EPFL 2021/2022 **Analyse III** Série de révision	Dr. Klaus Widmayer and Dr. Riccardo Tione

QCM CORRECTION

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x, y, z) := (3y + \cos(x + z^2), 3x + y + z - 1, y + 2z\cos(x + z^2))$$

et soit $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$, où $\gamma(t) = (t, 2t^3, t^9)$, $t \in [0, 1]$. Alors :

- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = -8 + \sin(2)$.
- ■ $\int_\Gamma F \cdot ds = 8 + \sin(2)$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = 8 - \sin(2)$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = -8 - \sin(2)$.

Exercice 2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(x, y, z) := g(|(x, y, z)|)(x, y, z)$, où $g \in C^1(\mathbb{R})$ et $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors :

- ☐ $\mathrm{div}(F) = 0$ sur $\mathbb{R}^3$ pour chaque $g \in C^1(\mathbb{R})$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = 1$ pour quelque $g \in C^1(\mathbb{R})$, oú $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$ et $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0), t \in [0, 1]$.
- ■ F dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3$ pour chaque $g \in C^1(\mathbb{R})$, donnée par $G(x, y, z) := \int_{-3}^{|(x,y,z)|} tg(t)dt$.
- ☐ Aucune des réponses précédentes.

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) := (y + \cos(z), xe^z, xy)$$

et soit $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3, z \in (-1, 2)\}$, avec normale extérieure ν. Alors :

- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 1$.
- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = -1$.
- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 3$.
- ■ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 0$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dfinie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ x^2 - x + \frac{9}{8} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 2x - x^2 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < 1, \end{cases}$$

et tendue par 1-priodicit. Soient Ff sa srie de Fourier, et $F_N f$ sa somme partielle de Fourier d'ordre N. Lequel des points suivants n'est pas vrai :

☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_N f(x)$ tend vers $f(x)$ quand $N \to \infty$.

☐ $F(1/2) = \frac{7}{8}$.

■ Ff consiste uniquement en fonctions de sinus.

☐ Ff consiste uniquement en fonctions de cosinus.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dfinie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3^{|n|}} \cos(2\pi n x)$ et tendue par 1-priodicit. Quelle est la valeur de $\int_0^1 f^2(x)dx$?

■ 5/4.

☐ $5\pi/2$.

☐ 17/8.

☐ 1/4.

Exercice 6. Sachant que pour $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$ on a $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}$, la valeur de l'intgrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+9y^2} dy$ est

☐ 3π.

■ $\frac{\pi}{3}$.

☐ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

☐ L'intgrale diverge.

Exercice 7. Pour $b > a > 0$, soient $g(x) := e^{-b|x|}$ et $h(x) := e^{-a|x|}$. La valeur de $\mathcal{F}(g' * h)(0)$ est

☐ 1.

☐ b.

☐ $-\sqrt{2\pi} \cdot b$.

■ 0.

Exercice 8. Pour $\lambda > 0$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donns, supposons que $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rsoud l'quation $-v'' + \lambda v = w * v$.

- [ ] Si $\hat{w}(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$, alors $\hat{v}(0) = 0$.
- [ ] Si $\hat{w}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, alors $\hat{v}(0) = 0$.
- [x] Si $\hat{w}(\sqrt{2\pi}) = \sqrt{2\pi}$, alors $\hat{v}(\sqrt{2\pi}) = 0$.
- [ ] Si $\hat{w}(2\pi) = \sqrt{2\pi}$, alors $\hat{v}(2\pi) = 0$.

QUESTIONS OUVERTES CORRECTION

Exercice 9. On vérifie tout dabord que

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 4xy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \left(4xy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.$$

Comme Ω n'est pas convexe ni simplement connexe, on ne peut a priori rien conclure. Cherchons $f \in C^1(\Omega)$ tel que $\nabla f = F$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \iff & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + \frac{x}{x^2+y^2} \\ \iff & f(x,y) = x^2y^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \alpha(y).\end{aligned}$$

Donc $2x^2y + \frac{y}{x^2+y^2} + \alpha'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) = 2x^2y + \frac{y}{x^2+y^2} + 3y^2$.
D'où

$$\begin{aligned}\alpha'(y) &= 3y^2, \\ \alpha(y) &= y^3 + c,\end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut conclure que

$$f(x,y) = x^2y^2 + y^3 + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

est bien un champ $C^1(\Omega)$, et que $\nabla f = F$. Ainsi, le champ vectoriel F dérive du potentiel f.

