Corrigé 9

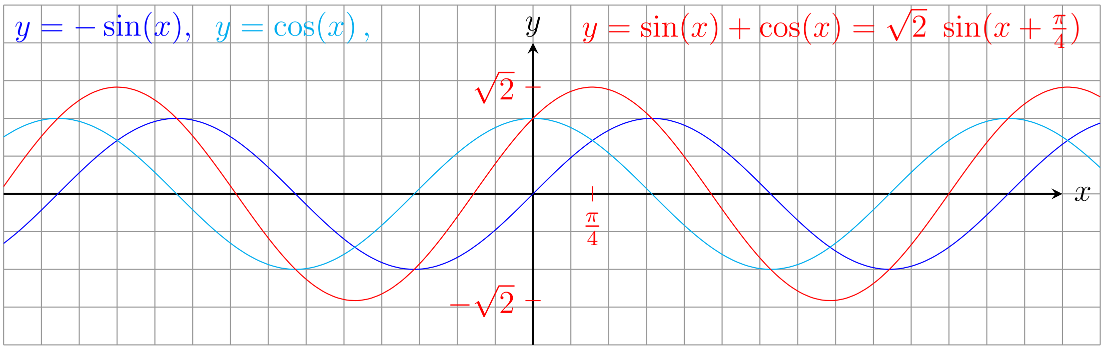
1. Soit la fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $B \subset \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x + \cos x$.

Déterminer A et B de sorte que f soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de f.

En vue de déterminer l'ensemble $\operatorname{Im} f$, on cherche à exprimer f à l'aide d'une seule fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2}\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\sin x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$



On déduit donc que $\operatorname{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\quad B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

- **Une solution**

  On définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du sinus : l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

  La fonction $c(x) = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4})$ est injective si $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

  La fonction
  $$\begin{aligned} f:\ A = [-\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}] &\longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x &\longmapsto \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$
  est donc bijective.

  Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

  Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

  $$y = \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

  Or $\quad \frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1] \quad$ et $\quad x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\quad$ donc

  $$\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{\pi}{4} = \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{\pi}{4} + \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}).$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \left[-\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \\ & x & \longmapsto & -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

- **Une autre solution**

On définit l'ensemble de départ A en se servant d'une détermination non principale du sinus : par exemple l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

La fonction $c(x) = \sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4})$ est injective si $x+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$:

$$\begin{array}{rccl} \text{La fonction}\quad f: & A = \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right] & \longrightarrow & B = \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \quad \text{est donc bijective.} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4}) \end{array}$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2}\,\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x+\tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\quad \frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1\,,\,1] \quad$ et $\quad x+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right], \quad$ donc

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x+\tfrac{\pi}{4} = \pi - \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3\pi}{4} - \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right] \\ & x & \longmapsto & \frac{3\pi}{4} - \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

- **Une troisième solution**

On exprime f à l'aide de la fonction cosinus, puis on définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du cosinus : l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x \\ &= \sqrt{2}\,\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\cos x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\sin x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\,\cos x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\,\sin x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\cos(x-\tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

La fonction $c(x) = \sqrt{2}\,\cos(x-\frac{\pi}{4})$ est injective si $x-\frac{\pi}{4} \in [\,0\,,\,\pi\,]$:

$$\begin{array}{rccl} \text{La fonction}\quad f: & A = \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right] & \longrightarrow & B = \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \quad \text{est donc bijective.} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\cos(x-\frac{\pi}{4}) \end{array}$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2}\,\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1\,,\,1]$ et $x - \frac{\pi}{4} \in [\,0\,,\,\pi\,]$, donc

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{\pi}{4} = \arccos(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{4} + \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\,] & \longrightarrow & [\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\,] \\ & x & \longmapsto & \frac{\pi}{4} + \arccos(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

Remarque : il s'agit de la même fonction f^{-1} que dans la deuxième solution. seule son expression est différente.

2. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$2\,\arccos\left(\tfrac{x}{4}\right) + \arcsin\left(\tfrac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{3\pi}{2}\,.$$

- $D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x \neq 0\,,\ \frac{x}{4} \in [-1\,,\,1] \text{ et } \frac{x^2-2}{x^2} \in [-1\,,\,1]\right\}$.
  - $\frac{x}{4} \in [-1\,,\,1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-4\,,\,4\,]$.
  - $-1 \leq \frac{x^2-2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \leq x^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\,(x+1) \geq 0$
    $\Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-1] \,\cup\, [1\,,\,+\infty\,[$.
  - $\frac{x^2-2}{x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 \leq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^*$.

