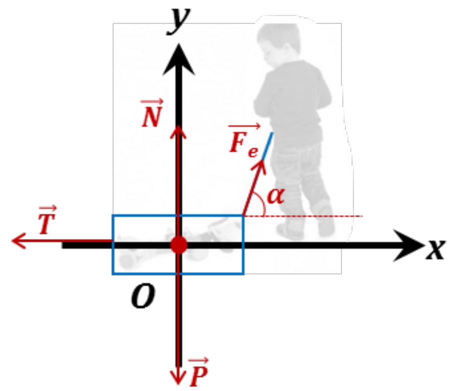
**Exercice 1* : Le jouet**

On travaille dans le référentiel lié au sol. On prend le repère cartésien avec l'axe $(Ox)$ horizontal dirigé vers la droite (du jouet vers l'enfant). L'axe $(Oy)$ est vertical et dirigé vers le haut. On fait le bilan des forces auxquelles est soumis le jouet, que l'on considère comme un point matériel :




- Force avec laquelle l'enfant tire : $\vec{F_e}$
- Force de pesanteur : $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction normale du sol : $\vec{N}$
- Force de frottement avec le sol : $\vec{T}$

On écrit alors la deuxième loi de Newton pour le jouet : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$, avec $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du système. Comme la vitesse du jouet est constante, $\vec{a} = \vec{0}$. Donc on a :

$$\vec{F_e} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$$

On projette les vecteurs sur les deux axes de notre repère :

- Selon $(Ox)$ :

$\|\vec{F_e}\| \cos\alpha - \|\vec{T}\| = 0 \Rightarrow \|\vec{T}\| = \|\vec{F_e}\| \cos\alpha.$

- Selon $(Oy)$ :

$\|\vec{F_e}\| \sin\alpha + \|\vec{N}\| - mg = 0 \Rightarrow \|\vec{N}\| = mg - \|\vec{F_e}\| \sin\alpha.$

Or, $\|\vec{T}\| = \mu\|\vec{N}\|$.

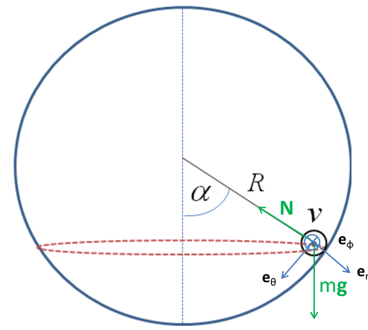
Donc on a $\|\vec{F_e}\| \cos\alpha = \mu(mg - \|\vec{F_e}\| \sin\alpha) \Rightarrow \|\vec{F_e}\|(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu\, mg$. Et finalement :

$$\boxed{\|\vec{F_e}\| = \frac{\mu\, mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}}$$

Application Numérique : $\|\vec{F_e}\| = \frac{0.5*1*10}{(\cos 45 + 0.5 \sin 45)}$

$$\|\vec{F_e}\| = 4.7 \text{ N}$$

**Exercice 2** : Boule de la mort**




1. On utilisera un repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, en accord avec la symétrie du problème.

   Il y a deux forces en jeu : la pesanteur $m\vec{g}$ ainsi que la force de réaction de la sphère $\vec{N}$ sur la moto.
   Ainsi, la seconde loi de Newton nous dit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

   La projection des forces sur le repère sphérique s'écrit :
   $$\sum \vec{F} = (mg\ \cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\sin\alpha\,\vec{e}_\theta$$

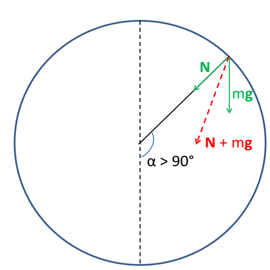
   L'accélération en coordonnées sphériques est donnée par :
   $$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

