Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 13**

Exercice 1. *Trouver l'équation de la droite qui approxime le mieux l'ensemble de points*

$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,3)\}.$$

Faire un dessin.

Solution 1. Comme on a vu dans le cours, pour trouver la droite d'équation $y = mx + b$ qui approxime le mieux l'ensemble des points donnés il faut resoudre *au sens des moindres carrés* le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, resoudre le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et donc la droite voulue est donnée par l'équation $y = 2x + 1$.

Exercice 2. *Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, et $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice non orthogonale. La matrice AB est-elle orthogonale ? La matrice AC est-elle orthogonale ?*

Solution 2. On rappelle qu'une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = A^t$. On a donc que A est orthogonale si et seulement si $A^tA = I_n$.

— Si A et B sont inversibles, on a alors bien AB inversible (argument avec le déterminant par exemple). De plus, on a $A^{-1} = A^t$ et $B^{-1} = B^t$ ce qui nous donne

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t.$$

Donc l'inverse de AB est bien $(AB)^t$ et donc AB est bien une matrice orthogonale.

— Comme C n'est pas orthogonale on a $C^tC \neq I_n$. Par suite, en utilisant le fait que $A^tA = I_n$, on a

$$(AC)^t(AC) = C^tA^tAC = C^tI_nC = C^tC \neq I_n.$$

Ainsi, AC n'est pas une matrice orthogonale.

Exercice 3. *Déterminer α, β, γ et δ de sorte que la matrice*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & \gamma \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

Solution 3. Rappel : Une matrice est orthogonale si et seulement si tous ses vecteurs colonne sont orthogonaux entre eux et de norme 1. On note c_i la i-ème colonne de A. Les nombres α, β, γ et δ doivent alors vérifier

$$1 = (c_1|c_1) = \frac{1}{25}(9 + \alpha^2) \tag{1}$$
$$1 = (c_2|c_2) = \frac{1}{25}(16 + 9 + \beta^2) \tag{2}$$
$$1 = (c_3|c_3) = \frac{1}{25}(\gamma^2 + \delta^2) \tag{3}$$
$$0 = (c_1|c_2) = \frac{1}{25}(12 - 3\alpha) \tag{4}$$
$$0 = (c_1|c_3) = \frac{1}{25}(3\gamma) \tag{5}$$
$$0 = (c_2|c_3) = \frac{1}{25}(4\gamma + \beta\delta). \tag{6}$$

De l'équation (2), on obtient $\beta = 0$. De l'équation (5), on obtient $\gamma = 0$. De l'équation (4), on obtient $\alpha = 4$ (ce qui est cohérent avec l'équation (1)). Et finalement, de l'équation (3), on obtient $\delta = \pm 5$.

Exercice 4. *Les matrices suivantes sont-elles orthogonales ? Si oui, trouver leur inverse.*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 4. — On note c_i le vecteur formant la i-ème colonne de A. On obtient alors

$$\begin{aligned}
(c_1|c_2) &= \frac{1}{49}(10 - 10 - 8 + 8) = 0 \\
(c_1|c_3) &= \frac{1}{49}(10 - 8 + 8 - 10) = 0 \\
(c_1|c_4) &= \frac{1}{49}(8 - 8 - 10 + 10) = 0 \\
(c_2|c_3) &= \frac{1}{49}(10 - 8 + 8 - 10) = 0 \\
(c_2|c_4) &= \frac{1}{49}(20 + 4 - 20 - 4) = 0 \\
(c_3|c_4) &= \frac{1}{49}(8 - 8 - 10 + 10) = 0.
\end{aligned}$$

Donc le colonnes de A sont bien orthogonales entre elles. De plus, on a

$$\begin{aligned}
(c_1|c_1) &= \frac{1}{49}(4 + 25 + 4 + 16) = \frac{49}{49} = 1 \\
(c_2|c_2) &= \frac{1}{49}(25 + 4 + 16 + 4) = 1 \\
(c_3|c_3) &= \frac{1}{49}(4 + 16 + 4 + 25) = 1 \\
(c_4|c_4) &= \frac{1}{49}(16 + 4 + 25 + 4) = 1.
\end{aligned}$$

Donc les colonnes de A sont toutes de norme 1. Ainsi A est orthogonale. Comme vu dans le cours, on a alors

$$A^{-1} = A^t = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & -4 \\ 5 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

— On peut rapidement vérifier que $(c_1|c_4) \neq 0$ et donc B n'est pas orthogonale.

