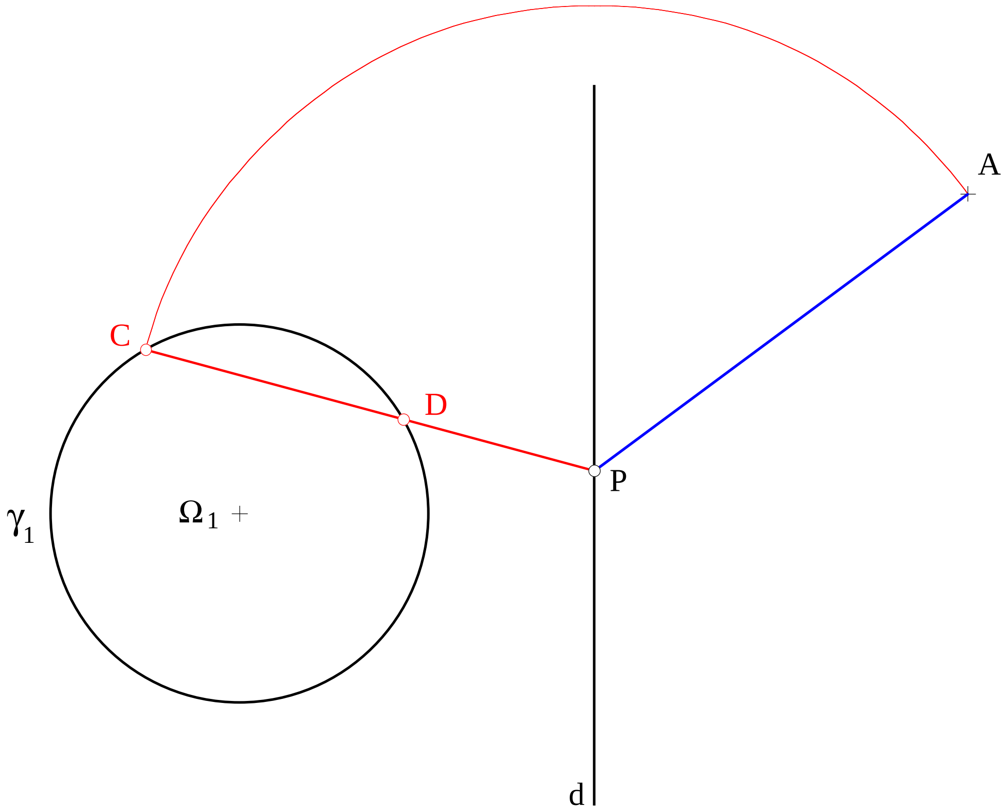
Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 15

