Introduction à la modélisation de quelques systèmes dynamiques simples et aux équations aux différences

Partie I

Véronique TISSOT
Monique VOUTAZ

Table des matières

Les schémas et leurs symboles intervenant dans les figures *1.1* à *1.8* sont tirés de l'ouvrage **Dynamic Modeling of Environmental Systems**, cité en référence.

Chapitre 1

Concepts de base relatifs à la modélisation

1.1 Généralités

De nombreux phénomènes changent d'état au cours du temps sous l'influence de diverses causes qui interagissent entre elles ; on parle alors de systèmes dynamiques.

En particulier, les phénomènes de type environnemental tels que pollution, changement climatique ou âge, taille, nombre d'individus d'une population sont des exemples de systèmes dynamiques.

D'une manière générale, toutes les causes provoquant des variations peuvent être considérées comme des "forces" (au sens de la dynamique). Ces "forces" déterminent ce que l'on appelle la dynamique du système. Expliquer ces variations par une dynamique revient essentiellement à modéliser celles-ci.

Construire un modèle d'un système dynamique consiste à mettre en oeuvre des outils (équations mathématiques, observations sur le terrain, etc) et des concepts qui permettent d'expliquer comment un phénomène change au cours du temps et comment il se comporte à long terme : extinction d'une population, comportement stable ou non d'un phénomène.

On valide une modélisation en constatant la coïncidence entre les prévisions et les observations. Les valeurs données aux paramètres ainsi que la structure des équations doivent être considérées comme des hypothèses à tester. On doit donc être prudent lorsqu'on tente d'utiliser ces modèles à des fins "explicatives".

1.2 Modèles à compartiments

En dynamique les modèles usuels les plus simples sont des modèles dits à *compartiments*.

Un compartiment est un réservoir où sont stockés momentanément des éléments : individus, barrils de pétrole, poissons, etc. Un tel modèle peut comporter plusieurs compartiments contenant des éléments d'une même nature ou de nature différente : proies-prédateurs, poissons sains-poissons malades, etc. Le modèle permet d'avoir une vision sur le contenu des stocks en un instant t donné.

Dans chaque compartiment entre et sort une quantité d'éléments par unité de temps, appelés *flux entrant* et *flux sortant*. Ces flux sont dus à un ensemble de phénomèmes actifs dans le temps.

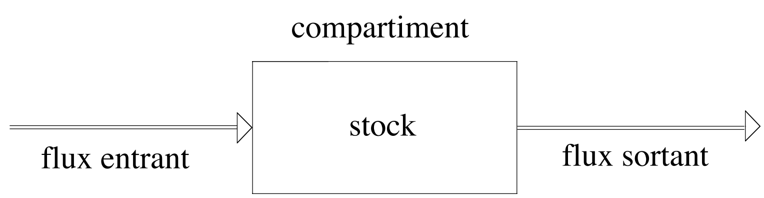


Figure 1.1

Le changement d'état du stock au cours du temps est déterminé par le bilan des flux. Ces flux sont fonctions de variables appelées *variables de flux*, qui sont par exemple des taux de mortalité, de natalité ou des taux d'exposition à une maladie ou sont des taux de prédation ... Ces taux peuvent être constants, ce sont alors des paramètres, ou peuvent être donnés par une équation mathématique ou éventuellement par des graphes provenant d'observations ou de statistique. Dans ces deux derniers cas, ces taux expriment des contraintes imposées par l'extérieur du système. Par exemple la température, l'abondance de nourriture, etc peuvent influencer sur les taux de naissance ou de mortalité.

1.3 Etude d'un modèle simple

On observe une population composée d'hommes et de femmes à part égale, vivant sur un territoire donné et ne subissant ni mouvement d'immigration ni d'émigration. Dans une première approche, par souci de simplicité, on considère que les modifications de la population sont imputables aux seuls phénomèmes naturels des naissances et des décès, ceux-ci dépendant d'un état supposé stable des conditions de vie. Dans cette optique, seul le compartiment des personnes fluctue et on désire mesurer l'état du compartiment d'année en année (ou de mois en mois ...).

On quantifie le flux entrant des naissances et le flux sortant des décès en introduisant une unité de temps. Il est raisonnable dans ce cas de choisir l'année comme unité. Le flux entrant est alors le nombre de naissances par année, le flux sortant le nombre de décès par année.