Exercice 10. L'égalité à vérifier est

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu) ds.$$

On remarque que Ω est un morceaux de cône de révolution qui pointe vers le bas, dont la pointe est en $(0,0,0)$ et qui est coupé par le disque de rayon 1 centré en $(0,0,2)$.

Calcul de $\iiint_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)dxdydz$ avec $\mathrm{div}F = 2x+2y+3z^2$.

Reconnaissant la symtrie cylindrique, nous utilisons des coordonnes cylindriques $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z)$: $4(x^2+y^2) < z^2 \Leftrightarrow r < \frac{|z|}{2}$ et donc

$$\Omega = \{(\theta, r, z) : \theta\in[0,2\pi) \text{ et } r < z/2 \text{ et } 0 < z < 2\}.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \mathrm{div}\, F(x,y,z)dxdydz &= \int_0^2 dz \int_0^{z/2} dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta\,(2r\cos\theta + 2r\sin\theta + 3z^2)\\
&= \int_0^2 dz \int_0^{z/2} dr\, r \left(2r \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta}_{=0} + 3z^2 \int_0^{2\pi} d\theta\right)\\
&= 6\pi \int_0^2 dz\, z^2 \int_0^{z/2} r\,dr = 6\pi \int_0^2 dz\, z^2 \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{z/2}\right)\\
&= \frac{3\pi}{4}\int_0^2 z^4\,dz = \frac{3\pi}{4}\,\frac{z^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{32}{5} = \frac{24\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Calcul de $\iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds$, où $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2$ avec

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{x^2+y^2},\ 0<z<2\};$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < 1,\ z = 2\}.$$

Paramétrisation:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 :&\quad \sigma^1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2r) \qquad r\in(0,1),\quad \theta\in(0,2\pi);\\
\Sigma_2 :&\quad \sigma^2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2) \qquad r\in(0,1),\quad \theta\in(0,2\pi).
\end{aligned}$$

Normales:

$$\sigma^1_r\wedge\sigma^1_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \cos\theta & \sin\theta & 2\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = (-2r\cos\theta, -2r\sin\theta, r),\ \text{intérieure;}$$

$$\sigma^2_r\wedge\sigma^2_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = (0,0,r),\ \text{extérieure.}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1}(F\cdot\nu)\,ds &= -\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta\,(r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta, 8r^3)\cdot(-2r\cos\theta,-2r\sin\theta,r)\\
&= \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta\,(2r^3\cos^3\theta+2r^3\sin^3\theta-8r^4)\\
&= 2\int_0^1 dr\,r^3\underbrace{\int_0^{2\pi}(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,d\theta}_{=0}-8\int_0^1 dr\,r^4\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{=2\pi}\\
&= -16\pi\frac{r^5}{5}\Big|_0^1=-\frac{16\pi}{5},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2}(F\cdot\nu)\,ds &= \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta(r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta, 8)\cdot(0,0,r)\\
&= 8\int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta = 16\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^1=8\pi.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds=-\frac{16\pi}{5}+8\pi=\frac{24\pi}{5}.$$

Le théorème de la divergence est ainsi vérifié.

Remarque 1 (Discussion de le domaine)**.** *Le domaine est*

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4(x^2+y^2)<z^2 \ \textit{et}\ 0<z<2\}.$$

en utilisant des coordonnes cylindriques

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\\ z=z\end{cases}$$

et observant que

$$\begin{aligned}
4(x^2+y^2)<z^2 &\Leftrightarrow r<\frac{|z|}{2}\\
0<z<2 &\Leftrightarrow 0<z<2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons galement reprsenter le domaine de la manire suivante

$$\Omega=\{(\theta,r,z) : \theta\in[0,2\pi)\ \textit{et}\ r<z/2\ \textit{et}\ 0<z<2\}.$$

