Contrôle d'analyse I N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. Soit f la fonction définie sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}\,(x^n + x^{n-4})} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln\left[\frac{1}{2}\,(x^{n+4} + x^n)\right] + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

où n est un paramètre entier $(n \in \mathbb{Z})$.

a) Pour quelles valeurs de n, le graphe de f admet-il en $x_0 = 1$ un point anguleux ? $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-6\}$

b) Pour quelles valeurs de n, ce point anguleux est-il aussi un extremum ? 5 pts
$n \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

2. Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{\operatorname{Arctg}(t)}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t^2} \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}\,.$$

Etudier les branches infinies de l'arc Γ. 4,5 pts

$t \to -1^+$, $AV : \ x = -\frac{\pi}{4}$, $\quad t \to 0$, $AO : \ y = x - \frac{1}{2}$, $\quad t \to +\infty$, $M(t) \to (0,0)$.

3. Sachant que $\operatorname{Sh}'(x) = \operatorname{Ch}(x)$, montrer que $\operatorname{Arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\ (x \in \mathbb{R})$. 1,5 pts

$y = \operatorname{Arsh}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Sh}(y) \quad \Rightarrow \quad 1 = \operatorname{Ch}(y) \cdot y' \quad \Rightarrow \quad \cdots$

Tourner la page

4. Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2+1} + a \cdot \operatorname{Arsh}(t) \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 5}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer le paramètre réel a de sorte que l'arc Γ admette un point stationnaire à tangente horizontale. $a = 1$

Esquisser alors la courbe Γ au voisinage de ce point. 5 pts

Point de rebroussement à demi-tangente horizontale

5. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\,\right), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$ 4 pts

Hors programme