1.3.19

Série 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

(a) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

(b) $\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$

(c) $\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1$

i) pour $a = 2$

ii) pour $a = \frac{1}{2}$

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}\,, \quad x > 0$

(b) $x\,(x^x) = x^{6/x}\,, \quad x > 0$

3. Déterminer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

(a) $a(x) = \tan(a^x)\,,$

(b) $b(x) = e^{1/\ln x}\,,$

(c) $c(x) = \ln(\ln x)\,,$

(d) $d(x) = \arcsin(e^x)\,,$

(e) $x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4})\,,$

(f) $f(x) = x^{\sin x}\,,$

(g) $g(x) = (\sin x)^x\,,$

(h) $h(x) = x^{1/x}\,,$

(i) $i(x) = x^{1/\ln(x^2)}\,.$

4. On considère les courbes Γ_a (dépendant d'un paramètre a > 1) : $y = \dfrac{1}{a-1}(\ln x)^a$

(a) Déterminer les points d'inflexion de Γ_a lorsque $a \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $x_a > 1$ les abscisses de ces points et $y_a = f(a)$ leur ordonnée.
Pour quel réel a $> 1\,, y_a$ est-il un minimum ?

5. Voici une nouvelle caractérisation du nombre e.

(a) A l'aide d'un argument graphique, démontrer la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(X+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}\,, \qquad \forall\, x > 0\,.$$

(b) A l'aide du théorème des deux gendarmes, déduire de l'encadrement précédent, le résultat suivant :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Solutions

S1 (a) $S =]-3;6]$.

(b) $S =]3;4[\cup]12;\infty[$.

(c) (i) $S = [2;4[$.

(ii) $S =]-2;0]$.

S2 (a) $S = \{1,4\}$.

(b) $S = \{1,2\}$.

S3 (a) $a'(x) = a^x \ln a[1+\tan^2(a^x)]$,

(b) $b'(x) = -\frac{e^{1/\ln x}}{x\ln^2 x}$,

(c) $c'(x) = \frac{1}{x\ln x}$,

(d) $d'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,

(e) $e'(x) = \sqrt{2}\sin\ln x$,

(f) $f'(x) = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right] x^{\sin x}$,

(g) $g'(x) = [x\cot x + \ln(\sin x)]\sin^x x$,

(h) $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} x^{1/x}$,

(i) $i'(x) = 0$.

S4 (a) le point $(1;0)$, pour $a \geq 3$ et a impair, et les points $(e^{a-1};(a-1)^{a-1})$

(b) $a = 1 + \frac{1}{e}$