(écrire lisiblement s.v.p)

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ...

Question	Pts max.	Pts
1	5	
2	5½	
3	4½	
4	5	
Total	20	

Note :

Indications

- Durée de l'examen : **105 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- La réponse à chaque question doit être rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
  Si la place prévue ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants ; chaque feuille supplémentaire doit porter **nom**, **prénom**, **n° du contrôle**, **branche**, **groupe**, **ID** et **date**. Elle ne peut être utilisée que pour **une seule question**.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas à rendre : elles **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Les feuilles d'examen doivent être rendues **agrafées**.

Question 1 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Dans l'espace, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) &=& 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 9\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) &=& -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) &=& -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \end{cases} .$$

(a) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B.
Déterminer les équations (paramétriques ou cartésiennes) de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

(b) Soit le point $P(1,\, 1,\, 0)$. Déterminer $f^{-1}(f(\overrightarrow{OP}))$.

(c) Donner avec précision et en le justifiant, la nature géométrique de f.

Solution:

(a) • $M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

• $\operatorname{Im} f$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

• $\ker f$: $3x - y - 2z = 0$.

(b) $f^{-1}(f(\overrightarrow{OP}))$: $3x - y - 2z - 2 = 0$

(c) f est une homothétie de centre O et rapport 11, composée avec une projection sur la droite $\operatorname{Im} f$ et de direction parallèle au noyau.

Question 2 (à $5\frac{1}{2}$ points) Points obtenus: (laisser vide) .....

Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$, on considère l'endomorphisme f défini par sa matrice M_f par rapport à la base B :

$$M_f = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(\vec{v})$.

Déterminer la matrice de f dans une base judicieusement choisie. En déduire directement, avec précision, son interprétation géométrique.

(b) On considère les endomorphismes suivants

- p est une projection orthogonale telle que $\operatorname{Im} p = [\vec{v}]_{sev}$,
- s est une symétrie oblique telle que le point $P(4;\, 0)$ a pour image le point $P'(2;\, 6)$.

Relativement à la base B, déterminer la matrice de $h = 10\, p \circ s^{-5}$.

Solution:

(a) • Ensemble des points fixes : $x + y = 0$

• $f(\vec{v}) = 3\,\vec{v}$

• $B'(\vec{u},\, \vec{v})$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

f est une affinité d'axe la droite $x + y = 0$, de direction $\vec{v}$ et rapport 3.

(b) $$M_h = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Question 3 (à 4½ points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

Dans le plan, muni de la base canonique orthonormée $B = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$, on considère les endomorphismes f et s suivants

- $f(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{u})\,\vec{u} + 4\,\vec{x}$ où $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ est un vecteur fixé,
- s est une symétrie orthogonale d'axe la droite $y = -x$.

(a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f + s$ par rapport à la base B. En déduire directement la nature géométrique de $f + s$.

(b) Soit le vecteur $\vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et la base $B' = (\vec{u},\, \vec{v})$.
On considère la droite d dont l'équation cartésienne est $3x+y+2 = 0$ relativement à la base B.

Déterminer les équations paramétriques de $f(d)$ relativement à la base B'.

Solution:

(a) $$M_{f+s} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$f + s$ est une homothétie de centre O et rapport 5.

(b) Equations paramétriques de $f(d)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\, k \in \mathbb{R}$$

Question 4 (à 5 points) Points obtenus: (laisser vide) . . . . .

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$ et l'ensemble des matrices $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ de la base canonique usuelle $(E_1,\, E_2,\, E_3,\, E_4)$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application linéaire g suivante

$$\begin{array}{rcccl} g: & \mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \longmapsto & g(X) & = X\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Calculer la matrice de g par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$.
L'application est-elle injective ? Justifier votre réponse.

On munit $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ de la base $\mathcal{B}' = (A,\, B,\, C,\, D)$ vérifiant les relations suivantes

$$\begin{cases} E_4 - D & = & 0 \\ A - E_1 & = & 0 \\ A + C & = & E_3 \\ E_2 + A & = & B \end{cases}$$

(b) Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$.
Calculer la matrice de g par rapport à la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ et canonique de $\mathbb{R}^2$.

Solution:

(a) • $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

• $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$

• $\ker g = \{X \in \mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} -2y & y \\ -2t & t \end{pmatrix},\, y,\, t \in \mathbb{R}\} \neq \{\vec{0}\}$

g n'est pas injective.

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M'_g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$