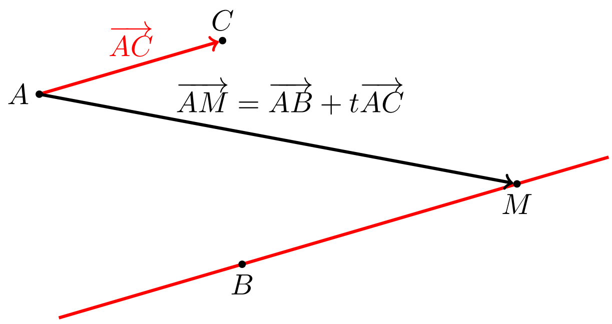
Série 4

Exercice 1. On considère trois points non-alignés A, B et C. Dans chacun des cas suivants, expliciter et représenter géométriquement l'ensemble des points M satisfaisant la condition donnée.

a. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R}$.
b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1[$.
c. $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{AC}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.
d. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - t\overrightarrow{CM}$, $t \in \mathbb{R}$.

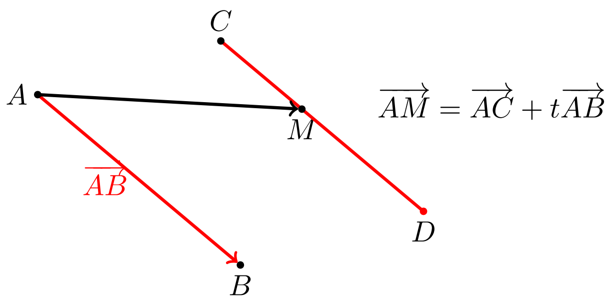
Solution:

a. Figure d'étude :



On reconnait ici une équation vectorielle de la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{AC}$, autrement dit de la parallèle à (AC) passant par B.

b. Figure d'étude :

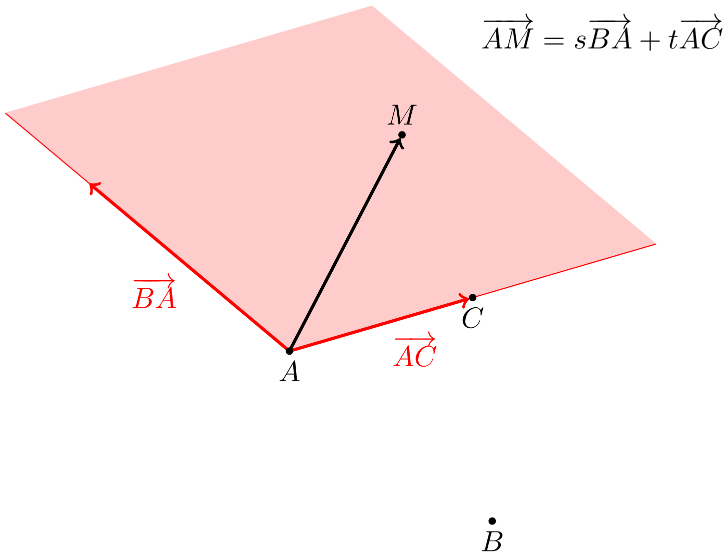


L'ensemble étudié ici est un sous-ensemble de la parallèle à (AB) passant par C. Pour le décrire plus précisément, complétons le triangle ABC en un parallélogramme $ABDC$. On a donc :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

si bien que pour $t = 0$, le point courant M correspondant à l'équation proposée se trouve en C, et pour $t = 1$ il se trouve en D. Le lieu recherché est alors le segment semi-ouvert CD, où C est inclus et D est exclu.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, ils engendrent tous les vecteurs du plan. S'il n'y avait pas de restriction sur les paramètres s et t, l'ensemble décrit serait donc l'ensemble de tous les points du plan. Les conditions de positivité imposées restreignent le point M dans le quadrant suivant défini par les droites (AB) et (AC) :



