LANGAGE ENSEMBLISTE

- Collection. Appartenance

On considère comme acquise la notion intuitive d'ensemble en tant que "collection d'objets".

Les objets d'un ensemble E sont appelés éléments de cet ensemble. Les éléments d'un ensemble doivent être décrits d'une façon non-ambigüe : il doit toujours être possible de déterminer si un élément donné fait partie ou non de l'ensemble.

On note :

$x \in E$	:	x est un élément de l'ensemble E, x appartient à l'ensemble E
$x \notin E$	:	x n'appartient pas à E

Quatre ensembles de nombres sont fondamentaux :

$\mathbb{N}$	:	ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{Z}$	:	ensemble des nombres entiers (ou entiers rationnels ou relatifs)
$\mathbb{Q}$	:	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	:	ensemble des nombres réels

Exemple :

$\sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

- Sous-ensemble. Inclusion. Ensemble vide. Egalité

Très souvent, lorsque l'ensemble A est constitué de certains éléments d'un ensemble E (référentiel), on décrit les éléments x de A au moyen d'une propriété P, ou condition, qu'ils vérifient. On note alors :

$$\begin{aligned} A &= \{x \,|\, x \text{ vérifie } P\} = \{x \,|\, P(x)\} \text{ ou} \\ A &= \{x \in E \,|\, x \text{ vérifie } P\} = \{x \in E \,|\, P(x)\} \end{aligned}$$

On définit :

$A \subset E$	:	tout élément de A est un élément de E; on dit : A est une partie ou sous-ensemble de E, ou A est inclus dans E;
$A \not\subset E$	:	A n'est pas inclus dans E
$\emptyset$	:	ensemble vide (unique) : c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément (quel que soit x, $x \notin \emptyset$) $\emptyset \subset E$ pour tout E
$A = B$	:	$A \subset B$ et $B \subset A$

- Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Associativité	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Commutativité	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Complémentaire	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = E$

$A \cup E = E$ $\quad$ $A \cup A = A$ $\quad$ $A \cup \emptyset = A$

$A \cap E = A$ $\quad$ $A \cap A = A$ $\quad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

- Partition finie de E

Les n parties A_1, A_2, $\ldots A_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ forment une partition finie de E :

$$\text{si} \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E \\ A_i \neq \emptyset \text{ pour tout } i \text{ de } 1 \text{ à } n \\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour tout les } i \text{ et } j \text{ de } 1 \text{ à } n \text{ avec } i \neq j \end{cases}$$

Exemple :

Partition de $\mathbb{N}^*$ en deux parties :
A_1 = ensemble des nombres pairs
A_2 = ensemble des nombres impairs

- Couple. Produit cartésien

$(a;\, b)$	:	couple (ou paire ordonnée) de première composante a et deuxième composante b
$(a;\, b) = (c;\, d)$	:	égalité de deux couples si et seulement si $a = c$ et $b = d$
$A \times B$	:	produit cartésien de A par $B = \{(a;\, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

Remarque :

1. $(a;\, b) \neq (b;\, a)$ si $a \neq b$
2. $A \times B \neq B \times A$ si $A \neq B$
3. On pose : $A \times A = A^2$, $A \times A^2 = A^3$, etc. Par exemple :
   $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ assimilé aux points du plan
   $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ assimilé aux points de l'espace.

VT/12

LOGIQUE		ENSEMBLES		ELEMENTS
$P \Rightarrow Q$	$\Leftrightarrow$	$A \subset B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \Rightarrow x \in B$
$P \Leftrightarrow Q$	$\Leftrightarrow$	$A = B$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{et} \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$
P ou Q	$\Leftrightarrow$	$A \cup B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A$ ou $x \in B$
P et Q	$\Leftrightarrow$	$A \cap B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A$ et $x \in B$
non$P$	$\Leftrightarrow$	$C_E A = \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$x \notin A$

			Exemples : $\forall x \in \mathbb{N}$
Enoncé direct	$A \Rightarrow B$		$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{N}$: vrai x pair $\Rightarrow x^2$ pair : vrai
Enoncé réciproque	$B \Rightarrow A$	pas nécessairement vrai si le direct est vrai	$x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$: faux x^2 pair $\Rightarrow x$ pair : vrai
Equivalence	$A \Leftrightarrow B$	énoncés direct et réciproque sont simultanément vrais	x pair $\Leftrightarrow x^2$ pair : vrai
Contraposée :			
de l'énoncé direct	non$B \Rightarrow$ non$A$	vrai ssi $(A \Rightarrow B)$ vrai faux ssi $(A \Rightarrow B)$ faux	$x^2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$: vrai $x \notin \mathbb{N} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{N}$: faux
d'une équivalence	non$A \Leftrightarrow$ non$B$	vrai ssi $(A \Leftrightarrow B)$ vrai faux ssi $(A \Leftrightarrow B)$ faux	x impair $\Leftrightarrow x^2$ impair : vrai

LOGIQUE - METHODE DE PREUVE

1. Introduction

Il y a en mathématiques trois "processus" fondamentaux: découvrir des *objets ou êtres mathématiques*, former des *propositions* entre eux et *démontrer* que ces relations sont vraies c'est-à-dire sont des *théorèmes.*
Les objets mathématiques sont entre autre les nombres, les fonctions, les ensembles, etc, qui n'existent pas à proprement parler dans la Nature. Par exemple, ils peuvent être des modèles abstraits d'objets physiques plus ou moins compliqués.
On établit entre ces objets des relations appelées *propositions*, notées A, B, P, etc. Pour construire ces propositions, on utilise entre autre un certain nombre de signes fondamentaux: *ou* (noté généralement $\vee$ en logique),
et ($\wedge$), la négation *non* ($^{-}$), *implique* ($\Longrightarrow$) appelés *connecteurs logiques.*

Exemples:

(a) A : $\sqrt{2} < 0$: A est une proposition *fausse*,
(b) non A : $\sqrt{2} \geq 0$: non A est une proposition *vraie*,
(c) B(x) : $x + 3$ est divisible par 6 : n'est pas une proposition, car n'a pas une valeur de vérité (dépend de x) : c'est une condition (ou propriété),
(d) C : $\forall x,\ y \in \mathbf{Z},\ x > 0$ et $y > 0 \Longrightarrow 2xy + 1 > 0$: C est une proposition *vraie.*

La logique formelle permet de définir les règles qui régissent l'usage des propositions et leur construction à l'aide des connecteurs. Ces règles sont pour la plupart le reflet du "bon sens". Par exemple, la proposition contraire à la proposition contraire de A est A. On note: *non* (*non* A) = A; si A est vraie, *non* A est fausse, etc.
Une *démonstration* est un ensemble de propositions reliées entre elles conformément aux règles de la logique formelle (*règles de déduction*).

A la base de toute théorie mathématique se trouve un certain nombre d'objets non définissables et de propositions supposées vraies au départ, appelées *axiomes.* Par exemple, le *point* en géométrie est un objet non défini et la proposition "par 2 points distincts passe une et une seule droite" est un axiome. La construction rigoureuse de la géométrie euclidienne repose sur 27 axiomes (déterminés par Euclide, 300 ans avant J.-C., et complétés par Hilbert en 1898). La théorie des ensembles possède, quand à elle, plusieurs systèmes d'axiomes possibles.

Ainsi, la vérité mathématique d'une proposition, au sein d'une théorie donnée, est liée à son système d'axiomes. Par exemple, la proposition "par un point P extérieur à la droite d passe une et une seule parallèle à d" est un axiome de la géométrie euclidienne, mais est fausse dans d'autres géométries (géométrie riemanienne, de Lobatchevski) ou peut en être absent (géométrie projective).

Dans un système d'axiomes donnés, il ne peut y avoir de proposition à la fois vraie et fausse (principe du tiers exclu): une telle proposition serait dite *condradictoire* et traduirait une incompatibilité des axiomes de base. On utilise ce fait dans le *raisonnement par l'absurde.*
Il est en général difficile de prouver qu'une théorie est ou non contradictoire: on ignore la réponse pour l'arithmétique et pour la plupart des théories mathématiques.

COMBINAISONS

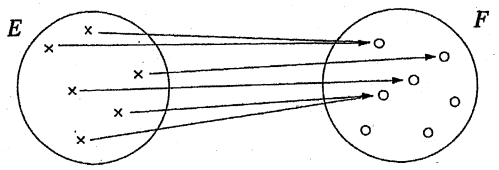
{a ; b ; c}	{a ; b ; d}	{b ; c ; d}	{a ; c ; d}	Nb de colonnes = nb de parties à 3 éléments = C_4^3
(a; b; c)	(a; b; d)	(b; c; d)	(a; c; d)	
(a; c; b)	(a; d; b)	(b; d; c)	(a; d; c)	
(b; a; c)	(b; a; d)	(c; b; d)	(c; a; d)	
(b; c; a)	(b; d; a)	(c; d; b)	(c; d; a)	
(c; a; b)	(d; a; b)	(d; b; c)	(d; a; c)	
(c; b; a)	(d; b; a)	(d; c; b)	(d; c; a)	
Dans une colonne il y a 3! = 6 lignes = P_3				

TRIANGLE ARITHMETIQUE DE PASCAL

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	***4***	***6***	4	1			
5	1	5	***10***	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…								

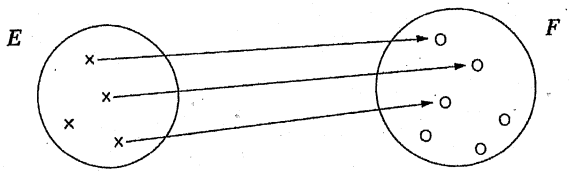
APPLICATIONS

Tout élément x de E a une image unique y dans F

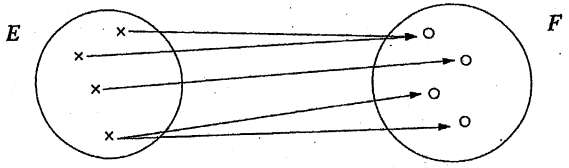


Application de E dans F

Contre-exemples

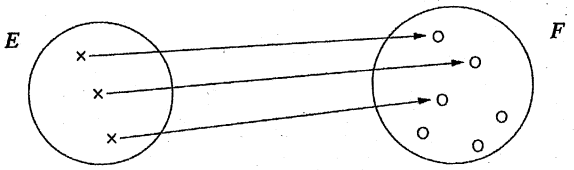


ne représente pas une application de E dans F;
car un élément de E n'a pas d'image

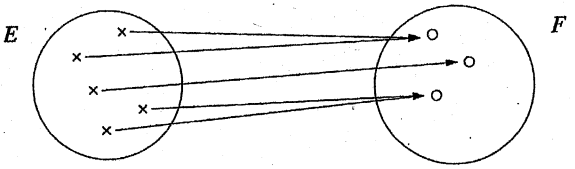


ne représente pas une application de E dans F;
car un élément de E a deux images dans F

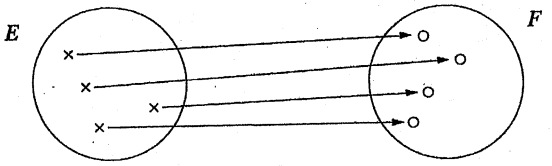
Injection - Surjection - Bijection



Injection de E dans F
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$



Surjection de E sur F
Tout élément de F est image



Bijection de E sur F

C'est l'étude de l'ensemble d'arrivée F qui permet de distinguer les différents types d'applications.

$P(x) \Rightarrow Q(x)$: Conditionnelle

si x verifie P alors x verifie Q

$P(x)$ implique $Q(x)$

En langage ensembliste on a $A \subset B$

P est plus fort que Q referentie E : géométrie

Tout carré est un rectangle

$P(x)$: être un carré

$Q(x)$: être un rectangle

$P \Rightarrow Q$

si $EFGH$ est un carré alors $EFGH$ est un rectangle

$$\boxed{P \Leftrightarrow Q \Rightarrow A = B}$$

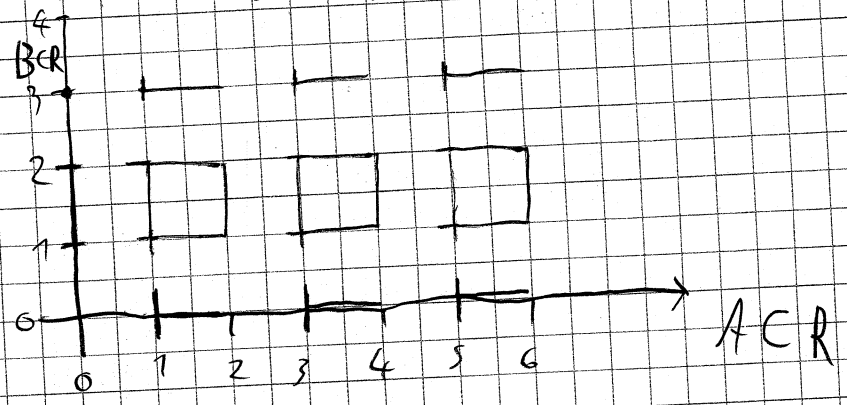
$A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$

On peut Nier $P(x)$ on Not : Non $P(x)$

non $A = \bar{A}$ $\quad C_E A = \bar{A} = \{x \in E \mid \text{non } P(x)\}$

Soit $B = [1;2] \cup \{3\}$

représentation graphique de $A \times B$



Symbole logique et ensemble

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriété sur le referentiel E

Celles-ci définissent deux sous-ensemble de E

$A = \{x \in E \mid P(x)\} \subset E$

$B = \{x \in E \mid P(x)\} \subset E$

On définit $\forall x$: quantificateur universelle de X se lit :

quelle que soit x / pour tout x s'utilise pour exprimer qu'une propriété P est vérifié pour tout X appartenant à E

$\forall x \in E, P(x)$

Ex : $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ <u>est un entier</u>

$P(x)$

$\exists x$ Quantificateur existentiel, il existe au moins un X appartenant à E

Tel que s'utilise pour exprimer qu'une propriété P est vérifié pour au moins un élément $\exists x \in E, X^2 = 2$

Produit cartésien

A, B sous ensemble de E

$A \times B = A$ croix $B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

(x,y) couple ordonné

$(x,y) \neq (y;x)$ sauf si $x = y$

$A \times B \neq B \times A$ sauf si $A = B$

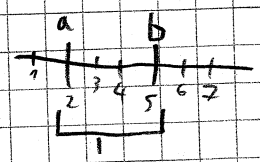
Exemple :

$E = \mathbb{R}$

Notation (hors analyse ?)

