Corrigé 14

1. Déterminer et caractériser les extrema et les points remarquables du graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = |x+4|\,\sqrt[3]{x}\,.$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+4)\,\sqrt[3]{x} & \text{si } x < -4 \\ (x+4)\,\sqrt[3]{x} & \text{si } x \geq -4 \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}\,.$$

Calcul de la dérivée de $y = (x+4)\,\sqrt[3]{x}$.

$$y' \;=\; \sqrt[3]{x} + \frac{x+4}{3\,\sqrt[3]{x^2}} \;=\; \frac{3x+(x+4)}{3\,\sqrt[3]{x^2}} \;=\; \frac{4\,(x+1)}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4\,(x+1)}{3\,\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x < -4 \\ \dfrac{4\,(x+1)}{3\,\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x > -4 \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-4\,,\,0\}\,.$$

Etude du signe de $f'(x)$.

- Sur $]-\infty\,,\,-4\,[$, $\quad\operatorname{sgn}(f'(x)) \;=\; -\operatorname{sgn}(x+1) = +1$.
- Sur $]-4\,,\,0\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty\,[$, $\quad\operatorname{sgn}(f'(x)) \;=\; \operatorname{sgn}(x+1)$.

x	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

Points remarquables.

- En $x=-4$, la fonction f est définie mais n'est pas dérivable.

  $$\lim_{x\to -4^-} f'(x) = \sqrt[3]{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -4^+} f'(x) = -\sqrt[3]{4}\,.$$

  Le graphe de f admet en $(-4\,;\,0)$ un maximum qui est un point anguleux dont les demi-tangentes sont de pentes $\sqrt[3]{4}$ et $-\sqrt[3]{4}$.

- En $x=-1$, la dérivée de f s'annule et change de signe.

  Le graphe de f admet en $(-1\,;\,-3)$ un minimum à tangente horizontale.

- En $x = 0$, la fonction f est définie mais n'est pas dérivable.

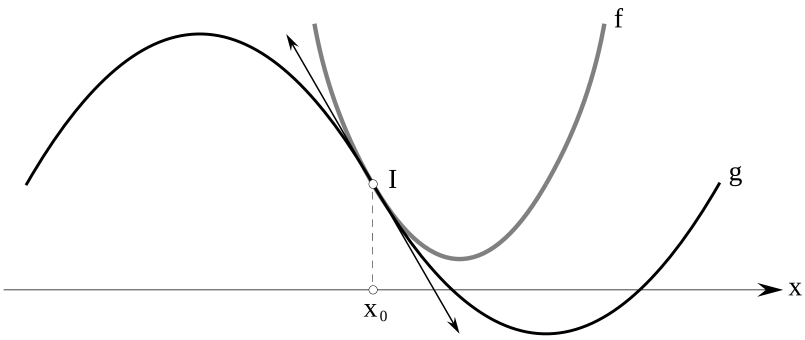
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty .$$

Le graphe de f admet en $(0\,;\,0)$ une tangente verticale.

2. On donne les fonctions $f(x) = x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + p\,x + q$.

Déterminer les coefficients p et q de telle sorte qu'au point d'inflexion du graphe de g, celui-ci touche tangentiellement le graphe de f.

Figure d'étude.



Recherche de l'abscisse x_0 du point d'inflexion I du graphe de g.

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + p\,, \qquad g''(x) = 6x + 6 = 6\,(x+1)\,.$$

$g''(x)$ s'annule et change de signe en $x_0 = -1$, $g(-1) = 2 - p + q$.

Le point $I\,(-1\,;\,2 - p + q)$ est un point d'inflexion du graphe de g dont la pente de la tangente vaut $g'(-1) = -3 + p$.

Le graphe de f passe par I et est tangent à celui de g en I si et seulement si

$$f(-1) = g(-1) \qquad \text{et} \qquad f'(-1) = g'(-1)\,.$$

$$f(-1) = 2\,, \quad f(-1) = g(-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2 - p + q \quad \Leftrightarrow \quad p = q\,.$$

$$f'(x) = 2x + 1\,, \quad f'(-1) = g'(-1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = -3 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = 2\,.$$

Les deux courbes sont tangentes en I si et seulement si $p = 2$ et $q = 2$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + n\,|x+2|}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,.$

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le graphe de f admet-il en $x_0 = -2$, un point anguleux qui n'est pas un extremum ?

