















Ens: Prof. Marco Picasso  
Analyse numérique et optimisation  
3 July 2021  
de 16h15 à 19h15

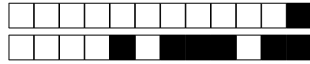
# Student One

SCIPER: 111111

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso.  
Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - +1/ $N$  points si vous cochez une réponse correcte, où  $N$  est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - 1/ $M$  point si vous cochez une réponse incorrecte, où  $M$  est le nombre de réponses incorrectes.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 29 questions à **choix multiple** et 17 points répartis sur deux questions à **rédigier**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		



## Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

On considère le problème suivant : étant donné la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , trouver la fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + x(1 + \sin(u(x))) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

**Question 1** Si  $f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) + x(1 + \sin(\sin(2\pi x)))$ , la solution de ce problème est donnée par

- ☒  $u(x) = \sin(2\pi x)$
- ☐  $u(x) = \cos(2\pi x)$
- ☐  $u(x) = -\cos(2\pi x)$
- ☐  $u(x) = -\sin(2\pi x)$

On utilise une méthode de différences finies centrées pour approcher  $u$  et la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire obtenu. Le fichier `exam1.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

**Question 2** A la ligne `a(i)=2*coeff+????`, il faut remplacer `???` par:

- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*(1+sin(u(i)))`
- ☐ `cos(u(i))`
- ☒ `i*h*cos(u(i))`

**Question 3** A la ligne `b(i)=coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1))+ ????-f(i*h))`, il faut remplacer `????` par:

- ☒ `i*h*(1+sin(u(i)))`
- ☐ `1+sin(u(i))`
- ☐ `i*h*cos(u(i))`
- ☐ `cos(u(i))`

**Question 4** A la ligne `c(i)=????`, il faut remplacer `????` par:

- ☒ `c(i)/a(i)`
- ☐ `a(i)/c(i)`
- ☐ `a(i+1)/c(i)`
- ☐ `c(i)/a(i+1)`

**Question 5** A la ligne `a(i+1)=sqrt(a(i+1)-????)`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `a(i)*a(i)`
- ☒ `c(i)*c(i)`
- ☐ `c(i)*a(i+1)`
- ☐ `c(i)*a(i)`



**Question 6** A la ligne  $b(i+1)=(b(i+1)-c(i)*b(i))/????$ , il faut remplacer  $????$  par:

- ☒  $a(i+1)$
- ☐  $c(i)$
- ☐  $a(i)$
- ☐  $c(i+1)$

**Question 7** A la ligne  $b(i)=(b(i)-c(i)*b(i+1))/????$ , il faut remplacer  $????$  par:

- ☐  $c(i+1)$
- ☒  $a(i)$
- ☐  $c(i)$
- ☐  $a(i+1)$

**Question 8** A la ligne  $u(i)=u(i)-????$ , il faut remplacer  $????$  par:

- ☐  $a(i)$
- ☐  $u(i)$
- ☐  $c(i)$
- ☒  $b(i)$

**Question 9** Après avoir complété le fichier, les résultats obtenus sont les suivantes:

```
>> err = exam1(9);
iter=1, stop = 1.649725e+00
iter=2, stop = 2.511976e-02
iter=3, stop = 7.045653e-06
iter=4, stop = 6.851657e-13
err = 0.031974
>> err = exam1(19);
iter=1, stop = 1.704753e+00
iter=2, stop = 2.564039e-02
iter=3, stop = 6.913912e-06
iter=4, stop = 6.217630e-13
err = 0.0082731
>> err = exam1(39);
iter=1, stop = 1.725976e+00
iter=2, stop = 2.577019e-02
iter=3, stop = 6.880664e-06
iter=4, stop = 6.025330e-13
err = 0.0020607
```

On déduit de ces résultats que :

- ☐ L'erreur est divisée par 2 si  $N$  est multiplié par 2
- ☒ La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ.
- ☐ La méthode de Newton converge quel que soit le point de départ.
- ☒ L'erreur est divisée par 4 si  $N$  est multiplié par 2.



