Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 3

Logique : exercice 9

Rappels :

- Soit le théorème $T\ :\ \forall\, A\,,\, B\, \subset E\,, \quad P\ \Leftrightarrow\ Q$

  et son énoncé contraposé $C\ :\ \forall\, A\,,\, B\, \subset E\,, \quad \text{non}\, P\ \Leftrightarrow\ \text{non}\, Q$
  Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow T$ vrai.
- Soit le théorème $T\ :\ \forall\, A\,,\, B\,, C\, \subset E\,, \quad P\ \Rightarrow\ Q$
  et son énoncé contraposé $C\ :\ \forall\, A\,,\, B\,,\, C\, \subset E\,, \quad \text{non}\, Q\ \Rightarrow\ \text{non}\, P$

  Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow T$ vrai.
- Pour démontrer un théorème en utilisant son énoncé contraposé :
  - on écrit l'énoncé contraposé C,
  - on démontre C par la méthode directe.

(a) *Remarque* :
$A \cap \overline{B} = \emptyset$ se lit : l'intersection des ensembles A et $\overline{B}$ est égale à l'ensemble vide.
Sa négation est : l'intersection des ensembles A et $\overline{B}$ n'est pas égale à l'ensemble vide.
Faire de même pour $A \subset B$ et en déduire sa négation.

Soit le théorème T :

$$\forall\, A\,,\, B\, \subset E\ :\quad A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$$

On écrit la proposition contraposée C :

$$\forall\, A\,,\, B\, \subset E\ :\quad A \cap \overline{B} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \not\subset B$$

Preuve de C par la méthode directe :

$$\begin{aligned} A \cap \overline{B} \neq \emptyset \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \cap \overline{B} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \notin B \\ & \Leftrightarrow \quad A \not\subset B \end{aligned}$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(b) *Remarque* :
$A \subset B$ se lit : A est un sous-ensemble de B.
Sa négation est : A n'est pas un sous-ensemble de B.
Faire de même pour $E = \overline{A} \cup B$ et en déduire sa négation.

Soit le théorème T :

$$\forall\, A\,,\, B\, \subset E\ :\quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad E = \overline{A} \cup B$$

On écrit la proposition contraposée C :

$\forall A\,, B \subset E :\quad A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad E \neq \overline{A} \cup B$

Preuve de C par la méthode directe :

$$\begin{aligned}
A \not\subset B \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \notin B \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \cap \overline{B} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \notin \overline{A \cap \overline{B}} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \notin \overline{A} \cup B \\
& \Leftrightarrow \quad E \neq \overline{A} \cup B
\end{aligned}$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

(c) *Remarque* :
$\mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C)\ =\ \emptyset$ se lit : l'intersection des ensembles $\mathcal{C}_A(C)$ et $\mathcal{C}_B(C)$ est égale à l'ensemble vide.
Sa négation est : l'intersection des ensembles $\mathcal{C}_A(C)$ et $\mathcal{C}_B(C)$ n'est pas égale à l'ensemble vide.
Faire de même pour $(A \cap B)\ \subset\ C$ et en déduire sa négation.

Soit le théorème T :

$\forall\ A, B, C\ \subset\ E,\quad (A \cap B)\ \subset\ C\ \Rightarrow\ \mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C)\ =\ \emptyset\,.$

On écrit la proposition contraposée C :

$\forall A\,, B\,, C \subset E :\quad \mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C)\ \neq\ \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A \cap B)\ \not\subset\ C$

Preuve de C par la méthode directe :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C)\ \neq\ \emptyset \quad & \Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in \mathcal{C}_A(C)\ \cap\ \mathcal{C}_B(C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in \mathcal{C}_A(C) \text{ et } x \in \mathcal{C}_B(C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\, (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in (A \cap B) \text{ et } x \notin C \\
& \Rightarrow \quad (A \cap B)\ \not\subset\ C
\end{aligned}$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

Logique : exercice 10

Ecrire l'énoncé du théorème sous la forme suivante :

$$\text{Soit } \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{référentiel}} \text{ si } \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{hypothèse}} \text{ alors } \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{conclusion}}.$$

Puis le traduire en language quantifié.
Soit x un entier positif, si x est impair, alors son carré est impair.

