Semestre d'automne 2020	D. Testerman
Algèbre linéaire pour Microtechnique	**Corrigé 4**

Exercice 1. *Soit $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 9. Déterminer si chacun des ensembles suivants est un sous-espace de $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$.*

(a) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = at^2$ où a est un réel quelconque.

(b) L'ensemble $\{p(t) = a + t^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(c) L'ensemble $\{p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4 \mid c_i$ est un entier naturel pour $1 \leq i \leq 4\}$.

(d) L'ensemble des polynômes dans $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ vérifiant $p(0) = 0$.

Solution 1. (a) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = at^2$ où a est un réel quelconque est le sous-espace de $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ engendré par le polynôme t^2. Il s'agit donc d'un sous-espace. Aussi on peut vérifier les conditions : le polynôme nul appartient à cet ensemble (on prend $a = 0$). Et pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(at^2) + bt^2 = (\lambda a + b)t^2$ qui appartient à l'ensemble.

(b) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = a + t^2$ n'est pas un sous-espace car il ne contient pas le polynôme nul.

(c) L'ensemble de ces polynômes à coefficients entiers n'est pas un sous-espace. Si on multiplie le polynôme t par $\sqrt{2}$ par exemple on ne reste pas dans le sous-ensemble.

(d) L'ensemble des polynômes dans $\mathcal{P}_9(\mathbb{R})$ vérifiant $p(0) = 0$ est un sous-espace.

- (a) Le polynôme nul vérifie cette condition $p(0) = 0$.
- (b) Si $p(0) = 0$ et $q(0) = 0$, alors $(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$. Donc l'ensemble est stable par somme.
- (c) Si $p(0) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αp vérifie aussi la condition puisque $(\alpha p)(0) = \alpha \cdot p(0) = 0$. Donc l'ensemble est stable par la multiplication scalaire.

Exercice 2. *Déterminer si A,B,C,D,E,F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (muni de son addition et de sa multiplication par scalaire usuelles).*

1. $A = \{(x, y, z)|x + 3y - 2z = 4\}$
2. $B = \{(x, y, z)|x + 3y - z = 0\}$
3. $C = \{(x, y, z)|x + y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 1\}$
4. $D = \{(x, y, z)|x + z = 0 \text{ et } x - z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1\}$
6. $F = \{(x, y, z)|x = y = z\}$

Solution 2.

1. Non. $(0, 0, -2), (4, 0, 0) \in A$, mais $(0, 0, -2) + (4, 0, 0) \notin A$
2. Oui. $(0, 0, 0) \in B$ donc B est non vide. Soient $(a, b, c), (a', b', c') \in B$, donc $a + 3b - c = 0 = a' + 3b' - c'$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a que $\lambda(a + 3b - c) + a' + 3b' - c' = \lambda \cdot 0 + 0$. Mais le membre de gauche est égal aussi à $(\lambda a + a') + 3(\lambda b + b') - (\lambda c + c')$. Donc $(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \in B$, ce qui montre que $\lambda(a, b, c) + (a', b', c') \in B$ et B est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
3. Non. $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \in C$, mais $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \notin C$
4. Oui. C'est l'ensemble $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et on vérifie comme dans 2. que cet ensemble est non vide et stable pour l'addition et la multiplication par scalaire.
5. Non. $(0, 1, 0), (1, 0, 0) \in E$, mais $(0, 1, 0) + (1, 0, 0) \notin E$
6. Oui.

Exercice 3. *Soient* $W_1 = \{X \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid X_{1i} = 0,\ pour\ i = 1,2\}$ *et* $W_2 = \{X \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid X_{2i} = 0,\ pour\ i = 1,2\}$. *On admet que* W_j *est un sous-espace vectoriel de* $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, *pour* $j = 1,2$. *Démontrer que* $M_{2\times2}(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$.

Solution 3. On doit montrer que pour toute matrice $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = A_1 + A_2$, où $A_1 \in W_1$ et $A_2 \in W_2$. Supposons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Posons $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors clairement $A_1 \in W_1$, $A_2 \in W_2$ et $A = A_1 + A_2$.

