Applications linéaires
Endomorphismes du plan

1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

a) $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) & \longmapsto & (|x|;0) \end{array}$

b) $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (x;0) \end{array}$

c) $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (\sqrt{x};\sqrt{y}) \end{array}$

d) $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{M}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f(A) = \det A \end{array}$

e) $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{M}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f(A) = a^2 + b^2 \end{array}$

$P_2[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes en x de degré plus petit ou égal à 2 ; $p = a\,x^2 + b\,x + c$.

f) $f \; : \; \begin{array}{ccc} P_2[x] & \longrightarrow & P_2[x] \\ p & \longmapsto & f(p) = c + b\,(x+1) + a\,(x+1)^2 \end{array}$

g) $f \; : \; \begin{array}{ccc} P_2[x] & \longrightarrow & P_2[x] \\ p & \longmapsto & f(p) = (c+1) + b\,x + a\,x^2 \end{array}$

2. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée. O est l'origine.
On considère l'application $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{v})\,\vec{v} \end{array}$
où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire donné.

a) Montrer que f est linéaire. Que représente f géométriquement ?

b) On note $\overrightarrow{OP'}$ l'image d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$; calculer l'équation vectorielle de l'image d'une droite passant par P et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que :
- $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- $\vec{u} = \vec{v} - 3\vec{w}$ tel que $\|\vec{w}\| = 4$ *et* $\cos\phi = \frac{1}{2}$, $\phi = \angle(\vec{v},\vec{w})$.

3. Soit $\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$

a) Quelle est la nature géométrique de h ?

b) Définir l'inverse de h et montrer alors que l'image par h de tout cercle est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soient E, F et G des espaces vectoriels, g de E vers F et f de F vers G deux applications linéaires.
Montrer les égalités suivantes. Dans quel cas ou pour quelle application l'hypothèse de la linéarité n'est pas nécessaire ?

a) $(\alpha\, f) \circ g = \alpha\, (f \circ g), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

b) $f \circ (\lambda\, g) = \lambda\, (f \circ g), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) $(\alpha\, f) \circ (\lambda\, g) = \alpha\, \lambda\, (f \circ g), \quad \alpha,\, \lambda \in \mathbb{R}$

5. Soient E, F et G des espaces vectoriels et les applications linéaires g_1, g_2 de E vers F et f_1, f_2 de F vers G .
Montrer les égalités suivantes. Dans quel cas ou pour quelle application l'hypothèse de la linéarité n'est pas nécessaire ?

a) $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$

b) $(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$

c) $f \circ (\alpha\, g_1 + \beta\, g_2) = \alpha\, (f \circ g_1) + \beta\, (f \circ g_2)$

d) $(\alpha\, f_1 + \beta\, f_2) \circ g = \alpha\, (f_1 \circ g) + \beta\, (f_2 \circ g)$

6. Soient E, F et G des espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.
Montrer que si f est bijective alors f^{-1} est aussi linéaire.

7. Soient E et F des espaces vectoriels réels.
Montrer que $\mathcal{H}(E,\, F)$, ensemble des applications linéaires de E vers F, est un espace vectoriel réel pour les lois de composition interne et externe suivantes : addition et multiplication par un scalaire.

8. On considère les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ notées respectivement $(\vec{v})$, $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$, $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. O est l'origine.
Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer l'image des vecteurs de base, les équations (paramétriques ou cartésiennes) de $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$, une base de $\operatorname{Ker} f$.

a) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{pmatrix} \end{array}$

Lesquels des vecteurs suivants sont dans $\operatorname{Im} f$:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Lesquels des vecteurs suivants sont dans Ker f :

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \vec{x} = & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (x+y+z) \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ avec $\overrightarrow{OP'} = (4)$.

c) $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{x} = & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (3x-y)\,\vec{e}_1 + (-6x+2y)\,\vec{e}_2 + (9x-3y)\,\vec{e}_3 \end{array}$$

Soient : $\overrightarrow{OP'} = \vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3$ et $\overrightarrow{OM'} = 3\,\vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3$

Déterminer $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ et $f^{-1}(\{\overrightarrow{OM'}\})$.

d) $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \quad \text{définie par :} \\ & & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ avec $\overrightarrow{OP'} = 12\,\vec{u}_1 - 4\,\vec{u}_2$.

e) $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \quad \text{définie par :} \\ & & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

et $f(\vec{e}_3) - f(\vec{e}_1) + 3f(\vec{e}_2) = \vec{0}$.

