31.5.19

Corrigé de la Série 21

1. (a) $\sin i = \frac{1}{i}\sinh(-1) = i\frac{e^1 - e^{-1}}{2}$.

(b) $\cos i = \cosh(-1) = \frac{e^1+e^{-1}}{2}$.

(c)

$$\begin{aligned}\tan 1+i &= \frac{\sin 1+i}{\cos 1+i} = \frac{\sinh i-1}{i\cosh i-1} = -i\frac{e^{i-1}-e^{1-i}}{e^{i-1}+e^{1-i}} \\ &= -i\frac{(e^{i-1}-e^{1-i})(e^{-i-1}+e^{1+i})}{(e^{i-1}+e^{1-i})(e^{-i-1}+e^{1+i})} = -i\frac{e^{-2}+e^{2i}-e^{-2i}+e^2}{e^{-2}+e^{2i}+e^{-2i}-e^2} \\ &= -i\frac{e^{-2}+2i\sin(2)+e^2}{e^{-2}+2\cos(2)+e^2} = \frac{1}{\cosh(2)+\cos(2)}\left(\sin(2) - i\cosh(2)\right).\end{aligned}$$

2. Puisque $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ et $\cos(z) = \cosh(iz)$, on a que $\sinh(z) = i\sin(-iz)$ et $\cosh(z) = \cos(-iz) = \cos(iz)$. Ainsi,

$$\sinh(2z) = i\sin(-2iz) = -2i\sin(iz)\cos(iz) = 2\sinh(z)\cosh(z)$$

et

$$\cosh(2z) = \cos(2iz) = \cos^2(iz) - \sin^2(iz) = \cosh^2(z) + \sinh^2(z).$$

3. $\cos(x+iy) = \cosh(-y+ix) = \dfrac{e^{-y}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)+e^{y}\left(\cos(x)-i\sin(x)\right)}{2} = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$
et
$\sin(x+iy) = -i\sinh(-y+ix) = -i\dfrac{e^{-y}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)-e^{y}\left(\cos(x)-i\sin(x)\right)}{2} = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

4. En se servant du résultat de l'exercice précédant, on trouve que $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y) = \sinh^2(y) + \cos^2(x)\left(\cosh^2(y) - \sinh^2(y)\right) = \sinh^2(y) + \cos^2(x)$, et $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y) = \sinh^2(y) + \sin^2(x)\left(\cosh^2(y) - \sinh^2(y)\right) = \sinh^2(y) + \sin^2(x)$.
On en conclut, que les valeurs $|\sin(z)|$ et $|\cos(z)|$ peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes, contraîrement au cas réel, où ces valeurs sont inférieures à 1.

5. (a) $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) = 1 \Leftrightarrow \sin(y) = 0$ et $\cos(y) = e^{-x} \Leftrightarrow y = k\pi$ et $\cos(k\pi) = e^{-x} > 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi$ et $1 = e^{-x} \Leftrightarrow y = 2k\pi$ et $x = 0 \Leftrightarrow z = i2k\pi$.

(b) $\sin(z) = 1 \Leftrightarrow \sin(x)\cosh(y) = 1$ et $\cos(x)\sinh(y) = 0$. La deuxième équation nous impose $y = 0$ ou $x = \pi/2 + k\pi$. Pour $y = 0$, la première équation nous impose $x = \pi/2 + 2k\pi$ et si $x = \pi/2 + k\pi$, la première équation aura comme solution $y = 0$ si k est pair est pas de solution si k est impair. Ainsi, $z = \pi/2 + 2k\pi$.

6. $a) \Leftrightarrow c)$ est la définition de la convergence des suites complexes.
$b) \Leftrightarrow c)$: $|z_n - z| < \epsilon$ est équivalent à ce que $|z_n - z|^2 < \epsilon^2 \Leftrightarrow (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \epsilon^2$, ce qui implique $(x - x_n)^2 < \epsilon^2$ et $(y - y_n)^2 < \epsilon^2$, ou encore que $|x - x_n| < \epsilon$ et $|y - y_n| < \epsilon$.
Réciproquement, $|x - x_n| < \epsilon$ et $|y - y_n| < \epsilon$ implique $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < 2\epsilon^2$, qui à son tour implique $|z_n - z| < \sqrt{2}\epsilon$.
$c) \Leftrightarrow d)$: La continuité des fonctions $\sqrt{x}$ et x^2 sur $\mathbb{R}_+$ nous donnent $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(x_n^2 + y_n^2)^{1/2} = ((\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + (\lim_{n\to\infty} y_n)^2)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$.
Si $z = x+iy \neq 0$, on peut supposer SPG, que $x \neq 0$. Alors, $\varphi = \mathrm{Arctan}(y/x) \mod \pi$. Puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, on a que $x_n \neq 0$ à partir d'un n suffisamment grand et $\varphi_n = \mathrm{Arctan}(y_n/x_n) \mod \pi$. La continuité de Arctan sur $(-\pi/2, \pi/2)$ implique alors que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \mathrm{Arctan}(\lim_{n\to\infty} y_n/x_n) \mod \pi = \mathrm{Arctan}(y/x) \mod \pi = \varphi \mod 2\pi$.
Si $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \mod 2\pi$, alors $x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \lim_{n\to\infty} r_n(\cos(\varphi_n) + i\sin(\varphi_n)) = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n)$.

oblème récréatif:

(Faire un dessin pour suivre le raisonnement) Par symétrie du cercle, un peut toujours se ramener au cas ou le point A correspond au pôle nord du cercle et choisir ensuite deux points au hazard sur le cercle.
Choisir deux points sur le cercle revient à tracer deux droites passant par le centre et choisir une des intersections de ces droites avec le cercle. Pour une droite choisie, il y a deux choix pour les intersections, donc en choisissant deux droites, on a choisi quatre couples de points sur le cercle.
Pour ces quatre choix de points B et C, il n'y en a qu'un qui produira les sommets d'un triangle ABC qui contient le centre du cercle: celui, où B et C sont sur l'hémisphère sud. Il y a donc pour deux droites choisies une chance sur quatre que le centre soit dans le triangle ABC.
Comme a chaque choix de points on peut trouver trois choix symétriques et que seul un de ces quatre choix donne un triangle contenant le centre, la réponse est $1/4$.