Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 5

Chgt de Bases : exercice 1

Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base.

On utilise la matrice de passage P. On obtient les anciennes composantes en fonction des nouvelles, d'où le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_u) \quad \textbf{ancienne base} \\ X_u \arrow[d, squiggly, shift left] \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_v) \quad \textbf{nouvelle base} \arrow[u, "P", shift left] \\ X'_v \end{tikzcd}$$

La nouvelle base est $\mathcal{B}_v$.

On faut déterminer les composantes des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par rapport à la base $\mathcal{B}_e = (\vec{e_1};\, \vec{e_2})$.

$$\vec{v}_1 = 3\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_u \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_u$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_v$ est donc : $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P \neq 0$

On pose : $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_u$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_e$ $\Rightarrow$

$$X = PX' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & 3x' + 2y' \\ 2 & = & x' + y' \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x' & = & -2 \\ y' & = & 4 \end{array} \right.$$

$$X' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (-2)\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$$

Chgt de Bases : exercice 3

(a) L'idée est d'exprimer les vecteurs de la "nouvelle" base $\mathcal{B}_u$ en fonction de ceux de "l'ancienne" base $\mathcal{B}_v$ pour obtenir la matrice de passage.
On commence par faire le diagramme de changement de bases.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_u) \\ X_u\end{array} & \textbf{ancienne base} \\
P \Big\uparrow \ \ \Big\downarrow & \\
\begin{array}{c}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_v) \\ X'_v\end{array} & \textbf{nouvelle base}
\end{array}$$

La nouvelle base étant $\mathcal{B}_v$, il faut donc déterminer les composantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}_u(\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

$$\vec{v} = 0\vec{u} + 1\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_u \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_u$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_u$ à $\mathcal{B}_v$ est donc : $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

(b) On va utiliser une base "judicieuse" pour déterminer les matrices des applications. Puis de faire un changement de bases.
Une base est "judicieuse" lorsque la matrice de l'application linéaire est diagonale.

- On détermine la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_u(\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

  L'axe est $(O\,,\vec{u})$ donc $f(\vec{u}) = \vec{u} = 1\vec{u} + 0\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_u$

  La direction est $\vec{v}$ et la rapport 3 donc $f(\vec{v}) = 3\vec{v} = 0\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_u$

  La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}_u$ est : $\quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- On détermine la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_v(\vec{v}\,,\,\vec{w})$.

  L'axe est $(O\,,\vec{v})$ donc $g(\vec{v}) = \vec{v} = 1\vec{v} + 0\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_v$

La direction est $\vec{w}$ et la rapport -2 donc $g(\vec{w}) = -2\vec{w} = 0\vec{v} - 2\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_v$

La matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}_v$ est : $\quad M'_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Pour calculer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_u$, il est nécessaire que les matrices de f et g soient exprimées dans cette base.

- La matrice de f est déjà dans la base $\mathcal{B}_u$.
- Sous a) on a calculé la matrice de passage P de l'ancienne base $\mathcal{B}_u$ à la nouvelle base $\mathcal{B}_v$.

  On connaît la matrice M'_g dans $\mathcal{B}_v$ et on veut déterminer M_g dans la base $\mathcal{B}_u$.

  On considère le changement de base dont le diagramme est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_u)\\ X_u\end{matrix} \arrow[rr, "M_g"] \arrow[d, squiggly, shift left=2] & & \begin{matrix}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_u)\\ Y_u = M_g X_u\end{matrix} \arrow[d, squiggly, shift right=2] \\
\begin{matrix}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_v)\\ X'_v\end{matrix} \arrow[u, "P"] \arrow[rr, "M'_g"] & & \begin{matrix}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_v)\\ Y'_v = M'_g X'_v\end{matrix} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

  On a la relation : $\quad M'_g = P^{-1}\, M_g\, P \quad \Leftrightarrow \quad M_g = P\, M_g\, P^{-1}$

  D'où : $\quad M_g = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- On peut maintenant calculer la matrice de $h = g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}_u$.

