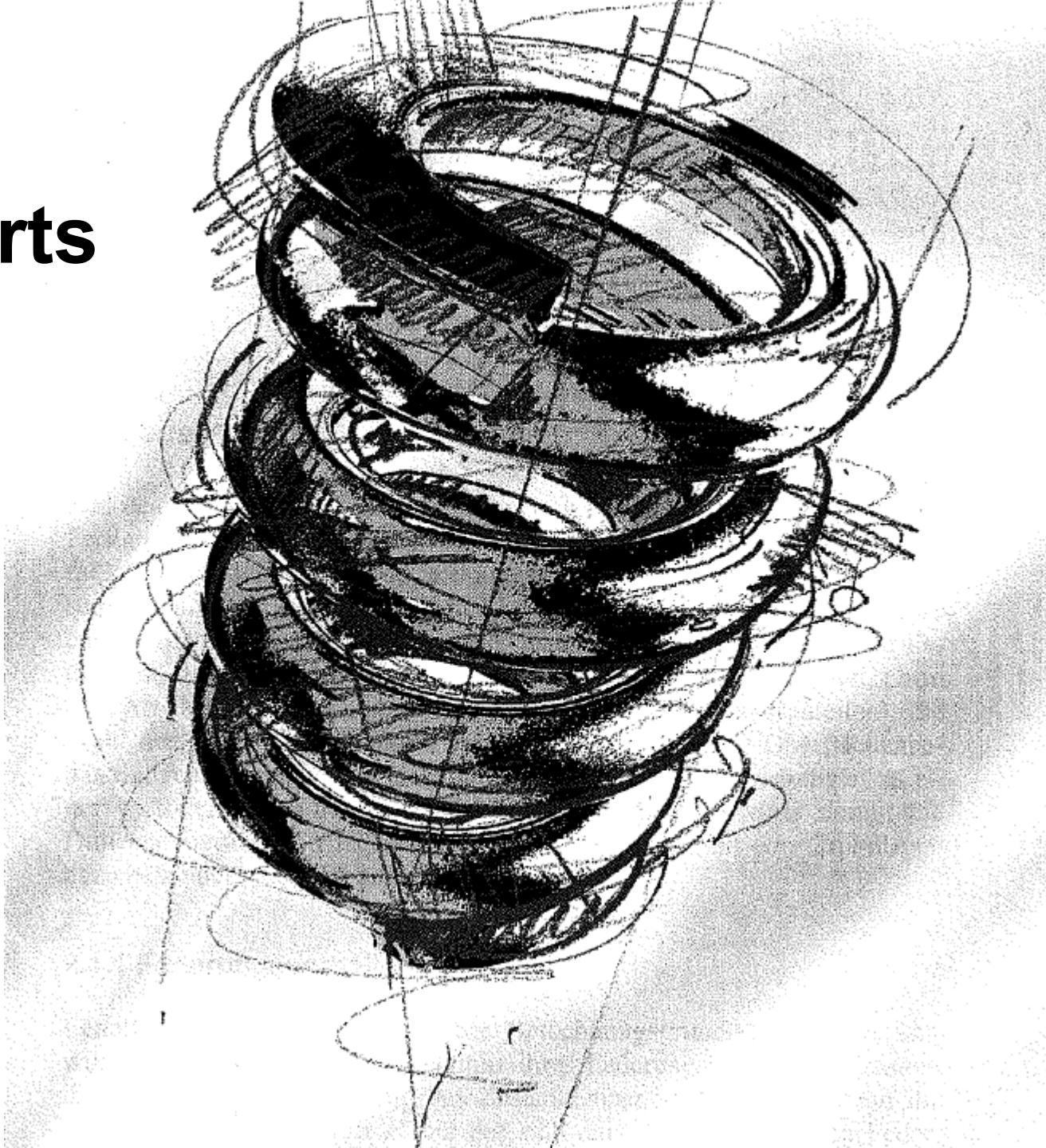


Ressorts



Simon Henein

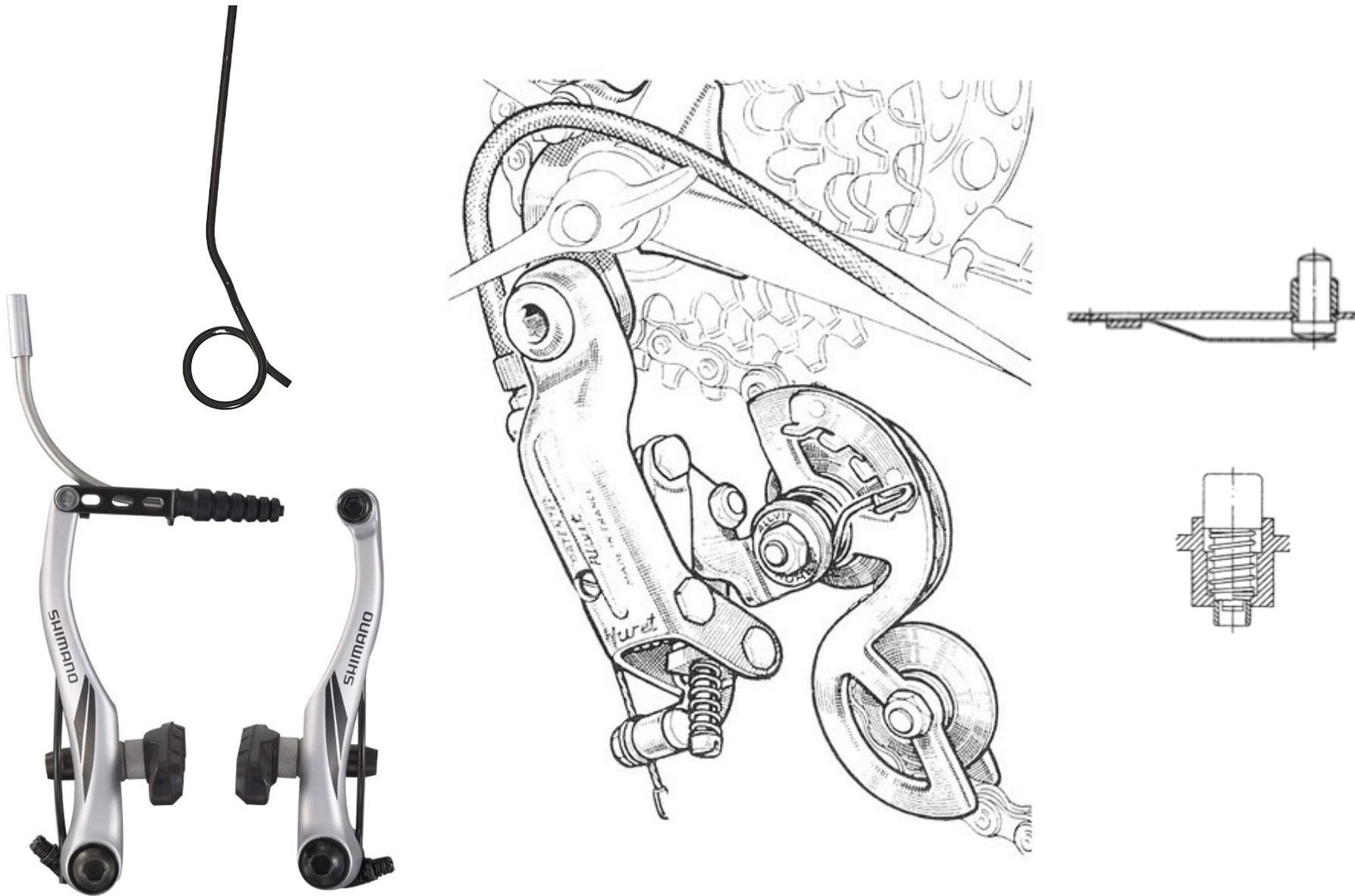
Instant-Lab
IGM – STI – EPFL
Nov. 2022

Fonctions typiques des ressorts

- Exercer une force précise F sur une pièce d'un mécanisme
 - Force constante, e.g. force de précharge de roulements à billes
 - Force qui est une fonction du déplacement
 - Fonction linéaire (rigidité constante k), e.g. ressort d'un oscillateur harmonique
 - Fonction non-linéaire, e.g. bistables
- Stocker de l'énergie W sous forme élastique et la restituer
 - Exemple: barillet de montre mécanique
- Filtrer les vibrations entre des pièces mécaniques
 - Exemple: Isolation sismique, suspension de véhicule