Soit R_t le contenu du réservoir à l'année t. Le modèle doit permettre de calculer le contenu une année plus tard. Il se présente donc comme un modèle discret.

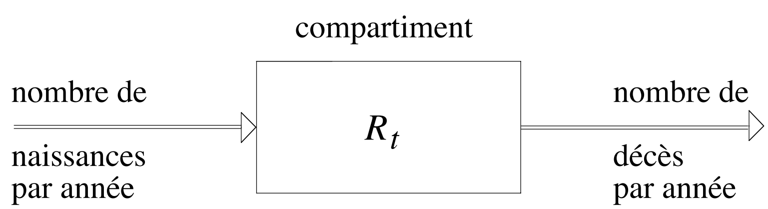


Figure 1.2

La relation évidente entre R_t et R_{t+1} est la suivante :

$$R_{t+1} = R_t + (\text{nombre de naissances par année - nombre de décès par année})\cdot 1$$

Du point de vue des unités, on a :

$$\text{personne} = \text{personne} + (\text{personne/an - personne/an}) \cdot \text{an}$$

On exprimer le contenu du réservoir une fraction Δt d'année plus tard : $t + \Delta t$.

$$R_{t+\Delta t} = R_t + (\text{nombre de naissances par année - nombre de décès par année})\ \Delta t$$

D'une manière générale lorsque la modélisation utilise des bilans de flux, on obtient pour chaque compartiment, une loi de mise à jour du type suivant :

$$\boxed{R_{t+\Delta t} = R_t + (\text{flux entrants - flux sortants})\ \Delta t}$$

Dans l'exemple ci-dessus, pour le flux entrant, la variable de flux est le taux de natalité : c'est le nombre de naissance par personne et par année. Si ce taux est constant, noté b, on a alors :

$$\text{flux entrant} \;=\; \text{nombre de naissances par année} \;=\; b\ R_t$$

De même pour le flux sortant, la variable de flux est le taux de mortalité : c'est le nombre de décès par personne et par an. Si ce taux est constant, noté d, on a alors :

$$\text{flux sortant} \;=\; \text{nombre de décès par année} \;=\; d\ R_t$$

D'où la "règle de mise à jour" :

$$\boxed{R_{t+\Delta t} = R_t + (b-d)\ R_t\ \Delta t}$$

Mathématiquement cette règle est une relation de récurrence.
Du point de vue des unités, on a :

personne = personne +
(personne/(an · personne) - personne/(an · personne)) · an · personne

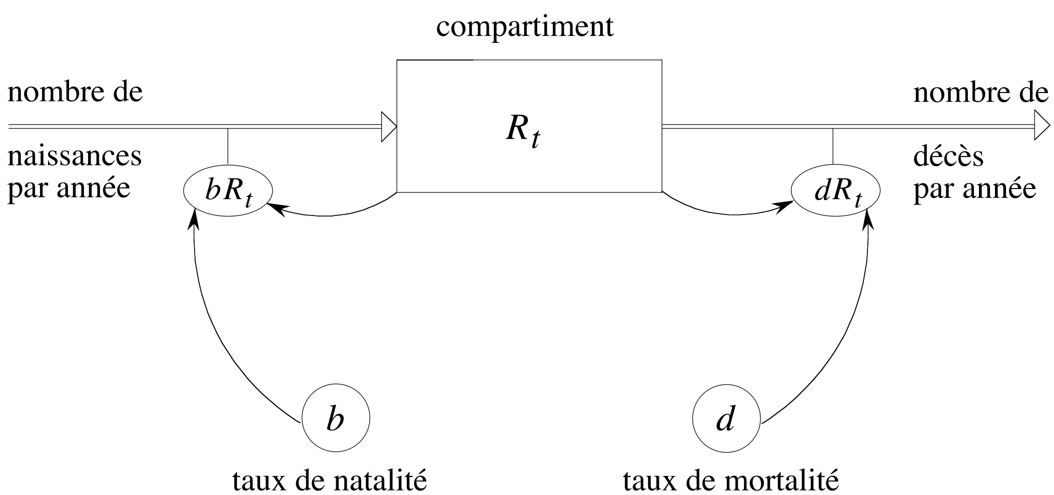
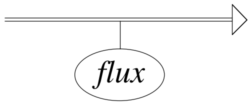


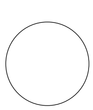
Figure 1.3

Symboles utilisés :



flèche de flux

flèche définissant la relation de cause à effet entre éléments du système



variable de flux

Dans un deuxième temps, on introduit un second réservoir contenant comme éléments les ressources de la population. Ce stock est mesuré en *unité de ressources* :

1 unité de ressource = quantité de ressources nécessaires à une personne pour subsister pendant 1 mois

Pour mesurer le stock, on est souvent obligé d'introduire une unité arbitraire, propre au modèle, qu'il suffit de définir. Soit S_t le contenu du réservoir à l'année t.

