
Commençons par rappeler les notations qui ont été introduites dans le cours du 27.10.2020.

Soit $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Alors l'application $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_A((\alpha_1, \cdots, \alpha_m)) = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que sa représentation matricielle par rapport aux bases canoniques des deux espaces est égale à A. Noter ici qu'on identifie $\mathbb{R}^n$ avec les matrices $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Définition/Notation On définit $\ker A$ comme étant $\ker T_A$ et $\operatorname{Im} A$ comme étant $\operatorname{Im} T_A$.

On rappelle aussi la définition d'un *isomorphisme* d'espaces vectoriels (voir §5.4 du MOOC) : Soient V et W des espaces vectoriels. Une application linéaire $f : V \to W$ est appelée un *isomorphisme* si f est bijective, c'est-à-dire, injective et surjective. S'il existe un isomorphisme $f : V \to W$ alors on dit que V et W *sont isomorphes*.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie, $\dim V = n$, alors V est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+y \end{pmatrix}$. Donner la matrice de f par rapport à la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 2. *Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique E est*

$$[T]_{EE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Soit $E' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, et $e'_3 = (0,0,1)$. Calculer $[T]_{E'E'}$.

Exercice 3. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice de T_A par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ soit la matrice A.

1. *Sachant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendant que peut-on conclure concernant $\ker(T_A)$?*
2. *Trouver une base de $\ker T_A$.*
3. *Trouver une base de $\operatorname{Im} T_A$.*
4. *Est-ce que l'application linéaire T_A est injective ? Et surjective ?*

Exercice 4. *On considère l'application $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que T est linéaire.*

2. *Trouver la dimension et une base de* $\mathrm{Im}\,(T)$.
3. *Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension de* $\ker(T)$.
4. *Vérifier le résultat de (c) en trouvant une base de* $\ker(T)$.

Exercice 5. *Considérons l'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (2x - 4y + 2z, 5x + 3y - 2z)$$

ainsi que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *définie par* $g(x,y) = (x, x+y, x-y, y)$.

1. *Ecrire la matrice* A *de* f *et la matrice* B *de* g*, par rapport aux bases canoniques des différents espaces vectoriels.*
2. *Calculez* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*, de deux façons différentes.*
3. *Trouver une base de* $\ker(g \circ f)$ *et de* $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ *et déduire* $\mathrm{rang}(g \circ f)$.

Exercice 6. *Soient*

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad et \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire dont la représentation matricielle par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est donnée par* A*. Déterminer si* $\overrightarrow{w}$ *est dans* ImT*, dans* $KerT$ *ou bien dans les deux.*

Exercice 7. *On considère l'application* $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *définie par*

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

On admet que T *est une application linéaire.*

(a) *Trouver la dimension et une base de* ImT.

(b) *Trouver la dimension et une base de* $KerT$.

(c) *Vérifier que le polynôme* $7 + 5t + 2t^2$ *est bien dans l'image de* T *et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (a).*

(d) *Vérifier que le polynôme* $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ *est bien dans le noyau de* T *et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).*

Exercice 8. *Soient les matrices* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Considérons l'application linéaire* $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ *où* $T(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = (\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix})^t + (\mathbf{B} \begin{pmatrix} v_5 \\ v_6 \end{pmatrix})^t$.

1. T *est-elle injective ?* T *est-elle surjective ?*
2. *Quelle est la dimension de* $\ker(T)$ *? Quelle est la dimension de* $\mathrm{Im}\,(T)$ *?*
3. *Trouver une base de* $\ker(T)$*. Trouver une base de* $\mathrm{Im}\,(T)$.
4. *L'équation* $T(v) = (1, -1, 1, 0)$ *possède-t-elle une solution ?*
5. *Déterminer si* $(1, 0, 2, 0, -1, 2) \in \ker(T)$ *ou non.*

Exercice 9. *Soit* W *l'ensemble des vecteurs de* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *vérifiant l'équation*

$$x + 2y + z = 0.$$

1. *Donner une base de ce sous-espace.*

2. *Décrire W comme le noyau d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$. Est-ce que l'application linéaire T est injective ? Et surjective ?*
3. *Décrire W comme l'image d'une application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Est-ce que l'application linéaire S associée à S est injective ? Et surjective ?*

