Série 23

1. Calculer la longueur des arcs définis ci-dessous :

a) $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $\alpha \leq x \leq \beta$,

b) $y = \ln(1 - x^2)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$,

c) $y = \ln\left[\cos(x)\right]$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$,

d) $y = \arcsin\left(e^{-x}\right)$, $0 \leq x \leq a$.

2. Calculer la longueur des arcs définis paramétriquement ci-dessous :

a) $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$,

b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = -2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$ $-\pi \leq t \leq \pi$.

3. Déterminer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe d'équation $y = f(x)$ autour de l'axe d dans les deux cas suivants :

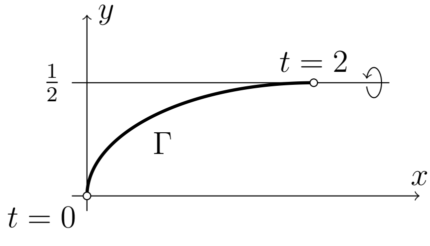
a) $f(x) = \dfrac{1}{3}\, x^3$, $0 \leq x \leq 1$ et $d = (Ox)$,

b) $f(x) = \cosh(x)$, $0 \leq x \leq 1$ et $d = (Oy)$.

4. Calculer l'aire d'une sphère de rayon r .

5. On considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{4 + t^2} \\[2ex] y(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2} \end{cases} \qquad t \in [0, 2] .$$



a) Calculer la longueur de l'arc Γ .

b) Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc Γ autour de l'axe horizontal $y = \frac{1}{2}$.

6. On considère l'arc de courbe Γ défini par

$$y = \sinh^2(x)\,, \qquad x \geq 0\,, \qquad 0 \leq y \leq 1\,.$$

a) Calculer la longueur de l'arc Γ.

b) Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc Γ autour de l'axe vertical d'équation $x = \arg\sinh(1)$.

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

Réponses de la série 23

1. a) $L = a\left[\sinh\left(\frac{\beta}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right]$,

b) $L = -1 + 2\ln(3)$,

c) $L = \ln(3)$,

d) $L = \arg\cosh\left(e^a\right)$.

2. a) $L = 2 + \sqrt{2}\,\arg\sinh(1)$,

b) $L = 16$.

3. a) $A = \dfrac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$,

b) $A = 2\pi\left[\sinh(1) - \cosh(1) + 1\right]$.

4. $A = 4\,\pi\,r^2$.

5. a) $L = \dfrac{\pi}{4}$,

b) $A = \dfrac{\pi}{4}(\pi - 2)$.

6. a) $s = \sqrt{2}$,

b) $A = \pi$.
