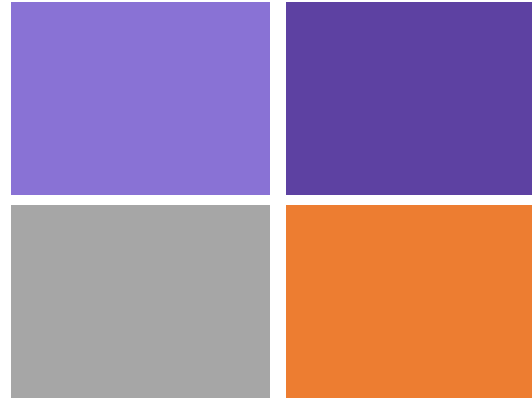


Semaine 7b

Contraintes et déformations
relatives pour poutre en flexion



PARTIE 1: (slide 4 - 23)

Contraintes et déformations relatives pour poutre en flexion

(en partie expliqué dans Chapitre 5 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 24 - 50)

Poutres: Moment quadratique (moment d'inertie)

(en partie expliqué dans Chapitre 12 de Gere et Goodno)

PROGRAMME DU COURS, semaines 7-10

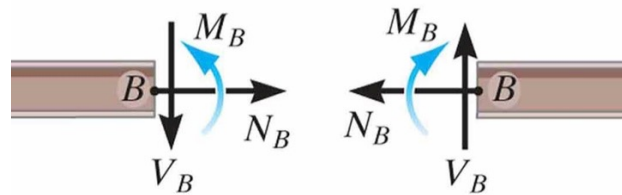
Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Herbert Shea				
7	mardi 01.11	Poutre: forces internes, relation différentielles, forces distribuées	x	
7	jeudi 03.11	ε et σ _normale en flexion pure. Moment inertie de poutre	x	Série 7
8	mardi 08.11	charge axiale (et normales). poutre composite		Série 7
8	jeudi 10.11	Flèche des poutres pt1	x	Série 8
9	mardi 15.11	Flèche des poutres pt 2	x	Série 8
9	jeudi 17.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 9
10	mardi 22.11	Energie déformation Flambage	x	Série 9+10
10	jeudi 24.11	fin Flambage	x	Série 10

Résumé du chapitre précédent (semaine 7a)

$$\blacksquare \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\blacksquare \frac{dM_z}{dx} = V(x)$$

- $M_z(x)$: Moment de flexion
- $V(x)$: Force de cisaillement
- $q(x)$: Charge distribuée (positif vers le bas)



C'était des poutres magiques sans "épaisseur" en y

Résumé chapitre actuel (semaine 7b)

Poutres avec une épaisseur en y

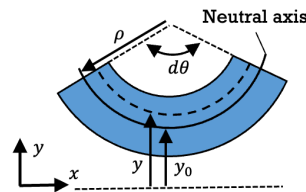
Poutre en flexion

■ Déformation Relative normale $\varepsilon_x(y)$:

$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

- y_0 : Position de l'axe neutre
- ρ : Rayon de courbure
- $\kappa = \frac{1}{\rho}$: Courbure
- $y - y_0$: Distance de l'axe neutre
- y_0 = Centroïde de la section transversale pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A}$$



□ Contrainte normale $\sigma_x(x, y)$:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

- I_{z,y_0} : Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe z passant par l'axe neutre
- $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 dA$

■ $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

□ Contrainte normale maximum:

$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- c : Distance maximale vers l'axe neutre
- $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$: Module d'inertie élastique

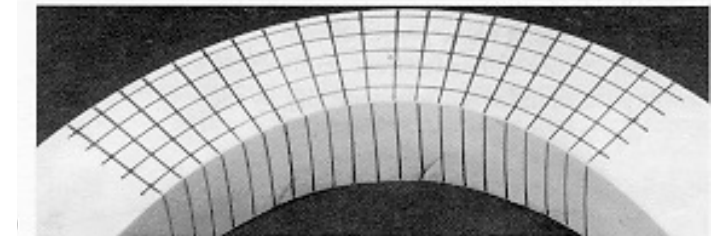
Semaine 7b –partie 1

Objectifs d'apprentissage

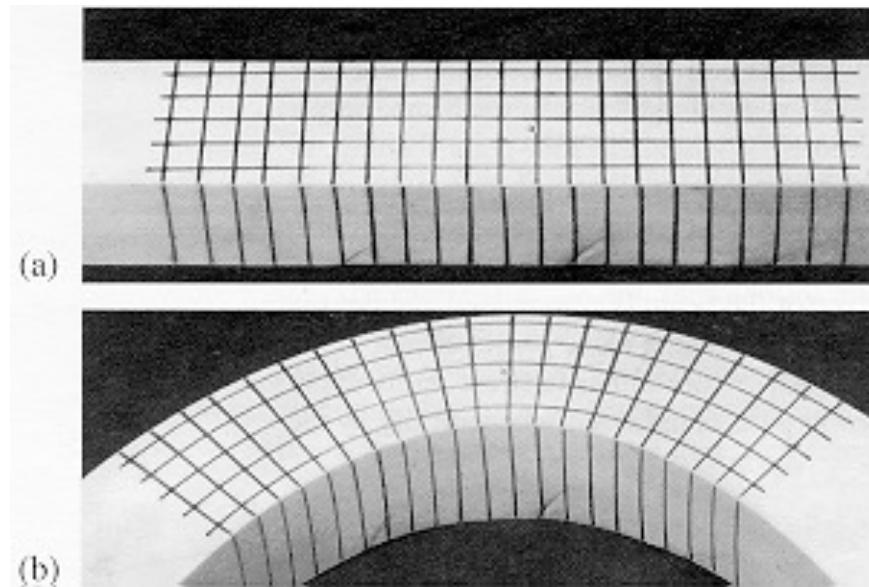
Savoir ce qu'est une Poutre en flexion pure

Pour les poutres en flexion pure:

- Exprimer $\varepsilon_x(y)$
- Définir et savoir trouver l'axe neutre
- Exprimer $\sigma_x(y)$



Déformation relative dans les poutres en flexion pure

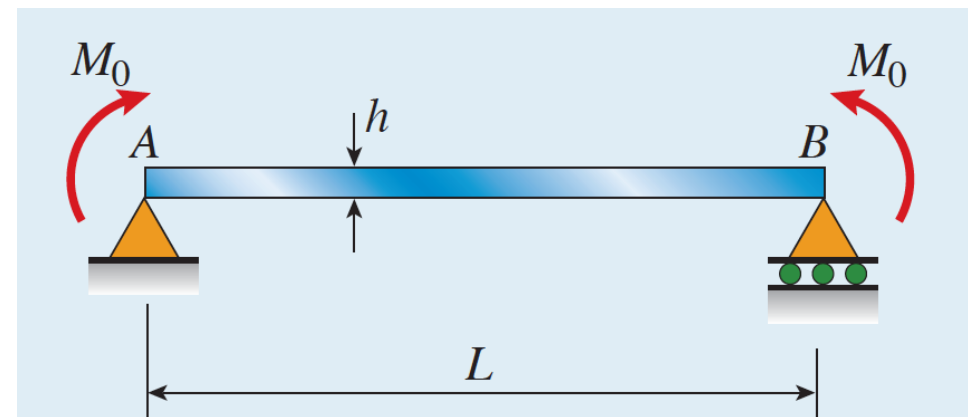
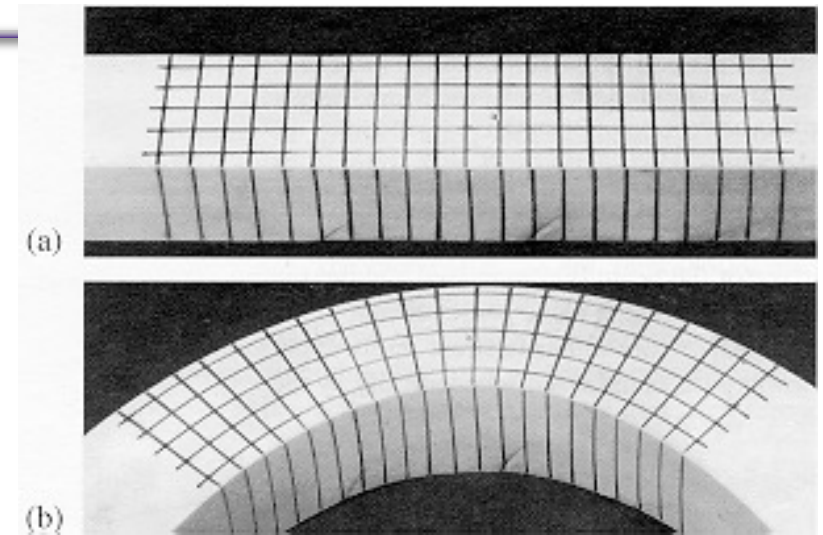


! Pas de forces axiales pour le moment

Déformation relative dans une poutre en flexion pure

C'est quoi être en flexion pure ?

- Moment interne non-nul le long de la poutre, mais pas de forces internes
 - C-a-d : on « tord » les 2 extrémités de la poutre, sans tirer ou pousser
- La flexion ne crée pas d'élongation de l'axe neutre
- Une contrainte normale est la seule contrainte induite par la flexion
- Le niveau de contrainte dépend de y (en compression d'un côté, en traction de l'autre)



Source des vidéos des prochains slides

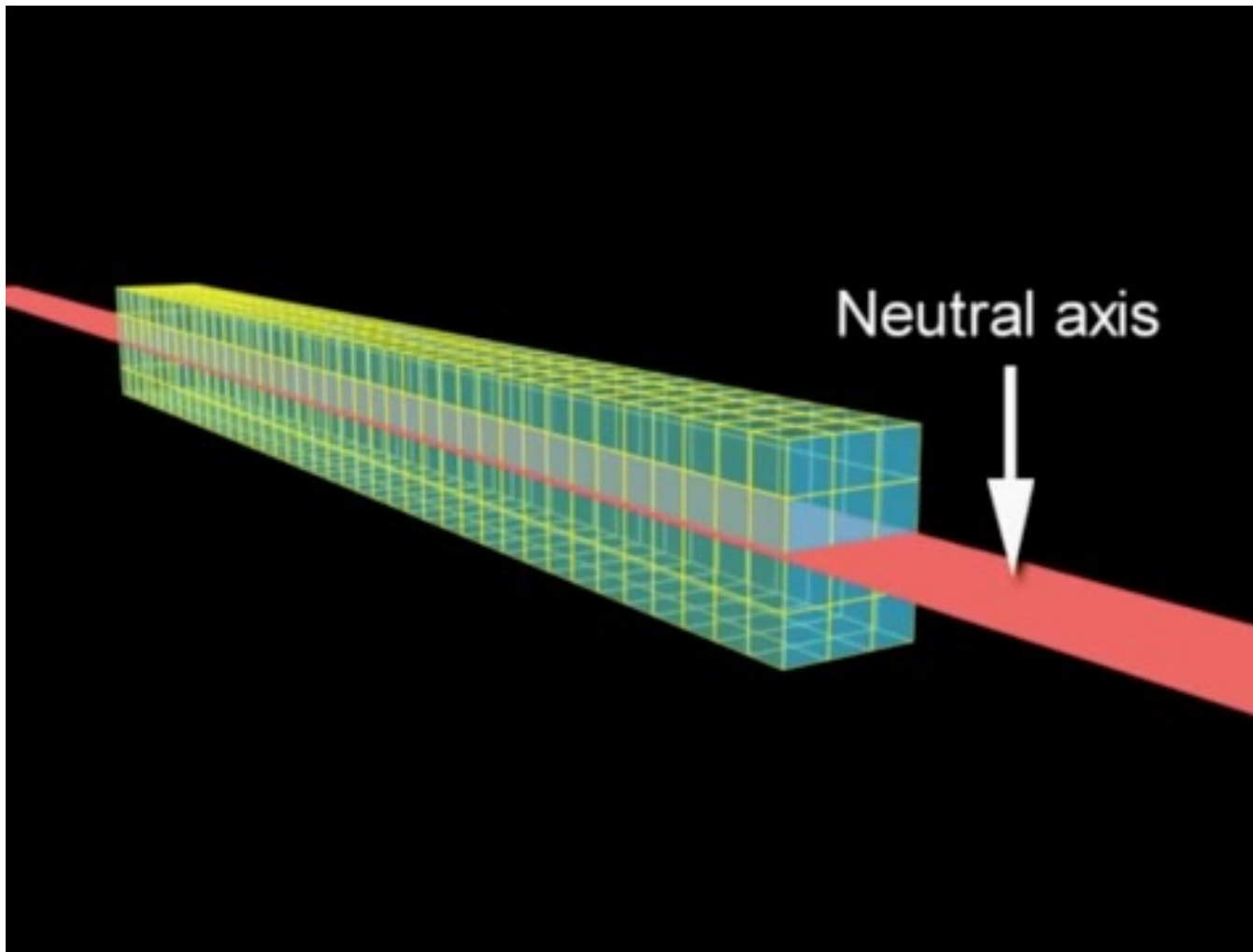
The Bending of Beams (10 part video series) was created
for CIV E 204: Mechanics of Solids 1
University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