Déterminer $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$ avec $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ et $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique orthonormée. O est l'origine.
Soit $f \; : \; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :
$$\begin{cases} x' = x + 2y - 5z \\ y' = -2x + y - 5z \\ z' = 4x + 3y - 5z \end{cases}$$

a) Chercher l'image des vecteurs de la base, et les équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b) Soient $A(0;0;1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v} \; , \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$; chercher les équations de $f(F)$.

c) Soit $P'(1;1;1)$, chercher les équations paramétriques de $f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$.

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ une matrice donnée.
On considère $f \; : \; \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = A\,X$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer les images des vecteurs de la base usuelle.

c) Chercher $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$; dans chaque cas, déterminer la dimension et donner une base.

11. a) Soient E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.
Montrer que
si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs de E linéairement dépendants
alors
$f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)$ sont linéairement dépendants.
Ecrire l'énoncé contraposé et donner sa valeur de vérité.

b) Soient E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire et injective de E vers F.
Montrer l'équivalence suivante :
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont n vecteurs de E linéairement indépendants
si et seulement si
$f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)$ sont linéairement indépendants.

12. Déterminer par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, notées respectivement $(\vec{v})$, $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, les matrices des applications linéaires de l'exercice n° 8 a), b), c).

13. Soit $P_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 2 et l'application linéaire
$$\begin{array}{rccl} g & : & P_2[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & p(x) & \longmapsto g(p(x)) = \begin{pmatrix} 4p(-1) \\ p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer la matrice de g par rapport à la base $(x^2; x; 1)$ de $P_2[x]$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de g par rapport à la base $((x-1)^2; x-1; 1)$ de $P_2[x]$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

14. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère les applications linéaires suivantes.

a) $f(x; y) = (2x; y)$

b) f est telle que : $f(1; 1) = (3; 0)$ et $f(4; 2) = (10; 2)$

c) f est la projection orthogonale du plan sur :
- l'axe Ox
- l'axe Oy
- la première bissectrice : $y = x$
- la droite d : $4x = 5y$

Déterminer, dans chaque cas, la matrice de f , $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

15. $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique orthonormée. O est l'origine.
Trouver la matrice de chacune des applications suivantes. Chercher, sans faire de calcul, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ dans les cas a) et b).

a) Dans l'espace, f est une symétrie orthogonale par rapport au plan : $x - 3y + 2z = 0$.

b) f est une projection de l'espace sur la droite d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
parallèlement au plan α : $x + y + z = 0$.

c) Dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ f est définie par $f(X) = A\,X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

16. Soit $P_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n .

a) Soit $f \;:\; \begin{array}{ccc} P_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & f(p) = p^{(3)}(\sqrt{2}) \end{array}$
où $p^{(r)}$ désigne le polynôme dérivé d'ordre r de p .
Chercher la matrice de f par rapport aux bases $(1; x; x^2; \cdots; x^n)$ de $P_n[x]$ et (1) de $\mathbb{R}$.

b) On considère l'application f définie par

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_n \\ p(x) & \longmapsto & f(p(x)) = p(-x) \end{array}$$

Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}\,(1,\, x,\, ...\, x^n)$ de l'ensemble de départ et $\mathcal{E}\,(1,\, 1+x,\, 1+x^2,\, 1+x^3,\, ...\, ,\, 1+x^n)$ de l'ensemble d'arrivée.

17. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
Déterminer la nature géométrique des applications linéaires du plan de matrice $M(f)$, données relativement à B.
Chercher éventuellement $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble des points fixes, l'image d'un vecteur quelconque.

a) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère l'application linéaire f définie par $f = h \circ s \circ p$ où p est la projection orthogonale du plan sur la droite $(O; \vec{u})$ ($\vec{u}$ vecteur donné), s est la symétrie orthogonale d'axe Ox et h est l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Calculer la matrice de f, relativement à B, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer l'équation vectorielle de l'image d'une droite parallèle à $\vec{u}$.

19. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère l'application linéaire $f = r + (h \circ p)$ où h est une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$, r est une rotation de centre O et d'angle $\varphi = \operatorname{Arccos} \frac{4}{5}$ et p est la projection orthogonale du plan sur la droite d'équation $x - 2y = 0$.
Déterminer la matrice de l'application f et montrer que f admet une droite de points fixes.

20. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère les endomorphismes suivants :

- s est une symétrie telle que le point $P(2; 2)$ a pour image le point $P'(1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$,
- r est une rotation de centre O et d'angle $\varphi = -\frac{\pi}{24}$,
- et l'application f définie par $f(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\, \vec{e}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_2)\,(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

a) Montrer que la symétrie s est orthogonale. Déterminer l'équation cartésienne de son axe.

b) Soit g l'endomorphisme défini par $g = s \circ r^4$. Déterminer la matrice de g dans B.

c) On pose $h = f - g$. Calculer la matrice de h et en déduire directement la nature géométrique de h.

21. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine. On considère l'application linéaire g suivante :

$$\begin{array}{rclcl} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} & \longmapsto & g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 6x + 4y \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$. Donner les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ de $\operatorname{Im} g$ et $\vec{b}$ de $\ker g$. Montrer que $B' = (\vec{a},\, \vec{b})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Décomposer un vecteur $\vec{x}$ selon les directions de $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$ puis chercher son image. En déduire que g est composée d'une homothétie h et d'une projection p à déterminer.
Soit le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Représenter graphiquement $p(\overrightarrow{OM})$, $(h \circ p)(\overrightarrow{OM})$, $h(\overrightarrow{OM})$ et $(p \circ h)(\overrightarrow{OM})$ dans le repère orthonormé $(O,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_2))$, unité = 1 cm.

c) Etablir la matrice de g dans la base $B' = (\vec{a},\, \vec{b})$.

22. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f = p \circ h \circ r$ où r est la rotation de centre O et d'argument $\frac{\pi}{4}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$, et p est la projection orthogonale du plan sur la droite $(O; \vec{u})$, $\vec{u} = (1; -2)$.

a) Calculer la matrice de f .

b) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
Calculer $f(\vec{x})$ si $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$ et en déduire la nature géométrique de f .

c) Etablir la matrice de f par rapport à une base formée de vecteurs de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

23. Soit $f = h \circ p$ un endomorphisme de l'espace tel que

h est l'homothétie de centre O et de rapport 3 ;
et p est la projection orthogonale de l'espace sur la droite

$$a\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Sans calcul, chercher $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b) Calculer la matrice M_f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$; puis par rapport à une base formée de vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

24. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}\,(x - 2\,y + 2\,z) \\ y' = \frac{2}{9}\,(-x + 2\,y - 2\,z) \\ z' = -\frac{2}{9}\,(-x + 2\,y - 2\,z) \end{cases}$$

a) Chercher les équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b) Quelle est la nature géométrique de f ?
Déterminer la matrice de f relativement à une base formée de vecteurs de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

25. Soient $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$f(\vec{e}_1) = \vec{e_1}'$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e_2}'$; $\vec{e_1}'$ et $\vec{e_2}'$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3\,\vec{e_1}' + \vec{e_2}' = 3\,\vec{a} \\ 5\,\vec{e_1}' + 2\,\vec{e_2}' = 9\,\vec{a} \end{cases} \qquad \text{où } \vec{a} \text{ est un vecteur non nul de } \mathbb{R}^2.$$

a) Déterminer vectoriellement $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b) Déterminer la nature géométrique de f. Déterminer la matrice de f par rapport à une base judicieusement choisie.

