Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 13**

Exercice 1. *Trouver l'équation de la droite qui approxime le mieux l'ensemble de points*

$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,3)\}.$$

Faire un dessin.

Exercice 2. *Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, et $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice non orthogonale. La matrice AB est-elle orthogonale ? La matrice AC est-elle orthogonale ?*

Exercice 3. *Déterminer α, β, γ et δ de sorte que la matrice*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & \gamma \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

Exercice 4. *Les matrices suivantes sont-elles orthogonales ? Si oui, trouver leur inverse.*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien usuel.*

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que les colonnes de A forment une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Construire la matrice U formée en normalisant les vecteurs colonnes de A.*

Exercice 6. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A par un changement de base orthonormée (pour une matrice de changement de base orthogonale).

Ensuite faire de même pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

étant donné que ses valeurs propres sont 1 5 *et* 9.

Exercice 7. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 12 \\ -12 & 15 & -16 \\ -20 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$

1. *Montrer que les colonnes de B forment un ensemble orthogonal.*
2. *Calculer la norme de chaque colonne de B.*
3. *En utilisant (a) et (b), écrire B^TB.*
4. *En utilisant (c), déduire B^TBB^T.*
5. *Est-ce que $BB^T = B^TB$?*
6. *Si U est la matrice obtenue en normalisant les colonnes de B, sans calculer U, trouver U^TU.*

Exercice 8. 1. *Montrer que si U est une matrice orthogonale, alors la transposée U^T est aussi une matrice orthogonale. Autrement dit si les colonnes de U sont orthonormées, alors les lignes de U sont orthonormées.*

2. *Si U est orthogonale et λ est une valeur propre réelle de U, montrer que $\lambda = \pm 1$.*
3. *Soit $U = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$. Montrer que U est orthogonale et que 1 est valeur propre. Quelle est la dimension de l'espace propre E_1 ?*
4. *Soit U une matrices orthogonale de taille $n \times n$ et soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(U\overrightarrow{u}_1, \ldots, U\overrightarrow{u}_n)$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 9. *Choix Multiple.*

a. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

☐ *Alors les lignes de A sont orthogonales.*
☐ *Alors les colonnes de A sont orthonormées.*
☐ *Alors A^TA est une matrice diagonale.*
☐ *Alors AA^T est une matrice diagonale.*

b. *Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^7$ de dimension 4 et $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ l'application qui envoie un vecteur de $\mathbb{R}^7$ sur sa projection orthogonale dans W.*

☐ *L'image par T d'un vecteur de $W^\perp$ est l'opposé de ce vecteur.*
☐ *L'application T est linéaire.*
☐ *L'application T est injective.*
☐ *L'application T est surjective.*

c. *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les colonnes sont non nulles.*

☐ *Si les colonnes de A sont orthogonales, alors les lignes aussi.*
☐ *Si les colonnes de A sont orthogonales, alors $KerA$ est nul.*
☐ *Si les lignes de A sont orthonormées, alors A est la matrice I_n.*
☐ *Si l'image de A est $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A sont orthogonales.*

Exercice 10. *Choix multiples.*

a. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

☐ *Le noyau de A est non nul.*
square La matrice A est orthodiagonalisable.
☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthogonale, mais pas orthonormée.*
☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthonormée.*

b. *Soit A la matrice du point a. Laquelle des affirmations suivantes est* **fausse** *?*

☐ *Le nombre 6 est valeur propre de A.*

☐ *La matrice A représente une application linéaire qui transforme le vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$.

☐ *Le polynôme caractéristique de A est un produit de facteurs linéaires.*
square Les valeurs propres de A sont des nombres entiers.

c. *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alors une solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ satisfait*

☐ $\hat{x}_1 = 0$
☐ $\hat{x}_2 = 4/3$
☐ $\hat{x}_1 = 4/3$
☐ $\hat{x}_2 = 1/3$

d. *Soit $A, P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, avec P orthogonale, telles que* $P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors :*

☐ *A est diagonalisable, mais pas orthodiagonalisable.*
☐ *A est symétrique.*
☐ *A est orthodiagonalisable.*
☐ *A est orthogonale.*

Exercice 11. *Soit $U \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Vrai ou Faux ?*

1. *Si les colonnes de U forment une liste orthonormale, alors les lignes de U aussi.*
2. *Si U est une matrice carrée, et les colonnes de U forment une liste orthonormale, alors les lignes de U aussi.*
3. *Si U est une matrice orthogonale, U est symétrique.*
4. *Si U est une matrice symétrique, U est orthogonale.*