AuthorG. Wayne Brodland
AnimatorJudy Sherwood
NarratorColin Campbell

Permission is granted to use this video for educational purposes
only, provided it is unaltered and includes these credits.

© 2009 G W Brodland and J Sherwood

Déformation relative dans une poutre en flexion pure



$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

Visualisation de la
contrainte pour une
poutre de section
rectangulaire

y_0 = axe neutre

$y_0 = 0$ dans cette vidéo

<https://www.youtube.com/watch?v=9C9GFs5AK4c>

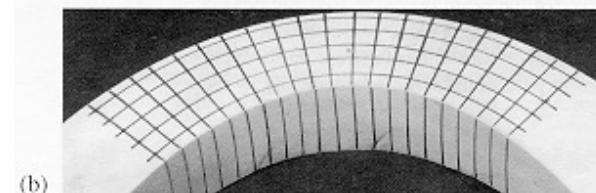
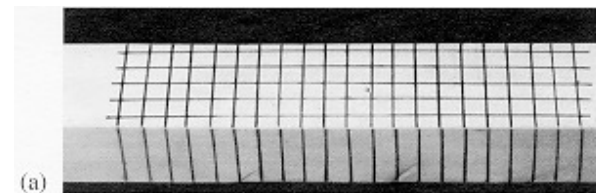
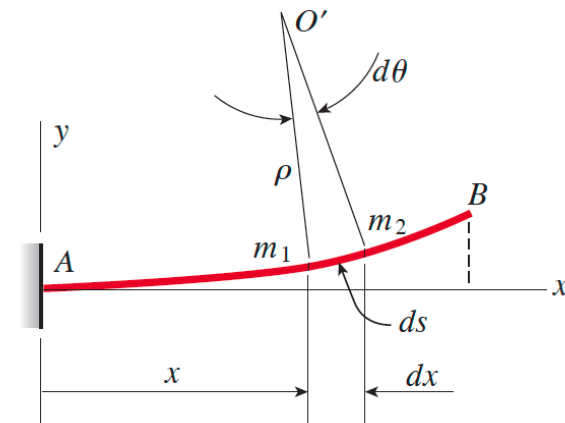
$\varepsilon_x(x,y)$: Déformation relative normales pour une poutre en flexion pure en fonction de x et y

- Lorsqu'une poutre fléchit, nous pouvons définir localement un rayon de courbure ρ et une courbure $\kappa=1/\rho$
- Les sections de la poutre perpendiculaires à l'axe de la poutre avant la flexion resteront plan après pliage (c-a-d à x constant)
- Un côté (par ex ici le dessus) de la poutre va s'allonger, tandis que l'autre côté devient plus court.
- L'axe où il n'y a pas d'allongement est appelé **axe neutre** et passe à travers le **centroïde** de la poutre

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$



(a)



Axe Neutre (poutre simple) et déformation relative selon y

- Après déformation, l'axe neutre conserve sa longueur d'origine
- tout autre ligne parallèle à l'axe neutre s'allonge ou se raccourcit

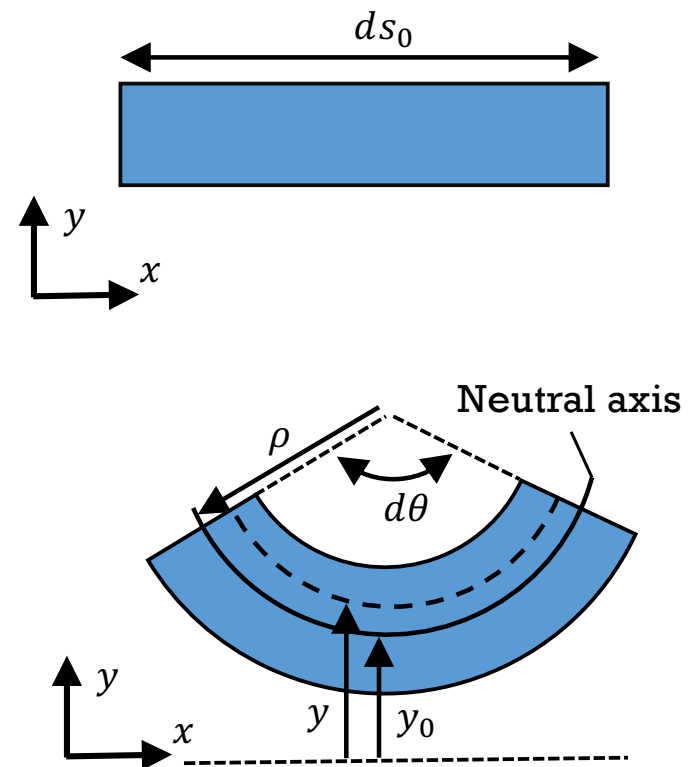
$$ds = (\rho - (y - y_0))$$

$$d\theta = ds_0 - (y - y_0) \frac{ds_0}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \rightarrow \boxed{\varepsilon_x(x, y) = -\frac{y - y_0}{\rho}}$$

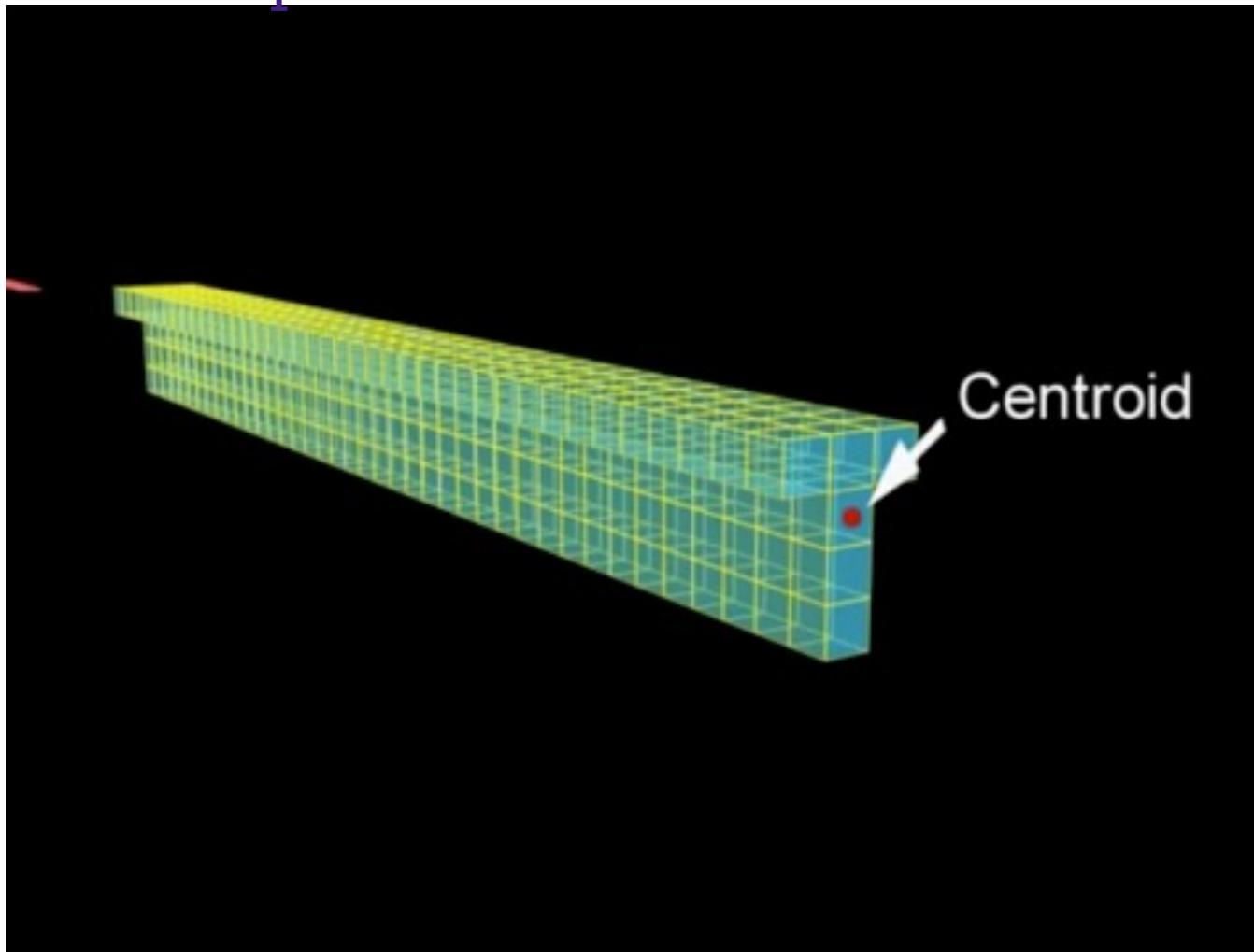
- y_0 est la position de l'axe neutre (centroïde)

poutre flexion pure: pas de dépendance en x de ε_x



Déformation relative $\varepsilon_x(x, y)$ normales (donc selon axe x) dans une poutre en flexion

13



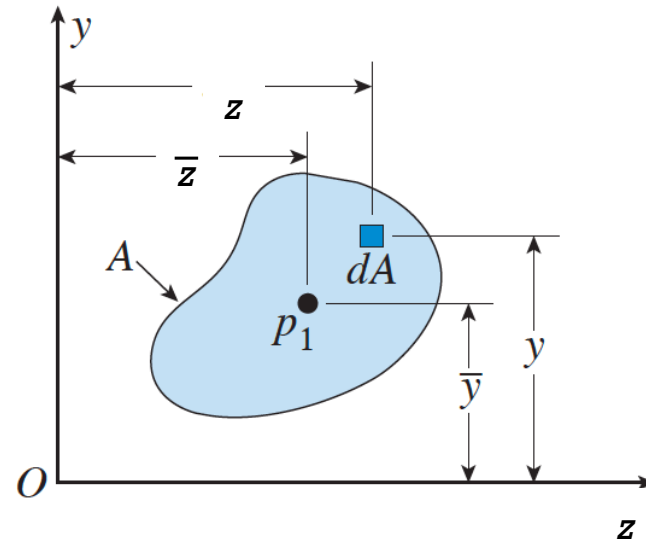
$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

Visualisation
contrainte pour poutre
avec section en T

L'axe neutre est
toujours au centroïde,
mais donc pas au
milieu (en y) de la
poutre.