  L'intersection des trois domaines donne $D_{\text{def}} = [-4\,,\,-1\,] \,\cup\, [\,1\,,\,+4\,]$.

- Posons $\alpha = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$ et $\beta = \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$.

  $\alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ d'où $2\,\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,]$.

  L'équation $2\,\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ a donc bien un sens car $\frac{3\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,]$.

- Résolution de l'équation $2\,\arccos\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

  On cherche à "se débarrasser" des fonctions arc en appliquant la fonction sinus ou la fonction cosinus aux deux membres de cette équation.

  Mais quelle fonction choisir ? L'une donne un résultat simple et l'autre débouche sur une équation compliquée et désagréable à résoudre.

  Il faut faire le bon choix !

  - En prenant le sinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,\alpha = \tfrac{3\pi}{2} - \beta \quad &\Rightarrow \quad \sin(2\,\alpha) = \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\cos\beta \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{x}{4}\right)^2} = -\sqrt{1 - \left(\tfrac{x^2-2}{x^2}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

  - En prenant le cosinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,\alpha = \tfrac{3\pi}{2} - \beta \quad &\Rightarrow \quad \cos(2\,\alpha) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos^2\alpha - 1 = -\sin\beta \\ &\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2}\,. \end{aligned}$$

  La deuxième méthode est évidemment la plus agréable.

  Mais attention ! En appliquant une fonction trigonométrique aux deux membres de cette équation, on perd l'équivalence, car ces fonctions ne sont pas injectives. On introduit peut-être des solutions parasites.

- Résolution de l'équation associée :

$$2\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2 \in D_{\text{def}}.$$

  Les deux valeurs obtenues $x = -2$ et $x = 2$ sont des "candidats-solutions" (vraies solutions ou solutions parasites ?)

- On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

  - $x = -2$: $\quad 2\,\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$

  - $x = +2$: $\quad 2\,\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \neq \dfrac{3\pi}{2}$

  Donc seul $x = -2$ est solution , $\quad S = \{-2\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

a) $\dfrac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(3x)$

b) $2\,\arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}\,x) = \dfrac{\pi}{2}$

---

a) $\dfrac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(3x)\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

On pose $\alpha = \arctan(2x)$ et $\beta = \arctan(3x)\,.$

L'équation devient : $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4} - \beta \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{4} - \beta)\,.$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est non injective, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

$\tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{4} - \beta) \;\Leftrightarrow\; \tan\alpha = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\,\tan\beta} \;\Leftrightarrow\; 2x = \dfrac{1 - 3x}{1 + 3x}\,, \quad x \neq -\frac{1}{3}\,.$

La valeur interdite $x = -\frac{1}{3}$ coïncide avec la valeur interdite $\beta = -\frac{\pi}{4}\,.$

Cette valeur est peut-être solution, il faut la tester dans l'équation initiale :

$\arctan(-\frac{2}{3}) + \arctan(-1) < 0$ donc $\arctan(-\frac{2}{3}) + \arctan(-1) \neq \frac{\pi}{4}\,.$

Donc $x = -\frac{1}{3}$ n'est pas solution. On cherche des solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$:

$$2x = \frac{1 - 3x}{1 + 3x} \;\Leftrightarrow\; 6x^2 + 5x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 1)\,(6x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; x = -1 \;\text{ ou }\; x = \tfrac{1}{6}\,,$$

On teste ces deux "candidats-solutions" dans l'équation initiale :

- $x = -1$: $\underbrace{\arctan(-2)}_{<0} + \underbrace{\arctan(-3)}_{<0} \neq \frac{\pi}{4}\,.$
- $x = \frac{1}{6}$: soient $\alpha = \arctan\frac{1}{3} \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ et $\beta = \arctan\frac{1}{2} \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

  $\alpha + \beta \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}\,.$

Seul $x = \frac{1}{6}$ est donc solution, $\quad S = \left\{\frac{1}{6}\right\}.$

b) $2\,\arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \dfrac{\pi}{2}\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

On pose $\alpha = \arctan(x + \frac{1}{2})$ et $\beta = \arctan(2x - 1)\,.$

L'équation devient : $2\,\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\,\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\Rightarrow\; \tan(2\,\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2\,\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{1}{\tan\beta}\,, \quad 2\,\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ et $\beta \neq 0\,.$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est non injective, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

$$\frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1}{\tan\beta}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2\,(x+\frac{1}{2})}{1-(x+\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2x-1}\,,\qquad x\neq-\tfrac{3}{2}\ \text{ et } x\neq\tfrac{1}{2}\,.$$

Les valeurs interdites $x=-\frac{3}{2}$ et $x=\frac{1}{2}$ coïncident avec les valeurs interdites $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$ et $\beta=0$.