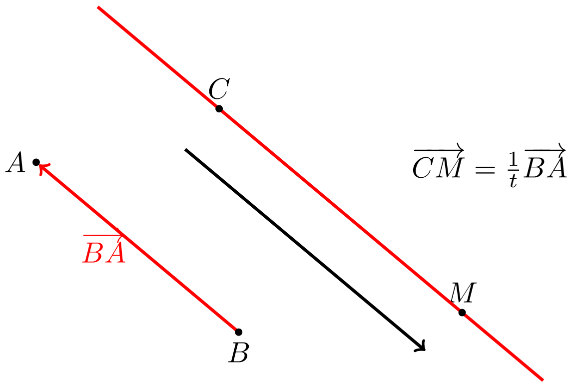
d. La condition donnée dans l'énoncé se réécrit :

$$\overrightarrow{BA} = t\overrightarrow{CM}.$$

Pour $t = 0$, cette condition ne correspond à aucun point M du plan. Pour $t \neq 0$, il existe un unique point satisfaisant la condition, et il est localisé depuis le point C par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{t}\overrightarrow{BA}.$$

Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des points M dessinés est alors la parallèle à (AB) passant par C, à laquelle on a retiré le point C :



Exercice 2. On travaille dans un repère fixé du plan, dans lequel on donne le point $A(2, -1)$ et le vecteur $\vec{v}\binom{-3}{2}$. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si le point A appartient à d et si le vecteur $\vec{v}$ est directeur de d :

a. $d : 2x + 3y + 1 = 0.$

b. $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $d : x - 5y - 7 = 0.$

d. $d : \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Solution:

a. Les coordonnées de A ne satisfont pas l'équation de d car :

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 = 2 \neq 0.$$

Par conséquent, le point ne se trouve pas sur d. Par ailleurs, le vecteur $\vec{v}$ est bien directeur de d, car ses composantes satisfont l'équation homogène associée à d :

$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0.$$

Autre façon de voir que $\vec{v}$ est directeur de d : on peut extraire de l'équation cartésienne de d le vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{-2}$. Ce vecteur étant colinéaire à $\vec{v}$, on peut conclure que $\vec{v}$ est directeur de d.

b. Des équations paramétriques de d on en déduit directement qu'elle passe par le point de coordonnées $(2,-1)$, c'est-à-dire A, et qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\vec{v}$ n'est pas directeur de d.

c. Les coordonnées de A satisfont l'équation de d car :

$$2-5\cdot(-1)-7=0.$$

Par conséquent, le point se trouve sur d. Par contre, le vecteur $\vec{v}$ n'est pas directeur de d, car ses composantes ne satisfont pas l'équation homogène associée à d :

$$-3-5\cdot(-1)=2\neq 0.$$

Autre façon de voir que $\vec{v}$ n'est pas directeur de d : on peut extraire de l'équation cartésienne de d le vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}5\\1\end{smallmatrix}\right)$. Ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\vec{v}$, on peut conclure que $\vec{v}$ n'est pas directeur de d.

d. Des équations paramétriques de d on en déduit directement qu'elle passe par le point B de coordonnées $(-1,1)$ et qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}6\\-4\end{smallmatrix}\right)$. On en déduit donc que $\vec{u}=-2\vec{v}$, ce qui montre que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et dirige donc d. Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $\left(\begin{smallmatrix}-3\\2\end{smallmatrix}\right)$. Il est donc égal à $\vec{v}$, ce qui prouve que A se trouve sur d. Autre façon de montrer que A se trouve sur d : on cherche une valeur du paramètre t qui corresponde à A. Autrement dit, on cherche à résoudre le système de deux équations à une inconnue :

$$\begin{cases} 2=-1+6t\\ -1=1-4t\end{cases}$$

On voit alors qu'il existe une solution, à savoir $t=\frac{1}{2}$.

Exercice 3. On fixe un repère du plan. Combien de droites différentes sont décrites par les équations suivantes ?

$$\begin{cases} x=5+2t\\ y=-3-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\quad 2x+4y+2=0,\quad \begin{cases} x=25-\sqrt{3}t\\ y=-13+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Solution: Ces trois équations représentent la même droite. Pour le moment, désignons par d_1, d_2, d_3 les trois droites décrites dans l'énoncé. Notre but est donc de montrer que $d_1=d_2=d_3$. Montrons tout d'abord que $d_1=d_2$. Pour cela, cherchons une équation cartésienne de d_1. En éliminant le paramètre t des équations paramétriques de d_1, on trouve :

$$t=\frac{x-5}{2}=-3-y,$$

ce qui montre que d_1 a pour équation cartésienne :