   Avec les contraintes $r = cte \Longrightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (mouvement sur la paroi interne de la sphère, i.e. $r = R$ fixé), $\theta = cte \Longrightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = cte \Longrightarrow \ddot{\varphi} = 0$ (pour la situation à l'équilibre décrite), la seconde loi de Newton devient :
   $$(mg\cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\sin\alpha\,\vec{e}_\theta = m(-R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\,\vec{e}_r - R\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_\theta)$$
   On remarque que $\alpha = \pi - \theta$, donc $\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ :
   $$\Longrightarrow (mg\cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\sin\alpha\,\vec{e}_\theta = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha\,\vec{e}_r + mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{e}_\theta$$

   En projetant la seconde loi de Newton sur les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, on a :
   $$\begin{cases} mg\cos\alpha - N = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha \\ mg\sin\alpha = mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$$

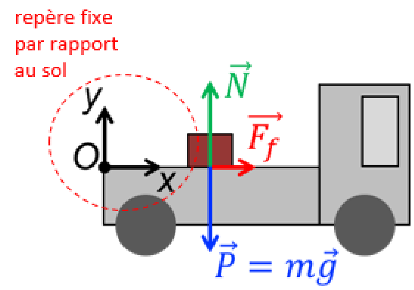
   Avec la deuxième équation, on obtient :
   $$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R\cos\alpha} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}$$
   On en déduit la vitesse :
   $$\vec{v} = \underbrace{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{0} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = R\dot{\varphi}\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi = R\sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi = \sin\alpha\sqrt{\frac{Rg}{\cos\alpha}}\vec{e}_\varphi$$

2. Pour que le mouvement du motard puisse être circulaire uniforme, il faut que son accélération soit uniquement radiale, c'est-à-dire que la résultante des forces ne doit avoir qu'une composante horizontale, dirigée vers l'axe central de la sphère. Les composantes verticales de la force de pesanteur et de la force de réaction de la sphère doivent pouvoir se compenser. Ce n'est pas possible si l'angle α est supérieur ou égal à 90° car alors la composante verticale de la force de réaction est dirigée vers le bas, donc dans le même sens que la force de pesanteur.



**Exercice 3** : Le paquet perdu**

a) Bilan des forces :




$\vec{P} = m\vec{g}$: Poids
$\vec{N}$ : Force de réaction normale du support
$\vec{F_f}$ : Force de frottement tangente au support

b) On applique la deuxième loi de Newton dans le repère $(O, x, y)$ lié au sol . Cela donne deux équations scalaires:

$$m\vec{a}_p = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f \Longrightarrow \begin{cases} ma_p = F_f \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

plus une troisième équation pour la loi du frottement sec : $F_f = \mu_d N$

De ces trois équations on tire facilement : $N = mg$ , $F_f = \mu_d mg$ $et$ $a_p = \mu_d g$

L'accélération du paquet dans le référentiel lié au sol est donc : $\vec{a}_p = \mu_d g \vec{e}_x$

*<u>Remarque</u> : La seconde Loi de Newton s'applique dans un référentiel Galiléen, ici le référentiel est le sol, et le repère est fixe dans ce référentiel (rem: le référentiel lié au camion n'est pas Galiléen).*

c) A partir de b) , on calcule l'équation du mouvement du paquet dans le repère $(O, x, y)$ lié au sol :

$$a_p = \ddot{x}_p = \mu_d g \; et \; \dot{x}_p(t = 0) = 0 \Longrightarrow \dot{x}_p = \mu_d g\, t$$
$$\dot{x}_p = \mu_d g\, t \; et \; x_p(t = 0) = D \Longrightarrow x_p = \frac{1}{2}\mu_d g\, t^2 + D$$

Considérons maintenant le bord de la remorque, notée $B$. $B$ est confondu avec $O$ à $t = 0$. D'après l'énoncé, le camion (et donc le point $B$) a une accélération constante : $\vec{a}_B = \frac{v_0}{t_0}\vec{e}_x$.

