Espaces vectoriels

1. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que les ensembles suivants, munis des lois usuelles, ne sont pas des espaces vectoriels.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}$,

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - 2y + 2 = 0\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y = 0\}$,

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (boule unité),

e) $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \,/\, \deg(P) = 3\}$.

2. Déterminer si les vecteurs $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ sont linéairement dépendants ou non. Dans quel cas est-il possible d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs ?

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

c) $\vec{a}_1 = \vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{a}_2 = \vec{y} + \vec{z}; \quad \vec{v} = -\vec{x} + \vec{y} + 2\vec{z},$
où $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$.

d) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$

e) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

f) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}.$

3. Discuter, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{R}$, la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ p^2 - 4p - 3 \\ p^2 + p + 1 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}.$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-2 \\ 2 \\ 2p \end{pmatrix}$, $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 2(p+1) \end{pmatrix}$, $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix}$.

4. a) Soit $P_2[t]$ l'espace vectoriel des polynômes en t à coefficients réels, de degré plus petit ou égal à 2.

On considère les quatre vecteurs de $P_2[t]$ suivants :

$$\begin{aligned} f_1 &= t+2t^2 & \qquad f_3 &= 2+t \\ f_2 &= 1+2t+t^2 & \qquad f_4 &= 1-3t-t^2 \end{aligned}$$

f_1, f_2, f_3 sont-ils linéairement indépendants ?
Exprimer f_4 comme une combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3.
Cette combinaison linéaire est-elle unique ?

b) Mêmes questions avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

lorsque $A_i \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, 4$.

5. Déterminer $t \in \mathbb{R}$ pour que les matrices suivantes soient linéairement dépendantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 2t & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer, si il y a lieu, que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels (noté : <u>sev</u> par la suite) :

a) $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire }\}$,

b) $V = \{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\}$,

c) $V = \{X \in \mathbb{M}_n \mid AX = XA \text{ où } A \in \mathbb{M}_n \text{ est fixée}\}$,

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

e) $V = \{X \in \mathbb{M}_n \mid M(X + X^t) = 0 \text{ où } M \in \mathbb{M}_n \text{ est fixée et } \det M = 0\}$,

f) $V = \{(x;\, y;\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 4z = 0\}$,

g) $V = \{(a;\, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$,

h) $V = \{p \in P_3[x] \mid p(1) = 0 \text{ et } p'(1) = 0\}$.
(Rappel : $P_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels, de degré plus petit ou égal à n)

7. Soit E un espace vectoriel réel et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ des vecteurs de E.
Montrer la proposition suivante :

si $\vec{v}_{m+1}$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$

alors $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}]_{sev} = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m]_{sev}$

8. a) Chercher les équations paramétriques et cartésiennes des sev de $\mathbb{R}^3$ engendrés par :

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Déterminer x, y, z pour que $\vec{v}$ appartienne au sev de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. Soit E un espace vectoriel réel.
On considère l'ensemble $S = \{\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \ldots, \vec{a}_n\} \subset E$. On suppose que ces n vecteurs sont linéairement indépendants.
Soient encore $S_1,\ S_2 \subset S$ et $S_1,\ S_2 \neq \emptyset$.
On note E_i le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de $S_i\,, i = 1,\,2$.
Montrer l'équivalence suivante :

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \;\Leftrightarrow\; E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$$

10. Soient les vecteurs $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ et $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $W = [\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}]_{\text{sev}}$.

Sachant que :

$$\det[\,\vec{x}-\vec{y};\,\vec{x};\,\vec{z}-\vec{u}\,] + \det[\,\vec{x}+\vec{u};\,\vec{y};\,\vec{u}\,] - 12 = \det[\,3\vec{w};\,2\vec{u};\,\vec{v}\,],$$

déterminer toutes les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour que $\dim W < 3$.

Pour la suite du problème, on pose $t = 1$.
Soit V le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) Est-il possible d'exprimer tout vecteur $\vec{a} \in V$ comme une combinaison linéaire *non unique* de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Justifier votre réponse par un *calcul.*

c) Déterminer une telle combinaison (dépendant d'un paramètre) lorsque $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Puis en déduire les coefficients d'une combinaison linéaire nulle de $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui ne soit pas triviale (c'est-à-dire dont les coefficients ne soient pas tous nuls).

11. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x.

a) Les polynômes $f_1 = x^3 - x^2$, $f_2 = x^3 - x$, $f_3 = x^3 - 2x^2 + x$ sont-ils linéairement indépendants ?

b) Quelle est la dimension du sev H engendré par f_1, f_2, f_3 ?
Donner une base de ce sev.

c) Le polynôme $p(x) = -2x - 3x^2 + 5x^3$ appartient-ils à H ?
Si oui, donner ses composantes dans la base choisie.

12. Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes en x, à coefficients réels et de degré plus petit ou égal à n.
Pour tout entier $k = 0, 1, \dots, n$, on pose :

$$p_k(x) = 1 + x + \dots + x^k , \quad \text{degré } p_k(x) = k$$

a) Montrer que $\mathcal{B}\,(p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x))$ est une base de P_n.

b) Déterminer dans cette base les composantes d'un polynôme quelconque $q(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n$.

13. On donne deux espaces vectoriels réels avec leurs lois : $(E\,, +_E\,, \cdot_E)$, et $(F\,, +_F\,, \cdot_F)$.
Ils sont de dimension n et m respectivement et ont pour bases :
$\mathcal{B}_E\,(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_F\,(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

a) Définir une loi de composition interne, notée "+", et une loi de composition externe, notée "$\cdot$", telles que l'ensemble $(E \times F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. Déterminer l'élément neutre de cet ensemble.

b) Montrer que

$$\mathcal{B}_{E\times F} = \big((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{u}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{u}_m) \big)$$

est une base de $E \times F$ et en déduire la dimension de cet ensemble.

c) On pose $E = \mathbb{R}^2$ et $F = P_1$ (ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal à 1).
Expliciter la base de $\mathbb{R}^2 \times P_1$ et donner les composantes d'un élément quelconque de cet ensemble.

14. Soit V le sev de $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$ engendré par :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Les matrices A, B et C sont-elles linéairement indépendantes ou dépendantes ?

Déterminer les composantes de $M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base de V.

15. Soit A une matrice fixée de $\mathbb{M}(n \times p, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.

On considère le sous-espace vectoriel donné V de $\mathbb{M}(p \times r, \mathbb{R})$ et le sous-ensemble suivant de $\mathbb{M}(n \times r, \mathbb{R})$:

$$W = \{X \in \mathbb{M}(n \times r, \mathbb{R}) \mid \exists\, P \in V\,,\ X = A \cdot P\}\,.$$

a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n \times r, \mathbb{R})$.

b) On fixe $n = 3$, $p = r = 2$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et V est le sous-espace vectoriel des matrices carrées symétriques d'ordre 2 : $V = \{P \in \mathbb{M}_2 \mid P^t = P\}$.

Déterminer une base et la dimension de W.

16. On considère $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soient :

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R}) \mid a\,,\ b \in \mathbb{R} \right\}$ et les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

a) Montrer que U est un sev de $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$.

b) Calculer la dimension de V, sous-espace de $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$ engendré par A, B, C. Puis donner la forme générale d'une matrice $X \in V$.

c) Soit $K = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R})$. Déterminer α et β pour que $K \in U \cap V$.

17. Soient A, $B \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R})$, 2 matrices fixées et U, V des sev de $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'ensemble :

$$E = \{Z \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R}) \mid \exists\, X \in U \text{ et } \exists\, Y \in V \text{ tels que } Z = AX + YB\}$$

est un sev de $\mathbb{M}(2,\mathbb{R})$.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$U = \left\{ X \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R}) \mid \exists a, b, t \in \mathbb{R}, X = \begin{pmatrix} a & b \\ t & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$V = \left\{ Y \in \mathbb{M}(2,\, \mathbb{R}) \,|\, \exists c,\, d \in \mathbb{R},\, Y = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une base et la dimension du sev E défini sous a).

