Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 12**

Exercice 1 (A retenir pour l'examen)**.** *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que A^T est inversible et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Solution 1. On a $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$. Pour les matrices carrées cette égalité montre que A^T est inversible et que son inverse est bien la matrice $(A^{-1})^T$.

Noter que pour voir que A^T est inversible on peut aussi utiliser le fait que $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$.

Exercice 2. *Soient les vecteurs*

$$u_1 = (1, 0, 2, 0),\ u_2 = (0, 0, 1, -1),\ u_3 = (1, 1, 2, 6),\ u_4 = (0, -1, 1, -7) \in \mathbb{R}^4,$$

où $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de $< u_1, u_2, u_3, u_4 >_{\mathbb{R}}$ muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$.

Solution 2. Rappel : Si v, u sont deux vecteurs d'un espace vectoriel V, muni d'un produit scalaire $(-|-)$, la projection de v sur u est donnée par la formule

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{(v|u)}{(u|u)} u.$$

Nous allons commencer par trouver une base du sous-espace $V = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$. On échelonne la matrice dont les lignes sont ces quatre vecteurs pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3}\to\mathrm{L3}+(-1)\cdot\mathrm{L1}}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L3}\leftrightarrow\mathrm{L2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L4}\to\mathrm{L4}+1\cdot\mathrm{L2}}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L4}\to\mathrm{L4}+(-1)\cdot\mathrm{L3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors que les trois premiers vecteurs sont linéairement indépendants, c.-à-d. une base de V est donnée par $\{u_1, u_2, u_3\}$. Maintenant, on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour donner une base orthogonale de V. On pose tout d'abord $v_1 = u_1$. Ensuite, en appliquant l'algorithme, on a

$$v_2 = u_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_2).$$

Or, via la formule ci-dessus, on obtient $\mathrm{proj}_{v_1}(u_2) = \frac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)} v_1 = \frac{2}{5}(1, 0, 2, 0)$, d'où $v_2 = \frac{1}{5}(-2, 0, 1, -5)$. Note : on a bien $(v_1|v_2) = 0$. En appliquant à nouveau l'algorithme, on a

$$v_3 = u_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(u_3).$$

A nouveau via la formule, on obtient $\mathrm{proj}_{v_1}(u_3) = \frac{(u_3|v_1)}{(v_1|v_1)} v_1 = \frac{5}{5}(1, 0, 2, 0)$ et de même $\mathrm{proj}_{v_2}(u_3) = \frac{(u_3|v_2)}{(v_2|v_2)} v_2 = (2, 0, -1, 5)$, d'où $v_3 = (-2, 1, 1, 1)$.

Une base orthogonale de V est alors donnée par

$$\left\{(1, 0, 2, 0), \frac{1}{5}(-2, 0, 1, -5), (-2, 1, 1, 1)\right\}.$$

Afin d'obtenir une base orthonormée, nous allons renormaliser les vecteurs de la liste ci-dessus. On obtient donc

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0), \;\; w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\frac{1}{5}(-2,0,1,-5) = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,0,1,-5)$$

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,1,1).$$

Une base orthonormale de V est alors donnée par

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,0,1,-5), \frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,1,1)\right\}.$$

Exercice 3. *Trouver la projection orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$) de*

$$b = (5, 2\sqrt{3}, 0, -1)$$

sur l'espace des solutions du système homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x_4 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Solution 3. On va d'abord chercher une base de l'ensemble des solutions du système de l'énoncé. Pour cela, on observe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{3} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle L1 \to \sqrt{3}\, L1} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -3 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\scriptstyle L1 \to L1 - L2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on doit avoir $x_1 = 0$ et $\sqrt{3}x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$. En choisissant x_3 et x_4 comme variables libres, l'ensemble des solutions du système s'écrit alors

$$W = \left\{(0, \sqrt{3}x_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une base de ce sous-espace est donnée par la liste $\{(0,\sqrt{3},1,0), (0, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 1)\}$.
Pour trouver la projection de b sur W, il faut tout d'abord connaitre une base orthogonale de W. Par le procédé de Gram-Schmidt, on a

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, \sqrt{3}, 1, 0) \\ v_2 &= (0, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 1) - \mathrm{proj}_{v_1}((0, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 1)) = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 1) - \frac{1}{2}(0, \sqrt{3}, 1, 0) \\ &= (0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}, 1). \end{aligned}$$

Alors la formule de la projection sur un sous-espace nous donne

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W(b) &= \mathrm{proj}_{v_1}(b) + \mathrm{proj}_{v_2}(b) \\ &= \frac{3}{2}v_1 + 0v_2 \\ &= \frac{3}{2}(0, \sqrt{3}, 1, 0). \end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ une transformation linéaire dont la matrice, par rapport aux bases canoniques, est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$) de $\mathrm{Im}\,(T)$.

