Corrigé 2

1. A l'aide du cercle trigonométrique, mais sans machine à calculer, déterminer les valeurs suivantes :

a) $\cos(\frac{179\pi}{3})$ b) $\sin(-\frac{374\pi}{6})$ c) $\tan(\frac{163\pi}{4})$ d) $\cot(-\frac{67\pi}{3})$

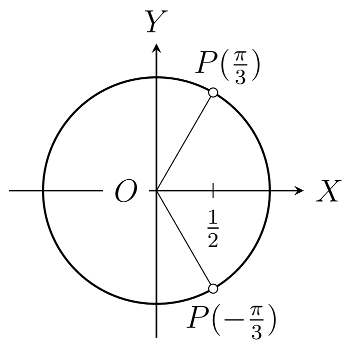
---

a) $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \cos(60\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, d'où $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

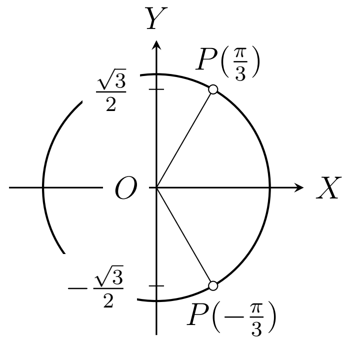


b) $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = \sin(-62\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$.

Et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

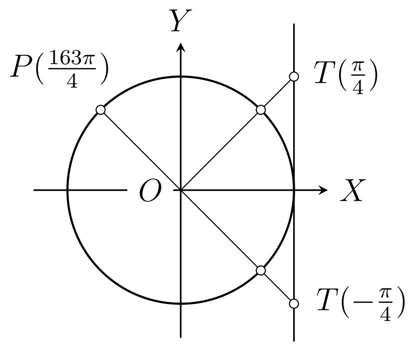


c) $\tan(\frac{163\pi}{4}) = \tan(41\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4})$.

Or les points $T(-\frac{\pi}{4})$ et $T(\frac{\pi}{4})$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4})$.

Et $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, d'où $\tan(\frac{163\pi}{4}) = -1$.

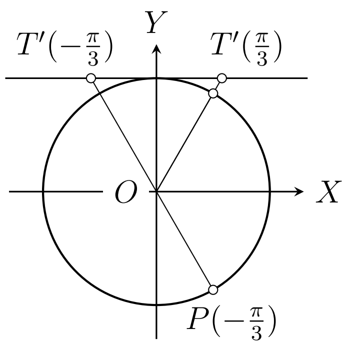


d) $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = \cot(-22\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $T'(-\frac{\pi}{3})$ et $T'(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy .

Donc $\cot(-\frac{\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cot(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



2. Calculer, sans machine, la valeur des fonctions trigonométriques des angles ainsi définis :

a) $\cos x = \pm\frac{4}{5}$, $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$

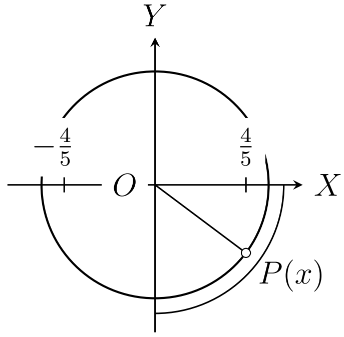
b) $\sin x = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$

c) $\tan x = \pm\frac{4}{3}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$

d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$

---

a) x est défini par $\cos x = \pm\frac{4}{5}$, $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$.



- Signe des fonctions trigonométriques de x .

  Localisation de $P(x)$:

  $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in IV$.

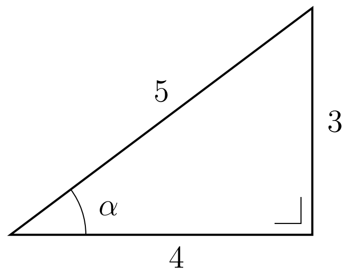
  Donc $\cos x > 0$, $\sin x < 0$ et $\tan x < 0$.

