Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 6

Applications : exercice 19

Par définition, une application f de E vers F est injective si et seulement si

$$\forall x, y \in E\,, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

Pour montrer que f est injective, on utilise l'énoncé contraposé équivalent :

$$\forall x, y \in E\,, \quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Pour montrer que f n'est pas injective, on construit un contre-exemple

$$\exists x, y \in E\,, \quad f(x) = f(y) \quad \text{et} \quad x \neq y$$

(a) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+12}{2x-1} \end{array}$$

Soients $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, on détermine si f est injective.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+12}{2x-1} = \frac{y^2+12}{2y-1} \quad & \Rightarrow \quad (x^2+12)(2y-1) = (y^2+12)(2x-1) \\ & \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xy^2 - 2x^2y + 24x - 24y = 0 \\ & \Rightarrow \quad (x-y)(x+y) + 2xy(y-x) + 24(x-y) = 0 \\ & \Rightarrow \quad (x-y)(x+y-2xy+24) = 0 \\ & \Rightarrow \quad x = y \ \text{ ou } \ x+y-2xy+24 = 0 \end{aligned}$$

$x = y$ n'est donc pas la seule solution.
La condition $x + y - 2xy + 24 = 0$ est un générateur de contre-exemple.
Soit par exemple $x = 0$ et $y = -24$, alors $f(0) = 12$ et $f(-24) = 12$.
Ainsi : $\exists x = 0$ et $y = -24\,, \quad x \neq y \quad$ tels que $\quad f(0) = f(-24)$.
Donc f n'est pas injective.

(b) $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+9}{2x} \end{array}$$

Soients $x, y \in \mathbb{R}^*$, on détermine si g est injective.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+9}{2x} = \frac{y^2+9}{2y} \quad & \Rightarrow \quad (x^2+9)\,y = (y^2+9)\,x \\ & \Rightarrow \quad x^2y + 9y = xy^2 + 9x \\ & \Rightarrow \quad xy\,(x-y) - 9(x-y) = 0 \\ & \Rightarrow \quad (x-y)(xy-9) = 0 \\ & \Rightarrow \quad x = y \ \text{ ou } \ xy - 9 = 0 \end{aligned}$$

$x = y$ n'est donc pas la seule solution.
La condition $xy - 9 = 0$ est un générateur de contre-exemple.
Soit par exemple $x = 1$ et $y = 9$, alors $g(1) = 5$ et $g(9) = 5$.
Ainsi : $\exists x = 1$ et $y = 9$, $\quad x \neq y \quad$ tels que $\quad g(1) = g(9)$.
Donc g n'est pas injective.

(c) $h: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;\, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x+y}{x+y-2} & \text{si } x+y \neq 2 \\ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x+y = 2 \end{cases} \end{array}$

Chercher tout de suite un contre-exemple évident !
Soit par exemple si $(x, y) = (1, 1)$ et $(x', y') = (2, 0)$:

$$h(1,1) = \frac{1}{2} \text{ car } 1+1 = 2$$

$$h(2,0) = \frac{1}{2} \text{ car } 210 = 2$$

Ainsi : $\exists (x, y) = (1, 1)$ et $(x', y') = (2, 0)$, $\quad (x, y) \neq (x', y') \quad$ tels que $\quad h(1, 1) = h(2, 0)$.
Donc h n'est pas injective.

Applications : exercice 20

Soit f est une application de E vers F, elle est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

$$F = \operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

A l'aide d'un contre-exemple construit grâce à $\operatorname{Im} f$, on montre qu'elle n'est pas surjective.

(a) $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x+1} \end{array}$

- $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} - \{-1\},\ y = f(x)\} = \{y \in -\mathbb{R} - \{-1\} \mid P(x, y)\} \subset \mathbb{R}$

  On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R} - \{-1\})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\, y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} g$$

$$P(x,\, y) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ y = \dfrac{x^2}{x+1} \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ x^2 - yx - y = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  Cette équation du 2ième degré en x admet des solutions (existence de x) si et seulement si $\Delta \geq 0$.
  On remarque que si $x = -1$, l'équation devient $1 + 0 = 0$; donc elle n'a pas de sens dans ce cas.
  Ainsi x existe et $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ si et seulement si $y \in \mathbb{R}$ et $\Delta \geq 0$.

