Semestre d'automne 2020 — D. Testerman

Algèbre linéaire pour Microtechnique — Corrigé 1

Exercice 1. *Parmi les équations suivantes, lesquelles sont linéaires ?*

1) $3x_1 + 5x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0,$

2) $2x_1 - 4x_2x_3 + 5x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}},$

3) $x_1^3 - 3x_2 = 1,$

4) $-\pi x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -2,$

5) $\frac{1}{3}x_2 + 2^2x_3 + \frac{1}{4x_4} = 0,$

6) $-x_1 + 4^3x_2 - x_3 = 3.$

Solution 1. Les équations $1), 4)$ et $6)$ sont linéaires car elles sont de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, avec $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. L'équation 2) n'est pas linéaire parce qu'il y a un produit de deux inconnues, à savoir $4x_2x_3$. L'équation 3) n'est pas linéaire puisqu'une inconnue est élevée à une puissance, i.e., x_1^3. L'équation 5) n'est pas linéaire à cause du terme $\frac{1}{4x_4}$, où l'on divise par une inconnue.

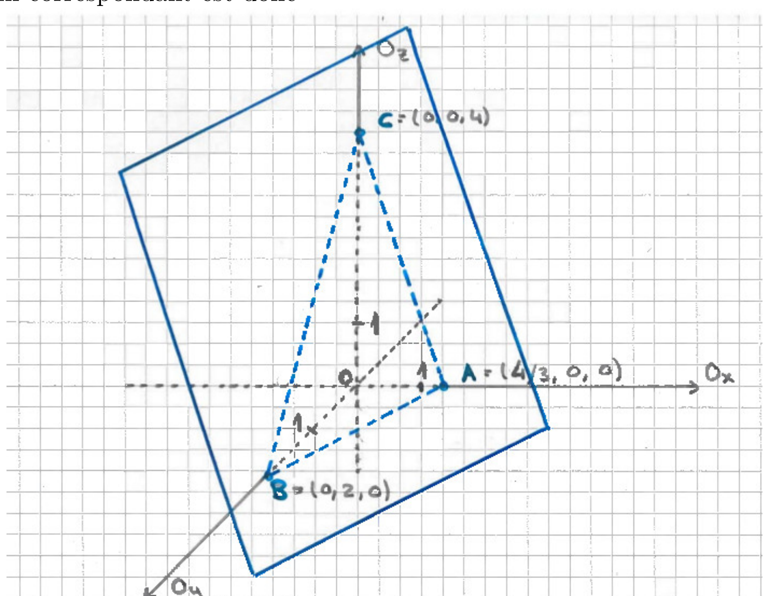
Exercice 2. *Représenter graphiquement dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *les solutions de chaque équation ou système :*

1) $3x + 2y + z = 4,$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3t &+& 2 \\ y &=& t &-& 1 \\ z &=& -\ 2t && \end{array}\right.,$

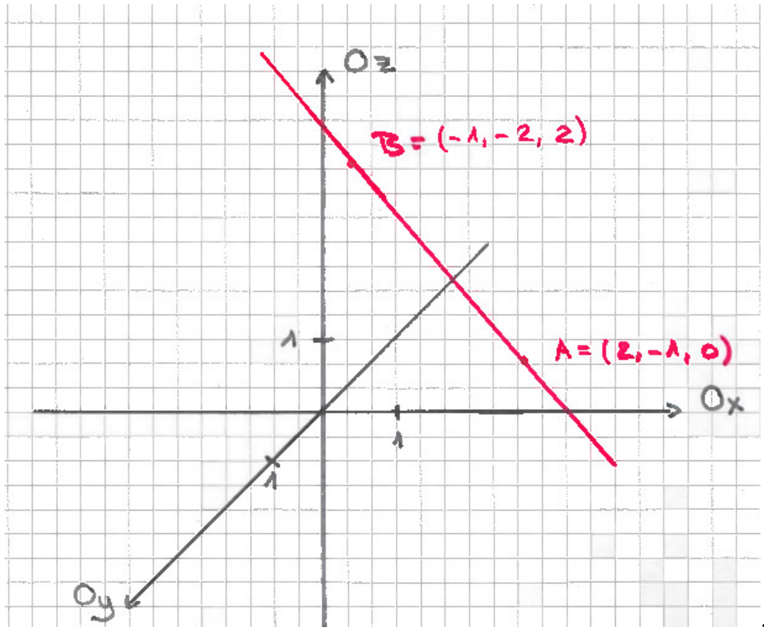
3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &-& z &=& 0 \\ -x &-& 3y &+& 2z &=& 1 \end{array}\right..$