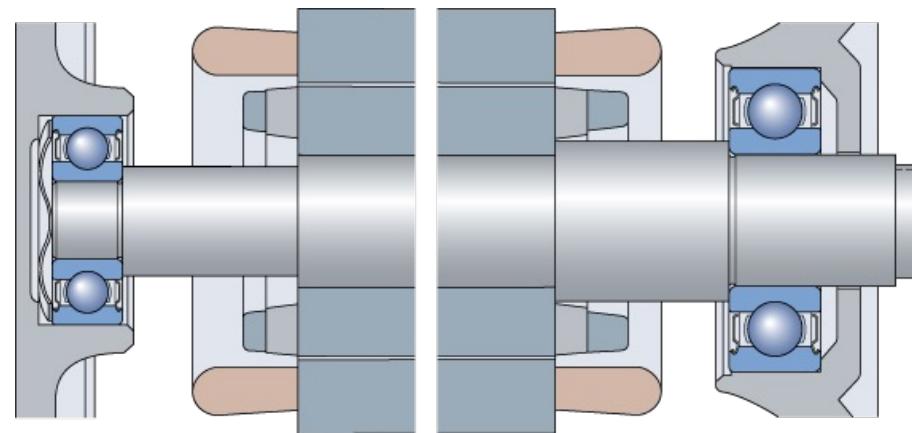
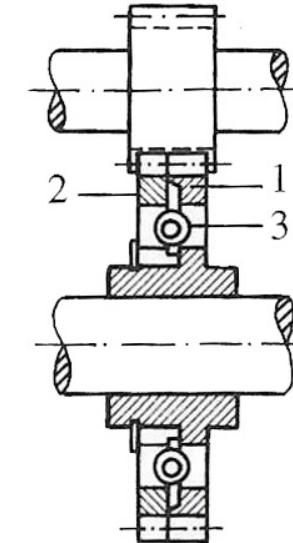
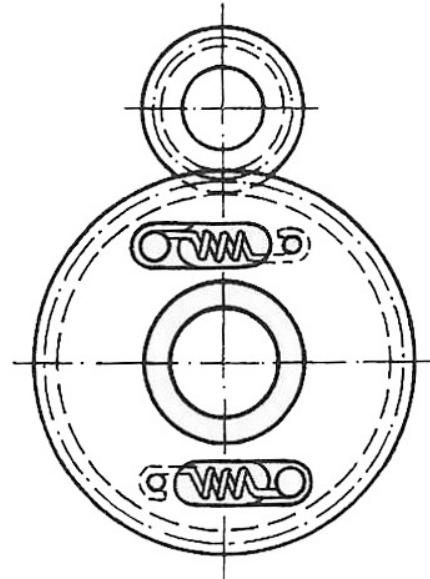
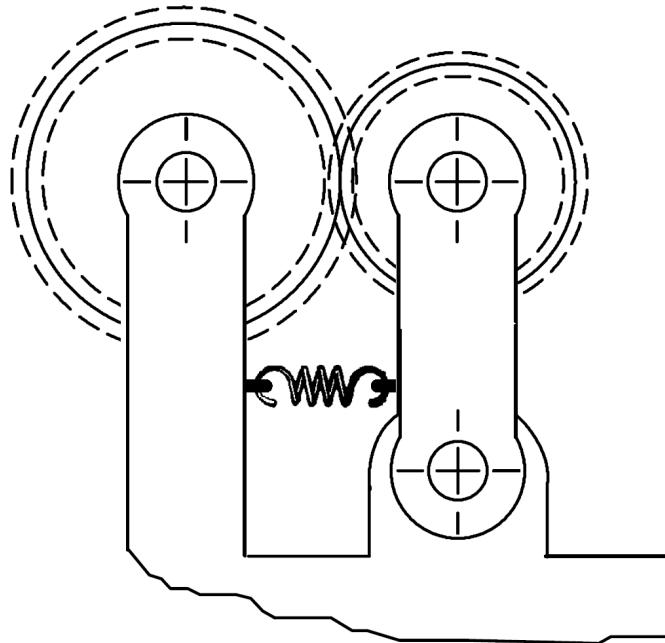
Exercer une force F « constante »

Exemples de ressorts de rappel



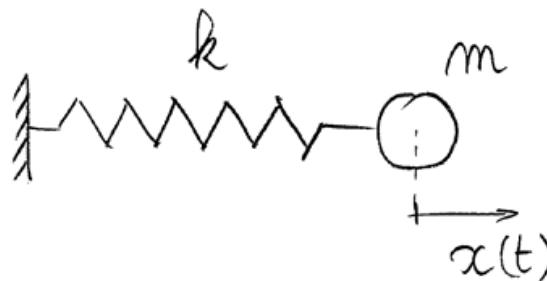
Exercer une force F « constante »