$$M_h = M_g\, M_f \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Chgt de Bases : exercice 5

(a) • La nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B}_f$. Dans la donnée, les vecteurs $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ sont déjà connus en fonction de l'ancienne base $\mathcal{B}_e$:

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \vec{f_3} = \vec{e_3} \end{cases} \qquad \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e , \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_e \quad \text{et} \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_f$ est donc immédiate : $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- La nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B}_w$. Dans la donnée, les vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont déjà connus en fonction de l'ancienne base $\mathcal{B}_v$:

$$\begin{cases} \vec{w_1} = \vec{v_1} - \vec{v_2} \\ \vec{w_2} = 2\vec{v_1} + \vec{v_2} \end{cases} \qquad \vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_v \quad \text{et} \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_v$$

La matrice de passage Q de $\mathcal{B}_v$ à $\mathcal{B}_w$ est donc immédiate : $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Les deux matrices inverses seront utiles, les voici :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A de l'application f de la base $\mathcal{B}_e$ à la base $\mathcal{B}_v$ est donnée ; voici le diagramme avec les différentes bases proposées :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c}(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}_e)\\ X_e\end{array} \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A'_{ew}"] \arrow[d, squiggly, shift left] & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_v)\\ Y_v = AX_e\end{array} \arrow[d, squiggly, shift right] \\
\begin{array}{c}(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}_f)\\ X'_f\end{array} \arrow[u, "P"] \arrow[ur, "A'_{fv}"] \arrow[r, "A'_{fw}"] & \begin{array}{c}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_w)\\ Y'_w = A'_{fw}X'_f\end{array} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

i) On a la relation (le diagramme s'avère très utile) :

$$A'_{ew} = Q^{-1}AP = Q^{-1}AI_3 = Q^{-1}A$$

Ainsi :

$$A'_{ew} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ii) On a la relation (le diagramme s'avère très utile) :

$$A'_{fv} = Q^{-1}AP = I_2AP = AP$$

Ainsi :

$$A^{'}_{fv} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

iii) On a la relation (le diagramme s'avère très utile) :

$$A^{'}_{fw} = Q^{-1}AP$$

Ainsi :

$$A^{'}_{fw} \; = \; \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & -7 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) Voici à nouveau le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_e) \\ X_e\end{matrix} \arrow[rr, "A"] \arrow[rrdd, "A'_{ew}"] \arrow[dd, squiggly] & & \begin{matrix}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_v) \\ Y_v = AX_e\end{matrix} \arrow[dd, squiggly] \\
& & \\
\begin{matrix}(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_f) \\ X'_f\end{matrix} \arrow[uu, "P"] \arrow[rruu, "A'_{fv}"] \arrow[rr, "A'_{fw}"] & & \begin{matrix}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_w) \\ Y'_w = A'_{fw}X'_f\end{matrix} \arrow[uu, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Soit $P(1\,;\,-1\,;\,2)$ exprimé dans la base $\mathcal{B}_e$ et on veut son image exprimée dans la base $\mathcal{B}_w$.
On propose plusieurs manières de résoudre le problème.

- On calcule $f(P)$ dans la base $\mathcal{B}_v$ puis on fait le changement de la base $\mathcal{B}_v$ à la base $\mathcal{B}_w$:

$$f(P) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1-2+6 \\ 4-1+4 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \; = \; 5\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 \; = \; Y_v$$

$$Y_v \; = \; Q \cdot Y'_w \quad \Leftrightarrow \quad Y'_w \; = \; Q^{-1} \cdot Y_v \; = \; \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \; = \; -3\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2$$

ce sont donc les coordonnées de $f(P)$ dans la base $\mathcal{B}_w$.

