Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère l'équation matricielle en X

$$AX = CB^{-1}\,,$$

où A, B et C sont des matrices fixées telles que $A \in \mathbb{M}_{(n+1)\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\det B \neq 0$.

a) Déterminer le type (la taille) des matrices X et C. Rép. $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{(n+1)\times n}(\mathbb{R})$

On fixe $n = 2$ et on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre cette équation pour $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble solution est-il un espace vectoriel ? Justifier votre réponse.

Rép. $\left\{ X = \begin{pmatrix} -2z & -2w+1 \\ z & w \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{R} \right\}$

Soit encore $V = \big[P, Q, R, S\big]_{\text{sev}}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une base et la dimension de V, ainsi que l'expression générale d'une matrice M de V. Rép. (P, Q, R)

d) Résoudre cette équation pour X appartenant à V dans le cas $C = 0$.

L'ensemble solution formant un espace vectoriel (à ne pas montrer), en donner une base et la dimension. Rép. $(P, R - 4Q)$

7 pts

Tourner svp

2. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel m,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \\ 2m+3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m+1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m+3 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}}$$

a) Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ? Rép. $m \notin \{-3, 0\}$

b) Pour $m = -1$, calculer A^{-1}. Rép. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) Donner une base et la dimension de V en fonction du paramètre m.
Rép. $m = 0 : \dim V = 1, m = -3 : \dim V = 2,$ sinon $\dim V = 3$

d) Pour $m = -3$, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-il à V ? Justifier votre réponse.

Rép. non

6 pts

3. Soit $V = [\, F_1, F_2, F_3\,]_{\text{sev}}$ le sous-espace vectoriel de $P_3[x]$ défini par

$$\begin{aligned} F_1 &= 2x^3 - 3x^2 + x + 7 \\ F_2 &= 2x^3 - x^2 + 3x + 5 \\ F_3 &= x^3 + x^2 + 3x + 1\,. \end{aligned}$$

a) Donner une base et la dimension de V. Rép. (F_1, F_2)

b) Le polynôme $Q = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 11$ appartient-il à V ? Si c'est le cas, donner ses composantes dans la base de V choisie. Rép. $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{(F_1, F_2)}$

Soit encore W le sous-ensemble de $P_3[x]$ défini par

$$W = \left\{ P \in P_3[x] \;\middle|\; P(1) = P'(1) \right\}.$$

c) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $P_3[x]$. Rép. critère du sev

d) Donner une base et la dimension de $V \cap W$. Rép. $(x^3 + 2x + 2)$

7 pts