Exemples de ressorts de précharge



Exercer une force F proportionnelle au déplacement x

Exemples de l'oscillateur harmonique



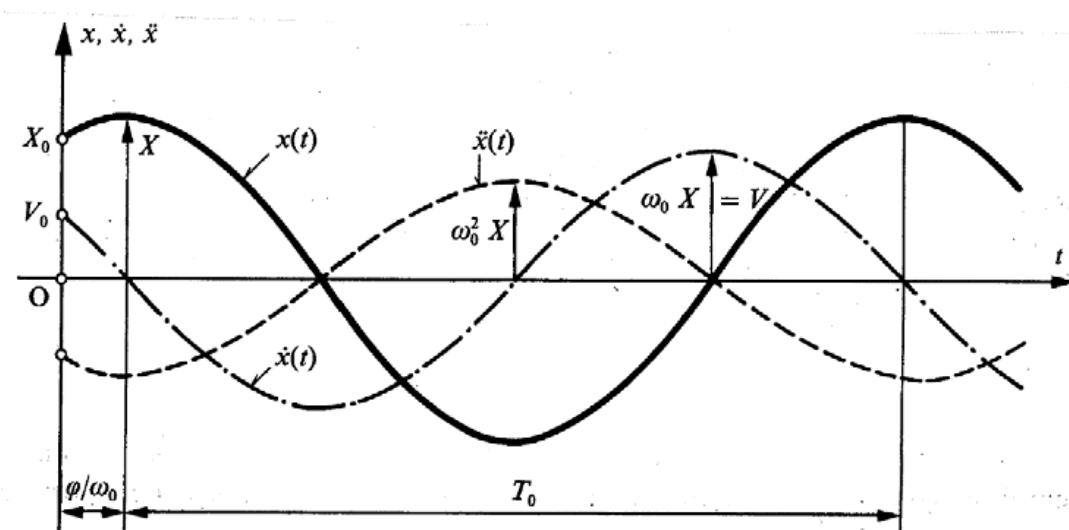
Equation du mouvement: $m\ddot{x} = -kx$

Position: $x(t) = X \cos(\omega_o t + \varphi)$

Pulsation propre: $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s)

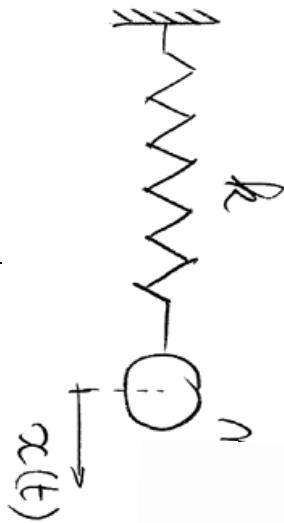
Fréquence propre: $f_o = \frac{1}{2\pi} \omega_o$ (Hz)

Période: $T = \frac{1}{f_o}$ (s)



Remarque: Si la rigidité est constante (caractéristique du ressort parfaitement linéaire) et si l'amortissement est nul, alors la fréquence propre est indépendante de l'amplitude des oscillations. Ce type d'oscillateurs est utilisé, par exemple, comme base de temps dans les montres mécaniques.

Relation entre flèche sous gravité et fréquence propre



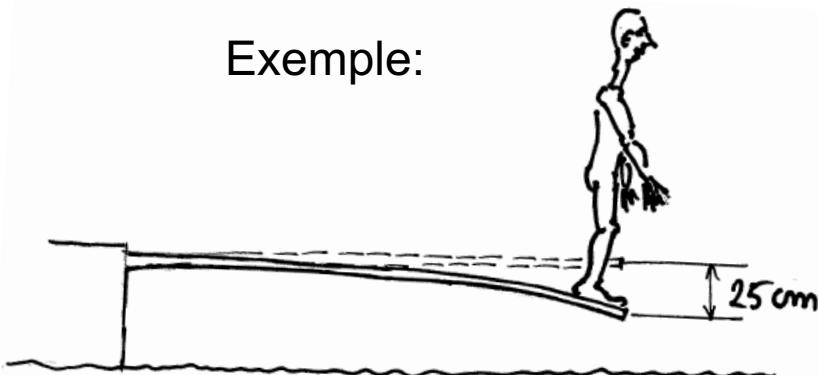
Flèche statique sous gravité:

$$x_0 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x_0}$$

Fréquence propre: $f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_0}} \cong \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Approximation: $g \cong \pi^2$

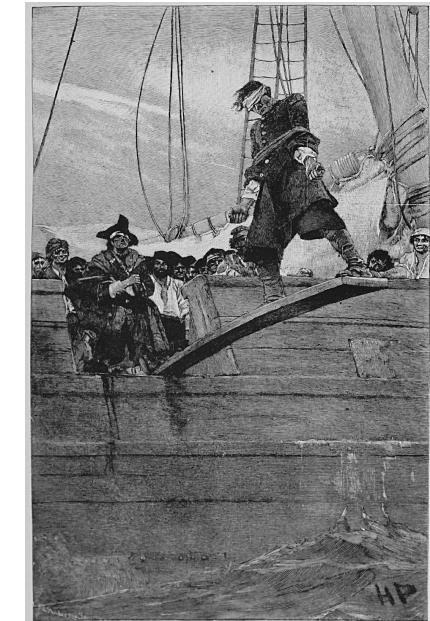
Exemple:

