8.3.19

Corrigé de la Série 12

1. (a) • Condition d'existence : $x \leq 6$

$e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{9+x} > e^{2\sqrt{6-x}}$

La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$\Rightarrow \quad 9 + x > 2\sqrt{6-x}$

Condition de positivité : $9 + x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -9$

Après élévation au carré, nous avons : $x^2 + 18x + 81 > 4(6-x) \quad \Leftrightarrow$

$(x+3)(x+19) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty\,;\,-19[\,\cup\,]-3\,;\,+\infty[$

Et avec les conditions d'existence et de positivité, nous avons : $S =]-3\,;\,6]$

(b) Conditions d'existence: $x^2\sqrt{e^{2x}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$ et $16x - 48 > 0 \quad \Rightarrow$ $x > 3$

En utilisant les propriétés du logarithme :

$\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x-48) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) + \ln(\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x-48)$

$\Leftrightarrow \quad 2\ln x + x > x + \ln(16x-48) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) - \ln(16x-48) > 0 \quad \Leftrightarrow$ $\ln(\dfrac{x^2}{16x-48}) > \ln(1)$

Comme le logarithme naturel est une fonction monotone croissante, on a :

$\dfrac{x^2}{16x-48} > 1$; comme $x > 3$ on peut écrire sous cette condition :
$x^2 - 16x + 48 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x-12) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]\leftarrow\,;\,4[\,\cup\,]12\,;\,\rightarrow[$;

On obtient ainsi avec les conditions d'existence : $S =]3\,;\,4[\,\cup\,]12\,;\,\rightarrow[$.

(c) Ensemble de définition: les arguments du log doivent être positifs: $D_f =]-2\,;\,4[$

$\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \dfrac{(4-x)}{(x+2)^a} \leq -a - 1$

(i) $\log_2 \dfrac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq -3$

Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones croissantes pour a = 2; on peut prendre l'exponentielle de base 2 de chaque membre:

$\dfrac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq 2^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x \leq \dfrac{1}{8}(x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 12x - 28 \geq 0$

$x \in]-\infty\,;\,-14[\, \cup\, [2\,;\,+\infty[= I_1; \quad S = I_1 \,\cap\, D_f = [2\,;\,4[.$

(ii) Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones décroissantes pour a $= 1/2$; on peut prendre l'exponentielle de base $1/2$ de chaque membre:

$$\frac{(4-x)}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2}^{\frac{-3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 4-x \geq \sqrt{8(x+2)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 16x \geq 0$$

car $x < 4$, donc on a pu élever l'inégalité au carré puisque tous les facteurs sont positifs.

$x \in]-\infty\,;\,0[\, \cup\,]16\,;\,+\infty[= I_2; \quad S = I_2 \,\cap\, D_f =]-2\,;\,0].$

2. (a) Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^*$

On prend le logarithme :

$$x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} x \ln x = \sqrt{x} \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}x - \sqrt{x}\right) \ln x = 0$$

- Première solution : $\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$
- Deuxième solution : $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Ce sont les deux solutions $S = \{1\,;\,4\} \in D_f$ car 0 n'appartient pas à D_f

(b) Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^*$ car : $[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$

$x\,(x^x) = x^{6/x} \quad \Leftrightarrow \quad x^{x+1} = x^{6/x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{(x+1)\ln(x)} = e^{\frac{6}{x}\ln(x)} \quad \Leftrightarrow (x+1)\ln(x) = \dfrac{6}{x}\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = \dfrac{6}{x}$ ou $x = 1 \quad x \in D_f$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$ et $x = 1$ ainsi $x = 1, 2$ sont les seules solutions acceptables.

3.