Solution 4. On rappelle qu'à partir de la définition de l'image d'une application linéaire, on peut obtenir $\mathrm{Im}\,(T) = \mathrm{Vect}\,(T(e_1), \dots, T(e_5))$, où $\{e_1, \dots, e_5\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^5$ (note : vrai dans le cas général, c.-à-d. l'image est toujours engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ). Or il est clair que $T(e_i)$ est le vecteur formant la i-ème colonne de la matrice A, c.-à-d. l'image de T est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de A. Afin de pouvoir appliquer le procédé d'échelonnage (par ligne) on transpose A. On obtient alors que $\mathrm{Im}\,(T)$ est engendré par les lignes de A^T. Le procédé d'échelonnage donne

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\mathrm{Im}\,(T)$ est alors $\{(1,0,0,1), (0,1,-1,-1)\}$.
On commence par chercher une base orthogonale via le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,1) \\ v_2 &= (0,1,-1,-1) - \mathrm{proj}_{v_1}((0,1,-1,-1)) = (0,1,-1,-1) + \frac{1}{2}(1,0,0,1) \\ &= (\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{-1}{2}). \end{aligned}$$

Il suffit alors de renormaliser les vecteurs afin d'obenir une base orthonormale. Une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,(T)$ est alors donnée par

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) \right\},$$

où on a utilisé $\|v_2\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5. *Soient les vecteurs $v_1 = (1,0,1,2), v_2 = (0,1,0,1), v_3 = (2,2,2,1), v_4 = (1,1,1,-2)$ de $\mathbb{R}^4$ et $W \subseteq \mathbb{R}^4$ l'espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.*

a) Pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$, calculer $W^\perp$.

b) Pour $v \in W^\perp$, trouver $\mathrm{proj_W v}$.

c) Pour $v' = (2,-1,2,3)$, trouver $\mathrm{proj_W v'}$.

Solution 5. a) On rappelle la définition du complément orthogonal

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid (v|w) = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Comme $W = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$, exiger $(v|w) = 0$ pour tout $w \in W$ est équivalent à exiger $(v|v_i) = 0$ pour tout $1 \le i \le 4$ (du fait que tout vecteur de W s'écrit comme combinaison linéaire des v_i et que le produit scalaire est bilinéaire). Soit alors $v \in W^\perp$ avec $v = (a,b,c,d)$, pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Alors, les conditions $(v|v_i) = 0$, se retranscrivent

$$\begin{cases} a + c + 2d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2a + 2b + 2c + d = 0 \\ a + b + c - 2d = 0. \end{cases}$$

Puisque le procédé d'échelonnage donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on choisi c comme variable libre, et on obtient $v = (-c, 0, c, 0)$. D'où

$$W^\perp = \{(-c, 0, c, 0) \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-1, 0, 1, 0)).$$

b) Par définition, si $v \in W^\perp$, v est orthogonal à tous les vecteurs de W. Ainsi, puisque la projection de v sur W dépend du produit scalaire de v avec une base orthogonale de W, $\mathrm{proj}_W(v) = \mathbf{0}$.

c) Pour donner la projection de v' sur W, il faut d'abord trouver une base orthogonale de W. Noter que $\dim W = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W^\perp = 3$. On remarque que v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants et donc forment une base de W. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, on obtient

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ w_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{w_1}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ w_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{w_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{w_2}(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une base orthogonale de W est donnée par

$$\left\{(1, 0, 1, 2), \frac{1}{3}(-1, 3, -1, 1), \frac{1}{4}(5, 5, 5, -5)\right\}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W(v') &= \mathrm{proj}_{w_1}(v') + \mathrm{proj}_{w_2}(v') + \mathrm{proj}_{w_3}(v') \\ &= \frac{(v'|w_1)}{(w_1|w_1)} w_1 + \frac{(v'|w_2)}{(w_2|w_2)} w_2 + \frac{(v'|w_3)}{(w_3|w_3)} w_3 \\ &= \frac{5}{3}(1, 0, 1, 2) + \frac{-1}{3}(-1, 3, -1, 1) \\ &= (2, -1, 2, 3). \end{aligned}$$

Note : On obtient alors $\mathrm{proj}_W(v') = v'$. Cela veut dire que $v' \in W$ (on aurait aussi pu le remarquer avant de faire les calculs ci-dessus).

