Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 5

Applications : exercice 12

Rappels :

- f est une application de E vers F si et seulement si, à tout élément x de E, f fait correspondre un unique élément $f(x) = y$ de F.
- Composition des applications f et g ,

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x' = f(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x' = g(x)\,. \end{array}$$

Si $\operatorname{Im} f \subset F$, la composée "g rond f" est définie par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x' = \big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)\,. \end{array}$$

On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} [-2;\,2] & \longrightarrow & A = [-2;\,a] \\ x & \longmapsto & -|x| \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} A = [-2;\,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$$

- f est une application : $\forall x \in [-2;\,2]\,,\ f(x) = -|x| \in A$
  Il est évident que $\operatorname{Im} f = [-2;\,0] \;\Rightarrow\; A = [-2;\,a]\,,\ a \in \mathbb{R}_+$
- g est une application : $\forall x \in A \;:\; x + 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \in [-2;\,+\infty\,[\;=\; B$
  Or : $A \subset B$ donc $A = [-2;\,a]\,,\ a \in \mathbb{R}_+$ convient.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-|x|) = \sqrt{-|x| + 2}$

  Ainsi : $$f : \begin{array}{ccc} [-2;\,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = \sqrt{-|x| + 2} \end{array}$$

Applications : exercice 13

(a)
- Il faut d'abord déterminer l'ensemble E :
  $E = A \cup B$ avec
  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0\} = [-2;\,0\,[$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\} =]-1;\,2[$

  d'où : $E = [-2;\,2\,[$

- $g \circ f$: $[-2;\,2\,[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x; -x^2 + x) = g(x';\,y')$

  Or : $g(x';\,y') = (-x';\,|y'|\,) = (-x;\,|-x^2 + x|\,)$

  Ainsi : $$g \circ f : \begin{array}{ccc} [-2;\,2[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = (-x;\,|-x^2 + x|\,) = (u;\,v) \end{array}$$

(b) Il faut chercher une propriété sur l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$ caractérisant $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$: quelle(s) condition(s) doit satisfaire $(u;v)$ pour appartenir à $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$?

Par définition

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(g \circ f) &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \exists\, x \in [-2;2[,\ (u;v) = (g \circ f)(x)\} \\
&= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \exists\, x \in [-2;2[,\ u = -x\,,\ v = |-x^2 + x|\} \\
&= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ P(x,u,v)\ \} \ \subset \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$, on cherche une propriété R équivalente à $P(x,u,v)$. Cette propriété doit dépendre uniquement de u et v et doit assurer l'existence de l'antécédent $(\ \exists\, x \in [-2;2[\ )$.

$$R(u,v) \quad \Leftrightarrow \quad P(x,u,v) \quad \Leftrightarrow \quad (u,v) \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$$

$$P(x,u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x\,,\ -2 \leq x < 2 \\ u = -x \in \mathbb{R} \\ v = |-x^2 + x| \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x\,,\ -2 \leq x < 2 \\ x = -u \\ -2 < u \leq 2 \\ v = |-u^2 - u| \end{array} \right.$$

Pour tout $u \in]-2;2]$, x existe et se trouve dans l'intervalle [-2 ; 2[.

D'où :

$$P(x,y,u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 < u \leq 2 \\ v = |-u^2 - u| \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad R(u,v)$$

