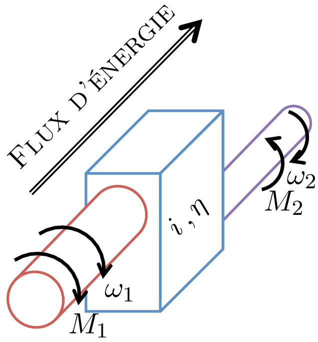
Solution 1 : Moment sur le bâti d'un réducteur

Les deux arbres tournent dans le même sens, donc les couples d'entrée et de sortie se soustraient : $M_{\text{bati}} = M_2 - M_1$ (le sens de M_2 est choisi comme sens positif pour les moments).



Calcul de M_2 : pour le sens du flux d'énergie de la figure, nous avons $M_2 = M_1 \cdot i \cdot \eta$.

Calcul de i : $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{500}{100} = 5$.

Donc $M_2 = 0{,}1 \cdot 5 \cdot 0{,}95 = 0{,}475\ \mathrm{N\,m}$

Et $M_{\text{bati}} = 0{,}475 - 0{,}1 = \boxed{0{,}375\ \mathrm{N\,m}}$

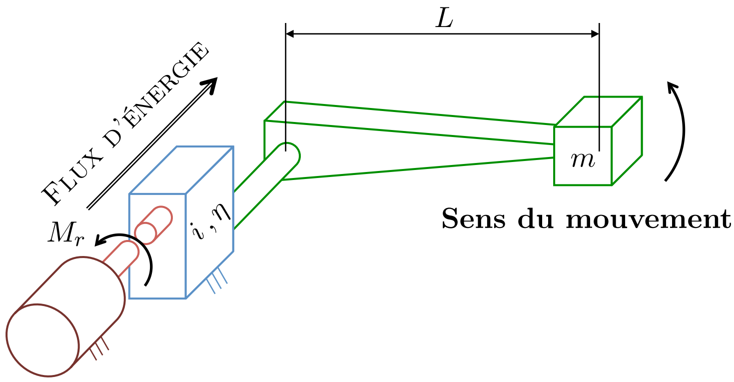
Si les arbres tournent en sens opposés, alors les couples d'entrée et de sortie s'additionnent : $M_{\text{bati}} = M_2 + M_1 = 0{,}475 + 0{,}1 = \boxed{0{,}575\ \mathrm{N\,m}}$

Solution 2 : Moment réduit d'un bras oscillant

La masse m produit un couple $M = m \cdot g \cdot L$ sur l'arbre de sortie du réducteur (couple résistant).

Le couple réduit M_r est le couple que doit produire le moteur pour vaincre le couple résistant M : $M_r = \frac{M}{i \cdot \eta}$.

Ainsi, $\boxed{M_r = \frac{m \cdot g \cdot L}{i \cdot \eta}}$



Solution 3 : Moment réduit via vis-à-billes

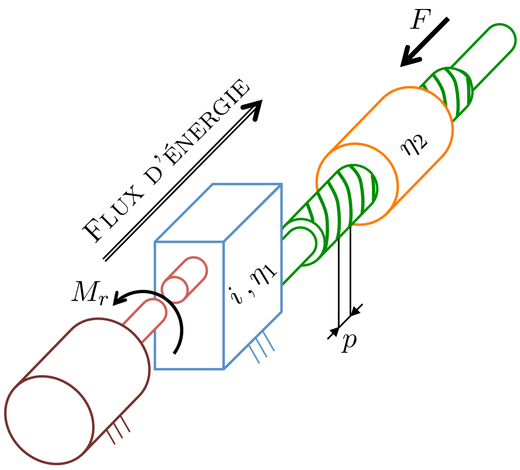
Le travail mécanique que doit fournir la vis pour effectuer un tour est égal au travail de la force F sur un pas en prenant en compte les pertes liées au rendement :

$M_{\text{vis}} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{F \cdot p}{\eta_2}$

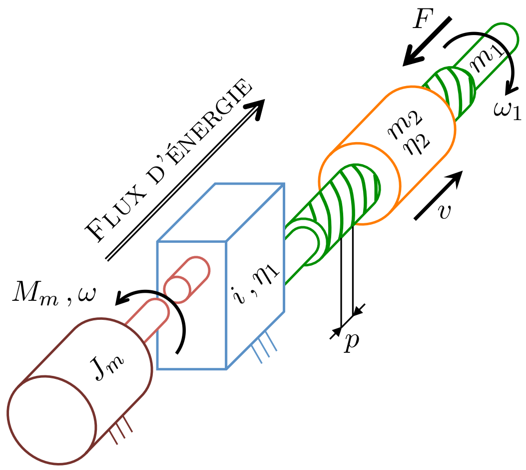
Donc $M_{\text{vis}} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot \eta_2}$