Traduction en language quantifié :

$$T \quad : \quad \underbrace{\forall\, x \in \mathbb{N}\,,}_{\text{référentiel}} \qquad \underbrace{x = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}}_{\text{hypothèse}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 = 2l+1\,,\ l \in \mathbb{N}}_{\text{conclusion}}$$

Preuve de T par la méthode directe :

Par hypothèse : $x = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}$, d'où :

$x^2 \ = \ (2k+1)^2 \ = \ 4k^2+4k+1 \ = \ 2\,(2k^2+2k)+1 \ = \ 2l+1\,, \qquad l \in \mathbb{N}$

donc x^2 est impair.

Théorème réciproque R :

$$R \quad : \quad \underbrace{\forall\, x \in \mathbb{N}\,,}_{\text{référentiel}} \qquad \underbrace{x^2 = 2l+1\,,\ l \in \mathbb{N}}_{\text{hypothèse}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}}_{\text{conclusion}}$$

Dans ce cas, il est plus facile de démontrer l'énoncé contraposé de R !

Théorème contraposé de R :

$$C \quad : \quad \underbrace{\forall\, x \in \mathbb{N}\,,}_{\text{référentiel}} \qquad \underbrace{x \neq 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}}_{\text{hypothèse}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 \neq 2l+1\,,\ l \in \mathbb{N}}_{\text{conclusion}}$$

ce qui est équivalent à l'énoncé suivant :

le carré d'un entier positif pair est un entier pair. En langage quantifié, cet énoncé s'écrit :

$$C \quad : \quad \underbrace{\forall\, x \in \mathbb{N}\,,}_{\text{référentiel}} \qquad \underbrace{x = 2k\,,\ k \in \mathbb{N}}_{\text{hypothèse}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 = 2l\,,\ l \in \mathbb{N}}_{\text{conclusion}}$$

La preuve est immédiate.

C est vrai donc R est vrai.

Le théorème T et son réciproque R étant vérifiés, on a donc : $\quad T \quad \Leftrightarrow \quad R\,.$

La contraposée de cette équivalence est donc aussi vraie : $\quad$ non $T \quad \Leftrightarrow \quad$ non $R\,.$

On a donc les deux nouveaux théorèmes :

$\forall\, x \in \mathbb{N}\,, \quad x$ pair $\quad \Leftrightarrow \quad x^2$ pair

$\forall\, x \in \mathbb{N}\,, \quad x$ impair $\quad \Leftrightarrow \quad x^2$ impair

Logique : exercice 11

Rappel :
Soit $T \ : \ [\forall \ldots,\ P \ \Rightarrow \ Q]$ alors sa réciproque R est : $R \ : \ [\forall \ldots,\ Q \ \Rightarrow \ P]$
et sa contraposée C est : $C \ : \ [\forall \ldots,$ non $Q \Rightarrow$ non $P\,]$
Attention, ne pas confondre réciproque et contraposée !

(a) • R : $\forall\, n, m \ \in \ \mathbb{N}$ *(référentiel)*
m est pair ou n est pair *(hypothèse)*
$\Rightarrow$
m^2+n^2 impair ou $m^2+n^2 = 4k,\ k \ \in \ \mathbb{N}$ *(conclusion)*

Preuve :

On distingue deux cas pour l'hypothèse :
m pair et n pair $\Leftrightarrow$
$\exists\, l, l' \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2l$ et $n = 2l'$
$m^2 + n^2 = 4l^2 + 4l'^2 = 4(l^2 + l'^2) = 4\alpha\,,\ \alpha \in \mathbb{N}$

m pair et n impair (ou l'inverse) $\Leftrightarrow$
$\exists\, l, l' \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2l$ et $n = 2l' + 1$
$m^2 + n^2 = 4l^2 + 4l'^2 + 4l' + 1 = 2(2l^2 + 2l'^2 + 2l') + 1 = 2\beta + 1\,,\ \beta \in \mathbb{N}$

- C : $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ *(référentiel)*
  m impair et n impair *(hypothèse)*
  $\Rightarrow$
  $m^2 + n^2$ pair et $m^2 + n^2 \neq 4k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ *(conclusion)*

Preuve :
Par hypothèse : $\exists\, k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2k + 1$ et $n = 2k' + 1$

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2 \\ &= 4\gamma + 2,\ \gamma \in \mathbb{N} \\ &= 2(2\gamma + 1) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $m^2 + n^2$ est un entier pair qui n'est pas multiple de 4 car $2\gamma + 1$ est impair.

