Analyse II : Contrôle N° 3

Durée : 1 heure 45 minutes - Barème sur 15 points

NOM : ______________________________ GROUPE [ ]

PRENOM : ______________________________

1. Résoudre l'équation (donner la valeur exacte de x dans $\mathbb{R}$) sur son ensemble de définition :

$$e^{\operatorname{Arsh} x} = (\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^{\left(\frac{\ln 2}{x}\right)}$$

$2\frac{1}{2}$ pts

2. (a) Montrer que $\operatorname{Arch} x = \frac{1}{2} \operatorname{Arch}(2x^2 - 1)$

   (b) Utilisez le point précédent pour déterminer les solutions de l'équation :

$$\operatorname{Arsh} x + \frac{1}{2} \operatorname{Arch} \frac{5}{3} = \operatorname{Arch} 2$$

3 pts

3. (a) Résoudre l'équation puis représenter les solutions dans le plan de Gauss :

$$\frac{1}{z+i} = \frac{\sqrt[3]{-i}}{2}$$

3 pts

   (b) Soient les trois points : $A = (-3; 12)\,, B = (0; 16)$ et $C = (6; 0)\,.$
   Par un calcul dans $\mathbb{C}$, déterminer la fonction complexe affine $f(z)$ telle que : $f(z_A) = z_A; f(z_B) = z_C$.
   Calculer la valeur de la tangente de l'angle en A du triangle ABC.
   Indication : Faites une figure d'étude . 3 pts

4. Soient les deux polynômes :

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^4 + x^2 + 1.$$

   (a) Déterminer le PGCD $D(x)$ de $P(x)$ et $Q(x)$ et le donner sous sa forme normalisée ;

   (b) Déterminer les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ donnés par le théorème de Bezout :

$$D(x) = A(x) \cdot P(x) + B(x) \cdot Q(x)$$

$3\frac{1}{2}$ pts

Tourner s.v.p. ☞

Formulaire

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sh}\,y\ ; \qquad \mathrm{Ch}(x-y) = \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sh}\,y\ ;$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}\,y\ ; \qquad \mathrm{Sh}(x-y) = \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}\,y\ ;$$

$$\mathrm{Th}(x+y) = \frac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1+\mathrm{Th}\,x\,\mathrm{Th}\,y}\ ; \qquad \mathrm{Th}(x-y) = \frac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1-\mathrm{Th}\,x\,\mathrm{Th}\,y}\ ;$$

$$\mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Ch}\,y = 2\,\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ; \qquad \mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Ch}\,y = 2\,\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ;$$

$$\mathrm{Sh}\,x + \mathrm{Sh}\,y = 2\,\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ; \qquad \mathrm{Sh}\,x - \mathrm{Sh}\,y = 2\,\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ ; \quad \mathrm{Sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}\ ; \quad \mathrm{Th}\,x = \frac{2t}{1+t^2}\ ; \quad \text{où} \quad t = \mathrm{Th}\,\frac{x}{2}$$

$$\mathrm{Arch}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ ;\ \forall x \in [1,+\infty[\ ; \qquad \mathrm{Arsh}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;$$

$$\mathrm{Arth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ;\ \forall x \in]-1,+1[\ ; \qquad \mathrm{Arcoth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus[-1,+1]\ ;$$

$$\mathrm{Arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \forall x \in]1,+\infty[\ ; \qquad \mathrm{Arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;$$

$$\mathrm{Arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ;\ \forall x \in]-1,+1[\ ; \qquad \mathrm{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus[-1,+1]\ .$$

Réponses :

1. $x = \frac{3}{4}$;
2. $x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \notin D_f$;
3. a) $S = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -3i\}$; b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{24}{7}$;
4. a) $D(x) = x^2 + x + 1$; b) $A(x) = 1; B(x) = -(x+1)$.

Attention ! Les exercices 3 b) et 4 ne sont **pas** au programme de cette année !