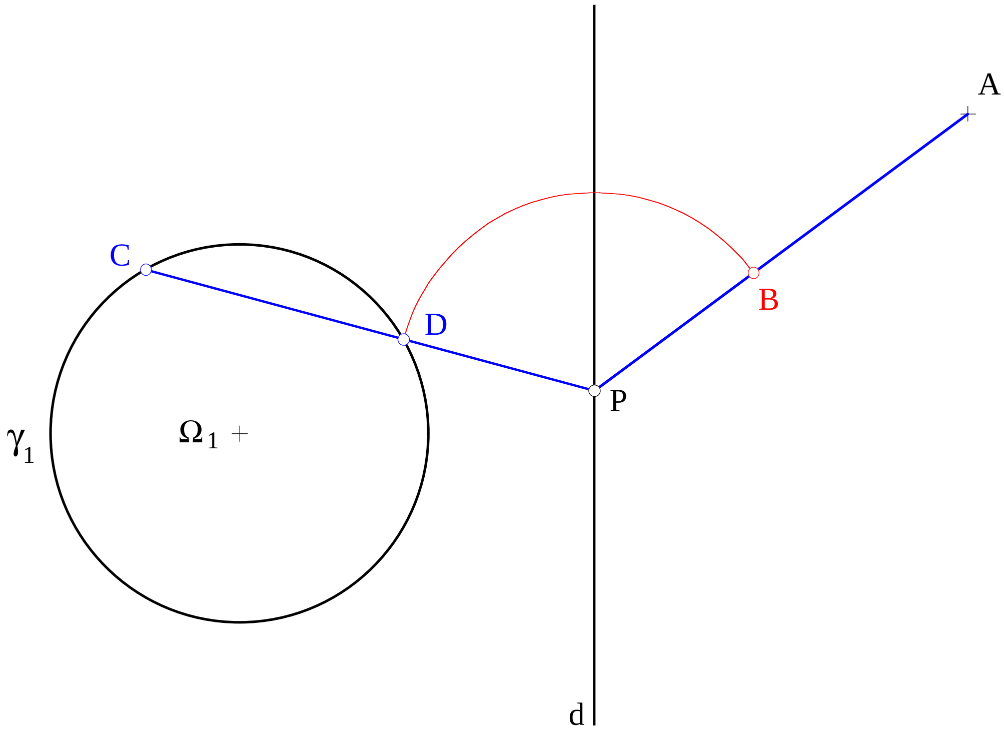
Exercice 3

Soient P un point de l'axe radical d et C un point du cercle γ_1 tel que $PC = PA$. La puissance de P par rapport à γ_1 vaut $PC \cdot PD$.



Le point P ayant même puissance par rapport aux deux cercles, on obtient facilement un deuxième point du cercle γ_2.

Il suffit de chercher sur la droite (PA) un point B tel que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
Or $PC = PA$ donc $PB = PD$.

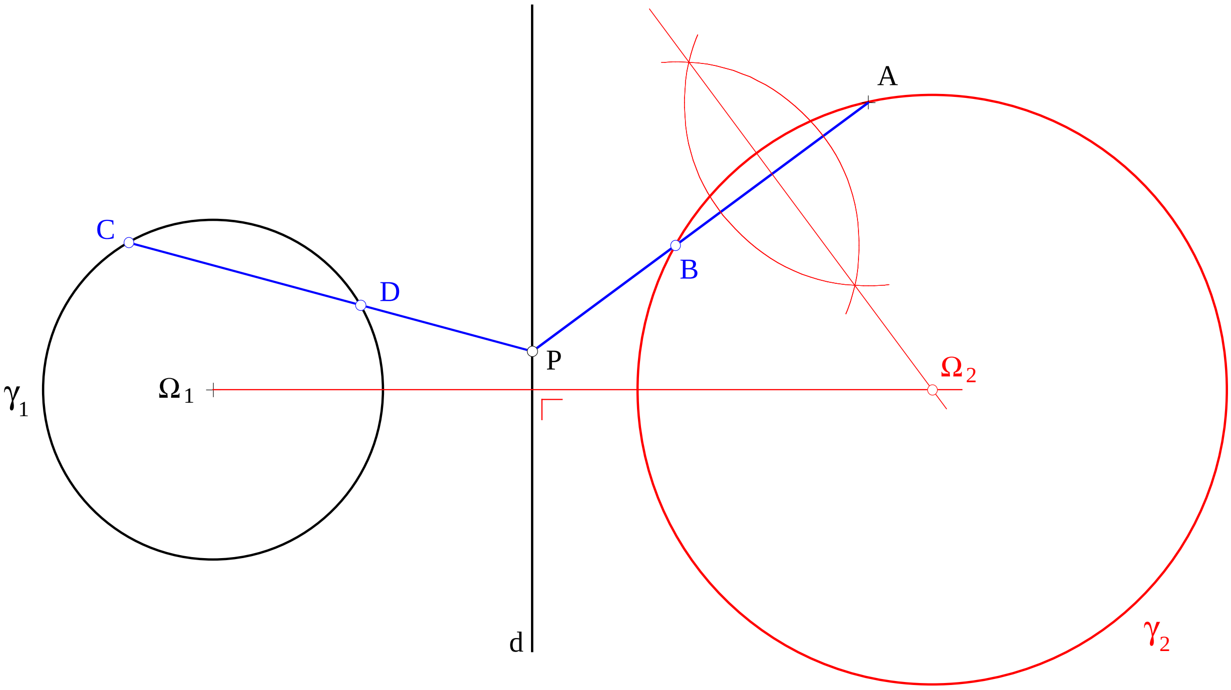


Construction du cercle γ_2 .

L'axe radical d est perpendiculaire à la droite des centres $(\Omega_1\Omega_2)$, donc le centre Ω_2 appartient à la droite passant par Ω_1 et perpendiculaire à d .

