Série 2

Exercice 1. Placer deux points A et B sur une feuille. Ensuite, construire, à la règle et au compas, sur la droite (AB), les points C et D d'abscisses respectives $\frac{5}{2}$ et $-\frac{2}{5}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

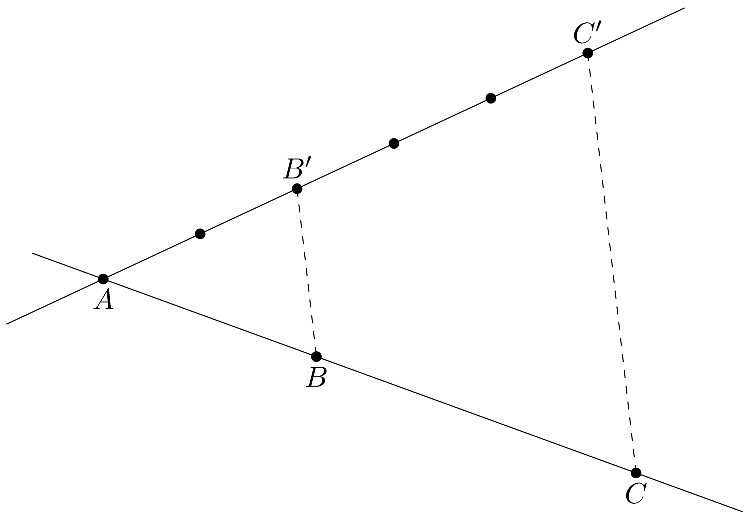
Solution: Comme C a pour abscisse $\frac{5}{2}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ceci signifie en particulier que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même *sens*. Pour trouver la position exacte de C, on peut s'aider de la géométrie élémentaire, et construire deux triangles semblables ayant les bonnes proportions. Remarquons que, par définition de C, on a la proportion

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{2}{5},$$

Traçons alors une droite issue de A, sur laquelle on reporte respectivment deux et cinq unités de longueur, pour obtenir les points B' et C'. A la règle et au compas, on peut alors tracer la parallèle à (BB') passant par C' : elle recoupe la droite (AB) au point C.



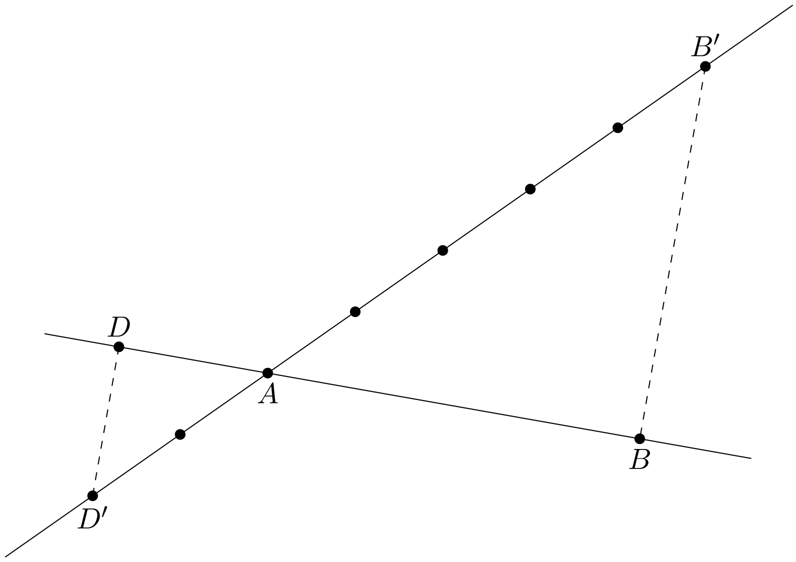
Pour placer le point D, on procède de manière similaire. On part de l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Ceci signifie en particulier que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des *sens opposés*, c'est-à-dire que A est situé entre B et D. Pour trouver la position exacte de D, on construit à nouveau des triangles semblables ayant la bonne proportion, donnée par le rapport :

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{5}{2}.$$

On obtient la figure suivante :



