Contrôle de géométrie analytique N°3

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

Groupe

PRENOM : ______________________________

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$.

Soient P et Q deux points de l'ellipse $\mathcal{E}$. Q est le point diamétralement opposé au point P.

On note t la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point P et d la droite verticale passant par le point Q.

On considère la perpendiculaire à d en P et la perpendiculaire à t en Q.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points H, intersection de ces deux perpendiculaires, lorsque le point P décrit l'ellipse $\mathcal{E}$.

Montrer que ce lieu est une ellipse. Déterminer son centre, les foyers et les longueurs de son petit axe et de son grand axe.

4.5 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses dont :

- le centre Ω appartient à la droite $d:\ y = 12$,
- une extrémité A du grand axe appartient à la droite $a:\ y = x$,
- le foyer F le plus proche de A appartient à la droite $g:\ y = 14$.

a) Déterminer l'équation cartésienne, dépendante d'un paramètre, de la famille $\mathcal{F}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$ dont la directrice correspondant au foyer F est la droite d'équation $y = 44$.

5 pts

Tourner la page

3. Dans le plan, on donne deux points P et M, ainsi que deux cercles $\gamma_1\,(\Omega_1\,,\,r_1)$ et $\gamma_2\,(\Omega_2\,,\,r_2)$.

On considère un cercle $\gamma\,(\Omega\,,\,r)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- Ω appartient à la polaire p du point P par rapport au cercle γ_2,
- le cercle γ est orthogonal au cercle γ_1,
- les tangentes aux cercles γ_1 , γ_2 et γ issues du point M sont isométriques.

a) Construire rigoureusement (règle, équerre, compas), sur la donnée graphique ci-jointe, le cercle $\gamma\,(\Omega\,,\,r)$.

2.5 pts

b) Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les deux cercles γ_1 et γ_2, ainsi que les points P et M de la manière suivante:

$\gamma_1 :\ x^2 + y^2 - 4 = 0$

$\gamma_2 :\ (x-6)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$

$P\,(8\,;\,2)$ et $M\,(4\,;\,y_M)$.

Déterminer l'ordonnée y_M du point M.
Déterminer l'équation cartésienne du cercle γ et le caractériser géométriquement.

3 pts

Réponses

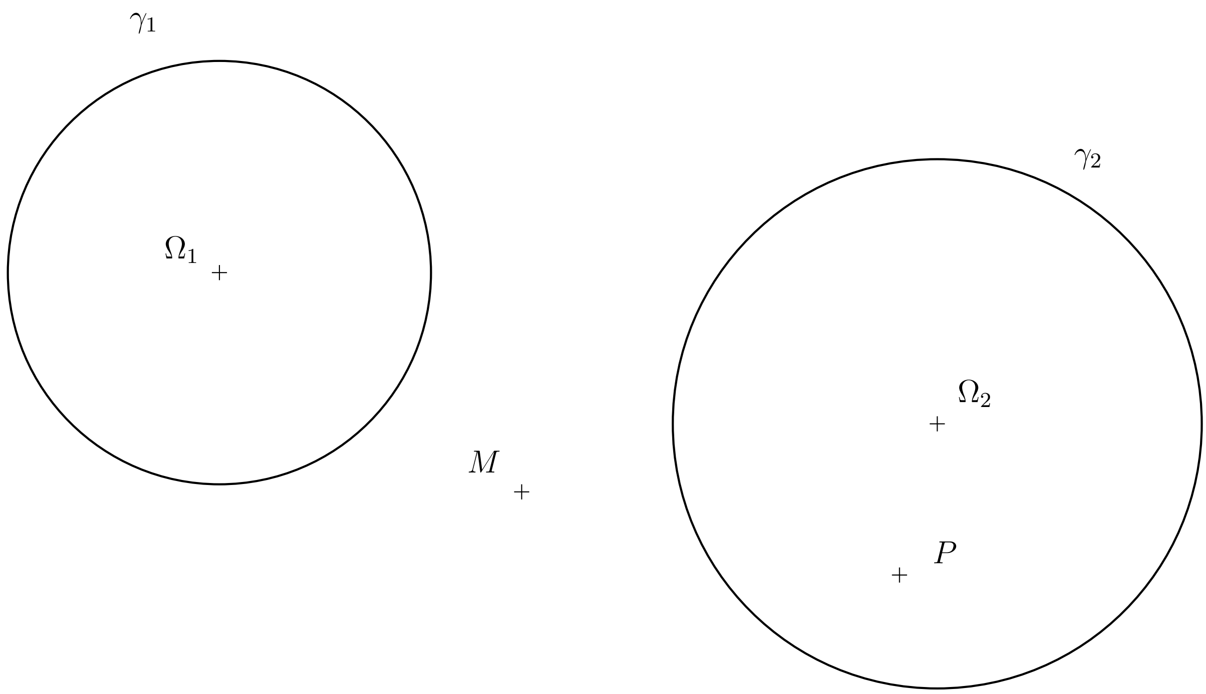
1. $9x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{x^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

Centre : $\Omega\,(0,0)$ et foyers : $F\,(0, \frac{\sqrt{2}}{3})$ et $F'\,(0, -\frac{\sqrt{2}}{3})$
grand axe : $2a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et petit axe : $2b = \frac{2}{3}$

2. a) $\mathcal{F}\ :\ \dfrac{(x-\alpha)^2}{(\alpha-10)(\alpha-14)} + \dfrac{(y-12)^2}{(\alpha-12)^2} - 1 = 0\,, \quad \alpha > 14$

b) $\mathcal{E}\ :\ \dfrac{(x-20)^2}{60} + \dfrac{(y-12)^2}{64} - 1 = 0$

3. b) $y_M = 0$
$\gamma\ :\ (x-1)^2 + (y+8)^2 - 61 = 0$: cercle de centre $\Omega\,(1,-8)$ et rayon $r = \sqrt{61}$.


γ_1
Ω_1
M
γ_2
Ω_2
P