Logique et méthodes de preuve

1. Ecrire, en langage quantifié, la négation des propositions P suivantes et déterminer si l'on a P ou (non P) vrai.

a) $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| = 0\,.$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = \sqrt{3}\,.$
c) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\,.$
d) $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 = 0\,.$
e) $\forall\, x \in \{1;\,2;\,3;\,4\}\,,\ x^2 - 10 \leq 0\,.$
f) $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 2k\,.$
g) $\forall\, x \in A = \{1;\,2;\,3\}\,,\ \exists\, y \in A\,,\ x^2 + 2y < 10\,.$
h) $\forall\,(a;\,b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$
i) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+\,,\quad (x \leq 1 \ \text{ et } \ x^2 \leq x)\,.$
j) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+\,,\quad (x \leq 1 \ \text{ ou } \ x^2 \leq x)\,.$
k) $(\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \ \text{ tel que } \ x \leq 1)\,,\quad x^2 \leq x\,.$

2. Déterminer le référentiel E dans lequel les propositions suivantes sont vraies :

a) $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent à angle droit.
b) $ABCD$ est un carré si et seulement si les angles en A, B, C et D sont droits.

3. Former des implications ou équivalences avec les propositions suivantes :

a) P : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
Q : le quadrilatère $ABCD$ est un losange qui a un angle droit.
R : le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
S : le quadrilatère $ABCD$ a des angles opposés égaux.

b) Soient α un plan et d une droite non contenue dans ce plan :
P : la droite d est normale au plan α.
Q : la droite d est perpendiculaire à une droite g de α.

4. En utilisant la méthode directe, démontrer les propositions suivantes :

a) Si n est un nombre pair alors $n^2 + 1$ est impair.
b) Si n est un nombre impair alors $n^2 - 1$ est pair.
c) Si n est un nombre impair alors $n^2 + 2$ est impair.
d) Si n est un entier positif alors $n^2 - n$ est pair.
e) Si n est un entier positif alors $n^3 - n$ est un multiple de 3.

f) Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 8k + 1$.

g) Soit $a \in \mathbb{N}$, si a n'est pas un multiple de 3 alors $a^2 + 2$ est un multiple de 3.

h) Si m est pair ou n est pair alors $m^2 + n^2$ est impair ou $m^2 + n^2$ est un multiple de 4.

i) Soit $m \in \mathbb{N}$, si m est la somme de 5 entiers consécutifs alors m est un multiple de 5.
Peut-on généraliser cet énoncé à la somme d'un nombre quelconque d'entiers consécutifs ? Justifier la réponse par une démonstration.

j) Soient A et B des sous-ensembles de E :
$A \cup B = A \cap B \;\Rightarrow\; A = B$.

5. Ecrire le théorème suivant en langage quantifié ; déterminer le référentiel, l'hypothèse, la conclusion et en faire la démonstration.
On peut diviser n par m lorsque $n\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $m\mathbb{Z}$, n et m étant des entiers positifs non nuls.

6. En utilisant la méthode par l'absurde, démontrer les propositions suivantes :

a) Si x est irrationnel et y rationnel alors $x + y$ est irrationnel.

b) $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0 \;\Rightarrow\; m + n\sqrt{2}$ est irrationnel.
Indication : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

c) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, si $a^2 + 2$ est un multiple de 3 alors a n'est pas un multiple de 3.

d) $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq 3$ et $n \leq 3 \;\Rightarrow\; m \cdot n \neq 15$.

e) Soient A et B des sous-ensembles du référentiel E.
$\forall\, A, B \subset E, \quad A \subset B \Rightarrow \overline{A} \cup B = E$.

f) $\sqrt{3}$ est irrationnel.

7. Ecrire l'énoncé contraposé des théorèmes suivants (on ne demande pas de démonstration).

a) Soient ABC un triangle et D le milieu du côté AB.
Si E est le milieu du côté AC alors DE est parallèle à BC.

b) $\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}^*$, si a ou b sont pairs alors ab est pair.

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x\,(x - 3) > 0 \;\Rightarrow\; x < 0$ ou $x > 3$.