Le flux entrant dans le compartiment S_t est appelé *flux de renouvellement*. C'est le nombre "d'unités de ressources" arrivant dans le stock pendant une année (à comparer avec le nombre de naissances par année).

La variable de flux est le *taux de renouvellement* : c'est le nombre d'unités de ressource ajoutées à chaque unité du stock et par an (à comparer avec le taux de natalité). On suppose que ce taux, noté r, ne dépend que du rendement naturel des ressources : il est donc constant. On a alors :

$$\text{flux de renouvellement} = \text{nombre d'unités de ressource ajoutées par année} = r\ S_t$$

Du point de vue des unités, on a :

$$\frac{\text{unité de ressource}}{\text{an}} = \frac{\text{unité de ressource}}{\text{unité de ressource} \cdot \text{an}} \cdot \text{unité de ressource}$$

Le flux sortant est appelé *flux d'épuisement*. La variable de flux,notée e, est appellée *taux d'épuisement*. Ce taux n'est pas constant car il dépend directement de chaque individu, à savoir de sa consommation et des pertes naturelles des ressources qui lui sont attribuées. C'est le nombre d'unités de ressource consommées et perdues par personne et par an. Il y a donc une première interaction entre les deux résevoirs. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{flux d'épuisement} &= \text{nombre d'unités de ressource consommées} \\ & \text{ et perdues par année} \\ &= e\ R_t \end{aligned}$$

Du point de vue des unités, on a :

$$\frac{\text{unité de ressource}}{\text{an}} = \frac{\text{unité de ressource}}{\text{personne} \cdot \text{an}} \cdot \text{personne}$$

Le taux d'épuisement peut être donné par un graphe qui est établi grâce à des observations.

D'autre part, le taux de naissances peut aussi être affecté par le stock des ressources : la population régule ses naissances selon l'état de ce stock. On a donc une deuxième interaction entre les réservoirs. Ce taux peut aussi être donné par un graphe.

Pour le réservoir des ressources, la règle de mise à jour est :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \begin{array}{l}(\text{nombre d'unité de ressources entrant par année} - \\ \text{nombre d'unité de ressources sortant par année})\ \Delta t\end{array}$$

