Série 12

1. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : \quad f_1(x) = -2x^2+6 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad f_2(x) = -(x-1)^2 .$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative.

2. Calculer la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ de la fonction donnée sous forme paramétrique :

$$(x(t)\,;\,y(t)) = (t^3+t\,;\,t^4-t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

En quels points P de la courbe, la pente de la tangente vaut-elle -1 ?

3. Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = 1-t^2 \\ y(t) = t^2-t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$

Calculer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ passant par le point $P\,(4\,;\,-8) \notin \Gamma$.

4. On considère Γ la courbe du plan définie par $y^3+x^2+a^2xy=1$ où a est un paramètre réel strictement négatif.

Soit $P\,(x_P\,;\,a) \in \Gamma$, $x_P<0$. Déterminer a pour que la normale à la courbe Γ en P passe par le point $Q\,(-\frac{5}{2}\,;\,0)$.

5. On considère un point matériel M décrivant la trajectoire Γ définie par l'équation : $x\,y^3+x^2\,y^2+x^3\,y = 99-20x$.

Sachant que l'abscisse de M se déplace en fonction du temps t selon la loi $x(t) = 1+\sqrt{t}+t$, $t \geq 0$, déterminer :

a) le(s) point(s) P de Γ pour le(s)quel(s) la vitesse de l'abscisse vaut $\frac{3}{2}$,

b) l'équation cartésienne de la tangente à la trajectoire en ce(s) point(s).

6. Soit Γ la courbe du plan définie par les équations suivantes, où x est défini en fonction du paramètre t à l'aide d'une relation implicite.

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x\,t - x^2\,t^2 + x^3\,t^2 = 2 \\ y(t) = 3\sqrt{2\,t}+t-2\,t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0\,.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la normale à la courbe Γ au point P de Γ défini par $x_P = 2$.

7. Soient $f(x) = x^2 - x$, Γ la courbe définie par $y = f(x)$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Déterminer $x_0 \in \,]0\,;b[$ tel que la tangente à Γ en x_0 soit parallèle à la sécante définie par les deux points de Γ d'abscisses $x = 0$ et $x = b$.

b) Faire une représentation graphique de cette situation qui illustre le théorème des accroissements finis.

8. On considère la fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in \,]0\,, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)\, f'(c)$.

b) Déterminer toutes les valeurs de c.

Réponses de la série 12

1. Equation de la tangente $t:\ 4x + y - 8 = 0$.

2. $y' = \dfrac{4t^3 - 1}{3t^2 + 1}$, $P_1\,(0\,,\,0)$, $P_2\,(-\frac{75}{64}\,,\,\frac{273}{256})$.

3. Equation de la tangente à Γ issue de $P:\ 5x + 2y - 4 = 0$.

4. $a = -1$.

5. a) $P\,(3\,,\,1)$. b) $x + y - 4 = 0$.

6. Equation de la normale à Γ en $P:\ y - 3 = \frac{6}{5}\,(x - 2)$.

7. $x_0 = \dfrac{b}{2}$.

8. $c = \dfrac{1}{2}$ ou $c = \sqrt{2}$.
