Physique
Semestre d'automne 2018

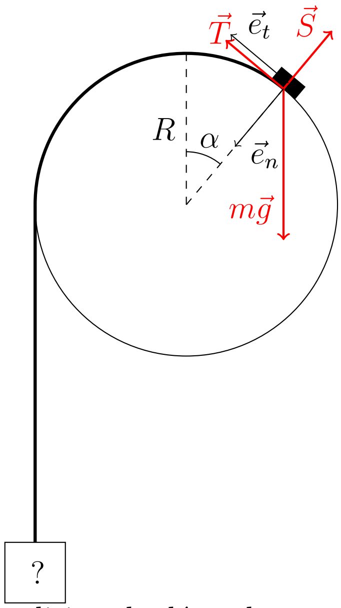
Simon Bossoney
Guido Burmeister

moodle.epfl.ch

Corrigé 9

Exercice 1

La question porte sur la masse m. On peut donc la considérer comme l'objet à étudier. La masse m gagne en vitesse et finit par décrocher au sommet.
Considérer d'abord une position quelconque pour la masse m.



Objet : m

Forces : poids, soutien, tension

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = m\vec{a}_m\,.$$

Le décrochement de la masse de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\alpha + T = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

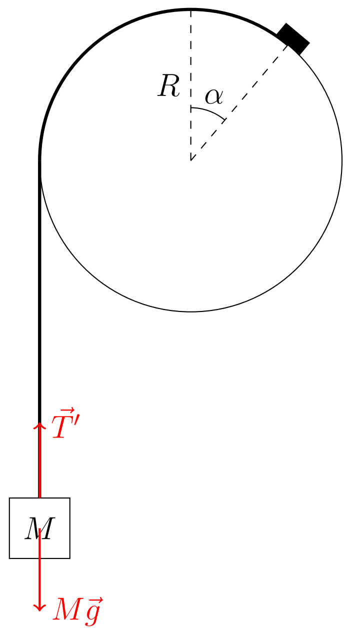
Au point D du décrochement repéré par l'angle $\alpha_D = 0$, $S = 0$:

$$mg\cos 0 = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow v_D = \sqrt{Rg}\,.$$

Remarque : si la seconde masse, notée M, est trop petite, la vitesse de m sera trop faible pour qu'elle décolle au sommet. Inversément, si M est trop grande, m décolle avant.
Le lien entre m et la masse inconnue M est le fil tendu. La tension est une force tangentielle, autant pour m que pour M. C'est donc une force qui travaille contribuant ainsi à la modification des énergies cinétiques de m et de M.
Pour m, la projection selon $\vec{e}_t$ est exploitée à travers le théorème de l'énergie cinétique.
Le théorème de l'énergie cinétique (Newton intégré selon $\vec{e}_t$) entre le point de départ et le sommet s'écrit

$$\begin{aligned}
E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{S}) + W_{1\to 2}(\vec{T}) \\
\frac{1}{2}mv_D^2 - 0 &= -mgR + 0 + W_{1\to 2}(\vec{T})\,.
\end{aligned}$$

Le travail de la tension $W_{1\to2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{r}_m$ est positif, $\vec{T}$ et $d\vec{r}_m$ étant parallèles et de même sens.
Remarque : la tension n'étant pas conservative, l'énergie mécanique n'est pas conservée !
Considérer M comme second objet : il subit également la tension.



Objet : M

Forces : poids, tension

$$M\vec{g} + \vec{T}' = M\vec{a}_M\,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point atteint lorsque m passe au sommet

$$\frac{1}{2}MV_D^2 - 0 = MgR\frac{\pi}{2} + W_{1\to2}(\vec{T}')\,,$$

M étant descendue de $R\frac{\pi}{2}$.
Le travail de la tension $W_{1\to2}(\vec{T}') = \int_1^2 \vec{T}'\cdot d\vec{r}_M$ est négatif, $\vec{T}'$ et $d\vec{r}_M$ étant parallèles et de sens opposé.

