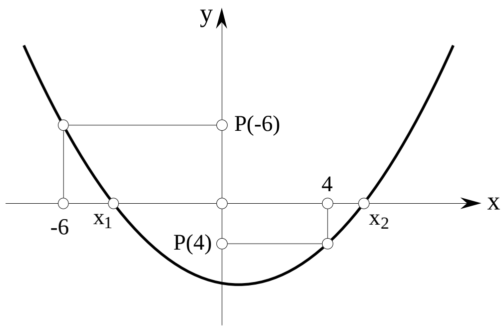
Corrigé 2

1. On considère l'équation : $(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1 = 0\,.$

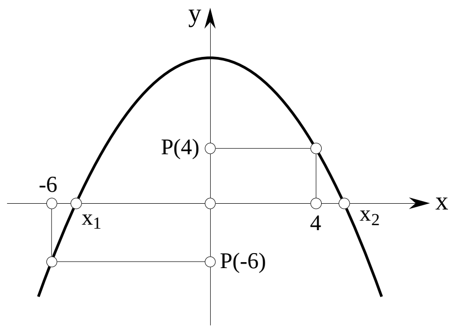
Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant la relation : $-6 < x_1 < 4 < x_2$?

Soit $P(x) = (m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1\,.$

Si $m-1 \neq 0\,,$ la courbe définie par $y = P(x)$ est une parabole d'axe vertical dont la concavité dépend du signe du coefficient de $x^2\,.$



$m-1>0$



$m-1<0$

Exploitons les conditions imposées.

a) $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 : $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \text{et} \\ \Delta > 0 \end{cases}$

b) i) -6 est en dehors de l'intervalle $[\,x_1\,,\,x_2\,]$; donc $P(-6)$ et $(m-1)$ sont de même signe.

ii) 4 est dans l'intervalle $]\,x_1\,,\,x_2\,[$; donc $P(4)$ et $(m-1)$ sont de signes contraires.

En résumé : $\begin{cases} (m-1)\cdot P(-6) > 0 & \text{i)} \\ \text{et} & \\ (m-1)\cdot P(4) < 0 & \text{ii)} \end{cases}$

a) $\Delta = 4\,(m+1)^2 - 4\,(m-1)\,(2m-1) = -4\,m\,(m-5)\,.$

$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]\,0\,,\,5\,[\,.$

D'où $S_{\text{a}} = \,]\,0\,,\,1\,[\, \cup \,]\,1\,,\,5\,[\,.$

b) i) $P(-6) = 25\,(2m-1)$.

$(m-1)\cdot P(-6) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25\,(2m-1)\,(m-1) > 0$.

$S_{\rm i} = \,]-\infty\,,\, \frac{1}{2}\,[\, \cup \,]\,1\,,\, +\infty\,[$.

ii) $P(4) = 5\,(2m-5)$.

$(m-1)\cdot P(4) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\,(2m-5)\,(m-1) < 0$.

$S_{\rm ii} = \,]\,1\,,\, \frac{5}{2}\,[$.

$S_{\rm b} = S_{\rm i} \,\cap\, S_{\rm ii} = \,]\,1\,,\, \frac{5}{2}\,[$.

$S = S_{\rm a} \,\cap\, S_{\rm b} = \,]\,1\,,\, \frac{5}{2}\,[$.

Remarque : La condition b) implique la condition a), donc $S_{\rm b} \subset S_{\rm a}$.
On aurait pu se passer de la première étape.

2. On considère le trinôme

$$P(x) \;=\; (m-1)\,x^2 - 4m\,x - 2\,(m+2)\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit une parabole vérifiant simultanément les conditions suivantes :

i) le sommet de la parabole est situé dans le demi-plan défini par $x > -5$,

ii) la parabole coupe l'axe Ox en deux points distincts, déterminant un segment ne contenant pas le point $M\,(2\,,\ 0)$.