Le couple réduit est le couple que doit fournir le moteur pour vaincre M_{vis} :

$$\boxed{M_r = \frac{M_{\text{vis}}}{i \cdot \eta_1} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}}$$



Solution 4 : Accélération d'un chariot avec vis à billes



1. Couple réduit

$M_{\text{vis}} \cdot 2\pi = \frac{F \cdot p}{\eta_2}$

Donc $M_{\text{vis}} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot \eta_2}$

Le couple réduit est le couple que doit fournir le moteur pour vaincre M_{vis} :

$\boxed{M_r = \frac{M_{\text{vis}}}{i \cdot \eta_1} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}}$

2. Inertie réduite

a. Energie cinétique : $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2$

b. Energie injectée : $E_{\text{inj}} = \frac{1}{2 \cdot \eta_1} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot m_2 \cdot v^2$

c. Relation des vitesses :

- $\omega_1 = \frac{\omega}{i}$
- $\frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} = \frac{v}{p}$: "temps pour faire 1 tour=temps pour faire un pas"
- $v = \frac{\omega_1 \cdot p}{2 \cdot \pi} = \frac{\omega \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$

d. Inertie réduite :

$\frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2 \cdot \eta_1} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{i^2} + \frac{1}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot m_2 \cdot \frac{\omega^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot i^2}$

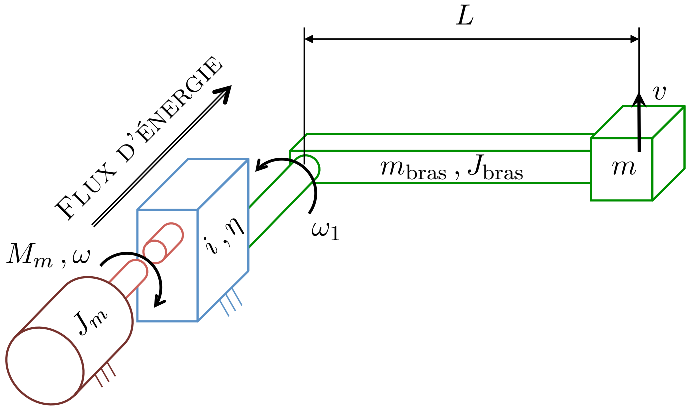
$\boxed{J_r = \frac{m_1 \cdot r^2}{2 \cdot \eta_1 \cdot i^2} + \frac{m_2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot i^2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}}$

3. Accélération

$M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \dot{\omega}$ donc l'accélération de l'arbre moteur vaut : $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r}$ or $v = \frac{\omega \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$ d'où $\dot{v} = \frac{\dot{\omega} \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$ soit l'accélération du chariot : $\boxed{\dot{v} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot i}}$

Solution 5 : Accélération d'un bras oscillant

1. Couple réduit



Couple à la sortie du réducteur : $M = m \cdot g \cdot L + m_{\text{bras}} \cdot g \cdot \frac{L}{2}$

Couple réduit sur l'axe moteur : $M_r = \frac{M}{i \cdot \eta}$ donc $\boxed{M_r = \frac{g \cdot L}{i \cdot \eta}\left(m + \frac{m_{\text{bras}}}{2}\right)}$

Application numérique : $\boxed{M_r = 0{,}26 \text{ N m}}$

2. Inertie réduite

Inertie à la sortie du réducteur :

$\boxed{J = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{bras}} \cdot L^2 + m \cdot L^2}$

Inertie réduite sur l'axe moteur :

Par définition $\frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{\eta}$;

or les vitesses sont cinématiquement couplées : $\omega_1 = \frac{\omega}{i}$;

Nous obtenons $\frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{\omega^2}{i^2} \cdot \frac{1}{\eta}$, d'où $\boxed{J_r = \frac{J}{\eta \cdot i^2}}$

Application numérique : $\boxed{J_r = 4{,}52 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2}$

3. Accélération

Selon Newton, l'accélération de l'arbre moteur est : $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r}$, d'où $M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \dot{\omega}$.

