4 avril 2012

Contrôle d'analyse II no 3

Durée: 1 heure 45'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. Résoudre sur R l'équation suivante:

$$x^{\ln\left(x^2\right)} = e^{(\ln x+1)}$$

2 pts

2. Résoudre dans les nombres complexes l'équation suivante :

a) $z^2 - (\sqrt{3}+i)z + 1 = 0$

b) Donner, sous forme algébrique, les solutions de l'équation :

$$\left(z^2 - (\sqrt{3}+i)z + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}\right)^3 = i\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

6 pts

3. a) Calculer la dérivée de la fonction f(x) = tg(Arcsin(Thx)) ;

b) Montrer que, $\forall x \in R$, f(x) = Shx ;

c) Simplifier l'expression de Sh(Arthx). 4 pts

4. Des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont situés, dans cet ordre et à équidistance, sur un cercle de rayon *r* centré en $\Omega(-2\ ; -2)$.

Données :

les points $P_1 = (2\ ;-2)$, $P_2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2}-2;\sqrt{6}-\sqrt{2}-2)$ et $P_3 = (2\sqrt{3}-2;0)$;

a) faire un dessin soigné (unité = 2 carrés) et calculer le rayon *r* du cercle ;

b) montrer à l'aide de l'angle $\angle(\Omega P_1\ ; \Omega P_3)$ que le nombre de points $n = 24$;

c) utilisez un calcul par les complexes pour donner les coordonnées de P_4. 3 pts

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire de trigonométrie

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{Ch}(x-y) = \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{Sh}(x-y) = \mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x \cdot \mathrm{Sh}\,y$$

$$\mathrm{Th}(x+y) = \frac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1 + \mathrm{Th}\,x \cdot \mathrm{Th}\,y} \qquad \mathrm{Th}(x-y) = \frac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1 - \mathrm{Th}\,x \cdot \mathrm{Th}\,y}$$

$$\mathrm{Ch}x + \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \mathrm{Ch}x - \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\mathrm{Sh}x + \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Ch}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \mathrm{Sh}x - \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \mathrm{Sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall x \in \mathrm{R} \qquad \mathrm{Ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,; \quad \mathrm{Sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}\,; \quad \mathrm{Th}\,x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{où } t = \mathrm{Th}\,\frac{x}{2}$$

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \mathrm{Arch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \forall x \in]1,+\infty[, \quad \mathrm{Arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\forall x \in \mathrm{R}, \quad \mathrm{Arsh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \forall x \in \mathrm{R}, \quad \mathrm{Arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arth}\,x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\forall x \in \mathrm{R} \setminus [-1;1], \quad \mathrm{Arcoth}\,x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \forall x \in \mathrm{R} \setminus [-1;1], \quad \mathrm{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\mathrm{tg}'\,x = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{Arctg}'\,x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1;1[, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$