$B$ a une vitesse initiale nulle, son équation du mouvement se trouve rapidement :

$$a_B = \ddot{x}_B = \frac{v_0}{t_0} \; et \; \dot{x}_B(t = 0) = 0 \Longrightarrow \dot{x}_B = \frac{v_0}{t_0}\, t$$
$$\dot{x}_B = \frac{v_0}{t_0}\, t \; et \; x_B(t = 0) = 0 \Longrightarrow x_B = \frac{1}{2}\frac{v_0}{t_0}\, t^2$$

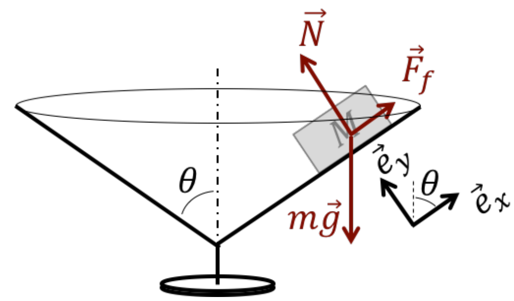
Le paquet atteint le bord de la remorque en un temps $t_B$ , lorsque $x_p(t_B) = x_B(t_B)$:

$$x_p(t_B) = x_B(t_B) \Longrightarrow \frac{1}{2}\mu_d g\, t_B^2 + D = \frac{1}{2}\frac{v_0}{t_0}\, t_B^2 \Longrightarrow t_B = \sqrt{\frac{2D}{\frac{v_0}{t_0} - \mu_d g}}$$

*<u>Remarque :</u> pour que le paquet se mette à glisser, il faut que $a_B \geq \mu_s g > \mu_d g$ .*

*Cela assure que $\frac{v_0}{t_0} - \mu_d g > 0$. Le terme sous la racine est bien positif.*

**Exercice 4** : Stabilité dans un cône**




a) Bilan des forces: Poids $m\vec{g}$ , réaction normale du cône $\vec{N}$ et force de frottement $\vec{F}_f$ .

Le cône ne tourne pas encore ($\vec{a} = \vec{0}$), l'équilibre statique s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{0}$$

La condition pour que le cube ne glisse pas va être obtenue à partir de la loi du frottement solide, $\|\vec{F}_f\| = \mu\|\vec{N}\|$ , $\mu$ étant le coefficient de frottement statique

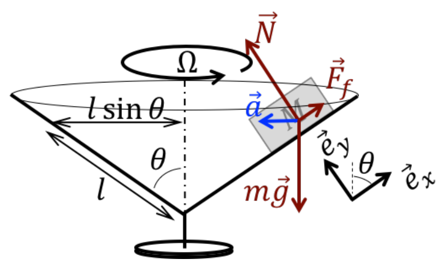
Pour appliquer cette équation, on doit calculer $\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{F}_f\|$. Il sera plus facile d'effectuer ces calculs avec des vecteurs de base colinéaire à $\vec{N}$ et $\vec{F}_f$. On choisit donc le repère $(\vec{e}_x , \vec{e}_y)$ représenté ci-contre. L'équilibre statique projeté dans ce repère s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_f - mg\cos\theta = 0 \\ N - mg\sin\theta = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_f = mg\cos\theta \\ N = mg\sin\theta \end{cases}$$

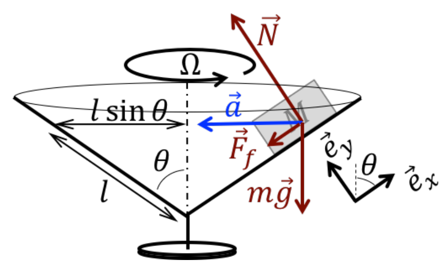
et la condition $\|\vec{F}_f\| = \mu\|\vec{N}\|$ devient :

$$mg\cos\theta = \mu mg\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \theta = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\mu} = \theta_{lim}$$

L'angle limite est donc $\theta_{lim} = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\mu}$




$\Omega < \Omega_{\mathrm{lim}}$: $\vec{F}_f$ *est orientée vers le haut*




$\Omega \gtrsim \Omega_{\mathrm{lim}}$: $\vec{F}_f$ est orientée vers le bas

b) La masse $M$ a maintenant un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\Omega$. Dans ce cas l'accélération est centripète avec $\vec{a} = -\rho\Omega^2\vec{e}_\rho$ avec $\rho$ distance à l'axe. Ici $\rho = l\sin\theta$ voir les schémas ci-dessus.