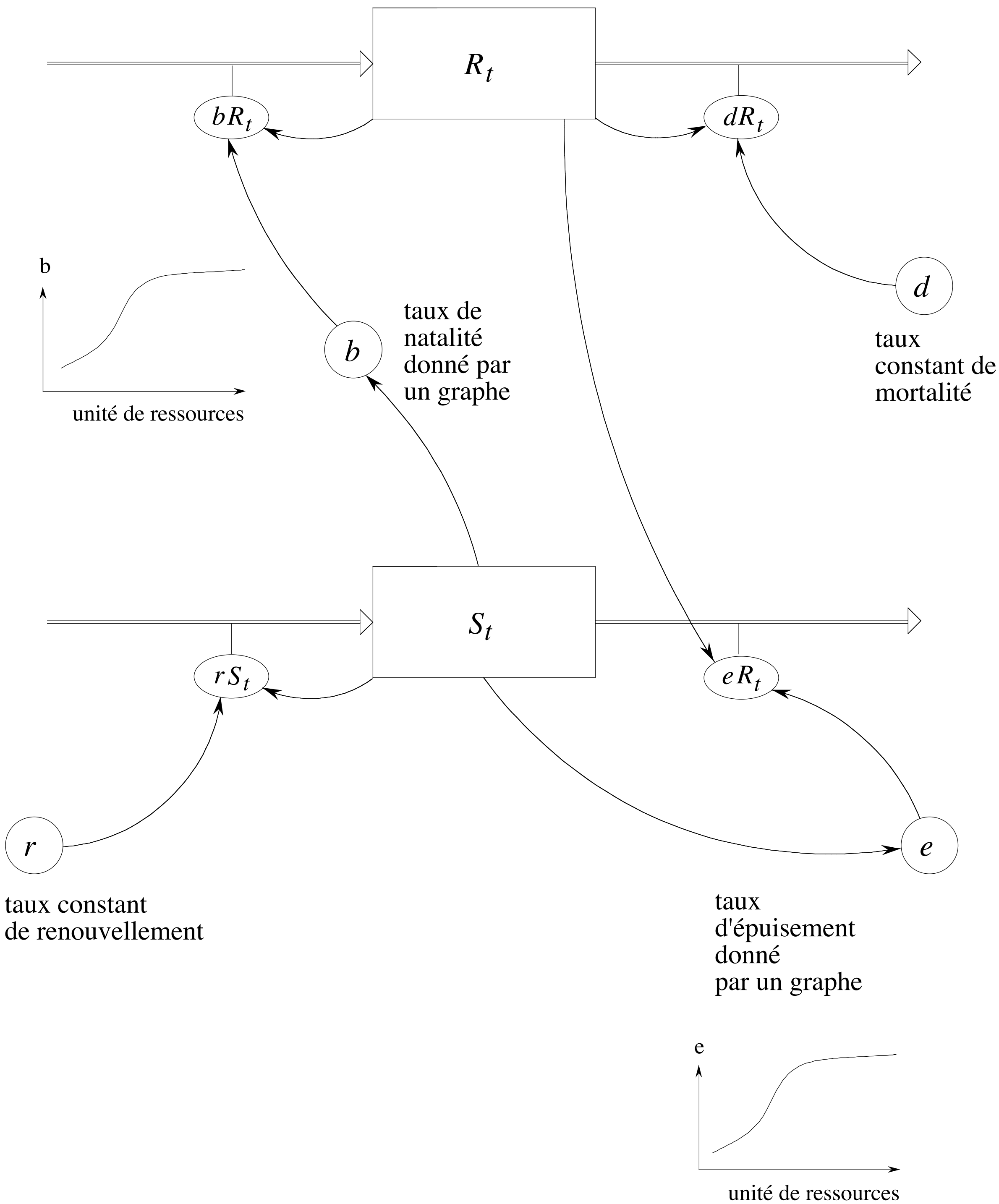


Figure 1.4

Remarque :
Dans le modèle précédent, on remarque qu'il y a une relation de cause à effet entre le réservoir de la population et celui des ressources, ce qui est souvent le cas dans les systèmes dynamiques.
Si R_t augmente ($\oplus$) alors le flux d'épuisement des ressources s'accroît, ce qui a pour effet de diminuer S_t et donc de diminuer le flux entrant des naissances, et en conséquence R_t décroît ($\ominus$).
Si R_t diminue ($\ominus$) alors le flux d'épuisement des ressources diminue, ce qui a pour effet d'augmenter S_t et donc d'augmenter le flux entrant des naissances et en conséquence R_t croît ($\oplus$).
On peut schématiser ce processus, appelé *boucle de rétroaction* (feedback), ainsi :

