Corrigés - Série 18

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $A(x) = \displaystyle\int_2^{2x} \frac{1}{\arg\cosh t}\, dt\,, \quad x > 1\,;$ b) $B(x) = \displaystyle\int_{\arcsin x}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt\,, \ \ 0 < x < 1\,.$

---

a) Soient $f(t) = \dfrac{1}{\arg\cosh t}$ et $F(t)$ une primitive quelconque de $f(t)$.

La fonction $A(x)$ s'écrit donc $A(x) = F(2x) - F(2)$.

$$A'(x) = [\,F(2x) - F(2)\,]' = (2x)' \cdot F'(2x) = 2\,f(2x) = \frac{2}{\arg\cosh(2x)}\,.$$

b) Soient $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $G(t)$ une primitive quelconque de $g(t)$.

La fonction $B(x)$ s'écrit donc $B(x) = G(x) - G(\arcsin x)$.

$$B'(x) = [\,G(x) - G(\arcsin x)\,]' = G'(x) - (\arcsin x)' \cdot G'(\arcsin x)$$

$$B'(x) = g(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot g(\arcsin x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\,.$$

2. Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt}{x^6}\,.$

Commençons par montrer que le numérateur tend vers 0 lorsque $x \to 0$.

La fonction $N(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt$ est une fonction continue, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} N(x) = N(0)$.

Et $N(0) = \displaystyle\int_0^{0} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt = 0\,.$

Cette limite est donc une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$", on lève l'indétermination en utilisant la règle de Bernoulli-de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{x^6} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{6\,x^5} \quad \text{avec} \quad N'(x) = \left[e^{(t^2)} - 1\right]_{t=x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot \left[e^{(x^4)} - 1\right].$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\left[e^{(t^2)}-1\right]dt}{x^6} &\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\left[e^{(x^4)}-1\right]}{6\,x^5}\\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^4)}-1}{x^4}\,, \qquad \text{FI } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}\\
&\overset{\text{BH}}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4\,x^3\cdot e^{(x^4)}}{4\,x^3}\\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} e^{(x^4)}\\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Calculer les primitives des fonctions suivantes.

3. $a(x) \;=\; 12\,(x+1)\,(x-2)\,(x-1)\,.$

Il est en général plus facile d'intégrer une somme qu'un produit :

$$a(x) \;=\; 12\,(x^2-1)\,(x-2) \;=\; 12x^3-24x^2-12x+24\,.$$

Chaque terme du polynôme $a(x)$ est de la forme $n\,x^{n-1}$ (à un coefficient multiplicatif près). On intègre le polynôme $a(x)$ terme à terme :

$$\int a(x)\;dx \;=\; \int (12x^3-24x^2-12x+24)\;dx \;=\; 3x^4-8x^3-6x^2+24x+C\,.$$

---

4. $b(x) \;=\; \dfrac{x^3-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,, \qquad D_b=\mathbb{R}_+^*.$

On décrit la fonction b à l'aide de puissances rationnelles de x.

$$b(x) \;=\; \frac{x^3-x^{1/3}}{x^{1/2}} \;=\; x^{5/2}-x^{-1/6}\,.$$

Les deux termes de la fonction b sont de la forme $q\,x^{q-1}$, $q\in\mathbb{Q}$, (à un coefficient multiplicatif près).

$$\int b(x)\;dx \;=\; \int (x^{5/2}-x^{-1/6})\;dx \;=\; \frac{2}{7}\,x^{7/2}-\frac{6}{5}\,x^{5/6}+C\,.$$

---

5. $c(x) \;=\; \sin(4x)\cdot\cos x\,.$

On décrit la fonction c comme une somme de fonctions trigonométriques, à l'aide des formules de transformation produits-sommes :

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta \;=\; \frac{1}{2}\,[\,\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\,]\,.$$

$$c(x) \;=\; \sin(4x)\cdot\cos x \;=\; \frac{1}{2}\,[\,\sin(5x) \;+\; \sin(3x)\,]\,.$$

Les deux termes de la fonction c sont de la forme $-a\,\sin(ax)$ (à un coefficient multiplicatif près).

$$\int c(x)\;dx \;=\; \frac{1}{2}\int[\,\sin(5x)+\sin(3x)\,]\;dx \;=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\,\cos(5x)-\frac{1}{3}\,\cos(3x)\right]+C\,.$$

---

6. $d(x) \;=\; \dfrac{x}{e^{(x^2+1)}}\,.$

La fonction d est de la forme $u'(x)\cdot e^{u(x)}$ avec $u(x)=-(x^2+1)\,.$

$$d(x) \;=\; x\cdot e^{-(x^2+1)} \;=\; -\frac{1}{2}\,(-2x)\cdot e^{-(x^2+1)}\,.$$

$$\int d(x)\;dx \;=\; -\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot e^{-(x^2+1)}\;dx \;=\; -\frac{1}{2}\;e^{-(x^2+1)}+C\,.$$