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Ex : $[2;5]$



Soit $A_i = [2i-1; 2i[$, $i = 1,2,3$

$i=1$: $A_1 = [1;2[$

$i=2$: $A_2 = [3;4[$

$i=3$: $A_3 = [5;6[$

Soit $A \bigcup_{i=1}^{3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

entier

$\cup$ = OU $A \cup B = A$ union $B = \{x \in E \mid x \in A$ ou $x \in B\}$

$\cap$ = ET $A \cap B = A$ intersection $B = \{x \in E \mid x \in A$ et $x \in B\}$

$C_E A$ = Bcomplémentaire (Not) $\bar{A}$

$= \{x \in E \mid x \notin A\}$

$A = \{x \in E \mid P(x)\}$

$C_E A = \bar{A} = \{x \in A \mid$ non $P(x)\}$

Ex :

$E = \mathbb{N}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, \dots\}$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 3k, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 5, 7, \dots\}$

Ex 2 : $E = \mathbb{N}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x \leq 6}_{P(x)}$ et $x \underbrace{\text{est impair}}_{R(x)}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)$ et $R(x)\}$

$\emptyset$ n'est pas un élément mais un ensemble (vide)

$\emptyset \subset$ tout les ensemble

$\boxed{\text{Les ensemble ne sont pas ordonné}}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x \text{ est un multiple de } 3}_{P(x)}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x = 3k, k \in \mathbb{N}}\}$

$A = \{0, 3, 6, \dots\}$

$B = \{1, \sqrt{2}, \{a\}, a\}$

$a \in B$ ⚠ $a \in \{a\}$

$\{a\} \subset B$

$\{a\} \in B$!!! ← ambigue

Opération sur les ensemble

$\mathcal{P}(E)$ c'est l'ensemble des partie de E = ensemble de tout les sous ensemble possible de E

partie

$E = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$

⚠ $a \in E$, $\{a\} \subset E$

$\{a\} \in \mathcal{P}(E)$

Q = 1,111... 1,223223...

$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

$1,\overline{257} = X$

1257,257 $1000X$ (passé la période de l'autre côté de la virgule)

$-999X$

1256 $\Rightarrow \frac{1256}{999}$ = Fraction

R = réel (π, $\sqrt{2}$, ...) plus le reste

nombre à développement décimal illimité non répétitif

Soit A et E des ensemble

A est une partie ou sous ensemble de E

$A \subset E$

E = référentiel

Lorsque c'est possible on décrit les élément de A au moyen d'une propriété caractéristique $P(x)$

$\boxed{\text{Soit } x \in E \text{ si } x \text{ vérifie } P \text{ alors } x \in A}$

$A = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } P\} =$

$A = \{x \in E \mid P(x)\}$

ordre énumération ensemble matter ?

moodle.epfl.ch

langage ensembliste

Ensemble - propriété - opération

Ensemble = collection d'objet → être mathématique

Objet toujours dans un ensemble → Table

↑ élément hiérarchie

Notation

objet = lettre minuscule

Ensemble = lettre majuscule

$x \in E$ → x appartient à l'ensemble E

lie un objet dans un ensemble

toujours élément

toujours ensemble

Expliciter l'ensemble lorsque c'est possible

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = rationel ($\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ etc) $\frac{A}{B}$ $A \in \mathbb{Z}$, $B \in \mathbb{N}^*$ (pas de zero)

$\mathbb{R}$ = réel

Lois de Morgan

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriété sur un referentiel E

On définit $A = \{x \in E \mid P(x)\}$

$B = \{x \in E \mid Q(x)\}$

$\underbrace{P(x) \text{ ou } Q(x)}_{R(x)} \Leftrightarrow \in A \cup B$

non $R(x)$ = non $(P(x)$ ou $Q(x)) \Leftrightarrow x \notin D$ càd $x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{D}$ $x \in \overline{A \cup B}$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\boxed{\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}}$$

$\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

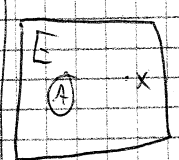
Négation des quantificateur $\forall, \exists$

Soit E = référentiel $P(x)$ propriété sur E $A = \{x \in E \mid P(x)\}$

$A = \forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow A = E$ i) non$(\forall x \in, P(x))$

$\Leftrightarrow A \neq E$

$\exists x \in E, x \notin A$



Ex $E = \mathbb{N}$ $P(x)$, x est un nombre pair càd $x = 2k, k \in \mathbb{N}$

non$(\forall x \in \mathbb{N}, x$ est pair$)$

$\exists x \in \mathbb{N}, x$ n'est pas pair

$\exists x \in E, x \in \overline{A}$

$\exists x \in E$, non $P(x)$

$$\boxed{\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{non } P(x)}$$

non$(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E$ non $P(x)$

Chapitre 2 Méthode de preuve - logique

2.1 Introduction voir feuille

C'est un énoncé (proposition) généralement le plus simple possible qui dans un contexte donné à une valeur de vérité (Vrai / Faux)

On note $A, B, \ldots$ ces proposition et non A non B leur négation

On a A vrai $\Leftrightarrow$ Non(A) est faux

A faux $\Leftrightarrow$ Non(A) est vrai

Ex A : $\forall x \in \mathbb{N}, x \neq 2k, k \in \mathbb{N}$

non A : $\exists x \in \mathbb{N}, x \neq 2k, k \in \mathbb{N}$

Pour montrer non A, vrai il suffit de donner $x \in \mathbb{N}$ tel que x n'est pas vrai

$(\exists x : x = 5) \Rightarrow$ Non A est vrai $\Leftrightarrow$ est faux

En mathématique : Un théorème est un énoncé vrai qui se démontre en utilisant des propriétés liés entre elle par la logique / conformément aux règles de la déduction

Souvent un théorème se présente ainsi

T : $\forall x \in E$ si $\underbrace{\text{une certaine propriété de } x \text{ est vérifiée}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{C(x) \text{ est vrai}}_{\text{conclusion}}$

T : $\forall x \in E : H(x) \Rightarrow C(x)$

(Se lit $H(x)$ implique $C(x)$)

le référentiel E est le cadre dans l'éqo d'énoncé T

Ex : E est l'ensemble des parallélogrammes du plan

T : $\forall S \in E$: Si des diagonales de même longueur, alors S est un rectangle

T est vrai dans E

T est faux dans le référentiel E'

Soit les deux énoncés :

$T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

$R : \forall x \in E, Q(x) \Rightarrow P(x)$

se note $\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

se lit $P(x)$ ssi $Q(x)$ $P(x)$ est équivalent à $Q(x)$

On dit que R est l'énoncé ~~direct~~ réciproque de T, appelé alors énoncé direct

Généralement, on doit démontrer T et R séparément

Ex $A : \forall x \in \mathbb{N}, x$ pair $\Leftrightarrow x^2$ pair

$T : \forall x \in \mathbb{N}, x$ pair $\Rightarrow x^2$ pair et $R, \forall x \in \mathbb{N}, x^2$ pair $\Rightarrow x$ pair

T et R soit à démontrer

2.2 Méthode de démonstration :

<u>Méthode directe</u>

On part de l'hypothèse H et on établit une suite de déduction vraie (càd d'implication) jusqu'à la conclusion C

$T : \forall x \in E, H \Rightarrow C$

Preuve

$H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 = C$

Vrai ↑ déduction vraie

↑ preuve que C est vrai

Exemple

1) $T : \forall x, y \in \mathbb{N}$

Si x est pair et y impair

alors, $x \cdot y$ est pair

Preuve par la méthode directe

$H : \forall x, y \in \mathbb{N}$

x pair, y impair $\Rightarrow x = 2k$ et $y = 2l+1$, $k, l \in \mathbb{N}$: C_1

$\Rightarrow x \cdot y = 2k \cdot (2l+1)$: C_2

$x \cdot y = 2\underbrace{(kl + k)}_{2kl+k} = 2k'$

$k' = 2kl + 2k \in \mathbb{N}$ C_3

$\Rightarrow xy = 2k'$ $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow xy$ est pair

2) $\forall A, B, C \subset E$

Si $(A \subset B) \cap (A \cap C) = A \neq \emptyset$

$B \cap C \neq \emptyset$

alors

Preuve

On commence par traduire l'hypothèse

1) $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

2) $\exists x_0 \in A$ et $x \in C$

On veut montrer montrer $\exists x \in B$ et $x \in C$

d'où par 1) je peux dire si $x_0 \in A$ alors $x \in E$ donc

par (2) $x \in C$ ainsi $\exists x_0 \in C$ et $x_0 \in B$ càd $x_0 \in B \cap C$ et donc

$B \cap C \neq \emptyset$

2. Méthode par l'absurde

On a le théorème T : H l'hypothèse $\Rightarrow$ C implique la conclusion

Vrai — on ne sait pas

La preuve par l'absurde consiste à ajouter aux hypothèses (H) du théorème non(C) vrai

On essaie de déduire de (H) vrai et non(C) vrai une proposition S tel que S vrai et non(S) vrai. ce qui est impossible (se dit aussi absurde) donc l'ajout de non(C) vrai à l'ensemble des axiomes conduit à une absurdité. On est conclu : non(C) est vrai est faux donc C est vrai

on utilise ce type de preuve lorsque Non(C) est plus simple à traduire que C

Exemples :

1) T : Référentiel : ensemble E $\qquad \bar{A} = C_E A$

Pour tout ans ensemble de E

$\forall A, B \subset E : A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

Preuve de $\underbrace{A \subset B}_{H} \Rightarrow \underbrace{\bar{B} \subset \bar{A}}_{C}$ par l'absurde

Soit les hypothèse $\left.\begin{array}{l} H : A \subset B \\ \text{non } C : \bar{B} \not\subset \bar{A} \end{array}\right\}$ 1, 2 Vrai

Pour (1)

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A$ alors $x \in B$

Pour (2)

$\bar{B} \not\subset \bar{A} \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in \bar{B}$ et $x_0 \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in \bar{B}$ et $x_0 \in A$

Par 1 x est aussi dans B

Exemple 2. $\forall x \in \mathbb{R}$, x est un entier positif $\Rightarrow x^2$ est un entier

T est vrai (évident) donc sa ~~réciproque~~ contraposée C est vrai.

$\forall x \in \mathbb{R}$, non x^2 est entier $\Rightarrow$ x n'est pas un entier

~~La~~ réciproque de $\mathbb{R}$ de T R $\forall x \in \mathbb{R}$, x^2 est un entier $\Rightarrow$ x est un entier positif

R est fux $x^2 = 2$ $x = \sqrt{2} \neq$ entier

3) $\forall x \in y \in \mathbb{R}$, $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ $\rightarrow$ Vrai

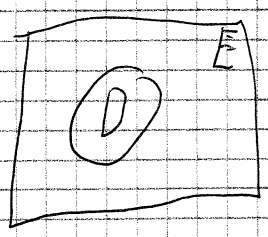
$\forall x \in y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$ $\rightarrow$ Vrai

~~En résumé~~

4) E = Ensemble

~~T : $\forall A, B \subset E : E \subset \bar{A} \cup B \Leftrightarrow A \subset B$~~

C : $\forall A, B \subset E : E \neq \bar{A} \cup B \Leftrightarrow A \not\subset B$



Preuve de C :

$E \neq \bar{A} \cup B \Leftrightarrow \exists x \in E, x \notin \bar{A} \cup B$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, x \in A \cap \bar{B}$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, x \in A$ et $x \in \bar{B}$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, x \in A$ et $x \notin B$

$A \not\subset B$

Série 2 Suite

4)

6)

7)

8) a, c, d

3. Méthode par contraposé

Soit le théorème $T : H \Rightarrow C$

et son énoncé appelé contraposé $R : \text{non } C \Rightarrow \text{non } H$

T et R sont logiquement équivalents T vrai $\Leftrightarrow$ R vrai et évidemment T faux $\Leftrightarrow$ R faux

la preuve de cette équivalence se fait par le langage ensembliste.

