Peter Wittwer

Analyse I – Série 5

Echauffement. (Infimum, supremum)

Soit $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^*\} \equiv \{a_1, a_2, \ldots\}$. Calculer

i) $\operatorname{Inf} A$ *ii)* $\operatorname{Sup} A$

Exercice 1. (Infimum, supremum)

Déterminer si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est monotone; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum de $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

i) $a_n = n^2 - 4n + 1$ *ii)* $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$

Exercice 2. (Critères de convergence)

i) Montrer que toute suite convergente est bornée.

ii) Soit (a_n) une suite. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ alors la suite est divergente.

Exercice 3. (Lois algébriques)

Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Exercice 4. (Propriétés algébriques de la limite)

Soit $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$ *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{3} + \dfrac{3}{a_n}\right)$

Exercice 5. (Existence de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

i) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ *ii)* $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ *iii)* $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

Exercice 6. (Existence de limites)

Calculer

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\dfrac{2n+3}{n^3}\right)$

Exercice 7. (Calcul de limites)

Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

$i)\ \ a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ $\qquad ii)\ \ a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\qquad iii)\ \ a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Exercice 8. (Calcul de limites)

Calculer les limites suivantes :

$i)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ $\qquad ii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cos\big(\tfrac{1}{n^2}\big) \sin\big(\tfrac{1}{n^3}\big)$

$iii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$ $\qquad iv)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\big(\sqrt{n^3+n^2+1}\big)}{n^3+n^2+1}$

$v)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+4}}{2}$ $\qquad vi)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+1}\right)$

$vii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{7^n} \cos(\sqrt{n})$ $\qquad viii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} 3^n e^{-3n}$

Exercice 9. (Fonction exponentielle)

Calculer les limites suivantes :

$i)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$ $\qquad ii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ $\qquad iii)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 10. (QCM : Limites)

La limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right)^{n^2}$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ☐ e^{-4}
- ☐ e^{-1}

Remarque : question de type examen. C'est une question difficile à traiter avec les techniques que nous avons actuellement à disposition. Nous allons revenir sur ce problème à plusieurs reprises, ayant en main des techniques de plus en plus performantes.

Exercice 11. (V/F : Suites)

Soit (a_n) une suite numérique.

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

Q2 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

Q3 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

Q4 : Si (a_n) converge, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q5 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.