Considérer les liaisons entre les objets choisis.
Liaison : à chaque instant, les vitesses de m et M sont de même norme ($||\vec{V}|| = ||\vec{v}||$), tout comme les tensions ($||\vec{T}'|| = ||\vec{T}||$). Alors

$$\vec{T}'\cdot d\vec{r}_M = -\vec{T}\cdot d\vec{r}_m \quad \Rightarrow \quad W_{1\to2}(\vec{T}') = -W_{1\to2}(\vec{T})\,.$$

En éliminant les travaux par addition des équations, nous obtenons (avec $V_D = v_D$)

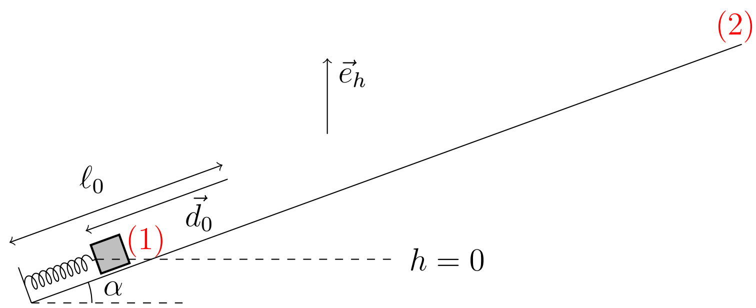
$$\frac{1}{2}(m+M)v_D^2 = -mgR + MgR\frac{\pi}{2}\,,$$

d'où, avec $v_D^2 = Rg$,

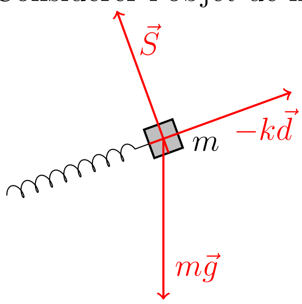
$$M = \frac{3}{\pi - 1}m\,.$$

Exercice 2

La dénivellation est la différence de hauteur entre le point de départ et le point où la masse m s'arrête : utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour m (comme il n'y a pas de frottements, on peut même penser que l'énergie mécanique de la masse m est conservée).
Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse m.



Objet : masse m

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative), soutien du plan (de travail nul).

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de m :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2)\,.$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (1) et (2).
Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de m.
Choisissons le point (1) au départ de m ($\vec{v}_1 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(1) = \frac{1}{2}kd_0^2\,.$$

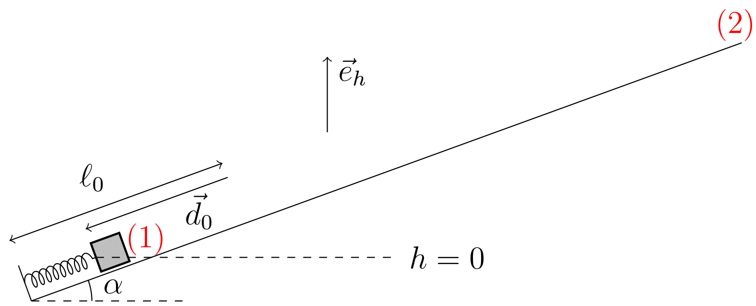
Choisissons le point (2) au point le plus haut atteint par m ($\vec{v}_2 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(2) = mgh\,.$$

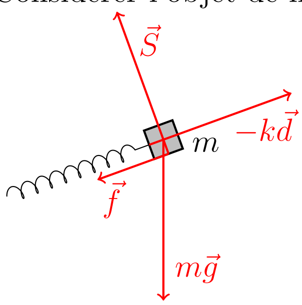
Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd_0^2 = mgh \Leftrightarrow h = \frac{kd_0^2}{2mg} = 28.8\,\text{m}.$$

La dénivellation est la différence de hauteur entre le point de départ et le point où la masse m s'arrête : utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour m (comme il y a des frottements, l'énergie mécanique de la masse m n'est pas conservée.).
Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse m.



Objet : masse m

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative), soutien du plan (de travail nul), frottement (non conservatif).

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

La norme du frottement vaut 60% de celle du soutien. Selon la normale au plan, $S = mg\cos\alpha$. Alors

$$f = 0.6mg\cos\alpha\,.$$

L'énergie mécanique n'est pas conservée entre les points (1) et (2) : la différence est égale au travail des forces non conservatives, à savoir celui du frottement :

$$E_{\text{méc}}(2) - E_{\text{méc}}(1) = W_{1\to 2}(\vec{f})\,.$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (1) et (2).
Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de m.
Choisissons le point (1) au départ de m ($\vec{v}_1 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(1) = \frac{1}{2}kd_0^2\,.$$

Choisissons le point (2) au point le plus haut atteint par m ($\vec{v}_2 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(2) = mgh\,.$$

Le frottement $\vec{f}$ étant de norme constante, son travail vaut

$$W_{1\to 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 f\,ds = -f\int_1^2 ds = -fL\,,$$

