Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 30 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère la proposition T suivante :

$$T \;:\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m^n \text{ est impair} \Longrightarrow m \text{ est impair ou } n \text{ est impair}\,.$$

(a) Ecrire la proposition contraposée de T, notée C, et la démontrer par la méthode directe. Que peut-on en déduire sur la valeur de vérité de T ?

(b) Ecrire la proposition réciproque de T, notée R, et sa négation, notée non$R$. Montrer que R est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

4.5 pts

2. Démontrer par récurrence la proposition suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geq 3\,, \quad \frac{2^{2n-1}}{n!} \leq n!\,.$$

2 pts

3. Soit h l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} h \;: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2\,. \end{cases} \end{array}$$

(a) Cette application est-elle injective ? Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

(b) Montrer que h n'est pas surjective. Déterminer le plus grand sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ pour qu'elle devienne surjective lorsque l'ensemble d'arrivée est remplacé par K.

4.5 pts

Tourner s.v.p.

4. Soient les applications définies par

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & (m,n) & \longmapsto & (m+1, m+n+1) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g\ : & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (a,b) & \longmapsto & (a-1)(b-a)\,. \end{array}$$

(a) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et le représenter graphiquement.

(b) Définir l'application $g \circ f$ et expliciter $(g \circ f)^{-1}(\{12\})$.

4 pts