Peter Wittwer

16 novembre 2020

Analyse I – Corrigé de la Série 9

Echauffement 1.

Q1 : VRAI.
Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$ et soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à l'intervalle $[\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$, on a $]y_1, y_2[\subset f(I)$. Ceci étant vrai pour $y_1, y_2 \in f(I)$ quelconques, on déduit que $f(I)$ est un intervalle.

Q2 : VRAI.
Cf. Théorème 3 du § 4.9.4 du cours.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors I est borné mais $f(I) =]1, \infty[$ n'est pas bornée.

Q4 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ (fonction constante). Alors I est ouvert mais $f(I) = \{1\}$ est fermé.

Q5 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction $f\colon [-1,0[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}\sin\big(\frac{1}{x}\big)$. Alors f n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\big(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}\big)^{-1} \in I$ mais

$$\begin{aligned} f\Big(-\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\Big) &= -\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big) \\ &= \Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} > n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\Big(-\frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}\Big) &= -\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big) \\ &= \Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -2\pi n + \frac{\pi}{2} < -n. \end{aligned}$$

Q6 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction définie par $f(x) = (x-a)\sin(x-a)$. Elle n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\big(a + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\big) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > n$ et $f\big(a - \frac{\pi}{2} + 2\pi n\big) = \frac{\pi}{2} - 2\pi n < -n$.

Q7 : VRAI.
Soient $y \in f(I)$ et $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Comme I est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset I$. Puisque f est strictement croissante, on a $f\big(x - \frac{r}{2}\big) < y < f\big(x + \frac{r}{2}\big)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliquée à l'intervalle $\big[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\big]$, on a $\big]f\big(x - \frac{r}{2}\big), f\big(x + \frac{r}{2}\big)\big[\subset f(I)$. Comme en plus $y \in \big]f\big(x - \frac{r}{2}\big), f\big(x + \frac{r}{2}\big)\big[$, il suit que $f(I)$ est ouvert en prenant $r_y = \min\Big(f\big(x + \frac{r}{2}\big) - y, y - f\big(x - \frac{r}{2}\big)\Big) > 0$ dans la définition d'ouvert.

Exercice 1.

Les limites à gauche et à droite de f en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$

$$\ell_+ := \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{8}{4} = 2$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors f est continue en x_0.

i) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, f n'est ni continue à gauche ni continue à droite.

ii) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f est continue à gauche mais pas continue à droite.

iii) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f n'est pas continue à gauche mais continue à droite.

iv) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais f n'est quand-même ni continue à gauche ni continue à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.

v) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, f est continue.

Comme illustration, les graphes sont tracés à la Fig. 1.

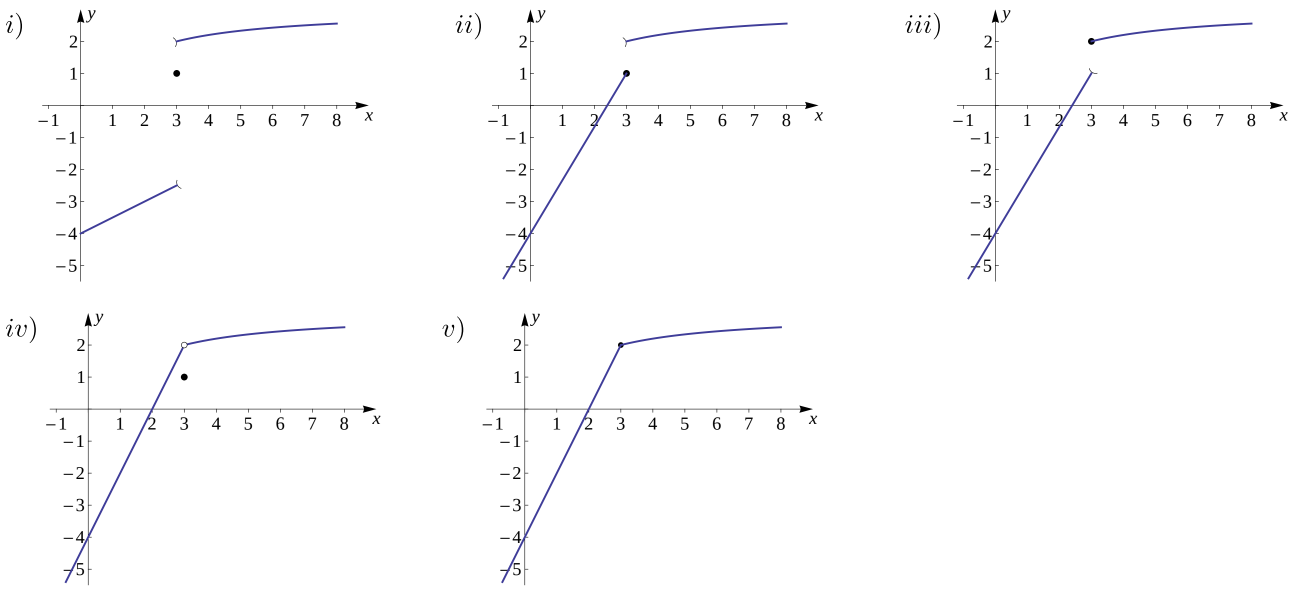

Fig. 1: Graphes des fonctions $f(x)$ de l'Ex. 1.

