Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 1

Applications linéaires : exercice 1

Remarque :
Si on soupçonne que l'application n'est pas linéaire, un contre-exemple est suffisant.

(a) f n'est pas linéaire, car :
$f(\vec{x}+\vec{x}') = (|x+x'|\,;\,0) \neq f(\vec{x})+f(\vec{x}')$ et $f(\vec{x})+f(\vec{x}') = (|x|\,;\,0)+(|x'|\,;\,0) = (|x|+|x'|\,;\,0)$
Contre-exemple :
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad f(\vec{x}+\vec{x}') = (0\,;\,0) \neq (1\,;\,0)+(1\,;\,0) = f(\vec{x})+f(\vec{x}')$$

(b) f est linéaire, car :
- $f(\vec{x}+\vec{x}') = (x+x'\,;\,0) = (x\,;\,0)+(x'\,;\,0) = f(\vec{x})+f(\vec{x}')$
- $f(\lambda\vec{x}) = (\lambda x\,;\,0) = \lambda(x\,;\,0) = \lambda f(\vec{x})$

(c) f n'est pas linéaire, car :
$\sqrt{x+x'} \neq \sqrt{x}+\sqrt{x'}$
Contre-exemple :
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}+\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \neq \sqrt{1}+\sqrt{1} = 2$$

(d) Pour un déterminant d'ordre 2, on a : $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$.
donc l'application n'est pas linéaire. Ou aussi
$f(A+B) = \det(A+B) \neq \det A + \det B$
$f(\lambda A) = \det(\lambda A) \neq \lambda \det A$

(e) Le fait même d'utiliser des termes au carré indique que l'application n'est pas linéaire.
f n'est pas linéaire car $\quad (a+a')^2 \neq a^2 + a'^2$

(f) L'application semble linéaire ... on applique la définition.
$p(x) \in P_2[x] \;\Leftrightarrow\; p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$
$f(P+P') = f((a+a')\,x^2+(b+b')\,x+(c+c')) = (a+a')\,(x+1)^2+(b+b')\,(x+1)+(c+c')$
$f(P)+f(P') = a\,(x+1)^2 + b\,(x+1) + c + a'\,(x+1)^2 + b'\,(x+1) + c' = f(P+P')$
$f(\lambda P) = f(\lambda a\,x^2 + \lambda b\,x + \lambda c) = \lambda a\,(x+1)^2 + \lambda b\,(x+1) + \lambda c = \lambda f(P)$
donc f est linéaire.

(g) L'application ne semble pas linéaire ...

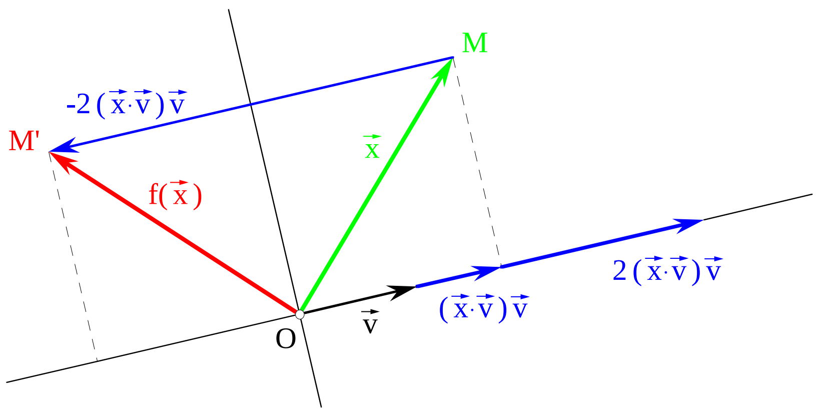
On cherche un contre-exemple simple. $p(x) \in P_2[x] \;\Leftrightarrow\; p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Contre-exemple :
On pose
$$\left.\begin{array}{r} a = b = 0\,,\; c = 1 \\ a' = b' = 0\,,\; c' = 2 \end{array}\right\}$$
D'où
$$\left.\begin{array}{r} f(p) = 1 + 1 = 2 \\ f(p') = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\}$$
Ainsi
$f(p) + f(p') = 2 + 3 = 5$ et $f(p + p') = f(5) = 5 + 1 = 6 \neq 5$
donc f n'est pas linéaire.

Applications linéaires : exercice 2

(a) **Linéarité de f**
Soient $\vec{x}\,,\ \vec{y}$ deux vecteurs du plan et $\lambda\,,\ \mu$ deux scalaires réels.
L'application f est linéaire si et seulement si
$$f\,(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\,) = \lambda\,f\,(\vec{x}\,) + \mu\,f\,(\vec{y}\,)\,.$$
$$\begin{array}{rcl} f\,(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\,) & = & (\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\,) - 2\,[\,(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}\,) \cdot \vec{v}\,]\,\vec{v} \\ & = & \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} - 2\,[\,\lambda\,\vec{x} \cdot \vec{v} + \mu\,\vec{y} \cdot \vec{v}\,]\,\vec{v} \\ & = & \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} - 2\,\lambda\,(\vec{x} \cdot \vec{v}\,)\,\vec{v} - 2\,\mu\,(\vec{y} \cdot \vec{v}\,)\,\vec{v} \\ & = & \lambda\,[\,\vec{x} - 2\,(\vec{x} \cdot \vec{v}\,)\,\vec{v}\,] + \mu\,[\,\vec{y} - 2\,(\vec{y} \cdot \vec{v}\,)\,\vec{v}\,] \\ & = & \lambda\,f\,(\vec{x}\,) + \mu\,f\,(\vec{y}\,)\,. \end{array}$$
L'application f est donc linéaire.