  $P(x,\, y) \iff \Delta = y^2 + 4y \geq 0 \iff y \in]-\infty;\, -4] \cup [0;\, +\infty[\iff R(y)$

  Ainsi : $\operatorname{Im} f =]-\infty;\, -4] \cup [0;\, +\infty[$

- f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$: $\exists y \in \mathbb{R}$, par exemple $y = -2$ et y n'a pas d'antécédent, ce qui est évident car $-2 \notin \operatorname{Im} f$.
- f est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\operatorname{Im} f$.

(b) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x+4}{x^2} \end{array}$

- $\operatorname{Im} g = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^*,\ y = g(x)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x\,,y)\}$

  On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R}^*)$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\, y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} g$$

$$P(x,\, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}^* \\ y = \dfrac{x^2+x+4}{x^2} \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}^* \\ (y-1)x^2 - x - 4 = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Si $x = 0$, l'équation n'a pas de sens (on obtient $-4 = 0$) .

Si $y = 1$, l'équation est du premier degré et a pour solution $x = -4$.
Ainsi $\exists x \in \mathbb{R},\ x = -4$ et $g(-4) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in \operatorname{Im} g$.

Si $y \neq 1$, l'équation est du deuxième degré; elle admet des solutions dans $\mathbb{R}^*$ (existence de x) si et seulement si $y \neq 1$ et $\Delta \geqq 0$.

$$P(x,\, y) \iff y = 1 \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \Delta = 16y - 15 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\iff y = 1 \quad \text{ou} \quad y \in [\tfrac{15}{16}; +\infty[- \{1\}$$

$$\iff y \in [\tfrac{15}{16}; +\infty[$$

Ainsi $\operatorname{Im} g = [\frac{15}{16}; +\infty[$

- g n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$: $\exists y \in \mathbb{R}$, par exemple $y = 0$ et y n'a pas d'antécédent, ce qui est évident car $0 \notin \operatorname{Im} g$.
- g est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\operatorname{Im} g$.

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & [\frac{15}{16}; +\infty[\\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x^2} \end{array}$$

(c) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2} \end{array}$

- $\operatorname{Im} h = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ y = h(x)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x\,,y)\}$

  On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\, y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} h$$

$$P(x,\, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} \quad \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ (y-1)x^2 - 2(y-1)x + 2y = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Si $y = 1$, l'équation devient $2 \cdot 1 = 0$ et n'a pas de sens ; ce qui signifie que $y = 1$ n'a pas d'antécédent : $\nexists x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \notin \operatorname{Im} h$.
Si $y \neq 1$, l'équation est du deuxième degré ; elle admet des solutions dans $\mathbb{R}$ (existence de x) si et seulement si $y \neq 1$ et $\Delta \geq 0$.

$$P(x,\, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \Delta = (y-1)^2 - 2y(y-1) = -\,(y-1)(y+1) \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ y \in [-1;\, 1] \end{array} \right.$$

$$\iff y \in [-1;\, 1[$$

Ainsi : $\operatorname{Im} h = [-1;\, 1[$

- h n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$: $\exists y \in \mathbb{R}$, par exemple $y = 1$ et y n'a pas d'antécédent, ce qui est évident car $1 \notin \operatorname{Im} h$.
- h est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\operatorname{Im} h$.

$$\begin{array}{rcl} h :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;\, 1[\\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} \end{array}$$

(d) $\begin{array}{rcl} j :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 + 12}{x^2 + 1} \end{array}$

- $\operatorname{Im} j = \big\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\,,\ y = j(x) \big\} = \big\{ y \in \mathbb{R} \mid P(x\,, y) \big\}$

  On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\, y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} j$$

$$P(x,\, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{x^2 + 12}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ -(y-1)x^2 - y + 12 = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ x^2 = \dfrac{y - 12}{-(y-1)} \end{array} \right.$$

x existe et $x \in \mathbb{R}$, si et seulement si $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $\dfrac{y-12}{-(y-1)} \geq 0$. D'où :

$$P(x,\,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} y\in\mathbb{R}-\{1\}\\ \dfrac{y-12}{-(y-1)}\geq 0\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad y\in]1\,;12] \quad\Longleftrightarrow\quad R(y)$$

Ainsi : $\quad \mathrm{Im}\, j=]1\,;12]$

Autre méthode pour déterminer Im j :
On cherche une propriété qui fait intervenir une équation du deuxième degré en x, et dont le discriminant Δ dépend de y.

