Contrôle d'algèbre linéaire N°3

Durée : 1 heure ... minutes Barème sur 15 points

NOM :

PRENOM :

Groupe

1. Dans le plan, muni d'une origine O et de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les trois endomorphismes suivants :

- s : symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{a})$ tel que $\angle(\vec{e}_1; \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$,
- r : rotation de centre O et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{48}$,
- p : projection orthogonale du plan sur la droite $2y - x = 0$.

a) Relativement à la base B, déterminer la matrice M_g de l'application linéaire $g = s \circ r^8 \circ p$

b) Déterminer $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$.

c) Déterminer la nature géométrique de g.

... pts

2. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On considère une affinité f d'axe $a : 2y - x = 0$ et de rapport $\lambda = -2$.
Le point $P(8, 6)$ a pour image par f le point $P'(2, -3)$.

a) Déterminer la direction $\vec{v}$ de l'affinité.
Soit $B' = (\vec{a}, \vec{v})$ où $\vec{a}$ est un vecteur parallèle à l'axe a. Déterminer dans B' la matrice M'_f de f.

Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\begin{cases} g(\vec{e}_1) + 6\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_2 = \vec{0} \\ g(2\,\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = (2\,\alpha - 4)\,\vec{e}_1\,, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Relativement à la base B, calculer :

- la matrice, dépendante de $\alpha \in \mathbb{R}$, M_g de l'application g
- la matrice de l'application $l = 4f - g$.

Déterminer le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que l admette une droite de points fixes.

... pts

Tourner la page

3. Dans l'espace muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3)$, on considère l' endomorphisme f défini par sa matrice M par rapport à B :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est bijective.

b) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un plan α dont on demande l'équation cartésienne.

c) Pour tout vecteur vecteur $\vec{x}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, calculer : $(f \circ f)(\vec{x})$.

d) Soit $\vec{a}$ un vecteur normal à α, calculer $f(\vec{a})$.
Déduire des résultats précédents la nature géométrique de f; donner la matrice de f dans une base judicieusement choisie à préciser.

... pts

4. On note P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à deux.

On munit P_2 de la base canonique $E = (1\,;\, x\,;\, x^2)$, et de la base

$E' = (3\,;\, 1 + x(1-x)\,;\, x(1+2x))$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $B = (\vec{e}_1\,,\, \vec{e}_2)$ et de la base $B' = (\vec{u}\,,\, \vec{v})$ définie par

$$\begin{cases} \vec{u} - \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{0} \\ 2\vec{e}_1 - \vec{v} - 4\,\vec{e}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

On considère l'application linéaire f de P_2 dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice associée est $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par rapport à E et B' .

a) Déterminer la matrice de passage de la base E à E' ainsi que la matrice M' de f par rapport à E' et B' .

b) Soit la droite d dont l'équation cartésienne par rapport à la base B est

$$3x + 2y + 1 = 0.$$

Déterminer :

- l'équation cartésienne de d par rapport à la base B'
- les composantes de $f^{-1}(d)$ par rapport à la base E'.

... pts