19 juin 2007

Contrôle d'analyse II no 4

Durée: 1 heure 30'

Nom: ....

Prénom: .... Groupe: ☐

---

1. On considère la transformation (homographique) **h**: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$\mathbf{h}(z) = w = \frac{-3iz + 2 + i}{z - 1} \quad \text{où } z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R}) \text{ et } w = u + iv \ (u, v \in \mathbb{R})$$

1.1. Déterminer les points fixes de la transformation.

1.2. Dans le plan-z, on donne le cercle $\gamma : (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2} = 0$.
Déterminer et <u>construire</u>, dans le plan-w, l'image de γ par la transformation **h.**

1.3. Déterminer et <u>construire</u>, dans le plan-w, l'image de la demi-droite **d** définie dans le plan-z par **d**: $x = 0$, $y \geq -1$.

6 pts

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 4}$. **4 pts**

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp[\frac{1}{x} \ln(1 + x)]$.

3.1. Déterminer son domaine de définition $\mathbf{D}_f$.

3.2. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$.

3.3. En déduire le prolongement par continuité **f*** de f en $x = 0$.

3.4. Donner la dérivée, en $x = 0$, de **f*** et l'équation de la tangente **t** à sa courbe représentative Γ au point $(0; \mathbf{f}^*(0))$.

3.5. Esquisser (<u>**très soigneusement**</u>) Γ dans l'intervalle $[-1/2; 1/2]$.
(préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en $(0; f^*(0))$. **5 pts**

☞ *[Tourner s.v.p.]*

Petit formulaire pour le contrôle 4 d'analyse II

1) <u>Développements limités</u> (autour de u = 0)

$$\mathbf{ln(1 + u)} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + o(u^n);$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n).$$

2) <u>Relations trigonométriques</u>

$$\mathbf{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}},\quad \mathbf{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \text{ où } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}},\quad \mathbf{\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}} \text{ où } t = \operatorname{tg} x.$$
