26 mai 2008

Contrôle d'analyse II no 4

Durée: 1 heure 30'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. A l'aide des développements limités, calculer les deux limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\mathrm{Th}x-\sin 2x}{x\ln(1+x^2)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-f(x)}{x^4}$; sachant que : f(x) est dérivable à l'ordre 4, f(0) = 0

et $f'(x)=1+f(x)+f^2(x)$ 5 pts

2. Calculer la primitive suivante :

$$\int\frac{\cos x-2\sin x}{(\sin x-\cos x)\sin^2 x}\,dx$$ 4 pts

3. On considère la transformation homographique **h**: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par :

$$h(z)=w=\frac{z-12+8i}{2iz-5}$$

où z = x + iy (x, y $\in\mathbb{R}$) et w = u + iv (u, v $\in\mathbb{R}$) 6 pts

a) Déterminer les points fixes **F'** et **F''** de la transformation.

b) Dans le plan-z, on donne le cercle γ : $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{17}{4}\right)^2=0.$

Déterminer et construire, dans le plan-w, l'image de γ par la transformation **h**.

c) Déterminer et construire, dans le plan-w, l'image de la droite **d** définie dans le plan-z par **d**: x = 0.

d) Soit, dans le plan-z, le domaine $\mathbb{D}$ délimité par la droite **d**, le cercle γ et contenant le point **Q** (-1 ; 0). Hachurer, dans le plan-w, l'image $\mathbb{D}'$ de $\mathbb{D}$ par **h**.

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire pour le contrôle n° 4

1) Développements limités (autour de x = 0) :

$$\sin x \;=\; x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) \;=\; x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\mathrm{Th}x \;=\; x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$$

2) Relations trigonométriques :

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\,,\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}\quad \text{où } t=\mathrm{tg}x$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\quad \mathrm{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}\quad \text{où } t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,.$$