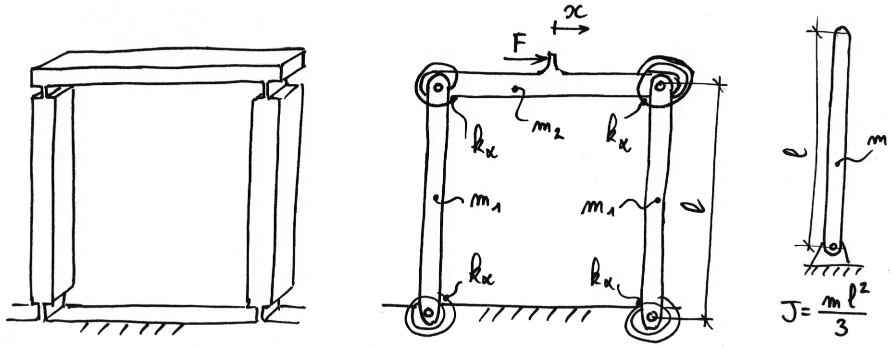
Les accélérations étant couplées cinématiquement (tout comme les vitesses et les angles) :

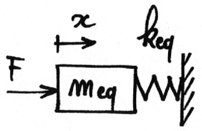
$\dot{v} = \dot{\omega_1} \cdot L = \frac{\dot{\omega}}{i} \cdot L$ donc $\dot{\omega} = \frac{\dot{v} \cdot i}{L}$,

nous obtenons $M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \frac{\dot{v} \cdot i}{L}$ d'où l'on tire $\boxed{M_m = (J_m + J_r) \cdot \frac{i}{L} \cdot \dot{v} + M_r}$

Application numérique : $\boxed{M_m = 0{,}75 \text{ N m}}$

Solution 6 : Oscillateur élémentaire





1. Calcul de la masse réduite équivalente m_{eq}

Lorsque la barre m_2 se translate à la vitesse v, les deux barres m_1 tournent à la vitesse ω. L'énergie cinétique dans le système est alors $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$.

Les vitesses sont reliées par la relation suivante : $v = \omega \cdot l$, d'où $\omega = \frac{v}{l}$.

Par définition la masse réduite est telle que : $\frac{1}{2} \cdot m_{\text{eq}} \cdot v^2 = E_{\text{cin}}$.

Ceci nous donne : $\frac{1}{2} \cdot m_{\text{eq}} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot l^2}{3} \cdot \frac{v^2}{l^2}$, d'où $\boxed{m_{\text{eq}} = m_2 + 2 \cdot \frac{m_1}{3}}$

2. Calcul de la rigidité équivalente k_{eq}

Par définition, l'énergie élastique à fournir au système équivalent pour le déformer d'une flèche x est égale à l'énergie élastique à fournir au mécanisme d'origine pour déplacer la barre m_2 de la même flèche x. Il se trouve que le déplacement x résulte en une rotation identique des quatre pivots flexibles d'un angle α. Nous avons donc :

$\frac{1}{2} \cdot k_{\text{eq}} \cdot x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_\alpha \cdot \alpha^2$,

x et α étant cinématiquement couplés : $x \simeq \alpha \cdot l$ soit $\alpha \simeq \frac{x}{l}$.

Nous obtenons : $\frac{1}{2} \cdot k_{\text{eq}} \cdot x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_\alpha \cdot \frac{x^2}{l^2}$,

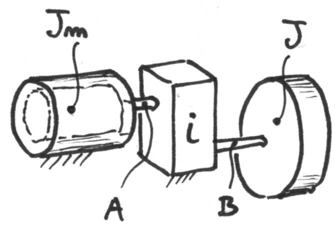
d'où : $\boxed{k_{\text{eq}} = \frac{4 \cdot k_\alpha}{l^2}}$

3. Calcul de la fréquence propre

La fréquence propre du mécansime est : $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4 \cdot k_\alpha}{l^2\left(m_2 + \frac{2 \cdot m_1}{3}\right)}}}$

Solution 7 : Rapport de transmission optimal

Calculer i_{opt} qui maximise l'accélération de la charge J pour un couple moteur M_m et une inertie du moteur J_m donnés.