(b) $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$:
$m^2 + n^2$ impair ou $m^2 + n^2 = 4k,\ k \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow$
m est pair ou n est pair.

Justification :
sens direct " $\Rightarrow$ " :
a été montré par contraposée sous 1. (voir C).
sens indirect " $\Leftarrow$ " :
a été montré sous 1. (voir R).

Logique : exercice 13

Marche à suivre.

- Vérifier la proposition pour le plus petit n.
- Démontrer le "pas" de récurrence.
  - Expliciter l'hypothèse et la conclusion du "pas" de récurrence.
  - Rédiger la preuve.

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$.
Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\,\Big|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{= S_n} + (n+1)$

$S_{n+1} = S_n + n + 1\,.$

Or par hypothèse, $\quad S_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\,, \quad$ donc

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\, n\,(n+1) \;+\; n + 1\,,$

$S_{n+1} = (\frac{1}{2}n + 1)\,(n+1) \;=\; \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$ **.**

$$S_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad n\,(n+1)\,\big|_{n=1} = 2\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1\,.$

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \; n\,(n+1)$ $\quad$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \; (n+1)\,(n+2)\,.$

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}_{= S_n} + 2(n+1)$

$S_{n+1} = S_n + 2(n+1)\,.$

Or par hypothèse, $\quad S_n = n\,(n+1)\,, \quad$ donc

$S_{n+1} = n\,(n+1) \;+\; 2(n+1) = (n+1)\,(n+2)$

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$ **.**

$$S_1 = 1^1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)\,\bigg|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1\,.$

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)$ $\quad$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \; \frac{1}{3}\,(n+1)\,(2n+1)\,(2n+3)\,.$

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}_{= S_n} + (2n+1)^2$

$S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2\,.$

Or par hypothèse, $\quad S_n = \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)\,, \quad$ donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \tfrac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1) \;+\; (2n+1)^2 \\ &= (2n+1)\,\tfrac{1}{3}\,(2n^2 - n + 6n + 3) \\ &= (2n+1)\,\tfrac{1}{3}\,(2n^2 + 5n + 3) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(2n+1)\,2\,(n + \tfrac{3}{2})\,(n+1) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(2n+1)\,(2n+3)\,(n+1) \end{aligned}$$

(d) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad 3^n - 1\,\big|_{n=1} = 2\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = 3^n - 1$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = 3^{n+1} - 1$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}}_{=S_n} + 2 \cdot 3^n$

$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot 3^n$.

Or par hypothèse, $S_n = 3^n - 1$, donc

$S_{n+1} = 3^n - 1 \; + \; 2 \cdot 3^n = 3^n\,(1+2) - 1 = 3^{n+1} - 1$

(e) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = 1^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \Bigg|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}_{=S_n} + (n+1)^3$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

Or par hypothèse, $S_n = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\tfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \; + \; (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\,\tfrac{1}{4}\,(n^2 + 4n + 4) \\ &= \tfrac{1}{4}\,(n+1)^2\,(n+2)^2 \end{aligned}$$

(f) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,\Bigg|_{n=1} = 3\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{3}{2}\,(3^{n+1} - 1)\,.$

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}_{=S_n} + 3^{n+1}$$

$S_{n+1} = S_n + 3^{n+1}\,.$

Or par hypothèse, $S_n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,,$ donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \tfrac{3}{2}\,(3^n - 1) \;+\; 3^{n+1} \\ &= \tfrac{1}{2}\,3^{n+1} \;+\; 3^{n+1} \;-\; \tfrac{3}{2} \\ &= 3^{n+1}\,(\tfrac{1}{2} + 1) \;-\; \tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}\,(3^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

(g) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{n}{n+1}\right|_{n=1} = \frac{1}{2}\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1\,.$

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\,.$

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}}_{=S_n} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\,.$$

Or par hypothèse, $S_n = \dfrac{n}{n+1}\,,$ donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n}{n+1} \;+\; \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

(h) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n\,(n+1)\,.$

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)\,\Big|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+2}\,(n+1)\,(n+2)$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}\,n^2}_{=S_n} + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2$

$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2$.

