Peter Wittwer
28 septembre 2020

Analyse I – Corrigé de la Série 2

Echauffement 1.

i) On a $X \times Y = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$. Le couple $(3,2)$ n'est donc pas un élément du produit cartésien $X \times Y$.

ii) En utilisant la définition du produit cartésien, on trouve que les deux ensembles sont

$$\begin{aligned}(X \times Y) \times Z &= \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \times \{5,6\} \\ &= \big\{((1,3),5),((1,4),5),((2,3),5),((2,4),5),((1,3),6), \\ &\qquad ((1,4),6),((2,3),6),((2,4),6)\big\}\ ,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}X \times (Y \times Z) &= \{1,2\} \times \{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\} \\ &= \big\{(1,(3,5)),(1,(3,6)),(1,(4,5)),(1,(4,6)),(2,(3,5)), \\ &\qquad (2,(3,6)),(2,(4,5)),(2,(4,6))\big\}\ .\end{aligned}$$

Ils ne sont donc pas égaux.

Remarque :
Les deux ensembles $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$ sont équivalents dans le sens que la fonction qui associe à $((a,b),c) \in (X \times Y) \times Z$ l'élément $(a,(b,c)) \in X \times (Y \times Z)$ est bijective. On écrit donc souvent simplement $X \times Y \times Z$ au lieu de $(X \times Y) \times Z$ ou $X \times (Y \times Z)$, et (a,b,c) au lieu de $((a,b),c)$ ou $(a,(b,c))$.

Echauffement 2.

a) Pour $n_0 = 1$ on a

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}\ ,$$

c.-à-d. $P(1)$ est vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a (on indique par $\stackrel{P(n)}{=}$ l'égalité où on utilise la propriété $P(n)$),

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\ ,\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Exercice 1.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$. Dans ce cas on a

$$\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$$

et

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = (\mathbb{R} \setminus [0, 2]) \cap (\mathbb{R} \setminus [1, 3]) = \mathbb{R} \setminus [0, 3].$$

Q2 : VRAI.
La réciproque ($\Leftarrow$) est triviale.
Pour démontrer l'implication directe ($\Rightarrow$), on procède par l'absurde. Supposons que $A \times B = B \times A$ et que $A \neq B$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A \not\subset B$ et donc il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$. Soit encore $b \in B$. Ainsi $(a, b) \in A \times B = B \times A$, ce qui veut dire que $a \in B$. Contradiction.

Q3 : VRAI.
La preuve se fait par double-inclusion.
$\subset$: Soit $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Alors $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$ et donc $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$. Cela montre que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$.
$\supset$: Soit maintenant $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Alors $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$ et donc $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$. Cela prouve que $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ et donc $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.

Exercice 2.

i) On a $x \sim x$ car $x = x$; $x \sim y$ implique $y \sim x$ car $x = y$ implique $y = x$; et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent que $x \sim z$ car $x = y$ et $y = z$ impliquent que $x = z$. L'égalité $=$ est donc un cas particulier d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les ensembles qui sont les éléments de $X/_\sim$, contiennent chacune exactement un élément de X.

ii) Puisque $x \sim y$ pour tout $x, y \in X$, les conditions d'une relation d'équivalence sont trivialement satisfaite. L'ensemble quotient $X/_\sim$ contient l'ensemble X comme unique élément.

Exercice 3.

i) Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ on a $x^2 > 0$ et donc $x \sim x$. Si $xy > 0$ on a aussi $yx > 0$, si bien que $x \sim y$ implique $y \sim x$. Finalement, si $xy > 0$ et $yz > 0$ on a que $0 < (xy)(yz) = xzy^2$. Il s'en suit que $xz > 0$ si bien que $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers négatifs.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$. Puisque 0 est un nombre pair il s'en suit que $x \sim x$. Si $x - y$ est un nombre pair, $y - x$ est aussi un nombre pair et $x \sim y$ implique donc $y \sim x$. Finalement, si $x - y$ est pair et $y - z$ est pair, il s'en suit que $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair, et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent donc que $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

iii) La relation $x \sim y$ si $x - y$ impair ne définit pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour tout x on a que $x - x = 0$, et puisque 0 est un nombre pair il en suit que x n'est pas en relation avec x ce qui viole la condition de réflexivité. (La relation est symétrique, mais la transitivité est aussi compromise.)

