Algèbre Linéaire
Semestre d'automne 2018

Bronstein
Huruguen
Tissot

Corrigé 4

Logique : exercice 17

Rappel :
Soit T : $[\forall \ldots, \ P \Rightarrow Q]$ alors sa réciproque R est : R : $[\forall \ldots, \ Q \Rightarrow P]$ et sa contraposée C est : C : $[\forall \ldots, \text{ non } Q \Rightarrow \text{non } P]$.
Attention, ne pas confondre réciproque et contraposée !

T : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$,
m est impair et n est impair $\Longrightarrow$ $m^2 - n^2$ est un multiple de 8 .

(a) *Réciproque* R :

T : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$,
$m^2 - n^2$ est un multiple de 8 $\Longrightarrow$ m est impair et n est impair .

Contraposée C :

C : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$,
m est pair ou n est pair $\Longrightarrow$ $m^2 - n^2$ n'est pas un multiple de 8 .

(b) *Rappel* :
non $[\forall \ldots, \ P \Rightarrow Q]$ $\Longleftrightarrow$ $[\exists \ldots, \ P$ et non$Q]$

- D'où la négation de C :
  non C : $\exists\, m, n \in \mathbb{N}^*$, ($m$ est pair ou n est pair) et $(m^2 - n^2 = 8k\,,\ k \in \mathbb{Z})$
- C est fausse car sa négation est vraie :
  il existe $m = 6$ et $n = 2$, (6 est pair ou 2 est pair) et $(6^2 - 2^2 = 32 = 8 \cdot 4)$
  On a donc un contre-exemple qui montre que C est fausse : l'hypothèse de C est vraie et la négation de sa conclusion est fausse.
- Les propositions R et C sont logiquement équivalentes. Ainsi, C étant fausse, R est fausse.

Logique : exercice 19

(a) Soit l'énoncé T :

$$T \ : \ \forall A, B, D \subset E\,, \quad P \Rightarrow Q$$

Alors l'énoncé contraposé noté C est :

$$C \ : \ \forall A, B, D \subset E\,, \quad \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$$

L'énoncé contraposé de la proposition donnée s'écrit :

$$C \ : \ \forall A, B, D \subset E\,, \quad \text{non } [B \cap D = \emptyset \ \Rightarrow \ A \cap D = \emptyset] \ \Rightarrow \ A \not\subset B$$

C'est-à-dire :

- non $[B \cap D = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap D = \emptyset] \quad \Leftrightarrow \quad [B \cap D = \emptyset \text{ et } A \cap D \neq \emptyset]$
- $A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad [\exists x \in E\,, x \in A \text{ et } x \notin B]$

D'où l'expression complète de l'énoncé contraposé :

$C\;:\;\forall A\,,B\,,D \subset E\,,\quad [B\cap D = \emptyset \text{ et } A\cap D \neq \emptyset] \quad \Rightarrow \quad [\exists x \in E\,, x \in A \text{ et } x \notin B]$

(b) Preuve de la proposition dans sa version contraposée :

Référentiel : $A\,,B\,,D \subset E$

Hypothèse : $B \cap D = \emptyset$ et $A \cap D \neq \emptyset$

Conclusion : $\exists x \in E\,,\ x \in A$ et $x \notin B$

Preuve :

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} A \cap D \neq \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \exists x \in E\,,\ x \in A \cap D \\ &\Rightarrow \quad x \in A \text{ et } x \in D \end{aligned}$$

Or si $x \in D$ alors $x \notin B$ car par hypothèse, $B \cap D = \emptyset$

Donc

$x \in A$ et $x \in D \quad \Rightarrow \quad x \in A$ et $x \notin B$

Analyse Combinatoire : exercice 1

Il suffit de revenir aux définitions des factorielles, des combinaisons, des arrangements et des permutations.