$$x-5=2(-3-y)\text{ ou encore }x+2y+1=0.$$

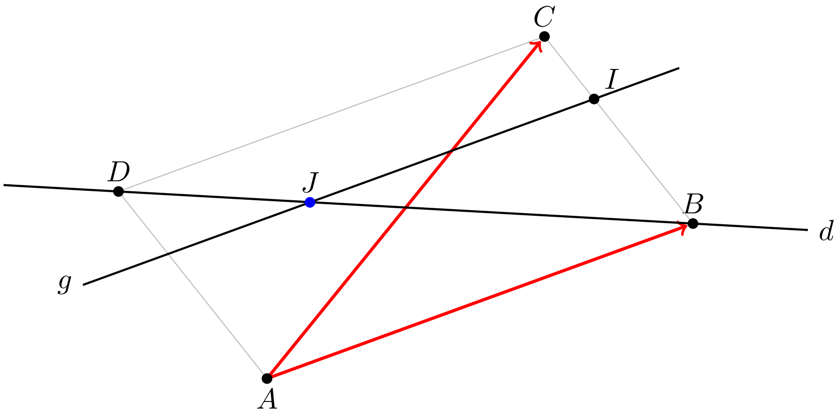
Cette équation étant proportionnelle à $2x+4y+2=0$, on voit donc que les droites d_1 et d_2 sont les mêmes. Pour établir que d_3 est égale à d_1 et d_2, on pourrait raisonner exactement comme ci-dessus. Mais procédons différemment. Observons que la droite d_3 passe par le point $A(25,-13)$, qui appartient aussi à la droite d_1, où il correspond au choix de la valeur 10 pour le paramètre t. Les droites d_1 et d_3 ont donc au moins un point en commun. Par ailleurs, la droite d_3 est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, et la droite d_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Comme $\vec{v}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}$, on voit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si bien que les droites d_1 et d_3 sont parallèles. Comme elles ont de plus un point commun, elles sont égales.

Exercice 4. On donne un parallélogramme $ABCD$ dans le plan. Soit I le point de la droite (BC) d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC})$. On note d la droite (BD) et g la parallèle à (AB) passant par I.

a. Donner des équations vectorielles des droites d et g vues depuis le point A, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Soit J le point d'intersection de d et g. A l'aide du calcul vectoriel uniquement, déterminer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution: Figure d'étude :



a. La droite d passe par B et est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Vue depuis le point A, elle possède donc pour équation vectorielle :

$$d : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (1 - 2t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC},\ t \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, la droite g passe par I et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Rappelons que I a pour abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC})$, si bien que :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Par conséquent, la droite g, vue depuis le point A, a pour équation vectorielle :

$$g : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + t\overrightarrow{AB} = (t + \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\ t \in \mathbb{R}.$$

b. Le point J se trouve sur la droite d et sur la droite g. Il correspond donc à une position particulière du point courant M de d, pour laquelle le paramètre t vaut, disons α, et aussi à une position particulière du point courant M de g, pour laquelle le paramètre t vaut, disons β (attention à ne pas supposer a priori que $\alpha = \beta$!). On a donc :

$$\overrightarrow{AJ} = (1 - 2\alpha)\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AC} = (\beta + \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier coefficient à coefficient dans l'égalité ci-dessus, pour obtenir :

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ et } \beta = -\frac{2}{3}.$$

On trouve donc finalement :

$$\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Exercice 5. On fixe un repère du plan. Dans chacun des cas ci-dessous, donner des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d.

a. $d = (AB)$, avec $A(2, 1)$ et $B(3, -1)$.

b. d passe par $A(4, 0)$ et est dirigée par $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right)$.

c. d passe par le milieu du segment AB, avec $A(2, -3)$, $B(10, 7)$ et est parallèle à la droite d'équation $3x + y - 8 = 0$.

Solution:

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ est directeur de d. La droite d possède donc pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ici, on a utilisé le point A pour créer la partie constante de l'équation. On aurait aussi bien pu utiliser le point B, ou tout autre point sur la droite d. Pour trouver une équation cartésienne de la droite d, on élimine alors le paramètre t :

$$t = x - 2 = \frac{1 - y}{2} \text{ donc } d : 2x + y - 5 = 0.$$

Autre façon de produire une équation cartésienne : la partie variable de l'équation peut être prise égale à $2x + y$ car le vecteur de composantes $\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ est directeur. Pour obtenir la partie constante de l'équation, on exprime par exemple que d passe par A. On trouve :

$$d : 2x + y = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

b. L'énoncé permet directement d'écrire des équations paramétriques pour d :

$$d : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 5t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une équation cartésienne de la droite d, une manière de procéder est alors d'éliminer le paramètre t :

