L'énoncé est une équivalence, on va procéder en deux temps.

Preuve de l'énoncé directe par la méthode contraposée :

Si la somme est directe alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$
a pour énoncé contraposé :
si $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$ alors la somme n'est pas directe.

Il faut donc montrer que sous la condition $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$, tout vecteur $\vec{x}$ de $F + G$ peut se décomposer de plusieurs manières.

Soit $\vec{x} \in F + G$ donc il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ (1)

Par hypothèse $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$, donc il existe $\vec{w} \in F \cap G$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \in F$ et $\vec{w} \in G$.

On peut alors écrire le vecteur $\vec{x}$ ainsi : $\vec{x} = \vec{u} + \vec{w} + \vec{v} - \vec{w}$ (2)

F étant un espace vectoriel, $\vec{u} + \vec{w} \in F$
G étant un espace vectoriel, $\vec{v} - \vec{w} \in G$

Ainsi par (1) et (2) :
$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u} + \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\,' + \vec{v}\,'$

avec : $\vec{u}\,' \in F,\ \vec{u}\,' \neq \vec{u}$ et $\vec{v}\,' \in G,\ \vec{v}\,' \neq \vec{v}$.
La décomposition n'est donc pas unique. On en conclut que la somme n'est pas directe.

Preuve de l'énoncé réciproque :

Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ alors la somme est directe.

Il faut montrer que la décomposition de tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à $F + G$ est unique.

On suppose que cette décomposition n'est pas unique, c'est-à-dire il existe $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in F$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in G$ tels que :

$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1$ et $\vec{x} = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$,
d'où

$\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$

$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{a}$

Or F et G sont des sous-espaces de E donc $\vec{a} \in F$ et $\vec{a} \in G$. Ainsi $\vec{a} \in F \cap G$.

Or par hypothèse : $F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc

$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2$

$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

La décomposition est unique. La somme est directe.