Corrigé 7

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x\,|x|$

b) $b(x) = x\,(x^2 + px + q)\,, \quad p, q \in \mathbb{R}$

c) $c(x) = E(\sin x)$

d) $d(x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}\,x)$

e) $e(x) = \tan^2(\frac{2}{x} + x\sqrt{|x|})$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x + a}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$

---

a) On évalue la fonction a en $-x$ et on la compare à $a(x)$:

$$a(-x) = (-x)\,|-x| = (-x)\,|x| = -\,(x\,|x|) = -a(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

La fonction $a(x)$ est donc impaire.

b) On compare $b(-x)$ et $b(x)$:

$$b(-x) = (-x)\left[\,(-x)^2 + p\,(-x) + q\,\right] = -x\,(x^2 - px + q)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

La fonction $b(x)$ n'est ni paire ni impaire si $p \neq 0$, mais elle est impaire si $p = 0\,.$

c) On évalue la fonction c en $-x$:

$$c(-x) = E\,[\sin(-x)] = E\,(-\sin x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Or la fonction partie entière $E(x)$ n'est ni paire ni impaire :

$$E\,(-\sin x) \neq E\,(\sin x) \qquad \text{et} \qquad E\,(-\sin x) \neq -E\,(\sin x)\,, \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Donc la fonction $c(x)$ n'est ni paire ni impaire.

d) On évalue la fonction d en $-x$:

$$d(-x) = |\sin(-x)| + \cos\left[\sqrt{2}\,(-x)\right] = |-\sin x| + \cos(-\sqrt{2}\,x)\,,$$

$$d(-x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}\,x) = d(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Donc la fonction $d(x)$ est paire.

e) On évalue la fonction e en $-x$:

$$e(-x) = \tan^2(-\tfrac{2}{x} - x\,\sqrt{|-x|}\,) = \tan^2[-(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,)]\,,$$

$$e(-x) = [-\tan(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,)]^2 = \tan^2(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,) = e(x)\,, \quad \forall\, x \in D_{\text{def}}\,.$$

Donc la fonction $e(x)$ est paire.

f) On évalue la fonction f en $-x$:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) + a} = \sqrt[3]{-x^5 + 3x^3 - x + a}\,,$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{-(x^5 - 3x^3 + x) + a}\,.$$

La fonction $f(x)$ n'est ni paire ni impaire si $a \neq 0$, mais elle est impaire si $a = 0$. En effet si $a = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

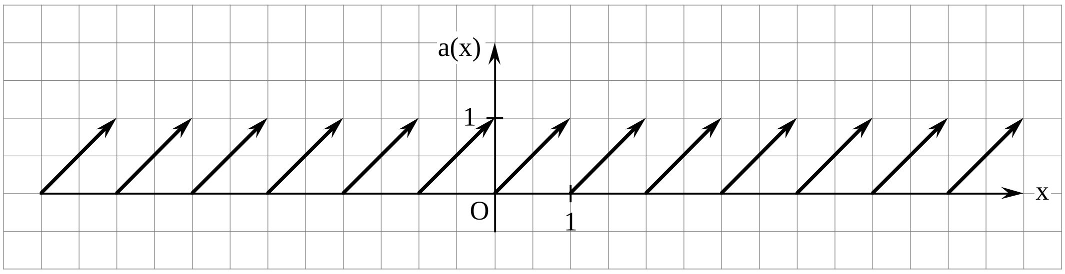
$$f(-x) = \sqrt[3]{-(x^5 - 3x^3 + x)} = -\sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x} = -f(x)\,.$$

2. Déterminer la période, si elle existe, des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x - E(x)$, b) $b(x) = \sin(ax) + \cos(ax) \quad a \in \mathbb{R}$,

---

a) Représentation graphique de la fonction $a(x) = x - E(x)$.



La période de la fonction $a(x) = x - E(x)$ est $T = 1$.

