Physique
Semestre d'automne 2018

Simon Bossoney
Guido Burmeister

moodle.epfl.ch

Corrigé 8

Exercice 1

Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement, les seules forces agissant sur la luge de masse m (l'objet) pendant la descente sont la force de gravitation et le soutien du sol. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc

$$E_{\text{cin,bas}} - E_{\text{cin,haut}} = W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) + W_{\text{bas}\to\text{haut}}(\vec{S})\,.$$

Le travail du poids est positif, car $m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\text{CM}} > 0$. Il est donné par la différence de hauteur :

$$W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) = mg(h_{\text{haut}} - h_{\text{bas}}) = mgh\,.$$

Le travail du soutien est nul, car $\vec{S} \perp d\vec{r}_{\text{CM}}$.
Ainsi

$$\frac{1}{2}mv_{\text{bas}}^2 = mgh \Rightarrow v_{\text{bas}} = ||\vec{v}_{\text{bas}}|| = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

où l'on a pris $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Alternativement, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet, en absence de frottement, la luge est soumise à la force de gravitation (qui est une force conservative) et au soutien (qui est toujours perpendiculaire à la vitesse). L'énergie mécanique est donc conservée :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = \text{constante}\,.$$

En choisissant comme niveau de référence le bas de la piste, l'énergie mécanique s'écrit ...

... en haut de la piste (avec une vitesse initiale nulle et une hauteur h) :

$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{pot.}} = mgh\,;$$

... en bas de la piste (avec une vitesse finale de norme v et une hauteur nulle) :

$$E_{\text{méc.}}(2) = E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique fournit alors

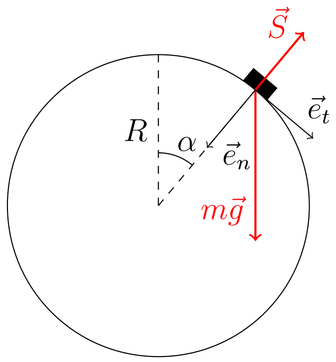
$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{méc.}}(2) \;\Leftrightarrow\; mgh = \frac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

où l'on a pris $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Exercice 2

Le wagonnet gagne en vitesse et finit par décrocher.
Exploitons la condition de décrochement pour l'endroit où m quitte la boule et déterminer une relation entre vitesse et position du wagonnet.

Considérer d'abord une position quelconque pour le wagonnet.



Objet : wagonnet

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le décrochement du wagonnet de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$mg\sin\alpha = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Au point D du décrochement repéré par l'angle α_D , $S = 0$:

$$mg\cos\alpha_D = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow Rg\cos\alpha_D = v_D^2\,.$$

La projection selon $\vec{e}_t$ est exploitée à travers le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin,décroch.}} - E_{\text{cin,dép.}} = W_{\text{dép.}\to\text{décroch.}}(m\vec{g}) + W_{\text{dép.}\to\text{décroch.}}(\vec{S})\,.$$

Le travail du poids est positif, car $m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\text{CM}} > 0$. Il est donné par la différence de hauteur :

$$W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) = mg(h_{\text{haut}} - h_{\text{bas}}) = mgR(1 - \cos\alpha_D)\,.$$

Le travail du soutien est nul, car $\vec{S} \perp d\vec{r}_{\text{CM}}$.
Ainsi

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = mgR(1 - \cos\alpha_D) \Rightarrow v_D^2 = 2gR(1 - \cos\alpha_D)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position du wagonnet lors du décrochement.

Alternativement, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet toutes les forces exercées sur le wagonnet sont conservatives (poids) ou ne travaillent pas (soutien). Par conséquent, l'énergie mécanique du wagonnet est conservée.
En choisissant l'origine des hauteurs au niveau du centre du cercle, on a

- Au point de départ (1) (à $\alpha = 0$), la vitesse du wagonnet est nulle et sa hauteur R :

$$E_{\text{méc}}(1) = mgR\,.$$

- Au point de dérochement (2) (à α_D), le wagonnet une vitesse de norme v_D et se trouve à la hauteur $h_D = R\cos\alpha_D$:

$$E_{\text{méc}}(2) = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgR\cos\alpha_D\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique donne donc

$$mgR = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgR\cos\alpha_D \Rightarrow v_D^2 = 2gR(1 - \cos\alpha_D)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position du wagonnet lors du décrochement.