- $\mathrm{Im}\, j=\big\{y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R},\ y=j(x)\big\}=\big\{y\in\mathbb{R}\mid P(x\,,y)\big\}$

$$P(x,\,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x\in\mathbb{R}\\ y=\dfrac{x^2+12}{x^2+1}\in\mathbb{R}\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x\in\mathbb{R}\\ -(y-1)x^2-y+12=0\\ y\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Si $y=1$, l'équation devient $-1+12=0$ et n'a pas de sens.
Ce qui signifie que $y=1$ n'a pas d'antécédent :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(x)\neq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1\notin \mathrm{Im}\, j$$

Ainsi x existe et $x\in\mathbb{R}$ si et seulement si $y\neq 1$ et $\Delta\geq 0$.

$$P(x,\,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \exists y\in\mathbb{R}-\{1\}\\ \Delta=4(y-1)(12-y)\geq 0\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad y\ \in]1\,;12] \quad\Longleftrightarrow$$
$R(y)$
Ainsi : $\quad \mathrm{Im}\, j=]1\,;12]$

- j n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$: $\exists y\in\mathbb{R}$, par exemple $y=0$ et y n'a pas d'antécédent ce qui est évident car $0\notin\mathrm{Im}\, j$.

- j est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\mathrm{Im}\, j$.

$$\begin{array}{rcl} j:\ \mathbb{R} & \longrightarrow &]1\,;12]\\ x & \longmapsto & j(x)=\dfrac{x^2+12}{x^2+1}\end{array}$$

(e) $\begin{array}{rcl} k:\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ x & \longmapsto & (x+1;\ x^2+4x)\end{array}$

- Il est évident que $\mathrm{Im}\, k$ est un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}^2$. On peut facilement construire un contre-exemple pour montrer qu'elle n'est pas surjective.
  Soit $(u,v)=(0,0)$ alors
  $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ (u,v)=(x+1\,,\ x^2+4x)\neq(0,0)$.
- $\mathrm{Im}\, k=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid \exists x\in\mathbb{R},\ u=x+1\,,\ v=x^2+4x\big\}=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid P(x\,,u\,,v)\big\}\ \subset\mathbb{R}^2$
  On détermine une propriété R équivalente à P. Elle doit dépendre uniquement de u et v et assurer l'existence $(\exists x\in\mathbb{R})$ de l'antécédent de (u,v).

$$P(x\,,u\,,v) \Longleftrightarrow R(u\,,v) \Longleftrightarrow (u,v)\in\mathrm{Im}\, k$$

$$P(x\,,u\,,v) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ u = x+1 \\ v = x^2+4x \\ u\,,v \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ x = u-1 \\ v = (u-1)^2+4(u-1) \\ u\,,v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, x existe et $x \in \mathbb{R}$.

$$P(x\,,u\,,v) \iff \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ v = u^2+2u-3 = (u+3)(u-1) \end{cases} \iff R(u,v)$$

Ainsi : $\quad \mathrm{Im}\,k = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = (u+3)(u-1)\,,\ u \in \mathbb{R}\big\}$

- k est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\mathrm{Im}\,k$.

$$\begin{array}{rccl} k: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = (u+3)(u-1)\,,\ u \in \mathbb{R}\big\} \\ & x & \longmapsto & k(x) = (x+1; x^2+4x) \end{array}$$

(f) $\begin{array}{rccl} l: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

- $\mathrm{Im}\,l = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\,,\ y = j(x)\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid P(x\,,y)\big\}$
  On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\,y) \iff R(y) \iff y \in \mathrm{Im}\,l$$

$$P(x,\,y) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{2x}{x^2+1} \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ yx^2-2x+y = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $y = 0$, l'équation devient : $2x = 0$ et elle a pour solution $x = 0$.
Ainsi : $\exists x \in \mathbb{R}\,,\ x = 0$ et $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Im}\,l$.

