Série 16

1. Dans le plan, on donne :

- le cercle $\gamma_1 \; : \; x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$,
- le cercle $\gamma_2 \; : \; x^2 + y^2 - 5x + 2y - 2 = 0$,
- le point $P\,(4\,;\; 6)$,
- la droite $p: \; 5x + 6y + 1 = 0$.

Déterminer l'équation du cercle γ orthogonal à γ_1 et γ_2 et tel que la polaire de P par rapport à γ soit la droite p.

2. Déterminer le centre, les foyers, l'excentricité et le paramètre des ellipses suivantes :

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 3$, b) $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$.

3. Déterminer l'équation de l'ellipse donnée par :

a) les foyers $F\,(-4 + 2\sqrt{6}\,;\; -3)$, $F'\,(-4 - 2\sqrt{6}\,;\; -3)$ et le point $P\,(0\,;\; -\frac{12}{5})$ de la courbe,

b) les foyers $F\,(5\,;\; -2)$, $F'\,(5\,;\; 4)$ et $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses dont une extrémité du grand axe est $A\,(-1\,;\,2)$ et le foyer le plus proche de A est $F\,(-1\,;\,0)$.

a) Donner l'équation cartésienne (dépendante d'un paramètre) de la famille $\mathcal{F}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de l'ensemble $\mathcal{F}$ dont l'excentricité vaut $e = \frac{2}{3}$.

5. Dans le plan, on donne deux cercles γ_1 et γ_2.

On considère la famille $\mathcal{F}$ des cercles γ orthogonaux aux deux cercles γ_1 et γ_2.

a) Construire rigoureusement, à la règle et au compas, sur la donnée graphique ci-dessous,

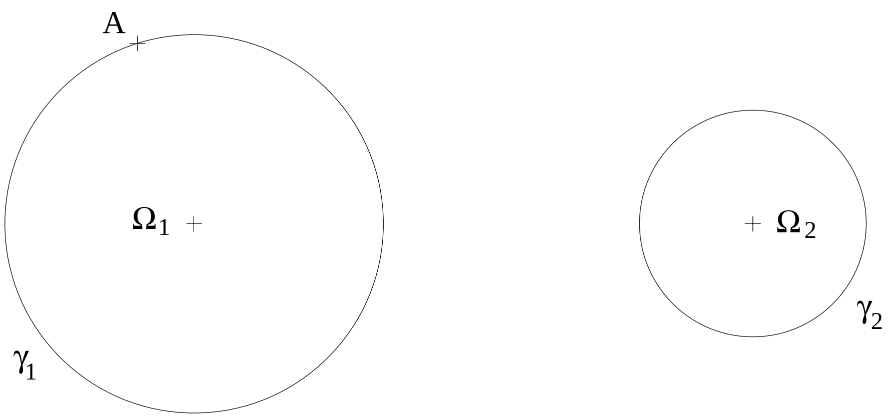
- le cercle γ de la famille $\mathcal{F}$ passant par le point A $(A \in \gamma_1)$,
- le point P milieu de la corde commune des cercles γ et γ_1.

On donne l'équation cartésienne des deux cercles γ_1 et γ_2 :

$$\gamma_1: \; x^2 + y^2 - 36 = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_2: \; (x-16)^2 + y^2 - 4 = 0\,.$$

b) Donner l'équation cartésienne (dépendante d'un paramètre) de la famille $\mathcal{F}$.

c) Soit P le point milieu de la corde commune des cercles γ et γ_1 .
Déterminer l'équation cartésienne du lieu du point P lorsque γ varie.
Indication : caractériser le point P comme une intersection.



Réponses de la série 16

1. $\gamma :\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0\,.$

2. a) $O\,(0\,;\,0)\,,\quad F\,(0\,;\,\sqrt{6})\,,\quad F'\,(0\,;\,-\sqrt{6})\,,\quad e = \sqrt{\tfrac{2}{7}}\,,\quad 2p = \tfrac{30}{\sqrt{21}}\,.$

b) $\Omega\,(5\,;\,3)\,,\quad F\,(1\,;\,3)\,,\quad F'\,(9\,;\,3)\,,\quad e = \tfrac{4}{5}\,,\quad 2p = \tfrac{18}{5}\,.$

3. a) $\dfrac{(x+4)^2}{25} + (y+3)^2 = 1\,.$ b) $\dfrac{(x-5)^2}{18} + \dfrac{(y-1)^2}{27} = 1\,.$

4. a) Equation de la famille $\mathcal{F} :\ \dfrac{(x+1)^2}{4\,(1-\lambda)} + \dfrac{(y-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2} - 1 = 0\,,\quad \lambda < 0\,.$

b) $\mathcal{E} :\ \dfrac{(x+1)^2}{20} + \dfrac{(y+4)^2}{36} - 1 = 0\,.$

5. b) Equation de la famille $\mathcal{F} :\ (x-9)^2 + (y-\lambda)^2 - (\lambda^2 + 45) = 0\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$

c) Equation cartésienne du lieu de $P :\ (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0\,.$