Ens: Prof. Marco Picasso - Analyse numérique - XYZ

25 juin 2018 - Horaire : de 8h15 à 10h30

1

Lennon John

SCIPER : **XXXXX1** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.
Aucun document n'est autorisé.
L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :

- $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.

Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document. Des pages de brouillon sont à votre disposition à la fin de ce document. Elles ne seront pas corrigées.

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Cocher les affirmations vraies

☐ $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2],\ \exists C > 0,\ \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4$$

☐ $\exists C > 0,\ \forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2],\ \ \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4 \max_{-2 \leq x \leq 2} |u^{(5)}(x)|$$

☐ $\exists C > 0,\ \forall u \in \mathcal{C}^5[-2,\ 2],\ \ \forall 0 < h \leq 1,$

$$\left| u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h} \right| \leq Ch^4$$

Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Soit $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on cherche à approcher numériquement $\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la formule de quadrature définie par:

$$J(g) = \omega g(-\alpha) + 2(1-\omega)g(0) + \omega g(\alpha),$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $\omega > 0$.

Question 2 : On suppose $0 < \alpha \leq 1$ donné, pour quelle valeur de ω a-t-on

$$\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_2 \ ?$$

☐ $\omega = \frac{1}{3\alpha}$ ☐ $\omega = \frac{1}{2\alpha}$ ☐ $\omega = \frac{1}{3\alpha^2}$ ☐ $\omega = \frac{1}{2\alpha^2}$

Question 3 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), a-t-on

$$\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_3 \ ?$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 4 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), pour quelle valeur de α a-t-on

$$\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_4 \ ?$$

☐ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ☐ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ $\alpha = 1$

Question 5 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), et pour celle de α trouvée dans la question), a-t-on

$$\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_5 \ ?$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 6 : Pour la valeur de ω trouvée dans la question 2), et pour celle de α trouvée en), a-t-on

$$\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_6 \ ?$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le problème suivant: étant donné la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, trouver la fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + x\,(1 + \sin(u(x))) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Question 7 : Si $f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) + x\,(1 + \sin(\sin(2\pi x)))$, la solution de ce problème est donnée par $u(x) = \sin(2\pi x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : On utilise une méthode de différences finies centrées pour approcher u et la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire obtenu. Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ ainsi obtenue. Le fichier MatLAB/Octave `exam1.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

A la ligne `a(i)=2*coeff+????`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `cos(u(i))`
- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*cos(u(i))`
- ☐ `i*h*(1+sin(u(i)))`

Question 9 : A la ligne `b(i)=coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1)) + ????  -f(i*h);`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*(1+sin(u(i)))`
- ☐ `cos(u(i))`
- ☐ `i*h*cos(u(i))`

Question 10 : A la ligne `c(i)=????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `c(i)/a(i)`
- ☐ `a(i+1)/c(i)`
- ☐ `a(i)/c(i)`
- ☐ `c(i)/a(i+1)`

Question 11 : A la ligne `a(i+1)=sqrt(a(i+1)-????);`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `c(i)*a(i+1)`
- [ ] `c(i)*a(i)`
- [ ] `a(i)*a(i)`
- [ ] `c(i)*c(i)`

Question 12 : A la ligne `b(i+1)=(b(i+1)-c(i)*b(i))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `a(i)`
- [ ] `a(i+1)`
- [ ] `c(i)`
- [ ] `c(i+1)`

Question 13 : A la ligne `b(i)=(b(i)-c(i)*b(i+1))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `a(i)`
- [ ] `c(i+1)`
- [ ] `a(i+1)`
- [ ] `c(i)`

Question 14 : A la ligne `u(i)=u(i) - ????;`, il faut remplacer `????` par:

- [ ] `a(i)`
- [ ] `c(i)`
- [ ] `u(i)`
- [ ] `b(i)`

Question 15 : Après avoir complété le fichier, les résultats obtenus sont les suivants:

```
>> err = exam1(9)
iter=1, stop = 1.649725e+00
iter=2, stop = 2.511976e-02
iter=3, stop = 7.045653e-06
iter=4, stop = 6.851657e-13
err =  0.031974
>> err = exam1(19)
iter=1, stop = 1.704753e+00
iter=2, stop = 2.564039e-02
iter=3, stop = 6.913912e-06
iter=4, stop = 6.217630e-13
err =  0.0082731
>> err = exam1(39)
iter=1, stop = 1.725976e+00
iter=2, stop = 2.577019e-02
iter=3, stop = 6.880664e-06
iter=4, stop = 6.025330e-13
err =  0.0020607
```

On déduit de ces résultats que :

- ☐ La méthode de Newton converge quel que soit le point de départ.
- ☐ La méthode des différences finies converge en $O(h)$.
- ☐ La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ.
- ☐ La méthode des différences finies converge en $O(h^2)$.