Ces valeurs sont peut-être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale :

- $x=-\frac{3}{2}$: $2\,\arctan(-1)+\arctan(-4)<0$,
- $x=\frac{1}{2}$: $2\,\arctan(1)+\arctan(0)=\frac{\pi}{2}$.

Donc $x=\frac{1}{2}$ est solution.

On cherche d'éventuelles autres solutions dans $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\,,\,\frac{1}{2}\}$:

$$\frac{2\,(x+\frac{1}{2})}{1-(x+\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2x-1}\quad\Leftrightarrow\quad(2x+1)\,(2x-1)=1-\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 5x^2+x-\tfrac{7}{4}=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\,\left(5x+\tfrac{7}{2}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{7}{10}\,.$$

On teste cette valeur dans l'équation initiale :

$x=-\frac{7}{10}$: $2\,\arctan(-\frac{1}{5})+\arctan(-\frac{12}{5})<0$, donc $x=-\frac{7}{10}$ n'est pas solution.

L'unique solution est $x=\frac{1}{2}$, $\qquad S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\arcsin x+\arcsin(2x)-\arccos(\sqrt{3}\,x)=\dfrac{\pi}{2}\,.$

$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x\in[-1\,,\,1]\,,\ \ 2x\in[-1\,,\,1]\ \text{ et }\ \sqrt{3}x\in[-1\,,\,1]\right\}=[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}]$.

Soient $\alpha=\arcsin x$, $\quad\beta=\arcsin(2x)\quad$ et $\quad\gamma=\arccos(\sqrt{3}\,x)$.

L'équation s'écrit : $\alpha+\beta-\gamma=\frac{\pi}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\gamma$

$$\Rightarrow\quad\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)\quad\Leftrightarrow\quad\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta=\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow\quad x\,\sqrt{1-(2x)^2}+2x\,\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}\,x\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\,,\quad\text{ou}\\ \sqrt{1-4x^2}+2\,\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

- $x=0$ n'est pas solution : $\arcsin(0)+\arcsin(0)-\arccos(0)=-\frac{\pi}{2}\neq\frac{\pi}{2}$,
- $\sqrt{1-4x^2}+2\,\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}$

  $$\Leftrightarrow\quad 1-4x^2+4\,(1-x^2)+4\,\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2}=3$$

  $$\Leftrightarrow\quad 4\,\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2}=8x^2-2\quad\Leftrightarrow\quad 2\,\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2}=4x^2-1\,.$$

  Donc $4x^2-1\geq 0$, or $x\in D_{\text{def}}=[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}]$,

  les seules solutions de cette équation sont donc $x=\pm\frac{1}{2}$.

On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

- $x = -\frac{1}{2}$: $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin(-1) - \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$,
- $x = \frac{1}{2}$: $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1 - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Il n'y a donc qu'une seule solution $x = \frac{1}{2}$, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. Calculer $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celle de la fonction $\arctan x$.

Localisation de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\alpha = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

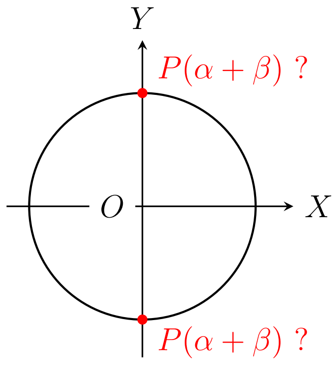
Calcul de $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \arctan x \quad \text{et} \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le dénominateur est nul : $1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 - x \cdot \frac{1}{x} = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Donc $\tan(\alpha + \beta)$ n'existe pas.

Or $\alpha + \beta \in \left]-\pi, \pi\right[$ et $\tan(\alpha+\beta)$ n'existe pas, implique que $\alpha + \beta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.



On essaie de déterminer $\alpha + \beta$:

- avec un argument de signe :
  - si $x < 0$: $\alpha + \beta = \underbrace{\arctan(x)}_{<0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{<0} = -\dfrac{\pi}{2}$,
  - si $x > 0$: $\alpha + \beta = \underbrace{\arctan(x)}_{>0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0} = +\dfrac{\pi}{2}$.

