

Physique

Roger Sauser

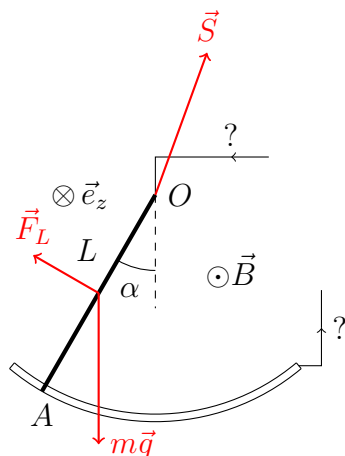
Semestre de printemps 2019

<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142>

Corrigé 23

Exercice 1

La tige, traversée par un courant électrique, se trouve dans un champ magnétique : elle subit donc une force magnétique. Nous allons considérer la situation d'équilibre de cette tige :



Objet : tige

Forces : poids, force de Laplace, soutien

$$m\vec{g} + \vec{F}_L + \vec{S} = \vec{0}.$$

Remarque : on ne connaît ni le courant I , ni le soutien (direction et norme). Cette équation est insuffisante.

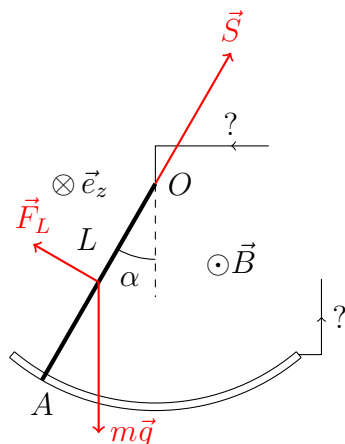
L'équilibre pour la rotation autour de O fournit par ailleurs :

$$\vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F}_L)}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{=\vec{0}} = \vec{0}.$$

Selon \vec{e}_z , cette équation devient

$$\begin{aligned} -\frac{L}{2} \sin \alpha mg + \frac{L}{2} F_L &= 0 \Leftrightarrow -\sin \alpha mg + ILB = 0 \\ \Rightarrow I &= \frac{\sin \alpha mg}{LB} = \frac{\sin 2^\circ \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ ms}^{-2}}{10^{-1} \text{ m} \cdot 0.4 \text{ T}} = 0.0856 \text{ A}. \end{aligned}$$

Remarque : la tige étant en équilibre par rapport à tout point, le moment du soutien par rapport au centre de masse est nul, les moments de $m\vec{g}$ et de \vec{F}_L étant nuls tous les deux. Par conséquent, \vec{S} est parallèle à la tige :



La deuxième loi de Newton donne alors

- selon \vec{e}_\perp normal à la tige, $S_\perp = 0$ et

$$F_L = mg \sin \alpha \Rightarrow I = \frac{\sin \alpha mg}{LB},$$

- selon \vec{e}_\parallel parallèle à la tige,

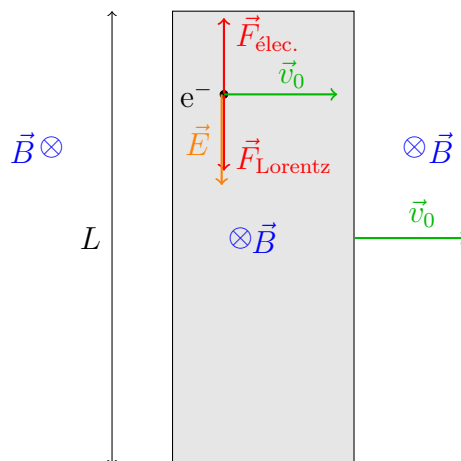
$$S_\parallel = S = mg \cos \alpha.$$

Exercice 2

Nous allons étudier le mouvement d'un électron de conduction du barreau métallique.

Les électrons de conduction du barreau métallique se déplacent avec ce dernier à la vitesse \vec{v}_0 , subissent la force de Lorentz et migrent vers une extrémité du barreau, créant un champ électrique. Ils ressentent dès lors également une force électrique. La migration prend fin lorsque les forces électrique et de Lorentz se compensent :