(a) $A = \dfrac{9!}{7! \cdot 2!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2} = \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 9 \cdot 4 = 36$

(b) $B = \dfrac{9! \cdot 8 \cdot 7!}{9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \dfrac{9! \cdot 8 \cdot 7!}{9 \cdot 7!} = \dfrac{9! \cdot 8}{9} = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 8!}{9} = 8 \cdot 8!$

(c) $C = \dfrac{\mathrm{C}_7^3 \cdot \mathrm{P}_4}{\mathrm{A}_5^3} = \dfrac{\dfrac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} \cdot 4!}{\dfrac{5!}{(5-3)!}} = \dfrac{\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} \cdot 4!}{\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}} = \dfrac{7 \cdot 5 \cdot 4!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 7 \cdot 2! = 14$

Analyse Combinatoire : exercice 2

(a) $A = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$

(b) $B = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{n!}{(n+1) \cdot n!} - \dfrac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \dfrac{1}{(n+1)} - \dfrac{1}{n} =$

$= \dfrac{n-(n+1)}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{-1}{n \cdot (n+1)}$

(c) $C = \dfrac{1}{n \cdot n!} - \dfrac{1}{n \cdot (n+1)!} = \dfrac{(n+1)-1}{n \cdot (n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$

(d) $D = (n+2)! - (n+1)! = (n+2)(n+1)! - (n+1)! = (n+2-1)(n+1)! = (n+1)(n+1)!$

(e) $E = \frac{(2n)!}{2 \cdot n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1)n!}{2 \cdot n!} = n(2n-1)(2n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1)$

Analyse Combinatoire : exercice 3

(a) $\mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k-(p-k))! \cdot (p-k)!} = \frac{n!}{(p-k)! \cdot (n-p)! \cdot k!} =$

$$= \frac{n! \cdot p!}{(p-k)! \cdot (n-p)! \cdot k! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \cdot \frac{p!}{(p-k)! \cdot k!} = \mathrm{C}_n^p \cdot \mathrm{C}_p^k$$

(b) • $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = n + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} =$

$= n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! \cdot 6} = n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

• $n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = 2n \qquad | : n(\neq 0)$

$1 + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)(n-2) = 2 \qquad | \cdot 6$

$6 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(3+n-2) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(n+1) = 6$

$\Leftrightarrow \quad n^2 - 1 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 7 \quad :$ pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Analyse Combinatoire : exercice 4

(a) • l'égalitée est vraie pour $n = 0$ car :

$$S_0 = \mathrm{C}_p^p = 1 = \mathrm{C}_{p+1}^{p+1}$$

• hypothèse de récurrence : l'égalité est vraie pour n

$$S_n = \mathrm{C}_{p+1+n}^{p+1}$$

• à montrer, sous l'hypothèse de récurrence, l'égalité est vraie pour $n+1$, càd :

$$\mathrm{C}_{p+2+n}^{p+1} = S_{n+1}$$

Preuve :
$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathrm{C}_{p+i}^p = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_{p+i}^p + \mathrm{C}_{p+n+1}^p \underset{\text{hyp. de réc.}}{=} \mathrm{C}_{p+1+n}^{p+1} + \mathrm{C}_{p+1+n}^p = \mathrm{C}_{p+2+n}^{p+1}$

car on a la relation : $\qquad \mathrm{C}_k^q + \mathrm{C}_k^{q+1} = \mathrm{C}_{k+1}^{q+1}$

(b) On se souvient des relations entre les arrangements et les combinaisons :

$$\mathrm{A}_n^p = p! \cdot \mathrm{C}_n^p$$

Dans la formule à démontrer, on reconnaît, grâce à l'aide ci-dessus, des arrangements de $k+3$ objets pris 3 à 3 :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (k+3)\,(k+2)\,(k+1) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_{k+3}^{3} = \sum_{k=0}^{n} 3! \cdot \mathrm{C}_{k+3}^{3} = 3! \cdot \mathrm{C}_{3+1+n}^{3+1} = 3! \cdot \mathrm{C}_{n+4}^{4}$$

Analyse Combinatoire : exercice 8

Dans un jeu de 36 cartes,

- il y a 4 "couleurs" : pique, coeur, trefle, carreau ;
- la "hauteur" d'une carte est sa valeur : par exemple 10, valet, etc ;
- il y a 9 hauteurs.

