Analyse I – Corrigé de la Série 1

Partie I : Algèbre.

1. *a)* 81 *b)* -81 *c)* $\dfrac{1}{81}$ *d)* 25 *e)* $\dfrac{9}{4}$ *f)* $\dfrac{1}{8}$

2. *a)* $6\sqrt{2}$ *b)* $48a^5b^7$ *c)* $\dfrac{x}{9y^7}$

3. *a)* $11x-2$ *b)* $4x^2+7x-15$ *c)* $a-b$ *d)* $4x^2+12x+9$
e) $x^3+6x^2+12x+8$ *f)* a^2+1

4. *a)* $(2x-5)(2x+5)$ *b)* $(2x-3)(x+4)$ *c)* $(x-3)(x-2)(x+2)$
d) $x(x+27)$ *e)* $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ *f)* $xy(x-2)(x+2)$

5. *a)* $\dfrac{x+2}{x-2}$ *b)* $\dfrac{x-1}{x-3}$ *c)* $\dfrac{1}{x-2}$ *d)* $-(x+y)$

6. *a)* $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ *b)* $\sqrt{9+h}-3$

7. La réponse est a^pb^q dans tous les cas.

8. *a)* $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ *b)* $2(x-3)^2-7$

9. *a)* $x=6$ *b)* $x=1$ *c)* $x_1=-3$ et $x_2=4$ *d)* $x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x_{1,2}=\pm1$ et $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ *f)* $x_1=\frac{22}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ *g)* $x=\frac{12}{5}$

10. *a)* $x\in[-4,3[$ *b)* $x\in]-2,4[$ *c)* $x\in]-2,0[\cup]1,\infty[$ *d)* $x\in]1,7[$
e) $x\in]-1,4]$

11. *a)* Faux. *b)* Vrai. *c)* Faux. *d)* Faux. *e)* Vrai. *f)* Faux.
g) Vrai. *h)* Vrai.

12. Les indications ci-après ne sont bien sûr pas les seules manières de vérifier les identités.

a) Commencer par la partie droite.

b) Pour la partie gauche, ne pas développer la somme parce qu'elle devient télescopique après la multiplication. Pour la partie droite, utiliser la troisième identité remarquable. Le résultat est $1-a^8$.

13. On trouve $A=b^{2m(2m-1)}$. Pour $b=2$, on obtient à partir de $2^{2m(2m-1)}=16^5$ que $m(2m-1)=10$. Comme m doit être entier, la seule possibilité est $m=-2$.

Partie II : Trigonométrie.

1. *a)* $\frac{5\pi}{3}$ *b)* $-\frac{\pi}{10}$

2. *a)* $150°$ *b)* $\frac{360°}{\pi}\approx 114.6°$

3. 2π cm

4. *a*) $-\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\sqrt{3}$

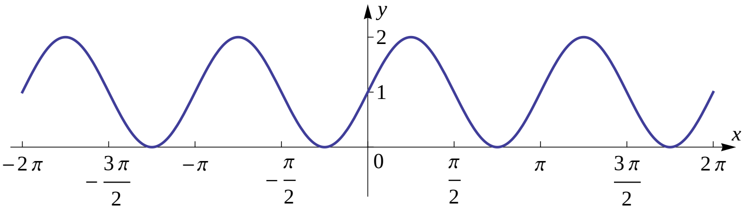
5. $a = 24\sin(\theta),\ \ b = 24\cos(\theta)$

6. $\frac{1}{15}(4+6\sqrt{2})$

7. Développer les parties gauches en utilisant la définition de la fonction tg.

8. $x \in \{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

9.



Partie III : Fonctions réelles.

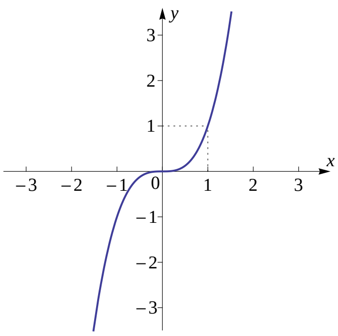
1. *a*) -2 *b*) 2.8 *c*) $-3,\ 1$ *d*) $-2.5,\ 0.3$ *e*) Domaine $[-3,3]$, image $[-2,3]$

2. $12+6h+h^2$

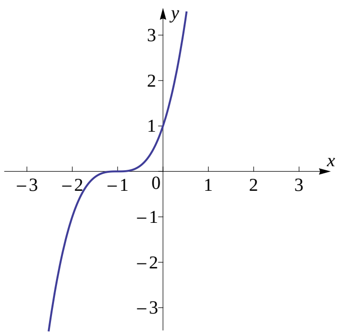
3. *a*) $]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,1[\,\cup\,]1,\infty[$ *b*) $]0,\infty[$[1] *c*) $]-\infty,-1]\cup[1,4]$

4. *a*) Réflexion par rapport à l'axe Ox.
b) Étirement vertical d'un facteur 2, suivi d'une translation d'une unité vers le bas.
c) Translation de trois unités vers la droite, puis de deux unités vers le haut.

