Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 7

Applications : exercice 30

(a) On note E l'ensemble des points du plan. Les translations sont des applications bijectives de E dans E.

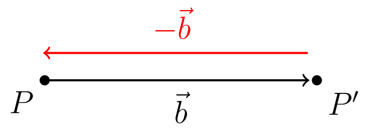
$$\begin{array}{rccl} g: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & g(P) = P' \text{ tel que } \overrightarrow{PP'} = \vec{b} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & f(M) = M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{a} \end{array}$$

On suppose que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

- $\begin{array}{rccl} g^{-1}: & E & \longrightarrow & E \\ & P' & \longmapsto & P \end{array}$

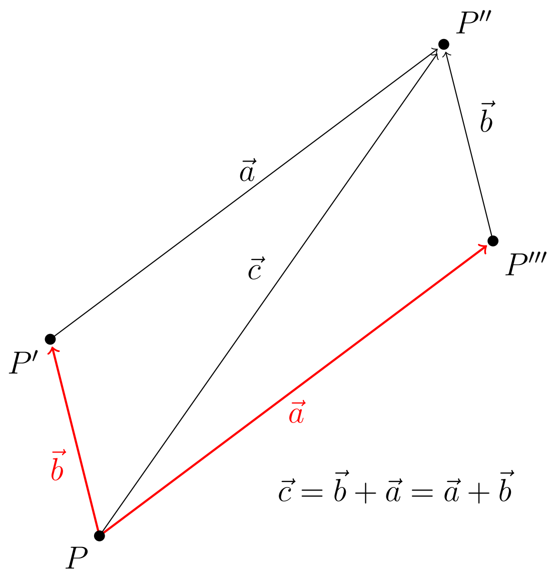
  tel que $\overrightarrow{P'P} = -\overrightarrow{PP'} = -\vec{b}$

  Ainsi g^{-1} est une translation de vecteur $-\vec{b}$.



- $\begin{array}{rccl} f\circ g: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P'' = f(g(P)) = f(P') \end{array}$

  tel que $\overrightarrow{PP'} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{P'P''} = \vec{a}$ donc $\overrightarrow{PP''} = \vec{b} + \vec{a}$.



- $$\begin{array}{rccl} g \circ f : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & g(f(P)) = g(P''') = P'' = (f \circ g)(P) \end{array}$$

  En effet :

  $g(f(P)) = g(P''') = P''$ tel que $\overrightarrow{PP'''} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{P'''P''} = \vec{b}$

  donc $\overrightarrow{PP''} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

  Autrement dit : $g \circ f = f \circ g$.

  Remarque : si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, les résultats sont les mêmes.

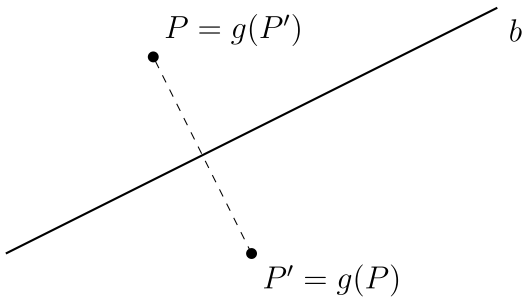
(b) $$\begin{array}{rccl} g : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & g(P) = P' \text{ tel que } P' \text{ est le symétrique de } P \text{ par rapport à } b \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rccl} g^{-1} : & E & \longrightarrow & E \\ & P' & \longmapsto & g^{-1}(P') = P \ \text{ : symétrique de } P' \text{ par rapport à } b \end{array}$$

Ainsi : $g^{-1} = g$ car $g^{-1}(P') = P = g(P')$

Autrement dit : $g \circ g = g^2 = Id$.

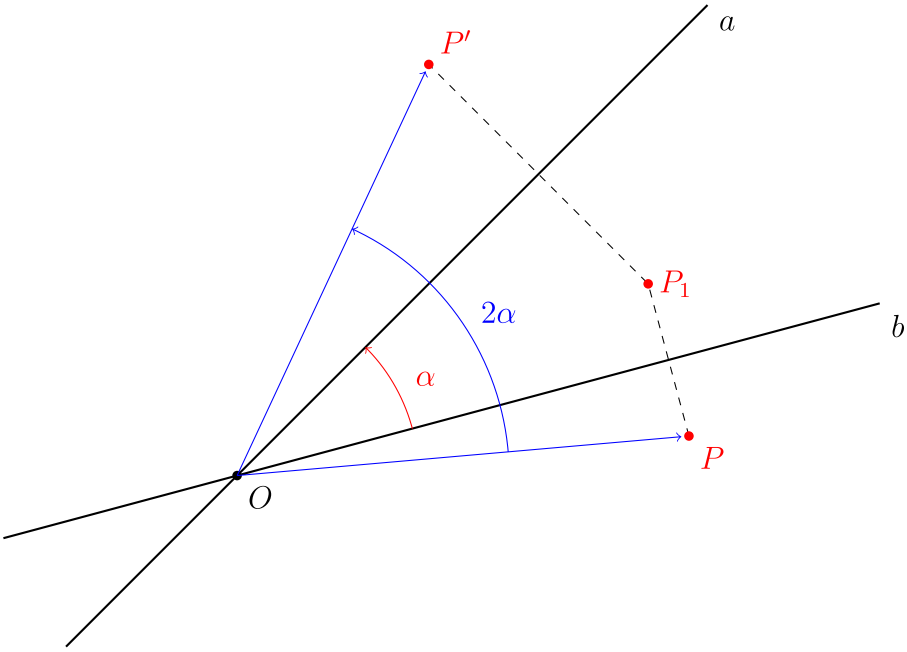


Il y a deux cas à envisager : les axes a et b sont concourants ou ils sont parallèles.

