M2.L1 : Série d'exercices sur les signaux [Solutions]

1 Signaux périodiques et apériodiques

a) Oui, dans ce cas, $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique de même période T. En effet:

$$X_1(t + T) + X_2(t + T) = X_1(t) + X_2(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

b) Dans ce cas, la réponse n'est pas forcément oui: ça dépend si le rapport T_1/T_2 est rationnel (auquel cas le signal est périodique) ou non (auquel cas le signal est apériodique). Avec les deux exemples donnés dans l'énoncé, on voit bien graphiquement que le premier signal est périodique, tandis que le second ne l'est pas.

c) Dans le cas où T_1 et T_2 sont des nombres entiers, le rapport T_1/T_2 est justement un nombre rationnel, donc le signal est périodique et sa période est le plus petit commun multiple de T_1 et T_2:

$$\text{ppcm}(T_1, T_2) = \min\{N \geq 1 : \text{il existe } k, l \geq 1 \text{ tels que } N = kT_1 = lT_2\}.$$

On peut le voir graphiquement, ou en vérifiant la formule suivante:

$$X_1(t + N) + X_2(t + N) = X_1(t + kT_1) + X_2(t + lT_2) = X_1(t) + X_2(t).$$

d) La période de la sinusoïde fondamentale est $T_1 = 1/f_0$, et les périodes des harmoniques sont de la forme $T_n = 1/(nf_0)$. Ainsi, T_0 est le plus petit commun multiple de toutes ces périodes, et le signal est donc périodique de période T_0 (à nouveau, ceci se voit bien graphiquement).

2 Fréquence d'échantillonnage

Rappelons que $f_1 > f_2 > 0$.

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$: la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (f_1 étant la plus grande fréquence présente dans le signal, i.e. la bande passante).

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$: idem. La condition ici est que $f_e > 2f_1$ (les amplitudes et déphasages ne jouent aucun rôle).

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)t)$: les deux fréquences des sinusoïdes sont respectivement: $2f_1$ et $f_1 + f_2$. Vu que $f_1 > f_2$, il faut donc échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 4f_1$.

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$: ici, un petit calcul s'impose (cf. résumé de trigonométrie):

$$\sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\,(\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)),$$

donc la plus grande fréquence présente dans le signal est $f_1 + f_2$. Il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$.

d) $X_5(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$:

$$\cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\pi(f_1 + f_2)t) - \sin(2\pi(f_1 - f_2)t)\right),$$

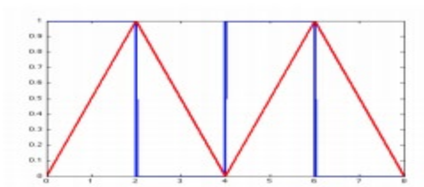
donc il n'y a aucune différence. La plus grande fréquence est $f_1 + f_2$ et il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$. Il faut se rappeler qu'un sinus est rien moins qu'un cosinus avec un déphasage et les déphasages n'ont pas d'influence sur les fréquences.

3 Interlude musical

La taille du fichier est de 3.5 × 60 × 44000 × 32 = 296 Megabits (Environ 35 Mo).

4 Filtre à moyenne mobile

a) Après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$, on vérifie d'abord que le signal $\hat{X}_1(t)$ est constant au cours du temps et prend la valeur 1/2. Voici maintenant les formes du signal $\hat{X}_2(t)$ après passage à travers le même filtre à moyenne mobile (sur le graphe ci-dessous, $T = 2$):



$\hat{X}_2(t)$

Le signal $\hat{X}_2(t)$ est constitué de fonctions linéaires par morceaux. Ceci peut être expliqué intuitivement en analysant la variation de l'intégrale sur le filtre. En effet, lorsque le filtre est en train de "sortir" d'une zone de signal 1, pour chaque unité de déplacement supplémentaire "dx", l'intégrale $\hat{X}_2(t)$ perd aussi "dx*1". Donc d $\hat{X}_2(t)$ / dx = -1. De la même manière lorsque le filtre "entre" dans une zone positive, l'intégrale gagne "dx*1" et d $\hat{X}_2(t)$ / dx = 1. Comme la période est égale à 2 fois la taille du filtre, on alterne entre des segments de droite de pente opposée.

b) Un signal périodique de période T sort constant d'un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$. Pour $0 \le t \le T$, on le voit au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(s)\,ds = \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s+T)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) = \frac{1}{T}\left(\int_{t}^{T} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(s)\,ds
\end{aligned}$$

ne dépend pas de t.

L'exemple $X_1(t)$ du point a) illustre bien ce fait.