Algèbre Linéaire Tissot

Semestre de printemps 2019

Corrigé 9

Valeurs propres : exercice 12

(a) **Valeurs propres de f**

Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (16-\lambda)(9-\lambda) - 144 \;=\; \lambda^2 - 25\lambda + 0 = 0$$

On en déduit les valeurs propres de f : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 25$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$**

$$E(0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = \vec{0} \right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 16x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre $E(0)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = 25$**

$$E(25) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = 25\,\vec{x} \}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = 25\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -9x - 12y = 0 \\ -12x - 16y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre $E(25)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$.

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base.

Relativement à la base propre $E' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, la matrice de f s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f(\vec{u}_1) \;=\; \vec{0} \\ f(\vec{u}_2) \;=\; 25\,\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A'_h \cdot A'_p \quad \Rightarrow \quad f = h \circ p \quad \text{car :}$$

A'_h : matrice d'une homothétie h de rapport 25 et de centre O

A'_p : matrice d'une projection sur $E(25)$, parallèle à $E(0)$ ($\perp E(25)$).

(b) **Valeurs propres de** f

Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(B - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-\lambda)(-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 9 = 0$$

On en déduit les valeurs propres de f : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre** $\lambda_1 = 3$

$$E(3) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = 3\,\vec{x} \right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = 3\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre $E(3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre** $\lambda_2 = -3$

$$E(-3) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = -3\,\vec{x} \right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = -3\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre $E(-3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$.

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base.
Relativement à la base propre $E' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, la matrice de f s'écrit :

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f(\vec{u}_1) = +3\,\vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_2) = -3\,\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B'_h \cdot B'_s \quad \Rightarrow \quad f = h \circ s \quad \text{car :}$$

B'_h : matrice d'une homothétie h de rapport 3 et de centre O

B'_s : matrice d'une symétrie d'axe $E(3)$, s est une symétrie orthogonale.

(c) **Valeurs propres de f**

Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(C - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

On en déduit les valeurs propres de f : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$**

$$E(2) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = 2\vec{x} \right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = 2\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{axe Oy}$$

Le sous-espace propre $E(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$**

$$E(3) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = 3\vec{x} \right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre $E(3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$.

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base. Relativement à la base propre $E' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, la matrice de f s'écrit :

$$C' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_2) = 3\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = C'_h \cdot C'_a \quad \Rightarrow \quad f = h \circ s \quad \text{car :}$$

C'_h : matrice d'une homothétie h de rapport 2 et de centre O

C'_a : matrice d'une affinité d'axe $E(2)$, de direction $E(3)$ et de rapport $\lambda = \frac{3}{2}$.

Remarque : Cette décomposition n'est pas unique !

(d) **Valeurs propres de f**

Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(D-\lambda I_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (5-\lambda)(-1-\lambda)+8 \;=\; \lambda^2-4\lambda+3=0$$

On en déduit les valeurs propres de f : $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=3$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1=1$**

$$E(3)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x})=1\,\vec{x}\right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x})=\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x-2y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre $E(1)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$.

- **Sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2=3$**

$$E(-3)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x})=3\,\vec{x}\right\}.$$

Résolvons l'équation $f(\vec{x})=3\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 4x-4y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x-y=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre $E(3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$.

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base.

Relativement à la base propre $E'=(\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$, la matrice de f s'écrit :

$$D'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f(\vec{u}_1) \;=\; 1\,\vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_2) \;=\; 3\,\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$D' \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \;=\; D'_a$$

D'_a : matrice d'une affinité a d'axe $E(1)$, de direction $E(3)$ et de rapport $\lambda=3$.

Valeurs propres : exercice 13

On va déterminer la matrice de f dans une base propre puis effectuer un changement de bases.

De même pour la symétrie car l'angle entre $(O\,,\vec{e}_1)$ et son axe n'est pas un angle remarquable.

Attention, les bases propres de f et s ne sont pas les mêmes.