Solution 2. 1) L'équation $3x + 2y + z = 4$ représente un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut calculer ses intersections avec les axes O_x, O_y, O_z en remplaçant les deux autres coordonnées par 0, respectivement. Pour l'axe x, on pose $y = z = 0$, et on trouve $x = \frac{4}{3}$, donc le point $A = (\frac{4}{3}, 0, 0,)$. Similairement, on obtient le point $B = (0, 2, 0)$ d'intersection avec l'axe O_y, et le point $C = (0, 0, 4)$ d'intersection avec l'axe O_z. Le dessin correspondant est donc



.

2) Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3t &+& 2 \\ y &=& t &-& 1 \\ z &=& -\ 2t && \end{array}\right.$ représente une droite dans l'espace $\mathbb{R}^3$. En choisissant des valeurs du paramètre t, on peut trouver des points qui appartiennent à cette droite. Avec $t = 0$ on obtient le point $A = (2, -1, 0)$ et avec $t = -1$ on a $B = (-1, -2, 2)$. Graphiquement, on trouve



.

3) On peut observer que les deux équations du système

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

représentent chacune un plan dans l'espace. Leur intersection sera donc soit vide (dans le cas de deux plans parallèles), soit égale à une droite, soit égale à un plan (si les deux plans sont confondus). La matrice augmentée correspondant au système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que l'on va échelonner. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to -L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

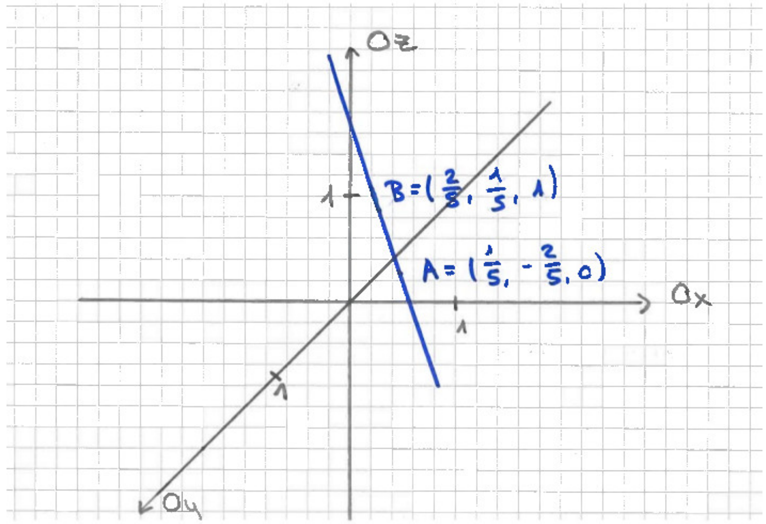
En exprimant toutes les inconnues en fonction de z, on obtient

$$\begin{cases} x & = & - & 3y & + & 2z & - & 1 \\ y & = & & & & \frac{3}{5}z & - & \frac{2}{5} \\ z & = & & & & z & & \end{cases},$$

et en remplaçant y par la deuxième ligne dans la première, on a

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{5}z & + & \frac{1}{5} \\ y & = & \frac{3}{5}z & - & \frac{2}{5} \\ z & = & z & & \end{cases},$$

qui est l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Comme précédemment, on se fixe des valeurs de l'inconnue libre z pour trouver des points appartenant à cette droite. Ici, pour $z = 0$ on trouve $A = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$ et pour $z = 1$, on a $B = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. On peut donc dessiner l'ensemble des solutions du système, à savoir la droite par A et B, ce qui donne



Exercice 3. *Soit $d : -x + y = -1$ une droite dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la droite $\alpha x + \beta y = 1$ est-elle parallèle à d (et distincte de d) ?*

Solution 3. D'un point de vue géométrique, deux droites doivent avoir la même pente pour être parallèles. On va donc calculer la pente de d, et donner des conditions sur α et β pour que les deux droites aient la même pente. On réécrit d comme $d : y = x - 1$, et donc la pente de d vaut 1 (Rappel : pour une droite de la forme $y = mx + h$, la pente vaut m et h représente l'ordonnée à l'origine).

