

Examen d'Analyse 4 (SV-MT)

Juin 2019

Durée : 2h.

Matériel autorisé : - résumé manuscrit de 4 pages (2 feuilles recto-verso)

- les tables de transformées de Fourier et de Laplace

- le Formulaire et Tables du CRM

Attention : sujet recopié de mémoire après l'examen, exactitude pas garantie :)

Exercice 1

I. Soit

$$f(x) = 2x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } f(x) = 2\pi - 2x \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

a) Calculer $F_S f(x)$ la série de Fourier en sinus de $f(x)$.

b) À l'aide du théorème de Dirichlet, comparer $F_S f(x)$ et $f(x)$ sur $[0, \pi]$.

c) À partir de a) et de b), calculer :

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

II. a) Trouver $f(x)$ telle que $\mathcal{F}f(\alpha) = e^{-2i\alpha} \sin(3\alpha)$.

b) Trouver $f(x)$ telle que $\mathcal{F}f(\alpha) = 2\sqrt{2} \alpha^2 e^{-\alpha^2}$

c) Soit

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-y)^2 + 1} \frac{1}{y^2 + 4} dy$$

Calculer $h(x)$ de façon explicite.

d) Soit $\mathcal{F}g(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^4}$ et $f(x) = (xg(x))''$. Calculer $\mathcal{F}f(\alpha)$.

Exercice 2

I. Soit l'équation différentielle suivante : $y'(t) + y(t) = 8 \sinh(t)$ avec $y(0) = 1$.

- En utilisant la méthode du cours, trouver $Y(z)$ la transformée de Laplace de $y(t)$.
- En utilisant la décomposition en éléments simples et les tables de transformées de Laplace, trouver $y(t)$.

II. Soit

$$F(z) = \frac{1}{z^4 - 2z^3 + 2z^2}$$

- Par un calcul de résidus, trouver une fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(z)$.
- Donner les abscisses de convergence de $F(z)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation en utilisant la séparation de variables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2 + \sin(t) + t^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 u(x, t) \right) \text{ pour } t > 0, x \in [0, \pi]$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$

Exercice 4

- Soit $f \in C^\infty_{CL}$, prouver $f \cdot \delta_x = f(a) \cdot \delta_a$
- Soit φ une fonction à décroissance rapide.
Soit

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 ;$$

$$f(x) = 2x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 ;$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x > 1 ;$$

- Exprimer $\langle T_f + \delta_1, \varphi \rangle$.
- Exprimer $\langle (T_f)' + \delta_1, \varphi \rangle$.
- Soit $T_g = (T_f)' + \delta_a$. Exprimer T_g .

3) Résoudre $y'' + y = \delta(x)$.

4) Soit $g_1 = e^{-|x|}$ et $g_2 = \cos(x)$.

Montrer, en utilisant la transformée de Fourier, que $g_1 * g_2 = g_2$.

Indice : $F_c f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta_{-1} + \delta_1)$