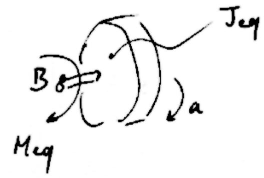
Méthode : Réduire le système sur l'**arbre mené B**

Inertie équivalente réduite sur l'arbre B : $J_{\text{eq}} = J + J_m \cdot i^2$

Moment moteur réduit sur l'arbre B : $M_{\text{eq}} = M_m \cdot i$

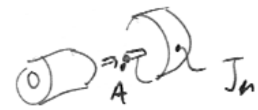
Accélération de l'arbre B selon Newton : $a = \frac{M_{\text{eq}}}{J_{\text{eq}}} = \frac{M_m \cdot i}{J + J_m \cdot i^2}$

Recherche du maximum de l'accélération en fonction de i par recherche du zéro de la dérivée :



- Dérivée : $\frac{da}{di} = a' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
- Dans notre cas : $a' = \frac{J + J_m \cdot i^2 - 2 \cdot i J_m \cdot i}{(J + J_m \cdot i^2)^2} = \frac{J - J_m \cdot i^2}{J^2 + 2J \cdot J_m \cdot i^2 + J_m^2 \cdot i^4}$
- $a' = 0$ lorsque $J_m \cdot i^2 = J$, d'où l'on tire : $\boxed{i_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{J}{J_m}}}$

Remarque : Si l'on réduit le système optimisé avec $i = i_{\text{opt}}$ sur l'arbre moteur A, alors on obtient : $\boxed{J_r = \frac{J}{i_{\text{opt}}^2} = \frac{J}{\left(\frac{J}{J_m}\right)^2} = J_m}$.



En d'autres termes :

Le rapport de réduction qui maximise l'accélération de la charge est celui qui résulte en une inertie de la charge réduite sur l'abre moteur égale à l'inertie propre du moteur.

Solution 8 : Accélération d'un cycliste

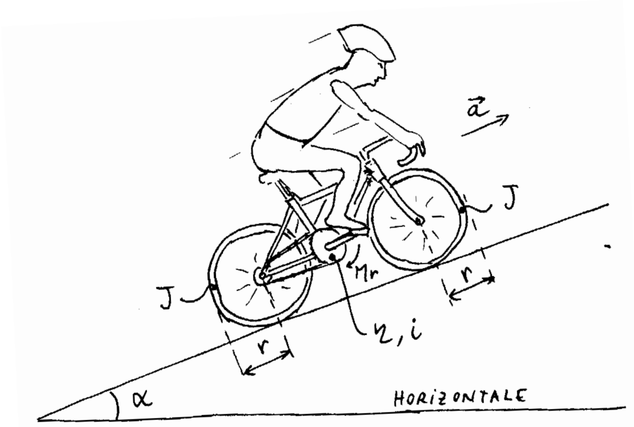
1. Calcul de M_r

Le travail effectué sur un tour de pédale est égal au travail effectué pour avancer sur le chemin $\frac{2\pi}{i} \cdot r$ en luttant contre le poids projeté sur le chemin $mg\sin(\alpha)$, tout en prenant en compte le rendement η. Ceci s'écrit :

$M_r \cdot 2\pi = \frac{1}{\eta}\left(m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{2\pi}{i} \cdot r\right)$,

d'où $\boxed{M_r = \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot r}{i \cdot \eta}}$.

Application numérique : $\boxed{M_r = 40{,}37 \text{ N m}}$



2. Calcul de l'inertie réduite J_r

Energie cinétique du système à la vitesse v : $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{\text{roue}}^2$

Energie injectée dans le système pour lui faire atteindre la vitesse v : $E_{\text{inj}} = \frac{1}{\eta} \cdot E_{\text{cin}}$

Relation des vitesses : $\omega_{\text{roue}} = \frac{\omega}{i}$ et $v = \omega_{\text{roue}} \cdot r = \frac{\omega \cdot r}{i}$

Inertie réduite : $\frac{1}{2} \cdot J_r \omega^2 = \frac{1}{\eta} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \frac{\omega^2 \cdot r^2}{i^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{\omega^2}{i^2}\right)$, d'où $\boxed{J_r = \frac{1}{\eta \cdot i^2} \cdot \left(m \cdot r^2 + 2 \cdot J\right)}$

Application numérique : $\boxed{J_r = 23{,}93 \text{ kg m}^2}$

3. Calcul de l'accélération linéaire a

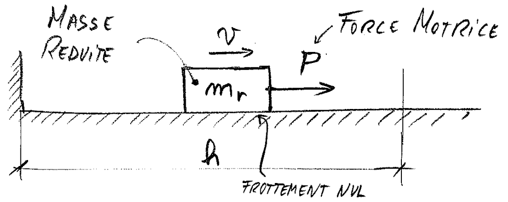
Selon la loi de Newton, $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_r}$, d'où $\boxed{a = \dot{v} = \frac{\dot{\omega} \cdot r}{i} = \frac{(M_m - M_r) \cdot r}{J_r \cdot i}}$

