Corrigé 23

1. Calculer la longueur des arcs définis ci-dessous :

a) $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $\alpha \leq x \leq \beta$,

b) $y = \ln(1-x^2)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$,

c) $y = \ln\left[\cos(x)\right]$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$,

d) $y = \arcsin\left(e^{-x}\right)$, $0 \leq x \leq a$.

---

a) Soit L la longueur de l'arc : $L = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.

Or $y'(x) = \sinh(\frac{x}{a})$, donc $L = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sinh^2(\frac{x}{a})}\,dx = \int_\alpha^\beta \cosh(\frac{x}{a})\,dx$,

$$L = \Big[a\sinh(\tfrac{x}{a})\Big]_\alpha^\beta = a\Big[\sinh(\tfrac{\beta}{a}) - \sinh(\tfrac{\alpha}{a})\Big] .$$

b) $L = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ avec $y = \ln(1-x^2)$ et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1-x^2)^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(1-x^2)^2}} = \left|\frac{x^2+1}{1-x^2}\right| = \frac{x^2+1}{1-x^2}, \quad \forall x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] .$$

$$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx .$$

Pour intégrer cette fonction rationnelle, on la décompose en éléments simples :

$$\frac{x^2+1}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} .$$

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$L = 2\Big[-x-\ln(1-x)+\ln(1+x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2\Big[-x+\ln(\tfrac{1+x}{1-x})\Big]_0^{\frac{1}{2}} = -1+2\,\ln 3 .$$

c) • Intégration par rapport à x

Soit L la longueur de l'arc : $L = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx\,.$

Or $y = \ln\left[\cos(x)\right] \quad\Rightarrow\quad y'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}\cdot[-\sin(x)] = -\tan(x)\,.$

Donc $L = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2(x)}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)}\, dx\,,$

car $\cos(x) > 0\,,\quad \forall\, x \in [-\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\,]\,.$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)}\, dx\,.$$

Recherche des primitives :

$$\int \frac{2\, dx}{\cos(x)} = \int \frac{2\,\cos(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{2\,\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\, dx = \int \frac{2\,\cos(x)\, dx}{[1-\sin(x)]\cdot[1+\sin(x)]}$$

$$= \int \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\, dx + \int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\, dx$$

$$= -\ln[1-\sin(x)] + \ln[1+\sin(x)] + C = \ln\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} + C\,.$$

Remarque :

On aurait pu arriver au même résultat en utilisant les tests d'invariance de Bioche.
Le produit $\dfrac{2}{\cos(x)}\cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $\pi - x$, on pose donc $z = \sin(x)$, ce qui nous amène à l'intégration d'une fonction rationnelle en z.

Evaluation :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)}\, dx = \ln\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln\frac{3/2}{1/2} - \ln(1) = \ln(3)\,.$$

• Intégration par rapport à y

Soit ℓ la longueur de l'arc défini par $y = \ln\left[\cos(x)\right]$, $x \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{6}\,]$, c'est la moitié de la longueur cherchée.

Pour calculer cette longueur ℓ en intégrant par rapport à y, il faut déterminer x en fonction de y :

$$x = \arccos\left(e^y\right)\,, \qquad y \in \left[\,\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\,,\,0\,\right].$$

Posons $a = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Expression de ℓ : $\quad \ell = \displaystyle\int_a^0 \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy \quad$ avec $\quad \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}$

$$\ell = \int_a^0 \sqrt{\left(\tfrac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2 + 1}\; dy = \int_a^0 \sqrt{\tfrac{e^{2y}}{1-e^{2y}} + 1}\; dy = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}}\, dy$$

Intégration :

$$\ell = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}}\, dy = \int_a^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{e^{-2y}-1}}\, dy = -\operatorname{arg\,cosh}\left(e^{-y}\right)\Big|_a^0$$

$$\ell = -\big[\underbrace{\operatorname{arg\,cosh}(1)}_{=0} - \operatorname{arg\,cosh}\left(e^{-a}\right)\big] = \operatorname{arg\,cosh}\left(e^{-a}\right) = \operatorname{arg\,cosh}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Conclusion : $\quad L = 2\,\ell = 2\,\operatorname{arg\,cosh}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right).$

d) • Expression de la longueur

$$L = \int_0^a \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad \text{avec} \qquad y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \tfrac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\, dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx$$

• Intégration

◦ Primitive

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, dx = \operatorname{arg\,cosh}(e^x) + C\,.$$

