Série 23

1. Réduire à la forme canonique, puis représenter les coniques définies par les équations suivantes :

a) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0\,,$

b) $41x^2 - 24xy + 34y^2 + 25 = 0\,,$

c) $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0\,,$

d) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0\,.$

2. Montrer que les coniques définies par les équations ci-dessous sont dégénérées. Puis déterminer les équations des droites de dégénérescence.

a) $6x^2 - xy - 12y^2 + 2x + 31y - 20 = 0\,,$

b) $x^2 - 6xy + 10y^2 + 10x - 32y + 26 = 0\,.$

3. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 18y - 3 = 0$ dans le repère usuel $R_e = (O\,,\, \vec{e}_1\,,\, \vec{e}_2)\,.$

a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et préciser le nouveau repère $R_u\,.$
Représenter $\mathcal{C}$ dans $R_e\,.$

b) Dans $R_u\,,$ calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le diamètre parallèle à $\vec{e}_1\,.$

4. Soient $A\,(2\,,\,0)$ et $B\,(-2\,,\,0)$ les sommets d'un triangle $ABC\,.$
Le troisième sommet C décrit la droite $x + y - 3 = 0\,.$

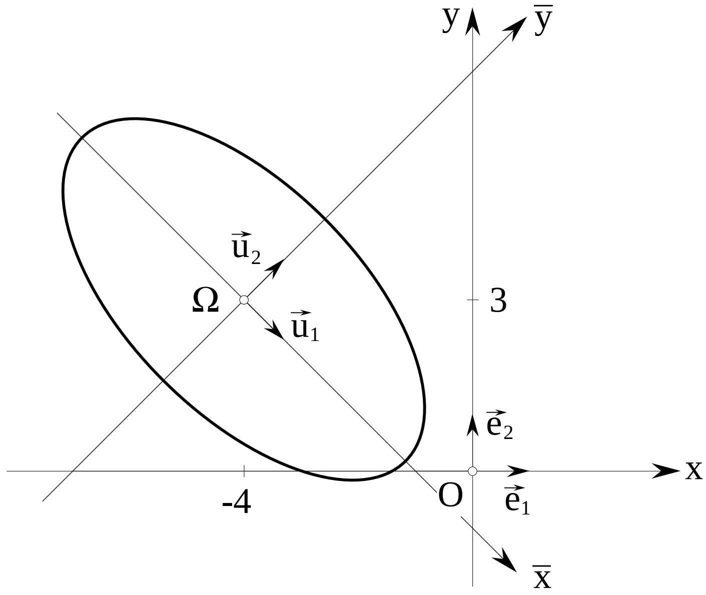
a) Déterminer l'équation du lieu de l'orthocentre du triangle $ABC\,.$

b) Montrer que ce lieu est une hyperbole et déterminer l'équation cartésienne de ses asymptotes.

Réponses de la série 23

1. a) Ellipse d'équation réduite : $\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 16 = 0$.

Grand axe : $x + y + 1 = 0$, petit axe : $x - y + 7 = 0$.

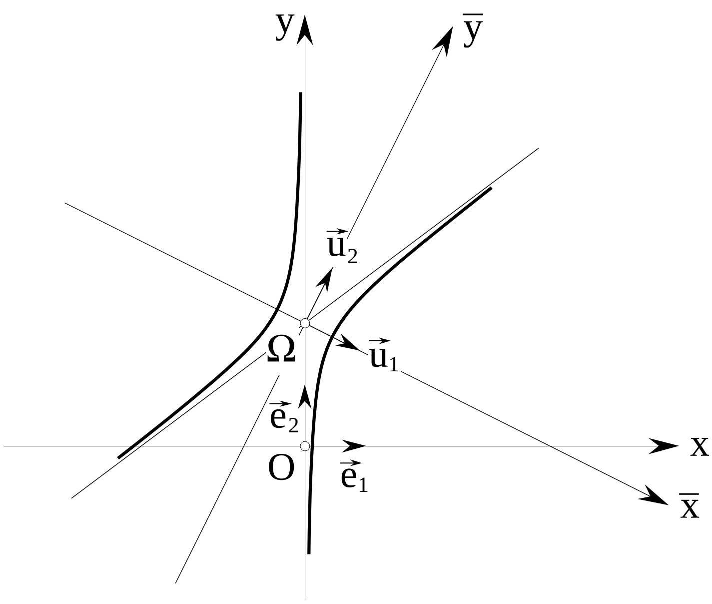


b) Ellipse imaginaire d'équation réduite : $\bar{x}^2 + 2\,\bar{y}^2 + 1 = 0$.

c) Hyperbole d'équation réduite : $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 1 = 0$.

