Contrôle de géométrie analytique N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ________________________________

Groupe ☐

PRENOM : ________________________________

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on donne l'équation cartésienne d'une ellipse $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}: \quad 2\,x^2 + y^2 - 2 = 0\,.$$

Soit F le foyer dont les coordonnées sont positives ou nulles.

Soient M un point courant de $\mathcal{E}$, t la tangente à $\mathcal{E}$ en M, n la perpendiculaire à t passant par O, d la droite (FM) et P le point d'intersection des droites n et d.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de P lorsque M décrit l'ellipse $\mathcal{E}$.

Décrire avec précision la nature géométrique de ce lieu. 4 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne l'équation cartésienne d'un cercle γ, les coordonnées d'un point $A \in \gamma$ et une droite d passant par P et dirigée par $\vec{v}$:

$$\gamma: \ x^2+y^2-25=0\,, \quad A\,(3\,,\,-4)\,, \quad d = d\,(P\,,\,\vec{v}) \quad \text{avec} \quad P\,(0\,,\,13) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle γ_1 orthogonal au cercle γ en A et tel que son centre Ω_1 appartienne à la droite d.

b) Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle γ_2 de rayon $r_2 = 8$, tangent extérieurement au cercle γ et tel que les tangentes à γ et γ_2 issues de P soient isométriques. 5 pts

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la famille $\mathcal{F}$ des ellipses $\mathcal{E}$ dont on connaît un foyer $F\,(-3\,,\,-2)$ et la directrice d correspondante d'équation $y = 2$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$ dépendante du paramètre c uniquement (c : demi-distance focale).

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de la famille $\mathcal{F}$ qui est telle que la droite (de pente positive) passant par une extrémité du grand axe et une extrémité du petit axe soit de pente $m = \frac{3}{2}$. 3 pts

Tourner la page

4. Dans le plan, on considère deux points A et Ω_2, une droite a et un segment de longueur δ.

Soient $\gamma_1(\Omega_1, r_1)$ et $\gamma_2(\Omega_2, r_2)$ deux cercles dont l'axe radical est la droite a.

Le point A est le pôle de la droite a par rapport au cercle γ_2, Ω_2 est le centre du cercle γ_2, et le rayon r_1 du cercle γ_1 est de longueur δ.

Construire rigoureusement (règle, équerre, compas), sur la donnée graphique ci-dessous, les deux cercles γ_1 et γ_2. 3 pts