Dans ce problème, l'ordre n'intervenant pas, les dénombrements se font à l'aide des combinaisons.

(a) On extrait 3 cartes qui sont de même "couleur" :

- on choisit 3 "pique" parmi 9 : C_9^3
- on choisit 3 "coeur" parmi 9 : C_9^3
- on choisit 3 "trèfle" parmi 9 : C_9^3
- on choisit 3 "carreau" parmi 9 : C_9^3

Le nombre de possibilités est : $4 \cdot \mathrm{C}_9^3$

(b) Les 3 cartes sont des "as" :

on choisit 3 "as" parmi 4 : C_4^3

D'où le nombre de possibilités : C_4^3

(c) Les 3 cartes sont de même "hauteur" :il y a 4 cartes par "hauteur" et il y a 9 "hauteur" :

- on choisit 3 "as" parmi 4 : C_4^3
- on choisit 3 "roi" parmi 4 : C_4^3

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- on choisit 3 "6" parmi 4 : C_4^3

D'où le nombre de possibilités : $9 \cdot \mathrm{C}_4^3$

(d) Il n'y a pas de "coeur" parmi les 3 cartes, il reste donc 27 cartes :

On choisit 3 "as" parmi 27 : C_{27}^3

D'où le nombre de possibilités : C_{27}^3

(e) i) Méthode par complémentaire (plus rapide !) : avoir au moins un "coeur" est équivalent à tous les cas possibles moins ceux qui ne contiennent pas de "coeur" :

- on choisit 3 cartes parmi 36 : C_{36}^3
- on choisit 3 cartes parmi 27 : C_{27}^3

D'où le nombre de possibilités : $\quad C_{36}^3 - C_{27}^3$

ii) Méthode par énumération ds cas (plus immédiate !) : avoir au moins un "coeur" est équivalent à avoir 1 "coeur" + avoir 2 "coeur" + avoir 3 "coeur" :

- on choisit 1 "coeur" parmi 9 et 2 cartes parmi $36 - 9 = 27$: $\quad C_9^1 \cdot C_{27}^2$
- on choisit 2 "coeur" parmi 9 et 1 cartes parmi 27 : $\quad C_9^2 \cdot C_{27}^1$
- on choisit 3 "coeur" parmi 9 : $\quad C_9^3$

D'où le nombre de possibilités : $\quad 9 \cdot C_{27}^2 + 27 \cdot C_9^2 + C_9^3$

(f) Il y a exactement 1 "coeur" :

on l'a vu dans le point précédent, on a le nombre de possibilités : $\quad 9 \cdot C_{27}^2$

Applications : exercice 1

- Il faut vérifier la définition
  f est une application de E vers F si et seulement si, à tout élément x de E, f fait correspondre un unique élément $f(x) = y$ de F.
- *Rappel* :
  Graphe de f : $\qquad G_f = \left\{(x, y) \in E \times F \,\middle|\, x \in E,\ y = f(x)\right\}.$

  G_f définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

  E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée.

a) $A = \{(b;\, 1);\ (c;\, 3);\ (d;\, 5);\ (e;\, 3);\ (a;\, 6)\}$,

Soient $\ E = \{a;\, b;\, c;\, d\}\ $ et $\ F = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6\}$
Si A est le graphe d'une application f de E vers F alors
$(e;\, 3) \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(e) = 3$, mais l'élément e n'appartient pas à l'ensemble de départ E.

Donc A ne définit pas une application de E vers F.

b) $B = \{(d;\, 6);\ (c;\, 5);\ (a;\, 4);\ (d;\, 4);\ (b;\, 3)\}$,

Soient $\ E = \{a;\, b;\, c;\, d\}\ $ et $\ F = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6\}$
Si B est le graphe d'une application f de E vers F alors
$(d;\, 6) \in B \ \Leftrightarrow\ f(d) = 6 \quad$ et on a aussi $\quad (d;\, 4) \in B \ \Leftrightarrow\ f(d) = 4$.