26. Soit f l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ -3x + 4y \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
Montrer que f admet une droite de points fixes de direction notée $\overrightarrow{u}$.
Que peut-on en déduire sur la nature géométrique de f ?

b) Montrer qu'un point M et son image M' déterminent une direction fixe notée $\overrightarrow{v}$.
Calculer $f(\overrightarrow{v})$.

c) Déterminer la matrice de f relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et en déduire la nature géométrique de f.

27. On considère l'endomorphisme f défini par sa matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer le paramètre $a \in \mathbb{R}$ de sorte que l'endomorphisme f admette une droite de points fixes.
Déterminer alors $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
Que peut-on en déduire sur la nature géométrique de f ?

b) Relativement à une base judicieusement choisie, déterminer la matrice de f et en déduire sa nature géométrique.

28. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan et l l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rcccl} l & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{x} & \longmapsto & l(\vec{x}) = k\vec{x} + \alpha(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \qquad k\,,\alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Soit encore un vecteur $\vec{v}$ du plan tel que $\vec{v}\cdot\vec{u} = 3$ et s l'affinité d'axe $(O\,,\,\vec{u})$, de direction $\vec{v}$ et rapport -1.

a) Déterminer la matrice M de $f = l \circ s$ relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) On pose $k = -2$.
Est-il possible de déterminer une valeur de α pour laquelle f est seulement une projection ?
Déterminer avec précision la nature géométrique de f.

c) Même question avec $k = -1$.

29. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
Relativement à B, on donne la matrice A d'une application linéaire f :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f n'est pas bijective.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points fixes de f, ainsi que l'équation cartésienne de $\mathrm{Ker} f$.
Interpréter f géométriquement.

c) Donner une base de $\mathbb{R}^2$ par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale.
Dans cette base, donner la matrice A' de f.

On considère les deux applications linéaires suivantes :
- r est une rotation de centre O et d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{9}$;
- s est une symétrie orthogonale d'axe $(O,\, \vec{a})$ tel que $\angle(\vec{e}_1;\, \vec{a}) = \frac{\pi}{6}$.

d) Relativement à la base B, calculer :
- la matrice de l'application $s \circ r^{12}$;
- la matrice de l'application $g = 2\,f + s \circ r^{12}$; en déduire une interprétation géométrique de g.

30. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine.
On considère les endomorphismes suivants.

a) s est la symétrie oblique envoyant le point $A(6; -2)$ sur son image $A'(0; 4)$.
Calculer :
- l'équation cartésienne de l'axe de s ;
- les composantes d'un vecteur donnant la direction de s ;
- la matrice de s dans la base B.

b) On considère les applications linéaires suivantes :
- l'homothétie h de centre O et de rapport 2 ;
- la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$;
- l'application g définie par : $\begin{cases} g(\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2) = -7\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 \\ g(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 \end{cases}$

Calculer la matrice de l'application $f = h \circ s + \frac{\sqrt{2}}{2}(g \circ r^2)$ dans la base B.

c) Montrer que f admet une droite de points fixes.

d) Montrer qu'un point M quelconque du plan et son image M' déterminent une direction fixe $\vec{v}$ et calculer $f(\vec{v})$.

e) Dans une base judicieusement choisie, calculer la matrice de f et en déduire sa nature géométrique.

31. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$. O est l'origine.

On note g l'application linéaire désignant une affinité de rapport $k = 3$ telle que $\overrightarrow{OP} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ a pour image $\overrightarrow{OP'} = 3\vec{e}_1$.

a) Déterminer la matrice M_g de g relativement à la base B.

On considère les deux endomorphismes suivants :
- p est une projection orthogonale dont le noyau est l'axe de l'affinité g ,
- s est une symétrie orthogonale d'axe $(O,\ \vec{a})$ telle que $\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = -\frac{\pi}{8}$.

b) Calculer la matrice de l'application $f = p \circ g \circ s^{(2k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$, relativement à la base B.

c) Déterminer la nature géométrique de f.

