Série 4

Exercice 1. On considère trois points non-alignés A, B et C. Dans chacun des cas suivants, expliciter et représenter géométriquement l'ensemble des points M satisfaisant la condition donnée.

a. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R}$.
b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1[$.
c. $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{AC}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.
d. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - t\overrightarrow{CM}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On travaille dans un repère fixé du plan, dans lequel on donne le point $A(2, -1)$ et le vecteur $\vec{v}\binom{-3}{2}$. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si le point A appartient à d et si le vecteur $\vec{v}$ est directeur de d :

a. $d : 2x + 3y + 1 = 0$.
b. $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
c. $d : x - 5y - 7 = 0$.
d. $d : \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exercice 3. On fixe un repère du plan. Combien de droites différentes sont décrites par les équations suivantes ?

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad 2x + 4y + 2 = 0, \quad \begin{cases} x = 25 - \sqrt{3}t \\ y = -13 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. On donne un parallélogramme $ABCD$ dans le plan. Soit I le point de la droite (BC) d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC})$. On note d la droite (BD) et g la parallèle à (AB) passant par I.

a. Donner des équations vectorielles des droites d et g vues depuis le point A, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Soit J le point d'intersection de d et g. A l'aide du calcul vectoriel uniquement, déterminer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5. On fixe un repère du plan. Dans chacun des cas ci-dessous, donner des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d.

a. $d = (AB)$, avec $A(2, 1)$ et $B(3, -1)$.
b. d passe par $A(4, 0)$ et est dirigée par $\vec{v}\binom{2}{5}$.
c. d passe par le milieu du segment AB, avec $A(2, -3)$, $B(10, 7)$ et est parallèle à la droite d'équation $3x + y - 8 = 0$.

Exercice 6. On donne trois points non-alignés A,B,C dans le plan. On note I le milieu de AB et J le point d'abscisse $\frac{3}{4}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$ de la droite (AC). Dans chacun des repères suivants, donner des équations paramétriques et cartésiennes de la droite (IJ) :

a.$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, b.$(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, c.$(I, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

Exercice 7. On donne quatre points A,B,C,D vérifiant $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. Soit I le point d'abscisse $\frac{1}{3}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$. On note d la parallèle à (AD) passant par I et g la parallèle à (DC) passant par I.

a. Déterminer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, des équations vectorielles des droites (AB), (BC), d et g vues depuis le point A.

b. Soit J le point d'intersection des droites d et (AB), et K celui des droites g et (BC). Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et montrer que (JK) et (AC) sont parallèles.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. une droite, b. un segment semi-ouvert, c. un quadrant, d. une droite privée d'un point.
Ex. 2 : $A \in d$ en b, c, d. $\vec{v}$ est directeur de d en a et d.
Ex. 3 : une seule.
Ex. 4 : a. $d : \overrightarrow{AM} = (1-2t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R}$. $g : \overrightarrow{AM} = (t+\frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R}$. b.$\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Ex. 5 : a. $2x + y - 5 = 0$, b. $5x - 2y - 20 = 0$, c. $3x + y - 20 = 0$.
Ex. 6 : a. $6x + 4y - 3 = 0$, b. $2x + 6y - 3 = 0$, c. $2x + 3y = 0$.
Ex. 7 : a. $(AB) : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$, $(BC) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$, $t \in \mathbb{R}$, $d : \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (t+\frac{2}{3})\overrightarrow{AD}$, $t \in \mathbb{R}$, $g : \overrightarrow{AM} = (t+\frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (t+\frac{2}{3})\overrightarrow{AD}$, $t \in \mathbb{R}$. b. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.