Or par hypothèse, $S_n = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)$, donc

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1) \;+\; (-1)^{n+2}\,(n+1)^2$,

$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\left[-\frac{1}{2}\,n + (n+1)\right]$,

$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\left[\,\frac{1}{2}\,n + 1\,\right]$,

$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\frac{1}{2}\,[\,n+2\,]$,

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+2}\,(n+1)\,(n+2)$.

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $(1-x)\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$$(1-x)\,(x^0) = 1 - x \qquad \text{et} \qquad 1 - x^n\,\Big|_{n=1} = 1 - x\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $(1-x)\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $(1-x)\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
& (1-x)\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n) \\
= \;& (1-x)\,[\,(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1}\,) + x^n\,] \\
= \;& \underbrace{(1-x)\left(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)}_{=\,1-x^n} + (1-x)\,x^n \\
= \;& (1 - x^n) + (1-x)\,x^n \\
= \;& 1 - x^n + x^n - x^{n+1} \\
= \;& 1 - x^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

(j) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $5^n + 5 < 5^{n+1}$.

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$5+5<5^2$
On a : $10<25$ donc la proposition est vraie pour $n=1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $5^n+5<5^{n+1}$ pour un $n\in\mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $5^{n+1}+5<5^{n+2}$.

Preuve :

$5^{n+1}+5 = 5^{n+1}+25-20 = 5(5^n+5)-20 < 5\cdot 5^{n+1}-20$ par hypothèse d'induction

donc
$5^{n+1}+5<5^{n+2}-20<5^{n+2}$

(k) $\forall n\in\mathbb{N}$: 10^n-1 est un multiple de 9.
Vérification de la proposition pour $n=0$.
$10^0-1=1-1=0=9\cdot 0$
donc la proposition est vraie pour $n=0$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $10^n-1=9k$ pour un $n\in\mathbb{N}$ donné et $k\in\mathbb{N}$.

Conclusion : $10^{n+1}-1=9\,l,\ l\in\mathbb{N}$.

Preuve :

$10^{n+1}-1=10\cdot 10^n-1=10\,(9k+1)-1$ car par hypothèse d'induction $10^n=9k+1$

donc

$10^{n+1}-1=10\cdot 9k+10-1=10\cdot 9k+9=9\,l,\quad l=10k+1\in\mathbb{N}$

$10^{n+1}-1$ est donc un multiple de 9.

(l) $\forall n\in\mathbb{N}$: $2^{2n}+2$ est divisible par 3.
Vérification de la proposition pour $n=0$.
$2^0+2=1+2=3$
donc la proposition est vraie pour $n=0$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^{2n}+2=3k$ pour un $n\in\mathbb{N}$ donné et $k\in\mathbb{N}$.

Conclusion : $2^{2(n+1)}+2=3\,l,\ l\in\mathbb{N}$.

Preuve :

$2^{2(n+1)}+2=2^{2n+2}+2=4\cdot 2^{2n}+2=3\cdot 2^{2n}+2^{2n}+2$

or par hypothèse d'induction $2^{2n}+2=3k$

donc

$2^{2(n+1)}+2=3\cdot 2^{2n}+3k=3\,l,\quad l=2^{2n}+k\in\mathbb{N}$

$2^{2(n+1)}+2$ est donc un multiple de 3, c'est-à-dire il est divisible par 3.

(m) $\forall n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 6$: $2^n\geq 6n+7$.
Vérification de la proposition pour $n=6$.
$2^n=2^6=64$

$6n+7=36+7=43$

et $64>43$

donc la proposition est vraie pour $n = 6$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^n \geq 6n + 7$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné et $n \geq 6$.

Conclusion : $2^{2n+1} \geq 6(n+1) + 7, \quad n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 6$.

Preuve :

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (6n + 7)$ par hypothèse d'induction

$2^{n+1} \geq 12n + 14 = 6n + 6n + 6 + 7 + 1 = 6(n+1) + 7 + 6n + 1$

ainsi

$2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7 + 6n + 1 \geq 6(n+1) + 7$

(n) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$: $2^n < n!$.

Vérification de la proposition pour $n = 4$.

$2^4 = 16$

et $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

On a : $16 < 24$ donc la proposition est vraie pour $n = 4$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^n < n!$ $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ donné.

