Corrigé 19

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x \cdot e^{2x}$,

b) $b(x) = \ln(x)$,

c) $c(x) = \arctan(x)$,

d) $d(x) = e^{ax} \cos(bx)$.

---

a) On intègre la fonction $a(x)$ par parties en dérivant x et en intégrant e^{2x} :

$$\int u'(x) \cdot v(x)\ dx \ = \ u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ dx$$

avec $v(x) = x$ et $u'(x) = e^{2x}$; d'où $v'(x) = 1$ et $u(x) = \frac{1}{2}\, e^{2x}$.

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^{2x}}\ dx \ = \ x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2}\ dx \ = \ x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \ = \ \frac{2x-1}{4} \cdot e^{2x} + C\,.$$

b) On intègre la fonction b par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$; d'où $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int b(x)\, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)}\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - x + C = x \cdot (\ln x - 1) + C\,.$$

c) On intègre $c(x)$ par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$; d'où $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\int c(x)\ dx \ = \ \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arctan(x)}\ dx \ = \ x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\ dx\,,$$

$$\int c(x)\ dx \ = \ x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\ dx \ = \ x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ \ln(x^2+1) + C\,.$$

d) On intègre la fonction d en utilisant deux fois la méthode de l'intégration par parties.

$$\int d(x)\, dx \ = \ \int \underbrace{e^{ax}}_{\uparrow} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(bx)}\ dx \ = \ \frac{1}{a}\ e^{ax} \cdot \cos(bx) \ + \ \frac{b}{a} \int \underset{\uparrow}{e^{ax}} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(bx)}\ dx\,,$$

$$\int d(x)\, dx \ = \ \frac{1}{a}\ e^{ax}\ \cos(bx) \ + \ \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a}\ e^{ax} \cdot \sin(bx) \ - \ \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \cos(bx)\ dx \right],$$

$$\int d(x)\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\,\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\,e^{ax}\cdot\sin(bx) - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx}_{\int d(x)\,dx},$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int d(x)\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cdot\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\,e^{ax}\cdot\sin(bx) + C\,,$$

$$\int d(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,[\,a\,\cos(bx)+b\,\sin(bx)\,] + C'.$$

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, b) $b(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

---

a) La fonction $a(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, c'est la dérivée de $\sqrt{u(x)}$.

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C\,.$$

b) On intègre la fonction $b(x)$ par parties en utilisant le résultat précédent :

$$\int b(x)\,dx = \int \underset{\downarrow}{x^2}\cdot\underset{\uparrow}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\,dx = x^2\cdot\sqrt{x^2+1} - \int 2x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$$

et la fonction $2x\cdot\sqrt{x^2+1}$ est de la forme $u'(x)\cdot[u(x)]^{\frac{1}{2}}$. A un coefficient multiplicatif près, c'est la dérivée de $[u(x)]^{\frac{3}{2}}$.

$$\int b(x)\,dx = x^2\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3}\cdot\left[x^2-2\right] + C\,.$$

3. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{2^{u(x)}}{u(x)}$ où $u(x) = \sqrt{x}$.

- Changement de variable

  On pose $u = \sqrt{x}$ et on exprime $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ en fonction de la variable u :

$$u = \sqrt{x}\,,\quad x > 0\,,\quad u > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = u^2 \quad\Rightarrow\quad dx = 2\,u\,du\,.$$

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2^u}{u}\,2\,u\,du = \int 2^{u+1}\,du\,.$$

- Intégration

$$\int 2^{u+1}\,du \;=\; \int e^{(u+1)\,\ln(2)}\,du \;=\; \frac{e^{(u+1)\,\ln(2)}}{\ln(2)} + C \;=\; \frac{2^{u+1}}{\ln(2)} + C\,.$$

- Retour à la variable x

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{(1+\sqrt{x}\,)} + C\,.$$

b) $b(x) \;=\; \sin(\sqrt{x}\,)\,.$

- Changement de variable

  On pose $u = \sqrt{x}$ et on exprime $\int \sin(\sqrt{x}\,)\,dx$ en fonction de u :

$$u = \sqrt{x}\,,\quad x > 0\,,\quad u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = u^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2\,u\,du\,.$$

$$\int \sin(\sqrt{x}\,)\,dx \;=\; \int \sin(u)\,(2\,u\,du) \;=\; 2\int u \cdot \sin(u)\,du\,.$$

