Exercice 1* (10 min) **: Mouvement accéléré en biais**

a) Le vecteur accélération constant se traduit en projection sur (Ox) et (Oy) par :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} = a_x = -a\sin\theta \\ \ddot{y} = a_y = a\cos\theta \end{pmatrix}$$

que l'on intègre pour avoir la vitesse, avec comme condition initiale $\vec{v}(t=0) = v_0\cos\theta\,\vec{e}_x + v_0\sin\theta\,\vec{e}_y$:

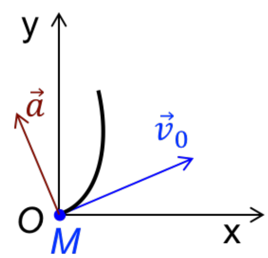
$$\begin{pmatrix} \dot{x} = -a\sin\theta\, t + v_0\cos\theta \\ \dot{y} = a\cos\theta\, t + v_0\sin\theta \end{pmatrix}$$

et une deuxième intégration pour la trajectoire , avec comme condition initiale $M(t=0) = O$:

$$\begin{pmatrix} x = -\dfrac{1}{2}a\sin\theta\, t^2 + v_0\cos\theta\, t \\ y = \dfrac{1}{2}a\cos\theta\, t^2 + v_0\sin\theta\, t \end{pmatrix}$$

b) La trajectoire de M est représentée ci-contre. Faites attention à ce que la trajectoire soit bien tangente à $\vec{v}_o$ en O. C'est une parabole ayant $\vec{a}$ comme direction asymptotique.

Le choix de ce repère complique la description du mouvement, il aurait été plus judicieux de choisir un repère dont un des axes directeurs soit colinéaire à l'accélération.



Exercice 2* (10 min) **: le planeur**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40\sin(0.2t) \\ 40\cos(0.2t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'unité étant évidemment des m·s^{-1}.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\cos(0.2t) \\ -8\sin(0.2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

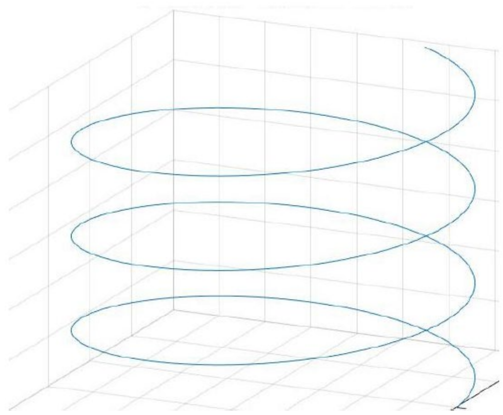
L'unité étant évidemment des m·s^{-2}.
La vitesse scalaire et l'accélération scalaire sont données par les norme des vecteurs vitesse et accélération respectivement :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1600\sin^2(0.2t) + 1600\cos^2(0.2t) + 9} = \sqrt{1600+9} \approx 40.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$||\vec{a}|| = \sqrt{64\sin^2(0.2t) + 64\cos^2(0.2t) + 0} = \sqrt{64} = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

2. Seule la coordonnée z nous intéresse : nous cherchons t tel que $z(t) = 2000$, soit $t = \frac{1400}{3}$ qui font 467 s.

3. La trajectoire est hélicoïdale.



Exercice 3* (5 min) **: le bol**

Le système de coordonnées adapté à ce problème est évidemment le système sphérique. L'accélération et la vitesse sont alors données comme suit :

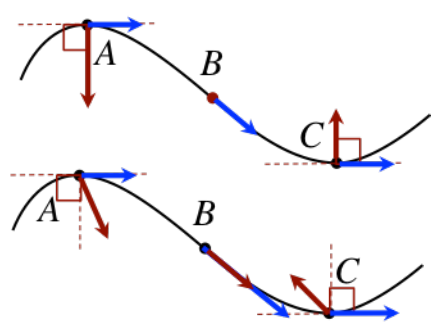
$$\begin{aligned}\vec{a} =&(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_r}\\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_\theta}\\ &+ (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e_\varphi}\\ \vec{v} =&\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e_\varphi}\end{aligned}$$

