Physique — Roger Sauser

Semestre de printemps 2019 — https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 13

Exercice 1

(a) **L'efficacité de la mise en rotation** est mesurée par le **moment de force** de $\vec{F}$ par rapport à A. La norme de ce moment de force est

$$||\vec{M}_A|| = bF\,,$$

où b est le bras de levier et $F = ||\vec{F}||$.
Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est **maximale** lorsque b est maximal. Ainsi,

$$b = R \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi$$

(la force $\vec{F}$ est alors tangente à la roue).

(b) Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est **minimale** pour b minimal. Ainsi,

$$b = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

(la force $\vec{F}$ est alors normale à la roue).

(c) On exploite la définition du moment de force par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \vec{F}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$, la norme du moment de force s'écrit

$$||\vec{M}_A|| = b(\alpha)\,F = R\,|\cos\alpha|\,F\,,$$

où $F = ||\vec{F}||$.

- Pour $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, la rotation induite est **de sens trigonométrique** et le moment $\vec{M}_A$ est **sortant** :

$$\odot\,\vec{M}_A\,.$$

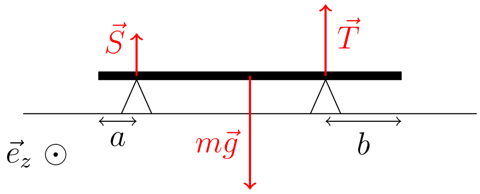
- Pour $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, la rotation induite est **dans le sens des aiguilles d'une montre** et le moment $\vec{M}_A$ est **entrant** :

$$\otimes\,\vec{M}_A\,.$$

Exercice 2

Nous allons faire un dessin, choisir un objet, déterminer les forces (extérieures) en présence et appliquer les lois de la statique.

On choisit la barre (supposée homogène) comme objet. Les forces à considérer sont donc le poids $m\vec{g}$ de la barre et les forces de soutien $\vec{S}$ et $\vec{T}$ au niveau des appuis :



A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles.

i) La **somme des moments par rapport au point d'appui** A où s'applique $\vec{S}$ a pour expression

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{T}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_z$, il vient

$$0 + (L-a-b)T - (\frac{L}{2} - a)mg = 0\,,$$

où L est la longueur de la barre.

Ainsi,

$$T = \frac{(L-2a)mg}{2(L-a-b)} \cong 367.9\,\mathrm{N}\,,$$

où l'on a posé $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$.

ii) D'autre part, la **somme des forces** projetée selon un repère vertical dirigé vers le haut s'écrit

$$S + T - mg = 0\,.$$

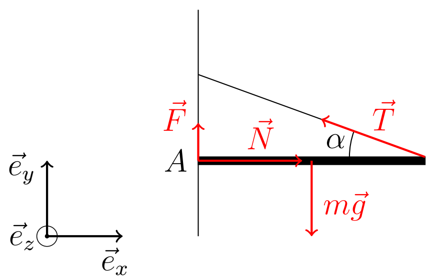
Ainsi,

$$S = mg - T = \frac{(L-2b)mg}{2(L-a-b)} \cong 220.7\,\mathrm{N}\,.$$

Exercice 3

Nous allons faire un dessin, choisir un objet, déterminer les forces (extérieures) en présence et appliquer les lois de la statique.

On choisit la planche (supposée homogène) comme objet. Les forces à considérer sont donc le poids $m\vec{g}$ de la planche, la force de traction $\vec{T}$ dans le fil et les forces $\vec{F}$ et $\vec{N}$ exercées par le mur sur la planche :



A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles.

i) La **somme des moments par rapport au point** A où s'appliquent $\vec{F}$ et $\vec{N}$ a pour expression

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{N}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_z$, il vient

$$0 + 0 - \frac{L}{2}mg + LT\sin\alpha = 0\,,$$

où L est la longueur de la planche.
Ainsi,

$$T = \frac{mg}{2\sin\alpha} \cong 14.3\,\mathrm{N}\,,$$

où l'on a posé $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$.

ii) D'autre part, la **somme des forces** doit être nulle :