Exercice 2.

Remarque: Les solutions particulières (i.e., les valeurs pour lesquelles on évalue f) données ci-dessous ne sont évidemment pas uniques, mais la méthodologie doit être suivie.

i) Pour utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, on doit définir une fonction continue à partir de l'équation donnée. En l'occurrence, soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1} - x - 1$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions élémentaires et comme $e = 2.7182\ldots$, on a $f(2) = e - 3 < 0$ et $f(3) = e^2 - 4 > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [2, 3]$ tel que $f(x_0) = 0$.
D'ailleurs, l'équation donnée admet une deuxième solution (mais il suffit de montrer l'existence d'une). En effet, on a $f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e^2} > 0$ et donc par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0) = 0$.

ii) Comme l'équation donnée n'est pas définie en $x = 0$, il faut définir la fonction f soit sur $]-\infty, 0[$ soit sur $]0, \infty[$ pour appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur un intervalle.
Si $x < 0$, on a $x^2 - \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{|x|} > 1$ car un des deux termes est toujours ≥ 1 et donc l'équation n'admet pas de solution. Ainsi on définit $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 1$. Cette fonction est continue (composition de fonctions élémentaires) et on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [1, 2]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 3.

On cherche une racine x_0 de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$, c'est-à-dire un x_0 qui satisfait $f(x_0) = 0$. L'algorithme de bissection permet en augmentant le nombre d'itérations de restreindre la taille de l'intervalle dans lequel se trouve x_0.
Les étapes de l'algorithme sont données ci-dessous, où L est la longueur de l'intervalle dans lequel se trouve la solution x_0.

$$\begin{aligned}
&f(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 > 0 && \Longrightarrow && x_0 \in]0, 1[\,, \quad L = 1 \\
&f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{3}{8} < 0 && \Longrightarrow && x_0 \in \left]\tfrac{1}{2}, 1\right[\,, \quad L = \tfrac{1}{2} \\
&f\left(\tfrac{3}{4}\right) = 0.172 > 0 && \Longrightarrow && x_0 \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[\,, \quad L = \tfrac{1}{4} \\
&f\left(\tfrac{5}{8}\right) = -0.130 < 0 && \Longrightarrow && x_0 \in \left]\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}\right[\,, \quad L = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi $x_0 \in \left]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right[=]0.625, 0.75[$. La valeur exacte est d'ailleurs $x_0 = 0.6823\ldots$ (il est déconseillé de la trouver à la main…).

Echauffement 2.

i) Soit $x_0 = -x$. Alors

$$\begin{aligned}
f'(-x) = f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)
\end{aligned}$$

ii) Soit $x_0 = -x$. Alors

$$\begin{aligned}
f'(-x) = f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x)
\end{aligned}$$

iii) Supposons que f est T-périodique pour un $T > 0$. Alors

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

et f' est donc aussi T-périodique.

Exercice 4.

$$i)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2(x+h)) - \sin(2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{h}$$
$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{2h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+h) - \sin(2x)}{h}$$
$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x)\cos(h) + \cos(2x)\sin(h) - \sin(2x)}{h}$$
$$= 2\sin(2x)\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + 2\cos(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 2\cos(2x)$$

$$ii)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2(x+h)) - \cos(2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+2h) - \cos(2x)}{h}$$
$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+2h) - \cos(2x)}{2h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+h) - \cos(2x)}{h}$$
$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x)\cos(h) - \sin(2x)\sin(h) - \cos(2x)}{h}$$
$$= 2\cos(2x)\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - 2\sin(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = -2\sin(2x)$$

Exercice 5.

En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.
Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$f'_{\text{gauche}}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$f'_{\text{droite}}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x + \beta - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha+\beta}^{=3 \text{ par } (1)} - 3}{x-1} = \alpha,$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.
Ainsi la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ x + 2\,, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

$$i)\quad f'(x) = \frac{5(3x^2-1) - 6x(5x+2)}{(3x^2-1)^2} = -\frac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}\ ; \quad D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

et, en utilisant en plus la règle de dérivation en chaîne

$$ii)\quad f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}\ ; \quad D(f) = D(f') =]-1, 1[$$

iii) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\cdot\cos(x^2) + \sin(x)^2\cdot\big(-\sin(x^2)\big)\cdot 2x$
$= 2\sin(x)\big(\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2)\big)$; $\qquad D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.