En considérant la contrainte $r = cst$, les vitesse et accélération deviennent alors :

$$\begin{aligned}\vec{v} =&r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e_\varphi}\\ \vec{a} =&(-r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_\theta} + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e_\varphi}\end{aligned}$$

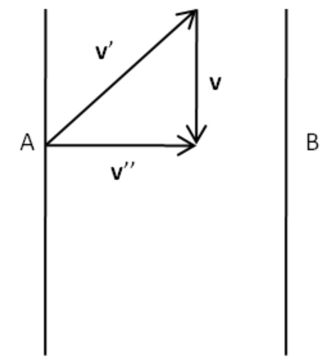
Exercice 4 * (5 min) **: Accélération sur une trajectoire**

a) La vitesse est constante, elle a donc la même norme aux points *A*, *B* et *C*, et elle est tangente à la trajectoire. De même, l'accélération est toujours normale à la vitesse et dirigée vers l'intérieur du virage en *A* et en *C* et est nulle au point *B*.



b) Dans cette partie la vitesse est toujours tangente pour les 3 points et sa norme augmente aux points *A* et *B* et diminue au point *C*. Pour l'accélération, au point *A* le pilote accélère on a donc une composante tangentielle supplémentaire à la composante normale dans le sens de la vitesse. Au point *B* la trajectoire est rectiligne donc l'accélération n'a pas de composante normale mais a une composante tangentielle dans le sens de la vitesse car l'on accélère. Au point *C* le pilote freine on a donc une composante tangentielle supplémentaire à la composante normale dans le sens opposé à la vitesse.

Exercice 5* (10 min) **: Nageur traversant une rivière**



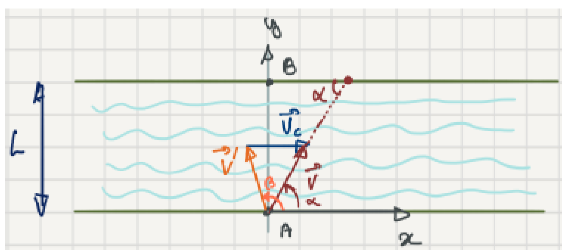
La vitesse du nageur étant définie par rapport à l'eau, il faut qu'il nage en direction de l'amont, sans quoi il sera déporté et atteindra un point situé en aval du point *B*. La vitesse *v''* du nageur par rapport à la rive est obtenue par application du théorème de Pythagore:

$$v'^2 = v''^2 + v^2 \Rightarrow v'' = \sqrt{v'^2 - v^2}$$

Ainsi, le temps mis par le nageur pour traverser la rivière est :

$$t = \frac{L}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$$

Exercice 6** (30 min) **: L'agent Logan**



vitesse du courant : $\vec{v}_c$ (référentiel de la rive)

vitesse par rapport au courant : $\vec{v}'$ avec $|\vec{v}'| = v'$ connu (v_{rame}) (référentiel de l'eau de la rivière)

vitesse par rapport à la rive : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_c$ (référentiel de la rive)

Composantes des vitesses :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} v_c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_c + v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{v'\sin\beta}{v_c + v'\cos\beta} = \frac{l}{d}$$

Donc :

$$\boxed{d = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}}$$

Le temps de course sur la rive est donc donné par

$$t_c = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}}$$

Le temps de traversée est donné par :

$$t_t = \frac{l}{v'\sin\beta}$$

Le temps total est donc :

$$\boxed{t_{tot} = \frac{l}{v'\sin\beta} + l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}} = l\left[\frac{v_{course} + v_c + v'\cos\beta}{v_{course}\cdot v'\sin\beta}\right]}$$

On cherche à minimiser en fonction de β :

$$\frac{\mathrm{d}t_{tot}}{\mathrm{d}\beta} = l\cdot\frac{-v_{course}v'\sin\beta\cdot v'\sin\beta - v_{course}v'\cos\beta\left[v_{course} + v_c + v'\cos\beta\right]}{\left[v_{course}\cdot v'\sin\beta\right]^2} = f(\beta)$$

et on cherche $f(\beta) = 0$ qui donnera $t_{tot}(\beta)$ minimum.

