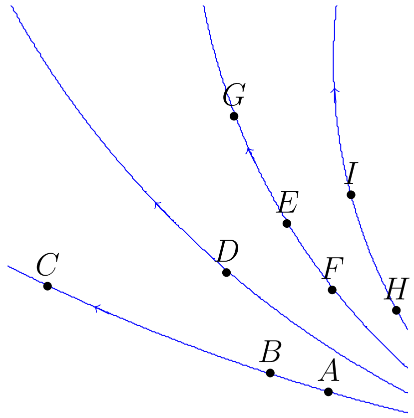
Corrigé 18

Exercice 1

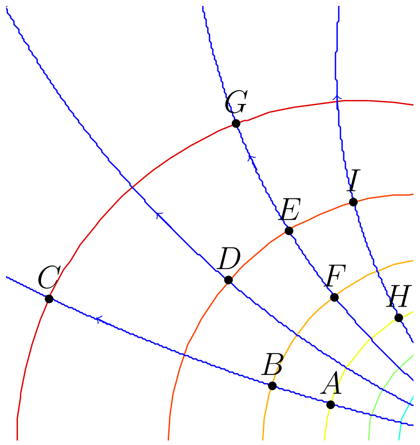
Nous allons exploiter la définition de la tension entre deux points, ainsi que celle du potentiel en un point.

Tout d'abord, il est possible d'indiquer **le sens** du champ électrique :



La tension entre A et B étant positive, en allant de A à B, on "descend" le champ électrique $\vec{E}$.

Esquissons maintenant **les équipotentielles** passant par les points donnés :



Les points A et H se trouvent sur une même équipotentielle (normale aux lignes de champ). De même pour

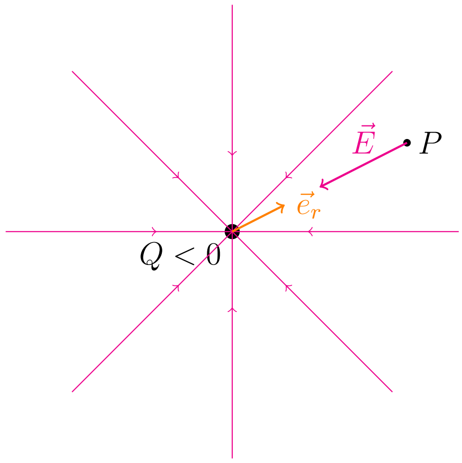
- B et F ,
- D , E et I ,
- C et G .

La différence de potentiel entre B et D est environ $U_{BD} = 2\,\text{V}$. Donc par rapport à D ,

$$\Phi_A = 4\,\text{V},\ \Phi_B = 2\,\text{V},\ \Phi_D = 0\,\text{V},\ \Phi_C = -2\,\text{V}.$$

Exercice 2

(a) Nous savons que le champ électrique produit par la charge ponctuelle Q est radial et dirigé vers $Q < 0$:

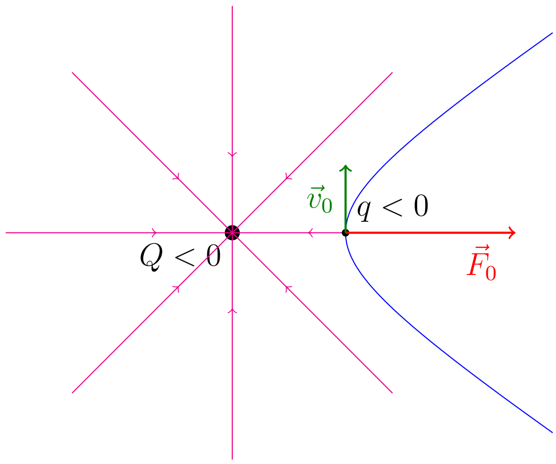


Expression de $\vec{E}$ au point P :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r\,,$$

où r est la distance de la charge au point P.

(b) Intéressons-nous à la trajectoire de l'électron au voisinage de la charge :

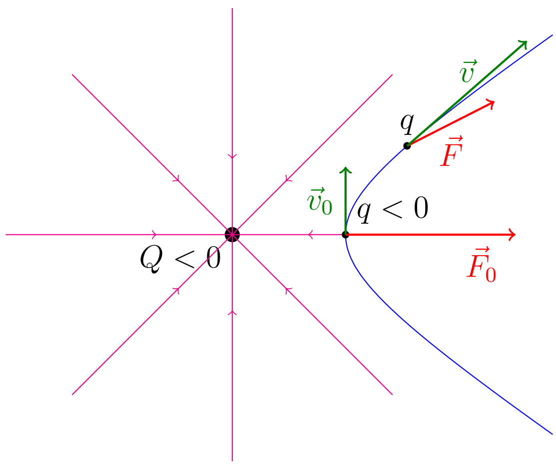


Au plus près de la charge, la vitesse de l'électron est normale au rayon vecteur :

$$\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0\,.$$

L'électron étant négatif, il est ensuite repoussé par la charge Q. Comme effet de la force de Coulomb, la vitesse tend à s'aligner sur le champ électrique (on peut montrer que la trajectoire est une hyperbole).

