

## Solutions Semaine 9a

### Solution 1

- (a) On dessine le diagramme des forces de la poutre lorsqu'il repose sur la partie A, puis on "coupe" la poutre en deux sous-systèmes pour trouver le moment interne de flexion par la méthode des sections. Pour question a), la partie pointue de la poutre ne change rien au calculs. (figure 1) :

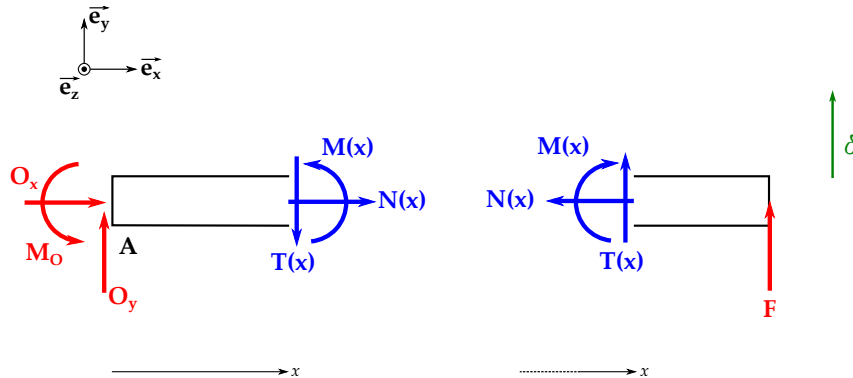


FIGURE 1 – Sous-système pour la région A.

On a directement, sur la partie de droite :

$$\sum M_x = -M(x) + (a - x)F = 0 \quad (1)$$

$$M(x) = F(a - x) \quad (2)$$

Le moment est maximal en  $x = 0$ , c'est-à-dire à l'encastrement :

$$M(0) = Fa \quad (3)$$

On utilise maintenant les équations de la flexion des poutres :

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F(a - x)}{EI} \quad (4)$$

$$y'(x) = x \frac{aF}{EI} - \frac{1}{2} x^2 \frac{F}{EI} + C_1 \quad (5)$$

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 \frac{aF}{EI} - \frac{1}{6} x^3 \frac{F}{EI} + C_1 x + C_2 \quad (6)$$

Avec les conditions aux bords, on obtient :

$$y'(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (7)$$

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (8)$$

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 \frac{aF}{EI} - \frac{1}{6} x^3 \frac{F}{EI} \quad (9)$$

Insérons la flèche  $\delta$  dans l'équation pour trouver le moment maximal :

$$y(a) = \frac{1}{3} \frac{a^3 F}{EI} = \delta \quad (10)$$

$$F = \frac{3EI\delta}{a^3} \quad (11)$$

$$M(0) = \frac{3EI\delta}{a^2} \quad (12)$$

Application numérique :

$$I = \frac{l \cdot e^3}{12} = 1166.7 \mu\text{m}^4 = 1.1667 \times 10^{-21} \text{ m}^4 \quad (13)$$

$$M(0) = 63.0 \text{ nN m} = 63.0 \times 10^{-9} \text{ N m} \quad (14)$$

- (b) On peut calculer la constante ressort de la poutre grâce à l'équation (11) :

$$F = k_{eff} \delta \quad (15)$$

$$F = \frac{3EI}{a^3} \delta \quad (16)$$

$$k_{eff} = \frac{3EI}{a^3} \quad (17)$$

Application numérique :

$$k_{eff} = 4.2 \text{ N/m} \quad (18)$$

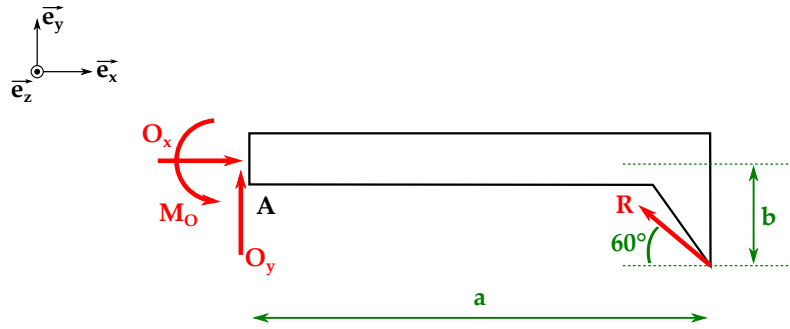


FIGURE 2 – Réactions pour la région B.