Rappel : soit r est une rotation de centre O et d'amplitude φ : $r_{O,\varphi} = s_c \circ s_d$ où s_d et s_c sont des symétries d'axes concourants en O et tels que l'angle orienté entre les droites d et c vaut $\frac{\varphi}{2}$.
On suppose que les droites a et b sont concourantes et on note O leur point d'intersection.

On note s_a la symétrie d'axe a et s_b la symétrie d'axe b : $f \circ g = s_a \circ s_b$.

Soit α l'angle orienté entre les droites b et a. Sans restreindre la généralité, on peut supposer : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



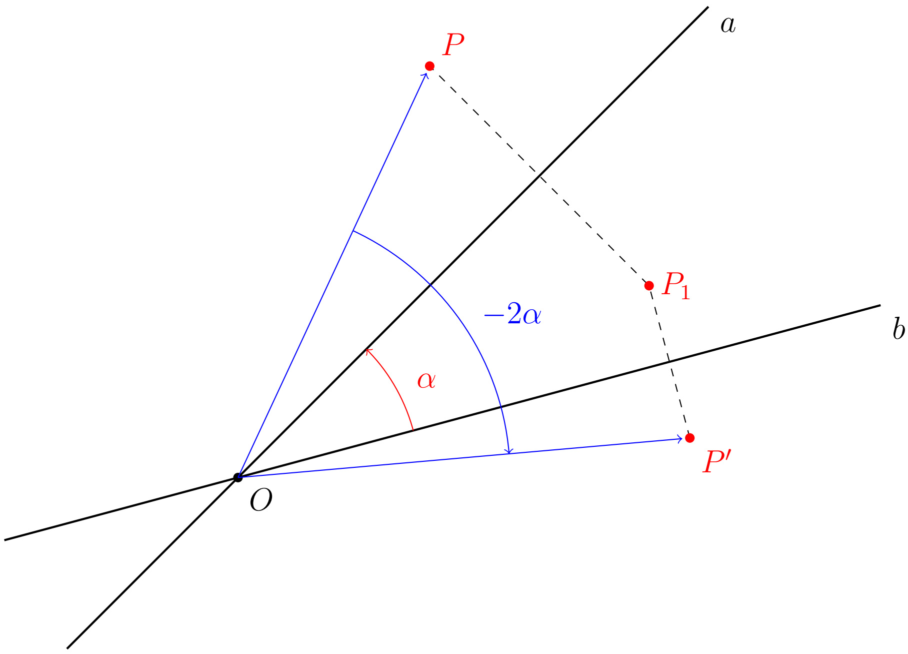
- $$s_a \circ s_b : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & s_a(s_b(P)) = s_a(P_1) = P' \end{array}$$

  La composée $s_a \circ s_b$ des deux symétries d'axes concourants est une rotation de centre O et d'amplitude 2α .

  $$(s_a \circ s_b)(P) = s_a(s_b(P)) = P' = r_{O\,,2\alpha}(P)$$

  Ainsi : $s_a \circ s_b = r_{O\,,2\alpha}$

- $$s_b \circ s_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & s_b(s_a(P)) = s_b(P_1) = P' \end{array}$$



L'angle orienté entre les droites a et b étant $-\alpha$, on en déduit que $s_b \circ s_a$ est la rotation de centre O et d'amplitude -2α.

Ainsi : $s_b \circ s_a = r_{O,-2\alpha}$

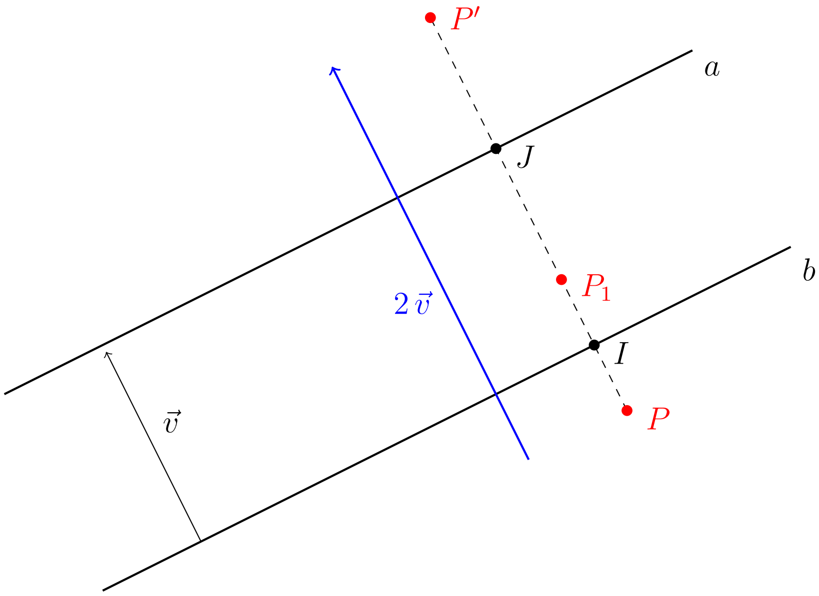
Remarque : si les axes sont perpendiculaires : $a \perp b$ alors $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$ et $f \circ g = g \circ f = r_{O,\pi}$.
La composée des deux symétries est alors une symétrie centrale de centre O.

On suppose que les droites a et b sont parallèles.

On note s_a la symétrie d'axe a et s_b la symétrie d'axe b : $f \circ g = s_a \circ s_b$.