Exercice 4. *Soit* V *un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) et soient* W *et* U *deux sous-espaces de* V.

a) Démontrer que $W \cap U := \{x \in V \mid x \in W \text{ et } x \in U\}$ *est un sous-espace vectoriel de* V.

b) Déterminer si $U \cup W := \{x \in V \mid x \text{ appartient à au moins un des deux ensembles } U \text{ et } W\}$ *est un sous-espace vectoriel.*

Solution 4. a) Tout d'abord, comme $\mathbf{0} \in W$ et $\mathbf{0} \in U$, on a $\mathbf{0} \in W \cap U$. Soient $x, y \in W \cap U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda x + y \in W$ puisque $x, y \in W$ et W est un sous-espace vectoriel de V. De même, $\lambda x + y \in U$ puisque $x, y \in U$ et U est un sous-espace vectoriel de V. Donc $\lambda x + y \in W \cap U$.
Par conséquent $W \cap U$ est un sous-espace vectoriel de V.

b) De manière générale, $U \cup W$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Un contre-exemple est donné en considérant $V = \mathbb{R}^2$ et en prenant U et W deux droites distinctes. En faisant un dessin, on remarque que la somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de W n'est pas dans $U \cup W$.

Exercice 5. *Soient* $A = \{(x,y,z) | x + y + z = 0\}$ *et* $B = \{(x,y,z) | x = y = z\}$. *On admet que* A *et* B *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Solution 5. On a que

$$A \cap B = \{(x,y,z) | x + y + z = 0 \text{ et } x = y = z\} = \{(0,0,0)\}.$$

Il reste à vérifier que $\mathbb{R}^3 \subseteq A + B$; pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ il faut trouver $\vec{v} \in A$ et $\vec{w} \in B$ avec

$$(a,b,c) = \vec{v} + \vec{w}.$$

On pose $\vec{v} = (x, y, -x-y)$ et $\vec{w} = (s,s,s)$ pour des nombres réels x, y, s. L'égalité $(a,b,c) = \vec{v} + \vec{w}$ implique que $s + x = a$, $s + y = b$ et $s - x - y = c$. On déduit que $s = \frac{1}{3}(a+b+c)$ et par conséquent

$$\vec{v} = (a - \frac{1}{3}(a+b+c), b - \frac{1}{3}(a+b+c), -a - b + \frac{2}{3}(a+b+c))$$

et

$$\vec{w} = (\frac{1}{3}(a+b+c), \frac{1}{3}(a+b+c), \frac{1}{3}(a+b+c)).$$

Exercice 6. *On travaille dans un espace vectoriel* V. *Décrire explicitement le sous-espace* $\mathrm{Vect}\,(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k)$ *dans les cas suivants.*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{v}_1 = t$, $\mathbf{v}_2 = t^2$, $\mathbf{v}_3 = t^3$.

Solution 6. 1. On constate d'abord que toute combinaison linéaire $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3$ est un vecteur dont la troisième composante est nulle. On affirme ensuite que tout vecteur $\mathbf{v}$ du plan Oxy se trouve dans le sous-espace engendré par ces trois vecteurs. En effet le système

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

a une solution pour tout $v = (x, y, o)$. On conclut que $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est le plan horizontal Oxy dans $\mathbb{R}^3$.

2. Une combinaison linéaire $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 = t(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ est un polynôme de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dont le terme constant est nul. De plus, comme α, β, γ sont arbitraires, tout polynôme de degré au plus 3 dont le terme constant est nul est une telle combinaison linéaire. Donc le sous-espace engendré par t, t^2 et t^3 est le sous-espace des polynômes qui sont multiples de t.