L étant la longueur du parcours avec

$$h = L\sin\alpha \Leftrightarrow L = \frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

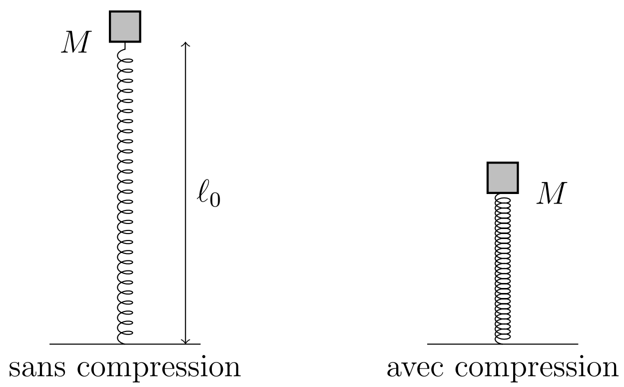
Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(2) - E_{\text{méc}}(1) = W_{1\to 2}(\vec{f}) \Leftrightarrow mgh - \frac{1}{2}kd_0^2 = -0.6mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha}$$

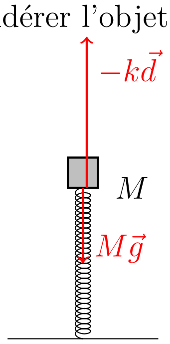
$$\Leftrightarrow h = \frac{kd_0^2}{2mg(1+0.6\,\cot\alpha)} = 10.87\,\text{m}.$$

Exercice 3

Comme on considère la masse M dans deux situations différentes, on peut essayer de lui appliquer le théorème de l'énergie cinétique (ou, le cas échéant, la conservation de l'énergie mécanique).
Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse M.



Objet : masse M

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative).

Newton :

$$M\vec{g} - k\vec{d} = M\vec{a}\,.$$

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de M :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2)\,.$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (1) et (2).
Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de M, lorsque le ressort est non déformé.
Au point (1) (vitesse, hauteur et déformation toutes nulles) :

$$E_{\text{méc}}(1) = 0\,.$$

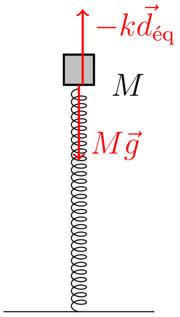
Au point (2) (point le plus bas atteint par m) (vitesse nulle, hauteur minimale $-d$, déformation d) :

$$E_{\text{méc}}(2) = -Mgd + \frac{1}{2}kd^2\,.$$

Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd^2 = Mgd \Leftrightarrow d = 0 \text{ ou } d = \frac{2Mg}{k}.$$

La seconde solution donne la compression maximale du ressort.
C'est une situation d'équilibre.
Faire un dessin et considérer M.



Objet : masse M

Force : poids, force élastique.

Newton :

$$M\vec{g} - k\vec{d}_{\text{éq}} = \vec{0}\,.$$

Selon la verticale, la compression vaut

$$d_{\text{éq}} = \frac{Mg}{k}\,.$$

Considérer les forces en jeu pour ces deux compressions.
Au point d'équilibre (cas (b)), la résultante des forces est nulle. La force du ressort est alors de même norme que le poids.
Au point le plus bas (cas (a)), la résultante des forces est vers le haut et la masse M remonte, la force du ressort étant plus importante que le poids. La masse M va alors osciller autour de la position d'équilibre, située au milieu des deux positions extrêmes.

Exercice 4

Nous allons utiliser la définition de la puissance (apport d'énergie par unité de temps).
Une ampoule électrique de 100 W consomme 100 J chaque seconde. Si l'ampoule reste allumée pendant une heure, il est donc nécessaire de lui fournir une énergie

$$E = Pt = 100\,\text{W} \cdot 3600\,\text{s} = 3.6 \cdot 10^5\,\text{J}.$$

Un kilowatt-heure (kW·h) est l'énergie consommée par un appareil de 1000 W pendant une heure. Le prix cherché est donc

$$p = 100 \cdot 10^{-3}\,\text{kW} \cdot 1\,\text{h} \cdot 40\,\text{ct}\,(\text{kW h})^{-1} = 4\,\text{ct}\,.$$

Exercice 5

Nous allons utiliser la définition de la puissance (apport d'énergie par unité de temps) et du rendement.