- Existence d'un point anguleux en $x_0 = -2$

  Le graphe de f admet en x_0 un point anguleux si et seulement si

  - f est continue en x_0 : c'est le cas.
  - f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)\,.$

  Calcul de la dérivée de f :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - n\,x - 2n} & \text{si} \quad x < -2 \\ \sqrt{x^2 + n\,x + 2n} & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}\,, \qquad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - n}{2\sqrt{x^2 - n\,x - 2n}} & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{2x + n}{2\sqrt{x^2 + n\,x + 2n}} & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}\,.$$

  Comparaison des nombres dérivés à gauche et à droite en $x_0 = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{-4 - n}{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = \frac{-4 + n}{4}\,.$$

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -4 - n \neq -4 + n \quad \Leftrightarrow \quad n \neq 0\,.$$

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe de f possède un point anguleux en $x_0 = -2$.

- Le point anguleux n'est pas un extremum

  Le graphe de f n'admet pas d'extremum en $x_0 = -2$ si et seulement si la dérivée f' ne change pas de signe en $x_0 = -2$.

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{-4 - n}{4} < 0\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

  La dérivée à gauche en $x_0 = -2$ étant négative pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut que la dérivée à droite en $x_0 = -2$ soit aussi négative (éventuellement nulle).

  Voici deux méthodes de résolution :

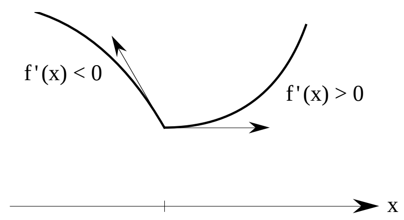
  – Première méthode : étude du signe du nombre dérivé à droite en $x_0 = -2$.

- $\displaystyle \lim_{x \to -2^+} f'(x) \,<\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4+n}{4} \,<\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < 4\,.$

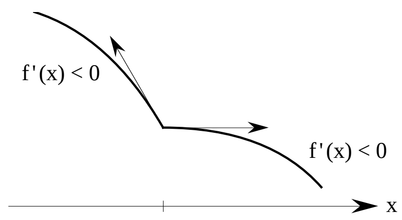
- Que se passe-t-il si $\displaystyle \lim_{x \to -2^+} f'(x) = 0$?

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 4\,.$$

La demi-tangente à droite est horizontale, il y a deux possibilités :



Extremum en x = -2



Pas d'extremum en x = -2

Pour ce cas limite : $n = 4$, il faut étudier le signe de la fonction dérivée dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$.

$$\left.\begin{array}{c} x > -2 \\ n = 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \;=\; \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} \;>\; 0\,.$$

Donc pour $n = 4$, il y a aussi un extremum en $x_0 = -2$.

En résumé : $n \in \mathbb{N}^*$ et $n < 4 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1\,,\,2\,,\,3\}$.

– Deuxième méthode : étude du signe de la fonction dérivée dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$.

$$x > -2\,, \quad f'(x) = \frac{2x+n}{2\sqrt{x^2+n\,x+2n}}\,, \qquad \operatorname{sgn}[f'(x)] = \operatorname{sgn}(2x+n)\,.$$

On distingue deux cas, selon que $-\frac{n}{2}$ est plus grand ou plus petit que -2.

- Si $-\frac{n}{2} \le -2$, alors on a :

x		$-n/2$		-2	
$\frac{2x+n}{2\sqrt{x^2+n\,x+2n}}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

Dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$, la fonction dérivée $f'(x)$ est positive, le graphe de f admet donc un extremum en $x_0 = -2$.

- Si $-\frac{n}{2} > -2$, alors on a :

x		-2		$-n/2$	
$\frac{2x+n}{2\sqrt{x^2+n\,x+2n}}$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$, la fonction dérivée $f'(x)$ est négative, le graphe de f n'admet donc pas d'extremum en $x_0 = -2$.

En résumé : $n \in \mathbb{N}^*$ et $-\frac{n}{2} > -2 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1\,,\,2\,,\,3\}$.

4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = ax^2 + 6x - 3\,\mathrm{Arctg}(2x)\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

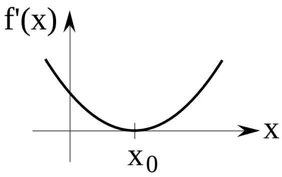
Déterminer le paramètre réel a de sorte que le graphe de f admette un point à tangente horizontale qui ne soit pas un extremum.

Le graphe de f admet en x_0 un point à tangente horizontal qui n'est pas un extremum si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et $f'(x)$ ne change pas de signe en x_0.