<https://www.youtube.com/watch?v=Tfilybn6be0>

Où est le Centroïde ?



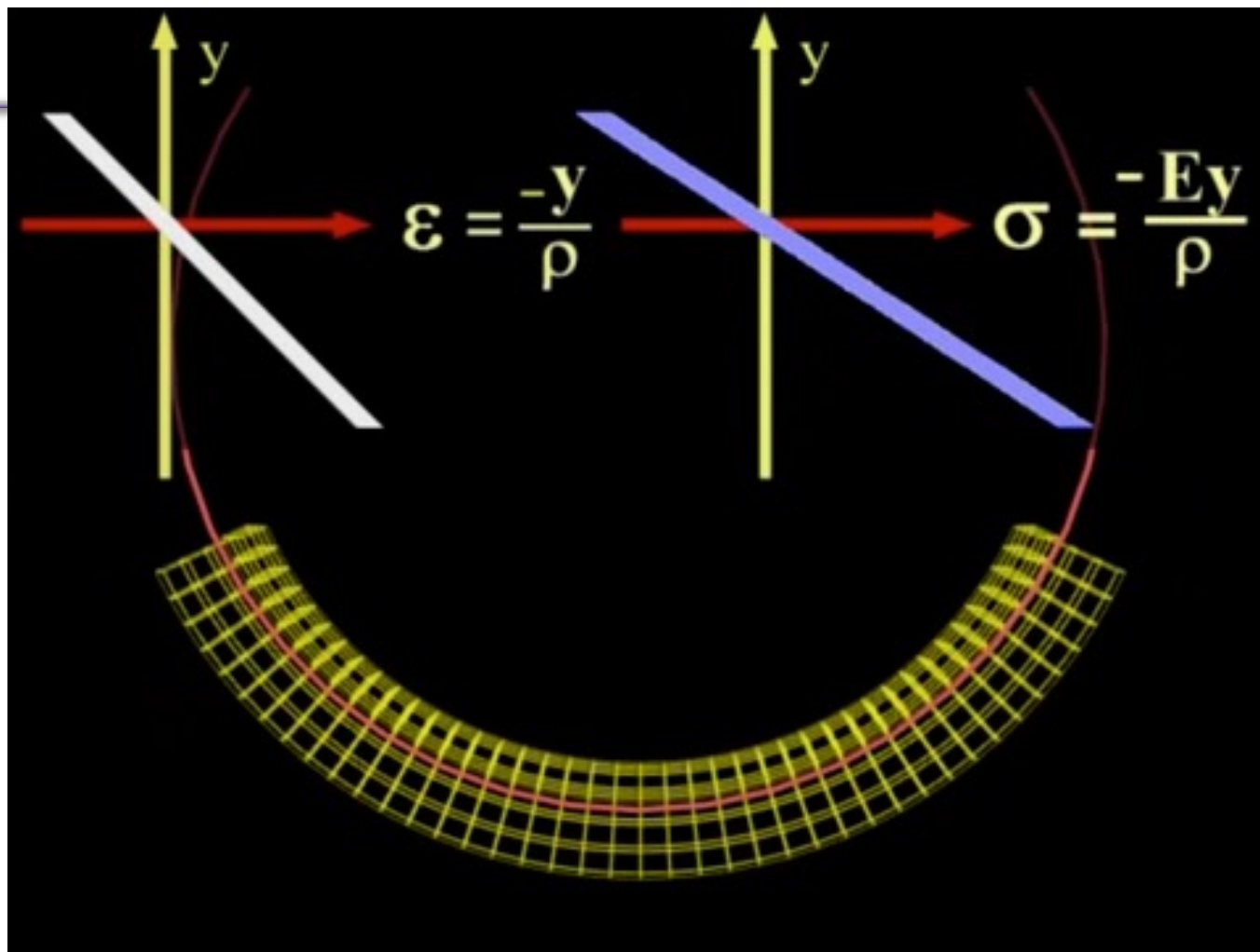
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

intégrales dans le plan yz . (donc $dy.dz$)

Comme centre de masse

(en 2D, nous n'allons calculer que \bar{y} , pas \bar{z})

Contraintes normales $\sigma_x(y)$ dans une poutre en flexion



Loi de Hooke dans la poutre

Permet de lier $\epsilon_x(y)$ avec $\sigma_x(y)$

<https://www.youtube.com/watch?v=i23bk08PWpI>

Contraintes normales $\sigma_x(y)$

■ $\varepsilon_x(y) = -\frac{y-y_0}{\rho}$

■ la loi de Hooke:

$$\sigma_x(y) = E \varepsilon_x(y) = -E \frac{y-y_0}{\rho}$$

□ Rappelez-vous des matrices de souplesse et de rigidité

□ Ici simple car $\sigma_y = \sigma_z = 0$

□ **Mais pour trouver σ et ε , il faut connaître la position de l'axe neutre (y_0)**

Contraintes normales dans une poutre

- Pour une poutre en flexion pure : la contrainte normale est la seule contrainte induite par la flexion:

flexion pure
 $V = 0$
 $M = \text{constante}$

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nous avons des déformation relatives en x , mais donc aussi en y et z !!

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y)}{E}$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \varepsilon_z(x, y) = -\nu \varepsilon_x(x, y)$$

Comment trouver l'axe neutre?

(derivation pour le cas sans force axiale)

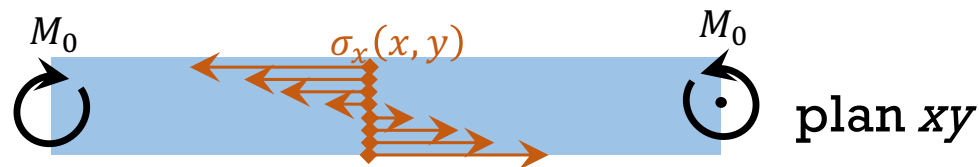
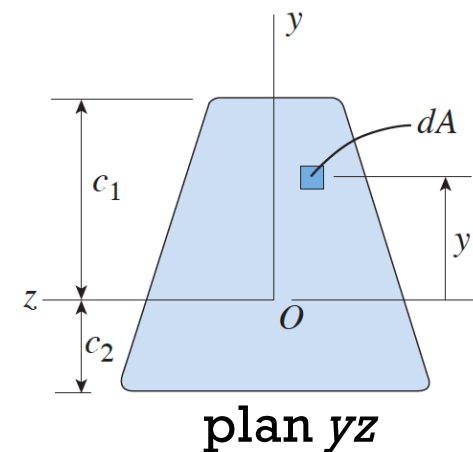
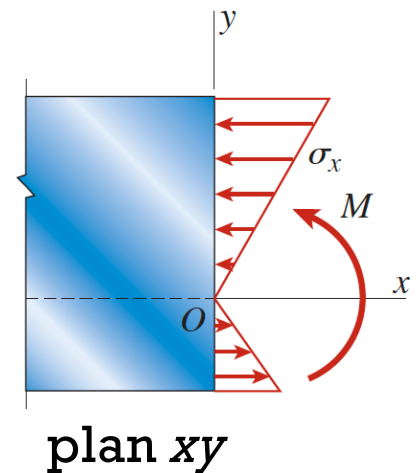
section dans le plan yz , puis utiliser équations de la statique, sachant que la force axiale est 0 en flexion pure.

$$\sum F_x = N = 0$$

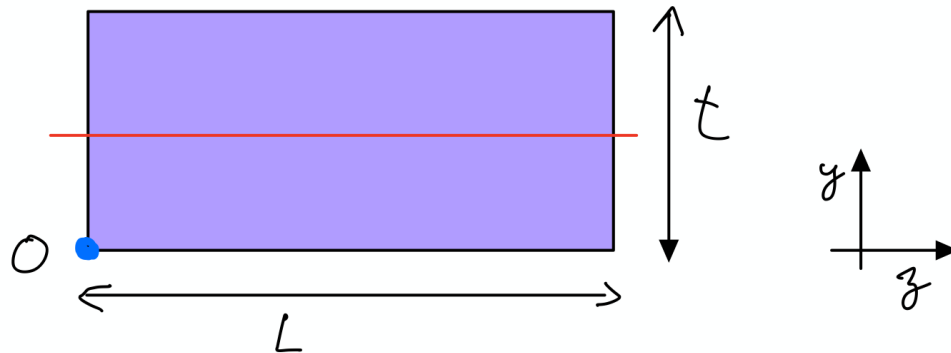
$$N = \int \sigma_x(x, y) dA = \iint -E \frac{(y-y_0)}{\rho} dy dz = 0$$

$$y_0 = \frac{\int E \frac{y}{\rho} dA}{\int E \frac{1}{\rho} dA} = \frac{\int y dA}{\int dA} \rightarrow \textit{centroïde}$$

Les intégrales sont dans le plan yz



Exemple: calcul d'axe neutre pour poutre de section rectangulaire



$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Les intégrales sont dans le plan yz

$$\int_A y dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} y dy dz = L \frac{t^2}{2}$$

$$\int_A dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} dy dz = Lt$$

$$y_0 = \frac{L t^2 / 2}{Lt} = \frac{t}{2}$$

Ça dépend de
votre choix de
l'origine

Notez que **vous**
choisissez l'origine
du système de
coordonnées.