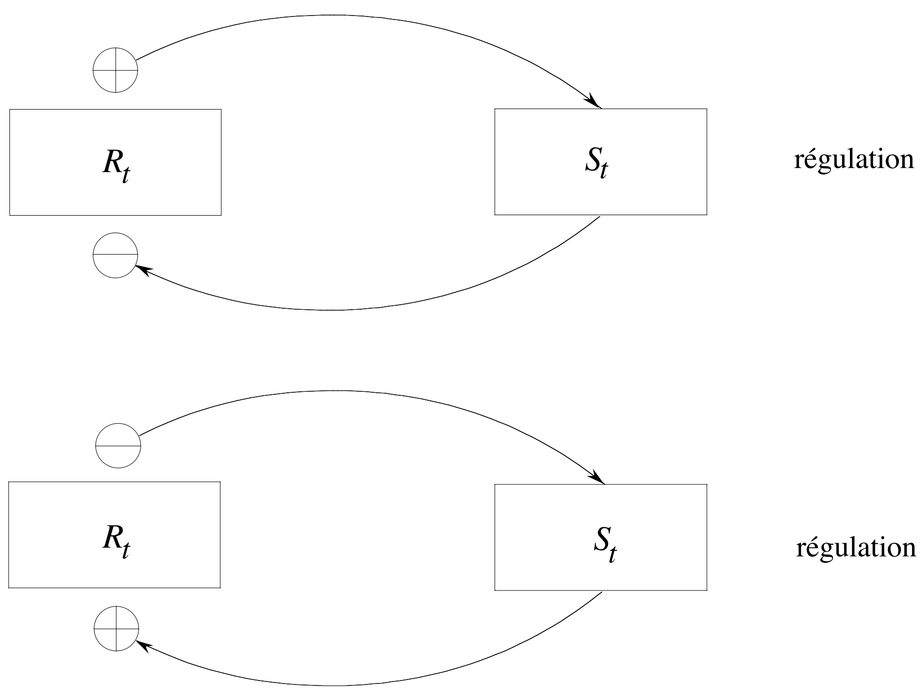


Figure 1.5

Dans les deux cas il y a régulation de la population.

1.4 Trois exemples

1.4.1 Fluctuation naturelle d'une population

On reprend le modèle simple développé dans sa première étape dont la règle de mise à jour est :

$$R_{t+\Delta t} = R_t + (b - d)\ R_t\ \Delta t$$

On suppose :

R_0 =20 personnes
$\Delta t = 1$ an
$b = 0{,}2$ naissances / personne $\cdot$ an
$d = 0{,}1$ décès / personne $\cdot$ an

D'où la règle de mise à jour d'année en année

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= R_t + (b-d)R_t \cdot 1 \\ &= (1+b-d)R_t \\ &= 1,1\, R_t\,, \qquad t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ce qui donne la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} R_0 &= 20 \qquad (t=0) \\ R_{t+1} &= 1,1\, R_t \end{cases}$$

On explicite la relation

$$\begin{array}{lcl} R_1 &=& 1,1\, R_0 \qquad = \qquad 22 \text{ personnes} \\ R_2 &=& 1,1\, R_1 \qquad = \qquad (1,1)^2\, R_0 \\ R_3 &=& 1,1\, R_2 \qquad = \qquad (1,1)^3\, R_0 \\ && \ldots \\ R_t &=& (1,1)^t\, R_0, \quad \forall \in \mathbb{N} \end{array}$$

: *solution* de la loi de mise à jour (pour $\Delta t = 1$) considérée comme suite récurrente

Ainsi le nombre R_t de personnes présentes dans le stock à l'année t, est obtenu par une suite géométrique de raison 1,1. Cette suite est donc divergente c'est-à-dire il y a *croissance* de la population.

On reprend la loi de mise à jour pour $\Delta t = 1$

$$R_{t+1} = (1+b-d)R_t$$

dont la solution est :

$$R_t = R_0\,(1+b-d)^t\,, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 < b, d < 1$$

C'est une suite de raison $1+b-d$.

Si $b > d$ alors la raison est strictement supérieure à 1, R_t diverge : il y a *croissance* de la population.
Si $b = d$ alors $R_t = R_0$, $\forall t \in \mathbb{N}$: il y a *stabilité* de la population.
Si $b < d$ alors la raison est strictement inférieure à 1, R_t converge vers 0 : il y a *extinction* de la population.

1.4.2 Fluctuation d'une population de moules

On observe une colonie de moules dans un périmètre donné. Les larves de moules vivent librement pendant quelques semaines, puis se fixent définitivement à une colonie déjà existante et ne migrent plus. On désire observer le nombre d'individus R_t de la colonie année après année.

On suppose que le flux entrant des moules est constant ;en ce sens qu'il se fixe un nombre I constant de moules chaque année sur la colonie. En revanche pour le flux sortant, la variable de flux est le taux de mortalité noté β. On suppose β constant et inférieur à 1. Ce taux est le nombre de moules mortes, par moule et par année.