(a) $a(x) = \tan(a^x) = \tan\left(e^{x \ln a}\right) \quad \Rightarrow \quad a'(x) = \ln a e^{x \ln a}\left[1 + \tan^2(e^{x \ln a})\right]$

$= a^x \ln a \left[1 + \tan^2(a^x)\right],$

(b) $b(x) = e^{1/\ln x} \quad \Rightarrow \quad b'(x) = (1/\ln x)'\, e^{1/\ln x} = -\dfrac{e^{1/\ln x}}{x \ln^2 x},$

(c) $c(x) = \ln(\ln x) \quad \Rightarrow \quad c'(x) = (\ln x)' \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x},$

(d) $d(x) = \arcsin(e^x) \quad \Rightarrow \quad d'(x) = (e^x)' \dfrac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}},$

(e) $e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad e'(x) = \sin(\ln x - \dfrac{\pi}{4}) + x(\dfrac{1}{x})\cos(\ln x - \dfrac{\pi}{4})$

$= \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - \ln x) = \sqrt{2}\,\sin(\ln x)\,,$

(f) $f(x) = x^{\sin x} = e^{(\sin x)\ln x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left[\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right] e^{(\sin x)\ln x}$

$= \left[\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right] x^{\sin x}\,,$

(g) $g(x) = (\sin x)^x = e^{x \ln sinx} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = (x \ln sinx)' \cdot e^{x \ln sinx}$

$= [x\ \cot x + \ln(\sin x)]\, e^{x \ln sinx} = [x\ \cot x + \ln(\sin x)]\,(\sin x)^x\,,$

(h) $h(x) = x^{1/x} = e^{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \left[\dfrac{-1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right] e^{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}\ x^{1/x}\,,$

(i) $i(x) = x^{1/\ln(x^2)} = e^{\left(\frac{\ln x}{\ln(x^2)}\right)} \quad \Rightarrow \quad i'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x^2)}\right)' \cdot e^{\left(\frac{\ln x}{\ln(x^2)}\right)}$

$= \left[\dfrac{-2x}{x^2}\dfrac{1}{(\ln x^2)^2}\ln x + \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln x^2}\right] e^{\left(\frac{\ln x}{\ln(x^2)}\right)} = \left[\dfrac{-1}{x}\dfrac{1}{\ln x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln x^2}\right] x^{1/\ln(x^2)} = 0\,.$

car $(\ln x^2)^2 = (2\ln x)^2 = (2\ln x)(2\ln x) = (2\ln x)(\ln x^2)$.

On peut transformer facilement la fonction $i(x) = x^{1/\ln(x^2)} = e^{\left(\frac{\ln x}{\ln(x^2)}\right)} = e^{\left(\frac{\ln x}{2\ln(x)}\right)} =$
$= e^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{e}$:

la fonction est une constante, donc la dérivée est nulle !

4. (a) Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^*$;

$y' = \dfrac{a}{(a-1)}\dfrac{(\ln x)^{a-1}}{x}\,; \quad y'' = \dfrac{a}{a-1}\dfrac{(\ln x)^{a-2}}{x^2}(-\ln x + a - 1)$

La fonction y(x) est continue sur son ensemble de définition ; il y a un point d'inflexion si sa deuxième dérivée s'annule et change de signe :

$y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{(\ln x)^{a-2} = 0 \quad ou \quad -\ln x + a - 1 = 0\}$; les points d'inflexion sont:

- le point $(1\,;0)$, pour $a \geq 3$ et a impair car $\ln x$ change de signe au voisinage de $x = 1$;
- les points $(e^{a-1}\,;(a-1)^{a-1})$; la partie : $-\ln x + a - 1 = 0$ est la seule à s'annuler et changer de signe.