◦ Evaluation

$$L = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx = \operatorname{arg\,cosh}(e^a) - \operatorname{arg\,cosh}\left(e^0\right) = \operatorname{arg\,cosh}(e^a)\,.$$

2. Calculer la longueur des arcs définis paramétriquement ci-dessous :

a) $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1\,,$

b) $\begin{cases} x(t) = 2\,\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = -2\,\sin t - \sin(2t) \end{cases} \qquad -\pi \le t \le \pi\,.$

a) Soit L la longueur de l'arc Γ : $\quad L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\; dt\,.$

$$\dot{x}(t) = 2 + 2t = 2\,(1+t)\ , \qquad \dot{y}(t) = 2 - 2t = 2\,(1-t)\ ,$$

$$L \;=\; \int_0^1 \sqrt{[2\,(1+t)]^2 + [2\,(1-t)]^2}\; dt \;=\; 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\; dt\,.$$

Calcul de l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\; dt\,.$

On pose $t = \sinh(z)\,,$ d'où $\sqrt{1+t^2} = \cosh(z)$ et $dt = \cosh(z)\; dz\,.$

Et lorsque t parcourt l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]\,,$ z varie entre 0 et $\arg\sinh(1)\,.$

Posons $a = \arg\sinh(1)\,,$

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\; dt \;=\; \int_0^a \cosh^2(z)\; dz \;=\; \int_0^a \frac{1+\cosh(2z)}{2}\; dz \;=\; \left[\frac{\sinh(2z)}{4} + \frac{z}{2}\right]_0^a$$

$$=\; \left[\frac{\sinh(z)\,\cosh(z)}{2} + \frac{z}{2}\right]_0^a \;=\; \left[\frac{\sinh(z)\,\sqrt{1+\sinh^2(z)}\;+\;z}{2}\right]_0^a$$

$$=\; \frac{\sqrt{2}\;+\;\arg\sinh(1)}{2}\,.$$

$$L \;=\; 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\; dt \;=\; 2 + \sqrt{2}\,\arg\sinh(1)\,.$$

b) Soit L la longueur de l'arc : $\quad L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\ .$

$$\dot{x}(t) \;=\; -2\,\sin(t) + 2\,\sin(2t) \;=\; -2\,[\,\sin(t) - \sin(2t)\,]\,,$$

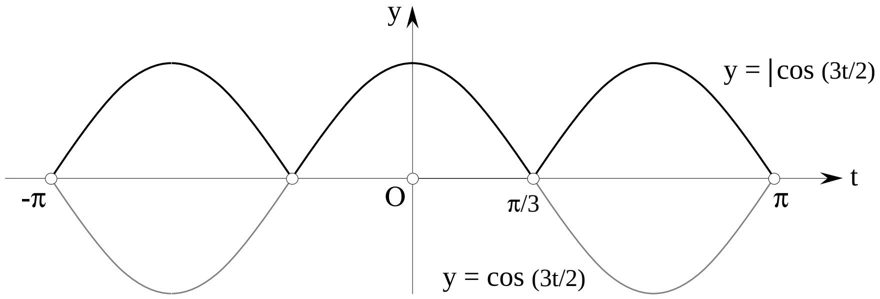
$$\dot{y}(t) \;=\; -2\,\cos(t) - 2\,\cos(2t) \;=\; -2\,[\,\cos(t) + \cos(2t)\,]\,.$$

$$\begin{aligned}
&\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\\
=\;& 4\,[\,\sin(t) - \sin(2t)\,]^2 + 4\,[\,\cos(t) + \cos(2t)\,]^2\\
=\;& 4\left[\sin^2(t) - 2\,\sin(t)\,\sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) + 2\,\cos(t)\,\cos(2t) + \cos^2(2t)\right]\\
=\;& 4\,[\,2 + 2\,\cos(t)\,\cos(2t) - 2\,\sin(t)\,\sin(2t)\,]\\
=\;& 8\,\left[\,1 + \cos(3t)\,\right].
\end{aligned}$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \;=\; 16\,\frac{1+\cos(3t)}{2} \;=\; 16\,\cos^2\left(\tfrac{3t}{2}\right).$$

Donc $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \;=\; 4\,\left|\,\cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right|.$

Sur l'intervalle $[-\pi\,,\,\pi\,]$, $\cos\frac{3t}{2}$ n'est pas de signe constant :



