Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ____________________

Groupe ☐

PRENOM : ____________________

1. On note P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à deux; P_2 est muni de la base canonique $(x^2,\ x,\ 1)$.

$\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $(\vec{e}_1\,,\ \vec{e}_2\,,\ \vec{e}_3)$.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans P_2 définie par

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) - 3x - 2 = 0 \\ f(\vec{e}_3) = 3f(\vec{e}_2) + 6x + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ f(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = x^2 - 5x - 2\,. \end{cases}$$

a) Calculer la matrice de f relativement aux bases données.
Déterminer le paramètre α pour que $\operatorname{Im} f$ soit égal à P_2.

b) On pose $\alpha = 4$.
Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$. 2.5 pts

2. Le plan est muni d'une origine O et de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

On note g l'application linéaire désignant une affinité de rapport $k = 3$ telle que $\overrightarrow{OP} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ a pour image $\overrightarrow{OP'} = 3\vec{e}_1$.

a) Déterminer une base B' par rapport à laquelle la matrice de g est diagonale. Puis à l'aide d'un changement de base, calculer la matrice M_g de g relativement à la base B.

Pour la suite du problème, on pose $M_g = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ pour la matrice de cette affinité relativement à la base B.

On considère les deux endomorphismes suivants :

- p est une projection orthogonale dont le noyau est l'axe de l'affinité g,
- s est une symétrie orthogonale d'axe $(O,\ \vec{a})$ telle que $\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = -\frac{\pi}{8}$.

b) Calculer la matrice de l'application $f = p \circ g \circ s^{(2k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$, relativement à la base B.

c) Déterminer la nature géométrique de f. 5.5 pts

Tourner la page

3. L'espace est muni d'une origine O et de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{e}_1 \;+\; (\vec{x}\cdot\vec{v})\,\vec{e}_2 \;+\; (\vec{x}\cdot\vec{r})\,\vec{e}_3 \end{array}$$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$,

ainsi que les deux endomorphismes suivants :

- s est une symétrie oblique d'axe le plan $\alpha(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et de direction parallèle au vecteur $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
- h est une homothétie de centre O et de rapport 3.

Relativement à la base B, déterminer la matrice de l'application $g = s + (h^{-1} \circ f)$ et en déduire directement sa nature géométrique. 3.5 pts

4. On munit $\mathbb{R}^2$ de la base $B_u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et de la base $B_v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ vérifiant les relations vectorielles suivantes

$$\begin{cases} 3\,\vec{v}_1 = -\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2 \\ 2\,\vec{u}_1 = -3\,\vec{v}_2 + \vec{u}_2 \,. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base $B_e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et de la base $B_f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ définie par

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 3\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3 \,. \end{cases}$$

Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\begin{cases} g(\vec{v}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3 \\ g(\vec{v}_2) = 2\,\vec{f}_2 \,. \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice de g relativement aux bases B_u et B_e.

b) Soit H la droite dont l'équation matricielle dans la base B_f est la suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \,.$$

Déterminer l'équation paramétrique de $g^{-1}(H)$ dans la base B_u. 3.5 pts