$$-v'^2 v_{course}\sin^2\beta - v' v_{course}^2\cos\beta - v_c v' v_{course}\cos\beta - v_{course}v'^2\cos^2\beta = 0$$

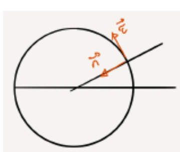
$$\left(\cancel{v'} v_{course}^{\cancel{2}} + v_c\cancel{v'}\cancel{v_{course}}\right)\cos\beta + v'^{\cancel{2}}\cancel{v_{course}} = 0$$

$$(v_{course} + v_c)\cos\beta + v' = 0$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{-v'}{v_c + v_{course}}}$$

A.N. : $\beta = 1.98$ (équivalent à 113.2¡, soit 23.2¡ vers l'amont). Le temps de course sera alors de 80.5 s et la traversée de 1160 s, soit un temps total de 1241.5 s (20.7 min).

Exercice 7** (30 min) **: Le petit train**

1. 

Le train peut faire au maximum 0.5 tour·s^{-1}, sa vitesse angulaire maximale est donc $\omega_m = 2\pi f = \pi$ rad·s^{-1}.
Sa vitesse linéaire maximale est donnée par $v_m = R\omega_m = \frac{\pi}{2}$ m·s^{-1} $= 1.57$ m·s^{-1}.

2. Le train est contraint à un mouvement circulaire par les rails. On rappelle que dans ce cas :

$$\begin{cases}\vec{v} = v\,\vec{u}_t \\ \vec{a} = a_t\,\vec{u}_t + a_n\,\vec{u}_n = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n\end{cases}$$

Dans la première phase, le train accélère. Son acceleration tangentielle est constante, donc son accélération angulaire α est aussi constante. On sait qu'après un tour, il a atteint sa vitesse maximale v_m. Ces informations vont nous permettre d'obtenir α et donc a_τ en fonction de v_m et R.
On rappelle :

$$v(t) = R\omega(t) \quad \text{et} \quad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\alpha = \text{cte}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

donne par intégration

$$\omega(t) = \alpha t + \omega(t = 0)$$

Comme $\omega(t = 0) = 0$,

$$\omega(t) = \alpha t \tag{1}$$

L'angle parcouru entre $t = 0$ et t s'obtient de même par intégration, et avec $\theta(t = 0) = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{2}$$

Appelons t_m le temps auquel le train a atteint sa vitesse angulaire maximum ω_m. C'est aussi le temps auquel le train a bouclé son premier tour, et donc le temps pour lequel l'angle parcouru vaut 2π. En insérant cela dans les équations 1 et 2

$$\begin{cases} 2\pi = \frac{1}{2}\alpha t_m^2 & (3) \\ \omega_m = \alpha t_m & (4) \end{cases}$$

On en déduit que $t_m = \frac{\omega_m}{\alpha}$ et que l'accélération angulaire vaut $\alpha = \frac{v_m^2}{4\pi R^2}$.

Donc

$$a_t = \frac{v_m^2}{4\pi R}$$

On en conclut grâce à $v = R\omega = R\alpha t$

$$v(t) = \frac{v_m^2}{4\pi R}t$$

Et comme $a_n = v^2/R$:

$$a_n(t) = \frac{v_m^4}{16\pi^2 R^3} t^2$$

Au final, dans la phase d'accélération (premier tour) :

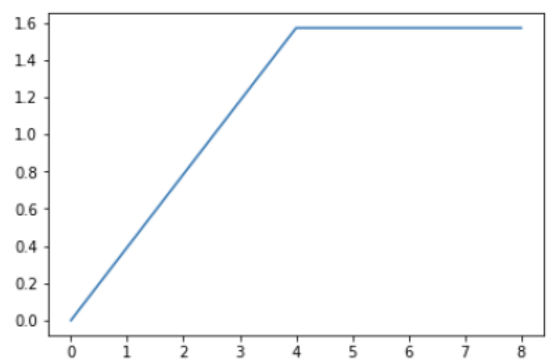
$$\vec{v} = v\,\vec{u}_t = \frac{v_m^2}{4\pi R} t\,\vec{u}_t$$