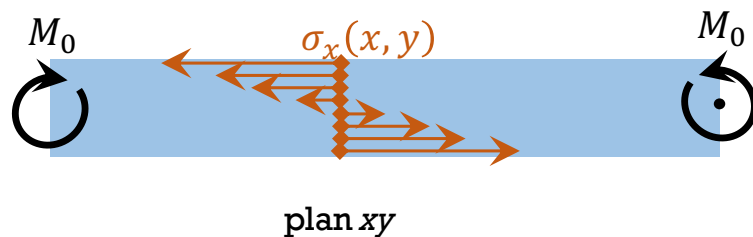
Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$

Poutre sur laquelle on impose moment M_0 à chaque extrémité

1. pour trouver $M_z(x)$: "couper" la poutre (à x donné, selon axe y , comme semaine 7a), puis utiliser équations de la statique pour trouver $M_z(x)$, le moment interne

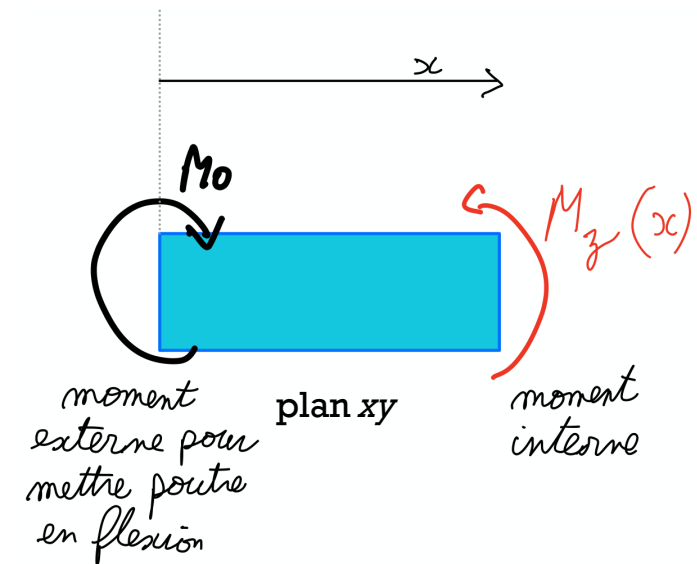
$$\sum M_z = M_z(x) - M_0 = 0 \rightarrow M_z(x) = M_0$$

2. Puis: exprimer $M_z(x)$ en fonction de $\sigma_x(x, y)$. Mais comment?

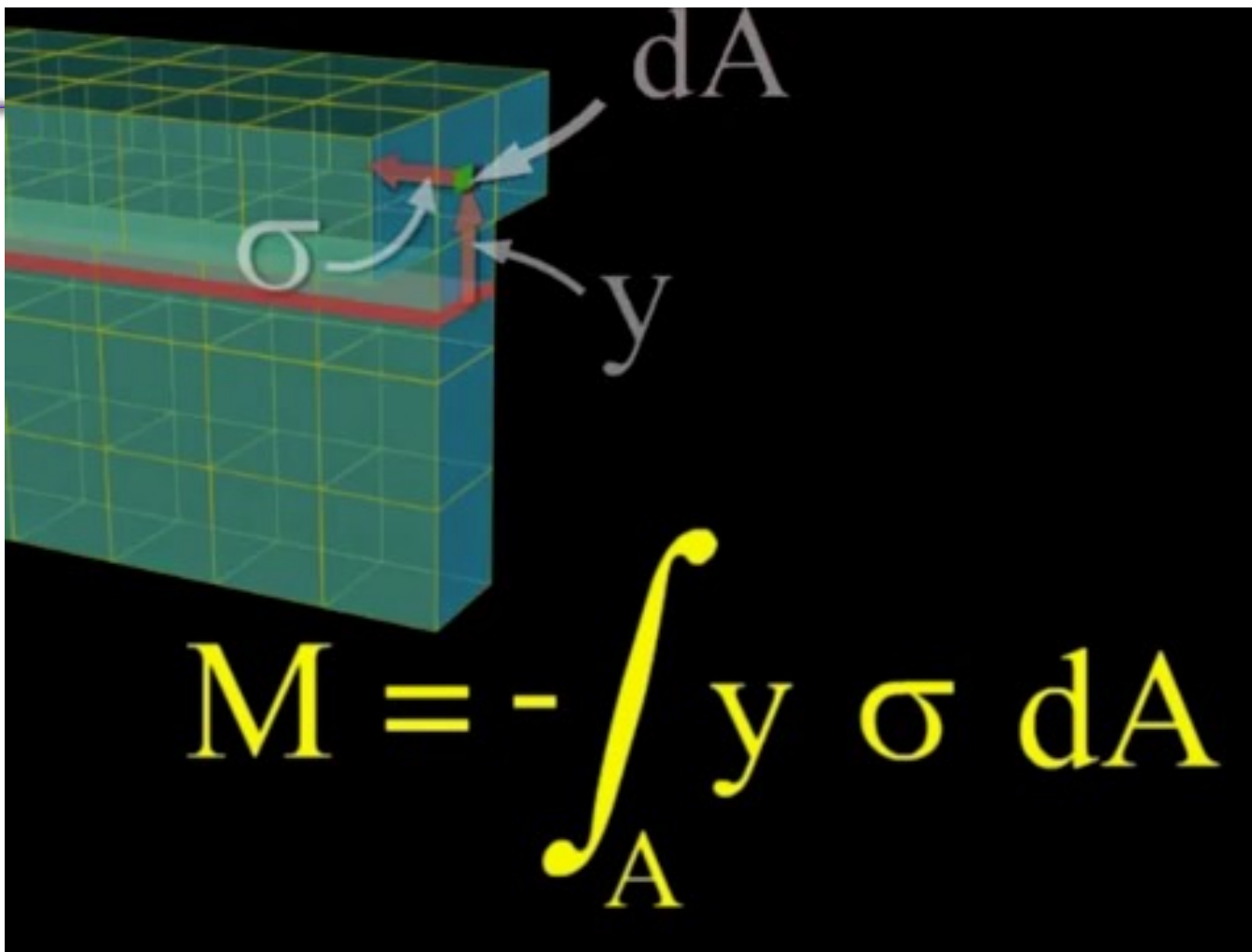


$$N(x) = 0$$

$$V(x) = 0$$



Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$



The diagram shows a 3D perspective of a rectangular beam element. A horizontal line represents the neutral axis. A small rectangular area element dA is highlighted on the top surface. A red arrow labeled σ points horizontally from the neutral axis towards the area element, representing the normal stress. A vertical arrow labeled y points from the neutral axis to the area element, representing the distance. The beam is shown with a grid pattern to indicate its 3D structure.

$$M = - \int_A y \sigma dA$$

<https://www.youtube.com/watch?v=asBW0Ojc0bY>

Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$

(sans force axiale)

- Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales par rapport à l'axe neutre. Rappel: $\sigma_x(x, y) = -E \frac{y-y_0}{\rho}$

- Statique: donc $\sum M = 0$ sur chaque plan yz . $\int_{plan\ yz} Moments\ dA = M_z(x)$

- $M_z(x) = - \int \sigma_x(x, y)(y - y_0) dA = \int_{plan\ yz} \frac{E}{\rho} (y - y_0)^2 dA$

- ainsi

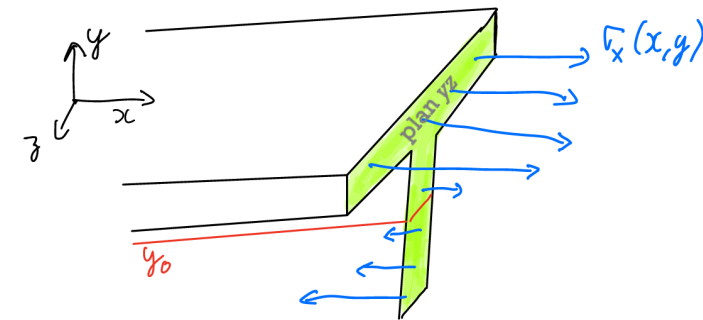
$$M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$$

avec

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

$$\sigma_x(x, y) = - \frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}} (y - y_0)$$

Formule Flexion



- Si l'origine y a été choisi sur l'axe neutre, alors $y_0 = 0$

Semaine 7b – partie 2

Objectifs d'apprentissage de cette partie

Lier contrainte et Moment de flexion par le moment d'inertie

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

Trouver contrainte maximale dans une poutre en flexion

Calculer moment d'inertie pour poutre de section assemblée de formes simples

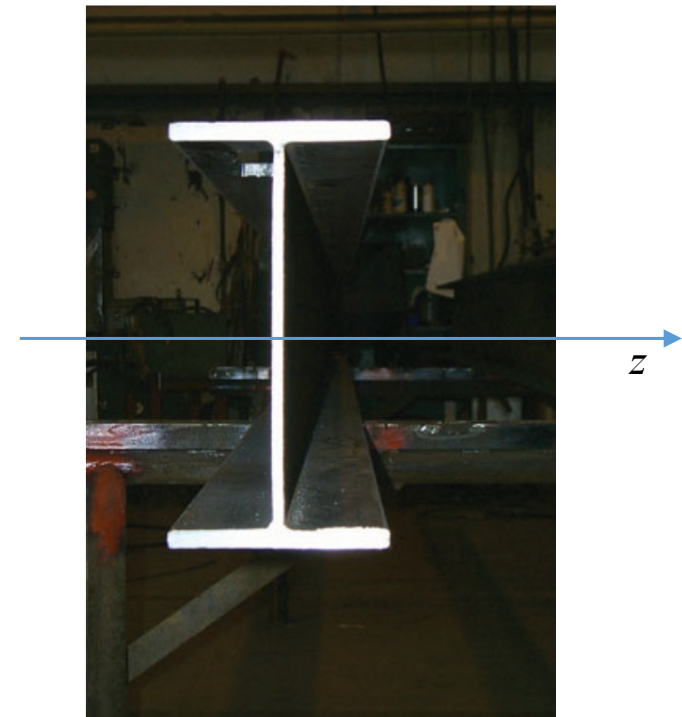
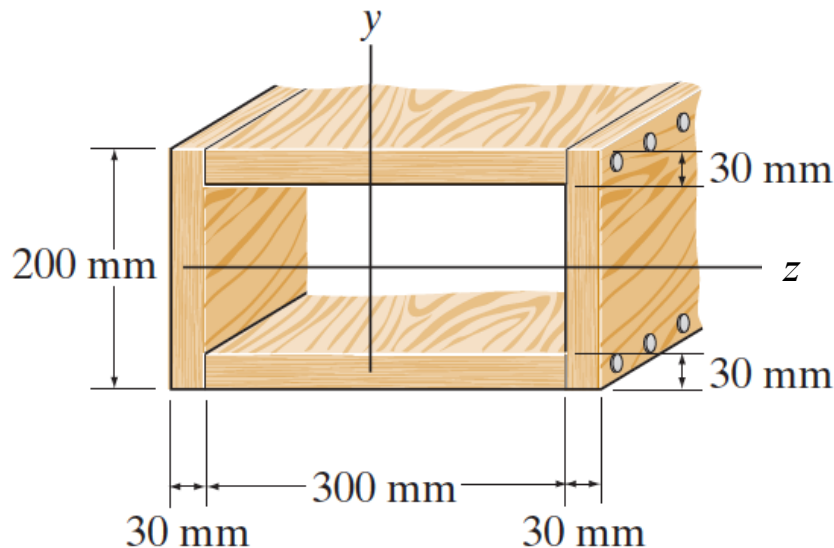
$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

Trouver l'axe neutre pour poutre de section assemblée de formes simples

Moment quadratique (moment d'inertie)

$$I_{\text{axe, position sur l'axe}}$$

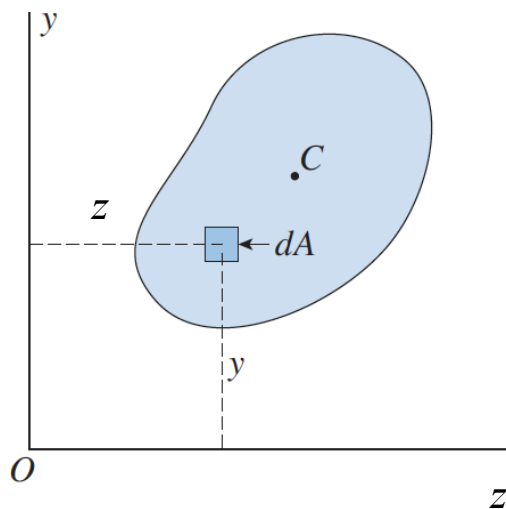
- Exprime la rigidité d'une géométrie à la flexion
- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend pas du matériau