D'où la loi de mise à jour :

$$R_{t+\Delta t} \;=\; R_t \;+\; (I - \beta\; R_t)\;\Delta t$$

En posant $\Delta t = 1$ an et $1 - \beta = \alpha$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$R_{t+1} = I + \;\alpha\, R_t, \quad 0 < \alpha < 1$$

On peut alors calculer les premiers termes en posant que R_0 est le nombre de moules au temps $t_0 = 0$.

$$\begin{array}{lllllll}
R_1 & = & R_{0+1} & = & I + \;\alpha\; R_0 & & \\
R_2 & = & R_{1+1} & = & I + \;\alpha\; R_1 & = & I + \;\alpha\; R_0 \\
 & & & & & = & I(1+\alpha) + \alpha^2\; R_0 \\
R_3 & = & R_{2+1} & = & I + \;\alpha\; R_2 & = & I + \;\alpha\; I + \alpha^2\; I + \;\alpha^3\; R_0 \\
 & & & & & = & I(1 + \;\alpha\; + \;\alpha^2) + \;\alpha^3\; R_0
\end{array}$$

....

$$R_t \;=\; I\;(1 + \;\alpha\; + ... + \;\alpha^{t-1})\; + \;\alpha^t\; R_0$$

Ce qui est la *solution* de la loi de mise à jour (pour $\Delta t = 1$).

Comme $\alpha \neq 1$, on peut substituer $(1 + \;\alpha\; + ... + \;\alpha^{t-1})$ par $(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha})$, d'où :

$$\begin{array}{lll}
R_t & = & I\;(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha})\; + \;\alpha^t\; R_0\; = \\
 & = & \frac{I}{1-\alpha}\; + \;\alpha^t(R_0\; - \;\frac{I}{1-\alpha}) \qquad \forall t \in \mathbb{N}
\end{array}$$

On peut alors calculer la limite de R_t lorsque $t \to +\infty$, ce qui correspond au comportement à long terme de la colonie :

$$\lim R_t \;=\; \tfrac{1}{1-\alpha}\; I \;=\; \text{constante} \;=\; R$$

Cette limite est indépendante du stock initial R_0 de la population. Ainsi à long terme, la colonie de moules tend vers la stabilité.

Avec les conditions initiales :

$R_0 = 100 \quad I = 200 \quad \alpha = 0.4 \quad \Delta t = 1$ an

$R_0 = 700 \quad I = 200 \quad \alpha = 0.4 \quad \Delta t = 1$ an

Dans les deux cas : $R = \frac{1}{1-\alpha}\ I\ = 333.3...$

t	R_t	R_t
0	100.0	700.0
1	240.0	480.0
2	296.0	392.0
3	318.4	356.8
4	327.4	342.7
5	330.9	337.1
6	332.4	334.8
7	333.0	333.9
8	333.2	333.6
9	333.3	333.4
10	333.3	333.4

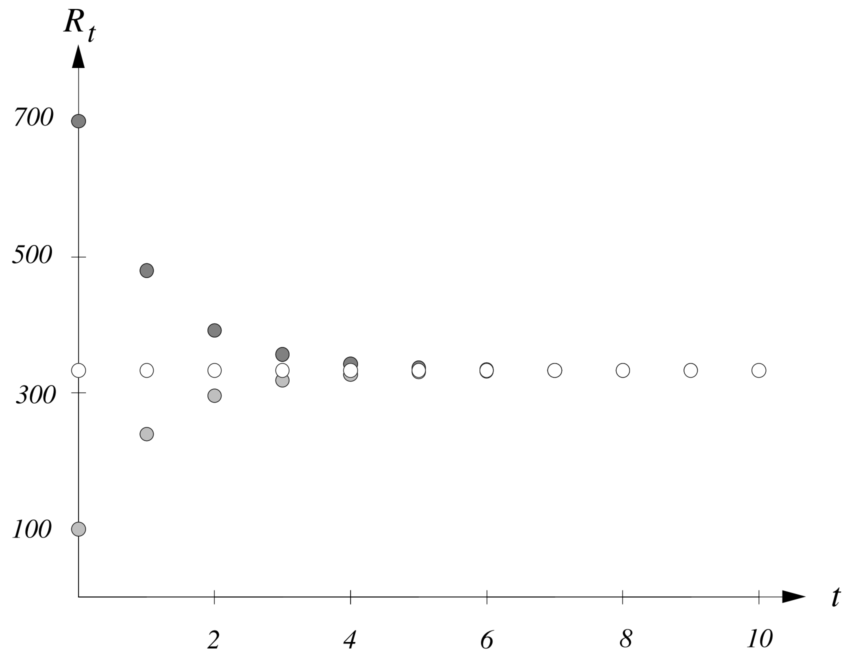


Figure 1.6

On reprend la loi de mise à jour :

$$R_{t+1} = I + \ \alpha\, R_t, \quad 0 < \alpha < 1$$

en posant $R = \frac{1}{1-\alpha} I$, on a la solution :

$$R_t = R + \alpha^t (R_0 - R), \quad \forall\ t \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \alpha < 1$$

Si $R_0 = R$ alors $R_t = R, \quad \forall t \in \mathbb{N}$: il y a stabilité.