Vue de dessus



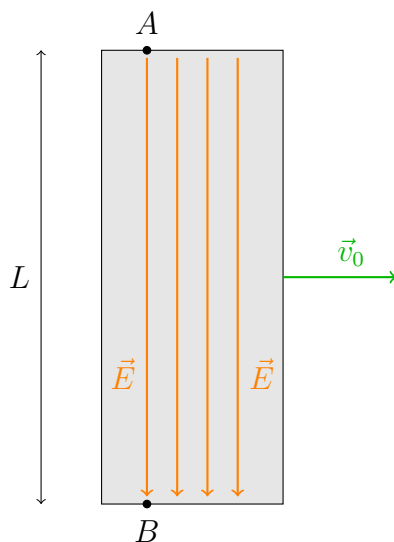
$$\vec{F}_{\text{elec.}} + \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}) = \vec{0}.$$

Ainsi, le champ électrique créé est lié au champ magnétique et à la vitesse du barreau par l'expression

$$\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B}.$$

Selon l'énoncé, la vitesse du barreau et le champ magnétique sont supposés constants. Par conséquent, le champ électrique est uniforme.

Vue de dessus



La tension U_{AB} entre les extrémités du barreau a donc pour expression :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = EL = v_0 BL,$$

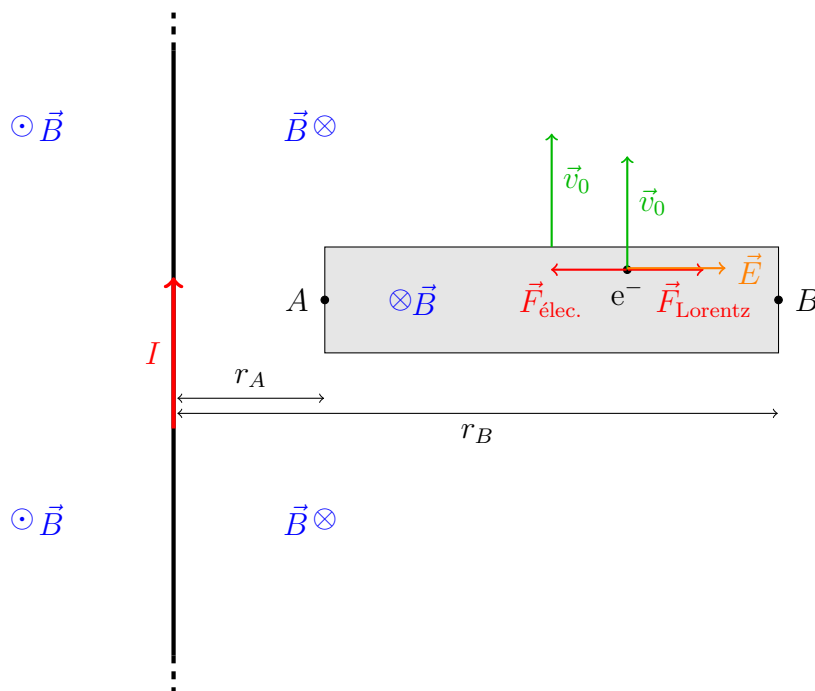
où $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et $B = \|\vec{B}\|$.

Exercice 3

Nous allons étudier le mouvement d'un électron de conduction du barreau métallique.

Les électrons de conduction du barreau métallique se déplacent avec ce dernier à la vitesse \vec{v}_0 , subissent la force de Lorentz et migrent vers une extrémité du barreau, créant un champ électrique. Ils ressentent dès lors également une force électrique. La migration prend fin lorsque les forces électrique et de Lorentz se compensent :

Vue dans le plan du fil et du barreau



$$\vec{F}_{\text{elec.}} + \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}) = \vec{0}.$$

Ainsi, le champ électrique créé est lié au champ magnétique et à la vitesse du barreau par l'expression

$$\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B}.$$

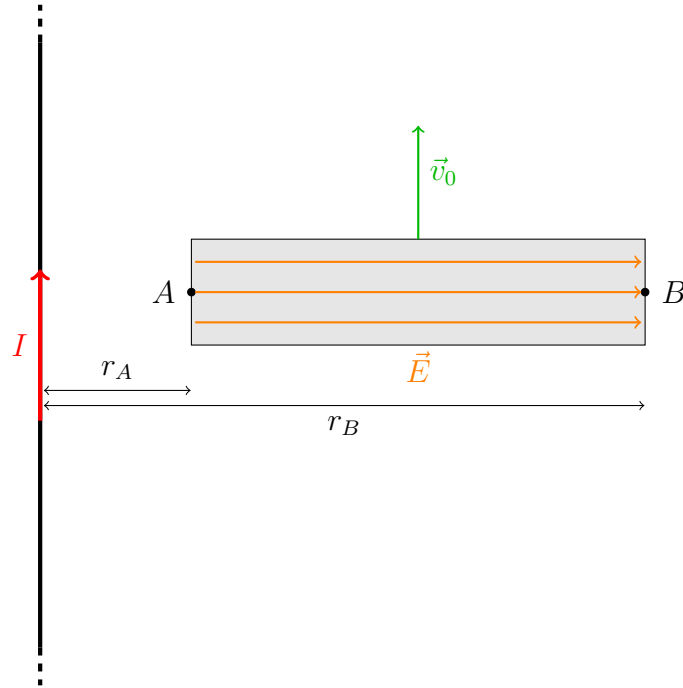
Selon l'énoncé, la vitesse du barreau est supposée constante. En revanche, l'intensité B du champ magnétique produit par le fil varie avec la distance r au fil :