- Comme la matrice $A^{'}_{ew}$ a été calculée, on peut l'utiliser directement pour avoir $f(P)$ dans la base $\mathcal{B}_w$ (c'est la méthode la plus rapide et directe).

$$f(P) \; = \; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- On peut également transformer les coordonnées de P par un changement de la base $\mathcal{B}_e$ à la base $\mathcal{B}_f$ puis on utilise la matrice A'_{fw} :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{alors :} \quad X = PX' \quad \Leftrightarrow \quad X' = P^{-1}X$$

$$X' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où :}$$

$$f(X') = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Chgt de Bases : exercice 6

(a) - La nouvelle base est $\mathcal{B}_v$. Pour obtenir Q, il faut la composante de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}$. La dimension de $\mathbb{R}$ est 1, donc $Q \in \mathbb{M}(1 \times 1; \mathbb{R})$.

  $\vec{v} = 3/2\vec{e} = (3/2)_e$

  D'où la matrice de passage de $\mathcal{B}_e$ à $\mathcal{B}_v$: $\quad Q = (3/2)$

- On a le diagramme de changement de bases suivant :

$$\begin{array}{ccc} (P_3[x], \mathcal{B}_u) & & \text{ancienne base} \\ X_u & & \\ P \; \Big\uparrow \; \wr\!\Big\downarrow & & \\ (P_3[x], \mathcal{B}_w) & & \text{nouvelle base} \\ X'_w & & \end{array}$$

  La nouvelle base est $\mathcal{B}_w$. Pour obtenir P, il faut les composantes des polynômes de $\mathcal{B}_w$ dans la base canonique. La dimension de $P_3[\mathbb{R}]$ est 4,
  donc $P \in \mathbb{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$.

$$2 = 2{\cdot}1{+}0x{+}0x^2{+}0x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_u \quad ; \qquad x{+}1 = 1{\cdot}1{+}1x{+}0x^2{+}0x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_u$$

$$x^2 - x = 0\cdot 1 - 1x + 1x^2 + 0x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_u \quad ; \qquad x^3 = 0\cdot 1 + 0x + 0x^2 + 1x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_u$$

D'où la matrice de passage de $\mathcal{B}_u$ à $\mathcal{B}_w$: $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) • Les bases $\mathcal{B}_u$ et $\mathcal{B}_e$ sont les bases canoniques. Pour déterminer la matrice de f, on cherche les composantes, dans $\mathcal{B}_e$, des images des vecteurs de la base de $P_3[x]$.

On note A_{ue} cette matrice. Donc $A_{ue} \in \mathbb{M}(4;\mathbb{R})$.

$f(1) = 1 = 1\vec{e} = (1)_e$, $\quad f(x) = 0 = 0\vec{e} = (0)_e$,
$f(x^2) = 0 = 0\vec{e} = (0)_e$, $\quad f(x^3) = 0 = 0\vec{e} = (0)_e$

D'où la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_u$ et $\mathcal{B}_e$: $\quad A_{ue} = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

• Le diagramme de changement de bases est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} (P_3[x], \mathcal{B}_u) & \xrightarrow{\quad A_{ue} \quad} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}_e) \\ X_u & & Y_e = A_{ue}X_u \\ P \Big\uparrow \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Big\uparrow Q \\ (P_3[x], \mathcal{B}_w) & \xrightarrow{\quad A_{wv} \quad} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}_v) \\ X'_w & & Y'_v = A_{wv}X'_w \end{array}$$

On a la relation : $\quad A_{wv} = Q^{-1}A_{ue}P$

Ainsi $\quad A_{wv} = \ (\frac{2}{3})\ (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ (\frac{4}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ 0\ \ 0)$

(c) • Composantes de $r(x)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_u$ de $P_3[x]$:

$$R_u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_u$$

- On détermine les composantes de $r(x)$ dans la base $\mathcal{B}_w$, en utilisant la matrice de passage P .

  $R_u = PR'_w \quad \Leftrightarrow \quad R'_w = P^{-1}R_u$

  $$R'_w \; = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_w \qquad \Leftrightarrow$$

  $\Leftrightarrow r(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot (x+1) - x^2$

On utilise le diagramme de changement de bases pour définir plusieurs "chemins" permettant d'obtenir $f(r(x))$ dans la base $\mathcal{B}_v$, ceci en utilisant les matrices de f obtenues sous b).