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 < 0 \;\Rightarrow\; x < 1$ et $x > -1$.

e) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N}$, $(m \leq 3$ et $n \leq 3) \;\Rightarrow\; m \cdot n \neq 15$.

f) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N}$, $m + n = 0 \;\Rightarrow\; m = 0$ et $n = 0$.

g) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N}$, $(m = 0$ ou $n = 0) \;\Rightarrow m \cdot n = 0$.

h) $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $(\forall \varepsilon > 0\,,\; |a| < \varepsilon\,) \;\Rightarrow\; a = 0$.

8. Démontrer par la contraposée les théorèmes suivants :

a) $\forall n\,,\ m \in \mathbb{N}\,,\ m \cdot n$ pair $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

b) $\forall n\,,\ m \in \mathbb{N}^*\,,\ m^n$ impair $\Rightarrow$ m est impair ou n est impair.

c) $\forall n\,,\ m \in \mathbb{N}\,,$ ($m^2{+}n^2$ est impair ou $m^2{+}n^2 = 4k, k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

d) $\forall n\,,\ m \in \mathbb{N}^*\,,\ m^2{-}n^2$ n'est pas une multiple de 8 $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

e) Si n^2 est un multiple de 3 alors n est aussi un multiple de 3, n étant un entier positif.

9. Soient A, B C et des sous-ensembles de E.
Démontrer par la contraposée :

a) $A \cap \overline{B} = \emptyset \ \Leftrightarrow\ A \subset B$.

b) $A \subset B \ \Leftrightarrow\ E = \overline{A} \cup B$.

c) $\forall\ A, B, C\ \subset\ E,\quad (A \cap B)\ \subset\ C \implies \mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C)\ =\ \emptyset$.
($\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A).

10. Ecrire le théorème suivant en langage quantifié ; déterminer le référentiel, l'hypothèse, la conclusion et en faire la démonstration.
Le carré d'un entier positif impair est impair.
Ecrire le théorème réciproque et le démontrer ; en déduire deux nouveaux énoncés.

11. On considère l'énoncé T suivant :

T : $\forall m, n \in \mathbb{N}$:
($m^2{+}n^2$ est impair ou $\exists\, k \in \mathbb{N}\,,\ m^2{+}n^2 = 4k$) $\Longrightarrow$ (m est pair ou n est pair).

On note R l'énoncé réciproque de T et C l'énoncé contraposé de T.

a) Ecrire les énoncés R et C en précisant pour chaque cas le référentiel, l'hypothèse et la conclusion.
Montrer R et C en utilisant la méthode directe.

b) Déduire directement de a) un théorème énonçant une équivalence (en donner une justification brève).

12. Soit la proposition T suivante :

$$T:\ \forall m, n \in \mathbb{N}\,,\ n \neq 0\ \Rightarrow\ m + n\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}$$

a) Démontrer la proposition T par l'absurde.

b) Enoncer la contraposée C de la proposition T. C est-elle vraie ?

c) Enoncer la réciproque R de la proposition T et la démontrer par la méthode de la contraposée.

13. Démontrer par récurrence :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)\,.$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)\,.$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}\,.$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1\,.$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$

f) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,.$

g) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$

h) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \quad S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} n\,(n+1)\,.$

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \quad (1-x)\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$

j) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad 5^n + 5 < 5^{n+1}\,.$

k) $\forall\, n \in \mathbb{N} :$ $10^n - 1$ est un multiple de 9.

l) $\forall\, n \in \mathbb{N} :$ $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

m) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 6 : \quad 2^n \geq 6n + 7\,.$

n) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4 \ : \quad 2^n < n!\,.$

o) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 7 \ : \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n > n\,.$

p) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \quad \dfrac{(2n)!}{n!n!} \ \leq \ 2^{2n-1}$

q) $3^{3n} + 1$ est un multiple de 7 pour tout n impair et $n \geq 1\,.$

14. Ecrire la négation des propositions P suivantes.
Dans le cas où la proposition est fausse, donner un contre-exemple.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 = 9 \ \Rightarrow\ x = 3\,.$

b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\,,\ x^2 = y^2 \ \Rightarrow\ x = y\,.$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \leq 2 \ \Rightarrow\ x \leq 0\,.$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Q}\,.$

e) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ 2x^2 = 8 \ \Rightarrow\ x = 2$ ou $x = -2\,.$

f) $\forall\,(n;\, m) \in \mathbb{N}^2\,,\ n + m = 0 \ \Rightarrow\ n = m = 0\,.$

g) $\forall\,(a;\, b) \in \mathbb{R}^2\,,\ a < b \ \Rightarrow\ \exists x \in\ \mathbb{Q}\,,\ a < x < b\,.$

h) Un nombre est irrationnel lorsqu'il s'écrit comme produit de deux nombres irrationnels.

i) a et b étant irrationnels, leur quotient est irrationnel.

