Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 30 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________________

PRENOM : ______________________________

Groupe ☐

1. Montrer le théorème suivant en utilisant une méthode par l'absurde.
Soit E un ensemble.

$$\forall A, B \subset E, \quad A \subset B \Rightarrow \bar{A} \cup B = E\,.$$

2.5 pts

2. Démontrer par récurrence la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}\,.$$

3 pts

3. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ [-1, \rightarrow [& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x', y') = (\sqrt{x+1} - 1, x - 3). \end{array}$$

(a) Calculer Imf et donner sa représentation graphique (échelle : 2 carrés par unité).

(b) f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

3 pts

4. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \\ & x & \longmapsto & (x', y') = (x^2 - 1, x^2 - 2x). \end{array}$$

(a) Déterminer le plus grand ensemble A pour que f soit une application.

Soit encore g l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x', y') = (x + y, y + 1). \end{array}$$

(b) Définir l'application $g \circ f$.

(c) $g \circ f$ est-elle injective ? Justifier votre réponse.

3.5 pts

5. Soient l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$, et l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans E définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & E \\ & A & \longmapsto & f(A) = \begin{cases} \max(A) & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset\,, \end{cases} \end{array}$$

où $\max(A)$ est le plus grand élément de A .

(a) Soit $K = \{\{2, 5, 7\}, \{6, 7, 8\}, \{1, 6, 7\}\}$. Calculer $f(K)$.

(b) f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

(c) f est-elle injective ? Justifier votre réponse.

(d) Calculer $f^{-1}(\{2\})$ et donner le nombre de ses éléments.
Donner le nombre des éléments de $f^{-1}(\{3\})$.
Soit $n' \in E$, $n' \geq 1$. Proposer une expression pour le nombre des éléments de $f^{-1}(\{n'\})$ en donnant un argument justificatif (on ne demande pas de démonstration).

3 pts