31 mars 2009

Contrôle d'analyse II no 3

Durée: 1 heure 20'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

1. a) Calculer $\mathrm{Sh}\left(\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ et $\mathrm{Ch}\left(\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

   b) Utiliser ces deux résultats ainsi que le formulaire au verso pour déterminer la solution de l'équation :

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Chx}-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\mathrm{Shx}=\mathrm{Sh3x}$$

2½ pts

2. Soit φ un nombre réel tel que $0 \leq \varphi \leq \pi$.

   a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z solutions de l'équation

$$z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$$

   b) Déterminer φ pour que les points du plan dont les affixes sont les solutions de l'équation soient les sommets d'un hexagone régulier. 3½ pts

   Suggestion : On peut compléter le membre de gauche de l'équation pour former un carré parfait.

3. a) Soit $R(t) = 4t^2 - 40t + 19$; trouver, sans division euclidienne, le reste de la division de R(t) par 2t -19 ; qu'en déduisez-vous ?

   Soient les polynômes réels donnés par :

   $P(x) = 2x^3 + (4t+1)x^2 + 2t\cdot x - 8t^2 + 10t - 3$ et $Q(x) = x^3 + 2t\cdot x^2 - 2x - 4t^2 + 1$

   b) Justifier rigoureusement que P et Q possèdent une racine commune quelle que soit la valeur de t. 4 pts

   c) Trouver la valeur du paramètre t pour que les polynômes P et Q possèdent deux racines communes et calculez ces dernières.

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

$\forall x \in R$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, et pour $x \neq 0$, $\operatorname{coth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\qquad$ $\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x$ $\qquad$ $\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x}$

$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\qquad$ $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$

$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\qquad$ $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$

$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2 \cdot \operatorname{sh}^2 x = 2 \cdot \operatorname{ch}^2 x - 1$ $\qquad$ $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$

$\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$ $\qquad$ $\operatorname{th}(x-y) = \dfrac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$

$\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y = 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{sh}x - \operatorname{sh}y = 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\forall x \in R$ $\qquad$ $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$; $\quad$ $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\quad$ $\operatorname{th} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ où $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\quad$ $\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad$ $\forall x \in]1,+\infty[$, $\quad$ $\operatorname{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in R$, $\quad$ $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad$ $\forall x \in R$, $\quad$ $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\forall x \in]-1;1[$, $\quad$ $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\qquad$ $\forall x \in]-1;1[$, $\quad$ $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\forall x \in R \setminus [-1;1]$, $\quad$ $\operatorname{Argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad$ $\forall x \in R \setminus [-1;1]$, $\quad$ $\operatorname{Argcoth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$