Application numérique : $\boxed{a = \dot{v} = 0{,}201 \text{ m s}^{-1}}$

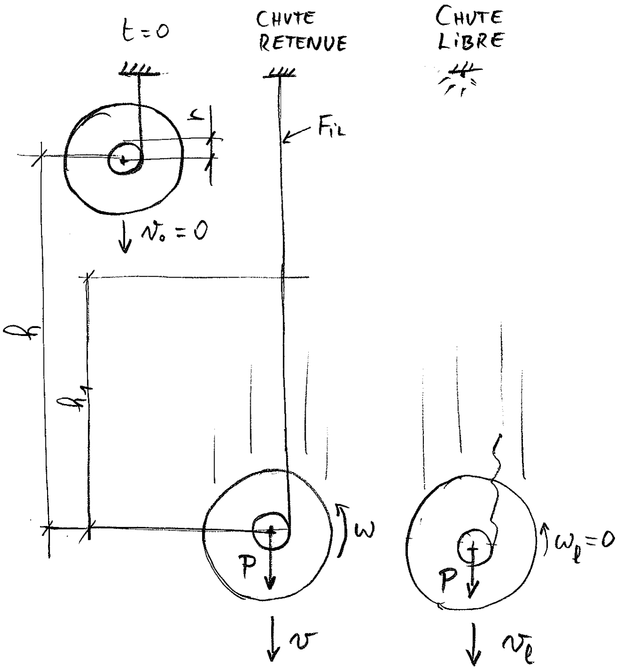
Solution 9 : Yo-Yo – Concept de la "masse réduite"

1. Accélération du Yo-Yo retenu par son fil

Méthode : Nous ramenons le système à une "masse réduite" m_r qui requiert la même énergie que le Yo-Yo pour atteindre la vitesse v.



Système à une seule masse en translation équivalent au Yo-Yo retenu par son fil.



$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot v^2 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2\right)$

où $\omega = \frac{v}{r}$

$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot v^2 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{v^2}{r^2}\right)$

$\boxed{m_r = \frac{1}{\eta} \cdot \left(m + \frac{J}{r^2}\right)}$

Application numérique : $\boxed{m_r = 3{,}667 \text{ kg}}$

La force motrice qui accélère le Yo-Yo est son poids $P = m \cdot g$

Selon Newton, cette même force accélère la masse réduite, ainsi : $a = \frac{P}{m_r}$ d'où $\boxed{a = \frac{m \cdot g \cdot \eta}{m + \frac{J}{r^2}}}$

Application numérique : $\boxed{a = 0{,}4013 \text{ m s}^{-2}}$

2. Comparaison de la durée de la chute Yo-Yo retenu avec celle du Yo-Yo en chute libre

	Mouvement de la chute retenue	Mouvement de la chute libre
Accélération :	$a(t) = a$	$a(t) = g$
Vitesse :	$v(t) = a \cdot t$	$v(t) = g \cdot t$
Position :	$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$v(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Durée de la chute :	$t_h = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}}$	$t_{hl} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$
Numériquement :	$t_h = 2{,}232$ s	$t_{hl} = 0{,}452$ s

Comparaison numérique : la chute retenue dure $\frac{t_h}{t_{hl}} = \sqrt{\frac{g}{a}} =$ **5 fois** plus longtemps que la chute libre.

3. Calcul de la hauteur h_1

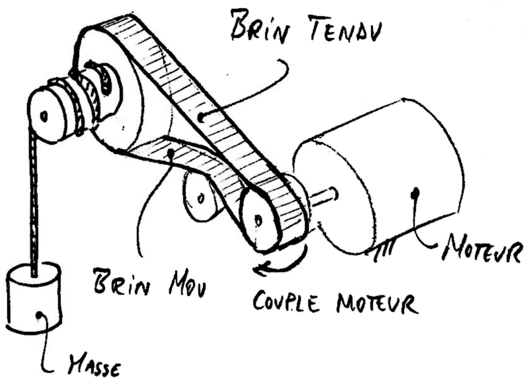
L'énergie injectée dans le système à la descente est égale à l'énergie potentielle : $E_{\text{inj}} = m \cdot g \cdot h$ (travail du poids jouant ici le rôle de force motrice). En raison des pertes, seule une partie de cette énergie est convertie en énergie cinétique (combinée entre translation et rotation) : $E_{\text{cin}} = m \cdot g \cdot h \cdot \eta$.

