Géométrie Analytique Dovi

Semestre de printemps 2019

Corrigé 14

Exercice 3

Equation du cercle $\gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Inconnues : a, b, c.

$A\,(2,1) \in \gamma :\quad 5 + 4a + 2b + c = 0 \quad (1)$.

Polaire de $P\,(-2,3)$ par rapport à $\gamma : -2x + 3y + ax - 2a + by + 3b + c = 0$.

$d : x(-2+a) + y(3+b) - 2a + 3b + c = 0$.

d et p sont confondues :

$$\frac{-2+a}{4} = 3 + b = \frac{-2a+3b+c}{-3}$$

Au total on a :

$$\begin{cases} 5 + 4a + 2b + c = 0 & (1) \\ 5a - 12b - 4c = -6 & (2) \\ a - 4b = 14 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} c = -5 - 4a - 2b & (1) \\ 21a - 4b = -26 & (2') \quad ((1) \text{ dans } (2)) \\ a - 4b = 14 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} c = -5 - 4a - 2b & (1) \\ 20a = -40 & (2') - (3) \\ b = \dfrac{a-14}{4} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = 11 \end{cases}$$

$$\gamma : \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

$$\gamma : \quad (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

Exercice 5

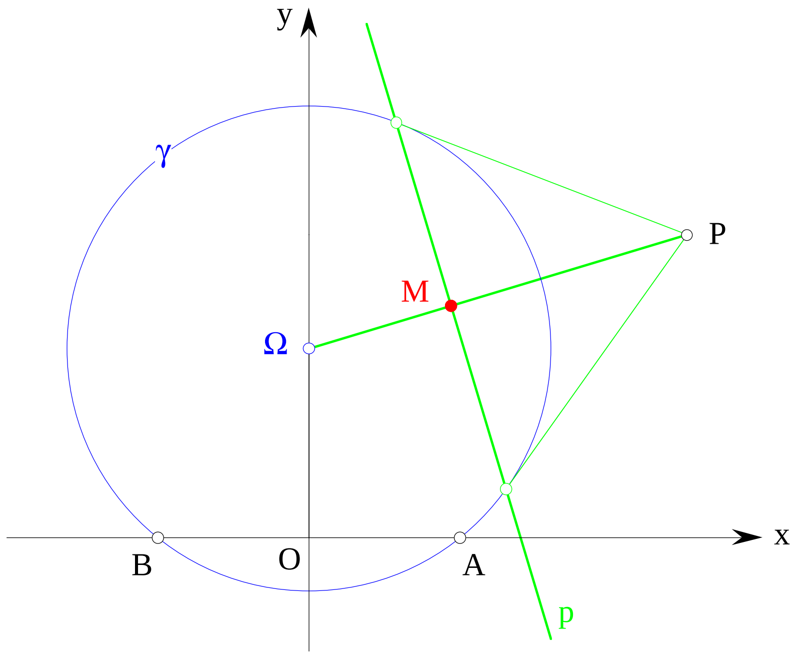
Schéma général de l'étude d'un lieu géométrique.

- **Figure d'étude et définition du repère.**
  (Ici le repère est déjà défini.)
- **Choix du (des) paramètre(s).**
- **Mise en équations.**
  - Equation du cercle γ.
  - Equation de la polaire p de P par rapport à γ.

– Equation de la droite (ΩP).

- **Elimination du (des) paramètre(s) et interprétation géométrique du lieu.**

Figure d'étude



Choix du (des) paramètre(s)

Le cercle γ passe par A et B.
Les points A et B sont donnés et le centre Ω du cercle γ appartient à la médiatrice de ces deux points. Le centre Ω appartient donc à l'axe Oy.

$$\Omega \in Oy \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \Omega\,(0\,,\,\beta)\,.$$

On choisit β comme paramètre du problème.

Remarque :
Le centre Ω est ici le "moteur" du lieu géométrique et le paramètre β permet de le caractériser.

Mise en équations

- **Equation du cercle γ**

  L'équation du cercle γ s'écrit :
  $$\gamma: \quad (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 - r^2 = 0\,,$$
  $$\text{avec} \quad x_\Omega = 0\,, \quad y_\Omega = \beta \quad \text{et} \quad r^2 = \|\overrightarrow{\Omega A}\|^2 = 4 + \beta^2.$$
  On en déduit l'équation du cercle γ en fonction du seul paramètre β :
  $$\gamma: \quad x^2 + (y - \beta)^2 - (4 + \beta^2) = 0\,.$$

- **Equation de la polaire p de P par rapport à γ**

  On obtient l'équation de la polaire p de P par rapport à γ à l'aide de la règle du dédoublement :
  $$x\,x_P + (y - \beta)\,(y_P - \beta) - (4 + \beta^2) = 0$$
  $$\Leftrightarrow \quad 5x + (4 - \beta)\,y - (4\beta + 4) = 0\,.$$

- **Equation de la droite** $(\Omega\, P)$

  Soit $R\,(x,\, y)$ un point courant de la droite $(\Omega\, P)$.

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda\, \overrightarrow{\Omega P} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4-\beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (4-\beta)\, x \,-\, 5y \,+\, 5\beta \,=\, 0\,.$$

- **Définition du lieu de** M

  Le point $M\,(x,\, y)$ définissant le lieu est l'intersection de la polaire p et de la droite (ΩP), ses coordonnées satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} 5x \,+\, (4-\beta)\, y \,-\, (4\beta+4) \,=\, 0 & (1) \\ (4-\beta)\, x \,-\, 5y \,+\, 5\beta \,=\, 0 & (2) \end{cases}$$

  Ce système représente les équations paramétriques (implicites) du lieu de M.