Conclusion : $2^{n+1} < (n+1)!$.

Preuve : pour $n \geq 4$

$2^n < n! \quad | \cdot 2$

$2^{n+1} < 2 \cdot n! < (n+1)!$

car : $2 \cdot n! < (n+1)!$

en effet :

$2 \cdot n! < (n+1) \cdot n!$

$2 < n + 1$ ce qui est vrai car $n \geq 4$

(o) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 7$: $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$.

Vérification de la proposition pour $n = 7$.

$\left(\frac{4}{3}\right)^7 > 7$ car $1 > \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot 7$

donc la proposition est vraie pour $n = 7$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 7$ $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 7$ donné.

Conclusion : $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} > n$

Preuve : pour $n \geq 7$

$\left(\frac{4}{3}\right)^n > n \quad | \cdot \frac{4}{3}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} > n \cdot \frac{4}{3} > n + 1$

car : $n \cdot \frac{4}{3} > n + 1$

en effet :

$4n > 3n + 3$

$n > 3$ ce qui est vrai car $n \geq 7$

(p) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \quad \dfrac{(2n)!}{n!n!} \ \leq \ 2^{2n-1}$

Vérification de la proposition pour $n = 1$ **.**

$\dfrac{(2n)!}{n!n!} \ = \ \dfrac{(2\cdot 1)!}{1!1!} \ = \ \dfrac{2!}{1\cdot 1} \ = \ \dfrac{2}{1} \ = \ 2$

et $2^{2n-1} \ = \ 2^{2\cdot 1-1} \ = \ 2^1 \ = \ 2$

On a $2 \ \leq \ 2$ et la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $\dfrac{(2n)!}{n!n!} \ \leq \ 2^{2n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \ \leq \ 2^{2n+1}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)n!n!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&\leq \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \quad \text{par hypothèse} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \\
&= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \\
&= \frac{(2n+1)}{(n+1)} \cdot 2^{2n} \\
&\leq 2^{2n+1}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{(2n+1)}{(n+1)} \ \leq \ 2$

en effet

$$\begin{aligned}
& 2n+1 \ \leq \ 2(n+1) \\
\Leftrightarrow \ & 2n+1 \ \leq \ 2n+2
\end{aligned}$$

c'est vrai !

(q) $3^{3n} + 1$ est un multiple de 7 pour tout n impair et $n \geq 1$.

Vérification de la proposition pour $n = 1$.

$3^{3n} + 1 = 3^{3\cdot 1} + 1 = 3^3 + 1 = 28 = 7 \cdot 4$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $3^{3(2l+1)} = 7k$, $k \in \mathbb{N}^*$, pour un $n = 2l+1$ donné , $l \in \mathbb{N}$

Conclusion : $3^{3(2l+3)+1} = 7k'$, $k' \in \mathbb{N}^*$,

Preuve :

$$\begin{aligned}
3^{3(2l+3)}+1 &= 3^{6l+9)}+1\\
&= 3^6\cdot 3^{6l+3}+1\\
&= 3^6\cdot 3^{6l+3}+3^6-3^6+1\\
&= 3^6\left(3^{3(2l+1)}+1\right)-3^6+1\\
&= 729\cdot 7k-729+1 \qquad : \text{par hypothèse de récurrence et } 3^6=729\\
&= 729\cdot 7k-728\\
&= 7\,(729k-104)\\
&= 7k' \qquad \text{avec } k'=729k-104\in\mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Logique : exercice 14

Rappels :

- La proposition $\quad P\ :\quad \forall\, x\in E\,,\ R\ \Rightarrow\ S$
  a pour négation $\quad \text{non } P\ :\quad \exists\, x\in E\,,\ R\ \text{ et }\ \text{non } S$

  Attention au quantificateur !
  Attention la négation d'une implication n'est pas une implication !

- Pour montrer que P est fausse, on montre que non P est vraie. C'est-à-dire il existe un élément de E qui vérifie R et non S (méthode du contre-exemple) : l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion fausse.