Or : $\quad |-u^2 - u| = |-1| \cdot |u^2 + u| = |u^2 + u| = |u\,(u+1)|$

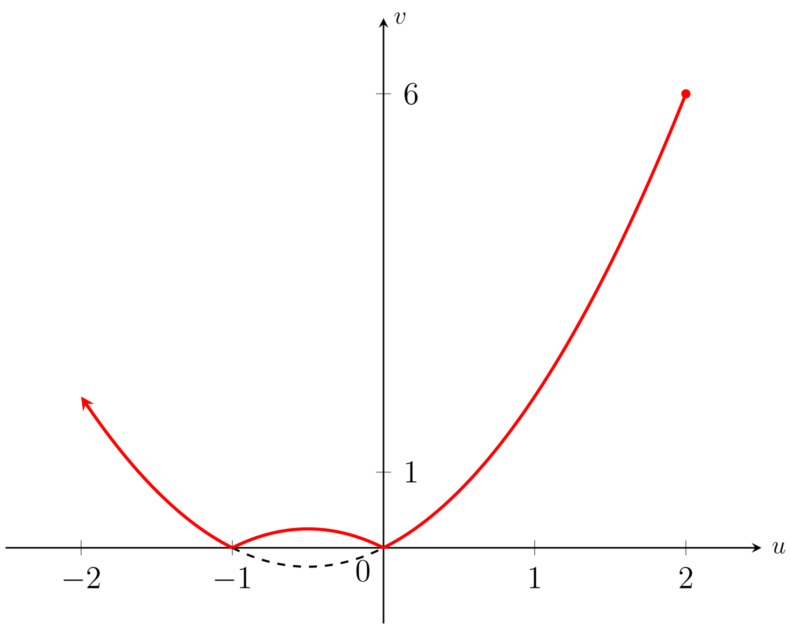
Finalement :

$\mathrm{Im}\,(g \circ f) \ = \ \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < u \leq 2\,,\ v = |u\,(u+1)|\,\right\} \ \subset \ \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$.

Les axes sont donc notés Ou et Ov.

Représentation graphique de Im $(g \circ f)$



Applications : exercice 14

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (x^2+1;\, x^4-1) \end{array}$$

(a) On détermine l'ensemble A en utilisant les conditions de positivité :
$x' = x^2 + 1 \quad \in \quad \mathbb{R}_+$: vrai $\forall x \in \mathbb{R}$

$y' = x^4 - 1 \quad \in \quad \mathbb{R}_+$
$\quad = (x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0$

donc :

$$A =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

(b) Par définition
$\operatorname{Im} f = \{(x', y') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad | \; \exists x \in A,\, (x', y') = f(x)\}$

Soit $P(x, x', y')$ la propriété : $\quad \exists x \in A,\ f(x) = (x', y')$

Pour déterminer $\operatorname{Im} f$, on cherche une propriété $R(x', y')$ équivalente à $P(x, x', y')$:

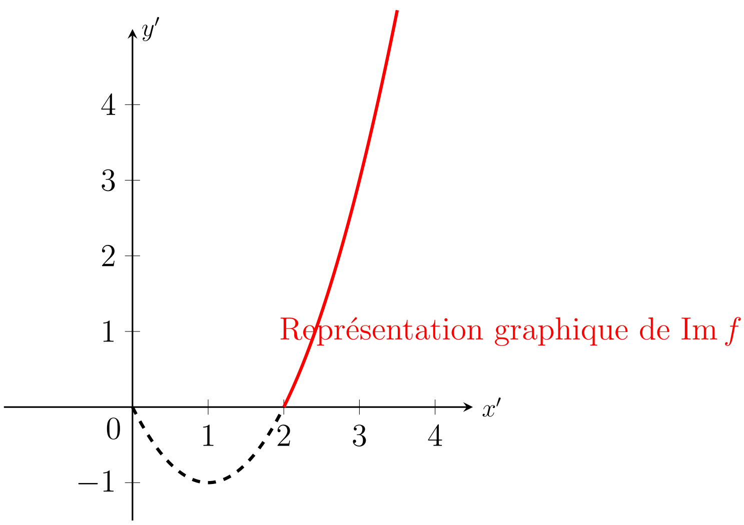
$P(x, x', y') \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \\ x' = x^2 + 1 \geq 0 \\ y' = x^4 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \,(\text{ ou } |x| \geq 1) \\ x' = x^2 + 1 \geq 2 \\ y' = x^4 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x' - 1 \geq 1 \\ x^4 = y' + 1 \geq 1 \\ x' \geq 2 \\ y' \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \geq 2 \\ y' \geq 0 \\ y' + 1 = (x'-1)^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad R(x', y')$$

Ainsi :