Exercice 6. *Vrai ou Faux ?*
Le procédé de Gram-Schmidt

1. *transforme toute base de* $\mathbb{R}^3$ *en la base canonique.*
2. *transforme la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *en elle-même.*
3. *transforme les deux vecteurs* $(1, -2, 1)$ *et* $(-2, 4, -2)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *en une base d'un plan.*
4. *transforme une base du plan d'équation* $x + y + z = 0$ *en une base orthogonale de ce même plan.*

Solution 6. 1. *Faux*, par example le procédé de Gram-Schmidt transforme une base

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

en la base

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

2. *Vrai*, car on commence avec une base orthogonale.
3. *Faux*, parce que les deux vecteurs sont linéairement dépendants.
4. Vrai, car le procédé de Gram-Schmidt modifie une base d'un sous-espace en une base orthogonale du même sous-espace.

Exercice 7. *Soit* $W := \text{Vect}\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$*, où*

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

1. *Est-ce que* $W^\perp = \text{Vect}\,(\vec{v}_3)$ *? Et* $W = \text{Vect}\,(\vec{v}_3)^\perp$ *?*
   Conclure que $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$*.*
2. *Calculer les projections orthogonales* $proj_W(\vec{v}_3)$ *et* $proj_W(\vec{v}_4)$*.*
3. *Donner la décomposition* $\vec{v}_4 = \hat{v} + \vec{z}$ *où* $\hat{v} \in W$ *et* $\vec{z} \in W^\perp$*.*
4. *Calculer* $||\vec{v}_4 - proj_W(\vec{v}_4)||$*.*
5. *Ecrire tous les vecteurs de norme 1 dans* $W^\perp$*.*

Solution 7. 1. On vérifie que $\text{Vect}\,(\vec{v}_3) \subseteq W^\perp$, et on conclut l'égalité en regardant les dimensions. Par conséquent

$$W = W^{\perp^\perp} = \text{Vect}\,(\vec{v}_3)^\perp.$$

Ensuite,

$$W = \text{Vect}\,(\vec{v}_3)^\perp = \{\vec{w} \mid \ <\vec{w}, \vec{v}_3>= 0\} = \{\vec{w} = (x, y, z) \mid x + z = 0\}.$$

2. On calcule

$$\text{proj}_W(\vec{v}_3) = \vec{0},$$
$$\text{proj}_W(\vec{v}_4) = (-1, 1, 1).$$

3. On a que

$$\vec{v}_4 = (-1, 1, 1) + (1, 0, 1).$$

4. On calcule

$$||\vec{v}_4 - \text{proj}_W(\vec{v}_4)|| = ||(0, 1, 2) - (-1, 1, 1)|| = ||(1, 0, 1)|| = \sqrt{2}.$$

5. Les vecteurs de norme 1 dans $W^\perp$ sont $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}_3$.

Exercice 8. *Soit*

$$A := \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\2 & 0 & -5\\3 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Vrai ou faux.

1. *Alors les colonnes de A forment une famille orthonormale.*
2. *Alors l'équation du plan engendré par les deux premières colonnes de A est $x + 2y + 3z = 0$.*
3. *Alors l'équation du plan engendré par les deux premières colonnes de A est $x - 5y + 3z = 0$.*
4. *Alors $A^T A$ est une matrice diagonale.*

Solution 8. 1. *Faux.* Les colonnes de A sont orthogonales, mais elles n'ont pas norme 1.

2. *Faux.* En effet, $(1, -5, 3)$ appartient à ce plan, mais il n'appartient pas à l'espaces engendré par les premières deux colonnes.
3. *Vrai*, parce que l'espace engendré par les premières deux colonnes est le complément orthogonal de $(1, -5, 3)$.
4. *Vrai.* La matrice $A^T A$ est diagonale parce que les colonnes de A sont orthogonales.

Exercice 9. *Soient* $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. *Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux.*
2. *Calculer la projection orthogonale $proj_W(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur le sous-espace $W = Vect\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.*
3. *Donner la décomposition $\overrightarrow{v} = \hat{v} + \overrightarrow{z}$ où $\hat{v} \in W$ et $\overrightarrow{z} \in W^\perp$.*
4. *Calculer la distance $d(\overrightarrow{v}, W)$ entre $\overrightarrow{v}$ et le plan W.*

