
Commençons par rappeler les notations qui ont été introduites dans le cours du 27.10.2020.

Soit $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Alors l'application $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_A((\alpha_1, \cdots, \alpha_m)) = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que sa représentation matricielle par rapport aux bases canoniques des deux espaces est égale à A. Noter ici qu'on identifie $\mathbb{R}^n$ avec les matrices $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Définition/Notation On définit $\ker A$ comme étant $\ker T_A$ et $\operatorname{Im} A$ comme étant $\operatorname{Im} T_A$.

On rappelle aussi la définition d'un *isomorphisme* d'espaces vectoriels (voir §5.4 du MOOC) : Soient V et W des espaces vectoriels. Une application linéaire $f : V \to W$ est appelée un *isomorphisme* si f est bijective, c'est-à-dire, injective et surjective. S'il existe un isomorphisme $f : V \to W$ alors on dit que V et W *sont isomorphes.*

Si V est un espace vectoriel de dimension finie, $\dim V = n$, alors V est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+y \end{pmatrix}$. Donner la matrice de f par rapport à la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Solution 1. Tout d'abord, on a que

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Deuxièmement, on a que

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On doit écrire $f((1,2))$ dans la base B pour obtenir la matrice. Pour cela, comme B est une base, on sait qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système

$$\begin{cases} -1 = \alpha + \beta \\ \ \ 5 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

implique $\alpha = -7$ et $\beta = 6$. Ainsi, on obtient que la matrice de f dans la base B est donnée par

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique E est*

$$[T]_{EE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Soit $E' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, et $e'_3 = (0,0,1)$. Calculer $[T]_{E'E'}$.

Solution 2. Méthode : On calcule $T(e'_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ et on exprime le résultat en termes de la base E', et on place ces vecteurs dans les colonnes de la matrice pour former $[T]_{E'E'}$.

$$T(e'_1) = T((1,1,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e'_1.$$

De suite : $T(e'_2) = T((1,-1,0)) = T_{EE} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = e'_2$ et $T(e'_3) = (-1,-5,-4)$. Ici on doit trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = (-1,-5,-4)$. On résout le système et on trouve $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -1$.

Enfin on a

$$T_{E'E'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice de T_A par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ soit la matrice A.

1. *Sachant que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendant que peut-on conclure concernant* $\ker(T_A)$ *?*
2. *Trouver une base de* $\ker T_A$*.*
3. *Trouver une base de* $\operatorname{Im} T_A$*.*
4. *Est-ce que l'application linéaire T_A est injective ? Et surjective ?*

Solution 3.

1. Assertion : $\text{rang}(A) = 3$
   C'est égal à la dimension de l'espace des colonnes et comme il y a trois colonnes linéairement indépendantes la dimension est au moins 3. Mais l'espace des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent sa dimension est au plus 3, d'où l'égalité. On a donc que $\dim(T_A) = 3$ et par le Théorème du rang, $\dim(\ker(T_A)) = 4 - 3 = 1$.
2. On résout le système $AX = 0$ et on trouve que $\{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $\ker(A)$.
3. $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ est une base de $\operatorname{Im}(A)$.
4. L'application linéaire T_A n'est pas injective parce que $\ker(A) = 1$. T_A est surjective parce que $\text{rang}(A) = 3$.

Exercice 4. *On considère l'application $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que T est linéaire.*

2. *Trouver la dimension et une base de* $\mathrm{Im}\,(T)$*.*
3. *Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension de* $\ker(T)$*.*
4. *Vérifier le résultat de (c) en trouvant une base de* $\ker(T)$*.*

Solution 4. 1. On montre que T est linéaire. Ici nous allons vérifier deux conditions séparémment, $T(u+v) = T(u) + T(v)$ et $T(\alpha u) = \alpha T u$), ce qui montre que $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$. On a que

$$T(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0)+q(0) \\ p(0)+q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = T(p) + T(q),$$

$$T(\alpha p) = \begin{pmatrix} (\alpha p)(0) \\ (\alpha p)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p(0) \\ \alpha p(0) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \alpha T(p).$$