- Intégration

$$\int \underset{\downarrow}{u} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(u)}\,du \;=\; -u \cdot \cos(u) - \int 1 \cdot [-\cos(u)]\;du$$

$$=\; -u \cdot \cos(u) + \int \cos(u)\,du \;=\; -u \cdot \cos(u) + \sin(u) + C\,.$$

- Retour à la variable x

$$\int \sin(\sqrt{x}\,)\,dx \;=\; 2\,\left[\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x})\right] + C\,.$$

c) $c(x) \;=\; x^3 \cdot \sin(x^2)\,.$

- Par changement de variable

  $*$ On pose $x^2 = t\,,\;\; t \geq 0\,,$ d'où $2x\,dx = dt$ ou $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\,.$

$$\int x^3 \cdot \sin(x^2)\,dx \;=\; \int \left(\sqrt{t}\right)^3 \cdot \sin(t)\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\;dt \;=\; \frac{1}{2}\int t \cdot \sin(t)\,dt\,,$$

ou $$\int x^3 \cdot \sin(x^2)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int x^2 \cdot\; \sin(x^2)\,(2x\,dx) \;=\; \frac{1}{2}\int t \cdot \sin(t)\,dt\,.$$

$*$ Puis on intègre la fonction $t \cdot \sin(t)$ par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, d'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos(t)$:

$$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(t)}\, dt = -t \cdot \cos(t) + \int \cos(t)\, dt = -t \cdot \cos(t) + \sin(t) + K,$$

En conclusion :

$$\int c(x)\, dx = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin(t)\, dt = \frac{1}{2} \left[-x^2 \cdot \cos(x^2) + \sin(x^2) \right] + C.$$

- Ou directement par parties

On peut intégrer par parties la fonction $f(x) = x^2 \cdot [\, x \cdot \sin(x^2)\,]$ en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = x \cdot \sin(x^2)$, d'où $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$:

$$\int c(x)\, dx = \int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \big[\, x \cdot \underset{\uparrow}{\sin(x^2)}\,\big]\, dx = -\frac{1}{2}\, x^2 \cdot \cos(x^2) + \int x \cdot \cos(x^2)\, dx,$$

$$\int c(x)\, dx = -\frac{1}{2}\, x^2 \cdot \cos(x^2) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + C.$$

4. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$,

- Changement de variable

On pose $x = \sinh(u)$ et on exprime $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ en fonction de u :

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(u) \quad \text{et} \quad dx = \cosh(u)\, du.$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sinh^2 u \cosh u} \cosh u\, du = \int \frac{1}{\sinh^2 u}\, du.$$

- Intégration

$$\int \frac{1}{\sinh^2(u)}\, du = -\int -\frac{1}{\sinh^2(u)}\, du = -\coth(u) + C.$$

- Retour à la variable x

$$\int a(x)\, dx = -\coth(\operatorname{arg\,sinh} x) + C = -\frac{\cosh(\operatorname{arg\,sinh} x)}{\sinh(\operatorname{arg\,sinh} x)} + C,$$

$$\int a(x)\, dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

b) $b(x) = -x^2\,(1-x^2)^{-3/2} \;=\; -\dfrac{x^2}{(\sqrt{1-x^2}\,)^3}\,, \qquad D_b = \,]-1\,,\,1\,[\,.$

- Une méthode : intégration par parties.

  $b(x) = -x\cdot x\,(1-x^2)^{-3/2}\,, \quad$ posons $u = x$ et $v' = x\,(1-x^2)^{-3/2}\,.$

  $u' = 1$ et $v = (1-x^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

  $$\int b(x)\,dx \;=\; -\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\; -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + C\,.$$

- Une autre méthode : intégration par changement de variable.