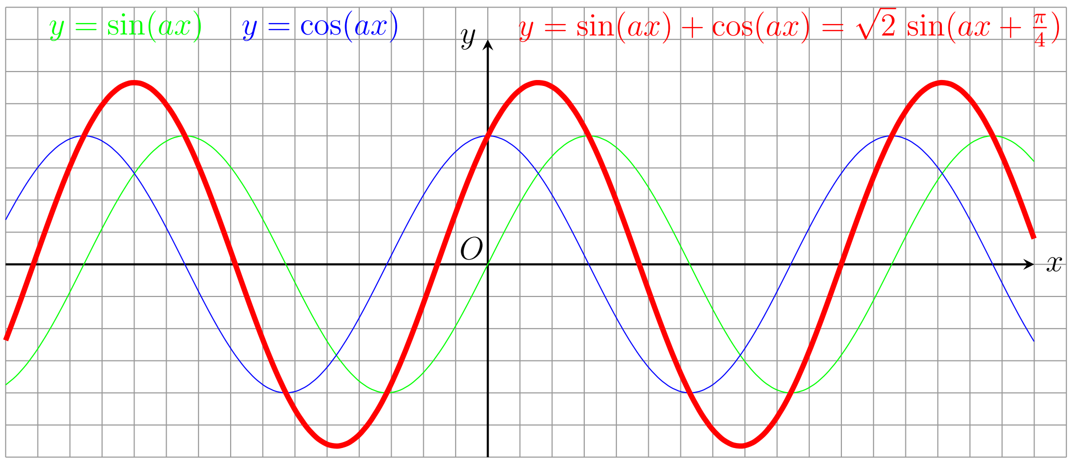
b) Transformons l'expression de la fonction $b(x) = \sin(ax) + \cos(ax)$.

$$b(x) = \sin(ax) + \cos(ax) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(ax) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(ax)\right) = \sqrt{2}\sin(ax + \tfrac{\pi}{4})\,.$$

On déduit la période de la fonction b de celle du sinus : $T = \left|\frac{2\pi}{a}\right|$ si $a \neq 0$.

Si $a = 0$, $b(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

La fonction constante b admet tout $T \in \mathbb{R}$ comme période, mais la période de b, (le plus petit $T > 0$) n'existe pas.



3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, esquisser leur graphe, puis donner leur ensemble des valeurs.

a) $a(x) = |\,2x + |x-2|\,|$

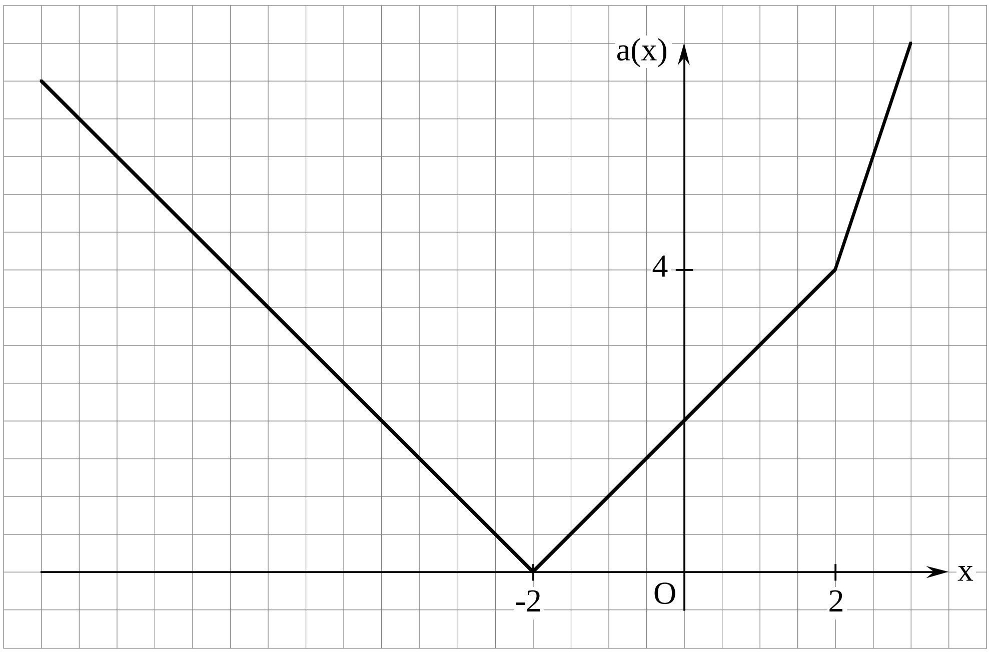
b) $b(x) = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = 2\,.$