15. Dans chacun des théorèmes qui suivent déterminer le référentiel, l'hypothèse et la conclusion. De plus, vérifier si la proposition réciproque est vraie ou fausse. On ne demande pas de démonstration, mais donner un contre-exemple lorsque la proposition est fausse.

a) Théorème de Thalès : une parallèle à un côté d'un triangle ABC détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.

b) Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont isométriques.
(Définition : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles)

c) Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en un point qui est le milieu de chacune d'elles.

d) Les angles de deux triangles égaux sont égaux.

e) Les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.

f) La condition nécessaire pour qu'une droite d non contenue dans un plan α soit parallèle à α est qu'il existe dans α une droite d' parallèle à d.

g) Tout plan π coupant l'une des deux parallèles a et b coupe aussi l'autre.

16. On considère la proposition T suivante :

$T\ :\ \forall\, m\,,\, n\,,\, p\, \in\, \mathbb{N}^*,$

p divise m et p divise $n \implies \forall\, a\,,\, b\, \in\, \mathbb{N},\ p$ divise $(a\,m + b\,n)$.

a) Démontrer la proposition T par la méthode directe.

b) Ecrire en langage quantifié la négation de la proposition T et en donner sa valeur de vérité.

c) Enoncer la proposition contraposée C de la proposition T.
La proposition C est-elle vraie ?

17. On considère la proposition suivante notée T :

$T\ :\ \forall\, m\,,\, n\, \in\, \mathbb{N}^*,$

m est impair et n est impair $\implies$ $m^2 - n^2$ est un multiple de 8.

a) Ecrire la proposition réciproque de T, notée R, et l'énoncé contraposé de R, noté C.

b) Ecrire la négation de C et montrer que la proposition C est fausse. En déduire la valeur de vérité de R.

18. Soit E un ensemble. On considère la proposition suivante notée T :

$T\ :\ \forall\ A\,,\, B\,,\, C\, \subset\, E\,,$

$(A \cap B) \subset C \implies \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) = \emptyset\,.$

(Rappel : $\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A)

a) Ecrire la négation de T.

b) Enoncer la proposition contraposée de T.

c) Démontrer T par l'absurde.

19. Soit E un ensemble. On considère la proposition suivante :

$$\forall\ A\,, B\,, D\, \subset\, E\,,$$
$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \Big[\, B \cap D = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cap D = \emptyset\, \Big]\,.$$

a) Ecrire l'énoncé contraposé de cette proposition.

b) Démontrer cette proposition en utilisant la méthode de la contraposée.

20. Les propositions P et Q suivantes ont-elles la même signification ? Pour chaque proposition, en donner sa valeur de vérité et préciser le référentiel.

a) $P\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall \epsilon > 0\,, (\,|x| < \epsilon\ \Rightarrow\ x = 0\,)$

$Q\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ (\forall \epsilon > 0\,,\ |x| < \epsilon\,)\ \Rightarrow\ x = 0$

b) $P\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exists y \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y$

$Q\ :\ \exists y \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y$

c) $P\ :\ \forall x \in \mathbb{R}_+\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (1+x)^n \geq 1$

$Q\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+\,,\ (1+x)^n \geq 1$

Réponses

1. a) (non P) : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |x| \neq 0\,.$
P vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
(non P) faux.

b) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq \sqrt{3}\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

c) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}\,,\ x = 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

d) (non P) : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 \neq 0\,.$
or $\Delta' = 1 - 2 < 0$
(non P) vrai, car $\Delta' < 0.$
P faux.

e) (non P) : $\exists x \in \{1;\, 2;\, 3;\, 4\}\,,\ x^2 - 10 > 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 4$ tel que $x^2 - 10 > 0.$
P faux.

f) (non P) : $\exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,,\ x \neq 2k\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}\,, x \neq 2k.$
P faux.

g) (non P) : $\exists x \in A = \{1;\, 2;\, 3\}\,,\ \forall y \in A\,,\ x^2 + 2y \geq 10\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $y \in A$: $x^2 + 2y \geq 10\,.$
P faux.

h) (non P) : $\exists\,(a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 > (a+b)^2\,.$
P vrai, car pour tout $(a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ ab \geq 0$ donc
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$
(non P) faux.

i) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+\,,\ (x > 1 \text{ ou } x^2 > x)\,.$
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1\,.$
P faux.

j) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+\,,\ (x > 1 \text{ et } x^2 > x)\,.$
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$ et $x^2 > x\,.$
P faux.

k) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \leq 1\,, x^2 > x\,.$
P vrai, car pour tout $0 \leq x \leq 1\,, x^2 - x \leq 0.$
non P faux.