La courbe d'équation $y = P(x)$ est une parabole si et seulement si le coefficient de x^2 est non nul : $m \neq 1$.

i) Le sommet de la parabole est situé dans le demi-plan défini par $x > -5$ signifie que $x_S > -5$ où x_S est l'abscisse du sommet S de la parabole.

$$x_S > -5 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{-4m}{2\,(m-1)} > -5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2m}{m-1} + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7m-5}{m-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in S_i = \,]-\infty\,,\, \tfrac{5}{7}\,[\, \cup \,]\,1\,,\, +\infty\,[\,.$$

ii) La parabole coupe l'axe Ox en deux points distincts, déterminant un segment ne contenant pas le point $M(2\,,\ 0)$.

a) La parabole coupe l'axe Ox en deux points distincts signifie que le trinôme $P(x)$ admet deux racines distinctes, son discriminant Δ est strictement positif.

$$\Delta = (-4m)^2 - 4\,(m-1)\,[-2\,(m+2)\,] = 8\,(m+1)\,(3m-2)\,.$$

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in S_a = \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,\tfrac{2}{3}\,,\,1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

b) L'abscisse $x_0 = 2$ est à l'extérieur de l'intervalle défini par les racines de $P(x)$. Cette condition est remplie si et seulement si le signe de $P(x_0)$ est égal au signe du coefficient de x^2 ; donc si et seulement si le produit $(m-1)\cdot P(x_0)$ est strictement positif.

$$(m-1)\cdot P(2) = (m-1)\,[\,4\,(m-1) - 8m - 2\,(m+2)] = -2\,(m-1)\,(3m+4)\,.$$

$$(m-1)\cdot P(2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in S_b = \,]-\tfrac{4}{3}\,,\,1\,[\,.$$

Ensemble solution : $S = S_i \,\cap\, S_{ii} = S_i \,\cap\, [\,S_a \,\cap\, S_b\,]\,.$

$$S = \,]-\tfrac{4}{3}\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,\tfrac{2}{3}\,,\,\tfrac{5}{7}\,[\,.$$

3. On donne le trinôme $P(x) = (m-2)\,x^2 - 4mx + 5m - 1\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$

a) Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5\,.$

b) Déterminer l'équation de la parabole définie par $y = P(x)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) la parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5\,,$

ii) $P(x)$ admet un minimum.

Calculer alors la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimum.

---

a) La courbe d'équation $y = P(x)$ est entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5$ si et seulement si

$$P(x) < -6x + 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Soit $Q(x) = P(x) - (-6x + 5) = (m-2)\,x^2 - 2\,(2m-3)\,x + 5m - 6\,.$

$Q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si et seulement si le discriminant Δ de $Q(x)$ et le coefficient de x^2 sont tous les deux strictement négatifs.

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,(2m-3)^2 - 4\,(5m-6)\,(m-2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,(m-1)\,(m-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)\,(m-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,1\,[\ \cup\ ]\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

Et $m - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,2\,[\,.$

Les deux conditions sont vérifiées si et seulement si $m \in \,]-\infty\,,\,1\,[\,.$

b) La parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5$ si et seulement si l'équation $P(x) = -6x + 5$ admet deux solutions confondues.
Le discriminant Δ de $Q(x) = P(x) - (-6x + 5)$ doit donc être nul.

Et $P(x)$ admet un minimum si et seulement si son coefficient de x^2 est strictement positif.

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 \ \text{ ou } \ m = 3 \qquad \text{et} \qquad m - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > 2\,.$$

D'où $m = 3$; et l'équation de la parabole est $y = x^2 - 12x + 14\,.$

L'abscisse du minimum est $x_{\min} = \dfrac{12}{2} = 6\,.$

4. On considère l'équation : $x^2 + (m-2)\,x - (m+3) = 0\,.$

Déterminer m pour que la somme des carrés des racines soit égale à 9.

Indication : utiliser les formules de Viète pour exprimer la somme des carrés des racines.

- Existence des racines x_1 et x_2 :

$$\Delta \ = \ (m-2)^2 + 4\,(m+3) \ = \ m^2 + 16\,, \qquad \Delta \ > \ 0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{R}\,.$$

- Expression de $x_1^2 + x_2^2$ à l'aide des formules de Viète :

$$x_1^2 + x_2^2 \ = \ (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\,x_2 \ = \ S^2 - 2\,P \quad \text{avec} \ S = x_1 + x_2 \ \text{ et } \ P = x_1\,x_2\,.$$

$$S = -(m-2) \qquad \text{et} \qquad P = -(m+3)\,.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)^2 + 2\,(m+3) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1\,.$$

La somme des carrés des racines est égale à 9 si et seulement si $m = 1$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

$$\left|\,x^2 - x\,(m+3) + m\,\right| \ = \ -x^2 - x\,.$$

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

- Condition de positivité : $-x^2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1\,;\,0\,]$.