---

a) $a(x) = |\,2x + |x-2|\,|\,, \quad D_a = \mathbb{R}\,.$

Explicitons la fonction $a\,.$

$$a(x) = \begin{cases} |\,x+2\,| & \text{si } x < 2 \\ |\,3x-2\,| & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

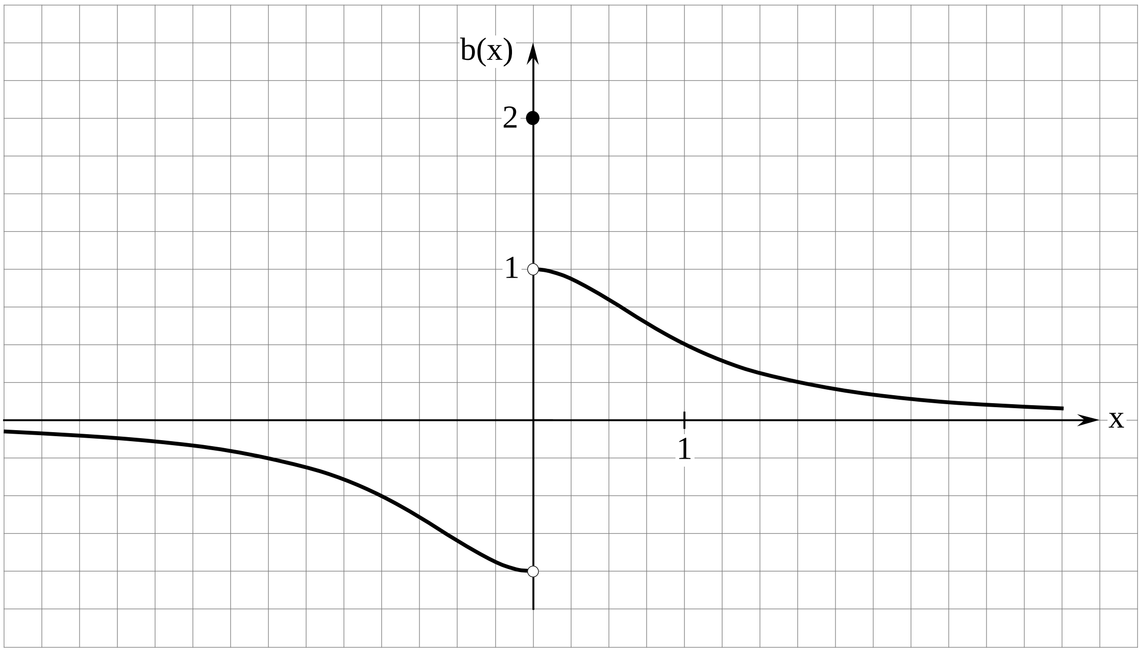


L'ensemble des valeurs de la fonction a est $V_a = \mathbb{R}_+\,.$

b) $b(x) = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = 2$

La fonction $y = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ $(x \neq 0)$ est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