2. a) Le référentiel E est l'ensemble des parallélogrammes.

b) Le référentiel E est l'ensemble des losanges.

3. a) $P \Longleftrightarrow S$ $\quad Q \Longrightarrow P$ $\quad R \Longrightarrow S$
$Q \Longleftrightarrow R$ $\quad R \Longrightarrow P$ $\quad Q \Longrightarrow S$

b) $P \Longrightarrow Q$

5. $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$.

6. Indications :

a) supposer : x irrationnel, y rationnel et $x + y$ rationnel.
b) supposer : $n \neq 0$ et $m + n\sqrt{2}$ rationnel.
c) supposer : $a^2 + 2$ est un multiple de 3 et a est un multiple de 3.
d) supposer : $m \leq 3$, $n \leq 3$ et $m \cdot n = 15$.
e) supposer : $A \subset B$ et $\overline{A} \cup B \neq E$
f) supposer : $\sqrt{2}$ rationnel càd : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) = 1$.

7. a) Soient ABC un triangle, D le milieu de AB. Si DE n'est pas parallèle à BC alors E n'est pas le milieu de AC.

b) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, si ab est impair alors a et b sont impairs.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ et $x \leq 3 \ \Rightarrow\ x(x-3) \leq 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 1$ ou $x \leq -1 \ \Rightarrow\ x^2 - 1 \geq 0$

e) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \cdot n = 15 \ \Rightarrow\ m > 3$ ou $n > 3$

f) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \neq 0$ ou $n \neq 0 \ \Rightarrow\ m + n \neq 0$.

g) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \cdot n \neq 0 \ \Rightarrow\ m \neq 0$ et $n \neq 0$.

h) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \ \Rightarrow\ (\exists \varepsilon > 0,\ |a| \geq \varepsilon)$.

8. Enoncé contraposé C :

a) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, m et n impairs $\Rightarrow$ $m \cdot n$ impair.
b) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, m et n pairs $\Rightarrow$ m^n pair .
c) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, m et n impairs $\Rightarrow$ ($m^2 + n^2$ est pair et $m^2 + n^2 \neq 4k, \forall k \in \mathbb{N}$).
d) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, m et n impairs $\Rightarrow$ $m^2 - n^2 = 8k,\ k \in \mathbb{Z}$.

9. Enoncé contraposé C :

a) $A \cap \overline{B} \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ A \not\subset B$.
b) $A \not\subset B \ \Leftrightarrow\ E \neq \overline{A} \cup B$.
c) $\forall\, A, B, C \subset E,\ \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \neq \emptyset \Longrightarrow (A \cap B) \not\subset C$.
($\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A).

10. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ x = 2k + 1 \Longrightarrow \exists l \in \mathbb{N},\ x^2 = 2l + 1$.

11. a) Enoncé réciproque R :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$.
Hypothèse : m est pair ou n est pair.
Conclusion : $m^2 + n^2$ est impair ou $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $m^2 + n^2 = 4k$.

Enoncé contraposé C :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$.
Hypothèse : m est impair et n est impair.
Conclusion : $m^2 + n^2$ est pair et $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $m^2 + n^2 \neq 4k$.

b) Théorème énonçant une équivalence :
$\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $(m^2 + n^2$ est impair ou $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $m^2 + n^2 = 4k)$
$\Leftrightarrow$ $(m$ est pair ou n est pair$)$.

12. b) C : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m + n\sqrt{2}$ est rationnel $\Rightarrow$ $n = 0$.

c) R : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m + n\sqrt{2}$ est irrationnel $\Rightarrow$ $n \neq 0$.