  Sur cet intervalle, l'équation devient équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2 - x\,(m+3) + m & = & -x^2 - x \\ \text{ou} & & \\ x^2 - x\,(m+3) + m & = & x^2 + x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcll} 2\,x^2 - x\,(m+2) + m & = & 0 & (a) \\ \text{ou} & & & \\ x\,(-m-4) + m & = & 0 & (b) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation (a) : $2\,x^2 - x\,(m+2) + m \;=\; 0$.

$$\Delta = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2\,, \qquad x = \frac{m+2 \pm (m-2)}{4} = \left\{\begin{array}{l} m/2 \\ \text{ou} \\ 1 \end{array}\right.$$

  $x = 1$ ne vérifie pas la condition de positivité, et $x = \frac{m}{2}$ vérifie cette condition si et seulement si $m \in [-2\,,\;0\,]$.

- Résolution de l'équation (b) : $x\,(-m-4) + m \;=\; 0$.

  ◦ Si $m = -4$, alors $S_b = \emptyset$.

  ◦ Si $m \neq -4$, alors $x = \dfrac{m}{m+4}$.

  $x = \dfrac{m}{m+4}$ doit vérifier la condition de positivité.

$$-1 \;\leq\; \frac{m}{m+4} \;\leq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{m}{m+4} \;\leq\; 0 \\ \text{et} \\ \frac{m}{m+4} \;\geq\; -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{m}{m+4} \;\leq\; 0 \\ \text{et} \\ \frac{2m+4}{m+4} \;\geq\; 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} m \in \,]-4\,,\;0\,] \\ \text{et} \\ m \in \,]-\infty\,,\;-4\,[\,\cup\,[-2\,,\;+\infty\,[\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad m \in [-2\,,\;0\,]\,.$$

- En résumé cette équation n'admet des solutions que si $m \in [-2\,,\;0\,]$.

  Et ces solutions s'écrivent $x_1 = \frac{m}{2}$ et $x_2 = \frac{m}{m+4}$.

  Or ces deux valeurs coïncident en $m = -2$ et $m = 0$.

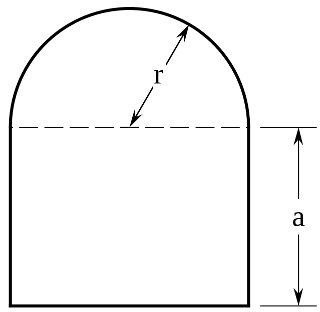
  D'où la synthèse finale :

  ◦ si $m \in \,]-\infty\,,\;-2\,[\,\cup\,]\,0\,,\;+\infty\,[$ alors $S = \emptyset$,

  ◦ si $m \in \{-2\,,\;0\}$ alors $S = \{\frac{m}{2}\}$,

  ◦ si $m \in \,]-2\,,\;0\,[$ alors $S = \{\frac{m}{2}\,,\;\frac{m}{m+4}\}$.

6. Un domaine $\mathcal{D}$, formé d'une surface rectangulaire de hauteur a surmonté d'un demi-disque de rayon r (a et r variables), a pour périmètre une valeur donnée L.



a) Représenter graphiquement la variation de l'aire A du domaine $\mathcal{D}$ en fonction du rayon r.

b) Calculer l'aire maximale de $\mathcal{D}$.
Quelle est alors la relation entre a et r ?

---

a) Conditions géométriques du problème : $a > 0$ et $r > 0$.

