(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	4	
2	$6\frac{1}{2}$	
3	5	
4	$4\frac{1}{2}$	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 4 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soient $D = \begin{pmatrix} 10 & a-2 \\ a-3 & 5 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et I_2 la matrice unité d'ordre 2.

On considère l'équation matricielle en $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ suivante

$$M\,X\,(D - 4I_2) \;=\; 0\,, \qquad \forall\, M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{tel que } \det M \neq 0$$

(a) Résoudre cette équation pour $a = 0$.

(b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de telle manière que l'équation

$$M\,X\,(D - 4I_2) \;=\; M\,D\,, \qquad \forall\, M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{tel que } \det M \neq 0$$

admette une solution unique.
Puis résoudre cette équation pour $a = -1$.

Solution:

(a) D'où l'ensemble des solutions :

$$S \;=\; \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, X = \begin{pmatrix} x & 2x \\ z & 2z \end{pmatrix}\,,\; x\,, z \in \mathbb{R}\}$$

(b) La solution est unique ssi $a \in \mathbb{R} - \{0\,,\, 5\}$.

$$X \;=\; \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Question 2 (à 6½ points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous, dépendant d'un paramètre réel p,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 2p+1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelles valeurs de p les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Soient

$$V = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -2\alpha-1 \\ 2\alpha-3 \end{pmatrix}\,,\; \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Discuter la dimension de V en fonction du paramètre p.
Dans chaque cas, donner une base et déterminer pour quelles valeurs de α le vecteur $\vec{v}$ appartient à V (lorsque c'est possible).

(c) On pose $p = -2$ et soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'équation cartésienne de V et montrer que $\vec{u}$ appartient à V.
Déterminer les composantes de $\vec{u}$ dans une base orthogonale de V contenant $\vec{c}$.

Rappel : les vecteurs d'une base orthogonale sont perpendiculaires mais ne sont pas unitaires.

Solution:

(a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linéairement indépendants ssi $p \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$.

(b)
- Si $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$: $V = \mathbb{R}^3$.
  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension trois.
  $\vec{v} \in V$ pour toute valeur de α.
- Si $p = -2$: $V = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]_{\text{sev}}$.
  $\mathcal{B} = (\vec{b}, \vec{c})$ et $\dim V = 2$.

  $\vec{v} \in V$ ssi $\det[\vec{b}, \vec{c}, \vec{v}] = 0$ ssi $p = -2$ et $\alpha = -5$.
- Si $p = 1$: $V = \left[\vec{a}\right]_{\text{sev}}$
  $\mathcal{B} = (\vec{a})$ et $\dim V = 1$.

  Si $p = 1$, $\vec{v} \notin V$ quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Equation cartésienne de V : $x - y - z = 0$

Soit $\vec{w}$ perpendiculaire à $\vec{c}$ et appartenant à V : par exemple $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{c}, \vec{w})$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Question 3 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, V un sous espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices fixées de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ notées P et Q.

On considère

$$W = \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists\, A \in V\,,\ XQ = PA\}\,.$$

(a) Montrer que W est un sous espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour la suite, on pose $n = 2$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
et
$V = \{A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 0\}$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice B telle que $MQ = PB$ et montrer que B appartient à V.
Que peut-on en déduire pour M ?

(c) Déterminer une base et la dimension de W.
Si M définie sous b) appartient à W, en donner ses composantes par rapport à la base choisie.

Solution:

(b) $B = P^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\exists B \in V$ tel que $MQ = PB \Leftrightarrow M \in W$.

(c) $\mathcal{B}_W = (L_1\,, L_2,\, L_3)$ avec

$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Question 4 (à 4½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Soient $p\,, q$ et r trois polynômes de $P_3[x]$ donnés par

$$p = x^3 - 3x^2 - 2x + 1\,, \quad q = x^3 - 5x^2 - 1\,, \quad r = -x^3 + 5x - 4$$

et le polynôme $s = 2p - 2q + r$.

(a) On définit le sous espace V de $P_3[x]$ suivant

$$V = [\, p\,, q\,, r\,, s\,]_{sev}$$

Déterminer une base contenant le polynôme r ainsi que la dimension de V.

(b) Soit encore le sous espace W de $P_3[x]$

$$W = \{\, t \in P_3[x] \mid t(0) = 0 \,\}$$

Déterminer l'expression générale d'un polynôme de $V \cap W$.
Montrer que le polynôme s appartient à $V \cap W$.

Solution:

(a) Par exemple $\mathcal{B} = (q\,, r)$ et $\dim V = 2$

(b) $t \in V$ donc $t = \alpha q + \beta r$
$t \in W$ donc $t(0) = 0$
D'où
$t = \beta(r - 4q)\,,\ \beta \in \mathbb{R}$