Exercice 5. *On munit* $\mathbb{R}^4$ *du produit scalaire euclidien usuel.*

Soit A *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que les colonnes de* A *forment une famille orthogonale de* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *Construire la matrice* U *formée en normalisant les vecteurs colonnes de* A*.*

Solution 5. 1. On vérifie que

$$< (1,0,-1,0),(-1,1,-1,1) >=< (1,0,-1,0),(1,2,1,0) >=$$

$$=< (-1,1,-1,1),(1,2,1,0) >= 0.$$

2. On calcule

$$||(1,0,-1,0)|| = \sqrt{2},$$

$$||(-1,1,-1,1)|| = 2,$$

$$||(1,2,1,0)|| = \sqrt{6}.$$

Donc

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/2 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A *par un changement de base orthonormée (pour une matrice de changement de base orthogonale).*

Ensuite faire de même pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

étant donné que ses valeurs propres sont 1 5 *et* 9*.*

Solution 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Voici une astuce : la somme des composantes de chaque ligne de la matrice A est égale à 6. Donc $(1,1,1,1)$ est un vecteur propre de valeur propre 6. On peut remarquer aussi que $A - 2I$ est une matrice de rang 1 et par conséquent 2 est une valeur propre de multiplicité géométrique 3. On en conclut sans faire de calculs que $c_A(t) = (t-6)(t-2)^3$. Par contre, si on ne remarque pas ces propriétés, alors on doit tout simplement calculer le polynôme caractéristique de A.

On calcule ensuite les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormée de vecteurs propres. D'abord

$$E_6 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

Par la méthode de Gauss on obtient

$$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

On utilise alors le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_2 :

$$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right)$$

La matrice de changement de base suivante est donc orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2\\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P est la transposée P^T et la formule du changement de base donne enfin

$$D = P^TAP = \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

Pour la matrice B, on peut prendre $P = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, avec $D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$.

Exercice 7. *Soit* $B = \begin{pmatrix}9 & 20 & 12\\ -12 & 15 & -16\\ -20 & 0 & 15\end{pmatrix}$.

1. *Montrer que les colonnes de B forment un ensemble orthogonal.*
2. *Calculer la norme de chaque colonne de B.*
3. *En utilisant (a) et (b), écrire B^TB.*
4. *En utilisant (c), déduire B^TBB^T.*

5. *Est-ce que $BB^T = B^T B$?*
6. *Si U est la matrice obtenue en normalisant les colonnes de B, sans calculer U, trouver $U^T U$.*

Solution 7. 1. On vérifie que les colonnes sont othogonales en calculant les produits scalaires.

2. Chaque colonne a norme $\sqrt{625} = 25$.
3. Comme les colonnes de B sont orthogonales, la matrice $B^T B$ est diagonale, et les éléments sur la diagonale correspondent au normes des colonnes de B. Donc
$$B^T B = \begin{pmatrix} 625 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix} = 625 I_3.$$
4. On a que
$$B^T B B^T = 625 I_3 B^T = 625 B^T.$$
5. On remarque que B^T est inversible parce que ses lignes sont orthogonales deux-à-deux et non nulles et par un résultat du cours sont alors linéairement indépendantes. la matrice est donc de rang 3 et par conséquent inversible. En multipliant par $(B^T)^{-1}$ l'égalité de 4., on obtient alors
$$BB^T = (B^T)^{-1} B^T B B^T = (B^T)^{-1} 625 B^T = 625 (B^T)^{-1} B^T = 625 I_3 = B^T B.$$
6. Les colonnes de U forment une famille orthonormale. Donc
$$U^T U = I.$$

Exercice 8. *1. Montrer que si U est une matrice orthogonale, alors la transposée U^T est aussi une matrice orthogonale. Autrement dit si les colonnes de U sont orthonormées, alors les lignes de U sont orthonormées.*

2. *Si U est orthogonale et λ est une valeur propre réelle de U, montrer que $\lambda = \pm 1$.*
3. *Soit $U = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$. Montrer que U est orthogonale et que 1 est valeur propre. Quelle est la dimension de l'espace propre E_1 ?*
4. *Soit U une matrices orthogonale de taille $n \times n$ et soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(U\overrightarrow{u}_1, \ldots, U\overrightarrow{u}_n)$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.*

Solution 8. 1. Si U est une matrice orthogonale, alors par définition $U^T U = I_n$. Autrement dit l'inverse *à gauche* de U est U^T. Mais un inverse à gauche est aussi un inverse à droite. On conclut que $UU^T = I_n$ également ce qui signifie que la transposée U^T est aussi une matrice orthogonale.
$$(UV)^T UV = V^T U^T U V = V^T I_n V = V^T V = I_n$$
ce qui veut bien dire que le produit UV est aussi une matrice orthogonale.

