10.5.19

Corrigé de la Série 17

1.
- Clairement, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $3n + 3m = 3(n+m) \in I$ et $3n \cdot m \in I$, d'où I est un idéal de $\mathbb{Z}$.
- $0 \notin J$. J n'est donc pas un idéal.
- On a $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in K$, mais $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \notin K$, car si $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec a, b rationnels, alors $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \Leftrightarrow 3 - a^2 - 2b^2 = 2ab\sqrt{2}$, équation qui ne peut Ãªtre satisfaite ni avec a ou b nul, car sinon 3 aurait une racine rationnelle, ni avec a et b non nuls, car sinon, $\sqrt{2}$ serait rationnel.
- Si $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, alors $f(x)|x| \notin C^1(\mathbb{R})$. Ceci n'est donc pas un idéal.
- Si $f, g \in M$, alors $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ et si $f \in C^0(\mathbb{R})$, $(fg)(1) = f(1)g(1) = 0 \cdot g(1) = 0$, d'où $fg \in M$. M est donc un idéal.
- Pour $(X^2+1)Q(X)$, $(X^2+1)R(X) \in N$, $(X^2+1)Q(X) + (X^2+1)R(X) = (X^2+1)(Q(X)+R(X)) \in M$. Si $P(X)$ est un polynôme quelconque, $(X^2+1)R(X)P(X) \in M$. On a donc bien un idéal.

2. (a) Si $I = \{0\}$, on a clairement $I = 0\mathbb{Z}$ est l'affirmation est vraie dans ce cas. Si $I \neq \{0\}$, alors il existe un entier $n \in I$ de valeur absolue minimale. Puisque $\pm 1 \cdot n \in I$, on peut sans autres supposer, que $n > 0$. Si $m \in I$, on peut procéder à une division de nombres entiers avec reste:

$$m = qn + r,$$

avec $0 \leq r < n$. Mais alors, $r = m - qn \in I$, et la minimalité de r nous force à poser $r = 0$. Donc, $m = qn \in n\mathbb{Z}$. L'inclusion réciproque est manifeste par définition d'un idéal.

(b) Si $I \subset \mathbb{K}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$, alors il existe un élément $0 \neq x \in I$. Puisque $\mathbb{K}$ est un corps, on a l'existence d'un inverse $x^{-1} \in \mathbb{K}$. Mais alors, $1 = x \cdot x^{-1} \in I$, et par conséquent, $\forall y \in \mathbb{K}$, $y = y \cdot 1 \in I$. Ainsi, $\mathbb{K} \subset I$.

(c) On vérifie $(AP + BQ) + (A'P + B'Q) = (A + A')P + (B + B')Q \in M_{P,Q}$ et si R est un polynôme quelconque, $(AP + BQ)R = (AR)P + (BR)Q \in M_{P,Q}$. On a donc bien que $M_{P,Q}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

3. (a) La somme des puissances des deux facteurs doit être 4 :

$$(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 2)(x^2 - x - 2) \quad \Rightarrow \quad -2x^4 - 2x^4 + 5x^4 = 1 \cdot x^4 \ ;$$

(b) La somme des puissances des deux facteurs doit être n+1 :

$$x^n(x-1)^2 - 3x^{n-2}(x+1)^3 = x^n(x^2 - 2x + 1) - 3x^{n-2}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$\Rightarrow \quad -2x^{n+1} - 3x^{n+1} = (-5) \cdot x^{n+1}.$$

4. (a)

$$\begin{array}{rrrrr|lll}
2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & x^2 & -3x & +1 \\ \cline{6-8}
2x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 & +3x & +11 \quad : \quad \textbf{quotient} \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & +2x^2 & -5x & & & & \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 11x^2 & -8x & +6 & & & \\
 & & 11x^2 & -33x & +11 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & +25x & -5 & & & \quad : \quad \textbf{reste}
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrr|llll}
x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & +8 & x & -1 & & \\ \cline{6-9}
x^4 & -x^3 & & & & x^3 & -x^2 & +3x & -3 \quad : \quad \textbf{quotient} \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & +4x^2 & & & & & & \\
 & -x^3 & +x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & -6x & & & & & \\
 & & 3x^2 & -3x & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & +8 & & & & \\
 & & & -3x & +3 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +5 & & & & \quad : \quad \textbf{reste}
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrr|lll}
x^4 & & & & +4y^4 & +x^2 & -2xy & +2y^2 \\ \cline{6-8}
x^4 & -2x^3y & +2x^2y^2 & & & +x^2 & +2xy & +2y^2 \quad : \quad \textbf{quotient} \\ \cline{1-5}
 & +2x^3y & -2x^2y^2 & & +4y^4 & & & \\
 & +2x^3y & -4x^2y^2 & +4xy^3 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2y^2 & -4xy^3 & +4y^4 & & & \\
 & & 2x^2y^2 & -4xy^3 & +4y^4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 & & & \quad : \quad \textbf{reste}
\end{array}$$

5. (a)

$$\begin{array}{rrr|ll}
x^3 & & +1 & x^2 & +1 \\ \cline{4-5}
x^3 & +x & & x & \\ \cline{1-3}
 & -x & +1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|ll}
x^2 & & +1 & x & -1 \\ \cline{4-5}
x^2 & -x & & x & +1 \\ \cline{1-3}
 & x & +1 & & \\
 & x & -1 & & \\ \cline{2-3}
 & & +2 & &
\end{array}$$

Le reste n'est pas nul. Le PGCD est donc 1.