  Posons $x = \sin t\,, \quad t \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[\,. \quad dx = \cos t\;dt\,.$

  $$\int b(x)\,dx \;=\; -\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\;\cos t\;dt \;=\; -\int \tan^2 t\;dt \;=\; -\int [\,(1+\tan^2 t) - 1]\;dt$$

  $$\int b(x)\,dx \;=\; -\tan t + t + C \;=\; -\tan(\arcsin x) + \arcsin x + C$$

  $$\int b(x)\,dx \;=\; -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + C\,.$$

c) $c(x) = \sqrt{4x - x^2}\,, \qquad D_c = \;[\,0\,,\,4\,]\,.$

Le polynôme $4x - x^2$ est réductible dans $\mathbb{R}[x]$, il est de la forme $1 - y^2$:

$$4x - x^2 \;=\; -(x^2 - 4x + 4) + 4 \;=\; 4 - (x-2)^2 \;=\; 4\,\left[1 - (\tfrac{x-2}{2})^2\right]$$

$$\int \sqrt{4x - x^2}\;dx \;=\; 2\int \sqrt{1 - (\tfrac{x-2}{2})^2}\;dx\,, \quad \text{on pose} \quad \frac{x-2}{2} = \sin t\,,$$

$t \in \;[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]\,, \quad x \in \;[\,0\,,\,4\,]\,, \quad \sqrt{1 - (\frac{x-2}{2})^2} = \cos t\,, \quad dx = 2\;\cos t\;dt$

$$\int \sqrt{4x - x^2}\;dx \;=\; 2\int \cos t\;(\,2\;\cos t\;dt\,) \;=\; 4\int \cos^2 t\;dt$$

$$=\; 2\int [\,\cos(2t) + 1\,]\;dt \;=\; \sin(2t) + 2t + C \;=\; 2\,\sin t\,\cos t + 2t + C\,.$$

$$\int \sqrt{4x - x^2}\;dx \;=\; 2\left(\frac{x-2}{2}\right)\sqrt{1 - (\tfrac{x-2}{2})^2} + 2\,\arcsin(\tfrac{x-2}{2}) + C\,,$$

$$\int \sqrt{4x - x^2}\;dx \;=\; \frac{x-2}{2}\cdot\sqrt{4x - x^2} + 2\,\arcsin(\tfrac{x-2}{2}) + C\,.$$

d) $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,, \qquad D_d = \,]-\infty\,,\,-5\,[\;\cup\;]-1\,,\,+\infty\,[\,.$

Le polynôme x^2+6x+5 est réductible dans $\mathbb{R}[x]$, il est de la forme y^2-1 :

$$d(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2-4}} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(\frac{x+3}{2})^2-1}}\,.$$

Le changement de variable "naturel" consiste à poser $\frac{x+3}{2} = \cosh t\,,\;\; t>0\,.$
Mais $\cosh t \,\in\, [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ il faut donc distinguer les deux cas suivants :

- $\frac{x+3}{2} < -1 \;\;\Leftrightarrow\;\; x < -5$; dans ce cas, on pose $\frac{x+3}{2} = -\cosh t\,,\;\; t>0\,.$

  $x = -2\,\cosh t - 3\,, \quad dx = -2\,\sinh t\,.$

$$\int d(x)\,dx \;=\; \int \frac{\frac{1}{2}}{\sinh t}\,(-2\,\sinh t\,dt) \;=\; \int -dt \;=\; -t + C\,.$$

$$\int d(x)\,dx \;=\; -\operatorname{arg\,cosh}\left(-\tfrac{x+3}{2}\right) + C\,.$$

- $\frac{x+3}{2} > 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; x > -1$; dans ce cas, on pose $\frac{x+3}{2} = \cosh t\,,\;\; t>0\,.$

  $x = 2\,\cosh t - 3\,, \quad dx = 2\,\sinh t\,.$

$$\int d(x)\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sinh t}\,(2\,\sinh t\,dt) = \int dt \;=\; t + C \;=\; \operatorname{arg\,cosh}\left(\tfrac{x+3}{2}\right) + C.$$

En résumé : $\displaystyle\int d(x)\,dx \;=\; \begin{cases} -\operatorname{arg\,cosh}\left(-\frac{x+3}{2}\right) + C & \text{si } \; x < -5 \\ \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C & \text{si } \; x > -1 \end{cases}$

e) $e(x) = \dfrac{x\,(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad D_e = \,]-1\,,\,1\,[\,.$

