24.5.19

Série 20

1. Retrouver l'expression du développement limité d'ordre 5 de $\tanh x$ autour de $x = 0$ en utilisant le produit du développement limité de la composition de $1/x$ et de $\cosh x$ avec le produit du développement limité $\sinh x$ à l'ordre 5 .

2. Déterminer les 4 premiers termes non nuls du développement limité au voisinage de $x = 0$, des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{\cos x}{e^x}$,

(b) $\dfrac{\sin x}{x+1}$.

3. Déterminer le développement limité au voisinage de x_0 et $\grave{a}$

l'ordre n des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \cos x \;\; (x_0 = \dfrac{\pi}{4}\,, n = 2)$

(b) $\dfrac{\ln x}{x^2} \;\; (x_0 = 1\,, n = 4)$

(c) $h(x) = \sqrt{\tan x} \;\; (x_0 = \dfrac{\pi}{4}\,, n = 3)$

4. Déterminer le développement limité du polynôme $P_4(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ au voisinage de $x = -2$ (à l'ordre ?).

5. Établir le développement limité d'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ au voisinage de 0.

6. (a) Déterminer les 4 premiers termes non nuls du développement limité au voisinage de $x = 0$ de la fonction $\arctan(xe^x)$;

(b) Déterminer le développement d'ordre 4 de la fonction $f(x) = x\ln(2 + x)$:

- au voisinage de $x_0 = 0$;
- au voisinage de $x_0 = -1$.

7. (a) Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\text{Arctan}(x) = (-\text{sgn}(x))^{n-1}(n-1)!\sin^n(\theta)\sin(n\theta),$$

où

$$\theta := \text{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}),$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad .$$

(b) Utiliser la relation trouvée en a) pour calculer les n premiers termes non nuls du développement limité de $\text{Arctan}(x)$ autour de $x_0 = 0$

(c) Utiliser le développement trouvé en b) ainsi que le terme de correction pour une série de Taylor, pour trouver une série numérique qui converge vers π.

blème récréatif: On se donne un triangle quelconque de sommets A, B et C. Trouver à l'aide d'un compas uniquement un point $P \in AB$ et un autre point $Q \in AC$, tels que $\text{dist}(A, P) = \text{dist}(P, Q) = \text{dist}(Q, C)$ (Faire un dessin).

Solutions

S1 $\mathrm{DL}_0^5(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$

S2 (a) $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$

(b) $x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$

S3 (a) $f(x) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2\right)$

(b) $g(x) \simeq (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4$

(c) $h(x) \simeq 1 + (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{5}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3$

S4 $P_4(X) = (X+2)^4 - 11(X+2)^3 + 44(X+2)^2 - 75(X+2) + 45$

S5 $\dfrac{1}{sinx} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{360}x^3 + \dots$

S6 (a) $\mathrm{DL}_0^4 = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$

(b) $\mathrm{DL}_0^4 = x\ln(2) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^4$, $\mathrm{DL}_{-1}^4 = -(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{6}(x+1)^3 + \frac{7}{12}(x+1)^4$

$S7$ (a)

(b) $\mathrm{DL}_0^n = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$

(c) $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}$