Exercice 7.

i) On distingue trois cas selon la valeur de m:

- $m = 0$: $\quad f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $m \geq 1$: $\quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$
- $m \leq -1$: $\quad f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ii) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f:

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(x) \qquad f''(x) = -4\sin(2x) - 2\cos(x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x) + 2\sin(x) \qquad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) + 2\cos(x)$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\big(2^n\sin(2x) + 2\cos(x)\big), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\big(2^n\cos(2x) - 2\sin(x)\big), & n \text{ impair} \end{cases}$$

iii) Comme $f'(x) = x^{-1}$, on peut utiliser le résultat de *i)* avec $m = -1$ pour obtenir $f^{(n)}$. En effet,

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-(n-1))x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\,.$$

Exercice 8.

Comme on a $(g\circ f)'(0) = g'(f(0))\cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.

i) Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\,u(x)$ où $u(x) = \sin(x)^7\cos(x)^4$. Alors

$$f'(x) = 2 + e^x\,u(x) + (e^x - 1)\,u'(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = 7\sin(x)^6\cos(x)^5 - 4\sin(x)^8\cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $\; g'(x) = \dfrac{3\,\mathrm{Log}(x)^2}{x}$. Puisque $f(0) = 3$ on trouve finalement

$$(g\circ f)'(0) = g'(3)\cdot f'(0) = \frac{3\,\mathrm{Log}(3)^2}{3}\cdot 2 = 2\,\mathrm{Log}(3)^2.$$

ii) Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\big(\frac{1}{x}\big) + 2x - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\big(x\sin\big(\tfrac{1}{x}\big) + 2\big) = 2$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\big(x\sin\big(\frac{1}{x}\big)\big) = 0$ comme on a montré à l'Ex. 3 *iv)* de la Série 8.

Comme $g'(x) = 4(x-1)^3$ et $f(0) = 0$, on obtient

$$(g\circ f)'(0) = g'(0)\cdot f'(0) = (-4)\cdot 2 = -8.$$

Exercice 9.

i) En appliquant la règle de dérivation d'un quotient à $f(x) = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)\cdot\big(-\sin(x)\big)}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

et donc $D(f) = D(f') = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R}\setminus\Big\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

ii) Il s'agit de plusieurs composées de fonctions. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}}\cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\,\frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) \\ &= \frac{\cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\cos(x)}{4\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}\cdot\sqrt{\sin(x)}}\,. \end{aligned}$$

Le domaine de f est

$$D(f) = \Big\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geq 0 \text{ et } \sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big) \geq 0\Big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\big[2k\pi, (2k+1)\pi\big]\,.$$

En effet, $\sin(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \big[2k\pi, (2k+1)\pi\big]$ et pour ces valeurs, on a $\sqrt{\sin(x)} \in [0,1]$ si bien que $\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big) \geq 0$, c'est-à-dire f est bien définie.

Pour le domaine de f', il faut encore exclure les points où $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire

$$D(f') = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\big]2k\pi, (2k+1)\pi\big[\,.$$

iii) $f'(x) = \frac{3}{5}\big(2x^4 + e^{-(4x+3)}\big)^{-2/5}\big(8x^3 - 4e^{-(4x+3)}\big) = \dfrac{12\,\big(2x^3 - e^{-(4x+3)}\big)}{5\sqrt[5]{\big(2x^4 + e^{-(4x+3)}\big)^2}}$;

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ (Le dénominateur de f' ne s'annule jamais parce que $e^{-(4x+3)} > 0$ et $x^4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

iv) On transforme d'abord le logarithme de base 3 en base e :

$$f(x) = \mathrm{Log}_3\big(\mathrm{ch}(x)\big) = \frac{\mathrm{Log}\big(\mathrm{ch}(x)\big)}{\mathrm{Log}(3)}\,.$$

Ainsi $\quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{Log}(3)\,\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{Log}(3)} \quad$ et $\quad D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.

v) En observant que $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{Log}(4)\,e^{\cos(4x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{Log}(4)\cos(x)\,e^{\cos(4x)} + \mathrm{Log}(4)\sin(x)\cdot\big(-4\sin(4x)\big)\cdot e^{\cos(4x)} \\ &= \mathrm{Log}(4)\,e^{\cos(4x)}\Big(\cos(x) - 4\sin(x)\sin(4x)\Big). \end{aligned}$$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

Exercice 10.

Q1 : FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Cette fonction est continue en $x = 0$ parce qu'on a

$$0 \leq f(x) \leq x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par contre f n'est pas continue ailleurs qu'en 0. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert $\left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[$ contient des nombres rationnels et irrationnels. En prenant $a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q}$ et $b_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient deux suites $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui convergent les deux vers x_0 quand $n \to \infty$. Mais

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n^2 = x_0^2 > 0 = \lim_{n \to \infty} f(b_n),$$

et donc f n'est pas continue en x_0.

Pour voir que f est dérivable en $x = 0$, observer que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et ainsi $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De nouveau par le théorème des deux gendarmes on conclut que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

Q2 : FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. contre-exemple du § 5.3 du cours). Les dérivées unilatérales en 0 existent mais elles ne sont pas égales.

Q3 : FAUX.

En prenant $f(x) = x$, on a $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).

Q4 : VRAI.

On a $f'(1) = 2 - 2 = 0$ et donc $(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$.