D'autre part, le cercle γ_2 passant par A et B , son centre Ω_2 appartient à la médiatrice du segment AB .

On en déduit Ω_2 puis γ_2 .

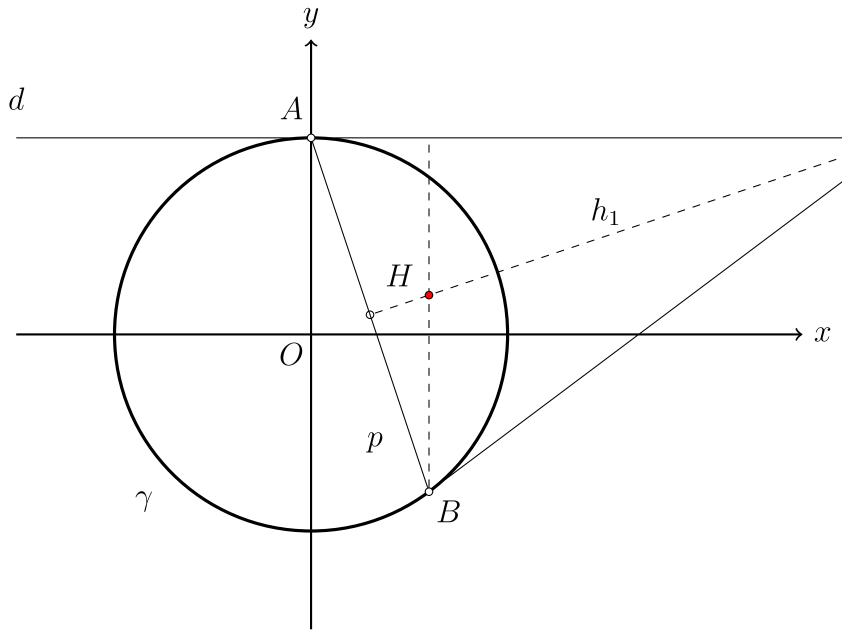


Exercice 4

L'étude des lieux géométriques se fait de la manière suivante :
1) Figure d'étude.

2) Choix du paramètre.
3) Mise en équations.
4) Elimination du paramètre.

1) Figure d'étude :



2) Choix du paramètre : $x_p = \alpha \in \mathbb{R}^* \;\Rightarrow\; P(\alpha\,,\,1)$.

Le lieu est décrit par $H(x\,,\,y)$ tel que :
$H(x\,,\,y) \in$ lieu $\Leftrightarrow$ $H = h_1 \cap h_2$
où $h_1 =$ hauteur issue de $P =$ médiatrice de (AB) ((AB) étant une corde) $\Rightarrow$ elle passe par O,
$h_2 =$ hauteur issue de B (verticale en traitillé sur la figure).
3) Mise en équation :

La base (AB) du triangle ABP est la polaire du point P par rapport à γ. Donc $P \in h_1$ et $h_1 \perp (AB)$.

L'équation de la polaire s'obtient par dédoublement de l'équation du cercle γ au point $P(\alpha\,,\,1)$. On trouve

$$p : \alpha x + y - 1 = 0\,,$$

que l'on peut exprimer par : $y = -\alpha x + 1 \;\Rightarrow\;$ pente de $h_1 = \frac{1}{\alpha} = m_{h_1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

d'où
$h_1 =$ droite $(P\,,\,m_{h_1}) =$ droite $(O\,,\,m_{h_1})$ $\Rightarrow$

$$h_1 : y = \frac{1}{\alpha}\,x\,.$$

On trouve ensuite l'abscisse du point B en demandant que celui-ci soit à la fois sur γ et sur p (et distinct de A).

Cela donne :

$$\begin{cases} y = -\alpha\,x + 1 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + (1 - \alpha\,x)^2 - 1 = 0$
$x\,((1 + \alpha^2)\,x - 2\alpha) = 0$

$\Rightarrow \;\; x_1 = x_A = 0 \;$: exclu et $\; x_2 = x_B = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,.$

Remarque : On a $B\,(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,,\,\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2})\,.$

$$h_2 : x = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,.$$

4) Elimination du paramètre : $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$\begin{cases} y = \frac{1}{\alpha}\,x & (1) \\ x = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} & (2) \end{cases}$