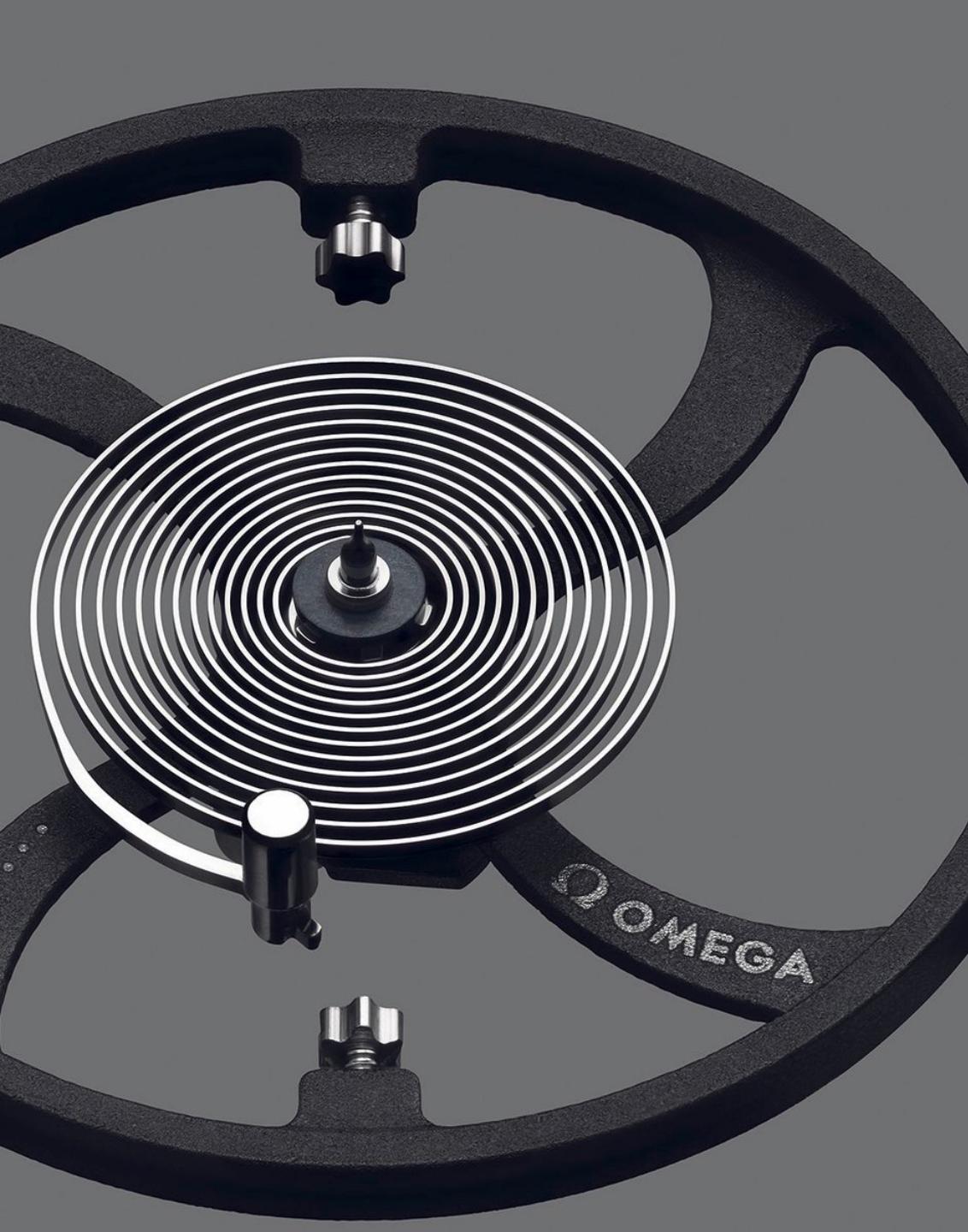


$$f_o \cong \frac{1}{2\sqrt{0.25}} = 1 \text{ Hz}$$

Valeurs typiques :

f_0	1 Hz	10 Hz	100 Hz	1000 Hz
x_0	25 cm	2.5 mm	25 μm	0.25 μm





Oscillateur harmonique

Exemple du balancier spiral de montre mécanique utilisé comme base de temps:

Ressort en silicium monocristallin avec couche d'oxyde permettant de compenser les effets thermiques sur la rigidité angulaire.

