Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

Groupe [ ]

PRENOM : ______________________

1. On considère le théorème suivant :

$$T: \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq 3 \quad \text{et} \quad n \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad m \cdot n \neq 15$$

a) Démontrer T par l'absurde.

b) Expliciter non$T$, la négation de T.

c) On note R l'énoncé réciproque de T. Ecrire R et montrer à l'aide d'un contre-exemple que R est faux.

4 pts

2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R}_+ \times A &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = (x, \tfrac{y^2}{y-2}). \end{aligned}$$

a) Déterminer le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ pour que f soit une application.

b) Expliciter l'ensemble $\operatorname{Im} f$ puis le représenter graphiquement (1 unité = 1 carré).

c) Soit $K = \mathbb{R}_+ \times \{3\}$. Déterminer $f^{-1}(f(K))$.

5 pts

Tourner la page

3. Soient les applications f et g définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+\sqrt{x}\,,\, x-\sqrt{x}-2) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{y}{x} - x\,. \end{array}$$

a) f est-elle injective ? Justifier votre réponse.

b) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et le représenter graphiquement. (Echelle : 1 unité = 2 carrés.)

c) Montrer que f est non surjective à l'aide d'un contre-exemple.

d) Définir l'application $g \circ f$.

e) $g \circ f$ est-elle injective ? Justifier votre réponse.

6 pts