$\operatorname{Im} f = \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \mid P(x, x', y')\} \quad = \quad \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \mid R(x', y')\} \quad =$
$\quad = \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \mid x' \geq 2 \text{ et } y' = x'(x'-2) \geq 0\}$



(c) Soit :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;\, y) & \longmapsto & \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$$

$g \circ f \;:\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1; x^4-1) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ \\ 2 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$$

D'où :

$(g \circ f)^{-1}(\{2\}) = \{x \in A \mid \; g \circ f(x) = 2\}$

On aura donc deux groupes de solutions : $x = \pm 1$

ou $\quad$ pour $x \neq \pm 1 \quad : \quad \dfrac{1}{x^2-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \in A$

Finalement :

$$(g \circ f)^{-1}(\{2\}) = \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}, -1, +1, +\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$$

Applications : exercice 15

Rappel :
Si f est une application de E vers F, par définition l'ensemble image de f est

$$\mathrm{Im}\, f = \big\{ y \in F \mid \exists x \in E\,,\; y = f(x) \big\}$$

(a) Soit $\quad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x+2;\; x^2+6x) \end{array}$

$\mathrm{Im}\, f = \big\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}\,,\; x' = x + 2\,, y' = x^2 + 6x \;\big\} =$
$= \{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,\, x',\, y')\, \}$

On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de x' et y' et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R})$ de l'antécédent de (x', y').

$$P(x,\, x',\, y') \iff R(x', y') \iff (x', y') \in \mathrm{Im}\, f$$

$$P(x,\, x',\, y') \quad \iff \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ x' = x + 2 \\ y' = x^2 + 6x \\ x',\, y' \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} \\ x = x' - 2 \\ y' = (x'-2)^2 + 6(x'-2) \\ x',\, y' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour tout $x' \in \mathbb{R}\,,\;$ x existe et $x \in \mathbb{R}\,.$

$$P(x,\, x',\, y') \quad \iff \quad \begin{cases} x' \in \mathbb{R} \\ y' = x'^2 + 2x' - 8 \end{cases} \quad \iff \quad R(x', y')$$

D'où :

$$\mathrm{Im}\, f = \{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid R(x', y')\; \} \quad = \quad \{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = x'^2 + 2x' - 8\, \}$$

(b) Soit $\quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+5x+6 \end{array}$

$\operatorname{Im} g \;=\; \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\,,\; y = x^2+5x+6\} \;=\; \{y \in \mathbb{R} \mid P(x,\,y)\,\}$

On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\,y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} g$$

$$P(x,\,y) \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y = x^2+5x+6 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ x^2+5x+6-y=0 \end{array}\right.$$

On considère l'équation du deuxième degré en x où y est un paramètre. Elle admet des solutions (existence de x) si et seulement si son discriminant Δ est positif ou nul.

$$P(x,\,y) \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ \Delta = 5^2-4(6-y) \geq 0 \end{array}\right. \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \\ \Delta = 1+4y \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\iff\quad \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \\ y \geq -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad\iff\quad R(y)$$

D'où :

$$\operatorname{Im} g \;=\; \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{4}\;\right\} \;=\; [-\frac{1}{4};\, +\infty\,[$$

(c) Soit $\quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x-1} \end{array}$

$\operatorname{Im} h = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}-\{1\}\,,\; y = \dfrac{x^2}{x-1}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x,\,y)\,\}$

On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R}-\{1\})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\,y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} h$$

$$P(x,\,y) \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}-\{1\} \\ y = \dfrac{x^2}{x-1} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}-\{1\} \\ x^2-yx+y=0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

On considère l'équation du deuxième degré en x où y est un paramètre. Elle a une sens si et seulement si $x \neq 1$ (si $x=1$, on obtient $1=0$).
Cette équation admet des solutions (existence de x) si et seulement si son discriminant Δ est positif ou nul.

