Rang et systèmes d'équations linéaires

1. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 3 \\ 2a-1 & 2a & 4-a \\ 1 & 2a^2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -17 & 11 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 9 & -7 & 8a \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 8-k & 2 & 3 \\ 1 & 9-k & 3 \\ 1 & 2 & 10-k \end{pmatrix}$ où k est un paramètre réel.

Déterminer k pour que le noyau de l'application linéaire f, de matrice A, soit de dimension 1.

3. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}$,

et $P'(1;\ 1;\ 2)$.

Discuter le rang de f en fonction du paramètre m.
Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que $f^{-1}(\overrightarrow{OP'})$ ne soit pas vide.

4. a) Déterminer le rang de l'endomorphisme f suivant :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \vec{e_3} \\ f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2} - \vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) = -5\vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 3\vec{e_3} \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il à $\operatorname{Im} f$?

Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ appartienne à $\operatorname{Im} f$.

b) Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m(m-1) & -m \\ m-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m(m-2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} m^2 \\ 0 \\ 2-m \end{pmatrix}.$$

Discuter le rang de f en fonction du paramètre m.
Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que pour que $\vec{c}$ appartienne à $\operatorname{Im} f$.

5. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est :

$$M_g = \begin{pmatrix} \alpha & 2(\alpha+1) & (\alpha+2)^2 \\ 0 & (\alpha+1) & 3(\alpha+1) \\ -\alpha & -2(\alpha+1) & -1 \end{pmatrix},$$

et $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ m^2-3 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, m \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs des paramètres α et m de sorte que $\vec{a} \in \operatorname{Im} g$.

6. Déterminer le rang des systèmes suivants, puis déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour qu'ils admettent des solutions :

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = k \end{cases}$

7. Déterminer le rang des systèmes suivants, puis déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour qu'ils admettent une solution unique :

a) $\begin{cases} x + ky + 2z = 3 \\ 8x + 3ky + z = 3 \\ (k+1)x + y + z = 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} kx - 2y = k \\ -3x + 6ky = 0 \\ 2kx - 4y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

8. Discuter l'existence et l'unicité des solutions des systèmes suivant en fonction du paramètre réel m :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = m-1 \\ -x - y - 2z = 1 \\ x - y - 4z = -m^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + my + z = m+1 \\ (3-m)x + 2y + z = m^2-1 \\ (2m-2)x + 4y + mz = -4 \end{cases}$

9. Dans l'espace, on considère les trois plans suivants :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha & : & x & + & y & - & z & = & 1 \\ \beta & : & 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ \gamma & : & x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que :

a) $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$;

b) leur intersection est une droite ; déterminer alors les équations paramétriques de cette droite.

10. Déterminer le rang des systèmes suivants et l'existence des solutions ; puis résoudre ces systèmes.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -6x & + & 3y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

11. Déterminer le rang des systèmes suivants et l'existence des solutions ; puis résoudre ces systèmes.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 17y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ -2x & + & y & + & 4z & = & 4 \\ 10x & - & 5y & - & 6z & = & -10 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 5z & = & -7 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 14 \end{array}\right.$

12. Déterminer la solution des systèmes suivants à l'aide d'une solution particulière et de la solution du système homogène associé.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & + & t & = & 2 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 2t & = & 5 \\ 10x & - & 8y & + & 11z & + & 5t & = & 12 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & + & 5t & = & 5 \end{array}\right.$

Réponses

1. rg $A = 1$ rg $B = 1$

rg $C = 2$ rg $D = 2$

rg $E = 3$	si	$a \notin \{1;\ -\frac{1}{2}\}$
rg $E = 2$	si	$a = -\frac{1}{2}$
rg $E = 1$	si	$a = 1$

rg $F = 3$	si	$a \notin \{-1 - \frac{\sqrt{33}}{2};\ -1 + \frac{\sqrt{33}}{2};\ 2\}$
rg $F = 2$	sinon	

2. $k = 13$

3. $f^{-1}(\overrightarrow{OP'})$ n'est pas vide $\forall m \in \mathbb{R} - \{2\}$

4. a) $\vec{v} \notin \operatorname{Im} f$
$\vec{w} \in \operatorname{Im} f \iff m = -6$

b) $\vec{c} \in \operatorname{Im} f \iff m \neq 0$

5. $\alpha = -1$: rg $A = 1$
$\alpha = -3$: rg $A = 2$
$\alpha = 0$: rg $A = 2$
$\alpha \notin \{-3;\ -1;\ 0\}$: rg $A = 3$

$$\vec{a} \in \operatorname{Im} g \text{ si et seulement si } \begin{cases} \alpha \notin \{-3;\ -1;\ 0\} \text{ et } \forall m \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = -3 \text{ et } m = \pm 1 \end{cases}$$

6. a) $k \neq -2$

b) $k = 5$

7. a) $k \notin \{-3;\ 1\}$

b) $k = \frac{3}{2}$

8. a) $m = -1$: le système possède une infinité de solutions (l'ensemble des solutions défini une droite dans $\mathbb{R}^3$)
$m \neq -1$: le système n'a pas de solution

b) $m \notin \{-3; 2\}$: la solution est unique
$m = -3$: le système possède une infinité de solutions (l'ensemble des solutions défini une droite dans $\mathbb{R}^3$)
$m = 2$: le système n'a pas de solution

9. a) $k = -3$

b) $k = 2$ et
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

10. a) $(x;\, y;\, z) = (0;\, 0;\, 0)$

b) $(x;\, y;\, z) = (1;\, 2;\, -3)$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

d) Le système n'a pas de solution.

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

11. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

b) Le système n'a pas de solution.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ 0 \\ 5/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

d) $(x;\, y;\, z) = (1;\, 2;\, -2)$

12. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$