(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	4	
2	6	
3	6	
4	4	
Total	20	

Note (barème sur 20 points) :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Formulaire

- $27^3 = 19'683$.
- $35^3 = 42'875$.
- $27 \times 35^2 = 33'075$.
- $|\bar{x} - x_n| \leq K^{2^n-1}|\bar{x} - x_0|^{2^n}$.
- $K = \frac{M_2}{2m_1}$, $M_2 = \text{supp}_{x\in I}|f''(x)|$, $m_1 = \inf_{x\in I}|f'(x)|$.
- $5 \times 10^{-m-1} \geq \Delta x$
- $2'557 < \left(\frac{8}{3}\right)^8 < 2'558$
- $\frac{d}{dx}\text{Arcsin}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $l(x) = \lambda x(1-x)$
- $b(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$.

Question 1

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soit la série $S(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_k = \ln(1 - \frac{1}{(k+2)^2})$.

(a) (3 points) Cette série converge-t-elle ? Quelles sont les valeurs de $S(n)$ pour $n \geq 1$?

(b) (1 point) Que vaut $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Réponse à la question 1:

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Question 2

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, dont l'ntensité est proportionnelle au carré de sa vitesse et avec un sens opposé à cette dernière.

(a) (1 point) Montrez que sa vitesse v vérifie l'équation

$$v' = -\frac{k}{m}v^2 + g.$$

(b) (2 points) Trouvez la solution génerale à cette dernière équation différentielle.

(c) (3 points) Si le parachutiste veut atterrir avec une vitesse de $6m/s$, qu'il pèse $80kg$ et que la constante de frottement $k = 30Nm^{-2}s^2$, quel doit être le rapport v_h/h entre la vitesse $v(h)$ à la hauteur h de déployment de son parachute (prendre $g = 10ms^{-2}$) ?

Réponse à la question 2:

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Question 3

Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soient les fonctions $\varphi_1(x) = \exp(-x^2)$ et $\varphi_2(x) = x^2$. On suppose que ces deux fonctions sont des solutions à une équation différentielle ordinaire de deuxième ordre (à coefficients non constants) homogène.

(a) (4 points) Ecrivez les résolvantes $S(x, x_0)$ pour $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$.

(b) (2 points) Trouvez l'équation différentielle en question.
(Rappel : $\frac{d}{dx}S(x, x_0) = -A(x)S(x, x_0)$ et $S(x_0, x_0) = \mathrm{id}_2$)

Réponse à la question 3:

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐

Question 4 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Un observateur $\mathcal{O}'$ a par rapport à un observateur inertiel la ligne d'univers

$$\begin{cases} x^0 = \sinh(\tau) \\ x^1 = \cosh(\tau) \end{cases}, \tau \in \mathbb{R},$$

où τ est le temps propre de $\mathcal{O}'$.
Trouvez tous les événements simultanés pour $\mathcal{O}'$ à un instant τ fixé. A quelle distance physique se trouve l'événement $x^0 = 0 = x^1$ de l'observateur $\mathcal{O}'$ pour l'observateur $\mathcal{O}'$?

Réponse à la question 4: laisser la marge vide

Vous pouvez continuer avec la réponse à la page suivante!

laisser la marge vide

Si vous n'avez pas assez de place pour votre réponse, veuillez demander une feuille supplémentaire au surveillant et cocher la case qui suit: ☐