Fichier exam1.m:

```
function err = exam1(N)
%
% Resolution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
% par une methode de differences finies
% et une methode de Newton
% Etant donne u, trouver u^{n+1}
% tel que DF(u^n)(u^n-u^{n+1}) = F(u^n)
% En pratique on construit A=DF(u^n), b=F(u^n)
% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose u^{n+1}=u^n-y
%
% parametres
%
% N      : nombre d inconnues du systeme non lineaire
% a      : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T
% c      : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L
% b      : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b
% x      : N-vecteur, contient u^n puis u^{n+1}
%
for i=1:N
    u(i) = 1;
end
h=1/(N+1);
coeff=(N+1)*(N+1);
stop=1;
iter=0;
while stop>1e-10
    iter=iter+1;
    for i=1:N
        a(i) = 2*coeff+????;
    end
    for i=1:N-1
        c(i) = -coeff;
    end
    b(1) = 2*coeff + ?????;
    for i=2:N-1
        b(i) = coeff*(2*u(i)-u(i-1)-u(i+1))+????-f(i*h);
    end
    b(N) = ?????;

    % Decomposition de Cholesky de la matrice A

    a(1) = sqrt(a(1));
    for i=1:N-1
        c(i) = ?????;
        a(i+1) = sqrt(a(i+1)-????);
    end

    % Resolution du systeme lineaire Lz = b

    b(1)=b(1)/a(1);
    for i=1:N-1
        b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/????;
```



```
end

% resolution du systeme lineaire L^T y = z

b(N)=b(N)/a(N);
for i=N-1:-1:1
    b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/????;
end

%u^{n+1} = u^n - y

for i=1:N
    u(i) = u(i) - ???;
end

% calcul de ||b||/||u||

stop=norm(b)/norm(u);
fprintf('iter=%i, stop = %e \n',iter,stop)
end
err=0;
for i=1:N
    err=max(err,abs(u(i)-uex(i*h)));
end
end
% second membre de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function f=f(x)
    f=4*pi*pi*sin(2*pi*x)+x*(1+sin(sin(2*pi*x)));
end
% solution de l'equation -u''(x)+x(1+sin(u(x)))=f(x)
function uex=uex(x)
    uex=????;
end
```



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



**Question 10** Cocher les affirmations vraies

☐  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1$  on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4$$

☐  $\exists C > 0$ , tel que  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h < 1$ , on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4 \max_{-2 \leq x \leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

☒  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1$  on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4$$

☐  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1$ ,

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4 \max_{-2 \leq x \leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

☒  $\exists C > 0$ , tel que  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h < 1$ , on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4 \max_{-2 \leq x \leq 2} |u^{(5)}(x)|.$$

☐  $\exists C > 0$ , tel que  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h \leq 1$ , on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 6u(h) - 6u(-h) + u(-2h)}{10h}| \leq Ch^4$$

☐  $\exists C > 0$ , tel que  $\forall u \in \mathcal{C}^5[-2, 2], \forall 0 < h \leq 1$ , on a

$$|u'(0) - \frac{-u(2h) + 8u(h) - 8u(-h) + u(-2h)}{12h}| \leq Ch^4$$



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET





On considère le problème suivant: trouver la fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases}$$

**Question 11** La formule variationnelle (ou faible) du problème consiste à trouver  $u \in V$  telle que:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V,$$

où l'espace vectoriel  $V$  est donné par:

- ☐  $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(0) = 0, g(1) = 0\}$   
☐  $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux}\}$   
☐  $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(0) = 0\}$   
☒  $V = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ continue, } g' \text{ continue par morceaux, } g(1) = 0\}$

**Question 12** On note  $V_1$  le sous espace vectoriel de  $V$  engendré par la fonction  $\varphi_1$  définie par

$$\varphi_1(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Soit  $u_1 \in V_1$  telle que

$$\int_0^1 u_1'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V_1$$

On a  $u_1 =$

- ☒  $\frac{1}{2}(1 - x)$   
☐  $2(1 - x)$   
☐  $1 - x$   
☐  $0$



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



Soit  $n$  un entier positif,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ , des fonctions linéairement indépendantes. On considère  $m$  points d'interpolations  $0 \leq x_1 < \dots < x_m \leq 1$  pour lesquels des observations  $y_1, \dots, y_m$  sont données. On cherche  $\alpha^* \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$f(\alpha^*) \leq f(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

où

$$\min_{\alpha_i} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x_j) - y_j \right)^2.$$

On peut montrer que  $\alpha^*$  satisfait  $A^T(A\alpha^* - b) = 0$ , où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ .

### Question 13

Pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$  la matrice  $A$  est définie par:

- ☐  $A_{ij} = \varphi_i(x_j)$
- ☐  $A_{ij} = \varphi_j(x_i)$
- ☐  $A_{ji} = \varphi_j(x_i)$
- ☒  $A_{ji} = \varphi_i(x_j)$

Le fichier `exam2.m` donné ci-dessous implémente cette méthode.

**Question 14** A la ligne `mat(j,i) = basis(N,i,????);`, il faut remplacer `????` par:

- ☐ `val(j)`
- ☐ `val(i)`
- ☒ `xinterp(j)`
- ☐ `xinterp(i)`

**Question 15** A la ligne `alpha=????;`, il faut remplacer `????` par:

- ☒ `(mat'*mat)\(mat'*val)`
- ☐ `(mat'*val)\(mat'*mat)`
- ☐ `(mat*mat')\ (mat*val)`
- ☐ `(mat*val)\(mat*mat')`



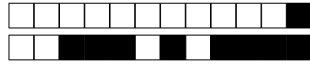
Fichier exam2.m:

```
function exam2(N,M)
% N : nb of neurons
% M : nb of interpolation points
% mat: the rectangular matrix corresponding to the least square problem
% val: the values at interpolation points
% alpha : vector alpha containing the values of alpha_i for i=1,...,N
xinterp=zeros(M,1);
val=zeros(M,1);
for j=1:M
    xinterp(j)=j/(M+1);
    val(j)=1+tanh(100*(xinterp(j)-0.5));
end
mat=zeros(M,N);
for i=1:N
    for j=1:M
        mat(j,i) = basis(N,i,????);
    end
end
alpha=????
% plot results
xx=zeros(100,1);
yy=zeros(100,1);
for k=1:100
    xx(k)=k/101;
    yy(k)=sumbasis(N,alpha,xx(k));
end
axis([0 1 -1 1]);
plot(xinterp,val,'o',xx,yy);
refresh();
end
function sumbasis=sumbasis(N,alpha,x)
    sumbasis=0;
    for i=1:N
        sumbasis=sumbasis+alpha(i)*basis(N,i,x);
    end
end
function basis=basis(N,i,x)
    basis=max(0,x-i/(N+1));
end
```



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



Soit  $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$  où  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive et soit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } -c_i \leq x_i \leq c_i, i = 1, \dots, n\}$  où  $c \in \mathbb{R}^n$  est donné. On cherche  $x^* \in \Omega$  tel que  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega$ . Soit  $\mathcal{L}$  le lagrangien défini par

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \sum_{i=1}^n (\lambda_1)_i (x_i + c_i) - \sum_{i=1}^n (\lambda_2)_i (-x_i + c_i).$$

Les conditions KKT s'écrivent:  $\exists \lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\begin{cases} Ax^* - b \text{ ???} = 0 \\ x^* + c \geq 0 \\ -x^* + c \geq 0 \\ \lambda_1^* \geq 0 \\ \lambda_2^* \geq 0 \\ (\lambda_1^*)_i \text{ ???} = 0, i = 1, \dots, n \\ (\lambda_2^*)_i \text{ ???} = 0, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

**Question 16** A la 1<sup>ère</sup> ligne de (1) il faut remplacer ??? par

- ☐  $+\lambda_1^* + \lambda_2^*$   
☐  $+\lambda_1^* - \lambda_2^*$   
☒  $-\lambda_1^* + \lambda_2^*$   
☐  $-\lambda_1^* - \lambda_2^*$

