EPFL
Section MT

Peter Wittwer
30 novembre 2020

Analyse I – Série 11

Echauffement. (Asymptotes)

Trouver les asymptotes verticales et horizontales de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 1. (Points stationnaires et extremums)

Trouver les extremums locaux de la fonction f ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

i) $f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1 \quad \text{sur } [-1, 1]$ *ii)* $f(x) = (x-1)^2 - 2\,|2-x| \quad \text{sur }]2, 3[$

Exercice 2. (Etudes de fonctions)

Etudier les fonctions suivantes et esquisser leurs graphes (points stationnaires, extremums, convexité, points d'inflexion, asymptotes) :

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ *ii)* $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{2x-1}$ *iii)* $f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 3. (V/F : Etude de fonctions)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$.

Q1 : Si f est convexe sur $[a, b]$, alors f' est croissante sur $]a, b[$.

Q2 : Si f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$, alors f' admet un point stationnaire en x_0.

Q3 : Si la tangente au point $\big(c, f(c)\big)$ avec $c \in]a, b[$ est horizontale, alors f admet un extremum en c.

Exercice 4. (Développements limités)

Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f autour de $a = 0$ et donner le reste $r_3(x)$.

i) $f(x) = \sin(3x)$ *ii)* $f(x) = \mathrm{Log}(2 + x)$

Exercice 5. (Composition de développements limités)

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ de

i) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x)), \quad n = 4$ *ii)* $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

iii) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$

Exercice 6. (Limites)

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Exercice 7. (Développement limité en $a \neq 0$)

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $a = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)} .$$

Exercice 8. (V/F : Limites de quotients)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1 : Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Q2 : Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Remarque : Exercice 9 et exercice 10 sont respectivement identiques à l'exercice 8 de la série 8 et à l'exercice 7 de la série 10. L'utilisation du concept des développements limités facilite grandement leur résolution. Il est vivement recommandé de refaire les séries 5, 8 et 10 en se servant partout où c'est possible des développements limités.

Exercice 9. (QCM : Prolongement par continuité)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big(\cos(x) - 1\big) - \cos\big(\sin(x)\big) + 1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0\,, \\ c & \text{pour } x = 0\,. \end{cases}$$

Quelle est la valeur de $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue en $x = 0$?

- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

Exercice 10. (QCM : Calcul d'une limite)

La limite

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\frac{2}{x^2}} \left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) - 1 \right) \right)$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ e^2