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

  Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

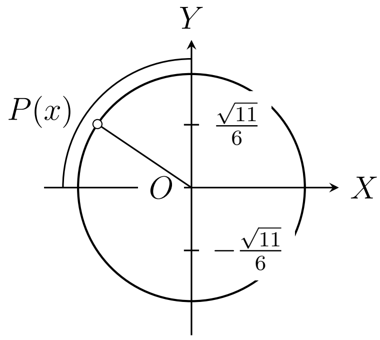
  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$:

  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.



En conclusion : $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin x = -\frac{3}{5}$ et $\tan x = -\frac{3}{4}$.

b) x est défini par $\sin x = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$.



- Signe des fonctions trigonométriques de x .

  Localisation de $P(x)$:

  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II$.

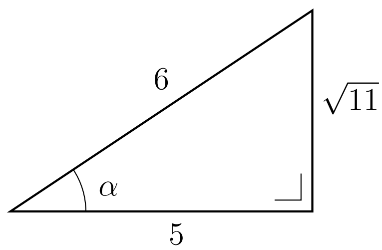
  Donc $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ et $\tan x < 0$.

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

  Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

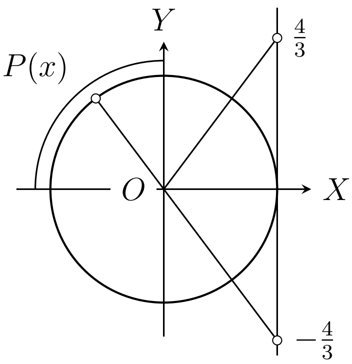
  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$:

  $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ et $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$.



En conclusion : $\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos x = -\frac{5}{6}$ et $\tan x = -\frac{\sqrt{11}}{5}$.

c) x est défini par $\tan x = \pm\frac{4}{3}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$



- Signe des fonctions trigonométriques de x .

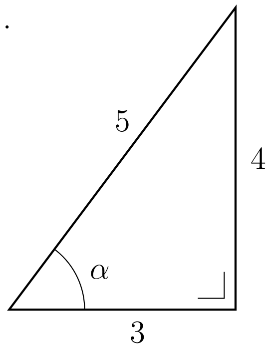
  Localisation de $P(x)$:

  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II$.

  Donc $\tan x < 0$, $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$.

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

  Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\tan\alpha = \frac{4}{3}$.

  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$:

  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ et $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

En conclusion : $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\sin x = \frac{4}{5}$ et $\cos x = -\frac{3}{5}$.

d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$.

$11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(x) \in III$.

Or $P(x) \in III$ et $\cot x < 0$ sont incompatibles.

3. a) Calculer $A = \sin x - \dfrac{1}{\cos x}$ sachant que $\tan x = -\frac{1}{2}$ et $4\pi \leq x \leq 5\pi$.

b) Soit φ l'angle défini par $\sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $65\pi < 2\varphi < 67\pi$.

Calculer $B = \dfrac{3\sin\varphi - 2\cos\varphi - 5\tan\varphi}{1 + \sin\varphi\cdot\cos\varphi - 3\tan^2\varphi}$.

---

a)
- Localisation de $P(x)$:

  $4\pi \leq x \leq 5\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in I \cup II$. Or $\tan x < 0$ donc $P(x) \in II$.

  On en déduit donc que $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$.

- Calcul de $\sin x$ et $\cos x$:

  Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, alors $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

  D'où : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $A = \frac{7\sqrt{5}}{10}$.

b) • Localisation de $P(\varphi)$:

$65\pi < 2\varphi < 67\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{65\pi}{2} < \varphi < \frac{67\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(\varphi) \in II \cup III\,.$

Or $\sin\varphi < 0$ donc $P(\varphi) \in III\,.$

On en déduit donc que $\cos\varphi < 0$ et $\tan\varphi > 0\,.$

• Calcul de $\cos\varphi$ et $\tan\varphi$:

Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}\,,$

alors $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\tan\alpha = \frac{2}{3}\,.$

D'où : $\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}\,, \quad \tan\varphi = +\frac{2}{3}$ et $B = -26\,.$

