Peter Wittwer

Analyse I – Série 13

Echauffement. (Formules d'intégration)

i) Retrouver la formule du changement de variable à partir de la dérivée en chaîne.

ii) Retrouver la formule d'intégration par parties à partir de la dérivée d'un produit de fonctions.

Exercice 1. (Estimation d'integrales)

Vérifier les deux inégalités

$$\frac{7}{100} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3}\,dx < \frac{1}{10}\ .$$

Exercice 2. (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$ *ii*) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad (a \neq 0)$

Exercice 3. (Intégrales récurrentes)

Déduire une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

i) $\displaystyle\int x^n\sin(2x)\,dx$ *ii*) $\displaystyle\int \mathrm{Log}(x)^n\,dx$

Exercice 4. (Changement de variable, I)

Trouver des primitives pour les fonctions f en utilisant le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad x = \sin(u)$ *ii*) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \qquad x = \mathrm{tg}(u)$

Exercice 5. (Changement de variable, II)

Calculer les intégrales définies suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(x)^5\,dx$ *ii*) $\displaystyle\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ *iii*) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9}\cos(\sqrt{x})\,dx$

Exercice 6. (Intégrale définie)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx\ .$$

Exercice 7. (Intégration de développements limités)

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$i)\quad f(x) = \int_0^x \operatorname{Log}(1+t^2)\,dt \qquad\qquad ii)\quad f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\,dt$$

Exercice 8. (Intégrales généralisées)

Déterminer le type des intégrales généralisées I suivantes avant de les calculer :

$$i)\quad I = \int_1^\infty \frac{\operatorname{Log}(x)}{x^2}\,dx \qquad\qquad ii)\quad I = \int_{1^+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$iii)\quad I = \int_0^\infty \sin(x)\,e^{-x}\,dx \qquad\qquad iv)\quad I = \int_{0^+}^\infty e^{-x}(1-x)\operatorname{Log}(x)\,dx$$

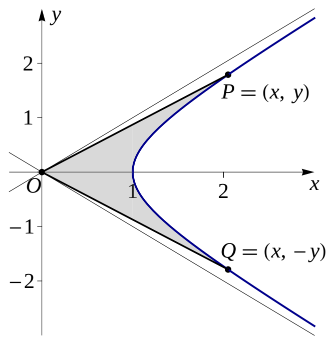
Exercice 9. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales suivantes :

$$i)\quad \int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx \qquad ii)\quad \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad iii)\quad \int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx \qquad iv)\quad \int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$$

Exercice 10. (Fonctions hyperboliques)

Soient $P=(x,y)$ et $Q=(x,-y)$ des points de l'hyperbole $x^2-y^2=1$ $(x \geq 1)$ et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x=\operatorname{ch}(t)$ et $y=\operatorname{sh}(t)$.



Exercice 11. (V/F : Intégration)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vide et borné et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Q1 : f admet une primitive sur I.

Dans la suite on restreint le domaine de f à l'intervalle $[a,b] \subset I$ où $a,b \in I$ tels que $a<b$.

Q2 : Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.

Q3 : Si $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q4 : Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

Soit encore F une primitive de f sur $[a,b]$.

Q5 : Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q6 : Pour tout $x \in [a,b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.