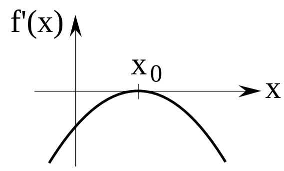
Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = 2ax + 6 - 3\,\frac{2}{4x^2+1} = \frac{8ax^3 + 24x^2 + 2ax}{4x^2+1} = \frac{2x\,(4ax^2 + 12x + a)}{4x^2+1}\,.$$

$f'(x_0) = 0$ et $f'(x)$ ne change pas de signe en x_0 si et seulement si x_0 est une racine double de $f'(x)$.



ou



Or $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une racine de $f'(x)$.

On a donc l'alternative suivante :

- Soit $x_0 = 0$ est une racine double de $f'(x)$.

  C'est le cas si et seulement si $x_0 = 0$ est racine simple de $4ax^2 + 12x + a$.

  $$4ax^2 + 12x + a\Big|_{x=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{24x^2}{4x^2+1}\,.$$

- Soit $x_0 \neq 0$ est une racine double de $f'(x)$.

  C'est le cas si et seulement si $4ax^2 + 12x + a$ admet une racine double non nulle.

  $$\Delta' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6^2 - 4a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3 \quad \text{ou} \quad a = 3\,.$$

  $$a = -3 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = -\frac{6x\,(2x-1)^2}{4x^2+1}\,, \qquad a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{6x\,(2x+1)^2}{4x^2+1}\,.$$

En résumé, le graphe de f admet un point à tangente horizontal qui n'est pas un extremum si et seulement si $a \in \{-3\,,\,0\,,\,3\}$.

5. Etudier les branches infinie du graphe de f défini par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - 2x$.

On détermine la limite de f aux "points frontières" de son domaine de définition :

$$D_f =]-\infty\,,\,-1] \cup [\,0\,,\,+\infty[\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Il faut donc encore étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- Lorsque $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 2\right] = +\infty$$

On cherche une éventuelle asymptote oblique d'équation $y = m\,x + h$:

  - $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 2\right] = -3$
  - $h = \lim\limits_{x\to-\infty} [\,f(x) - m\,x\,] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x} + x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} - x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 1\right]} = -\frac{1}{2}\,.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -3x - \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$.

- Lorsque $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2\right] = -\infty\,.$$

On cherche une éventuelle asymptote oblique d'équation $y = m\,x + h$:

  - $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2\right] = -1$
  - $h = \lim\limits_{x\to+\infty} [\,f(x) - m\,x\,] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 1\right]} = \frac{1}{2}\,.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

6. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^2+1}$, où a et b sont des paramètres réels.

Déterminer a et b pour que le graphe de la fonction f admette :

- une asymptote passant par l'origine,
- des tangentes horizontales, mais pas d'extremum.

$$f(x) = \frac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^2+1}\,, \qquad D_f = \mathbb{R}\,.$$

- Limites aux points frontières de D_f :

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^2+1} \;=\; \pm\infty\,, \qquad \forall\, a\,,\; b \in \mathbb{R}\,.$$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^3+x} \;=\; 1\,, \qquad \forall\, a\,,\; b \in \mathbb{R}\,.$$

  Le graphe de f admet une asymptote oblique passant par l'origine (d'équation $y = x$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0$.

  $$f(x) - x \;=\; \frac{x^3 + a\,x^2 + b\,x}{x^2+1} - x \;=\; \frac{x^3 + a\,x^2 + b\,x - x\,(x^2+1)}{x^2+1}\,,$$

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a\,x^2 + (b-1)\,x}{x^2+1} \;=\; a\,, \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}\,.$$

  Le graphe de f admet une asymptote oblique passant par l'origine si et seulement si $a = 0$.

- Le graphe de f admet en x_0 une tangente horizontale mais pas d'extremum si et seulement si la dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe.

  $$f'(x) \;=\; \left[\frac{x^3 + b\,x}{x^2+1}\right]' \;=\; \frac{(3x^2+b)\,(x^2+1) - 2x\,(x^3+b\,x)}{(x^2+1)^2} \;=\; \frac{x^4 + (3-b)\,x^2 + b}{(x^2+1)^2}\,.$$

  $\operatorname{sgn}\,[f'(x)] = \operatorname{sgn}\,[\,x^4 + (3-b)\,x^2 + b\,]$.

  Posons $N(x) = x^4 + (3-b)\,x^2 + b$. La fonction dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe si et seulement si $N(x)$ admet en x_0 une racine double.

