

## Série 7

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

a)  $a(x) = x|x|$

d)  $d(x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}x)$

b)  $b(x) = x(x^2 + px + q)$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

e)  $e(x) = \tan^2(\frac{2}{x} + x\sqrt{|x|})$

c)  $c(x) = E(\sin x)$

f)  $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x + a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $f$  est une fonction périodique, il est en général facile de se convaincre de sa périodicité, mais il est souvent difficile de déterminer sa période.

Pour la déterminer, on peut esquisser le graphe de  $f$ , ou essayer de transformer l'expression de  $f(x)$  pour se ramener à une fonction d'expression plus simple dont on connaît la période.

Déterminer la période, si elle existe, des fonctions suivantes :

a)  $a(x) = x - E(x)$ ,

b)  $b(x) = \sin(ax) + \cos(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, esquisser leur graphe, puis donner leur ensemble des valeurs.

a)  $a(x) = |2x + |x - 2||$

b)  $b(x) = \frac{|x|}{x^3 + x}$  si  $x \neq 0$  et  $b(0) = 2$ .

4. Soient  $A(x) = E(x)$  ;  $a(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$$B(x) = x - \frac{\pi}{2} \quad ; \quad b(x) = \sin x$$

Esquisser le graphe des fonctions suivantes :

a)  $A \circ a$ ,

b)  $B \circ b$  et  $b \circ B$ .

5. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ .

Montrer que  $f$  peut toujours s'exprimer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

6. On considère la fonction  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ .

a) On fixe  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  ; déterminer  $M$  tel que  $x > M \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ .

b) A l'aide de la définition, montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$ .

## Réponses de la série 7

1. Fonctions paires :  $d(x)$  et  $e(x)$ .

Fonctions impaires :  $a(x)$ ,  $[b(x) \text{ si } p = 0]$  et  $[f(x) \text{ si } a = 0]$ .

Fonctions ni paires ni impaires :  $c(x)$ ,  $[b(x) \text{ si } p \neq 0]$  et  $[f(x) \text{ si } a \neq 0]$ .

2. a)  $T = 1$ .

b)  $T = \frac{2\pi}{|a|}$ .

3. a)  $D_a = \mathbb{R}$ ,  $V_a = \mathbb{R}_+$

b)  $D_b = \mathbb{R}$ ,  $V_b = ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \cup \{2\}$ .

4. a)  $A \circ a = E(\sqrt{16 - x^2})$ .

b)  $B \circ b = -\frac{\pi}{2} + \sin x$  et  $b \circ B = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ .

5. Poser  $f(x) = p(x) + i(x)$  où  $p$  est une fonction paire et  $i$  une fonction impaire.

6. a)  $M \geq 21$ .

b)  $\forall \varepsilon > 0, \quad x > M(\varepsilon) \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$ .