Solution 9. Soient $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux, il suffit de vérifier que le produit scalaire est nul. Il vaut ici $1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$.
2. La projection orthogonale $\text{proj}_W(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur le sous-espace $W = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ est donnée par la formule
$$\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\|\overrightarrow{u}_1\|^2}\overrightarrow{u}_1 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2}{\|\overrightarrow{u}_2\|^2}\overrightarrow{u}_2 = \frac{6}{3}\overrightarrow{u}_1 + \frac{-3}{2}\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
3. La décomposition $\overrightarrow{v} = \hat{v} + \overrightarrow{z}$ est précisément donnée par $\hat{v} = \text{proj}_W(\overrightarrow{v})$ et donc $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} - \hat{v}$. On calcule ici $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On peut vérifier "à la main" que ce vecteur est bien orthogonal à W en vérifiant rapidement que les produits scalaires $\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{u}_2$ sont nuls.
4. Par définition la distance $d(\overrightarrow{v}, W)$ entre $\overrightarrow{v}$ et le plan W et la longueur du vecteur $\overrightarrow{z}$. Cette distance vaut ici
$$d(\overrightarrow{v}, W) = \sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}/2$$

Exercice 10. *Soit $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ une base d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^4$, avec*

$$\overrightarrow{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Construire une base orthogonale de W en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.*

2. Calculer la distance du vecteur $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *à* W*.*

Solution 10. 1. Pour construire une base orthogonale $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ de W on suit la méthode de Gram-Schmidt. On pose d'abord $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{x}_1$. Puis, pour trouver $\overrightarrow{v}_2$, on soustrait de $\overrightarrow{x}_2$ sa projection orthogonale sur le sous-espace W_1 engendré par $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{v}_1$, c'est-à-dire on pose

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_2 &= \overrightarrow{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1} \overrightarrow{x}_2 = \overrightarrow{x}_2 - \frac{\overrightarrow{x}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1} \overrightarrow{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En effet $\overrightarrow{v}_2$ est la composante de $\overrightarrow{x}_2$ orthogonale à $\overrightarrow{x}_1$, et $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ est une base orthogonale du sous-espace W_2 engendré par $\overrightarrow{x}_1$ et $\overrightarrow{x}_2$. La derniere étape consiste en soustraire à $\overrightarrow{x}_3$ sa projection sur le sous-espace W_2. On a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_3 &= \overrightarrow{x}_3 - \mathrm{proj}_{W_2} \overrightarrow{x}_3 = \overrightarrow{x}_3 - \frac{\overrightarrow{x}_3 \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1} \overrightarrow{v}_1 - \frac{\overrightarrow{x}_3 \cdot \overrightarrow{v}_2}{\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_2} \overrightarrow{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Nous avons calculé en 1. une base orthogonale de W, à savoir $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

On calcule ensuite la projection orthogonale de $\overrightarrow{y}$ sur W grâce à notre formule et on obtient

$$\mathrm{proj}_W \overrightarrow{y} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Noter que $y = \mathrm{proj}_W \overrightarrow{y}$ et par conséquent $\overrightarrow{y} \in W$ et la distance est donc nulle.

Exercice 11. *Soient*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver la solution au sens des moindres carrés de l'équation* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$*.*
2. *Trouver l'erreur correspondante.*

Solution 11. La solution au sens des moindres carrés vérifie $A^T A\hat{x} = A^T \overrightarrow{b}$.

1. On calcule donc

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \quad \text{et } A^T \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Puis il suffit de résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

On trouve $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

2. L'erreur associée est la norme du vecteur $A\hat{x} - \overrightarrow{b}$. On trouve $2\sqrt{5} \approx 4.47$.

Exercice 12. *Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Montrer que l'ensemble $W^\perp$ de tous les vecteurs orthogonaux à W est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Montrer que $W \cap W^\perp = \{0\}$.*
   On dit que la somme $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$ est directe et on note $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$.

Solution 12.

1. Nous devons montrer trois propriétés. D'abord le vecteur nul se trouve dans $W^\perp$ puisque $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ pour tout $\overrightarrow{w} \in W$. Supposons ensuite que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'orthogonal de W. Alors, pour tout $\overrightarrow{w} \in W$ on a

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 + 0 = 0$$

Enfin, si $\overrightarrow{u} \in W^\perp$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\overrightarrow{u} \in W^\perp$ puisque, pour tout $\overrightarrow{w} \in W$

$$(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) = \alpha \cdot 0 = 0$$

2. Soit $\overrightarrow{u} \in W \cap W^\perp$. Alors en particulier $\overrightarrow{u}$ est perpendiculaire à lui-même, ce qui ne veut rien dire d'autre que $\|\overrightarrow{u}\| = 0$. Or la norme d'un vecteur est nulle si et seulement si le vecteur lui-même est nul, ce qui montre que W et son orthogonal ne se rencontrent qu'en l'origine.
