Série 8

Exercice 1. On munit l'espace d'un repère. Dans chacun des cas ci-dessous, décrire la position relative des plans π et ρ définis par les données. S'ils sont sécants, donner un point et un vecteur directeur de la droite intersection.

a. $\pi : x + y - 3z = 2$, ρ passe par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(3, 1, 1)$.

b. $\pi : 3x + 2y - z = 8$, $\rho : x + 3y + 2z = 5$.

c. $\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + 4t \\ y = 1 + s - t \\ z = 2 + 5s + 2t \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\rho : x + 2y - z = 1$.

Exercice 2. On munit l'espace d'un repère. Dans chacun des cas ci-dessous, décrire la position relative de la droite d avec les plans de coordonnées.

a. d passe par $A(1, 2, 0)$, $B(1, 3, -5)$.

b. $d : \frac{x+1}{2} = \frac{z-3}{5}$, $y = 2$.

c. $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = t - 7 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Dans l'espace on donne un point A, une droite d et un plan π.

a. Existe-t-il une droite l passant par A, parallèle à π et intersectant d ? On discutera selon les positions relatives des données.

b. Application numérique : $A(-3, -2, 1)$, $d : \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$ et $\pi : 3x - 5y + 4z = 12$.

Exercice 4. Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points suivants :

$$A(5, 0, 0),\ B(2, 4, 5),\ C(0, 3, 1),\ D(-5, 14, 6),\ E(-4, 17, 1).$$

a. Montrer que A, B, C définissent un plan que l'on notera π. En calculer une équation cartésienne.

b. Montrer que (DE) intersecte π en un point I dont on donnera les coordonnées.

c. Quelle est l'abscisse de I sur la droite (DE) munie du repère $(E, \overrightarrow{ED})$?

d. Quelles sont les coordonnées de I dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan π ?

Exercice 5. Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points $A\,(-1, 2, 1)$, $B\,(0, 3, \frac{5}{2})$ et les plans :

$$\rho :\ x + y - z = 1,\ \sigma :\ x - 3y + z + 1 = 0.$$

Montrer qu'il existe un unique plan π contenant A et B, et tel que l'intersection $\pi \cap \rho \cap \sigma$ est vide. Donner une équation cartésienne de π.

Exercice 6. Dans l'espace, on donne un point A et deux droites gauches d et g.

a. Existe-t-il une droite l passant par A et intersectant à la fois d et g ? On discutera selon les positions relatives des données.

b. Application numérique : $A(0,-1,2)$, $d : \frac{x-1}{2} = 1 - y = z$ et $g : x = -z, y = 1$.

Exercice 7. Dans l'espace, on donne deux droites gauches, d et g, et deux droites parallèles, p et q.

a. Existe-t-il une droite l intersectant à la fois d, g, p et q ? On discutera selon les positions relatives des données.

b. Application numérique : d passe par $(0,0,0)$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, g a pour équations cartésiennes :

$$x - 1 = -2z - 4, \; y - 1 = 0$$

la droite p passe par $(2,0,-3)$ et $(6,-6,7)$, et la droite q passe par $(-1,1,0)$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. parallèles (non confondus), b. sécants, $A(0,3,-2)$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c. confondus.
Ex. 2 : a. parallèle à (Oyz), b. parallèle à (Oxz), c. parallèle à (Oxz) et (Oyz).
Ex. 3 : $l : \frac{x+3}{7} = y + 2 = \frac{z-1}{-4}$.
Ex. 4 : a. $x + 2y - z = 5$, b. $I(-6,11,11)$, c. 2, d. $(2,1)$.
Ex. 5 : $\pi : x - y + 3 = 0$
Ex. 6 : $l : x = 0, \; y + 1 = 2 - z$.
Ex. 7 : $l : x + 1 = \frac{z}{-2}, y = 1$.