4. Comparer, sans machine, les angles α et β dans les trois cas suivants :

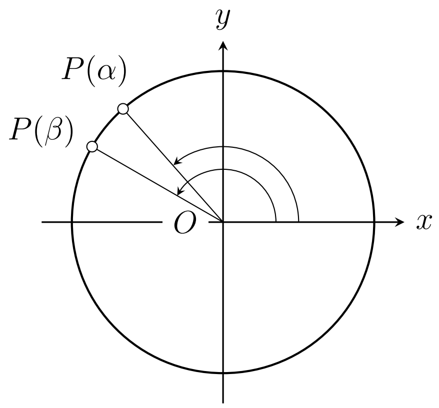
a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}\,, \quad \alpha \in [\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}\,.$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}\,, \quad \alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}\,.$

c) $\tan\alpha = -2\,, \quad \alpha \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ et $\beta = -\frac{\pi}{3}\,.$

---

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}\,, \quad \alpha \in [\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}\,.$



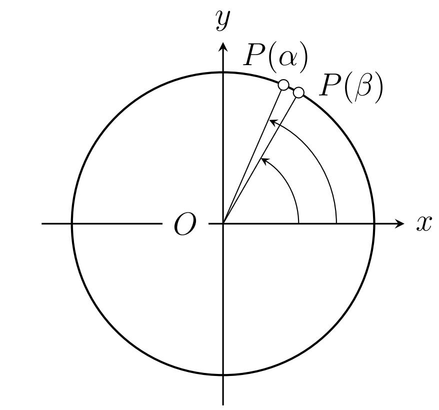
β est un angle remarquable, on connaît son sinus : $\sin\beta = \frac{1}{2}\,.$

D'où : $\sin\alpha > \sin\beta\,.$

Or la fonction sinus, sur l'intervalle $[\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le sinus diminue).

Donc $\alpha < \beta\,.$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}\,, \quad \alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}\,.$



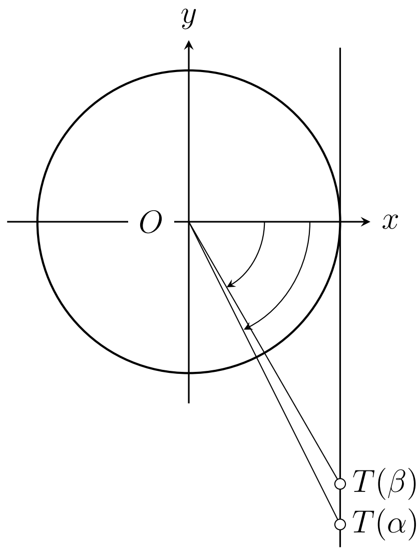
β est un angle remarquable, on connaît son cosinus : $\cos\beta = \frac{1}{2}\,.$

D'où : $\cos\alpha < \cos\beta\,.$

Or la fonction cosinus, sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le cosinus diminue).

Donc $\alpha > \beta\,.$

c) $\tan\alpha = -2\,, \quad \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[\quad$ et $\quad \beta = -\frac{\pi}{3}\,.$



β est un angle remarquable, on connaît sa tangente : $\tan\beta = -\sqrt{3}\,.$

D'où : $\tan\alpha < \tan\beta\,.$

Or la fonction tangente, sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[$, est croissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, la tangente augmente).

Donc $\alpha < \beta\,.$

5. Soit ABC un triangle rectangle en C. Déterminer le sinus et le cosinus de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ sachant que $AC = 5$ et $BC = 12$.
Déterminer sans calculatrice si α est plus grand ou plus petit que $\frac{\pi}{3}$.

