Analyse I – Corrigé de la Série 13

Echauffement.

i) La formule pour la dérivée de la fonction composée $g \circ f$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int (g \circ f)'(x)\,dx = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

Comme $g \circ f$ est une primitive de $(g \circ f)'$, on a

$$(g \circ f)(x) + C = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

Puisque la notation de l'intégrale indéfinie vue au cours désigne l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction, la constante C peut être absorbée dans la notation de l'intégrale indéfinie à droite, d'où la formule voulue

$$g\big(f(x)\big) = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

Avec le changement de notation $f(x) \to \varphi(u), g \to F, g' \to F' = f$, on obtient alors la formule de substitution

$$F\left(\varphi(u)\right) = \int F'\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)du = \int f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)du =: G(u)$$

et donc $F(x) = G\left(\varphi^{-1}(x)\right)$.

ii) La dérivée du produit des fonctions f et g s'écrit

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int \big(f(x)g(x)\big)'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Le côté gauche vaut $f(x)g(x)+C$ si bien qu'on trouve la formule d'intégration par parties en absorbant de nouveau la constante dans une des deux autres intégrales indéfinies :

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Exercice 1.

Posons $f(x) := \dfrac{1}{5+x^3}$, $g(x) := e^{-2x}$ et $I := \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Alors, $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues et $g(x) \geq 0$ sur $[0,1]$. De plus

$$\int_0^1 e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right).$$

La fonction $\dfrac{1}{5+x^3}$ est décroissante sur $[0,1]$ et on a les inégalités $\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{1}{5+x^3} \leq \dfrac{1}{5}$. Ainsi

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) \leq I \leq \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right).$$

Comme $e > \dfrac{5}{2}$, il suit que $1-e^{-2} > 1-\dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$, ce qui mène aux bornes souhaitées

$$\frac{7}{100} < \frac{1}{12}\left(1-e^{-2}\right) \leq I \leq \frac{1}{10}\left(1-e^{-2}\right) < \frac{1}{10}.$$

Exercice 2.

i) Par intégration par parties d'abord avec $f'(x) = \cos(x)$ $[\Rightarrow f(x) = \sin(x)]$, $g(x) = x^2$ $[\Rightarrow g'(x) = 2x]$ et puis avec $f'(x) = \sin(x)$ $[\Rightarrow f(x) = -\cos(x)]$, $g(x) = x$ $[\Rightarrow g'(x) = 1]$, il vient

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\,dx &= \sin(x)\,x^2 - 2\int \sin(x)\,x\,dx = \sin(x)\,x^2 - 2\left(-\cos(x)\,x + \int \cos(x)\,dx\right)\\ &= \left(x^2-2\right)\sin(x) + 2x\cos(x) + C\end{aligned}$$

ii) Posons $I_{a,b} = \displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ et intégrons deux fois par parties avec $f'(x) = e^{ax}$ $[\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}\,e^{ax}]$ ainsi que $g(x) = \cos(bx)$ $[\Rightarrow g'(x) = -b\sin(bx)]$:

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

Cette dernière intégrale doit aussi être intégrée par parties avec $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = \sin(bx)$ $[\Rightarrow g'(x) = b\cos(bx)]$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

On remarque alors que l'intégrale à droite est $I_{a,b}$. Ainsi on peut combiner les deux équations précédentes et isoler $I_{a,b}$. On obtient

$$\begin{aligned}I_{a,b} &= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\,I_{a,b}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a}\left(\cos(bx) + \frac{b}{a}\sin(bx)\right)\end{aligned}$$

et donc

$$I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big) + C, \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Exercice 3.