Calcul de l'aire A du domaine $\mathcal{D}$:

$$A = a \cdot 2r + \frac{\pi}{2} r^2 .$$

Le périmètre L étant fixé, les variables a et r sont liées par l'équation :

$$L = 2\,a + 2\,r + \pi\, r .$$

Le rayon r étant la variable du problème, on exprime a en fonction de r :

$$L = 2\,a + (\pi + 2)\,r \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{L - (\pi+2)\,r}{2} .$$

Les conditions géométriques définissent l'intervalle de variation de r :

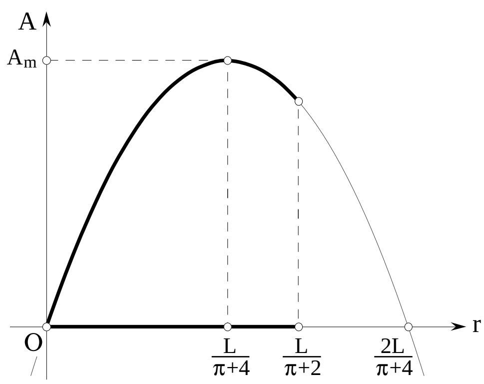
$$r > 0 \quad \text{et} \quad \frac{L - (\pi+2)\,r}{2} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < r < \frac{L}{\pi+2} .$$

Expression de l'aire A en fonction de r :

$$A(r) = \frac{L - (\pi+2)\,r}{2} \cdot 2r + \frac{\pi}{2} r^2 = -\frac{\pi+4}{2}\, r^2 + L\, r .$$

La variation de A en fonction de r est donc définie par :

$$\begin{cases} A(r) = -\frac{\pi+4}{2}\, r^2 + L\, r \\ 0 < r < \frac{L}{\pi+2} \end{cases}$$



Sa représentation graphique est un arc de parabole dont la concavité est tournée dans le sens des A négatifs.

Les deux racines de $A(r) = r\,(-\frac{\pi+4}{2}\, r + L)$ sont $r_1 = 0$ et $r_2 = \frac{2L}{\pi+4}$.

b) L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est maximale lorsque $r = \frac{L}{\pi+4} \in \,]0\,,\, \frac{L}{\pi+2}[$, et

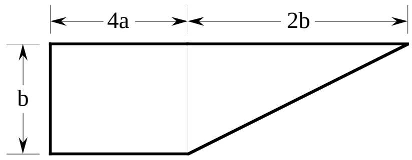
$$A_m \;=\; A\left(\tfrac{L}{\pi+4}\right) \;=\; -\frac{\pi+4}{2}\left(\frac{L}{\pi+4}\right)^2 + L\left(\frac{L}{\pi+4}\right) \;=\; \frac{L^2}{2\,(\pi+4)}\,.$$

Calculons encore la hauteur a correspondant à $r = \frac{L}{\pi+4}$.

$$a \;=\; \frac{L}{2} - \frac{\pi+2}{2}\,\frac{L}{\pi+4} \;=\; \frac{L}{\pi+4} \;=\; r\,.$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donc maximale lorsque $a = r$.

7. On considère un domaine D du plan formé d'un rectangle et d'un triangle rectangle dont les dimensions sont données par les variables a et b vérifiant les deux conditions suivantes :



$a+b=k$ où k est une constante strictement positive, et $4a \geq b$.

a) Déterminer k pour que l'aire maximale de D soit égale à 48 unités d'aire.

b) On pose $k = 15$.

i) Représenter graphiquement la variation de l'aire A du domaine en fonction de la variable choisie (a ou b). Axe des abscisses : 1 unité = 1 carré, axe des ordonnées : 30 unités = 1 carré.

ii) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable (a ou b) pour que l'aire A du domaine vérifie la relation $|A - 261| \leq 36$.

On choisit a comme variable du problème

a)
- Conditions géométriques : $4a \geq b > 0$.
- Aire du domaine D : $A = 4ab + b^2$.
- Choix de la variable : a, d'où : $b = k - a$.