On considère le vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à b et tel que a est l'image de b par la translation $t_{\vec{v}}$: $t_{\vec{v}}(b) = a$.

$$s_a \circ s_b : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & s_a(s_b(P)) = s_b(P_1) = P' \end{array}$$

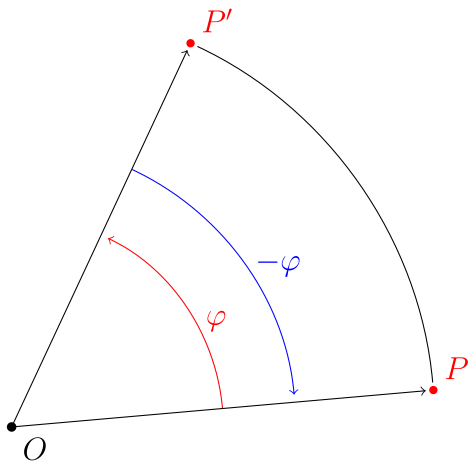


$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{IJ} = \vec{v} \\ \| \overrightarrow{PI} \| = \| \overrightarrow{IP_1} \| \quad \text{et} \quad \| \overrightarrow{P_1J} \| = \| \overrightarrow{JP'} \| \end{array}\right\} \text{ d'où } \quad \overrightarrow{PP'} = 2\,\vec{v} \text{ et donc } P' = t_{2\,\vec{v}}(P)$$

Ainsi :
$s_a \circ s_b$ est une translation de vecteur $2\,\vec{v}$
et
$s_b \circ s_a$ est une translation de vecteur $-2\,\vec{v}$.

(c) On note r_φ la rotation de centre O et d'amplitude φ et r_θ la rotation de centre O et d'amplitude θ.

- $g = r_\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r_\varphi(P) = P' \end{array}$

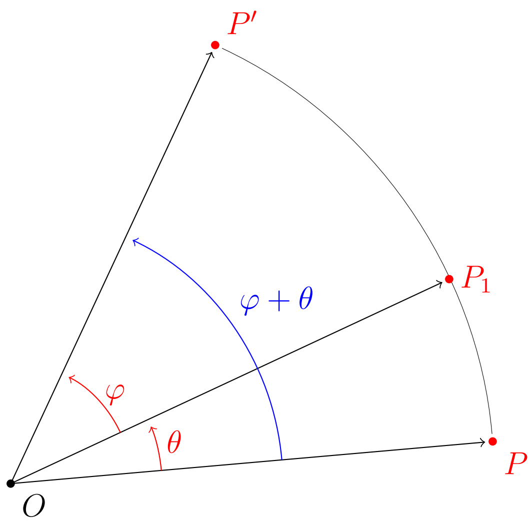


g^{-1} est la rotation de centre O et d'amplitude $-\varphi$.

$$g^{-1} = r_{-\varphi} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P' & \longmapsto & r_{-\varphi}(P') = P \end{array}$$

- $$f \circ g = r_\varphi \circ r_\theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r_\varphi(r_\theta(P)) = P' \end{array}$$

$r_\varphi(r_\theta(P)) = r_\varphi(P_1) = P' = r_{\varphi+\theta}(P)$



Ainsi :
$r_\varphi \circ r_\theta$ est une rotation de centre O et d'amplitude $\varphi + \theta$.

Comme $\varphi + \theta = \theta + \varphi$:

$$r_\varphi \circ r_\theta \;=\; r_\theta \circ r_\varphi \;= r_{\varphi+\theta}$$

Applications : exercice 31

Quelques rappels :

- Soit r est une rotation de centre O et d'amplitude φ :
  $r_\varphi = s_g \circ s_d$ où s_d et s_g sont des symétries d'axes concourants en O et tels que l'angle orienté entre les droites d et g vaut $\frac{\varphi}{2}$.
- $(r_\varphi)^n = r_{n\varphi}$
- Soit s une symétrie : $s^{-1} = s$ et $s^2 = Id$.
- $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$

(a) i) Montrer que $r \circ s \neq s \circ r$.

Etude de $r \circ s$

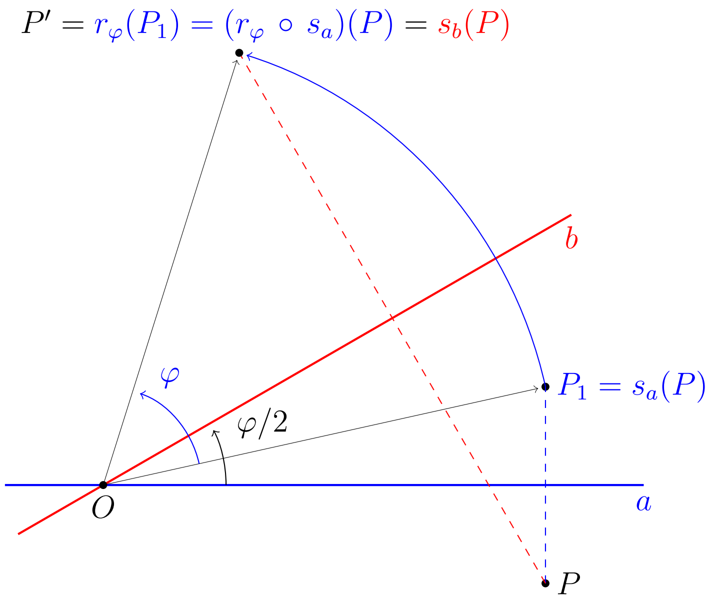
L'idée est de décomposer la rotation en deux symétries, l'un des axes étant la droite a et d'utiliser le résultat $s_a \circ s_a = Id$.