Ressorts de stockage d'énergie: exemple de l'arc

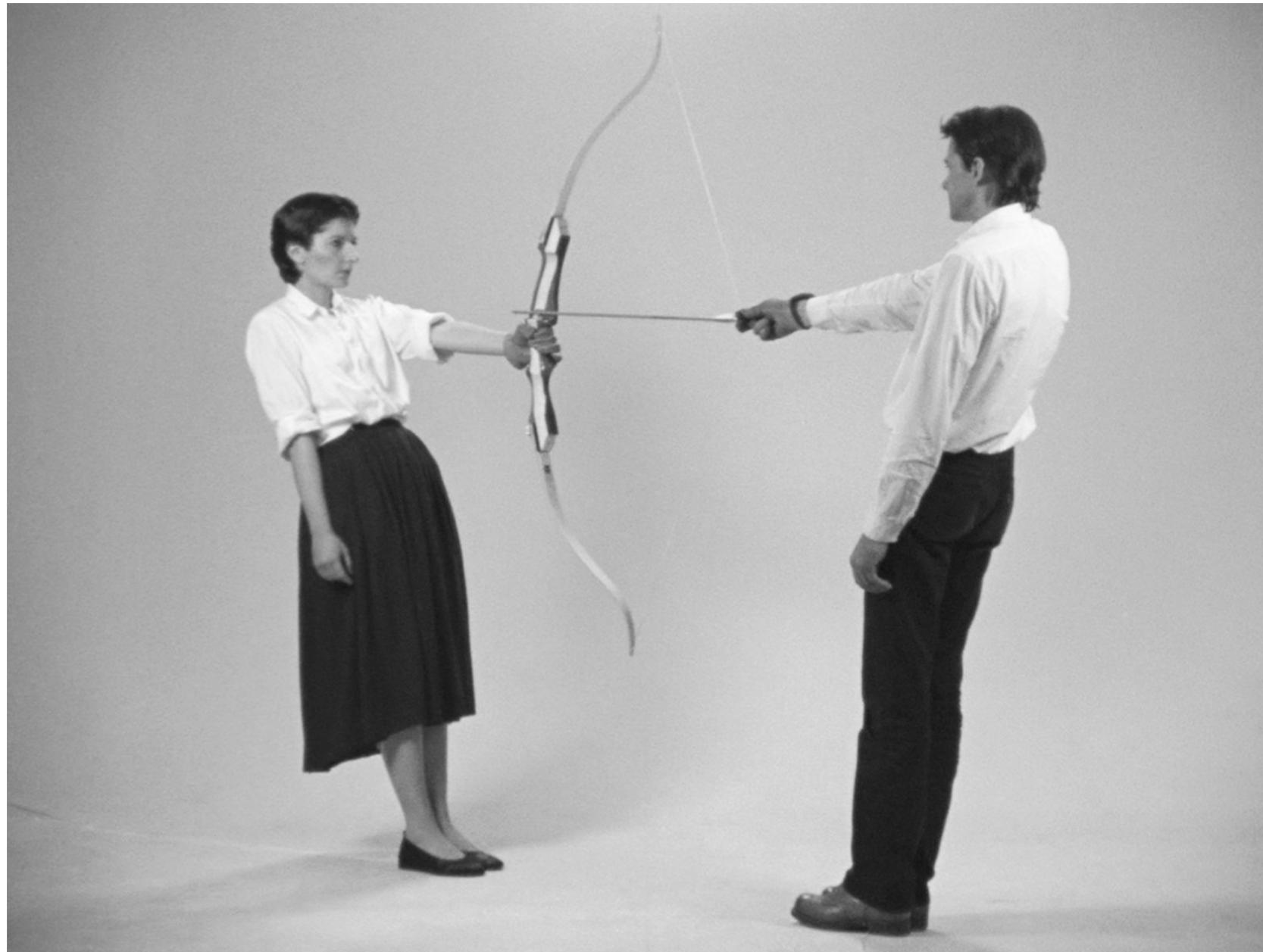


Peinture rupestre néolithique (Espagne)