32. a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.
Montrer l'équivalence suivante :
il existe f de E vers E linéaire telle que $\ker f = \operatorname{Im} f$
si et seulement si
la dimension de E est paire.

b) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ définit par
$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{0} \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \end{cases}$$
où $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer la matrice de f. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner la nature géométrique de f.

33. a) Soient E et F des espaces vectoriels réels de dimension p et n respectivement et dont les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont fixées.
Montrer que l'application linéaire suivante est bijective :
$$\begin{array}{cccc} \varphi & : \mathcal{H}(E,\, F) & \longrightarrow & \mathbb{M}(n \times p\,;\, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = M \end{array}$$

b) On pose $E = F = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R}^2)$ ainsi qu'une base de cet ensemble.
Relativement à cette base, donner les composantes

i) de l'application linéaire f telle que $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \end{pmatrix}$

ii) d'une rotation r de centre O et angle α.

Réponses

1. a) non b) oui c) non d) non e) non f) oui g) non

2. a) f est une symétrie d'axe d perpendiculaire à $\vec{v}$ passant par O.

3. a) h est une homothétie de centre O et de rapport 2.

b) $$h^{-1} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{array}$$

8. a) $\operatorname{Im} f$: droite d'équation : $y = -4\,x$
$\operatorname{Ker} f$: droite d'équation : $y = 2\,x$
$\vec{a}\,,\ \vec{c} \in \operatorname{Im} f$ $\qquad \vec{d} \in \operatorname{Ker} f$

b) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} f$: plan d'équation : $x + y + z = 0$
$f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$: plan d'équation : $x + y + z = 4$

c) $\operatorname{Im} f$: droite d'équation : $6x = -3y = 2z$
$\operatorname{Ker} f$: droite d'équation : $3x - y = 0$
$f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$: droite d'équation : $3x - y = 1$

d) $\operatorname{Im} f$: droite d'équation : $3y + x = 0$
$\operatorname{Ker} f$: plan d'équation : $x - 2y + 3z = 0$
$f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$: plan d'équation : $x - 2y + 3z = 4$

e) $f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2$ $\qquad f(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$ $\qquad f(\vec{e}_3) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} f$: droite d'équation : $-3x = y = 3z$
$f^{-1}(\{\overrightarrow{OP'}\})$: plan d'équation : $x + y - 2z - 3 = 0$

9. a) $\operatorname{Im} f$: plan d'équation : $-2x + y + z = 0$
$\operatorname{Ker} f$: droite d'équation : $-3x = y = 3z$

b) $f(F) = \overrightarrow{OA'}$ avec $A'\,(-5, -5, -5)$

c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - \lambda \\ \frac{3}{5} + 3\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

10. c) $\operatorname{Im} f = \left\{ Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ de dimension 2

$\operatorname{Ker} f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ de dimension 2

12. a) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

b) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$

13. a) $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

14. a) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (sur Ox) $\qquad M(f) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (sur $y = x$)

$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sur Oy) $\qquad M(f) = \dfrac{1}{41} \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$ (sur $4x = 5y$)

15. a) $M = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \qquad \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$

b) $M = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \operatorname{Im} f$: droite $d \qquad \operatorname{Ker} f$: plan α

c) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

16. a) M est une matrice à une ligne et n colonnes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3! & 4!\sqrt{2} & \cdots & \frac{k!}{(k-3)!}(\sqrt{2})^{k-3} & \cdots & \frac{n!}{(n-3)!}(\sqrt{2})^{n-3} \end{pmatrix}$$

b) La matrice est d'ordre $(n+1)\times(n+1)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & .... & (-1)^{n+1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .... & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .... & (-1)^n \end{pmatrix}$$

17. a) Symétrie orthogonale d'axe Ox.

b) Symétrie centrale ou rotation d'angle π.

c) Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Projection orthogonale sur l'axe Ox.

e) Homothétie de rapport 2.

f) Homothétie de rapport 2 suivie d'une projection orthogonale sur l'axe Ox.