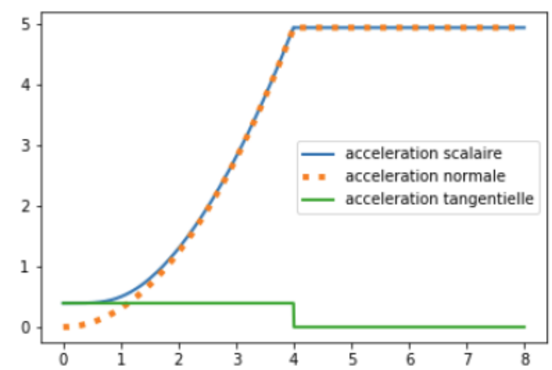
$$\vec{a} = \frac{v_m^4}{16\pi^2 R^3} t^2 \vec{u}_n + \frac{v_m^2}{4\pi R} \vec{u}_t$$

Après le premier tour, soit $t \geq t_m$

$$v(t) = \frac{v_m^2}{4\pi R} t \Rightarrow t_m = 4\pi R/v_m \qquad \vec{v} = v_m\,\vec{u}_t \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \frac{v_m^2}{R}\vec{u}_n$$

3. On trace les graphes entre $t = 0$ et $t = 2t_m$. A gauche, vitesse (en m/s) et à droite les accélérations en m/s^2, en fonction du temps (en s).





Le graphe à droite donne un tracé des vecteurs vitesse (en bleu) et acceleration normale (en rouge) en fonction de la position du train sur la voie lors du premier tour.

Exercice supplémentaire S2.1* (10 min) **: Accélération à l'équateur**

1. Utilisons dans un premier temps le système de coordonnées sphériques pour traiter ce problème. On cherche donc à adapter la formule de l'accélération donnée dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{a_s} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

❑ Le système (homme considéré comme un point matériel en M), est à une distance $r = R_T$ du centre de la Terre, où on place l'origine de notre repère. Ici, on a noté R_T le rayon de la Terre. $R_T = cte$, donc $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. L'accélération se simplifie donc en :

$$\overrightarrow{a_s} = \left(-R_T\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(R_T\ddot{\theta} - R_T\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(R_T\ddot{\varphi}\sin\theta + 2R_T\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

❑ La Terre tourne à une vitesse constante autour de son axe de révolution, (Oz) sur le schéma. Donc $\dot{\varphi} = cte = \Omega$ et $\ddot{\varphi} = 0$. Ici, on a noté R_T la vitesse angulaire de la Terre. L'accélération se simplifie donc en :

$$\overrightarrow{a_s} = \left(-R_T\Omega^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(R_T\ddot{\theta} - R_T\Omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(2R_T\Omega\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

❑ Finalement, l'homme se trouvant à l'équateur, on a $\theta = cte = \frac{\pi}{2}$. Donc on a $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ et aussi $\sin\theta = 1$ et $\cos\theta = 0$. L'accélération se simplifie donc en :

$$\boxed{\overrightarrow{a_s} = \left(-R_T\Omega^2\right)\overrightarrow{e_r}}$$

2. Etant donné la géométrie du problème ($\theta = cte = \frac{\pi}{2}$), nous aurions pu utiliser le système de coordonnées polaires dans lequel l'accélération est donnée par $\overrightarrow{a_p} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}$. En appliquant les deux premiers points énoncés à la question précédente ($r = cte = R_T$ et $\dot{\varphi} = cte = \Omega$), on retrouve bien la même formule pour l'accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a_p} = (-R_T\Omega^2)\overrightarrow{e_r}}$$

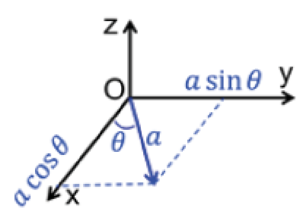
Exercice supplémentaire S2.2** (25 min) **: Visualisation dans l'espace et calcul vectoriel**

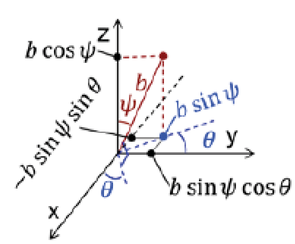
a) Les projections du vecteur $\vec{a}$ sont simples à visualiser : $a\cos\theta$ sur Ox et : $a\sin\theta$ sur Oy, voir le schéma ci-contre.

