Contrôle d'algèbre linéaire N°2

Durée : 1 heure 30 minutes. Barème sur 15 points.

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Déterminer l'ensemble $S \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ des solutions de l'équation matricielle

$$(A - I)(X + I + X^t)A = 0\,,$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier rigoureusement la réponse. 2.5 pts

2. Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un paramètre réel m :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2m+4 \\ 2m+1 \\ m+5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \\ m+1 \end{pmatrix}.$$

(a) On considère le sous-espace vectoriel $V = [\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]_{\text{sev}}$.
Déterminer m tel que la dimension de $\dim V < 3$. Dans chaque cas, décrire V par une équation (paramétrique s'il s'agit d'une droite, cartésienne s'il s'agit d'un plan).

(b) On pose $m = 1$. Soient encore les vecteurs

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel $W = [\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,, \vec{d}\,]_{\text{sev}}$.
Montrer que $\vec{u} \in W$ et déterminer les composantes de $\vec{u}$ dans une base de W contenant $\vec{a}$.

4 pts

3. Soit W le sous-espace vectoriel de $P_3[x]$ engendré par

$$P = x^3+x^2+1 \qquad Q = 3x^3-x^2+2x-3 \qquad R = 4x^3+2x^2+x+1 \qquad S = 4x^3+2x-2\,.$$

(a) Donner une base et la dimension de W .

(b) Le polynôme $T = 2x^3 + x - 1$ appartient-il à W ? Si c'est le cas, donner ses composantes relativement à la base de W choisie.

Soit encore le sous-ensemble de $P_3[x]$

$$H = \{P \in P_3[x] \mid P(1) - 4P'(0) = 0\}\ ,$$

où $P'(x_0)$ est la dérivée de P en x_0 .

(c) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $P_3[x]$.

(d) Donner une base et la dimension de $W \cap H$.

5 pts

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée et l'application

$$\begin{array}{rrcl} f\ : & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & f(X) = (X^t + X)A\,. \end{array}$$

(a) Montrer que f est linéaire.

On fixe $n = 2$ et on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer les images des vecteurs de la base usuelle de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im} f$.

(d) Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.

3.5 pts