Posons $x = \cos t\,,\quad t \,\in\,]\,0\,,\,\pi\,[\,. \qquad dx = -\sin t\,dt\,.$

$$\int e(x)\,dx \;=\; \int \frac{t^2\,\cos t}{\sin t}\,(-\sin t\,dt) \;=\; -\int t^2\,\cos t\,dt\,.$$

On intègre $t^2\,\cos t$ par parties en posant $u = t^2$ et $v' = \cos t\,.$

$$\int \underset{\downarrow}{t^2} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}\,dt \;=\; t^2 \cdot \sin(t) - 2\int t \cdot \sin(t)\,dt\,.$$

Et on intègre $t \cdot \sin(t)$ par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin(t)$:

$$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(t)}\,dt \;=\; -t \cdot \cos(t) + \int \cos(t)\,dt \;=\; -t \cdot \cos(t) + \sin(t) + K\,.$$

D'où $$\int e(x)\,dx \;=\; -t^2\,\sin t - 2t\,\cos t + 2\,\sin t + C\,.$$

$$\int e(x)\,dx \;=\; -\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^2 - 2x\,\arccos x + 2\,\sqrt{1-x^2} + C\,.$$

5. Déterminer, sur son domaine de définition, l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x\cdot\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,.$$

- Domaine de définition de f

$$D_f = \left\{\,x\in\mathbb{R}\mid x>0 \quad \text{et} \quad x^2-1>0\,\right\} = \;]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

- Changement de variable

$$x=\cosh t\,,\qquad x>1\,,\qquad t>0\,,\qquad \sqrt{(x^2-1)}=\sinh t\,,\qquad dx=\sinh t\,dt\,.$$

$$\int \frac{x\,\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx \;=\; \int \frac{\cosh t\;\ln(\cosh t)}{\sinh^3 t}\,\sinh t\,dt \;=\; \int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t}\,\ln(\cosh t)\,dt$$

- Intégration par parties

$$u'=\frac{\cosh t}{\sinh^2 t}\,,\qquad u=-\frac{1}{\sinh t}\qquad \text{et}\qquad v=\ln(\cosh t)\,,\qquad v'=\frac{\sinh t}{\cosh t}\,.$$

$$\int \underset{\uparrow}{\frac{\cosh t}{\sinh^2 t}}\cdot \underset{\downarrow}{\ln(\cosh t)}\,dt \;=\; -\frac{\ln(\cosh t)}{\sinh t} + \int \frac{1}{\cosh t}\,dt\,.$$

- $$\int \frac{dt}{\cosh t} \;=\; \int \frac{\cosh t}{\cosh^2 t}\,dt \;=\; \int \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,dt \;=\; \arctan(\sinh t) + C\,.$$

Ou $$\int \frac{dt}{\cosh t} \;=\; \int \frac{2}{e^t+e^{-t}}\,dt \;=\; 2\int \frac{e^t}{(e^t)^2+1}\,dt \;=\; 2\;\arctan(e^t) + C\,.$$

- Conclusion

$$\int \frac{x\,\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx \;=\; -\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2-1)}} + \arctan\sqrt{(x^2-1)} + C\,.$$

6. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\,, \qquad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

- Intégration par parties

$$u = x\,, \qquad u' = 1\,, \qquad v' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\,, \qquad v = \sqrt{1+\sin x}\,.$$

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\, dx \;=\; x\sqrt{1+\sin x} - \int \sqrt{1+\sin x}\, dx$$

- Intégration de $\sqrt{1+\sin x}$ par changement de variable :

$$\sin x = t\,, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad t \in \left]-1\,,\, 1\right], \quad x = \arcsin t\,, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

$$\int \sqrt{1+\sin x}\, dx \;=\; \int \sqrt{1+t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\sqrt{1-t} + K\,.$$

- Conclusion

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\, dx \;=\; x\sqrt{1+\sin x} + 2\sqrt{1-\sin x} + C\,.$$