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} \quad$ et $\quad \cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}\,, \quad$ avec $BC = 12 \quad$ et $\quad AC = 5\,.$

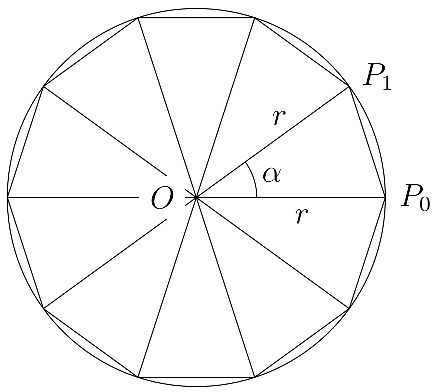
Par Pythagore, $\quad AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 13\,. \quad$ Donc $\quad \sin\alpha = \dfrac{12}{13} \quad$ et $\quad \cos\alpha = \dfrac{5}{13}\,.$

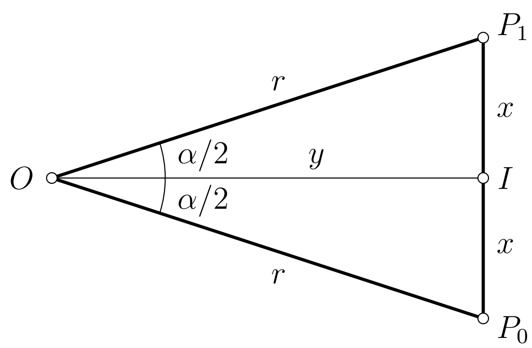
Pour comparer les angles α et $\frac{\pi}{3}$, on compare leur cosinus, car $\cos\frac{\pi}{3}$ est une valeur agréable.

$\cos\alpha < \cos\frac{\pi}{3}\,, \quad$ donc $\quad \alpha > \frac{\pi}{3}\,.$

6. Un polygone régulier de n côtés est inscrit dans un cercle de rayon r.
Calculer le périmètre P et l'aire A de ce polygone en fonction de r et de n.

Figure d'étude





Le polygone étant régulier, on peut le décomposer en n triangles isométriques.
On en déduit la valeur de l'angle α : $\quad \alpha = \dfrac{2\pi}{n}\,.$

Ces triangles sont isocèles, la hauteur OI est donc aussi une bissectrice et une médiane.

On en déduit l'expression de $x = P_0 I$ et de $y = OI$:

$$\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad x = r\,\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\,\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

- Soit P le périmètre du polygone : $P = n \cdot P_0 P_1 = 2\,n\,x = 2\,n\,r\,\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$

$$P = 2\,n\,r\,\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\ .$$

- Soit A l'aire du polygone : $A = n\;x \cdot y = n\,r^2\,\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\,\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$

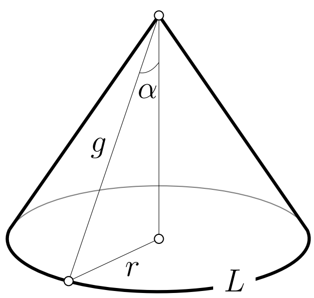
$$A = n\,r^2\,\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\,\cos\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\ .$$

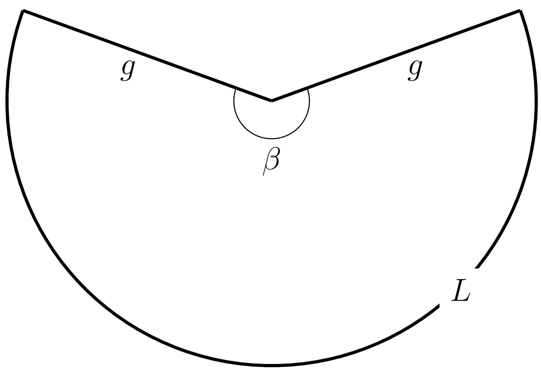
7. Un cône de révolution est défini par son angle au sommet α (angle entre une génératrice et l'axe) et le rayon r du cercle de base.

Ce cône de révolution est une surface développable. En le découpant le long d'une génératrice, on obtient son développement : c'est un secteur circulaire.

Calculer l'angle au centre β de ce secteur circulaire.

Figure d'étude





Le rayon du secteur circulaire est la génératrice g du cône et la longueur L de l'arc est la longueur du cercle de base.

On en déduit la mesure en radians de l'angle β : $\quad g \cdot \beta = L \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{L}{g}$.

