Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. On considère la proposition suivante :

$$T: \quad \forall\, n\,, m \in \mathbb{N}^*, \quad m^2 + 2n^2 - 1 \text{ est impair ou multiple de } 8$$
$$\Longrightarrow \quad m \text{ est pair} \quad \text{ou} \quad n \text{ est pair.}$$

a) Ecrire la proposition réciproque de T, notée R, en précisant le référentiel, l'hypothèse et la conclusion (on ne demande pas sa démonstration).

b) Ecrire la proposition contraposée de T, notée C, en précisant le référentiel, l'hypothèse et la conclusion, puis démontrer C par la méthode directe.

c) Ecrire la négation non$T$ de T et donner sa valeur de vérité en la justifiant.

6 pts

2. Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ $(-1, 0 \notin A)$ et l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}\,. \end{array}$$

a) Si $A = \left]\leftarrow, -1\right[\,\cup\, \left]-1, -\frac{1}{2}\right]$, f est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

b) Si $A = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, restreindre l'ensemble d'arrivée de f pour qu'elle soit surjective.

5.5 pts

Tourner la page

3. Soient les applications f et g définies par

$$\begin{array}{rrcl} f\ : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (1+\sqrt{x}, x+\sqrt{x}-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2-y\,. \end{array}$$

a) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et le représenter graphiquement (échelle : 1 cm par unité).

b) Déterminer $f^{-1}\big([\,0,3\,]\times[\,-2,\rightarrow[\,\big)$.

c) Définir l'application $g\circ f$.

d) Peut-on définir l'application $f\circ g$? Justifiez rigoureusement votre réponse.

6.5 pts

4. Montrer par récurrence l'affirmation suivante :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n!\leq n^n\,.$$

2 pts