Il est possible d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le point au plus près de Q et un point atteint ultérieurement :



Pour le point initial à la distance r_0 de Q et un autre point à la distance r, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= qU_{r_0r}\\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{qQ}{2m\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) > v_0^2$$

La vitesse de l'électron augmente donc au fur et à mesure qu'il s'éloigne de Q.

Exercice 3

Il convient de considérer les propriétés du champ électrique dans et au voisinage d'un conducteur en électrostatique.

(a) Faux.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle et plus la courbure est forte, plus le champ électrique est intense et la densité superficielle de charge importante.

(b) Vrai.
Sinon les charges libres (électrons de conduction) subiraient une force et seraient accélérés.

(c) Faux.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle et plus la courbure est forte, plus le champ électrique est intense (effet de pointe).

(d) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle : les lignes de champ (à l'extérieur) lui sont perpendiculaires.

(e) Faux.
Sinon le champ aurait plus d'une direction à l'endroit du croisement.

(f) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle.

(g) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle : la tension entre deux de ses points est nulle.

Exercice 4

Nous allons mettre à profit la loi de Gauss

$$\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{intérieur de } \Sigma} ,$$

en choisissant la surface fermée la plus appropriée à notre problème.

Comme l'objet chargé est une boule uniformément chargée, le champ $\vec{E}$ possède une symétrie radiale et nous allons considérer des surfaces sphériques en guise de surfaces de Gauss Σ. Ainsi, les lignes de champ seront toujours parallèles aux vecteurs “élément de surface” $\overrightarrow{d\Sigma}$, ce qui facilitera grandement le calcul du flux $\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$.

Comme la charge enfermée à l'intérieur de Σ sera différente selon la valeur du rayon r de Σ, il est nécessaire de distinguer au moins deux cas : $r > R$ et $r < R$.

A l'extérieur de la boule, le champ électrique est dû à la totalité de la charge Q. On écrit la loi de Gauss en choisissant une sphère de rayon r, avec $r > R$, en guise de surface fermée, et une charge intérieure $Q_{\text{intérieur de } \Sigma} = Q$:

$$\oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q .$$

Par symétrie (invariance de rotation), le champ électrique $\vec{E}$ est radial. Il est donc en tout point de la surface de Gauss parallèle au vecteur “élément de surface” $\overrightarrow{d\Sigma}$:

$$\oint_{\text{sphère de rayon } r} E \, d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q .$$

Par symétrie, la norme du champ $\vec{E}$, E, ne dépend que de la distance r au centre de la boule. Cette norme est constante sur la surface de Gauss. On peut ainsi mettre E en évidence et le sortir de l'intégrale :

$$E \oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q \,.$$

Comme $\oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma = 4\pi r^2$, il vient finalement

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad \text{avec } r > R \,.$$

Remarquons que l'on retrouve une expression identique à celle du champ électrique produit par une charge ponctuelle Q.

A l'intérieur de la boule, la densité de charge s'écrit

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \,.$$

On utilise à nouveau la loi de Gauss sur une sphère de rayon r ($r < R$), mais pour une charge "incomplète"

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} Q \,.$$

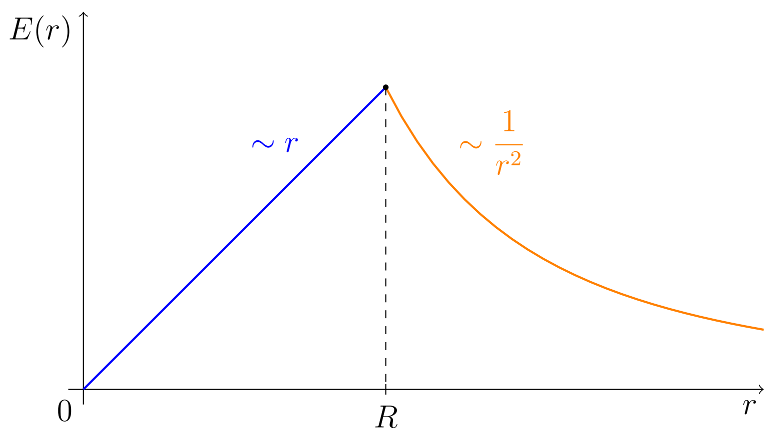
Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
\oint_{\text{sphère de rayon } r} E \, d\Sigma &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
E \oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
E \, 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} Q \,.
\end{aligned}$$