i) Posons $I_n = \displaystyle\int x^n\sin(2x)\,dx$. Alors $I_0 = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$ et

$$I_1 = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \quad \text{(par parties avec } f'(x) = \sin(2x) \text{ et } g(x) = x\text{)}$$

et si $n \geq 2$ (encore deux fois par parties),

$$\begin{aligned} I_n = \int x^n \sin(2x)\,dx &\overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}x^n\cos(2x) + \frac{1}{2}n\int x^{n-1}\cos(2x)\,dx \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2}x^n\cos(2x) + \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}x^{n-1}\sin(2x) - \frac{1}{2}(n-1)\int x^{n-2}\sin(2x)\,dx\right] \\ &= \frac{x^{n-1}}{4}\left(n\sin(2x) - 2x\cos(2x)\right) - \frac{n(n-1)}{4}\,I_{n-2}, \end{aligned}$$

où (1): $f'(x) = \sin(2x)$ et $g(x) = x^n$ et (2): $f'(x) = \cos(2x)$ et $g(x) = x^{n-1}$.

ii) Posons $I_n = \displaystyle\int \mathrm{Log}(x)^n\,dx$. Alors $I_0 = x + C$. Pour $n \geq 1$ on intègre par parties avec $f'(x) = 1$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)^n$:

$$I_n = \int 1 \cdot \mathrm{Log}(x)^n\,dx = x\,\mathrm{Log}(x)^n - n\int x\,\mathrm{Log}(x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx = x\,\mathrm{Log}(x)^n - nI_{n-1}.$$

Exercice 4.

La formule pour le changement de variable $x = \varphi(u)$ est $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$.

i) Vu que $-1 < x < 1$, pour $x = \varphi(u) = \sin(u)$ on a $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. Donc on a $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin(u)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(u)^2}} = \dfrac{1}{\cos(u)}$ et $\varphi'(u) = \cos(u)$. Vu que $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, on a aussi $|\cos(u)| = \cos(u)$ et ainsi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,du = \int du = u + C = \mathrm{Arcsin}(x) + C\,,$$

où pour $-1 < x < 1$ on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

ii) Pour $x = \varphi(u) = \mathrm{tg}(u)$ on a $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}(u)^2} = \dfrac{\cos(u)^2}{\cos(u)^2 + \sin(u)^2} = \cos(u)^2$ et $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\cos(u)^2}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\cos(u)^2}{\cos(u)^2}\,du = \int du = u + C = \mathrm{Arctg}(x) + C\,,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \mathrm{Arctg}(x)$.

Exercice 5.

i) En utilisant que $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, on observe que

$$\sin(x)^5 = \left(1 - \cos(x)^2\right)^2 \sin(x) = -f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

avec $t = \varphi(x) = \cos(x)$ et $f(t) = (1-t^2)^2$.

Comme les bornes de x sont $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, les bornes de t sont $a = \varphi(\alpha) = 1$ et $b = \varphi(\beta) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \big(1-\cos(x)^2\big)^2 \sin(x)\,dx &= -\int_1^0 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt \\ &= \Big[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\Big]_0^1 = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

ii) On pose $x = \varphi(u) = u^2 - 1$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = 2 = \varphi(\sqrt{3})$ et $b = 3 = \varphi(2)$, les bornes de u sont $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2-1}\,du = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \Big(1 + \frac{1}{u^2-1}\Big)\,du \\ &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}\,du \\ &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1}\,du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1}\,du \\ &= \Big[2u + \operatorname{Log}\Big(\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|\Big)\Big]_{\sqrt{3}}^2 = 4 - 2\sqrt{3} + \operatorname{Log}\Big(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\Big).\end{aligned}$$

iii) Le changement de variable à poser est $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = \frac{\pi^2}{16} = \varphi\big(\frac{\pi}{4}\big)$ et $b = \frac{\pi^2}{9} = \varphi\big(\frac{\pi}{3}\big)$, les bornes de u sont $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} u\cos(u)\,du \overset{(*)}{=} 2\Big[u\sin(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u)\,du \\ &= 2\Big[u\sin(u) + \cos(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ ,\end{aligned}$$

où on a intégré $(*)$ par parties avec $f'(u) = \cos(u)\,,\ g(u) = u$.

Exercice 6.