  Domaine de variation de a :

  $$4a \geq b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a \geq k - a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in I = [\,\tfrac{k}{5}\,,\; k\,[\,.$$

- Expression de l'aire A en fonction de la variable a :

  $$A\,(a) = 4\,a\,(k-a) + (k-a)^2 = (k-a)\,[\,4\,a + (k-a)\,] = (k-a)\,(k+3\,a)\,.$$

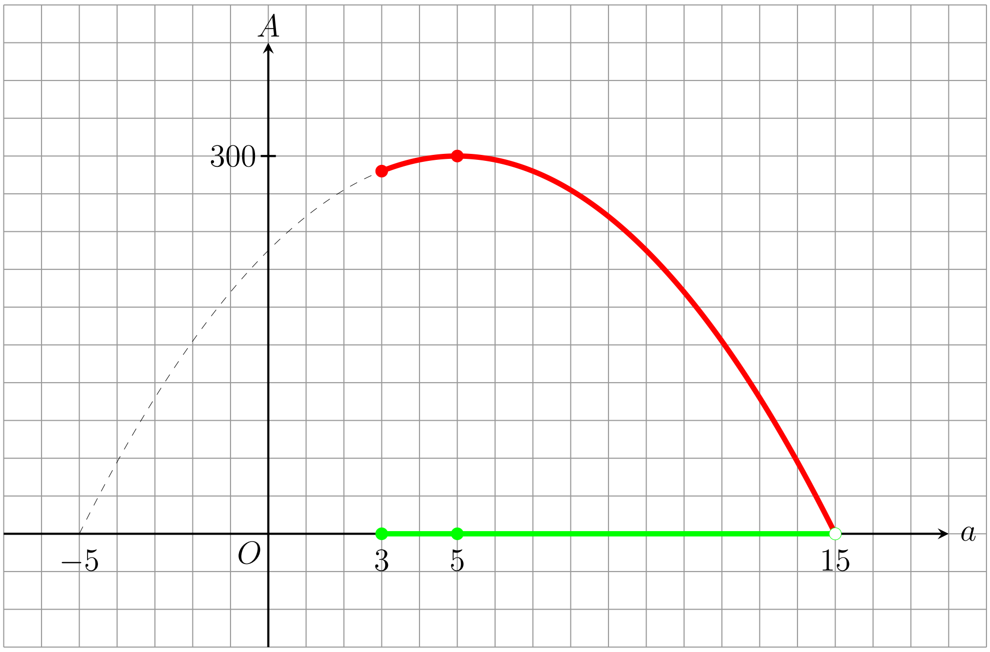
- Aire maximum du domaine D :

  $$a_{\max} = \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{3} + k\right) = \frac{k}{3} \in I\,. \qquad A_{\max} = A(a_{\max}) = A(\tfrac{k}{3}) = \frac{4k^2}{3}\,.$$

  $$A_{\max} = 48 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4k^2}{3} = 48 \quad \Leftrightarrow \quad k = 6\,, \quad (k > 0)\,.$$

b) On pose $k = 15$, donc $I = [\,3\,,\,15\,[\,$, $a_{\max} = 5$ et $A_{\max} = 300\,$.

i) Représentation graphique de la variation de l'aire A du domaine en fonction de la variable a :



ii) $$|A - 261| \leq 36 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A - 261 \leq 36 \\ \text{et} \\ A - 261 \geq -36 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \leq 297 & (i) \\ \text{et} \\ A \geq 225 & (ii) \end{cases}$$

- Résolution de l'inéquation (i) :

$$A \leq 297 \quad \Leftrightarrow \quad (15 - a)\,(15 + 3\,a) \leq 297 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 10\,a + 24 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - 4)\,(a - 6) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in S_i = \,]-\infty\,,\,4\,] \,\cup\, [\,6\,,\,+\infty\,[\,.$$

- Résolution de l'inéquation (ii) :

$$A \geq 225 \quad \Leftrightarrow \quad (15 - a)\,(15 + 3\,a) \geq 225 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 10\,a \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\,(a - 10) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in S_{ii} = [\,0\,,\,10\,]\,.$$

- L'ensemble solution S est l'ensemble des valeurs de a appartenant à I, S_i et S_{ii} :

$$S = I \,\cap\, S_i \,\cap\, S_{ii} = [\,3\,,\,4\,] \,\cup\, [\,6\,,\,10\,]\,.$$

On choisit b comme variable du problème

a) • Conditions géométriques : $4a \geq b > 0\,$.

- Aire du domaine D : $A = 4ab + b^2$.
- Choix de la variable : b , d'où : $a = k - b$.