Poutre: Axe long sur x , charge et déflexion sur y , **flexion autour de l'axe z**

Moment quadratique (moment d'inertie)

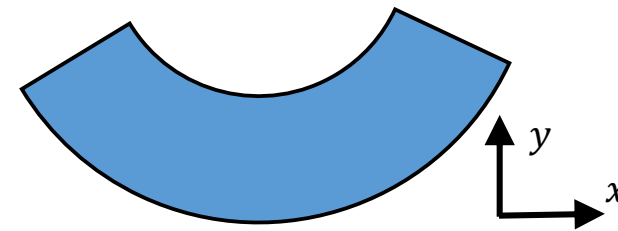
$I_{\text{axe, position-axe}}$



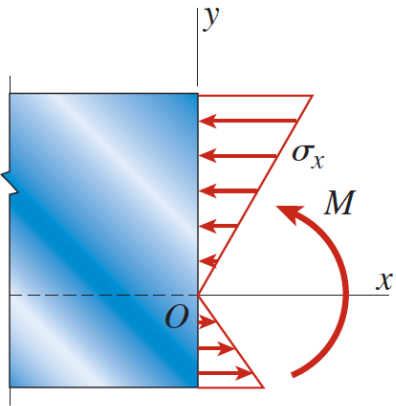
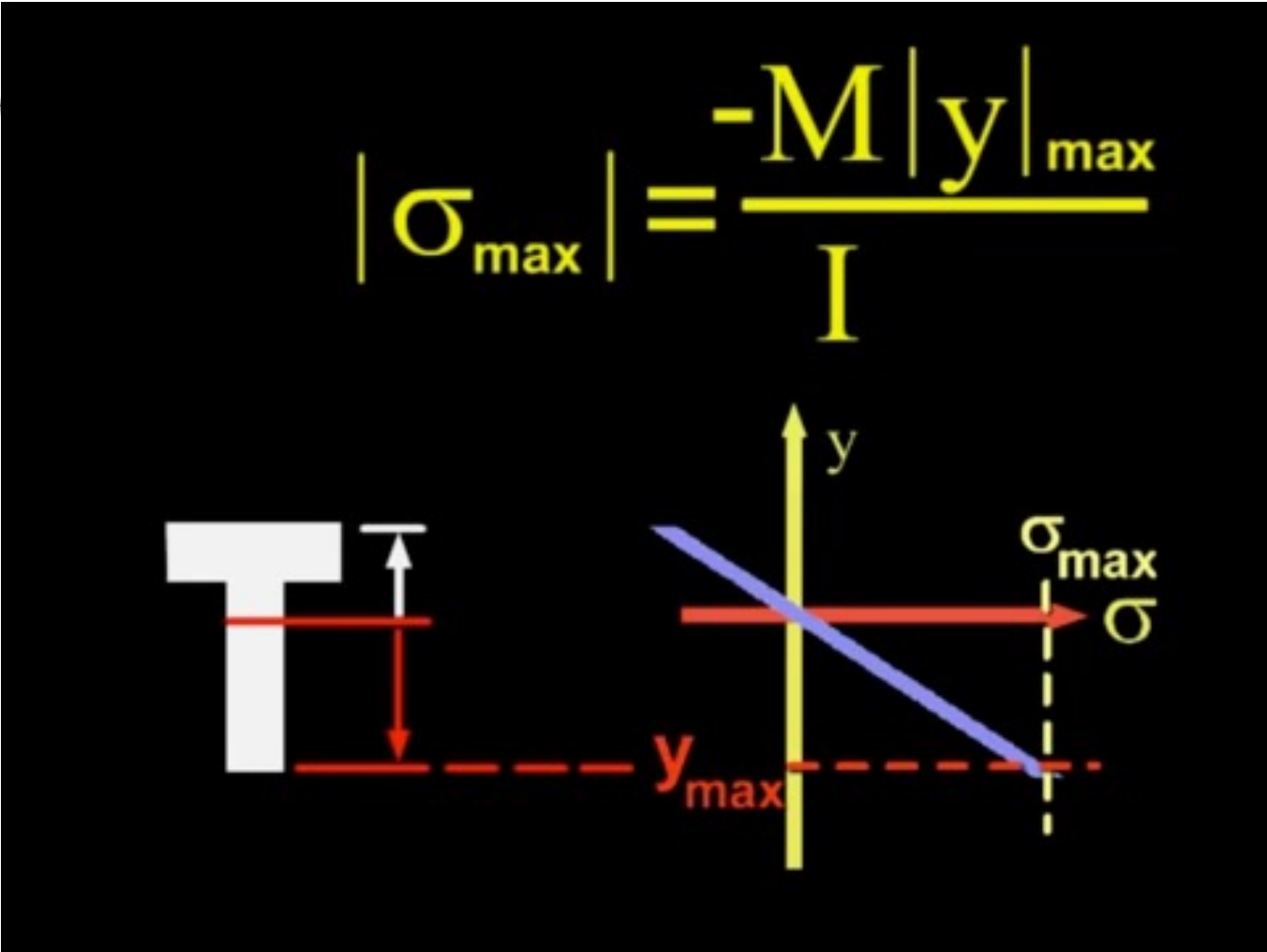
$$I_{z,y=0} = \int y^2 dA \quad I_{y,z=0} = \int z^2 dA$$

axe selon lequel on “enroule” la poutre
(pour nos poutres, ce sera l'axe z, car moment de flexion sur l'axe z, et déflexion sur l'axe y)

- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend pas du matériau
- Nous aller “plier” à l'axe neutre: $I_{z,y=y_0}$



Contrainte MAXIMUM: toujours en haut ou en bas de la poutre



<https://www.youtube.com/watch?v=VDiNTuVKPSM>

Contrainte max dans un poutre en flexion pure

- Contrainte maximum:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \quad \rightarrow \quad |\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

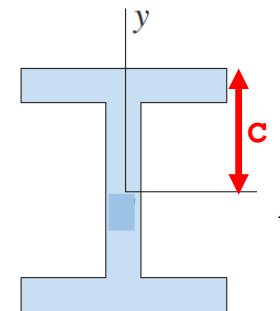
- c est la distance maximale entre l'axe neutre et bord de la poutre

- S est le *module d'inertie élastique*: donne l'efficacité d'une section transversale pour résister à la flexion

- $S = \text{elastic section modulus (in English)}$

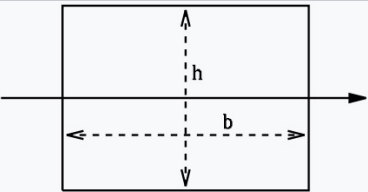
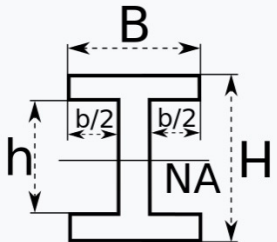
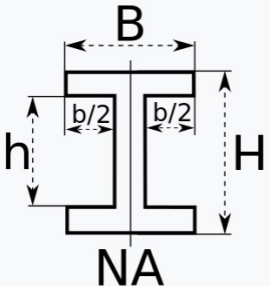
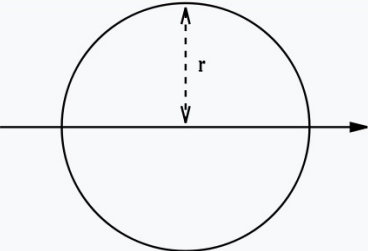
- $S = I / c$

- grand $S \rightarrow$ petite contrainte générée pour un moment de flexion donné



https://en.wikipedia.org/wiki/Section_modulus

Section modulus equations^[3]

Cross-sectional shape	Figure	Equation	Comment
Rectangle		$S = \frac{bh^2}{6}$	Solid arrow represents neutral axis
doubly symmetric I -section (major axis)		$S_x = \frac{BH^2}{6} - \frac{bh^3}{6H}$ $S_x = \frac{I_x}{y},$ with $y = \frac{H}{2}$	NA indicates neutral axis
doubly symmetric I -section (minor axis)		$S_y = \frac{B^2(H-h)}{6} + \frac{(B-b)^3h}{6B}$ ^[4]	NA indicates neutral axis
Circle		$S = \frac{\pi d^3}{32}$ ^[3]	Solid arrow represents neutral axis

Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre?

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

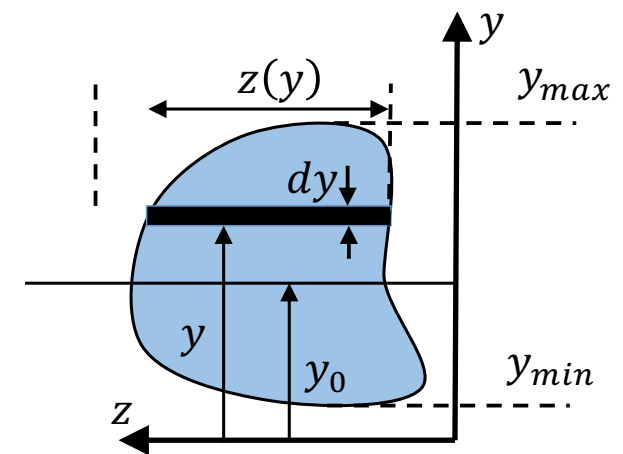
Centroïde

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} = \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y z(y) dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} z(y) dy}$$

Moment d'inertie autour de l'axe z passant par y_0

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 dA = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (y - y_0)^2 z(y) dy$$

I_{z,y_0} dépend de y_0

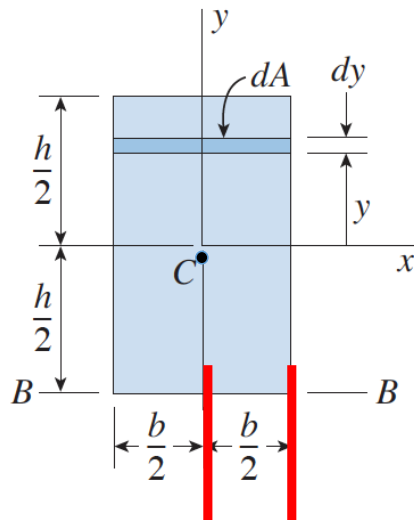


section de la poutre

Les intégrales sont dans le plan yz. Attention à l'origine que vous choisissiez.