On décompose la rotation en deux symétries. La première d'axe la droite a et la deuxième d'axe la droite b telle que l'angle orienté entre a et b vaut $\frac{\varphi}{2}$.
D'où :

$$r_\varphi \circ s_a = \underbrace{s_b \circ s_a}_{=r_\varphi} \circ s_a = s_b \circ Id = s_b$$

Ainsi :

$$(r_\varphi \circ s_a)(P) = r_\varphi(s_a(P)) = r_\varphi(P_1) = s_b(P) = P'$$



Etude de $s_a \circ r_\varphi$

Pour étudier $s_a \circ r_\varphi$, on décompose à nouveau la rotation en deux symétries. Mais cette fois le deuxième axe est la droite a et le premier est la droite b' telle que l'angle orienté entre b' et a vaut $\frac{\varphi}{2}$.

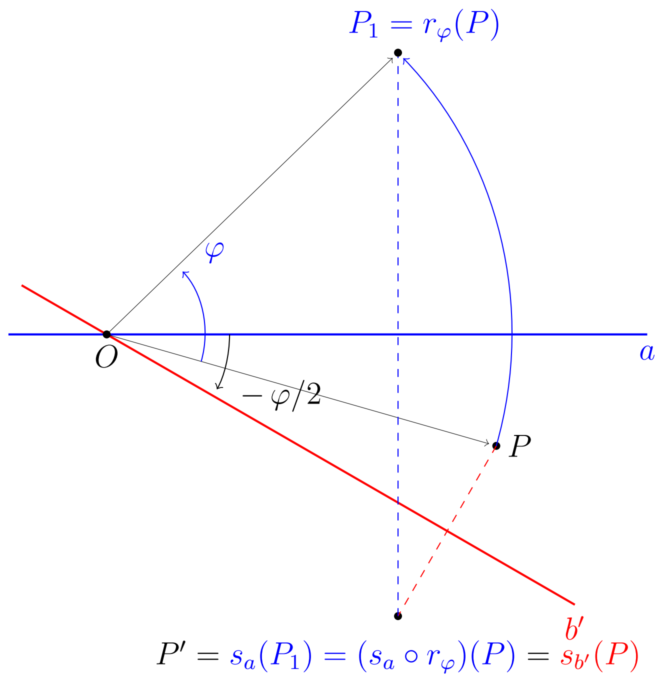
D'où :

$$s_a \circ r_\varphi = s_a \circ \underbrace{s_a \circ s_{b'}}_{=r_\varphi} = Id \circ s_{b'} = s_{b'}$$

$$\measuredangle(b', a) = \frac{\varphi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \measuredangle(a, b') = -\frac{\varphi}{2}$$

.
Et :

$$(s_a \circ r_\varphi)(P) = s_a(r_\varphi(P)) = s_a(P_1) = s_{b'}(P) = P'$$



D'où la conclusion : $r \circ s \neq s \circ r$.

ii) Montrer que $(r \circ s)^2 = Id$.

On décompose la rotation en deux symétries : $r_\varphi = s_b \circ s_a$ telles que l'angle orienté entre les droites a et b vaut $\frac{\varphi}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
(r_\varphi \circ s_a)^2 &= (r_\varphi \circ s_a) \circ (r_\varphi \circ s_a) \\
&= s_b \circ s_a \circ s_a \circ s_b \circ s_a \circ s_a \\
&= s_b \circ Id \circ s_b \circ Id \\
&= s_b \circ s_b = Id
\end{aligned}$$

(b) **Etude de** $(r_\varphi \circ s_a)^{-1}$

- Première méthode :

$$\begin{aligned}
(r_\varphi \circ s_a)^{-1} &= (s_a)^{-1} \circ (r_\varphi)^{-1} \\
&= s_a \circ r_{-\varphi}
\end{aligned}$$

On décompose la rotation $r_{-\varphi}$ en deux symétries : $r_{-\varphi} = s_a \circ s_c$ telle que l'angle orienté entre les droites c et a vaut $-\frac{\varphi}{2}$.

$$\begin{aligned}
(r_\varphi \circ s_a)^{-1} &= s_a \circ r_{-\varphi} \\
&= s_a \circ s_a \circ s_c \\
&= Id \circ s_c \\
&= s_c
\end{aligned}$$

Or :

$\measuredangle(c\,,\,a) = -\frac{\varphi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \measuredangle(a\,,\,c) = \frac{\varphi}{2} = \measuredangle(a\,,\,b) \quad\Leftrightarrow\quad c = b$ où b est définie dans la partie a).

Ainsi :

$$(r_\varphi \circ s_a)^{-1} = s_b$$

- Deuxième méthode :

Dans la partie a), on a montré :