Fichier exam1.m:

```
function err = exam1(N)
%
% Resolution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
% par une methode de differences finies
% et une methode de Newton
% Etant donne u^n, trouver u^{n+1}
% tel que DF(u^n)(u^n - u^{n+1}) = F(u^n)
% En pratique on construit A=DF(u^n), b=F(u^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose u^{n+1}=u^n-y
%
% parametres
%
%  N        : nombre d inconnues du systeme non lineaire
%  a        : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
%  c        : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
%  b        : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
%  u        : N-vecteur, contient u^n puis u^{n+1}
%
for i=1:N
    u(i) = 1;
end
h=1/(N+1);
coeff=(N+1)*(N+1);
stop=1;
iter=0;
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
    a(i) = 2*coeff + ????;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = ????;
    for i=2:N-1
    b(i) = coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1)) + ???? - f(i*h);
    end
    b(N) = ????;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = sqrt(a(1));
    for i=1:N-1
        c(i) = ????;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1) - ????);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Ly = b
```

```
    b(1)=b(1)/a(1);
    for i=1:N-1
      b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/????;
    end

    % Resolution du systeme lineaire L^T u^{n+1} = y

    b(N)=b(N)/a(N);
    for i=N-1:-1:1
      b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/????;
    end

    % u^{n+1} = u^n - y

    for i=1:N
    u(i) = u(i) - ????;
    end

    % Calcul de ||b||/||u||

    stop=norm(b)/norm(u);
    fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)
end
err = 0;
for i=1:N
   err=max(err,abs(u(i)-uex(i*h)));
end
end
% second membre de l equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function f=f(x)
   f=4*pi*pi*sin(2*pi*x)+x*(1+sin(sin(2*pi*x)));
end
% solution de l equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function uex=uex(x)
   uex=????;
end
```

Questions QCM

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 16 : On cherche à résoudre le problème suivant: trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t) + 2\pi \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,\ 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,\ t) = 0, \qquad u(1,\ t) = 0. \end{cases}$$

La solution exacte du problème est donnée par $u(x,\ t) =$

- ☐ $\sin(\pi x) e^{-\pi t}$
- ☐ $\sin(\pi x)\cos(\pi t) e^{-\pi t}$
- ☐ $\sin(\pi x) e^{-\pi t}(\pi t + 1)$
- ☐ $\sin(\pi x)\cos(\pi t)$

Question 17 : En multipliant par $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)$ et en intégrant entre $x = 0$ et $x = 1$ on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right)^2 \right) \mathrm{d}x = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : En intégrant ensuite entre $t = 0$ et $t = 1$ on obtient:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,1)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)\right)^2 \right) \mathrm{d}x + 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 (\pi\cos(\pi x))^2\,\mathrm{d}x$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, $\tau > 0$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, M$. On note u_i^n l'approximation de $u(x_i,\ t_n)$ obtenue en n'utilisant que des formulaes de différences finies centrées. Le fichier MatLAB/Octave `exam2.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

A la ligne `u1(i)=(1-lambda)*u0(i)+????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `lambda/4*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `2*lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- ☐ `lambda/2*(u0(i-1)+u0(i+1))`

Question 20 : A la ligne `u2(i)=(2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-(1-pi*tau) *u0(i))/????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `1-pi*tau`
- ☐ `1`
- ☐ `1+pi*tau`
- ☐ `tau`

Question 21 : Une fois le fichier complété, on obtient les résultats suivants:

```
>> u=exam2(9,10,0.1);
  erreur maximum au temps final  4.073375e-03
>> u=exam2(19,20,0.05);
  erreur maximum au temps final  1.029995e-03
>> u=exam2(39,40,0.025);
  erreur maximum au temps final  2.582139e-04
>> u=exam2(79,80,0.0125);
  erreur maximum au temps final  6.459797e-05
```

On en déduit:

- ☐ Le schéma est stable $\forall h > 0$, $\forall \tau > 0$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.

