Corrigé 5

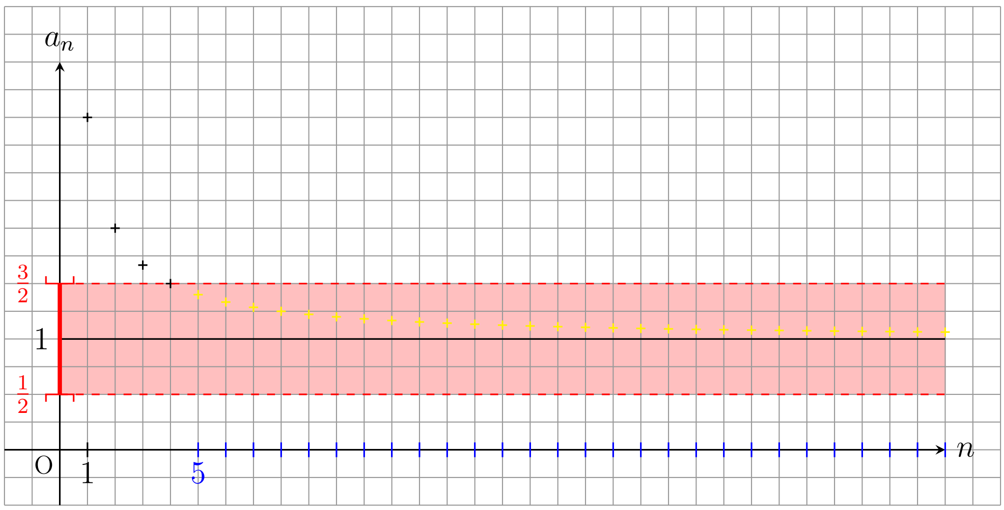
1. a) Détermination graphique de N en fonction de ε.

Il s'agit de traduire la contrainte "verticale" donnée, celle qui concerne les a_n, en une contrainte "horizontale", celle qui concerne les rangs n.

ε est donné. Il définit un $\varepsilon-$voisinage de $a = 1$.

- Représenter cet $\varepsilon-$voisinage sur l'axe des a_n.
- Déterminer les termes de la suite (a_n) qui appartiennent à cet $\varepsilon-$voisinage.
- Puis en déduire un seuil N à partir duquel tous les termes a_n, $n \geq N$ sont dans l' $\varepsilon-$voisinage de $a = 1$.

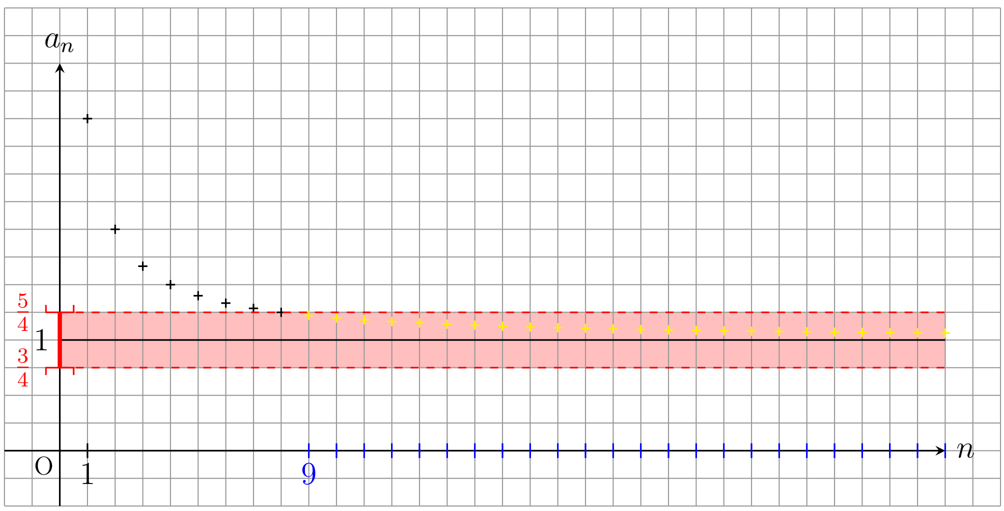
$\varepsilon = \frac{1}{2}$:



Si $n \geq 5$ alors $a_n \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$. Donc tout $N \geq 5$ convient.