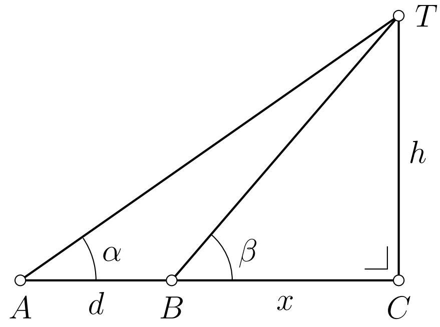
$$\sin\alpha = \frac{r}{g} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{r}{\sin\alpha} \qquad \text{et} \qquad L = 2\pi\,r\,.$$

D'où : $\qquad \beta = 2\pi\,r \cdot \dfrac{\sin\alpha}{r}\,, \qquad \beta = 2\pi\,\sin\alpha\,.$

Remarque : un demi-disque permet de construire un cône de révolution dont l'angle au sommet vaut $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

8. Pour déterminer la hauteur d'une tour, on vise son sommet depuis un point au sol, avec un angle d'élévation α ; puis on s'avance d'une distance d vers le pied de la tour et on effectue une deuxième visée avec un angle β.

Calculer la hauteur h de la tour en fonction de α, β et d.



Soit x la distance entre le deuxième point de visée et le pied de la tour.

Dans le triangle rectangle ACT :

$$h = (d + x)\,\tan\alpha\,.$$

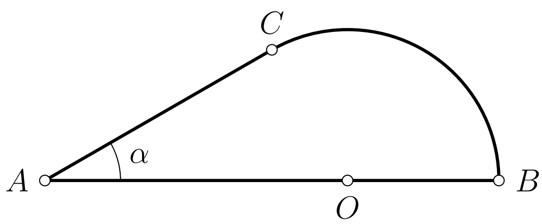
Dans le triangle rectangle BCT :

$$h = x\,\tan\beta\,.$$

On en déduit la distance x puis la hauteur h :

$$(d{+}x)\,\tan\alpha = x\,\tan\beta \quad\Leftrightarrow\quad x = d\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\,, \qquad \text{d'où} \qquad h = d\cdot\frac{\tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}\,.$$

9. La figure ci-jointe est constituée d'un segment AB, d'un arc de cercle (BC) de centre O et du segment AC tangent à l'arc (BC) en C.



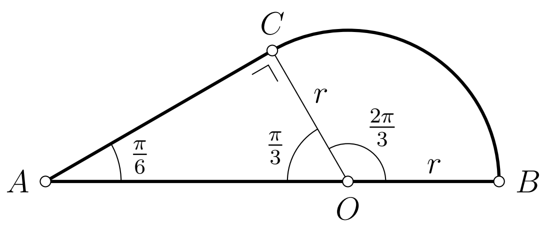
On connaît les mesures suivantes : $AB = 18\,\text{cm}$ et $\alpha = 30°$.

Calculer le périmètre P et l'aire A de cette figure.

- Calcul du rayon r :

  Pour calculer le rayon r, on l'exprime en fonction des données α et AB.

  $AB = AO + r$, avec $AO = \dfrac{r}{\sin\alpha}$,



$$AB = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right) \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{AB}{\frac{1}{\sin\alpha} + 1} \quad\Leftrightarrow\quad r = 6\,\text{cm}.$$

- Calcul de AC :

$$\tan\alpha = \frac{r}{AC} \quad\Leftrightarrow\quad AC = \frac{r}{\tan\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad AC = 6\sqrt{3} \approx 10,4\,\text{cm}\,.$$

- Calcul du périmètre P :

  L'arc BC est de mesure $\beta = \frac{2\pi}{3}$ radians.

  Sa longueur vaut donc $\beta \cdot r = 4\pi \,\mathrm{cm}$.

  $P = 3\,r + \beta\, r + r\,\sqrt{3} = r\,(3 + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\,) \approx 41\,\mathrm{cm}.$

- Calcul de l'aire A :

  Aire du triangle AOC : $\frac{1}{2}\, r \cdot AC = 18\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

  Aire du secteur circulaire OBC : $\frac{1}{2}\,\beta \cdot r^2 = 12\pi\,\mathrm{cm}^2$.

  D'où l'aire A du domaine : $A = 18\sqrt{3} + 12\pi \approx 68,9\,\mathrm{cm}^2$.