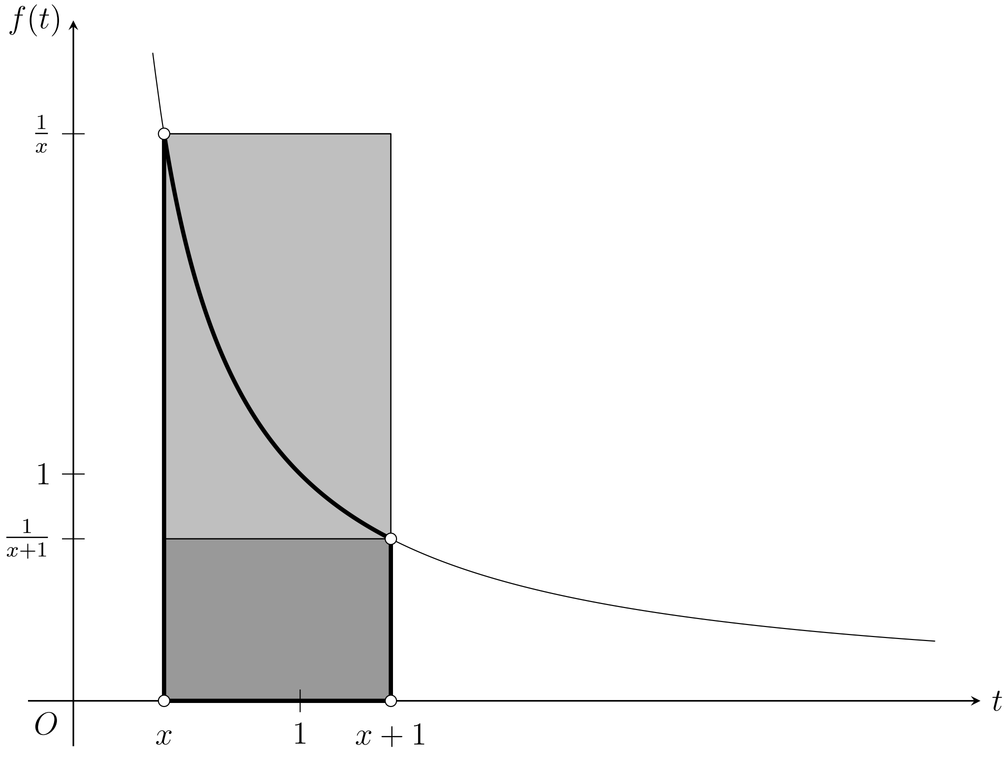
(b) En posant $a-1=t$, on a $y=g(t)=t^t=e^{t\ln t}$ d'où :

$$\frac{dy}{dt}=(1+\ln t)e^{t\ln t}=0 \quad\Rightarrow\quad \ln t=-1 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{1}{e}$$

Pour $t<\frac{1}{e}$ on a $g'(t)<0$ et pour $t>\frac{1}{e}$ on a $g'(t)>0$; on en déduit que la courbe représentative de g présente un minimum en $t=\frac{1}{e}$.

$$\text{La réponse est donc :}\quad a=1+\frac{1}{e}.$$

5. (a) La valeur $\ln(x+1)-\ln(x)$ représente l'aire du domaine limité par le graphe de $f(t)=\frac{1}{t}$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $t=x$ et $t=x+1$.



- Cette aire est strictement plus grande que l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $I=\,]\,x\,,\,x+1\,[$ et de hauteur $\frac{1}{x+1}$, car $f(t)>\frac{1}{x+1}\quad\forall\, t\in I$.
- De même, elle est strictement plus petite que l'aire du rectangle construit sur l'intervalle I et de hauteur $\frac{1}{x}$, car $f(t)<\frac{1}{x}\quad\forall\, t\in I$.

$$\text{D'où :}\qquad \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x},\qquad \forall\, x>0.$$

(b) D'après les règles de calcul des logarithmes,

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}.$$

Voulant faire apparaître la fonction puissance généralisée $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, on multiplie les trois membres de la double inégalité par $x > 0$.

$$\frac{x}{x+1} < x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 1\,.$$

Et la fonction exponentielle étant strictement croissante, on a

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$ car la fonction exponentielle est continue.

Donc d'après le théorème des deux gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$