Moment d'inertie (quadratique)

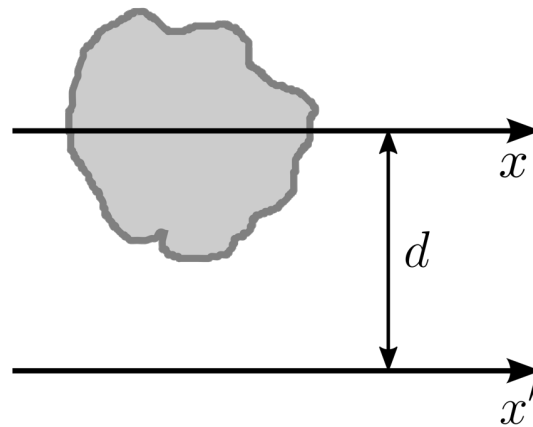
rappel



$$I_{y, x=0} = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{x, y=0} = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

- on « plie » ou s'enroule selon un axe donné (exemple ci-dessus selon x or y , mais pour nos poutres avec l'axe long x , nous chercherons toujours I_z)
- le choix de l'axe origine est important! Origine = axe ou on plie/tourne. ici les axes passent par ce le centre de l'objet. $I_{y,x=0} \neq I_{y,x=b/2}$
- Si axe pas selon centre, utiliser Steiner = théorème des axes parallèles)



$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

where

A is the area of the shape, and

d is the perpendicular distance between the x and x' axes.^{[4][5]}

Bending moment of inertia

Roark's formulas for stress & strain,
W.C. Young, 8th ed, McGraw Hill

TABLE A.1 Properties of sections

NOTATION: A = area (length²); y = distance to extreme fiber (length); I = moment of inertia (length⁴); r = radius of gyration (length); Z = plastic section modulus (length³); SF = shape factor. See Sec. 8.15 for applications of Z and SF

Form of section	Area and distances from centroid to extremities	Moments and products of inertia and radii of gyration about central axes	Plastic section moduli, shape factors, and locations of plastic neutral axes
1. Square 	$A = a^2$ $y_c = x_c = \frac{a}{2}$ $y'_c = 0.707a \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$	$I_x = I_y = I'_x = \frac{1}{12}a^4$ $r_x = r_y = r'_x = 0.2887a$	$Z_x = Z_y = 0.25a^3$ $SF_x = SF_y = 1.5$
2. Rectangle 	$A = bd$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{1}{12}bd^3$ $I_y = \frac{1}{12}db^3$ $I_x > I_y \quad \text{if } d > b$ $r_x = 0.2887d$ $r_y = 0.2887b$	$Z_x = 0.25bd^2$ $Z_y = 0.25db^2$ $SF_x = SF_y = 1.5$
3. Hollow rectangle 	$A = bd - b_id_i$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{bd^3 - b_id_i^3}{12}$ $I_y = \frac{db^3 - d_ib_i^3}{12}$ $r_x = \left(\frac{I_x}{A}\right)^{1/2}$ $r_y = \left(\frac{I_y}{A}\right)^{1/2}$	$Z_x = \frac{bd^2 - b_id_i^2}{4}$ $SF_x = \frac{Z_x d}{2I_x}$ $Z_y = \frac{db^2 - d_ib_i^2}{4}$ $SF_y = \frac{Z_y b}{2I_y}$

Centroïde

avec symétrie

Fig. 12-2

Area with one axis of symmetry

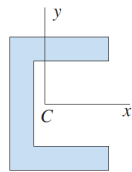


Fig. 12-3

Area with two axes of symmetry

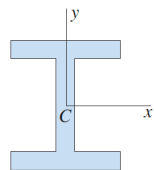
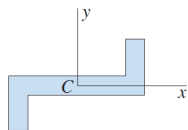
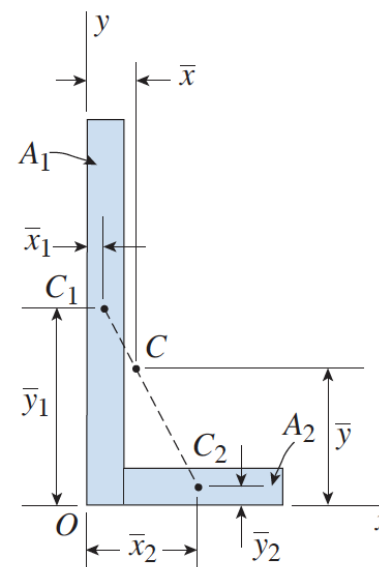


Fig. 12-4

Area that is symmetric about a point



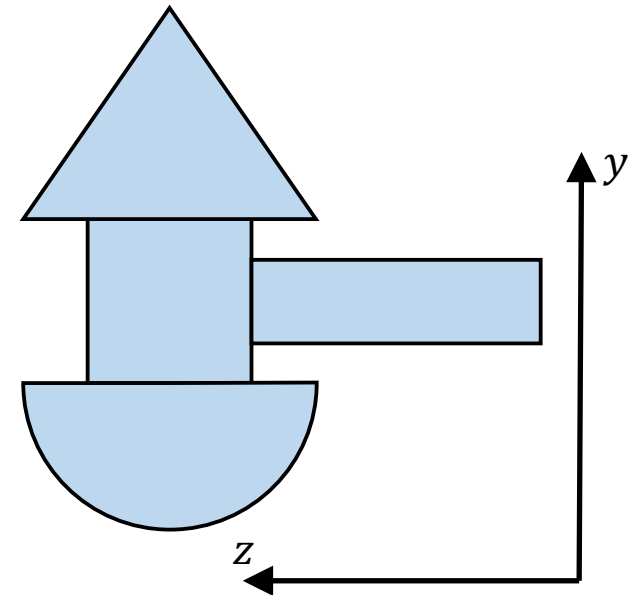
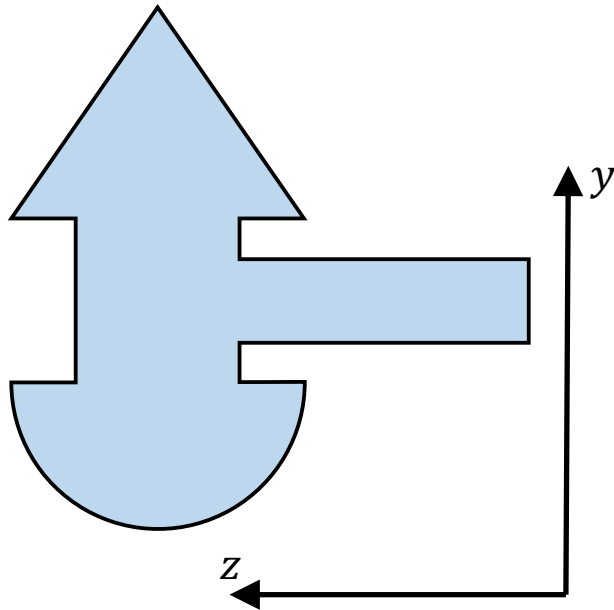
forme complexe



$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre plus complexe

section d'une poutre, union de différentes formes



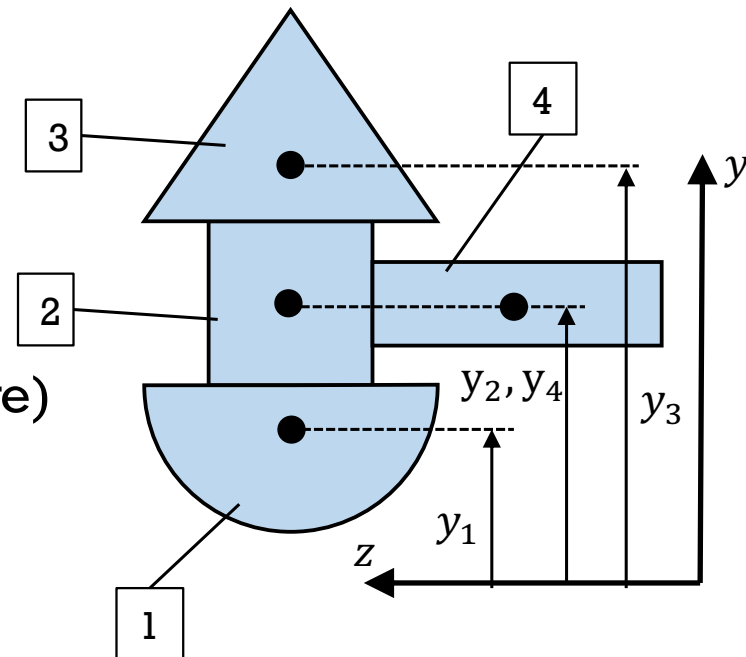
Assembler les morceaux pour trouver le centroïde et I d'un objet complexe

- Centroïde d'un assemblage

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

- Moment d'inertie (autour de l'axe neutre)

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$



- on commence par analyser chaque sous-élément. A_i = aire de l'élément i
- y_i est le centroïde de l'élément i , par rapport à l'origine
- I_{z,y_i} est le moment d'inertie de l'élément i , pour « plier » par l'axe qui passe par le centroïde de l'objet i
- On peut soustraire les « trous »

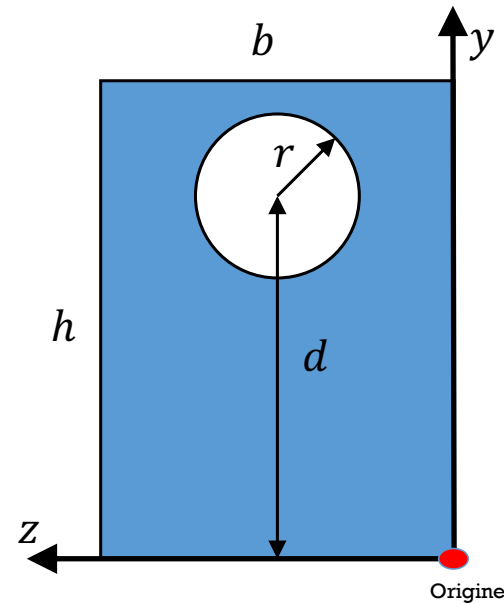
Exemple 0: Trouver S pour une poutre avec cette section

Rappel

$$S = I / c$$

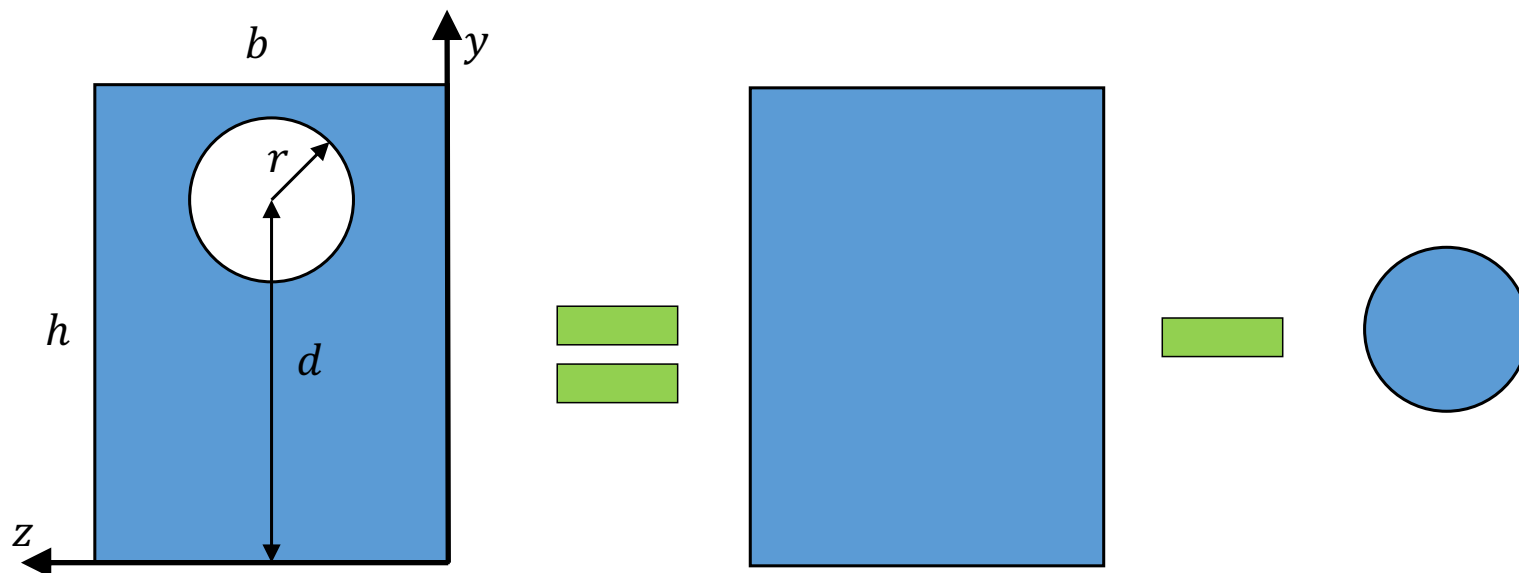
c est la distance maximale à l'axe neutre