Par périodicité et symétrie, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right|\,dt \;=\; 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\,dt\,.$

$$L \;=\; 4\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right| dt \;=\; 24\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\,dt \;=\; 24\left[\frac{2}{3}\,\sin\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \;=\; 16\,.$$

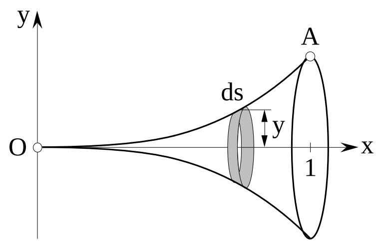
3. Déterminer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe d'équation $y = f(x)$ autour de l'axe d dans les deux cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3\,,\quad 0 \le x \le 1 \quad$ et $\quad d = (Ox)\,,$

b) $f(x) = \cosh(x)\,,\quad 0 \le x \le 1 \quad$ et $\quad d = (Oy)\,.$

---

a) Soit A l'aire de cette surface de révolution.

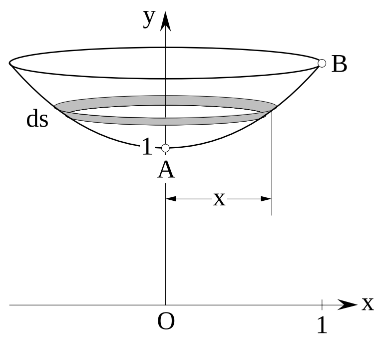


$$A \;=\; \int_O^A 2\pi\,y\,ds \;=\; 2\pi\int_0^1 y(x)\,\sqrt{1+y'^2(x)}\;dx$$

$y(x) = \frac{1}{3}\,x^3\,,\quad y'(x) = x^2\,,\quad ds = \sqrt{1+x^4}\;dx$

$$A \;=\; \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\,\sqrt{1+x^4}\;dx \;=\; \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{6}\,(1+x^4)^{3/2}\right]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{9}\,(2\sqrt{2}-1)\,.$$

b) Soit A l'aire de la surface de révolution.



$$A = \int_A^B 2\pi\,x\,ds \;=\; 2\pi\int_0^1 x\,\sqrt{1+\sinh^2 x}\;dx$$

$$A = 2\pi\int_0^1 x\,\cosh x\;dx$$

Intégration de $x\cosh x$ par parties :

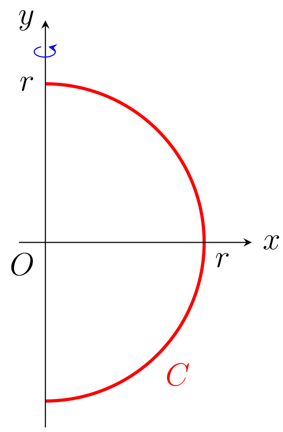
$$\int x\,\cosh x\;dx \;=\; x\,\sinh x - \cosh x + C\,.$$

$$A \;=\; 2\pi\,[\,x\,\sinh x - \cosh x\,]_0^1 \;=\; 2\,\pi\,(\sinh 1 - \cosh 1 + 1)\,.$$

4. Calculer l'aire d'une sphère de rayon r.

- Une méthode : description paramétrique

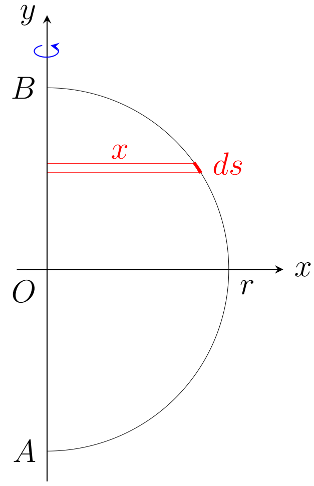
Description de la sphère



La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Oy, du demi-cercle C d'équations paramétriques

$$C : \begin{cases} x(t) = r\,\cos(t) \\ y(t) = r\,\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,].$$

On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation Oy.



Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen x et dont les génératrices sont de longueur ds. Elles ont pour aire $2\pi\,x\,ds$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface de révolution :

$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi\,x\,ds\,.$$

Et en l'exprimant par rapport à t :

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\,x(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\;\;dt\,.$$

Calcul de l'aire de la sphère

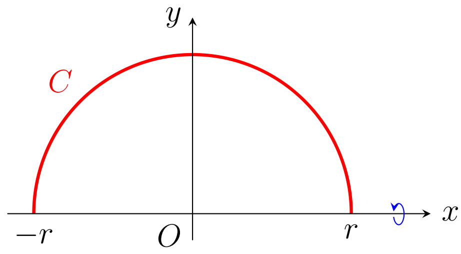
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\,x(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\;\;dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\;\;dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,\cos(t)\cdot\sqrt{[-r\,\sin(t)]^2+[r\,\cos(t)]^2}\;\;dt \\
&= 4\pi\,r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt \\
&= 4\pi\,r^2\Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi\,r^2.
\end{aligned}$$

- Une autre méthode : description cartésienne

  Description de la sphère

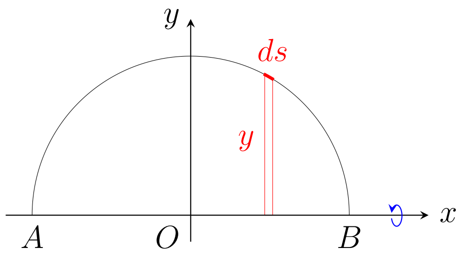
  La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Ox, du demi-cercle C d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = r^2\,, \quad y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad -r \leq x \leq r\,.$$



On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation Ox.

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen y et dont les génératrices sont de longueur ds. Elles ont pour aire $2\pi\, y\, ds$.



Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface de révolution :

$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi\, y\, ds = 4\pi \int_O^B y\, ds\,.$$

Expression que l'on peut intégrer par rapport à x ou à y.

Calcul du volume

- Intégration par rapport à x.

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y\ ds = 4\pi \int_0^r y(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx\,.$$

avec $\quad y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,, \qquad y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

et $\quad \sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi\, r \int_0^r dx = 4\pi\, r^2.$$

∘ Intégration par rapport à y.

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y\ ds = 4\pi \int_0^r y \cdot \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy\,.$$

avec $\quad x(y) = \sqrt{r^2 - y^2}\,, \qquad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

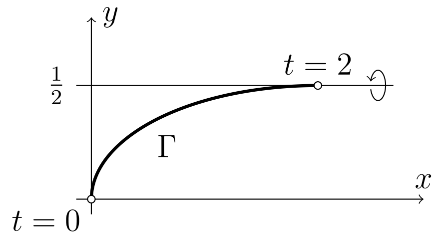
et $\quad \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \sqrt{\tfrac{y^2}{r^2-y^2} + 1} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,.$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r y \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\ dy = -4\pi\, r \int_0^r \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\ dy\,,$$

$$\mathcal{A} = -4\pi\, r \left[\sqrt{r^2 - y^2}\,\right]_0^r = 4\pi\, r^2.$$

5. On considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{4+t^2} \\[2mm] y(t) = \dfrac{2t}{4+t^2} \end{cases} \qquad t \in [\,0, 2\,]\,.$$



a) Calculer la longueur de l'arc Γ.

b) Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc Γ autour de l'axe horizontal $y = \frac{1}{2}$.

---

a) Soit L la longueur de l'arc Γ : $\quad L = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\ dt\,.$

$$\dot{x}(t) = \frac{2t\ (4+t^2) - t^2\ (2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{8t}{(4+t^2)^2}\,,$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2\,(4+t^2) - 2t\ (2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{-2t^2+8}{(4+t^2)^2}\,,$$

$$\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = 2\,\sqrt{\left[\tfrac{4t}{(4+t^2)^2}\right]^2 + \left[\tfrac{-t^2+4}{(4+t^2)^2}\right]^2} = 2\,\frac{\sqrt{16t^2 + (t^4 - 8t^2 + 16)}}{(4+t^2)^2}$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 16}}{(4+t^2)^2} = 2\,\frac{\sqrt{(t^2+4)^2}}{(4+t^2)^2} = \frac{2}{4+t^2}\,.$$

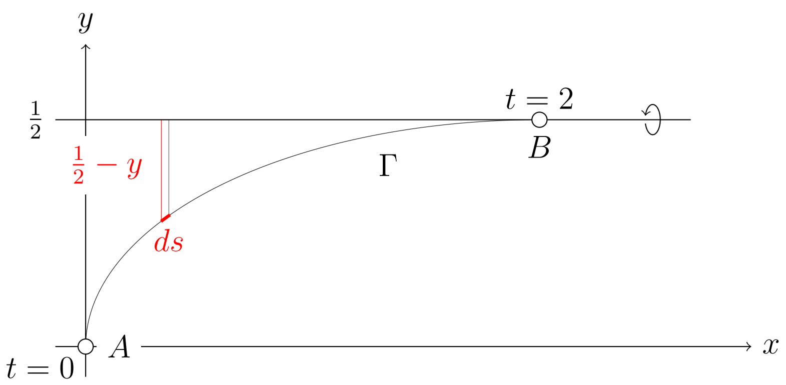
Intégration :

$$L = \int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt = \int_0^2 \frac{2}{4+t^2}\, dt = \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\, dt = \arctan\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^2 ,$$

$$L = \frac{\pi}{4} .$$

b) On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation $y = \frac{1}{2}$.

