Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 5**

Exercice 1. *Les vecteurs*

$$\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 := \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement dépendants ?

Exercice 2. *Soit*

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelles valeurs de h le vecteur $\vec{v}_3$ se trouve-t-il dans* Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *?*
2. *Pour quelles valeurs de h l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est-il linéairement dépendant ?*

Exercice 3. *Soit*

$$S := \{1, t, t^2, t^3, \ldots\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que S est un sous-ensemble linéairement indépendant de l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels.*
2. *Montrer que S est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels.*
3. *Démontrer que l'ensemble*

$$S := \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$$

est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ des polynômes à coéfficients réels de degré plus petit ou égal à 2.

Exercice 4. *1. Les colonnes de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

2. Les polynômes $1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3$ sont-ils linéairement dépendants ?

Exercice 5. *1. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

2. Soit $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour compléter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Exercice 6. *Trouver la dimension du sous-espace H défini par :*

$$H = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 7. *Choix Multiples.*

(a) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$ *et* $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$ *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- ☐ *Les polynômes* p *et* q *sont linéairement indépendants.*
- ☐ *Les polynômes* p *et* q *forment une base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- ☐ *Le polynôme* $q-p$ *est le polynôme nul.*
- ☐ $(1+t)p - (1-t)q$ *est une combinaison linéaire de* p *et* q.

(b) Soit W *le sous-espace dans* $\mathbb{R}^6$ *défini par l'équation* $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 0$. *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- ☐ *On peut compléter* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ *en une base de* W *composée de* 5 *vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ *en une base de* W *composée de* 6 *vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ *en une base de* W *composée de* 5 *vecteurs.*
- ☐ *On peut compléter* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ *en une base de* W *composée de* 6 *vecteurs.*

(c) Soit V *un espace vectoriel et* $v_1, \ldots, v_k$ *des vecteurs de* V.

- ☐ *Si la famille* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *est libre, alors* $dimV = k$.
- ☐ *Si la famille* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *est libre, alors* $dimV \geq k$.
- ☐ *Si la famille* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *engendre l'espace vectoriel* V, *alors* $dimV = k$.
- ☐ *Si la famille* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *engendre l'espace vectoriel* V, *alors* $dimV \geq k$.

Exercice 8. *On considère le système d'équations linéaires suivant :*

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$$
$$5x_1 - x_3 = 0$$

Trouver une base de l'ensemble des solutions, comme sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9. *Soient les matrices suivantes dans l'espace vectoriel* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer si D *ou* $E \in \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

Exercice 10. *Déterminer le polynôme de degré* 4, $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, *dont la représentation graphique passe par les points* $(1; \frac{1}{2})$, $(2; 3)$, $(-1; \frac{9}{2})$, $(-2; 35)$ *et* $(\frac{1}{2}; \frac{15}{16})$.

Exercice 11. *Vrai-faux .*

a) Si la forme échelonnée d'une matrice augmentée possède une ligne de zéros, alors le système linéaire associé possède une infinité de solutions.

b) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 *inconnues admet au moins une solution.*

c) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 *inconnues n'admet aucune solution.*

d) Si un système linéaire avec n *équations à* n *inconnues a* n *fois le pivot* 1 *dans une forme échelonnée simplifiée de sa matrice augmentée, alors le système admet exactement une solution.*

Exercice 12. *Dans chaque cas, donner deux bases distinctes de l'espace vectoriel* V*.*

a) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

c) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

d) $V = \{(a-b, b-c, c-a, b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$*, qui est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Soit* x, y, z *des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z &= 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z &= 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

En posant $X = \cos x$*,* $Y = \cos y$ *et* $Z = \cos z$*, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues* X, Y *et* Z*. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de* x, y *et* z *dans l'intervalle* $[0; \frac{\pi}{2}]$ *qui satisfont au système (1).*