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_x$, il vient

$$N - T\cos\alpha = 0\,,$$

si bien que

$$N = \frac{mg}{2}\cot\alpha \cong 13.5\,\mathrm{N}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_y$, on obtient

$$F - mg + T\sin\alpha = 0\,,$$

si bien que

$$F = \frac{mg}{2} \cong 4.91\,\mathrm{N}\,.$$

Exercice 4

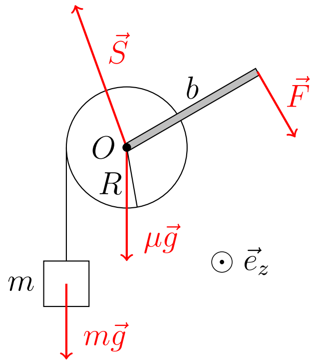
On applique la **méthode générale** (voir semestre d'automne) :

(a) faire un dessin
(b) choisir un objet
(c) déterminer les forces extérieures
(d) écrire les lois de la dynamique
(e) choisir un repère
(f) faire les projections en vue des calculs.

Recherche de la force minimale

Chercher une force minimale revient à déterminer la force permettant de maintenir l'équilibre. Une force de norme à peine supérieure permet de monter le seau.

Il peut être judicieux de choisir comme objet l'ensemble des éléments susceptibles de bouger ensemble.



Objet : cylindre, tige et seau.

Forces : poids du cylindre, poids du seau, soutien sur l'axe O, force en bout de tige.

A l'équilibre, pour la translation,

$$\mu\vec{g} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à l'axe O,

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\mu\vec{g}) + \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{S}) + \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}\,.$$

Les quatre moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_O(\mu\vec{g})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_O(m\vec{g})$ est sortant (bras de levier R)
- $\vec{M}_O(\vec{S})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_O(\vec{F})$ est entrant (bras de levier b)

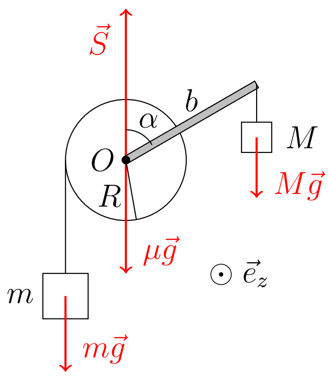
$$\underbrace{\vec{M}_O(\mu\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F})}_{\otimes} = \vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\ \vec{e}_z$ (sortant),

$$0 + Rmg + 0 - bF = 0 \quad\Rightarrow\quad F = \frac{Rmg}{b}\,.$$

Masse suspendue à la manivelle

Dans la situation avec la masse suspendue à la manivelle, on va considérer à nouveau l'équilibre d'un objet. Il peut être judicieux de choisir comme objet l'ensemble des éléments susceptibles de bouger ensemble.



Objet : cylindre, tige, seau, masse M.

Forces : poids du cylindre, poids du seau, soutien sur l'axe O, poids de M.

A l'équilibre, pour la translation,

$$\mu\vec{g} + m\vec{g} + \vec{S} + M\vec{g} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à l'axe O,

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\mu\vec{g}) + \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{S}) + \vec{M}_O(M\vec{g}) = \vec{0}\,.$$

Les quatre moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_O(\mu\vec{g})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_O(m\vec{g})$ est sortant (bras de levier R)
- $\vec{M}_O(\vec{S})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_O(M\vec{g})$ est entrant (bras de levier $b\sin\alpha$)

$$\underbrace{\vec{M}_O(\mu\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(M\vec{g})}_{\otimes} = \vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\, \vec{e}_z$ (sortant),

$$0 + Rmg + 0 - b\sin\alpha Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{Rm}{bM}\,.$$

Remarque: il existe une position d'équilibre à condition que $\dfrac{Rm}{bM} \leq 1$, $\sin\alpha$ n'étant sinon pas défini. Autrement dit,

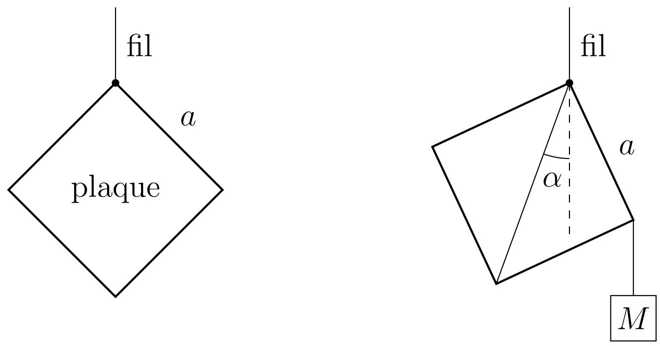
$$\frac{Rm}{bM} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Rm}{b} \leq M\,.$$

Il y a alors deux angles possibles.

