APPLICATION DES MATHEMATIQUES : Contrôle N° 1

Durée : 1 heure 45 minutes - Barème : 20 points donnent la note 6

NOM : ______________________

GROUPE

PRENOM : ______________________

1. On considère la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$Q_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i) \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ ; } (Q_n \text{ est de degé } n)$$

a) Ecrire $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ et $Q_3(x)$.

On note $S(n,k)$ le coefficient de x^k dans $Q_n(x)$, par exemple $S(1,1)=1$ et $S(1,0)=0$ (étant entendu que $S(n,k)=0$ si $k>n$).

b) Que valent les coefficients $S(n,0)$ et $S(n,n)$ pour $n \geq 1$?

c) Montrer que $S(n,1) = (n-1)!$ (pour $n \geq 1$).

d) Exprimer $Q_{n+1}(x)$ en fonction de $Q_n(x)$ et de $(x+n)$.

e) Démontrer la relation

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + nS(n,k), \quad k \geq 1,\ n \geq 1$$

f) Montrer que :

$$S(n+1,2) = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$5\frac{1}{2}$pts

2. a) Pour chacun des 2 ensembles suivants, montrer s'il est minoré, majoré, s'il possède une borne inféreure, une borne supérieure, un minimum, un maximum.

i) $E = \left\{ y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1,1[\right\}$ *ii)* $F = \left\{ y = 1 + \mathrm{tg}^2(x), \quad x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\right\}$

b) Montrer que $\frac{1}{3}$ est un minorant de

$$G = \left\{ \frac{(3n)!(n+1)}{(3n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

et que $\inf(G) = \frac{1}{3}$.
G a-t-il un minimum ?

$5\frac{1}{2}$pts

Tourner la page s.v.p.

3. Le tableau suivant représente une distribution statistique d'un échantillon de taille $N = 80$ d'un caractère X continue, les valeurs prises par la variable sont divisées en classes :

Classes de X	Effectifs n_i	Classes de Y	Centre de classes c_i	Valeurs pondérées $n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[33, 35[$	1				
$[35, 37[$	2				
$[37, 39[$	8				
$[39, 41[$	13				
$[41, 43[$	25				
$[43, 45[$	16				
$[45, 47[$	13				
$[47, 49[$	2				
Total	80				

a) Déterminer la médiane.

b) A l'aide du changement de variable $Y = \dfrac{X - 42}{2}$ et en complétant les 3 premières colonnes vides du tableau, calculer la moyenne $\overline{x}$.

c) A l'aide du même changement de variable, et en complétant la dernière colonne du tableau, calculer l'EQM (équart quadratique moyen) et la variance de X. **5pts**

4. Dans un groupe de 10 femmes et 8 hommes, on doit former un comité de 3 femmes et 3 hommes.

a) Déterminer le nombre de comités différents qu'on peut former.

b) Combien y a-t-il de comités différents si 2 des hommes refusent d'être ensemble dans le comité ?

c) Même question que b) si 2 des femmes refusent d'être ensemble dans le comité ?

d) Même question si 1 homme et 1 femme refusent d'être ensemble dans le comité ? **5pts**