CATALOGUE

n/a

Ens: Prof. Marco Picasso
Analyse numérique et optimisation - (n/a)
11 Août 2020
de 08h15 à 11h15

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 33 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 14 points répartis sur deux questions **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le problème suivant : trouver $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ où $\vec{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\vec{F}(\vec{x}) = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_1)^3 - 1 \\ (x_2)^3 - 1 \\ \vdots \\ (x_{N-1})^3 - 1 \\ (x_N)^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Question [mc1] : La matrice jacobienne est définie $\forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^N$ par :

$$DF(\vec{x}) = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & & & & (0) \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & d_N \end{pmatrix}$$

avec

- ☐ $d_i = (x_i)^3 - 1$
- ■ $d_i = 3x_i^2$

Question [mc1b] : Si $\vec{x}$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ et $\vec{F}(\vec{y}) = \vec{0}$ on a:

- ■ $(N+1)^2(\vec{x}-\vec{y})^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x}-\vec{y}) + \sum_{i=1}^{N} ((x_i)^3 - (y_i)^3)(x_i - y_i) = 0$
- ■ $(N+1)^2(\vec{x}-\vec{y})^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x}-\vec{y}) \leq 0$
- ■ $\vec{x} = \vec{y}$

Le fichier `exam1.m` implémente la méthode de Newton pour approcher $\vec{x}$.

Fichier `exam1.m`:

```
function[x] = exam1(N)
%
% Methode de Newton : Etant donne x^n, trouver x^{n+1}
% tel que DF(x^n)(x^n - x^{n+1}) = F(x^n)
% En pratique on construit A=DF(x^n), b=F(x^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose x^{n+1}=x^n-y
```

```
%
% parametres
%
%  N        : nombre d inconnues du systeme non lineaire
%  a        : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
%  c        : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
%  b        : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
%  x        : N-vecteur, contient x^n puis x^{n+1}
%
for i=1:N
    x(i) = 1;
end
stop=1;
iter=0;
coeff=(N+1)*(N+1);
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
    a(i) = 2*coeff+???;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = coeff*(2*x(1)-x(2))+???;
    for i=2:N-1
    b(i) = coeff*(2*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???;
    end
    b(N) = coeff*(2*x(N)-x(N-1))+???;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = ???;
    for i=1:N-1
        c(i) = c(i)/???;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1)-???);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Ly = b, puis L^T x = y

    b(1)=???;
    for i=1:N-1
      b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
    end

    % resolution du systeme lineaire L^T x = y

    b(N)=???;
    for i=N-1:-1:1
      b(i) = (b(i)-???)/a(i);
    end

    %x^n+1 = x^n - y

    for i=1:N
```

```
    x(i) = x(i) - b(i);
    end

    % calcul de ||b||/||x||

    stop=norm(b)/norm(x);
    fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)
end
end
```

Question [mc2] : A la ligne `a(i)=2*coeff(i)+???`, il faut remplacer `???` par

- ☐ `x(i)*x(i)*x(i)-1`
- ■ `3*x(i)*x(i)`
- ☐ `3*x(i)*x(i)-1`
- ☐ `x(i)*x(i)*x(i)`

Question [mc3] : A la ligne `b(i)=coeff*(2*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???`, il faut remplacer `???` par

- ■ `x(i)*x(i)*x(i)-1`
- ☐ `3*x(i)*x(i)`
- ☐ `3*x(i)*x(i)-1`
- ☐ `x(i)*x(i)*x(i)`

Question [mc4] : A la ligne `c(i)=c(i)/???`, il faut remplacer `???` par

- ☐ `b(i)`
- ■ `a(i)`
- ☐ `a(i+1)`
- ☐ `b(i+1)`

Question [mc5] : A la ligne `a(i+1)=sqrt(a(i+1)-???)`, il faut remplacer `???` par

- ☐ `a(i)*a(i)`
- ■ `c(i)*c(i)`
- ☐ `a(i)*c(i)`

Question [mc6] : A la ligne `b(i+1)=(b(i+1)-???)/a(i+1)`, il faut remplacer `???` par