- L'affinité a pour axe la droite $a : y = 0$, de vecteur directeur $\vec{e}_1 = = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Elle a pour direction $\vec{v} = = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le rapport est -5.

  On en déduit les valeurs propres de f :
  $\lambda_1 = 1$, associé au sous espace propre $E_f(1) = (O\,,\vec{e}_1)$,
  $\lambda_2 = -5$, associé au sous espace propre $E_f(-5) = (O\,,\vec{v})$,
  et la base propre $\mathcal{B}(\vec{e}_1\,,\vec{v})$.

  Par rapport à cette base la matrice de f est donc la suivante :

$$M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- On considère le changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}(\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ à $\mathcal{B}(\vec{e}_1\,,\vec{v})$, de matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  De la relation $M'_f = P^{-1} M_f P$, on en déduit la matrice de f par rapport à la base canonique.

$$M_f = P\,M'_f\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- La symétrie a pour axe la droite $b : -2x + y = 0$, de vecteur directeur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Elle est orthogonale donc elle a pour direction $\vec{v} = = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Les valeurs propres de s sont :
  $\lambda_1 = 1$, associé au sous espace propre $E_s(1) = (O\,,\vec{b})$,
  $\lambda_2 = -1$, associé au sous espace propre $E_s(-1) = (O\,,\vec{v})$,
  et $\mathcal{B}(\vec{b}\,,\vec{v})$ est une base propre.

  Par rapport à cette base la matrice de s est donc la suivante :

$$M'_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- On considère le changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}(\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ à $\mathcal{B}(\vec{b}\,,\vec{v})$, de matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  De la relation $M'_s = Q^{-1} M_s Q$, on en déduit la matrice de s par rapport à la base canonique.

$$M_s = Q\,M'_s\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Les matrices M_f et M_s étant exprimées dans la base canonique, on en déduit la matrice de $g = s \circ f$ dans cette base.

$$M_g = M_s\,M_f = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -56 \\ 4 & 33 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la nature géométrique de g, on cherche la matrice de g dans une base propre.

- Les valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique de g :

$$p(\lambda) = \det(M_g - \lambda I_2) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr} M_g\, \lambda + \det M_g = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$
On en déduit les deux valeurs propres de g et leur multiplicité :
$\lambda_1 = 1\,,\; n_1 = 1 \quad$ et $\quad \lambda_2 = 5\,,\; n_2 = 1$
Ces valeurs propres sont distinctes et de multiplicité 1, les sous espaces propres sont donc de dimension 1 : g est diagonalisable.

- Sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$

$$E(1) \;= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\vec{x}) = \vec{x}\,\}$$

Il faut résoudre l'équation $\; g(\vec{x}) = \vec{x} \;\Leftrightarrow\; M_g\, X = X\,.$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -56 \\ 4 & 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3x - 56y = 5x \\ 4x + 33y = 5y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -8x - 56y = 0 \\ 4x + 27y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x + 7y = 0$$

$E(1)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 5$

$$E(5) \;= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\vec{x}) = 5\,\vec{x}\,\}$$

Il faut résoudre l'équation $\; g(\vec{x}) = 5\,\vec{x} \;\Leftrightarrow\; M_g\, X = 5\,X\,.$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -56 \\ 4 & 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3x - 56y = 25x \\ 4x + 33y = 25y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -28x - 56y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y = 0$$

$E(5)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On définit la base propre suivante, formée de vecteurs propres, $\mathcal{B}\,(\vec{u}\,,\vec{v})$. Par rapport à cette base, la matrice de g est diagonale :

$$M'_g \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \left\{\begin{array}{l} g(\vec{u}) = \vec{u} \\ g(\vec{v}) = 5\,\vec{v} \end{array}\right.$$

On reconnaît la matrice d'une affinité d'axe la droite $\; E(1) \,:\, x + 7y = 0$, de direction $\;\vec{v}$ parallèle à $\;E(5)$ et de rapport $k = 5$.

