Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 11**

Exercice 1. *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les espaces propres des matrices A et B.

b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

c) Dans le cas où la matrice $X \in \{A, B\}$ est diagonalisable, trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}XP$ soit diagonale.

Exercice 2. *Vérifier que $\pi - 1$ et $\pi + 3$ sont des valeurs propres de la matrice*

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10}.*

b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; \text{et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point a).

Exercice 4. *Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

b) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Ecrire la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *a) Vérifier que les vecteurs*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; \text{et } v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par rapport au produit scalaire

$$(A|B) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}, \; \text{pour } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

b) Calculer ensuite les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) du vecteur $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *Supposons que le polynôme caractéristique d'une matrice A soit de la forme*

$$p_A(x) = (x-1)(x-3)^2(x-4)^3.$$

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A ?

c) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A si on sait de plus que A est diagonalisable ?

d) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants associés au même espace propre de A, que peut-on dire sur la valeur propre ?

e) Donner deux matrices non semblables C et D avec polynôme caractéristique $(x-1)(x-3)^2(x-4)^3$.

Exercice 7. *On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire euclidien. Soient*

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Representer les vecteurs et essayer de repondre aux questions suivantes sans faire des calculs. Vérifier après.

1. *Est-ce que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?*
2. *Est-ce que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ?*
3. *Ecrire un vecteur $\vec{z}$ orthogonal à $\vec{w}$ de norme* 30.
4. *Parmi $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui est le vecteur le plus distant de $\vec{w}$?*

Exercice 8. *On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien. Soient*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.*
2. *En utilisant le fait que $\mathcal{B}$ est orthogonale, écrire $[\vec{z}]_{\mathcal{B}}$.*
3. *Exprimer le vecteur $\vec{z}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*

Exercice 9. *Soit les vecteurs*

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$.

(b) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(c) Trouver une base de l'espace orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 10. *Démontrer que les applications*

$$(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}.$$

suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel V.

a) $V = C^\infty([0,1])$ (l'espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables et définis sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) avec

$$(f|g) := \int_0^1 (f'(x)g'(x) + f(x)g(x))dx, \text{ pour } f, g \in V.$$

b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *avec*

$$(p|q) := a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2, \text{ où } p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ et } q = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

c) $V = \mathbb{R}^4$ *avec*

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) := v_1w_1 + 2v_2w_2 + v_3w_3 + 3v_4w_4,$$

lorsque $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ *et* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Exercice 11. *Choix Multiple.*

a. Soit A *une matrice de taille* 3×3 *telle que* $A^3 = I_3$. *Parmi les affirmations suivantes laquelle est toujours vraie ?*

☐ *Alors* dim Ker$A = 1$ *et* 0 *est valeur propre de* A.

☐ *Alors* dim Ker$A = 0$ *et* 0 *est valeur propre de* A.

☐ *Alors* dim Ker$A = 0$, *mais* 0 *n'est pas valeur propre de* A.

☐ *Alors* 2 *est une valeur propre de* A.

b. Soit A *une matrice de taille* 3×3 *avec* $c_A(t) = (t-1)^2(t+1)$.

☐ *Alors* A *est toujours diagonalisable.*

☐ *Alors* A *a pour valeurs propres* 1 *et* -1.

☐ *Alors* A *n'est jamais diagonalisable.*

☐ *Si* A *est diagonalisable, alors il existe des vecteurs linéairement indépendants* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $Av_i = -v_i$ *pour* $i = 1, 2$

Exercice 12. *Vrai ou faux, avec justification.*

a) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Si* A *est diagonalisable, alors* A *est inversible.*

b) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Si* 0 *est une valeur propre de* A, *alors* A *n'est pas inversible.*

c) Soit $T : V \to V$ *une transformation linéaire avec polynôme caractéristique*

$$p_T(t) = (1-t^2)(t-1)(t-2).$$

Alors, T *est diagonalisable.*

d) Soit $A, P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *avec* P *inversible, telles que* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors,* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ *et* $\lambda_3 = 2$ *sont les valeurs propres de* A *et par conséquent* A *est diagonalisable.*

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$, *considérons le produit scalaire*

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Montrer que pour tout n *la famille de vecteurs* $\{\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx\}$ *est orthogonale (c'est-à-dire que ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux).*

Exercice 14 (A faire plus tard si vous souhaitez voir d'autres exercices sur la diagonalisation, pendant la période de révision.)**.** *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Ecrire pour chaque matrice le polynôme caractéristique.*
2. *Trouver pour chaque matrice les valeurs propres et les espaces propres correspondants.*
3. *Dites lesquelles sont diagonalisables et trouver une base et une forme diagonale où elle existe.*