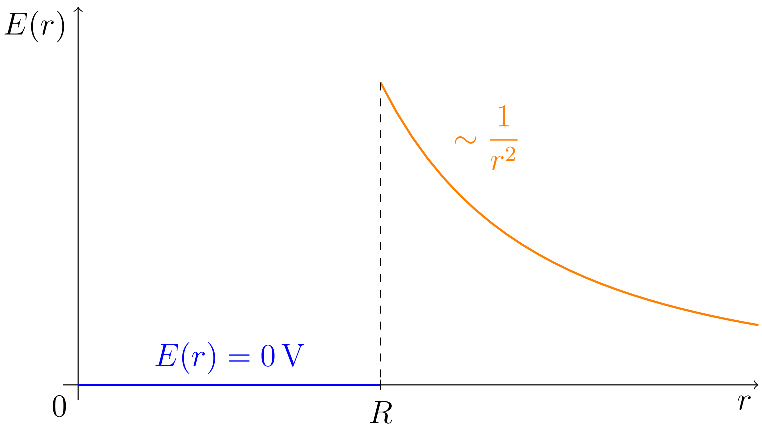
$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad \text{avec } r < R \,.$$

Cette expression est différente de celle du champ électrique produit par une charge ponctuelle Q. Ici, l'intensité de $\vec{E}$ augmente linéairement avec la distance r.

Représentation graphique de l'intensité du champ électrique :



Remarque
Pour une boule *métallique* de rayon R portant une charge Q, le champ électrique se comporterait de la manière suivante :



En effet, en électrostatique le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur doit être nul (sinon les charges mobiles se déplaceraient). La loi de Gauss nous indique alors que la charge doit être intégralement répartie à la surface du conducteur. Le champ à l'extérieur d'une boule métallique est donc identique à celui trouvé pour une boule pleine non métallique lorsque $r > R$.

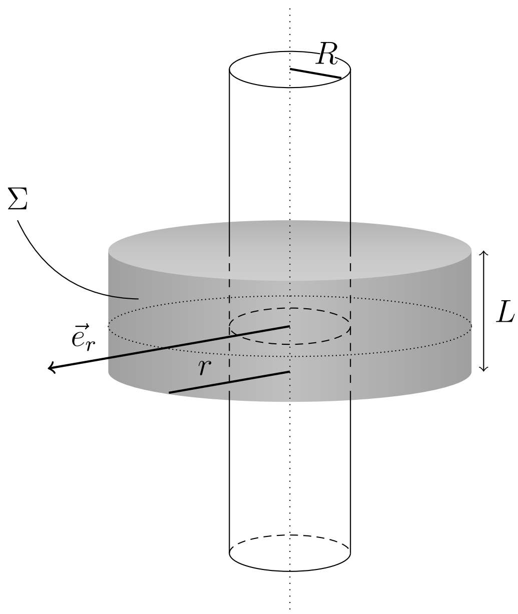
Exercice 5
Nous allons mettre à profit la loi de Gauss

$$\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{intérieur de } \Sigma} \,,$$

en choisissant la surface fermée la plus appropriée à notre problème.
Par symétrie, le champ électrique doit être axial et ne dépendre que de la distance à l'axe du conducteur cylindrique :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r \,.$$

Considérons la surface fermée Σ formée d'un cylindre de même axe que le conducteur cylindrique, de rayon r et de hauteur L et fermé en haut et en bas par deux disques :



Le flux du champ électrique à travers la surface Σ choisie est ainsi

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = E\, 2\pi r L\,.$$

Selon la loi de Gauss,

$$\Psi_\Sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\, 2\pi R L}{\epsilon_0}\,,$$

d'où

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r = \frac{1}{2\pi r L}\frac{\sigma\, 2\pi R L}{\epsilon_0}\,\vec{e}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{R}{r}\,\vec{e}_r\,, \quad \text{avec} \quad r > R\,.$$

A l'intérieur du conducteur, le champ est nul (pas de déplacement de charges (pas de courant).

Remarque
La tension entre un point A ($r_A > R$) et un point B ($r_B > R$) s'écrit

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{r_A}^{r_B} E(r)\,dr = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r\,\Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\frac{r_B}{r_A} = \Phi(r_A) - \Phi(r_B)\,, \end{aligned}$$

où

$$\Phi(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\frac{r}{R}\,, \quad r > R\,.$$

Le potentiel nul est choisi à la surface du conducteur cylindrique.