**Question 17** A la 6<sup>ème</sup> ligne de (1) il faut remplacer ??? par

- ☐  $x_i^* - c_i$   
☐  $-x_i^* - c_i$   
☐  $-x_i^* + c_i$   
☒  $x_i^* + c_i$

**Question 18** A la 7<sup>ème</sup> ligne de (1) il faut remplacer ??? par

- ☐  $x_i^* + c_i$   
☒  $-x_i^* + c_i$   
☐  $x_i^* - c_i$   
☐  $-x_i^* - c_i$

On considère la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (1). On introduit  $s_1 = x^* + c$  et  $s_2 = -x^* + c$  et on écrit les lignes 1,2,3,6 et 7 de (1) sous la forme

$$F(x^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, s_1, s_2) = 0.$$

$\forall x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$  la matrice jacobienne  $DF(x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2)$  est donnée par

$$DF(x, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2) = \begin{pmatrix} A & ??? & ??? & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & -I \\ 0 & ??? & 0 & ??? & 0 \\ 0 & 0 & ??? & 0 & ??? \end{pmatrix}.$$

On note  $\text{diag} \lambda_1$  la matrice  $n \times n$  diagonale, de coefficients diagonaux  $(\lambda_1)_i$ .



**Question 19** Le bloc 1,2 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐  $\text{diag}\lambda_1$
- ☐  $\text{diag}\lambda_2$
- ☐  $\text{diag}s_2$
- ☒  $-I$
- ☐  $I$
- ☐  $\text{diag}s_1$

**Question 20** Le bloc 1,3 de la matrice jacobienne est donné par

- ☒  $I$
- ☐  $\text{diag}s_1$
- ☐  $\text{diag}s_2$
- ☐  $\text{diag}\lambda_1$
- ☐  $-I$
- ☐  $\text{diag}\lambda_2$

**Question 21** Le bloc 4,2 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐  $\text{diag}\lambda_1$
- ☐  $I$
- ☐  $\text{diag}\lambda_2$
- ☐  $-I$
- ☐  $\text{diag}s_2$
- ☒  $\text{diag}s_1$

**Question 22** Le bloc 4,4 de la matrice jacobienne est donné par

- ☐  $I$
- ☒  $\text{diag}\lambda_1$
- ☐  $\text{diag}s_1$
- ☐  $-I$
- ☐  $\text{diag}\lambda_2$
- ☐  $\text{diag}s_2$



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET





Soit  $c \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  donnés, soit  $\Omega = \{q \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Bq = c\}$ , soit  $f(q) = \frac{1}{2}||q||^2$ , on cherche

$$q^* \in \Omega \text{ tel que } f(q^*) \leq f(q) \quad \forall q \in \Omega.$$

On introduit le lagrangien défini  $\forall q \in \mathbb{R}^n, \forall \mu \in \mathbb{R}^m$  par

$$\mathcal{L}(q, \mu) = f(q) - \mu^T (Bq - c).$$

Les conditions KKT s'écrivent

$$\begin{pmatrix} I & \text{????} \\ \text{????} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \quad (2)$$

**Question 23** Le bloc 1,2 de cette matrice est égal à

- ☐  $B$
- ☒  $-B^T$
- ☐  $B^T$
- ☐  $-I$
- ☐  $I$
- ☐  $-B$

**Question 24** Le bloc 2,1 de cette matrice est égal à

- ☐  $-B$
- ☐  $B^T$
- ☒  $B$
- ☐  $I$
- ☐  $-I$
- ☐  $-B^T$

**Question 25** Le système linéaire (2) admet une solution unique

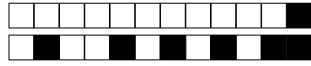
- ☐ sans condition sur  $B$
- ☒ si  $\ker B^T = 0$
- ☐ si  $\ker B = 0$

On suppose que  $B = M^o A^{-1}$  où  $M^o \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique définie positive et  $c = M^o(x^o - A^{-1}b)$  où  $x^o$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . Si  $q^*$  et  $\mu^*$  sont solution de (2), il existe  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\begin{pmatrix} \text{????} & -I & 0 \\ 0 & A & \text{????} \\ M^o & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ q^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ M^o x^o \end{pmatrix} \quad (3)$$

