Série 19

1. Déterminer le sommet, le foyer, l'axe et la directrice des paraboles suivantes :

a) $4y = x^2 + 4x + 8\,,$ b) $(y+1)^2 = 4(x+y+1)\,.$

2. Déterminer l'équation de la parabole définie par :

a) l'axe Oy et deux points de la courbe : $A(-1\,;\ 2)$ et $B(7\,;\ 10)\,,$

b) la directrice $x = 1$ et deux points de la courbe : $A(2\,;\ 1)$ et $B(6\,;\ -3)\,,$

c) le sommet $S(0\,;\ 2)$ et un point de la courbe : $A(2\,;\ 0)\,.$

3. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2\,p\,x\,,\ p > 0\,,$ M un point de cette parabole, t et n la tangente et la normale à $\mathcal{P}$ en M, T et N les points d'intersection de t et n avec l'axe de la parabole.

a) Soit M_1 la projection orthogonale de M sur l'axe de $\mathcal{P}$.

i) Montrer que la distance de M_1 à N est indépendante de M et vaut p.

ii) Soit F le foyer de $\mathcal{P}$. Montrer que $TF = FN$.

b) Soit Q la projection orthogonale de F sur n.

Montrer que le lieu de Q lorsque M décrit $\mathcal{P}$ est une parabole que l'on notera $\mathcal{P}'$.

Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, de sa directice d' et les coordonnées de son foyer F'.

4. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2\,p\,x\,,\ p > 0\,,$ P un point de cette parabole, n la normale à $\mathcal{P}$ en P, N le point d'intersection de n avec l'axe de la parabole et D la projection orthogonale de P sur la directrice d de $\mathcal{P}$.

Soit M le symétrique de N par rapport à D, montrer que le lieu de M lorsque P décrit $\mathcal{P}$ est une parabole que l'on notera $\mathcal{P}'$.

Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, de sa directice d' et les coordonnées de son foyer F'.

5. On donne la droite $t\,:\, x - 2y - 1 = 0$. Une parabole variable $\mathcal{P}$ d'axe Ox et de sommet $S(\alpha\,;\,0)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$, est tangente à la droite t en T.

a) Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ en fonction de α et les valeurs que peut prendre α dans le cas où les points $M(x_{_M}\,;\ y_{_M})$ de $\mathcal{P}$ satisfont à l'inéquation : $x_{_M} - 2y_{_M} - 1 \geq 0\,.$

b) Déterminer l'équation de $\mathcal{P}$ lorsque $x_{_F} = \frac{2}{3}\,x_{_T}\,.$

6. Déterminer l'équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyer $F\,(3\,,\,0)\,,$ de directrice $d:\ x+y-1=0$ et d'excentricité $e=\frac{1}{2}\,.$

Réponses de la série 19

1. a) $S(-2\,;\,1)\,,\quad F(-2\,;\,2)\,,\quad x=-2\,,\quad y=0\,.$

b) $S(-1\,;\,1)\,,\quad F(0\,;\,1)\,,\quad y=1\,,\quad x=-2\,.$

2. a) $x^2=6\,(y-\frac{11}{6})\,.$

b) $(y-1)^2=4\,(x-2)$ ou $y^2=2\,(x-\frac{3}{2})\,.$

c) $(y-2)^2=2x$ ou $x^2=-2\,(y-2)\,.$

3. $\mathcal{P}':\ y^2=2\,\frac{p}{4}\,(x-\frac{p}{2})\,,\qquad d':\ x=\frac{3p}{8}\,,\qquad F'(\frac{5p}{8}\,;\,0)\,.$

4. $\mathcal{P}':\ y^2=-2\,(4p)\,(x+2\,p)\,,\qquad F'\,(-4p\,,\,0)\,,\qquad d'\equiv(Oy)\,.$

5. a) $\mathcal{P}:\ y^2=(\alpha-1)\,(x-\alpha)\,,\quad \alpha\in\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,,$

b) $\mathcal{P}:\ y^2=4\,(x-5)\,.$

6. $\mathcal{E}:\ 7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0\,.$