- ☐ `a(i)*b(i)`
- ■ `c(i)*b(i)`
- ☐ `a(i+1)*b(i)`

Question [mc7] : A la ligne `b(i)=(b(i)-???)/a(i)`, il faut remplacer `???` par

- ☐ `c(i)*b(i)`
- ■ `c(i)*b(i+1)`
- ☐ `a(i)*b(i+1)`
- ☐ `a(i)*b(i)`

Question [`mc8`] : Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants

```
>> exam1(9);
iter=1, stop = 3.580783e+00
iter=2, stop = 1.274647e+00
iter=3, stop = 1.123099e-02
iter=4, stop = 4.868424e-07
iter=5, stop = 9.555565e-16
>> exam1(19);
iter=1, stop = 3.720121e+00
iter=2, stop = 1.277933e+00
iter=3, stop = 1.123106e-02
iter=4, stop = 4.834302e-07
iter=5, stop = 1.710970e-15
>> exam1(39);
iter=1, stop = 3.791584e+00
iter=2, stop = 1.278749e+00
iter=3, stop = 1.123128e-02
iter=4, stop = 4.825987e-07
iter=5, stop = 6.741537e-16
```

On en déduit

- ■ La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ
- □ La méthode de Newton converge quadratiquement quel que soit le point de départ
- □ La méthode de Newton diverge pour ce point de départ

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Catalogue

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On cherche $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Question [mc9] : La formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ telle que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall\, v \in V,$$

où V est défini par :

- ■ $V = \Big\{g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, g' continue par morceaux, $g(0) = 0\Big\}$
- □ $V = \Big\{g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, g' continue par morceaux, $g(0) = g(1) = 0\Big\}$
- □ $V = \Big\{g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, g' continue par morceaux, $g(1) = 0\Big\}$
- □ $V = \Big\{g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, g' continue par morceaux$\Big\}$

Question [mc10] : Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. On considère les fonctions “chapeaux” $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, continues, polynômiales de degré 1 sur chaque intervalle telles que :

$$\varphi_i(x_i) = 1,\ \varphi_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i,\ j = 0, 1, \ldots, N+1.$$

L'approximation des élements finis correspondante consiste à chercher $u_h \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall\, v_h \in V_h,$$

où V_h est défini par :

- ■ $V_h = \operatorname{span}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N+1})$
- □ $V_h = \operatorname{span}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$
- □ $V_h = \operatorname{span}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$
- □ $V_h = \operatorname{span}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N+1})$

Question [mc11] : D'autre part, u_h est défini par :

- ■ $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j \varphi_j(x)$
- □ $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)$
- □ $u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} u_j \varphi_j(x)$
- □ $u_h(x) = \sum_{j=0}^{N} u_j \varphi_j(x)$

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on approche $\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la formule de quadrature:

$$J(g) = g(-\alpha) + g(\alpha), \text{ où } 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Question [mc15] : On a :

- ■ Pour tout $0 < \alpha < 1$ on a $\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_1$.
- ■ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_2$.
- ■ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_3$.
- □ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_4$.
- □ Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_5$.

Question [tf16] : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. On a

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\mathrm{d}t. \tag{2}$$

■ VRAI □ FAUX

Question [mc17] : On approche les intégrales de -1 à 1 dans (2) en utilisant la formule de quadrature (1) avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; On obtient ainsi l'approximation $L_h(f)$. On a

- ■ $L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(x_i + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} h \right) + f\left(x_i + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} h \right) \right)$.
- □ $\exists\, C > 0$, $\forall\, f \in \mathcal{C}^4[0,1]$, $\forall\, 0 < h \le 1$ on a
$$\left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - L_h(f) \right| \le Ch^4.$$
- ■ $\forall\, f \in \mathcal{C}^4[0,1]$, $\exists\, C > 0$, $\forall\, 0 < h \le 1$:
$$\left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - L_h(f) \right| \le Ch^4.$$

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

On considère le problème suivant: trouver $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Question [mc19] : La solution du problème est donnée par

- ■ $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$
- □ $u(x,t) = \sin(\pi x)e^{\pi t}$
- □ $u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-\pi t}$
- □ $u(x,t) = \sin(\pi x)(1 + \sin(\pi t))$

Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue en utilisant des formules de différences finies centrées pour approcher $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Le fichier `exam2.m` implémente ce schéma.
Fichier `exam2.m`:

```
function [u2]=exam2(N,M,tau)
%
%  Schema explicite centre pour l'equation des ondes
%
%  parametres
%
%  N         : nombre de points interieurs dans l'intervalle [0,1]
%  h         : pas d'espace
%  M         : nombre de pas de temps
%  tau       : pas de temps
%  t         : temps courant
%  u0     : N-vecteur, u0(i) est une approximation de u(x_i,t_n-1)
%  u1     : N-vecteur, u1(i) est une approximation de u(x_i,t_n)
%  u2     : N-vecteur, u2(i) est une approximation de u(x_i,t_n+1)
%
h=1./(N+1);
lambda=???;
%
% condition initiale u0 et u1
%
for i=1:N
  u0(i)=sin(pi*i*h);
end
u1(1)=???;
for i=2:N-1
  u1(i)=???;
end
u1(N)=???;
%
% schema
%
```

```
t=tau;
for n=2:M
  t=t+tau;
  u2(1)=???;
  for i=2:N-1
    u2(i)=???;
  end
  u2(N)=???;
%
% reactualiser la solution
%
  for i=1:N
    u0(i)=u1(i);
    u1(i)=u2(i);
  end
end
%
% imprimer l'erreur maximum au temps final
%
err = 0;
for i=1:N
    erri = abs(u2(i)-sin(pi*i*h)*???);
    if (erri>err)
        err = erri;
    end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Question [mc20] : A la ligne `lambda=???` il faut écrire

- [x] `tau^2/h^2`
- [ ] `tau/h`
- [ ] `tau^2/h`
- [ ] `tau/h^2`

Question [mc21] : A la ligne `u1(i)=???` il faut écrire

- [x] `(1-lambda)*u0(i)+lambda/2*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- [ ] `2*(1-lambda)*u0(i)+lambda/2*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- [ ] `(1-lambda)*u0(i)+lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`
- [ ] `2*(1-lambda)*u0(i)+lambda*(u0(i-1)+u0(i+1))`

Question [mc22] : A la ligne `u2(i)=???` il faut écrire

- [x] `2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)`
- [ ] `(1-lambda)*u1(i)+lambda/2*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)`
- [ ] `2*(1-lambda)*u1(i)+lambda/2*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)`
- [ ] `(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u0(i+1))-u0(i)`

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:

```
>> u=exam2(9,200,0.1);
 erreur maximum au temps final  1.776357e-15
>> u=exam2(9,200,0.11);
 erreur maximum au temps final  3.639871e+54
>> u=exam2(19,200,0.05);
 erreur maximum au temps final  2.775558e-15
>> u=exam2(19,200,0.051);
 erreur maximum au temps final  8.657832e+15
```

Question [mc23] : On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.
- ☐ Le schéma est stable $\forall\ h, \tau > 0$.
- ■ Le schéma est stable si $\tau \leq h$.

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:

```
>> u=exam2(9,10,0.09);
 erreur maximum au temps final  6.903714e-04
>> u=exam2(19,20,0.045);
 erreur maximum au temps final  1.711472e-04
>> u=exam2(39,40,0.0225);
 erreur maximum au temps final  4.269724e-05
>> u=exam2(79,80,0.01125);
 erreur maximum au temps final  1.066873e-05
```

Question [mc24] : On en déduit

- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.
- ■ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau^2$.
- ☐ Le schéma est stable $\forall\ h, \tau > 0$.
- ☐ Le schéma est stable si $\tau \leq h$.

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Soit $\alpha, \beta > 0$, n un entier positif, $A \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ définis par:

$$A = (2n+2)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche $(\vec{x}^*, \vec{q}^*) \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*, \vec{q}^*) \leq f(\vec{x}, \vec{q}) \ \forall \ (\vec{x}, \vec{q}) \in \Omega$, où $f(\vec{x}, \vec{q}) = \frac{\alpha}{2}||\vec{q}||^2 + \frac{1}{2}(x_{n+1} - \beta)^2$ et $\Omega = \{(\vec{x}, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}; A\vec{x} - \vec{b} = \vec{q}\}$.
On introduit le lagrangien défini par $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{q}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}, \vec{q}) - \vec{\mu}^T(A\vec{x} - \vec{b} - \vec{q}) \ \forall \ \vec{x}, \vec{q}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^{2n+1}$, les conditions KKT s'écrivent (après avoir éliminé $\vec{\mu}^*$):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{d} \end{pmatrix}.$$

Question [mc25] : La matrice B est donnée par

- ☐ $B = I$
- ■ $B = -I$
- ☐ $B_{n+1,n+1} = 1$, $B_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1)$ $i,j = 1, \ldots, 2n+1$
- ☐ $B_{n+1,n+1} = -1$, $B_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1)$ $i,j = 1, \ldots, 2n+1$

Question [mc26] : La matrice C est donnée par

- ☐ $C = I$
- ☐ $C = -I$
- ■ $C_{n+1,n+1} = 1$, $C_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1)$ $i,j = 1, \ldots, 2n+1$
- ☐ $C_{n+1,n+1} = -1$, $C_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (n+1, n+1)$ $i,j = 1, \ldots, 2n+1$

Question [mc27] : Le vecteur $\vec{d}$ est donné par

- ☐ $\vec{d} = \vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = C\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -C\vec{b}$
- ■ $\vec{d} = \beta C\vec{b}$
- ☐ $\vec{d} = -\beta C\vec{b}$

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Soit n un entier positif. On cherche $\vec{x}^* \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x}) \ \forall\, \vec{x} \in \Omega$ où $f(\vec{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n$ et $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \text{ et } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$.
Soit $\mathcal{L}$ le lagrangien défini $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = f(\vec{x}) - (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) - \mu(x_1 + \cdots + x_n - 1).$$

Question [mc28] : Soit $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ défini par $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$ et $c_n = -1$. On a pour $i = 1, \ldots, n$

- ■ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i - \lambda_i - \mu$
- ☐ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = -c_i + \lambda_i + \mu$
- ☐ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i + \lambda_i - \mu$
- ☐ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = c_i + \lambda_i + \mu$

Les conditions KKT s'écrivent: trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\lambda}^* \in \mathbb{R}^n$, $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{F}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \mu^*) = \vec{0} \tag{1}$$

$$\vec{\lambda}^* \geq \vec{0} \tag{2}$$

$$\vec{x}^* \geq \vec{0} \tag{3}$$

où $\vec{F}$ est défini pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ par

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \mu) = \begin{pmatrix} ??? \\ x_1 + \cdots + x_n - 1 \\ \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Question [mc29] : A la place de ??? il faut écrire

- ■ $\vec{c} - \vec{\lambda} - \mu\vec{1}$
- ☐ $-\vec{c} + \vec{\lambda} + \mu\vec{1}$
- ☐ $\vec{c} + \vec{\lambda} - \mu\vec{1}$
- ☐ $\vec{c} + \vec{\lambda} + \mu\vec{1}$

On implémente la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (1) (2) (3). A chaque étape on effectue un pas de la méthode de Newton pour tenir compte de (1). Le fichier `exam3.m` implémente la méthode.
Fichier `exam3.m`:

```
function x_new=exam3(n,eps)
c=ones(n,1);
c(n)=-1;
x_old=max(eps,zeros(n,1));
lambda_old=max(eps,zeros(n,1));
mu_old=0;
for iter=1:10
  mat1 = horzcat(sparse(n,n),-speye(n,n),-???);
  mat2 = horzcat(ones(1,n),sparse(1,n),sparse(1,1));
  mat3 = horzcat(sparse(1:n,1:n,lambda_old,n,n),???,sparse(n,1));
  mat  = vertcat(mat1,mat2,mat3);
  rhs1 = ???;
```

```
  rhs2 = ones(1,n)*x_old-1;
  rhs3 = sparse(n,1);
  for i=1:n
   rhs3(i)=???;
  end
  rhs = vertcat(rhs1,rhs2,rhs3);
  sol=mat\rhs;
  x_new=max(eps,x_old-sol(1:n));
  lambda_new=max(eps,lambda_old-sol(n+1:2*n));
  mu_new=mu_old-sol(2*n+1:2*n+1);
  discrep=norm(x_new-x_old)/norm(x_new);
  printf ("iter: %d Discrepancy: %f \n",iter,discrep);
  x_old=x_new;
  lambda_old=lambda_new;
  mu_old=mu_new;
  if (discrep<0.001)
   break
  end
end
end
```

Question [mc30] : A la ligne `mat1=`... il faut remplacer ??? par

- [x] `ones(n,1)`
- [ ] `zeros(n,1)`
- [ ] `ones(1,n)`
- [ ] `zeros(1,n)`

Question [mc31] : A la ligne `mat3=`... il faut remplacer ??? par

- [x] `sparse(1:n,1:n,x_old,n,n)`
- [ ] `zeros(n,n)`
- [ ] `ones(n,n)`
- [ ] `speye(n,n)`

Question [mc32] : A la ligne `rhs1=???` il faut remplacer ??? par

- [x] `c-ones(n,1)*mu_old-lambda_old`
- [ ] `-c+ones(n,1)*mu_old+lambda_old`
- [ ] `c+ones(n,1)*mu_old-lambda_old`
- [ ] `c+ones(n,1)*mu_old+lambda_old`

Question [mc33] : A la ligne `rhs3(i)=???` il faut remplacer ??? par

- [x] `x_old(i)*lambda_old(i)`
- [ ] `-x_old(i)*lambda_old(i)`
- [ ] `-x_old(i)`
- [ ] `-lambda_old(i)`

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Soit m, n deux entiers positifs, $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on considère la décomposition en valeurs singulières de A (SVD), $A = U\Sigma V^T$ où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ et où $UU^T = U^TU = I$ et $VV^T = V^TV = I$. On note $\vec{u}_k$ la k^e colonne de U, $\vec{v}_k$ la k^e colonne de V.

Question [`mc34`] : On a:

- □ $AA^TV = V\Sigma^T\Sigma$
- ■ $A^TA\vec{v}_i = \sigma_i^2\vec{v}_i \ i = 1, \dots, n$
- □ $AA^T\vec{v}_i = \sigma_i^2\vec{v}_i \ i = 1, \dots, n$
- ■ $A^TAV = V\Sigma^T\Sigma$

Question [`mc35`] : Le coefficient A_{ij} $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ est donné par:

- ■ $A_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k U_{ik} V_{jk}$
- ■ $A_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (\vec{u}_k \vec{v}_k^T)_{ij}$
- □ $A_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k U_{ki} V_{kj}$
- □ $A_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (\vec{v}_k \vec{u}_k^T)_{ij}$

où, étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on note $\vec{a}\vec{b}^T$ la matrice de coefficient i, j : $(\vec{a}\vec{b}^T)_{ij} = a_i b_j$.

Question [`tf36`] : Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sachant que la SVD de A donne $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 = 0$, on a $A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T$.

■ VRAI □ FAUX

cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Questions à rédiger

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0.0 ☐ 0.5 ☐ 1.0 ☐ 1.5 ☐ 2.0 ☐ 2.5 ☐ 3.0 ☐ 3.5 ☐ 4.0 ☐ 4.5 ■ 5.0 *Réservé au correcteur*

On considère le problème suivant : trouver $u : [0, 10] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = 0, \quad 0 < t \leq 10, \\ \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Donner une formule pour $u(t)$, $0 < t \leq 10$.

(b) Soit N un entier positif, $h = 10/N$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots, N$. On note u^n l'approximation de $u(t_n)$ obtenue en utilisant une formule de différences finies progressive (schéma d'Euler progressif, explicite). Ecrire le schéma correspondant.

(c) Montrer que $\forall\ x > 0$:

$$|e^{-x} - (1 - x)| \leq \frac{x^2}{2}$$

(d) En déduire que

$$|u(t_N) - u^N| \leq \frac{h^2}{2} \left(1 + |1 - h| + \cdots + |1 - h|^{N-1}\right)$$

(e) Montrer que $\forall\ 0 < h \leq 2$, on a

$$|u(t_N) - u^N| \leq 5h.$$

Question ouverte 2: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐ 0.0	☐ 0.5	☐ 1.0	☐ 1.5	☐ 2.0	☐ 2.5	☐ 3.0	☐ 3.5	☐ 4.0	☐ 4.5	*Réservé au correcteur*
☐ 5.0	☐ 5.5	☐ 6.0	☐ 6.5	☐ 7.0	☐ 7.5	☐ 8.0	☐ 8.5	■ 9.0		

On considère le problème suivant : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = e^x, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \ u(1) = 0. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ obtenue avec l'aide d'une méthode de différences finies centrées.

(a) Ecrire le schéma permettant de calculer u_i, $i = 1, \ldots, N$.

(b) Ecire le système linéaire correspondant $A\vec{u} = \vec{f}$ où $\vec{u} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de composantes u_i, A et f sont à définir.

(c) On suppose dans la suite que $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$, montrer que :

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} = e^{x_i} + r_i, \ i = 1, \ldots, N,$$

où r_i est à définir. Montrer $\exists\, C > 0, \ \forall\, 0 < h \leq 1, |r_i| \leq Ch^2$.

(d) Soit $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes $u(x_i)$. En déduire que

$$A\,(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{r}.$$

(e) On admet le résultat suivant : $\forall\, \vec{g} \in \mathbb{R}^N$, si $\vec{v}$ est tel que $A\vec{v} = \vec{g}$, alors :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |v_i| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq i \leq N} |g_i|.$$

En déduire que :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} Ch^2.$$

(f) Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ par

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{f}^T \vec{v}.$$

Montrer que

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \mathcal{L}(\vec{u}) + (\vec{v} - \vec{u})^T (A\vec{u} - \vec{f}) + \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{u})^T A\,(\vec{v} - \vec{u}) \quad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^N.$$

On admet que A est symétrique définie positive. En déduire que $\mathcal{L}(\vec{v}) \geq \mathcal{L}(\vec{u})\ \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)