Série 7

Exercice 1. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, écrire des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d définie par les données.

a. $A(2,0,-5)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b. $A(1,-1,-3)$, et parallèle à :
$$g : \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3-2t \\ z = 2+5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

c. $A(1,0,1)$ et $B(2,-1,3)$.

d. $A(3,-1,2)$ et $B(2,1,2)$.

e. $A(-1,2,3)$ et parallèle à :
$$g : x = 1,\ \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

f. $A(2,-5,3)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. D'après les données, on peut écrire directement :
$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -5+5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$
En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{5}.$$

b. D'après les données, on peut écrire directement :
$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-2t \\ z = -3+5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$
En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{5}.$$

c. La droite cherchée est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Elle a donc pour équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1+2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$
En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :
$$x-1 = -y = \frac{z-1}{2}.$$

d. La droite cherchée est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. Elle a donc pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :

$$3 - x = \frac{y+1}{2},\ z = 2.$$

e. Cherchons un vecteur directeur de la droite d'équations cartésiennes :

$$x = 1,\ \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Pour cela, on considère deux points B et C sur cette droite, par exemple $B(1, 2, -3)$ et $C(1, 4, -4)$. Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ est donc directeur de la droite recherchée, qui a donc pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :

$$x = -1,\ \frac{y-2}{2} = 3 - z.$$

f. D'après les données, on peut écrire directement :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 + t \\ z = 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre t, on trouve des équations cartésiennes de d :

$$x = 2,\ z = 3.$$

Exercice 2. On munit l'espace d'un repère. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des droites d et g. Lorsqu'elles sont sécantes, identifier le point d'intersection.

a. $d : -2x + 8 = -y = 2z + 4$ et $g : \begin{cases} x = 7 + t \\ y = -t \\ z = -2 + \dfrac{t}{2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

b. d passe par $A\,(-4, 2, 1)$ et $B\,(-1, 1, 3)$, g par $C\,(0, 5, -2)$ et $D\,(9, 2, 4)$.

c. d passe par $A(8, 0, 3)$ et est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $g : \frac{x}{8} = \frac{y}{3} = \frac{-z+5}{7}$.

Solution:

a. L'intersection de d et g correspond au(x) réel(s) t tels que :

$$-2(7 + t) + 8 = t = 2(-2 + \frac{t}{2}) + 4 \text{ autrement dit } t = -2.$$

Les droites d et g sont donc sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(5, 2, -3)$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9\\-3\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Les droites d et g ont donc la même direction. De plus, le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, ce qui montre que le point C n'appartient pas à d. Les droites d et g sont donc parallèles et non confondues.

c. La droite d est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ et la droite g est dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}8\\3\\-7\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on en déduit que d et g sont soit gauches, soit sécantes. Pour décider dans quel cas on se trouve, écrivons des équations paramétriques de d :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de d et g correspond alors au(x) réels(s) t tels que :

$$\frac{8+5t}{8} = \frac{-2t}{3} = \frac{2-t}{7}.$$

On montre alors que ces équations n'ont pas de solution. Par conséquent, d et g ne s'intersectent pas, elles sont donc gauches.

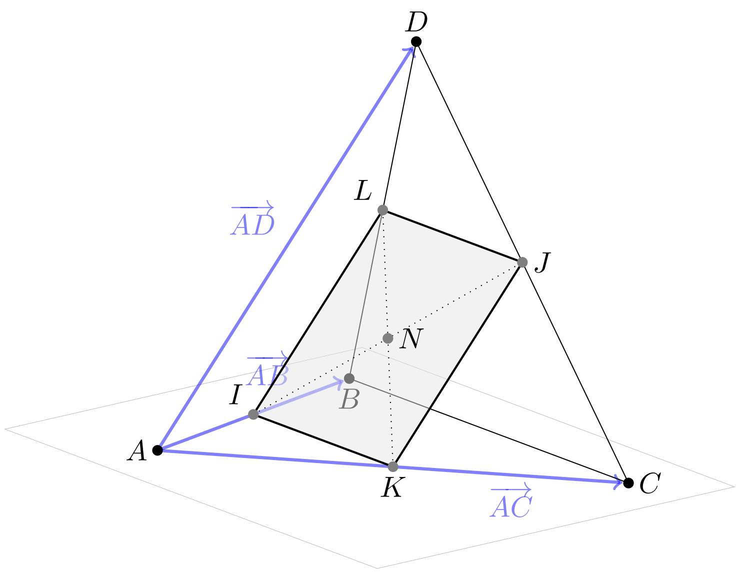
Exercice 3. Soit $ABCD$ un tétraèdre, et I, J, K, L les points milieux des arêtes AB, CD, AC, BD.

a. Écrire les équations vectorielles des droites (IJ) et (KL) vues depuis le point A, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. Montrer que les droites (IJ) et (KL) s'intersectent en un point N.

c. Vérifier que N est le milieu des segments IJ et KL.