Nature géométrique de f
Soit M un point du plan repéré par le rayon vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant unitaire, le vecteur $(\vec{x} \cdot \vec{v}\,)\,\vec{v}$ est la projection vectorielle de $\vec{x}$ sur $\vec{v}$.
On en déduit la représentation graphique du point M' défini par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM'} = f\,(\vec{x}\,)$.



Le point M' et le symétrique de M par rapport à la droite perpendiculaire à $\vec{v}$ et passant par l'origine.
L'application f et une symétrie dont l'axe est la droite perpendiculaire à $\vec{v}$ et passant par l'origine.

Pour le montrer on va chercher l'image par f de deux vecteurs privilégiés du plan (deux vecteurs du plan liés à la définition de l'application f).

- **Image par f du vecteur $\vec{v}$**

$$f(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{v}\cdot\vec{v})\,\vec{v} = \vec{v} - 2\underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{=1}\vec{v} = -\vec{v}.$$

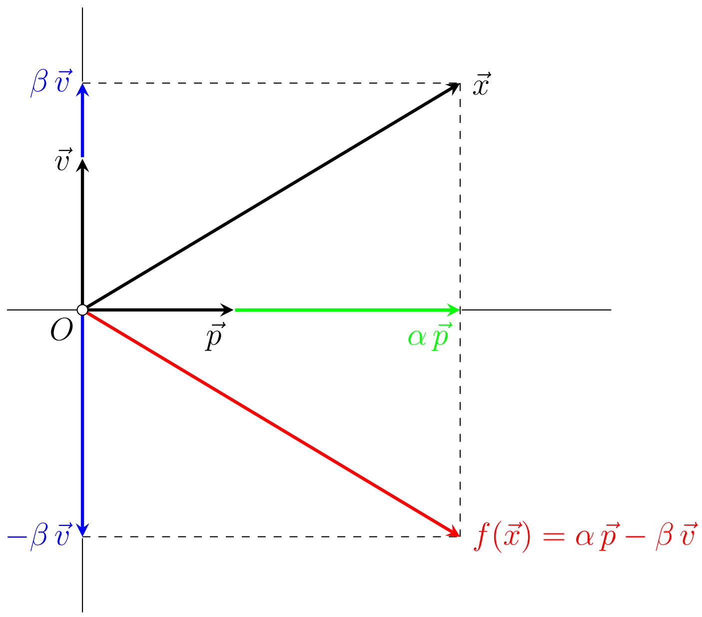
- **Image par f d'un vecteur $\vec{p}$ perpendiculaire à $\vec{v}$**

$$f(\vec{p}) = \vec{p} - 2\underbrace{(\vec{p}\cdot\vec{v})}_{=0}\vec{v} = \vec{p}.$$

- **Image par f d'un vecteur quelconque du plan**
Soit $\vec{x}$ un vecteur quelconque du plan.
Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{v}$ étant linéairement indépendants (ils sont perpendiculaires donc non colinéaires), on peut exprimer le vecteur $\vec{x}$ comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

$$\exists\,\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \vec{x} = \alpha\,\vec{p} + \beta\,\vec{v}.$$

$$f(\vec{x}) = f(\alpha\,\vec{p} + \beta\,\vec{v}) = \alpha\,f(\vec{p}) + \beta\,f(\vec{v}) = \alpha\,\vec{p} - \beta\,\vec{v}.$$



- **Nature géométrique de f**
L'application f est une symétrie d'axe $(O\,,\,\vec{p})$ (droite passant par O et perpendiculaire à $\vec{v}$).

(b) **Image par f de la droite $d = d(P\,,\,\vec{u})$**

Soit M un point courant de la droite d défini par son rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Expression du vecteur $\overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM})$.

$$\overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OP}) + \lambda\,f(\vec{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP'} + \lambda\,f(\vec{u}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La droite d' image par f de la droite d est donc la droite passant par P' est dirigée par le vecteur $f(\vec{u})$.
Il suffit donc de déterminer le vecteur $f(\vec{u})$ dans les trois cas donnés.

Détermination de $f(\vec{u})$ dans le cas $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$f(\vec{u}) = \vec{u} - 2\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{=0}\vec{v} = \vec{u}.$$

L'équation vectorielle de la droite d' image par f de la droite d s'écrit donc

$$\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP}' + \lambda\,\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque : la droite d étant parallèle à l'axe de symétrie, la droite d' l'est aussi.