Il nous faut donc I et c



Exemple 0

Solution. On décompose la forme complexe en formes simples



Exemple 0

Solution: calcul des centroïdes de chaque élément

• Surfaces $A_{Rec} = bh$ Surface du rectangle

$A_{Cir} = \pi r^2$ Surface du cercle

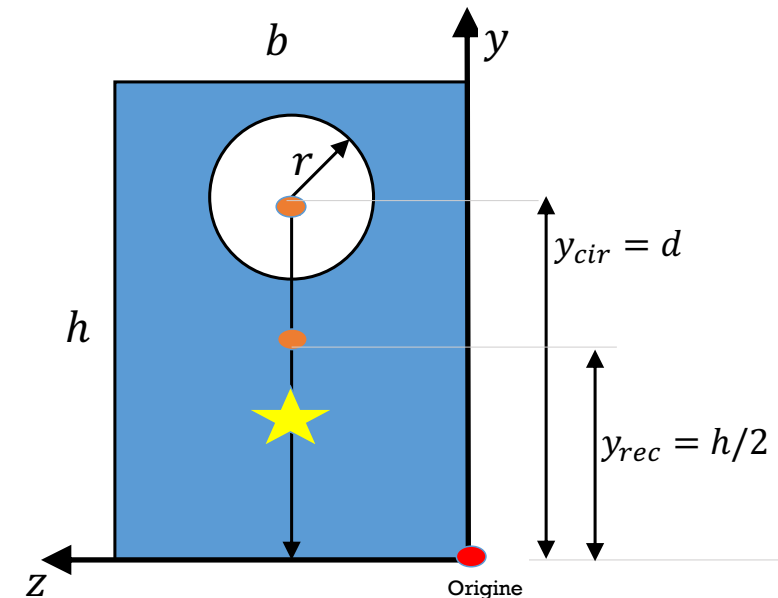
$$A = A_{Rec} - A_{Cir} = bh - \pi r^2$$

$$y_{\text{élément}} = \frac{\int y dA}{\int dA} \rightarrow \text{centroïde}$$

• Centroïdes
(à partir de $y = 0$) $y_{Rec} = \frac{h}{2}$ Centroïde du rectangle

$y_{Cir} = d$ Centroïde du cercle (pas zéro ou $r/2$!)

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i} \quad y_0 = \frac{y_{Rec} A_{Rec} - y_{Cir} A_{Cir}}{A} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) bh - d \pi r^2}{bh - \pi r^2}$$



Exemple 0

Solution: calcul du moment d'inertie complet

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

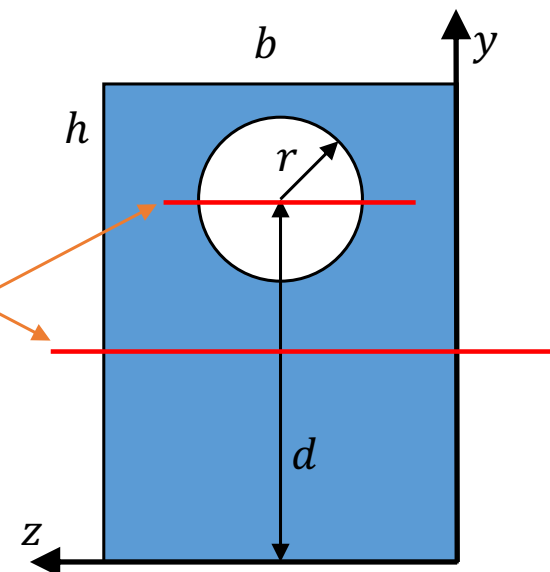
Moments d'inertie

$$I_{Rec} = \frac{1}{12} b h^3$$

Moment d'inertie du rectangle par l'axe passant par son centroïde y_{rec}

$$I_{Cir} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

Moment d'inertie du cercle par l'axe passant par son centroïde y_{cir}



$$I_{y_0} = I_{Rec} - I_{Cir} + A_{Rec}(y_{Rec} - y_0)^2 - A_{Cir}(y_{Cir} - y_0)^2$$

$$y_0 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) b h - d \pi r^2}{b h - \pi r^2}$$

Exemple 0

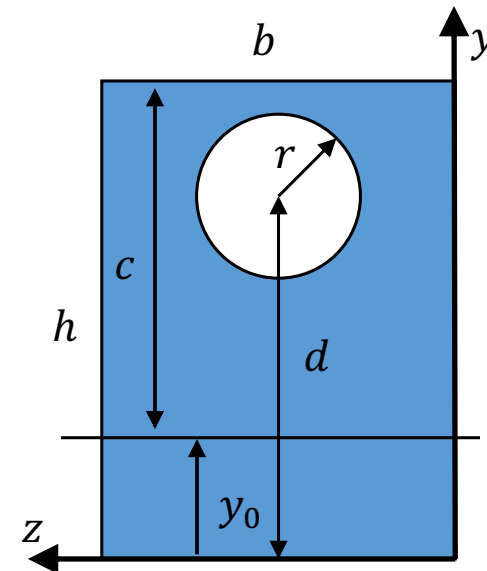
Finalement: calcul de c et de S

- Distance maximale de l'axe neutre

$$c = h - y_0$$

- et enfin, le module de section élastique

$$S = \frac{I_{y_0}}{c}$$



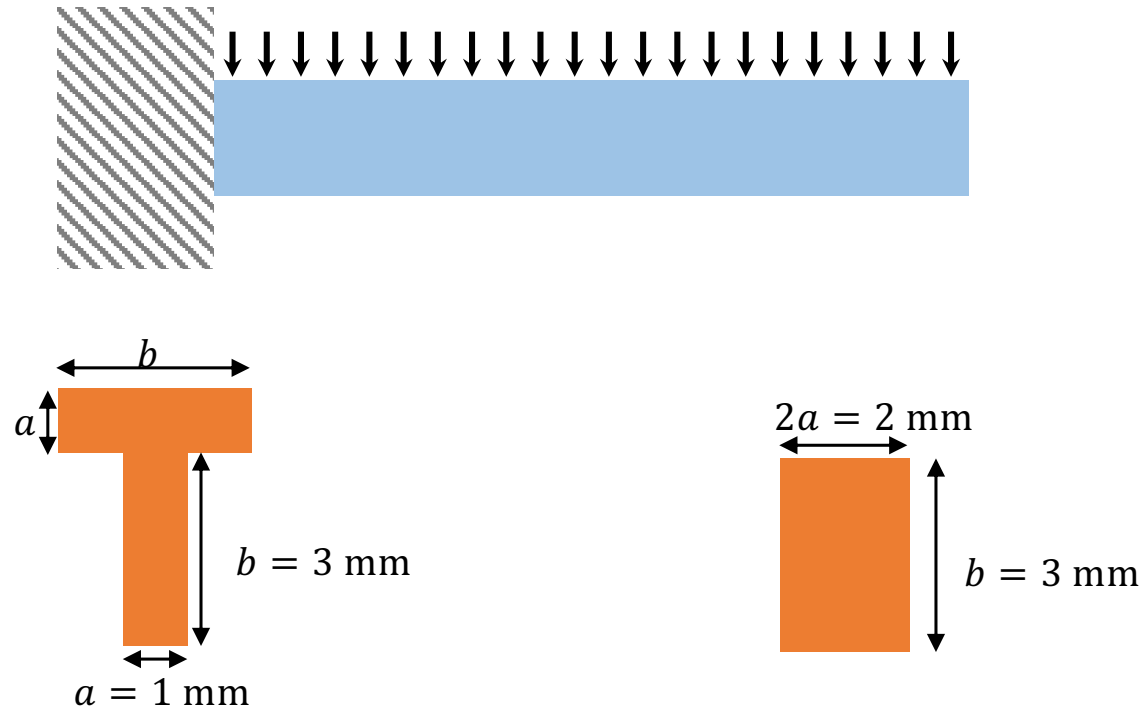
$$y_0 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)bh - d\pi r^2}{bh - \pi r^2}$$

Exemple 1

2 Poutres de section différentes sous charge uniforme (poids)

Poutre encastrée. 2 poutres avec la même masse par longueur, mais pas la même section

Trouvez celle qui a le « S » le plus grand (c-a-d les contraintes les plus faibles)



les 2 poutre ont la même section (6 mm^2)

Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

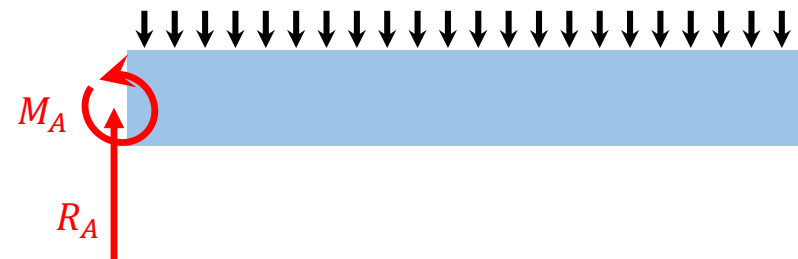
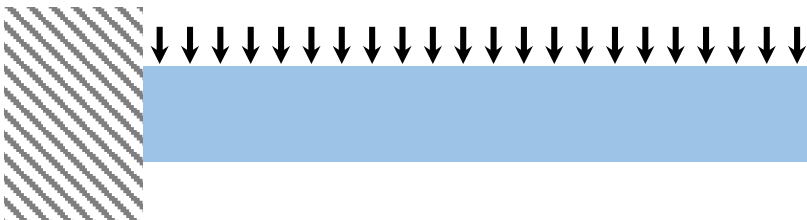
- Etape 1 - Nous calculons le moment de flexion $M_z(x)$, puis sa valeur maximale.
poutre de section A , densité ρ

$$q(x) = \rho Ag$$

$$V(x) = \rho Ag(L - x)$$

$$M(x) = -\rho Ag \frac{(L - x)^2}{2}$$

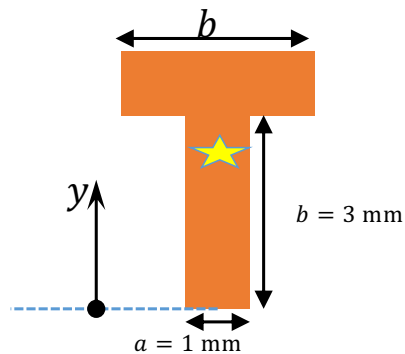
$$|M|_{Max} = |M(x = 0)| = \rho Ag \frac{L}{2}$$



Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

- Etape 2 – trouver a) la surface de la section, b) la position du centroïde, et c) la distance max entre centroïde et bord de la poutre.



