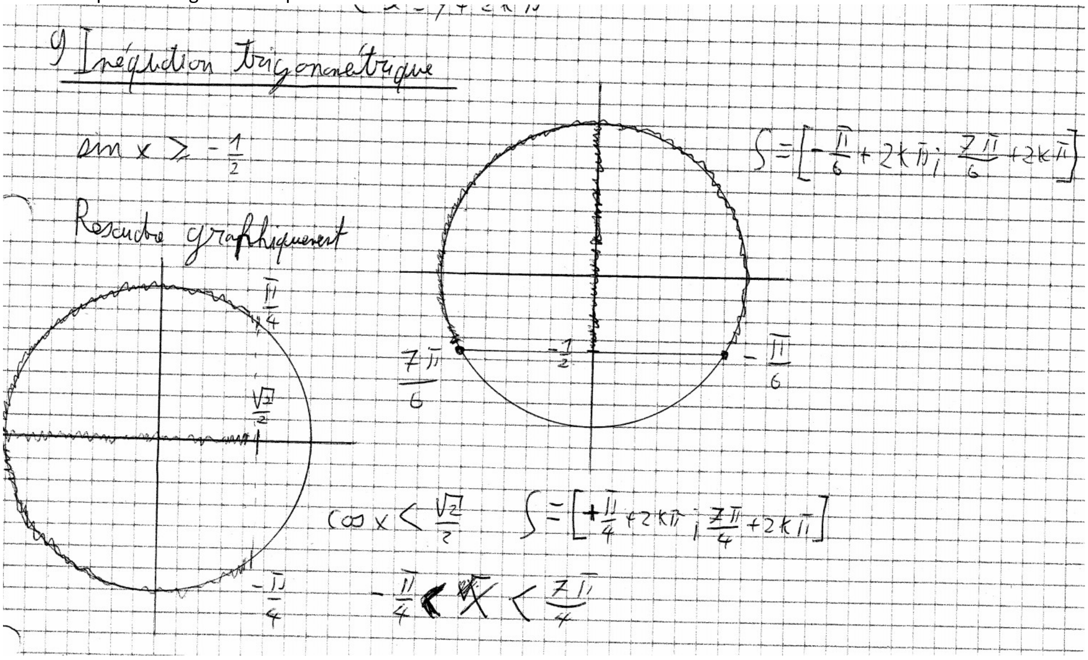
Résumé Trigonométie

jeudi, 10 janvier 2019 19:55

Equations et inéquations trigonométriques



Résolutions trigonométriques dans les triangles quelconques.

Al Kashi

Théorème d'Al-kashi (généralisation du théorème de pythagore)

$a^2 = (c-p)^2 + q^2 = c^2 - 2cp + p^2 + q^2 = c^2 - 2cbcos(\alpha) + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = c^2 - 2bccos\alpha + b^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$

Théorème du sinus

D'où : $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$

(R est le rayon du cercle circonscrit donc la plus grande base divisé par 2)

Formule de Héron

Cette formule permet l'expression de l'aire du triangle avec juste la mesure des trois cotées.

Si S = l'aire du triangle ABC

$en\ posant\ p = \frac{a+b+c}{2}\ (p = demi\ périmètre\ de\ ABC)\ on\ as$

$\mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Calcul du rayon du cercle inscrit

On prend l'aire du Triangle ABC.

$r = \frac{S}{p}$ $\quad S = aire\ du\ traingle\ et\ p\ le\ demi\ périmètre.$

Fonctions trigonométriques inverses.

arcsin :

$[-1;1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad avec\ x = \sin(y)$

$sin[\arcsin(x)] = x\ \forall\ x\ \epsilon[-1;1]\ mais\ \arcsin[\sin(x)] = x\ SSI\ x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$!!!!!

Résultat de l'équation sin(x) = a , $a\ \epsilon\ [-1;1]$

Sin(x) = a <=> $\begin{cases} x = arsin(a) + 2\pi \\ x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \end{cases}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Remarque : La fonction arcsin est une fonction impaire. donc $\arcsin(-x) = -,$ ∀x∈ℝ

arcos :

$[-1;1] \rightarrow [0;\pi] \quad avec\ x = \cos(y)$

X --> y = arcos(x)

$cos[\arccos(x)] = x\ \forall\ x\ \epsilon[-1;1]\ mais\ \arccos[\cos(x)] = x\ SSI\ x\epsilon[0;\pi]$!!!!!

Résolution de l'équation cos(x) = a, a $\epsilon[-1;1]$

$\cos(x)\ a <=> \begin{cases} x = arcos(a) + 2k\pi \\ x = -arcos(a) + 2k\pi \end{cases}$

$\sin(arcos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad x\epsilon[-1;1]$

$\tan(arcos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Remarque : La fonction acros n'est ni pair ni impair.

arctan :

$\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
X --> y = arctan(x)   Avec x = tan(y)

$\tan[\arctan(x)] = x \;\forall\, x \epsilon \mathbb{R}$ $mais\ \arctan(\tan(x)) = x\ ssi\ x\ \epsilon\ \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Résolution de tan (x) = a, $a\ \epsilon\ \mathbb{R}$

$Tanx = a \;<=>\; x = \arctan(a) + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$

$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Cos(arctan(x)) $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Remarque : la fonction arc tan est impaire donc $\arctan(-x) = -\arctan(x)\,, \forall x\epsilon\mathbb{R}$

Dérivées des fonctions trigonométriques et des fonctions trigonométriques inverses.

