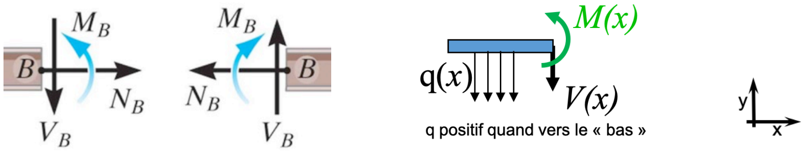
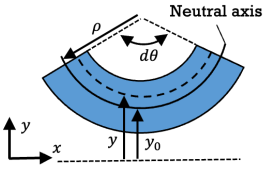
## Poutres

### *Force de Cisaillement, Moment de flexion*

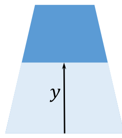



| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -q(x)$ | $\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x)$ | $M(x) = -\iint q(x)$ | $\Delta V(x = x_i) = F_i$ |

*Axe Neutre, Contraintes.*




$\varepsilon_x(x,y) = -\frac{y-y_0}{\rho}$




| | | |
|---|---|---|
| $y_0 = \frac{\int_A y dydz}{A}$ | $\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y-y_0)$ | $\lvert\sigma_{x,max}(x)\rvert = \frac{\lvert M_z(x)\rvert}{I_{z,y_0}}c = \frac{\lvert M_z(x)\rvert}{S}$ <br> $c$: Distance maximale surface à l'axe neutre |
| $y_0 = \frac{\int_A E(y) y\, dydz}{\int_A E(y)\, dydz}$ <br> pour poutre Composite | $I_{z,y_0} = \int_A (y-y_0)^2\, dA$ | $\langle EI_{z,y_0}\rangle = \int_A E(y)(y-y_0)^2\, dA = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}$ |

$\sigma_{x,i} = E_i\varepsilon_x = -E_i\frac{y-y_0}{\rho}$ pour poutre composite

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y-y_0) = E(y)\varepsilon_x(x,y)$$

$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^{N} I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^{N} A_i(y_i - y_0)^2$ Steiner

- $y_i$ est le centroïde de l'élément i, par rapport à l'<u>origine</u>

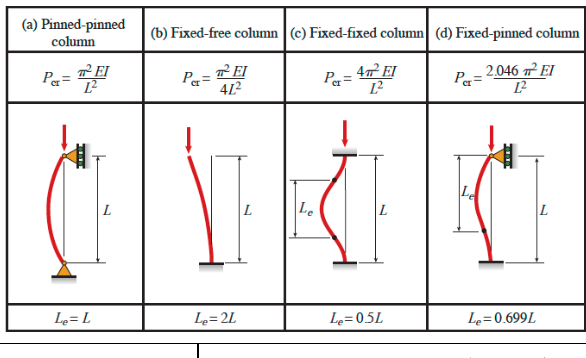
$I_{z,yi}$ est le moment d'inertie de l'élément i, pour « plier » par l'axe qui passe par son centroïde$_i$

*Position axe neutre avec force axiale* $y_0' = \frac{F}{M_z(x)}\frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$

### *Flèche – méthode différentielle*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI}$ | $\frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} = \frac{V(x)}{EI}$ | $\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = -\frac{q(x)}{EI}$ | $w'(x) = \int \frac{M(x)}{EI}dx$ | $w(x) = \int w'(x)\, dx$ |

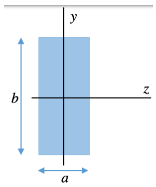
## Flambage




pour une force selon $x$, la poutre peux fléchir selon $y$ ou selon $z$. C'est autour de l'axe avec le plus petit moment d'inertie qu'il y aura flambage.

| | | |
|---|---|---|
| $F_{crit} = \left(\frac{n\pi}{L_{eff}}\right)^2 EI$ | $w(x) = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right)$ | $\sigma_{crit} = \pi^2 E\left(\frac{r}{L_{eff}}\right)^2$ $r^2 = \frac{I}{A} = rayon\ de\ giration$ |

## Moments utiles

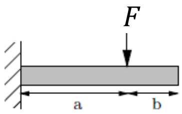



section rectangulaire: $I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12}$

section circulaire: $I_p = \frac{\pi r^4}{4}$

## Quelques exemples de charges et de flexion

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{Fa^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right); & x \leq a \\ -\frac{Fa^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right); & x > a \end{cases}$$




$$w(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$