Exercice 4.

i) On a $X \times Y = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$. Les sous-ensembles recherchés sont

$$G_1 = \{(1,3),(2,3)\}, \quad G_2 = \{(1,3),(2,4)\}, \quad G_3 = \{(1,4),(2,3)\}, \quad G_4 = \{(1,4),(2,4)\}.$$

Soit $f_i \colon X \to Y$, $i = 1,2,3,4$, la fonction qui a comme graphe G_i. On a par exemple $f_2(1) = 3$ et $f_1(2) = 3$.

ii) Les fonctions f_2 et f_3 sont injectives et surjectives et donc bijectives. Les fonctions f_1 et f_4 ne sont ni injectives ni surjectives (et donc pas bijectives). La réponse est donc : il y a deux fonctions qui sont injectives, surjectives et bijectives.

iii) Seulement les fonctions f_2 et f_3 admettent une fonction réciproque $f_i^{-1} \colon Y \to X$, $i = 2,3$ avec graphe H_i :

$$H_2 = \{(3,1),(4,2)\} \quad \text{et} \quad H_3 = \{(3,2),(4,1)\}.$$

On a par exemple $f_2^{-1}(3) = 1$ et $f_3^{-1}(3) = 2$.

Remarque concernant la terminologie :
Le sous-ensemble $G = \{(1,3)\} \subset X \times Y$ est le graphe d'une fonction $f : D \to Y$ avec domaine de définition $D = \{1\} \subset X$. Dans l'exercise 4 nous nous intéressons qu'aux fonctions avec domaine de définition X (voir le cours).

Exercice 5.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $f(1) = 1, f(0) = 0$, $g(1) = g(0) = 1$. Alors $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1 = (g \circ f)(1)$, $(f \circ g)(0) = f(1) = 1 = (g \circ f)(0)$, et donc $f \circ g = g \circ f$ mais $f \neq g$.

Q2 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme f est injective, on a $g(x_1) = g(x_2)$, et par l'injectivité de g, il suit que $x_1 = x_2$. Ainsi $f \circ g$ est bien injective.

Q3 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on a $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Comme $f \circ f$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.

Q4 : VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc on a $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme $f \circ g$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc g est injective.

Q5 : VRAI.
Il n'existe que quatre fonctions de X dans X (lesquels ?, voir Exercice 4) dont deux sont bijectives et deux ne sont ni injectives ni surjectives. Toute fonction de X dans X qui est injective est donc surjective et vice versa. Puisque $f \circ g$ est supposée injective, $f \circ g$ est donc surjective et f est surjective par Q6. Donc f est injective. (Remarque : le fait que toutes les fonctions de X dans X qui sont injectives sont aussi surjectives est une conséquence du fait que X ne contient qu'un nombre fini d'éléments.)

Q6 : VRAI.
Soit $y \in X$. Comme $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in X$ tel que $(f \circ g)(x) = y$. En posant $z = g(x)$ on a trouvé un $z \in X$ tel que $f(z) = y$. Ainsi f est surjective.

Exercice 6.

