Contrôle d'algèbre linéaire N°4

Durée : 1 heure 45 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : __________________________ Groupe

PRENOM : __________________________

1. Dans le plan, on considère la projection g dont l'image est la droite $x - y = 0$ et le noyau est la droite $4x - y = 0$.

(a) Déterminer une base propre de g et la matrice de g relativement à la base canonique $\mathcal{E}$.

Soit f un endomorphisme du plan tel que sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E}$ soit

$$M_f = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que f admet les mêmes sous-espaces propres que g et déterminer la nature géométrique de $f \circ g$.

3 pts

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & \beta & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre β, f est-elle diagonalisable ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

(b) On pose $\beta = -1$. Déterminer, avec précision, la nature géométrique de f.

5 pts

Tournez, SVP

3. $\mathbb{R}^3$ est muni d'une base orthonormée B.
Soit $\vec{n}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et α le plan passant par O tel que $\vec{n}$ est un vecteur normal à α.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ parallèle à α.
On considère les deux applications linéaires suivantes :

- s est une symétrie orthogonale dont l'ensemble des points fixes est le plan α ;
- a est une affinité orthogonale d'axe la droite $(O, \vec{u})$ et de rapport 6.

Soit $f = s \circ a$

(a) Déterminer une base propre de f, notée B' ; ainsi que la matrice de f relativement à cette base.

Soit $h \; : \; \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \longmapsto h(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{u})\,\vec{u} + k\,(\vec{x} \cdot \vec{n})\,\vec{n} + \vec{x}\,, \quad k \in \mathbb{R} \end{array}$

On pose : $\|\vec{u}\|^2 = 5$ et $\|\vec{n}\|^2 = 1$.

(b) Déterminer la matrice de h ainsi que la matrice de $g = f - h$ dans la base B'.

(c) Déterminer toutes les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour que g soit la composée d'une homothétie et d'une symétrie. Pour chaque cas, définir avec précision la symétrie.

$3,5$ pts

4. On considère l'équation matricielle $AX = C$ dépendante du paramètre réel m où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$$

(a) On pose $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs du paramètre m telles que la dimension de l'espace des solutions soit 1.

(b) Discuter, en fonction du paramètre m, l'existence et l'unicité des solutions de l'équation matricielle $AX = C$ lorsque $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3(m+1) \end{pmatrix}$.

$3,5$ pts