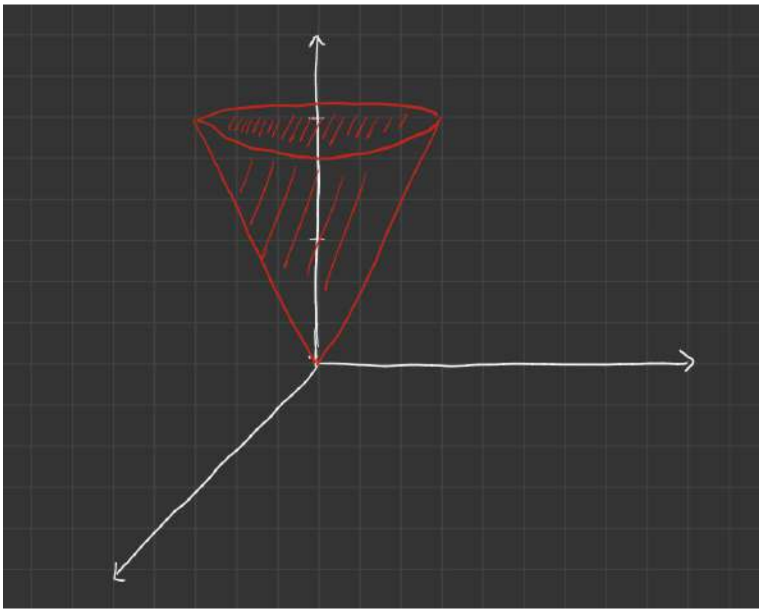

Figure 1 – Le domaine Ω

Exercice 11. La surface est un morceau de cône :

L'égalité à vérifier est:

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl.$$

Pour paramétrer Σ, on utilise les coordonnées cylindriques et on écrit pour $A =]0, 1/2[\times]0, \pi/2[$,

$$\Sigma = \left\{\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r) \text{ avec } (r,\theta) \in \bar{A}\right\}.$$

On trouve

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta, r).$$

De plus,

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (-2y, -2x, 0), \quad \text{et donc} \quad \operatorname{rot} F(\sigma(r,\theta)) = (-2r\sin\theta, -2r\cos\theta, 0).$$

L'intégrale de surface donne

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{1/2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta\, (-2r\sin\theta, -2r\cos\theta, 0) \cdot (r\cos\theta, r\sin\theta, r) \\ &= -\int_0^{1/2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta\, 4r^2 \sin\theta\cos\theta = -2\int_0^{1/2} r^2\, dr \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

On a $\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, où:

- g et f sont 2-périodiques
- Γ_1 est le segment joignant $(0,0,1)$ à $(1/2, 0, 1/2)$:

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) = (t, 0, 1-t),\ t \in [0, 1/2]\}.$$

- Γ_2 est le quart de cercle partant de $(1/2, 0, 1/2)$ et allant vers $(0, 1/2, 1/2)$:

$$\Gamma_2 = \left\{\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t), \frac{1}{2}\right), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

- Γ_3 est le segment joignant $(0, 1/2, 1/2)$ à $(0, 0, 1)$:

$$\Gamma_3 = \left\{\gamma_2(t) = \left(0, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t\right), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

- Γ_4 se réduit au point $(0, 0, 1)$.

On trouve donc que $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. De plus,

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{1/2} (0,0,t^2) \cdot (1,0,-1)\, dt = -\int_0^{1/2} t^2\, dt = -\frac{1}{24},$$
$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = 0,$$
$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \int_0^{1/2} (0,0,-(1/2-t)^2) \cdot (0,-1,1) = -\int_0^{\frac{1}{2}} (1/2-t)^2 dt = -\frac{1}{24}.$$

Par conséquent,

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_i} F \cdot dl = -\frac{1}{24} + 0 - \frac{1}{24} = -\frac{1}{12} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds.$$

Remarque 2 (Discussion de la surface)**.** *La surface est*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \right\}.$$

en utilisant des coordonnes cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

et observant que

$$\begin{aligned} z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \quad &\Leftrightarrow \quad z = 1 - r \\ x \geq 0 \Leftrightarrow r\cos(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta &\in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ y \geq 0 \Leftrightarrow r\sin(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta &\in [0,\pi] \\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq z \leq 1. \end{aligned}$$

De la premire et de la quatrime condition, nous dduisons $0 \leq r \leq 1/2$.