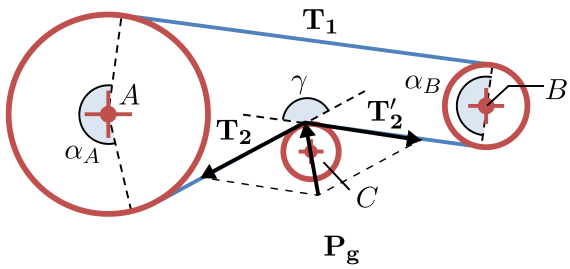
Si l'on fait l'hypothèse que le rendement à la montée (conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle) est égal au rendement à la descente (conversion de l'énergie potentielle en énergie cinétique), alors l'énergie cinétique accumulée à la descente pourra effectuer, à la montée, le travail suivant :

$E_{\text{cin}} \cdot \eta = m \cdot g \cdot h_1$, d'où $h_1 = \frac{E_{\text{cin}} \cdot \eta}{m \cdot g} = \frac{m \cdot g \cdot h \cdot \eta^2}{m \cdot g} = h \cdot \eta^2$

Ainsi, le Yo-Yo, initialement lâché d'une hauteur h, remonte à une hauteur $\boxed{h_1 = h \cdot \eta^2}$ à la première alternance, puis $h_i = h \cdot \eta^{2i}$ à la $i^{\text{ème}}$ alternance.

Solution 10 : Courroie plate





1. Calcul de la force tangentielle transmissible

- $F_A = T_2 \cdot (e^{\mu \alpha_A} - 1)$
- $F_{A\min} = T_2 \cdot \left(e^{0{,}4 \frac{210 \cdot \pi}{180}} - 1\right) = \boxed{66{,}6 \text{ N}}$
- $F_{A\max} = T_2 \cdot \left(e^{0{,}6 \frac{210 \cdot \pi}{180}} - 1\right) = \boxed{160{,}3 \text{ N}}$

- $F_B = T_2 \cdot (e^{\mu \alpha_B} - 1)$
- $F_{B\min} = T_2 \cdot \left(e^{0{,}4 \frac{180 \cdot \pi}{180}} - 1\right) = \boxed{50{,}3 \text{ N}}$
- $F_{B\max} = T_2 \cdot \left(e^{0{,}6 \frac{180 \cdot \pi}{180}} - 1\right) = \boxed{111{,}7 \text{ N}}$

2. La valeur minimale de la force tangentielle apparaît sur la petite poulie (angle d'enroulement plus faible) pour $\mu_{\min} = 0{,}4$: $F_{\min} = F_{B\min} = 50{,}3$ N. Le couple moteur correspondant est donc :

- $M_{\min} = M_{B\min} = F_{B\min} \cdot R_B = 50{,}3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = \boxed{1 \text{ N m}}$

3. Si la prétension T_2 est appliquée sur le brin tendu, on a :

- $F_A = T_2 \cdot \left(\frac{e^{\mu \alpha_A} - 1}{e^{\mu \alpha_A}}\right)$
- $F_{A\min} = \boxed{15{,}4 \text{ N}}$
- $F_{A\max} = \boxed{17{,}7 \text{ N}}$

et

- $F_B = T_2 \cdot \left(\frac{e^{\mu \alpha_B} - 1}{e^{\mu \alpha_B}}\right)$
- $F_{B\min} = \boxed{14{,}3 \text{ N}}$
- $F_{B\max} = \boxed{17{,}0 \text{ N}}$

Les forces tangentielles transmissibles sont inférieures au cas 1 mais les valeurs de glissement sont beaucoup moins sensibles au coefficient de frottement. Par conséquent cet arrangement permet de faire un limiteur de couple très précis.

Solution 11 : Embrayage à ressort n°1

1. Calcul du diamètre moyen du ressort
   - $C = \frac{D^2 - {D_i}^2}{D \cdot {D_i}^2} \cdot E \cdot I \frac{e^{\mu\alpha}-1}{e^{\mu\alpha}}$
   - $C \cdot D \cdot {D_i}^2 = \left(D^2 - {D_i}^2\right) \cdot E \cdot I$ avec $\frac{e^{\mu\alpha}-1}{e^{\mu\alpha}} \approx 1$
   - ${D_i}^2 \left(C \cdot D + E \cdot I\right) = D^2 \cdot E \cdot I$
   - $D_i = \sqrt{\frac{D^2 \cdot E \cdot I}{C \cdot D + E \cdot I}}$
   - $\boxed{D_i = 18{,}94 \text{ mm}}$ (diamètre non-monté) avec $C = 100 \cdot 10^{-3}$ N m, $b = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $h = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $I = b \cdot h^3/12 = 83{,}3 \cdot 10^{-15}$ m^4, $E = 210 \cdot 10^9$ Pa et $D = 20 \cdot 10^{-3}$ m.

