Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 14**

Exercice 1. Dans cet exercice on verra un critère pour qu'il existe une seule solution au sens des moindres carrés d'un système $AX = b$.

Soit $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. On considère $AX = b$ un système d'équations linéaires. Montrer que ce système possède une unique solution au sens des moindres carrés si et seulement si le rang de A est égal à m si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Solution 1. On a vu que l'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de ce système est égal à l'ensemble des solutions du système $A^TAX = A^Tb$. Ce dernier possède une solution unique si et seulement si A^TA est inversible.

On suppose d'abord que A^TA est inversible. Comme $\ker(A) \subseteq \ker(A^TA) = \{0\}$, on a $\operatorname{rang}(A) = m - \dim(\ker A) = m$. Dans ce cas les colonnes de A sont linéairement indépendantes car elles engendrent un espace de dimension m et elles sont m en nombre.

Maintenant suposons que A est de rang m. Donc $\ker(A) = \{0\}$. On montre que $\ker(A^TA) = \{0\}$:

Si $A^TAx = 0$ alors $x^TA^TAx = 0$, mais ce dernier est $(Ax)^T(Ax)$, ce qui est le produit scalaire du vecteur Ax avec lui-même. Comme c'est égal à zéro on a que $Ax = 0$ et $x \in \ker(A) = \{0\}$. Du coup, $\ker(A^TA) = \{0\}$ et comme A^TA est une matrice carrée, ça montre que A^TA est inversible.

Exercice 2. *vrai ou faux*

(a) Si une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisfait $A = A^T$ et u et v sont deux vecteurs qui vérifient $Au = 3u$ et $Av = 4v$, alors par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $u \cdot v = 0$.

(b) Toute matrice symétrique $n \times n$ admet n valeurs propres réelles distinctes.

(c) Si P est une matrice inversible telle que $P^T = P^{-1}$, D est une matrice diagonale, et enfin $B = PDP^T$, alors la matrice B est symétrique.

(d) Toute matrice orthogonale est orthogonalement diagonalisable.

(e) La dimension d'un espace propre d'une matrice symétrique est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre associée.

Solution 2. (a) Vrai. En cours vous avez vu que les vecteurs propres pour les valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique sont nécessairement orthogonaux deux-à-deux.

(b) Faux. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) vrai, on peut faire un calcul : $B^T = (PDP^T)^T = (P^T)^TD^TP^T = PDP^T = B$.

(d) Faux : il ne faux pas confondre les définitions et les énoncés du cours. Considérons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice orthogonale mais non symétrique et donc ne pourra pas être orthogonalement diagonalisable. Noter que elle n'est pas diagonalisable (même non orthogonalement) car son polynôme caractéristique est $t^2 + 1$.

(e) vrai : Nous avons deux critères pour être diagonalisable : un est que toute matrice symétrique est diagonalisable, l'autre est qu'une matrice quelconque est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est un produit de facteurs linéaires et que la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Exercice 3. *Soit A une matrice inversible $n \times n$ telle que $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormale de vecteurs propres de A. Montrer que A^{-1} est diagonalisable orthogonalement.*

Solution 3. Les conditions sur A impliquent que A est diagonalisable orthogonalement, et par un théorème du cours on a que A est symétrique. On sait aussi que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Mais comme A est symétrique, on a $A^T = A$ et on déduit que $(A^{-1})^T = A^{-1}$, et donc A^{-1} est symétrique et, par le même théorème, est diagonalisable orthogonalement.

Exercice 4. *Soient A et B deux matrices diagonalisables orthogonalement telles que $AB = BA$. Montrer que AB est également diagonalisable orthogonalement.*

Solution 4. De nouveau on fait appel au théorème du cours que dit que A et B sont symétriques. Donc $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Mais comme $AB = BA$ on a $(AB)^T = AB$ est AB est aussi symétrique et donc diagonalisable orthogonalement.

Les reste de la série consiste à une collection de problèmes choisis sur toute la matière du semestre.

Exercice 5. *On considère les vecteurs*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \ \textit{et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h+20 \\ 9 \\ 2h-7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Pour quelle valeur du nombre réel h le vecteur $\mathbf{b}$ appartient-il à $Vect\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$?

Solution 5. Pour résoudre ce problème on construit la matrice augmentée $(A|\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b})$.