- On veut les composantes de $f(r(x))$ dans la base $\mathcal{B}_v$.

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(P_3[x],\mathcal{B}_u)\\ R_u\end{matrix} \arrow[r, "A_{ue}"] \arrow[dr, "A_{uv}"] \arrow[d, squiggly, shift left] & \begin{matrix}(\mathbb{R},\mathcal{B}_e)\\ Y_e = A_{ue}R_u\end{matrix} \arrow[d, squiggly, shift right] \\
\begin{matrix}(P_3[x],\mathcal{B}_w)\\ R'_w\end{matrix} \arrow[u, "P", shift left] \arrow[r, "A_{wv}"] & \begin{matrix}(\mathbb{R},\mathcal{B}_v)\\ Y'_v = A_{wv}R'_w\end{matrix} \arrow[u, "Q"', shift right]
\end{tikzcd}$$

  Comme on a calculé les composantes de $r(x)$ dans $\mathcal{B}_w$, la manière la plus directe de déterminer la composante de $f(r(x))$ dans la base $\mathcal{B}_v$ est d'utiliser la matrice A_{wv} .

  $$f(r(x)) = y \quad \Leftrightarrow \quad A_{wv}R'_w = Y'_v \quad \Leftrightarrow \quad (\tfrac{4}{3} \;\; \tfrac{2}{3} \;\; 0 \;\; 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_w \; = \; (10/3)_v$$

  $\Leftrightarrow$

  $f(r(x)) = \frac{10}{3}\,\vec{v}$

- On calcule la composante de l'image de $r(x)$ dans la base $\mathcal{B}_e$ en utilisant la matrice A_{ue} . Puis on détermine la composante relativement à la base $\mathcal{B}_v$ en utilisant la matrice de passage Q.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(P_3[x],\mathcal{B}_u)\\ R_u\end{array} \arrow[r, "A_{ue}"] \arrow[dr, "A_{uv}"] \arrow[d, rightsquigarrow, shift left] & \begin{array}{c}(\mathbb{R},\mathcal{B}_e)\\ Y_e=A_{ue}R_u\end{array} \arrow[d, rightsquigarrow, shift right] \\
\begin{array}{c}(P_3[x],\mathcal{B}_w)\\ R'_w\end{array} \arrow[u, "P", shift left] \arrow[r, "A_{wv}"] & \begin{array}{c}(\mathbb{R},\mathcal{B}_v)\\ Y'_v=A_{wv}R'_w\end{array} \arrow[u, "Q"', shift right]
\end{tikzcd}$$

On commence donc par calculer la composante de l'image de $r(x)$ dans la base $\mathcal{B}_e$ en utilisant la
matrice A_{ue} .

$$\begin{aligned}
f(r(x))=y \quad &\Leftrightarrow \quad A_{ue}R_u=Y_e \\
&\Leftrightarrow \quad (1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}5\\2\\0\\-1\end{pmatrix}_u = (5)_e \\
&\Leftrightarrow \quad f(r(x))=5\vec{e}
\end{aligned}$$

On détermine la composante relativement à la base $\mathcal{B}_v$ en utilisant la matrice de passage Q.

$$\begin{aligned}
Y_e=QY'_v \quad &\Leftrightarrow \quad Y'_v=Q^{-1}Y_e \\
&\Leftrightarrow \quad (2/3)\,(5)_e \;=\; (10/3)_v \\
&\Leftrightarrow \quad f(r(x))=\tfrac{10}{3}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