Exercice 10. *Questions à choix multiples (une seule réponse correcte)*

1. *Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors*
   ☐ $A + I$ *est inversible.*
   ☐ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.
   ☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
   ☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.
2. *Soit A une matrice 7×8 et $T : V \to W$ l'application linéaire dont la représentation par rapport aux bases B_V et B_W de V, respectivement W, est donneée par A. Alors*
   ☐ $\dim V = 7$
   ☐ $\dim V = 8$
   ☐ $\dim W = 8$
   ☐ $\dim V = 15$
3. *La matrice qui représente une application linéaire $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille*
   ☐ 3×3
   ☐ 3×9
   ☐ 3×6
   ☐ 6×3
4. *Soit* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.*
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.*
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.*
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.*
5. *Soit* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.
   ☐ *ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0*
   ☐ *ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0*
   ☐ *ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1*
   ☐ *ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1*
6. *Soit A une matrice de taille $m \times n$.*
   ☐ *Les colonnes de A engendrent le noyau de A^T.*
   ☐ *Le sous-espace engendré par les lignes de A est égal au sous-espace engendré par les colonnes de A.*
   ☐ *Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.*
   ☐ *La dimension du noyau de A est égale à la dimension du noyau de A^T.*
7. *Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que :*
   ☐ $dimKerA = 2$ *et* $dimImA \leq 4$
   ☐ $dimKerA = 3$ *et* $dimImA = 4$
   ☐ $dimKerA = 4$ *et* $dimImA \leq 2$
   ☐ $dimKerA = 5$ *et* $dimImA = 2$
8. *Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?*
   ☐ *Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$.*
   ☐ *Les lignes de A sont linéairement indépendantes.*

☐ *Le noyau de A est vide.*
☐ *Le rang de A est strictement plus petit que* 5.

9. *Soit* $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par* $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. *Alors*
   ☐ T *n'est pas linéaire.*
   ☐ $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 2$.
   ☐ $\dim \ker T = 1$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 1$.
   ☐ $\dim \ker T = 2$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 1$.
10. *Soit* $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par* $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. *Une base du noyau de* T *est donnée par*
   ☐ $\{t\}$.
   ☐ $\{t, 3 + 2t^2\}$.
   ☐ $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.
   ☐ $\{2 - 3t^2\}$.

Exercice 11. *On rappelle la formule pour la projection sur une droite dans* $\mathbb{R}^2$ *et la symétrie orthogonale par rapport à une droite, vus dans §5.2 du MOOC :*

Soit $\vec{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et soit* $D = \operatorname{Vect}(\vec{u})$ *la droite dans* $\mathbb{R}^2$ *qui passe par l'origine définie par* $\vec{u}$. *La projection orthogonale de* $\mathbb{R}^2$ *sur* D *est donnée par* $\operatorname{proj}_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *où* $\operatorname{proj}_{\vec{u}}((x, y)) = \frac{ax+by}{a^2+b^2}(a, b)$.

Ensuite, la symétrie orthogonal par rapport à cette droite est l'application $S_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $S_{\vec{u}}(\vec{w}) = 2\operatorname{proj}_{\vec{u}}(\vec{w}) - \vec{w}$. *Fixons la base ordonnée* $B = ((1, 1), (-1, 1))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et la base canonique* $E = ((1, 0), (0, 1))$.

1. *Soit* $\vec{u} = (1, 1)$ *et soit* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la projection orthogonale sur la droite définie par* $\vec{u}$. *Trouver les représentations matricielles suivantes :*

$$[p]_{EE}; \quad [p]_{BB}; \quad [p]_{EB}; \quad [p]_{BE}.$$

2. *Même question pour la symétrie orthogonal* $S_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
3. *Soit* $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la projection orthogonale sur le plan* $x = 0$. *Soit* $E = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. *Trouver la représentation matricielle de* P *par rapport à la base* E.
4. *On sait que* $S_{\vec{u}} \circ S_{\vec{u}} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$. *Vérifier que la matrice* $A = [S_{\vec{u}}]_{EE}$ *est inversible et égal à son propre inverse.*