- (c) La figure 2 illustre la situation lorsque la pointe AFM est dans la région B. Comme il n'y a pas de frottement sur la surface B (la pointe peut glisser), elle va à sa position d'énergie minimale et la force de réaction R est bien perpendiculaire à cette surface.

Posons les équations de la statique :

$$\sum \vec{F} = \begin{pmatrix} O_x \\ O_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

$$\sum \vec{M} = M_O + \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

nous avons négligé une correction de  $e/2$  (épaisseur de la poutre)

D'où l'on tire :

$$O_x = R \cos(60) = 0.5 \text{ mN} \quad (21)$$

$$O_y = -R \sin(60) = -0.866 \text{ mN} \quad (22)$$

$$M_O = -aR \sin(60) + bR \cos(60) = -0.393 \mu\text{N m} \quad (23)$$

Le moment  $M_O$  agit donc dans le sens opposé à celui dessiné sur la figure 2.

- (d) On coupe pour faire apparaître les forces internes. (figure 3) :

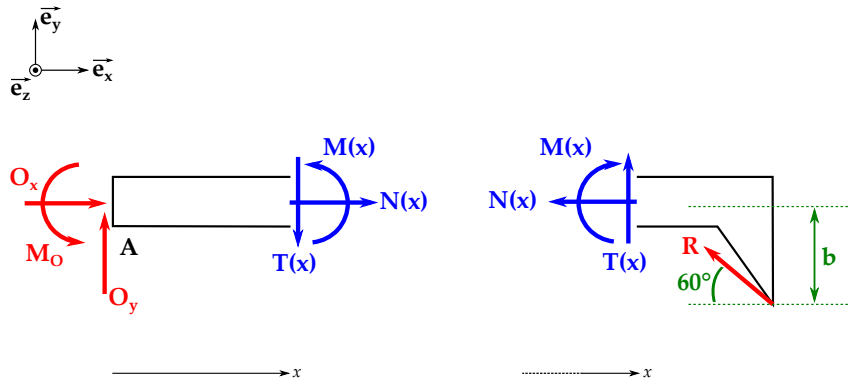


FIGURE 3 – Sous-systèmes pour la région B.

Pour la partie de droite :

$$\sum \vec{M}_x = -M(x) + \begin{pmatrix} a-x \\ -b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$M(x) = -bR \cos(60) + aR \sin(60) - xR \sin(60) \quad (25)$$

Cherchons l'angle :

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (26)$$

$$y'(x) = \frac{1}{EI} (xaR \sin(60) - \frac{1}{2}x^2 R \sin(60) - xbR \cos(60) + C_3) \quad (27)$$

$$y'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0 \quad (28)$$

$$y'(a) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2}a^2 R \sin(60) - abR \cos(60) \right) = \tan(\theta(a)) \quad (29)$$

Application numérique :

$$\theta(a) = 0.504 \quad (30)$$

$$\theta(a) = 29^\circ \quad (31)$$

**Solution 2**

(a) tout d'abord, un diagramme des forces. La figure 4 présente le diagramme des forces.