Des deux équations, on déduit α_D .
On a $v_D^2 = Rg\cos\alpha_D$ et $v_D^2 = 2gR(1-\cos\alpha_D)$. Alors

$$Rg\cos\alpha_D = 2gR(1-\cos\alpha_D) \Leftrightarrow 3\cos\alpha_D = 2 \Leftrightarrow \cos\alpha_D = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_D \approx 48.2°.$$

Exercice 3

Dans un premier temps, on caractérise la tension dans la corde. Puis, on détermine l'expression du travail de cette tension.
Les forces s'exerçant sur l'objet "masse M" sont le poids $M\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ de la corde. La deuxième loi de Newton s'écrit donc

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a} \equiv \vec{0}\,.$$

En effet, l'accélération de la masse est nulle car cette dernière s'élève à vitesse constante. Ainsi, la tension est constante et vaut

$$T = Mg\,.$$

On exploite le fait que la tension est constante durant l'élévation pour calculer le travail de cette dernière depuis le sol (position $\vec{r}_1$) jusqu'à une hauteur de 10 m (position $\vec{r}_2$) :

$$W(\vec{T}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{T}\cdot d\vec{r} = \int_0^h T ds = T\int_0^h ds = Th\,.$$

On peut alors donner l'expression de la tension :

$$T = \frac{W(\vec{T})}{h} = \frac{5000}{10} = 500\,\mathrm{N}.$$

Remarque

Connaissant T, il est possible de déterminer la masse :

$$M = \frac{T}{g} \cong \frac{500}{10} = 50\,\mathrm{kg}\,,$$

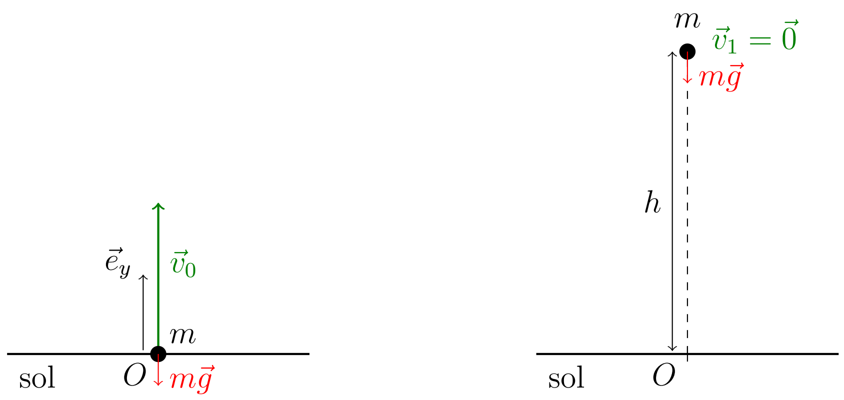
où l'on a posé $g \cong 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice 4

En absence de frottements, la seule force exercé sur la masse est le poids. Nous allons donc exploiter la conservation de l'énergie entre deux instants t_i et t_j.

(a) Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer) ii) temps t_1 (sommet)



La hauteur maximale sera atteinte en absence de frottement avec l'air. La seule force intervenant alors est la force de gravitation et l'énergie mécanique est conservée. En choisissant le sol comme point de référence, l'énergie mécanique est purement cinétique au moment du lancement. Comme la vitesse de la masse est nulle au sommet de la trajectoire, la conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

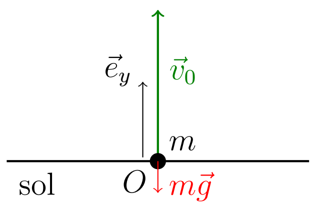
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh\,,$$

où h est la distance (selon la verticale) séparant le sol de la masse lorsque cette dernière est au sommet de sa trajectoire. Par conséquent, la hauteur maximale atteinte par la masse a pour expression

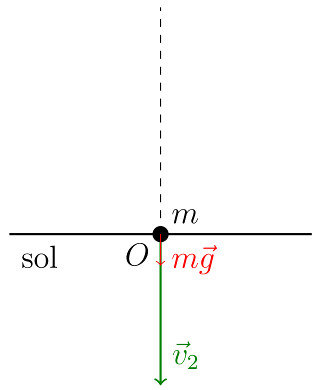
$$h = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