(a) Nous admettons que toute l'énergie potentielle est transformée en énergie électrique. Dans un intervalle de temps dt, l'énergie produite par la centrale va correspondre à l'énergie potentielle perdue par une quantité d'eau $dm = \rho_{\text{eau}}\, dV$ chutant d'une hauteur h :

$$dE_{\text{théorique}} = d(E_{\text{pot}}) = d(mgh) = gh\, dm = \rho_{\text{eau}} gh\, dV\,.$$

La puissance fournie est donc

$$P_{\text{théorique}} = \frac{dE_{\text{théorique}}}{dt} = \rho_{\text{eau}} gh \frac{dV}{dt} = \rho_{\text{eau}} ghD\,,$$

où $D = \frac{dV}{dt}$ est le débit de la canalisation. Numériquement, on obtient

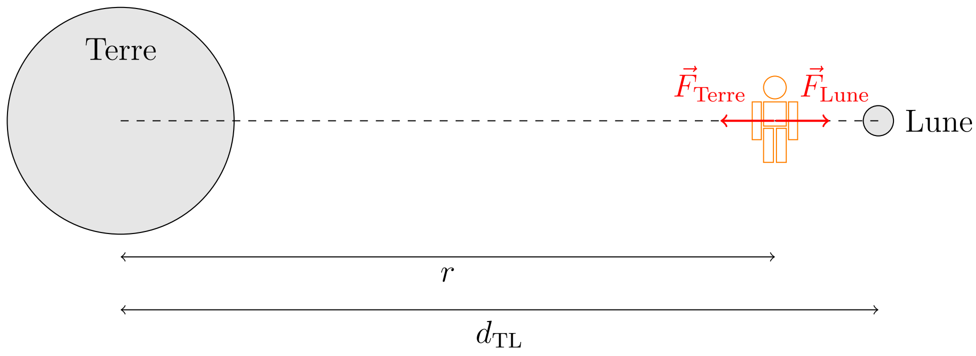
$$P_{\text{théorique}} = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 30\,\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} = 29.43\,\mathrm{MW}\,.$$

(b) En réalité, seule une partie de cette puissance théorique est utile : $P_{\text{utile}} = 23.56\,\mathrm{MW}$. Le rendement est donc

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{théorique}}} \cong 80\%\,.$$

Exercice 6

Comme d'habitude, il convient de faire un dessin, de choisir un objet, d'identifier les forces extérieures correspondantes avant d'appliquer la deuxième loi de Newton.



Le cosmonaute (objet considéré) ne subit que deux forces : la force gravitationnelle de la Terre et celle de la Lune. Ces deux forces sont attractives et ont pour norme

$$F_{\text{Terre}} = G\,\frac{m\,m_{\text{T}}}{r^2} \quad \text{et} \quad F_{\text{Lune}} = G\,\frac{m\,m_{\text{L}}}{(d_{\text{TL}}-r)^2}\,,$$

où m est la masse du cosmonaute et r la distance entre le centre de la Terre et le cosmonaute ($r < d_{\text{TL}}$).

A l'équilibre, on obtient donc

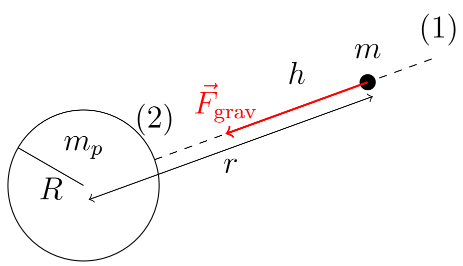
$$G\,\frac{m\,m_{\text{T}}}{r^2} = G\frac{m\,m_{\text{L}}}{(d_{\text{TL}}-r)^2}\,.$$

La distance séparant le cosmonaute de la Terre a ainsi pour expression

$$r = \frac{\sqrt{m_{\text{T}}}}{\sqrt{m_{\text{T}}}+\sqrt{m_{\text{L}}}}\,d_{\text{TL}} \cong 0.9\,d_{\text{TL}} \cong 3.46\cdot 10^8\,\text{m}\,.$$

Exercice 7

La masse est en chute libre (depuis une hauteur élevée). Son énergie mécanique est conservée.
Faire un dessin et considérer la masse qui tombe.



Référentiel d'inertie lié au centre de la planète.

Objet : la masse m.

Force : gravitation (conservative).

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de m :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2)\,.$$

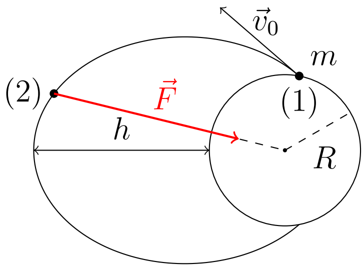
La force de gravitation n'est pas constante sur une grande distance.