Donc x existe et $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ si et seulement si $y \in \mathbb{R}$ et $\Delta \geq 0$.

$$P(x,\,y) \quad\iff\quad \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \\ \Delta = y^2-4y \geq 0 \end{array}\right. \quad\iff\quad y \in \,]-\infty;\, 0] \,\cup\, [4;\, +\infty\,[\quad\iff$$
$R(y)$

D'où :

$$\operatorname{Im} h \;=\; \{y \in \mathbb{R} \mid R(y)\ \} \;=]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$$

(d) • Soit $\quad j: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-1; 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \end{array}$

$\operatorname{Im} j = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\,,\ y = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid P(x,\, y)\}$

On détermine une propriété R équivalente à P, dépendant uniquement de y et qui assure l'existence $(\exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\})$ de l'antécédent de y.

$$P(x,\, y) \iff R(y) \iff y \in \operatorname{Im} j$$

$P(x,\, y) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ y = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ x^2(y-2) = y+1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ y \in \mathbb{R} - \{2\} \\ x^2 = \dfrac{y+1}{y-2} \end{cases}$

On remarque que cette dernière équation n'a pas de sens si $x = \pm 1$ (on obtient $-2 = 1$). Donc x existe et $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ si et seulement si $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ et $\dfrac{y+1}{y-2} \geq 0$.

$P(x,\, y) \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{2\} \\ x^2 = \dfrac{y+1}{y-2} \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{2\} \\ y \in]-\infty\,;\,-1] \cup]2\,;\,+\infty[\end{cases} \iff$
$R(y)$

D'où :

$$\operatorname{Im} j = \{y \in \mathbb{R} - \{2\} \mid R(y)\ \} \quad = \quad]-\infty\,;\,-1] \cup]2\,;\,+\infty[$$

• Il est aussi possible de déterminer une propriété qui fait intervenir une équation du deuxième degré dont le discriminant Δ dépend de y.

$P(x,\, y) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ y = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ (y-2)x^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$

On considère l'équation du deuxième degré en x où y est un paramètre. Elle a un sens si et seulement si $y \neq 2$ (si $y = 2$ on obtient $-3 = 0$).
Ce qui signifie que $y = 2$ n'a pas d'antécédent : $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\,,\ j(x) \neq 2$.
Autrement dit : $2 \notin \operatorname{Im} j$.
Donc x existe et $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ si et seulement si $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ et $\Delta \geq 0$.

$P(x,\, y) \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{2\} \\ \Delta = -4(y-2)(y+1) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} - \{2\} \\ y \in]-\infty\,;\,-1] \ \cup\ [2\,;\,+\infty[\end{cases}$

D'où :

$$\operatorname{Im} j = \quad]-\infty\,;\,-1] \cup]2\,;\,+\infty[$$

Applications : exercice 16

Soit l'application :

$$\begin{array}{rrcl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto (x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$$

(a) Par définition,

$$\operatorname{Im} f = \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, (x',y') = (x^2+y^2, x^2-y^2)\right\}\ .$$

On cherche une propriété sur $\mathbb{R}^2$ caractérisant $\operatorname{Im} f$: à quelle condition doit satisfaire (x',y') pour appartenir à $\operatorname{Im} f$?

Par construction de (x',y') :

$$x' = x^2+y^2 \qquad y' = x^2-y^2\,.$$

En additionnant et soustrayant ces deux équations, nous avons

$$x'+y' = 2x^2 \qquad x'-y' = 2y^2\,.$$

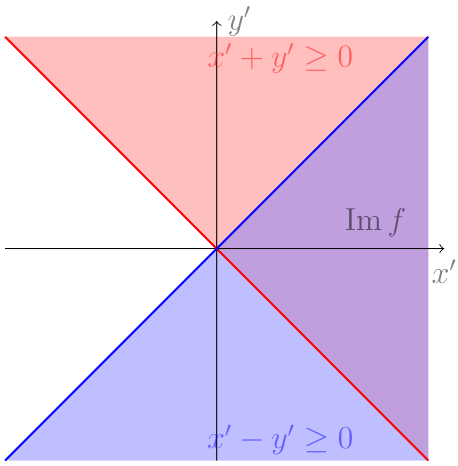
Les seules conditions sur x et y sont d'être réels. De manière équivalente, leurs carrés sont positifs :

$$x'+y' \geq 0 \qquad x'-y' \geq 0\,.$$

Alors

$$\operatorname{Im} f = \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \,|\, x'+y' \geq 0, x'-y' \geq 0\right\}\ .$$

$\operatorname{Im} f$ est sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$. Les axes sont donc notés Ox' et Oy'.