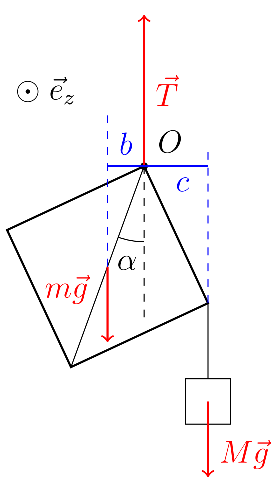
- $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: l'équilibre est instable et une légère perturbation rompt l'équilibre. Le seau descend alors.
- $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$: l'équilibre est stable et une légère perturbation ne rompt pas l'équilibre. Le seau reste en place.

Exercice 5

On applique la **méthode générale** en commençant par un dessin "avant-après".



Il peut être judicieux de choisir comme objet l'ensemble des éléments susceptibles de bouger et comme centre de rotation un point annulant le bras de levier d'une force inconnue.



Objet : plaque et masse M.

Forces : poids de la plaque, tension du fil, poids de M.

A l'équilibre, pour la translation,

$$m\vec{g} + \vec{T} + M\vec{g} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à O,

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(M\vec{g}) = \vec{0}\,.$$

Les trois moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_O(m\vec{g})$ est sortant (bras de levier b)
- $\vec{M}_O(\vec{T})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_O(M\vec{g})$ est entrant (bras de levier c)

$$\underbrace{\vec{M}_O(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{T})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(M\vec{g})}_{\otimes} = \vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\,\vec{e}_z$ (sortant),

$$bmg + 0 - cMg = 0\,.$$

Déterminons les bras de levier :

- Bras de levier de $m\vec{g}$: projection de la demi-diagonale de la plaque sur l'horizontale (normale à $m\vec{g}$),
$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\,.$$
- Bras de levier de $M\vec{g}$: projection du côté de la plaque sur l'horizontale (normale à $M\vec{g}$),
$$c = a\sin(\tfrac{\pi}{4} - \alpha)\,,$$
l'angle entre la diagonale et le côté de la plaque étant $\frac{\pi}{4}$.

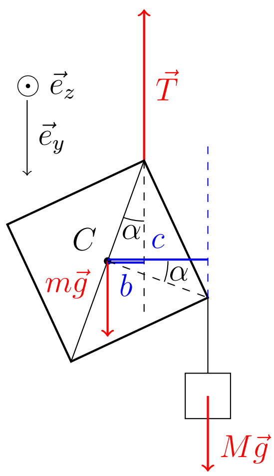
Finalement,

$$\begin{aligned}
& & bm - cM &= 0\\
&\Leftrightarrow & m\,a\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - Ma\sin(\tfrac{\pi}{4} - \alpha) &= 0\\
&\Leftrightarrow & m\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - M(\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\alpha - \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha) &= 0\\
&\Leftrightarrow & m\sin\alpha - M\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right) &= 0\\
&\Leftrightarrow & (m+M)\sin\alpha - M\cos\alpha &= 0\\
&\Leftrightarrow & \tan\alpha &= \frac{M}{M+m}\,.
\end{aligned}$$

Discussion : considérons les cas limites

- $M = 0$: $\tan\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0$. La diagonale est bien verticale.
- $M \to \infty$: $\tan\alpha \to 1 \quad\Rightarrow\quad \alpha \to \frac{\pi}{4}$. Le côté au bout duquel est accrochée M est vertical.

Remarque : en considérant le centre de la plaque comme centre de rotation, les expressions des bras de levier sont plus simples.



Objet : plaque et masse M.

Forces : poids de la plaque, tension du fil, poids de M.