$$B = B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Le champ électrique dans le barreau est donc toujours dirigé vers la droite, perpendiculairement au fil et son intensité est la même en tout point du barreau situé à la même distance du fil :

$$E = E(r) = v_0 B(r) = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi r}.$$

Vue dans le plan du fil et du barreau



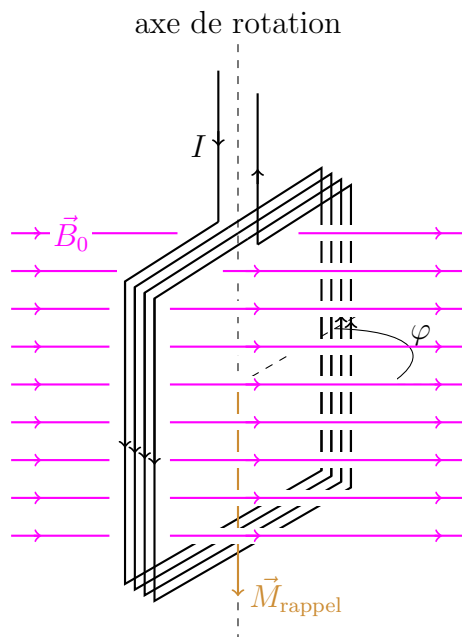
La tension U_{AB} entre les extrémités du barreau a donc pour expression :

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B E(r) dr = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln r \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_B}{r_A}. \end{aligned}$$

Exercice 4

(a) Nous allons considérer la situation d'équilibre du cadre.

L'angle de torsion φ représente l'angle entre le champ magnétique et le plan du cadre.



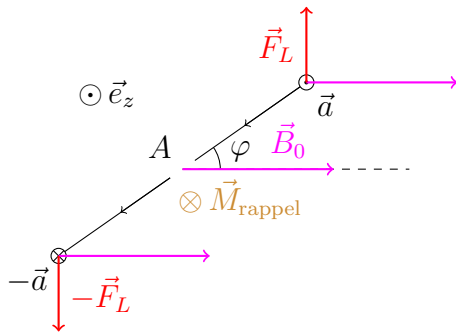
En absence de courant, l'angle de torsion φ est nul : le plan du cadre est parallèle aux lignes de champ.

Vue de dessus (parallèle à l'axe)

Objet : cadre

Forces : poids, soutien, forces de Laplace, torsion

Rotation autour de l'axe A (seules les forces de Laplace sur les branches verticales \vec{a} et $-\vec{a}$ et les forces de torsion sont à considérer)



$$\underbrace{\vec{M}_A(\vec{F}_L)}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_A(-\vec{F}_L)}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_{\text{rappel}}}_{\otimes} = \vec{0},$$

$$\text{avec } \vec{F}_L = NI \vec{a} \times \vec{B}_0.$$

Selon \vec{e}_z :

$$\frac{a}{2} \cos \varphi F_L + \frac{a}{2} \cos \varphi F_L - C\varphi = 0,$$

C étant la constante de rappel telle que

$$C \frac{\pi}{2} = M_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow C = \frac{M_{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ N m}}{\pi} = 6.37 \cdot 10^{-8} \text{ N m rad}^{-1}.$$

Ainsi,

$$\frac{NIa^2B_0}{C} \cos \varphi - \varphi = 0,$$

avec

$$\frac{NIa^2B_0}{C} \cong \frac{500 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 0.15 \text{ T}}{6.37 \cdot 10^{-8} \text{ N m rad}^{-1}} = 1.178.$$

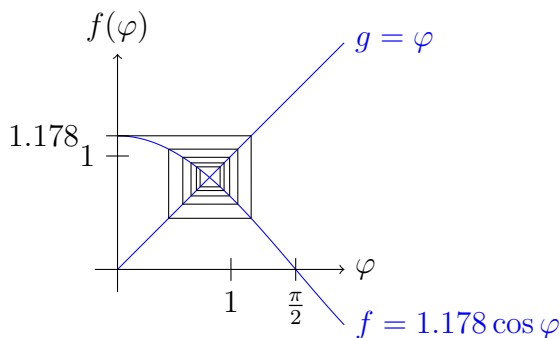
Cette équation n'a pas de solution exacte.

