Déterminants

1. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > -\dfrac{5}{x}$

b) $\begin{vmatrix} x & 3/x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14$

2. Calculer les déterminants suivants en utilisant des opérations sur les lignes et les colonnes :

a) Sachant que : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6,$

i) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

b) Sachant que : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10\,;$

i) $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} -a & 2b & -c \\ -d & 2e & -f \\ -g & 2h & -i \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-2a & e-2b & f-2c \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$

3. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\det\left[2\vec{c},\, \vec{b},\, 2\vec{a}-\vec{c}\right] + \det\left[-\vec{x}+2\vec{b},\, \vec{y},\, 3\vec{z}\right] + \det\left[\vec{y},\, 2\vec{y}+3\vec{b},\, 2\vec{z}\right] = -12$$

avec : $\det\left[\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\right] = 3$

Montrer que les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont linéairement dépendants.

4. Calculer les déterminants suivants en utilisant des opérations sur les lignes et les colonnes :

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 4 \\ 15 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 4 & 3 & 7/2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & a^2 & (a-t)^2 \\ b & b^2 & (b-t)^2 \\ c & c^2 & (c-t)^2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 17 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

l) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tels que : $\begin{vmatrix} 3-x & 6-x & 2-x \\ 7-x & 2-x & 7-x \\ 5-x & 6-x & 3-x \end{vmatrix} > 0$

m) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $\det(A - \lambda I_3) = 0$,
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice $K = kI_n,\ k \in \mathbb{R}$.
Calculer le déterminant de la matrice KA. En déduire que $\det(kA) = k^n \det A$.

6. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer :

a) $\det A$, $\det B$, $\det C$

b) $\det(AB)$, $\det(ABC)$

c) $\det(2A)$, $2\det A$

d) $\det(-3A^t) \cdot \det(2B)$

e) $\det(B+C)$

7. Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite anti-symétrique si et seulement si $A^t = -A$.

Montrer que si A est anti-symétrique et d'ordre impair $2p-1$ alors $\det A = 0$.

8. a) Les nombres 299, 468 et 741 sont divisibles par 13. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix} \text{ est divisible par 13.}$$

Indication : en utilisant une combinaison linéaire adéquate, modifier une ligne pour obtenir les nombres 299, 468 et 741.

b) Les nombres 2528, 4661, 5925 et 7742 sont divisibles par 79. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ est divisible par 79.}$$

9. a) Lorsque c'est possible, calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) Pour quelles valeurs de m et k les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$E = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -k & k-1 & 2 \\ k^2 & k+1 & -k^2 \\ 2k & 1-k & -k-2 \end{pmatrix}$$

10. Sachant que : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, et $\det A = -7$, calculer :

a) $\det(3A)$

b) $\det(2A^{-1})$

c) $\det((2A)^{-1})$

d) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

11. Montrer que si L est une matrice carrée d'ordre n telle que $L^3 = 0$ alors $I - L$ est inversible.

12. Soit A une matrice d'ordre n vérifiant la relation suivante :

$$A^2 - 2A = 3I_n$$

a) Montrer que A est inversible et en déduire une expression de A^{-1}.

b) Si $\det A = 3$, calculer $\det(A - 2I_n)$.

13. Soient A et B deux matrices d'ordre n.On suppose A inversible.
Montrer que les matrices $I_n + A^{-1}B$ et $A + B$ sont toutes deux inversibles ou toutes non inversibles.

14. Résoudre les équations matricielles suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (XB - B) = 0 \qquad \forall B \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ tel que $\det B \neq 0$

15. Soient $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'équation matricielle $AX = B$.
Résoudre en X cette équation en donnant l'ensemble des solutions S en fonction de A et B.
En particulier, considérez les cas $B = 0$ et $B = I_2$.

16. Déterminer le nombre de lignes et de colonnes de la matrice X, puis résoudre les équations suivantes :

a) $XA = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(XA)^t = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $AX^t = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

d) $AX^t = B$ avec $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$

17. Soient $A, X \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Sachant que $A^2 = 0$, montrer que l'équation

$$AX^t - X^t = A - A^t$$

possède une solution unique et exprimer cette solution en fonction de A.

18. Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R}), \; a \in \mathbb{R}$$

une matrice fixée et l'équation matricielle suivante :

$$(A + A^t)XA = A + A^t.$$

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la solution soit unique et exprimer X en fonction de A.
Résoudre cette équation pour $a = 4$.

19. Soient $M \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ une matrice fixée telle que $\det M \neq 0$ et $B = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de telle manière que l'équation

$$(B + I_2)BXM = 0$$

possède d'autres solutions que la solution triviale $X = 0$.

b) On pose $a = 2$.
Résoudre l'équation suivante : $(B + I_2)BXM = BM$

20. Soit $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $X \in M \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$.
Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de telle manière que l'équation

$$B^k(B + B^t)X = 0, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

admette comme solution unique $X = 0$.
Résoudre cette équation pour $a = 4$ et $k = 1$.

Réponses

1. a) $x \in]\leftarrow; -5/3[\cup]0; 1[$
b) $x \in [-2; -1]\cup]0; 3]$

2. a) i) -6
ii) 72
iii) -6
iv) 18

b) i) 10
ii) 20
iii) 10
iv) 30

4. a) 8
b) -600
c) 27
d) 7/6
e) 4/3
f) $(a+b+c)^3$
g) $t^2(b-a)(c-a)(c-b)$
h) -16
i) 40
j) $(a-c)^2(b-d)^2$
k) $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$
l) $x \in]\leftarrow; 4[$
m) $\lambda \in \{1; 2; 3\}$

6. a) $\det A = -8$, $\det B = -7$, $\det C = 0$
b) $\det(AB) = 56$, $\det(ABC) = 0$
c) $\det(2A) = -64$, $2\det A = -16$
d) -12096
e) -52

9. a) $A^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 10 \\ 6 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \dfrac{-1}{46}\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

$\det C = 0$: C n'est pas inversible

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) E est inversible si et seulement si $m \notin \{-1; 0; 1\}$

F est inversible si et seulement si $k \notin \{-1; 0; 2\}$

10. a) -189
b) -8/7
c) -1/56
d) 7

12. a) $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_n)$

b) $\det(A - 2I_n) = 3^{n-1}$

14. a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) pas de solution

c) $X = \begin{pmatrix} a & d-1 \\ a-1 & d \end{pmatrix} \qquad \forall\, a,\, d \in \mathbb{R}$

15. a) si $A = 0$: X est quelconque

si $A \neq 0$: $\begin{cases} \det A \neq 0 & \text{alors} \quad X = 0 \text{ (solution unique)} \\ \det A = 0 & \text{alors} \quad X \text{ a 2 lignes proportionnelles (solutions non uniques)} \end{cases}$

b) si $A = 0$: pas de solution

si $A \neq 0$: $\begin{cases} \det A \neq 0 & \text{alors} \quad X = A^{-1} \text{ (solution unique)} \\ \det A = 0 & \text{alors} \quad \text{pas de solution} \end{cases}$

c) si $A = 0$: pas de solution quelle que soit B

si $A \neq 0$: $\begin{cases} \det A \neq 0 & \text{alors} \quad X = A^{-1}B \text{ (solution unique)} \\ \det A = 0 & \text{alors} \quad \text{si on pose } A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \text{ : solutions non uniques si} \\ & \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ k\alpha & k\beta \end{pmatrix} \text{; sinon pas de solution} \end{cases}$

16. a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) pas de solution

c) $X = \begin{pmatrix} 1-3y & y \\ 2-3t & t \\ -1-3v & v \end{pmatrix} \qquad \forall\, y,\, t,\, v \in \mathbb{R}$

d) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $X = \begin{pmatrix} a & b & 3a-b-1 \end{pmatrix} \qquad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$

17. $X = (A - A^t)(A^t + I_n)$

18. La solution est unique ssi $a \notin \{0; 4\}$, alors $X = A^{-1}$

Si $a = 4$, alors $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -2x - \frac{1}{2} & -2y + 1 \end{pmatrix} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$

19. a) $a \in \{-1; 0; 2\}$

b) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x & \frac{1}{6} - \frac{2}{3}y \end{pmatrix} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$

20. La solution est unique ssi $a \notin \{0; 4\}$.

Si $k = 1$ et $a = 4$ alors $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$