Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 12**

Exercice 1 (A retenir pour l'examen). *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que A^T est inversible et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Exercice 2. *Soient les vecteurs*

$$u_1 = (1, 0, 2, 0),\ u_2 = (0, 0, 1, -1),\ u_3 = (1, 1, 2, 6),\ u_4 = (0, -1, 1, -7) \in \mathbb{R}^4,$$

où $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de $< u_1, u_2, u_3, u_4 >_{\mathbb{R}}$ muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. *Trouver la projection orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$) de*

$$b = (5, 2\sqrt{3}, 0, -1)$$

sur l'espace des solutions du système homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x_4 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. *Soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ une transformation linéaire dont la matrice, par rapport aux bases canoniques, est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$) de $\mathrm{Im}\,(T)$.

Exercice 5. *Soient les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 2), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3 = (2, 2, 2, 1), v_4 = (1, 1, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$ et $W \subseteq \mathbb{R}^4$ l'espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.*

a) Pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$, calculer $W^\perp$.

b) Pour $v \in W^\perp$, trouver $\mathrm{proj_W v}$.

c) Pour $v' = (2, -1, 2, 3)$, trouver $\mathrm{proj_W v'}$.

Exercice 6. *Vrai ou Faux ?*
Le procédé de Gram-Schmidt

1. *transforme toute base de $\mathbb{R}^3$ en la base canonique.*
2. *transforme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en elle-même.*
3. *transforme les deux vecteurs $(1, -2, 1)$ et $(-2, 4, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ en une base d'un plan.*
4. *transforme une base du plan d'équation $x + y + z = 0$ en une base orthogonale de ce même plan.*

Exercice 7. *Soit $W :=$ Vect $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, où*

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Est-ce que $W^\perp = \mathrm{Vect}\,(\vec{v}_3)$? Et $W = \mathrm{Vect}\,(\vec{v}_3)^\perp$?*
   Conclure que $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$.
2. *Calculer les projections orthogonales $proj_W(\vec{v}_3)$ et $proj_W(\vec{v}_4)$.*

3. *Donner la décomposition* $\vec{v}_4 = \hat{v} + \vec{z}$ *où* $\hat{v} \in W$ *et* $\vec{z} \in W^{\perp}$.
4. *Calculer* $||\vec{v}_4 - proj_W(\vec{v}_4)||$.
5. *Ecrire tous les vecteurs de norme 1 dans* $W^{\perp}$.

Exercice 8. *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vrai ou faux.

1. *Alors les colonnes de* A *forment une famille orthonormale.*
2. *Alors l'équation du plan engendré par les deux premières colonnes de* A *est* $x + 2y + 3z = 0$.
3. *Alors l'équation du plan engendré par les deux premières colonnes de* A *est* $x - 5y + 3z = 0$.
4. *Alors* $A^T A$ *est une matrice diagonale.*

Exercice 9. *Soient* $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. *Vérifier que les vecteurs* $\overrightarrow{u}_1$ *et* $\overrightarrow{u}_2$ *sont orthogonaux.*
2. *Calculer la projection orthogonale* $proj_W(\overrightarrow{v})$ *de* $\overrightarrow{v}$ *sur le sous-espace* $W = Vect\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.
3. *Donner la décomposition* $\overrightarrow{v} = \hat{v} + \overrightarrow{z}$ *où* $\hat{v} \in W$ *et* $\overrightarrow{z} \in W^{\perp}$.
4. *Calculer la distance* $d(\overrightarrow{v}, W)$ *entre* $\overrightarrow{v}$ *et le plan* W.

Exercice 10. *Soit* $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ *une base d'un sous-espace* W *de* $\mathbb{R}^4$, *avec*

$$\overrightarrow{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Construire une base orthogonale de* W *en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.*
2. *Calculer la distance du vecteur* $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *à* W.

Exercice 11. *Soient*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver la solution au sens des moindres carrés de l'équation* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
2. *Trouver l'erreur correspondante.*

Exercice 12. *Soit* W *un sous-espace de* $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que l'ensemble* $W^{\perp}$ *de tous les vecteurs orthogonaux à* W *est un sous-espace de* $\mathbb{R}^n$.
2. *Montrer que* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
   On dit que la somme $W + W^{\perp} = \mathbb{R}^n$ *est directe et on note* $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$.