2. Choisissons un vecteur propre $\overrightarrow{x}$ pour la valeur propre réelle λ. Comme U est orthogonale nous savons que U préserve les normes, si bien que $\|U\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\|$. Mais puisque $U\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, et donc $\|\overrightarrow{x}\| = \|U\overrightarrow{x}\| = \|\lambda\overrightarrow{x}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{x}\|$ et on en déduit que $\lambda = \pm 1$.
3. Pour montrer que U est orthogonale on calcule $U^T U = I_3$. Pour montrer que 1 est valeur propre de U, il ne faut surtout pas calculer le polynôme caractéristique, mais simplement vérifier que la matrice $U - I_3$ n'est pas de rang maximal.
$$U - I_3 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 36-100 & 48 & -80 \\ -80 & 60-100 & 0 \\ 48 & 64 & 60-100 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} -64 & 48 & -80 \\ -80 & -40 & 0 \\ 48 & 64 & -40 \end{pmatrix}$$

Si l'on s'intéresse uniquement au rang de cette matrice on peut très bien faire des opérations élémentaires sur les colonnes. Par exemple $C_1 - 2C_2$ donne le double de la colonne C_3. Le rang est donc < 3. Puisque visiblement les colonnes ne sont pas toutes proportionnelles, on conclut que le rang vaut 2. Par le Théorème du rang on en déduit que la dimension du noyau, c'est-à-dire l'espace propre E_1, est 1. Il y a une droite de vecteurs fixés par U.

4. Soit U une matrice orthogonale de taille $n \times n$ et soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Pour montrer que $(U\overrightarrow{u}_1, \ldots, U\overrightarrow{u}_n)$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, il suffit de vérifier que les vecteurs de cette famille sont orthogonaux deux à deux et non nuls. On en déduira en effet qu'ils forment une base puisqu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est toujours libre. Dans $\mathbb{R}^n$ une famille de n vecteurs linéairement indépendants forme une base. Or, pour $i \neq j$,

$$U\overrightarrow{u}_i \cdot U\overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j = 0$$

La première égalité provient du fait que U orthogonale implique aussi bien que $\|Uv\| = \|v\|$ pour tout vecteurs v que $Uu \cdot Uw = u \cdot w$ pour tout vecteurs $u, w \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 9. *Choix Multiple.*

a. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ *Alors les lignes de A sont orthogonales.*
☐ *Alors les colonnes de A sont orthonormées.*
X *Alors $A^T A$ est une matrice diagonale.*
☐ *Alors AA^T est une matrice diagonale.*

b. *Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^7$ de dimension 4 et $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ l'application qui envoie un vecteur de $\mathbb{R}^7$ sur sa projection orthogonale dans W.*

☐ *L'image par T d'un vecteur de $W^\perp$ est l'opposé de ce vecteur.*
X *L'application T est linéaire.*
☐ *L'application T est injective.*
☐ *L'application T est surjective.*

c. *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les colonnes sont non nulles.*

☐ *Si les colonnes de A sont orthogonales, alors les lignes aussi.*
X *Si les colonnes de A sont orthogonales, alors $KerA$ est nul.*
☐ *Si les lignes de A sont orthonormées, alors A est la matrice I_n.*
☐ *Si l'image de A est $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A sont orthogonales.*

Solution 9. Choix Multiple.

a. ☐ Alors $A^T A$ est une matrice diagonale.

Les lignes de A ne sont pas orthogonales, car par exemple le produit scalaire des deux premières lignes vaut -3. Les colonnes de A sont orthogonales, mais elles ne sont pas orthonormées, parce que la première colonne par exemple est un vecteur de norme $\sqrt{14}$. Du coup, $A^T A$ est une matrice diagonale, mais AA^T n'est pas diagonale.

b. ☐ L'application T est linéaire.

En effet, l'image par T d'une somme de vecteurs est la somme des images. On peut le démontrer par exemple en utilisant l'unicité de la décomposition. Pour deux vecteur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^7$, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$ avec $\overrightarrow{w} \in W$ et $\overrightarrow{z} \in W^\perp$. De même $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w'} + \overrightarrow{z'}$. Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$ sont les projections orthogonales respectives de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Mais alors l'écriture (unique !)

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}' + \overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}'$$

de la somme des deux vecteurs comme $\vec{w} + \vec{w}'$ dans W auquel on ajoute $\vec{z} + \vec{z}'$ dans l'orthogonal exhibe $\vec{w}+\vec{w}'$ comme projection orthogonale de $\vec{u}+\vec{v}$. De plus, le même raisonnement que ci-dessus, mais plus simple, montre que la projection orthogonale de $\lambda\vec{u}$ vaut exactement λ fois la projection orthogonale de $\vec{u}$.