La formule du changement de variable pour $x = \varphi(u)$ avec $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du \quad \text{avec} \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b\,.$$

On pose alors le changement de variable $x = \varphi(u) = u^{1/33}$. Ainsi on a $a = 0 = \varphi(\alpha)$ et $b = \pi^{1/33} = \varphi(\beta)$ si bien que les nouvelles bornes de l'intégrale par rapport à u sont $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$.
Comme

$$\varphi'(u) = \frac{1}{33}\,u^{1/33-1}\,,$$

on a

$$\varphi(u)^{32}\varphi'(u) = u^{32/33}\cdot\frac{1}{33}\,u^{1/33-1} = \frac{1}{33}$$

et l'expression à intégrer en u est

$$\sin\big(\sin\big(\varphi(u)^{33}\big)\big)\cos\big(\varphi(u)^{33}\big)\varphi(u)^{32}\,\varphi'(u) = \frac{1}{33}\,\sin(\sin(u))\,\cos(u)\,.$$

L'intégrale est alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\, \cos(x^{33})\, x^{32}\, dx &= \frac{1}{33}\int_0^{\pi} \sin(\sin(u))\cos(u)\, du \\
&= \frac{1}{33}\Big[-\cos(\sin(u))\Big]_0^{\pi} \qquad \text{car } \big(\sin(u)\big)' = \cos(u) \\
&= \frac{1}{33}\Big(-\cos(\sin(\pi)) + \cos(\sin(0))\Big) \\
&= \frac{1}{33}(-\cos(0)+\cos(0)) = 0\ .
\end{aligned}$$

Exercice 7.

i) Par le théorème fondamental du calcul intégral on a $f'(x) = \mathrm{Log}(1+x^2)$. On va donc trouver le développement limité d'ordre 6 de f' autour de 0 et ensuite intégrer comme au § 7.8 du cours. Puisque

$$\mathrm{Log}\big(1+x^2\big) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + x^6\varepsilon(x)\,,$$

on obtient en intégrant

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{21}x^7 + x^7\varepsilon(x)\,.$$

Pour l'intégration du reste $x^n\varepsilon(x)$, il faut utiliser le théorème de la moyenne (cf. démonstration vue au cours).

ii) On commence par écrire f comme composée de deux fonctions :

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\, dt = (h\circ g)(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h(u) = \int_0^{u} e^{\sin(t)}\, dt\,.$$

Pour calculer le développement limité d'ordre 7 (ou 8) de f, il suffit donc de calculer le développement limité d'ordre 4 de h ou, par le théorème fondamental du calcul intégral, le développement limité d'ordre 3 de $e^{\sin(t)}$. On a

$$\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\ .$$

Il faut substituer ce développement limité dans celui de la fonction e^s autour de $\sin(0) = 0$, c'est-à-dire dans

$$e^s = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + s^3\varepsilon(s)\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
e^{\sin(t)} &= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^3 + t^3\varepsilon(t) \\
&= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3\right) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t) \\
&= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)\,.
\end{aligned}$$

En intégrant on trouve le développement limité de la fonction h autour de $u = 0$,

$$h(u) = \int_0^u \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)\right) dt = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + u^4\varepsilon(u)\,,$$

et donc

$$f(x) = h(x^2) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^8\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 8.

i) C'est une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \int_1^\infty \frac{\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx\,.$$

On intègre dans l'intégrale de droite par parties avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ $[\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}]$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}]$

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}(x)\right]_1^R - \int_1^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R) + \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R) - \left[\frac{1}{x}\right]_1^R\\ &= -\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R) - \frac{1}{R} + 1\,.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale généralisée I on trouve donc

$$\begin{aligned}I = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R) - \frac{1}{R} + 1\right)\\ &= 1\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé Bernoulli-l'Hospital pour calculer la limite