Dans les deux cas, on applique l'algorithme de Joseph Stein. Pour *i*) on trouve successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{pgcd}(2796203,1046527) &= \mathrm{pgcd}(1046527,874838) = \mathrm{pgcd}(1046527,437419)\\ &= \mathrm{pgcd}(437419,304554) = \mathrm{pgcd}(437419,152277)\\ &= \mathrm{pgcd}(152277,142571) = \mathrm{pgcd}(142571,4853) = \mathrm{pgcd}(68859,4853)\\ &= \mathrm{pgcd}(32003,4853) = \mathrm{pgcd}(13575,4853) = \mathrm{pgcd}(4853,4361)\\ &= \mathrm{pgcd}(4361,246) = \mathrm{pgcd}(4361,123) = \mathrm{pgcd}(2119,123)\\ &= \mathrm{pgcd}(998,123) = \mathrm{pgcd}(499,123) = \mathrm{pgcd}(188,123) = \mathrm{pgcd}(123,94)\\ &= \mathrm{pgcd}(123,47) = \mathrm{pgcd}(47,38) = \mathrm{pgcd}(47,19) = \mathrm{pgcd}(19,14)\\ &= \mathrm{pgcd}(19,7) = \mathrm{pgcd}(7,6) = \mathrm{pgcd}(7,3) = \mathrm{pgcd}(3,2) = \mathrm{pgcd}(3,1)\\ &= \mathrm{pgcd}(1,1) = \mathrm{pgcd}(1,0) = 1\end{aligned}$$

Il s'agit en fait de deux nombres premiers (mais rappelez-vous que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ n'implique *pas* que a et b sont premiers).

Pour *ii*), les étapes sont :

$$\begin{aligned}\mathrm{pgcd}(132316,24092) &= 2\,\mathrm{pgcd}(66158,12046) = 4\,\mathrm{pgcd}(33079,6023) = 4\,\mathrm{pgcd}(13528,6023)\\ &= 4\,\mathrm{pgcd}(6764,6023) = 4\,\mathrm{pgcd}(6023,3382) = 4\,\mathrm{pgcd}(6023,1691)\\ &= 4\,\mathrm{pgcd}(2166,1691) = 4\,\mathrm{pgcd}(1691,1083) = 4\,\mathrm{pgcd}(1083,304)\\ &= 4\,\mathrm{pgcd}(1083,152) = 4\,\mathrm{pgcd}(1083,76) = 4\,\mathrm{pgcd}(1083,38)\\ &= 4\,\mathrm{pgcd}(1083,19) = 4\,\mathrm{pgcd}(532,19) = 4\,\mathrm{pgcd}(266,19) = 4\,\mathrm{pgcd}(133,19)\\ &= 4\,\mathrm{pgcd}(57,19) = 4\,\mathrm{pgcd}(19,19) = 4\,\mathrm{pgcd}(19,0) = 4\cdot 19 = 76\end{aligned}$$

Exercice 7.

i) *a*) Pour $n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1\ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big)}{6}\\ &= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}\ ,\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

ii) *a*) Pour $n_0 = 1$ on a (avec $(-1)^0 = 1$),

$$1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} k^2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1\ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^2\right) + (n+1)^2 \\
&\overset{P(n)}{=} -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{-n(n+1)+2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(-n+2n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \ ,
\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

iii) *a*) Pour $n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{1}{2}1\cdot 2\right)^2 = 1 \ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{P(n)}{=} \left(\frac{1}{2}\,n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{2^2}\,n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2\big(n^2+2^2(n+1)\big) \\
&= \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right) = \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\,(n+1)\big((n+1)+1\big)\right)^2
\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Pour calculer la dernière somme on utilise les résultats précédents. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2) = \sum_{k=1}^{1001} k(3k-1) &= 3\sum_{k=1}^{1001} k^2 - \sum_{k=1}^{1001} k \\
&= 3\frac{1001\cdot 1002\cdot 2003}{6} - \frac{1001\cdot 1002}{2} = \frac{1001\cdot 1002}{2}\,(2003-1) \\
&= 1001^2\cdot 1002 = 1\,004\,005\,002 \ .
\end{aligned}$$

Exercice 8.

a) On a $F_0 = 2^{(2^0)} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, et $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$. Pour $n_0 = 1$ on a

$$5 = F_1 = \left(\prod_{k=0}^{0} F_k\right) + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5 \ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 2^{(2^{n+1})} + 1 = 2^{(2\cdot 2^n)} + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)^2 + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)\left(2^{(2^n)}\right) + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\ &= F_n\,(F_n - 2) + 2 \overset{P(n)}{=} F_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) + 2 = \left(\prod_{k=0}^{n} F_k\right) + 2 = \left(\prod_{k=0}^{(n+1)-1} F_k\right) + 2 \end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.