2. Calcul du nombre de spires
   - Pour $\mu = 0{,}4$ $\frac{e^{\mu\alpha}-1}{e^{\mu\alpha}} \approx 1$
   - Pour $\mu = 0{,}2$ nous voulons $\frac{e^{\mu\alpha}-1}{e^{\mu\alpha}} \geq 0{,}999$
   - $e^{\mu\alpha} - 1 \geq 0{,}999 e^{\mu\alpha}$
   - $(1 - 0{,}999)\, e^{\mu\alpha} \geq 1$
   - $0{,}001 e^{\mu\alpha} \geq 1$
   - $e^{\mu\alpha} \geq \frac{1}{0{,}001}$
   - $e^{\mu\alpha} \geq 1000$
   - $\mu\alpha \geq \ln 1000$
   - $\boxed{\alpha \geq \frac{\ln 1000}{\mu}}$
   - Pour $\mu = 0{,}2$ on a $\alpha \geq 34.5$ rad (5.5 tours)
   - Pour $\mu = 0{,}3$ on a $\alpha \geq 23.2$ rad (3.7 tours)

3. Calcul de la contrainte maximale
   - $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2}$ avec $W = \frac{I}{a/2} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$
   - $M = 2 \cdot \frac{D - D_i}{D \cdot D_i} \cdot E \cdot I = 97$ mN m
   - $\boxed{\sigma_{\max} = 583{,}7 \text{ MPa}}$.

Solution 12 : Embrayage à ressort n°2

1. Pour la détermination du couple en embrayage, il y a deux limites à considérer :

a. la limite donnée par le frottement

b. la limite fixé par le dépassement de la contrainte admissible dans le fil.

a. Limite donnée par le frottement :

- $C_{\text{frott}} = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot E \cdot I \cdot (e^{\mu\alpha} - 1) = \frac{\left(15^2 - 14{,}8^2\right) \cdot 10^{-6}}{\left(15 \cdot 14{,}8^2\right) \cdot 10^{-6}} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}083 \cdot 10^{-12} \cdot \left(e^{0{,}2 \cdot 12 \cdot \pi} - 1\right) = 59{,}46$ N m
- Avec $I = \frac{a^4}{12} = \frac{\left(1 \cdot 10^{-3}\right)^4}{12} = 0{,}083 \cdot 10^{-12}$ m^4
- Et $\alpha = n \cdot 2 \cdot \pi = 12 \cdot \pi$ rad

b. Limite donnée par la résistance du fil :

- $\sigma_{\text{adm}} = 400$ N mm^{-2} soit $F_{\text{adm}} = 400$ N car la section du fil vaut 1×1 mm^2
- $C_{\text{adm}} = F \cdot \frac{D}{2} = 400 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10^{-3} = 3$ N m

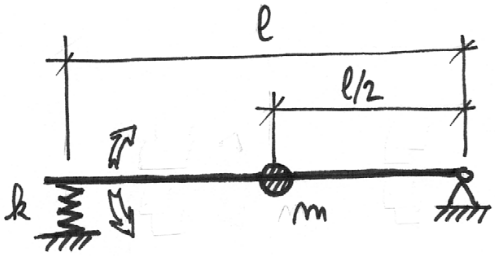
  $\boxed{\text{La limite est 3 N m}}$.

2. Limiteur de couple :

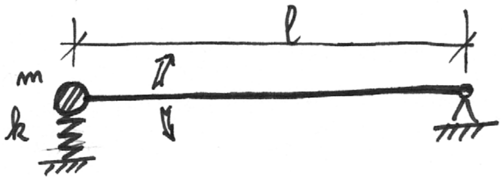
- $C = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot E \cdot I \cdot \frac{(e^{\mu\alpha} - 1)}{e^{\mu\alpha}} = \frac{\left(15^2 - 14{,}8^2\right) \cdot 10^{-6}}{(15 \cdot 14{,}8^2) \cdot 10^{-6}} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}083 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\left(e^{0{,}2 \cdot 12 \cdot \pi} - 1\right)}{e^{0{,}2 \cdot 12 \cdot \pi}} = \boxed{31{,}6\ \mathrm{N\,mm}}$
- Pour information : $\sigma_{\max}$ pour la flexion du fil vaut $\sigma_{\max} = \frac{D - D_i}{D \cdot D_i} \cdot E \cdot a = 189 \cdot 10^6\ \mathrm{N\,m^{-2}}$

Le rayon de courbure est donc acceptable pour cette courroie.