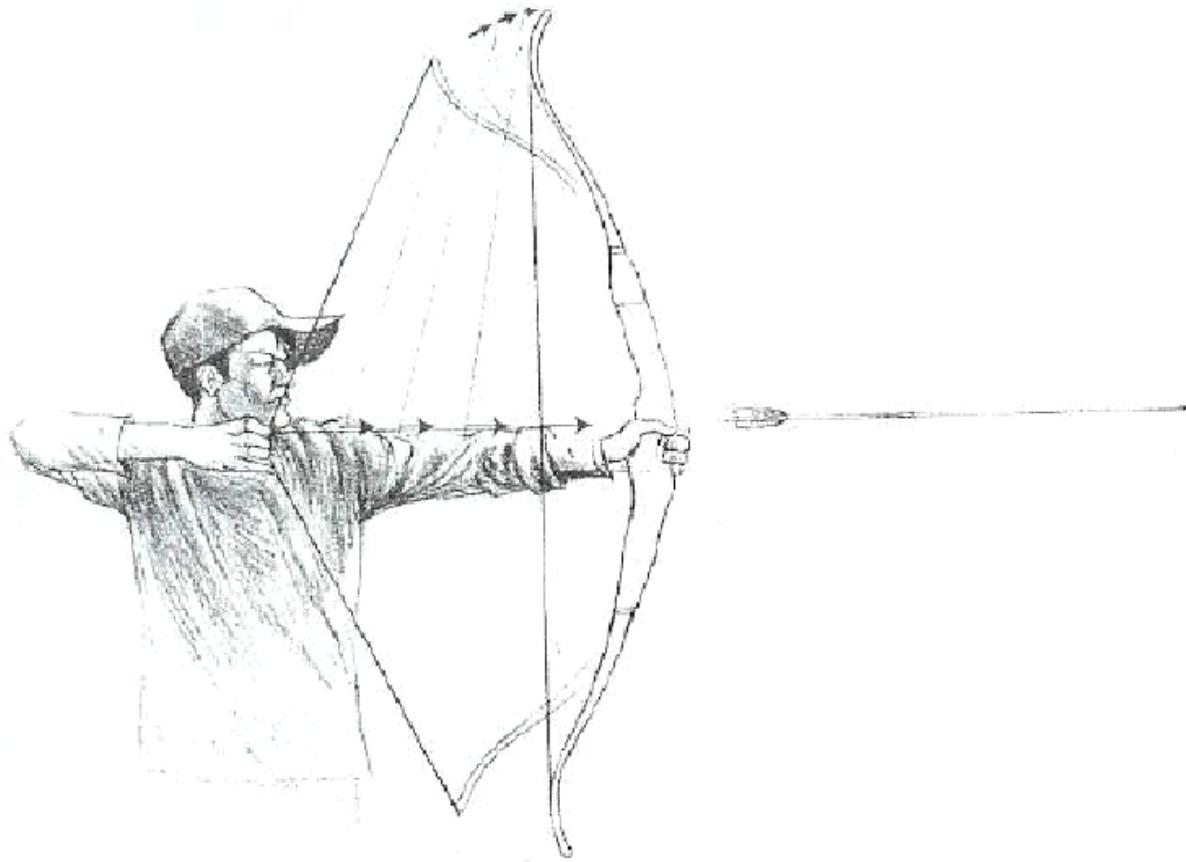
Trésor de Toutankhamon (-1300)

