Peter Wittwer

Analyse I – Série 12

Echauffement. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les séries de Mac-Laurin et rayons de convergence des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \sin(x)$ *ii)* $f(x) = \cos(x)$ *iii)* $f(x) = e^x$

iv) $f(x) = e^{-x}$ *v)* $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ *vi)* $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

vii) $f(x) = \mathrm{Log}(1+x)$ *viii)* $f(x) = \mathrm{Log}(1-x)$

Exercice 1. (Formules de dérivées)

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

i) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ *ii)* $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

iii) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ *iv)* $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Log}(1+x) = \dfrac{1}{1+x}$

Exercice 2. (Séries entières)

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

i) $a = 0$ *ii)* $a = 2$

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Déterminer la série de Taylor de $f(x)$ autour de a et son domaine de convergence.

i) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, *ii)* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Exercice 4. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver trois termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ *ii)* $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

iii) $f(x) = \mathrm{Arctg}(x)$ *iv)* $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}$

Exercice 5. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

Q1 : Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a.

Q2 : Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$.

Q3 : Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Exercice 6. (V/F : Fonction définie par un développement limité)

Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Q1 : Alors f est continue en $x = 0$.

Q2 : On a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.

Q3 : Alors f est dérivable en $x = 0$.

Q4 : $f \in C^1(]-1, 1[)$.

Q5 : Si $f \in C^2(]-1, 1[)$, alors $f''(0) = c$.

Q6 : $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6\varepsilon(x)$.

Exercice 7. (Primitives)

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

i) $f(x) = \sin(x)$ *ii)* $f(x) = \cos(x)$ *iii)* $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

iv) $f(x) = e^x$ *v)* $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ *vi)* $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

vii) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$ *viii)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *ix)* $f(x) = (ax + b)^s \quad (s \neq -1)$

x) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ *xi)* $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ *xii)* $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

xiii) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x)}$ *xiv)* $f(x) = x\exp(x^2)$ *xv)* $f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1} \quad (s \neq -1, a, p \neq 0)$

Exercice 8. (Intégration immédiate)

Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$ *ii)* $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ *iii)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ *iv)* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sh}(x)}{e^x+1}\,dx$