Nous pouvons galement reprsenter le domaine de la manire suivante

$$\Sigma = \{\sigma(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1-r) \ \textit{avec}\ r \in [0,1/2] \ \textit{et}\ \theta \in [0,\pi/2]\}.$$

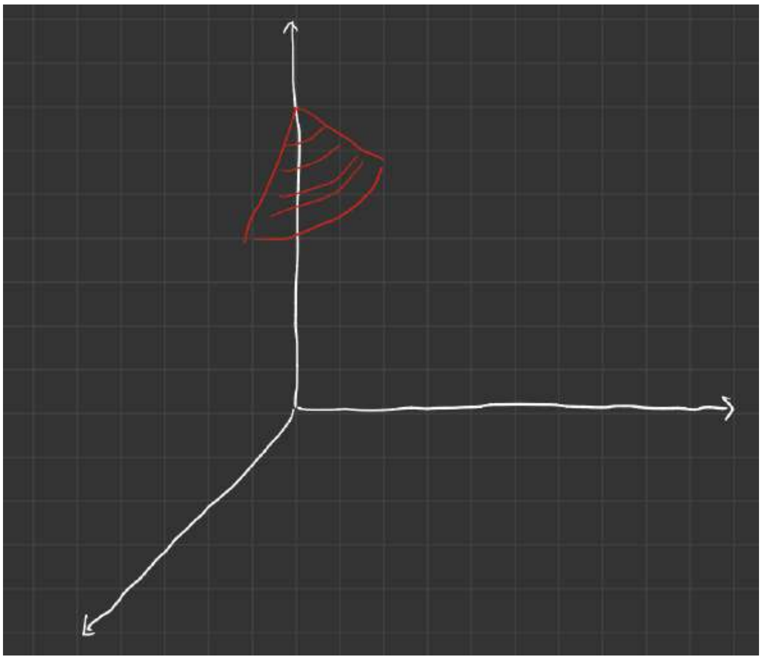

Figure 2 – La surface Σ

Exercice 12. 1. La fonction f est impaire, et donc, les coefficients a_n sont tous nuls. Calculons les b_n. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\
=& \int_{-1}^{1} f(x) \sin(\pi nx) dx \\
=& \int_{-1}^{1} 2x \sin(\pi nx) dx \\
=& \left[2x \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} 2 \frac{-\cos(\pi nx)}{n\pi} dx \\
=& 2\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} - (-2)\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_{-1}^{1} \cos(\pi nx) dx \\
=& \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{2}{(n\pi)^2} \left[\sin(\pi nx)\right]_{x=-1}^{x=1} \\
=& \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{2}{(n\pi)^2} \left(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\right) \\
=& \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

D'oú

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \sin(\pi nx)$$

2. On a que g est continue, C^1 par morceaux et

$$g' = f$$

est C^1 par morceaux.

Ainsi, par la proposition qui parle de dériver les séries de Fourier terme à terme, on a que

$$Fg' = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left(-a_n \sin(\pi n x) + b_n \cos(\pi n x)\right),$$

où, les a_n et les b_n sont les coefficients de Fourier de g. Or, vu que $g' = f$ où g est dérivable on a

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left(-a_n \sin(\pi n x) + b_n \cos(\pi n x)\right).$$

Par unicité des coefficients de Fourier, on déduit que

$$\begin{cases} (-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi} = & -a_n n\pi \qquad n \geq 1 \\ 0 = & b_n n\pi \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

et donc $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}$$

Il nous reste à calculer a_0 :

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

et donc,

$$Fg(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(\pi n x)$$

3. On évalue la série en $x = 0$, et on a

$$\begin{aligned} Fg(0) &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(0) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a par le théorème de Dirichlet, on a

$$Fg(0) = \frac{g(0+0) + g(0-0)}{2} = 0.$$

On conclut

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

qui est la série à calculer.

4. Oui, les propriétés que f et g vérifient :

   - g continue, g est C^1 par morceaux ;
   - f est C^1 par morceaux ;
   - g'= f partout où g est dérivable

   sont indépendantes da quelle série est calculeée en premier.