En effet : $n \geq N \geq 5 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{2}$.

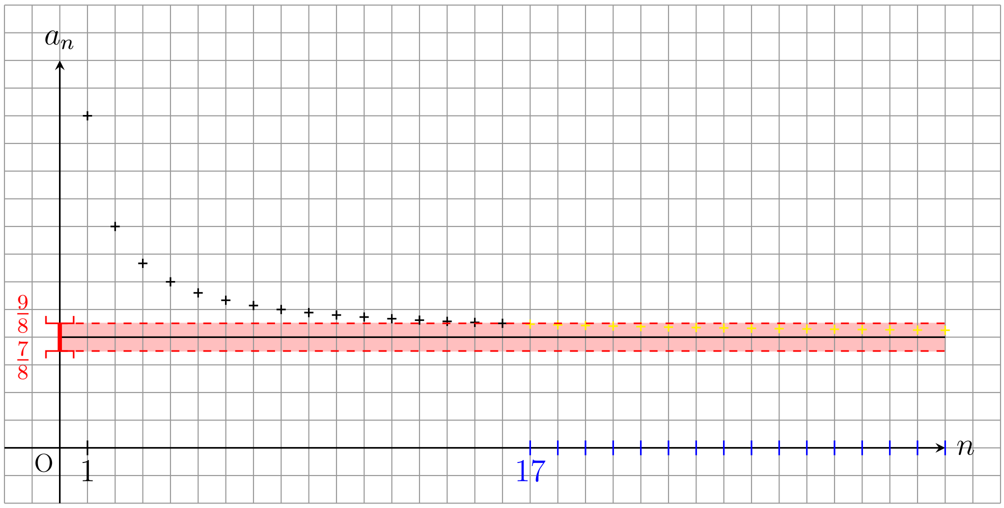
$\varepsilon = \frac{1}{4}$:



Si $n \geq 9$ alors $a_n \in \left] \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right[$. Donc tout $N \geq 9$ convient.

En effet : $n \geq N \geq 9 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{4}$.

$\varepsilon = \frac{1}{8}$:



Si $n \geq 17$ alors $a_n \in \left]\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right[$. Donc tout $N \geq 17$ convient.
En effet : $n \geq N \geq 17 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{8}$.

b) Pour démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, il faut être capable, pour un ε donné, d'exhiber un $N \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon$.

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n} < \varepsilon, \qquad \text{car } n > 0$$

Donc $\quad n > \dfrac{2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon$. Il suffit donc de choisir $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

2. a) On observe séparément la progression du numérateur et celle du dénominateur :

$$(a_n) : \ \frac{4}{1}, \ \frac{7}{3}, \ \frac{10}{5}, \ \frac{13}{7}, \ \frac{16}{9}, \ \frac{19}{11}, \ \frac{22}{13}, \ \ldots$$

- Le numérateur augmente de trois unités à chaque pas, l'expression de son terme général est donc de la forme $3n + k$, $n \in \mathbb{N}^*$.
  On obtient la valeur de k par évaluation, par exemple, en $n = 1$:
  $$3n + k \,\Big|_{n=1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1 .$$
- Le dénominateur augmente de deux unités à chaque pas, l'expression de son terme général est donc de la forme $2n + p$, $n \in \mathbb{N}^*$.
  On obtient la valeur de p par évaluation, par exemple, en $n = 1$:
  $$2n + p \,\Big|_{n=1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = -1 .$$

L'expression du terme général de la suite (a_n) s'écrit donc

$$a_n = \frac{3n+1}{2n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour déterminer la limite de cette suite, on met en évidence la plus haute puissance de n au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(3+\frac{1}{n})}{n\,(2-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}\,.$$

b)

$$(b_n) :\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{4}{5}\,,\ \frac{7}{10}\,,\ \frac{10}{17}\,,\ \frac{13}{26}\,,\ \frac{16}{37}\,,\ \frac{19}{50}\,,\ \cdots$$

- Le numérateur augmente de trois unités à chaque pas, l'expression de son terme général est donc de la forme $3n+k\,,\ n\in\mathbb{N}^*$.

