Série 18

1. Déterminer le centre, les foyers, les axes et les asymptotes des hyperboles suivantes :

a) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 117 = 0\,,$ b) $x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 49 = 0\,.$

2. Déterminer l'équation d'une hyperbole donnée par :

a) le centre $\Omega\,(-3\,;\ 1)\,,$ un foyer $F\,(-3\,;\ 5)$ et $e = 2\,,$

b) une asymptote $3x - 4y - 2 = 0\,,$ le centre $\Omega\,(?\,;\ 1)$ et un foyer $F\,(7\,;\ ?)\,.$

3. Déterminer l'équation d'une hyperbole donnée par :

a) le centre $\Omega\,(-1\,;\,4)\,,$ les asymptotes sont perpendiculaires et $c = 3\,,$

b) les asymptotes $3x + 4y = 0$ et $3x - 4y + 24 = 0$, une directrice $y = 6\,,$

c) un sommet $A\,(3\,;\,2)$ et une asymptote : $4x - 7y + 10 = 0\,.$

4. On considère les coniques d'équation :

$$\mathcal{H}: \ \frac{(x-\lambda)^2}{\lambda+1} + \frac{(y-2)^2}{(2-\lambda)(\lambda+1)} - 1 = 0\,, \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel}\,.$$

a) Discuter en fonction de λ la nature des coniques $\mathcal{H}$.

b) Dans chaque cas, préciser la direction des grands axes ou axes réels.

c) Déterminer les foyers des hyperboles équilatères.

d) Déterminer les équations cartésiennes du lieu des sommets des grands axes des ellipses. Quelle est la nature du lieu ?

5. Données :

- l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x\,y = k\,,$ $k > 0$ (fixé),
- un point fixe A de $\mathcal{H}$ tel que $x_A = a$ $(a > 0)$.

Une droite variable passant par A coupe $\mathcal{H}$ en N et l'axe Ox en P. Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M symétriques de P par rapport à N.

Etudier la nature du lieu ainsi obtenu.

Réponses de la série 18

1. a) $\Omega\,(3\,;\,0)$ $\quad F\,(3\,;\,\sqrt{13})$ $\quad F'\,(3\,;\,-\sqrt{13})$,
axe réel : $x=3$, axe imaginaire : $y=0$,
les asymptotes : $3x\pm 2y-9=0$,

b) $\Omega\,(9\,;\,-2)$ $\quad F\,(9-2\sqrt{5}\,;\,-2)$ $\quad F'\,(9+2\sqrt{5}\,;\,-2)$,
axe réel : $y=-2$, axe imaginaire : $x=9$,
les asymptotes : $x-2y-13=0$ et $x+2y-5=0$.

2. a) $\dfrac{(y-1)^2}{4}-\dfrac{(x+3)^2}{12}=1$, $\qquad$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$.

3. a) $(x+1)^2-(y-4)^2=\dfrac{9}{2}$ ou $(y-4)^2-(x+1)^2=\dfrac{9}{2}$.

b) $\dfrac{(y-3)^2}{25}-\dfrac{9(x+4)^2}{400}=1$.

c) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{49(y-2)^2}{64}=1$ ou $-\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{49(y-\frac{22}{7})^2}{64}=1$.

4. a) $\lambda\leq -1$ ou $\lambda=2$: $\mathcal{H}=\emptyset$, $\qquad -1<\lambda<2$: ellipse, $\qquad \lambda>2$: hyperbole.

b) $\lambda\in\,]-1\,;\;1\,[$: ellipse de grand axe vertical,

$\lambda=1$: cercle d'équation $(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$,

$\lambda\in\,]\,1\,;\;2\,[$: ellipse de grand axe horizontal,

$\lambda\in\,]\,2\,;\;+\infty\,[$: hyperbole d'axe réel horizontal : $\dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda+1}-\dfrac{(y-2)^2}{(\lambda-2)(\lambda+1)}=1$,

c) $F(3+2\sqrt{2}\,;\;2)$, $\quad F'(3-2\sqrt{2}\,;\;2)$.

d) Equation du lieu :

- $\lambda\in\,]\,1\,;\;2\,[$
  lieu de A : segment de droite $1+\sqrt{2}<x<2+\sqrt{3}$ et $y=2$,
  lieu de B : segment de droite $1-\sqrt{2}<x<2-\sqrt{3}$ et $y=2$,
- $\lambda\in\,]-1\,;\;1\,[$: arc de cercle de centre $\Omega\,(\frac{1}{2}\,;\,2)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

5. Equation du lieu : $(x+a)\,y=2k$.

C'est une hyperbole équilatère de centre $\Omega\,(-a\,;\,0)$.