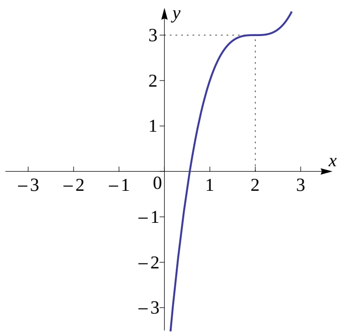
5. *a*)



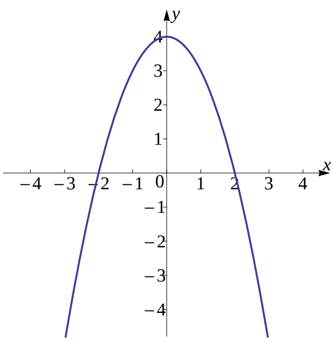
b)



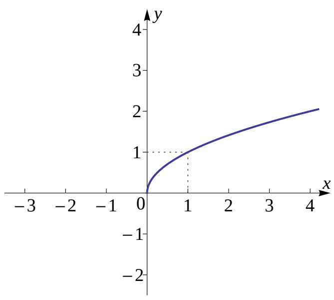
c)



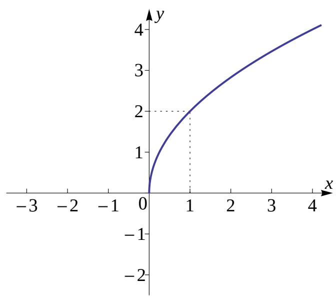
d)



e)

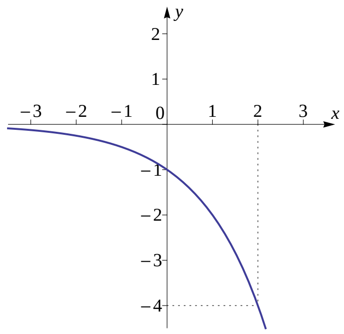


f)

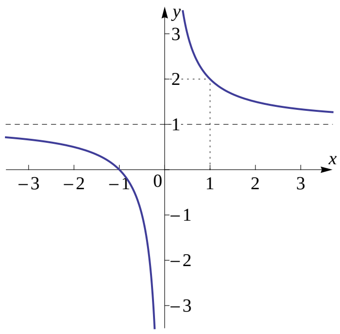


1. Dans ce cours, les puissances avec exposants non-entiers sont définies seulement pour les nombres strictement positifs.

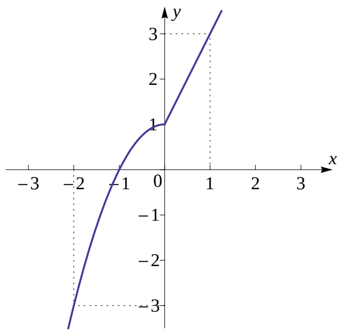
g)



h)



6. *b*)



6. *a*) $f(-2) = -3, \;\; f(1) = 3$ *b*) Ci-dessus (à la fin de l'Ex. 5).

7. *a*) $4x^2 - 8x + 2$ *b*) $2x^2 + 4x - 5$ *c*) $8x - 21$

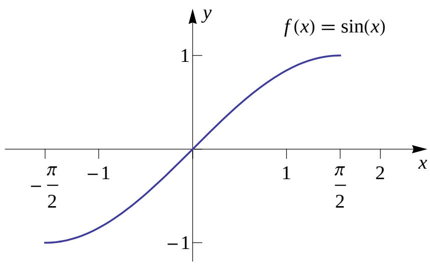
8. La réponse est $a^p b^q$ dans tous les cas.

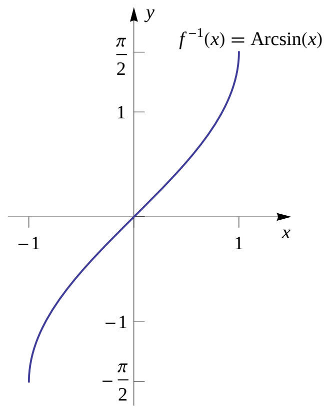
9. *Remarques générales (ou plutôt rappel) :*

— Le domaine $D(f^{-1})$ de la fonction réciproque f^{-1} est l'image de f. En effet, I a été choisi pour que f soit injective (cf. énoncé), et donc f est bijective entre I et son image.