18. a) $M(h \circ s \circ p) = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} -16 & -12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

19. $M(f) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

L'ensemble des points fixes est une droite d'équation : $7x + y = 0$.

20. a) $\sqrt{3}x - 3y = 0$

b) $M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

h est une projection orthogonale du plan sur la droite $O, \vec{e}_2$.

21. $M'(g) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}\,;\,\vec{b})$ où $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

22. a) $M_f = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\operatorname{Im} f$: la droite $(O\,,\,\vec{u})$.

$\operatorname{Ker} f$: la droite d'équation $x + 3y = 0$.

f est la projection du plan sur la droite $(O\,,\,\vec{u})$ de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$ où $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$.

23. a) $\operatorname{Im} f$: droite $(O\,,\overrightarrow{a})$
Ker f : le plan α orthogonal à $\overrightarrow{a}$ passant par O

b) $M_f = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (base canonique)

$M'_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$ où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de Ker f et $\overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} f$.

24. a) $\operatorname{Im} f$: droite d'équation $2x = -y = z$.

Ker f : plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$.

b) f est une projection orthogonale de l'espace sur la droite $\operatorname{Im} f$.
$M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$ où $\vec{u} \in \operatorname{Im} f$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de Ker f.

25. a) $\operatorname{Im} f$: droite passant par O de vecteur directeur $\vec{a}$.

Ker f : droite passant par O de vecteur directeur $4\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

b) f est une projection du plan sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à Ker f composée avec une homothétie de centre O et de rapport $k = -3\,a_1 + 12\,a_2$ où $\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2$.
$M'_f = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}\,;\,\vec{v})$ où $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$.

26. a) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$
$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$
La droite de points fixes a pour équation : $x - y = 0$, dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
f est une affinité ou une symétrie.

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$f(\vec{v}) = 7\vec{v}$

c) $M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

f est une affinité d'axe $y = x$, de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rapport 7.

27. a) $a = 7$ et la droite de points fixes a pour équation : $2x - y = 0$, dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) L'endomorphisme est une affinité d'axe $(O, \vec{u})$, de rapport $k = 8$ et de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, la matrice de f s'écrit : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

28. a) $M = \begin{pmatrix} \alpha + k & -3\alpha \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

b) Non.
Si $\alpha = 2$ f alors comporte une projection ; elle est alors composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une projection de direction $\vec{u}$ sur la droite $(O, -3\vec{u} + \vec{v})$.

c) Oui. $\alpha = 1$
C'est une projection de direction $\vec{u}$ sur la droite $(O, -3\vec{u} + \vec{v})$.

29. a) f n'est pas bijective car $\det A = 0$.

b) L'ensemble des points fixes est la droite d'équation $x - \sqrt{3}y = 0$.
Le noyau est la droite d'équation $\sqrt{3}x + y = 0$.
f est une projection orthogonale du plan sur $\operatorname{Im} f$, la droite invariante d'équation $x - \sqrt{3}y = 0$.

c) Relativement à la base $(\vec{a}, \vec{b})$ formée des vecteurs directeurs de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, la matrice de f s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $M_{sor^{12}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g est la composée d'une projection orthogonale sur la droite $(O, \vec{e}_1)$ et d'une homothétie de rapport 2.

30. a) La symétrie est d'axe la droite d'équation $x - 3y = 0$, de direction parallèle au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $M(f) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

c) La droite de points fixes a pour équation $x + y = 0$.

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $x + y = 0$ et la base $B = (\vec{u}; \vec{v})$.
Dans B : $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

f est une affinité de direction $\vec{v}$, d'axe $(O,\ \vec{u})$ et de rapport 3.

31. a) $M_g = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $M_f = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) f est la composée d'une homothétie de centre O et rapport $\lambda = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, avec une projection sur la droite $x - y = 0$, parallèlement à $\overrightarrow{e}_1$.