- On peut aussi déterminer la matrice A_{uv} relativement aux bases $\mathcal{B}_u$ et $\mathcal{B}_v$. Elle permet de calculer directement l'image de $r(x)$ dans la base demandée.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(P_3[x],\mathcal{B}_u)\\ R_u\end{array} \arrow[r, "A_{ue}"] \arrow[dr, "A_{uv}"] \arrow[d, rightsquigarrow, shift left] & \begin{array}{c}(\mathbb{R},\mathcal{B}_e)\\ Y_e=A_{ue}R_u\end{array} \arrow[d, rightsquigarrow, shift right] \\
\begin{array}{c}(P_3[x],\mathcal{B}_w)\\ R'_w\end{array} \arrow[u, "P", shift left] \arrow[r, "A_{wv}"] & \begin{array}{c}(\mathbb{R},\mathcal{B}_v)\\ Y'_v=A_{wv}R'_w\end{array} \arrow[u, "Q"', shift right]
\end{tikzcd}$$

$A_{uv} = Q^{-1}A_{ue} = (2/3)\ (1\ 0\ 0\ 0)\ = (\frac{2}{3}\ 0\ 0\ 0)$

$$f(r(x)) = y \quad \Leftrightarrow \quad A_{uv}R_u = Y'_v$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tfrac{2}{3}\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_u = (10/3)_v$$

$$\Leftrightarrow \quad f(r(x)) = \tfrac{10}{3}\vec{v}$$

Chgt de Bases : exercice 7

(a) • Pour calculer la matrice de g, on peut par exemple chercher l'image d'une matrice X quelconque.
On peut aussi calculer l'image des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_e(E_1\,, E_3\,, E_3\,, E_4)\,$,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_e$: composantes de X relativement à $\mathcal{B}_e$.

La matrice M_e de g appartient à $\mathbb{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$. Pour la déterminer, on calcule $g(X)$.

$$g(X) = A(X + X^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+2y+2z & y+z+4t \\ 6x+6y+6z & 3y+3z+12t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_e = M_e X_e$$

• Pour déterminer la matrice de passage P, il faut exprimer les vecteurs de la "nouvelle" base $\mathcal{B}_v$ en fonction de ceux de "l'ancienne" base $\mathcal{B}_e$.

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e$$

$$E'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e$$

$$E'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 0E_2 + 2E_3 + 0E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_e$$

$$E'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 2E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_e$$

La matrice P appartient à $\mathbb{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Le diagramme de changement de bases est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(\mathbb{M}(2;\mathbb{R}), \mathcal{B}_e) \\ X_e\end{matrix} \arrow[r, "M_e"] \arrow[d, shift left, squiggly] & \begin{matrix}(\mathbb{M}(2;\mathbb{R}), \mathcal{B}_e) \\ Y_e = M_e X_e\end{matrix} \arrow[d, shift right, squiggly] \\
\begin{matrix}(\mathbb{M}(2;\mathbb{R}), \mathcal{B}_v) \\ X'_v\end{matrix} \arrow[r, "M_v"] \arrow[u, shift left, "P"] & \begin{matrix}(\mathbb{M}(2;\mathbb{R}), \mathcal{B}_v) \\ Y'_v = M_v X'_v\end{matrix} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

On a la relation : $\quad M_v = P^{-1} M_e P$

Il faut donc calculer la matrice P^{-1} !

$$M_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{9}{2} \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

(b) • On remarque que $E_1' = E_1$ et $E_3' = E_1 + 2E_3$. On peut donc déterminer facilement C dans $\mathcal{B}_e$:

$$C = 2E_1' - 3E_3' = 2E_1 - 3(E_1 + 2E_3) = -E_1 - 6E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}_e$: composantes de C dans $\mathcal{B}_e$

Remarque :
On peut aussi utiliser la matrice de passage P car $C_e = PC_v$.
Les composantes de C dans $\mathcal{B}_v$ sont immédiates. On obtient alors directement les composantes dans $\mathcal{B}_e$.

$$C_e = PC_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}_e$$

• Pour déterminer les composantes de $f(C)$ dans la base $\mathcal{B}_v$, on utilise la matrice M_v car on a déjà les composantes de C dans cette base.

$$f(C) = M_v C_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{9}{2} \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -21 \\ -9 \end{pmatrix}_v$$