**Algèbre Linéaire** Tissot

Semestre de printemps 2019

# Corrigé 8

## Valeurs propres : exercice 8

(a) Les valeurs propres de $f$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

Pour développer ce déterminant, on utilise les opérations d'invariance sur les lignes et les colonnes afin d'obtenir un polynôme partiellement factorisé.
Pour les valeurs $a = 2$ et $b = 4$, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $f$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (5-\lambda)\,[(-1)(2-\lambda)(2+\lambda)+4] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(5-\lambda) = 0$$

D'où les valeurs propres de $f$ et leur multiplicité :

$$\lambda_1 = 0\,, \quad n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 5\,, \quad n_2 = 1$$

Soit $E(\lambda)$ le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$E(\lambda) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} \,\}$$

Il faut donc résoudre l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = \lambda\,X$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre double** $\lambda_1 = 0$

$$E(0) \;=\; \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\,\}$$

On résout l'équation $\;f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rl} 3x + y + 2z = 0 & \quad (1) \\ 2x + 4y - 2z = 0 & \quad (2) \\ x + 3y - 2z = 0 & \quad (3) \end{array} \right.$$

Géométriquement, chaque équation de ce système est un plan passant par l'origine. L'ensemble des solutions est leur intersection et c'est le sous espace propre $E(0)$.
Or ces équations ne sont jamais indépendantes car $E(0)$ a toujours d'autres solutions que $\vec{0}$. Elles ne sont pas proportionnelles donc nécessairement l'une d'entre elle est une combinaison linéaire des deux autres.
On constate que $(1) = 4\,(2) - 5\;(3)$ et $(1) \neq k\,(3)$. Le système se réduit donc aux équations $(1)$ et $(3)$.

Le sous espace propre $E(0)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ :

$$\vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(0)\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre** $\lambda_2 = 5$

$$E(5) \;=\; \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 5\,\vec{x}\,\}$$

On résoud l'équation $\;f(\vec{x}) = 5\,\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = 5\,X$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} -2x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 3y - 7z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 2z = 0 \\ x + 3y - 7z = 0 \end{array} \right.$$

Le sous espace propre $E(5)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{v}$

$$\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E(5)\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

(b) Les valeurs propres $\lambda_i$ sont solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I_3)=0$.

- $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de $A$ si et seulement si

$$\det(A-0I_3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & b & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 - ab + 6a - 6b = 0$$

- $\lambda_2 = 1$ est valeur propre de $A$ si et seulement si

$$\det(A-1I_3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} 3-1 & 1 & a \\ 2 & b-1 & -2 \\ 1 & 3 & -2-1 \end{vmatrix} = 22 - ab + 7a - 6b = 0$$

- Par soustraction de ces deux équations, on obtient $a=-2$, puis $b=2$.

  On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- On détermine la troisième valeur propre de $A$ :

$$\det(A-1I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,[(4-\lambda)(-2-\lambda)+8] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

D'où les valeurs propres de $f$ et leur multiplicité :

$\lambda_1 = 0 \quad n_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 \quad n_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2 \quad n_3 = 1.$

Soit $E(\lambda)$ le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$E(\lambda) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}\}$$

Il faut donc résoudre l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad A\,X = \lambda\,X$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre** $\lambda_1 = 0$

$$E(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

  On résout l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad A\,X = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y-2z=0 & (1) \\ x+y-z=0 & (2) \\ x+3y-2z=0 & (3)=4(2)-(1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y-2z=0 & \quad (1) \\ x+y-z=0 & \quad (2) \end{array} \right.$$

Le sous espace propre $E(0)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}$

$$\vec{u} \; = \; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E(0) \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$**

$$E(1) \; = \; \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 1\,\vec{x} \}$$

On résoud l'équation $f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = X$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 & (1) \\ 2x + y - 2z = 0 & (2) = (1) \\ x + 3y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 & \qquad (1) \\ x + 3y - 3z = 0 & \qquad (3) \end{cases}$$

Le sous espace propre $E(1)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{v}$

$$\vec{v} \; = \; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E(1) \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 2$**

$$E(2) \; = \; \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 2\,\vec{x} \}$$

On résout l'équation $f(\vec{x}) = 2\,\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = 2\,X$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & (1) \\ x - z = 0 & (2) \\ x + 3y - 4z = 0 & (3) = 3\,(1) - 2\,(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \qquad (1) \\ x - z = 0 & \qquad (2) \end{cases}$$

Le sous espace propre $E(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w}$

$$\vec{v} \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E(2)\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

**Valeurs propres : exercice 9**

*Rappels* :

- Critère de diagonalisation : la matrice $A$ d'ordre 3 est diagonalisable si et seulement elle possède trois valeurs propres (distinctes ou confondues) et si la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$ est égale à la dimension du sous espace propre $E(\lambda_i)$ pour tout $i$.
- Les valeurs propres de $A$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

Pour développer ce déterminant, utiliser les opérations d'invariance sur les lignes et les colonnes afin d'obtenir un polynôme partiellement factorisé.

