Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Série 4**

Exercice 1. *Soit $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 9. Déterminer si chacun des ensembles suivants est un sous-espace de $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$.*

(a) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = at^2$ où a est un réel quelconque.

(b) L'ensemble $\{p(t) = a + t^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(c) L'ensemble $\{p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4 \mid c_i$ est un entier naturel pour $1 \leq i \leq 4\}$.

(d) L'ensemble des polynômes dans $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ vérifiant $p(0) = 0$.

Exercice 2. *Déterminer si A,B,C,D,E,F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (muni de son addition et de sa multiplication par scalaire usuelles).*

1. $A = \{(x, y, z)|x + 3y - 2z = 4\}$
2. $B = \{(x, y, z)|x + 3y - z = 0\}$
3. $C = \{(x, y, z)|x + y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 1\}$
4. $D = \{(x, y, z)|x + z = 0 \text{ et } x - z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1\}$
6. $F = \{(x, y, z)|x = y = z\}$

Exercice 3. *Soient $W_1 = \{X \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid X_{1i} = 0,$ pour $i = 1, 2\}$ et $W_2 = \{X \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid X_{2i} = 0,$ pour $i = 1, 2\}$. On admet que W_j est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, pour $j = 1, 2$. Démontrer que $M_{2\times2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$.*

Exercice 4. *Soit V un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) et soient W et U deux sous-espaces de V.*

a) Démontrer que $W \cap U := \{x \in V \mid x \in W$ et $x \in U\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

b) Déterminer si $U \cup W := \{x \in V \mid x$ appartient à au moins un des deux ensembles U et $W\}$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. *Soient $A = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$ et $B = \{(x, y, z)|x = y = z\}$. On admet que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.*

Exercice 6. *On travaille dans un espace vectoriel V. Décrire explicitement le sous-espace* $\text{Vect}\,(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k)$ *dans les cas suivants.*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{v}_1 = t$, $\mathbf{v}_2 = t^2$, $\mathbf{v}_3 = t^3$.

Exercice 7. *(a) Soient les vecteurs*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\vec{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$?*
2. *Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans la combinaison linéaire ?*

(b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, *se trouve-t-il dans le plan de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par les colonnes de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 8. *(a) On se donne*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k *a-t-on* $AB = BA$ *?*

(b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad et\ T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, *bien que* N *soit différent de* T.

Exercice 9. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que l'espace des lignes de* A *est égal à* $\operatorname{Vect}((1,0,0,0),(0,2,3,0),(0,0,0,1))$.
2. *Montrer que l'espace des colonnes de* A *est égal à* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. *Vrai-faux*

1. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice inversible et* B *une matrice échelonnée ligne équivalente à* A. *Alors* B *possède* n *pivots.*
2. *Soit* A *une matrice inversible et* B *une matrice ligne équivalente à* A. *Alors* B *est inversible.*
3. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Alors* A *est inversible si et seulement si* A *est ligne équivalente à la matrice identité.*
4. *Soit* A, B *des matrices telles que* $AB = I_n$. *Alors* A *et* B *sont inversibles.*
5. *Soient* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = I_n$. *Alors* A *et* B *sont inversibles.*
6. *Soit* A *une matrice inversible. Alors le système d'équations linéaires* $AX = b$ *pour* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *possède au moins une solution.*
7. *Soit* A *une matrice inversible. Alors il existe un système d'équations linéaires* $AX = b$, *où* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *qui possède une infinité de solutions.*

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Soit* A *une matrice* $n \times n$ *telle que* $2A^2 + 2A + I = 0$. *Montrer que* A *et inversible et que* $A^{-1} = -2A - I$.