Physique Générale (Mécanique) STI-I et STI-II **Sections EL, MT & MX**

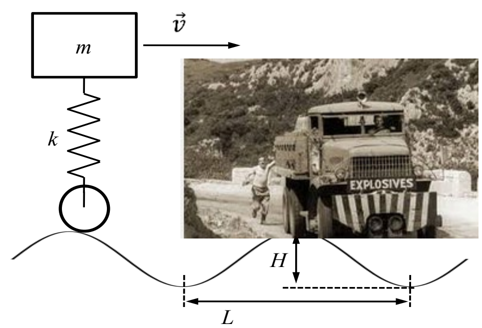
Daniele Mari & Nicolas Grandjean **Série 10** 18/11/2020

Exercice 1** (30 min) **: Le pendule amorti**

On considère un pendule simple, de longueur L et de masse m. Ce pendule est soumis à la force de pesanteur et oscille dans un plan vertical. On plonge ce même pendule dans l'eau. Il en résulte une force de frottement fluide, dont les coefficients de viscosité et de forme sont respectivement notés η et K.

a) Déterminez l'équation du mouvement du système dans l'approximation des petits angles.
b) Quelle est la forme de la solution $\theta(t)$?
c) Tracez l'évolution de l'angle du pendule en fonction du temps pour les différents types d'amortissement, en considérant un angle initial nul et une vitesse initiale non nulle.

Exercice 2** (40 min) **: Le salaire de la peur** (inspiré du film éponyme, Palme d'Or 1953)



On cherche à modéliser le passage d'un camion chargé de nitroglycérine sur un champ de bosses (route en « tôle ondulée ») de la façon suivante :
Un point matériel de masse m avance avec une vitesse horizontale $\vec{v}$ constante. La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort amorti de constante élastique k et de longueur au repos nulle pour simplifier. On considère une force d'amortissement de type $\vec{f} = -K\eta\vec{v}$. Au bout du ressort, une roue de masse nulle (négligeable par rapport à celle du camion) suit le profil du sol. On suppose que le dispositif qui maintient le ressort à la verticale n'intervient pas dans le mouvement de la masse.

a) Le profil de la route est modélisé par une courbe sinusoïdale, avec des bosses de hauteur H et longueur L. Montrer que l'équation horaire du point de contact entre la roue et la route, i.e. la hauteur, est donnée par : $h(t) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}vt\right)$, en prenant l'origine des temps telle que la roue soit à mi-chemin entre un creux et une bosse de la sinusoïde.
b) En déduire l'équation du mouvement du point matériel (mouvement dans la direction verticale).
c) Existe-t-il une vitesse critique ? Si oui, donnez son expression. Quelle devrait-être la vitesse optimale ?

Exercice 3(* c))** (40 min) **: Gotham City**

Le Joker a réussi à piéger Batman ! Ce dernier se retrouve suspendu au bout d'une corde de longueur l entre deux hélices géantes tranchantes comme des lames de rasoir. Ces deux hélices tournent à des vitesses variables, de telle manière que le souffle qui en résulte exerce une force totale $\vec{F}_h = F_o\, sin(\Omega t)\, \vec{e}_\theta$ (perpendiculaire à la corde) sur Batman. On assimile Batman à un point matériel de masse m qui oscille dans un plan contenant les axes de rotation des hélices et on considère la corde comme étant rigide. On néglige de plus les frottements.

a) Donnez l'équation du mouvement de Batman dans l'approximation des petites oscillations.
b) Exprimez l'amplitude des oscillations de Batman ainsi que la pulsation de résonnance Ω_r.
c) La rotation des hélices est contrôlée par le Joker, de telle sorte que ce dernier puisse ajuster la pulsation Ω de la force s'exerçant sur Batman. Par ailleurs, les hélices sont assez éloignées pour que l'approximation des petits angles ne soit plus vraie quand Batman s'en approche. Le Joker étant joueur, il propose au héros de choisir entre une pulsation légèrement supérieure ou inférieure à la pulsation de résonnance Ω_r (calculée au point b). Lequel de ces choix sauvera Batman ? Justifiez sans calcul.

Indications : Dans l'approximation des petits angles $sin\,\theta \approx \theta$. De plus, la solution d'une équation différentielle du type $A\ddot{\theta} + B\theta = C\, sin(\omega t + \varphi)$ est de la forme $\theta(t) = \theta_0\, sin(\omega t + \varphi)$.

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps qui considéré en conditions d'examen

***

Exercice S10.1** (40 min) **: L'oscillateur forcé et puissance dissipée**

On considère un oscillateur harmonique en régime sinusoidal forcé par une force $F_0 \cos \omega_e t$, constitué d'un ressort de raideur k accroché à une masse m et amorti par un frottement fluide avec un coefficient de frottement $b_l = K\eta$.

1. Rappeler l'expression de la position de la masse x(t) en fonction de données du problème et de la pulsation d'excitation ω_e.
2. Calculer l'énergie dissipée au cours d'une periode $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$.
   On donne $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \pi$. Ceci est obtenu grâce à : $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = I \Rightarrow 2I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \Rightarrow 2I = 2\pi \Rightarrow I = \pi$.
3. En déduire la puissance dissipée en régime permanent.
4. Un oscillateur à ressort amorti, excité à la résonance nécessite une puissanceP_r pour compenser l'amortissement. La masse amortie est désignée par m. Si l'on éteint la machine, l'amplitude diminue de moitié en l'espace d'une seconde.

   Quelle est l'amplitude lorsque la machine est en route ?
   A.N. : $f_{res} = 20$ Hz ; $P_r = 800$ W ; $m = 100$ kg.

<u>Formulaire :</u>

Coordonnées polaires :
$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Coordonnées cylindriques :
$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques
$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$