$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R)\right) = -\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{Log}(R)}{R} = -\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0\,.$$

ii) C'est une intégrale généralisée de type 1 qui s'écrit

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx\,.$$

Pour calculer l'intégrale à droite, on pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2 + 1$, $\varphi'(u) = 2u$ et on écrit $\delta = \varepsilon^2$ avec $\varepsilon > 0$ pour simplifier la notation. Comme x varie entre $1 + \varepsilon^2 = \varphi(\varepsilon)$ et $2 = \varphi(1)$, on a

$$\begin{aligned}I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon^2}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(u)}{\sqrt{\varphi(u)-1}}\,\varphi'(u)\,du\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2}}\,2u\,du = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 2(u^2+1)\,du\\ &= 2\int_0^1 (u^2+1)\,du\\ &= 2\left[\frac{1}{3}u^3 + u\right]_0^1 = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,.\end{aligned}$$

Notez qu'on a pu enlever la limite parce que l'expression en u est (dans ce cas, pas de manière générale) bien définie aux nouvelles bornes.

iii) Il s'agit d'une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ $[\Rightarrow f(x) = -e^{-x}]$ et $g(x) = \sin(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = \cos(x)]$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \Big[-\sin(x)\, e^{-x} \Big]_0^R + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \big(-\sin(R)\, e^{-R}\big) + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty} \big(\sin(R)\, e^{-R}\big) = 0$. En effet, on a $\lim_{R\to\infty} e^{-R} = 0$ et $-1 \le \sin(R) \le 1$, ce qui permet de conclure par le théorème des deux gendarmes.

On intègre une deuxième fois par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \cos(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \Big[-\cos(x)\, e^{-x} \Big]_0^R - \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \big(-\cos(R)\, e^{-R} + 1 \big) - I \\ &= 1 - I \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty} \big(-\cos(R)\, e^{-R} \big) = 0$ (conclusion par le théorème des deux gendarmes comme ci-dessus).

On a donc $I = 1 - I$, ou

$$I = \frac{1}{2}\,.$$

iv) Cette intégrale de type 3 est définie par la limite

$$I = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} I_{\varepsilon,R}$$

avec

$$I_{\varepsilon,R} = \int_\varepsilon^R e^{-x}(1-x)\,\mathrm{Log}(x)\, dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}]$. Pour trouver $f(x)$ qui est une primitive de $f'(x)$, on intègre aussi par parties avec $u'(x) = e^{-x}$ $[\Rightarrow u(x) = -e^{-x}]$ et $v(x) = 1 - x$ $[\Rightarrow v'(x) = -1]$. Ainsi on obtient

$$f(x) = \int e^{-x}(1-x)\, dx = -e^{-x}(1-x) - \int (-e^{-x})(-1)\, dx = x\, e^{-x}\,.$$

On a donc

$$I_{\varepsilon,R} = \Big[x\,e^{-x}\,\mathrm{Log}(x)\Big]_{\varepsilon}^{R} - \int_{\varepsilon}^{R} x\,e^{-x}\,\frac{1}{x}\,dx = R\,e^{-R}\,\mathrm{Log}(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\,\mathrm{Log}(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{R} e^{-x}\;dx$$

$$= R\,e^{-R}\,\mathrm{Log}(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\,\mathrm{Log}(\varepsilon) - \Big[-e^{-x}\Big]_{\varepsilon}^{R} = R\,e^{-R}\,\mathrm{Log}(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\,\mathrm{Log}(\varepsilon) + e^{-R} - e^{-\varepsilon}\,.$$

Puisque $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\,\mathrm{Log}(\varepsilon)) = 0$ (Bernoulli-l'Hospital) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{\varepsilon,R} = R\,e^{-R}\,\mathrm{Log}(R) + e^{-R} - 1$$

et puisque

$$\lim_{R\to\infty} R\,e^{-R}\,\mathrm{Log}(R) = \lim_{R\to\infty}\frac{R\,\mathrm{Log}(R)}{e^{R}} = 0$$

par Bernoulli-l'Hospital, on a finalement

$$I = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{\varepsilon,R} = -1\,.$$

Exercice 9.