2. L'image de T est constituée de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$. Leurs deux composantes sont égales et elles peuvent être non nulles (il suffit de choisir le polynôme constant 1 pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi l'image de T est donnée par
   $$\mathrm{Im}\,(T) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$
   la dimension est 1, et une base est donnée par $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
3. Par le Théorème du rang, le noyau est donc de dimension $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rang}(T) = 3 - 1 = 2$.
4. Pour terminer il nous suffit de comprendre quels sont les polynômes p qui sont envoyés sur zéro par T. Ce sont tous ceux pour lesquels $p(0) = 0$, ce qui signifie que le coefficient constant est nul. Autrement dit
   $$\ker(T) = \{bt + ct^2 \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{t, t^2\}.$$
   Une base du noyau est ainsi donnée par $\{t, t^2\}$.

Exercice 5. *Considérons l'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (2x - 4y + 2z, 5x + 3y - 2z)$$

ainsi que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *définie par* $g(x,y) = (x, x+y, x-y, y)$*.*

1. *Ecrire la matrice* A *de* f *et la matrice* B *de* g*, par rapport aux bases canoniques des différents espaces vectoriels.*
2. *Calculez* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*, de deux façons différentes.*
3. *Trouver une base de* $\ker(g \circ f)$ *et de* $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ *et déduire* $\mathrm{rang}(g \circ f)$*.*

Solution 5. Note : f et g sont bien des applications linéaires (ce qui permet de continuer l'exercice). On note E la base canonique de $\mathbb{R}^2$, F la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et G la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. On a que $f((1,0,0)) = (2,5)$, $f((0,1,0)) = (-4,3)$ et $f((0,0,1)) = (2,-2)$. De plus, $g((1,0)) = (1,1,1,0)$ et $g((0,1)) = (0,1,-1,1)$. Donc on obtient
   $$A = [f]_{EF} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = [g]_{GE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Première méthode** On note $C = [g\circ f]_{GF}$ la matrice de $g\circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
Par un résultat du cours, on a $[g\circ f]_{GF} = [g]_{GE}[f]_{EF}$ et donc $C = B\cdot A$. Donc on a

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(g\circ f)((x,y,z)) = C\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x-4y+2z, 7x-y, -3x-7y+4z, 5x+3y-2z).$$

Deuxième méthode Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(g\circ f)((x,y,z)) &= g(f((x,y,z)) = g((2x-4y+2z, 5x+3y-2z)) \\ &= (2x-4y+2z, 7x-y, -3x-7y+4z, 5x+3y-2z).\end{aligned}$$

3. On pose $T = g\circ f$. On commence par déterminer $\ker(T)$. Pour cela, on rappelle que $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ appartient à $\ker(T)$ si et seulement si $T((x,y,z)) = \mathbf{0}$, c.-à-d. si et seulement si $C\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. En échelonnant la matrice C, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{L1}\to\frac{\text{L1}}{2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{L2}\to\text{L2}+(-7)\cdot\text{L1} \\ \text{L3}\to\text{L3}+3\cdot\text{L1} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-5)\cdot\text{L1}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -7 \\ 0 & -13 & 7 \\ 0 & 13 & -7 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}-\text{L2}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le noyau est de dimension 1, (une variable libre) et on trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13}z \\ \frac{7}{13}z \\ z \end{pmatrix}$$

où $z\in\mathbb{R}$ peut varier librement. Ainsi, $\ker(T) = \operatorname{Vect}((1,7,13))$.
On rappelle que $\operatorname{Im}(T)$ est l'espace engendré par les colonnes de C. De plus par le théorème du rang on sait que $\dim\operatorname{Im}(T) = 3-\dim\ker(T) = 3-1 = 2$. Comme montré en cours, on peut utiliser l'echelonnage déjà effectué.
On déduit qu'une base de l'espace des colonnes de C, c'est-à-dire une base de $\operatorname{Im}(T)$, est donnée par les colonnes de C qui correspondent aux colonnes ou se trouveent les pivots dans la forme échelonnée de C, soit dans les colonnes 1 et 2. Donc une base de $\operatorname{Im}(T)$ est $\{(2,7,-3,5),(-4,-1,-7,3)\}$. Enfin, $\operatorname{rang}(T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 2$.

