Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 12

Espaces vectoriels : exercice 11

(a) On considère les polynômes $f_1 = x^3 - x^2$, $f_2 = x^3 - x$, $f_3 = x^3 - 2x^2 + x$.
On peut directement observer que $f_3 = 2f_1 - f_2$. Ils sont donc linéairement dépendants.

Si ce n'est pas évident, on applique le théorème :
$f_1,\ f_2,\ f_3 \in \mathbb{R}[x]$ sont linéairement indépendants
ssi
$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$

Soient donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ -\alpha-2\gamma & = & 0 \\ -\beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha-2\gamma & = & 0 \\ -\beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -2\gamma \\ \beta & = & \gamma \\ \gamma & = & \gamma\,. \end{array}\right.$$

Le paramètre γ peut être choisi librement. Il existe donc une infinité de solutions non triviales. Par exemple, $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1, 1)$ tel que

$$-2f_1 + f_2 + f_3 = 0\,.$$

$f_1,\ f_2,\ f_3$ sont donc linéairement dépendants.

(b) Comme f_3 est une combinaison linéaire de f_1 et f_2, on a

$$H = [f_1, f_2, f_3]_{\text{sev}} = [f_1, f_2]_{\text{sev}}\,.$$

De plus f_1 et f_2 sont linéairement indépendants, car non colinéaires, ils forment une base de H :

$$\mathcal{B} = (f_1, f_2) \quad \text{et donc} \quad \dim H = 2\,.$$

(c) Un vecteur appartient à un espace vectoriel ssi il s'écrit comme combinaison linéaire des générateurs. Relativement à une base choisie, la combinaison est unique.
Cherchons à écrire $p(x) = -2x - 3x^2 + 5x^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs de base f_1 et f_2 :

$$p = \alpha f_1 + \beta f_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 5 \\ -\alpha & = & -3 \\ -\beta & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & 2\,. \end{array}\right.$$

Donc $p \in H$ et

$$p = 3f_1 + 2f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\,.$$

Remarque : relativement aux autres bases, on a

$$p = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{(f_2, f_3)} \qquad p = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}_{(f_1, f_3)}\,.$$

Espaces vectoriels : exercice 12

Pour tout entier $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, on pose :

$$p_k(x) = 1 + x + \ \ldots\ + x^k\,, \quad \text{degré}\ p_k(x) = k$$

Il y a donc $n+1$ polynômes que l'on explicite :
$p_0(x) = 1$
$p_1(x) = 1 + x$
$p_2(x) = 1 + x + x^2$
...
$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \ \ldots\ + x^n$

(a) On veut montrer que $\mathcal{B}\,(p_0(x),\, p_1(x),\, \ldots,\, p_n(x))$ est une base de P_n. Une famille de vecteurs forment une base de l'espace vectoriel E si et seulement si ils sont générateurs et linéairement indépendants.
Il faut donc montrer ces deux propriétés.

- Il est évident que ces polynômes sont générateurs de P_n.
- Il faut encore montrer qu'ils sont linéairement indépendants.
  Hypothèse H :
  $p_0(x) = 1$
  $p_1(x) = 1 + x$
  $p_2(x) = 1 + x + x^2$
  ...
  $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \ \ldots\ + x^n$
  Conclusion C :
  ces $n+1$ polynômes sont linéairement indépendants.

  On montre qu'ils sont linéairement indépendants en utilisant une preuve par l'absurde, c'est-à-dire on suppose H et non$C$ vrais.

  Preuve :

  Ainsi par l'hypothèse non$C$, les $n+1$ polynômes sont linéairement dépendants donc il existe $\lambda_0,\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

  $\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ \ldots\ + \lambda_n p_n(x) = 0 \qquad (*)$

  Si k est le plus grand des indices tel que λ_k est différent de 0, on a alors :

  $\lambda_k \neq 0$ et $\lambda_{k+1} = \ \ldots\ = \lambda_n = 0$

  l'égalité $(*)$ devient :

  $\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ \ldots\ + \lambda_k p_k(x) = 0$

  $\Leftrightarrow$

  $p_k(x) = \dfrac{-1}{\lambda_k}\,\big(\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ \ldots\ + \lambda_{k-1} p_{k-1}(x)\big) = q(x)$ et $\deg q(x) \leq k-1$

  Or $\deg p_k(x) = k$ par l'hypothèse H.

  On a donc simultanément $p_k(x) = k$ et $p_k(x) \leq k-1$. Ce qui est impossible. donc C est vrai. Les $n+1$ polynômes sont linéairement indépendants.