(a) Les valeurs propres de $A$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ -2+\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 4\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

D'où les valeurs propres de $A$ et leur multiplicité :

$$\lambda_1 = 2\,, \quad n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 6\,, \quad n_2 = 1$$

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $A$ par rapport à la base canonique.
Soit $E(\lambda)$ le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$E(\lambda) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x} \,\}$$

Il faut donc résoudre l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\, X = \lambda\, X$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre double** $\lambda_1 = 2$

$$E(2) \;=\; \{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) \,=\, 2\vec{x}\,\}$$

On résout l'équation $\;f(\vec{x}) = 2\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad A\,X = 2X \quad\Leftrightarrow\quad (A - 2I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\Leftrightarrow\qquad x + y + z = 0$$

Géométriquement, $E(2)$ est le plan passant par l'origine et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (deux vecteurs non colinéaires quelconques).

$$\vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre simple** $\lambda_1 = 6$

La valeur propre étant de multiplicité 1, on sait déjà que la dimension du sev associé est 1. Mais comme on veut déterminer la matrice de passage $P$, il est nécessaire de calculer $E(6)$.

$$E(6) \;=\; \{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) \,=\, 6\vec{x}\,\}$$

On résoud l'équation $\;f(\vec{x}) = 6\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad A\,X = 6X \quad\Leftrightarrow\quad (A - 6I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\Leftrightarrow\qquad \left\{\begin{array}{rl} -3x + y + z = 0 & (1) \\ 2x - 2y + 2z = 0 & (2) \\ x + y - 3z = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Géométriquement, chaque équation de ce système est un plan passant par l'origine. L'ensemble des solutions est leur intersection et c'est le sous espace propre $E(6)$.

Or ces équations ne sont jamais indépendantes car $E(6)$ a toujours d'autres solutions que $\vec{0}$. Elles ne sont pas proportionnelles donc nécessairement l'une d'entre elle est une combinaison linéaire des deux autres.

On constate que $-(1) = (2) + \;(3)$ et $(1) \neq k\,(2)$. Le système se réduit donc aux équations $(1)$ et $(2)$.

Le sous espace propre $E(6)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w}$

$$\vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(6) \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- **Critère de diagonalisation**

  L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$ est égale à la dimension du sous espace propre $E(\lambda_i)$ pour tout $i$.

  - La multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $n_1 = 2$.
    Et le sous-espace propre associé $E(2)$ est le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.
    $$n_1 = \dim E(\lambda_1) = 2.$$
  - La multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 6$ est $n_2 = 1$.
    Et le sous-espace propre associé $E(6)$ est la droite $(O, \vec{w})$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension un.
    $$n_2 = \dim E(\lambda_2) = 1.$$

  L'endomorphisme $f$ est donc diagonalisable $\Leftrightarrow$ $A$ est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base formée de vecteurs propres de $f$. La matrice de passage $P$ est la matrice du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Les colonnes de la matrice de passage $P$ sont constituées des composantes des nouveaux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans l'ancienne base de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Relativement à la base propre $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la matrice de $f$ est diagonale. Elle est constituées des valeurs propres qui définissent la base.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(\vec{u}) & = & 2\vec{u} \\ f(\vec{v}) & = & 2\vec{v} \\ f(\vec{w}) & = & 6\vec{w} \end{cases}$$

Alors $A' = P^{-1} A P$

(b) Les valeurs propres de $B$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(B - \lambda \mathrm{I}_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$

D'où les valeurs propres de $B$ et leur multiplicité :

$$\lambda_1 = 1, \quad n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 2, \quad n_2 = 1$$

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $B$ par rapport à la base canonique.
Soit $E(\lambda)$ le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$E(\lambda) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$$

