Calcul de $\mathbb{E}[X^2]$ pour $X \sim \Gamma(k,\lambda)$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(k+2)}{\lambda^2 \Gamma(k)} \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{\Gamma(k+2)} x^{k+1} e^{-\lambda x}\, dx} = 1$$

en utilisant que $\Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)k\Gamma(k)$

$$= \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k)} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{(k+1)k\cancel{\Gamma(k)}}{\cancel{\Gamma(k)}} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(k+1)k}{\lambda^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$$

Détermination de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$ pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

alors $Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, car

$\mathbb{E}[X] = 0$ donc

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \mathbb{E}[X] + \mu = \mu$$

ce qui prouve que $\mathbb{E}[Y] = \mu$. Par ailleurs,

si $\mathrm{Var}(X) = 1$ alors $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sigma X + \mu)$

$= \sigma^2 \mathrm{Var}(X)$ en utilisant les formules de linéarité.

$= \sigma^2$

Maintenant pour prouver que $\mathrm{Var}(X) = 1$ on utilise

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] \text{ car } \mathbb{E}[X] = 0.$$

Or, nous allons prouver ensemble plus tard dans le cours que

Pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad Z = X^2 \sim \chi^2_1 \equiv \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c'est-à-dire que X^2 suit une distribution du χ^2_1, ce qui est équivalent à dire que X^2 suit une distrib. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Si $Z \sim \Gamma(k, \lambda)$ alors $\mathbb{E}[Z] = \frac{k}{\lambda}$ ←

Si $k = 1/2$ et $\lambda = 1/2$ $\quad \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1/2}{1/2} = 1$

Les formules pour les distributions Γ nous donnent donc

Donc $\boxed{Var(X) = \mathbb{E}[X^2] = 1}$

Problème d'existence de l'espérance pour une v.a. de Cauchy

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, p(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$= 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$$

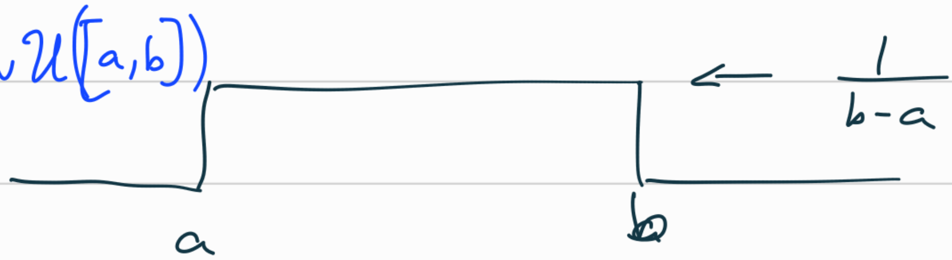
$$= 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{2t}{\cancel{\pi}(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \log(1+t^2) \Big]_0^x$$

$$= \frac{1}{\pi} \log(1+x^2) \longrightarrow +\infty$$

$\underset{x \to +\infty}{}$

Pdf pour $X \sim \mathcal{U}([a,b])$



Utilisation de la méthode de la transformée inverse pour générer des observations "synthétiques" d'une distribution $\mathcal{E}(\lambda)$:

On commence par calculer la cdf :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t;\lambda)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \, 1\{t \geq 0\}\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - \underbrace{e^{-0}}_{1}$$

Donc

$$\boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

Puis on souhaite déterminer la fonction quantile F_X^{-1} :

On résout :

$$\alpha = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$1 - \alpha = e^{-\lambda x}$$

$$\log(1-\alpha) = -\lambda x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)$$

Donc

$$\boxed{F_X^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)}$$

Par le théorème d'échantillonage par transformée inverse, si on fait des tirages de v.a. uniformes sur $[0,1]$

$$U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_{50}$$

et on définit :

$$X_1 := -\frac{1}{\lambda}\log(1-U_1) \quad \dots \quad X_{50} := -\frac{1}{\lambda}\log(1-U_{50})$$

alors les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{50}$ suivent chacune une distribution dont la cdf est F_X calculée plus haut, c'est-à-dire une distribution $\mathcal{E}(\lambda)$