Détermination de $f(\vec{u})$ dans le cas $\vec{u} \parallel \vec{v}$

Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d. Posons donc $\vec{u} = \vec{v}$.

$$f(\vec{v}) = \vec{v} - 2\underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}_{=\|\vec{v}\|^2=1}\vec{v} = -\vec{v}.$$

L'équation vectorielle de la droite d' image par f de la droite d s'écrit donc

$$\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP}' - \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or $\quad \overrightarrow{OP}' = f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} - 2\left(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}\right)\vec{v}, \quad$ donc

$$\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP} - 2\left(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}\right)\vec{v} - \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP} + \left(-2\,\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} - \lambda\right)\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP} + \mu\,\vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Remarque : la droite d étant perpendiculaire à l'axe de symétrie, la droite image d' coïncide avec la droite d.

Détermination de $f(\vec{u})$ dans le cas $\vec{u} = \vec{v} - 3\vec{w}$, $(\|\vec{w}\| = 4,\ \cos\varphi = \frac{1}{2})$

$$f(\vec{u}) = f(\vec{v} - 3\vec{w}) = (\vec{v} - 3\vec{w}) - 2\left[(\vec{v} - 3\,\vec{w}) \cdot \vec{v}\right]\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\vec{u}) = \vec{v} - 3\,\vec{w} - 2\underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}_{=\|\vec{v}\|^2=1}\vec{v} + 6\,(\vec{w} \cdot \vec{v})\,\vec{v}$$

Or $(\vec{w} \cdot \vec{v}) = \|\vec{w}\|\,\|\vec{v}\|\cos\varphi = 2, \quad$ donc

$$f(\vec{u}) = \vec{v} - 3\,\vec{w} - 2\,\vec{v} + 12\,\vec{v} = 11\,\vec{v} - 3\,\vec{w}.$$

L'équation vectorielle de la droite d' image par f de la droite d s'écrit donc

$$\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OP}' + \lambda\,(11\,\vec{v} - 3\,\vec{w}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Applications linéaires : exercice 4

Remarque :

- $(\alpha f)(\vec{x})$ désigne l'image de $\vec{x}$ par l'application αf.
- $\alpha\,(f(\vec{x}))$ désigne le produit du vecteur $f(\vec{x})$ (de l'espace d'arrivée) par le scalaire α.

(a)
$$\begin{array}{rcll}
\big[(\alpha\, f)\circ g\big](\vec{x}) & = & (\alpha f)(g(\vec{x})) = & \text{définition de } \circ \\
 & = & \alpha\,\Big(\,f\,(g\,(\vec{x}\,)\Big) = & \text{déf du produit d'une applic par un scalaire} \\
 & = & \alpha\,\Big(\,(f\circ g)(\vec{x}\,)\Big) = & \text{définition de } \circ \\
 & = & \big[\alpha\,(f\circ g)\big](\vec{x}) & \text{déf du produit d'une applic par un scalaire}
\end{array}$$

Dans ce cas, la linéarité n'est pas nécessaire, ni pour f ni pour g.

(b)
$$\begin{array}{rcll}
\big[f\circ(\lambda\, g)\big](\vec{x}) & = & f\,\big((\lambda g)(\vec{x})\big) = & \text{définition de } \circ \\
 & = & f\,\big(\lambda\,(g(\vec{x}))\big) = & \text{déf du produit d'une applic par un scalaire} \\
 & = & \lambda\,\big(f(g(\vec{x}))\big) = & f \text{ est linéaire} \\
 & = & \lambda\,((f\circ g)(\vec{x})) = & \text{définition de } \circ \\
 & = & (\lambda\,(f\circ g))(\vec{x}) & \text{déf du produit d'une applic par un scalaire}
\end{array}$$

L'application f doit être linéaire.

(c)
$$\begin{array}{rcll}
\big[(\alpha\, f)\circ(\lambda\, g)\big](\vec{x}) & = & \alpha\,\big(f\circ(\lambda g)\big)(\vec{x}) = & \text{par (a)} \\
 & = & \alpha\,\big(\lambda\,(f\circ g)\big)(\vec{x}) & \text{par (b)} \\
 & = & \alpha\,\lambda\,(f\circ g)(\vec{x}) & \text{déf du produit d'une applic par un scalaire}
\end{array}$$

L'application f doit être linéaire.

Applications linéaires : exercice 5

Remarque :

- $(\alpha f)(\vec{x})$ désigne l'image de $\vec{x}$ par l'application αf.
- $\alpha\,(f(\vec{x}))$ désigne le produit du vecteur $f(\vec{x})$ (de l'espace d'arrivée) par le scalaire α.