Si $y \neq 0$, l'équation est du deuxième degré ; elle admet des solutions (existence de x) si et seulement si $y \neq 0$ et $\Delta \geq 0$.

$$P(x,\,y) \iff y = 0 \text{ ou } \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \Delta = 4-4y^2 \geq 0 \end{cases} \iff y \in [-1\,;1] \iff R(y)$$

Ainsi : $\quad \mathrm{Im}\,l = [-1\,;1]$

- l n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$: $\exists y \in \mathbb{R}$, par exemple $y = 2$ et y n'a pas d'antécédent ce qui est évident car $2 \notin \mathrm{Im}\,l$.
- l est surjective si l'ensemble d'arrivée est $\mathrm{Im}\,l$.

$$\begin{array}{rccl} l: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ & x & \longmapsto & l(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

Applications : exercice 21

(a) Soient

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x;\,y) & \longmapsto & (x^2+y^2;\,x^2-y^2) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u;\,v) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{u+v}{u+v-2} & \text{si } \; u+v \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \; u+v = 2 \end{cases} \end{array}$$

On détermine d'abord l'application $g \circ f$, son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

- $$\begin{aligned} (g\circ f)(x;\,y) &= g\big(f(x;\,y)\big) = g(x^2+y^2;\,x^2-y^2) = \\ &= g(u;\,v) = \\ &= \begin{cases} \dfrac{u+v}{u+v-2} & \text{si} \quad u+v\neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad u+v = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+x^2-y^2}{x^2+y^2+x^2-y^2-2} & \text{si} \quad x^2+y^2+x^2-y^2 \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x^2+y^2+x^2-y^2 = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si} \quad x^2\neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

  D'où

  $$\begin{array}{rccl} g\circ f: & \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x;\,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$$

- Pour montrer que $g\circ f$ n'est pas surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(g\circ f) \neq \mathbb{R}$.
  $\mathrm{Im}\,(g\circ f) = \big\{z\in\mathbb{R} \mid \exists (x;\,y)\in\mathbb{R}_+^2\,,\ (g\circ f)(x;\,y) = z\big\} = \{z\in\mathbb{R} \mid P(x,\,y,\,z)\,\}$

  Si $x = 1$:
  alors $\exists (x;\,y) = (1;\,y)\,, \forall y\in\mathbb{R}_+$ tel que $(g\circ f)(1;\,y) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\in \mathrm{Im}\,(g\circ f)$

$$P(x,\, y,\, z) \iff z = \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}_+ - \{1\} \\ \exists y \in \mathbb{R}_+ \\ x^2(z-1) = z \end{cases}$$

$$\iff z = \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}_+ - \{1\} \\ \exists y \in \mathbb{R}_+ \\ z \in \mathbb{R} - \{1\} \\ x^2 = \frac{z}{z-1} \end{cases}$$

$(x;\, y)$ existe et $x \in \mathbb{R}_+ - \{1\}\,, y \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $z \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $\dfrac{z}{z-1} \geq 0\,$. D'où :

$$P(x,\, y,\, z) \iff z = \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \dfrac{z}{z-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff z \in]-\infty;\, 0] \cup]1;\, +\infty[\cup \{\tfrac{1}{2}\} \iff R(z)$$

Donc $\quad \mathrm{Im}\,(g \circ f) =]-\infty;\, 0] \cup]1;\, +\infty[\cup \{\tfrac{1}{2}\} \;\neq\; \mathbb{R}$

- Pour que $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ soit surjective, on pose $B = \mathrm{Im}\,(g \circ f)\,$.

