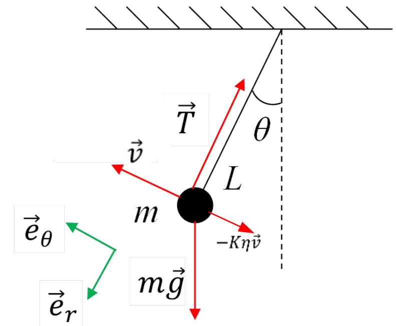
Physique Générale (Mécanique) STI-I et STI-II **Sections EL, MT & MX**

Daniele Mari & Nicolas Grandjean Corrigé **Série 10** 18/11/2020

Exercice 1 : Le pendule amorti



a) La somme des forces s'écrit :

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} - K\eta\vec{v}$$

La vitesse s'écrit, en coordonnées polaires et avec L constante : $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

On projette sur un repère polaire :

$$\sum \vec{F} = -mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta + mg\cos\theta\,\vec{e}_r - T\vec{e}_r - K\eta L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On utilise la seconde loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Avec l'accélération donnée comme précédemment par : $\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r + L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

La seconde loi de Newton s'écrit donc : $-mL\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mL\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta + mg\cos\theta\,\vec{e}_r - T\vec{e}_r - K\eta L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

En projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{e}_r : -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ \vec{e}_\theta : mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - K\eta L\dot{\theta} \end{cases}$$

La première équation fait intervenir la tension du fil et ne nous intéresse pas ici. La seconde équation, lorsqu'on utilise l'approximation des petits angles (*i.e.* $\sin\theta \approx \theta$), nous donne l'équation du mouvement de ce pendule :

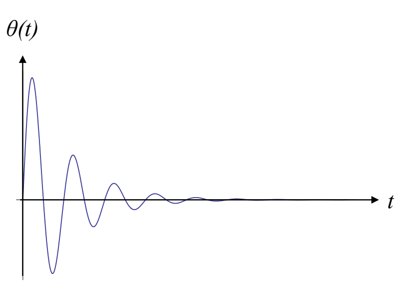
$$\ddot{\theta} + \frac{K\eta}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

b) La solution est de la forme $\theta = e^{-\lambda t}\,\theta_0\cos(\omega t + \phi)$

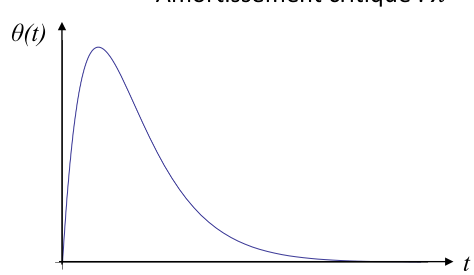
avec $\lambda = \frac{K\eta}{2m}$ et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

c) Les différents types d'amortissement sont les suivants :

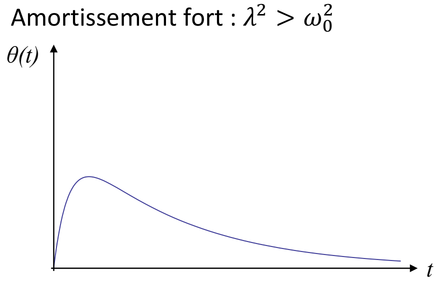
Amortissement faible : $\lambda^2 < \omega_0^2$



Amortissement critique : $\lambda^2 = \omega_0^2$

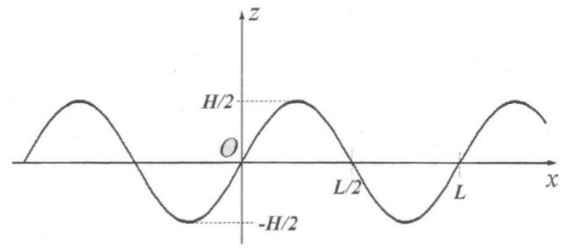


Amortissement fort : $\lambda^2 > \omega_0^2$



Exercice 2 : **Le salaire de la peur**

a) La donnée nous donne un profil sinusoïdal pour la route, avec des bosses de longueur L et de hauteur H. On en déduit que le profil de la route est une sinusoïde de période spatiale L (pulsation spatiale correspondante $= \frac{2\pi}{L}$). Donc on peut écrire $z(x) = \frac{H}{2}\sin(\omega x) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$



Nous choisissons de placer l'origine des temps à l'origine géométrique à mi-chemin entre un creux et une bosse (de par la définition du sinus).