$$b(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



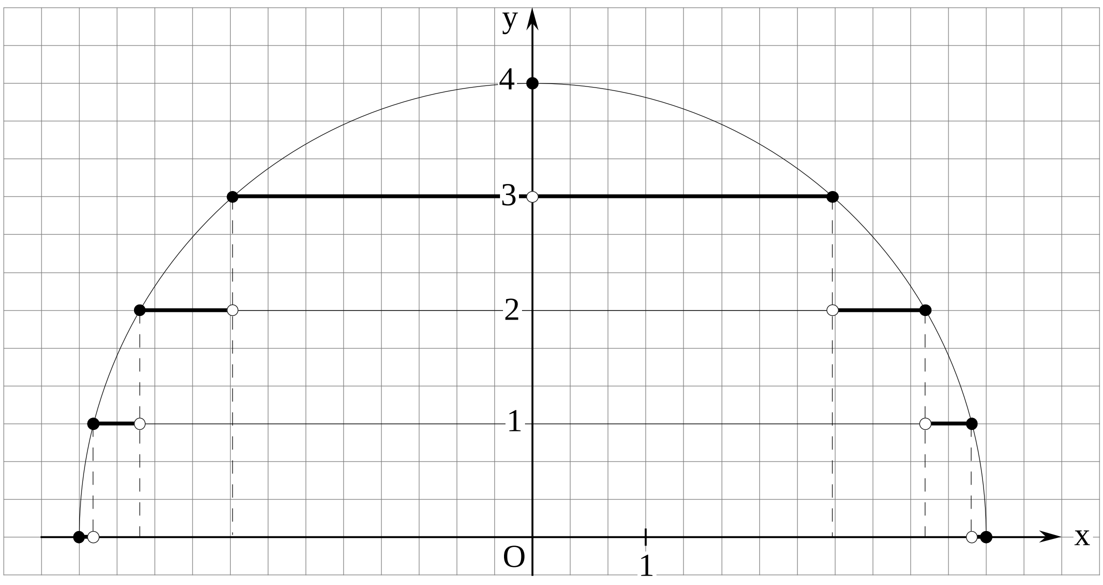
Le domaine de définition de la fonction b est $D_b = \mathbb{R}$ et son ensemble des valeurs est $V_b = \,]-1\,;\,0\,[\, \cup \,]\,0\,;\,1\,[\, \cup \{2\}$.

4. a) Esquisser le graphe de la fonction $A \circ a$,

$$A(x) = E(x) \qquad \text{et} \qquad a(x) = \sqrt{16 - x^2}\,.$$

$D_{A\circ a} = D_a = [-4\,;\,4\,]$.

La représentation graphique de la fonction a est le demi-cercle de centre O et de rayon $r = 4$ dans le demi-plan $y \geq 0$.
On en déduit graphiquement la représentation de la fonction $A \circ a$.

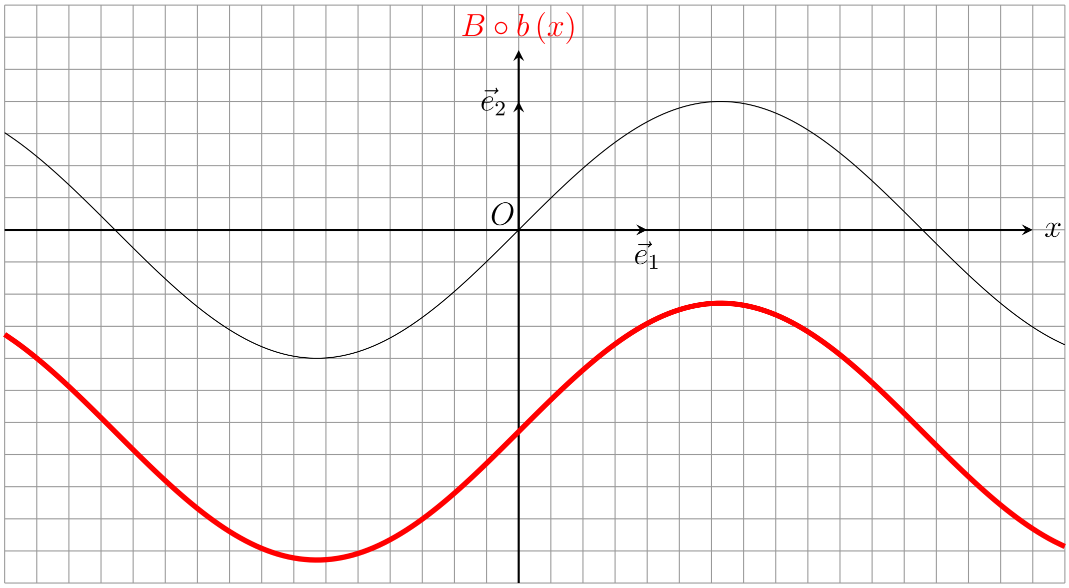


b) Esquisser le graphe des fonctions $B \circ b$ et $b \circ B$,

$$B(x) = x - \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad b(x) = \sin x\,.$$