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow &]-\infty;\, 0] \cup]1;\, +\infty[\cup \{\tfrac{1}{2}\} \\ & (x;\, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\[2ex] \tfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$$

(b) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & f(t) = (\,\sqrt{|t|}\,,\; t^2 - 4\,) \end{array}$

$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,,\, y) & \longmapsto & g(x\,,\, y) = (\,x^2\,,\; y - 3x^2\,) \end{array}$

On détermine d'abord l'application $g \circ f,$ son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

- $\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= g\big(f(t)\big) = g(\sqrt{|t|};\, t^2 - 4) = \\ &= g(x;\, y) = \\ &= (x^2;\, y - 3x^2) = \\ &= (\,|t|\,;\, t^2 - 3|t| - 4) \end{aligned}$

  D'où

  $\begin{array}{rccl} g \circ f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (g \circ f)(t) = (\,|t|\,;\, t^2 - 3|t| - 4) = (u;\, v) \end{array}$

- Pour montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \neq \mathbb{R}^2\,$.
  $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \big\{(u;\, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}\,,\; (g \circ f)(t) = (u;\, v)\big\} =$
  $\big\{(u;\, v) \in \mathbb{R}^2 \mid P(t,\, u,\, v)\,\big\}$

$$P(t,\,u,\,v) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \\ u = |t| \\ v = t^2 - 3|t| - 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \\ u \geq 0 \\ v = u^2 - 3u - 4 \end{cases}$$

Ainsi t existe et $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $u \in \mathbb{R}_+$ et $v = u^2 - 3u - 4$.
D'où :

$$P(t,\,u,\,v) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u \in \mathbb{R}_+ \\ v = u^2 - 3u - 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad R(u;\,v)$$

Donc $\quad \mathrm{Im}\,(g \circ f) = \big\{(u;\,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in \mathbb{R}_+\,,\ v = (u+1)(u-4)\big\} \neq \mathbb{R}^2$

- Pour que $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ soit surjective, on pose $B = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & B \\ & t & \longmapsto & (g \circ f)(t) = (\,|t|\,;\, t^2 - 3|t| - 4) = (u;\,v) \end{array}$$

Applications : exercice 23

(a) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{10}{x^2+4} \end{array}$

- f est injective car $\forall x,\, x' \in \mathbb{R}_+$:

$f(x) = f(x')$

$\dfrac{10}{x^2+4} = \dfrac{10}{x'^2+4}$

$x^2 = x'^2$

$(x'-x)(x'+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x'$ car $x,\, x' \in \mathbb{R}_+$

- On détermine $\mathrm{Im}\, f$:

$\mathrm{Im}\, f = \big\{y \in \mathbb{R}\ |\exists x \in \mathbb{R}_+\,,\ y = \frac{10}{x^2+4}\big\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x,\,y)\,\}$

$$P(x,\,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}_+ \\ y = \frac{10}{x^2+4} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}_+ \\ yx^2 + 4y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}_+ \\ y \in \mathbb{R}^* \\ x^2 = \dfrac{10-4y}{y} \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi x existe et $x \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $y \neq 0$ et $\dfrac{10-4y}{y} \geq 0$

$$P(x,\,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{10-4y}{y} \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \left]0\,;\,\frac{5}{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad R(y)$$

D'où $\quad \mathrm{Im}\, f = \left]0\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$.

- Soit : $\tilde{f}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \left]0\,;\,\dfrac{5}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) = \dfrac{10}{x^2+4} \end{array}$

  $\tilde{f}$ est bijective car : f est injective donc $\tilde{f}$ est injective,
  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \tilde{f}$ donc $\tilde{f}$ est surjective.

  On pose $g = \tilde{f}^{-1}$ et on définit l'application réciproque :

$$g: \begin{array}{rcl} \left]0\,;\,\dfrac{5}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & g(x) = +\sqrt{\dfrac{10-4x}{x}} \end{array}$$

(b) $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{x-3} \end{array}$

- g est injective car $\forall x,\, x' \in \mathbb{R} - \{3\}$:

  $g(x) = g(x')$

  $\dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{x'-2}{x'-3}$

  $(x'-3)(x-2) = (x-3)(x'-2)$

  $xx' - 3x - 2x' = xx' - 3x' - 2x$

  $x = x'$

- On détermine $\operatorname{Im} g$:

  $\operatorname{Im} g = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} - \{3\}\,,\ y = \frac{x-2}{x-3}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x,\, y)\,\}$

  $P(x,\, y) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ y = \dfrac{x-2}{x-3} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ y(x-3) = x-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ x = \dfrac{3y-2}{y-1} \end{cases}$

  Ainsi x existe et $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ si et seulement si $y \in \mathbb{R} - \{1\}$.

