6 juin 2011

Contrôle d'analyse II no 4

Durée: 1 heure 40'

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ☐

1. Soient $Q(z) = z^3 - z^2 + 2$ et $R(z) = z^3 - iz + 1 - i$ deux polynômes.

   a) Déterminer le PGCD de Q(z) et R(z) ;

   b) Trouver les racines de R(z) ;

   c) Déterminer P(z), le polynôme normalisé du degré le plus petit possible vérifiant :

   - P(z) est divisible par R(z) ;
   - P(z) est à coefficients réels ;

   d) Calculer le produit des racines de P(z) et le reste de la division de P(z) par $(z - 1 + i)$. 4½ pts

2. A l'aide des développements limités, calculer les deux limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 2x - \cos x)\cdot \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ 3 pts

3. Soit la fonction $h(x) = \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{1+4x}\right) + 2x^2$

   a) Etablir le développement limité à l'ordre 3 de h(x) au voisinage de $x_0 = 0$.

   Remarque : Utiliser la formule de Taylor pour le d.l. de Arctg(1 + x).

   b) Donner l'équation de la tangente t en $x_0 = 0$ à la courbe représentative Γ de h.

   c) Représenter la courbe Γ au voisinage de $x_0 = 0$. 4 pts

4. a) Soit la transformation affine donnée par : $f(z) = az + b$; $a, b \in \mathbb{C}$

   Déterminer les paramètres a et b pour que **f** représente une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ autour du point $z_0 = 2i$.

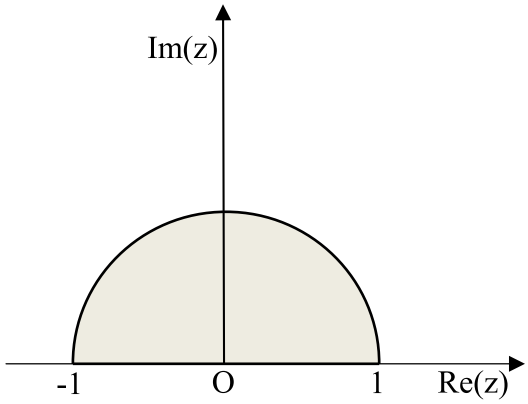
   b) On considère l'inversion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$h(z) = w = \frac{1}{z}$$

☞ *[Tourner s.v.p.]*

où $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$)

Représenter graphiquement (hachurer), avec soin, l'image $\mathbb{D}'$ du domaine $\mathbb{D}$ limité par le demi-cercle supérieur γ d'équation: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et la droite Re(z).



3½ pts

Formulaire pour le contrôle n° 4

Dérivées :

$$(\text{Arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Développements limités (autour de x = 0) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1})$$

où α peut être rationnel et négatif