

## Analyse II : Contrôle N° 4

Durée : 1 heure 45 minutes - Barème sur 20 points

NOM : \_\_\_\_\_

GROUPE

PRENOM : \_\_\_\_\_

1. Soient les deux polynômes :

$$P(z) = 3z^5 - 5z^4 + 8z^3 - 7z^2 + 5z - 2 \quad \text{et} \quad Q(z) = z^3 + 1.$$

- (a) Par le schéma de Horner, calculer la valeur de  $P(\frac{2}{3})$  ;
- (b) Décomposer  $P(z)$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}$  , sachant que  $-i$  est une racine de  $P(z)$  ;
- (c) Calculer le produit des racines non-réelles de  $P(z)$  ;
- (d) A l'aide de l'algorithme d'Euclide , déterminer le PGCD de  $P(z)$  et  $Q(z)$  et le donner sous forme normalisée.

5 pts

2. 52 Soit la fonction définie sur  $] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[$  par :

$$f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{x}}$$

- (a) Etablir le développement limité à l'ordre 2 de  $f(x)$  au voisinage de  $x_0 = 0$  ;
- (b) Montrer que  $f(x)$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$  ;
- (c) Montrer que la courbe représentative  $\Gamma$  du prolongement de  $f$  admet une tangente au point d'abscisse  $x_0 = 0$  et donner l'équation de cette tangente ;
- (d) Représenter la courbe  $\Gamma$  au voisinage de  $x_0 = 0$ .

5 pts

3. (a) Soit la fonction :

$$g(x) = \frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Établir le développement limité à l'ordre 2 de  $g(x)$  au voisinage de 0 ;

- (b) Calculer alors la limite :

5 pts

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} - 1 - \frac{2}{3}x \right]$$

4. On considère la transformation homographique  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$w = h(z) = \frac{2}{2-z} \quad \text{où} \quad z = x + iy \quad \text{et} \quad w = u + iv \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

- (a) Déterminer le pôle et les points fixes de cette transformation ;
- (b) Déterminer (nature et équation) et représenter graphiquement les images :
  - i. de la droite  $d : x - 3y - 2 = 0$  ;
  - ii. du cercle  $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0$  ;
- (c) Quelle est l'image du secteur délimité par le cercle  $\Gamma$  et la droite  $d$  et contenant le centre du cercle  $\Gamma$ .

5 pts

*Indication :*

Pour la représentation graphique (sur une page complète), placer l'origine au centre de la feuille à 12 carreaux du bord gauche et prendre 10 carreaux pour unité.

## Formulaire

Développements limités (autour de  $x = 0$ ) :

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

où  $\alpha$  peut être rationnel et négatif