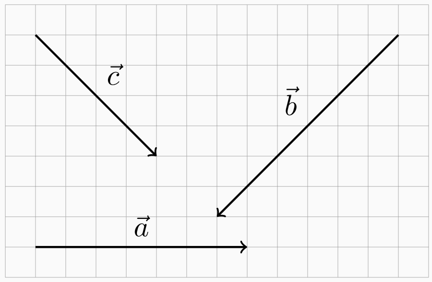
Série 1

Exercice 1. On donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sur la figure ci-dessous.

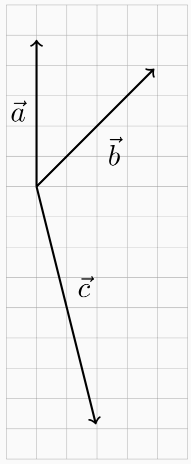


Représenter ces trois vecteurs sur une feuille quadrillée, puis construire les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{n}, \vec{t}$ définis par :

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}, \quad \vec{y} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{z}, \quad 2(\vec{a} - \vec{n}) = \vec{b} - \vec{c},$$

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{7}{2}\,\vec{t} + \vec{a} - \vec{b}\Big) = -\,\vec{b} + \frac{1}{2}\big(\vec{t} + 2\,\vec{a} + 2\,\vec{b}\big).$$

Exercice 2. On donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sur la figure ci-dessous.



a. Représenter ces vecteurs sur une feuille quadrillée, puis construire les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

$$\vec{x} = \vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{y} = 6\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}.$$

b. À l'aide du dessin, déterminer deux nombres p et q tels que $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

c. Exprimer les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ seulement.

d. Exprimer les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en fonction de $\vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{y}$.
Indication: à l'aide de *a.* et *b.*, exprimer les vecteurs $\vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ uniquement, puis résoudre le système.

Exercice 3. Soient A, B, C, D et E des points quelconques. Simplifier les expressions suivantes :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}.$$

Exercice 4. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point du plan défini par $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 5. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier. Construire les vecteurs suivants et simplifier leur expression :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}.$$

Exercice 6. a. Soient A, A', D et D' quatre points quelconques du plan ou de l'espace, I le milieu de AA' et L le milieu de DD'. Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{IL}$.

b. Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes. On note I, J, K et L les milieux de AA', BB', CC' et DD' respectivement. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 7. Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AF}$.

a. On appelle M le milieu de FG, N celui de HG et P le centre du parallélogramme $ABCD$. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b. On considère le point J de la face $BCGF$ tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

Exercice 8. Soient M, N, P, Q les points milieux des arêtes AC, BD, AD, BC d'un tétraèdre $ABCD$.

a. Montrer que le quadrilatère $MPNQ$ est un parallélogramme.

b. Démontrer les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{y} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{z} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{t} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ex. 2 : b. $p = -2$, $q = \frac{1}{2}$. c. $\vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. d. $\vec{b} = -(\vec{x} - \vec{a}) - \vec{y}$,$\vec{c} = \frac{5}{2}(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{3}{2}\vec{y}$.

Ex. 3 : $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{c} = \vec{0}$.

Ex. 4 : $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ex. 5 : $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{FC}$.

Ex. 7 : $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$, $\overrightarrow{EM} = \vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$, $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{FN} = -\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$, $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t})$.