(écrire lisiblemen	nt s.v	v.p)															
Nom:			 	 		 	 							 			
Prénom:			 	 		 						 				 	

Question	Pts max.	Pts
1	5	
2	5	
3	51/2	
4	41/2	
Total	20	



## Indications

- Durée de l'examen : 105 minutes.
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée à l'encre sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  - Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants; chaque feuille supplémentaire doit porter nom, prénom, n° du contrôle, branche, groupe, ID et date. Elle ne peut être utilisée que pour une seule question.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues agrafées.

#### Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad \tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  en fonction de  $\tan(\frac{x}{2})$ :

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

#### Trigonométrie hyperbolique

Définitions:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

Formules de bissection:

$$\sinh^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

## Dérivée de quelques fonctions

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{arg} \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{arg} \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{arg} \operatorname{coth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

## Question 1 (à 5 points)

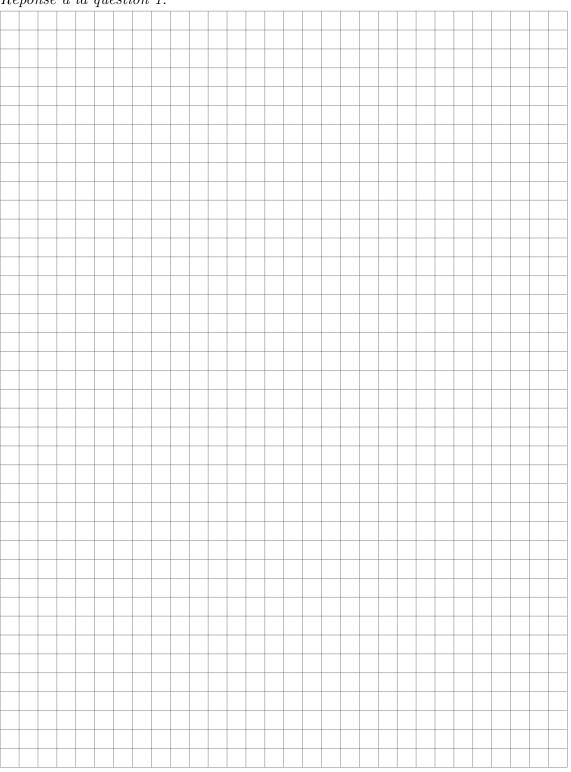
Points obtenus: (laisser vide) ....

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $\ f$  définie par

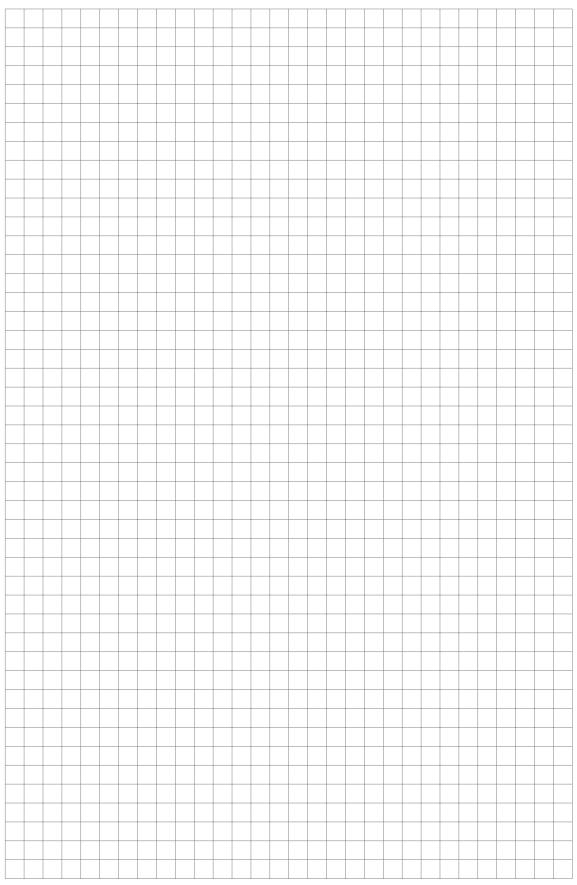
$$f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x) - \frac{1}{5}\sin^3(x)}.$$

Réponse à la question 1:

laisser la marge vide







#### Question 2 (à 5 points)

Points obtenus: (laisser vide) ....