(b) Par définition,

$$\begin{aligned} f^{-1}(K) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) \in K\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y' = -\tfrac{1}{2}x' \text{ où } (x',y') = f(x,y)\right\}\ . \end{aligned}$$

On cherche les conditions sur le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il appartienne à $f^{-1}(K)$.

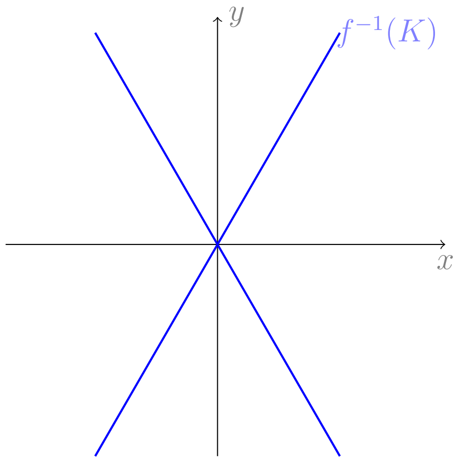
Notons $(x',y')=f(x,y)$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y)\in f^{-1}(K) &\iff y'=-\tfrac{1}{2}x'\\ &\iff x^2-y^2=-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\\ &\iff 3x^2-y^2=0\\ &\iff (\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y)=0\\ &\iff \sqrt{3}x-y=0 \text{ ou } \sqrt{3}x+y=0\end{aligned}$$

et donc

$$f^{-1}(K)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{3}x-y=0 \text{ ou } \sqrt{3}x+y=0\right\}.$$

L'ensemble $f^{-1}(K)\subset\mathbb{R}^2$ est formé de deux droites.



(c) Il faut d'abord déterminer $f(\{(3,1)\})$.

$$\begin{aligned}f(\{(3,1)\}) &= \left\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \,|\, \exists\,(x,y)\in\{(3,1)\},\ (x',y')=(x^2+y^2,x^2-y^2)\right\}\\ &= \left\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \,|\, (x',y')=(3^2+1^2,3^2-1^2)=(10,8)\right\}\\ &= \{(10,8)\}.\end{aligned}$$

On détermine $f^{-1}(f(\{(3,1)\}))$ en appliquant la définition

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(\{(3,1)\})) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y)\in f(\{(3,1)\})\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y)=(10,8)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=10, x^2-y^2=8\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2=18, 2y^2=2\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=\pm 3, y=\pm 1\right\}\\ &= \{(-3,-1),(-3,1),(3,-1),(3,3)\}.\end{aligned}$$

Remarque : la notation doit être rigoureusement correcte !

Applications : exercice 18

Par définition, une application f de E vers F est injective si et seulement si

$$\forall x,y\in E,\quad x\neq y \quad\Rightarrow\quad f(x)\neq f(y)$$

Pour montrer que f est injective, on utilise l'énoncé contraposé équivalent :

$$\forall x,y\in E,\quad f(x)=f(y) \quad\Rightarrow\quad x=y$$

(a) Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}-\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{x-3} \end{array}$

L'application f est injective si et seulement si

$$\forall x\,, y \in \mathbb{R}-\{3\}, \quad f(x)=f(y) \quad \Rightarrow \quad x=y$$

Et dans ce cas :

$$f(x)=f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$$

Soient x, $y \in \mathbb{R}-\{3\}$:

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3} \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)\,(y-3)=(x-3)\,(y-2) \\ &\Leftrightarrow \quad xy_2y-3x+6=xy-2x-3y+6 \\ &\Leftrightarrow \quad x=y \end{aligned}$$

Donc f est injective.