De (1) : $\alpha = \frac{x}{y}\,, x \neq 0\,,$ dans (2) :

$$x = \frac{2\,\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$

On amplifie par y^2 et on obtient :

$$x = \frac{2xy}{y^2+x^2} \text{ et } x \neq 0$$

$$x\,(y^2+x^2) - 2xy = 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$x\,(x^2+y^2-2y) = 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$x\,(x^2+(y-1)^2-1) = 0 \text{ et } x \neq 0\,.$$

Le lieu de H est le cercle de centre $(0,1)$ et rayon 1 : $x^2+(y-1)^2-1=0\,,$ dont on exclut les points $O(0,0)$ et $M(0,2)\,.$

Exercice 5

Equation cartésienne de $\gamma : (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$

Le centre est donc $\Omega\,(\alpha,\beta)\,.$

La polaire de Ω par rapport au cercle γ_1 est :

$p : (\alpha+2)(x+2)+(\beta-3)(y-3)-36=0$

$A\,(16,12) \in p$:

$18(\alpha+2)+9(\beta-3)9-36=0$

$18\alpha+9\beta-27=0$

$2\alpha+\beta-3=0$

$\beta=-2\alpha+3$

On a donc : $\Omega\,(\alpha,-2\alpha+3)$

De plus $\gamma \perp \gamma_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}\,(\Omega,\gamma_1)=r^2$

On a $r^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\|^2 = (-4-\alpha)^2+(-5+2\alpha-3)^2 = (4+\alpha)^2+(2\alpha-8)^2$

Et avec $\mathcal{P}\,(\Omega,\gamma_1)=r^2$, on obtient :

$(\alpha+2)^2+(-2\alpha+3-3)^2-36=(4+\alpha)^2+(2\alpha-8)^2$

$\alpha+4\alpha+4+4\alpha^2-36=16+\alpha^2+8\alpha+4\alpha^2-32\alpha+64$

$28\alpha=112$

$\alpha=4$

$\Rightarrow \beta=-8+3=-5$

On trouve $r^2=8^2+0=64$

Et finalement, l'équation du cercle γ est

$$\gamma:(x-4)^2+(y+5)^2-64=0$$

Exercice 6

(a) **Remarque :**

Le point P appartient à l'axe radical des cercles γ et γ_1 il a donc même puissance par rapport aux deux cercles γ_1 et γ.

Les segments tangents à γ_1 et γ issus de P sont donc isométriques.

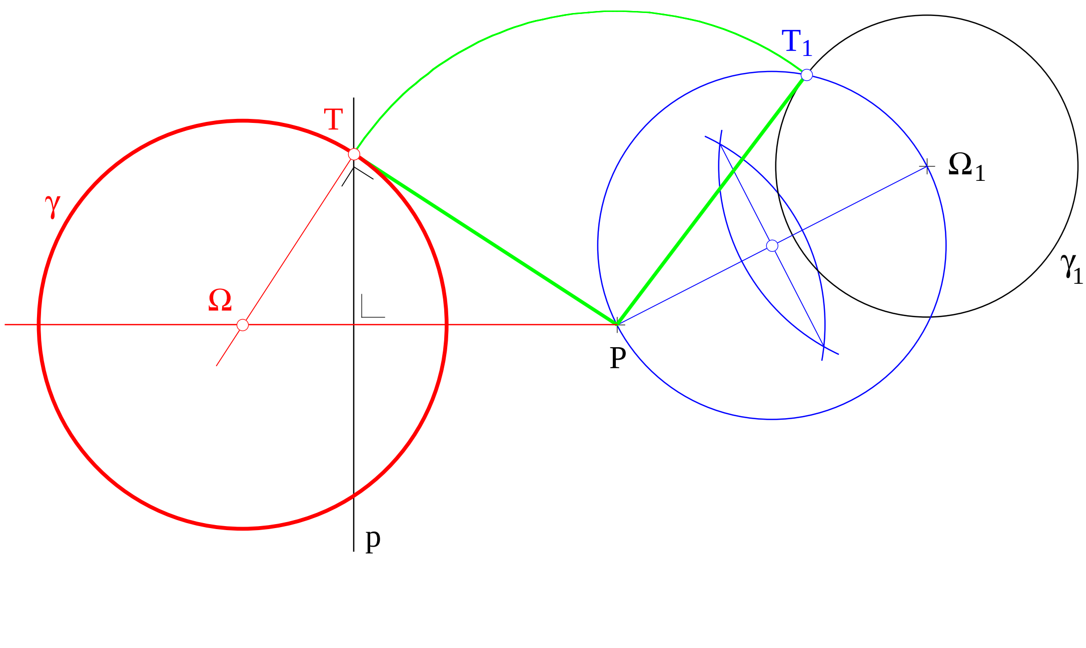
Construction du cercle γ

Le point P appartient à l'axe radical des cercles γ et γ_1 il a donc même puissance par rapport aux deux cercles γ_1 et γ.

