Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe

PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \ : \ 8x^2 - 12xy + 17y^2 + 24x - 68y - 12 = 0$$

a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère R_u dans lequel l'équation est réduite. Donner la matrice U du changement de repère.

b) Représenter avec soin et précision la conique dans le repère R_e.
(1 unité = 2 carrés)

5.5 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(2\,;\,0)$, et la droite d d'équation cartésienne $y = 1$.

Soit C un point de la droite d.

Dans le triangle ABC, on considère la médiane m issue du sommet C et la hauteur h issue du sommet A. On note P le point d'intersection de m et h.

a) Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque le point C décrit la droite d.

b) Montrer que ce lieu est une parabole et en donner la direction de son axe.

4 pts

3. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points $F(2\,;\,-1)$ et $F'(-2\,;\,7)$

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F et F' et telle que l'angle entre son axe réel et une asymptote vaut $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ en choisissant comme axes de coordonnées les axes de symétrie de l'hyperbole. Donner avec précision le repère choisi.

b) Dans le repère R_e, déterminer l'équation cartésienne de la directrice correspondant au foyer $F(2\,;\,-1)$.

5.5 pts

Réponses

1. $5x^2 + 20y^2 - 80 = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$

dans $\mathcal{R}_{\,u} = (\Omega,\, \vec{u}_1,\, \vec{u}_2)$ où $\Omega = (0,\, 2)\,,$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y = 0$

b) $\Delta = -1\,,\ \delta = 0\,,\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. a) $\mathcal{H}\ :\ \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{15} - 1 = 0$ dans $\mathcal{R}_{\,u} = (\Omega,\, \vec{u}_1,\, \vec{u}_2)$ où $\Omega = (0,\, 3)\,,$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $2x - 4y + 7 = 0$