$(\sin(x))' = \cos(x)$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$(-\sin(x))' = \cos(x)$

$tan'(x) = 1 + \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x\epsilon Dtan$

$cot'(x) = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin(x)} \qquad \forall x\epsilon Dcot$

$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x\epsilon]-1;1[$

$arcos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad, \forall x\epsilon]-1;1[$

$arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad, \forall x\epsilon\mathbb{R}$

Remarque :

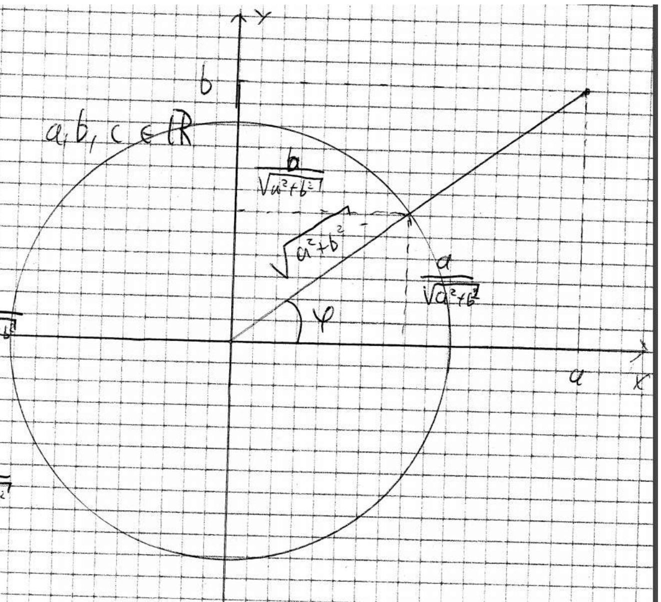
$\arcsin(x) \sim x\ (x \to 0)$
$\arctan(x) \sim \mathrm{x}\ (\mathrm{x} \to 0)$

1.1. Normalisation

$a\cos x + b\sin x = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin(\varphi)} \cdot \cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi} \cdot \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin(\varphi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

↑

transformation sinus

$\cos\varphi \cdot \cos x + \sin\varphi \cdot \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos(\varphi - x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

↑

transformation cosinus

Test invariance :

$P(x) = P(\pi - x) \quad alors\ z = \sin(x) \quad \sqrt{1-z^2} = \cos(x) \quad \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \tan(x)$

$P(x) = P(-x) \quad alors\ z = \cos(x) \quad \sqrt{1-z^2} = \sin(x) \quad \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \tan(x)$

$P(x) = P(\pi + x) \quad alors\ z = \tan(x) \quad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \sin(x) \quad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \cos(x)$

En cas de problème, utiliser z=tan(x/2)

puis, on factorise et on trouve toute les valeur de Z = donnent zero.
et apres on résous les petite équation trigonométrique simple.

(pour les polynôme de degré supérieure a 2, on peut factorisé en determinant un nombre qui mets a zero le polynome (un peu au hazard)
puis, on fait (z-CeNombre) et on fait une division en collone du polynome divisé par Z-a et ça nous donne un joli polynome simplifié

Nano résumé :

$a\sin(x) + b\cos(x) = c \ \rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow \sin(\phi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (penser au triangle et pythagore)

$P(x) = P(\pi - x) \quad alors\ z = \sin(x) \quad \sqrt{1-z^2} = \cos(x) \quad \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \tan(x)$

$P(x) = P(-x) \quad alors\ z = \cos(x) \quad \sqrt{1-z^2} = \sin(x) \quad \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \tan(x)$

$P(x) = P(\pi + x) \quad alors\ z = \tan(x) \quad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \sin(x) \quad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \cos(x)$

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (-\sin(x))' = -\cos(x) \quad (-\cos)' = \sin(x)$

$tan'(x) = 1 + \tan{}^\wedge 2\,(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \epsilon Dtan \qquad cot'(x) = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin(x)} \quad \forall x \epsilon Dcot$

$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \epsilon]-1;1[\qquad arcos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \forall x \epsilon]-1;1[\qquad arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ , \forall x \epsilon \mathbb{R} \qquad [-1;1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$Tanx = a \ <=> \ x = \arctan(a) + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathrm{Cos}(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\cos(x)\ a <=> \begin{cases} x = arcos(a) + 2k\pi \\ x = -arcos(a) + 2k\pi \end{cases} \qquad \sin(arcos(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad x\epsilon[-1;1] \qquad \tan(arcos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad [-1;1] \rightarrow \ [0;\pi]$

Sin(x) = a <=> $\begin{cases} x = arsin(a) + 2\pi \\ x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \end{cases} \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha) \qquad \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$ (R est le rayon du cercle circonscrit)

$en\ posant\ p = \frac{a+b+c}{2}\ (\ p = demi\ périmètre\ de\ ABC)\ on\ as \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

rayon du cercle inscrit $r = \frac{S}{p} \qquad S = aire\ du\ traingle\ et\ p\ le\ demi\ périmètre.$

femto resumé :

$\sqrt{1-z^2}\ et \frac{sin}{cos} \qquad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \sin(x) = \sin(\arctan(x)) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \cos(x) = \cos(\arctan(x))$

$\sin(arcos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin(x)) \qquad et\ \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan(arcos(x))\ c'est\ l'inverse$

sin -> cos -> -sin -> -cos

$tan'(x) = 1 + \tan{}^\wedge 2\,(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \epsilon Dtan \qquad cot'(x) = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin(x)} \quad \forall x \epsilon Dcot$

$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ arccos'(x) \rightarrow same\ avec\ un\ moins\ et\ \mathrm{arctan}: \frac{1}{1+x^2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha) \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \frac{S}{p}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$

$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \cos(\alpha)$