  On obtient la valeur de k par évaluation, par exemple, en $n=1$:

  $$3n+k\,\Big|_{n=1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad k=-2\,.$$

- L'écart entre deux termes consécutifs du dénominateur n'est pas constant :

  $$3\,,\quad 5\,,\quad 7\,,\quad 9\,,\quad 11\,,\quad 13\,,\cdots$$

  mais il progresse de façon constante. L'expression du terme général du dénominateur n'est donc pas linéaire, mais quadratique en n.

  Le terme général du dénominateur est de la forme $n^2+1\,,\ n\in\mathbb{N}^*$.

L'expression du terme général de la suite (b_n) s'écrit donc

$$b_n = \frac{3n-2}{n^2+1}\,,\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

Et en mettant en évidence la plus haute puissance de n au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(3-\frac{2}{n})}{n^2\,(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = 0\,.$$

c) La suite $(c_n) :\ \frac{2}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{4}{15}\,,\ 0\,,\ \frac{6}{35}\,,\ 0\,,\ \frac{8}{63}\,,\ 0\,,\ \frac{10}{99}\,,\ \cdots$ peut être décrite comme le produit

de la suite $(c'_n) :\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{3}{8}\,,\ \frac{4}{15}\,,\ \frac{5}{24}\,,\ \frac{6}{35}\,,\ \frac{7}{48}\,,\ \frac{8}{63}\,,\ \frac{9}{80}\,,\ \frac{10}{99}\,,\ \cdots$

et de la suite $(u_n) :\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \cdots$

Le terme général c_n est égal au produit des termes généraux c'_n et u_n.

- Terme général de c'_n
  - Le numérateur augmente d'une unité par pas, son expression générale est $n+1$.
  - La progression du dénominateur est de type quadratique, son expression générale est $(n+1)^2-1=n^2+2n$.

  L'expression générale de la suite (c'_n) s'écrit donc $c'_n=\dfrac{n+1}{n^2+2n}$

- On décrit le terme général de u_n à l'aide de l'expression $(-1)^n$:
  $u_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

En conclusion : $\quad c_n=u_n\cdot c'_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n^2+2n}, \quad n\in\mathbb{N}^*$.

Pour montrer que cette suite converge vers 0, on l'encadre par deux suites qui convergent vers 0 :

$$c_n=u_n\cdot c'_n, \quad \text{avec} \quad u_n=\frac{1-(-1)^n}{2} \quad \text{et} \quad c'_n=\frac{n+1}{n^2+2n}.$$

$$\text{Or} \quad 0\leq u_n\leq 1, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \text{donc} \quad 0\leq c_n\leq c'_n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n\to\infty} c'_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(1+\frac{1}{n})}{n^2\,(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)},$$

$$\lim_{n\to\infty} c'_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=0.$$

Donc d'après le théorème des deux gendarmes, la suite (c_n) converge vers 0.

d)

$$(d_n):\ \frac{5}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{5}{15},\ \frac{5}{31},\ \frac{5}{63},\ \frac{5}{127},\ \frac{5}{255},\ \frac{5}{511},\ \ldots$$

L'écart entre deux termes consécutifs du dénominateur n'est pas constant et cet écart ne progresse pas de façon constante.

La croissance du dénominateur est très forte, son expression est de type exponentiel.

Il fait plus que doubler à chaque pas. Son expression est 2^n-1, $n\in\mathbb{N}^*$.