Pour intégrer des fractions polynomiales du type *i*), *ii*) et *iii*), la méthode des éléments simples est particulièrement adaptée.

i) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}\,, \qquad \text{avec} \qquad \alpha=-2, \quad \beta=2, \quad \gamma=3.$$

Ainsi

$$\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx = -2\,\mathrm{Log}\,|x| + 2\,\mathrm{Log}\,|x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

ii) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha x+\beta}{1+x^2} + \frac{\gamma x+\delta}{(1+x^2)^2}\,, \qquad \text{avec} \qquad \alpha=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=-1, \quad \delta=0,$$

d'où

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{-x}{(1+x^2)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\big(1+x^2\big) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

iii) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha=2, \quad \beta=2, \quad \gamma=-1.$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = 2\,\mathrm{Log}(|x|) - \mathrm{Log}(|x-1|) - \frac{2}{x} + C.$$

iv) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{4x}{x^4-1}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \mathrm{Log}\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1} \right) + C.$$

Exercice 10.

Soit la fonction $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$. L'aire cherchée est alors

$$t = xy - 2\int_1^x f(w)\, dw = xy - 2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\, dw\ .$$

On pose $w = \varphi(u) = \mathrm{ch}(u)$. Ainsi $\varphi'(u) = \mathrm{sh}(u)$ et u varie entre 0 et $a := \mathrm{Argch}(x)$ car $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(a) = x$. L'intégrale devient

$$2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\, dw = 2\int_0^a \sqrt{\mathrm{ch}(u)^2 - 1} \cdot \mathrm{sh}(u)\, du = 2\int_0^a \mathrm{sh}(u)^2\, du =: I\ .$$

Pour calculer I, on intègre par parties avec $f'(u) = g(u) = \mathrm{sh}(u)$:

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^a \mathrm{sh}(u)^2\, du &= 2\Big[\mathrm{ch}(u)\,\mathrm{sh}(u) \Big]_0^a - 2\int_0^a \underbrace{\mathrm{ch}(u)^2}_{=1+\mathrm{sh}(u)^2}\, du \\ &= 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a) - 2\int_0^a 1\, du - I\ . \end{aligned}$$

Il suit que

$$I = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a) - a = x\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{=y} - \mathrm{Argch}(x) = xy - \mathrm{Argch}(x)\,.$$

Ainsi $t = xy - I = \mathrm{Argch}(x)$ et donc $x = \mathrm{ch}(t)$, $y = \sqrt{x^2-1} = \mathrm{sh}(t)$.

Exercice 11.

Q1 : VRAI.
Soit $a \in I$ (donc a n'est pas une borne de I). On va montrer que pour tout $x \in I$, la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est une primitive de f en vérifiant que $F'(x) = f(x)$ à l'aide de la définition de la dérivée. En effet, on a

$$\begin{aligned} F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right) \\ = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Noter que la dernière égalité reste vraie pour $h < 0$ car $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$. Par le théorème de la moyenne (f est continue sur l'intervalle $[x, x+h] \subset I$ si $h > 0$ ou $[x+h, x] \subset I$ si $h < 0$), il suit que $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(u_h)h$ pour un $u_h \in]x, x+h[$ si $h > 0$ ou $u_h \in]x+h, x[$ si $h < 0$. Ainsi on a

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} hf(u_h) = \lim_{h\to 0} f(u_h) = f(x)$$

parce que $u_h \to x$ quand $h \to 0$ et que f est continue sur I.

Q2 : VRAI.
Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a, b[$ tel que $0 = \int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. Comme $b > a$, on doit avoir $f(u) = 0$.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 2]$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} \geq 0$ mais $f(-1) = -1 < 0$.

Q4 : VRAI.
Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. Comme on a $f(u) < 0$ et que $b > a$, le résultat suit.

Q5 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2, -1]$. Ainsi $f(x) \leq 0$ sur $[-2, -1]$ mais $F(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0$ pour tout $x \in [-2, -1]$.

Q6 : FAUX.
Considérer par exemple la fonction constante $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $F(x) = x + 1$ est une primitive de f mais

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x dt = x - 0 = x \neq x + 1 = F(x).$$