Ce qui veut dire quand dans un référentiel E soient 2 ensembles

$A = \{x \in | H \text{ est vérifié càd } H(x)\}$

$B = \{x \in E | C(x)\}$

Alors H implique $C \Leftrightarrow A \subset B$

$\Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

$\Leftrightarrow \text{non}(C(x)) \Rightarrow \text{non } H(x)$

Ainsi, en utilisant par exemple R, on montre T

On utilise ce type de preuve lorsque non C et non H est plus simple à exprimer que C et H

En Résumé :

$T : \boxed{\forall x \in E} : H \Rightarrow C$ énoncé directe

$R : \boxed{\forall x \in E} : \text{non } C \Rightarrow \text{non } H$ énoncé contraposé

Exemple 1) $T : \forall x \in \mathbb{N}, x^2 \text{ pair} \Rightarrow x \text{ pair}$ énoncé direct

$R : \forall x \in \mathbb{N}, x \text{ pas pair} \Rightarrow x^2 \text{ pas pair}$ énoncé contraposé

Preuve : x impair donc $x = 2k+1$, $x \in \mathbb{N}$

$x^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1 = l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$

$\sqrt{3}$ et $\sqrt{p}$ premier $\bar{B} \subset \bar{A} \Rightarrow A \subset B$ Par l'absurde

Preuve : Suite

Ainsi, on a simultanément $\underbrace{x_0 \in B}_{\text{non}(S)}$ et $\underbrace{x_0 \in \bar{B}}_{S}$ hors cela est impossible

On est arrivé à cette situation car on est fait l'hypothèse non C vrai est fausse et C vrai càd $\bar{B} \subset \bar{A}$

2) Exercice : $\bar{B} \subset \bar{A} \Rightarrow A \subset B$ par l'absurde

à faire

3) $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{p}$ pour p premier

T : $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $\underbrace{x = \sqrt{2}}_{H}$ alors x est irrationnel

Preuve par l'absurde

Soit les hypothèses : $\left.\begin{array}{l} H : x = \sqrt{2} \\ \text{non } C : x \text{ est rationnel} \end{array}\right\}$

Par l'hypothèse $\sqrt{2}$ rationnel, on a $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}^*$ et

$\underbrace{a \text{ et } b \text{ sont premier entre eux}}_{S}$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$2 = \frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 2b^2$ donc si $2b^2$ est pair a^2 doit être pair

Donc $a = 2a'$ $a' \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt{2} = \frac{2a'}{b} \Rightarrow 2b^2 = 4a'^2 \Rightarrow b^2 = 2a'^2$ donc b est pair, càd $b = 2b'$, $b' \in$

Finalement $\sqrt{2} = \underbrace{\frac{2a'}{2b'}}_{\text{non}(S)}$ donc a et b ne sont pas premiers entre eux

donc on arrive à une situation absurde

ou S et non S est vrai donc ($\sqrt{2}$ rat. vrai) faux, donc $\sqrt{2}$ irrat. vrai

Méthode par induction ou récurrence

Elle s'utilise lorsque une proposition dépend d'un entier (positif) $n \in \mathbb{N}$

Exemple :

A_n : si $H(n)$ alors $C(n)$

ex $S(n) = 1+3+5+\dots+(2n-1)$: $H(n)$

alors $S(n) = n^2$: $C(n)$

càd on a une infinité de théorème à montrer !

pour

$n=1$: $S(1) \Rightarrow S(1) = 1^2 = 1$

$n=2$: $S(2) \Rightarrow S(1+3) = 2^2 = 4$

$n=3$: $S(3) \Rightarrow S(1+3+5) = 3^2 = 9$

$n = \dots$

La preuve est basé le théorème appelé théorème d'induction

Principe d'induction :

Soit A_n une proposition dépendante d'un entier (positif) $n \in \mathbb{N}$

(1) Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} est vrai

(2) $\{k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0,\ A_k$ (vrai) $\Rightarrow A_{k+1}$ (vrai)$\}$

A_n est vrai, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

(Sans preuve)

Une preuve par induction consiste donc à vérifier (1) et (2). alors, par induction, on a la conclusion

D'où le processus pour montrer par $n(0)$

a) On détermine n_0 qui vérifie A_{n_0} vrai (initialisation de la récurrence

b) qui signifie qu'un autre $a\ k =$ vrai $k \geq n_0$, (càd $\Rightarrow C(k+1$ vrai)

(C) on définit $A_k \Rightarrow A_{k_n}$ vrai

Alors par (hr) et (C) (7) est montré

Donc selon le principe A_n est vrai $\forall n \geq n^0$

Remarque : ~~(C)~~ Vérifier (C), montre que la connaissance de la formule à l'étape k permet de la connaître à l'étape k+1

Exemple :

1) $A_m = S(m) = 1+3+\ldots+(2m-1) \Rightarrow S(m) = m^2$

Trois étape :

1) $\left.\begin{array}{l} n_0 = 1,\ S(1) = 1 \\ \text{et} \\ S(1) = 1^2 = 1 \end{array}\right\}$ A_1 est vrai

2) Hypothèse d'induction / récurrence

On suppose $\forall k, k \geq 1$ càd $A_k : S(k) = 1+3+5+\ldots+(2k-1)$ alors $S(k) = k$

3) A montrer : $A_k \Rightarrow A_{k+1}$ (càd : $S(k_n) = 1+3+\ldots+(2(k_n)-1)$
$\Rightarrow S(k_n) = (k+1)^2$)

Preuve de (C). Par hypothèse :

$S(k) = 1+3+\ldots+(2k-1) = k^2$

$S(k+1) = \underbrace{1+3+\ldots+(2k-1)}_{= S(k)} + (2k+1) = k^2 + 2k+1$

Par (2) $S(k) = k^2$, d'où $S(k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ donc (3) est vérifié

Donc A_n est vraie $\forall m \in \mathbb{N}, n \geq 1$

2) $A_n : \forall n \in \mathbb{N}$

si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \geq 2$ alors

$(1+a)^n > 1 + na$

Preuve par induction

a) $n=2$: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ car $a^2 > 0$ donc A_2 est verifié

b) on suppose A_k vrai càd : $(1+a)^k > 1 + ka$
$k \geq 2$

c) on montre $A_k \Rightarrow A_{k+1}$ (càd $(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$)

Preuve : par hypothèse : $k \geq 2$: $(1+a)^k > 1 + ka \mid \cdot (1+a) > 0$

$(1+a)^{k+1} > (1+ka)(1+a) = 1 + a + ka + ka^2 =$

$1 + a(k+1) + \underbrace{ka^2}_{>0} > 1 + a(k+1)$ donc $(1+a)^{k+1} > 1 + a(k+1)$

donc A_n vrai $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

Méthode du contre-exemple

Soit $P(n)$ une proposition

$P(n)$ vrai $\Leftrightarrow$ non $P(n)$ faux

$P(n)$ faux $\Leftrightarrow$ non $P(n)$ vrai

Exemple : $P : \forall n \in \mathbb{N}, 3n$ est impair

non P : $\exists n \in \mathbb{N}, 3n$ pas impair

non P vrai car $\exists n = 2$ tel que $3 \cdot 2$ n est pas impair.

Soit l'énoncé conditionnel.

$T : \forall x \in E, H(x) \Rightarrow C(x)$

Alors :

$\boxed{\text{non } T : \exists x \in E, H(x) \text{ et non } C(x)}$

Preuve par le langage ensembliste.

Soit $A = \{x \in E \mid H(x)\}$ $B = \{x \in E \mid C(x)\}$

Alors :

$(\forall x \in E, H_x \Rightarrow C(x)) \Leftrightarrow (A \subset B)$ | non C

On prend la négation

non$(\forall x \in E, H(x) \Rightarrow C(x)) \Leftrightarrow A \subset B$

$\exists x \in E, \text{non}(H(x) \Rightarrow C(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, x \in A$ et $x \notin B$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, x \in A$ et $x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, H(x)$ et non$(C(x))$

Exemples,

T : $\forall x \in \mathbb{N}$, x divisible par 5 $\Rightarrow$ x se termine par 0

T est faux, non T est vrai.

non T : $\exists x \in \mathbb{N}$, x divisible par 5 et x ne se termine pas par zéro.

Il faut montrer l'existence d'une tel x

$\exists x = 25$ divisible par 5 et ne se termine pas par zéro.

Ceci constitue un <u>contre-exemple</u> à l'énoncé T

Chapitre 3. Analyse Combinatoire

⚠ On fait du dénombrement de situation sur des entiers positif sans répétition

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}_+$ on note

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Se lit n factorielle ou factorielle de n

Ex : $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = (n+1) \cdot n$$

3.1 Soit par ex $E = \{a, e, i, o\}$: 4 éléments

non ordonné

On veux des <u>suites</u> de 3 éléments pris dans E.

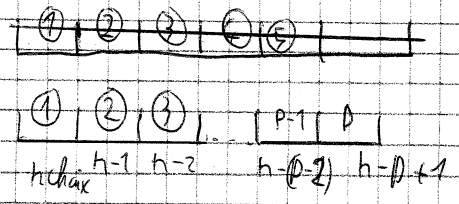
ordonné

o, e, i ≠ i, e, a

o, e, a, ...

Généralisation : $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$: n élément

On compte le nombre de suite possible ordonné et sans répétition de p élément ($p < n$) pris dans E



Finalement, on a $n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ choix dans la manière d'arranger ces n éléments pris p à p on note A_n^p ce nombre

Ex : $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_7\}$ $n = 7$

on détermine le nombre de suite à 4 élément pris dans E càd le nombre d'arrangement de 7 élément pris 4 à 4.

Ici $p = 4$ On calcule $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

$$n - p + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$$

En resumé : nombre d'arrangement de n élément pris p à p $= A_N^P = n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ $p < n$

Soit $E = \{a, b, c\}$ on compte le nombre d'arrangement de 3 élément pris 3 à 3 !

$n = p = 3$

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n éléments

abc acb
bac cab
bca cba

6 élément càd 3 ! (factorielle)

Le nombre de suites de n éléments pris dans E s'appelle des permutation de ces n éléments

On note P_n ce nombre. Alors $\boxed{P_n = n!}$

On ~~représente~~ reprend le nombre $A_N^P = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-p+1)$

$$= \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-p+1)(n-p)(n-p-1) \dots (2)(1)}{(n-p)(n-p-1) \dots (2)(1)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ $n = 4$

On veux compter le nombre de sous-ensemble de E à 3 éléments :

$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, a, b\}$

$\{d, b, c\} = \{b, d, c\} = \dots$

On constate (voir feuille)

nbr d'arrangements = nbr de ligne • nbr de colonne

$= P_3 = 3! \bullet$ nbr de E à 3 éléments $= \dfrac{A_4^3}{P_3} = C_4^3$

notation

Généralisation :

$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n éléments

Le sous ensemble de E à p éléments s'appelle des combinaison de n éléments pris p à p. On note ce nombre : C_n^p $p \leq n$

alors, ce nombre se relie aux arrangement sans la permutation

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Remarque : $0! = 1$

* $C_0^0 = \dfrac{0!}{(0!)(0-0)!} = 1$

* $C_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!\,0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

* $C_n^n = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$

Exemple : $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $n = 10$

On compte le nombre de nombre à 4 chiffre dans E

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{7}\boxed{2} \neq \boxed{1}\boxed{7}\boxed{0}\boxed{2}$

Mais attention

$\underbrace{\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{nombre à 3 chiffre}}$

en premier on compte le nombre de sous ensemble de E à 4 chiffre

On en a $\underbrace{4!}_{\text{permutation à 4 chiffre}} \underbrace{C_{10}^{4}}_{\text{choix des 4 chiffre parmis 10}} = A_{10}^{4}$

Evidement dans ce décompte, se trouvent ceux qui commence par 0. on ne les veut pas

Dans un deuxième temps, on compte les situation du genre $\boxed{0}\underbrace{\boxed{7}\boxed{4}\boxed{5}}_{\text{on choisit 3 chiffre}}$

$E' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $n' = 9$

on a donc C_9^3 choix et les 3 permutent, donc on a $3!\,C_9^3$ choix dans E'

D'où nb cherché $= 4!\,C_{10}^{4} - 3!\,C_9^3$

Combien de nombre à 4 chiffre contient 2 ou 4 ?

Il y a 2 méthode.

