Examen d'Analyse 4 (SV-MT)

Juin 2019

Durée : 2h.

Matériel autorisé : - résumé manuscrit de 4 pages (2 feuilles recto-verso)

- les tables de transformées de Fourier et de Laplace
- le Formulaire et Tables du CRM

Attention : sujet recopié de mémoire après l'examen, exactitude pas garantie :)

Exercice 1

I. Soit

$$f(x) = 2x \quad si \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$et\ f(x) = 2\pi - 2x \ \ si \ \ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

a) Calculer $F_S f(x)$ la série de Fourier en sinus de $f(x)$.

b) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer $F_S f(x)$ et $f(x)$.

c) A partir de a) et de b), calculer :

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

II. a) Trouver $f(x)$ telle que $\mathcal{F}f(\alpha) = e^{-2i\alpha}\sin(3\alpha)$.

b) Trouver $f(x)$ telle que $\mathcal{F}f(\alpha) = 2\sqrt{2}\,\alpha^2 e^{-\alpha^2}$

c) Soit

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{y^2+4} dy$$

Calculer $h(x)$ de façon explicite.

d) Soit $\mathcal{F}g(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^4}$ et $f(x) = (xg(x))''$. Calculer $\mathcal{F}f(\alpha)$.

Exercice 2

I. Soit l'équation différentielle suivante : $y'(t) + y(t) = 8\, sinh(t)$ avec $y(0) = 1$.

a) En utilisant la méthode du cours, trouver $Y(z)$ la transformée de Laplace de $y(t)$.

b) En utilisant la décomposition en éléments simples et les tables de transformées de Laplace, trouver $y(t)$.

II. Soit

$$F(z) = \frac{1}{z^4 - 2z^3 + z^2}$$

a) Par un calcul de résidus, trouver une fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(z)$.

b) Donner les abscisses de convergence de $F(z)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation en utilisant la séparation de variables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2 + \sin(t) + t^2)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\, u(x,t))$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$

Exercice 4

Soit

$$f(x) = 0\ si\ x < 0\ ;$$

$$f(x) = 2x\ si\ 0 \leq x \leq 1\ ;$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\ si\ x > 1$$

a) Exprimer $\langle T_f + \delta_1 \rangle$.

b) Exprimer $\langle (T_f)' + \delta_1 \rangle$.

c) Soit $T_g = \left(T_f\right)' + \delta_a$. Exprimer T_g .