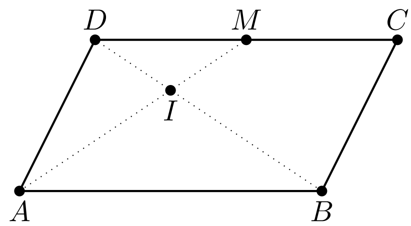
Exercice 2. Soient $ABCD$ un parallélogramme, M le milieu du côté CD et I le point d'intersection des segments AM et BD. On note α (resp. β) l'abscisse de I dans le repère $(A, \overrightarrow{AM})$ (resp. $(B, \overrightarrow{BD})$). Calculer α et β en utilisant la marche à suivre suivante :

a. Sachant que $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de α, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. Sachant que $\overrightarrow{BI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de β, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Utiliser l'indépendance linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ pour conclure.

Solution: Figure d'étude :



a. Par définition de l'abscisse d'un point sur une droite munie d'un repère, on a :

$$\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AM}.$$

Ensuite, on utilise la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et α. On obtient :

$$\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AM} = \alpha(\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{AD} + \tfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

b. En raisonnant exactement de la même façon pour β, on obtient :

$$\overrightarrow{BI} = \beta\overrightarrow{BD},$$

et donc

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \beta(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = (1-\beta)\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}\,.$$

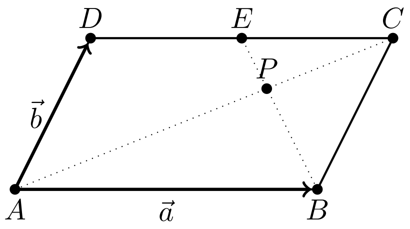
c. En égalant les deux expressions obtenues aux questions précédentes pour $\overrightarrow{AI}$, on obtient :

$$(\tfrac{\alpha}{2} - 1 + \beta)\overrightarrow{AB} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{AD} = \vec{0}\,.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants, ceci implique que $\frac{\alpha}{2} - 1 + \beta = 0$, et $\alpha - \beta = 0$. On résout facilement ce système, pour obtenir $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$.

Exercice 3. Soient $ABCD$ un parallélogramme, P le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$ de la droite (AC) et E le point d'intersection des droites (BP) et (DC). A l'aide du calcul vectoriel, montrer que E est le milieu de CD.

Solution: Figure d'étude :



On commence par localiser le point E depuis le point A. Autrement dit, on cherche à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants donnés par l'énoncé, comme par exemple $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Pour cela, on exprime les deux conditions qui définissent le point E.

Tout d'abord, E est situé sur la droite (DC), ce qui équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel α tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} + \alpha\vec{a}.$$

Ensuite, on sait aussi que E se trouve sur la droite (BE). Par conséquent, il existe un réel β tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \beta\overrightarrow{BP}.$$

Exprimons alors $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \beta(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}) = (1 - \frac{1}{3}\beta)\vec{a} + \frac{2}{3}\beta\vec{b}.$$

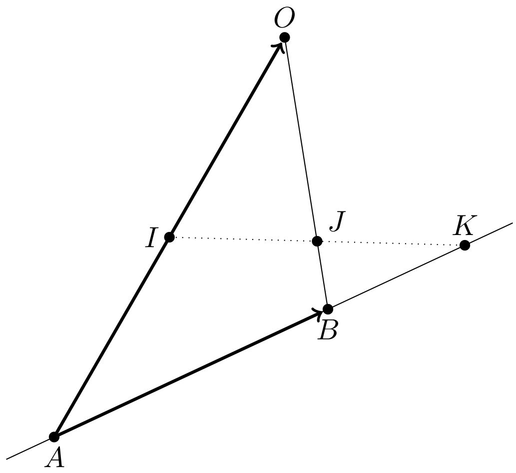
Comme les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants, les deux expressions trouvées ci-dessus pour le vecteur $\overrightarrow{AE}$ permettent d'écrire les égalités :

$$\frac{2}{3}\beta = 1 \text{ et } \alpha = 1 - \frac{1}{3}\beta \text{ d'où l'on déduit } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{3}{2}.$$

Remarquons maintenant que α donne exactement la position de E sur la droite (DC), car on a $\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{DC}$. Comme on a trouvé $\alpha = \frac{1}{2}$, on voit que E est bien situé au milieu du segment DC.

