Résumé EV

mardi, 18 décembre 2018 08:16

Vecteur directeur

Sont directeur des vecteurs dont aucun d'entre eux ne peut s'écrire en fonction des autres.
dans le cas où on as des vecteurs de dimension égale a leurs nombre, on peut calculer rapidement si ils sont indépendant en utilisant le déterminant de la matrice. si il est égale a 0 alors ils sont indépendant.

Dimension d'un sev :

C'est le nombre minimum de vecteur qui le définis. Il soit être fini

SEV :

pour qu'un vecteur appartienne a un sous ev il doit satisfaire la propriété suivante : $\alpha X + \beta Y \ \epsilon \ \ au\ sev$
on appelle cette formule le critère du sev.
Pour prouver l'appartenant d'un SEV a un EV, on doit montrer que tout vecteur qui le compose appartient bien à EV
On utiliser pour ça le critère du SEV et la propriété qui définit les vecteurs de l'ensemble.

Base

Les vecteurs directeur de l'espace vectoriel tel qu'il soit possible par combinaison linéaire de toucher tous les points
Si V est un ev Réel
$\mathbb{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n) est\ une\ base\ de\ V$
Ssi

1) $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\ sont\ linéairement\ indépendant$
   (on dit aussi que $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ est libre)
2) E = $[\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\ ]_{sev}$ $(càd\ \forall \vec{x} \epsilon E : \vec{x} = \ \alpha_{\ 1}\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_{\ n}\vec{e}_n$
   Alors, $\vec{x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathbb{B}}$ $: uniuqes\ relativement\ à\ \mathbb{B}$

calculer la matrice d'une application linéaire :

$\begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z}\end{pmatrix}$ $On\ mets\ chaque\ application\ des\ vecteurs\ de\ la\ base\ dans\ la\ matrice$
$f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots \to v1, v2, v3$
kernel : ensemble des points qui ne vont vers le zéro
image : ensemble des point qui peuvent être touché par l'application

Espace vectoriel

Si V est un ev Réel
$\mathbb{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n) est\ une\ base\ de\ V$
Ssi

1) $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\ sont\ linéairement\ indépendant$
   (on dit aussi que $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ est libre)
2) E = $[\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\ ]_{sev}$ $(càd\ \forall \vec{x} \epsilon E : \vec{x} = \ \alpha_{\ 1}\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_{\ n}\vec{e}_n$
   Alors, $\vec{x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathbb{B}}$ $: uniuqes\ relativement\ à\ \mathbb{B}$

Remarques :

1) On a vu que pars définition, lors ce qu'un espace vectoriel réel est de dimension fini c'est qu'il est engendré par un nombre fini de générateur.
2) Si $V = \{\vec{0}\}, pour\ engendrer\ V, il\ faut\ prendre\ le\ Vecteur\ Zero\ Or\ \{\vec{0}\} est\ lié\ donc\ ne\ peut\ être\ une\ base\ de\ V$
3) Soit E un ev réel et $E\ \neq \{\vec{0}\}$
   Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\ (n\ fini\ !) est\ un\ système\ de\ générateurs\ de\ E\ (càd) E = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n]_{sev}\ alors\ on\ peut\ en\ extraire\ une\ base$
   Preuve :
   1) Si les n vecteurs sont déjà linéairement indépendant, il forment une base donc il n'y a rien a montré
   2) SI les n vecteurs sont linéairement dépendant, On peut supposer, par ex, que $\vec{v}_n = \alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n-1}\vec{v}_{n-1}$

   Il faut montrer que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_{n-1}\ engendre\ E$
   Hors par hypothèse, $\forall \vec{x} \epsilon E :$
   $\alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n}\vec{v}_n = \vec{x}$
   Par SI les n vecteurs sont linéairement dépendant, On peut supposer, par ex, que $\vec{v}_n = \alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n-1}\vec{v}_{n-1}$
   $\forall \vec{x} \epsilon E$
   $\alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n}(\alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n-1}\vec{v}_{n-1}) = \vec{x}$
   Càd :
   $c_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + c_{\ n-1}\vec{v}_{n-1} = \vec{x} = E = [v_1, \dots \vec{v}_{n-1}\ ]_{sev}$
   Il y a a nouveau 2 cas : Si les p-1 vecteurs sont linéairement indépendant, alors ils forment une base de E, sinon on recommence le mêmes processus
   Ont aura finalement un ensemble fini non vide et non réduis à zero (le vecteurs nul) de k vecteurs linéairement indépendant
   Et $1 \leq k < p\ tel\ que, \mathbb{B}(v_1, \dots \vec{v}_k) est\ une\ base\ de\ E$
   EN conséquence : Tout ev de dimension finie possède une base.
   Si de plus $\mathbb{B}(v_1, \dots, \vec{v}_n\ ) est\ une\ base\ de\ E, alors\ tout\ autre\ ensemble\ libre\ de\ nVecteurs\ de\ E\ est\ aussi\ une\ base\ de\ E$
   Preuve :
   Soit $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\ n\ vecteur\ de\ E\ lonéaireement\ indépendannts, On\ veut\ montrer\ que\ \mathbb{B}'(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)\ est\ \ une\ base\ de\ E$
   Il faut donc seulement montrer que ces n vecteurs $\vec{e}_i\ génèrent\ E\ (génerer\!: ça\ veux\ dire\ que\ pour\ tout\ vecteur\ de\ E\ peux\ sécrire\ sous\ forme\ de\ somme\ de\ ceux\ si)$
   Or, par hypothèse : $\forall \vec{x} \epsilon E$
   $\vec{x} = \ a_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n \qquad (Relation 1)$
   $\vec{e}_1 = \ \alpha_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{\ n}\vec{v}_n$
   $\vec{e}_1\ \neq \vec{0}\ car\ par\ hypothèse\ les\ \vec{e}_i i = 1 \dots n\ sont\ linéairement\ indépendant$
   Donc, on au moins 1 $\alpha_i\ est\ non\ nul\ (par\ expemple, le\ premier)$
   D'où : $\alpha_{\ 1}\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \alpha_{\ 1}\vec{v}_1 - \cdots - \alpha_{\ n}\vec{v}_n$
   $\vec{v}_1 = \frac{\vec{e}_1 - \alpha_{\ 1}\vec{v}_1 - \cdots - \alpha_{\ n}\vec{v}_n}{\alpha_{\ 1}}\ et\ on\ remplace\ dans\ la\ relation\ 1$
   $a_1 * \frac{1}{\alpha_1} * (\vec{e}_1 - \alpha_{\ 2}\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_{\ n}\vec{v}_n)$
   $\forall \vec{x} \epsilon E\!: \vec{x} = \ c_{\ 1}\vec{v}_1 + \cdots + c_{\ n}\vec{v}_n <=> E = [\vec{e}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] \quad (relation\ 2)$
   Comme
   $\vec{e}_2\ \epsilon\ E$
   $\overrightarrow{e_2} = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + \cdots + d_n\vec{e}_n$
   Or, au moins un des $d_2, d_3, \dots d_n\ est\ non\ nul\ (sinon\ ils\ tous\ nuls\ et\ on\ aurait\ \ \overrightarrow{e_2} = d_1\vec{e}_1) et\ alors$
   $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}\ serait\ linéairement\ dépendant\ on\ suppose\ d_2 \neq 0\ d'ou$
   $d_2\vec{v}_2 = -d_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - d_3\vec{v}_3 - \cdots - d_n\vec{v}_n$
   $\vec{v}_2 = \frac{1}{d_2}(-d_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - d_3\vec{v}_3 - \cdots - d_n\vec{v}_n)$