Valeurs propres : exercice 15

(a) Matrice de f : $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- **Valeurs et sous-espaces propres propres de f**
Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

On en déduit les valeurs propres de f et leur multiplicité respective :

$$\lambda_1 = 1\,, \quad n_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 2\,, \quad n_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 = 3\,, \quad n_3 = 1\,.$$

Les trois valeurs propres étant distinctes, f est donc diagonalisable. Les sous-espaces propres associés sont des droites.

- $E(1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}$.
On résoud l'équation $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y + 3z = 0 & (1) \\ y + 3z = 0 & (2) \\ 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

On constate que $(1) = 2\,(2) - \frac{3}{2}\,(3)$. Le système se réduit donc aux équations (2) et (3).

$$\begin{cases} y + 3z = 0 & (2) \\ 2z = 0 & (3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = z \ \text{ et } \ x \text{ quelconque}$$

Le sous-espace propre $E(1)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E(1) \ : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}\,.$$

- $E(2) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 2\,\vec{x}\}$.
On résoud l'équation $f(\vec{x}) = 2\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre $E(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Le sous-espace propre $E(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E(2) \ : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

- $E(3) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 3\vec{x} \}$.

  On résoud l'équation $f(\vec{x}) = 2\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

  Le sous-espace propre $E(3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Le sous-espace propre $E(3)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$E(3) \ : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base. Relativement à la base propre $E' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la matrice de f s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f(\vec{u}) = 1\vec{u} \\ f(\vec{v}) = 2\vec{v} \\ f(\vec{w}) = 3\vec{w} \end{cases}$$

Les colonnes de la matrice de passage P de la base E à la base E' sont constituées des composantes des nouveaux vecteurs de base $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans l'ancienne base E.

$$P = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On décompose f en deux affinités dont les axes sont des plans.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_a \, M_b$$

M_a est la matrice de l'affinité a de plan $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, de direction $\vec{w}$ et de rapport 3.

M_b est la matrice de l'affinité b de plan $(O\,,\vec{u}\,,\vec{w})$, de direction $\vec{v}$ et de rapport 2.

D'où : $f = a \circ b$.

Cette décomposition n'est pas unique.

(b) Matrice de f : $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

- **Valeurs et sous-espaces propres propres de** f

  Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique de f :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & 34-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 (2 - \lambda) = 0$$

  On en déduit les valeurs propres de f et leur multiplicité respective :

$$\lambda_1 = 0\,, \quad n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 2\,, \quad n_2 = 1\,.$$

  Pour que f soit diagonalisable, il faut que le sous-espace associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ soit un plan. On commence donc par déterminer $E(0)$.

- $E(0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0} \right\}$.

  On résoud l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z = 0$$

  Le sous-espace propre $E(0)$ est un plan passant par l'origine, f est donc diagonalisable. On détermine deux vecteurs directeurs de ce plan :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $E(2) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 2\,\vec{x} \}$.

  On résoud l'équation $f(\vec{x}) = 2\,\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-y+2z=0 & (1) \\ 3x-5y+6z=0 & (2) \\ 2x-2y+2z=0 & (3) \end{cases}$$

On constate que $(1) = -(2) + 4\,(3)$. Le système se réduit donc aux équations de plans (1) et (3).

Le sous-espace propre $E\,(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w}$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E\,(2)\ :\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Matrice de f dans une base propre

La matrice de f exprimée dans une base propre de f est une matrice diagonale constituée des valeurs propres associées aux vecteurs propres qui définissent la base.

Relativement à la base propre $E' = (\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{w}\,)$, la matrice de f s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} f\,(\vec{u}\,) &= 0\,\vec{u} &= \vec{0} \\ f\,(\vec{v}\,) &= 0\,\vec{v} &= \vec{0} \\ f\,(\vec{w}\,) &= 2\,\vec{w} & \end{cases}$$

Les colonnes de la matrice de passage P de la base E à la base E' sont constituées des composantes des nouveaux vecteurs de base $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans l'ancienne base E.

$$P = (\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{w}\,)_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_h\, M_p$$

M_h est la matrice d'une homothétie h de centre O et de rapport 2.