$$B \circ b\,(x) = B\,[b(x)] = B\,[\sin(x)] = \sin(x) - \frac{\pi}{2}\,.$$

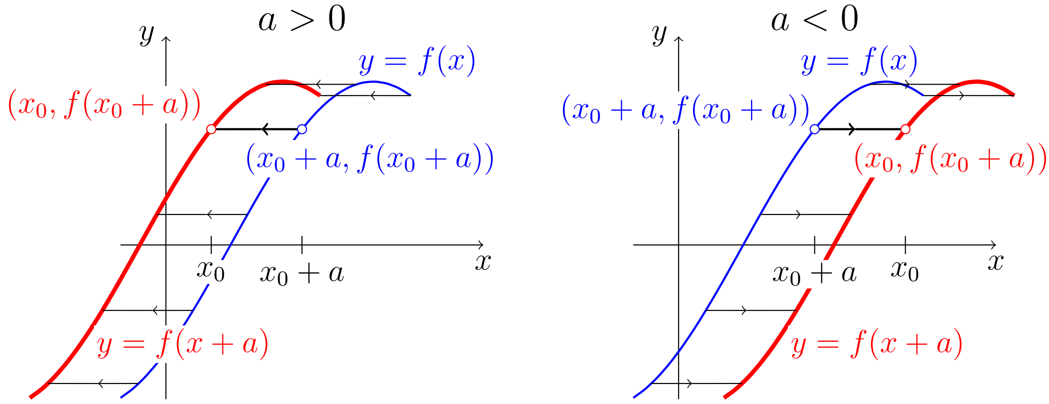
Dans un repère $(O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$, le graphe de $\sin(x) - \frac{\pi}{2}$ se déduit du graphe de $\sin(x)$ par une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2} \cdot \vec{e}_2$.



$$b \circ B\,(x) = b\,[B(x)] = b\left[x - \tfrac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)\,.$$

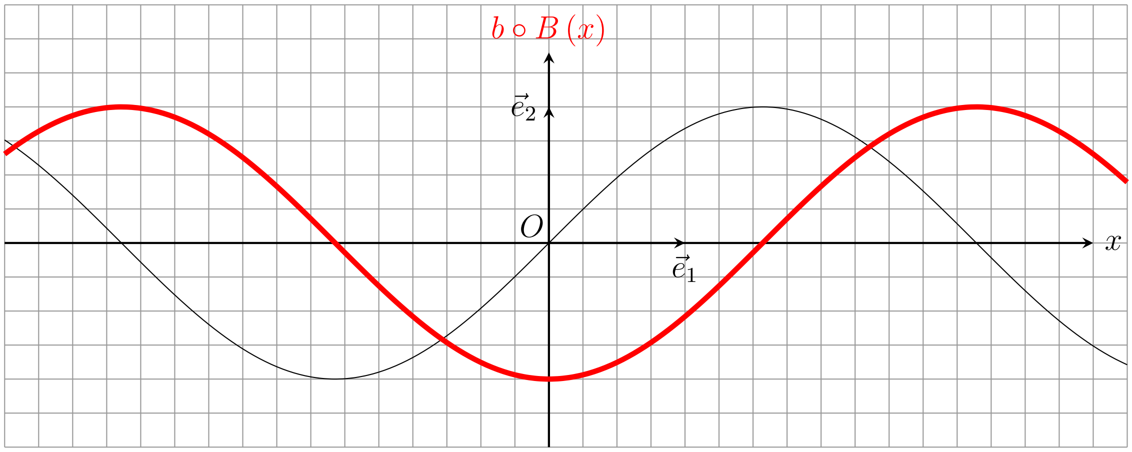
Comment construire le graphe de $f(x+a)$ à partir de celui de $f(x)$?

