Exercice 1. *Soit la matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Trouver une base de* $\ker C$.
2. *Trouver une base de* $\operatorname{Im} C$.
3. *L'application linéaire* $T_C : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, *dont la matrice par rapport aux bases canoniques est égale à* C, *est-elle injective ? Et surjective ?*

Exercice 2. *Soit* $C = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *la base ordonnée standard de* $\mathbb{R}^3$. *On considère la famille de vecteurs* $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

a) *Expliquer pourquoi* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Donner la matrice de passage* $[\mathrm{id}]_{CB}$.

c) *Calculer* $[\mathrm{id}]_{CB}^{-1}$ *et vérifier directement que cette matrice est bien la matrice de passage* $[\mathrm{id}]_{BC}$.

d) *Soit* $\mathbf{v} = (4, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$. *Donner les coordonnées de* $\mathbf{v}$ *par rapport à la base* B, *c'est-à-dire, trouver* $[\mathbf{v}]_B$, *et vérifier que* $[\mathbf{v}]_B = [\mathrm{id}]_{BC}[\mathbf{v}]_C$

Exercice 3. *Soient* $V = \mathbb{R}^4$, C *la base canonique de* V, *ainsi que* B, B' *les bases de* V *formées respectivement des vecteurs* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ *et* $\{\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}, \mathbf{e_4'}\}$ *où* $\mathbf{e_1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e_2} = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e_3} = (1,1,1,0)$, $\mathbf{e_4} = (1,1,1,1)$, *et* $\mathbf{e_1'} = (0,0,0,2)$, $\mathbf{e_2'} = (0,0,2,2)$, $\mathbf{e_3'} = (0,2,2,2)$, $\mathbf{e_4'} = (2,2,2,2)$.

a) *Trouver deux matrices* A *et* A' *telles que* $[\mathbf{u}]_B = A[\mathbf{u}]_C$ *et* $[\mathbf{u}]_{B'} = A'[\mathbf{u}]_C$, *pour tout* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$.

b) *Trouver la matrice* Q *satisfaisant* $[\mathbf{u}]_{B'} = Q[\mathbf{u}]_B$, *pour tout* $\mathbf{u} \in V$.

c) *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

et soit $T : V \to V$ *l'application linéaire définie par* $T(a,b,c,d) = A \cdot (a,b,c,d)^t$. *Trouver les représentations matricielles de* T *suivantes :* $[T]_C$, $[T]_B$, *et* $[T]_{BC}$.

Exercice 4. *Soient* $\mathcal{B}$ *la base de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ *la base usuelle. Soit encore* $\mathcal{F}$ *la base de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *donnée par*

$$\mathcal{F} := \left(1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2, t^2 - t^3\right),$$

et $\mathcal{C}' = (1, t, t^2, t^3)$ *la base canonique de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer* $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C}',\mathcal{F}}$ *et* $[\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}'}$.
2. *Soit* $G : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *l'application définie par* $p(t) \mapsto (3t+2)p(t)$. *Calculer* $[G]_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$.
3. *Soit* $H : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *l'application définie par* $p(t) \mapsto (2t-3)p(t)$. *Calculer* $[H]_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$.

Exercice 5. *Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne ; parfois il est plus facile de tout d'abord échelonner la matrice, en tenant compte des changements que ça implique sur le déterminant.*

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. *Sachant que*

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants des matrices suivantes

$$T = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Etant donné*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -5,$$

calculer : $\det \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$

Exercice 8. *Déterminer les valeurs de* $x \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Exercice 9.

- *Soient* A, B, C *des matrices* $n \times n$ *telles que* B *est inversible et* $\det(A) = \det(B^3)$, $\det(C) = \det(B^{-1})$, $\det(ABC) = 8$. *Déterminer* $\det(A), \det(B), \det(C)$.
- *Soient* A *et* B *des matrices* $n \times n$. *Démontrer que si* A *est inversible, alors* $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.
- *Montrer que si* U *est une matrice carrée telle que* $U^T U = I$ *(on dit que* U *est une matrice* orthogonale*), alors* $\det U = \pm 1$ *;*
- *Montrer que si* A *est une matrice carrée telle que* $\det(A^4) = 0$, *alors* A *ne peut pas être inversible.*

Exercice 10. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Pour quelles valeurs de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est-ce que le déterminant des matrices suivantes est* 0 *?*

$$A_\lambda = A - \lambda I_3 \quad et \quad B_\lambda = B - \lambda I_3$$

Exercice 11. Questions aux Choix Multiples.

(1) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors*

- ☐ $det A = 24$
- ☐ $det A^T = -24$
- ☐ $det A^{-1} = 24$
- ☐ $\det A = 0$

(2) *Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.*

- ☐ $det A = 0$
- ☐ $det A = 1$
- ☐ $det A = -1$
- ☐ *aucune de ces réponses, l'application n'est pas linéaire*

(3) *Soit A une matrice de taille 5×5. On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B.*

- ☐ *on a toujours $det A = det B$*
- ☐ *on a toujours $det A = -det B$*
- ☐ *on a toujours $det B = 0$*
- ☐ *on ne peut rien dire en général*

(4) *Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors*

- ☐ $\det D = 30 \det A \det B$;
- ☐ $\det D = -60 \det A \det B$;
- ☐ $\det D = 90 \det A \det B$;
- ☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

Exercice 12. *Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Utiliser le Théorème du rang !*

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Montrer que*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$