Corrigé 11

1. Soit $\widehat{b}$ la fonction définie dans l'exercice **3.** de la série 10 (fonction prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice **1.**b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) \;=\; \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{b}(0)=1\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est-elle continûment dérivable en $x_0 = 0$?

Dans l'exercice **3.** de la série 10, nous avons montré que la fonction $\widehat{b}$ est dérivable en $x_0 = 0$. Le nombre dérivée $\widehat{b}\,'(0)$ est défini par

$$\widehat{b}\,'(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est continûment dérivable en $x_0 = 0$ si et seulement si la fonction $\widehat{b}\,'$ est continue en $x_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \widehat{b}\,'(x) = \widehat{b}\,'(0)$.

- Expression de la fonction dérivée $\widehat{b}\,'(x)$ pour $x \neq 0$.

$$\widehat{b}\,'(x) \;=\; \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}\right)' \;=\; \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)x \;-\; \left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)1}{x^2}$$

$$=\; \frac{(x+\sqrt{x^2+1})\,x-(x^2+1)-x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} \;=\; \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,.$$

- Calcul de la limite de $\widehat{b}\,'(x)$ lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} \widehat{b}\,'(x) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(-1+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x^2\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\; \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

- Conclusion.

$\lim\limits_{x\to 0} \widehat{b}\,'(x) \;=\; \dfrac{1}{2} \;=\; \widehat{b}\,'(0)$ donc la fonction $\widehat{b}\,'$ est continue en $x_0 = 0$.

2. Déterminer les points de tangence T des tangentes issues de l'origine à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$.

Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$. L'équation de la tangente t à Γ en x_0 s'écrit :

$$t: \quad y - f(x_0) \;=\; f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

La tangente t passe par l'origine O, donc les coordonnées $(0,0)$ vérifient l'équation de t :

$$0 - f(x_0) \;=\; f'(x_0)\,(0 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) \;=\; x_0 \cdot f'(x_0)\,.$$

Calcul de la fonction dérivée de f :

$$f'(x) \;=\; \frac{3\,(x^2-x+4) - (3x+1)\,(2x-1)}{(x^2-x+4)^2} \;=\; \frac{-3x^2-2x+13}{(x^2-x+4)^2}\,.$$

Résolution de l'équation en x_0 :

$$f(x_0) \;=\; x_0 \cdot f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x_0+1}{x_0^2-x_0+4} \;=\; x_0 \cdot \frac{-3x_0^2-2x_0+13}{(x_0^2-x_0+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x_0+1)\,(x_0^2-x_0+4) \;=\; x_0 \cdot (-3x_0^2-2x_0+13) \quad \Leftrightarrow \quad 6x_0^3-2x_0+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0+1)\,\underbrace{(6x_0^2-6x_0+4)}_{\Delta<0}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=-1\,. \qquad \text{D'où :} \quad T\,(-1\,;\,-\tfrac{1}{3})\,.$$

3. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1: \; 3x - 2y - 4 = 0\,.$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$,

Γ_2 la courbe d'équation $y = g\circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2 .

L'équation cartésienne de t_2 s'écrit $y - g\circ f(x_0) = (g\circ f)'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

- Calcul de $g\circ f(x_0)$:
  - $(x_0\,,\,f(x_0))$ est le point de contact entre Γ_1 et t_1 .

    On en déduit que $f(x_0)$ est l'ordonnée du point de t_1 d'abscisse x_0 :

$$(x_0\,,\,f(x_0)) \in t_1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_0 - 2\,f(x_0) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = 1\,.$$

- ◦ Puis on calcule $g \circ f(x_0)$: $g \circ f(x_0) = g\,[f(x_0)] = \left.\dfrac{1}{x^2+1}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$.