Soit x_0 une abscisse, on lui ajoute a : $x_0 + a$, on en prend l'image par f : $f(x_0+a)$, puis on associe celle-ci à x_0 : $f(x_0+a)$.



Le graphe de $f(x+a)$ se déduit du graphe de $f(x)$ par translation de $-a$ unités selon l'axe des x.

Dans un repère $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$, le graphe de $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ se déduit donc du graphe de $\sin(x)$ par une translation de vecteur $+\frac{\pi}{2}\cdot\vec{e}_1$.



5. Soit f une fonction définie sur $[-a\,,\,a]$, $a>0$.

Montrer que f peut toujours s'exprimer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On exprime f comme la somme d'une fonction p paire et d'une fonction i impaire définies sur $[-a\,,\,a]$.

$$f(x)=p(x)+i(x)\,.$$

On exploite les propriétés des fonctions p et i en calculant $f(-x)$, $x\in[-a\,,\,a]$.

$$f(-x)=p(-x)+i(-x)=p(x)-i(x)\,.$$

On détermine les fonctions inconnues $p(x)$ et $i(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(-x)$ comme solutions du système suivant :

$$\begin{cases} f(x) &= p(x)+i(x)\\ f(-x) &= p(x)-i(x)\end{cases}$$

On résout ce système en effectuant la somme et la différence des deux équations :

$$f(x)+f(-x)=2\,p(x)\quad\Leftrightarrow\quad p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,,$$

$$f(x)-f(-x)=2\,i(x)\quad\Leftrightarrow\quad i(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\,.$$

$$f(x)\;=\;\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{fonction paire}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{fonction impaire}}\,,\qquad x\in[-a\,,\,a]\,.$$

6. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

a) On fixe $\varepsilon = \frac{1}{10}$; déterminer M tel que $x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon$.

b) A l'aide de la définition, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

---

a) **Première méthode**

Résolution de l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$:

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x - 2(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{1}{10} \quad \text{et} \\[2mm] \dfrac{2}{x-1} > -\dfrac{1}{10} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{10} < 0 \quad \text{et} \\[2mm] \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{10} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{20 - (x-1)}{10(x-1)} < 0 \quad \text{et} \\[2mm] \dfrac{20 + (x-1)}{10(x-1)} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{21 - x}{x-1} < 0 \quad \text{et} \\[2mm] \dfrac{19 + x}{x-1} > 0 \end{cases}$$

$$S = \Big(\,]-\infty, 1\,[\, \cup \,]\,21, +\infty\,[\,\Big) \cap \Big(\,]-\infty, -19\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[\,\Big),$$

$$S =]-\infty, -19\,[\, \cup \,]\,21, +\infty\,[\,.$$

Détermination du seuil M :

On cherche à déterminer $M \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$, sachant que

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -19\,[\, \cup \,]\,21, +\infty\,[\,.$$

On cherche donc des M-voisinages de $+\infty$, c'est-à-dire des intervalles $]\,M, +\infty[$ qui sont entièrement contenus dans l'ensemble solution $]-\infty, -19\,[\cup]\,21, +\infty\,[$.

C'est le cas pour tout $M \geq 21$.

Deuxième méthode

On cherche un seuil $M \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x \in]\,M, +\infty\,[\quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$.

On peut donc se contenter de résoudre l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$ sur un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de type $]\,x_0, +\infty\,[$.

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x - 2(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10}.$$

En posant $x > 1$, on obtient :

$$\left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20-(x-1)}{10\,(x-1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{21-x}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 21\,, \quad (x > 1)\,.$$

Donc tout $M \geq 21$ convient. En effet :

$$x > M \geq 21 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}\,.$$

b) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, montrons qu'il existe un seuil $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon\,.$$

Résolvons l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ par rapport à x $(x \neq 1)$, en considérant ε comme paramètre :

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon\,.$$

En posant $x > 1$, on obtient :

$$\left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2 < \varepsilon\,(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x > 1+\frac{2}{\varepsilon}\,, \qquad (x > 1)\,.$$

Donc si $x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, alors $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

Pour que $x > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$, il faut donc prendre $M \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.