On pose : $\beta^t = \alpha^t |R_0 - R|$

Cette suite est décroissante et tend vers zéro.

Si $R_0 > R$ alors R_t tend vers R par valeurs supérieures.
Si $R_0 < R$ alors R_t tend vers R par valeurs inférieures.

On remarque que les lois des exemples 1.4.1 et 1.4.2 peuvent s'exprimer à l'aide de trois constantes :

$$R_{t+\Delta t} \;=\; K_1\ R_t \qquad \text{et} \qquad R_{t+\Delta t} \;=\; K_2\, R_t \;+\; K_3$$

Ces lois sont respectivement de type linéaire et affine.

1.4.3 Un modèle de croissance : le modèle logistique

Lorsque les ressources d'une population sont abondantes, celle-ci croît exponentiellement (voir l'exemple *1.4.1*). Cependant les ressources étant limitées, à mesure que la population s'agrandit, elle tend à freiner naturellement sa croissance pour atteindre son niveau maximum : celui que peut supporter le milieu sans dégradation.

On reprend la loi de mise à jour de l'exemple 1 $(\Delta t = 1)$ et on pose $b - d = r$

$$R_{t+1} \;=\; R_t \;+\; (b-d)\ R_t \;=\; R_t \;+\; r\ R_t$$

On interprète r comme étant le taux de *croissance non contrainte* (r = unconstrained growth rate). Il est indépendant des ressources. Pour tenir compte des ressources, on remplace r par $F(R_t)$ qui est une fonction de la taille R_t de la population :

$$R_{t+1} \;=\; R_t \;+\; F(R_t)\ R_t$$

Cette fonction "croissance" doit modéliser les contraintes imposées par l'écosystème, c'est-à-dire

- à cause de la compétition due à la surpopulation, le taux de mortalité croît alors que celui des naissances décroît ; en conséquence, $F(R_t)$ *doit décroître lorsque* R_t *croît* ;
- lorsque R_t tend vers son niveau maximum noté K, il y a alors stabilité de la population et donc b tend vers d ; en conséquence, $F(R_t)$ *doit tendre vers zéro lorsque* R_t *tend vers* K ; K est appelée la *capacité d'accueil de l'écosystème* (K = carrying capacity) ;
- lorsque R_t tend vers zéro, il n'y a pas surpopulation et donc $F(R_t)$ *doit tendre vers le taux de croissance sans contrainte* r.

En tenant compte le plus simplement possible de ces contraintes, on peut choisir une fonction affine pour $F(R_t)$.

Soit la fonction $F(R_t) = (-\frac{r}{K})R_t + r$ dont la représentation graphique est

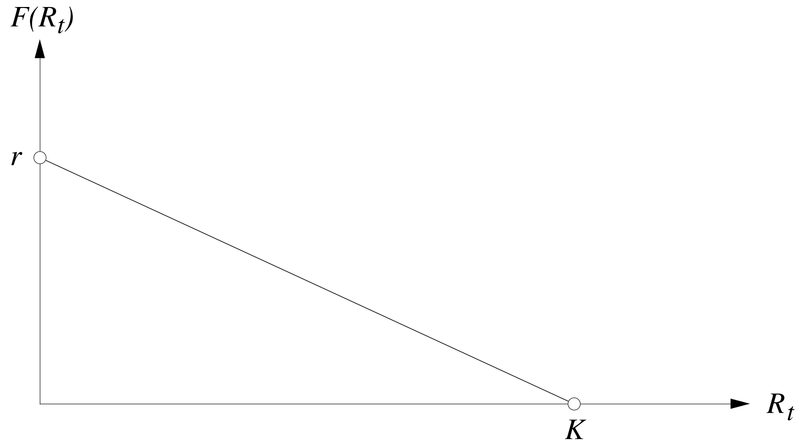


Figure 1.7

Puis on substitue :

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= R_t + (-\tfrac{r}{K}\ R_t + r)\ R_t = \\ &= R_t + r\ R_t\ (1 - \tfrac{R_t}{K}) \end{aligned}$$