- Calcul de $(g \circ f)'(x_0) = g'\,[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$:
  - ◦ $f'(x_0)$ est la pente de t_1 : $y = \dfrac{3}{2}\,x - 2$, d'où $f'(x_0) = \dfrac{3}{2}$.
  - ◦ $g'\,[f(x_0)] = \left[\dfrac{1}{x^2+1}\right]'_{x=1} = -\left.\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right|_{x=1} = -\dfrac{1}{2}$
  - ◦ On en déduit $(g \circ f)'(x_0)$: $(g \circ f)'(x_0) = g'\,[f(x_0)] \cdot f'(x_0) = -\dfrac{3}{4}$.

- L'équation cartésienne de t_2 s'écrit donc

$$y - g \circ f(x_0) = (g \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\,(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 8 = 0\,.$$

4. Calculer la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{-3}$ b) $g(x) = \sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

---

a) $f(x) = x^{-3}$, $f'(x) = -3\,x^{-4}$, $f''(x) = (-3)\,(-4)\,x^{-5}$,

$$f^{(3)}(x) = (-3)\,(-4)\,(-5)\,x^{-6}\,,\ \cdots\,,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\,.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

- Vérification pour $n = 1$.

$$f^{(n)}(x)\Big|_{n=1} = (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\Bigg|_{n=1} = -3\,x^{-4} = f'(x)\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.
  - ◦ Hypothèse : $f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\dfrac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}$ pour un n donné.
  - ◦ Conclusion : $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\,\dfrac{(n+3)!}{2!}\,x^{-(n+4)}$.
  - ◦ Preuve : $f^{(n+1)}(x) = \left[\,f^{(n)}(x)\right]' = \left[(-1)^n\,\dfrac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\right]'$

$$= (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,\left[x^{-(n+3)}\right]' = (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,[-(n+3)]\,x^{-(n+3)-1}$$

$$= (-1)^{n+1}\,\frac{(n+3)!}{2!}\,x^{-(n+4)}\,.$$

b) $g(x) = \sin(ax)\,, \qquad g'(x) = a\,\cos(ax)\,, \qquad g''(x) = -a^2\,\sin(ax)\,,$

$$g^{(3)}(x) = -a^3\,\cos(ax)\,, \quad g^{(4)}(x) = a^4\,\sin(ax)\;,\;\cdots$$

$$\cdots\;,\; g^{(n)}(x) = a^n\,\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\,.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

- Vérification pour $n = 1$.

$$g^{(n)}(x)\big|_{n=1} = \; a^n\,\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\big|_{n=1} = \; a\,\cos(ax) \; = \; g'(x)\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.
  - Hypothèse : $g^{(n)}(x) = a^n\,\sin(ax + n\,\frac{\pi}{2})$ pour un n donné.
  - Conclusion : $g^{(n+1)}(x) = a^{n+1}\,\sin\big[\,ax + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\big]\,.$
  - Preuve : $g^{(n+1)}(x) \;=\; \big[\,g^{(n)}(x)\,\big]' \;=\; \big[\,a^n\,\sin(ax + n\,\frac{\pi}{2})\,\big]'$

$$= \; a^n\,\big[\,\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\,\big]' \; = \; a^n\,\big[\,a\,\cos(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\,\big]$$

$$= \; a^{n+1}\,\sin\big[\,(ax + n\,\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}\,\big] \; = \; a^{n+1}\,\sin\big[\,ax + (n+1)\,\tfrac{\pi}{2}\,\big]\;.$$

5. Estimer, à l'aide de l'approximation linéaire, la quantité $A = \sqrt[4]{16,032}\,.$

Soient $f(x) = \sqrt[4]{x}\,, \quad x_0 = 16 \quad$ et $\quad \Delta x = 0,032\,.$

L'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en x_0 s'écrit $f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)\,.$

$f'(x) = \frac{1}{4}\,x^{-3/4} = \dfrac{1}{4\,\sqrt[4]{x^3}}\,, \quad f'(x_0) = \dfrac{1}{32}\,. \quad A \;\approx\; \sqrt[4]{16} + 0,032 \cdot \dfrac{1}{32} \;=\; 2,001\,.$

6. Soient Δf l'accroissement et df la différentielle de la fonction $f(x) = x^3\,.$

Evaluer $\delta = |\Delta f - df|$ aux points $x = 0$ et $x = 100$ pour un accroissement $\Delta x = \frac{1}{10}\,.$

Expressions de Δf et de df en x_0 et relativement à l'accroissement Δx :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad \text{et} \qquad df = \Delta x \cdot f'(x_0)\,,$$

avec $f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3\,x^2\,.$

- En $x_0 = 0$, $\Delta f = f(\frac{1}{10}) - f(0) = 10^{-3}$ et $df = \frac{1}{10} \cdot f'(0) = 0$.
  D'où $\delta = 10^{-3}$.

