Contrôle de géométrie analytique N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ____________________

Groupe ☐

PRENOM : ____________________

1. Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne le point $A(15\,;\,6)$ et la droite $d:\ x-2y+12=0$.

Soit le triangle ABC tel que

- d est la médiatrice du côté BC,
- la hauteur issue de A a pour longueur $\delta = 12\sqrt{5}$.

a) En le justifiant, déterminer les coordonnées du point H pied de la hauteur $(x_H < 0)$. Puis déterminer les coordonnées du point I, pied de la médiane issue de A.

Réponse: $H(-9;-6)$, $I(-12;0)$

b) Soit K un point de la droite d. Déterminer, en le justifiant, les coordonnées des points B et C sachant que $(C\,K;\,A)=4$.

Réponse: $B(-3;-18)$, $C(-21;18)$

6 pts

2. Dans le plan, on considère un trapèze $OABC$ de bases CB et OA avec $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$;

on note $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

On définit sur la droite (BC), le point J par le rapport de section $(C\,B;\,J)=3$.

Soient m la médiane du triangle OAB issue de A et d la droite passant par J et parallèle à la droite (OB).

A l'aide du calcul vectoriel et en fonction des données $\vec{a}$ et $\vec{b}$, **uniquement**,

a) déterminer l'équation vectorielle de la droite m et celle de la droite d.

Réponse: $m:\overrightarrow{OM} = \vec{a} + k\,(\vec{b} - 2\,\vec{a}),\, k \in \mathbb{R}$ $\quad d:\overrightarrow{ON} = \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} + \mu\vec{b},\, \mu \in \mathbb{R}$

b) déterminer le vecteur $\overrightarrow{OR}$ où R est l'intersection des droites m et d.

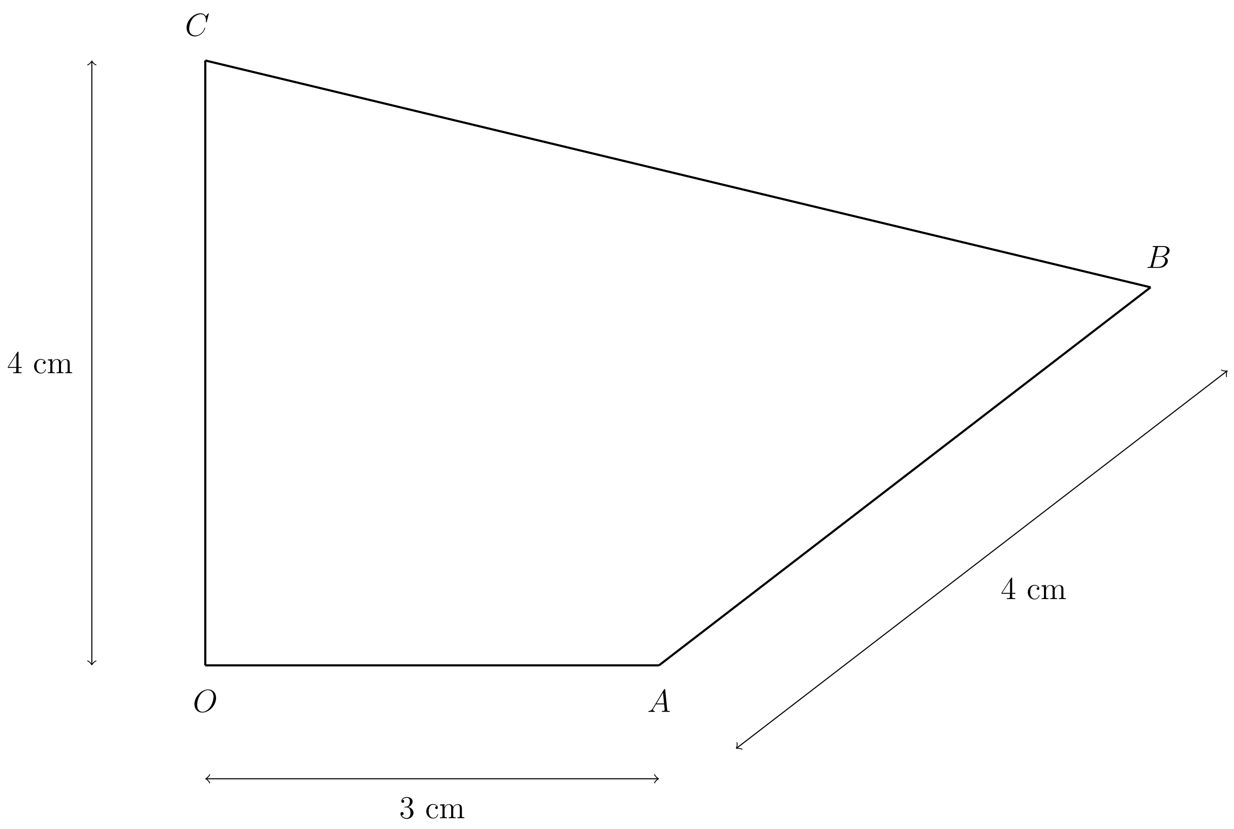
Réponse: $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$

6 pts

3. Dans le plan, on considère la **plaque** homogène de forme polygonale $OABC$ telle que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) : $\boldsymbol{(AC) \perp (AB)}$.

Soit G le centre de gravité de la plaque $OABC$.

En le justifiant par un rapport de section, construire le point G rigoureusement et avec soin (règle, équerre, compas) sur le plan ci-dessous.



Réponse: $(G_1, G_2; G) = -\frac{5}{3}$

4 pts

4. On considère quatre points dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: O, $A(6;0)$, $B(0;3)$ et $C(10;5)$.

a) Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G de ces quatre points.

Réponse: $G(4;2)$

b) On déplace le point C dans le sens $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ d'une longueur $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et on note ce nouveau point D.
Soit $G' = \text{Bar}\,\{(O,m),(A,1),(B,1),(D,1)\}$, $m \in \mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs de λ et m sachant que $G'(2;0)$.

Réponse: $\lambda = 8\sqrt{2}$, $m = 9$

4 pts