$$t = \frac{x - 4}{2} = \frac{y}{5} \text{ donc } d : 5x - 2y - 20 = 0.$$

c. Le milieu I de AB a pour coordonnées $\left(\frac{2+10}{2}, \frac{-3+7}{2}\right) = (6, 2)$. La droite d étant parallèle à celle d'équation cartésienne $3x + y - 8 = 0$, on peut prendre la partie variable de son équation cartésienne égale à $3x + y$. Pour obtenir la partie constante de l'équation, on exprime alors que d passe par I. On trouve :

$$d : 3x + y = 3 \cdot 6 + 2 = 20.$$

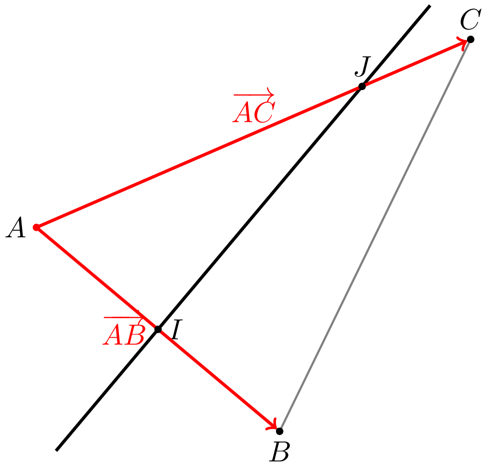
La droite d est dirigée par le vecteur $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}1\\-3\end{smallmatrix}\right)$. Comme elle passe par le point $I(6, 2)$, elle admet pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. On donne trois points non-alignés A,B,C dans le plan. On note I le milieu de AB et J le point d'abscisse $\frac{3}{4}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$ de la droite (AC). Dans chacun des repères suivants, donner des équations paramétriques et cartésiennes de la droite (IJ) :

a.$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, b.$(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, c.$(I, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

Solution: Figure d'étude :



Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$, car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (I étant au milieu de AB). Par ailleurs, le point J a pour coordonnées $(0, \frac{3}{4})$, car, par définition même, on a $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Dans ce repère, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a donc pour composantes :

$$\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La droite (IJ) passe donc par le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et est dirigée par le vecteur de composantes $\binom{-2}{3}$. Par conséquent, elle admet pour équations paramétriques :

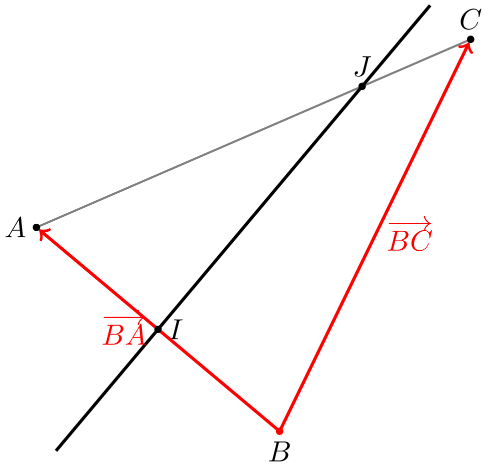
$$(IJ) : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - 2t \\ y = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

On obtient une équation cartésienne en éliminant le paramètre t :

$$t = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}y \text{ et donc } \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4} = 0.$$

On multipliant l'équation obtenue par 12, on obtient une équation cartésienne exempte de fractions :

$$(IJ) : 6x + 4y - 3 = 0.$$



On effectue à présent un travail analogue dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Le point I a comme coordonnées $(0, \frac{1}{2})$, car $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Pour trouver les coordonnées de J dans ce repère, exprimons le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Le point J a donc comme coordonnées $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. En raisonnant comme ci-dessus, on trouve pour équations paramétriques :

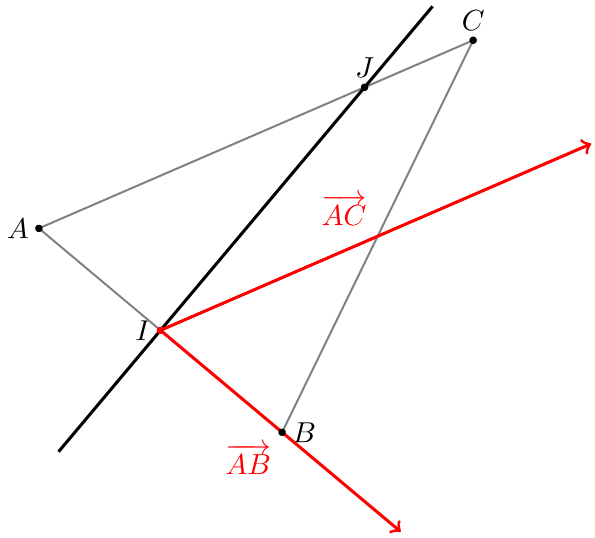
$$(IJ) : \begin{cases} x = 3t \\ y = \dfrac{1}{2} - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