Exercice 7. *(a) Soient les vecteurs*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\vec{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$?*
2. *Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans la combinaison linéaire ?*

(b) Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Solution 7. Tout élément de l'espace engendré par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ est de la forme

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des reéls. Le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite :

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Noter que c'est le même que le système d'équations :

$$4a_1 + 3a_2 = 3$$
$$4a_1 + 2a_2 = 10$$
$$2a_1 + 3a_2 = h$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h-5 \end{pmatrix} \sim_{L_3 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix} \sim_{(L_1 - L_2) \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix}$$

On déduit que le système possède une solution si et seulement si $h = -9$ et ensuite on a $a_1 = 6$, $a_2 = -7$.

(b) Pour voir si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A, on construit une nouvelle matrice $B = [A \quad \overrightarrow{v}]$, alors la forme échelonnée réduite de B montre que

$$\overrightarrow{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et donc $\overrightarrow{v}$ est bien dans ce plan.

Exercice 8. *(a) On se donne*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

(b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Solution 8. (a) On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1, 2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24. On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k.

(b) On calcule les deux produits matriciels MN et NT. On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$. Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en “divisant par M”, le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Exercice 9. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que l'espace des lignes de A est égal à* $\mathrm{Vect}\left((1, 0, 0, 0), (0, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\right)$.
2. *Montrer que l'espace des colonnes de A est égal à $\mathbb{R}^3$.*

Solution 9.

1. D'abord on montre que $W := \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0, 0), (0, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\right)$ est inclus dans l'espace des lignes de A.

   Appelons L_i la i-ème ligne de A (vu comme vecteur dans $\mathbb{R}^4$). On a $L_1 - L_2 - 4L_3 = (1, 0, 0, 0)$, $L_2 = (0, 2, 3, 0)$ et $L_3 = (0, 0, 0, 1)$. Donc les trois vecteurs qui engendrent linéairement W appartiennent à l'espace des lignes de A et donc W est bien inclus dans l'espace des lignes de A.

   Maintenant on montre que $L_i \in W$ pour $i = 1, 2, 3$. On a $L_1 = (1, 0, 0, 0) + (0, 2, 3, 0) + 4(0, 0, 0, 1)$, $L_2 = (0, 2, 3, 0)$ et $L_3 = (0, 0, 0, 1)$. On déduit que l'espace des lignes de A est inclus dans W. Cette deuxième inclusion donne le résultat.
2. Ici il suffit de voir que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ appartiennent tous les trois à l'espace des colonnes de A :

   $(1, 0, 0)$ est la première colonne de A. Si C_i est la i-ème colonne de A, on a $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(C_2 - 2C_1)$ et $(0, 0, 1) = C_4 - 4C_1$.

Exercice 10. *Vrai-faux*

1. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et B une matrice échelonnée ligne équivalente à A. Alors B possède n pivots.*
2. *Soit A une matrice inversible et B une matrice ligne équivalente à A. Alors B est inversible.*
3. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si A est ligne équivalente à la matrice identité.*
4. *Soit A, B des matrices telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles.*
5. *Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles.*
6. *Soit A une matrice inversible. Alors le système d'équations linéaires $AX = b$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ possède au moins une solution.*
7. *Soit A une matrice inversible. Alors il existe un système d'équations linéaires $AX = b$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, qui possède une infinité de solutions.*

Solution 10.

1. Vrai, critère d'inversibilité : A est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ possède une solution unique et un tel système possède une solution unique si et seulement si la forme échelonnée réduite de A possède n pivots. Toute matrice ligne équivalente à A a la même forme échelonnée réduite que A et donc aussi n pivots.
2. Vrai : les deux matrices sont ligne équivalente à la matrice identité.
3. Vrai : comme ci-dessus, la forme échelonnée réduite de A est la matrice identité si et seulement si A est inversible.
4. Faux, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Vrai, critère d'inversibilité dans §2.7.
6. Vrai. On résout pour X : $A^{-1}AX = A^{-1}b$ et donc $X = A^{-1}b$ est une solution (l'unique solution) du système.
7. Faux : A inversible implique qu'il existe une solution unique, notamment $X = A^{-1}b$.