Soit D le domaine fini du plan limité par l'axe Ox et par les deux arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ :

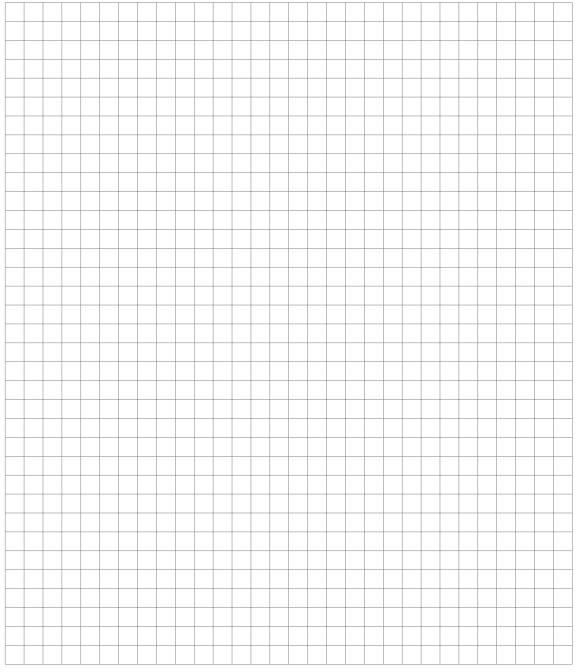
$$\Gamma_1: \quad x^2 - 2y = 0, \quad x \le 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_2: \quad y^2 + x - 2 = 0, \quad y \ge 0.$$

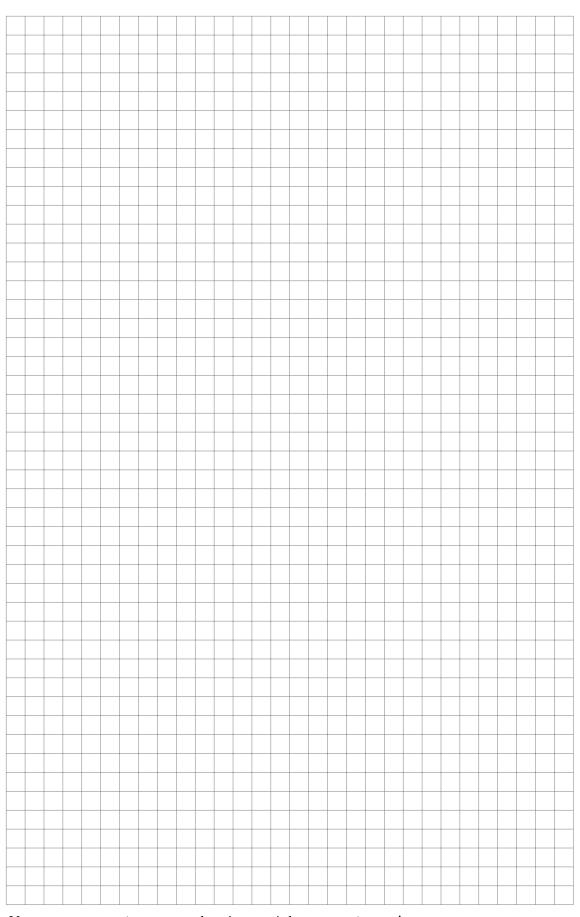
Indication : les deux arcs de parabole se coupent en (-2, 2).

- a) Calculer l'aire A du domaine D.
- b) Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.

Réponse à la question 2:

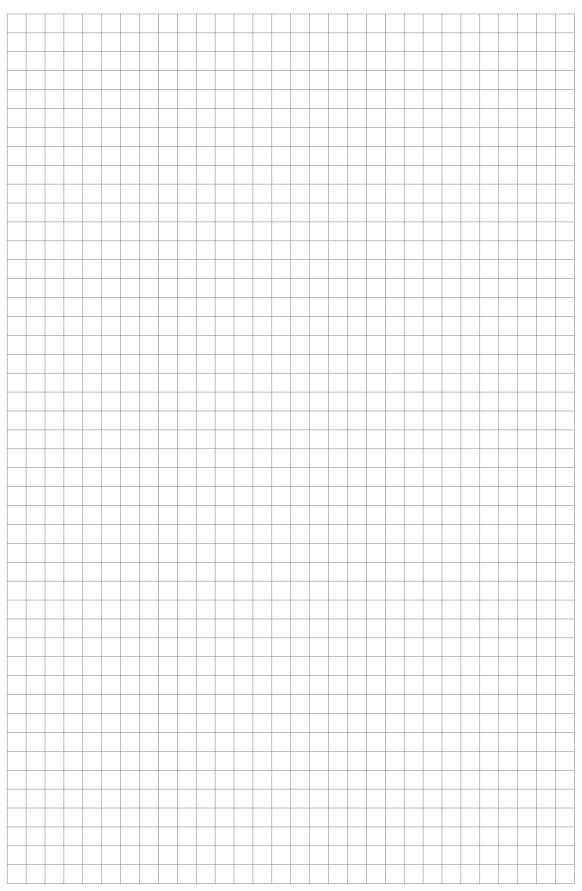
laisser marge vide





ID: -999

laisser la marge vide



Points obtenus: (laisser vide) ....

On considère l'arc de courbe  $\Gamma$  défini par

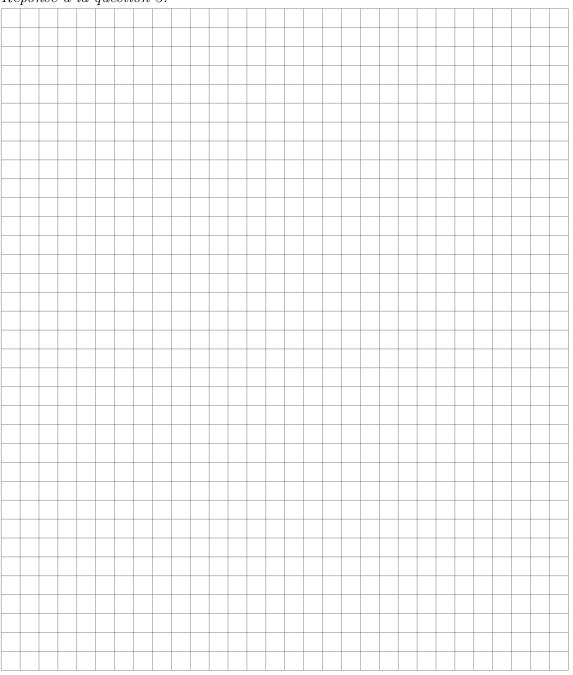
$$y = \sinh^2(x), \qquad x \ge 0, \qquad 0 \le y \le 1.$$

- a) Calculer la longueur de l'arc  $\Gamma$ .
- b) Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc  $\Gamma$  autour de l'axe vertical d'équation  $x = \arg \sinh(1)$ .

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

Réponse à la question 3:

laisser la marge vide

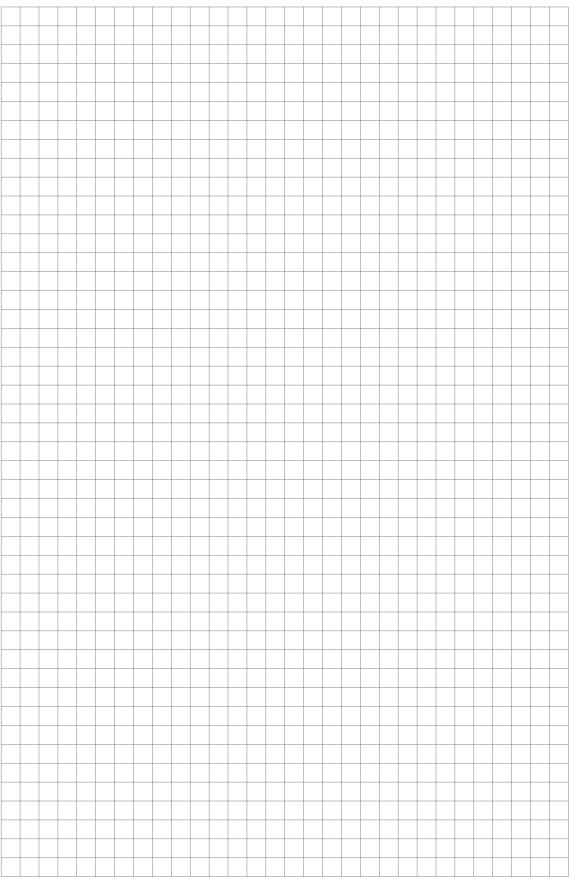


ID: -999

laisser la marge vide



ID: -999



## Question 4 (à 4 ½ points)

Points obtenus: (laisser vide) ....