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que l'ensemble des matrices S solutions de :

$$M\,(ST - MT) = 0 \qquad \forall\, T \in \mathbb{M}(2,\, \mathbb{R}), \quad \det T \neq 0$$

forme un sous-ensemble de E. Ce sous-ensemble est-il un sev de E ?

18. Soit l'ensemble $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = c - b \right\}$.

a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $V = [E_1,\, E_2,\, E_3,\, E_4]_{\text{sev}}$ avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\; E_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer une base et la dimension de V. Puis donner l'expression générale d'une matrice $M \in V$.

c) Montrer que $V = W$.

d) On note U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices S et T suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $U \cap W$.

Soit B une matrice appartenant à $U \cap W$ et telle que $\det B = 2$.
Calculer les composantes de B par rapport à la base choisie.

19. Soit $P_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à 3.

a) Montrer que $V_a = \{p(x) \in P_3 \mid p(a) = 0\}$ est un sev de $P_3[x]$.

b) Soit $W = [p,\, q,\, r,\, s]_{sev}$ où $p = x^3 - 3x^2 + 2x$, $q = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $r = x^2 + 2x$ et $s = 5x - 2$.
Déterminer la dimension de W.

c) Chercher une base du sev $U = V_1 \cap W$.

d) Soit $u = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4$. Montrer que u est élément de U et donner ses composantes par rapport à la base trouvée.

e) Montrer que : $V_1 \cap W = V_1 \cap V_2$.

20. On note P_3 l'ensemble des polynômes en x à coefficients réels de degré plus petit ou égal à 3 et F le sous-ensemble suivant : $F = \{s(x) \in P_3 \mid s'(-1) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de P_3.

b) On considère les deux sous-espaces vectoriels de P_3 suivants :
$U = \{p(x) \in P_3 \,|\, p(x) = ax^2 + 2bx \text{ et } p'(-1) = 0\}$ et $V = [\,2x^2 - 6\,,\ x + 2]_{\text{sev}}$.
Déterminer une base B et la dimension du sous-espace vectoriel W suivant :

$$W = \{r(x) \in P_3 \mid \exists\, p(x) \in U\,,\ \exists\, q(x) \in V \text{ tels que } r(x) = p(x) + x\,q(x)\}$$

c) Soit $t(x) = -7x^3 - x^2 + 19x$.
Montrer que $t(x) \in W$ et donner ses composantes par rapport à la base B.

d) Montrer que $W \subset F$.
Compléter la base B afin d'obtenir une base B' de F.

21. Soit E un espace vectoriel réel et F et G deux sous-espaces de E. On définit

- *la somme* de F et G, notée $F + G$, ainsi :

$$F + G = \{\vec{w} \in E \,|\, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\,,\ \vec{u} \in F\,,\ \vec{v} \in G\}$$

  Pour tout vecteur de $F + G$, il existe une telle décomposition, mais on ne sait rien sur l'unicité de cette décomposition.

- Lorsque la décomposition de tout vecteur de $F + G$ est unique, on dit que la somme est *directe*. On note alors cette somme $F \oplus G$.

a) Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Etudier succintement la nature géométrique de $F + G$ dans les cas où F et G sont deux droites de l'espace passant par O ou une droite et un plan passant par O.

c) Montrer que
si $F = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]_{sev}$ et $G = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m]_{sev}$ alors $F+G = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m]_{sev}$.

d) F est la droite d'équation : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$
G est le plan d'équation : $y + z = 0$
H est le plan d'équation : $x - y = 0$
et
$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que

- $\vec{w} \in G + H$ et que sa décomposition selon G et H n'est pas unique,
- $\vec{w} \in G + F$ et que sa décomposition selon G et F est unique.

22. Soit E un espace vectoriel réel.
F et G sont deux sous-espace de E, on considère leur somme $F + G$.
Montrer que la somme est directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

23. a) On note $\mathbb{M}_n$ l'ensemble des matrices d'ordre n.
$F = \{M \in \mathbb{M}_n \,|\, M = M^t\}$ est l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
$G = \{M \in \mathbb{M}_n \,|\, M^t = -M\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n$ (à montrer éventuellement).