La méthode 1) par décompte

nb cherché = nb de ceux qui contiennent $\underset{(1)}{2 \wedge 4}, \underset{(2)}{2 \wedge \bar{4}}, \underset{(3)}{\bar{2} \wedge 4}$

(2) | 2 | | | |

on choisit 3 chiffre dans $E' = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ $n' = 7$
et les 4 permutent

Donc $(1) = 4!\binom{3}{7}$

(3) de même $(3) = 4!\binom{3}{7}$

(1) | 2 | 4 | | | $E'' = \{1,3,5,6,7,8,9\}$ $n'' = 7$

E''
$(1) = 4!\binom{2}{7}$

Finalement, le nombre recherché est $4!\binom{3}{7} + 4!\binom{3}{7} + 4!\binom{2}{2}$

② Méthode ②: par complémentaire

nbr à 4 chiffres (tous) − ceux qui ne contiennent ni 2 ni 4

$= 4!\binom{4}{9} - 4\binom{4}{7}$

<u>Propriété des C_n^p</u>

1) $C_n^p = C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,\underbrace{(n-(n-p))}_{=n-n+p}!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$

2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

2) $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,\underbrace{(n-1-(p-1))}_{=n-p}!} = \dfrac{(n-1)!\,(n-p)!}{p!\,(n-p-1)!\,(n-p)}$

$+ \dfrac{(n-1)!\,p}{(p-1)!\,p\,(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!\,p}{(p-1)!\,p\,(n-p)!} = \dfrac{(n-1)!\,[n-p+p]}{p!\,(n-p)!} =$

$\dfrac{(n-1)!\,n}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

(3) à faire par récurrence

Chapitre 4 Algèbre linéaire

Apliation

Lier les objet de 2 ensembles avec un troisieme objet

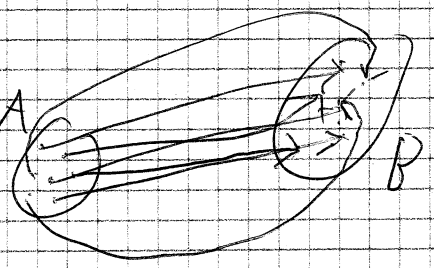
Apliation ssi il y a une corespondence unique pour chaque élément de A

il existe une unique corespondance en B

$f\ A \longrightarrow B$ ← ensemble d'arrivé

$x \longrightarrow f(x) = y$

ensemble de départ



$f(x) = y$ ce dit image de x par f

x est antécédent ou pré-image de y par f

<u>Définition de Graphe:</u>

le sous ensemble, noté G_f de $A \times B$

$A \times B$ est le graphe de f (ssi)

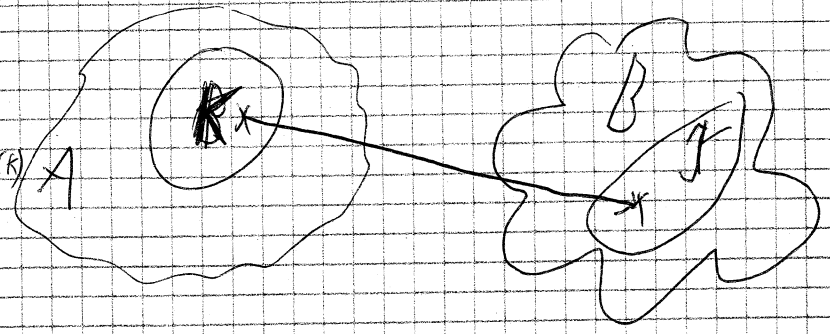
$$G_f = \{(x,y) \in A \times B \mid x \in A\ y = f(x)\}$$

Définition: on définit les ensemble suivants

Image $f = f(A)$ = image de $f() = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

Soit $k \in A$

$f(k)$ = partie de B image de $f(k)$



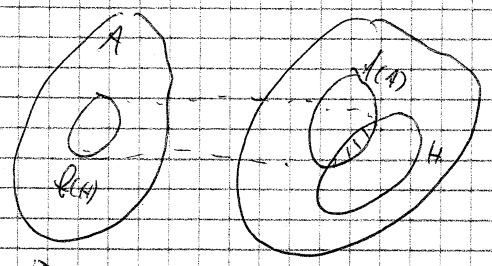
Soit $H \subset B$ $f^{-1}(H)$ = partie de A, image réciproque ou inverse de $H \subset B$

$f^{-1}(H)$ = sous ensemble $= \{x \in A \mid f(x) \in H\}$ $f^{-1}(H) \in A$

Soit $y \in B$ $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{4\}\} = \{x \in A \mid f(x) = 4\}$

$f^{-1}(\{4\}) \subset A$

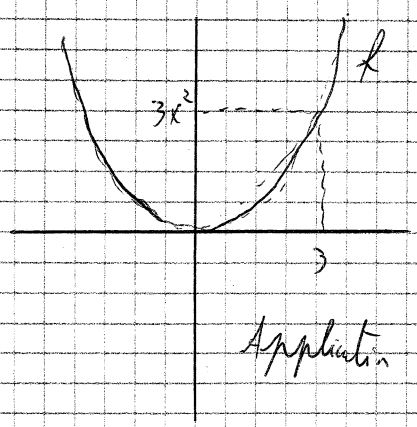
$f^{-1}(H) = f^{-1}(H \cap I$

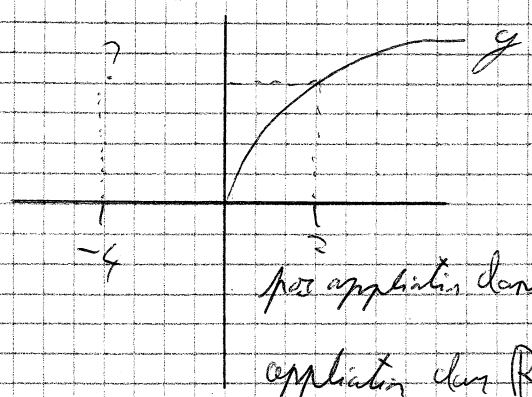


Exemple $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $\quad g\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\quad x\ \sqrt{x}$

$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^+$

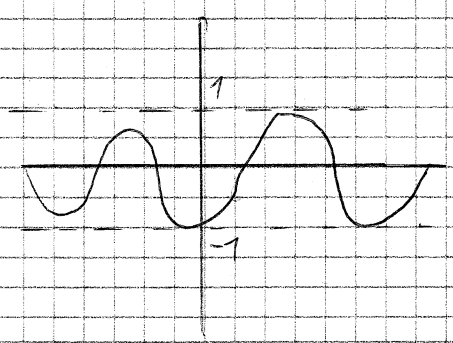




pas application dans $\mathbb{R} \mapsto$ dans $\mathbb{R}$

application dans $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$



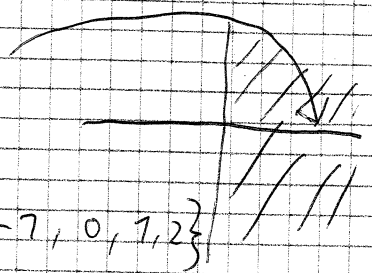
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$

$\mathrm{Im}\, h = [-1 ; 1]$

$G_{\hat{g}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}_+, y = \hat{g}(x) = \sqrt{x}\}$

$G_{\hat{g}} \subset \underbrace{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}_{\text{demi plan}} \subset \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{plan}}$



Exemple : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

$f : A \mapsto B$

$x \longmapsto y = f(x) = x^2 - |x| - 2$

$f(-2) = (-2)^2 - |-2| - 2 = 0 = f(2)$

$f(-1) = (-1)^2 - |-1| - 2 = -2 = f(1)$

$f(0) = 0^2 - |0| - 2 = -2$

$G_f = \{(-2;0), (-1;-2), (0;-2), (1,-2), (2;0)\}$

Exemple : $h : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$

$t \longmapsto h(t) = t + \frac{1}{t} = y$

$\mathrm{Im}\, h = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R}^*, y = t + \frac{1}{t}\} \subset \mathbb{R}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid P(t,y)\}$

On veut determiner une ou des condition nécessaire et suffisante dépendant uniquement de y, notée $R(y)$ pour que l'existence de t soit satisfaite et que $y = t + \frac{1}{t}$

$R(y) \Leftrightarrow P(t,y)$ et $\mathrm{Im}\, h = \{y \in \mathbb{R} \mid R(y)\} \subset \mathbb{R}$

$P(t,y) \begin{cases} \exists t \neq 0 \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \neq 0 \\ y = \frac{t^2+1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \neq 0 \\ t^2 - yt + 1 = 0 \end{cases}$

Or si $t = 0$ on a $1 = 0$ impossible donc 0 n'est pas solution

$y^2 - 4 \geq 0$ $(y-2)(y+2) \geq 0$ $y \in]-\infty; -2] \cup [2, +\infty[$ $R(y) = y \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

$\mathrm{Im}\, h = \{y \in \mathbb{R} \mid R(y)\} =]-\infty; -2] \cup [2 + \infty[$

ensemble d'arrivée

$f : A \longmapsto B$ ← ensemble de départ

Tout x dans A a une image unique

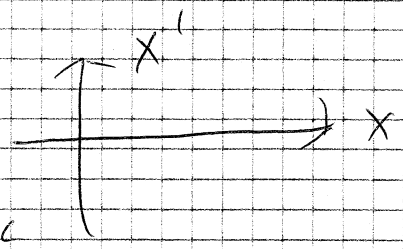
Mais l

$x \longmapsto f(x)$

objet de départ

image de x

Application : correspondance 1, 1 entre l'ès element de l'ensemble de départ et d'arrivée



$\mathrm{Im} f = \{x' \in B \mid \exists x \in A,\ x' = f(x)\}$ ← Tout ce qu'on peut faire comme la fonction

Image élément du coté B

X' = ensemble d'arrivée

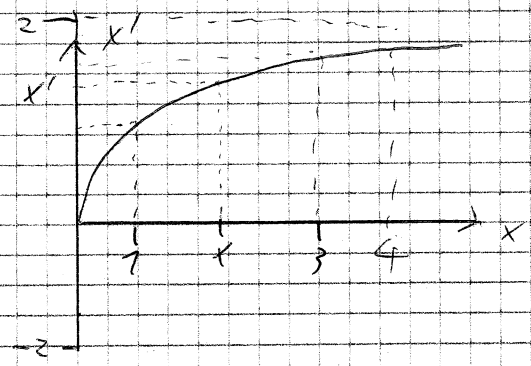
X = ensemble de départ

$K \subset A \quad f(K) = \{x' \in B \mid \exists x \in K,\ x' = f(x)\}$

$H \subset B \quad f^{-1}(H) = \{x \in A \mid f(x) \in H\}$

Ex $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ← Application

$x \mapsto \sqrt{x}$



$f(]1,3]) =]1, \sqrt{3}]$

$f^{-1}([-2,2[) = [0,4[$

Ex

$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

$(a,b) \mapsto \frac{a}{b}$

$f(6,8) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = f(3,4)$

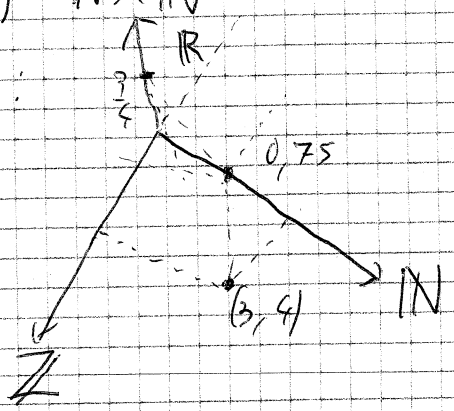
$f^{-1}(\frac{1}{2}) \to$ faux

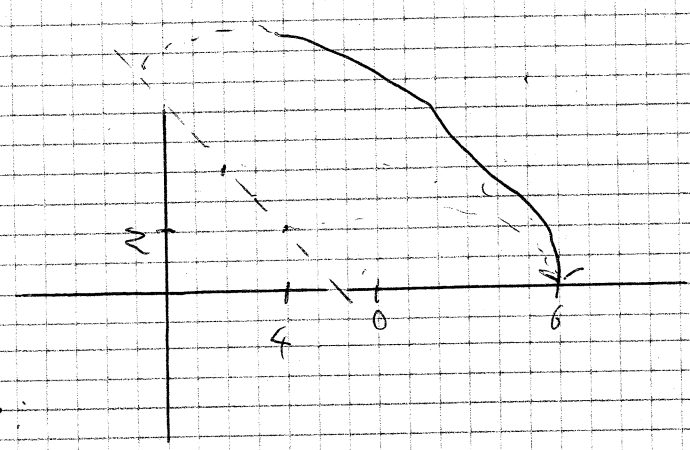
$f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\}) = \{-\lambda, 2\lambda \mid \lambda \in \mathbb{N}^*\} = f(a,b)$

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{Q}$

$f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

Graphe :





Ex $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graphe :