(b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +3x^3 & +6x^2 & +5x & +3 & x^4 \;+x^3 \;+2x^2 \;-x \;+3 \\ \cline{6-6}
x^4 & +x^3 & +2x^2 & -x & +3 & 1 \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & +4x^2 & +6x & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & +2x^2 & -x & +3 & x^3 \;+2x^2 \;+3x \\ \cline{6-6}
x^4 & +2x^3 & +3x^2 & & & x \quad -1 \\ \cline{1-5}
 & -x^3 & -x^2 & -x & +3 & \\
 & -x^3 & -2x^2 & -3x & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +2x & +3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +2x^2 & +3x & x^2 \;+2x \;+3 \\ \cline{4-4}
x^3 & +2x^2 & +3x & \\ \cline{1-4}
 & & 0 &
\end{array}$$

Le PGCD est donc
$$D(x) = x^2 + 2x + 3\,.$$

6. (a) On commence par chercher le PGCD avant de remonter dans le processus d'Euclide :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & -x^2 & -4x & -2 & x^4 \;+x^3 \;-x^2 \;-2x \;-2 \\ \cline{6-6}
x^4 & +x^3 & -x^2 & -2x & -2 & 1 \\ \cline{1-5}
 & +x^3 & & -2x & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & -x^2 & -2x & -2 & x^3 \;-2x \\ \cline{6-6}
x^4 & & -2x^2 & & & x \quad +1 \\ \cline{1-5}
 & +x^3 & +x^2 & -2x & -2 & \\
 & +x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & & -2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
x^3 & -2x & x^2 \;-2 \\ \cline{3-3}
x^3 & -2x & x \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Le PGCD est donc :
$$D(x) = x^2 - 2\,.$$

On va remonter dans le processus d'Euclide :

$$\begin{aligned}
x^2-2 &= (x^4+x^3-x^2-2x-2)-(x+1)(x^3-2x) \\
&= (x^4+x^3-x^2-2x-2)-(x+1)\Big[(x^4+2x^3-x^2-4x-2) \\
&\qquad\qquad -(x^4+x^3-x^2-2x-2)\cdot 1\Big] \\
&= \underbrace{(-x-1)}_{=A(x)}(x^4+2x^3-x^2-4x-2)+\underbrace{(x+2)}_{=B(x)}(x^4+x^3-x^2-2x-2) \\
&= A(x)\cdot P(x)+B(x)\cdot Q(x)\,.
\end{aligned}$$

(b) On commence par chercher le PGCD avant de remonter dans le processus d'Euclide :

$$\begin{array}{lcl}
z^3-z^2+2 & : & \underline{z^3-i(z+1)+1} \\
\underline{z^3-i(z+1)+1} & & +1 \\
\quad -z^2+i(z+1)+1 & &
\end{array}$$

On continue :

$$\begin{array}{lcl}
z^3-i(z+1)+1 & : & \underline{z^2-i(z+1)-1} \\
\underline{z^3-iz^2-iz-z} & & z+i \\
\quad iz^2+z-i+1 & & \\
\quad \underline{iz^2+z-i+1} & & \\
\qquad 0 & &
\end{array}$$

Le PGCD est donc : $z^2-i(z+1)-1$

On va remonter dans le processus d'Euclide, la solution est ici immédiate:

$$z^2-i(z+1)-1=\underbrace{(-1)}_{=A(z)}(z^3-z^2+2)+\underbrace{(+1)}_{=B(z)}(z^3-i(z+1)+1)$$

$$=A(z)\cdot P(z)+B(z)\cdot Q(z)\,.$$

7. Problème récréatif: Si l'on élève l'expression au carré, on se retrouve avec un polynôme du quatrième degré, ce qui n'est pas commode à résoudre, si l'on ne connait pas une solution évidente. Par contre, on peut réécrire l'égalité comme

$$x^2=5-\sqrt{5-x}.$$

On cherche une solution positive. On peut donc extraire la racine de chaque côté:

$$x=\sqrt{5-\sqrt{5-x}},$$

puis, en réinsérant l'expression pour x dans cette égalité, on trouve

$$x = \sqrt{5 - \sqrt{5 - \sqrt{5 - \ldots}}}.$$

Ainsi,

$$x^2 = 5 - \sqrt{5 - \sqrt{5 - \sqrt{5 - \ldots}}} = 5 - x.$$

De là on obtient

$$x^2 + x - 5 = 0, \quad x > 0,$$

où encore

$$x = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}.$$

On vérifie: $5 - x^2 = 5 - \frac{11 - \sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$. D'autre part, $5 - x = \frac{11 - \sqrt{21}}{2} = \left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right)^2$.