*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Exercice 1* : *Analyse dimensionelle*

a) D'après l'énoncé, une force est une masse (dimension $[M]$) multipliée par une accélération (dimension $[LT^{-2}]$). La dimension de la force est donc : $[F]$=$[MLT^{-2}]$ et son unité SI : $1N$=$1\ kgms^{-2}$ « 1 Newton = 1 kilogramme mètre par seconde au carré »

b) On vérifie l'homogénéité de l'expression en exprimant les deux termes en grandeurs $[M]$,$[L]$,$[T]$.

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow [MLT^{-2}] = \frac{[M][v]^2}{[L]} = \frac{[M][\frac{L}{T}]^2}{[L]} = [\frac{ML}{T^2}] = [MLT^{-2}]$$

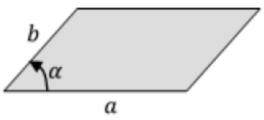
c) On réalise une équation aux dimensions à partir de la formule donnée, comme ceci :

$$F_G = G\frac{M_1M_2}{r^2} \Rightarrow [MLT^{-2}] = [G][\frac{M^2}{L^2}] \Rightarrow [G] = [\frac{L^3}{M}T^{-2}] = [L^3M^{-1}T^{-2}]$$

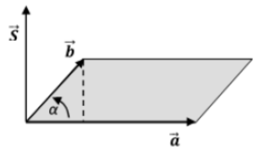
L'unité SI de G est : $m^3kg^{-1}s^{-2}$, « mètre cube par kilogramme et par seconde au carré »

Exercice 2* : *Vecteurs*

1. L'aire S du parallélogramme est donnée par la formule : $S = base * hauteur$. En prenant la $base = a$, on peut calculer la $hauteur = bsin(\alpha)$. Donc on obtient : $S = a \bullet b \bullet sin(\alpha)$



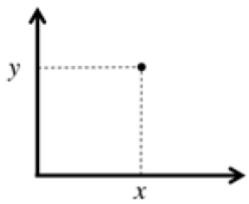
2. On définit le vecteur $\vec{S}$ par $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$, le produit vectoriel des deux vecteurs constituant ses côtés, comme illustré ci-contre. $\vec{S}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et a pour norme : $\|\vec{S}\| = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\| * sin(\alpha) = a * b * sin(\alpha) =$ l'aire du parallélogramme



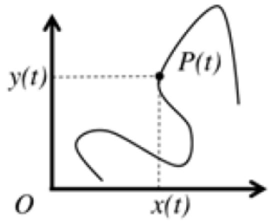
L'aire du parallélogramme est la norme du produit vectoriel de ses deux côtés.

Exercice 3* *: Repère, distance, et Vitesse*

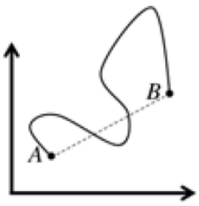
a) Deux paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur une table, par exemple les coordonnées x et y dans un repère orthonormé. On dit que le problème est à deux dimensions : « 2D ». Notez que le terme « dimension » fait ici référence aux dimensions spatiales, notion qui diffère de celle vue dans l'exercice 1.



b) Le mouvement est décrit par la donnée des deux coordonnées en fonction du temps, x(t) et y(t).



c) Dans notre repère 2D, la distance entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est : $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, cette valeur est plus petite que la distance parcourue par $\boldsymbol{P}$ (c'est la même uniquement si le trajet en ligne droite).



d) la vitesse entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est : $v_{AB} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}}{\Delta t}$, où Δt est le temps de trajet de $\boldsymbol{A}$ à $\boldsymbol{B}$. C'est une vitesse moyenne. Il n'y a pas relation à priori entre cette vitesse moyenne v_{AB} et les vitesses instantanées v_A et v_B. Par exemple, on peut imaginer que $\boldsymbol{P}$ parte à l'arrêt de $\boldsymbol{A}$ et s'arrête en $\boldsymbol{B}$, avec une vitesse moyenne non nulle...

Exercice 4* : *Drone day*

1. Trajectoire A : La trajectoire est une droite selon une diagonale du terrain, le mouvement est un mouvement rectiligne uniforme (MRU)

   Trajectoire B : La trajectoire dessinée par le drone est parabolique, selon l'axe x, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA) et selon l'axe z, le mouvement est rectiligne uniforme. La combinaison des deux donne une trajectoire parabolique dans le plan xz.

2. $$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0.4t \\ 0 \\ 0.15 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3.

$$||\vec{v}_A|| = \sqrt{1.44 + 0.25 + 0.4} = \sqrt{1.73} \approx 1.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$||\vec{v}_B|| = \sqrt{0.16t^2 + 0 + 0.0225} = \sqrt{0.16t^2 + 0.0225} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$||\vec{a}_A|| = 0 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$
$$||\vec{a}_B|| = 0.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4. Calcul du vecteur $\vec{r}_{AB}$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0.2t^2 - 1.2t \\ -0.5t + 5 \\ -0.05t \end{pmatrix}$$

Calcul de sa norme en fonction de t :

$$||\vec{r}_{AB}|| = \sqrt{(0,2t^2 - 1,2t)^2 + (-0,5t + 5)^2 + (-0,05t)^2}$$

Si on cherche la distance minimum entre les drones, on cherche le minimum de la norme du vecteur $\vec{r}_{AB}$. On dérive donc la norme du vecteur par raport au temps. Et on résout $\frac{d||\vec{r}_{AB}||}{dt} = 0$. Si on doit réaliser le calcul à la main, il est plus simple de considérer $||\vec{r}_{AB}||^2$, car la racine carrée ne change pas le minimum de la fonction et dériver un polynôme est plus simple que de dériver un polynôme dans une racine carrée.

Cela permet de trouver pour quel temps la distance est minimum. Il ne reste plus qu'à injecter ce temps dans la norme de $\vec{r}_{AB}$ pour connaitre cette distance.

On peut aussi résoudre ce problème de manière graphique : on trace la distance entre les drones en fonction du temps et on peut en déduire pour quel temps cette distance est minimale.

Application numérique :

$$t_{ab} = 6.48[s]$$

$$t_{min} = 1.9[m]$$

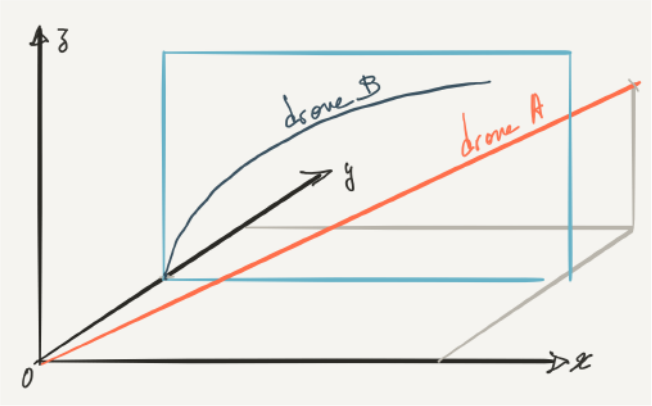


FIGURE 1 – Trajectoires schématisées des drones

Exercice 5*(*) : dérivées temporelles

On dérive par rapport au temps. On rappelle que u'(v(t)) = v'u'(v(t)) et (uv)' = u'v+v'u

cos(t)

$\dot{\theta}\cos(\theta(t))$ avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$\cos^2(t) - \sin^2(t)$

$\sin(t)\cos(t)+t[\cos^2(t) - \sin^2(t)]$

$1/t$

$-\alpha\, e^{-\alpha t}$

$-2/t^3$

$e^{-\alpha t}$

$1/t^2$