Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C}:\ x^2 + 8xy + 7y^2 + 10x - 14y - 11 = 0\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole, déterminer son équation réduite et le repère R_u dans lequel l'équation est réduite.

b) Déterminer les coordonnées des sommets $(A\,,\,A')$ et l'équation cartésienne des asymptotes de $\mathcal{C}$ dans le repère R_e.

c) Représenter avec soin et précision l'hyperbole $\mathcal{C}$ dans le repère R_e (unité = 1 carré). 6 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne deux points $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$ et une droite horizontale c d'équation $y = m\,,\quad m \in \mathbb{R}\,.$

Soit C un point courant de la droite c.

On considère, dans le triangle ABC, la médiane g issue du sommet A, la hauteur h issue du sommet B et le point P intersection des droites g et h.

a) Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque le point C décrit la droite c.

b) Déterminer en fonction de m la nature géométrique de ce lieu. 4,5 pts

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les coordonnées d'un point S, les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ et l'équation cartésienne d'une droite t.

$$S\,(5\,,\,2)\,,\qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad t:\ 11x - 2y - 26 = 0\,.$$

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet S, dont l'axe est dirigé par le vecteur $\vec{u}$ et qui est tangente à la droite t.

a) Soit R_u le repère dans lequel l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ est réduite.
Déterminer avec précision le repère R_u.
Indication : Faire une esquisse de la parabole.

b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t dans le repère R_u.

c) En déduire, dans le repère R_u, l'équation réduite de la parabole $\mathcal{P}$. 4,5 pts