14. a) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 9$ et $x \neq 3$
P faux ; contre-exemple : si $x = -3$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

b) non P : $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2$ et $x \neq y$
P faux ; contre-exemple : si $x = 2$, $y = -2$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

c) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x \leq 2$ et $x > 0$
P faux ; contre-exemple : si $x = 1$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

d) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

e) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $2x^2 = 8$ et $(x \neq 2$ et $x \neq -2)$
P vrai.

f) non P : $\exists\, (n; m) \in \mathbb{N}^2$, $n + m = 0$ et $(n \neq 0$ ou $m \neq 0)$
P vrai.

g) non P : $\exists\, (a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(\forall\, x \in \mathbb{Q}$, $a \geq x \geq b)$
P vrai.

h) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}$, x est produit de 2 irrationnels et x est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

i) non P : $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, a et b sont irrationnels et $\dfrac{a}{b}$ est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

15. a) Référentiel : ABC est un triangle, $D \in AB$, $E \in AC$.
Hypothèse : $DE \parallel BC$. Conclusion : $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.
La réciproque est vraie.

b) Référentiel : $ABCD$ est un quadrilatère convexe.
Hypothèse : $ABCD$ est un parallélogramme. Conclusion : $AB = DC$ et $AD = BC$.
La réciproque est vraie.

c) Référentiel : $ABCD$ est un quadrilatère convexe.
Hypothèse : $ABCD$ est un parallélogramme. Conclusion : les diagonales se coupent en leur milieu.
La réciproque est vraie.

d) Référentiel : T et T' sont deux triangles.
Hypothèse : T et T' sont isométriques. Conclusion : leurs angles sont égaux.
La réciproque est fausse (triangles semblables).

e) Référentiel : $ABCD$ est un quadrilatère.
Hypothèse : $ABCD$ est un losange. Conclusion : les diagonales se coupent à angle droit.
La réciproque est fausse (rhomboïde).

f) Référentiel : Soient α un plan de l'espace et d une droite non contenue dans α.
Hypothèse : d est parallèle à α. Conclusion : $\exists\, d' \subset \alpha$ telle que d soit parallèle à d'.
La réciproque est vraie.

g) Référentiel : Soient π un plan et a, b deux droites parallèles.
Hypothèse : π coupe a. Conclusion : π coupe b.
La réciproque est vraie.

16. b) non T : $\exists\, m, n, p \in \mathbb{N}^*$,
(p divise m et p divise n) et ($\exists\, a, b \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $(am + bn)$).
non T faux.

c) C : $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N}^*$,
$\exists\, a, b \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $(am + bn)$
$\Longrightarrow$
(p ne divise pas m) ou (p ne divise pas n)
C vraie.

17. a) R : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m^2 - n^2 = 8k,\ k \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow$ m et n impairs.
C : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$, m ou n pairs $\Longrightarrow m^2 - n^2$ n'est pas un multiple de 8.

b)
- non C :
  $\exists\, m, n \in \mathbb{N}^*$, (m ou n pairs) et ($m^2 - n^2 = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$)
- C faux : contre-exemple :
  si $m = 10$, $n = 2$, $10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96 = 8 \cdot 12$;
  l'hypotèse de C est vraie et sa conclusion est fausse.
- C faux $\Leftrightarrow$ R faux.

18. a) non T :

$\exists\ A\,,\,B\,,\,C\,\subset\,E\,,\quad (A\cap B)\subset C \quad \text{et} \quad (\,\mathcal{C}_A(C)\cap\mathcal{C}_B(C)\neq\emptyset\,)$

b) C :

$\forall\ A\,,\,B\,,\,C\,\subset\,E\,,\quad \mathcal{C}_A(C)\cap\mathcal{C}_B(C)\neq\emptyset \quad\Longrightarrow\quad (A\cap B)\not\subset C$

19. a) C :

$\forall\ A\,,\,B\,,\,D\,\subset\,E\,,\quad \Big[\,B\cap D=\emptyset \quad \text{et} \quad A\cap D\neq\emptyset\,\Big] \quad\Longrightarrow\quad A\not\subset B$

20. a) non
P faux, se montre à l'aide d'un contre-exemple, le référentiel est :
$\forall x\in\mathbb{R}\,,\,\forall\epsilon>0$
Q vrai, se montre par contraposée, le référentiel est : $\forall x\in\mathbb{R}\,.$

b) non
P vrai, Q faux

c) oui
P vrai, Q vrai