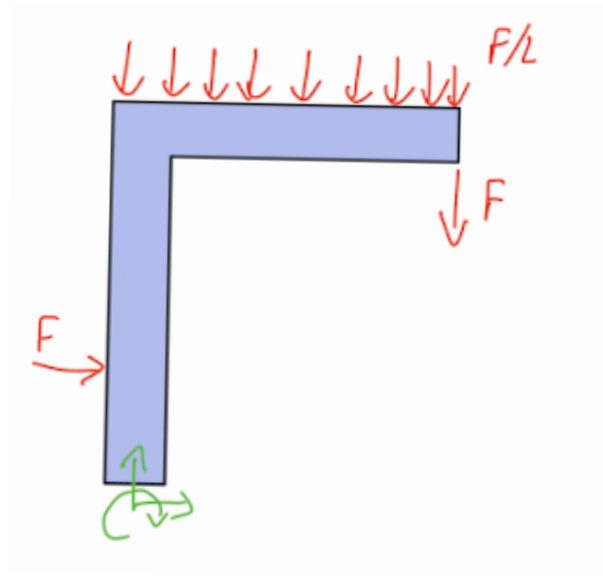


FIGURE 4 – Diagramme des forces de la grue.

(b) Puis on peut décomposer la grue en deux poutres. Attention, il y a forces et moment où on coupe entre barre verticale et barre horizontale. La figure 5 présente les 2 sous-systèmes (poutres) nécessaires à la résolution du problème.

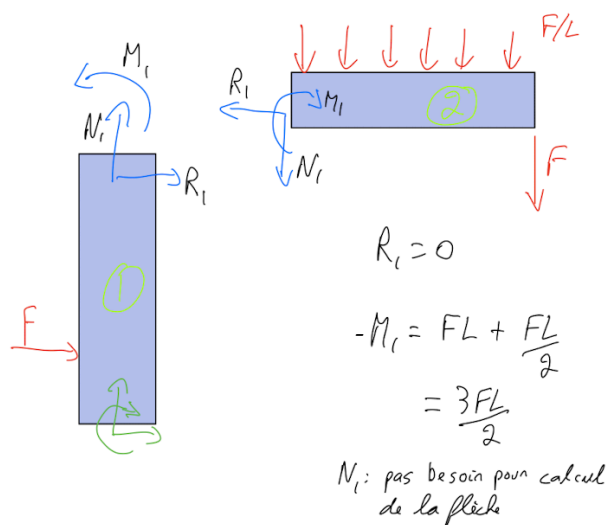


FIGURE 5 – Diagramme des forces des deux barres.

(c) Considérons la poutre  $AC$ . elle subit une force  $F$  à  $L/3$  et un moment de  $FL + FL/2 = 3FL/2$  en  $C$  du à la charge sur la poutre  $CD$ . donc il faudra sommer les déflexions et angles du à la force et au moment. La poutre  $CD$  subit une force ponctuelle à son extrémité, et une force uniforme distribuée. Il faudra donc sommer 2 solutions pour trouver la déflexion. En utilisant le formulaire de "beam deflection" sur Moodle ou Geere+Goodno on peut trouver rapidement l'expression exacte de  $\delta_{TOT}$  par superposition. La figure 6 présente les 2 poutres encastres que nous utiliseront avec le formulaire.

Pour la poutre  $AC$ , il faut sommer les déflexions et angles du à la force et au moment