- On peut procéder par itération (théorème du point fixe). On cherche à résoudre

$$\varphi = 1.178 \cos \varphi$$

avec par exemple $\varphi_0 = 0$ comme valeur de départ :

$$\varphi_{n+1} = 1.178 \cos \varphi_n \quad \varphi_0 = 0.$$



$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_1 \cong 1.178 \cos \varphi_0 \cong 1.178$$

$$\varphi_2 \cong 1.178 \cos \varphi_1 \cong 0.451$$

$$\varphi_3 \cong 1.178 \cos \varphi_2 \cong 1.060$$

$$\varphi_4 \cong 1.178 \cos \varphi_3 \cong 0.576$$

La convergence n'est pas très rapide...

Le point fixe est

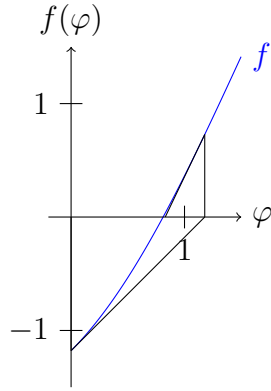
$$\varphi \cong 0.811 \cong 46.46^\circ.$$

- La méthode de Newton est plus efficace. On cherche le zéro de

$$f(\varphi) = \varphi - 1.178 \cos \varphi,$$

avec par exemple $\varphi_0 = 0$ comme valeur de départ :

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{f(\varphi_n)}{f'(\varphi_n)} = \varphi_n - \frac{\varphi_n - 1.178 \cos \varphi_n}{1 + 1.178 \sin \varphi_n} \quad \varphi_0 = 0.$$



$$f = \varphi - 1.178 \cos \varphi \quad \varphi_0 = 0$$

$$\varphi_1 \cong \varphi_0 - \frac{\varphi_0 - 1.178 \cos \varphi_0}{1 + 1.178 \sin \varphi_0} \cong 1.178$$

$$\varphi_2 \cong \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - 1.178 \cos \varphi_1}{1 + 1.178 \sin \varphi_1} \cong 0.830$$

$$\varphi_3 \cong \varphi_2 - \frac{\varphi_2 - 1.178 \cos \varphi_2}{1 + 1.178 \sin \varphi_2} \cong 0.811$$

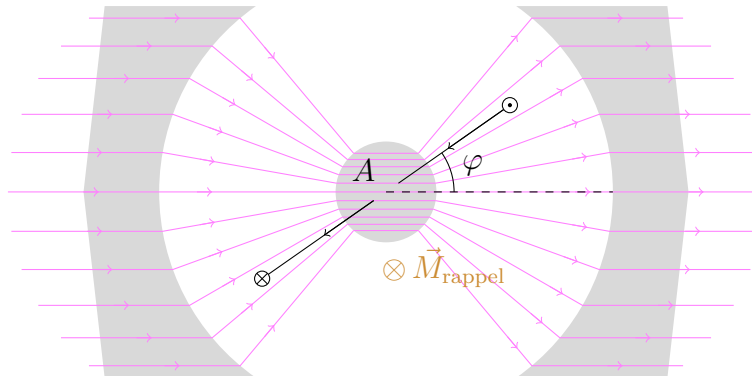
La convergence est rapide...

La limite vaut

$$\varphi \cong 0.811 \cong 46.46^\circ.$$

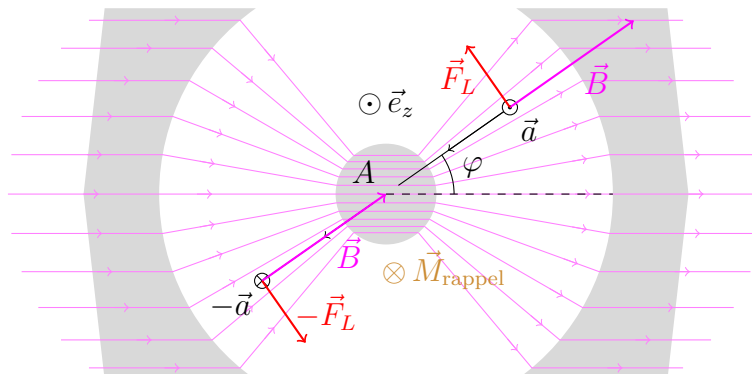
(b) Nous allons considérer la situation d'équilibre du cadre.

