1.6.19

Série 21

1. Calculer

(a) $\sin i$

(b) $\cos i$

(c) $\tan(1+i)$

2. Exprimez $\cosh(z)$ et $\sinh(z)$ en fonction de $\sin(iz)$ et $\cos(iz)$. Déduisez-en des formules d'addition pour $\cosh(2z)$ et $\sinh(2z)$.

3. Décomposez $\cos(x+iy)$ et $\sin(x+iy)$ en leur parties réelles et imaginaires.

4. Montrez que pour $z = x + iy$, on a

$$|\cos(z)|^2 = \sinh^2(y) + \cos^2(x)$$

et

$$|\sin(z)|^2 = \sinh^2(y) + \sin^2(x).$$

Que peut-on en conclure pour les valeurs de $|\sin z|$ et $|\cos z|$? Quelle différence notable existe-t-il avec le cas réel?

5. Résolvez pour $z \in \mathbb{C}$

(a) $\exp(z) = 1$

(b) $\sin(z) = 1$

6. Soit $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[r_n, \varphi_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, montrez l'équivalence entre les affirmations suivantes:

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

(b) $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

(d) $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \mod 2\pi$.

oblème récréatif: On choisit trois points A B et C distincts au hazard sur le cercle unitÃ© centrÃ© en $(0,0)$. (Faire un dessin). Quelle est la probabilitÃ© que le triangle de sommets ABC contiennent le centre du cercle?

Solutions

S1 (a) $i\,\frac{e^1-e^{-1}}{2}$

(b) $\frac{e^1+e^{-1}}{2}$

(c) $\frac{\sin(2)-i\,\cosh(2)}{\cosh(2)+\cos(2)}$

S2 $\sinh(2z) = 2\sinh(z)\cosh(z), \quad \cosh(2z) = \cosh^2(z) + \sinh^2(z).$

$\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y), \quad \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

S4 $P_4(X) = (X + 2)^4 - 11(X + 2)^3 + 44(X + 2)^2 - 75(X + 2) + 45$

S5 (a) $z = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(b) $z = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$