$$\theta_{AC} = u'_2(2L) = \frac{25}{8} \frac{FL^2}{EI} \quad (32)$$

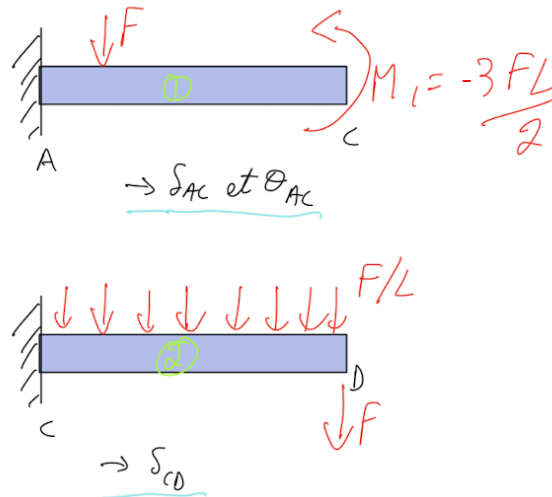


FIGURE 6 – Sous systèmes pour les formulaires

$$\delta_{AC} = u_2(2L) = \frac{155}{48} \frac{FL^3}{EI} \quad (33)$$

La Poutre  $CD$  subit une force ponctuelle et une force distribuée . il faut donc sommer deux contributions à la déflexion et l'angle de  $CD$ . Pour trouver la déflexion propre de la poutre  $CD$ , avec  $P = F$ ,  $l = L$  et  $w = F/L$  :

$$\delta_{CD} = \frac{11}{24} \frac{FL^3}{EI} \quad (34)$$

Finalement, pour la déflexion du point D (somme de la flèche de  $CD$  et de l'effet de l'inclinaison de la poutre  $AC$ ) :

$$\delta_{TOT} = v(L) = \theta_{AC}L + \delta_{CD} = \frac{43}{12} \frac{FL^3}{EI} \quad (35)$$

**Solution 3**

1. Les conditions limites nécessaires à la résolution du problème sont

$$w_1(0) = 0 \quad (36)$$

$$w_1'(0) = 0 \quad (37)$$

$$w_2(l_1) = w_1(l_1) \quad (38)$$

$$w_2'(l_1) = w_1'(l_1). \quad (39)$$

2. Pour le bloc 1 ( $0 < x < l_1$ ), l'équation de la flèche est obtenue en intégrant l'équation suivante

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{M_1(x)}{E_1 I_1} = \frac{-q_1 (l_1^2 - 2l_1 x + x^2) - q_2 (l^2 - l_1^2 - 2l x + 2l_1 x)}{2E_1 I_1} \quad (40)$$

Pour le bloc 2 ( $l_1 < x < l$ ), l'équation de la flèche est obtenue en intégrant l'équation suivante

$$\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} = \frac{M_2(x)}{E_2 I_2} = \frac{-q_2 (l^2 - 2l x + x^2)}{2E_2 I_2} \quad (41)$$

En utilisant les conditions limites trouvées ci-dessus, on trouve que la déflexion le long du système est :

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{q_1}{24E_1 I_1} (6l_1^2 x^2 - 4l_1 x^3 + x^4) - \frac{q_2}{24E_1 I_1} (6l^2 x^2 - 6l_1^2 x^2 - 4l x^3 + 4l_1 x^3) & \dots\dots\dots 0 < x < l_1 \\ -\frac{q_2}{24E_2 I_2} (6l^2 x^2 - 4l x^3 + x^4 + Ax + B) & \dots\dots\dots l_1 < x < l. \end{cases} \quad (42)$$

Avec

$$A = 4 \left( \frac{q_1}{q_2} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) l_1^3 - 12 \left( \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) l l_1^2 + 12 \left( \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) l^2 l_1 \quad (43)$$

$$B = - \left( \frac{q_1}{q_2} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 2 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 3 \right) l_1^4 + 8 \left( \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) l l_1^3 - 6 \left( \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) l^2 l_1^2. \quad (44)$$

3. Le moment d'inertie et la force de pesanteur distribuée de chaque bloc sont donnés par

$$I_{1,2} = \frac{b h_{1,2}^3}{12}, \quad q_{1,2} = (\rho_{1,2} b h_{1,2}) g \quad (45)$$

Le résultat numérique pour  $0 < l_2 < l$ , donne le graphe suivant (voir figure 7). On a représenté l'amplitude (la norme) de la déflexion. On remarque que la déflexion maximale est obtenue pour un ratio  $\lambda = l_2/l$  de 0.55, un résultat cohérent avec la pratique. En pratique, comme on travaille en résonance, il y a un facteur d'amplification additionnel et la déflexion est plutôt de l'ordre du millimètre.