M_p est la matrice d'une projection p sur la droite $(O\,,\vec{w})$, parallèlement au plan $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

D'où : $f = h \circ p$.

Cette décomposition n'est pas unique.

Valeurs propres : exercice 17

(a) Les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique de h :

$$\det\,(\,M - \lambda\, I_2\,) = 0\,.$$

Soit la matrice de h par rapport à la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

On détermine l'équation caractéristique de h :

$$p(\lambda) \;=\; \det\left(M - \lambda\, I_2 \right) \;=\; \lambda^2 - \operatorname{tr} M\, \lambda + \det M \;=\; \lambda^2 - (\alpha + 2)\, \lambda + 2\alpha - \beta = 0\,.$$

Les valeurs propres de l'affinité h sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. D'où :

$p(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - (\alpha + 2) + 2\alpha - \beta = 0$

$p(-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - (\alpha + 2)(-2) + 2\alpha - \beta = 0$

Ainsi α et β sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 8 + 4\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\alpha = -3$ et $\beta = -4$, d'où la matrice de h :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) *Rappel* :
Soit $\vec{x}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ et g un endomorphisme tel que $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$ sont linéairement indépendants. Alors :

$$\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in \ker g$$

$$\lambda \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in \operatorname{Im} g$$

- On commence par déterminer l'axe et la direction de h.
  L'axe de l'affinité est le sous espace vectoriel associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

  On calcule $E_h(1)$:
  $h(\vec{x}) = 1\,\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad M\,X = X \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; 4x - y = 0$
  L'axe est la droite d'équation $4x - y = 0$, elle a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

  La direction de l'affinité est parallèle au sous espace vectoriel associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$. On calcule $E_h(-2)$:
  $h(\vec{x}) = -2\,\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad M\,X = -2\,X \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x - y = 0$

  La direction est donc parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Par hypothèse :
  $\operatorname{Im} g = (O\,, \vec{v}) = E_h(-2) \quad$ et $\quad \ker g =$ axe de l'affinité $= (O\,, \vec{u}) = E_h(1)\,.$

  Ces deux droites ont des directions linéairement indépendantes, on peut donc appliquer le résultat donné dans l'aide.
  C'est-à-dire g possède deux valeurs propres (distinctes), λ_1 et λ_2 et deux sous

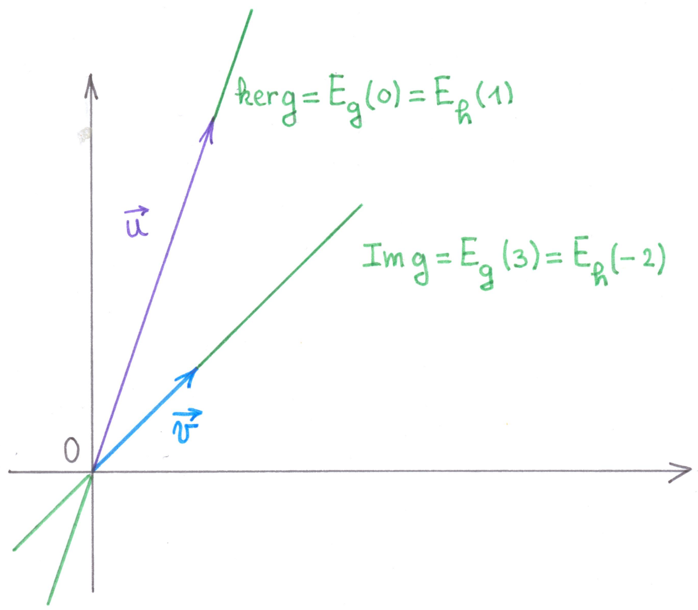
espaces propres :