Il faut donc résoudre l'équation $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad B X = \lambda X$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre double** $\lambda_1 = 1$

$$E(2) \;=\; \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) =\, \vec{x}\,\}$$

On résoud l'équation $f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad B\,X = X \quad \Leftrightarrow \quad (B - I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 0$$

Géométriquement, $E(1)$ est le plan $(O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_3)$.
Il est dirigé par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$.

$$\vec{e}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre simple** $\lambda_1 = 2$

La valeur propre étant de multiplicité 1, on sait déjà que la dimension du sev associé est 1. Mais comme on veut déterminer la matrice de passage $P$, il est nécessaire de calculer $E(2)$.

$$E(2) \;=\; \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) =\, 2\vec{x}\,\}$$

On résoud l'équation $f(\vec{x}) = 2\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad B\,X = 2X \quad \Leftrightarrow \quad (B - 2I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{aligned} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Géométriquement, chaque équation de ce système est un plan passant par l'origine. L'ensemble des solutions est leur intersection et c'est le sous espace propre $E(2)$.
Le sous espace propre $E(2)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{w}$

$$\vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2) \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- **Critère de diagonalisation**

L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$ est égale à la dimension du sous espace propre $E\,(\lambda_i)$ pour tout $i$.

  - La multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est $n_1 = 2$.
    Et le sous-espace propre associé $E\,(1)$ est le plan $(O\,,\,\vec{e}_1\,, \vec{e}_3)$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.

$$n_1 = \dim E\,(\lambda_1\,) \;= 2\,.$$

- La multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est $n_2 = 1$.
  Et le sous-espace propre associé $E(2)$ est la droite $(O, \vec{w})$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension un.
  $$n_2 = \dim E(\lambda_2) = 1 .$$

  L'endomorphisme $f$ est donc diagonalisable $\Leftrightarrow$ $B$ est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base formée de vecteurs propres de $f$. La matrice de passage $P$ est la matrice du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Les colonnes de la matrices de passage $P$ sont constituées des composantes des nouveaux vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{w}$ exprimés dans l'ancienne base de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Relativement à la base propre $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{w})$, la matrice de $f$ est diagonale. Elle est constituées des valeurs propres qui définissent la base.

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) & = & \vec{e}_2 \\ f(\vec{w}) & = & 2\vec{w} \end{array} \right.$$

Alors $\quad B' = P^{-1} B P$

(c) Les valeurs propres de $C$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(C - \lambda \mathrm{I}_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\sqrt{3}-\lambda & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}-\lambda & 1+\sqrt{3} \\ -2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ \lambda & 1+\sqrt{3}-\lambda & 1+\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2 \\ \lambda & 1+\sqrt{3}-\lambda & 1+\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 = 0$$

D'où la valeur propre de $C$ et sa multiplicité : $\lambda_1 = 0, \quad n_1 = 3$. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $C$ par rapport à la base canonique.

- **Sous espace propre associé à la valeur propre triple** $\lambda_1 = 0$
  $$E(0) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 0\,\vec{x} = \vec{0} \}$$
  On résout l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad C\,X = 0$
  $$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 0$$
  Le sous espace propre $E(0)$ est donc un plan passant par l'origine.
- **Critère de diagonalisation** La multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $n_1 = 3$. Or le sous-espace propre associé $E(0)$ est un plan, ce qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.
  $$n_1 \neq \dim E(\lambda_1) .$$
  L'endomorphisme $f$ n'est donc pas diagonalisable $\Leftrightarrow$ $C$ n'est pas diagonalisable.

(d) Les valeurs propres de $D$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(D-\lambda \mathrm{I}_3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\,(2-\lambda)^2=0$$

D'où les valeurs propres de $D$ et leur multiplicité :

$$\lambda_1=0\,,\quad n_1=1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=2\,,\quad n_2=2$$

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $D$ par rapport à la base canonique.

Soit $E(\lambda)$ le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$E(\lambda) \;=\; \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x})=\lambda\,\vec{x}\,\}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre simple** $\lambda_1=0$

  La valeur propre étant de multiplicité 1, on sait déjà que la dimension du sev associé est 1. Mais comme on veut déterminer la matrice de passage $P$, il est nécessaire de calculer $E(0)$.

$$E(0) \;=\; \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) =\; 0\,\vec{x}=\vec{0}\,\}$$

  On résout l'équation $\;f(\vec{x})=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad D\,X=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

  Géométriquement, chaque équation de ce système est un plan passant par l'origine. L'ensemble des solutions est leur intersection et c'est le sous espace propre $E(0)$.