Solution: Figure d'étude :



a. On a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\ \text{et donc } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

La droite (IJ) possède donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + t(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}),\ t \in \mathbb{R}.$$

De la même façon, on obtient :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\ \text{et donc } \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

La droite (KL) possède donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + t(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}),\ t \in \mathbb{R}.$$

b. Les droites (IJ) et (KL) s'intersectent en un point si et seulement s'il existe deux réels s, t tels que :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + s(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + t(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants, cette condition est équivalente à demander que le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

On montre alors que $s = t = \frac{1}{2}$ est l'unique solution de ce système. Par conséquent, les droites (IJ) et (KL) se coupent en un unique point N, qui vérifie :

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

c. Grâce aux égalités vectorielles établies aux questions a. et b., on trouve :

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}).$$

Par conséquent, N est le milieu de IJ et aussi le milieu de KL.

Exercice 4. On donne un tétraèdre $ABCD$ dans l'espace. Dans chacun des cas suivants, écrire une équation vectorielle de l'objet géométrique donné vu depuis le point A, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD}$.

a. la droite (CD).

b. le plan passant par B, C et D.

c. le plan passant par les milieux des côtés AB, AD et CD.

d. le segment BC.

Solution:

a. La droite (CD) passe par le point C et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Elle admet donc pour équation vectorielle :

$$(CD) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),\ t \in \mathbb{R}.$$

b. Le plan passant par B, C, D est dirigé par les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Il admet donc pour équation vectorielle :

$$(BCD) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + s(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + t(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}),\ s, t \in \mathbb{R}.$$

c. Notons I, J, K les milieux de AB, AD et CD. On a donc :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Le plan passant par I, J, K est dirigé par les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \text{ et } \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).$$

Il admet donc pour équation vectorielle :

$$(IJK) : \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{s}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \frac{t}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}),\ s, t \in \mathbb{R}.$$

d. L'équation vectorielle recherchée est :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),\ t \in [0,1].$$

Exercice 5. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, exliquer pourquoi les données permettent de définir un plan π et donner des équations paramétriques et cartésiennes de π.

a. $A(3,4,-5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

b. $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$.

c. $A(2,-1,3)$, $d : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

d. $A(3,-2,-7)$, et parallèle au plan $\rho : 2x - 3z + 5 = 0$.

e. $d : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ et :

$$g : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Solution:

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, il existe un unique plan passant par A et possédant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme vecteurs directeurs. On peut écrire directement :

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + 3s + t \\ y = 4 + s - 2t \\ z = -5 - s + t \end{cases},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

On trouve une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} x - 3y = -9 + 7t \\ y + z = -1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant t, on trouve maintenant une équation cartésienne de π :

$$\pi : x + 4y + 7z = -16.$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés. Ils définissent donc bien un unique plan π. Ce plan passe par $A(3,-1,2)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Il admet donc pour équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3s \end{cases},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

On trouve une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} 3x + z = 11 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant t, on trouve maintenant une équation cartésienne de π :

$$\pi : 3x + 3y + z = 8.$$

c. Le point A n'est pas sur la droite d, car $\frac{2-1}{-2} \neq \frac{-1-2}{2}$. Par conséquent, il existe un unique plan contenant le point A et la droite d. La droite d passe par le point $B(1,2,-3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$. Par conséquent, le plan π passe par $A(2,-1,3)$ et est dirigé par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\end{pmatrix}$. Il admet donc comme équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 3s - t \\ y = -1 + 2s + 3t \\ z = 3 - 2s - 6t \end{cases},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

On trouve une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} 2x - 3y = 7 - 11t \\ y + z = 2 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant t, on trouve maintenant une équation cartésienne de π :

$$\pi : 6x - 20y - 11z + 1 = 0.$$

d. Par un point donné, il ne passe qu'un unique plan parallèle à un plan donné. Par conséquent, π est bien défini. π étant parallèle à ρ, il admet une équation cartésienne dont la partie variable est $2x - 3z$. Comme il passe par $A(3, -2, -7)$, il admet donc comme équation cartésienne :

$$\pi : 2x - 3z = 27.$$

Les vecteurs directeurs de π sont les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant $2x - 3z = 0$. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont directeurs de π, et ce plan admet donc pour équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -2 + t \\ z = -7 + 2s \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

e. Un calcul d'intersection révèle que les droites d et g sont sécantes au point A de coordonnées $(3, -1, 2)$. Par conséquent, elles définissent bien un unique plan, à savoir le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (directeur de d) et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (directeur de g). On en déduit :

$$\pi : \begin{cases} x = 3 - 2s - t \\ y = -1 + 3s + 2t \\ z = 2 - s + 3t \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

On trouve une équation cartésienne de π en éliminant les paramètres. Eliminons d'abord s :

$$\pi : \begin{cases} 3x + 2y = 7 + t \\ y + 3z = 5 + 11t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant t, on trouve maintenant une équation cartésienne de π :

$$\pi : 11x + 7y - z = 24.$$