En d'autres termes, les segments tangents PT_1 et PT sont isométriques.

Marche à suivre

- Construire le segment tangent PT_1 à l'aide du cercle de Thalès du segment $P\Omega_1$.
- En déduire le point de tangence T sur le cercle γ, il appartient à la polaire p.
- Le centre Ω du cercle γ appartient à la perpendiculaire à p passant par P et à la perpendiculaire à PT passant par T.



(b) Déterminer le centre et le rayon du cercle γ en fonction d'un seul paramètre.

Puis exploiter le fait que la polaire de P par rapport à γ coïncide avec la droite p.
Déterminer les équations paramétriques de la droite a passant par P et perpendiculaire à p, puis en déduire les coordonnées paramétriques de $\Omega \in a$.

Expression paramétrique du centre Ω

Le centre Ω du cercle γ appartient à la droite a passant par P et perpendiculaire à p.

$$a: \ y = x - 3 , \qquad \Omega \in a \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \Omega(\lambda\,,\, \lambda - 3)\,.$$

On en déduit l'équation cartésienne du cercle γ en fonction de λ et r :

$$\gamma: \ (x-\lambda)^2 + (y-\lambda+3)^2 - r^2 \ = \ 0\,.$$

Le point P appartient à l'axe radical des cercles γ et γ_1 il a donc même puissance par rapport aux deux cercles γ_1 et γ. On en déduit l'expression paramétrique du rayon r.

Expression paramétrique du rayon r

Le point P appartient à l'axe radical des cercles γ et γ_1 donc la puissance de P par rapport à γ est égale à la puissance de P par rapport à γ_1.

$$\mathcal{P}_{P/\gamma_1} \ = \ x_P^2 + y_P^2 - 26x_P + 8y_P + 181 \ = \ 126\,,$$

$$\mathcal{P}_{P/\gamma} \ = \ (x_P-\lambda)^2 + (y_P-\lambda+3)^2 - r^2 \ = \ 2\,(10-\lambda)^2 - r^2\,.$$

On en déduit l'expression de r^2 en fonction de λ :

$$\mathcal{P}_{P/\gamma} \ = \ \mathcal{P}_{P/\gamma_1} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(10-\lambda)^2 - r^2 = 126$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 \ = \ 2\,(10-\lambda)^2 - 126\,.$$

D'où l'équation cartésienne du cercle γ en fonction de λ :

$$\gamma: \ (x-\lambda)^2 + (y-\lambda+3)^2 - 2\,(10-\lambda)^2 + 126 \ = \ 0\,.$$

Déterminer l'expression paramétrique de l'équation de la polaire de P par rapport au cercle γ, puis l'identifier à l'équation de la droite p.

Détermination du paramètre λ et équation cartésienne du cercle γ

Description de la droite p comme polaire de P par rapport à γ :

$$p: \ (x-\lambda)\,(x_P-\lambda) + (y-\lambda+3)\,(y_P-\lambda+3) - 2\,(10-\lambda)^2 + 126 \ = \ 0\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad (10-\lambda)\,(x-\lambda) + (10-\lambda)\,(y-\lambda+3) - 2\,(10-\lambda)^2 + 126 \ = \ 0\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad (10-\lambda)\,x + (10-\lambda)\,y - 44 + 17\lambda \ = \ 0\,.$$

Identification de p avec la droite d'équation $x + y - 3 = 0$:

$$\frac{10-\lambda}{1} = \frac{10-\lambda}{1} = \frac{-44+17\lambda}{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 1\,.$$

D'où l'équation cartésienne du cercle γ :

$$\gamma :\; (x-1)^2 + (y+2)^2 - 36 \;=\; 0\,.$$