En revanche, l'image d'un vecteur de $W^\perp$ est nulle, et non pas l'opposé de ce vecteur. Ceci montre également que l'application T n'est pas injective, car son noyau est $W^\perp$, de dimension 3 (la somme des dimension de W et $W^\perp$ vaut 7). L'application T n'est pas surjective non plus puisque son image est de dimension 4 par le Théorème du rang. Son image est précisément le sous-espace W.

c. ☐ Si les colonnes de A sont orthogonales *et non-nulles*, alors Ker$A$ est nul.

En effet, si les colonnes sont orthogonales et non nulles, elles forment une base de $\mathbb{R}^n$, si bien que le noyau est nul. Les autres affirmations sont fausses. Si les colonnes de A sont orthogonales, alors les lignes pas forcément, même pour $n = 2$. On pensera par exemple à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Si les lignes de A sont orthonormées, alors A est une matrice orthogonale, mais il y en a d'autres que I_n, même pour $n = 2$. On pensera par exemple à des matrices de rotation. Si l'image de A est $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$, mais elle n'a aucune raison d'être orthogonale, même pour $n = 2$.

Exercice 10. *Choix multiples.*

a. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ *Le noyau de A est non nul.*
X *La matrice A est orthodiagonalisable.*
☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthogonale, mais pas orthonormée.*
☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthonormée.*

b. *Soit A la matrice du point a. Laquelle des affirmations suivantes est* **fausse** *?*

☐ *Le nombre 6 est valeur propre de A.*
☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme le vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$.
☐ *Le polynôme caractéristique de A est un produit de facteurs linéaires.*
X *Les valeurs propres de A sont des nombres entiers.*

c. *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alors une solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ satisfait*

☐ $\hat{x}_1 = 0$
X $\hat{x}_2 = 4/3$
☐ $\hat{x}_1 = 4/3$
☐ $\hat{x}_2 = 1/3$

d. *Soit $A, P \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, avec P orthogonale, telles que* $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors :*

X *A est diagonalisable, mais pas orthodiagonalisable.*
☐ *A est symétrique.*
☐ *A est orthodiagonalisable.*
☐ *A est orthogonale.*

Solution 10. Choix multiples.

a. ☐ La matrice A est orthodiagonalisable.

En effet, la matrice A est orthodiagonalisable, car elle est symétrique. Par contre, le noyau de A est nul. Donc A transforme la base canonique en une nouvelle base décrite par les colonnes de A, mais cette nouvelle base n'est ni orthogonale, ni orthonormée.

b. L'affirmation fausse est :
☐ Les valeurs propres de A sont des nombres entiers.

En effet, les valeurs propres de A sont 6, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$, donc en particulier elles ne sont pas toutes entières. Toutes les autres affirmations sont vraies. Le nombre 6 est valeur propre de A : c'est la somme des coefficients de chaque ligne. Par définition, la matrice A représente une application linéaire qui transforme le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$. Et finalement, le polynôme caractéristique de A est scindé car A est symétrique, donc diagonalisable.

c. ☐ $\hat{x}_2 = 4/3$

On a $\hat{x}_1 = 1/3$ et $\hat{x}_2 = 4/3$, faites le calcul !

d. ☐ A est diagonalisable, mais pas orthodiagonalisable.

La matrice A est non symétrique car si $A = A^T$ alors on a $(P^TAP)^T = P^TA^T(P^T)^T = P^TAP$. Mais on voit bien que P^TAP n'est pas symétrique. Par un résultat du cours, une matrice carrée est orthogonalement diagonalisable si et seulement si elle est symétrique. La matrice A est de rang 2, elle ne peut donc être orthogonale, car toute matrice orthogonale est inversible. (On peut aussi voir que les colonnes ne sont pas orthogonales entre elles.)

Exercice 11. *Soit $U \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Vrai ou Faux ?*

1. *Si les colonnes de U forment une liste orthonormale, alors les lignes de U aussi.*
2. *Si U est une matrice carrée, et les colonnes de U forment une liste orthonormale, alors les lignes de U aussi.*
3. *Si U est une matrice orthogonale, U est symétrique.*
4. *Si U est une matrice symétrique, U est orthogonale.*

Solution 11.

1. *Faux.* Pour la matrice
$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
les colonnes forment une famille orthogonale, mais les lignes ne forment pas une fammille orthonormale.
2. *Vrai.* En effet, les colonnes de U forment une famille orthonormale si et seulement si U est orthogonale, si et seulement si U^T est orthogonale, si et seulement si les colonnes de U^T forment une famille orthonormale, si et seulement si les lignes de U forment une famille orthonormale.
3. *Faux.* La matrice
$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
est orthogonale et pas symétrique.
4. *Faux.* La matrice
$$U := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est symétrique et pas orthogonale.