Exercice 6. *Soient*

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Soit $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la représentation matricielle par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par A. Déterminer si $\vec{w}$ est dans ImT, dans $KerT$ ou bien dans les deux.

Solution 6. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans Ker$T$ car on calcule $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans ImT car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.

Exercice 7. *On considère l'application $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

On admet que T est une application linéaire.

(a) Trouver la dimension et une base de ImT.

(b) Trouver la dimension et une base de Ker$T$.

(c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (a).

(d) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).

Solution 7. Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2, et on peut prendre comme base les polynômes correspondants aux colonnes de A où se trouve les pivots dans sa forme échelonnée, donc avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1 + t, 1 + t^2\}$. Par le théorème du rang le noyau de T est un sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de dimension 2, et on trouve l'ensemble des solutions du système $AX = 0$ pour déterminer une base : $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1 - t, t^2 - t^3\}$.
Le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5 + 2t^2) = 7 + 5t + 2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont $[7 + 5t + 2t^2]_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, puisque

$$7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2).$$

Le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. (On peut aussi effectuer le produit matriciel $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et voir que c'est le vecteur nul.) Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont $[2 - 2t - 5t^2 + 5t^3]_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, puisque

$$2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3).$$

Exercice 8. *Soient les matrices* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Considérons l'application linéaire* $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ *où* $T(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = (\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix})^t + (\mathbf{B} \begin{pmatrix} v_5 \\ v_6 \end{pmatrix})^t$.

1. *T est-elle injective ? T est-elle surjective ?*
2. *Quelle est la dimension de* $\ker(T)$ *? Quelle est la dimension de* $\mathrm{Im}\,(T)$ *?*
3. *Trouver une base de* $\ker(T)$*. Trouver une base de* $\mathrm{Im}\,(T)$*.*
4. *L'équation $T(v) = (1, -1, 1, 0)$ possède-t-elle une solution ?*
5. *Déterminer si $(1, 0, 2, 0, -1, 2) \in \ker(T)$ ou non.*

Solution 8. La première chose à remarquer dans cet exercice est que si on pose

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 & 11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $C = [T]_{EF}$ où E est la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et F est la base canonique de $\mathbb{R}^6$; par conséquent $T(v_1, \ldots, v_6) = (\mathbf{C} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix})^t$.

1. L'échelonnage de la matrice $\mathbf{C}$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 & 11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3} \to \mathrm{L3} + (-2) \cdot \mathrm{L1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L3} \to \mathrm{L3} + 1 \cdot \mathrm{L2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathbf{C}$ est de rang 2, et par conséquent le rang de T est aussi 2. Ceci revient à dire que $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 2$, donc $\mathrm{Im}\,T$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{Im}\,T \neq \mathbb{R}^4$, c.-à-d. T n'est pas surjective.
   Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker T) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\mathrm{Im}\,T) = 4$. Donc $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$, ce qui est équivalent à T n'est pas injective.

4. Ceci revient à savoir s'il existe $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\mathbf{C}\mathbf{v}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est un système d'équations linéaires à résoudre. Pour cela, on echelonne la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 8 & 11 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3} \to \mathrm{L3} + (-2) \cdot \mathrm{L1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L3} \to \mathrm{L3} + 1 \cdot \mathrm{L2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   L'avant-dernière ligne nous permet de dire que le système n'as pas de solution. On obtient donc que $(1, -1, 1, 0) \notin \mathrm{Im}\,(T)$.

2. Par le point 1., on a $\dim(\ker(T)) = 4$ et $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 2$.

3. Un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_6) \in \mathbb{R}^6$ appartient à $\ker(T)$ si et seulement si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, c.-à-d. si et seulement si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}^t = \mathbf{0}$. Or ceci revient à exiger que $(v_1, \dots, v_6)$ soit solution du système

$$\begin{cases} v_1 + 4v_2 + 5v_3 + 6v_4 + v_5 - v_6 = 0 \\ v_2 + 2v_3 + v_4 = 0 \\ 2v_1 + 7v_2 + 8v_3 + 11v_4 + 2v_5 - 2v_6 = 0 \end{cases}$$