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Longleftrightarrow 0 - G\frac{mm_p}{R+h} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_p}{R}$$

et alors
$$v=\sqrt{2Gm_p\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)}\,.$$
Remarque : si $h \ll R$, on peut faire une approximation au premier ordre
$$f(R+h)=\frac{1}{R+h}\simeq f(R)+f'(R)h=\frac{1}{R}-\frac{h}{R^2}$$
et on obtient
$$v\simeq\sqrt{2Gm_p\frac{h}{R^2}}=\sqrt{2gh}\,,$$
avec $g\simeq\frac{Gm_p}{R^2}$. Ce résultat est bien celui obtenu si on peut considérer la gravitation comme constante.

Exercice 8

L'objet est en chute libre dans le champ de gravitation de la terre. Son énergie mécanique est conservée.
Faire un dessin et considérer l'objet.



Référentiel d'inertie lié au centre de la planète.

Objet : l'objet m.

Force : gravitation (conservative) de norme
$$F=G\frac{m_T m}{r^2}\qquad r=\text{distance de centre à centre}$$
Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de m :
$$E_{\text{méc}}(1)=E_{\text{méc}}(2)\,.$$
La force de gravitation n'est pas constante sur une grande distance.

- Pour l'apogée à l'altitude h :
$$E_{\text{méc}}(1)=E_{\text{méc}}(2)\Longleftrightarrow\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{m_T m}{R}=\frac{1}{2}mv_h^2-G\frac{m_T m}{R+h}$$
et alors
$$v=\sqrt{v_0^2-2G\frac{m_{\mathrm{T}}h}{R(R+h)}}\,.$$
- Pour le retour sur terre, $h=0$ et $v_h=v_0$.

Remarque : comme toujours, le théorème de l'énergie cinétique (ou, comme dans le cas présent, la conservation de l'énergie mécanique) ne permet pas de connaître entièrement la vitesse, grandeur vectorielle, mais que sa norme. Il faut encore considérer la géométrie du problème.

Exercice 9

On suppose que la seule force appliquée à l'objet est la force de gravitation liée à la présence de l'astre (de la Terre). Comme cette force est conservative, l'énergie mécanique de l'objet est conservée.
La vitesse de libération propre à un astre est la vitesse minimale que doit posséder un corps au moment de quitter la surface de l'astre pour que le corps puisse échapper définitivement

à l'attraction (gravitationnelle) de l'astre. En d'autres termes, il s'agit de la vitesse initiale nécessaire au corps pour atteindre un point à l'infini avec une vitesse finale nulle.
L'énergie mécanique du corps à un instant donné a pour expression :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}^{\text{grav.}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{d} + C\,,$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse de ce dernier, et d est la distance qui sépare le corps du centre de masse de l'astre. L'énergie potentielle de gravitation est définie à une constante arbitraire C près.

L'énergie mécanique du corps est conservée. Elle ne varie pas au cours du temps :

$$E_{\text{méc.}} = \text{constante}\,.$$

Nous écrivons l'énergie mécanique que possède le corps à deux instants :

- Au moment où le corps quitte la surface de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_0$ (de norme $v_0 = ||\vec{v}_0||$) et se trouve à une distance $d = R$ du centre de masse de l'astre (R est le rayon de l'astre).
- Au moment où le corps est très éloigné de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_\infty \cong \vec{0}$ et se trouve à une distance $d \to \infty$ du centre de masse de l'astre.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ à la surface de l'astre}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \lim_{d\to\infty} G\frac{mM_{\text{astre}}}{d} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ très loin de l'astre}} \\ &= 0 + 0 + C\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} = 0\,,$$

et la vitesse initiale v_0 a pour expression :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}}\,.$$

Numériquement, nous obtenons, dans le cas de la Terre,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}} \cong \sqrt{\frac{2\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\cdot 6.6732\cdot 10^{-11}}{6.3710\cdot 10^{6}}} \cong 1.1187\cdot 10^{4}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cong 11\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,.$$

Remarque
Nous avons obtenu une vitesse de libération scalaire (et non pas vectorielle). Tout corps possédant cette vitesse v_0 est susceptible d'échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre, et ce, quelle que soit la direction de sa vitesse initiale.

Notons également que la vitesse de libération ne dépend pas de la masse du corps.