(b) Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer)



ii) temps t_2 (retour au sol)



Nous supposons, comme au point (a), que le frottement avec l'air est négligeable. La conservation de l'énergie mécanique entre le moment du lancer et le retour de la masse sur le sol fournit alors la vitesse v_2 de la masse juste avant le contact avec le sol :

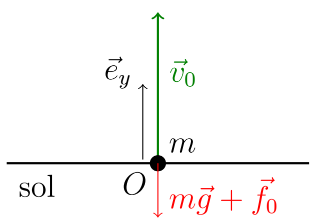
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = v_2\,.$$

Vectoriellement, la vitesse $\vec{v}_2$ est opposée à la vitesse initiale :

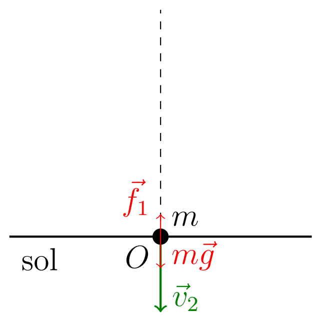
$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_0\,.$$

(c) Remarquons qu'en présence de frottements, l'énergie (mécanique) n'est pas conservée. Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer)



ii) temps t_2 (retour au sol)



Nous supposons cette fois que le frottement $\vec{f} = \vec{f}(t)$ avec l'air n'est pas négligeable. L'énergie mécanique de la masse diminue donc entre l'instant t_0 et l'instant t_2, et

$$v_2 = \frac{v_0}{2} < v_0\,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les instants t_0 et t_2 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) &= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= W_{1\to 2}^{\text{ext}} = W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) = 0 + W_{1\to 2}(\vec{f})\,. \end{aligned}$$

Le travail de la force de freinage est donc donné par

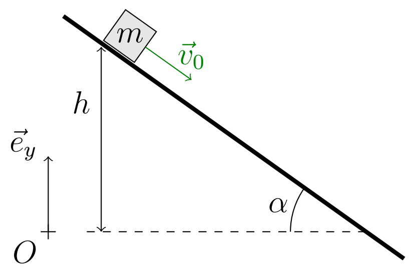
$$W_{1\to 2}(\vec{f}) = -\frac{3}{8}mv_0^2\,.$$

Exercice 5

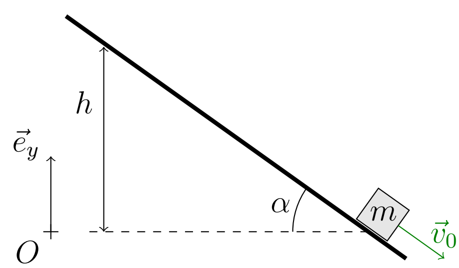
Nous allons exploiter la conservation de l'énergie entre deux instants t_i et t_j, ainsi que la définition du travail d'une force.

(a) Nous allons considérer deux instants t_1 et t_2 :

i) instant t_1



ii) instant t_2



En choisissant l'origine comme sur le dessin, les énergies mécaniques en t_1 et t_2 s'écrivent :

$$E_{\text{méc.}}(1) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \text{et} \quad E_{\text{méc.}}(2) = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

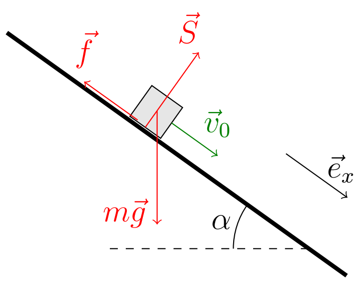
Ainsi, la variation d'énergie mécanique de m sur une dénivellation h est donnée par

$$\Delta E_{\text{méc.}} = E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1) = -mgh\,.$$

Remarque

L'énergie mécanique diminue. Il doit donc exister un frottement exercé par le plan incliné qui freine la masse m.