Les coordonnées de $\vec{a}$ sont donc $\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{b}$ faisant un angle ψ avec (Oz), sa projection sur (Oz) est $b\cos\psi$. On construit ensuite la projection de $\vec{b}$ sur le plan (Oxy), le point bleu sur le schéma ci-contre : la longueur de cette projection est $b\sin\psi$, et cette projection fait un angle θ avec l'axe (Oy). (En effet, $\vec{b}$ étant perpendiculaire à $\vec{a}$, sa projection l'est aussi.) On projette à nouveau ce point sur les axes (Ox) et (Oy), les points noirs sur le schéma, ce qui nous donne respectivement $-b\sin\psi\sin\theta$ et $b\sin\psi\cos\theta$

Les coordonnées de $\vec{b}$ sont donc $\begin{pmatrix} -b\sin\psi\sin\theta \\ b\sin\psi\cos\theta \\ b\cos\psi \end{pmatrix}$





b) Formule du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes = produits croisés des deux autres lignes avec alternance du signe, à savoir : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -x_1 z_2 + z_1 x_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

Soit ici :

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a\ \cos\theta \\ a\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -b\ \sin\psi\ \sin\theta \\ b\ \sin\psi\ \cos\theta \\ b\ \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab\ \sin\theta\ \cos\psi \\ -ab\ \cos\theta\ \cos\psi \\ ab(\sin\psi\ \cos^2\theta + \sin\psi\ \sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab\ \sin\theta\ \cos\psi \\ -ab\ \cos\theta\ \cos\psi \\ ab\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

c) Calcul des valeurs de $\vec{c} * \vec{a}, \vec{c} * \vec{b}$ et $\|\vec{c}\|$:

1) On sait que $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, donc les produits scalaires avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont nuls :

$$\vec{c} * \vec{a} = 0,\ \vec{c} * \vec{b} = 0$$

La norme du produit vectoriel est la surface sous-tendue par les vecteurs. Comme $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire, cette surface est ab.

$$\|\vec{c}\| = ab$$

2) Vérifications par calcul :

$$\vec{c}.\vec{a} = \begin{pmatrix} ab\ \sin\theta\ \cos\psi \\ -ab\ \cos\theta\ \cos\psi \\ ab\ \sin\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\ \cos\theta \\ a\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = a^2 b \sin\theta\cos\theta\cos\psi - a^2 b \sin\theta\cos\theta\cos\psi = 0$$

$$\vec{c}.\vec{b} = \begin{pmatrix} ab\ \sin\theta\ \cos\psi \\ -ab\ \cos\theta\ \cos\psi \\ ab\ \sin\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b\ \sin\psi\ \sin\theta \\ b\ \sin\psi\ \cos\theta \\ b\ \cos\psi \end{pmatrix} = -ab^2 \sin^2\theta\cos\psi\sin\psi - ab^2\cos^2\theta\cos\psi\sin\psi$$

$$+ab^2\sin\psi\cos\psi = -ab^2\sin\psi\cos\psi + ab^2\sin\psi\cos\psi = 0$$

$$\|\vec{c}\| = \begin{vmatrix} ab\ \sin\theta\ \cos\psi \\ -ab\ \cos\theta\ \cos\psi \\ ab\ \sin\psi \end{vmatrix} = ab(\sin^2\theta\cos^2\psi + \cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi)^{1/2}$$

$$= ab(\cos^2\psi + \sin^2\psi)^{1/2} = ab$$