(a)
$$\begin{array}{rcll}
(f\circ(g_1+g_2))(\vec{x}) & = & f\big((g_1+g_2)(\vec{x})\big) = & \text{définition de } \circ \\
 & = & f\big(g_1(\vec{x})+g_2(\vec{x})\big) = & \text{déf de la somme de deux applications} \\
 & = & f(g_1(\vec{x}))+f(g_2(\vec{x})) = & f \text{ est linéaire} \\
 & = & (f\circ g_1)(\vec{x})+(f\circ g_2)(\vec{x}) & \text{définition de } \circ \\
 & = & (f\circ g_1+f\circ g_2)(\vec{x}) & \text{déf de la somme de deux applications}
\end{array}$$

L'application f doit être linéaire.

(b) $\begin{aligned}[t] \big[(f_1+f_2)\circ g\big](\vec{x}) &= (f_1+f_2)(g(\vec{x})) = && \text{définition de } \circ \\ &= f_1(g(\vec{x}))+f_2(g(\vec{x})) = && \text{déf de la somme de deux applications} \\ &= (f_1\circ g)(\vec{x})+(f_2\circ g)(\vec{x}) && \text{définition de } \circ \\ &= (f_1\circ g+f_2\circ g)(\vec{x}) && \text{déf de la somme de deux applications} \end{aligned}$

Dans ce cas, la linéarité n'est pas nécessaire, ni pour f ni pour g.

(c) $\begin{aligned}[t] f\circ(\alpha\, g_1+\beta\, g_2) &= f\circ(\alpha\, g_1)+f\circ(\beta\, g_2) && \text{par (a)} \\ &= \alpha\,(f\circ g_1)+\beta\,(f\circ g_2) && \text{par l'exercice 4 (b)} \end{aligned}$

L'application f doit être linéaire.

(d) $\begin{aligned}[t] (\alpha\, f_1+\beta\, f_2)\circ g &= (\alpha\, f_1)\circ g+(\beta\, f_2)\circ g && \text{par (b)} \\ &= \alpha\,(f_1\circ g)+\beta\,(f_2\circ g) && \text{par l'exercice 4 (a)} \end{aligned}$

Dans ce cas, la linéarité n'est pas nécessaire, ni pour f ni pour g.

Applications linéaires : exercice 6

Il faut montrer, pour tout $\vec{x}$, $\vec{y}\in E$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

(i) $g(\vec{x}+\vec{y})=g(\vec{x})+g(\vec{y})$

(ii) $g(\alpha\,\vec{x})=\alpha g(\vec{x})$

Soit f de E vers F linéaire et bijective.

(i) A montrer : $f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})=f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})$
Preuve :
Soient $\vec{a}$, $\vec{b}\in E$ et $\vec{x}$, $\vec{y}\in F$. Comme f est bijective
$f(\vec{a})=\vec{x}\Leftrightarrow f^{-1}(\vec{x})=\vec{a}$
$f(\vec{b})=\vec{y}\Leftrightarrow f^{-1}(\vec{y})=\vec{b}$

Par hypothèse f est linéaire, donc
$f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b})=\vec{x}+\vec{y}$

On applique f^{-1}, d'où

$\vec{a}+\vec{b}=f^{-1}(f(\vec{a})+f(\vec{b}))=f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})$

Or $\vec{a}=f^{-1}(\vec{x})$ et $\vec{b}=f^{-1}(\vec{y})$

$f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})=f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})$

(i) A montrer : $f^{-1}(\alpha\,\vec{x})=\alpha f^{-1}(\vec{x})$
Preuve :
Soit $\vec{a}\in E$ et $\vec{x}\in F$ tels que
$f(\vec{a})=\vec{x}\Leftrightarrow f^{-1}(\vec{x})=\vec{a}$

Par hypothèse f est linéaire, donc
$f(\alpha\,\vec{a})=\alpha f(\vec{a})=\alpha\,\vec{x}$

On applique f^{-1}, d'où

$\alpha\,\vec{a}=f^{-1}(\alpha f(\vec{a}))=f^{-1}(\alpha\vec{x})$

Or $\vec{a}=f^{-1}(\vec{x})$, d'où

$\alpha f^{-1}(\vec{x})=f^{-1}(\alpha\vec{x})$

Applications linéaires : exercice 8

Rappel :
Pour déterminer $\operatorname{Im} f$, on utilise l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ.
Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$, on utilise sa définition.

(a) $\operatorname{Im} f = [f(\vec{u}_1)\,,f(\vec{u}_2)]_{sev}$

- Image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$:

$$f(\vec{u}_1) \;=\; \begin{pmatrix} 2-0 \\ -8+0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_2) \;=\; \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \;=\; -\frac{1}{2}\,f(\vec{u}_1)$$

- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{u}_1)\,,f(\vec{u}_2)]_{sev} \;=\; [f(\vec{u}_2)]_{sev}$

  Base : $(f(\vec{u}_2))$

  $\operatorname{Im} f$ est la droite d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- $\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

  $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; f(\vec{x}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2x-y \\ -8x+4y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Ker est la droite d'équation cartésienne $y = 2x$,
  de vecteur directeur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Base : $(\vec{w})$

- On constate alors que $\vec{a}$, $\vec{c} \in \operatorname{Im} f$ mais $\vec{b} \notin \operatorname{Im} f$; $\vec{d} \in \operatorname{Ker} f$ mais $\vec{e}$, $\vec{f} \notin \operatorname{Ker} f$.

