Contrôle de géométrie analytique N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☑

1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on donne une droite $a\,(C\,,\,\vec{v})$ et un point P :

$C\,(\,1\,;\,0\,;\,0\,)\,,\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\quad$ et $\quad P\,(\,3\,;\,4\,;\,1\,)$

a) Calculer la distance δ du point P à la droite a.

b) On considère la droite b symétrique de la droite (CP) par rapport à a. Déterminer les équations paramétriques de la droite b.

3 pts

2. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on donne un plan α et un point A :

$\alpha \quad : \quad y + z = 0 \quad$ et $\quad A\,(\,6\,;\,6\,;\,3\,)$.

On note $\angle\,(\,OA\,,\,\alpha\,)$ l'angle entre la droite (OA) et le plan α.

a) Déterminer l'angle θ tel que $\theta = \angle\,(\,OA\,,\,\alpha\,)$.
(Il suffit de donner $\cos\theta$ ou $\sin\theta$).

b) Déterminer l'équation cartésienne (sous forme polynomiale) de l'ensemble

$$\Sigma = \{\, M(x\,,\,y\,,z) \;|\; \angle\,(\,OM\,,\,\alpha\,) = \theta \,\}\,.$$

2 pts

Tourner la page SVP

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on donne

- la droite d déterminée par un point D et un vecteur normal $\vec{n}$,
- la droite $g = (O, \vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ($\|\vec{u}\| = 1$) et $O \notin d$.
- la droite a parallèle à la droite g passant par le point A,
- on suppose $A \notin d$, $A \notin g$, $D \notin g$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$.

On considère un triangle ABC non dégénéré.

Sans utiliser de coordonnées, déterminer, en fonction des données :

a) le point C, tel que C soit l'intersection des droites d et g,

b) le point B, tel que le triangle ABC soit isocèle de base BC, dont la droite a est la hauteur issue de A.

4.5 pts

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on donne un point A, un vecteur $\vec{a}$ et une droite d.

$$A\,(7\,;\,2\,;\,8)\,, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d : \begin{cases} \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-4}{2} \\ z = 6 \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan α défini par le point O et la droite d.
Déterminer l'équation cartésienne du plan β perpendiculaire à α et contenant la droite $a = (A, \vec{a})$.

b) Soit ABC un triangle contenu dans le plan β.
Déterminer les coordonnées des points B et C sachant que :

- B appartient à la droite d,
- la droite (AC) est parallèle au plan α,
- le triangle ABC est rectangle en B.

5.5 pts