Exercice 13. Vu que f est C^1 et 2π-périodique, le Théorème de Dirichlet nous assure qu'on peut écrire

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),$$

oú

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \qquad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

On cherche une solution sous forme de série de Fourier

$$u(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u'(t) =& \sum_{n=1}^{+\infty} \{n\beta_n \cos(nt) - n\alpha_n \sin(nt)\} \\ u(t-\pi) =& \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{\alpha_n \cos(n(t-\pi)) + \beta_n \sin(n(t-\pi))\} \\ & \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{(-1)^n \alpha_n \cos(nt) + (-1)^n \beta_n \sin(nt)\} \end{aligned}$$

d'où

$$u'(t)+2u(t-\pi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{(n\beta_n + 2(-1)^n \alpha_n) \cos(nt) + (-n\alpha_n + 2(-1)^n \beta_n) \sin(nt)\}.$$

En égalisant terme à terme les séries de Fourier de $u'(t) + 2u(t-\pi)$ et de f, on trouve

$$\begin{aligned} \alpha_0 =& a_0/2 \\ n\beta_n + 2(-1)^n \alpha_n =& a_n \\ -n\alpha_n + 2(-1)^n \beta_n =& b_n \end{aligned}$$

inversant le système pour écrire les coefficients de Fourier de u en fonction de ceux de f, on trouve

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_0/2\\ \alpha_n &= \frac{2(-1)^n a_n - n b_n}{n^2+4}\\ \beta_n &= \frac{2(-1)^n b_n + n a_n}{n^2+4}.\end{aligned}$$

On a donc trouvé

$$u(t) = \frac{a_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n a_n - n b_n}{n^2+4} \cos(nt) + \frac{2(-1)^n b_n + n a_n}{n^2+4} \sin(nt) \right\}$$

Considérons maintenant le cas particulier où $f(t) = 1 + 4\sin(6t)$. On a alors $a_0 = 2, b_6 = 4$ et tous les autres coefficients sont nuls. En appliquant la formule ci-dessus, on obtient

$$u(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\cos(6t) + \frac{1}{5}\sin(6t).$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution

$$\begin{aligned}u'(t) + 2u(t-\pi) &= \frac{18}{5}\sin(6t) + \frac{6}{5}\cos(6t) + 1 - \frac{6}{5}\cos(6t) + \frac{2}{5}\sin(6t)\\ &= 1 + 4\sin(6t) = f(t).\end{aligned}$$

Exercice 14. On a

$$f(x) = e^{-3(x-1)^2+9}.$$

Ainsi, si $g(x) = e^{-3x^2}$, on a$f(x) = e^9 g(x-1)$. Ainsi, par les propriétés de la transformée de Fourier, on a

$$\hat{f}(\alpha) = e^9 e^{-i\alpha}\hat{g}(\alpha).$$

Par le tableau des transformées de Fourier, on a

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{\alpha^2}{12}}.$$

D'oú, on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{9-i\alpha-\frac{\alpha^2}{12}}.$$

Exercice 15. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$ de telle sorte à ce que notre équation soit équivalente à

$$2u + u \star f = f$$

Par la table des transformées de Fourier, on a

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

Ainsi, appliquant la transformée de Fourier à notre équation, on obtient

$$2\hat{u} + \mathcal{F}(u \star f) = \hat{f}.$$

Par une proposition vue au cours, on a

$$\mathcal{F}(g \star h) = \sqrt{2\pi}\hat{g}\hat{h}$$

et notre équation devient donc

$$\begin{aligned}
2\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi}\hat{u}(\alpha)\hat{f}(\alpha) &= \hat{f}(\alpha) \\
2\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi}\hat{u}(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} \\
2\hat{u}(\alpha) + 2\hat{u}(\alpha)\frac{1}{1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} \\
\hat{u}(\alpha)\frac{2+2\alpha^2+2}{1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} \qquad \Big| \cdot \tfrac{1+\alpha^2}{4+2\alpha^4} \\
\hat{u}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4+2\alpha^2} \\
\hat{u}(\alpha) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Appliquant la transformée de Fourier inverse à cette dernière équation et en utilisant la table des transformées de Fourier ligne 7 avec $w = \sqrt{2}$, on obtient

$$u(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-\sqrt{2}|x|}}{\sqrt{2}}$$

Exercice 16. (i) Paramétrisation $\Gamma : \begin{cases} \gamma(t) = (2+\sinh t, t) & t \in [0,1] \\ \gamma'(t) = (\cosh t, 1) \end{cases}$

