Série 10

Exercice 1. Dans l'espace, on donne trois points non alignés A, B et C.

a. Déterminer, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, une équation vectorielle de la droite d symétrique (orthogonale) de (AC) par rapport à (AB).

b. Application numérique : $A(0,0,0)$, $B\,(-2,1,-3)$ et $C\,(3,-2,2)$ (dans un repère orthonormé).

Exercice 2. On donne un triangle ABC rectangle en B. Existe-t-il un point sur (AB) dont le symétrique par rapport à (AC) appartient à (BC) ? Si oui, donner son abscisse dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$. On pourra discuter selon l'angle θ au sommet A.

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(-6,3,5)$, $B\,(0,3,2)$ et le plan $\pi :\ y+z-2=0$.

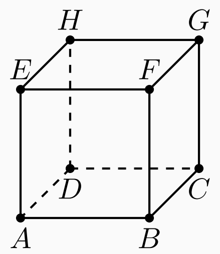
a. Montrer que A et B sont situés du même côté de π.

b. On souhaite atteindre B avec un rayon laser issu de A, après une réflexion sur π. Quel point de π doit-on viser ?

Exercice 4.

La figure ci-contre représente un cube de côté 2. Dans chacun des cas suivants écrire une équation normale du plan proposé vu depuis le point A :

a. (ABC) b. (BCF) c. (BCE)



Ensuite, décrire le lieu géométrique formé des points M vérifiant la condition proposée :

d. $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ e. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ f. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EM} = 4$.

Exercice 5. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $B\,(0,-4,-7), H\,(-2,-2,-5)$, et $d :\ x = y+1 = \frac{z-2}{2}$. Déterminer les sommets A et C du triangle ABC sachant que A appartient à d, et que, dans le triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de A et l'angle au sommet A a pour cosinus $-\frac{1}{3}$.

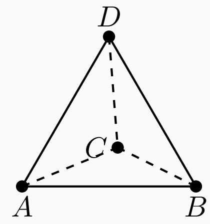
Exercice 6. On donne trois points non alignés A, B, C dans l'espace et un réel $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

a. En fonction des données, localiser depuis A le point D situé sur la hauteur issue de A et tel que le rapport de l'aire du triangle BCD à l'aire de ABC soit égal à α.

b. Application numérique : $A(20,-12,40)$, $B(12,16,0)$, $C(16,24,-12)$ (repère orthonormé), $\alpha = \frac{1}{4}$.

Exercice 7.

Quel est l'angle θ entre deux faces d'un tétraèdre régulier ? On pourra introduire un repère orthonormé adapté au problème.



Exercice 8. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\,(5,0,3)$, $B\,(-1,4,4)$ ainsi que les plans :

$$\rho : 2x+2y+z+1=0 \text{ et } \pi : \begin{cases} x=-6-s \\ y=s \\ z=2-8s+t \end{cases}, \ s,t\in\mathbb{R}.$$

Déterminer les coordonnées du point C sachant que le triangle ABC est rectangle en C, que $\overrightarrow{AC}$ est directeur de π et que $\overrightarrow{BC}$ est directeur de ρ.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $d : \overrightarrow{AM} = t(2\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$, $t\in\mathbb{R}$, b. $d : 4x=z$, $y=0$.

Ex. 2 : $\frac{1}{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$.

Ex. 3 : $(-2,1,1)$.

Ex. 4 : a. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4$, c. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AM}=4$, d. (BCF), e. plan médiateur de AB, f. (BDF).

Ex. 5 : $A\,(-3,-4,-4)$, $C\,(-4,0,-3)$.

Ex. 6 : a. $\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)(\overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\overrightarrow{BC})$, b. $D(5,-9,37)$.

Ex. 7 : $\cos(\theta)=\frac{1}{3}$.

Ex. 8 : $C(2,3,0)$ ou $C(3,2,0)$.