$(x,y) \to x+y$

$f(-2,8) = 6 = f(4,2)$ $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

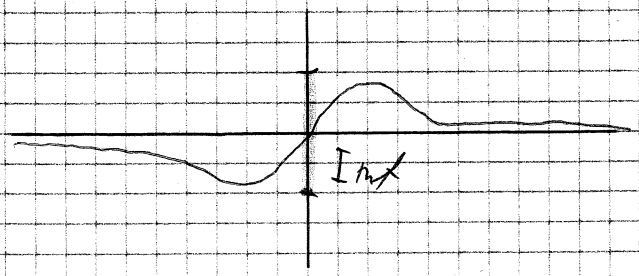
$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x+y) > 0\}$ $f^{-1}(\{x'\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x+y = x'}\}$

la droite $x+y$ qui ne passe pas à dans la limite

est une droite dans $\mathbb{R}$

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$



Imf

$x' \in \mathrm{Im} f \iff \exists x \in \mathbb{R}_+ \; x' = \frac{x}{x^2+1}$

l'équation $x' = \frac{x}{x^2+1}$ à une solution sur x' en fonction de x

$x'x^2 - x + x' = 0$

Si $x' = 0$ $\quad -x = 0$

~~Si $x' = 1$ $\quad -x = -1$~~

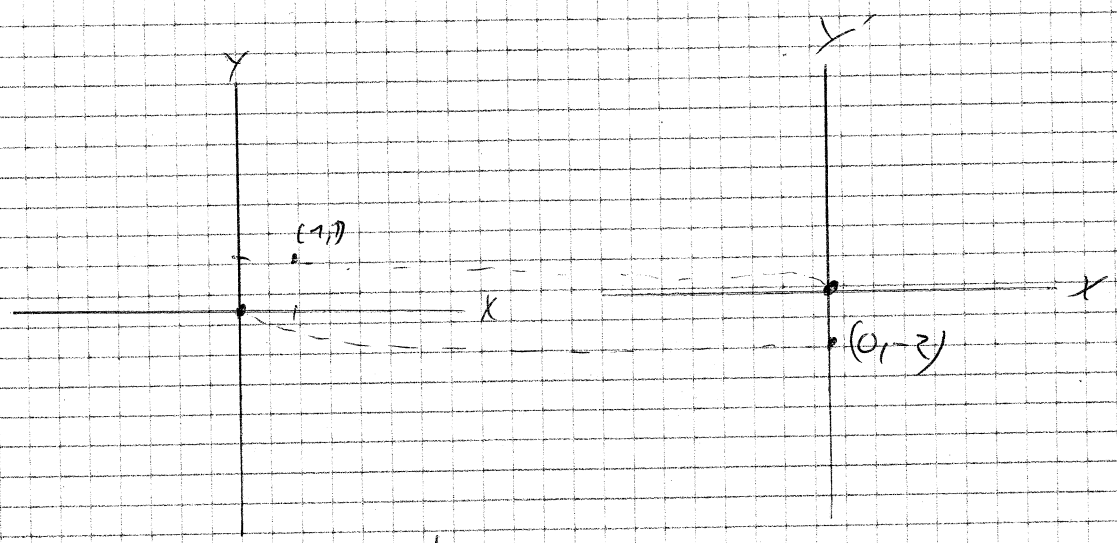
Donc $x' = 0$ est dans l'image

$\Delta = (-1)^2 - 4x'^2 = 1 - 4x'^2 \geq 0 \qquad x'x^2 - x + x' = 0$

$x'^2 \leq \frac{1}{4} \iff x' \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$

Ex $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$(x;y) \longmapsto (x^2 - y, 2(y-1))$



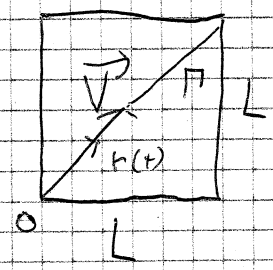
$\mathrm{Im} f = \{(x';y') \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, x' = x^2 - y, y' = 2(y-1)$

On cherche une condition dans $(x';y')$ pour que l'eq $(x';y') = f(x;y)$

en $(x;y)$ on veut $\exists (x;y)$ tel que $\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 2(y-1) \end{cases} \iff \exists (x;y)$ tel que $\begin{cases} x^2 = x' + y \geq 0 \\ y = \frac{y'}{2} + 1 \end{cases}$

$x' + \frac{y'}{2} + 1 \geq 0 \qquad \mathrm{Im} f = \{(x';y') \in \mathbb{R}^2 \mid 2x' + y + 2 \geq 0$

Ex



$\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto r(t)$

Table $T \subset \mathbb{R}^2$

$* \ \vec{F}^{-1}(T) = \{ t \in \mathbb{R} \mid \vec{F}(t) \in T \}$

$t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq V_0 \cos(\alpha) t \leq L \}$

$= \left[0, \frac{L}{V_0 \cos\alpha} \right]$

<u>Composition de 2 application</u>

Soient 2 application

$f : A \mapsto B$ et $g : C \mapsto D$

$x \mapsto f(x)$ $\quad$ $x \mapsto g(x)$

Si $\mathrm{Im} f \subset C$ alors, on peut enchainer les applications

On défini alors $g \circ f$ (g rond f) : $A \mapsto D$

$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Construction $x \xrightarrow{f} x' \ f(x) \xrightarrow{g} x'' = g(f(x))$

Remarque :

On vérifie facilement $g \circ f$ est une application

$g \circ f$ et $f \circ g$ sont rien à voir

associativité $h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$

Ex $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (x^2 - y, 2(y-1))$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$

$(x, y) = (x + y)$

Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ on défini la composé $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto (x^2 - y + 2(y-2))$

$= x^2 + y - 3$

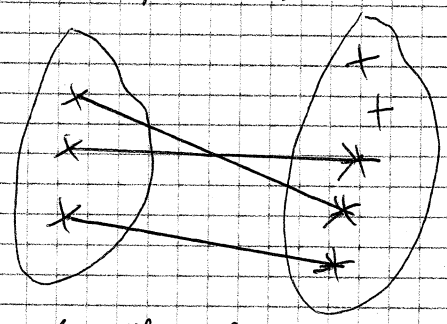
$\mathrm{Im}(g \circ f) = \{ x' \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y),\ x' = x^2 + y - 2 \}$

Chercher une condition pour $x' \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ donc pour l'existence de (x, y)

$x' = x^2 + y - 2$ Donc $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$

4. Injection, surjection, bijection

Application



Application $f : A \to B$

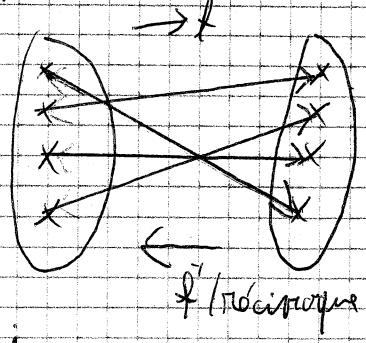
$x \longmapsto f(x) = x'$

à tout $x \in A$ correspond une unique image par f notée $f(x)$

Définition : une application $f : A \to B$ est une bijection si elle décrit une correspondance 1 à 1 entre les élément de A et de B

on dit que f est bijective.

Ex :



On peut alors définir une application inverse

réciproque $f^{-1} : B \to A$

$x' \longmapsto f^{-1}(x') = x$

A, B finis

Pour que f soit une bijection, il faut deux choses

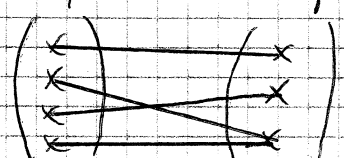
① Tout éléments de B ai un antécédant dans A $\forall x' \in B, \exists x \in A$ tel que $x' = f(x)$ ou encore $\mathrm{Im} f = B$

② L'image par f de deux éléments distict de A suivent 2 éléments distincts de B $\forall x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

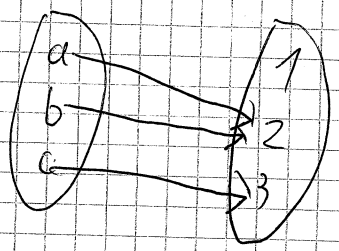
Pour que f^{-1} soit bien une application, il faut que tout les éléments de B aient une image par f^{-1} (Voir ①)

* Cette image soit ~~une image~~ unique (Voir 2)

Une application $f : A \to B$ vérifiant ① et pas forcément ② est une surjection (f est surjective)



Ex : application non surjective :



1 n'est pas convert donc cette application n'est pas surjective

Pour montrer qu'une application $f : A \to B$ est surjective, On prouve la définition $\forall x' \in B, \exists x \in A$ tel que $x' = f(x)$

avec $\mathrm{Im} f = B$

Pour montrer que f n'est pas surjectif, on donne un contre exemple selon la négation de la définition

$\exists x' \in B, \forall \in x A \quad x' \neq f(x)$

quel que soit x', il <u>n'existe aucun</u> x tel que $f(x) = x'$

ou encore, $\mathrm{Im} f \neq B$

Remarque : la comparaison entre $\mathrm{Im} f$ et B fournit tout les contre exemple

Ex : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas surjective, $n = 3$ n'a pas d'antécédent
$n \mapsto 2n$

$\mathrm{Im} f = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (liste des paire)

$\mathbb{N} \setminus \mathrm{Im} f$, ensemble des impairs

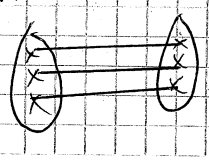
ex : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto x+y$

g est surjective. en effet, tout réel peut s'écrire sous forme d'un produit

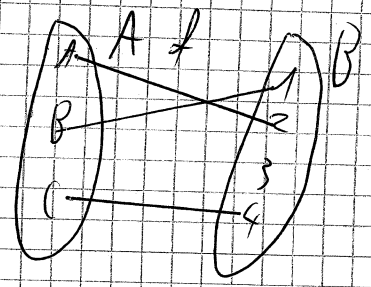
Preuve à montrer : $\forall x' \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ tel que $x' = x+y$

Soit donc $x' \in \mathbb{R}$, (x,y) tel que $x' = x+y$



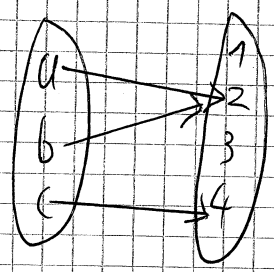
Une application $f : A \to B$ vérifiant ② mais pas forcément ① s'appelle une injection

Ex



f est injective car il n'y a qu'une flèche et une seule flèche par éléments.

Ex



h est pas injective car 2 est image de a et b (plus d'une flèche par éléments)

Pour montrer $f : A \to B$ est une injection, on montre la contraposé de la définition

$P \Rightarrow Q$ Directe

non $P \Rightarrow$ non Q Contraposé

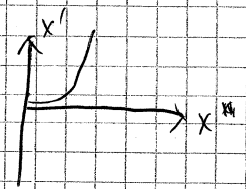
$\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Pour prouver qu'on a pas d'injection, on cherche simplement un contre exemple celui-ci est donné selon la négation de la définition

$\exists x, y \in A$ tel que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

En cherchant à montrer une injectivité, on génère tout les contre exemple

ex. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



f est injectif

Preuve :

à montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$
$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$

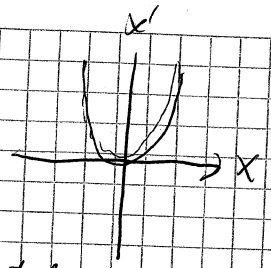
$\Rightarrow x = y$ ou $x = -y$

$\boxed{x = y}$

Impossible dans $\mathbb{R}_+$ sauf $x = 0 = y$

Soit donc $x, y \in \mathbb{R}_+$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2$

ex $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



g n'est pas injectif

Chercher tout les contre exemple en montrant que g est injectif

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 = (x-y)(x+y) = 0$

Soit $x = y$ soit $x = -y$

$x = -y$ montre tout les contre exemple

$x = 2$ et $y = -2$ $\quad g(2) = g(-2) = 4$

Une application $f : A \to B$ vérifiant ① et ② est une bijection

f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et surjective

Remarque Si $f : A \to B$ est une bijection $x' = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x')$

$x \in A, x' \in B$

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont bijective

$f^{-1} \circ f = Id_A$
Identité

alors $g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = Id$

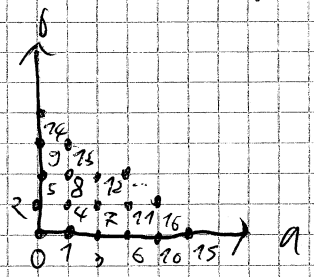
$f \circ f^{-1} = Id_B$

3) Soient A, B 2 ensemble finis S'il existe une bijection f entre A et B A et B ont le même nombre d'élément

4) Généralisation : s'il existe une bijection entre deux ensemble A et B (fini ou non) alors A et B ont la même cardinalité (même nombre d'éléments)

Ex : $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}^2)$

en effet, une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ est donné entre la numérotation des couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$

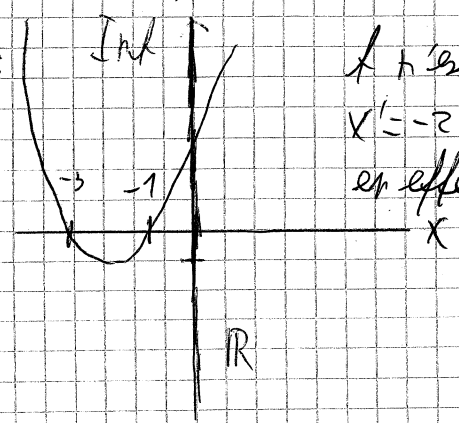


Exemple : Comment rendre une application bijective

On va enlever les cas qui rendent la fonction non injective et au mont surjective : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto (x+2)^2 - 1 = x \longmapsto (x+3)(x+1)$

Graphe :



f n'est pas surjective car $\text{Imf} \neq \mathbb{R}$

$x' = -2$ n'a pas d'antécédant

en effet, $f(x) = -2 \Rightarrow$ n'a pas de solution

Pour rendre f surjective, remplacer l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ par Imf

$\text{Imf} = [-1; \infty[= \{x' \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x' = f(x)\}$

caractérisation $x' \in \text{Imf} \Leftrightarrow$ l'équation $x' = f(x)$ a une solution en $x \in \mathbb{R}$

$x' = (x+2)^2 - 1$ a une solution

$x' + 1 = \underbrace{(x+2)^2}$

$x' + 1 \geq 0$ ← toujours positif

$x' \geq -1$

Restriction à $B = \text{Imf}$ donc f est maintenant surjectif.

f n'est pas injectif : $\exists x, y \in \mathbb{R}$ $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

Preuve : $x = -1$, $y = -3$ $f(-1) = f(-3) = 0$

Pour rendre l'application injective on devrait enlever tout les cas exple de l'ensemble de départ

f n'est pas injective car

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$

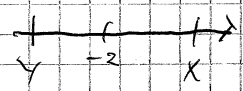
$f(x) = f(y)$

$(x+2)^2 - 1 = (y+2)^2 - 1$

$(x+2)^2 - (y+2)^2 = 0$

$(x+y+4)(x-y) = 0$ donc soit $x = y$ soit $\underbrace{x+y+4=0}$

x et y symétriques par rapport à -2



$x+2 = -y-2 \iff x+y+4 = 0$

En rejetant tout ces cas de symétrie, on se limite à l'ensemble de départ $A = [-2; \infty[$ f est injectif.