On cherche à exprimer la hauteur de la roue en fonction du temps. Le lien entre la position selon (Ox) et le temps est donnée par $x = vt$. La position du point de contact entre la roue et la route s'exprimera donc par :

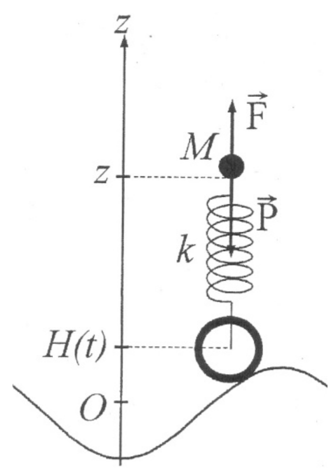
$$h(t) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}vt\right)$$

et la pulsation temporelle est donc $\Omega = \frac{2\pi}{L}v$.

On vérifie que pour $t = 0$ le sinus vaut bien 0 et que cette expression prend la valeur $\frac{H}{2}$ lorsque $t = \frac{L}{4v}$, c'est-à-dire lorsque le point matériel a parcouru le quart de la période des oscillations.

b) La vitesse horizontale est constante et égale à v. Il reste donc à établir l'équation du mouvement selon l'axe vertical. Bilan des forces :

- la pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$.
- la force de réaction du ressort, en considérant la longueur au repos du ressort nulle : $\overrightarrow{F_{ressort}(t)} = -k(z - h(t))\vec{e_z}$.
- Force d'amortissement : $\vec{f} = -K\eta\vec{\dot{z}}$.



$\sum \vec{F} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{ressort}(t)} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg - K\eta\dot{z} - k(z - h(t))$.
Donc :

$$m\ddot{z} + mg + K\eta\dot{z} + kz = k\,\frac{H}{2}\sin(\Omega t)$$

Pour se débarrasser de mg, on effectue un changement de variable : $u = \frac{mg}{k} + z$, en vérifiant que $\ddot{u} = \ddot{z}$ et $\dot{u} = \dot{z}$. L'équation du mouvement devient donc :
$m\ddot{u} + K\eta\dot{u} + ku = k\,\frac{H}{2}\sin(\Omega t)$, que l'on peut écrire sous la forme :

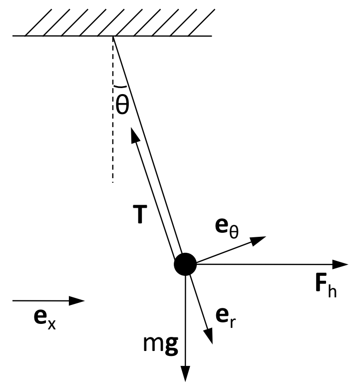
$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + {\omega_0}^2 u = A\sin(\Omega t)$$

avec $A = \frac{k}{m}\frac{H}{2} = \frac{{\omega_0}^2 H}{2}$ et $\lambda = \frac{K\eta}{2m}$.

c) D'après le cours, nous savons qu'il existe une pulsation de résonance $\Omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$. A la résonance, l'amplitude du mouvement du point matériel sera maximale. On cherche donc à éviter ce point critique. Or, étant donné que l'on a $\Omega = \frac{2\pi}{L}v$, il existe une vitesse critique pour laquelle $\Omega = \Omega_r$: $v_c = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$. Le camion subira alors de fortes oscillations (et le chargement de nitroglycérine peut exploser). Pour éviter que le camion oscille, il faut que l'amplitude diminue.

Or nous savons que si $\Omega > \Omega_r$ alors plus Ω est grande plus l'amplitude est faible. Le camion aura tout intérêt à rouler très vite, afin que l'amplitude soit minimale, voire nulle.

Exercice 3 : Gotham City



a) Trois forces s'exercent sur Batman. La tension du fil $\vec{T}$, la pesanteur $m\vec{g}$ et la force exercée par le souffle des hélices $\vec{F}_h$. La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_h$$

Et en la projetant sur un repère polaire :

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta = \left(-T + mg\cos\theta\right)\vec{e}_r + \left(-mg\sin\theta + F_h\right)\vec{e}_\theta$$

Nous savons de plus que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ car $r = l$, donc :

$$\vec{e}_r : -mr\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$$
$$\vec{e}_\theta : mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F_0\sin\left(\Omega t\right)$$

Dans l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$. Donc on obtient finalement l'équation du mouvement selon $\mathbf{e}_\theta$ (l'équation du mouvement selon $\mathbf{e}_r$ fait intervenir la force de tension de la corde qui ne nous intéresse pas ici) :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta + F_0\sin\left(\Omega t\right)$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F_0}{ml}\sin\left(\Omega t\right)$$

Avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$

b) En suivant l'indication, on sait que la solution aura la forme $\theta\left(t\right) = \theta_0\sin\left(\Omega t\right)$.