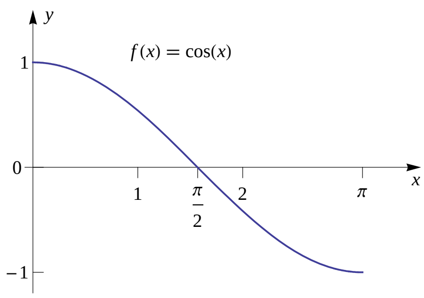
— Une fois qu'on a tracé le graphe de f, on peut trouver le graphe de f^{-1} géométriquement en faisant une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

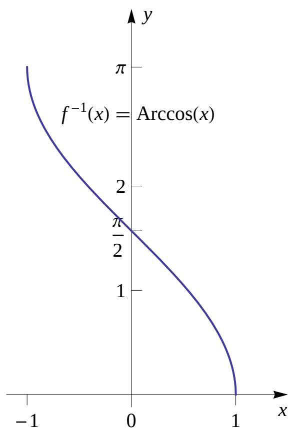
a) $D(f^{-1}) = [-1, 1]$





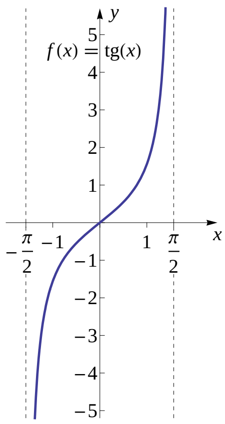
b) $D(f^{-1}) = [-1, 1]$



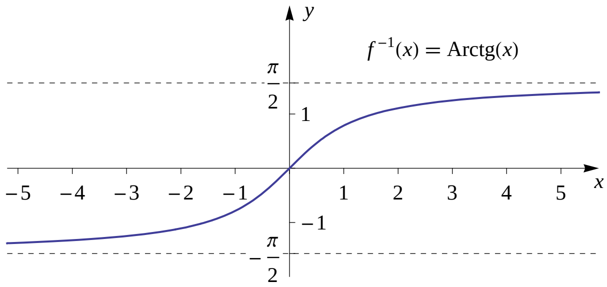


Tourner la page pour les exercices restants...