Ainsi, $\tilde{f} : [-2; \infty[\to [-1; +\infty[$

$x \mapsto (x+2)^2 - 1 = x'$

Alors $\tilde{f}^{-1} : [-1; \infty[\to [-2; \infty[$

$x' \mapsto x = \sqrt{x'+1} - 2$

Langage ensembliste

1. Expliciter les ensembles suivants (si nécessaire, reformuler l'énoncé d'une manière plus compréhensible) :

a) $A = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 2n+1 < 16 \}$

b) $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n^3 \text{ est impair} \}$

c) $C = \{ 3y+1 \mid y \in \mathbb{N} \}$

d) $D = \{ a \in \mathbb{Z}^* \mid \text{ le produit de } a \text{ par 6 est élément de } \mathbb{Z}^* \}$

e) $E = \{ 4y \mid y \in \mathbb{Z} \}$

f) $F = \{ x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } x^2 - 2 = 0 \}$

g) $G = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 2 < 3n+1 < 20 \}$

h) $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x-3 < 5 \text{ et } x > 2 \}$

i) $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+5 > 4 \text{ ou } x+5 < -4 \}$

j) $J = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 14x + 8 = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{N} \}$

k) $K = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{N}^* \}$

Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan et U, V deux points fixés distincts :

l) $L = \{ M \in \mathcal{E} \mid \text{distance de } U \text{ à } M = \text{distance de } V \text{ à } M \}$

m) $N = \{ M \in \mathcal{E} \mid \text{distance de } U \text{ à } M \text{ est inférieure à } 2 \}$

n) $P = \{ M \in \mathcal{E} \mid \text{l'angle saillant entre } MU \text{ et } MV \text{ est droit} \}$

2. Décrire les ensembles suivants à l'aide d'une propriété caractéristique de leurs éléments :

a) $K =$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls multiples de 5.

b) $L =$ l'ensemble des entiers compris entre $-3/2$ et $9/2$.

c) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

d) $B = \{3; 10; 17; 24; \cdots\}$

e) $C = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

f) $N =$ l'ensemble des points du demi-plan contenant A dont la frontière est la médiatrice du segment AB.

3. Est-il juste ou faux d'écrire les relations suivantes ?

a) $\sqrt{4} \notin \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

c) $\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$

d) $2 \in \emptyset$

e) $\{1\} \in \{1; 4; 5\}$

f) $\{1; 4\} \supset \{4\}$

g) $\emptyset \subset \mathbb{R}$

h) $\{2; 5\} \not\subset \{2; 4; 6\}$

11. On note par $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des multiples de n dans $\mathbb{Z}$. Expliciter les ensembles suivants :

a) $6\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$,

b) $7\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z}$,

c) $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$.

12. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x + 12 > 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (x-1)^2 > 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 25 \leq 0\} \end{aligned}$$

Expliciter :

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $C_C(A \cap B)$

f) $(C_C A) \cup B$

g) peut-on trouver une formulation équivalente dans les cas c) et d) ?

13. On donne :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

a) Représenter graphiquement $A \times B$.

b) Trouver un sous-ensemble H' de $A \times B$ tel que H' s'écrit comme un ensemble produit.

c) Trouver un sous-ensemble H'' de $A \times B$ tel que H'' ne peut pas s'écrire comme un ensemble produit.

14. Soient $G = \{1; 2\}$, $F = \{-1; 0; 1\}$. Exprimer $K = ((\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})) \cup G^2$ comme produit de deux ensembles à déterminer.

15. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 3\} \\ C &= \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\} \end{aligned}$$

Représenter graphiquement $(A \times B) \cap C$.

Réponses

1. a) $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$,

b) $B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7; \ldots\}$,

c) $C = \{1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16; \ldots\}$,

d) $D = \mathbb{Z}^*$

e) $E = \{\cdots - 8;\ -4;\ 0;\ 4;\ 8;\ 12; \ldots\}$,

f) $F = \emptyset$,

g) $G = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

h) $H =]2;\ 8[$,

i) $I =]\leftarrow;\ -9[\cup]-1;\ \rightarrow[$,

j) $J = \{2/3\}$

k) $K = \{-2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$,

l) L est l'ensemble des points de la médiatrice de UV.

m) N est l'ensemble des points du disque de centre U et de rayon 2, frontière non-comprise.

n) P est l'ensemble des points du cercle de Thalès du segment UV, extrémités non-comprises.

2. a) $K = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 5k\}$,

b) $L = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3/2 < x < 9/2\}$,

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$,

d) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ x = 3 + 7k\}$,

e) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$,

f) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan ; $N = \{M \in \mathcal{E} \mid d(M;\ A) \leq d(M;\ B)\}$, où d désigne la distance.

3.

a) faux : $2 \in \mathbb{N}$,

b) juste,

c) faux : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$,

d) faux : $2 \notin \emptyset$,

e) faux : $\{1\} \subset \{1;\ 4;\ 5\}$,

f) juste,

g) juste,

h) juste.

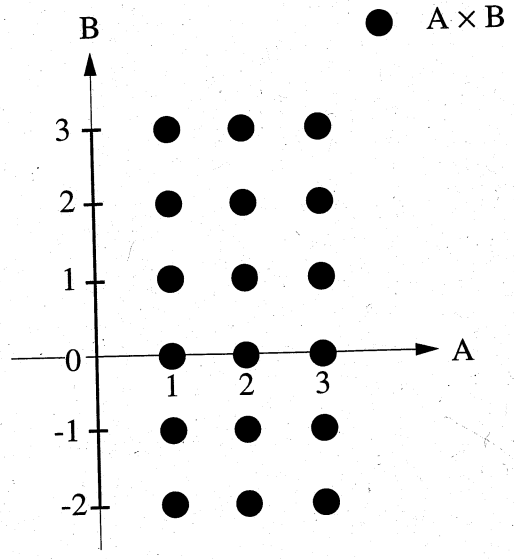
4. a) $\emptyset$, $\{2\}$;

b) $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{1;\ 2;\ 3\}$;

c) $\{4\}$, $\{1;\ 4\}$, $\{2;\ 4\}$, $\{3;\ 4\}$, $\{1;\ 2;\ 4\}$, $\{1;\ 3;\ 4\}$, $\{2;\ 3;\ 4\}$, $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$;

d) $\{4\}$, $\{2;\ 4\}$.

13. a)



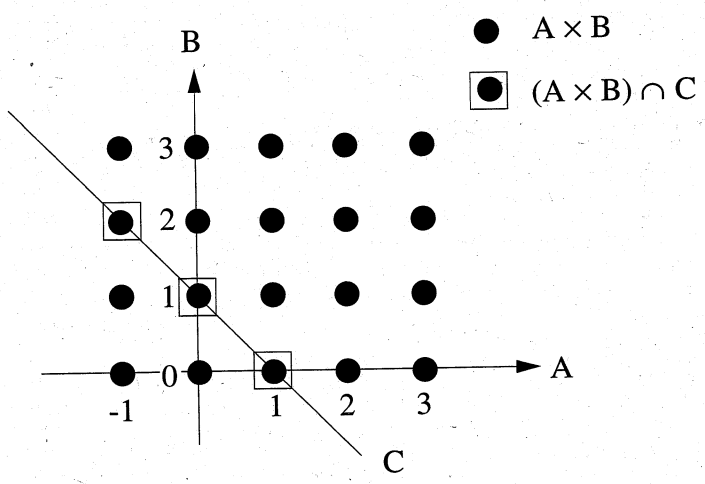
b) Par exemple :

— $H' = \{(3;\,-2);\,(3;\,-1);\,(3;\,0);\,(3;\,1);\,(3;\,2);\,(3;\,3)\} = \{3\} \times B$ est un ensemble produit ;

— $H'' = \{(1;\,1);\,(2;\,2)\} \subset A \times B$ n'est pas un ensemble produit.

14. $K = \{-1;\,0;\,1;\,2\} \times \{1;\,2\}$.

15. $A = \{-1;\,0;\,1;\,2;\,3\}$, $\quad B = \{0;\,1;\,2;\,3\}$, $\quad C = \{(x;\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -x + 1\}$.



16. $A =]0;\rightarrow[$,

$B =]-4;\,-3] \cup]-2;\,-1] \cup]0;\,1] \cup]2;\,3]$,

$D = \{(x;\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y - 3 = 0\}$.

Langage ensembliste

$-\sqrt{2}^2$

1. Expliciter les ensemble suivants

a) $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 < 16 \}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n^3 \text{ est impair} \}$

$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

c) $C = \{ y \in \mathbb{N} \mid 3y+1 \}$

$C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

d) $D = \{ a \in \mathbb{Z}^* \mid 6 \cdot a \in \mathbb{Z}^* \}$

$D = \{\dots, -1, 1, 2, \dots\}$

e) $E = \{ y \in \mathbb{Z} \mid 4y \}$

$E = \{0, 4, 8, 12, 16 \dots\}$

f) $F = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0 \}$

$F = \{\emptyset\}$

g $G = \{ n \in \mathbb{N} \mid 2 < 3n+1 < 20 \}$

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

h $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x-3 < 5 \text{ \underline{et} } x > 2 \}$

$H =]2 ; 8[$

i). $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x+5 > 4 \text{ OU } x+5 < -4\}$

. $I = [-\infty ; -9[\cup]-1 ; +\infty]$

J. $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{N} \text{ et } 3x^2 - 14x + 8 = 0\}$

$+8$ ± 7 $196 - 4 \cdot 3 \cdot 8$

14

$ax^2 + bx + c \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dfrac{\pm 10}{6}$ $\qquad \dfrac{24}{6} 4 \quad \dfrac{4}{6} \quad \dfrac{2}{3}$

2

$J = \{\frac{2}{3}\}$

$5 \quad -\frac{1}{2}$

K $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ ou } x^2 - 3x - 10 = 0\}$

. $K = \mathbb{N}^*$

3. Est-il sujet ou faux d'écrire les relation suivante

a) $\sqrt{4} \notin \mathbb{N}$ FAUX

b). $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ Vrai

c). $\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$ FAUX

d) $2 \in \emptyset$ FAUX

e) $\{1\} \in \{1 ; 4 ; 5\}$ FAUX

f) $\{1 ; 4\} \supset \{4\}$ FAUX → Vrai

g) $\emptyset \subset \mathbb{R}$ Vrai

h) $\{2 ; 5\} \not\subset \{2 ; 4 ; 6\}$ Vrai

5.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 4\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$ Égal $\rightarrow \emptyset$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$ Égal $\rightarrow 1; 0; 1$

7. Soit $A = \{a; b\}$. Est-ce juste d'écrire :

a) $\{a\} \subset A$ ~~faux~~ $\rightarrow$ Juste

b) $\{a\} \subset A$ faux

c) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ Vrai

d) $\{\{a; b\}\} = A$ Faux

e) $A \in A$ faux

f) $A \supset A$ Vrai

g) $A \in \mathcal{P}$ Vrai

h) $\{\{a\}; \{b\}\} = \mathcal{P}(A)$ Faux

11. On note par $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiple de n dans $\mathbb{Z}$

Explicité les ensemble suivant

a) $6\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = \{\ldots; -24; -12; 0; 12; \ldots\}$

b) $7\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = \{\ldots; -14; 0; 14; 28; 42; \ldots\}$

c) $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = \{\ldots; -30; -15; 0; 15; 30; \ldots\}$

12. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x + 12 > 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (x-1)^2 > 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 25 \leq 0\}$

a) $A \cap B = [0;1[\cup]1;4[$

b) $A \cup B =]-3;+\infty]$

c) $A \cup (B \cap C) =]-3;5]$

d) $A \cap (B \cup C) =]-3;4[$

e) $C_C(A \cap B) =$

f) $(C_C A) \cup B =$

g) formulation équivalente c et d

$C = [-5;5]$

$B = [0;1[\cup]1;+\infty]$

$A =]-3;4[$

$[0;1[\cup]1;5]$

$]-3;4[$

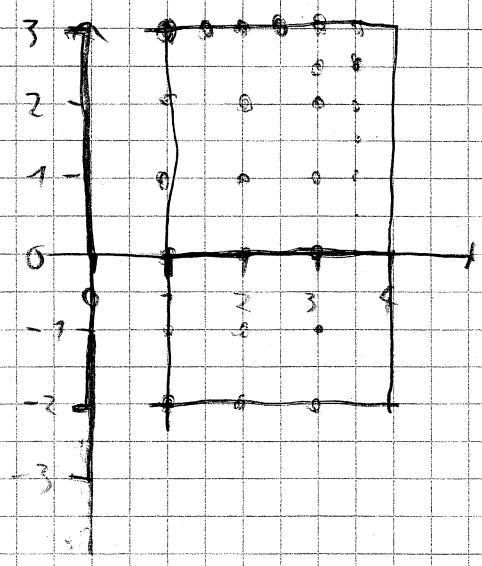
$[-5;+\infty]$

$]-3;4[$

13. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$

a)



b) $H' = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\} \times \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$

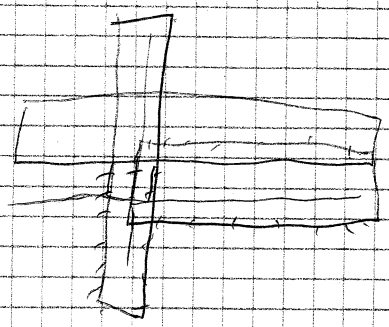
$H' = \{(x;y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$

$O = H'' = \overline{H'}$

Algèbre linéaire Série 1

14) $G = \{1;2\}$ $F = \{-1;0;1\}$

$K = ((\mathbb{Z} \times G) \cap (F \times \mathbb{N})) \cup G^2$

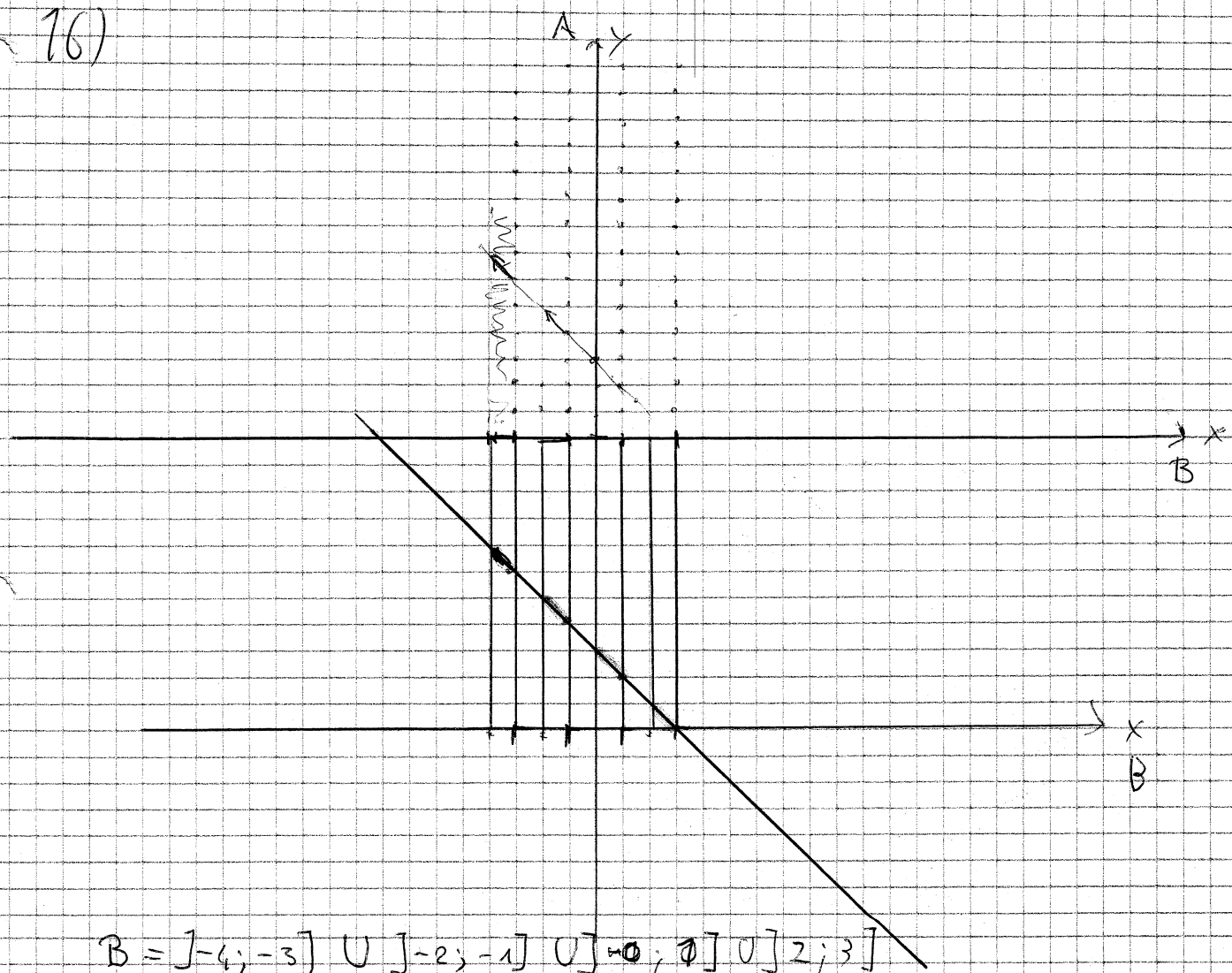


$K = \{\cancel{(-1;1)}; (-1;2), (0;2), (0;1)$

$\cancel{(1;1), (1;2)}$

$K = \{(-1;1); (-1;2); (0;1); (0;2); (1;1); (1;2); (2;1); (2;2)\}$

16)

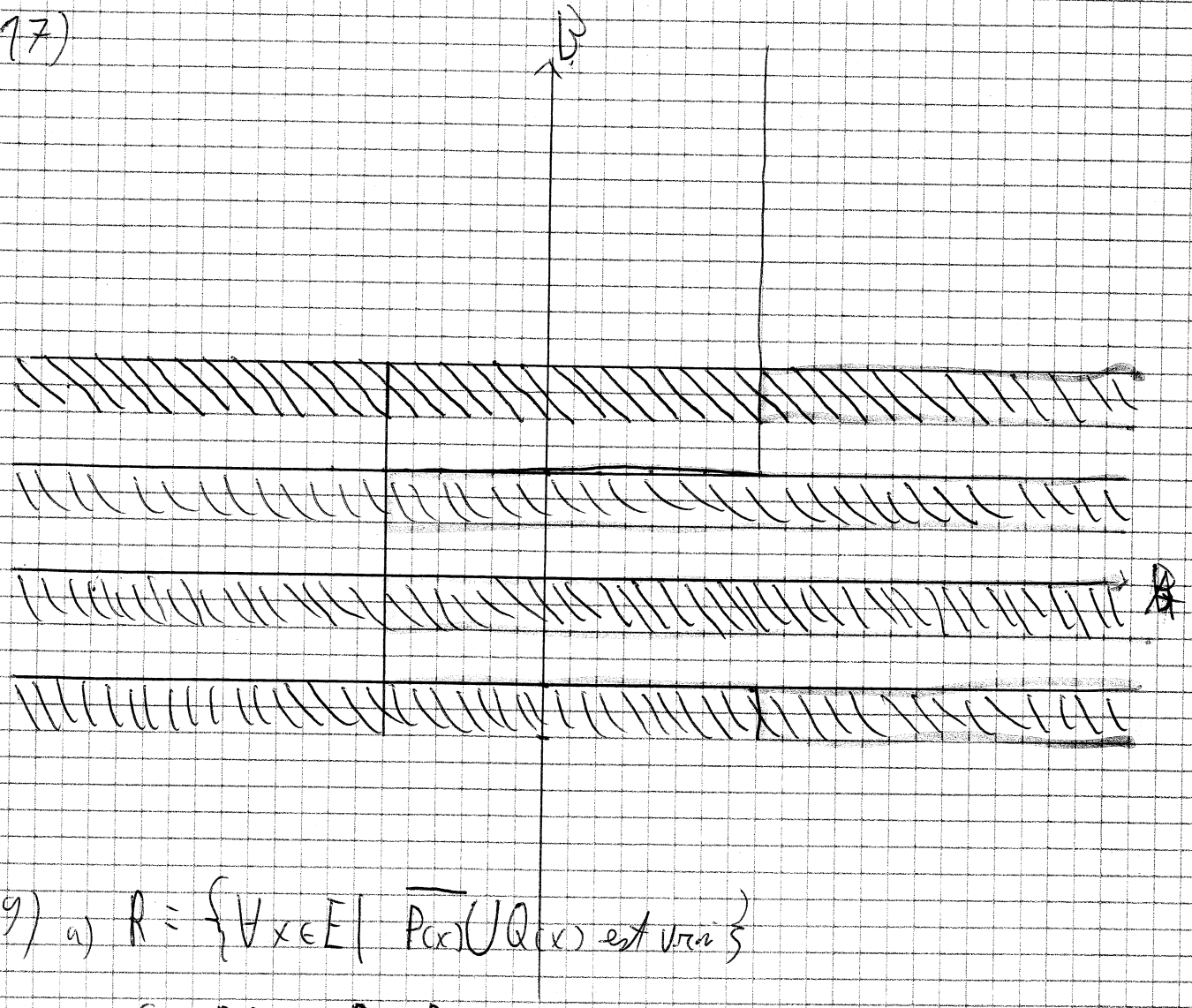


$B =]-4;-3] \cup]-2;-1] \cup]-0;0] \cup]2;3]$

$y + x - 3 = 0 \rightarrow y = -x + 3$

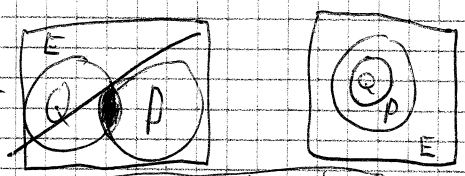
$y = mx + c$

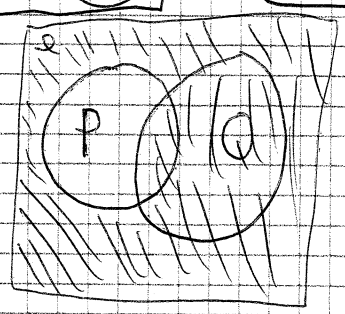
17)



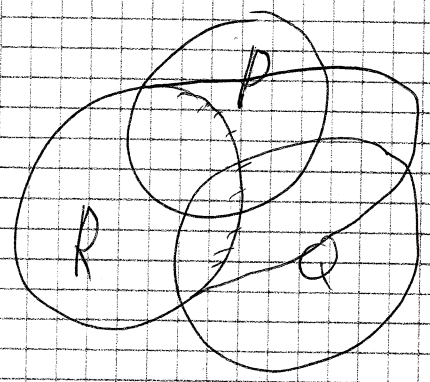
19) a) $R = \{\forall x \in E \mid \overline{P(x)} \cup Q(x) \text{ est vrai}\}$

$S = \cancel{P \cap Q}$ $Q \subset P$

b) $S =$ 

$R =$ 

20) $E = \{ n \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq n \leq 20 \}$



P = est divisible par quatre

Q = est divisible par 5

R = est divisible par 10

$\cancel{(P \cap Q) \supset R}$

$A = \{ x \in E \mid P(x) \}$

$B = \{ x \in E \mid Q(x) \}$

$C = \{ x \in E \mid R(x) \}$

$\boxed{(A \cap B) \supset C}$

Non (A => B)

A et Non(B)

Logique et méthodes de preuve

1. Ecrire, en langage quantifié, la négation des propositions P suivantes et déterminer si l'on a P ou (non P) vrai.

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ |x| = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \sqrt{3}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 2 = 0$.

e) $\forall x \in \{1; 2; 3; 4\},\ x^2 - 10 \leq 0$.

f) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ x = 2k$.

g) $\forall x \in A = \{1; 2; 3\},\ \exists y \in A,\ x^2 + 2y < 10$.

h) $\forall (a; b) \in \mathbb{N}^2,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad (x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq x)$.

j) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad (x \leq 1 \text{ ou } x^2 \leq x)$.

k) $(\forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } x \leq 1),\quad x^2 \leq x$.

2. Déterminer le référentiel E dans lequel les propositions suivantes sont vraies :

a) $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent à angle droit.

b) $ABCD$ est un carré si et seulement si les angles en A, B, C et D sont droits.

3. Former des implications ou équivalences avec les propositions suivantes :

a) P : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
Q : le quadrilatère $ABCD$ est un losange qui a un angle droit.
R : le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
S : le quadrilatère $ABCD$ a des angles opposés égaux.

b) Soient α un plan et d une droite non contenue dans ce plan :
P : la droite d est normale au plan α.
Q : la droite d est perpendiculaire à une droite g de α.

4. En utilisant la méthode directe, démontrer les propositions suivantes :

a) Si n est un nombre pair alors $n^2 + 1$ est impair.

b) Si n est un nombre impair alors $n^2 - 1$ est pair.

c) Si n est un nombre impair alors $n^2 + 2$ est impair.

d) Si n est un entier positif alors $n^2 - n$ est pair.

e) Si n est un entier positif alors $n^3 - n$ est un multiple de 3.