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & h+20 \\ 3 & 3 & 9 \\ 8 & -10 & 2h-7 \\ 4 & 2 & 7 \end{array}\right).$$

Il s'agit d'échelonner et de réduire cette matrice, notre plus grand ennemi étant d'aller trop vite et de faire une faute de calcul ou une faute de frappe... Avant toute chose je décide d'échanger les lignes 1 et 2 et de diviser cette dernière par 3 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & h+20 \\ 8 & -10 & 2h-7 \\ 4 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{\substack{L_2-L_1, L_3-8L_1 \\ L_4-4L_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & h+17 \\ 0 & -18 & 2h-31 \\ 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow_{L_2 \leftrightarrow (-1/2)\cdot L_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -18 & 2h-31 \\ 0 & 4 & h+17 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{\substack{L_3+18L_2 \\ L_4-4L_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 2h+14 \\ 0 & 0 & h+7 \end{array}\right)$$

Puisqu'on cherche une solution au système matriciel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nous devons comprendre quand le système est compatible, c'est-à-dire, quand le système possède au moins une solution. Il faut et il suffit qu'il n'y ait pas de pivot dans la colonne des termes constants. Ceci arrive quand $h + 7 = 0$, c'est-à-dire $h = -7$.

Exercice 6. *Soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \textit{et } T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $T(\vec{e}_1)$

Solution 6. Il faut trouver une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ qui donne $\overrightarrow{e}_1$. En effet si $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e}_1$, alors $T(\overrightarrow{e}_1) = \alpha T(\overrightarrow{u}) + \beta T(\overrightarrow{v}) + \gamma T(\overrightarrow{w})$ parce que T est linéaire.

On trouve en résolvant le système vectoriel ci-dessus que $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/6$ et $\gamma = -1/3$. Par conséquent

$$T(\overrightarrow{e}_1) = 1/3 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + 1/6 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 1/3 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/6\\-1/2\end{pmatrix}$$

Exercice 7. *Calculer la factorisation LU de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -4 & 15 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & 11 & 0 \\ 8 & 6 & 9 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous. Le coefficient l_{43} de la matrice L ainsi obtenue est égal à :

- ☐ -1
- ☐ 2
- X 1
- ☐ -2

Solution 7. Pour calculer la factorisation LU on effectue soigneusement les opérations sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -4 & 15 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & 11 & 0 \\ 8 & 6 & 9 & -3 & -14 \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-L_1; L_5-4L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & 14 & -4 \\ 0 & -4 & -5 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_3-3L_2 \\ L_4-2L_2; L_5+L_2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue $L_4 - L_3$ et on continue :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim_{L_5+3L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient l_{43} de la matrice L ainsi obtenue est égal à 1 puisque c'est l'opposé du nombre de fois qu'il a fallu ajouter la 3ème ligne à la quatrième pour échelonner A.

Autre méthode consiste à prendre la colonne 3 de la troisième matrice ci-dessus, le pivot et les composantes en-dessous. D'après l'astuce présenté en cours et le supplément de cours, on sait alors que la troisième colonne de la matrice L est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-3}{-3} \\ \frac{-3}{-3} \\ \frac{0}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On déduit de nouveau que $l_{43} = 1$.

Exercice 8. *Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par*

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4x_3\\3x_1+5x_2-2x_3\\x_1+x_2+4x_3\end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$*, alors la matrice $M = (T)_{\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire telle que $M[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}}$, est*

- ☐ $M = \begin{bmatrix}4&6&6\\0&8&2\\0&3&1\end{bmatrix}$
- X $M = \begin{bmatrix}6&2&1\\0&6&2\\-2&-8&-3\end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix}6&0&-2\\2&6&-8\\1&2&-3\end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix}4&0&0\\6&8&3\\6&2&1\end{bmatrix}$

Solution 8. La matrice $M = (T)_{\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire telle que $M[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}}$, est $M = \begin{bmatrix}6&2&1\\0&6&2\\-2&-8&-3\end{bmatrix}$.

Il y a plusieurs façons de répondre à la question, mais il faut en tout cas se souvenir que les colonnes de M sont données par les images des vecteurs de base, exprimées en coordonnées par rapport à cette base.

Solution minimaliste. On calcule $T(\overrightarrow{b}_3)$, l'image du troisième vecteur de base, car c'est celui qui comporte le plus de zéros. On obtient par la formule qui nous est donnée que c'est $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$. Cette formule est donnée en coordonnées dans la base canonique, nous devons la traduire en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit nous devons savoir quelle combinaison linéaire $\alpha\overrightarrow{b}_1 + \beta\overrightarrow{b}_2 + \gamma\overrightarrow{b}_3 = T(\overrightarrow{b}_3)$:

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$$

Sans même utiliser la méthode de Gauss on voit que la dernière ligne donne $\alpha = 1$ (et donc $\beta = 2$ et finalement $\gamma = -3$). Cette seule valeur $\alpha = 1$ permet d'éliminer trois matrices, seule l'une d'entre elles a le bon coefficient $m_{13} = 1$.

Solution force brute. On résout trois systèmes d'équations comme ci-dessus pour calculer la matrice M entièrement.

Solution par changement de base. On calcule $(T)_{\mathcal{C}} = A = \begin{bmatrix}0&0&4\\3&5&-2\\1&1&4\end{bmatrix}$, où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On écrit ensuite la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ et on calcule son inverse

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $M = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{bmatrix}$.