(b) $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)\,,f(\vec{e}_3)]_{sev} \subset \mathbb{R}$

- Image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^3$:

  $f(\vec{e}_1) \;=\; (1+0+0) \;=\; (1) \;=\; 1\cdot\vec{v}$
  $f(\vec{e}_2) \;=\; (0+1+0) \;=\; (1)$
  $f(\vec{e}_2) \;=\; (0+0+1) \;=\; (1)$

- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)]_{sev} \;=\; [\vec{v}]_{sev}$
  Base : $(\vec{v})$
  $\operatorname{Im} f \;=\; \mathbb{R}$

- $\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^3$
  $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; f(\vec{x}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; (x+y+z) = 0$
  $\operatorname{Ker} f$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.
  On détermine deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan pour former une base.

  Soient par exemple : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Base de $\operatorname{Ker} f$: $(\vec{a}\,,\vec{b})$

- $f^{-1}(\{\vec{y}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{y}\} \subset \mathbb{R}^3$
  Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 4\,\vec{v}\}$

  On résoud l'équation $f(\vec{x}) = 4\,\vec{v} \;\Leftrightarrow\; (x+y+z) = (4)$

  $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc le plan d'équation cartésienne $x+y+z=4$.
  Il est parallèle à $\operatorname{Ker} f$.

(c) $f(x) = (3x-y)\,\vec{e}_1 + (-6x+2y)\,\vec{e}_2 + (9x-3y)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3x-y \\ -6x+2y \\ 9x-3y \end{pmatrix}$

- Image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= \begin{pmatrix} 3-0 \\ -6+0 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \\ f(\vec{u}_2) &= \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\, f(\vec{u}_1) \end{aligned}$$
- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{u}_1)\,, f(\vec{u}_2)]_{sev} \ = \ [f(\vec{u}_2)]_{sev}$

  Base : $(f(\vec{u}_2)) = (-\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3)$

  $\operatorname{Im} f$ est la droite d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \ \Leftrightarrow \ f(\vec{x}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 3x-y \\ -6x+2y \\ 9x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\operatorname{Ker} f$ est la droite d'équation cartésienne $y = 3x$, de vecteur directeur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Base : $(\vec{w})$
- Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}\}$

  On constate que $\overrightarrow{OP'} = \vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \in \operatorname{Im} f$, donc l'ensemble $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ n'est pas vide. Autrement dit, l'équation $f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}$ a des solutions.

  $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x-y \\ -6x+2y \\ 9x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc une droite parallèle à $\operatorname{Ker} f$; elle a pour équation $y = 3x - 1$.
- On constate que $\overrightarrow{OM'} \notin \operatorname{Im} f$. Donc $f^{-1}(\{\overrightarrow{OM'}\}) = \varnothing$.

(d) **Première méthode :**

On détermine l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ.

L'application f est linéaire, on a donc

$f(\vec{x}) \ = \ f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3) \ = \ x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) + z\,f(\vec{e}_3) \ = \ a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$

Ce qui permet d'écrire un système de 3 équations à résoudre en $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$ et ainsi de déterminer $\operatorname{Im} f$.

- La donnée permet d'écrire le système suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,f(\vec{e}_1) & + & 2\,f(\vec{e}_2) & + & f(\vec{e}_3) & = & 3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_1) & & & - & f(\vec{e}_3) & = & -6\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2 \\ & & f(\vec{e}_2) & + & f(\vec{e}_3) & = & 3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{array} \right.$$
  dont les solutions sont :

  $f(\vec{e}_1) = 3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2$
  $f(\vec{e}_2) = -6\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2 = -2\,f(\vec{e}_1)$
  $f(\vec{e}_3) = 9\,\vec{u}_1 - 3\,\vec{u}_2 = 3\,f(\vec{e}_1)$
- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)]_{sev} \ = \ [f(\vec{e}_1)]_{sev} = [3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2]_{sev}$

Base : $(3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$

$\operatorname{Im} f$ est la droite d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\vec{x}) = \vec{0}$

  D'où

  $x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) + z\,f(\vec{e}_3) = \vec{0}$

  $x\,f(\vec{e}_1) - 2\,y f(\vec{e}_1) + 3\,z f(\vec{e}_1) = \vec{0}$

  $(x - 2y + 3z) f(\vec{e}_1) = \vec{0}$

  $(x - 2y + 3z)(3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0} \iff x - 2y + 3z = 0 \quad \text{car} \quad 3\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \neq 0.$

  $\operatorname{Ker} f$ est le plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.
  On détermine deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan pour former une base.
  Soient par exemple : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  Base de $\operatorname{Ker} f$: $(\vec{a}\,, \vec{b})$
- Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}\}$