*On pouvait le savoir par cœur ou le retrouver à partir du formulaire avec* $\rho = l\sin\theta = cte, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0, \dot{\varphi} = \Omega$ *et* $\ddot{\varphi} = 0$ *:*

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \Longrightarrow \vec{a} = -l\sin\theta\,\Omega^2\vec{e}_\rho$$

On écrit la seconde loi de Newton $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f$, dans $(\vec{e}_x , \vec{e}_y,)$ :

$$\begin{pmatrix} -ml\sin\theta\,\Omega^2 \cdot \sin\theta = F_f - mg\cos\theta \\ ml\sin\theta\,\Omega^2 \cdot \cos\theta = N - mg\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_f = -ml\Omega^2\sin^2\theta + mg\cos\theta \\ N = mg\sin\theta + ml\Omega^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

On constate que lorsque $\Omega$ augmente, $N$ augmente en restant positif.
Par contre, $F_f$ qui est positif lorsque $\Omega = 0$, diminue et peux atteindre de grandes valeurs négatives. $F_f$ est négative au moment du décrochement, c'est-à-dire que la masse $M$ se met en mouvement vers le haut. La condition $\|\vec{F}_f\| = \mu\|\vec{N}\|$ s'écrit :

$F_f$ <0 lorsque que la masse décroche et se déplace vers le haut, donc $\|\vec{F}_f\| = -F_f = ml\Omega^2\sin^2\theta - mg\cos\theta$

$$ml\Omega^2\sin^2\theta - mg\cos\theta = \mu mg\sin\theta + \mu ml\Omega^2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow l\sin\theta\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)\Omega^2 = \mu g\sin\theta + g\cos\theta$$

$$\Rightarrow l\sin\theta\,(\tan\theta - \mu)\Omega^2 = g(\mu\tan\theta + 1) \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{g(\mu\tan\theta + 1)}{l\sin\theta\,(\tan\theta - \mu)}} = \Omega_{lim}$$

La vitesse angulaire limite est donc $\Omega_{lim} = \sqrt{\frac{g(\mu\tan\theta+1)}{l\sin\theta(\tan\theta-\mu)}}$

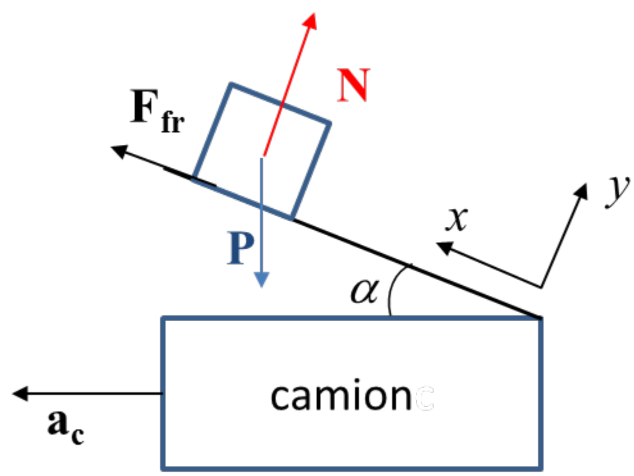
***

**Exercice supplémentaire S5.1** : Le camionneur**

a. Dans un premier temps le camion est au repos.

On fait un bilan des forces qui agissent sur le paquet :

- Son poids
  $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg(\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + \cos\alpha\,\mathbf{e}_y)$
- La réaction du support $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_y$
- Force de frottement sec statique entre la benne et le paquet $\mathbf{F}_{fr} = F_{fr}\mathbf{e}_x$
  - On a $\|\mathbf{F}_{fr}\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|$




On applique la seconde loi de Newton :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 = F_{fr} - mg\sin\alpha \\ 0 = N - mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow F_{fr} = mg\sin\alpha < \mu_s N$$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha < \mu_s$$

$$\Rightarrow \alpha_{\lim} = \text{Arctan}\,\mu_s$$

b. On applique la seconde loi de Newton au paquet dans le repère galiléen $(x,y)$ lié au sol :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{paquet/sol} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_{fr} - mg\sin\alpha \\ m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