$(r_\varphi \circ s_a)^2 \;=\; (r_\varphi \circ s_a) \circ (r_\varphi \circ s_a) \;=\; Id \quad \Leftrightarrow \quad (r_\varphi \;\circ\; s_a)^{-1} \;=\; r_\varphi \circ s_a \quad (1)$

et

$(r_\varphi \;\circ\; s_a) \;=\; s_b \quad (2)$

De (1) et (2) on en conclut :

$$(r_\varphi \;\circ\; s_a)^{-1} \;=\; s_b$$

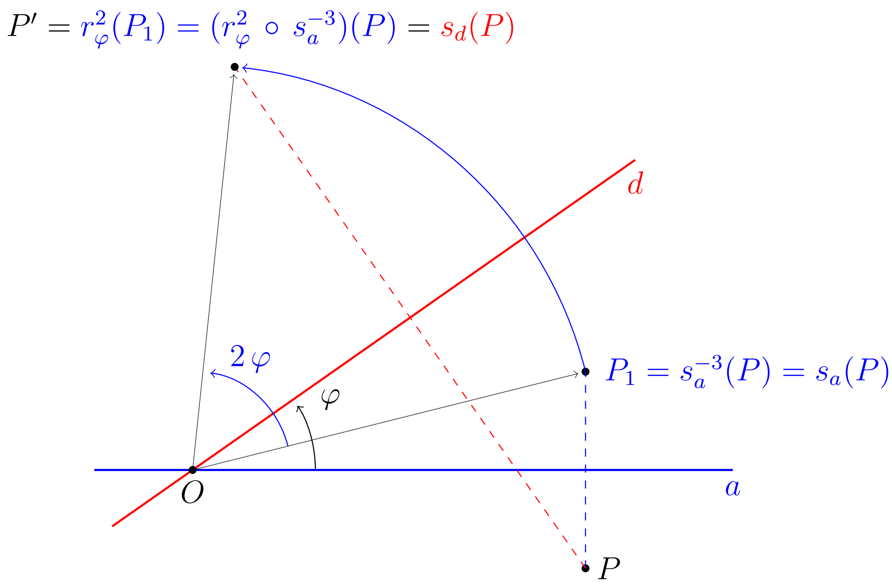
Etude de $\;r_\varphi^2 \circ s_a^{-3}$

$r_\varphi^2 \;=\; r_{2\,\varphi} \;=\; s_d \;\circ\; s_a \quad$ et $\quad \measuredangle\,(a\,,\,d) \;=\; \varphi$

$s_a^{-3} \;=\; (s_a^3)^{-1} \;=\; (s_a^2 \;\circ\; s_a)^{-1} \;=\; (Id \circ s_a)^{-1} \;=\; s_a^{-1} \;=\; s_a$

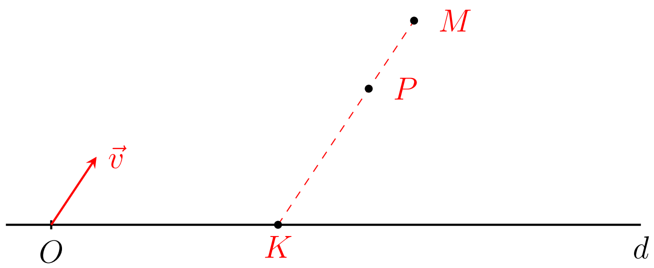
D'où :

$r_\varphi^2 \circ s_a^{-3} \;=\; s_d \circ s_a \circ s_a \;=\; s_d \circ Id \;=\; s_d$



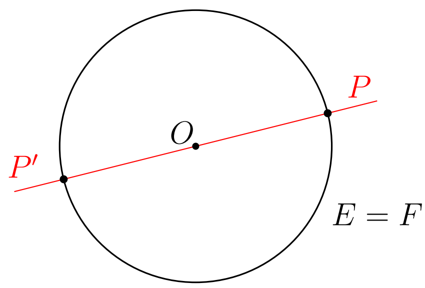
Applications : exercice 32

(a) f est la projection des points du plan sur une droite d donnée, parallèle à une direction $\vec{v}$.
$E = F =$ le plan



f n'est pas bijective car deux points M et P tels que (MP) soit parallèle à $\vec{v}$ ont même image, le point K.

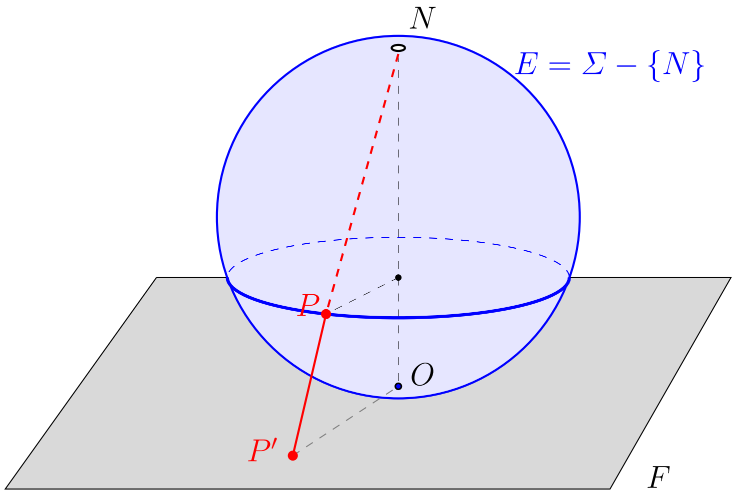
(b) f fait correspondre à tout point du cercle le point diamétralement opposé.



L'application est une symétrie centrale. Le centre de cette symétrie est le centre du cercle.
Tout point P' du cercle est l'image d'un seul point P, à savoir son opposé diamétral. Ainsi, f est bijective.

(c) E est l'ensemble des points d'une sphère Σ de rayon R, excepté un point fixé N. F est le plan tangent à Σ en O, point diamétralement opposé à N.

f est la projection de centre N, des points de E sur F.