On obtient une équation cartésienne en éliminant le paramètre t :

$$t = \frac{1}{3}x = -y + \frac{1}{2} \text{ et donc } \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{2} = 0.$$

On multipliant l'équation obtenue par 6, on obtient une équation cartésienne exempte de fractions :

$$(IJ) : 2x + 6y - 3 = 0.$$



Finalement, on travaille dans le repère $(I, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. Dans ce repère, le point I est l'origine et a donc comme coordonnées $(0, 0)$. Rappelons qu'on a vu ci-dessus que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Par conséquent, on a :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

si bien que J a pour coordonnées $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$. En raisonnant comme ci-dessus, on trouve pour équations paramétriques :

$$(IJ) : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

On obtient une équation cartésienne en éliminant le paramètre t :

$$t = \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}y \text{ et donc } \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 0.$$

On multipliant l'équation obtenue par 6, on obtient une équation cartésienne exempte de fractions :

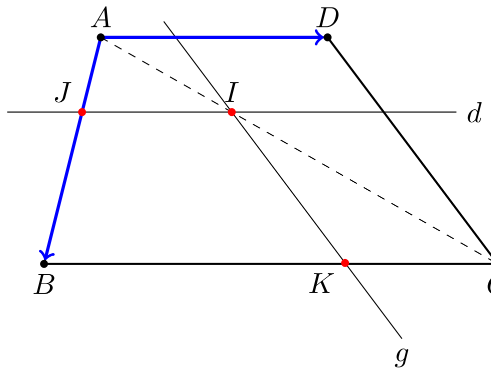
$$(IJ) : 2x + 3y = 0.$$

Exercice 7. On donne quatre points A,B,C,D vérifiant $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. Soit I le point d'abscisse $\frac{1}{3}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$. On note d la parallèle à (AD) passant par I et g la parallèle à (DC) passant par I.

a. Déterminer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, des équations vectorielles des droites (AB), (BC), d et g vues depuis le point A.

b. Soit J le point d'intersection des droites d et (AB), et K celui des droites g et (BC). Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et montrer que (JK) et (AC) sont parallèles.

Solution: Figure d'étude :



a. La droite (AB) passe par A et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Vue depuis le point A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$(AB) : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (BC) quant à elle passe par B et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. Elle est donc aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AD}$. Vue depuis le point A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$(BC) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD},\ t \in \mathbb{R}.$$

La droite d passe par I et est aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AD}$. Or, par définition de I, on a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}).$$

Par conséquent, vue depuis le point A, la droite d admet donc pour équation vectorielle :

$$d : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + t\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (t + \frac{2}{3})\overrightarrow{AD},\ t \in \mathbb{R}.$$

Enfin, la droite g passe par I et est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Vue depuis le point A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$g : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (t + \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (t + \frac{2}{3})\overrightarrow{AD},\ t \in \mathbb{R}.$$

b. Le point J se trouve à l'intersection des droites (AB) et d, il correspond donc à des choix de valeurs particulières pour les paramètres utilisés dans les équations vectorielles de ces droites. Autrement dit, il existe des réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (\beta + \frac{2}{3})\overrightarrow{AD}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus, pour obtenir $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Par ailleurs, le point K se trouve à l'intersection des droites (BC) et g, il correspond donc à des choix de valeurs particulières pour les paramètres utilisés dans les équations vectorielles de ces droites. Autrement dit, il existe des réels γ et δ tels que :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AD} = (\delta + \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + (\delta + \frac{2}{3})\overrightarrow{AD}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus, pour obtenir $\gamma = \frac{4}{3}$ et $\delta = \frac{2}{3}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On en déduit alors :

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}).$$

Or, comme on l'a déjà vu ci-dessus :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD},$$

si bien que $\overrightarrow{JK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On en déduit que les droites (JK) et (AC) sont bien parallèles.