L'élément d a donc deux images. Or par définition d'une application, l'image d'un élément doit être unique.

Donc B ne définit pas une application de E vers F.

c) $C = \{(a;\, 3);\ (b;\, 3);\ (c;\, 3);\ (d;\, 3)\}$,

Soient $\ E = \{a;\, b;\, c;\, d\}\ $ et $\ F = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6\}$
Tout élément de l'ensemble de départ a une image et elle est unique, C définit bien une application de E vers F.

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & a & \longmapsto & 3 \\ & b & \longmapsto & 3 \\ & c & \longmapsto & 3 \\ & d & \longmapsto & 3 \end{array}$$

On remarque que f est l'application constante : $f(x) = 3$ pour tout élément de E.

d) $D = \{(a;\, 5);\ (b;\, 5);\ (d;\, 2)\}$,

Soient $E = \{a;\, b;\, c;\, d\}$ et $F = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6\}$
L'élément c n'a pas d'image. Or par définition d'une application, tout élément de l'ensemble de départ doit avoir une image.

Donc D ne définit pas une application de E vers F.

Applications : exercice 4

Soit :

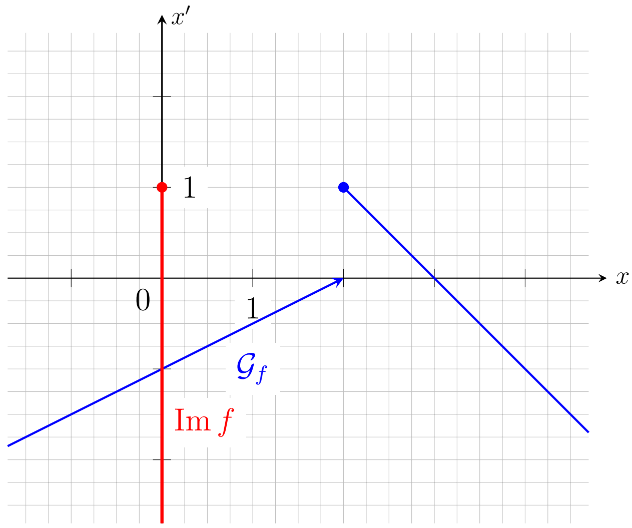
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2\,. \end{array} \right. \end{array}$$

(a) L'application allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, son graphe est donné par une courbe dans le plan Oxx'.
Le graphe de f est l'ensemble :

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \,|\, x' = f(x)\right\}.$$

L'image de f est l'ensemble des $x' \in \mathbb{R}$ qui sont image par f d'un $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im} f = \left\{x' \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in \mathbb{R}, x' = f(x)\right\}.$$



Ainsi

$$\operatorname{Im} f =]\leftarrow, 1]\,.$$

(b) On utilise la représentation graphique du graphe de f.

- $f\big(\{2\}\big) = \big\{x' \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in \{2\},\ x' = f(x)\big\} = \big\{f(2)\big\} = \{1\}$

- $f^{-1}\big(\{2\}\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in \{2\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 2\big\} = \emptyset$
- $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in \{0\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\big\} = \{3\}$
- $f^{-1}\big(f(\{1\})\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in f(\{1\})\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in \{-\frac{1}{2}\}\big\}$
  $= \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = -\frac{1}{2}\big\} = \{1, \frac{7}{2}\}$

(c) On utilise la représentation graphique du graphe de f .

- $f\big([1,3]\big) = \big\{x' \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in [1,3],\, x' = f(x)\big\} = [-\frac{1}{2}, 1]$
- $f\big([1,3\,[\big) = \big\{x' \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in [1,3\,[,\, x' = f(x)\big\} = [-\frac{1}{2}, 0\,[\, \cup\,]\,0, 1]$
- $f^{-1}\big([-1,0]\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in [-1,0]\big\} = [0,2\,[\, \cup [3,4]$
- $f^{-1}\big(f([-1,0\,[)\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in [-1,0\,[\big\} = [0,2\,[\, \cup\,]\,3,4]$

Applications : exercice 6

(a) A voir l'expression $f(x)$, la représentation du graphe de f fait intervenir des paraboles.