  On constate que $\overrightarrow{OP'} = 12\,\vec{u}_1 - 4\,\vec{u}_2 \in \operatorname{Im} f$, donc l'ensemble $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ n'est pas vide. Autrement dit, l'équation $f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}$ a des solutions.
  On a :
  $f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) + z\,f(\vec{e}_3) =$
  $= x\,(3\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + y\,(-6\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) + z\,(9\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2) =$
  $= (3x - 6y + 9z)\,\vec{u}_1 + (-x + 2y - 3z)\,\vec{u}_2 = 12\,\vec{u}_1 - 4\,\vec{u}_2$
  $\iff$
  $(3x - 6y + 9z - 12)\,\vec{u}_1 + (-x + 2y - 3z + 4)\,\vec{u}_2 = \vec{0} \iff -x + 2y - 3z + 4 = 0$

  $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc un plan parallèle à $\operatorname{Ker} f$; il a pour équation $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Deuxième méthode :
On commence par déterminer l'expression générale de $f(\vec{x})$.
L'application f est linéaire, on a donc

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f(2,\, 2,\, 1) = \begin{pmatrix} 2a + 2b + c \\ 2d + 2e + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(1,\, 0,\, -1) = \begin{pmatrix} a - c \\ d - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(0,\, 1,\, 1) = \begin{pmatrix} b + c \\ e + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où les deux systèmes à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a+2b+c & = & 3 \\ a-c & = & -6 \\ b+c & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2d+2e+f & = & -1 \\ d-f & = & 2 \\ e+f & = & -1 \end{array}\right.$$

On obtient : $a=3\,,\ b=-6\,,\ c=9\,,\ d=-1\,,\ e=2\,,\ f=-3.$
Finalement :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x-6y+9z \\ -x+2y-3z \end{pmatrix} \end{array}$$

- Image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\vec{e}_1) \ = \ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_2) \ = \ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ -2\ f(\vec{e}_1)$$

$$f(\vec{e}_3) \ = \ \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \ = \ 3\ f(\vec{e}_1)$$

- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)\,, f(\vec{e}_2)\,, f(\vec{e}_3)]_{sev} \ = \ [f(\vec{e}_1)]_{sev} \subset \mathbb{R}^2$

  Base : $(f(\vec{e}_1)) = (3\,\vec{u}_1 - \,\vec{u}_2)$

  $\operatorname{Im} f$ est la droite d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ = \ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \ \Leftrightarrow\ f(\vec{x}) = \vec{0} \subset \mathbb{R}^3 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 3x-6y+9z \\ -x+2y-3z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\operatorname{Ker} f$ est le plan d'équation cartésienne $\ x-2y+3z=0\,.$
  On détermine deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan pour former une base.

  Soient par exemple : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Base de $\operatorname{Ker} f$: $(\vec{a}\,,\vec{b})$

- Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}\} \subset \mathbb{R}^2$

  On constate que $\overrightarrow{OP'} = 12\,\vec{u}_1 - 4\,\vec{u}_2 \in \operatorname{Im} f$, donc l'ensemble $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ n'est pas vide. Autrement dit, l'équation $f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}$ a des solutions.

$$f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x-6y+9z \\ -x+2y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

  $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc un plan parallèle à $\operatorname{Ker} f$; il a pour équation $x-2y+3z-4=0\,.$

(e) **Première méthode**

On détermine l'image des vecteurs de la base de l'ensemble de départ.
L'application f est linéaire, on a donc
$f(\vec{x}) \ = \ f(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3) \ = \ x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) + z\,f(\vec{e}_3) \ = \ a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$

On remarque que les deux premiers vecteurs-images sont linéairement indépendants et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que nécessairement $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Ce qui est confirmé par les calculs qui suivent.

- La donnée permet d'écrire le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} f(\vec{e}_1) & + & 2\,f(\vec{e}_2) & & & = & \vec{u}_1 + 4\,\vec{u}_2 \\ -f(\vec{e}_1) & + & 3\,f(\vec{e}_2) & & & = & -\,\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ -f(\vec{e}_1) & + & 3\,f(\vec{e}_2) & + & f(\vec{e}_3) & = & \vec{0} \end{array}\right.$$

dont les solutions sont :

$f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2$
$f(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$
$f(\vec{e}_3) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = f(\vec{e}_1) - 3\,f(\vec{e}_2)$

- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)\,,f(\vec{e}_3)]_{sev} \;=\; [f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)]_{sev} \;=\; [\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2\,;\,\vec{u}_2]_{sev} \;=\; \mathbb{R}^2$

Base : $(\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2\,;\,\vec{u}_2)$

On peut aussi choisir comme base, la base canonique $(\vec{u}_1\,;\,\vec{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

- $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; f(\vec{x}) = \vec{0}$

D'où

$x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) + z\,f(\vec{e}_3) \; = \vec{0}$

$x\,(\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2) + y\,\vec{u}_2 + z\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0}$

$(x+z)\,\vec{u}_1 + (2x+y-z)\,\vec{u}_2 = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lcc} x+z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right.$ car $\vec{u}_1\,,\vec{u}_2$ lin. ind.