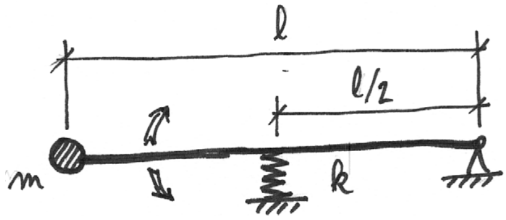
Solution 13 : Poutres oscillantes



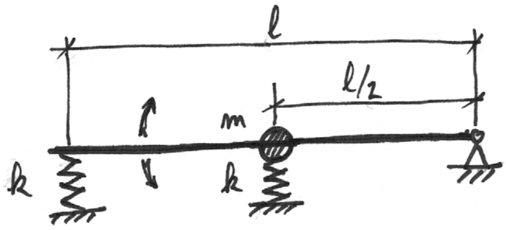
(a) $J_0 = m\frac{l^2}{4}$; $k_{\alpha 0} = kl^2$;
$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{J_0}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ Hz



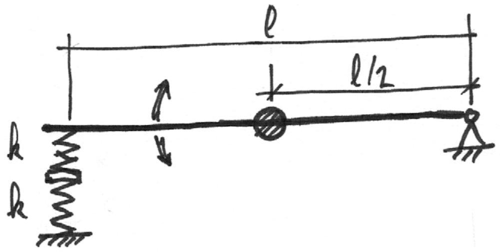
(b) $J = ml^2 = 4J_0$; $k_\alpha = k_{\alpha 0}$;
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{f_0}{2} = 1$ Hz



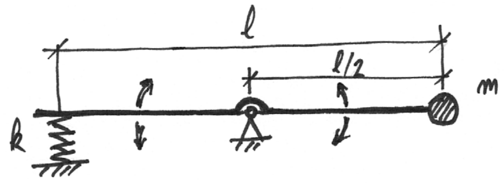
(c) $J = ml^2 = 4J_0$; $k_\alpha = k\frac{l^2}{4} = \frac{k_{\alpha 0}}{4}$;
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{16 J_0}} = \frac{f_0}{4} = 0{,}5$ Hz



(d) $J = J_0$; $k_\alpha = k_{\alpha 0} + \frac{k_{\alpha 0}}{4} = \frac{5k_{\alpha 0}}{4}$;
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{\sqrt{5}}{2} f_0 = 2{,}23$ Hz



(e) $J = J_0$; $k_\alpha = \frac{k_{\alpha 0}}{2}$;
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{2J_0}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} = 1{,}41$ Hz



(f) $J = J_0$; $k_\alpha = \frac{k_{\alpha 0}}{4}$;
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{f_0}{2} = 1$ Hz

Solution 14 : Systèmes oscillants

- **Systèmes a) et b)**

  a) $J_{eq} = 3mr^2$

  $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\alpha}{3mr^2}}$

  b)$J_{eq} = 2mr^2 + m(2r)^2 = 6mr^2$

  $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\alpha}{6mr^2}}$

  Résultat :
  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{3mr^2}{6mr^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}} = \boxed{1.41\ \text{Hz}}$

- **Systèmes c) et d)**

  c) $k_{\alpha\,eq} = 2kr^2$

  $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2kr^2}{J}}$

  d) $k_{\alpha\,eq} = kr^2 + k(2r)^2 = 5kr^2$

  $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5kr^2}{J}}$

  Résultat :

  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{5kr^2}{2kr^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow f_2 = f_1\sqrt{\frac{5}{2}} = \boxed{3.16 \text{ Hz}}$

- **Systèmes e) et f)**

  e) $J_{eq} = 3J + 4J = 7J$

  $k_{\alpha\,eq} = kr^2$

  $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kr^2}{7J}}$

  f) $J_{eq} = J + \frac{1}{4}3J = \frac{7}{4}J$

  $k_{\alpha\,eq} = kr^2$

  $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kr^2}{\frac{7}{4}J}}$

  Résultat :

  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{7J}{\frac{7}{4}J}} = 2 \Rightarrow f_2 = 2f_1 = \boxed{4 \text{ Hz}}$

- **Systèmes g) et h)**

  g) $m_{eq} = 4m$

  $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m}}$

  h) $m_{eq} = 4m$

  $k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k}+\frac{1}{4k}} = \frac{4}{5}k$

  $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{4}{5}k}{4m}}$

  Résultat :

  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow f_2 = \sqrt{\frac{4}{5}}f_1 = \boxed{1.79 \text{ Hz}}$