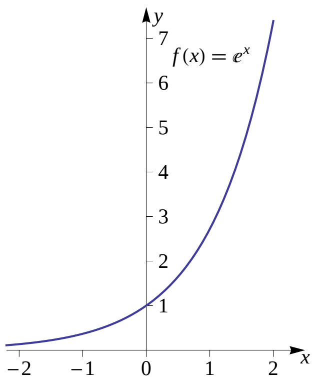
$c)$

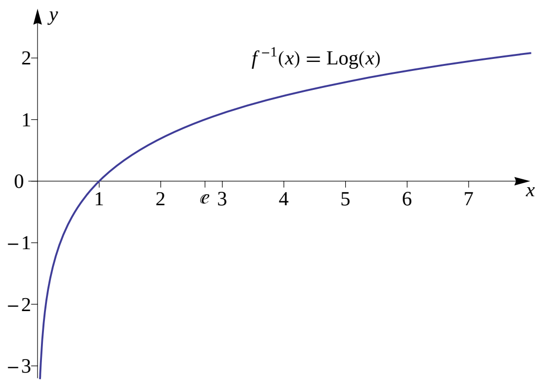


$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

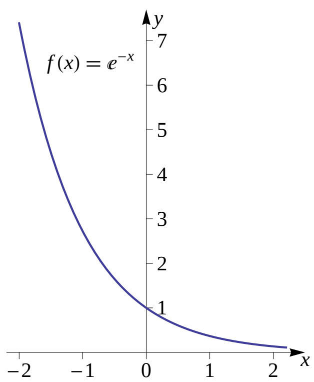


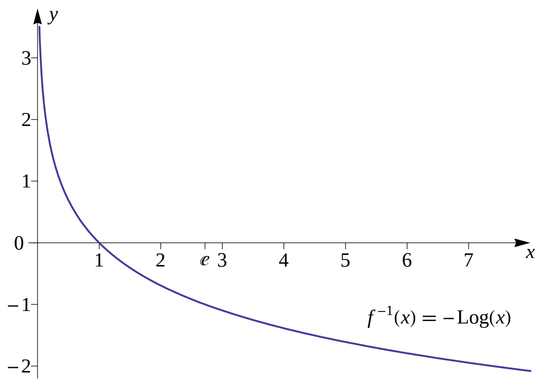
$d)$ $D(f^{-1}) =]0, \infty[$



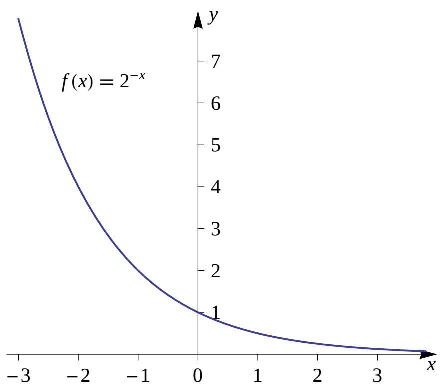


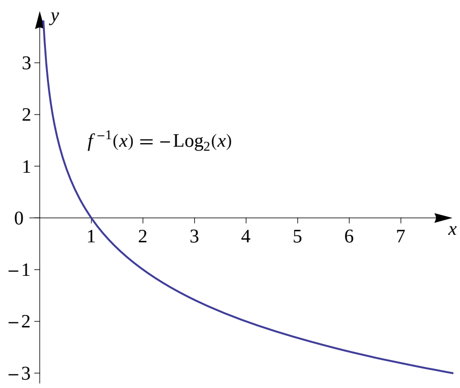
$e)$ $D(f^{-1}) =]0, \infty[$





$f)$ $D(f^{-1}) =]0, \infty[$





Partie IV : Calcul propositionnel.

Une "proposition (logique)" est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations $\neg$ ("non" logique), $\wedge$ ("et" logique), $\vee$ ("ou" logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1. (Equivalences logiques)

Tous les propositions de cet exercice se montrent par la construction des tableaux de vérité à partir des tableaux de vérité des définitions :

(a)

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	**V**
F	V	**F**

(b)

p	p	$p \wedge p$
V	V	**V**
F	F	**F**

et

p	p	$p \vee p$
V	V	**V**
F	F	**F**

(c)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**F**	**F**
F	F	**F**	**F**

et

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**V**	**V**
F	V	**V**	**V**
F	F	**F**	**F**

(d)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

et

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	V	**F**	F	V	**F**
F	V	V	**F**	V	F	**F**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

(e)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	V	**F**	F	**F**
V	F	V	F	**F**	F	**F**
V	F	F	F	**F**	F	**F**
F	V	V	F	**F**	V	**F**
F	V	F	F	**F**	F	**F**
F	F	V	F	**F**	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

et

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	**V**
V	F	V	V	**V**	V	**V**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	V	**V**	V	**V**
F	V	F	V	**V**	V	**V**
F	F	V	F	**V**	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

(f)

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	V	F	**V**	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**	V	F	**F**
F	V	F	V	**V**	V	V	**V**
F	V	F	F	**F**	F	V	**F**
F	F	F	V	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

et

p	q	$p \vee q$	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	V	F	**F**	F	F	**F**
V	F	V	V	**V**	V	F	**V**
V	F	V	F	**F**	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**	F	V	**V**
F	V	V	F	**F**	F	F	**F**
F	F	F	V	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

(g)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

(h)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg (p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	**F**
V	F	F	**V**	V	**V**
F	V	V	**F**	F	**F**
F	F	V	**F**	V	**F**

(i)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

(j)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

(k)

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	V	F	**F**	**F**
V	F	V	F	**F**	**F**
F	V	F	V	**V**	**V**
F	V	F	V	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

2. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)

(e) Soit $E = \{1, 2\}$ et $p(x)$ et $q(x)$ telles que $p(1)$ et $q(2)$ sont vraies et $p(2)$ et $q(1)$ sont fausses. Alors, on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \vee q(1)$	$p(2) \vee q(2)$
V	F	F	V	V	V

et par conséquence

$\forall x \in E,\ p(x)$	$\forall x \in E,\ q(x)$	$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$	$\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$
F	F	V	F

et donc en effet

$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$ $\Longleftarrow$ $\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$	$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$ $\Longrightarrow$ $\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$
V	**F**

(f) Similairement on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \wedge q(1)$	$p(2) \wedge q(2)$
V	F	F	V	F	F

et par conséquence

$\exists x \in E,\ p(x)$	$\exists x \in E,\ q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$	$\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$
V	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$	$\Longrightarrow$	$\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$	$\Longleftarrow$	$\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$
	V			**F**	

3. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)

(c) Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2\}$ et $p(x, y)$ telle que $p(1, 1)$ et $p(2, 2)$ sont vraies et $p(1, 2)$ et $p(2, 1)$ sont fausses. Alors

$p(1,1)$	$p(1,2)$	$p(2,1)$	$p(2,2)$	$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$	$\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$
V	F	F	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$	$\Longrightarrow$	$\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$	$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$	$\Longleftarrow$	$\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$
	V			**F**	