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Soit A une matrice $n \times n$ telle que $2A^2 + 2A + I = 0$. Montrer que A et inversible et que $A^{-1} = -2A - 2I$.*

Solution 11. On a $2A^2 + 2A + I = 0$. On cherche à montrer qu'il existe une matrice $n \times n$ B telle que $AB = I$.

Mais on a $2A^2 + 2A = -I$ et donc $-2A^2 - 2A = I$ et on factorise à gauche pour obtenir $A(-2A - 2I) = I$. Par un des critères d'inversibilité donné dans le cours, cela suffit pour montrer que A est inversible et que son inverse est égal à $-2A - 2I$.

Exercices du cours

Exercice 12. *Dans chaque cas, déterminer si W est un sous-espace vectoriel de l'espace V.*

a) $W \subseteq V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $W = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid x^2p''(x) + xp'(x) = p(x)\}$. *(Au cas où W est non vide, donner un polynôme non nul appartenant à W.)*

b) $W \subseteq V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a + b)(c + d) = 0\}$

c) $W \subseteq V = M_{n\times m}(\mathbb{R})$, *avec* $n, m \geq 2$, $W = \{X \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0$ *pour tout* $i \geq j\}$. *(Au cas où W est non vide, donner une matrice non nulle appartenant à W.)*

d) $W \subseteq V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $W = \{X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid X_{11} > 0\}$.
e) $W \subseteq V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$.

Solution 12. a) On a que W est un sous-espace vectoriel de V. Montrons d'abord que W est non-vide. Soit $q(x) = x$. Alors

$$x^2 q''(x) + xq'(x) = x^2 \cdot 0 + x \cdot 1 = x = q(x),$$

et donc $q(x) \in W$. Soient $p, q \in W$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} x^2(\lambda p + q)''(x) + x(\lambda p + q)'(x) &= x^2(\lambda p''(x) + q''(x)) + x(\lambda p'(x) + q'(x)) \\ &= \lambda x^2 p''(x) + \lambda x p'(x) + x^2 q''(x) + xq'(x) \\ &= \lambda p(x) + q(x) = (\lambda p + q)(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda p + q \in W$ (la première égalité est une conséquence de la linéarité de la dérivation d'une fonction, l'avant-dernière égalité est vérifiée car p et q appartiennent à W). Par conséquent W est un sous-espace vectoriel de V.

b) Dans ce cas, W n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, les vecteurs $(1, -1, 1, 0)$ et $(1, 2, 0, 0)$ sont dans W, mais leur somme $(2, 1, 1, 0)$ n'appartient pas à W.

c) On démontre que W est un sous-espace vectoriel de V. Premièrement, la matrice nulle appartient à W. Soient $A, B \in W$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda A_{ij} + B_{ij}$. Or, comme $A_{ij} = 0$ et $B_{ij} = 0$ si $i \geq j$, on a $(\lambda A + B)_{ij} = 0$ si $i \geq j$. Ainsi $\lambda A + B \in W$. Donc W est un sous-espace vectoriel de V. L'espace W comprend la matrice dont la première ligne est $0\ 0\ \cdots\ 0\ 1$ et toutes les autres lignes sont nulles.

d) On remarque que W n'est pas un sous-espace vectoriel de V. En effet, la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à W. Mais $(-1)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ne vérifie pas $((-1)X)_{11} > 0$, et donc $(-1)X \notin W$. Note : on peut aussi remarquer que la matrice nulle n'appartient pas à W.

e) On a que W n'est pas un sous-espace vectoriel de V. En effet, $(1, \ldots, 1) \in W$ et $\pi \in \mathbb{R}$. Mais $\pi(1, \ldots, 1) = (\pi, \ldots, \pi) \notin W$, puisque $\pi \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 13. *Calculer l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{bmatrix},$$

puis utiliser le résultat précédent pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

Solution 13. On échelonne la matrice $[A \mid I_2] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ -6 & 13 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour arriver à la forme échelonnée réduite $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme $A\overrightarrow{z} = \overrightarrow{b}$, avec

$$\overrightarrow{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\overrightarrow{z} = A^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $x = 15$ et $y = 7$.