  Le sous espace propre $E(0)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u}$

$$\vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(0)\;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \mu\in\mathbb{R}$$

- **Sous espace propre associé à la valeur propre double** $\lambda_1=2$

$$E(2) \;=\; \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) =\; 2\vec{x}\,\}$$

  On résout l'équation $\;f(\vec{x})=2\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad D\,X=2X \quad\Leftrightarrow\quad (D-2I_3)X=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad x-y=0$$

  Géométriquement, $E(2)$ est un plan passant par l'origine. On détermine deux vecteurs directeurs linéairement indépendants.

$$\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Critère de diagonalisation**
  - La multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $n_1 = 0$.
    Et le sous-espace propre associé $E(0)$ est la droite $(O, \vec{u})$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension un.
$$n_1 = \dim E(\lambda_1) = 1\,.$$
  - La multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est $n_2 = 1$.
    Et le sous-espace propre associé $E(2)$ est le plan $(O, \vec{v}, \vec{w})$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.
$$n_2 = \dim E(\lambda_2) = 2\,.$$

L'endomorphisme $f$ est donc diagonalisable $\Leftrightarrow$ $D$ est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base formée de vecteurs propres de $f$. La matrice de passage $P$ est la matrice du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Les colonnes de la matrices de passage $P$ sont constituées des composantes des nouveaux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans l'ancienne base de $\mathbb{R}^3$.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Relativement à la base propre $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la matrice de $f$ est diagonale. Elle est constituées des valeurs propres qui définissent la base.
$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f(\vec{u}) & = & 0\,\vec{u} \\ f(\vec{v}) & = & 2\,\vec{v} \\ f(\vec{w}) & = & 2\,\vec{w} \end{array} \right.$$
Alors $D' = P^{-1}\,D\,P$

**Valeurs propres : exercice 10**

Il faut utiliser le critère de diagonalisation :
la matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$ est égale à la dimension du sous espace propre $E(\lambda_i)$ pour tout $i$.

(a) On calcule le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ :
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_3) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 5 & -5 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 10 & 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\,[\,(7-\lambda)\,(-8-\lambda) + 50\,] =$$
$$= (a-\lambda)\,(\lambda^2 + \lambda - 6) = (a-\lambda)\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 3)\,.$$
Les valeurs propres de $A$ sont les solutions de l'équation caractéristique. Donc :
$$\lambda_i \in \{-3\,,\, 2\,,\, a\}$$
On discute en fonction du paramètre $a$ l'ordre de multiplicité des valeurs propres. Déterminer les sous espaces propres uniquement lorsque c'est nécessaire !
$\lambda_i \in \{-3\,,\, 2\,,\, a\}$ : il y a trois cas à discuter.

- $a \notin \{-3\,;\,2\}$ : les trois valeurs propres sont distinctes, elles sont de multiplicité égale à 1 .
  Les sous espaces propres sont des droites de dimension 1. La matrice $A$ est donc diagonalisable.
- $a = -3$ : les valeurs propres sont $\lambda_1 = -3$ et $n_1 = 2$ , $\lambda_2 = 2$ et $n_2 = 1$ .
  La matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si la dimension du sev propre $E(-3)$ est 2.
  Il faut donc déterminer la dimension de ce sous espace, c'est-à-dire résoudre

$$A\,X = -3\,X \quad \Leftrightarrow \quad (A + 3I_3)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z = 0 & (1) \\ 0x + 0y + 0z = 0 & (2) \\ 5x + 5y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z = 0 & (1) \\ 5x + 5y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$

  Le sous espace propre $E(-3)$ est une droite, intersection des plans d'équation (1) et (3). Il est donc de dimension 1.

  La dimension de $E(-3)$ n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. $A$ n'est pas diagonalisable.

- $a = 2$ : les valeurs propres sont $\lambda_1 = -3$ et $n_1 = 1$ , $\lambda_2 = 2$ et $n_2 = 2$ .
  La matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si la dimension du sev propre $E(2)$ est 2.
  Il faut donc déterminer la dimension de ce sous espace, c'est-à-dire résoudre

$$A\,X = 2\,X \quad \Leftrightarrow \quad (A - 2I_3)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + y - z = 0$$

  Le sous espace propre $E(2)$ est un plan de dimension 2, ce qui correspond à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. $A$ est diagonalisable.