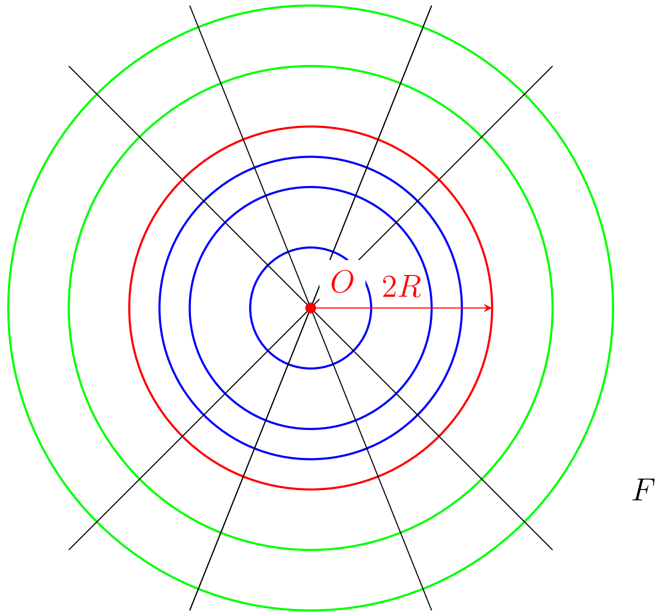


On constate que :

(a) L'image du point O est le point O : $f(O) = O$;

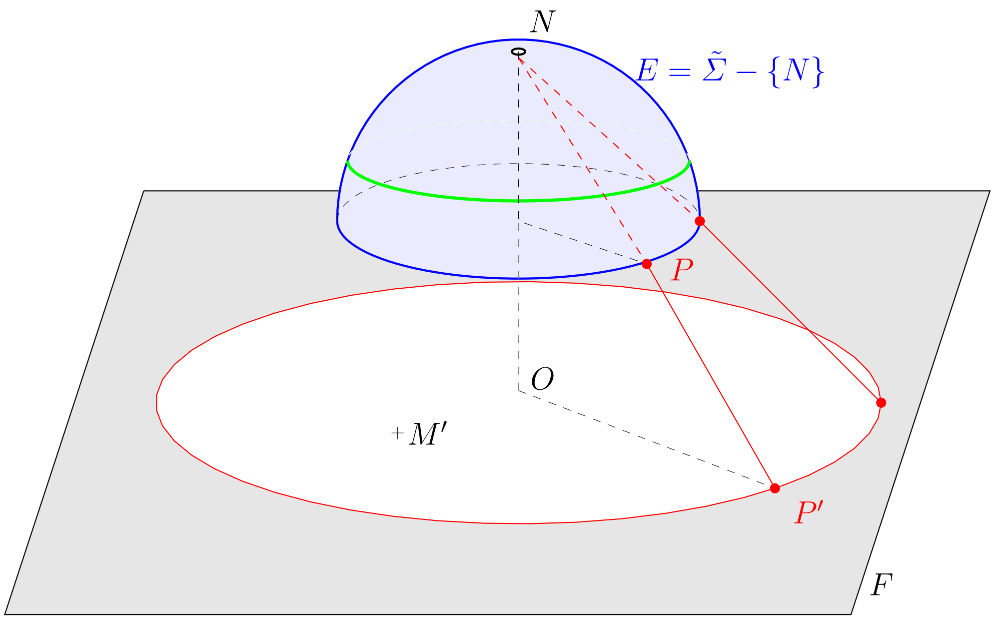
(b) l'image d'un parallèle (cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe ON) est un cercle centré en O ;
par Thalès, l'image de l'équateur de rayon R, est un cercle de rayon $2R$; les parallèles de l'hémisphère nord ont pour images des cercles de rayon $> 2R$; ceux de l'hémisphère sud ont pour images des cercles de rayon $< 2R$;

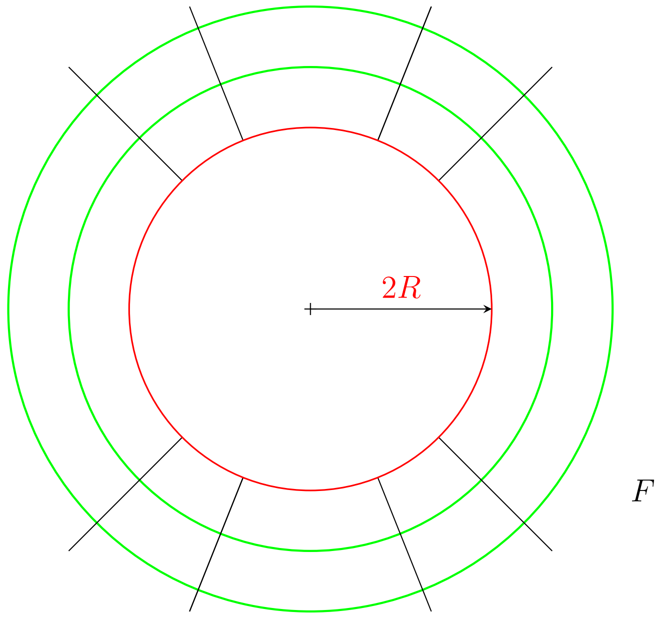
(c) l'image d'un méridien (cercle de rayon R qui passe par les points N et O) est une droite passant par O.



L'application f est bijective.

(d) Même situation que c), mais on restreint E aux points de la demi-sphère $\tilde{\Sigma}$ contenant N.





Si M' appartient au disque ouvert dont la frontière est l'image de l'équateur, alors $(NM') \cap E = \emptyset$.
Ainsi l'application f n'est pas bijective.

Matrices : exercice 1

(a) Soit les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- $C + D = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-2 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $E + F = \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $G + H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-5 & -3+6 & 4-1 \\ 0+2 & -5+0 & 1-2 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

- $C - D = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 10+2 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $E - F = \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & 7+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \end{pmatrix}$

- $G-H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} 1-3 & 2+5 & -3-6 & 4+1 \\ 0-2 & -5-0 & 1+2 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -9 & 5 \\ -2 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) • $K+L = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-3 \\ 2-2 & 2+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $-L-K = -(K+L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $K-K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$

Les deux matrices n'ayant pas le même nombre de lignes et de colonnes, le calcul n'est pas défini, donc impossible.

