(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	$4\frac{1}{2}$	
2	4	
3	7	
4	$4\frac{1}{2}$	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 4½ points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{v}$ les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel m

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3m \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} m \\ m-3 \\ m-2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -m+3 \\ m \end{pmatrix} \; et \; \vec{v} = \begin{pmatrix} m-5 \\ 8 \\ m+3 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils linéairement dépendants ?

(b) Soit $W = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_{sev}$.
Dans chaque cas où $\dim W < 3$, donner une base et la dimension de W. Déterminer également si $\vec{v} \in W$. Si c'est le cas, donner les composantes de $\vec{v}$ relativement à la base choisie de W.

Réponses :

(a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linéairement dépendants ssi $\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ ssi $m \in \{-2; 1\}$

(b)
- Si $m = 1$: $W = \left[\vec{c}\right]_{\text{sev}}$, la base est $\mathcal{B} = (\vec{c})$ et $\dim W = 1$, $\vec{v} = (4)$
- Si $m = -2$: $W = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}}$, $\mathcal{B} = (\vec{b}, \vec{c})$ et $\dim W = 2$, $\vec{v} \notin W$

Question 2 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soient A et B deux matrices fixées de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et qui vérifient la relation suivante

$$A + B + A^2B + AB^2 = 4I_n$$

(a) Montrer que la matrice $I_n + AB$ est inversible.
En déduire une expression de son inverse.

(b) On suppose A inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{5}B$.
Calculer le déterminant de la matrice $A + B$.

Réponses :

(a) $I_n + AB$ a pour inverse : $4^{-1}(A + B)$

(b) Il y a deux possibilités.
$\det(A + B) = 1$ si n est pair
$\det(A + B) = -1$ si n est impair

Question 3 (à 7 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soient les matrices $A \in \mathbb{M}\left((n+1) \times n, \mathbb{R}\right)$, $B, C \in \mathbb{M}\left(n \times n, \mathbb{R}\right)$ $(\det B \neq 0)$

On considère l'équation matricielle suivante

$$A\, B^{-1}\, X\, C = 0$$

(a) Déterminer, en le justifiant, le nombre de lignes et de colonnes de la matrice X et de la matrice nulle 0.

Pour la suite du problème on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer l'ensemble noté S des solutions de cette équation. Cet ensemble étant un espace vectoriel (ne pas le montrer), en donner une base et sa dimension.

(c) Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}\,(2 \times 2,\, \mathbb{R})$ engendré par

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ N = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base et la dimension de W.

(d) Montrer que S est un sous-ensemble de W.

Réponses :

(a) X a n lignes et n colonnes.
0 a $n+1$ lignes et n colonnes

(b) $S = \ \{X \in \mathbb{M}\,(2 \times 2,\, \mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix} \}$

Générateurs de S

$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

C'est une base de S, la dimension est deux.

(c) Une base de W est $\mathcal{B} = (K,\, L,\, M)$ et dim $W = 3$.

Question 4 (à 4½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soient $P_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et W un sous-espace vectoriel de $P_n[x]$.
On considère l'ensemble suivant :

$$V = \{\ p(x)\ \in\ P_n[x] \mid p(x) = u''(x)\,(x^2 - 2),\ \ u(x) \in W\ \}$$

où $u''(x)$ est le polynôme dérivé deuxième de $u(x)$.

(a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $P_n[x]$.

Pour la suite, on pose $n = 3$ et soit $\mathcal{B}_W\,(x^3 + x^2,\, x^2 + 1)$ une base de W.

(b) Déterminer pour quelle valeur de a le polynôme $q(x) = (a+2)x^3 - ax^2 + 1$ appartient à W.
Donner les composantes de $q(x)$ relativement à la base $\mathcal{B}_W$.

(c) Déterminer une base et la dimension de V.

Réponses :

(a) On applique le critère du sev.

(b) $a = -3/2$

$p(x) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$

(c) Expression générale d'un élément de V :

$p(x) = a(6x^3 + 2x^2 - 12x - 4) + b(2x^2 - 4) =$

$= a\, c(x) + b\, d(x)$

Les polynômes $c(x)$ et $d(x)$ sont générateurs et linéairement indépendants donc ils forment une base de V.

La dimension de V est 2.