Ici aussi on peut ne faire qu'une partie des calculs du produit matriciel final pour éliminer les solutions loufoques proposées. Par contre il est rassurant d'avoir plus d'un indicateur de la justesse de ses propres calculs !

Exercice 9. *Soit* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

X *Alors* 1 *est valeur propre de* A*, la dimension de* E_1 *vaut* 2 *et* A *est diagonalisable.*

☐ *Alors* 2 *est valeur propre de* A*, la dimension de* E_2 *vaut* 2 *et* A *est diagonalisable.*

☐ *Alors* 1 *est valeur propre de* A*, la dimension de* E_1 *vaut* 1 *et* A *n'est pas diagonalisable.*

☐ *Alors* 2 *est valeur propre de* A*, la dimension de* E_2 *vaut* 1 *et* A *n'est pas diagonalisable.*

Solution 9. ☐ Alors 1 est valeur propre, la dimension de E_1 vaut 2 et A est diagonalisable.

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de $A - tI_3$, on calcule $c_A(t)$. Pour ma part j'ai trouvé agréable de soustraire la colonne 2 à la colonne 3 afin de pouvoir mettre $(t-1)$ en évidence dans la nouvelle colonne 3, puis d'ajouter la ligne 2 à la ligne 3 pour se ramener au calcul d'un déterminant de taille 2×2. On trouve $c_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$.

On élimine ainsi la réponse 2, car forcément la dimension de E_2 vaut 1. On calcule maintenant l'espace propre E_1.

On a $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & -4 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, une matrice dont les lignes sont toutes proportionnelles. Ainsi la dimension de E_1 vaut 2 et A est diagonalisable.

Exercice 10. *Soit* W *le sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$*. Alors la projection orthogonale de* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *sur* W *est*

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solution 10. Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Alors la projection orthogonale de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sur W est $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

En effet, on cherche un vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ qui se trouve dans W et tel que la différence $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ est orthogonale à W. La première condition élimine d'emblée les réponses (A) et (B), car ces vecteurs ne sont pas combinaisons linéaires de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. La deuxième condition permet de choisir (D) car la différence

$$\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est orthogonale à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (les produits scalaires respectifs sont nuls).

Une autre manière de faire est d'appliquer Gram-Schmidt à la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pour obtenir une base orthogonale de W. De fait on constate immédiatement que $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ si bien que $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_4)$ forme une base orthogonale de W.

Les formules de la projection orthogonale s'appliquent alors et

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{e}_4\|^2}\mathbf{e}_4 = \frac{-9}{9}\mathbf{u} + \frac{1}{1}\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11. *Soient* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$*. Alors la solution* $\hat{\mathbf{x}}$ *au sens des moindres carrés de l'équation* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *est telle que*

(A) $\hat{x}_1 = 16$

(B) $\hat{x}_1 = -16$

(C) $\hat{x}_1 = -2$

(D) $\hat{x}_2 = 2$

Solution 11. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Par l'exercice 1., on note bien qu'il existe une seule solution au sens des moindres carrés, donc ça a un sens de parler de "la" solution. Alors la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est telle que $\hat{x}_2 = 2$.

On constate d'abord que le système proposé est incompatible puisque les lignes 1 et 3 de A sont les mêmes, mais les coefficients correspondants de $\mathbf{b}$ non. Pour calculer cette solution au sens des moindres carrés le mieux est de s'attaquer à sa forme normale $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$.

Or $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Il s'agit donc de résoudre le système de deux équations à deux inconnues représenté par la matrice augmentée suivante, que l'on s'empresse d'échelonner et de réduire

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ainsi $\hat{x}_1 = 1$ et $\hat{x}_2 = 2$.

Exercice 12. *Soient $\mathcal{B} = (1, 1+t, t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1+t, 1+t^2, t+t^2)$ deux bases de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ des polynômes de degré ≤ 2. Si le vecteur de coordonnées d'un polynôme p de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ est*

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors la dernière composante de $[p]_{\mathcal{C}}$ est

☐ 1
☐ $-1/2$
X $1/2$
☐ 0

Solution 12. Pour calculer $[p]_{\mathcal{C}}$, nous devons exprimer p comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Les bases sont suffisamment simples pour que cela n'en vaut peut-être pas la peine de chercher une matrice de passage. En effet les coordonnées que nous connaissons de p dans la base $\mathcal{B}$ nous disent que

$$p = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 1 \cdot (t+t^2) = 1 + t + t^2$$

Passons en coordonnées dans la base canonique pour trouver $[p]_{\mathcal{C}}$. Nous devons résoudre le système donné par la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Sans devoir résoudre le système entièrement nous pouvons nous arrêter ici (et gagner du temps !) car la dernière ligne nous donne la dernière coordonnée : $1/2$.

En fait $[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, ce que l'on aurait pu voir ici à l'oeil nu, et gagner encore plus de temps !