(b) Soit $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_{-}-\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{array}$

L'application g est injective si et seulement si

$$\forall x\,, y \in \mathbb{R}_{-}-\{-1\}, \quad g(x)=g(y) \quad \Rightarrow \quad x=y$$

Et dans ce cas :

$$g(x)=g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{y^2}{y^2-1}$$

Soient x, $y \in \mathbb{R}_{-}-\{-1\}$:

$$\begin{aligned} g(x)=g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{y^2}{y^2-1} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2\,(y^2-1)=y^2\,(x^2-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2y^2-x^2=x^2y^2-y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-y^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)\,(x+y)=0 \end{aligned}$$

La seule solution est $x=y$ ($x=-y$ est impossible car x et y sont de même signe par hypothèse).
Donc g est injective.

(c) Soit $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}_{+}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x;\,y) & \longmapsto & (x^2+y^2;\,x^2-y^2) \end{array}$

L'application h est injective si et seulement si

$$\forall (x,y)\,,(x',y') \in \mathbb{R}_{+}^2, \quad h(x,y)=h(x',y') \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(x',y')$$

Et dans ce cas :

$$h(x,y) = h(x',y') \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2;\, x^2-y^2) \;=\; (x'^2+y'^2;\, x'^2-y'^2)$$

Soient $(x,y)\,,(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\begin{aligned}
h(x,y) = h(x',y') \quad & \Leftrightarrow \; (x^2+y^2;\, x^2-y^2) \;=\; (x'^2+y'^2;\, x'^2-y'^2) \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcll} x^2+y^2 & = & x'^2+y'^2 & (1) \\ x^2-y^2 & = & x'^2-y'^2 & (2) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcll} x^2 & = & x'^2 & (1)+(2) \\ y^2 & = & y'^2 & (1)-(2) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcl} (x-x')\,(x+x') & = & 0 \\ (y-y')\,(y+y') & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcll} x & = & x' & \text{car } x \text{ et } x' \text{ sont de même signe par hypothèse,} \\ y & = & y' & \text{de même pour } y \text{ et } y' \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \; (x;y) = (x';y')
\end{aligned}$$

Ainsi h est injective.

(d) Soit $\quad j: \begin{array}{ccl}]-\infty;\,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x^2+1;\, x^2+4x) \end{array}$

L'application j est injective si et seulement si

$$\forall x\,,y \in]-\infty;\,-1], \quad j(x)=j(y) \quad \Rightarrow \quad x=y$$

Et dans ce cas :

$$j(x)=j(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1;\, x^2+4x) = (y^2+1;\, y^2+4y)$$

Soient $x,y \in]-\infty;\,-1]$:

$$\begin{aligned}
j(x)=j(y) \quad & \Leftrightarrow \; (x^2+1;\, x^2+4x) = (y^2+1;\, y^2+4y) \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcl} x^2+1 & = & y^2+1 \\ x^2+4x & = & y^2+4y \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{lcll} (x-y)(x+y) & = & 0 & (1) \\ x^2-y^2+4(x-y) & = & 0 & (2) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

(1) a pour seule solution $x=y$ $\;(x=-y$ est impossible car x et y sont de même signe par hypothèse) ;

(2) est vérifié pour $x=y$, ainsi j est injective.

(e) Soit $\quad k: \begin{array}{ccl} [1;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

L'application k est injective si et seulement si

$$\forall x\,,y \in [1;\,+\infty\,[, \quad k(x)=k(y) \quad \Rightarrow \quad x=y$$

Et dans ce cas :

$$k(x) = k(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} \quad = \quad \frac{2y}{y^2+1}$$

Soient $x,\, y \in [1;\, +\infty\,[$:

$$\begin{aligned} k(x) = k(y) \qquad & \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} \quad = \quad \frac{2y}{y^2+1} \\ & \Leftrightarrow \quad x\,(y^2+1) = y\,(x^2+1) \\ & \Leftrightarrow \quad xy^2 - yx^2 + x - y = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad xy\,(y-x) - (y-x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (y-x)\,(xy-1) = 0 \end{aligned}$$

$y = \dfrac{1}{x}$ est impossible car $x,\, y \geq 1$ par hypothèse. La seule solution est $x = y$.

Ainsi k est injective.