Exercice 4. Soient OAB un triangle, I le milieu de OA, J défini par $\overrightarrow{JO} = -3\overrightarrow{JB}$, et K le point d'intersection des droites (IJ) et (AB). À l'aide du calcul vectoriel, calculer l'abscisse de K dans le repère $(B, \overrightarrow{BA})$ de la droite (AB).

Solution: Figure d'étude :



On raisonne de manière analogue à l'exercice précédent. On commence donc par fixer deux vecteurs non colinéaires en lien avec la figure étudiée, comme par exemple $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AO}$, ainsi qu'un point "origine", B, à partir duquel on "regarde" les autres points.

Comme indiqué dans l'énoncé, le point K se trouve sur la droite (AB) et il existe par conséquent un réel α tel que :

$$\overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BA} = -\alpha\vec{a}.$$

Par ailleurs, on sait aussi que K se trouve sur la droite (IJ). Par conséquent, il existe un réel β tel que :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{BJ} + \beta\overrightarrow{IJ}.$$

Exprimons alors les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Tout d'abord, comme $\overrightarrow{JO} = -3\overrightarrow{JB}$, on a :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BO} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{b}).$$

On en déduit alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}.$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}) = \frac{3\beta - 1}{4}\vec{a} + \frac{1 - \beta}{4}\vec{b}.$$

Comme les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants, les deux expressions trouvées ci-dessus pour le vecteur $\overrightarrow{BK}$ permettent d'écrire les égalités :

$$-\alpha = \frac{3\beta - 1}{4} \text{ et } 0 = \frac{1 - \beta}{4} \text{ d'où l'on déduit } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = 1.$$

Par conséquent, on a donc :

$$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

L'abscisse recherchée est donc $-\frac{1}{2}$.

Exercice 5. On donne un triangle ABC dans le plan.

a. Montrer qu'il existe un unique point G dans le plan vérifiant :

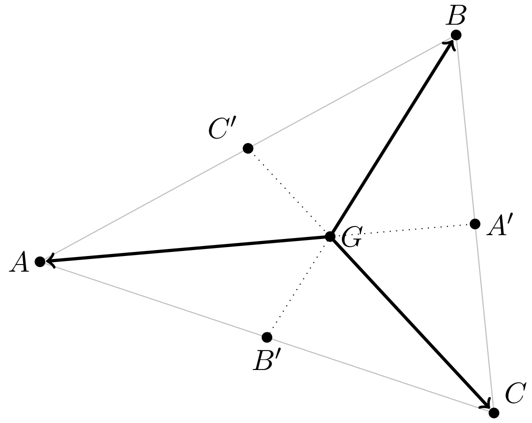
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Indication : pour montrer l'existence, chercher à exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de vecteurs connus.

b. Montrer que G se trouve à l'intersection des médianes du triangle ABC. On rappelle que, dans un triangle, une médiane joint un sommet au milieu du côté opposé.

Le point G défini dans cet exercice s'appelle le centre de gravité du triangle ABC, ou encore l'isobarycentre ou centre de masse.

Solution: Figure d'étude :



a. En utilisant les règles de base du calcul vectoriel, transformons l'égalité vectorielle que l'on cherche à satisfaire en une égalité équivalente :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,.\end{aligned}$$

Un point G du plan satisfait donc la première égalité si et seulement s'il satisfait la troisième. Or, la troisième dit simplement que G est obtenu en translatant A par le vecteur $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Par conséquent le point G recherché existe et est unique.

b. Appelons A', B', C' les milieux des côtés opposés à A, B, C respectivement. Comme A' est situé au milieu de BC, on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on obtient alors :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'},$$

ce qui implique que les points A, G et A' sont alignés (dans cet ordre). Autrement dit, G se trouve sur la médiane issue de A dans le triangle ABC. On raisonne de même pour montrer qu'il se trouve aussi sur les médianes issues de B et C.

Éléments de réponse :

Ex. 2 : a. $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AD}+\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB}$. b. $\overrightarrow{AI}=(1-\beta)\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$. c.$\alpha=\beta=\frac{2}{3}$.

Ex. 4 : $-\frac{1}{2}$.