(d) D tel que $D = 3A + 4B - 2C = 3\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

(e) Déterminer B si : $2A - 3B + C = 0$

On va résoudre d'abord l'équation matricielle :

$$B = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{multiplication d'une matrice par un scalaire}}$$

$$\underbrace{=}_{\text{addition des matrices}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(f) Comme précédemment, on utilise simplement l'addition des matrices et le produit d'un réel par une matrice.

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ x-2y = -6 \\ 2z-w = -1 \\ w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 8 \\ 2z = 2 \\ w = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$$

Matrices : exercice 2

(a) $$\begin{cases} 2X - 5Y & = & A \\ -X + 3Y & = & B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2X - 5Y & = & A \\ X & = & 3Y - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3Y-B) - 5Y & = & A \\ X & = & 3Y - B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y & = & A + 2B \\ X & = & 3(A+2B) - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & A + 2B \\ X & = & 3A + 5B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X & = & 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \\ Y & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 4X & = & 2A - 4Y \\ Y + 2B & = & -5X + 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X & = & A - 2Y \\ Y & = & -5X + B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2X & = & A - 2(-5X + B) \\ Y & = & -5X + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8X & = & -A + 2B \\ Y & = & -5X + B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X & = & -\frac{1}{8}A + \frac{1}{4}B \\ Y & = & -\frac{5}{8}A - \frac{1}{4}B \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrices : exercice 3

(a) Déterminer en premier si le produit est possible, puis l'effectuer.
Le produit matriciel étant associatif, il est possible de regrouper les matrices.
Déterminer d'abord le nombre de lignes et de colonnes de chaque matrice.
Pour le calcul de la matrice G, réfléchir à la manière la plus judicieuse de regrouper les matrices.
Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif !

- $A \;:\; (2\times 2)\cdot(2\times 3) \;=\; (2\times 3)$
- $B \;:\; (1\times 4)\cdot(4\times 2) \;=\; (1\times 2)$
- $C \;:\; (1\times 2)\cdot(2\times 3) \;=\; (1\times 3)$
- $D \;:\; (2\times 3)\cdot(1\times 2) \;:\;$ ce produit est impossible !
- $E \;:\; (1\times 3)\cdot(3\times 1) \;=\; (1\times 1)$
- $A \;:\; (3\times 1)\cdot(1\times 3) \;=\; (3\times 3)$
- $G \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3\times 1} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{3\times 1}}_{1\times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \;=$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3\times 1} \underbrace{M}_{1\times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \;:\; (3\times 3)$$

On effectue maintenant les produits (lorsque c'est possible !).

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0+2\cdot 1 & 3\cdot 4+2\cdot 1 & 3\cdot 2+2\cdot 3 \\ 1\cdot 0+4\cdot 1 & 1\cdot 4+4\cdot 1 & 1\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix} =$
  $= \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$
  $= (7\cdot 0+0\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 4 \quad 7\cdot(-2)+0\cdot(-1)+3\cdot 0+2\cdot 3) \;=\; (14 \quad -8)$

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} = (6 \quad 1 \quad -3)$

- $E = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)) = (17)$

- $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

- $G = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} (\underbrace{213 \cdot 3 - 510 - 128}_{=(1)}) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} (1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Pour l'exercice g), un regroupement moins judicieux conduit à un produit de deux matrices d'ordre 3.

$$G = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3\times1} \underbrace{\begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}}_{1\times3}}_{3\times3} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{3\times1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{1\times3}}_{3\times3}$$

$$G = \begin{pmatrix} 639 & 1530 & 384 \\ 1065 & 2550 & 640 \\ 1491 & 3570 & 896 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Mettre le pgcd (plus grand diviseur commun) de tous les coefficients d'une matrice en évidence.

- $H = \begin{pmatrix} 36 & 48 & 12 \\ 0 & 24 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 30 & -40 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 12 \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} 10 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 120 \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 120 \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -24 & -8 \end{pmatrix}$$

- $J = 100 \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} 50 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 5000 \begin{pmatrix} 77 & 82 \end{pmatrix}$

Matrices : exercice 4

(a) $AB \neq BA$.

Dans ce problème, on demande simplement de trouver un exemple.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$$

(b) $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AB = 0$.

On appelle parfois ces matrices des "diviseurs" de 0 !

- Voici un exemple des plus simples :

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Voici un exemple un peu plus élaboré :

  Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases}$$

  On pose, par exemple, $a = 1$ et $b = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1$ et $d = -1$. D'où :

  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

Traiter d'abord le cas général.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \neq 0$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ cb+d^2=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a^2+bc=0 \\ d^2+bc=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2-d^2=0=(a-d)(a+d) \\ \left.\begin{array}{r} b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \end{array}\right\} \end{array}$$

Pour obtenir un exemple concret, on pose $a = 1$ et $d = -1 \quad \Rightarrow \quad a + d = 0$;

On veut une matrice non-diagonale (pourquoi ?) et on donne $b, c \neq 0$; les équations ci-dessus impliquent que : $bc = -a^2 = -1 = d^2$.

On pose : $b = 1$ et $c = -1$ d'où : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A^2 = A$ avec $A \neq 0$ et $A \neq I$.