L'accélération du paquet par rapport au sol est la somme de l'accélération du paquet par rapport au camion et de l'accélération du camion par rapport au sol :

$$\mathbf{a}_{paquet/sol} = \mathbf{a}_{paquet/camion} + \mathbf{a}_{camion/sol}$$

On a par ailleurs l'accélération du camion par rapport au sol :

$$\mathbf{a}_{camion/sol} = a_c\left(\cos\alpha\mathbf{e_x} - \sin\alpha\mathbf{e_y}\right)$$

L'accélération du paquet par rapport au camion n'a pas de composante selon $y$ car le paquet reste en contact avec la benne. De plus, on étudie le cas statique car on cherche la limite pour laquelle le paquet se met en mouvement. Donc la composante selon $x$ de l'accélération du paquet par rapport au camion est aussi nulle.

D'où :

$$\mathbf{a}_{paquet/sol} = \mathbf{a}_{camion/sol} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = a_c\cos\alpha \\ \ddot{y} = -a_c\sin\alpha \end{cases}$$

En utilisant la projection sur $y$ de la loi de Newton on a :

$$-ma_c\sin\alpha = N - mg\cos\alpha \rightarrow N = mg\cos\alpha - ma_c\sin\alpha$$

Pour déterminer l'accélération minimum du camion, on utilise l'inégalité sur la force de frottement :

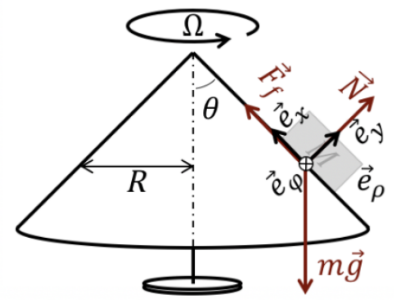
$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{F_{fr}}\right\| \le \mu_s\left\|\mathbf{N}\right\| \\ &\Rightarrow m\ddot{x} + mg\sin\alpha \le \mu_s\left(m\ddot{y} + mg\cos\alpha\right) \\ &\Rightarrow m\left(a_c\cos\alpha + g\sin\alpha\right) \le \mu_s m\left(-a_c\sin\alpha + g\cos\alpha\right) \\ &\Rightarrow a_c\left(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha\right) \le g\left(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha\right) \\ &a_c \le \frac{g(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha)} \end{aligned}$$

L'accélération minimale pour que le paquet se mette à glisser est donc :

$$\frac{g(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha)}$$

**Exercice supplémentaire S5.2** : Stabilité sur un cône**

a) On fait le bilan des forces en présence :
Le poids $m\vec{g}$ , la réaction normale du cône $\vec{N}$ et la force de frottement $\vec{F_f}$ . Le cône ne tourne pas encore ($\vec{a}=0$), l'équilibre statique s'écrit $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F_f}=0$.
La condition pour que le cube ne glisse pas va être obtenue à partir de la loi du frottement solide, $\|\vec{F_f}\| \leq \mu\|\vec{N}\|$, $\mu$ étant le coefficient de frottement statique.
Pour appliquer cette équation, on doit calculer $\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{F_f}\|$. Il sera plus facile d'effectuer ces calculs avec des vecteurs de base colinéaire à $\vec{N}$ et $\vec{F_f}$. On choisit donc le repère $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_\varphi)$ représenté ci-contre. L'équilibre statique projeté dans ce repère s'écrit :




$$\begin{cases} F_f - mg\cos\theta = 0 \\ N - mg\sin\theta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad => \begin{cases} F_f = mg\cos\theta \\ N = mg\sin\theta \end{cases}$$

