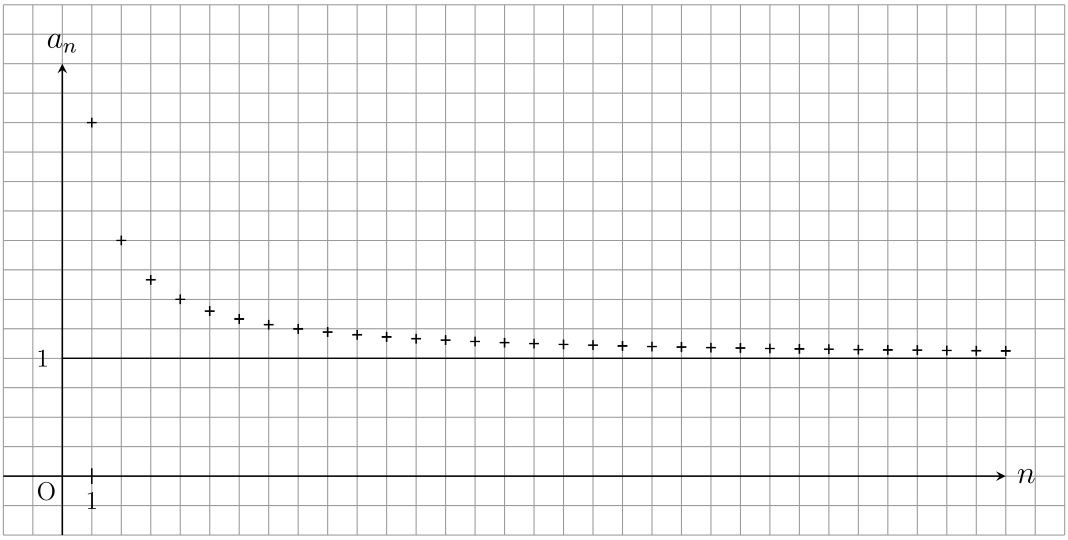
Série 5

1. Voici la représentation de la suite définie par $a_n = \dfrac{n+2}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$.



a) Soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon$.

Déterminer graphiquement $N(\varepsilon)$ dans les trois cas suivants :

i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{4}$, iii) $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

b) Démontrer à l'aide de la définition que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. Déterminer le terme général des suites dont on donne les premiers termes, puis calculer leur limite, si elle existe.

a) (a_n) : $4\,,\ \dfrac{7}{3}\,,\ 2\,,\ \dfrac{13}{7}\,,\ \dfrac{16}{9}\,,\ \dfrac{19}{11}\,,\ \dfrac{22}{13}\,,\ \ldots$

b) (b_n) : $\dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{4}{5}\,,\ \dfrac{7}{10}\,,\ \dfrac{10}{17}\,,\ \dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{16}{37}\,,\ \dfrac{19}{50}\,,\ \ldots$

c) (c_n) : $\dfrac{2}{3}\,,\ 0\,,\ \dfrac{4}{15}\,,\ 0\,,\ \dfrac{6}{35}\,,\ 0\,,\ \dfrac{8}{63}\,,\ 0\,,\ \dfrac{10}{99}\,,\ \ldots$

d) (d_n) : $5\,,\ \dfrac{5}{3}\,,\ \dfrac{5}{7}\,,\ \dfrac{1}{3}\,,\ \dfrac{5}{31}\,,\ \dfrac{5}{63}\,,\ \dfrac{5}{127}\,,\ \dfrac{1}{51}\,,\ \dfrac{5}{511}\,,\ \ldots$

3. Calculer les limites, si elles existent, des suites définies par les termes généraux suivants :

a) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$, b) $b_n = \dfrac{3\,(n+2)! + 2\,(n+1)!}{(n+3)!}$,

c) $c_n = (-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})$.

4. On considère la suite (a_n) définie par récurrence de la façon suivante :

$$a_{n+1} \; = \; 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad a_1 = 3\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Déterminer le terme général de la suite (a_n), démontrer ce résultat par récurrence, puis calculer, si elle existe, la limite de cette suite.

5. A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence de ces deux suites.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$

b) $b_n = \dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$

6. On considère la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (a_n) converge vers $a = 1$.

7. Exercice facultatif

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b\,.$$

Réponses de la série 5

2. a) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}\,.$

c) $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0\,.$

b) $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\,.$

d) $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0\,.$

3. $a_n \; = \; \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\,, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\,.$

4. a) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}\,.$

b) $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\,.$

c) La suite (c_n) diverge.

5. a) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,.$

b) $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\,.$