---

7. $e(x) \;=\; \tan^2 x\,.$

La fonction e s'exprime facilement en fonction de la dérivée de la fonction $\tan x\,.$

$$e(x) \;=\; \tan^2 x \;=\; (1+\tan^2 x)-1\,.$$

$$\int e(x)\;dx \;=\; \int\big[\,(1+\tan^2 x)-1\,\big]\;dx \;=\; \tan x-x+C\,.$$

---

8. $f(x) \;=\; \sin(2x)\cdot\cos^2 x\,.$

On se ramène à une expression du type $\sin x\cdot\cos^k x$ ou $\cos x\cdot\sin^k x$, puis à une expression du type $u'(x)\cdot n\,u^{n-1}(x)\,.$

$$f(x) \;=\; \sin(2x)\cdot\cos^2 x \;=\; 2\,\sin x\cdot\cos^3 x \;=\; -\frac{1}{2}\,(-\sin x)\cdot 4\,\cos^3 x\,.$$

$$\int f(x)\;dx \;=\; -\frac{1}{2}\int(-\sin x)\cdot 4\,\cos^3 x\;dx \;=\; -\frac{1}{2}\,\cos^4 x+C\,.$$

---

9. $g(x) \;=\; \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}\,.$

On décompose la fonction g en une somme en utilisant la relation de Pythagore.

$$g(x) \;=\; \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \;=\; \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \;=\; \frac{\sin x}{\cos x} \;+\; \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Les deux termes de la somme sont des expressions du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$\int g(x)\;dx \;=\; \int \left(-\frac{-\sin x}{\cos x} \;+\; \frac{\cos x}{\sin x}\right)\,dx \;=\; -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\;dx \;+\; \int \frac{\cos x}{\sin x}\;dx\,,$$

$$\int g(x)\;dx \;=\; -\ln|\cos x| \;+\; \ln|\sin x| + C \;=\; \ln|\tan x| + C\,.$$

---

10. $h(x) \;=\; \dfrac{1}{1-e^x}\,.$

On se ramène à une expression du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$ en amplifiant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par e^{-x} .

$$h(x) \;=\; \frac{1}{1-e^x} \;=\; \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1} \;=\; -\frac{-e^{-x}}{e^{-x}-1}\,.$$

$$\int h(x)\;dx \;=\; -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}-1}\;dx \;=\; -\ln|e^{-x}-1| + C\,.$$

---

11. $i(x) \;=\; \dfrac{1}{\cosh x}\,.$

On utilise la définition de la fonction $\cosh x$: $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\;dx \;=\; \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\;dx\,.$

Puis on se ramène à une expression du type $\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}$ en amplifiant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par e^x .

$$\int i(x)\;dx \;=\; 2\int \frac{e^x}{[e^x]^2+1}\;dx \;=\; 2\,\arctan(e^x) \;+\; C\,.$$

Ou en amplifiant numérateur et dénominateur par $\cosh x$ et en se ramenant à une expression du type $\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}$:

$$\int i(x)\;dx \;=\; \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}\;dx \;=\; \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\;dx \;=\; \arctan(\sinh x) \;+\; C\,.$$

---

12. $j(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

On exprime $j(x)$ sous la forme $u'(x) \cdot u(x)$, qui, à une constante multiplicative près, est la dérivée de $u^2(x)$.

$$\int j(x)\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C\,.$$

---

13. $k(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^2 x}$.

On exprime $k(x)$ sous la forme $\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$, qui est la dérivée de $-\dfrac{1}{u(x)}$.

$$\int k(x)\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln^2(x)}}_{\frac{1}{u^2(x)}}\,dx = -\frac{1}{\ln x} + C\,.$$

---

14. $l(x) = \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

On exprime $l(x)$ sous la forme $u'(x) \cdot \cos[u(x)]$ est la dérivée de $\sin[u(x)]$.

$$\int l(x)\,dx = 2\int \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{x}\right)}_{\cos[u(x)]}\,dx = 2\sin\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

---

15. $m(x) = \sin^2(a\,x)$, $\quad a \in \mathbb{R}^*$.

On "linéarise" $\sin^2(\alpha)$ en l'exprimant à l'aide de $\cos(2\,\alpha)$.

Les relations

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

permettent d'exprimer $\cos^2(\alpha)$ et $\sin^2(\alpha)$ en fonction de $\cos(2\,\alpha)$:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\,\alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\,\alpha)}{2}\,.$$

$$\int m(x)\,dx = \int \sin^2(a\,x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2a\,x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2a\,x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2a\,x)}{4a} + C\,.$$