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien Oxyz, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d et C, dans le plan Oyz, appartient au quart de cercle  $\Gamma$ :

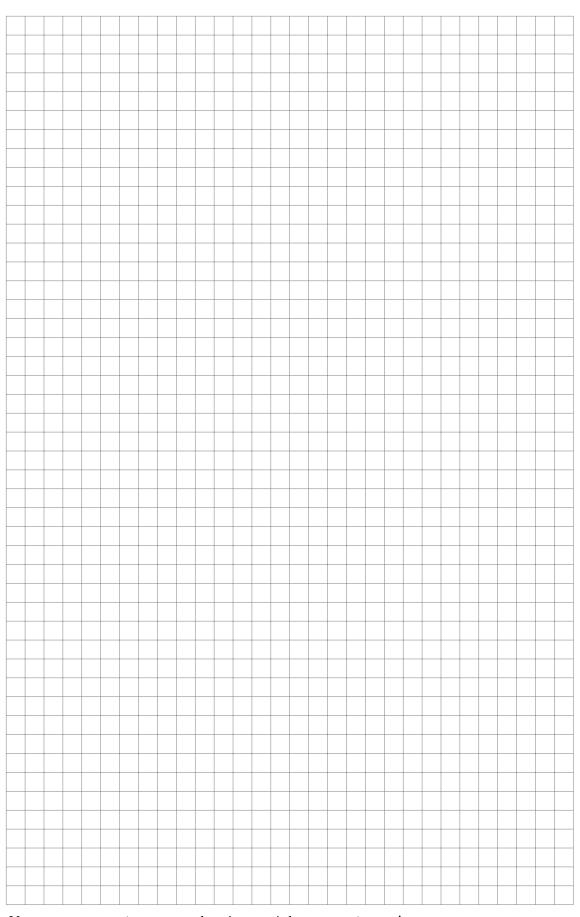
$$d: \quad \left\{ \begin{array}{ll} y=x \\ z=0 \,, \end{array} \right. \qquad \Gamma: \quad \left\{ \begin{array}{ll} (y-2)^2+z^2=4 \\ x=0 \,, \end{array} \right. \qquad y \in \left[ \, 0 \,, \, 2 \, \right], \quad z \geq 0 \,.$$

Calculer le volume V de ce corps.

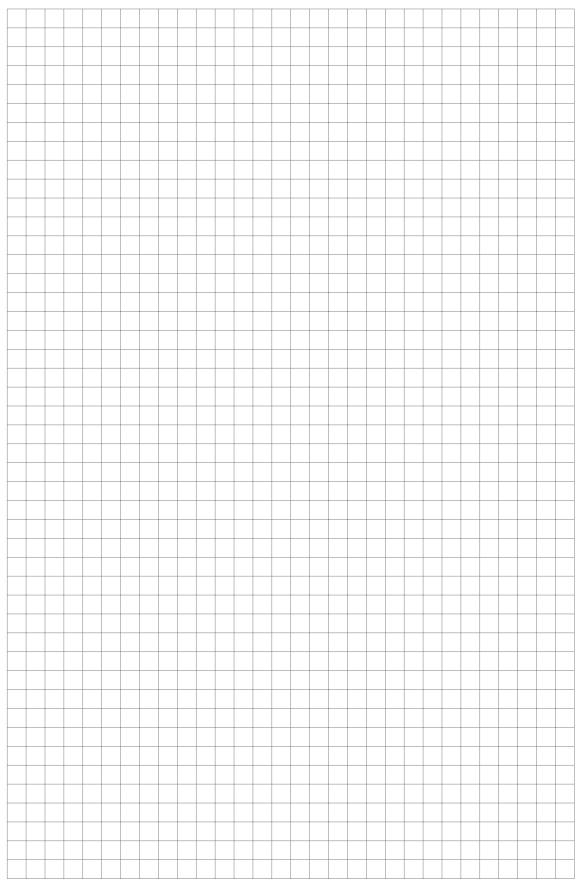
Réponse à la question 4:

laisser la marge vide





ID: -999



# Réponses

1. 
$$\int f(x) dx = \ln \left[ 1 - \cos(x) \right] - \frac{1}{2} \ln \left[ \cos^2(x) + 4 \right] - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\cos(x)}{2} \right) + C$$
.

**2.** 
$$A=4$$
,  $V=\frac{32\pi}{5}$ .

3. 
$$s = \sqrt{2}, \quad A = \pi.$$

4. 
$$V = \pi - \frac{4}{3}$$
.