  Domaine de variation de b :

$$4a \geq b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,(k-b) \geq b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \in I = \left]\,0\,,\, \tfrac{4k}{5}\,\right] .$$

- Expression de l'aire A en fonction de la variable b :

$$A\,(b) = 4\,(k-b)\,b + b^2 = -3b^2 + 4kb = -3b\,(b - \tfrac{4k}{3})\,.$$

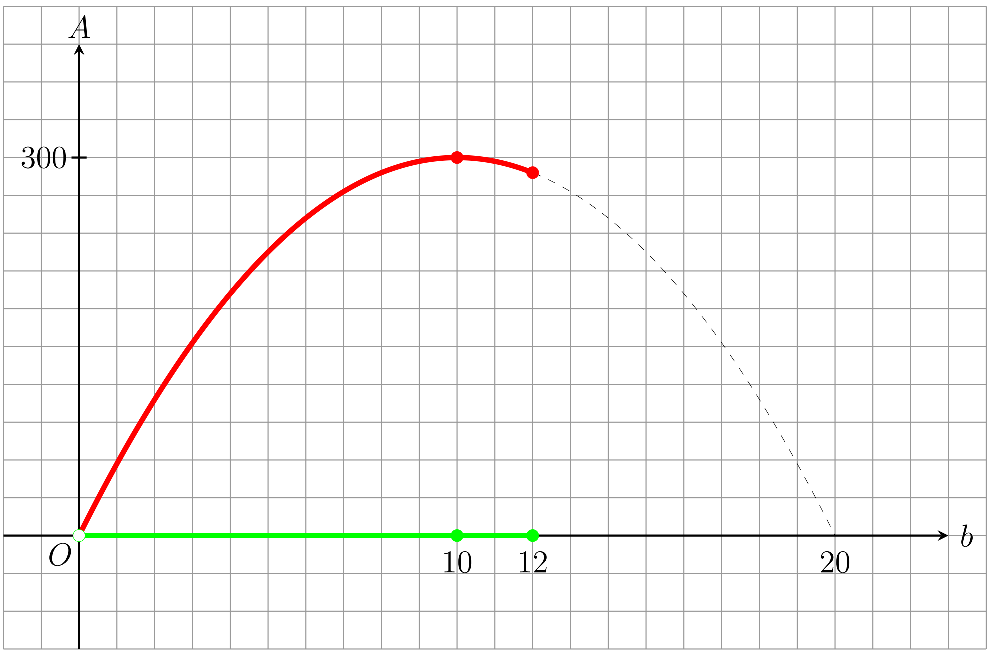
- Aire maximum du domaine D :

$$b_{\max} = \frac{2k}{3} \in I\,. \qquad A_{\max} = A\,(b_{\max}) = A\,(\tfrac{2k}{3}) = \frac{4k^2}{3}\,.$$

$$A_{\max} = 48 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{4k^2}{3} = 48 \quad \Leftrightarrow \quad k = 6\,, \quad (k > 0)\,.$$

b) On pose $k = 15$, donc $I = \left]\,0\,,\,12\,\right]$, $b_{\max} = 10$ et $A_{\max} = 300$.

i) Représentation graphique de la variation de l'aire A du domaine en fonction de la variable b :



ii) $$|A - 261| \leq 36 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} A - 261 \leq 36 \\ \text{et} \\ A - 261 \geq -36 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} A \leq 297 & (i) \\ \text{et} & \\ A \geq 225 & (ii) \end{array} \right.$$

- Résolution de l'inéquation (i) :

$$A \leq 297 \quad \Leftrightarrow \quad -3b^2 + 60\,b \leq 297 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 20\,b + 99 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-9)\,(b-11) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \in S_i = \left]-\infty\,,\,9\right] \,\cup\, \left[11\,,\,+\infty\right[.$$

- Résolution de l'inéquation (ii) :

$$A \geq 225 \quad \Leftrightarrow \quad -3b^2 + 60\,b \geq 225 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 20\,b + 75 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-5)\,(b-15) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \in S_{ii} = [\,5\,,\,15\,]\,.$$

- L'ensemble solution S est l'ensemble des valeurs de b appartenant à I, S_i et S_{ii} :

$$S = I \,\cap\, S_i \,\cap\, S_{ii} = [\,5\,,\,9\,] \,\cup\, [\,11\,,\,12\,]\,.$$