Vue de dessus (parallèle à l'axe)



Au niveau des branches verticales du cadre, les lignes de champ sont parallèles au cadre pour tout angle de torsion φ ,

Vue de dessus (parallèle à l'axe)



Objet : cadre

Forces : poids, soutien, forces de Laplace, torsion

Rotation autour de l'axe A (seules les forces de Laplace sur les branches verticales \vec{a} et $-\vec{a}$ et les forces de torsion sont à considérer)

$$\underbrace{\vec{M}_A(\vec{F}_L)}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_A(-\vec{F}_L)}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_{\text{rappel}}}_{\otimes} = \vec{0}, \quad \text{avec } \vec{F}_L = NI \vec{a} \times \vec{B}_0.$$

Selon \vec{e}_z :

$$\frac{a}{2}F_L + \frac{a}{2}F_L - C\varphi = 0,$$

C étant la constante de rappel telle que

$$C\frac{\pi}{2} = M_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow C = \frac{M_{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ N m}}{\pi} = 6.37 \cdot 10^{-8} \text{ N m rad}^{-1}.$$

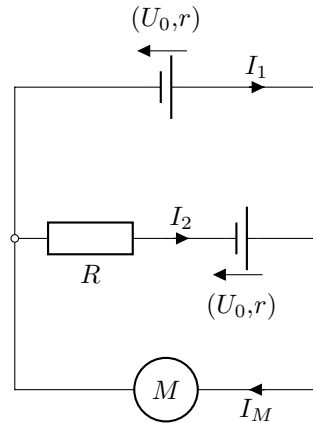
Ainsi,

$$\varphi = \frac{NIa^2B_0}{C} \cong \frac{500 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 0.15 \text{ T}}{6.37 \cdot 10^{-8} \text{ N m rad}^{-1}} = 1.178 \cong 67.49^\circ.$$

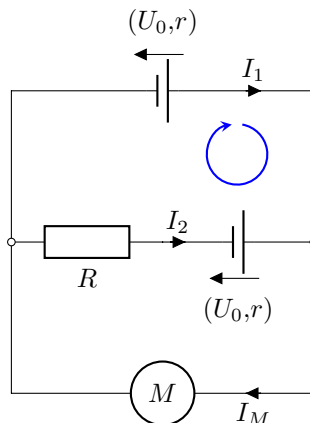
Exercice 5

(a) Nous allons indiquer les courants présents dans le circuit en précisant le sens choisi, avant d'écrire une ou plusieurs équations de noeuds et de mailles.

Trois courants sont présents dans le circuit. Nous choisissons par exemple leur sens de la manière suivante :



Deux courants sont inconnus. Nous avons donc besoin de deux équations : par exemple, une équation à un nœud et une équation de maille.



Equation pour un des deux nœuds (ils sont identiques) :

$$I_M = I_1 + I_2.$$

Equation pour la maille supérieure (avec le **sens choisi**) :

$$-U_0 + rI_1 + U_0 - (r + R)I_2 = 0.$$

$$\Rightarrow rI_1 = (r + R)I_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{R+r}{R+2r}I_M = \frac{4}{5}5 = 4 \text{ A} \\I_2 &= \frac{r}{R+2r}I_M = \frac{1}{5}5 = 1 \text{ A} .\end{aligned}$$

(b) La puissance électrique reçue par le moteur s'écrit

$$P^{\text{él.}} = U_M I_M .$$

Le courant I_M traversant le moteur est connu et, en additionnant les tensions le long de la grande maille, il est possible de déterminer la tension U_M aux bornes du moteur :

$$U_M = U_0 - rI_1 = 12 - 4 = 8 \text{ V} .$$

Ainsi,

$$P^{\text{él.}} = U_M I_M = 8 \cdot 5 = 40 \text{ W} .$$

(c) Le rendement du moteur est donné par le rapport :

$$\eta = \frac{P^{\text{méc.}}}{P^{\text{él.}}} .$$

Or, la puissance mécanique a pour expression

$$\begin{aligned}P^{\text{méc.}} &= P^{\text{él.}} - r_M I_M^2 \\&= 40 - 0.4 \cdot 5^2 \\&= 30 \text{ W} .\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\eta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 75 \% .$$