Pour la droite $\alpha x + \beta y = 1$, on a $\beta y = -\alpha x + 1$. Si $\beta = 0$, la droite est verticale et ne peut donc pas être de pente 1. On suppose donc que $\beta \neq 0$. On peut donc écrire $y = -\frac{\alpha}{\beta} x + \frac{1}{\beta}$. La pente vaut ainsi $-\frac{\alpha}{\beta}$. On a donc $-\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff -\alpha = \beta$. On a exclu $\beta = 0$, et on constate qu'on doit aussi imposer la condition que $\beta \neq -1$ (donc $\alpha \neq 1$), sinon les deux droites sont confondues.

Les deux droites sont donc parallèles et distincte lorsque

$$(\alpha, \beta) \in \{(-x, x), x \in \mathbb{R}\} \backslash \{(0, 0), (1, -1)\}.$$

Exercice 4. *Échelonner et réduire les matrices suivantes, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul :*

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}),$

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times5}(\mathbb{R}),$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times6}(\mathbb{R}).$

Solution 4. On présente à chaque fois une suite d'opérations élémentaires possible pour arriver à la matrice échelonnée réduite, mais cette suite d'opérations n'est pas unique. Cependant, la matrice échelonnée réduite est unique.

On effectue souvent des échanges de lignes pour simplifier, lorsque c'est possible : cela nous permet d'avoir un 1 comme pivot sans faire apparaître trop de fractions.

Pour la matrice A, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 - L_2,} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 2L_1, \\ L_4 \to L_4 - 2L_1}]{L_2 \to L_2 - 3L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_2]{L_3 \to L_3 - 2L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to -\frac{1}{21} L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 38L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -\frac{86}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 17L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{65}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 6L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on fait de même pour la matrice C, et on a la suite d'opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 4L_1, \\ L_4 \to L_4 - 2L_1}]{L_2 \to L_2 + 3L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_2]{L_3 \to L_3 - 5L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to -\frac{1}{6} L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + 32L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -25 & \frac{65}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + 14L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -12 & \frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Vrai-faux.*

1. ☐ *Un système d'équations linéaires avec trois équations à* 5 *inconnues admet au moins une solution.*
☐ *Un système d'équations linéaires avec cinq équations à* 3 *inconnues n'admet aucune solution.*
☐ *Un système d'équations linéaires avec trois équations à* 2 *inconnues n'admet aucune solution.*
☐ *Un système d'équations linéaires avec une équations à* 3 *inconnues admet au moins une solution.*

2. ☐ *L'équation* $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ *est une équation linéaire à trois inconnues.*
☐ *L'équation* $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ *est une équation linéaire à trois inconnues.*
☐ *L'équation* $\cos x = 0$ *est une équation linéaire à une inconnue.*
☐ *L'équation* $x^2 + y^2 = 1$ *est une équation linéaire à deux inconnues.*

Solution 5. 1. ☐ Faux. Considérons par exemple les trois équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$. Le système formé de ces trois équations à 5 inconnues n'a visiblement aucune solution.
☐ Faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet la solution nulle $x = y = z = 0$.
☐ Faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet une infinité de solutions.
☐ Faux. Un système d'une équation à trois inconnues est de la forme : $ax + by + cz = d$, et il est possible que $a = b = c = 0$, mais $d \neq 0$, auquel cas le système est incompatible. Par contre, si l'un des coefficients a, b, c est non nul, cette équation représente un plan, il y a donc une infinité de solutions.

2. Seule la première équation est linéaire ; elle est linéaire aux trois inconnues x, y, z. En effet, la présence de la racine carrée d'une inconnue, du cosinus d'une inconnue ou du carré d'une inconnue n'est pas autorisée.