Elimination du (des) paramètre(s) et interprétation géométrique du lieu

- **Elimination du paramètre** β

  Les équations paramétriques du lieu de M ne nous permettent pas de donner une interprétation géométrique de ce lieu.

  Il est nécessaire de déterminer son équation cartésienne en éliminant le paramètre β.

$$\begin{cases} 5x \,+\, (4-\beta)\, y \,-\, (4\beta+4) \,=\, 0 & (1) \\ (4-\beta)\, x \,-\, 5y \,+\, 5\beta \,=\, 0 & (2) \end{cases}$$

  Dans une des deux équations, on exprime β en fonction de x et de y, puis on le remplace dans la deuxième équation.

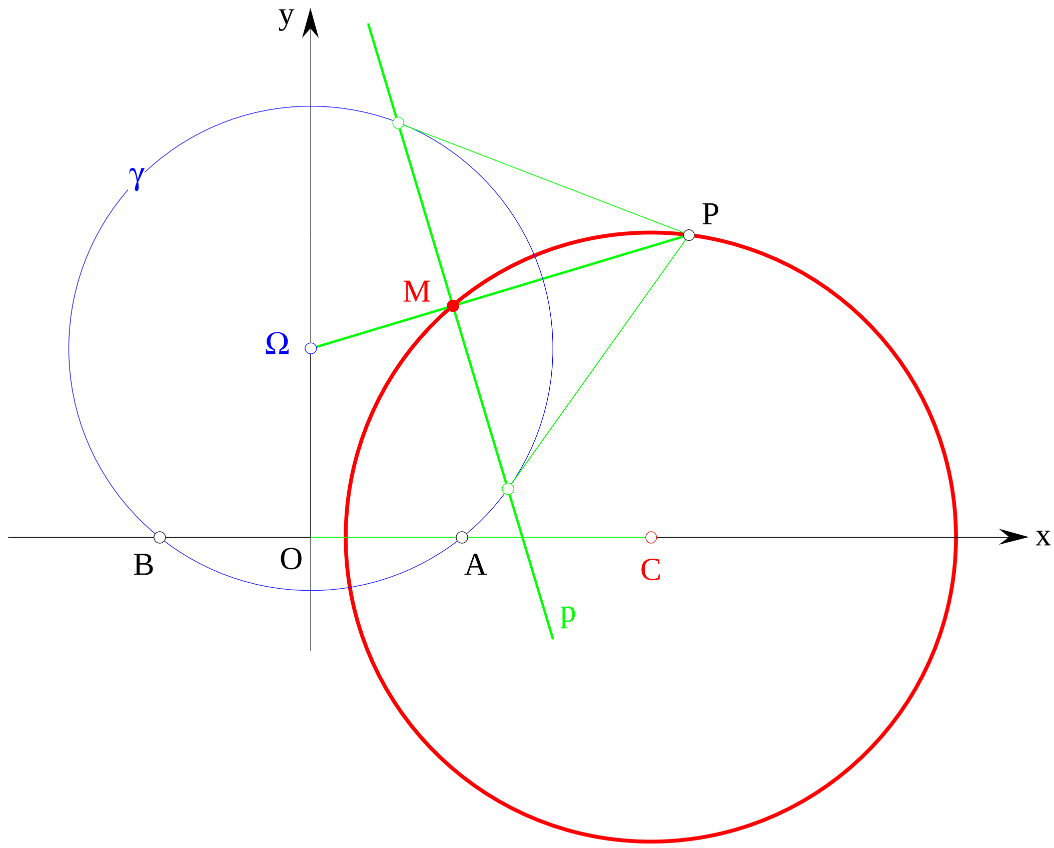
  On obtient :

$$x^2 \,+\, y^2 \,-\, 9x \,+\, 4 \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \tfrac{9}{2})^2 \,+\, y^2 \,-\, \tfrac{65}{4} \,=\, 0\,.$$

- **Interprétation géométrique du lieu.**

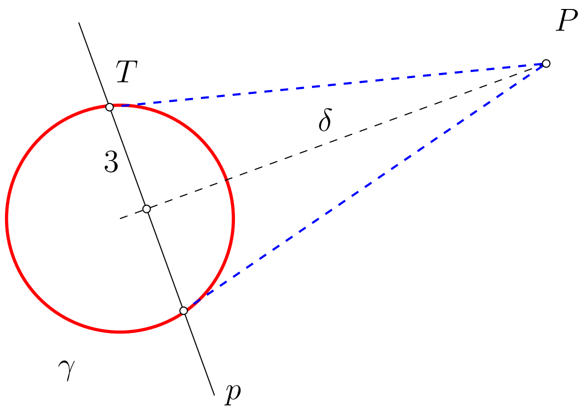
  Le lieu de M est le cercle de centre $C\;(\frac{9}{2}\,,\, 0)$ et de rayon $\rho = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

  On remarque que le point P appartient au lieu. En effet, lorsque le cercle γ passe par le point P, alors la polaire p coïncide avec la tangente à γ en P et l'intersection avec la droite (ΩP) donne le point P.



Exercice 6

Figure d'étude :



La puissance de P par rapport à γ est donnée par

$$\mathcal{P}_\gamma(P) = \|\overrightarrow{PT}\|^2\,,$$

où T est un des points de tangence d'une tangente à γ issue de P. Or on peut d'abord calculer la distance de P à sa polaire p,

$$\delta = \operatorname{dist}(P, p) = \frac{|3(-2) - 4(2) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4,$$

et trouver la puissance cherchée en utilisant le Théorème de Pythagore :

$$\mathcal{P}_\gamma(P) = \|\overrightarrow{PT}\|^2 = (\text{demie corde})^2 + \delta^2 = 3^2 + 4^2 = 25\,.$$