Alors, on remplace dans (relation 2)
$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\frac{1}{d_2}(-d_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - d_3\vec{v}_3 - \dots - d_n\vec{v}_n) + \dots + c_n\vec{c}_n$
$E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n]_{sev}$
En poursuivant se procédé, on arrive à $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n]_{sev}$
C à d on aura montré que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ *sont des générateurs de E.*
Donc on peut conclure : $\mathbb{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ *est bien une base de E*

En conclusion :
Tout espace E ($E \neq \{\vec{0}\}$)de dimension finie (donc engendré par un nombre finie de générateur) possède
Une base de toutes bases de E ont le même nombre de vecteurs

Alors, si $n = dimE$, *le nombre de vecteurs d'une base de E est n.*
Si on prend n+1 vecteurs de E, ils sont linéairement dépendants.
Ex : $\mathbb{R}^2$: 3 *vecteurs, quels quils soient, sont linéairement dépedant*
$\mathbb{R}^3$ 4 *vecteurs, quels quils soient, sont linéairement dépedant*
$\mathbb{R}^4$ 5 *vecteurs, quels quils soient, sont linéairement dépedant*

Si V est un sev de E, $V \neq \{\vec{0}\}$ *et* $V \neq E$ *et* $dimE = n$
Alors $1 \leq dimV \leq n$
Remarque :
$V = [\vec{a}]_{sev} = \{\vec{x} \epsilon E | \vec{x} = k\vec{a}, k \epsilon \mathbb{R}\}$
Comme $\vec{a} \neq \vec{0}, \{\vec{a}\}$ *est un ensemble linéairement indépendant et comme*
$\vec{a}$ *est générateur de V (par définition de V)*
Alors
$\mathbb{B}(\vec{a})$ *est une base de dimension* 1
Si dimV=p on peut montrer que l'on peut compléter la base de V par n-p vecteurs
Indépendants pour obtenir une base de E

Espace vectorielle :
Espace composé de vecteurs qui ont en commun 9 propriété qui forment ensemble la LCE et la LCI
les vecteurs peuvent être presque n'importe quoi. (vecteurs, nombres, matrices, polynômes, etc.)

Axiom	Meaning
Associativity of addition	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
Commutativity of addition	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
Identity element of addition	There exists an element $\mathbf{0} \in V$, called the *zero vector*, such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for all $\mathbf{v} \in V$.
Inverse elements of addition	For every $\mathbf{v} \in V$, there exists an element $-\mathbf{v} \in V$, called the *additive inverse* of $\mathbf{v}$, such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
Compatibility of scalar multiplication with field multiplication	$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ [nb 2]
Identity element of scalar multiplication	$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, where 1 denotes the multiplicative identity in F.
Distributivity of scalar multiplication with respect to vector addition	$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
Distributivity of scalar multiplication with respect to field addition	$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

Changement de base :
Ecrire une matrice de changement de base composé de n vecteur directeur appartenant à la nouvelle base et donc les composante de chaque vecteur *sont écris dans l'ancienne base.*
$\mathbb{B}_e(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
$\mathbb{B}_v(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

$\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \quad \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_e} \quad \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_v}$

$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_e} \quad \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_v}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = Matrice\ de\ passage \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_e}$

$l'inverse\ de\ la\ matrice\ de\ passage : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour écrire la matrice de passage d'une base de U dans V on fait une matrice avec les vecteur directeur de U exprimé en fonction de ceux de V

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -\overrightarrow{v_1} \\ 2\overrightarrow{v_2} \end{matrix}}_{\overrightarrow{u_1}} & \underbrace{\begin{matrix} 3\overrightarrow{v_1} \\ -3\overrightarrow{v_2} \end{matrix}}_{\overrightarrow{u_2}} \end{pmatrix}$$

Endomorphisme : E-> E
Quand on reste dans le même espace vectoriel mais pas forcément la même base