13 avril 2010

Contrôle d'analyse II no 3

Durée: 1 heure 30'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+\log_2(x+3)^2\cdot\log_{\frac{1}{3}}2+1\leq\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)$$ 5 pts

2. Résoudre le système :

$$\begin{cases}\left(e^{2y}+1\right)\mathrm{Th}(1-x)=e^{2y}-1\\ \mathrm{ArCh}\sqrt{1+2x^2}=\mathrm{ArSh}\,\dfrac{1}{y}-\mathrm{ArCh}\left(y\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}}\right)\end{cases}$$ 5 pts

3. a) Donner les solutions sous forme algébriques de l'équation :

$$(z-1+i\sqrt{3})^3=8$$ 2 ½ pts

b) Soit la fonction complexe $f(z) = \dfrac{z^2-(|z|^2+2)z+2|z|^2-5\bar{z}+5}{|z-1|^2}$

Trouver les solutions de l'équation f(z) = 0. 2 ½ pts

Indication : Exprimer f(z) en fonction de z et $\bar{z}$.

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

$\forall x \in R$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, et pour $x \neq 0$, $\operatorname{coth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\quad$ $\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x$ $\quad$ $\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x}$

$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\quad$ $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$

$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\quad$ $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$

$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2 \cdot \operatorname{sh}^2 x = 2 \cdot \operatorname{ch}^2 x - 1$ $\quad$ $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$

$\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$ $\quad$ $\operatorname{th}(x-y) = \dfrac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$

$\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y = 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ $\quad$ $\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ $\quad$ $\operatorname{sh}x - \operatorname{sh}y = 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\forall x \in R$ $\quad$ $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$; $\quad$ $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\quad$ $\operatorname{th} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ où $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\quad$ $\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\quad$ $\forall x \in]1,+\infty[$, $\quad$ $\operatorname{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in R$, $\quad$ $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad$ $\forall x \in R$, $\quad$ $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\forall x \in]-1;1[$, $\quad$ $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad$ $\forall x \in]-1;1[$, $\quad$ $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\forall x \in R \setminus [-1;1]$, $\quad$ $\operatorname{Argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad$ $\forall x \in R \setminus [-1;1]$, $\quad$ $\operatorname{Argcoth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$