  Si le discriminant Δ de $N(x)$ (polynôme du deuxième degré en x^2) est positif ou nul, alors $N(x) = (x^2-\alpha)\,(x^2-\beta)$.

  Et $N(x)$ admet une racine double si et seulement si

- $\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0\,,$ ou
- $\alpha = \beta > 0\,.$

  $\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-b)^2 - 4b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b-1)\,(b-9) = 0\,.$

  * $b = 1\,,$ f' s'annule en $x^2 = -1 < 0$: à exclure.
  * $b = 9\,,$ f' s'annule en $x^2 = 3 \geq 0$: cette solution convient.

En résumé les deux solutions sont $b = 0$ ou $b = 9\,.$

- Pour $b = 0\,,$ le graphe de f admet en $x_0 = 0$ un point à tangente horizontale qui n'est pas un extremum.
- Pour $b = 9\,,$ le graphe de f admet en $x_0 = -\sqrt{3}$ et en $x_1 = +\sqrt{3}$ deux points à tangente horizontale qui ne sont pas des extrema.

7. Pour quelle(s) valeur(s) de $k\,,$ $k \in \mathbb{N}^*\,,$ la fonction suivante admet-elle un point de rebroussement en $x = 0$?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^k\,(x-1)^2}\,.$$

Le graphe de f admet un point de rebroussement en $x_0 \in D_f$ si et seulement si

- f est continue en $x_0\,,$
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty\,,$
- f' change de signe en $x_0\,.$

$f(x) = \sqrt[3]{x^k\,(x-1)^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}$ car $k \in \mathbb{N}^*\,, \quad f$ est continue sur $\mathbb{R}\,.$

Calcul de la dérivée de $f\,.$

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{3}\left[\,x^k\,(x-1)^2\,\right]^{-2/3} \cdot \left[\,k\,x^{k-1}\,(x-1)^2 + 2\,x^k\,(x-1)\,\right],$$

$$f'(x) \;=\; \frac{x^{k-1}\,(x-1)\,[\,k\,(x-1) + 2x\,]}{3\,\sqrt[3]{(x^k\,(x-1)^2)^2}} \;=\; \frac{x^{k-1}\,[\,(2+k)\,x - k\,]}{3\,\sqrt[3]{x^{2k}\,(x-1)}}\,,$$

$$f'(x) \;=\; \sqrt[3]{\frac{x^{3k-3}}{x^{2k}}} \cdot \frac{(2+k)\,x - k}{3\,\sqrt[3]{x-1}} \;=\; \sqrt[3]{x^{k-3}}\,.\,\frac{(2+k)\,x - k}{3\,\sqrt[3]{x-1}}\,.$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(2+k)\,x - k}{3\,\sqrt[3]{x-1}} = \frac{k}{3} \neq 0\,,$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = \pm\infty$ ssi $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^{k-3}} = \pm\infty\,.$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^{k-3}} = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad k-3<0 \quad \Leftrightarrow \quad k<3 \quad \Leftrightarrow \quad k=1 \ \text{ ou } \ k=2\,.$$

- $k=1$: $\quad f'(x) = \dfrac{3x-1}{3\,\sqrt[3]{x^2\,(x-1)}}\,, \quad f'$ ne change pas de signe en $x=0$.

  Le graphe de f admet en $x=0$ une tangente verticale, mais pas de point de rebroussement.

- $k=2$: $\quad f'(x) = \dfrac{4x-2}{3\,\sqrt[3]{x\,(x-1)}}\,, \quad f'$ change de signe en $x=0$.

  Le graphe de f admet en $x=0$ un point de rebroussement.

Le graphe de f admet en $x=0$ un point de rebroussement ssi $k=2$.

8. Exercice facultatif

Démontrer le théorème suivant :

Soit f une fonction continue en x_0 et dérivable sur un voisinage pointé de x_0.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

---

f est continue en x_0 et dérivable sur un voisinage pointé de x_0. Donc pour tout h tel que x_0+h appartienne à ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0+h\,]$ ou $[\,x_0+h\,,\,x_0\,]$ selon que h est positif ou négatif :

$$\exists\,\vartheta \in \,]\,0\,,\,1\,[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0+\vartheta\,h)\,.$$

Et lorsque $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_0+\vartheta\,h)\,.$$

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont x tend vers x_0. Donc

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = L = \lim_{h\to 0} f'(x_0+\vartheta\,h)\,.$$

En résumé :

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L$, donc f est dérivable en x_0 : $f'(x_0) = L$
- et $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.