(b) On veut déterminer dans cette base les composantes d'un polynôme quelconque.
Soit

$$q(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ \ldots\ + \lambda_n x^n \quad (*)$$

un tel polynôme.
L'idée est d'exprimer $1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n$ en fonction des polynômes de la base :
$p_0(x) = 1$
$p_1(x) = 1 + x$
$p_2(x) = 1 + x + x^2$
...
$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \ ... \ + x^n$
On remarque que

$1 = p_0$
$x = p_1 - 1 = p_1 - p_0$
$x^2 = p_2 - p_1$
...
$x^n = p_n - p_{n-1}$
D'où en remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$q(x) = \lambda_0 p_0 + \lambda_1(p_1 - p_0) + \ ... \ + \lambda_{n-1}(p_{n-1} - p_{n-2}) + \lambda_n(p_n - p_{n-1}) =$
$= (\lambda_0 - \lambda_1)p_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)p_1 + \ ... \ + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)p_{n-1} + \lambda_n p_n$
On obtient ainsi les composantes de $q(x)$ relativement à la base $\mathcal{B}\,(p_0(x),\ p_1(x),\ ...,\ p_n(x))$:

$$q(x) \ = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ ... \\ \lambda_{n-1} - \lambda_n \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Espaces vectoriels : exercice 14

Soient les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que $C = A - B$ et de plus, A et B sont linéairement indépendantes car leurs coefficients ne sont pas proportionnels.
Donc :
$V = \ [A\,,\,B\,,\,C]_{sev} \ = \ [A\,,\,B\,,\,A-B]_{sev} \ = \ [A\,,\,B]_{sev}$

Par définition de V, les matrices A et B sont des générateurs de V et elles sont indépendantes : elles forment donc une base de V.
M se décompose de manière unique dans cette base.
Il faut déterminer $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$M = \alpha A + \beta B$
$\Leftrightarrow$

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 6 &= 2\alpha \\ 9 &= 2\alpha+\beta \\ -9 &= -2\alpha-\beta \\ 3 &= \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3 \text{ et } \beta = 3$$

Dans la base $\mathcal{B}(A\,,B)$: $\quad M = 3A + 3B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$: composantes de M dans $\mathcal{B}$

Remarques :

(a) $\mathcal{B}(A,\, C)$ est aussi une base de V $\;(B = A - C$ et $A \neq kC)$.
$M = 6A - 3B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$: composantes de M dans $\mathcal{B}(A,\, C)$

(b) $\mathcal{B}(B,\, C)$ est aussi une base de V $\;(A = B + C$ et $B \neq kC)$.
$M = 6B + 3C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: composantes de M dans $\mathcal{B}(B,\, C)$

Espaces vectoriels : exercice 15

(a) *Rappel* :
Soit E un espace vectoriel et W un sous-ensemble de E.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \forall \vec{x}\,, \vec{y} \in W,\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W \;\Leftrightarrow\; W$ est un sev de E.
Le critère du sev consiste donc à vérifier que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \forall \vec{x}\,, \vec{y} \in \mathbf{W},\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \mathbf{W}$$

Soient A une matrice fixée de $\mathbb{M}_{n\times p}$ et V un sous-espace vectoriel donné de $\mathbb{M}_{p\times r}$.

On considère $W = \{\, X \in \mathbb{M}_{n\times r} \;/\; \exists\; P \in V\;,\; X = A\cdot P \,\}$.
On doit vérifier que

$$\forall X\,,\, Y \,\in\, W \quad \text{et} \quad \forall \lambda\,,\, \mu \,\in\, \mathbb{R}\,, \qquad \lambda\, X + \mu\, Y \,\in\, W\,.$$

c'est-à-dire, il faut vérifier que $\lambda\, X + \mu\, Y$ a la propriété caractéristique de W.
Par hypothèse :
$X \,\in\, W \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; P \,\in\, V$ tel que $X = A\cdot P$,
$Y \,\in\, W \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; Q \,\in\, V$ tel que $X = A\cdot Q$.
Donc $\lambda\, X + \mu\, Y = \lambda\,(A\cdot P) + \mu\,(A\cdot Q) = A\cdot(\lambda\, P + \mu\, Q)$.
Or V est un sev de $\mathbb{M}_{n\times r}$ donc $\forall\, P\,,\, Q \,\in\, V\,, \forall\, \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lambda\, P + \mu\, Q = R \,\in\, V$.
Ainsi : $\exists\; R \in V$ tel que

$$\lambda\, X + \mu\, Y = A\cdot R \quad\Leftrightarrow\quad \lambda\, X + \mu\, Y \,\in\, W\,.$$

(b) On fixe $n = 3\,,\ p = r = 2\,,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et V est le sous-espace vectoriel des matrices carrées symétriques d'ordre 2 : $V = \{P \in \mathbb{M}_2 \;/\; P^t = P\}$.
Les matrices P de V sont de la forme : $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, d \in \mathbb{R}$.
Pour déterminer une base, il faut d'abord trouver l'expression générale d'une matrice $X \,\in\, W$ grâce à la propriété caractéristique de W. Puis on écrit X comme une combinaison linéaire de générateurs de W.

On détermine l'expression générale des matrices X de W :

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+b & -3b+d \\ -6a+2b & -6b+2d \\ 3a-b & 3b-d \end{pmatrix}.$$

$$X = a \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

sont trois générateurs de W.

(*Remarque* : il va de soi que $J, K, L \in W$ pour tout $a, b, d \in \mathbb{R}$ (donc en particulier pour $a = 1, b = 0, d = 0$, etc). Ainsi on n'a pas besoin de vérifier leur appartenance à W !)

Ces matrices sont linéairement dépendantes : $K = -\frac{1}{3} J - 3L$; mais J et L sont linéairement indépendantes car non colinéaires.
(J, L) est une base de W ; $\dim W = 2$.

Remarque :
soit $J' = \dfrac{1}{3} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
$B(J', L)$ est aussi une base de W.