22.3.19

Série 16

1. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant :

(i) $\overline{z}(z-3) < 6\mathrm{Re}(z) + 3z + 5$;

(ii) $|z - i| = |z + 4 + 7i|$.

(b) Soit P_i un point du plan de Gauss défini par $z = z_i$.
Connaissant $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 8 + 3i$ et sachant que $P_1P_2P_3$ forment un triangle équilatéral d'orientation positive, déterminer z_3 à l'aide de sommes et de produits complexes.

2. (a) Faire tourner, dans le plan complexe, le point $z = 5 - i$ d'un angle de $-\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'origine ;

(b) On se donne, dans le plan, les deux points suivants : $P(2;3)$ et $M_1(6;5)$.
Par un calcul dans $\mathbb{C}$, à l'aide des affixes de ces points, calculer les coordonnées du point M_2 connaissant les informations suivantes :

- la distance de P à M_1 et la même que la distance de P à M_2
- l'angle aigu φ orienté défini par $\measuredangle(M_2PM_1)$ est tel que $\tan\varphi = \dfrac{4}{3}$;

(c) Déterminer le point P du plan complexe satisfaisant les conditions suivantes :

- La distance de P au point A vaut $\sqrt{10}$
- L'angle $\widehat{BAP}$ vaut $-\dfrac{\pi}{4}$
- $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = 4 + 3i$.

3. Donner, sous forme algébrique, les solutions de l'équation suivante :

$$\left(z^2 - (\sqrt{3} + i)z + \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}\right)^3 = i\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

4. Résoudre :

(a) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;

(b) $(1+i)z^4 = (1-i)\overline{z}^2$;

(c) $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$.

5. Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^3 - 3z^2 + 3z - i = 0$ et exprimer l'une des solutions sous forme algébrique $x + iy$;

(b) $z^3 + 3iz^2 - 3z = 1 + i$.

Solutions

S1 (a) (i) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x-6)^2 + y^2 < 41\}$

(ii) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x + 2y + 8 = 0\}$

(b) $P_3 = (5 - 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

S2 (a) $z' = -1 - 5i$

(b) $M_2 = 6 + i$

(c) $z_P = 5 + i$

S3 $S = \{0, 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \sqrt{3} + i, -2\}$

S4 (a) $S = \{[1; \frac{2k\pi}{7}] |\, k = 1, \ldots, 6\}$

(b) $S = \{0\} \cup \{[1; -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}] |\, k = 0, \ldots, 5\}$

(c) $S = \{i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\}$

S5 (a) $z_0 = 1 + 2^{-1/3}(1+i)$

(b) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) i$