Contrôle d'analyse II N°1

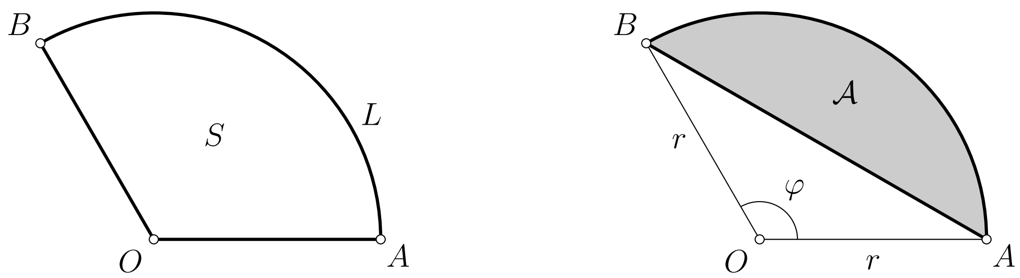
Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. On considère le secteur circulaire OAB décrit ci-dessous dont on connaît l'aire S et la longueur L de l'arc AB : $L = 5\,\pi$ cm et $S = 15\,\pi$ cm^2.



a) Déterminer le rayon r et l'angle au centre φ de ce secteur circulaire.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé limité par l'arc AB et la corde AB. 3,5 pts

2. On considère les angles x et y définis de la façon suivante :

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{3}\,, \quad x \in [\,\pi\,,\,2\pi\,] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}(y) = \frac{4}{3}\,, \quad y \in [\,\pi\,,\,2\pi\,]\,.$$

Déterminer, sans machine à calculer, la valeur exacte de l'angle $\varphi = x + \dfrac{y}{2}$. 4 pts

3. Soit A l'expression définie par $A = \dfrac{\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos x + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}$.

a) Déterminer le domaine de définition de A.

b) Factoriser le dénominateur, puis simplifier l'expression A.

c) Résoudre l'équation $A = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$. 4,5 pts

4. Résoudre l'inéquation suivante sur l'intervalle donné.

$$\sqrt{12}\,\cos(2x) - 2\,\sin(2x) \geq -2\,, \qquad x \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,.$$ 3 pts

Tourner la page

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}\,[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$