On l'injecte dans l'équation du mouvement précédemment trouvée :

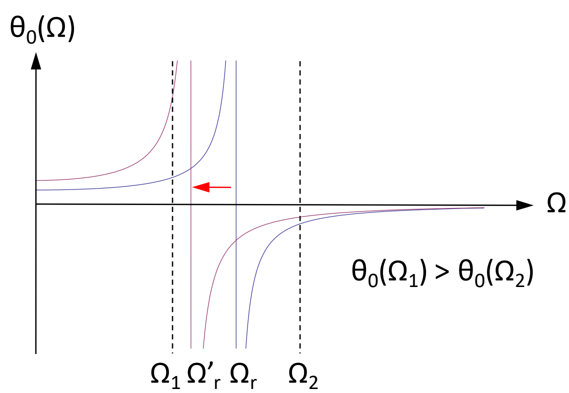
$$-\Omega^2\theta_0\sin(\Omega t)+\omega_0^2\theta_0\sin(\Omega t)=\frac{F_0}{ml}\sin(\Omega t)$$

$$\theta_0\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)=\frac{F_0}{ml}$$

$$\theta_0=\frac{F_0}{ml}\frac{1}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

θ_0 est l'amplitude des oscillations. La pulsation de résonnance vaut donc $\Omega_r=\omega_0$.

c) Dans l'approximation des petits angles, la période est indépendante de l'amplitude d'oscillation, ce qui n'est plus vrai lorsque l'on sort des limites de validité de l'approximation ; la période augmente alors avec l'amplitude, la pulsation de résonnance va donc diminuer lorsque l'amplitude augmente. Cela signifie que la courbe $\theta_0(\Omega)$ va être déplacée vers la gauche (fréquence de résonnance diminuée, voir figure) ; Batman a alors tout intérêt à choisir une fréquence légèrement supérieure à la fréquence de résonnance afin de minimiser l'amplitude des oscillations, et ainsi optimiser ses chances de survie.



Exercice S10.1 : L'oscillateur forcé et puissance dissipée

1.
$$x(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi)$$
$$A(\omega_e) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4 * \gamma^2\omega_e^2}}$$
$$\text{avec } f = \frac{F_0}{m},\ \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \gamma = \frac{b_l}{2m}$$

2. L'énergie dissipée l'est par le travail de la force de frottements :
$$E_{diss} = -W_f = -\int_0^T \vec{F}_f \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot dt = -\int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v} dt$$
$$\vec{F}_f = -b_l\vec{v} \Rightarrow E_{diss} = -\int_0^T -b_l\vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = \int_0^T b_l v^2 dt$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega_e t + \varphi)) = -A\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi)$$
$$\Rightarrow E_{diss} = b_l A^2\omega_e^2 \int_0^T \sin^2(\omega_e t + \varphi) dt$$
Pour intégrer, il faut faire un changement de variables. Appelons $y = \omega_e t$ alors $dt = \frac{dy}{\omega_e}$ $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$. Intégrer de $t = 0$ à T revient à intégrer pour y variant de 0 à 2π.
$$E_{diss} = b_l A^2\omega_e^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(y + \varphi)\frac{dy}{\omega_e} = b_l A^2 \omega_e \pi$$

3.
$$P_{diss} = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{b_l A^2\omega_e\pi}{\frac{2\pi}{\omega_e}} = \frac{b_l A^2\omega_e^2}{2}$$

4. La puissance mécanique dissipée à la fréquence de résonance est donnée par $P_r = \frac{b_l\omega_{res}^2 A^2}{2}$. On en tire l'amplitude du système :
$$A = \frac{1}{\omega_{res}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}} = \frac{1}{2\pi f_{res}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}}$$
L'amortissement de l'amplitude A est décrit par un terme $A_0 e^{-\gamma t}$, où A_0 est l'amplitude initiale, γ le facteur d'amortissement et t le temps d'amortissement. En $t_1 = 1$ s, l'amplitude diminue de moitié :
$$A_0 e^{-\gamma t_1} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln 2}{t_1}$$

A.N: A=0,027 m