7 avril 2008

Contrôle d'analyse II no 3

Durée: 1 heure 30'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. Calculer les deux limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{Arshx}}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$ 6 pts

2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$.

a) Montrer que f(x) peut s'écrire sous les deux formes suivantes : 1 pt

$$f(x)=\frac{\text{Ch}3x}{\text{Sh}2x} \quad \text{ou} \quad f(x)=\frac{4\text{Ch}^2x-3}{2\text{Sh}x}$$

Indication : on donne l'égalité $\text{Ch}3t = 4\text{Ch}^3t - 3\text{Ch}t$

b) Utiliser ce qui précède pour étudier et représenter graphiquement f(x). 6½ pts

3. Déterminer le paramètre p pour que le nombre complexe $z=\dfrac{\left[2^{p}\,;\,\frac{3\pi}{8}\right]}{\sqrt{1-i}}$ satisfasse la condition $\text{Im}z = -1$. 3 pts

4. On considère le polynôme complexe de degré 3 dont une des racines notée z_0 est réelle:

$$P(z)=3z^3+(1+9i)z^2-9z-3-i$$

a) Déterminer z_0 ;

b) Calculer alors les deux autres racines, notées z_1 et z_2. 3½ pts

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire de trigonométrie hyperbolique succint

$\mathbf{chx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathbf{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathbf{thx} = \frac{shx}{chx}$, définies sur $\mathbb{R}$;

$\mathbf{cothx} = \frac{chx}{shx}$ $(= \frac{1}{thx})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$;

$chx + shx = e^x$; $chx - shx = e^{-x}$; $\mathbf{ch^2x - sh^2x = 1}$;

$sh(x + y) = shxchy + chxshy$; $sh(x - y) = shxchy - chxshy$;

$ch(x + y) = chxchy + shxshy$; $ch(x - y) = chxchy - shxshy$;

$\mathbf{sh2x = 2\,shx\,chx}$; $\mathbf{ch2x = 2\,ch^2x - 1 = 2\,sh^2x + 1}$;

$shx + shy = 2sh(\frac{x + y}{2})ch(\frac{x - y}{2})$; $shx - shy = 2sh(\frac{x - y}{2})\ ch(\frac{x + y}{2})$;

$chx + chy = 2ch(\frac{x + y}{2})ch(\frac{x - y}{2})$; $chx - chy = 2sh(\frac{x + y}{2})sh(\frac{x - y}{2})$;

$\mathbf{th(x + y) = \frac{thx + thy}{1 + thxthy}}$; $\mathbf{th(x - y) = \frac{thx - thy}{1 - thxthy}}$;

$chx = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$; $shx = \frac{2t}{1 - t^2}$; $thx = \frac{2t}{1 + t^2}$; où $\mathbf{t = th\frac{x}{2}}$.

$\mathbf{Argshu} = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$, u(x) réel ; $(Argshu(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}}$, u(x) réel ;

$\mathbf{Argchu} = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$, $u(x) \geq 1$; $(Argchu(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}$, $u(x) > 1$;

$\mathbf{Argthu} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + u}{1 - u})$, $|u(x)| < 1$; $(Argthu(x))' = \frac{u'(x)}{1 - u^2(x)}$, $|u(x)| < 1$.