  D'où $\operatorname{Im} g = \mathbb{R} - \{1\}$.

- Soit : $\tilde{g}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \longmapsto & \tilde{g}(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \end{array}$

  $\tilde{g}$ est bijective car : g est injective donc $\tilde{g}$ est injective,
  $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} \tilde{g}$ donc $\tilde{g}$ est surjective.

  On pose $h = \tilde{g}^{-1}$ et on définit l'application réciproque :

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{3\} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{3x-2}{x-1} \end{array}$$

(c) $$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{array}$$

- h est injective car $\forall x,\, x' \in \mathbb{R}_- - \{-1\}$:

  $h(x) = h(x')$

  $\dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x'^2}{x'^2-1}$

  $x^2x'^2 - x^2 = x^2x'^2 - x'^2$

  $(x'-x)(x'+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x'$ car $x,\, x' \in \mathbb{R}_- - \{-1\}$

- On détermine $\operatorname{Im} h$:

  $\operatorname{Im} h = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\exists x \in \mathbb{R}_- - \{-1\}\,,\; y = \frac{x^2}{x^2-1} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} \mid P(x,\, y)\,\}$

  $$P(x,\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}_- - \{-1\} \\ y = \frac{x^2}{x^2-1} \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}_- - \{-1\} \\ y \in \mathbb{R} - \{1\} \\ x^2 = \frac{y}{y-1} \geq 0 \end{array} \right.$$

  $\Longleftrightarrow \quad y \in \,]-\infty;\, 0] \cup\,]1;\, +\infty\,[$

  D'où $\quad \operatorname{Im} h =]-\infty;\, 0] \cup\,]1;\, +\infty\,[$

- Soit : $$\tilde{h} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- - \{-1\} & \longrightarrow &]-\infty;\, 0] \cup\,]1;\, +\infty\,[\\ x & \longmapsto & \tilde{h}(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{array}$$

  $\tilde{h}$ est bijective car : h est injective donc $\tilde{h}$ est injective,
  $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} \tilde{h}$ donc $\tilde{h}$ est surjective.

  On pose $g = \tilde{h}^{-1}$ et on définit l'application réciproque :

  $$g : \begin{array}{ccc}]-\infty;\, 0] \cup\,]1;\, +\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- - \{-1\} \\ x & \longmapsto & g(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \end{array}$$

Applications : exercice 24

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n\,,\, p) & \longmapsto & f(n\,,\, p) = 2^n\,(2p+1) \end{array}$$

(a) - f est injective c'est-à-dire :
  pour tout $(n,\, p),\, (m,\, q) \in \mathbb{N}^2,\; f(n,\, p) = f(m,\, q) \;\Rightarrow\; n = m$ et $p = q$
  Rappel : $2p+1$ est un entier impair et $2^n k,\; k \in \mathbb{N}$, est pair.

  Soit $(n,\, p),\, (m,\, q) \in \mathbb{N}^2$, tels que $f(n,\, p) = f(m,\, q) \;\Leftrightarrow\; 2^n(2p+1) = 2^m(2q+1)$
  On peut toujours supposer $n \geq m$. D'où

  $2^{n-m}(2p+1) = 2q+1$

Or si $n \neq m$ alors $2^{n-m}(2p+1)$ est pair.
Mais $2q+1$ est impair.
Donc dans ce cas l'égalité est impossible.
Ainsi on a nécessairement $n = m$.

On a alors : $2p+1 = 2q+1 \Rightarrow p = q$.
f est bien injective.

- f est surjective c'est-à-dire :
  pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe $(n,\, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $l = 2^n(2p+1)$.
  Utiliser une décomposition de l en produit de facteurs premiers.

  Soit $l \in \mathbb{N}^*$, alors l se décompose en produit de facteurs premiers :
  $l \;=\; \alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{r_k}, \quad r_i \in \mathbb{N}$

  Or $\alpha_1 = 2$, donc on pose $r_1 = n$, d'où
  $l \;=\; 2^n \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{r_k}$

  Les nombres premiers $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont tous impairs donc leur produit est un nombre impair.