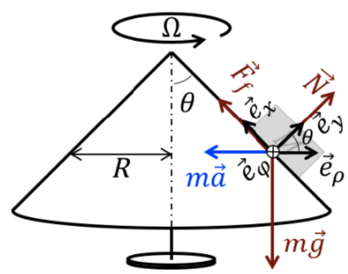
et la condition $\|\vec{F_f}\| \leq \mu\|\vec{N}\|$ devient :

$$mg\cos\theta \leq \mu mg\sin\theta => \tan\theta \geq \frac{1}{\mu} => \theta \geq Arctan\frac{1}{\mu} = \theta_{lim}$$

L'angle limite est donc $\theta_{lim} = Arctan\frac{1}{\mu}$

b) La masse M a maintenant un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire Ω. Dans ce cas l'accélération est centripète, $\vec{a}=-R\Omega^2\vec{e_\rho}$, voir schéma ci-contre.
On pouvait le savoir par cœur ou le retrouver à partir du formulaire.

$$\rho = R = cte, \dot{\rho}=0, \ddot{\rho}=0, \dot{\varphi}=\Omega \; et \; \ddot{\varphi}=0;$$
$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho}+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} => \vec{a}=-R\Omega^2\vec{e_\rho}$$




On écrit la seconde loi de Newton $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F_f}=m\vec{a}$, dans $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_\varphi)$ :

$$\begin{cases} F_f - mg\cos\theta = mR\Omega^2\sin\theta \\ N - mg\sin\theta = -mR\Omega^2\cos\theta \\ 0 = 0 \end{cases} \quad => \begin{cases} F_f = mg\cos\theta + mR\Omega^2\sin\theta \\ N = mg\sin\theta - mR\Omega^2\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_f - mg\cos\theta = mR\Omega^2\sin\theta \\ N - mg\sin\theta = -mR\Omega^2\cos\theta \\ 0 = 0 \end{cases} \quad => \begin{cases} F_f = mg\cos\theta + mR\Omega^2\sin\theta \\ N = mg\sin\theta - mR\Omega^2\cos\theta \end{cases}$$

la condition $\|\vec{F}_f\| \leq \mu\|\vec{N}\|$ devient :

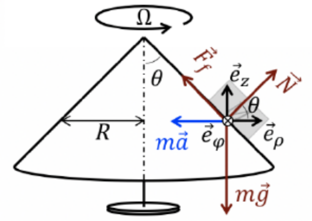
$$mg\,cos\theta + mR\Omega^2 sin\theta \leq \mu mg\,sin\theta - \mu mR\Omega^2 cos\theta => (sin\theta + \mu\,cos\theta)R\Omega^2 \leq \mu g\,sin\theta - g\,cos\theta$$

$$=> (tan\theta + \mu)R\Omega^2 \leq g(\mu\,tan\theta - 1) => \Omega \leq \sqrt{\frac{g(\mu\,tan\theta - 1)}{(tan\theta + \mu)R}} = \Omega_{lim}$$

La vitesse angulaire limite est donc $\Omega_{lim} = \sqrt{\frac{g(\mu\,tan\theta-1)}{(tan\theta+\mu)R}}$. On note que le terme au numérateur est bien positif quand $\theta \geq \theta_{lim}$

Alternative :

*Correction pour ceux qui ont utilisé un repère horizontal/vertical, par exemple $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ tel que représenté ci-dessous.*




a) Les projections de $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$ dans $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ sont :

$$\begin{cases} N\,cos\theta - F_f\,sin\theta = 0 \\ 0 = 0 \\ -mg + N sin\theta + F_f\,cos\theta = 0 \end{cases} => \begin{cases} F_f = N\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \\ N\,\sin\theta + N\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} F_f = N\frac{1}{tan\theta} \\ \\ N\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta} = mg => N = \sin\theta\,mg \end{cases} => \begin{cases} F_f = \cos\theta\,mg \\ \\ N = \sin\theta\,mg \end{cases}$$