Montrer que $\mathbb{M}_n = F \oplus G$.

b) $F = \{M \in \mathbb{M}_n \,|\, i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0\,,\, i,\, j = 1, ..., n\}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
$G = \{M \in \mathbb{M}_n \,|\, i < j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0\,,\, i,\, j = 1, ..., n\}$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n.

Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n$ (à montrer éventuellement).

Montrer que $\mathbb{M}_n = F + G$.

c) On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \,, \mathbb{R}) \,|\, f(x) = f(-x)\}$ est l'ensemble des applications paires.

$G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(-x) = -f(x)\}$ est l'ensemble des applications impaires.

Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Réponses

2. a) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, $\vec{v} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

b) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement dépendants,
il est impossible d'exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

c) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants,
il est impossible d'exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

d) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ sont linéairement indépendants, $\vec{v} = -\frac{33}{14}\,\vec{a}_1 - \frac{17}{7}\,\vec{a}_2 + \frac{43}{14}\,\vec{a}_3$.

e) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, $\vec{v} = \vec{0} = 0\,\vec{a}_1 + 0\,\vec{a}_2$.

f) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement dépendants,
$\vec{v} = -8\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2$: combinaison linéaire non unique.

3. a) $p = 1$: vecteurs linéairement dépendants,
$p \neq 1$: vecteurs linéairement indépendants.

b) $p = -2$ ou $p = 1$: vecteurs linéairement dépendants,
$p \notin \{-2\,,\ 1\}$: vecteurs linéairement indépendants.

c) $p \in \{0\,,\ 1\,,\ 2\}$: vecteurs linéairement dépendants.
$p \notin \{0\,,\ 1\,,\ 2\}$: vecteurs linéairement indépendants.

4. a) f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendants,
$f_4 = f_1 - 3\,f_2 + 2\,f_3$: combinaison linéaire unique.

b) A_1, A_2 et A_3 sont linéairement dépendants,
$A_4 = 2\,A_1 + 0\,A_2 + 3\,A_3$: combinaison linéaire non unique.

5. $t = -6$.

6. a) V est un sev de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

b) V n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$,

c) V est un sev de $\mathbb{M}_n$,

d) V n'est pas un sev de $\mathbb{M}_2$,

e) V est un sev de $\mathbb{M}_n$,

f) V est un sev de $\mathbb{R}^3$,

g) V n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$,

h) V est un sev de $P_3[x]$.

8. a) i) Trois vecteurs linéairement indépendants, ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

ii) droite : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ou $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$.

iii) plan : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $y = 0$.

b) i) $y = -2$ et $z = -1$,

ii) $z = 15$,

iii) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \notin [\vec{a}\,,\ \vec{b}]_{sev}$.

10. a) $t = -1$ ou $t = 2$.

b) Oui, car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

c) Par exemple : $\vec{0} = -\vec{a} - 3\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 2\,\vec{w}$.

11. a) f_1, f_2, f_3 sont linéairement dépendants.

b) $\dim H = 2$.

c) $p(x) = \frac{7}{2}\,f_2 + \frac{3}{2}\,f_3$.

14. $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $(A,\ B)$

15. b) Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$(J\,,\ K)$ est une base de W et $\dim W = 2$.

16. b) $\dim V = 2$, $X = \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}$.

c) $\alpha = 0$ et $\beta = -4$.

17. b) Soient $E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(E_1'\,,\ E_2'\,,\ E_3')$ est une base de E et $\dim E = 3$.

c) Le sous-ensemble des matrices S n'est pas un sev de E.

18. b) $(E_1\,,\ E_2\,,\ E_3)$ est une base de V, $\dim V = 3$.

d) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, (J) est une base de $U \cap W$, $\dim(U \cap W) = 1$.
Il y a deux matrices B :
$B = J$ (composante 1) ou $B = -J$ (composante -1).

19. b) $\dim W = 3$.

c) $(q\,,\ r - s)$ est une base de U.

d) $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(q\,,\ r - s)$

20. b) $B = (x^3 - 3x\,,\ x^2 + 2x)$ est une base de W et $\dim W = 2$.

c) $t(x) = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base B.

d) $B' = (x^3 - 3x\,,\ x^2 + 2x\,,\ 1)$ est une base de F.