Nous avons déjà échelonnée la matrice C dans le point 1. Une forme échelonnée de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le vecteur v est de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_3 - 2v_4 - v_5 + v_6 \\ -2v_3 - v_4 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

où $v_3, v_4, v_5, v_6 \in \mathbb{R}$ peuvent varier librement. Ainsi, une base de $\ker(T)$ est donnée par

$$\{(3, -2, 1, 0, 0, 0), (-2, -1, 0, 1, 00), (-1, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

On rappelle que $\operatorname{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6\}$. Comme pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_6) = v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_6e_6$ (où $\{e_1, \dots e_6\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^6$), on a $T(\mathbf{v}) = v_1T(e_1) + v_2T(e_2) + \dots + v_6T(e_6)$. Donc $\operatorname{Im}(T) = \langle T(e_1), \dots, T(e_6)\rangle_{\mathbb{R}}$. Or puisque $T(e_i)$ est la i-ème colonne de la matrice $\mathbf{C}$, $\operatorname{Im}(T)$ est l'espace engendré par les colonnes de $\mathbf{C}$.

Par la partie (1), on sait que $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$, donc il suffit de prendre deux vecteurs linéairement indépendants de $\operatorname{Im} T$ pour déterminer une base, par exemple $(1, 0, 2, 0)$ et $(4, 1, 7, 0)$.

5. En calculant, on a $T((1, 0, 2, 0, -1, 2)) = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient $T((1, 0, 2, 0, -1, 2)) = (8, 4, 12, 0) \neq \mathbf{0}$. Donc $(1, 0, 2, 0, -1, 2) \notin \ker(T)$.

Exercice 9. *Soit W l'ensemble des vecteurs de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation*

$$x + 2y + z = 0.$$

1. *Donner une base de ce sous-espace.*
2. *Décrire W comme le noyau d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$. Est-ce que l'application linéaire T est injective ? Et surjective ?*
3. *Décrire W comme l'image d'une application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Est-ce que l'application linéaire S associée à S est injective ? Et surjective ?*

Solution 9. 1. On a que

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\} = \{(x, y, -x - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}.$$

Une base est donnée par $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$.

2. Le sous-espace W est l'ensemble des solutions du système d'équations $AX = 0$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc on prendra T l'application linéaire dont la matrice de T par rapport aux bases canoniques est égale à A. On trouve $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$(x, y, z) \mapsto x + 2y + z.$$

L'application T est surjective car $\dim \mathrm{Im}\,(T) = 3 - \dim(\ker(T)) = 3 - \dim W = 3 - 2 = 1 = \dim \mathbb{R}^1$. L'application T n'est pas injective parce que $\ker(T) \neq \mathbf{0}$.

3. Le sous-espace W est égal à l'espace des colonnes de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

donc on prendra l'application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques est égale à B. On trouve que

$$S((a, b)) = B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a, b, -a - 2b).$$

L'application S n'est pas surjective, car $\mathrm{rang}(B) \leq 2$. De plus comme les colonnes sont linéairement indépendantes, on voit que le rang de S est égal au rang de B qui est 2 et donc par le théorème du rang, $\dim \ker(S) = 2 - \dim \mathrm{Im}\,(S) = 0$. Par conséquent S est injective.

Exercice 10. *Questions à choix multiples (une seule réponse correcte)*

1. *Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors*
   ☐ $A + I$ *est inversible.*
   X $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.
   ☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
   ☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.
2. *Soit A une matrice 7×8 et $T : V \to W$ l'application linéaire dont la représentation par rapport aux bases B_V et B_W de V, respectivement W, est donneée par A. Alors*
   ☐ $\dim V = 7$
   X $\dim V = 8$
   ☐ $\dim W = 8$
   ☐ $\dim V = 15$
3. *La matrice qui représente une application linéaire $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille*
   ☐ 3×3
   ☐ 3×9
   X 3×6
   ☐ 6×3
4. *Soit* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension* 0.
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension* 0.
   ☐ *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension* 1.
   X *KerA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension* 1.
5. *Soit* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.