On retrouve (bien sûr) le même résultat, mais les calculs pour trouver $N$ et $F_f$ sont plus lourds.
La question a) restait cependant tout aussi simple à résoudre puisque la formule $F_f = N\frac{1}{tan\theta}$, , facile a trouver, suffit à résoudre le problème :

$$F_f \leq \mu N => N\frac{1}{tan\theta} \leq \mu N => tan\theta \geq \frac{1}{\mu} => \theta \geq Arctan\frac{1}{\mu} = \theta_{lim}$$

b) Les projections de $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$ dans $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ sont :

$$\begin{cases} N\,cos\theta - F_f\,sin\theta = -mR\Omega^2 \\ 0 = 0 \\ -mg + N\,sin\theta + F_f\,cos\theta = 0 \end{cases}$$

Cette fois, aucune équation ne donne directement le rapport $\frac{F_f}{N}$ et on doit mener des calculs de $N$ et $F_f$ jusqu'au bout :

$$\begin{cases} N\,cos\theta - F_f\,sin\theta = -mR\Omega^2 \\ \\ -mg + N sin\theta + F_f\,cos\theta = 0 \end{cases} => \begin{cases} F_f = N\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{mR\Omega^2}{\sin\theta} \\ \\ -mg + N sin\theta + N\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + \frac{mR\Omega^2}{\sin\theta}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} F_f = N\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{mR\Omega^2}{\sin\theta} \\ \\ N\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta} = mg - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,mR\Omega^2 \end{cases} => \begin{cases} F_f = (\sin\theta\,mg - \cos\theta\,mR\Omega^2)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{mR\Omega^2}{\sin\theta} \\ \\ N = \sin\theta\,mg - \cos\theta\,mR\Omega^2 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} F_f = \cos\theta\,mg + \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}mR\Omega^2 = \cos\theta\,mg + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}mR\Omega^2 \\ \\ N = \sin\theta\,mg - \cos\theta\,mR\Omega^2 \end{cases} => \begin{cases} F_f = \sin\theta\,mg + \sin\theta\,mR\Omega^2 \\ \\ N = \sin\theta\,mg - \cos\theta\,mR\Omega^2 \end{cases}$$

Même résultat que précédemment et on enchaine sur le calcul de $\Omega_{lim}$ de la même façon.
Deux leçons à en tirer :

- Essayez de bien choisir votre repère dès le départ.
- Si vous avez fait le mauvais choix et bien entamé les calculs, ne vous découragez pas, on y arrive quand même !

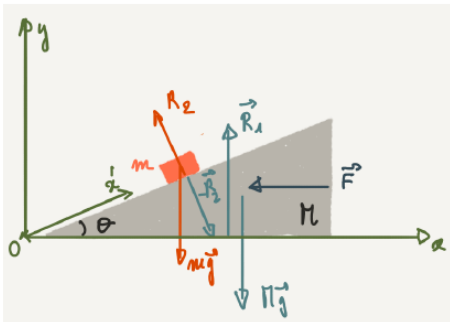
**Exercice supplémentaire S5.3***** (25 min) **: Bloc sur plan incliné**

Il faut ici bien réfléchir. . .le système est compliqué. Il faut identifier la bonne condition correspondant à l'énoncé. Si le bloc de masse $m$ est immobile par rapport à $M$, c'est que
l'accélération des deux blocs est identique.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$$

Nous allons faire le bilan des forces :

**Sur ① de masse $M$ :**




$\vec{F}$ force appliquée

$M\vec{g}$ poids

$-\vec{R}_2$ opposé de la réaction de ② sur ①

$\vec{R}_1$ réaction du sol

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \qquad (1)$$

**Sur ② de masse $m$ :**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_2 \qquad (2)$$

On cherche $\vec{F}$. On ne connait ni $\vec{R}_1$ ni $\vec{R}_2$, ni $\vec{a}$.

Stratégie : obtenir des équations découplées $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ et ensuite projeter sur les normales respectives.

(1)+(2) $\Rightarrow (M+m)\vec{a} = (M+m)\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_1$ (6)

(6) projeté sur $(Ox)$ $\Rightarrow -(M+m)a = -F + 0 + 0$

(2) projeté sur $(Ox')$ : $-a\cos\theta = -mg\sin\theta \Rightarrow a = g\tan\theta$

$$\Rightarrow \boxed{F = (M+m)g\tan\theta}$$