Contrôle d'analyse II N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

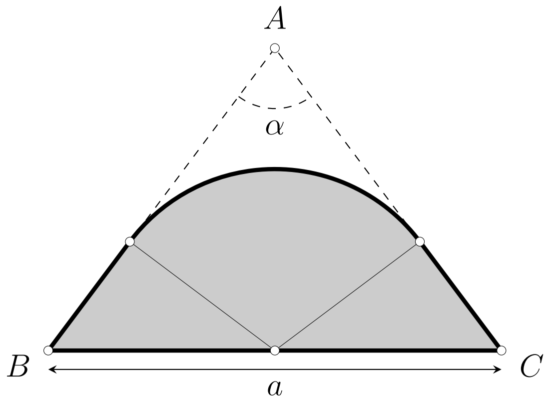
Groupe

PRENOM : ______________________

1. Soit ABC un triangle isocèle de base $BC = a$ et dont l'angle en A vaut α.

On construit l'arc de cercle dont le centre est le point milieu de BC et qui est tangent aux côtés AB et AC.

Et on considère le domaine grisé D décrit ci-contre.



Déterminer le périmètre P du domaine D en fonction des données a et α. 3,5 pts

2. On considère les angles α et β définis de la façon suivante :

$$\sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \sin(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{50}}, \qquad \alpha, \beta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[.$$

Déterminer, sans machine à calculer, la valeur exacte de l'angle $\varphi = 2\alpha + \beta$.

Indication : localiser avec précision les angles α, β et φ. 3,5 pts

3. a) Résoudre l'équation suivante sur l'intervalle donné.

$$4\cos^4(2x) - 11\cos^2(2x) + 6 = 0, \qquad x \in [0, \pi].$$

b) Résoudre l'inéquation suivante sur l'intervalle donné.

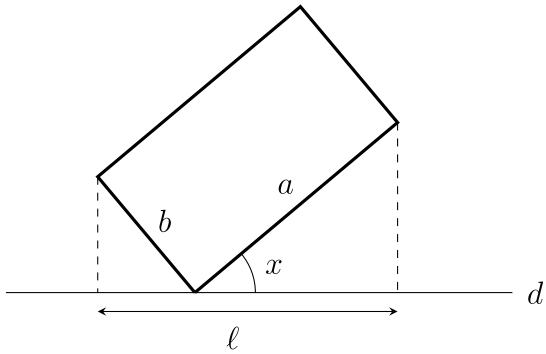
$$4\cos^4(2x) - 11\cos^2(2x) + 6 \leq 0, \qquad x \in [0, \pi].$$ 5 pts

Tourner la page

4. On considère un rectangle de longueur $a = 6$ et de largeur $b = \sqrt{12}$.

Son orientation par rapport à la droite d est définie par l'angle x, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On note ℓ la longueur de sa projection orthogonale sur la droite d.



a) Déterminer ℓ en fonction des données a, b et x.

b) Sans utiliser la notion de dérivée, déterminer l'angle x de sorte que ℓ soit maximal. 3 pts

---

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \, \operatorname{tg} y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}\,[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$