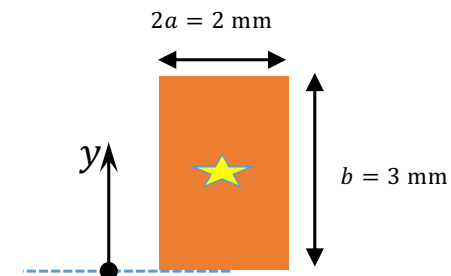
$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy}{2ab} = \frac{3b + a}{4}$$

$$c = y_0 = \frac{3b + a}{4} = 2.5 \text{ mm}$$

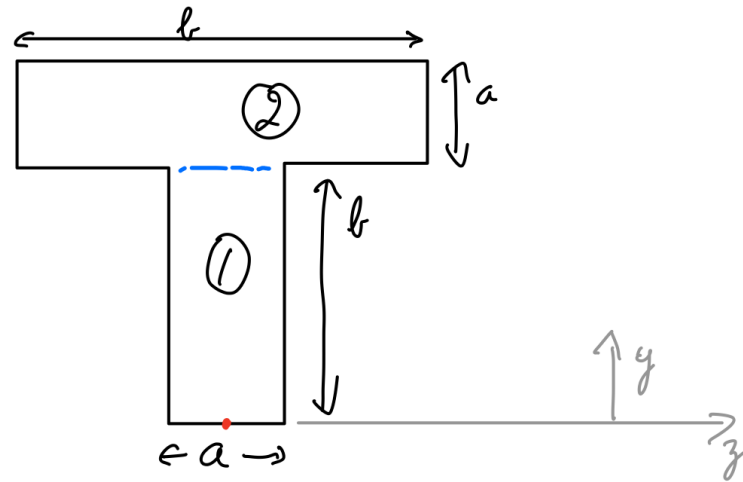
(voir prochain
slide pour
l'intégrale)



$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{b}{2}$$

$$c = y_0 = \frac{b}{2} = 1.5 \text{ mm}$$



$$A = ab + ab = 2ab$$

$$\int y dA = \int_{\textcircled{1}} y dA + \int_{\textcircled{2}} y dA$$

$$= \int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} \int_{y=0}^{y=b} y dz dy + \int_{z=-\frac{b}{2}}^{z=\frac{b}{2}} \int_{y=b}^{y=b+a} y dz dy$$

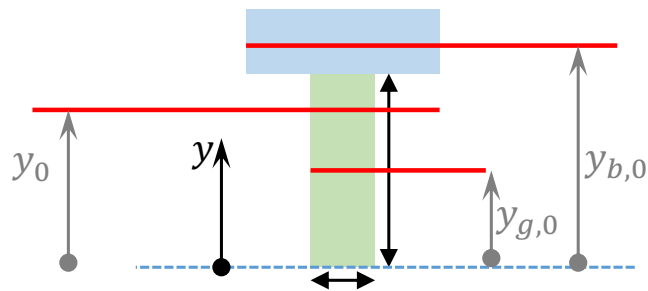
$$= a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy$$

Exemple 1

Poutre sous charge uniforme

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

- Etape 3 - Nous calculons le moment d'inertie, selon z



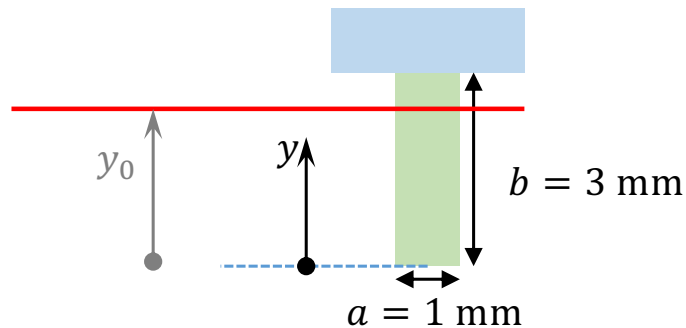
$$\begin{aligned}
 I_{z,y_0} &= I_{green,y_0} + I_{blue,y_0} \\
 &= I_{green,y_{g,0}} + A_{green} \cdot (y_0 - y_{g,0})^2 + I_{blue,y_{b,0}} + A_{blue} \cdot (y_0 - y_{b,0})^2 \\
 &= \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + ab \left(\frac{b+a}{4} \right)^2 + ab \left(\frac{b+a}{4} \right)^2 \\
 &= \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + \frac{ab(b^2 + 2ab + a^2)}{8} = \\
 &= \frac{5ab^3 + 5ba^3 + 6a^2b^2}{24} = 8.5 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Exemple 1

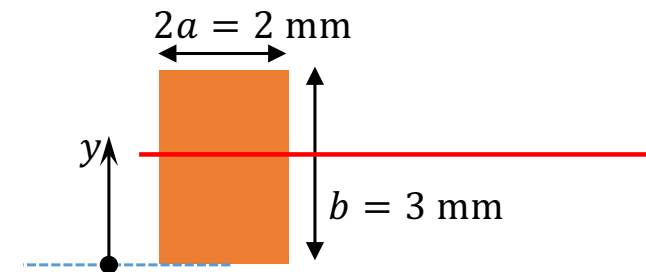
Poutre sous charge uniforme

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

- Etape 3 - Nous calculons le moment d'inertie, selon z



$$I_{z,y_0} = 8.5 \text{ mm}^4$$



$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= \int \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 dA = \\ &= 2a \int_0^b \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4} \right) dy = \\ &= \frac{ab^3}{6} = 4.5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

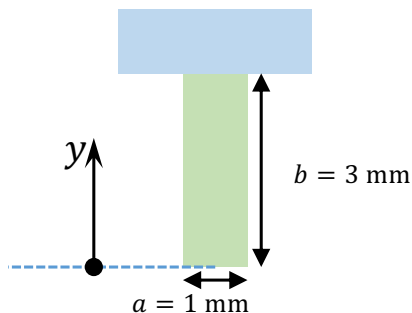
remarquez que $I_{\text{barre_en_t}}$ est presque $2 \times I_{\text{barre_rectangulaire}}$

Exemple 1

Poutre sous charge uniforme

- Etape 3 - Nous calculons le moment d'inertie (MÉTHODE alternative, par intégrale directement plutôt que par Steiner)

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$



$$I_{z,y_0} = I_{green,y_0} + I_{blue,y_0} = \int_0^b a(y - y_0)^2 dy + \int_b^{b+a} b(y - y_0)^2 dy$$

$$= a \frac{(y - y_0)^3}{3} \Big|_0^b + b \frac{(y - y_0)^3}{3} \Big|_b^{b+a}$$

$$= \frac{a}{3} \left[\left(b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 + \left(\frac{3b+a}{4} \right)^3 \right] + \frac{b}{3} \left[\left(b+a - \frac{3b+a}{4} \right)^3 - \left(b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 \right]$$

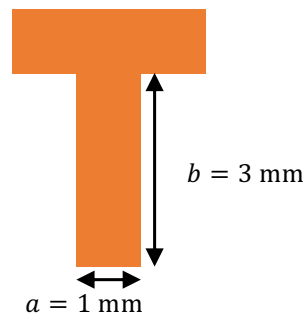
$$= \frac{1}{3} [0.5^3 + 2.5^3 + 1.5^3 \cdot 3 - 3 \cdot 0.5^3] \text{ mm}^4 = 8.5 \text{ mm}^4$$

Exemple 1

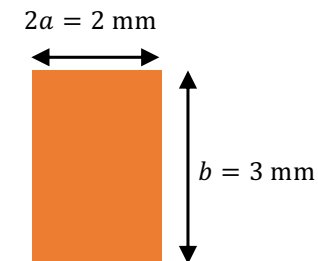
Poutre sous charge uniforme

$$S = \frac{I_{y_0}}{c} \quad |\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- Etape 4 - Nous calculons le module de section élastique S



$$S = \frac{8.5}{2.5} = 3.4 \text{ mm}^3$$

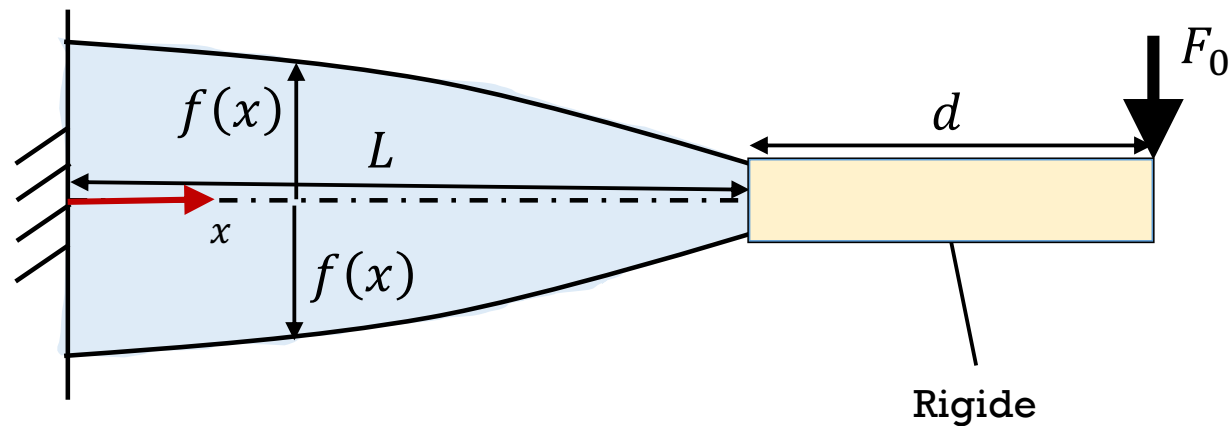


$$S = \frac{4.5}{1.5} = 3 \text{ mm}^3$$

et donc il y aura des contraintes maximum très semblables pour les deux cas pour un même moment imposé, malgré le fait que la barre "en T" soit 2x plus rigide

Exemple 2

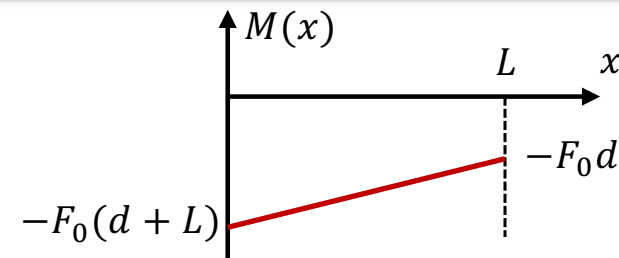
- Une poutre de longueur L , largeur b et épaisseur $2f(x)$ est chargée comme indiqué.
- Trouvez $f(x)$ pour avoir la même contrainte maximum tout le long de la poutre



Solution 2

■ Moment de flexion: $M(x) = -F_0(d + L - x)$

■ Contrainte Maximum : $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c$



■ Moment d'inertie: $I_{z,y_0}(x) = \frac{1}{12} [2f(x)]^3 b$

■ Distance maximale de l'axe neutre: $c = f(x)$

■ Contrainte Maximum : $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{3F_0(d+L-x)}{2bf^2(x)} = \sigma_0$

■ $f(x) = \sqrt{\frac{3F_0(d+L-x)}{2b\sigma_0}}$