(b) On calcule le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ :

$$p(\lambda) \;=\; \det(B - \lambda\,I_3) \;=\; \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -p \\ p+1 & p+3-\lambda & p \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -p \\ -2+\lambda & p+3-\lambda & p \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -p \\ 0 & p-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,(p-\lambda)$$

Les valeurs propres de $B$ sont les solutions de l'équation caractéristique. Donc :

$$\lambda_i \in \{2\,,\,p\}$$

On discute en fonction du paramètre $p$ l'ordre de multiplicité des valeurs propres. Déterminer les sous espaces propres uniquement lorsque c'est nécessaire.
$\lambda_i \in \{2\,,\,p\}$ : il y a deux cas à discuter.

- $p \neq 2$ : les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $n_1 = 2$, $\lambda_2 = p$ et $n_2 = 1$.
  La matrice $B$ est diagonalisable si et seulement si la dimension du sev propre $E(2)$ est 2.
  Il faut donc déterminer la dimension de ce sous espace, c'est-à-dire résoudre

$$B\,X = 2\,X \quad \Leftrightarrow \quad (B - 2I_3)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -p \\ p+1 & p+1 & p \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 3y + pz = 0 & (1) \\ (p+1)x + (p+1)y + pz = 0 & (2) \\ x + y = 0 & (3) \end{array} \right.$$

  $B$ est diagonalisable si et seulement si $E(2)$ est de dimension 2 donc est un plan. Ce qui est le cas si et seulement si $p = 0$.
- $p = 2$ : la seule valeur propre est $\lambda = 2$ et $n = 3$.
  La matrice $B$ est diagonalisable si et seulement si $E(2) = \mathbb{R}^3$.

$$B\,X = 2\,X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 3y + 2z = 0 & (1) \\ 3x + 3y + 2z = 0 & (2) \\ x + y = 0 & (3) \end{array} \right.$$

  Le sous espace $E(2)$ est une droite, intersection des plans d'équations (1) et (3). Ainsi $E(2) \neq \mathbb{R}^3$, $B$ n'est pas diagonalisable.

(c) On calcule le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ :

$$p(\lambda) \;=\; \det(F - \lambda\, I_3) \;=\; \begin{vmatrix} -q-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -q \\ q & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \; (2-\lambda)\,[(-q-\lambda)\,(1-\lambda) + q] \;=\; \lambda(2-\lambda)(\lambda - (1-q))$$

Les valeurs propres de $B$ sont les solutions de l'équation caractéristique. Donc :

$$\lambda_i \in \{0\,,\,2\,,\,1-q\}$$

On discute en fonction du paramètre $p$ l'ordre de multiplicité des valeurs propres. Déterminer les sous espaces propres uniquement lorsque c'est nécessaire.
$\lambda_i \in \{0\,,\,2\,,\,1-q\}$ : il y a trois cas à discuter.

- $q \notin \{-1\,,\,1\}$ : les trois valeurs propres sont distinctes, elles sont de multiplicité égale à 1.
  Les sous espaces propres sont des droites de dimension 1. La matrice $F$ est donc diagonalisable.

- $q=-1$ : les valeurs propres sont $\lambda_1=0$ et $n_1=1$, $\lambda_2=2$ et $n_2=2$.
  La matrice $F$ est diagonalisable si et seulement si la dimension du sev propre $E(2)$ est 2.
  Il faut donc déterminer ce sous espace, c'est-à-dire résoudre

$$F\,X = 2\,X \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rl} x+z=0 & (1) \\ z=0 & (2) \\ -x-z=0 & (3) \end{array}\right.$$

  Le sous espace $E(2)$ est une droite, intersection des plans d'équations (1) et (3). Il est donc de dimension 1. $F$ n'est pas diagonalisable.

- $q=1$ : les valeurs propres sont $\lambda_1=0$ et $n_1=2$, $\lambda_2=2$ et $n_2=1$.
  La matrice $F$ est diagonalisable si et seulement si la dimension du sev propre $E(0)$ est 2.
  Il faut donc déterminer ce sous espace, c'est-à-dire résoudre

$$F\,X = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rl} -x-z=0 & (1) \\ 2y-z=0=0 & (2) \\ +x+z=0 & (3) \end{array}\right.$$

  Le sous espace $E(0)$ est une droite, intersection des plans d'équations (1) et (2). Il est donc de dimension 1. $F$ n'est pas diagonalisable.