Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 45 minutes   Barème sur 15 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne une droite t et un point F :

$$t:\ y = -\sqrt{5}\,x\,, \qquad \text{et} \qquad F\,(0\,,\,\alpha)\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_-^*\,.$$

a) Déterminer en fonction du paramètre $\alpha < 0$, la famille $\mathcal{P}_\alpha$ des paraboles d'axe vertical, tangentes à la droite t.

b) Déterminer la parabole de la famille $\mathcal{P}_\alpha$ qui admet comme directrice la droite d'équation $y + 4 = 0$. 4,5 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les coniques $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathbb{R}$, définies par l'équation cartésienne :

$$\mathcal{C}_m:\ (m+2)\,x^2 - 4\,xy + (m-1)\,y^2 + 2\,(m+2)\,x - 4\,y + m + 7 = 0\,.$$

a) Déterminer, en fonction du paramètre m, le genre des coniques $\mathcal{C}_m$.

i) Pour les ellipses réelles, déterminer la direction du grand axe et du petit axe.

ii) Pour les hyperboles, déterminer la direction de l'axe réel et de l'axe imaginaire.

b) Montrer que les coniques ayant un centre, ont toutes le même centre Ω.

c) Déterminer le paramètre m de sorte que la conique $\mathcal{C}_m$ soit une hyperbole dont l'un des sommets est le point $A\,(-3\,,\,1)$. 6 pts

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne deux points A, B et une droite horizontale c :

$$A\,(0\,,\,0)\,, \qquad B\,(4\,,\,0) \qquad \text{et} \qquad c:\ y = b\,, \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

Soit C un point courant de la droite c.

On considère, dans le triangle ABC, la médiane m issue du sommet C, la hauteur h issue du sommet A et le point P intersection des droites m et h.

a) Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque le point C décrit la droite c.

b) Déterminer la nature géométrique de ce lieu en fonction de $b \in \mathbb{R}$. 4,5 pts