- En $x_1 = 100$, $\Delta f = f(100 + \frac{1}{10}) - f(100) = 3 \cdot 10^3 + 3 + 10^{-3}$ et
  $df = \frac{1}{10} \cdot f'(100) = 3 \cdot 10^3$. D'où $\delta = 3 + 10^{-3}$.

7. Soient $g(x)$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1 + \sqrt{16 + x^2}}{1 - \sqrt{25 - x^2}}$$

et $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 3$.

Soient A l'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en x_0 et B l'approximation linéaire de $(g \circ f)(x_0 + \Delta x)$ en x_0 pour un Δx donné.

Sachant que $A = \frac{22}{7}$, en déduire la valeur de B.

L'approximation linéaire B de $(g \circ f)(x_0 + \Delta x)$ en x_0 s'écrit

$$B = (g \circ f)(x_0) + (g \circ f)'(x_0) \cdot \Delta x = g\,[f(x_0)\,] + g'\,[f(x_0)\,] \cdot f'(x_0) \cdot \Delta x\,.$$

- Calcul de $g\,[f(x_0)\,]$

$$g\,[f(x_0)\,] = g(3) = \left.\frac{1 + \sqrt{16 + x^2}}{1 - \sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = \frac{1+5}{1-4} = -2$$

- Calcul de $g'\,[f(x_0)\,]$
  - Fonction dérivée $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}} \cdot (1 - \sqrt{25 - x^2}\,) - (1 + \sqrt{16 + x^2}\,) \cdot \frac{-2x}{-2\sqrt{25-x^2}}}{(1 - \sqrt{25 - x^2}\,)^2}\,.$$

  - Evaluation

$$g'\,[f(x_0)\,] = g'(3) = \frac{\frac{3}{5} \cdot (1-4) - (1+5) \cdot \frac{3}{4}}{(1-4)^2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{4} = -\frac{7}{10}\,.$$

- Calcul de $f'(x_0) \cdot \Delta x$

  L'approximation linéaire A de $f(x_0 + \Delta x)$ en x_0 s'écrit

$$A = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x\,.$$

  Connaissant $A = \frac{22}{7}$ et $f(x_0) = 3$, on en déduit la valeur de $f'(x_0) \cdot \Delta x$:

$$A = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) \cdot \Delta x = A - f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x_0) \cdot \Delta x = \frac{22}{7} - 3 = \frac{1}{7}\,.$$

- Conclusion

$$B = (g\circ f)(x_0) + (g\circ f)'(x_0)\cdot \Delta x = g\,[f(x_0)\,] + g'\,[f(x_0)\,]\cdot f'(x_0)\cdot \Delta x\,,$$

$$B = (-2) + \left(-\frac{7}{10}\right)\cdot\frac{1}{7} = -2,1\,.$$

8. Soient Γ la courbe définie par la relation : $y^3 + xy^2 + x^3y + x = 0$ et P le point de Γ d'abscisse $x_P = 1$.

Déterminer l'équation de la tangente à Γ en P.