Fichier exam2.m:

```
function [u2]=exam2(N,M,tau)
%
%  Schema de Newmark pour l'equation des ondes d2^u/dt2-d2^u/dx2+2pi
%  du/dt=0
%
%  parametres
%
%  N         : nombre de points interieurs dans l'intervalle [0,1]
%  h         : pas d'espace
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  t         : temps courant
%  u0      : N-vecteur, u0(i) est une approximation de u(x_i,t_n-1)
%  u1      : N-vecteur, u1(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
%  u2      : N-vecteur, u2(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
%
h=1./(N+1);
lambda=tau^2/h^2;
%
% condition initiale u0 et u1
%
for i=1:N
  u0(i)=sin(pi*i*h);
end
u1(1)=????;
for i=2:N-1
  u1(i)=(1-lambda)*u0(i)+????;
end
u1(N)=????;
%
% schema de Newmark
%
t=tau;
for n=2:M
  t=t+tau;
  u2(1)=????;
  for i=2:N-1
    u2(i)=(2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-(1-pi*tau)*u0(i))/????;
  end
  u2(N)=????;
  for i=1:N
    u0(i)=u1(i);
    u1(i)=u2(i);
  end
end
%
% imprimer l'erreur maximum au temps final
%
```

```
err = 0;
for i=1:N
    erri = abs(u2(i)-????);
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

Soit u: $[0,\ 100] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u(t) & 0 < t \leq 100, \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Soit N un entier positif, $h = \frac{100}{N}$, $t_n = nh$, $n = 0,\ 1,\ ...,\ N$. On note u^n une approximation de $u(t_n)$ obtenue avec le schéma suivant :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -u^n, \quad n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1, \tag{2}$$

où on a posé $u^0 = 1$.

(a) Montrer que $u(t_N) - u_N = e^{-Nh} - (1-h)^N$.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, $|e^{-x} - (1-x)| \leq \frac{x^2}{2}$.

(c) En déduire que si $h \leq 2$, on a $|u(t_N) - u_N| \leq 50h$.

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,\ 1]$, N un entier positif, $h = \frac{1}{N}$, $x_i = ih$, $i = 0,\ 1,\ ...,\ N$.

(a) Soit $f_h^1 \in \mathcal{C}^0[0,\ 1]$ l'interpolant de degré 1 par intervalles de f défini par :

$$\begin{aligned} f_h^1(x_i) &= f(x_i), && i = 0,\ 1,\ ...,\ N, \\ f_h^1{}_{|[x_i,\ x_{i+1}]} &\in \mathbb{P}_1, && i = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \end{aligned}$$

On suppose $f \in \mathcal{C}^2[0,\ 1]$.

- Soit $i = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$. Montrer qu'il existe $w_i \in]x_i,\ x_{i+1}[$ tel que :

$$\left(f - f_h^1\right)'(w_i) = 0.$$

- En déduire que

$$|(f - f_h^1)(x)| \leq h^2 \max_{0 \leq t \leq 1} |f''(t)|$$

pour tout $0 < x < 1$.

(b) Soit $f_h^2 \in \mathcal{C}^0[0,\ 1]$ l'interpolant de degré 2 par intervalles de f défini par :

$$\begin{aligned} f_h^2(x_i) &= f(x_i), && i = 0,\ 1,\ ...,\ N, \\ f_h^2(x_i + \frac{h}{2}) &= f(x_i + \frac{h}{2}), && i = 0,\ 1,\ ...,\ N-1, \\ f_h^2{}_{|[x_i,\ x_{i+1}]} &\in \mathbb{P}_2, && i = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \end{aligned}$$

On suppose $f \in \mathcal{C}^3[0,\ 1]$.

- Soit $i = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$. Montrer qu'il existe $z_i \in]x_i,\ x_{i+1}[$ tel que :

$$\left(f - f_h^2\right)''(z_i) = 0$$

- En déduire que

$$|(f - f_h^2)(x)| \leq h^3 \max_{0 \leq t \leq 1} |f'''(t)|$$

pour tout $0 < x < 1$.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)