(b)



Le plan incliné exerce deux forces sur la masse m : une force de frottement $\vec{f}$ et une force de soutien $\vec{S}$. Comme cette dernière ne travaille pas (le soutien est toujours perpendiculaire au plan incliné, et donc à la trajectoire de la masse m), le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

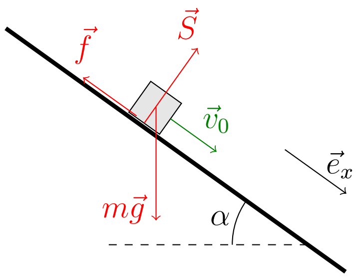
$$\begin{aligned} E_{\text{cin.}}(2) - E_{\text{cin.}}(1) &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) \\ 0 &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) \end{aligned}$$

et le travail sur m fourni par le plan incliné est donc

$$\begin{aligned} W_{1\to 2}(\vec{f}) &= -W_{1\to 2}(m\vec{g}) = -mgh \\ &= E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1)\,. \end{aligned}$$

Remarque
Le travail des forces non conservatives (ou dissipatives) est égal à la variation de l'énergie mécanique.

(c)



La deuxième loi de Newton appliquée à la masse m s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_x$, le long de la pente, il vient

$$f = mg\sin\alpha = \text{constante.}$$

La force de frottement $\vec{f}$ est donc constante.

Remarque
Comme $f =$ constante, il est possible de calculer aisément le travail de la force de frottement à partir de la définition :

$$\begin{aligned} W_{1\to 2}(\vec{f}) &= \int_1^2 \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 f\,ds = -f\int_1^2 ds = -f\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -mg\sin\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -mgh\,. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu au point (b).

(d) Pendant un intervalle de temps dt, la masse m descend d'une hauteur dh et le travail sur m fourni par le plan incliné s'écrit

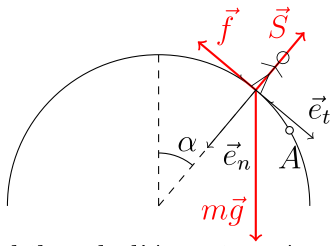
$$dW = -mg\,dh = -f\frac{dh}{\sin\alpha} = -f\,ds\,,$$

où ds est le déplacement le long du plan. La puissance a donc pour expression

$$P = \frac{dW}{dt} = -f\,\frac{ds}{dt} = -f\,v_0\,.$$

Exercice 6

Le surfeur gagne en vitesse et finit par décrocher. Remarquons qu'il décroche plus tard que dans le cas d'une bosse parfaitement lisse : il y a des frottements.
L'énergie dissipée est définie comme l'énergie mécanique perdue par le surfeur entre le départ et le décrochement.
Considérer le surfeur et les forces qu'il subit.



Objet : surfeur

Forces : poids, soutien, frottement

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

Faire le bilan de l'énergie mécanique du surfeur.
Théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point de décrochement A :

$$E_{\text{cin}}(A) - E_{\text{cin}}(\text{dép}) = W^{\text{ext}}_{\text{dép}\to A} = W_{\text{dép}\to A}(m\vec{g}) + W_{\text{dép}\to A}(\vec{S}) + W_{\text{dép}\to A}(\vec{f})\,.$$

Le poids est conservatif et le soutien ne travaille pas. En regroupant énergies cinétique et potentielle, le théorème devient

$$E_{\text{méc}}(A) - E_{\text{méc}}(\text{dép}) = W_{\text{dép}\to A}(\vec{F}_{\text{non cons.}}) = W_{\text{dép}\to A}(\vec{f})\,.$$

La variation de l'énergie mécanique est donnée par le travail des forces non conservatives. Alors, avec l'origine des hauteurs au niveau du centre de l'arc de cercle,

$$W_{\text{dép}\to A}(\vec{f}) = E_{\text{méc}}(A) - E_{\text{méc}}(\text{dép}) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg\frac{r}{2} - mgr = \frac{1}{2}mv_A^2 - mg\frac{r}{2}\,.$$

Exploiter la condition caractérisant le point A.
Le surfeur décroche au point A.
Selon $\vec{e}_n$, pour un point quelconque :