Géométriquement, ce système est l'intersection de deux plans. Les solutions appartiennent à une droite passant par 0. On détermine ses équations paramétriques en cherchant un point ; par exemple : $M(-1\,;3\,;1)$.
$\operatorname{Ker} f$ est donc la droite $(O,\,\overrightarrow{OM})$ dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base de $\operatorname{Ker} f$: $(\vec{a})$

- Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}\} \subset \mathbb{R}^3$

On constate que $\overrightarrow{OP'}$ est une droite dans $\mathbb{R}^2$ d'équations paramétriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \;\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\operatorname{Im} f \;=\; \mathbb{R}^2$, l'ensemble $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ n'est pas vide. Autrement dit, l'équation $f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}$ a des solutions.
$f(\vec{x}) = (x+z)\,\vec{u}_1 + (2x+y-z)\,\vec{u}_2 = (1+\lambda)\,\vec{u}_1 + (4+\lambda)\,\vec{u}_2$
$\Leftrightarrow$
$(x+z-1-\lambda)\,\vec{u}_1 + (2x+y-z-4-\lambda)\,\vec{u}_2 = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lcc} x+z-1-\lambda & = & 0 \\ 2x+y-z-4-\lambda & = & 0 \end{array}\right.$

On élimine le paramètre λ d'entre les deux équations :
$\left\{\begin{array}{lcc} x+z-1 & = & \lambda \\ 2x+y-z-4-(x+z-1) & = & 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x+y-2z-3=0$

$f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc un plan ; il a pour équation $x+y-2z-3=0$.

Deuxième méthode

On détermine l'expression générale de $f(\vec{x})$.

L'application f est linéaire, on a donc

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f(1,\,2,\,0) = \begin{pmatrix} a+2b \\ d+2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(-1,\,3,\,0) = \begin{pmatrix} -a+3b \\ -d+3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(-1,\,3,\,1) = \begin{pmatrix} -a+3b+c \\ -d+3e+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où les deux systèmes à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+2b+ & = & 1 \\ -a+3b & = & -1 \\ -a+3b+c & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} d+2e & = & 4 \\ -d+3e & = & 1 \\ -d+3e+f & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient : $a=1\,,\ b=0\,,\ c=1\,,\ d=2\,,\ e=1\,,\ f=-1$.

Finalement :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix} \end{array}$$

- Image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^3$:

  $$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $$f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(\vec{e}_1) - 3\,f(\vec{e}_2)$$

- $\operatorname{Im} f = [f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)\,,f(\vec{e}_3)]_{sev} = [f(\vec{e}_1)\,,f(\vec{e}_2)]_{sev} = [\vec{u}_1+2\,\vec{u}_2\,;\,\vec{u}_2]_{sev} = \mathbb{R}^2$

  Base : $(\vec{u}_1+2\,\vec{u}_2\,;\,\vec{u}_2)$

  On peut aussi choisir comme base, la base canonique $(\vec{u}_1\,;\,\vec{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
- $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Les solutions de ce système appartiennent à une droite passant par 0. On détermine ses équations paramétriques en cherchant un point ; par exemple : $M(-1\,;3\,;1)$.

  $\operatorname{Ker} f$ est donc une droite dont les équations paramétriques sont :

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base de $\operatorname{Ker} f$: $(\vec{a})$

- Par définition : $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}\} \subset \mathbb{R}^2$

  On constate que $\overrightarrow{OP'}$ est une droite dans $\mathbb{R}^2$ d'équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Comme $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, l'ensemble $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ n'est pas vide. Autrement dit, l'équation $f(\vec{x}) = \overrightarrow{OP'}$ a des solutions.

  $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 4+\lambda \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+z & = & 1+\lambda \\ 2x+y-z & = & 4+\lambda \end{cases}$

  En éliminant le paramètre λ d'entre les deux équations, on obtient : $x+y-2z-3=0$

  $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ est donc un plan ; il a pour équation $x+y-2z-3=0$.

Applications linéaires : exercice 10

(a) L'application f est linéaire si et seulement si

$$\forall\, X\,,\, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})\,,\ \forall\, \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda\, X + \mu\, Y) = \lambda\, f(X) + \mu\, f(Y)\,.$$

On calcule

$f(\lambda\, X + \mu\, Y) = A(\lambda\, X + \mu\, Y) = \lambda\, AX + \mu\, AY = \lambda\, f(X) + \mu\, f(Y)\,.$

f est bien linéaire.

