Contrôle d'algèbre linéaire N°1

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe

1. On considère la proposition suivante :

$$T: \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n^2 \geq n\,.$$

Démontrer T à l'aide de la méthode par l'absurde.

2 pts

2. On considère la proposition suivante :

$$T: \quad \forall\, A\,, B\, \subset \mathbb{N},\ A \text{ et } B \text{ finis}, \quad A \not\subset B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B)\,.$$

Rappel : $\mathrm{card}(A) = m \Leftrightarrow A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, A contient m éléments distincts.

a) Ecrire la négation de T , notée non$T$, et montrer que non$T$ est vraie.

b) Ecrire la proposition réciproque de T , notée R .

c) Montrer que R est vraie par la méthode de la contraposée.

3.5 pts

3. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{9x+18}{x^2 - x - 2}\,. \end{array}$$

a) Déterminer rigoureusement $\mathrm{Im}\, f$.

b) L'application f est-elle injective ? Justifier rigoureusement la réponse.

4 pts

Tourner la page

4. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & f(x) = (x-1, 2x+1)\,. \end{array}$$

a) Soient les ensembles

$$\begin{array}{rcl} A & = & [-1, 1] \\ B & = & \big\{ n \in \mathbb{Z} \,\big|\, -1 \le n \le 3 \ \text{ et } \ \exists\, k \in \mathbb{Z},\, n = 2k+1 \big\}\,. \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(A \times B)$.

b) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$ et le représenter graphiquement (échelle : 1 cm par unité). f est-elle surjective ?

On donne encore l'application g définie par

$$\begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = \begin{cases} \frac{2u+1}{v} & \text{si } v \neq 0 \\ 1 & \text{si } v = 0\,. \end{cases} \end{array}$$

c) Déterminer $g \circ f$. Cette application est-elle injective ? Justifier rigoureusement la réponse.

5.5 pts