(a) $P\ :\quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,,\ x^2=9\ \Rightarrow\ x=3\,.$

non P : $\quad \exists\, x\in\mathbb{R}\,,\ x^2=9\ \text{ et }\ x\neq 3$
P faux ; contre-exemple : si $x=-3$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

(b) $P\ :\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}\,,\ x^2=y^2\ \Rightarrow\ x=y\,.$

non P : $\quad \exists\, x\,,y\in\mathbb{R}\,,\ x^2=y^2\ \text{ et }\ x\neq y$
P faux ; contre-exemple : si $x=2\,,\ y=-2$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

(c) $P\ :\quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,,\ x\leq 2\ \Rightarrow\ x\leq 0\,.$

non P : $\quad \exists\, x\in\mathbb{R}\,,\ x\leq 2\ \text{ et }\ x>0$
P faux ; contre-exemple : si $x=1$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

(d) $P\ :\quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,,\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ x\in\mathbb{Q}\,.$

non P : $\quad \exists\, x\in\mathbb{R}\,,\ x\in\mathbb{R}\ \text{ et }\ x\notin\mathbb{Q}$
P faux ; contre-exemple : si $x=\sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

(e) $P\ :\quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,,\ 2x^2=8\ \Rightarrow\ x=2 \text{ ou } x=-2\,.$

non P : $\quad \exists\, x\in\mathbb{R}\,,\ 2x^2=8\ \text{ et }\ (x\neq 2\ \text{ et }\ x\neq -2)$
P vrai.

(f) $P\ :\quad \forall\,(n;\,m)\in\mathbb{N}^2\,,\ n+m=0\ \Rightarrow\ n=m=0\,.$

non P : $\quad \exists\,(n;\,m)\in\mathbb{N}^2\,,\ n+m=0 \text{ et } (n\neq 0\ \text{ ou }\ m\neq 0)$
P vrai.

(g) $P\ :\quad \forall\,(a;\,b)\in\mathbb{R}^2\,,\ a<b\ \Rightarrow\ \exists x\in\ \mathbb{Q}\,,\ a<x<b\,.$

non P : $\exists\,(a;\,b) \in \mathbb{R}^2\,,\ a < b$ et $(\forall x \in \mathbb{Q}\,,\ a \geq x$ ou $x \geq b\,)$
P vrai.

(h) P : Un nombre est irrationnel lorsqu'il s'écrit comme produit de deux nombres irrationnels.

On commence par réécrire la proposition :

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x$ est produit de 2 irrationnels $\Rightarrow$ x est irrationnel.

non P : $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x$ est produit de 2 irrationnels et x est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,,$ l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

(i) P : a et b étant irrationnels, leur quotient est irrationnel.

On commence par réécrire la proposition :

$\forall\, a\,, b \in \mathbb{R}\,,\ a$ et b sont irrationnels $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

non P : $\exists\, a\,, b \in \mathbb{R}\,,\ a$ et b sont irrationnels et $\dfrac{a}{b}$ est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}\,,$ l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

Logique : exercice 16

(a) *Référentiel* : $\forall\ m, n, p \in \mathbb{N}^*$
Hypothèse : p divise m et p divise n
Conclusion : $\forall\ a, b \in \mathbb{N}\,,\ p$ divise $(a\,m + b\,n)$

Preuve par la méthode directe :
$\exists\ k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = k\,p$ et $\exists\ l \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = l\,p$
donc
$\forall\ a, b \in \mathbb{N}\,,\ (a\,m + b\,n) = (a\,k\,p + b\,l\,p) = p\,(k\,a + l\,b)$
et ainsi p divise $a\,m + b\,n\,.$

(b) *Rappel* :
non$[\forall\ ...\,,\ P \Rightarrow Q\,]$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\ ...\,,\ P$ et non$Q$
non T : $\exists\ m, n, p \in \mathbb{N}^*$:
$(\,p$ divise m et p divise $n\,)$ et $\exists\ a, b \in \mathbb{N},\ p$ ne divise pas $(a\,m + b\,n)\,.$

(c) Proposition contraposée C :
$\forall\ m, n, p \in \mathbb{N}^*$:
$\exists\ a, b \in \mathbb{N}\,,\ p$ ne divise pas $(a\,m + b\,n)$ $\Rightarrow$ p ne divise pas m ou p ne divise pas $n\,.$
Par la partie a), T est vraie.
Or C est logiquement équivalente à $T\,,$ ainsi C est vraie.