Série 6

Exercice supplémentaire

On considère la suite (a_n) définie par $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$.

2. En déduire que cette suite est croissante et majorée.

3. Soit (e_n) la suite définie par $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Elle converge vers e.

Montrer que la suite (a_n) converge aussi vers e.

---

1. On utilise le développement du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

2. i) On montre que la suite (a_n) est croissante en explicitant a_{n+1} à l'aide de la relation établie au point **1.** et en le comparant à l'expression de a_n.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{n+1} > a_n$, la suite (a_n) est strictement croissante.

ii) Montrons que (a_n) est majorée par e.

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)}_{<1}\cdots \underbrace{\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right)}_{<1} < 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e\,,$$

car la suite (e_n) définie par $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est strictement croissante et converge vers e.

iii) La suite (a_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. On note a sa limite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = a\,.$$

3. On a montré que la suite (a_n) est majorée par e. Pour montrer que $a=e$, il suffit donc de montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n \geq e$.

La suite (a_n) est strictement croissante et converge vers a, donc $a > a_N$, $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$.

Or $\quad a_N = 1+\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\cdot \left(1-\tfrac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{N}\right)$

et en diminuant le nombre de termes (positifs) de la somme, on a pour tout $n<N$:

$$a_N > 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot \left(1-\tfrac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{N}\right).$$

Cette somme dépend de n et de N, $(n, N\in\mathbb{N}^*,\ n<N)$, on la note $S_n(N)$ et on a :

$$\lim_{N\to\infty} S_n(N) = 1+\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{N}\right)}_{\to 1}\cdots \underbrace{\left(1-\tfrac{k-1}{N}\right)}_{\to 1} = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e_n\,,$$

avec $\lim_{n\to\infty} e_n = e$. On en déduit que $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq e$.

En conclusion :

$$\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ est majorée par } e : \quad a_n < e\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^* \\ \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \geq e \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = e\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e\,.$$