**Question 26** Le bloc 1,1 de cette matrice est égal à

- ☐  $I$
- ☐  $-M^o$
- ☐  $-I$
- ☐  $M^o$
- ☐  $-A$
- ☐  $M^{oT}$
- ☒  $A$
- ☐  $-M^{oT}$



**Question 27** Le bloc 2,3 de cette matrice est égal à

- ☐  $M^o$
- ☐  $-I$
- ☐  $-A$
- ☐  $M^{oT}$
- ☒  $-M^{oT}$
- ☐  $A$
- ☐  $-M^o$
- ☐  $I$

PROJET



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et soit  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_j \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_j^T \varphi_i = \delta_{ji}, \quad (1 \text{ si } i = j, 0 \text{ sinon}),$$

avec  $0 \leq |\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

Etant donné  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , on considère l'algorithme suivant

$$x^k = Ax^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

**Question 28** On a

☐ si  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  et si  $(x^0)^T \varphi_n \neq 0$  alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\|x^k\|} = \varphi_n.$$

☒ si  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  et si  $(x^0)^T \varphi_1 \neq 0$  alors

$$\frac{x^k}{\|x^k\|} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \varphi_i}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)^{1/2}}$$

☒  $x^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i)^k \varphi_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$

☐  $(x^k)^T x^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i^k$

☒  $x^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$  avec  $\alpha_i = (x^0)^T \varphi_i$

Soit  $m, n$  deux entiers  $m \geq n$ . Soit  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , on pose  $B = U\Sigma V^T$  où  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont deux matrices orthogonales ( $UU^T = U^T U = I$ ,  $VV^T = V^T V = I$ ) et  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice diagonale de coefficients  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

On applique l'algorithme (4) avec  $A = B^T B$ .

**Question 29** On a

☒  $B^T B V = V \Sigma^T \Sigma$

☐  $B^T B U = U \Sigma \Sigma^T$

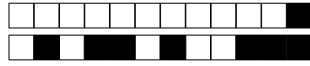
☒  $B^T B v_i = \sigma_i^2 v_i$   $i = 1, \dots, n$  où  $v_i$  est le  $i^e$  vecteur colonne de  $V$

☐  $B^T B u_i = \sigma_i^2 u_i$   $i = 1, \dots, n$  où  $u_i$  est le  $i^e$  vecteur colonne de  $U$ .



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



## Questions à rédiger

**Répondre dans l'espace quadrillé dédié.** Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

**Question ouverte 1:** Cette question est notée sur 10 points.

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9	<input checked="" type="checkbox"/>	10
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	----

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on veut approcher  $\int_a^b f(x)dx$  à l'aide de la formule du rectangle. Soit  $N$  un entier positif destiné à être grand, on note  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

(a) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{-1}^1 f(x_i + h \frac{t+1}{2}) dt. \quad (5)$$

(b) Pour  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue donnée, on approche  $\int_{-1}^1 g(t)dt$  par la formule du rectangle définie par  $J(g) = 2g(0)$ . Définir l'approximation  $L_h(f)$  de  $\int_a^b f(x)dx$  obtenue en utilisant la formule du rectangle dans (5).

(c) On suppose  $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ . Soit  $i = 0, 1, \dots, N-1$  fixé, soit  $-1 \leq t \leq 1$ , montrer que

$$f(x_i + h \frac{t+1}{2}) = p_i(t) + r_i(t) \quad \text{où } p_i \in \mathbb{P}_1,$$

expliciter  $p_i$  et  $r_i$ .

(d) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx - L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{-1}^1 r_i(t)dt. \quad (6)$$

(e) Montrer que  $\forall f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\forall 0 < h < b-a$  on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^2,$$

expliciter  $C$ .

(f) Que devient le point (e) si on remplace la formule du rectangle par  $J(g) = 2g(-1)$ ?



PROJET

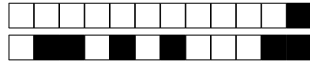


PROJET





PROJET



**Question ouverte 2:** Cette question est notée sur 7 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^1$  et soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) On choisit  $x = x^* + sd$  où  $d \in \mathbb{R}^n$  et  $s > 0$ . Montrer que

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0$$

(on rappelle que  $\nabla f(x^*)^T d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x^* + sd) - f(x^*)}{s}$ ).