Axe réel : $x + 2y - 4 = 0$, axe imaginaire : $2x - y + 2 = 0$.

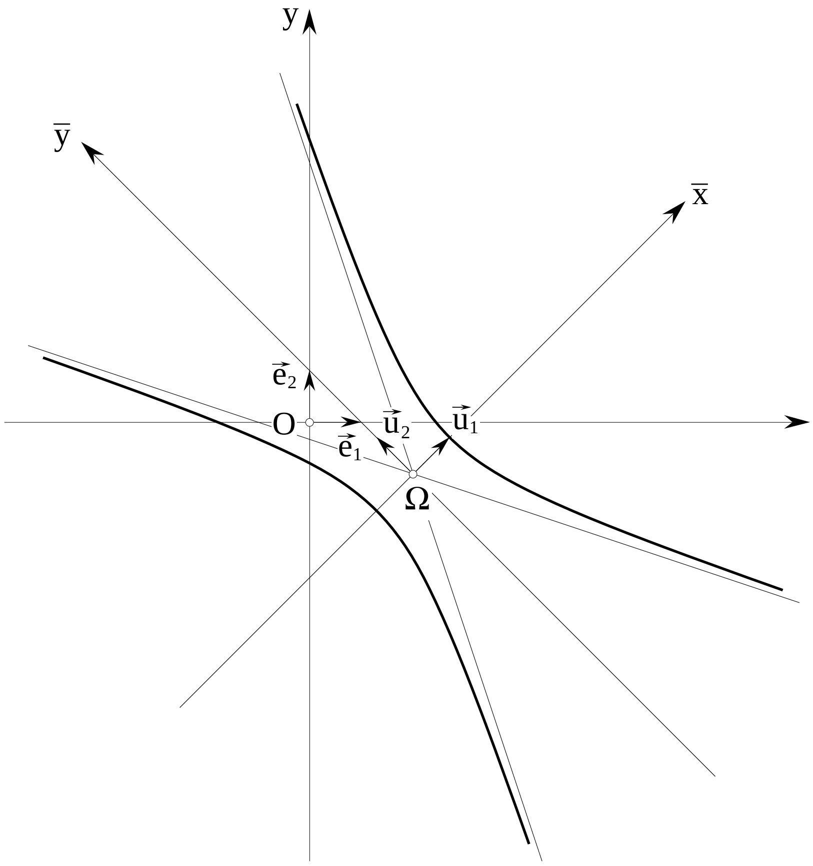
Asymptotes : $x = 0$, et $3x - 4y + 8 = 0$.



d) Hyperbole d'équation réduite : $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 4 = 0$.

Axe réel : $x - y - 3 = 0$, axe imaginaire : $x + y - 1 = 0$.

Asymptotes : $x + 3y + 1 = 0$, et $3x + y - 5 = 0$.



2. a) Deux droites réelles d'équations $3x + 4y - 5 = 0$ et $2x - 3y + 4 = 0$.

b) Deux droites imaginaires conjuguées d'équations
$x - (3+i)\,y + 5 + i = 0$ et $x - (3-i)\,y + 5 - i = 0$.

3. a) Equation réduite de $\mathcal{C}$: $2\,\bar{x}^2 + 8\,\bar{y}^2 - 32 = 0$.

$R_u = (\Omega\,,\,\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$, avec $\Omega\,(-2\,,\,3)$, $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $A\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\,,\,-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ et $B\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\,,\,\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

4. Equation du lieu de l'orthocentre du triangle ABC : $x^2 - x\,y + 3y - 4 = 0$.

$\delta = -\frac{1}{4} < 0$ et $\Delta = -\frac{5}{4} \neq 0$: le lieu est une hyperbole.

Equation cartésienne des asymptotes : $x = 3$ et $x - y + 3 = 0$.