$\lambda_1 = 0$ et $E_g(0) = \ker g = (O\,,\vec{u})$

$\lambda_2 \neq 0$ et $E_g(\lambda_2) = \operatorname{Im} g$

Or :
$\forall\ \vec{x} \in \operatorname{Im} g\ :\ (g - 3I_2)(\vec{x}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ g(\vec{x}) = 3\vec{x} \ \Leftrightarrow\ \lambda_2 = 3$ et $E_g(3) = \operatorname{Im} g = (O\,,\vec{v})$

(c) Il faut s'assurer qu'il est possible de définir une base propre commune.
On a :
$E_h(1) = E_g(0) = (O\,,\vec{u})$ et $E_h(-2) = E_g(3) = (O\,,\vec{v})$



Il est donc possible de définir une base propre commune à h et g. Elle est donnée par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit la base $\mathcal{B}'(\vec{u}\,,\,\vec{v})$. Alors par rapport à cette base :

$$M'_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer la matrice de l'application $l = h \circ g$ par rapport à $\mathcal{B}'$.

$$M'_l = M'_h \cdot M'_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme l est composé d'une homothétie de centre O et rapport -6 avec une projection du plan sur la droite $(O\,,\vec{v})$, de direction parallèle à $\vec{u}$.

Valeurs propres : exercice 18

On commence par tester si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres en utilisant la définition : $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Il faut éventuellement penser à annuler le produit scalaire.

$$\begin{array}{rrcl} f & : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \vec{x} - 4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\,(\vec{x}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de f est de degré deux, il a au plus deux racines réelles λ_1 et λ_2 qui sont les valeurs propres de f , de sous espaces propres $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$.

- $\vec{u}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$
  On calcule, en posant $\vec{u}\cdot\vec{v} = k$:
  $f(\vec{u}) = \vec{u} - 4k\,(\vec{u}\cdot\vec{u})\,\vec{v} \neq \lambda\vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}$ n'est pas un vecteur propre.
- $\vec{v}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$
  On calcule :
  $f(\vec{v}) = \vec{v} - 4k\,(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{v} = \vec{v} - 4k^2\,\vec{v} = (1-4k^2)\,\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  $\Leftrightarrow\;\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1-4k^2$
- Il faut déterminer si il y a un deuxième vecteur propre. On peut le trouver parmi les vecteurs qui annulent le produit scalaire $\vec{x}\cdot\vec{u}$.

  Soit $\vec{r}$ un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants (car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas perpendiculaires par hypothèse).

  $\vec{r}$ est vecteur propre ssi $f(\vec{r}) = \lambda\vec{r}$
  On calcule :
  $f(\vec{r}) = \vec{r} - 4k\,(\vec{r}\cdot\vec{u})\,\vec{v} = \vec{r} - \vec{0} = 1\,\vec{r} = \lambda\vec{r}$
  $\Leftrightarrow\;\vec{r}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$

L'endomorphisme f possède deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-4k^2$.
Elles sont distinctes : $1-4k^2 \neq 1$ car $k \neq 0$ par hypothèse, et donc de multiplicité égale à 1. Les sous espaces propres sont de dimension 1 : ce sont des droites.
$E(1)$ est la droite $(O\,,\vec{r})$
$E(1-4k^2)$ est la droite $(O\,,\vec{v})$
Soit la base $\mathcal{B}(\vec{r}\,,\vec{v})$. C'est une base propre de f, on calcule la matrice M de f par rapport à cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

Discussion de la nature géométrique de f en fonction du paramètre k.
Par rapport à $\mathcal{B}(\vec{r}\,,\vec{v})$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-4k^2 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

- Si $1-4k^2 = -1 \;\Rightarrow k = \pm\dfrac{1}{2}$: $\qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  f est une symétrie oblique de direction parallèle à $\vec{v}$ et d'axe la droite $(O\,,\vec{r})$.
- Si $1-4k^2 = 0 \;\Rightarrow k = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  f est une projection de direction parallèle à $\vec{v}$, sur la droite $(O\,,\vec{r})$.
- Dans les autres cas, f est une affinité d'axe la droite $(O\,,\vec{r})$, de direction $\vec{v}$ et rapport $1-4k^2$.