Sauf cas particulier,on ne sait pas trouver de solution à cette loi de mise à jour.
On constate que l'on peut réécrire cette loi sous forme de différence de flux :

$$\begin{aligned} R_{t+\Delta t} &= R_t + (r\ R_t - \tfrac{r}{K}\ R_t^2)\ \Delta t = \\ &= R_t + (\text{flux entrant - flux sortant})\ \Delta t \end{aligned}$$

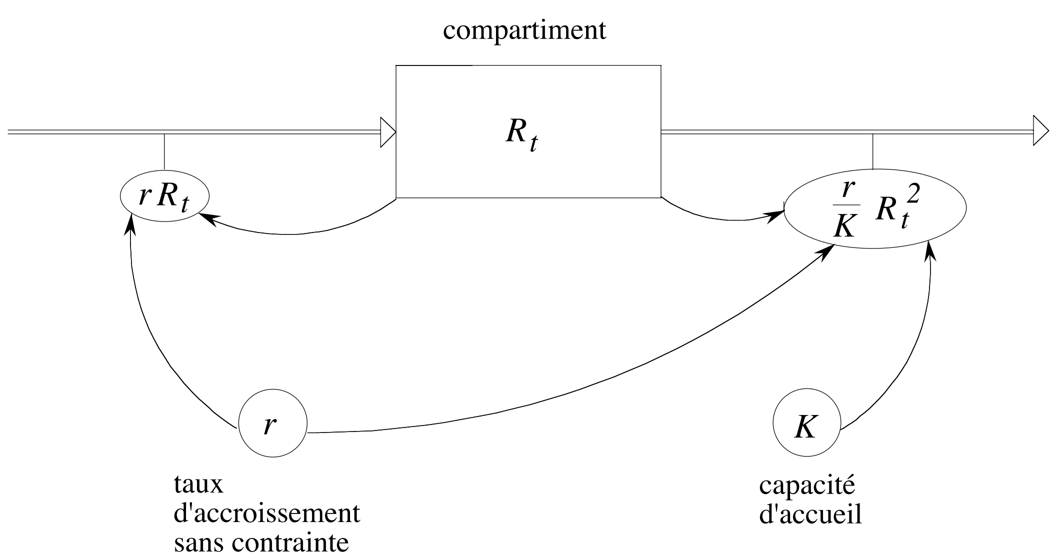


Figure 1.8

Les exemples précédents utilisent des variables de flux provenant d'observations faites à intervalles de temps Δt. Ces variables représentent des *moyennes* ; ce ne sont en aucun cas des valeurs ponctuelles. Si on prend l'exemple des moules, elles peuvent arriver massivement pendant deux mois de suite, puis pendant dix mois il n'y a plus de nouvel arrivage. Mais le flux entrant I est un flux moyen calculé sur douze mois ($\Delta t = 1$ an).

Une modélisation mathématique est déterministe alors qu'un écosystème ne l'est que partiellement. L'intérêt d'un modèle est de prédire *à très long terme* le comportement d'un système : l'exemple *1.4.1* montre la croissance ou l'extinction d'une population, l'exemple *1.4.2* la stabilité à long terme de la colonie.

1.5 Relation entre lois de mise à jour et équations aux différences

Les lois de mise à jour des exemples de la section *1.4* sont, du point vue mathématique, des équations fonctionnelles d'un type particulier appelées *équations aux différences*.
Leur étude est un sujet d'actualité car elles interviennent dans la modélisation de phénomèmes dynamiques discrets évoluant au cours du temps, par exemple en économie, biologie, ingénierie, sociologie, etc.
Les problèmes d'équilibre, de comportement à long terme (stabilité, chaos) liés à ces phénomèmes conduisent à des théories mathématiques intéresssantes.
La partie II propose une introduction aux équations aux différences.

Références et lectures conseillées

Deaton, M.L., et Winebrake, J.I. 1999. *Dynamic Modeling of Environmental Systems* with STELLA run-time sofware by High Performance Systems. Inc. Springer-Verlag.

Guerney, W.S.C., et Nisbet R.M. 1998. *Ecological Dynamics.* Oxford University Press.

Frontier, Serge, (collectif) 2004. *Ecosystèmes. Structure, Fonctionnement, Evolution.* Dunod Paris.