☐ *ImA est un sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *de dimension* 0
☐ *ImA est un sous-espace de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension* 0
X *ImA est un sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *de dimension* 1
☐ *ImA est un sous-espace de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension* 1

6. *Soit* A *une matrice de taille* $m \times n$.
☐ *Les colonnes de* A *engendrent le noyau de* A^T.
☐ *Le sous-espace engendré par les lignes de* A *est égal au sous-espace engendré par les colonnes de* A.
X *Le sous-espace engendré par les lignes de* A *est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de* A.
☐ *La dimension du noyau de* A *est égale à la dimension du noyau de* A^T.

7. *Il existe une matrice* A *de taille* 3×7 *telle que :*
☐ $dimKerA = 2$ *et* $dimImA \leq 4$
☐ $dimKerA = 3$ *et* $dimImA = 4$
☐ $dimKerA = 4$ *et* $dimImA \leq 2$
X $dimKerA = 5$ *et* $dimImA = 2$

8. *Soit* A *une matrice inversible de taille* 5×5. *Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?*
☐ *Les colonnes de* A *n'engendrent pas* $\mathbb{R}^5$.
X *Les lignes de* A *sont linéairement indépendantes.*
☐ *Le noyau de* A *est vide.*
☐ *Le rang de* A *est strictement plus petit que* 5.

9. *Soit* $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par* $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. *Alors*
☐ T *n'est pas linéaire.*
☐ $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 2$.
☐ $\dim \ker T = 1$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 1$.
X $\dim \ker T = 2$ *et* $\dim \operatorname{Im} T = 1$.

10. *Soit* $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par* $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. *Une base du noyau de* T *est donnée par*
☐ $\{t\}$.
☐ $\{t, 3 + 2t^2\}$.
X $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.
☐ $\{2 - 3t^2\}$.

Solution 10.

1. Pour voir que le point 1 est faux, prendre $A = -I$. Le point 2 est vrai par distributivité :

$$(A - I)(A + I) = A \cdot A - I \cdot A + A \cdot I - I \cdot I = A^2 - A + A - I = A^2 - I.$$

Le point 3 est faux, car il manque le double produit $A \cdot I + I \cdot A = 2A$. Le point 4 n'est vrai que si $a^2 = a$. C'est donc faux en général. Par exemple si $A = I$ et $a = 2$ on a $(2I)^2 = 4I \neq 2I = 2I^2$.

2. On rappelle que pour former la matrice associée A à T on calcule $T(v_i)$ pour chaque vecteur de la base B_V, on l'exprime en termes de la base B_W et les coordonnées sont placées dans la i-ème colonne de A. Donc la matrice A possède $\dim V$ colonnes et donc $\dim V = 8$.

3. On sait que le nombre de colonnes de A est égal à la dimension de l'espace de départ, donc égal à $\dim M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6$. Aussi le nombre de lignes est égal à la dimension de l'espace d'arrivée, donc $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

4. Les colonnes de A engendrent $\operatorname{Im}(A)$. On voit que ces deux colonnes sont linéairement dépendantes (l'une étant un multiple de l'autre), d'où $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 1$. On a que A correpsond à une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$. Par le théorème du rang, $2 = \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \ker(A)$ et donc $\dim \ker(A) = 1$.

5. Par le point précédent, on a que $\operatorname{Im}(A)$ est de dimension 1 et est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

6. Ici on souligne que A est une matrice $m \times n$ **quelconque**. En particulier il se peut que $m \neq n$. On déduit immédiatement que la deuxième réponse n'est pas correcte car l'espace des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ et l'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Maintenant on considère le premier énoncé : Soit $B = A^T$. L'espace colonnes de A est l'espace lignes de B. On nous demande si les lignes de B engendrent le noyau de B. Mais c'est justement "l'opposé" de ce qui se passe. Considérer la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau de B est de dimension 2 (2 variables libres) et l'espaces de lignes est de dimension 1.

Pour la dernière réponse, considérer la matrice $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ici, la dimension du noyau de A^T est égale à 2 (deux variables libres). Par contre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est ligne équivalent à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la dimension du noyau est égale à 1

On rappelle que le rang de A est égal au rang colonne de A qui est égal au rang ligne de A. Soit r le rang colonne de A, alors l'espace des colonnes de A est isomorphe à $\mathbb{R}^r$, ainsi que l'espace des lignes. Donc les deux sont isomorphes à $\mathbb{R}^r$ et par conséquent les deux espaces sont isomorphes l'un à l'autre.