(b) **Première méthode**

La base usuelle de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ est la base $B = (E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4)$ définie par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Image par f de E_1.

$$f\,(E_1) = A \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Image par f de E_2.

$$f\,(E_2) = A \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Image par f de E_3.

$$f\,(E_3) = A \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Image par f de E_4.

$$f\,(E_4) = A \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode

On calcule l'image par f d'une matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f(X) = A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ 4x - 2z & 4y - 2t \end{pmatrix}.$$

$$= x \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Or f est une application linéaire, donc quels que soient x, y, z, t réels, on a :

$$f(X) = f \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = f(x \cdot E_1 + y \cdot E_2 + z \cdot E_3 + t \cdot E_4)$$

$$= x \cdot f(E_1) + y \cdot f(E_2) + z \cdot f(E_3) + t \cdot f(E_4).$$

Par identification, on en déduit l'image par f des vecteurs de base :

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(E_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) **Base et dimension de $\mathrm{Im}\, f$**

$$\mathrm{Im}\, f = [\, f(E_1),\ f(E_2),\ f(E_3),\ f(E_4) \,]_{\text{sev}}.$$

Or ces quatre générateurs de $\mathrm{Im}\, f$ sont linéairement dépendants :

$$f(E_1) = -2\, f(E_3) \qquad \text{et} \qquad f(E_2) = -2\, f(E_4).$$

Donc $\mathrm{Im}\, f = [\, f(E_3),\ f(E_4) \,]_{\text{sev}}$.

De plus $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sont linéairement indépendants car ils ne sont pas colinéaires.

Donc $(\, f(E_3),\ f(E_4) \,)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

$\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 2.

Base et dimension de $\ker f$

A partir de la définition de $\mathrm{Ker}\, f$, on détermine l'expression générale des matrices de $\mathrm{Ker}\, f$, puis on en déduit une base.

$$\ker f = \{\, X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(X) = 0 \,\}.$$

Résolution de l'équation $f(X) = 0$.

$$f(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ 4x - 2z & 4y - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \\ 4x - 2z = 0 \\ 4y - 2t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 2x \\ t = 2y \end{cases}$$

Expression générale des matrices X de $\ker f$.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x\,,\, y \in \mathbb{R}\,.$$

Les deux matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des générateurs de $\ker f$:

$$\ker f = \left\{ X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists\, x\,,\, y \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \right\} = [\,U\,,\; V\,]_{\text{sev}}\,.$$

Les deux générateurs U et V sont linéairement indépendants car ils ne sont pas colinéaires.
Donc $(\,U\,,\; V\,)$ est une base de $\ker f$.
$\ker f$ est de dimension 2.

Remarque :
L'espace vectoriel de départ de l'application f et l'espace vectoriel d'arrivée coïncident.
De plus, dans ce cas particulier, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont égaux.
On peut donc en déduire que l'application linéaire $f^2 = f \circ f$ est l'application identiquement nulle.

$$\begin{array}{rccc} f^2 \;:\; & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Applications linéaires : exercice 11

(a) **Rappel :** n vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.
Preuve :
Par hypothèse $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ... , $\vec{v}_n$ étant linéairement dépendants, on peut supposer par exemple, que $\vec{v}_n \neq \vec{0}$ et qu'il est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ... , $\vec{v}_{n-1}$, c'est-à-dire

$\vec{v_n} = \alpha_1\,\vec{v}_1 + \alpha_2\,\vec{v}_2 + ... + \alpha_{n-1}\,\vec{v}_{n-1}$

D'où

$$\begin{aligned} f(\vec{v_n}) &= f(\alpha_1\,\vec{v}_1 + \alpha_2\,\vec{v}_2 + ... + \alpha_{n-1}\,\vec{v}_{n-1}) = \\ &= \alpha_1\,f(\vec{v}_1) + \alpha_2\,f(\vec{v}_2) + ... + \alpha_{n-1}\,f(\vec{v}_{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi $f(\vec{v_n})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\vec{v}_1)$, ..., $f(\vec{v}_{n-1})$.
Par définition ces n vecteurs sont donc linéairement dépendants.

Rappel : L'énoncé contraposé de $(A \Rightarrow B)$ est $(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$.
Ces deux énoncés ont même valeur de vérité.

Soient E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

si $f(\vec{v}_1),\ f(\vec{v}_2),\ \ldots, f(\vec{v}_n)$ sont linéairement indépendants
alors
$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs de E linéairement indépendants.

Cet énoncé est donc vrai.

(b) **Rappel :** n vecteurs $\vec{a}_i$ sont linéairement indépendants si et seulement
$\alpha_1\,\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\,\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$
Soient E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire et injective de E vers F.

(1) **Preuve de l'énoncé direct :**
Hypothèse : $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linéairement indépendants
Conclusion : $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ linéairement indépendants.

Preuve :
Soient
$\alpha_1\,f(\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_n\,f(\vec{v}_n) = \vec{0}$
$\Rightarrow$
$f(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n) = \vec{0}$ car f est linéaire.

Donc
$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n \in \ker f$

Or f est injective, donc $\ker f = \{\vec{0}\}$
Ainsi
$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$
Mais par hypothèse les vecteurs sont linéairement indépendants,
donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Finalement
$\alpha_1\,f(\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_n\,f(\vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$,
ces vecteurs sont donc bien linéairement indépendants.

(2) **Preuve de la réciproque :**
Hypothèse : $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ linéairement indépendants
Conclusion : $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linéairement indépendants.

Preuve :
C'est l'énoncé contraposé de la partie (a) de l'exercice.
(Remarque : ce sens ne nécessite pas que f soit injective)