Cours du Prof. Marco Picasso
Juin 2021
Durée: 2h15

Examen d'Analyse IV, 2021
Sections MT, SV

Introduction

Tentative de reconstitution de l'examen d'Analyse IV du 24 Juin 2021. L'examen est sur un total de 11.25 points. Ceci est une reconstitution faite de mémoire, l'exactitude des questions n'est pas garantie.

Chaque QCM possède une ou plusieurs réponses correctes. Pour les QCM ayant N bonnes réponses et M mauvaises réponses, on comptera:

- $+1/N$ points pour chaque bonne réponse cochée
- $-1/M$ points pour chaque mauvaise réponse cochée
- 0 points en cas d'abscence de réponse

Aucun document n'est permis, la calculatrice interdite.

Partie 1 - Questions à Choix Multiples

Exercice 1:

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support compact. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$, $f(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$. Soit Df la dérivée au sens des distributions de f. On rappelle que, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle Df, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$, avec $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. De plus, la fonction delta de Dirac est telle que $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$
Alors:

- ☐ $Df = -f + \delta$
- ☐ $Df = f$
- ☐ $Df = f + \delta$
- ☐ $Df = -f$

Exercice 2:

Soit γ le cercle centré en 0 et de rayon 1.
Pour quelles fonctions a-t-on $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$?

- ☐ $f(z) = \frac{1}{z}$
- ☐ $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2}$
- ☐ $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$
- ☐ $f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$
- ☐ $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3}$

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple fermée régulière, $z_0 \in \text{int}(\gamma)$.
Alors:

- ☐ $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
- ☐ $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- ☐ $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$
- ☐ $f^{(n)}(z_0) = \displaystyle\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz$
- ☐ $\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq z_0,\ \displaystyle\frac{f(z)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}$
- ☐ $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$
- ☐ can't remember

Exercice 4:

Cochez les bonnes affirmations:

- ☐ $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,\ |z| < 1$
- ☐ $\displaystyle\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},\ z \in \mathbb{C}$
- ☐ $\displaystyle e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n},\ z \in \mathbb{C}, z \neq 1$
- ☐ $\displaystyle\frac{1}{z(1+z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1},\ |z| < 1$ *(je ne sais plus si l'énoncé précise que $z \neq 0$)*

Exercice 5:

Soit $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin(\theta)}$, γ le cercle centré en 0 de rayon 1. On donne $z_1 = (\sqrt{5}+2)i$, $z_2 = (\sqrt{5}-2)i$.
Alors:

- ☐ $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{2}{-z^2 + iz\sqrt{5} + 1}\,dz$
- ☐ $I = \pi$
- ☐ $I = 2\pi i\,\text{Res}_{z_2}\left(\dfrac{2}{-z^2 + 2iz\sqrt{5} + 1}\right)$
- ☐ $I = 2\pi$

Exercice 6:

Soit $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisfaisant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On note $\hat{u}(\alpha, t) = \mathcal{F}(u(x,t))(\alpha)$, et on donne:

- $\mathcal{F}(f'')(\alpha) = (i\alpha)^2 \mathcal{F}(f)(\alpha)$
- $\mathcal{F}(f(x+a))(\alpha) = e^{i\alpha a}\mathcal{F}(f)(\alpha)$

Alors:

☐ $\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\alpha, t) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha, t) = 0$

☐ $\hat{u}(\alpha, t) = \hat{u}(\alpha, 0)\cos(\frac{\alpha t}{2})$

☐ $\hat{u}(\alpha, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x + \frac{\alpha}{2}t) + u_0(x - \frac{\alpha}{2}t)}{2} e^{-i\alpha x}\, dx$

☐ $u(x,t) = \dfrac{u_0\left(x + \frac{t}{4}\right) + u_0\left(x - \frac{t}{4}\right)}{2}$

Partie 2 - Questions Ouvertes

Exercice 1:

Soit l'équation différentielle:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y' + y = 1, \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On note $Y(z)$ la transformée de Laplace de y.

1) Expliciter $Y(z)$, décomposer en éléments simples.
2) En déduire $y(t)$, vérifier que la fonction trouvée satisfait l'équation et les conditions initiales.

Exercice 2:

Soit $u : [0,1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisfaisant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sin(2\pi x) & 0 < x < 1,\, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

On cherche la solution sous la forme:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}(t)\sin(\pi(2k+1)x) + f(t)\sin(2\pi x)$$

Expliciter $b_{2k+1}(t)$ et $f(t)$.

Indication: la solution de

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = b & a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

.

Exercice 3:

Soient $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z+2)}$, $r > 2$, $\Gamma_r = C_r \cup L_r$ avec $C_r = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$ et $L_r = \{z \in \mathbb{C} : z = is, -r \leq s \leq r\}$. On cherche pour $t > 0$ une fonction $f(t)$ qui admet $F(z)$ comme transformée de Laplace.

D'après un théorème du cours, nous avons pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(is)e^{ist}\, ds$.

1) Utiliser le théorème des résidus pour exprimer $\displaystyle\int_{\Gamma_r} F(z)e^{zt}\, dz$.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} F(z)e^{zt}\, dz = 0$.

3) En dédure l'expression de $f(t)$.