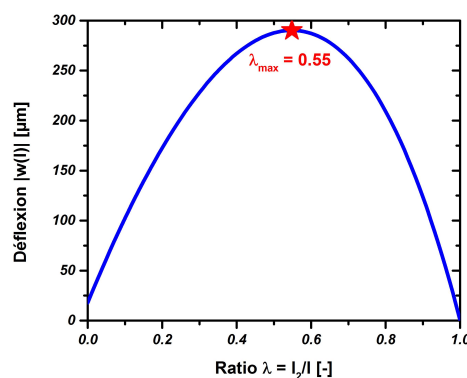


FIGURE 7 – Déflexion du bout de la poutre  $w(l)$  en fonction du ratio  $\lambda = l_2/l$ .

\*\* Il existe une autre option pour trouver  $w(x)$  si on souhaite utiliser les formulaires plutôt que d'intégrer les moments de flexions. Voir figure 8 pour un résumé de la méthode (pas une solution complète) Mais attention! la flèche de la poutre de gauche dépend des forces sur la poutre de droite. et la solution pour la poutre de gauche n'est valide que si on tient compte de la flèche et de l'angle de la flèche de l'extrémité de la poutre de gauche. On ne peut pas simplement utiliser la charge distribuée  $q_1$  et  $q_2$ , mais ils faut trouver  $M_1$  et  $R$

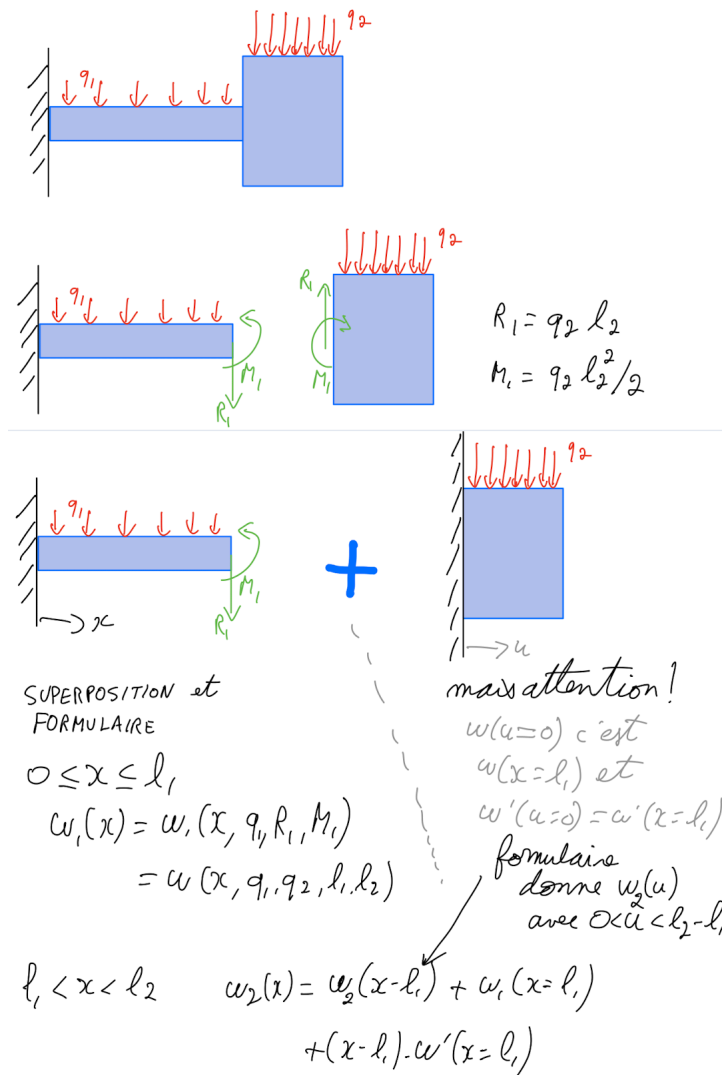


FIGURE 8 – résumé de comment faire pour utiliser les formulaires.