8. Démontrer par la contraposée les théorèmes suivants :

a) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m \cdot n$ pair $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

b) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, m^n impair $\Rightarrow$ m est impair ou n est impair.

c) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, ($m^2+n^2$ est impair ou $m^2+n^2 = 4k, k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

d) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, m^2-n^2 n'est pas une multiple de 8 $\Rightarrow$ m est pair ou n est pair.

e) Si n^2 est un multiple de 3 alors n est aussi un multiple de 3, n étant un entier positif.

9. Soient A, B C et des sous-ensembles de E.
Démontrer par la contraposée :

a) $A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow E = \overline{A} \cup B$.

c) $\forall A, B, C \subset E$, $(A \cap B) \subset C \Longrightarrow \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) = \emptyset$.
($\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A).

10. Ecrire le théorème suivant en langage quantifié ; déterminer le référentiel, l'hypothèse, la conclusion et en faire la démonstration.
Le carré d'un entier positif impair est impair.
Ecrire le théorème réciproque et le démontrer ; en déduire deux nouveaux énoncés.

11. On considère l'énoncé T suivant :

T : $\forall m, n \in \mathbb{N}$:
(m^2+n^2 est impair ou $\exists k \in \mathbb{N}$, $m^2+n^2 = 4k$) $\Longrightarrow$ (m est pair ou n est pair).

On note R l'énoncé réciproque de T et C l'énoncé contraposé de T.

a) Ecrire les énoncés R et C en précisant pour chaque cas le référentiel, l'hypothèse et la conclusion.
Montrer R et C en utilisant la méthode directe.

b) Déduire directement de a) un théorème énonçant une équivalence (en donner une justification brève).

12. Soit la proposition T suivante :

$$T : \forall m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \Rightarrow m + n\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}$$

a) Démontrer la proposition T par l'absurde.

b) Enoncer la contraposée C de la proposition T. C est-elle vraie ?

c) Enoncer la réciproque R de la proposition T et la démontrer par la méthode de la contraposée.

15. Dans chacun des théorèmes qui suivent déterminer le référentiel, l'hypothèse et la conclusion. De plus, vérifier si la proposition réciproque est vraie ou fausse. On ne demande pas de démonstration, mais donner un contre-exemple lorsque la proposition est fausse.

a) Théorème de Thalès : une parallèle à un côté d'un triangle ABC détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.

b) Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont isométriques.
(Définition : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles)

c) Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en un point qui est le milieu de chacune d'elles.

d) Les angles de deux triangles égaux sont égaux.

e) Les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.

f) La condition nécessaire pour qu'une droite d non contenue dans un plan α soit parallèle à α est qu'il existe dans α une droite d' parallèle à d.

g) Tout plan π coupant l'une des deux parallèles a et b coupe aussi l'autre.

16. On considère la proposition T suivante :

T : $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N}^*$,
p divise m et p divise n $\Longrightarrow$ $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, p divise $(am + bn)$.

a) Démontrer la proposition T par la méthode directe.

b) Ecrire en langage quantifié la négation de la proposition T et en donner sa valeur de vérité.

c) Enoncer la proposition contraposée C de la proposition T.
La proposition C est-elle vraie ?

17. On considère la proposition suivante notée T :

T : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$,
m est impair et n est impair $\Longrightarrow$ $m^2 - n^2$ est un multiple de 8.

a) Ecrire la proposition réciproque de T, notée R, et l'énoncé contraposé de R, noté C.

b) Ecrire la négation de C et montrer que la proposition C est fausse. En déduire la valeur de vérité de R.

18. Soit E un ensemble. On considère la proposition suivante notée T :

T : $\forall\, A, B, C \subset E$,
$(A \cap B) \subset C$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) = \emptyset$.
(Rappel : $\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A)

a) Ecrire la négation de T.

Réponses

1. a) (non P) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 0$.
P vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}$.
(non P) faux.

b) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x \neq \sqrt{3}$.
(non P) vrai, car il existe $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
P faux.

c) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.
(non P) vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}$.
P faux.

d) (non P) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 2 \neq 0$.
or $\Delta' = 1 - 2 < 0$
(non P) vrai, car $\Delta' < 0$.
P faux.

e) (non P) : $\exists x \in \{1; 2; 3; 4\}$, $x^2 - 10 > 0$.
(non P) vrai, car il existe $x = 4$ tel que $x^2 - 10 > 0$.
P faux.

f) (non P) : $\exists x \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \neq 2k$.
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \neq 2k$.
P faux.

g) (non P) : $\exists x \in A = \{1; 2; 3\}$, $\forall y \in A$, $x^2 + 2y \geq 10$.
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $y \in A$: $x^2 + 2y \geq 10$.
P faux.

h) (non P) : $\exists (a; b) \in \mathbb{N}^2$, $a^2 + b^2 > (a+b)^2$.
P vrai, car pour tout $(a; b) \in \mathbb{N}^2$, $ab \geq 0$ donc
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$.
(non P) faux.

i) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+$, ($x > 1$ ou $x^2 > x$).
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$.
P faux.

j) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+$, ($x > 1$ et $x^2 > x$).
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$ et $x^2 > x$.
P faux.

k) (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \leq 1, x^2 > x$.
P vrai, car pour tout $0 \leq x \leq 1, x^2 - x \leq 0$.
non P faux.

2. a) Le référentiel E est l'ensemble des parallélogrammes.

b) Le référentiel E est l'ensemble des losanges.

11. a) Enoncé réciproque R :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$.
Hypothèse : m est pair ou n est pair.
Conclusion : $m^2 + n^2$ est impair ou $\exists\, k \in \mathbb{N},\ m^2 + n^2 = 4k$.

Enoncé contraposé C :
Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$.
Hypothèse : m est impair et n est impair.
Conclusion : $m^2 + n^2$ est pair et $\forall\, k \in \mathbb{N},\ m^2 + n^2 \neq 4k$.

b) Théorème énonçant une équivalence :
$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ (m^2 + n^2$ est impair ou $\exists\, k \in \mathbb{N},\ m^2 + n^2 = 4k)$
$\Leftrightarrow\ (m$ est pair ou n est pair$)$.

12. b) C : $\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m + n\sqrt{2}$ est rationnel $\Rightarrow\ n = 0$.

c) R : $\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m + n\sqrt{2}$ est irrationnel $\Rightarrow\ n \neq 0$.

14. a) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 9$ et $x \neq 3$
P faux ; contre-exemple : si $x = -3$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

b) non P : $\exists\, x, y \in \mathbb{R},\ x^2 = y^2$ et $x \neq y$
P faux ; contre-exemple : si $x = 2$, $y = -2$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

c) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x \leq 2$ et $x > 0$
P faux ; contre-exemple : si $x = 1$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

d) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

e) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ 2x^2 = 8$ et $(x \neq 2$ et $x \neq -2)$
P vrai.

f) non P : $\exists\, (n; m) \in \mathbb{N}^2,\ n + m = 0$ et $(n \neq 0$ ou $m \neq 0)$
P vrai.

g) non P : $\exists\, (a; b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$ et $(\forall\, x \in \mathbb{Q},\ a \geq x \geq b)$
P vrai.

h) non P : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x$ est produit de 2 irrationnels et x est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

i) non P : $\exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a$ et b sont irrationnels et $\dfrac{a}{b}$ est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

15. a) Référentiel : ABC est un triangle, $D \in AB$, $E \in AC$.
Hypothèse : $DE \parallel BC$. Conclusion : $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.
La réciproque est vraie.

18. a) non T :

$\exists\ A, B, C \subset E, \quad (A \cap B) \subset C \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \neq \emptyset)$

b) C :

$\forall\ A, B, C \subset E, \quad \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \neq \emptyset \implies (A \cap B) \not\subset C$

19. a) C :

$\forall\ A, B, D \subset E, \quad \left[B \cap D = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cap D \neq \emptyset \right] \implies A \not\subset B$

20. a) non

P faux, se montre à l'aide d'un contre-exemple, le référentiel est :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$
Q vrai, se montre par contraposée, le référentiel est : $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) non

P vrai, Q faux

c) oui

P vrai, Q vrai

1.3b) Série 2 Algèbre linéaire

2. ~~a) $\exists x \in R$,~~

b) $\forall x \in R,\ x = \sqrt{3}$ | $\forall x \in \mathbb{R}\ x \neq \sqrt{3}$ | non (P) est Vrai

d) $\exists x \in R,\ x^2 - 2x + 2 = 0$ | $\exists x \in R,\ x^2 - 2x + 2 \neq 0$ | non P est Vrai

f) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N},\ x = 2k$ | $\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ x \neq 2k$ | non P Vrai

h) $\forall (a;b) \in \mathbb{N}^2,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ | $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ a^2 + b^2 > (a+b)^2$ | P Vrai

j) $\forall x \in \mathbb{R}^+, (x \leq 1$ ou $x^2 \leq x)$ | $\exists x \in R^+$, non $(x \leq 1$ ou $x^2 \leq x)$ | non P Vrai

k) $\forall x \in R^+$ tel que $x \leq 1$, $x^2 \leq x$ | $\forall x \in R^+$ tel que [illegible]

3b) $P \Leftrightarrow Q$

4b) Si n est impair alors $n^2 - 1$ est pair

Ke $n = 2k + 1,\ k \in N$

$n \cdot n = 2k \cdot 2k + 4k + 1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k$

$n^2 - 1 = 2(2k^2 + 2k)$

$n^2 - 1 = 2k'$

Un nombre multiplier par 2 est toujour pair donc le membre de gauche est pair

Le produit d'un nombre pair par n'importe quelle entier est pair. donc le membre de droite est pair. l'égalité et le respect des règle d'équivalence fait que $n^2 - 1$ est pair

Algèbre linéaire Série 2

4c) $n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$n^2 = 2k' + 1$

$n^2 + 1 = 2k' + 1 + 2$

$n^2 + 2 = 2k' + 3$

donc l'ajout d'un nombre pair à un nombre impaire le laisse impaire

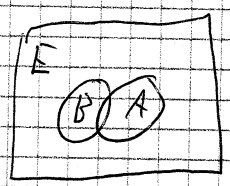
4h)

soit m et $n = 2k \in \mathbb{N}$ et $2i \in \mathbb{N}$

$m + n =$

Série 3 Algèbre linéaire

9) a) $A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$



$\text{non}(A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B)$

$A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B$

$\bar{\bar{A}} \cup \bar{B} = \emptyset$

$\bar{A} \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B$

$\bar{A} \cup B = \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$

$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow \begin{cases} a \Rightarrow b \\ b \Rightarrow a \end{cases}$

T : $\forall A, B \in E,\ A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

C : $\forall A, B \in E,\ A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B$

Preuve de C : $A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in E ; x \in A \cap \bar{B}$

$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in \bar{A} \cup B$

$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in \bar{A}$ **ou** $x \in B$

$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \notin A$ ou $x \in B$

$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in \bar{A}$ et $x \notin \bar{B}$ $\qquad \overline{\cap} = \cup$

$x \in \bar{A}$ et $x \in B$

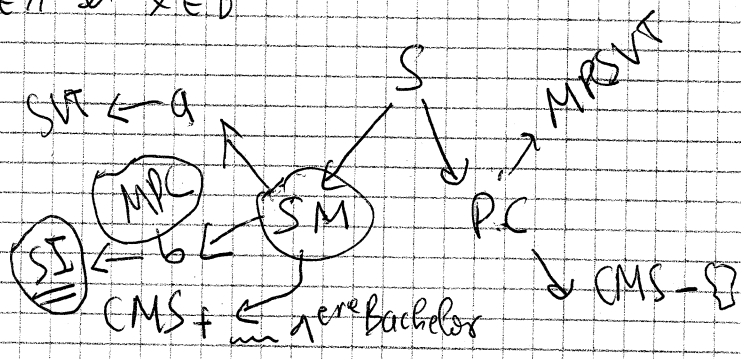
$A \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow A \subset B$

~~si $x \in A$ alors $x \in A \cap \bar{B}$~~

$x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A$ et $x \in \bar{B}$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$

$x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$



$A \not\subset B \Rightarrow A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

$\forall x \in E : \quad x \notin A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cup B$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ ou $x \in B$

$\Rightarrow x \notin A$ ou $x \in B$

~~$\Leftrightarrow x \in B$ ou $x \notin A$~~

$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A = \{x \in E \mid P(x)\}$

$B = \{x \in E \mid Q(x)\}$

$\overline{P \text{ ou } Q}$

$= \bar{P}$ et $\bar{Q}$

$= (P \Rightarrow Q)$

9 a) Série 3 Algèbre linéaire

T: $\forall A, B \subset E, A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

C: $\forall A, B \subset E, A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B$

Preuve de C : $A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \cancel{\bar{A} \subset}$

$\bar{A} \cup B = \emptyset \Rightarrow A \not\subset B$

$\bar{A} \cup B = \emptyset \Rightarrow \cancel{\bar{A} \subset B}$ $\bar{B} \not\subset \bar{A}$ $B \subset A$

$A \subset B = \emptyset \Rightarrow B \subset A$