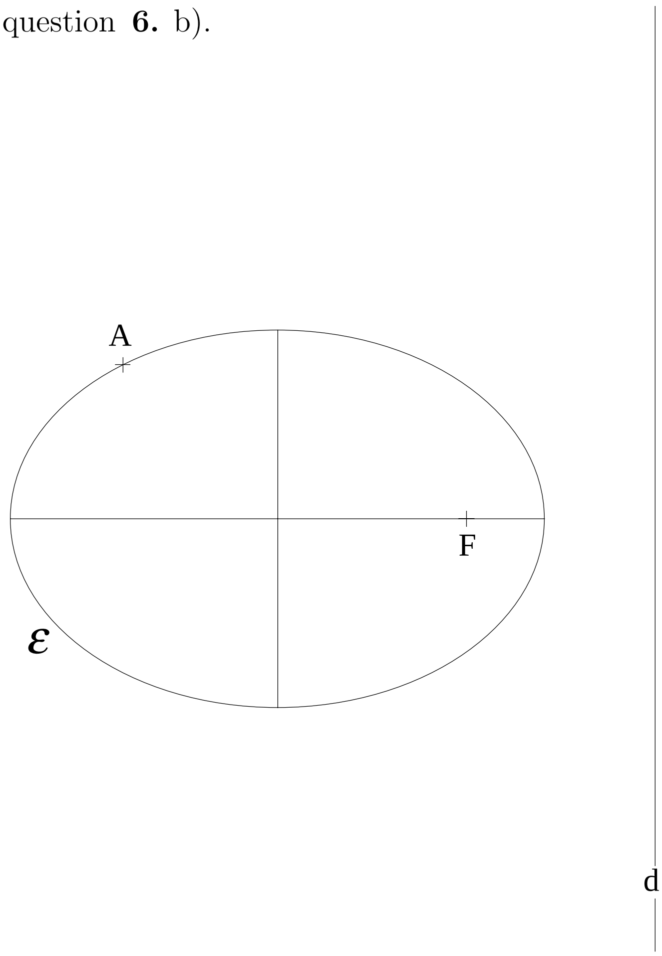
Soient F le foyer de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'abscisse positive et d la directrice correspondante.

a) Déterminer les coordonnées de F et l'équation cartésienne de d.

b) Soit D un point quelconque de la directrice d.
Montrer que la polaire p de D par rapport à $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à (DF) et passe par F.
En déduire une construction rigoureuse de la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ en A, sur la donnée graphique ci-dessous.
Donner la marche à suivre de votre construction.

c) Soient $K\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et M le point d'intersection de la droite (KD) et de la polaire p du point D.
Montrer que si D décrit la directrice d, le lieu de M est une ellipse Γ.
Déterminer les coordonnées des foyers et l'équation cartésienne des directrices de l'ellipse Γ.

Donnée graphique de la question **6.** b).



Réponses de la série 17

1. Les tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}: \ x^2 + 4\,y^2 - 25 = 0$:

a) $P\,(-3\,;\,\pm 2) \quad t: \ -3x \pm 8y - 25 = 0\,,$

b) $t: \ 4x - 6y + 25 = 0$ et $t': \ 3x + 8y - 25 = 0\,.$

2. a) Equation de la famille $\mathcal{F}: \ \dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2+1} + \dfrac{y^2}{3(\lambda^2+1)} - 1 = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$

b) $\mathcal{E}: \ \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{y^2}{6} - 1 = 0\,.$

3. Equation cartésienne du lieu des points $P: \ x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0\,.$

4. Equation cartésienne du lieu des points $M: \ \dfrac{(x-6)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - 1 = 0\,.$

Le lieu de M est une ellipse de centre $C\,(6\,,\,0)$, de grand axe horizontal de longueur $2a = 10$, de petit axe de longueur $2b = 8$ et de foyers $F\,(9\,,\,0)$ et $F'\,(3\,,\,0)$.

5. a) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{16\,(y-\frac{3}{2})^2}{63} = 1\,,$ b) $\dfrac{9\,(x+4)^2}{48} + \dfrac{9(y-\frac{7}{3})^2}{64} = 1\,.$

6. Equation du lieu de $M: \ \dfrac{(x-\frac{5}{4})^2}{\frac{1}{16}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{8}} - 1 = 0\,.$

Foyers de Γ : $F\,(\frac{5}{4}\,,\,\frac{1}{4})\,, \quad F'\,(\frac{5}{4}\,,\,-\frac{1}{4})\,.$

Directrices de Γ : $d: \ y = \frac{1}{2}\,, \quad d': \ y = -\frac{1}{2}\,.$