Contrôle d'analyse I N°2

Durée : 1 heure 40 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. On considère la suite (a_n) définie par son terme général

$$a_n = \frac{1+3+9+\cdots+3^{n+1}}{2-3^n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer, si elle existe, la limite de cette suite. 2 pts

2. On considère la fonction f définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2[\pi(x-1)]}{1+\cos(\pi x)} & \text{si } \ x<1 \\ -2 & \text{si } \ x=1 \\ x-1-\sqrt{4+(x-1)^2\cdot\sin(\frac{1}{x-1})} & \text{si } \ x>1 \end{cases}$$

Remarque : la fonction f est continue en $x_0 = 1$.

Déterminer, à l'aide de la définition, si f est dérivable en $x_0 = 1$. 5 pts

3. Soit f une fonction dérivable en x_0 telle que $f(x_0) = 2$.
Pour l'accroissement $\Delta x = \frac{1}{10}$, l'approximation linéaire de $f\,(x_0+\Delta x)$ en x_0 vaut $A = \frac{29}{15}$.
Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+\sqrt{x^2+5}}$.
Calculer l'approximation linéaire de $g\circ f\,(x_0+\Delta x)$ en x_0. 4 pts

4. Soit Γ la courbe du plan définie par la relation implicite

$$\Gamma: \quad \sin(x\cdot y^2) + 2\ \mathrm{tg}(x+y) = 2\,.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point P d'ordonnée nulle et d'abscisse $x_P \in \,]\,0\,,\,3\,[$. 4 pts