L'expression du terme général s'écrit donc $d_n=\dfrac{5}{2^n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} d_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2^n\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{5}{1-(\frac{1}{2})^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-(\frac{1}{2})^n},$$

$$\text{or} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0, \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-(\frac{1}{2})^n}=5 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} d_n=0.$$

3. Calculer les limites, si elles existent, des suites définies par les termes généraux suivants :

a) $a_n \;=\; \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}\,,$ b) $b_n \;=\; \dfrac{3\,(n+2)!+2\,(n+1)!}{(n+3)!}\,,$

c) $c_n \;=\; (-1)^n\,\sin(\frac{n\pi}{2})\,.$

---

a) Voici une première approche qui n'aboutit pas.

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1}\,.$$

Chaque terme converge vers 0 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+n+1} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1} = 0\,.$$

Mais lorsque $n\to\infty$, le nombre de termes de la somme tend vers l'infini.

On ne peut donc rien conclure quant à la convergence de la suite (a_n) ni de son éventuelle limite.

C'est l'expression du terme général a_n qui pose problème. Essayons de réécrire son numérateur de façon plus concise :

$$1+2+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}\,,$$

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{\frac{n\,(n+1)}{2}}{n^2+n+1} = \frac{n\,(n+1)}{2\,(n^2+n+1)}\,.$$

Puis on met en évidence, au numérateur et au dénominateur, la plus haute puissance de n :

$$a_n = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\,.$$

b) On simplifie l'expression du terme général b_n, en remarquant que

$$(n+2)! = (n+2)\,(n+1)! \qquad \text{et} \qquad (n+3)! = (n+3)\,(n+2)\,(n+1)!$$

$$b_n \;=\; \frac{3\,(n+2)!+2\,(n+1)!}{(n+3)!} \;=\; \frac{3\,(n+2)\,(n+1)!+2\,(n+1)!}{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)!}$$

$$b_n \;=\; \frac{3\,(n+2)+2}{(n+3)\,(n+2)} \;=\; \frac{3n+8}{n^2+5n+6} \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}\,.$$

D'où $\displaystyle \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} \;=\; 0\,.$

c) Calcul des premiers termes de la suite :

$$c_1 = -1\,, \qquad c_2 = 0\,, \qquad c_3 = +1\,, \qquad c_4 = 0\,, \qquad c_5 = -1\,, \qquad c_6 = 0\,,$$

$$c_7 = +1\,, \qquad c_8 = 0\,, \qquad c_9 = -1\,, \qquad c_{10} = 0\,, \qquad c_{11} = +1\,, \quad \cdots$$

$$c_n = (-1)^n \sin(\tfrac{n\pi}{2}) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ \ \ 0 & \text{si} \quad n = 2k+2 \\ +1 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Cette suite diverge.

En effet supposons que la suite (c_n) converge vers une limite $c \in \mathbb{R}$. Alors pour un ε donné, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{4}$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, doivent être dans l'intervalle $]\,c-\varepsilon\,;\,c+\varepsilon\,[$. Or cet intervalle (quel que soit c) est de longueur $\frac{1}{2}$, il ne peut pas contenir simultanément les valeurs -1, 0 et $+1$.

4. On considère la suite (a_n) définie par récurrence de la façon suivante :

$$a_{n+1} \;=\; 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad a_1 = 3\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Déterminer le terme général de la suite (a_n), démontrer ce résultat par récurrence, puis calculer, si elle existe, la limite de cette suite.

Calcul des premiers termes de la suite

$$a_1 \;=\; 3\,, \qquad a_2 \;=\; \frac{7}{3}\,, \qquad a_3 \;=\; \frac{15}{7}\,, \qquad a_4 \;=\; \frac{31}{15}\,, \qquad a_5 \;=\; \frac{63}{31}\,, \quad \cdots$$

Conjecture de l'expression du terme général

- Soit b_n le numérateur de a_n. Il semble que $a_n = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$, $n \geq 2$.
- $(b_{n+1} - b_n)$ n'est pas constant, donc l'expression de b_n est non linéaire en n.
- $(b_{n+1} - b_n)$ est de croissance forte, donc l'expression de b_n n'est pas quadratique en n.
- $(b_{n+1} - b_n)$ est une puissance de 2, donc b_n s'écrit à l'aide d'une puissance de 2 :
$$b_n = 2^{n+1} - 1\,.$$
- Conjecture : $\quad a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Démonstration par récurrence de la conjecture

$$a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

- Vérification pour $n = 1$.

$$a_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right|_{n=1} = 3\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.

