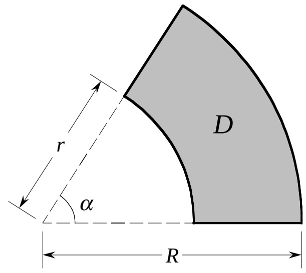
Série 3

1. Le domaine D est un secteur de couronne circulaire d'angle au centre $\alpha = 1$ radian, de rayon extérieur R et de rayon intérieur r, (R et r variables).

Le domaine D a pour périmètre une valeur donnée L.



a) Déterminer rigoureusement la variation de l'aire A du domaine D en fonction de R ou r.

Déterminer R et r de sorte que l'aire A soit maximale.

b) On pose $L = 24$. Représenter graphiquement, avec soin, la variation de l'aire A en fonction de la variable choisie (R ou r).

Axe des abscisses : 1 unité = 2 carrés, axe des ordonnées : 3 unités = 1 carré.

2. Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.

a) $A = \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$.

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}$.

3. Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes puis simplifier.

a) $A = \dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$. b) $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-2} - 2\,\sqrt[3]{7}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $A(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}$ et $a(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x) = \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6+1}$ et $b(x) = x^3\,\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^4+x^3}$ et $c(x) = x\,\sqrt[3]{x+1}$,

d) $D(x) = \sqrt{x^6}$ et $d(x) = x^2\,|x|$,

e) $E(x) = \sqrt[4]{x^2}$ et $e(x) = \sqrt{x}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{-x^2 - x + 6} = -(x+1)\,,$

b) $\dfrac{x - 2\,(1 + \sqrt{x-1})}{2x - \sqrt{x-1} - 5} = 1\,.$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{x + m^2} = x + m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Réponses de la série 3

1. a) $R_{\max} = \frac{3\,L}{8}$ et $r_{\max} = \frac{L}{8}\,.$

2. a) $A = p^{2m\,(2m-1)}\,.$

b) $B = (3\,p - 1)^2\,(2\,q)^{1/3}\,.$

3. a) $A = \sqrt{3} - \sqrt{2}\,.$

b) $B = -(\sqrt[3]{7} + 2)^2\,.$

5. a) $S = \{-\frac{5}{2}\}\,.$

b) $S = \{\,2\,\}\,.$

6.
- si $m \in\,]-\infty\,, 0\,[\,,$ alors $S = \{1 - 2m\}\,,$
- si $m \in\, [\,0\,, 1\,]\,,$ alors $S = \{0\,, 1 - 2m\}\,,$
- si $m \in\,]\,1\,, +\infty\,[\,,$ alors $S = \{0\}\,.$