- Equation de la tangente à Γ passant par P.

$$y - y_P = m\,(x - x_P)\,, \qquad \text{avec} \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P .$$

- Coordonnées du point P.

$$P\in\Gamma \quad\Rightarrow\quad y_P^3 + x_P\,y_P^2 + x_P^3\,y_P + x_P = 0\,, \qquad x_P = 1\,,$$

$$\Rightarrow\quad y_P^3 + y_P^2 + y_P + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (y_P+1)\left(y_P^2+1\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y_P = -1\,,$$

$$P\,(1,-1)\,.$$

- Dérivation implicite de la relation définissant Γ.

$$3\,y^2\,y' + y^2 + 2\,x\,y\,y' + 3\,x^2\,y + x^3\,y' + 1 = 0\,.$$

- Evaluation en P.

$$3\,y_P^2\;m + y_P^2 + 2\,x_P\,y_P\;m + 3\,x_P^2\,y_P + x_P^3\;m + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad m = \frac{1}{2}\,.$$

- Equation de la tangente à Γ passant par P.

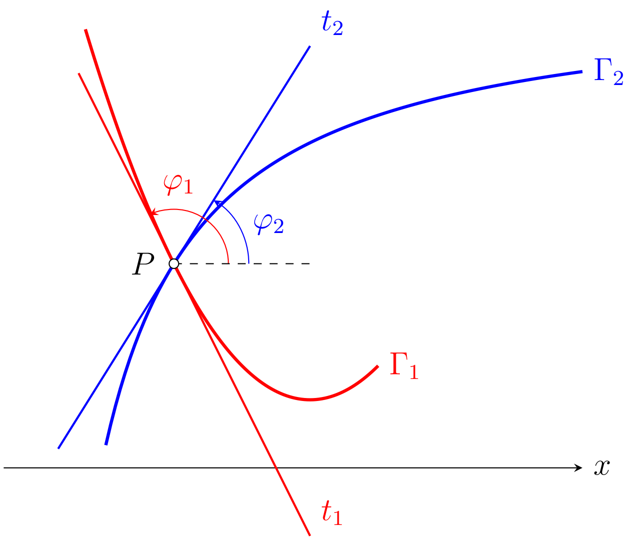
$$y + 1 = \frac{1}{2}\,(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad x - 2\,y - 3 = 0\,.$$

9. Sous quel angle φ les courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent-elles ?

$$\Gamma_1 :\; y^3 + x^3y^2 + x = 3\,, \qquad \Gamma_2 :\; y^3 + x^3y^2 - x = 1\,.$$

Au point d'intersection de Γ_1 et Γ_2, l'angle entre ces deux courbes est l'angle défini par leur tangente en ce point.

Figure d'étude :



- Recherche des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2.

$$y^3+x^3y^2+x-3 \;=\; y^3+x^3y^2-x-1 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad y=1\,.$$

  Les deux courbes se coupent en un seul point $P\,(1\,;\,1)$.

- Recherche de la pente m_1 de la tangente à Γ_1 en P.
  - Dérivation implicite de la relation définissant Γ_1.

$$3\,y^2\,y'+3\,x^2\,y^2+2\,x^3\,y\,y'+1=0\,.$$

  - Evaluation en P.

$$3\,y_P^2\;m_1+3\,x_P^2\,y_P^2+2\,x_P^3\,y_P\;m_1+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad m_1=-\frac{4}{5}\,.$$

- Recherche de la pente m_2 de la tangente à Γ_2 en P.
  - Dérivation implicite de la relation définissant Γ_2.

$$3\,y^2\,y'+3\,x^2\,y^2+2\,x^3\,y\,y'-1=0\,.$$

  - Evaluation en P.

$$3\,y_P^2\;m_2+3\,x_P^2\,y_P^2+2\,x_P^3\,y_P\;m_2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad m_2=-\frac{2}{5}\,.$$

- Détermination de $\varphi\in[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,[$ à l'aide de $\tan\varphi$.

$$\tan\varphi \;=\; \tan|\varphi_1-\varphi_2| \;=\; \big|\tan(\varphi_1-\varphi_2)\big| \;=\; \left|\frac{\tan\varphi_1-\tan\varphi_2}{1+\tan\varphi_1\cdot\tan\varphi_2}\right|$$

$$=\;\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right| \;=\; \left|\frac{-\frac{4}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}\right| \;=\; \frac{10}{33}\,,$$

$$\varphi=\arctan\left(\tfrac{10}{33}\right).$$