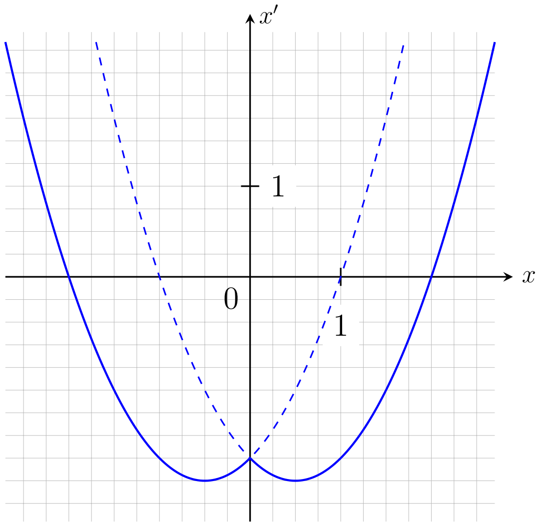
L'expression $f(x)$ est paire : $f(-x) = f(x)$. Le graphe de f possède donc un axe vertical de symétrie en $x = 0$ et il suffit de considérer $x \geq 0$.

Pour $x \geq 0$:

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x' = f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)\,. \end{array}$$

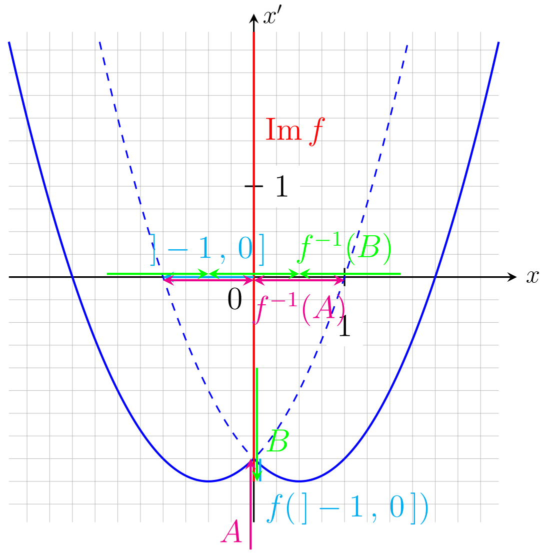
La parabole est de concavité vers les y positifs et coupe l'axe Ox en deux points distincts : $x = -1$ et $x = 2$.

L'abscisse du sommet est entre les racines, $x_s = \frac{1}{2}$ et l'ordonnée se calcule facilement, $x'_s = -\frac{9}{4}$.



Le second arc de parabole s'obtient par symétrie par rapport à l'axe Ox' .

(b) On s'aide de la représentation graphique pour déterminer les ensembles cherchés.



$$
\begin{array}{rcl}
\operatorname{Im} f & = & [\,-\frac{9}{4}\,,\, \to [\\
f(\,]-1\,,\,0\,]) & = & [\,-\frac{9}{4}\,,\,-2\,]\\
f^{-1}(A) & = &]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,0\,,\,1\,[\\
f^{-1}(B) & = & [\,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,]\setminus\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\\
A\cap B & = &]-\frac{9}{4}\,,\,-2\,[\\
f^{-1}(A\cap B) & = &]-1\,,\,1[\setminus\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}\,.
\end{array}
$$

(c) On observe que

- $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A\cap B)$.
  En effet, tous les éléments de l'ensemble de départ dont l'image est dans A et dans B sont ceux dont l'image est dans $A\cap B$.
- $f(f^{-1}(A)) = [\,-\frac{9}{4}\,,\,-2\,[\,\neq A$.
  En effet, l'ensemble des images par f des éléments dont l'image est dans A ne couvrent pas forcément tout A, mais uniquement la partie de A dans $\operatorname{Im} f$: $f(f^{-1}(A)) = A\cap \operatorname{Im} f$.