A l'équilibre, pour la translation,

$$m\vec{g} + \vec{T} + M\vec{g} = \vec{0}$$

et selon $\vec{e}_y$:

$$mg - T + Mg = 0 \quad\Rightarrow\quad T = (m+M)g\,.$$

Pour la rotation par rapport à C,

$$\vec{M}_C = \vec{M}_C(m\vec{g}) + \vec{M}_C(\vec{T}) + \vec{M}_C(M\vec{g}) = \vec{0}$$

et selon $\vec{e}_z$:

$$0 + bT - cMg = 0$$

avec $b = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\alpha$ et $c = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\alpha$.

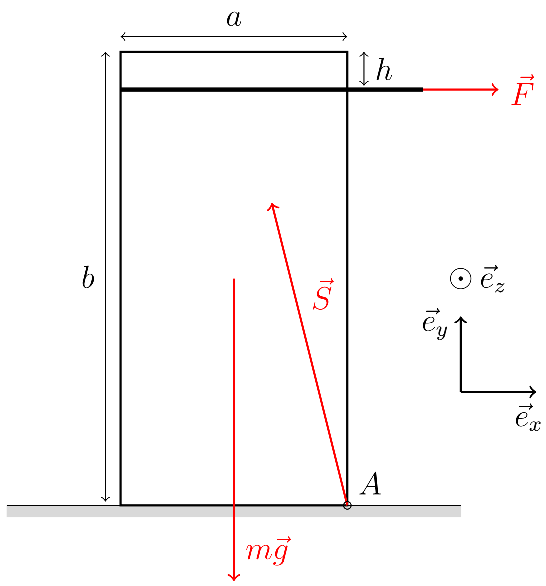
Alors,

$$\begin{array}{rrcl} & bT - cMg & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\alpha\,(m+M)g - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\alpha M g & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (m+M)\sin\alpha - M\cos\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \tan\alpha & = & \frac{M}{M+m}\,. \end{array}$$

Exercice 6

Nous allons faire un dessin, choisir un objet, déterminer les forces (extérieures) en présence et appliquer les lois de la statique.

L'objet que nous allons considérer est le bloc (supposé homogène). Ce dernier subit trois forces : son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{F}$ exercée par l'intermédiaire de la corde et une force de soutien $\vec{S}$ exercée par le sol.



A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles.

Lorsque le bloc de pierre pivote autour de A, la force de soutien $\vec{S}$ s'applique en A. Ainsi, la force $\vec{F}$ à exercer est donnée par les conditions d'équilibre lorsque $\vec{S}$ s'applique en A :

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} = \vec{0}$$

et, par rapport à A et selon $\vec{e}_z$,

$$\frac{a}{2}mg - (b-h)F = 0\,.$$

Cette dernière relation fournit directement la norme de la tension dans la corde :

$$F = \frac{amg}{2(b-h)} \cong 401.3\,\mathrm{N}\,,$$

où l'on a posé $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Selon l'horizontale,

$$S_x = -F = -\frac{amg}{2(b-h)} \cong -401.3\,\mathrm{N}$$

et, selon la verticale,

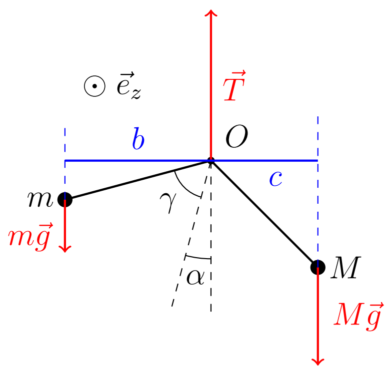
$$S_y = mg = 1471.5\,\mathrm{N}.$$

La norme de $\vec{S}$ vaut donc

$$S = \sqrt{{S_x}^2 + {S_y}^2} \cong 1525.2\,\mathrm{N}\,.$$

Exercice 7

On applique la **méthode générale**. Il peut être judicieux de choisir comme objet l'ensemble des éléments susceptibles de bouger et comme centre de rotation un point annulant le bras de levier d'une force inconnue.



Objet : balance, m et M.

Forces : poids des masses, tension du fil.