Traiter d'abord le cas général.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \neq 0$ et $a\,,\, d \neq 1$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+bc = a \\ ab+bd = b \\ ac+cd = c \\ cb+d^2 = d \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} bc = a - a^2 & (1) \\ b(a+d) = b & (2) \\ c(a+d) = c & (3) \\ bc = d - d^2 & (4) \end{array}$$

$(1)\,,\,(4) \quad \Rightarrow \quad a - a^2 = d - d^2$ et $(2)\,,\,(3) \quad \Rightarrow \quad a + d = 1$

Pour obtenir un exemple concret, on choisit $a = 1$ et $d = 0$ $\Rightarrow$ $bc = 0$; on choisit $b = 0$ et $c = 2$ (par hyp. un des deux doit être différent de 0).

d'où : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien $A^2 = A$

(e) $A^2 = I$ avec $A \neq I$ et $A \neq -I$.

Faire un calcul littéral avant d'utiliser les relations entre les coefficients pour donner un exemple concret.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b\,,\, c \neq 0$ $a\,,\, d \neq 1$ et $a\,,\, d \neq -1$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+bc = 1 \\ ab+bd = 0 \\ ac+cd = 0 \\ cb+d^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ on pose, par exemple : } b = d = 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} a^2+c = 1 \\ a+b = 0 \\ ac+c = 0 \\ c+1 = 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{r} a^2 = 1 \\ b = -a \\ c = 0 \end{array}\right.$$

on peut poser : $a = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

d'où : $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \pm I$$

ce qui donne bien $A^2 = I$

Matrices : exercice 5

Voici les identités remarquables pour les matrices carrées.
Attention ! Les questions ne sont pas anodines.

(a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$ car généralement $AB \neq BA$!

(b) $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2$ même remarque qu'au point précédent !

(c) $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2$ même remarque qu'au point précédent !

Matrices : exercice 7

$$M^2 = M \cdot M = \underbrace{\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^3-b^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

On conjecture : $M^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Preuve par récurrence :

(a) La proposition est vraie pour $n_0 = 1$.

(b) Hypothèse de récurrence : $M^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ pour n donné

(c) A montrer : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^{n+1}-b^{n+1} \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$

Preuve :

$M^{n+1} = M^n \cdot M$

On utilise l'hypothèse de récurrence, d'où :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \cdot M = \begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n(a-b)+(a^n-b^n)b \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^{n+1}-b^{n+1} \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices : exercice 12

On considère l'ensemble $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

et la proposition $S \,:\, \forall M \in E\,,\; M^2 = M \Longrightarrow (M = 0 \text{ ou } M = I_2)$.

Elle a pour négation
non S : $\exists M \in E,\; M^2 = M,\; M \neq 0$ et $M \neq I_2$

Pour déterminer une telle matrice, il est nécessaire de connaître les éléments qui appartiennent à l'ensemble E.

On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et on résoud l'équation $M^2 = M$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a &= a^2+b^2 \\ b &= 2ab \end{cases}$$

- Si $b = 0$: $\begin{cases} a &= a^2 \\ b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$ d'où $a = 0$ ou $a = 1$ et $b = 0$.

  Donc $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ou $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

- Si $b \neq 0$: $\begin{cases} a &= a^2+b^2 \\ a &= 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 &= 1/4 \\ a &= 1/2 \end{cases}$ d'où $a = 1/2$ et $b = 1/2$ ou $b = -1/2$.

  Donc $M_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ou $M_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Ainsi $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$

On peut écrire le contre-exemple en utilisant la matrice M_3 ou la matrice M_4.
La proposition S est fausse car

$$\exists M \in E, \text{ soit } M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \ M^2 = M, \ M \neq 0 \text{ et } M \neq I_2$$

Matrices : exercice 14

Rappel :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible ssi $\det A = ad - bc \neq 0$. Alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(a)
- $M = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det M = 10 \cdot (-8) - 5 \cdot 0 = -80 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad M$ est inversible.

  $M^{-1} = \dfrac{-1}{80} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{80} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$

- $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det N = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-4) = 26 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad N$ est inversible.

$$N^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- $MN = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -40 \\ -22 & -60 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det(MN) = -1200 - 4 \cdot 880 = -2080 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad MN$ est inversible.

  $$(MN)^{-1} = \frac{-1}{2080}\begin{pmatrix} -60 & 40 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}$$

- $M + N = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det(M+N) = -36 + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M+N$ n'est pas inversible.

  On remarque : $\det(M+N) \neq \det M + \det N$

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible ssi $\det A = ad - bc \neq 0$

On a alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det R = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R$ n'est pas inversible.

- $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det R = -2 + 2 \cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S$ n'est pas inversible.

- $RS = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det(RS) = (-4)(-4) - (-2)(-8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad RS$ n'est pas inversible.

- $R + S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det(R+S) = 15 + 0 = 15 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R+S$ est inversible.

  $$(R+S)^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  On remarque : $\det(R+S) \neq \det R + \det S$

(c) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible ssi $\det A = ad - bc \neq 0$

On a alors : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

- $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det C = -10 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad C$ est inversible.

  $$C^{-1} = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^{-1} & 0 \\ 0 & -2^{-1} \end{pmatrix}$$

- Généralisation : $\quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a\,,b$ non nuls, d'où

  $$C^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

(d) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

A est inversible ssi $\det A = ad - bc \neq 0$

On a alors : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

- $D = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ d'où

  $\det C = 12 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad D$ est inversible.

  $$D^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{-1} \\ -6^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- Généralisation : $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a\,,b$ non nuls, d'où

  $$D^{-1} = \frac{-1}{ab}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$