7. $\dim\mathrm{Ker}A = 5$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

   La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension ≤ 3. Le Théorème du rang affirme que $\dim\mathrm{Ker}A = 7 - \dim\mathrm{Im}A \geq 7 - 3 = 4$, ce qui élimine les deux premières affirmations. Intuitivement c'est clair : il faut “tuer” au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim\mathrm{Ker}A + \dim\mathrm{Im}A = 7$, ce qui élimine aussi la troisième affirmation. la seule qui ne contredit pas le Théorème du rang est la dernière.

8. Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

   La forme échelonnée d'une matrice inversible $n \times n$ a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi le rang ligne (égal au rang colonne) est égal à n.

   Dans le cas particulier d'une matrice 5×5, le rang de A est égal à 5, ce qui exclut la quatrième réponse. Les 5 lignes de A sont linéairement indépendantes aussi, car l'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ de dimension 5. Comme le rang colonne de A est aussi 5, les colonnes de A engendrent aussi un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ de dimension 5 et par conséquent les colonnes sont linéairement indépendantes. Noter aussi que le noyau de A n'est jamais vide car il contient toujours le vecteur nul.

9. $\dim \ker T = 2$ et $\dim \mathrm{Im}\, T = 1$.

   L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a + bt + ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

10. $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

    Par 9. la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que les polynômes $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau. En revanche, le polynôme $3 + 2t^2$ n'est pas dans le noyau car $T(3 + 2t^2) = 13 \neq 0$.

Exercice 11. *On rappelle la formule pour la projection sur une droite dans $\mathbb{R}^2$ et la symétrie orthogonale par rapport à une droite, vus dans §5.2 du MOOC :*

Soit $\vec{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $D = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ la droite dans $\mathbb{R}^2$ qui passe par l'origine définie par $\vec{u}$. La projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur D est donnée par $\mathrm{proj}_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où $\mathrm{proj}_{\vec{u}}((x, y)) = \frac{ax+by}{a^2+b^2}(a, b)$.

Ensuite, la symétrie orthogonal par rapport à cette droite est l'application $S_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $S_{\vec{u}}(\vec{w}) = 2\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{w}) - \vec{w}$. Fixons la base ordonnée $B = ((1, 1), (-1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique $E = ((1, 0), (0, 1))$.

1. *Soit $\vec{u} = (1, 1)$ et soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite définie par $\vec{u}$. Trouver les représentations matricielles suivantes :*

$$[p]_{EE}; \quad [p]_{BB}; \quad [p]_{EB}; \quad [p]_{BE}.$$

2. *Même question pour la symétrie orthogonal $S_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*
3. *Soit $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan $x = 0$. Soit $E = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Trouver la représentation matricielle de P par rapport à la base E.*
4. *On sait que $S_{\vec{u}} \circ S_{\vec{u}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Vérifier que la matrice $A = [S_{\vec{u}}]_{EE}$ est inversible et égal à son propre inverse.*

Solution 11.

1. On a $p(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$.

   Pour $[p]_{EE}$: $p((1,0)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1)$ et $p((0,1)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1)$. Donc $[p]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Pour $[p]_{BB}$: On a $p(1,1) = (1,1) = 1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (-1,1)$ et $p((-1,1)) = (0,0)$. Donc $[p]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Pour $[p]_{BE}$: On a $p((1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1,1) + 0 \cdot (-1,1)$ et $p(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1,1) + 0 \cdot (-1,1)$. Donc $[p]_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Pour $[p]_{EB}$: On a $p((1,1)) = (1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$ et $p((-1,1)) = (0,0)$ et donc $[p]_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On fait de même avec la symétrie orthogonale $S_{\vec{u}}$:

   Ici $S_{\vec{u}}(x,y) = 2p((x,y)) - (x,y) = (x+y, x+y) - (x,y) = (y,x)$. On trouve $[S_{\vec{u}}]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[S_{\vec{u}}]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[S_{\vec{u}}]_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $[S_{\vec{u}}]_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Ici $P(x,y,z) = (0,y,z)$ et $[P]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = I$ et donc $A^{-1} = A$.