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{r}\,.$$

Au point A du décrochement repéré par l'angle $\alpha_A = \frac{\pi}{3}$, $S = 0$:

$$mg\cos\frac{\pi}{3} = m\frac{v_A^2}{r} \Rightarrow gr = 2v_A^2\,.$$

Calculer le travail du frottement.
Il vient alors

$$W_{\text{dép}\to A}(\vec{f}) = \frac{m}{2}(v_A^2 - gr) = \frac{m}{2}\left(\frac{gr}{2} - gr\right) = -\frac{mgr}{4}\,.$$

Le bilan de l'énergie mécanique est de $-\frac{mgr}{4}$. Le surfeur a donc dissipé par frottement une énergie

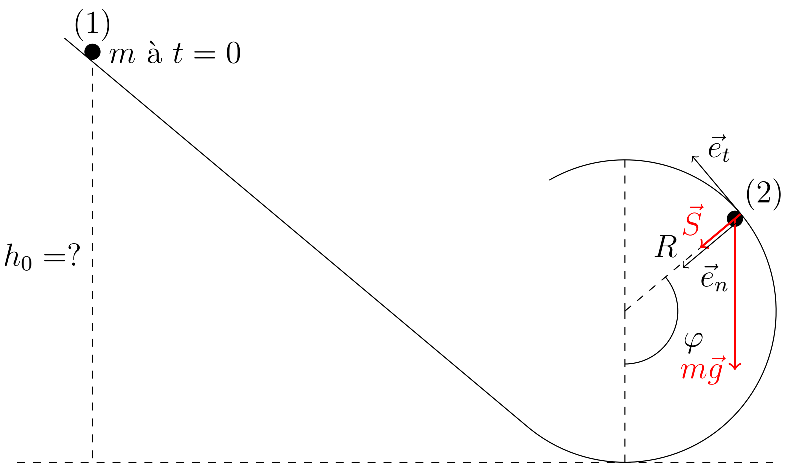
$$E_{\text{diss}} = \frac{mgr}{4}\,.$$

Exercice 7

Plus la hauteur du lâcher h_0 est grande, plus la bille va vite dans l'anneau. Plus la hauteur est petite, plus la bille va lentement et risque de quitter l'anneau.

La bille doit rester en contact avec le rail en tout point : on exploite la condition de non-décrochement.

Considérer d'abord une position quelconque pour la bille



Objet : bille

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le non-décrochement de la bille du rail est caractérisé par la condition $||\vec{S}|| > 0$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\varphi = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$S - mg\cos\varphi = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

La condition de non-décrochement en tout point s'écrit

$$S = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\varphi > 0 \quad \forall\,\varphi\,.$$

La projection selon $\vec{e}_t$ est exploitée à travers le théorème de l'énergie cinétique.
Toutes les forces exercées sur la bille sont conservatives (poids) ou ne travaillent pas (soutien). Par conséquent, l'énergie mécanique de la bille est conservée.
En choisissant l'origine des hauteurs au niveau du point le plus bas du cercle, on a

- Au point de départ (1) (à $t=0$), la vitesse de la bille est nulle et sa hauteur h_0 :

$$E_{\text{méc}}(1) = mgh_0\,.$$

- Au point (2) (à t quelconque), la bille a une vitesse de norme v et se trouve à la hauteur $h = R(1-\cos\varphi)$:

$$E_{\text{méc}}(2) = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi)\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique donne donc

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position de la bille.
Introduire la relation entre vitesse et position dans la condition de non-décrochement.
Avec

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi) \Leftrightarrow v^2 = 2gh_0 - 2gR(1-\cos\varphi)\,,$$

la condition de non-décrochement devient

$$\frac{SR}{m} = v^2 + gR\cos\varphi = 2gh_0 - gR(2 - 3\cos\varphi) > 0 \quad \forall\,\varphi\,.$$

L'angle pour lequel l'expression est minimale est $\varphi = \pi$: la position critique est le haut du cercle. Si la bille y passe sans décoller du rail, elle ne décolle nulle part.
Pour $\varphi = \pi$, $\cos\varphi = -1$ et la condition de non-décrochement doit être vérifiée :

$$\frac{SR}{m} = 2gh_0 - gR(2+3) = g(2h_0 - 5R) > 0 \Rightarrow h_0 > \frac{5R}{2}\,.$$

Remarque : cette hauteur minimale est supérieure à celle du point le plus haut du cercle.