- Ou en calculant $\sin(\alpha+\beta)$:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \\
&= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot|x|}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x\cdot|x|}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x}\cdot|x|}{x^2+1} \\
&= \frac{x\cdot x\cdot\operatorname{sgn}(x)}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x\cdot\operatorname{sgn}(x)}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2+1}{x^2+1}\cdot\operatorname{sgn}(x) \\
&= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ +1 & \text{si} \quad x>0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

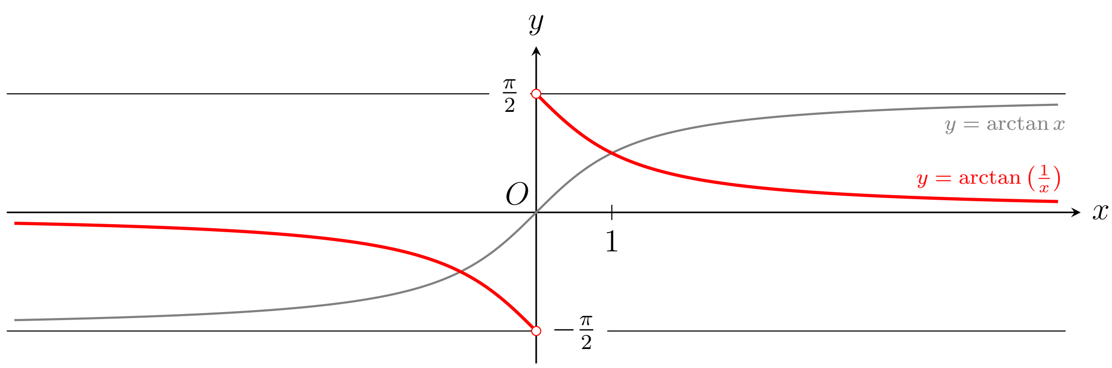
Or $\alpha+\beta\in\,]-\pi\,,\,\pi\,[$, donc $\alpha+\beta=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\,, \end{cases}$

$$\arctan x+\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x<0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x>0\,. \end{cases}$$

On en déduit l'expression de $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\arctan x$:

$$f(x)=\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}-\arctan x & \text{si} \quad x<0 \\ +\frac{\pi}{2}-\arctan x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

puis le graphe de $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celui de $\arctan(x)$:



5. Dans un triangle ABC les angles α, β, γ sont définis par

$$\alpha = \arccos(4x) \qquad \beta = \arccos(-3x) \qquad \gamma = \arccos(24x^2)\,.$$

On connaît aussi le rayon R de son cercle circonscrit $R = 25$.

a) Déterminer la valeur de x ainsi que les valeurs de $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$.

b) Calculer le rayon r du cercle inscrit du triangle ABC.

---

a) La somme des mesures des trois angles du triangle ABC vaut π.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta=\pi-\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta=-\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad (4x)\,(-3x)-\sqrt{1-(4x)^2}\,\sqrt{1-(-3x)^2}=-24x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-(4x)^2}\,\sqrt{1-(-3x)^2}=12x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-16x^2)\,(1-9x^2)=144x^4 \quad \Leftrightarrow \quad 25x^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{1}{5}\,.$$

On teste ces deux valeurs : l'unique solution est $x=\frac{1}{5}$.

Et on en déduit le sinus des trois angles :

- $\sin\alpha=\sin(\arccos\frac{4}{5})=+\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$,
- $\sin\beta=\sin[\,\arccos(-\frac{3}{5})\,]=+\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$,
- $\sin\gamma=\sin(\arccos\frac{24}{25})=+\sqrt{1-(\frac{24}{25})^2}=\frac{7}{25}$.

b) Connaissant le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC, on en déduit la mesure des trois côtés a, b et c.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,,$$

$$a=2R\,\sin\alpha=30\,, \qquad b=2R\,\sin\beta=40 \qquad \text{et} \qquad c=2R\,\sin\gamma=14\,.$$

Connaissant la mesure des trois côtés a, b et c, on en déduit le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC.

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}} \qquad \text{où} \qquad p=\frac{1}{2}\,(a+b+c)=42\,,$$

$$r=\sqrt{\frac{12\cdot 2\cdot 28}{42}}=4\,.$$