A l'équilibre, pour la translation,

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à O,

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(M\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}\,.$$

Les trois moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_O(m\vec{g})$ est sortant (bras de levier b)
- $\vec{M}_O(M\vec{g})$ est entrant (bras de levier c)
- $\vec{M}_O(\vec{T})$ est nul (bras de levier nul)

$$\underbrace{\vec{M}_O(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_O(M\vec{g})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{T})}_{\vec{0}} = \vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\ \vec{e}_z$ (sortant),

$$bmg - cMg + 0 = 0\,.$$

Déterminons les bras de levier :

- Bras de levier de $m\vec{g}$: projection de la tige sur l'horizontale (normale à $m\vec{g}$),

$$b = a\sin(\gamma + \alpha)\,.$$

- Bras de levier de $M\vec{g}$: projection du côté de la plaque sur l'horizontale (normale à $M\vec{g}$),

$$c = a\sin(\gamma - \alpha)\,.$$

Finalement,

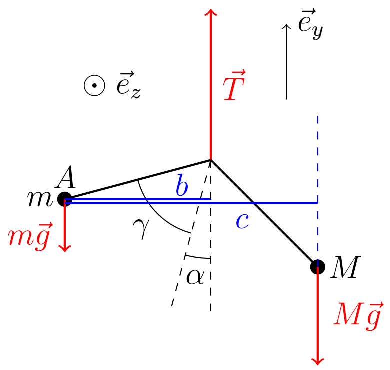
$$\begin{array}{rrcl} & bm - cM & = & 0 \\ \Leftrightarrow & ma\sin(\gamma+\alpha) - Ma\sin(\gamma-\alpha) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & m(\sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha) - M(\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (m+M)\cos\gamma\sin\alpha + (m-M)\sin\gamma\cos\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \tan\alpha & = & \dfrac{M-m}{M+m}\tan\gamma\,. \end{array}$$

Discussion: considérons les cas limites pour

$$\tan\alpha = \frac{M-m}{M+m}\tan\gamma = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\tan\gamma\,.$$

- $\frac{m}{M} = 1$: $\tan\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$. La balance est symétrique.
- $\frac{m}{M} = 0$: $\tan\alpha = \tan\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma$. La tige de droite est verticale.
- $\frac{m}{M} \to \infty$: $\tan\alpha \to -\tan\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha \to -\gamma$. La tige de gauche est verticale.

Autre manière de résoudre l'exercice:
On applique toujours la **méthode générale**, mais on étudie la rotation par rapport à un autre point.



Objet : balance, m et M.

Forces : poids des masses, tension du fil.

A l'équilibre, pour la translation,

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}\,,$$

selon $\vec{e}_y$, $-mg - Mg + T = 0$

$$\Rightarrow \ T = (m+M)g\,,$$

et pour la rotation par rapport à A,

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(M\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}\,.$$

Les trois moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_A(m\vec{g})$ est nul (bras de levier nul)
- $\vec{M}_A(M\vec{g})$ est entrant (bras de levier c)
- $\vec{M}_A(\vec{T})$ est sortant (bras de levier b)

$$\underbrace{\vec{M}_A(m\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_A(M\vec{g})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{T})}_{\odot} = \vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\,\vec{e}_z$ (sortant),

$$0 - cMg + bT = 0\,.$$

Déterminons les bras de levier :

- Bras de levier de $\vec{T}$: projection de la tige sur l'horizontale (normale à $\vec{T}$),

$$b = a\sin(\gamma+\alpha)\,.$$

- Bras de levier de $M\vec{g}$: b plus la projection du côté de la plaque sur l'horizontale (normale à $M\vec{g}$),

$$c = b + a\sin(\gamma-\alpha) = a\sin(\gamma+\alpha) + a\sin(\gamma-\alpha)\,.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&& bT - cMg &= 0 \\
&\Leftrightarrow & a\sin(\gamma+\alpha)(m+M)g - (a\sin(\gamma+\alpha)+a\sin(\gamma-\alpha))Mg &= 0 \\
&\Leftrightarrow & m\sin(\gamma+\alpha) - M\sin(\gamma-\alpha) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & m(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha) - M(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (m+M)\cos\gamma\sin\alpha + (m-M)\sin\gamma\cos\alpha &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \tan\alpha &= \frac{M-m}{M+m}\tan\gamma\,.
\end{aligned}$$

