EPFL - SMA | Analyse IV
Prof. R. Dalang | Printemps 2017

Test blanc | Sections MT et SV | 27 avril 2017

— Tous vos calculs et raisonnements doivent être justifiés et figurer sur votre copie.
— Durée pour le test : 1h45.
— Les seuls documents autorisés sont :
- un résumé personnel manuscrit de 4 pages (2 feuilles A4 recto-verso) maximum,
- une photocopie des pages 118 et 127 du livre de Dacorogna et Tanteri (Tables des transformées de Fourier et Laplace),
- Tables Numériques et Formulaires (CRM ou équivalent).

Exercice 1. (20 minutes)

(a) Calculer la série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ sur $[-1, 1[$, étendue par 2-périodicité.

(b) À l'aide de la question (a), et des propriétés des séries de Fourier, trouver la série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = x^2$ sur $[-1, 1[$, étendue par 2-périodicité. On indiquera tous les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de g.

(c) À l'aide de votre réponse à (b), déterminer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(d) Soit g la fonction définie en (b) ci dessus. Si on vous avait donné les coefficients de la série de Fourier de g, pourriez-vous l'utiliser pour déduire les coefficients de la série de Fourier de la fonction f définie en (a) ci-dessus ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. (25 minutes)

À l'aide de la Table et des propriétés de la transformée de **Laplace**, déterminer sans long calcul la transformée de Laplace de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les quatre cas suivants, en précisant l'abscisse de convergence :

(a) $f(t) = e^{-2t}(4\cos(3t) - 7\sin(5t))$.

(b) $f(t) = (t^2 + e^{-t})^2$.

(c) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ e^{3(t-2)}\sin(4(t-2)) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$.

(d) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$.

Tournez la page, s.v.p.

Exercice 3. (20 minutes)

(a) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, trouver une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dont la transformée de **Laplace** est

$$F(z) = \frac{z^3 + 4z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} .$$

(b) Donner une abscisse de convergence de la fonction trouvée en (a).

Exercice 4. (25 minutes)

À l'aide d'un calcul de résidu, trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont la transformée de **Fourier** est

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 6\alpha + 10}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$