Exercice 6. *Donner un exemple de :*

(a) un système de deux équations aux deux inconnues (où au moins une des équations est non-linéaire) et qui possède exactement deux solutions.

(b) un système d'équations linéaires inhomogène de trois équations aux trois inconnues qui possède une infinité de solutions ;

(c) un système de 4 équations aux 3 inconnues qui possède une infinité de solutions ;

(d) un système de deux équations aux 3 inconnues qui ne possède aucune solution.

Solution 6. (a) On considère l'équation d'une parabole et d'une droite qui se coupent en deux points, par exemple, $y = x^2$ et $y = x + 1$. Vérifier qu'il y a deux points d'intersections.

(b) Ici on choisit deux équations qui ont une solution en commun et on "répète" une des équations par exemple :

$$x - 2y + z = 1$$

$$x + y = 2$$

$$2x - 4y + 2z = 2$$

(c) On peut faire comme dans l'exemple précdent : on rajoute une quatrième équation qui ne rajoute aucune contrainte au système :

$$x - 2y + z = 1$$

$$x + y = 2$$

$$2x - 4y + 2z = 2$$

$$3x + 3y = 6$$

(d) Ici il faut donner deux équations qui "se contredisent", par exemple,

$$x + y + z = 2$$

$$-x - y - z = 0$$

Exercices du cours, 17.09.2020 :

Exercice 7. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Laquelle (lesquelles) des équations est linéaire en x, y et z ?*

a) $2x^2 + y = 0$
b) $ax + \ln y = b$
c) $3x + 4y + az = 9$
d) $a^2 + xe^b = z$

Exercice 8. *Un système d'équations linéaires à deux inconnues qui représente deux droites distinctes dans le plan $\mathbb{R}^2$ peut avoir*

a) une ou aucune solution.
b) une ou une infinité de solutions.
c) aucune, une ou une infinité de solutions.

Exercice 9. *Soit un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_5$ tel que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, -2)$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 4, 0, 1, -2)$ sont des solutions. Laquelle (lesquelles) des affirmations suivantes sont vérifiées ?*

(1) $(8, 11, -1, 3, -4)$ *est une solution si et seulement si le système est homogène.*

(2) $(8, 11, -1, 3, -4)$ *est une solution.*

(3) $(1 + 2\alpha, 1 + 3\alpha, 1 - \alpha, \alpha, -2)$ *est une solution pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(4) $(1 + 2\alpha, 1 + 3\alpha, 1 - \alpha, \alpha, -2)$ *est une solution pour au moins deux valeures distinctes du paramètre réel α.*

(5) $(1 + 2\alpha, 1 + 3\alpha, 1 - \alpha, \alpha, -2)$ *est une solution pour $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 0$.*

(A) (1), (3), (4)

(B) (1) ,(5)
(C) (2), (3), (4)
(D) (2), (5)

Exercice 10. *En faisant une seule opération élémentaire sur les équations d'un système d'équations linéaires, on ne change pas l'ensemble des solutions du système linéaire. Par contre, en faisant plusieurs opérations élémentaires, l'une après l'autre, l'ensemble des solutions peut être modifié.*
a) vrai
b) faux

Exercice 11. *La matrice augmentée correspondant au système linéaire suivant*

$$\begin{cases} x + 4y - t = 0 \\ z + 4y + t = 4 \end{cases} \tag{1}$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) vrai
b) faux

Exercice 12. *Est-ce que la première matrice est échelonnée et est-ce que la deuxième matrice est échelonnée réduite ?*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) oui, oui.
b) oui, non.
c) non, oui.
d) non, non.

Exercice 13. *Soit une matrice $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $A \neq 0$. Alors, ils existent toujours plusieurs matrices échelonnées, ligne-équivalents à A.*
a) vrai
b) faux

Exercice 14. *Quelle est la matrice échelonnée réduite correspondant à la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 1 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

d) Aucune de ces trois.

Exercice 15. *Quelle est la matrice échelonnée réduite correspondant à la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 & 20 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 11 & 0 & 27 \end{pmatrix} \tag{8}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

d) Aucune de ces trois.

Exercice 16. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ *est obtenue en effectuant une opération élémentaire sur les lignes de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) vrai

(b) faux