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}l = \int_0^1 (-t, 2+\sinh t) \cdot (\cosh t, 1)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t\cosh t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \mathrm{d}t + \int_0^1 \sinh t\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties avec $\begin{array}{rcr} f(t) = t & \Longrightarrow & f'(t) = 1 \\ g'(t) = \cosh t & \Longrightarrow & g(t) = \sinh t \end{array}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}l &= \left[-t\sinh t \Big|_0^1 + \int_0^1 \sinh t\,\mathrm{d}t \right] + 2 + \cosh t \Big|_0^1 = -\sinh(1) + 2 + 2\cosh t \Big|_0^1 \\ &= -\sinh(1) + 2 + 2\left[\cosh(1) - 1\right] = 2\cosh(1) - \sinh(1) \\ &= e + e^{-1} - \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{e}{2} + \frac{3e^{-1}}{2} = \frac{e^2+3}{2e} \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2}y\frac{2x}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{3}{2}x\frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}} = 0$$

Comme Ω n'est pas convexe ni simplement connexe, on ne peut rien conclure. On cherche $f \in C^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{grad} f = F$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad &\Longrightarrow \quad f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \alpha(y) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \alpha'(y) \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y)$ il rsulte que $\alpha'(y) = \dfrac{y}{1+y^2}$ et on obtient que

$$\alpha(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c$$

o $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Le champ F dérive donc d'un potentiel $f \in C^1(\Omega)$ défini par

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c$$

Exercice 17. 1. i) Puisque la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. On calcule les coefficients

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(5x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big[\sin((5-n)x)+\sin((5+n)x)\big]\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

• Pour $n = 5$ on a :

$$a_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(10x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10\pi}\cos(10x)\Big|_0^{\pi} = 0$$

• Pour $n \neq 5$ on a :

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos((5-n)x)}{5-n}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos((5+n)x)}{5+n}\Big|_0^{\pi}\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(n\pi)+1}{5-n} + \frac{\cos(n\pi)+1}{5+n}\Big] = \frac{(-1)^n+1}{\pi}\Big[\frac{1}{5-n}+\frac{1}{5+n}\Big] \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{20}{\pi(25-n^2)} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La srie de Fourier de f est donc

$$Ff(x) = \frac{2}{5\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{25-4k^2}$$

ii) La fonction f est continue sur $[-\pi,\pi]$. En fait $f(0+0) = f(0-0) = 0$, $f(-\pi+0) = f(-\pi-0) = 0$ et $f(\pi+0) = f(\pi-0) = 0$. Donc, on peut dire que $Ff(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$.

iii) D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} -5\cos(5x) & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 5\cos(5x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(-\pi-0) = -5 \quad & f'(-\pi+0) = 5 \\ f'(0-0) = -5 \quad & f'(0+0) = 5 \\ f'(\pi-0) = -5 \quad & f'(\pi+0) = 5 \end{aligned}$$

La fonction f' est régulière par morceaux. L'hypothse du thorme de derivation des séries de Fourier est satisfaite. Donc la srie obtenue en dérivant terme terme $Ff(x)$ converge vers la fonction dfinie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\frac{1}{2}(f'(x+0) + f'(x-0)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = -\pi \\ -5\cos(5x) = f'(x) & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 5\cos(5x) = f'(x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si} \quad x = \pi \end{cases}$$

2. La condition $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ est vérifiée car

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

La fonction f est paire ; $f(x) = 0$ pour $x \notin [-1, 1]$

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x^2)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $\alpha = 0$, on calcule directement et on trouve :

$$\mathfrak{F}(f)(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right] = \sqrt{\frac{8}{9\pi}}$$

Pour $\alpha \neq 0$, on calcule en intégrant deux fois par parties et on trouve :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathfrak{F}(f)(\alpha) &= \int_0^1 \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_0^1 - \frac{x^2}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\alpha}\int_0^1 x\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha - \frac{2}{\alpha^2}x\cos(\alpha x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\alpha^2}\int_0^1 \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha + \frac{2}{\alpha^2}\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha + \frac{2}{\alpha^3}\sin\alpha
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha + \frac{2}{\alpha^3}\sin\alpha\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\alpha^3}\left[\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right]$$

Le résultat est

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{8}{9\pi}} & \text{si } \alpha = 0 \\ \sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\dfrac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha^3} & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$