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen $\frac{1}{2} - y$ et dont les génératrices sont de longueur ds . Elles ont pour aire $2\pi\left(\frac{1}{2} - y\right) ds$.



Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface de révolution : $\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi\left(\frac{1}{2} - y\right) ds$.

Et en l'exprimant par rapport à t :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 2\pi\left[\tfrac{1}{2} - y(t)\right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt .$$

Intégration :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 2\pi\left[\tfrac{1}{2} - y(t)\right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2t}{4+t^2}\right] \cdot \frac{2}{4+t^2}\, dt$$

$$= 2\pi\left[\int_0^2 \frac{1}{4+t^2}\, dt - \int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2}\, dt\right] .$$

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{4+t^2}\, dt = \frac{\pi}{8}$ (question précédente)

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2}\, dt = 2\int_0^2 \frac{2t}{(4+t^2)^2} = \frac{-2}{4+t^2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} .$

$$\mathcal{A} = 2\pi\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{4}(\pi - 2) .$$

6. On considère l'arc de courbe Γ défini par

$$y = \sinh^2(x)\,, \qquad x \geq 0\,, \qquad 0 \leq y \leq 1\,.$$

a) Calculer la longueur de l'arc Γ.

b) Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc Γ autour de l'axe vertical d'équation $x = \arg\sinh(1)$.

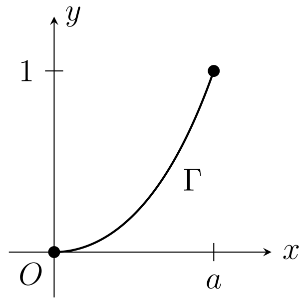
Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

Posons $a = \arg\sinh(1)$.

a) La longueur de l'arc Γ a pour expression $s = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

$$f'(x) = 2\,\sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x)\,,$$

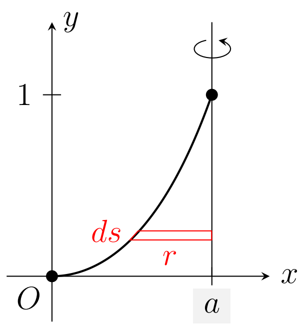
$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(2x)} = \cosh(2x)\,.$$



$$s = \int_0^a \cosh(2x)\, dx = \frac{1}{2}\,\sinh(2x)\Big|_0^a$$

$$= \sinh(x) \cdot \cosh(x)\Big|_0^a = \sinh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x))}\Big|_0^a = \sqrt{2}\,.$$

b) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ de la surface de révolution.



La section de cette surface de révolution par le plan $y = y_0$ est un cercle de rayon $r = a - x_0$. On en déduit l'expression de l'aire $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \int_\Gamma 2\pi\, r\, ds = \int_\Gamma 2\pi\,(a - x)\, ds\,,$$

Que l'on intègre par rapport à x :

$$\mathcal{A} = \int_0^a 2\pi\,(a - x) \cdot \cosh(2x)\, dx = 2\pi\, a \underbrace{\int_0^a \cosh(2x)\, dx}_{=\sqrt{2}} - 2\pi \int_0^a x \cdot \cosh(2x)\, dx$$

et on intègre $x \cdot \cosh(2x)$ par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^a \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\cosh(2x)}\,dx &= x \cdot \frac{\sinh(2x)}{2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{\sinh(2x)}{2}\,dx \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)\Big|_0^a - \frac{\cosh(2x)}{4}\Big|_0^a \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \sqrt{1+\sinh^2(x)}\,\Big|_0^a - \frac{1}{4}\,\big[\,2\,\sinh^2(x)+1\,\big]\Big|_0^a \\
&= a\,\sqrt{2} - \frac{1}{4}\,(3-1) = a\,\sqrt{2} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{A} = \big(2\pi\,a\,\sqrt{2}\,\big) - 2\pi\,\big(a\,\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\big) = \pi\,.$
