Contrôle d'analyse I N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________ Groupe

PRENOM : ______________________

1. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+4}+2\,(x-1)}{x} \cdot \arctan(\tfrac{1}{x})$$

est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 0$? Non, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\pi$ 3 pts

2. On considère la fonction f définie sur un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$f(x) = \frac{\cos(2x)+\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{si} \quad x \neq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad f(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

a) Montrer que la fonction f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

b) La fonction f est-elle continûment dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$? Oui 6 pts

3. On considère la parabole Γ d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Déterminer le point T de Γ d'abscisse positive tel que le triangle défini par

— le point T,

— le point M, intersection de la tangente à Γ en T et de l'axe Oy,

— le point N, intersection de la normale à Γ en T et de l'axe Oy,

soit d'aire égale à 5. $T\,(2\,,\,2)$ 4,5 pts

4. On considère la courbe Γ définie paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x^2t^3 + 2(t-x)^2 - 3t = 0 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{(t+1)^2+3}} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Soit T le point de Γ d'abscisse $x_0 = -1$.

a) Déterminer la pente de la tangente à Γ au point T. $m = -\frac{1}{2}$

b) Soit P le point de Γ d'abscisse $x_P = -1{,}1$.
Déterminer l'approximation linéaire de son ordonnée y_P obtenue à partir du point T. $AL = \frac{11}{20}$ 6,5 pts