En déduire que  $\nabla f(x^*) = 0$

- (b) On pose  $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$  où  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive. Pour approcher  $x^*$  on applique la méthode du gradient: étant donné  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha > 0$ , on pose  $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Montrer que

$$x^* - x_{k+1} = (I - \alpha A)(x^* - x_k).$$

- (c) Soit une base orthonormée de vecteur propres de  $A$ :

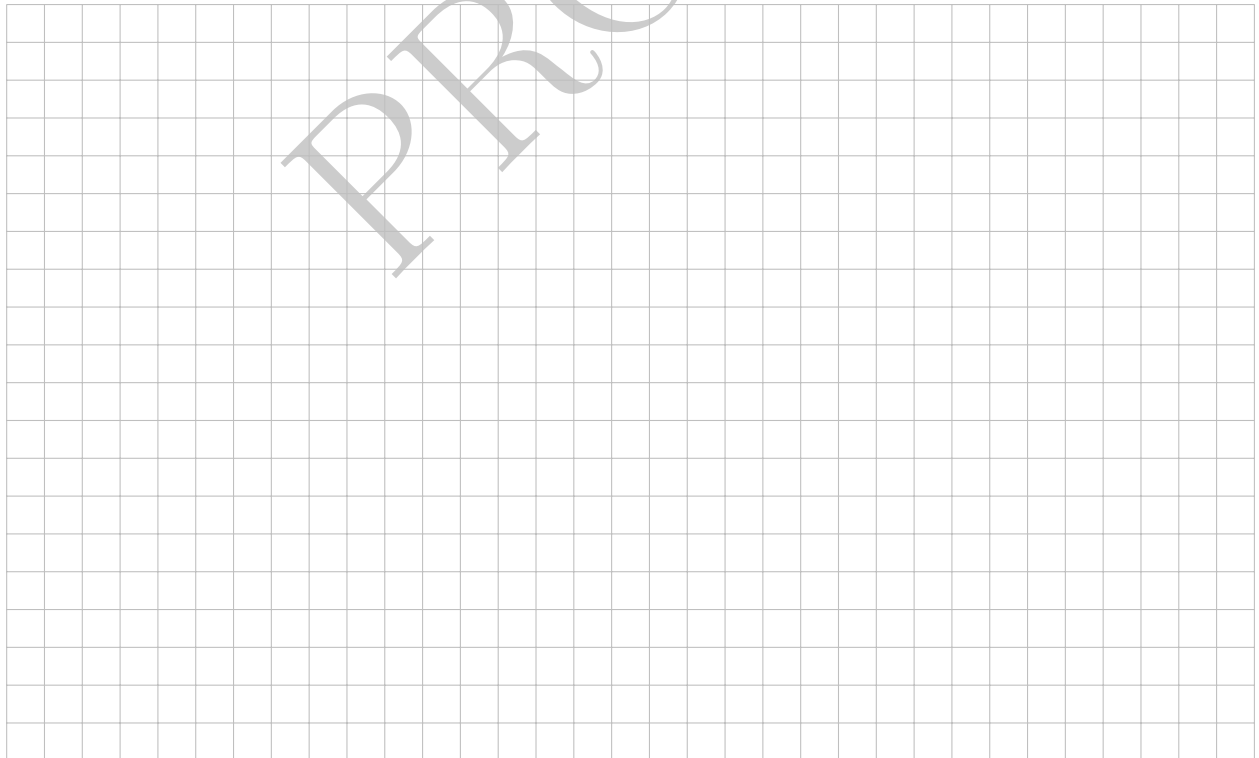
$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_j^T \varphi_k = \delta_{jk} \quad (1 \text{ si } k = j, 0 \text{ sinon}),$$

avec  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Décomposer  $x^* - x_k$  dans la base des vecteur propres et montrer que

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \alpha \lambda_i| \|x^* - x_k\|.$$

En déduire que la méthode converge si  $\alpha < \frac{2}{\lambda_n}$ .





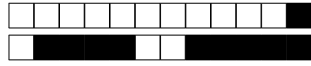
PROJET



PROJET



PROJET



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET



CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

PROJET