  – Hypothèse : $a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

  – Conclusion : $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$.

  – Preuve :

$$a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n} = 3 - 2\cdot\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \frac{3\,(2^{n+1}-1)-2\,(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$$

$$= \frac{3\cdot 2^{n+1}-3-2^{n+1}+2}{2^{n+1}-1} = \frac{2\cdot 2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1} = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}\,.$$

Calcul de la limite de cette suite

$$a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = \frac{2^n\,(2-\frac{1}{2^n})}{2^n\,(1-\frac{1}{2^n})} = \frac{2-(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})^n}\,, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2\,, \quad \text{car} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 0\,.$$

5. A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence de ces deux suites.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$ b) $b_n = \dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$

---

a) On cherche à encadrer la suite (a_n) par deux "suites-gendarmes" qui convergent vers la même limite.
On utilise la croissance de la fonction $\sqrt{x}$ pour encadrer $\sqrt{n^2+1}$:

$$\frac{\sqrt{n^2}}{n} \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le \frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le \frac{n+1}{n}$$

$$1 \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le 1+\frac{1}{n} \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1\,.$$

b) On se sert de l'encadrement du sinus pour minorer et majorer b_n :

$$-1 \le \sin(\tfrac{n\pi}{2}) \le +1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} \le +\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} \le +\left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

$$\text{Or} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0\,, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} = 0\,.$$

6. On considère la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (a_n) converge vers $a = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné, montrons qu'il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ qui dépend de ε tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon\,.$$

$$\begin{aligned}
|a_n - 1| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - 1 < \varepsilon\,, \qquad \text{car} \quad \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} < (1 + \varepsilon)^2\,, \qquad \text{car} \quad 1 + \varepsilon \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < 2\,\varepsilon + \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{2\,\varepsilon + \varepsilon^2}\,, \qquad \text{car les deux membres sont positifs.}
\end{aligned}$$

Donc tout $N > \dfrac{1}{2\,\varepsilon + \varepsilon^2}$ convient. En effet,

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{2\,\varepsilon + \varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon\,.$$

7. Exercice facultatif

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,.$$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on est capable d'exhiber un seuil N qui dépend de ε tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| < \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on cherche donc à déterminer N sachant que

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, c'est à dire que

  $\forall\, \delta_1 > 0\,, \quad \exists\, N_a \in \mathbb{N}^*,\ (N_a = N_a\,(\delta_1)\,) \quad$ tel que $\quad n \geq N_a \quad \Rightarrow \quad |\,a_n - a\,| < \delta_1\,,$

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, c'est à dire que

  $\forall\, \delta_2 > 0\,, \quad \exists\, N_b \in \mathbb{N}^*,\ (N_b = N_b\,(\delta_2)\,) \quad$ tel que $\quad n \geq N_b \quad \Rightarrow \quad |\, b_n - b\,| < \delta_2\,.$

Or $|\,(a_n + b_n) - (a+b)\,| \;=\; |\,(a_n - a) + (b_n - b)\,| \;\leq\; |\,a_n - a\,| + |\,b_n - b\,|\,.$

Donc pour majorer $|\,(a_n + b_n) - (a+b)\,|$ par ε, il suffit, par exemple, de majorer $|\,a_n - a\,|$ et $|\,b_n - b\,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ceci est possible si n est assez grand, en effet :

- $n \geq N_a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad |\,a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$
- $n \geq N_b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$

Donc tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq \max\big(\,N_a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\, N_b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\big)$ convient, car

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\,(a_n + b_n) - (a+b)\,| \;\leq\; \underbrace{|\,a_n - a\,|}_{<\,\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\,b_n - b\,|}_{<\,\frac{\varepsilon}{2}} \;<\; \varepsilon\,.$$