  On pose : $\alpha_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{r_k} \;=\; 2p+1,\; p \in \mathbb{N}$

  Ainsi pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe $(n,\, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $l = 2^n(2p+1)$.
  f est bien surjective.

(b) Soit par exemple l'application

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x - 1 \end{array}$$

Elle est bien bijective !

On définit l'application $g \circ f$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ suivante :

$(g \circ f)(n,\, p) = g\left(f(n,\, p)\right) = 2^n(2p+1) - 1$

Ainsi :

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n,\, p) & \longmapsto & 2^n(2p+1) - 1 \end{array}$$

Elle est bien bijective car f et g sont bijectives.

Applications : exercice 25

(a) A montrer :
$g \circ f = I_E \;\Rightarrow\; f$ est injective.

Preuve :
Il faut montrer que $\forall\, x,\, y \in E \;:\; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Soient $x,\, y \in E$, par hypothèse :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = I_E(x) = x \quad (1)$
$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = I_E(y) = y \quad (2)$

Si : $f(x) = f(y)$, alors (1) devient
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = x = y$ par (2)

Ainsi f est injective.

(b) A montrer :
$f \circ g = I_F \;\Rightarrow\; f$ est surjective.

Preuve :
Il faut montrer que $f(E) = F$.

L'application f va de E vers F, donc $f(E) \subset F$. (1)

L'application g va de F vers E, donc $g(F) \subset E$.
Par l'exercice 7 partie (a), $g(F) \subset E \Rightarrow f(g(F)) \subset f(E)$ (2)

Or $f(g(F)) = (f \circ g)(F) = I_F(F) = F$ par hypothèse, (3)

ainsi par (2) et (3) : $F \subset f(E)$ (4)

De (1) et (4), on a la double inclusion :
$(f(E) \subset F$ et $F \subset f(E)) \;\Leftrightarrow f(E) = F$.
L'application f est bien surjective.

Applications : exercice 26

(a) On commence par identifier la référentiel, l'hypothèse et la conclusion.

Référentiel : E, F des ensembles, $A, B \subset E$, f une application de E dans F

Hypothèse : $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (f injective)

Conclusion : $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

A montrer : tout élément de $f(A) \cap f(B)$ est élément de $f(A \cap B)$.
En effet, soit $x' \in f(A) \cap f(B)$.

$$\begin{aligned}
x' \in f(A) \cap f(B) \quad &\Rightarrow \quad x' \in f(A) \text{ et } x' \in f(B) \\
&\Rightarrow \quad \exists\, x \in A,\ x' = f(x) \text{ et } \exists\, y \in B,\ x' = f(y) \\
&\overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} \quad \exists\, x \in A \text{ et } x \in B,\ x' = f(x) \\
&\Rightarrow \quad \exists\, x \in A \cap B,\ x' = f(x) \\
&\Rightarrow \quad x' \in f(A \cap B)\,.
\end{aligned}$$

(b) $\forall E, F$ des ensembles, $A, B \subset E$, f application de E dans F,

$$\big[f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)\big]\,.$$

D'où la négation la négation,
$\exists\, E, F$ des ensembles, $A, B \subset E$, f application de E dans F,

$$\big[f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)\big]\,.$$

Selon (a), une telle application doit être non injective.
Prenons
- $E = \{a, b\}$, $A = \{a\} \subset E$, $B = \{b\} \subset E$
- $F = \{c'\}$
- $f : E \to F$ définie par $f(a) = f(b) = c'$ (non injective) .

Alors

$$f(A) \cap f(B) = \{c'\} \cap \{c'\} = F \quad \text{et} \quad f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset\,.$$

Ainsi, on a bien $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

Applications : exercice 27

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Il faut l'implication suivante :

$$f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$$

Rappel :
$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$
$x \notin A \Leftrightarrow f(x) \notin f(A)$
$x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

La preuve se fait par la méthode directe :

Soit $y \in \overline{f(A)}$.

f est surjective par hypothèse, donc pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Ainsi il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) \in \overline{f(A)}$.
Autrement dit $y = f(x) \notin f(A)$ et donc $x \notin A$.
On a donc : $x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
D'où : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) = y \in f(\overline{A})$.