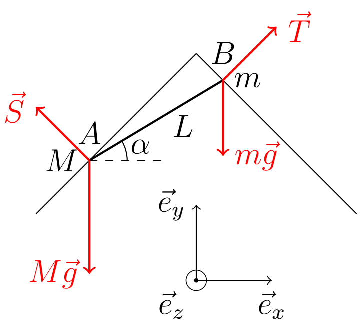
Discussion: considérons les cas limites pour

$$\tan\alpha = \frac{M-m}{M+m}\tan\gamma = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\tan\gamma\,.$$

- $\frac{m}{M} = 1$: $\tan\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0$. La balance est symétrique.
- $\frac{m}{M} = 0$: $\tan\alpha = \tan\gamma \quad\Rightarrow\quad \alpha=\gamma$. La tige de droite est verticale.
- $\frac{m}{M} \to \infty$: $\tan\alpha \to -\tan\gamma \quad\Rightarrow\quad \alpha\to-\gamma$. La tige de gauche est verticale.

Exercice 8

On applique la **méthode générale** :



Objet : le cadre

Forces : poids, soutiens exercés par les plans

A l'équilibre, pour la translation,

$$M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à A,

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(M\vec{g}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}\,.$$

Pour la translation,

- selon $\vec{e}_x$:

$$-S\frac{1}{\sqrt{2}} + T\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad S = T\,,$$

- selon $\vec{e}_y$:

$$-Mg - mg + S\frac{1}{\sqrt{2}} + T\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad S = T = \frac{(M+m)g}{\sqrt{2}}\,.$$

Les quatre moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_A(M\vec{g})$ et $\vec{M}_A(\vec{S})$ sont nuls (bras de levier nuls)
- $\vec{M}_A(m\vec{g})$ est entrant (bras de levier b)
- $\vec{M}_A(\vec{T})$ est sortant (bras de levier c)

$$\underbrace{\vec{M}_A(M\vec{g})}_{\vec{0}}+\underbrace{\vec{M}_A(m\vec{g})}_{\otimes}+\underbrace{\vec{M}_A(\vec{S})}_{\vec{0}}+\underbrace{\vec{M}_A(\vec{T})}_{\odot}=\vec{0}\,.$$

Ainsi, selon $\odot\,\vec{e}_z$ (sortant),

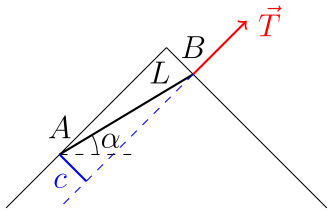
$$-bmg+cT=0\,.$$

Déterminons les bras de levier :

- Bras de levier de $m\vec{g}$: projection de la tige sur l'horizontale (normale à $m\vec{g}$),

$$b=L\cos\alpha\,.$$

- Bras de levier de $\vec{T}$: projection de la tige sur la normale à $\vec{T}$,



$$c=L\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{4})\,.$$

Finalement,

$$\begin{array}{rrcl}
 & bmg-cT & = & 0\\
\Leftrightarrow & Lmg\cos\alpha-L\dfrac{(M+m)g}{\sqrt{2}}\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{4}) & = & 0\\
\Leftrightarrow & \sqrt{2}m\cos\alpha-(M+m)\left(\cos\alpha\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) & = & 0\\
\Leftrightarrow & 2m\cos\alpha-(M+m)(\cos\alpha-\sin\alpha) & = & 0\\
\Leftrightarrow & (M+m)\sin\alpha-(M-m)\cos\alpha & = & 0\\
\Leftrightarrow & \tan\alpha & = & \dfrac{M-m}{M+m}\,.
\end{array}$$

Discussion: considérons les cas limites pour

$$\tan\alpha=\frac{M-m}{M+m}=\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\,.$$

- $\frac{m}{M}=1$: $\tan\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0\,$. Le cadre est horizontal.
- $\frac{m}{M}=0$: $\tan\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{\pi}{4}\,$. Le cadre est parallèle au plan de gauche.
- $\frac{m}{M}\to\infty$: $\tan\alpha\to-1 \quad\Rightarrow\quad \alpha\to-\frac{\pi}{4}\,$. Le cadre est parallèle au plan de droite.