Exemple de l'arc



Marina Abramovic: performance art

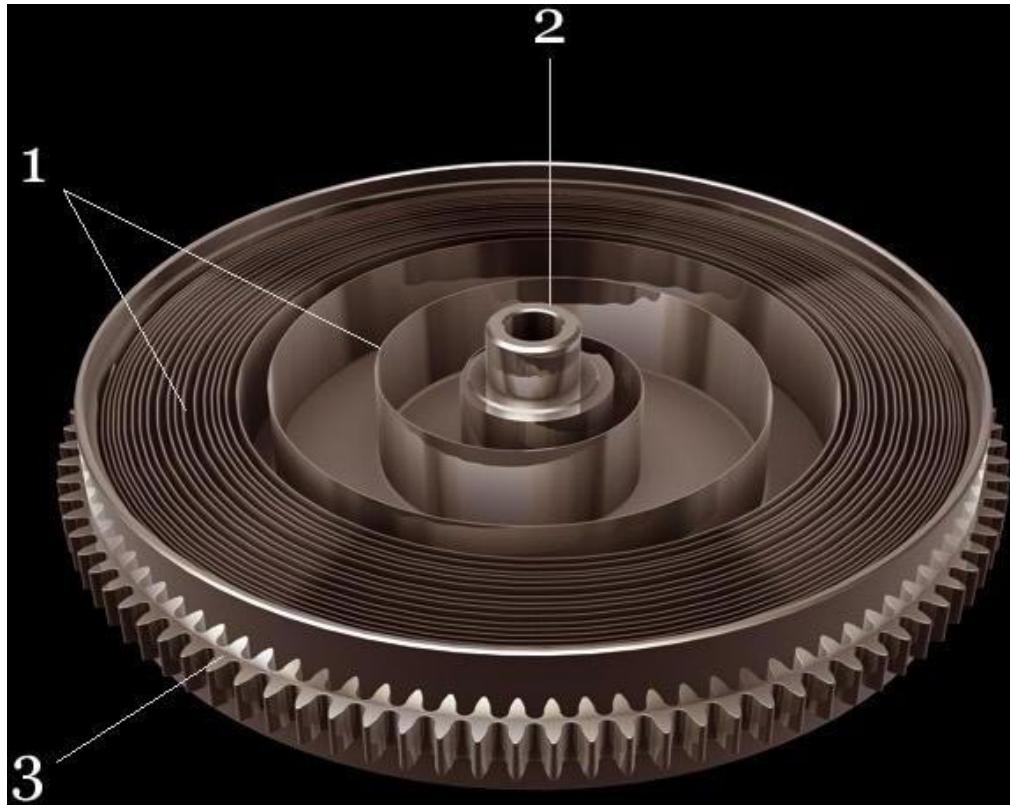
Exemple de l'arc: diagramme des forces



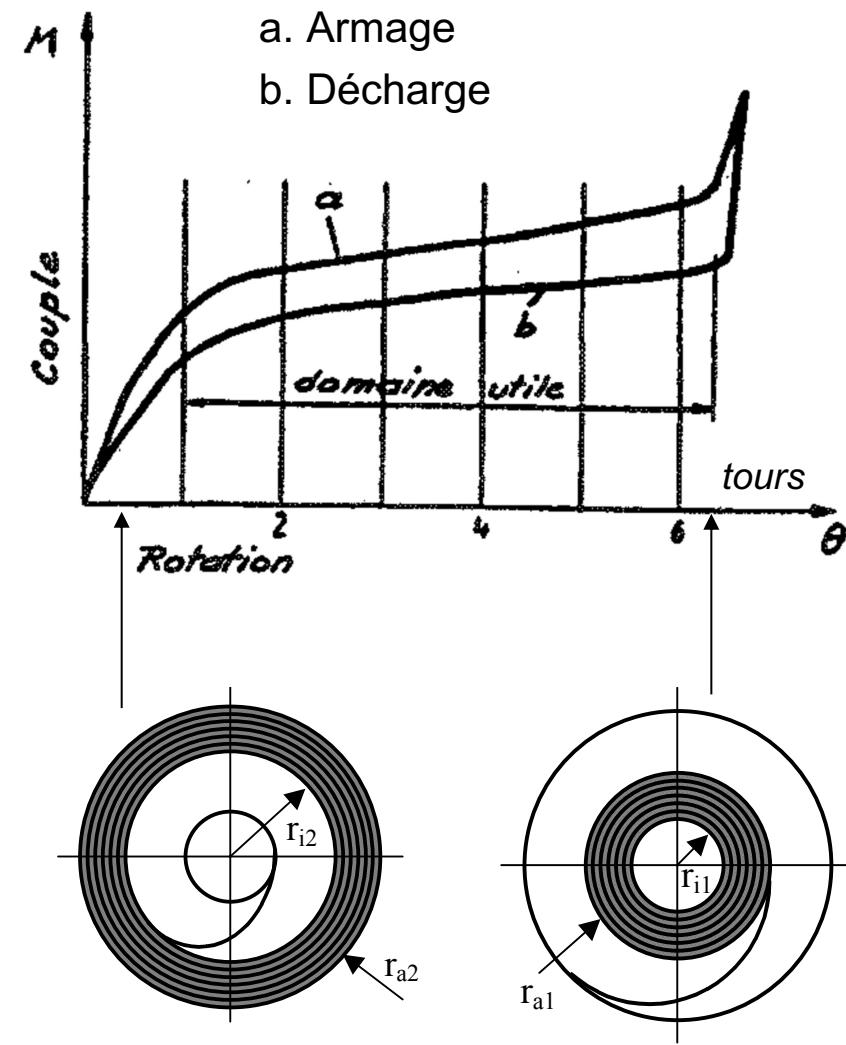
Principe:

1. Stockage d'énergie élastique dans l'arc soumis à la flexion
2. Restitution de l'énergie potentielle élastique sous forme d'énergie cinétique dans la flèche.

Ressorts de stockage d'énergie: exemple du barillet

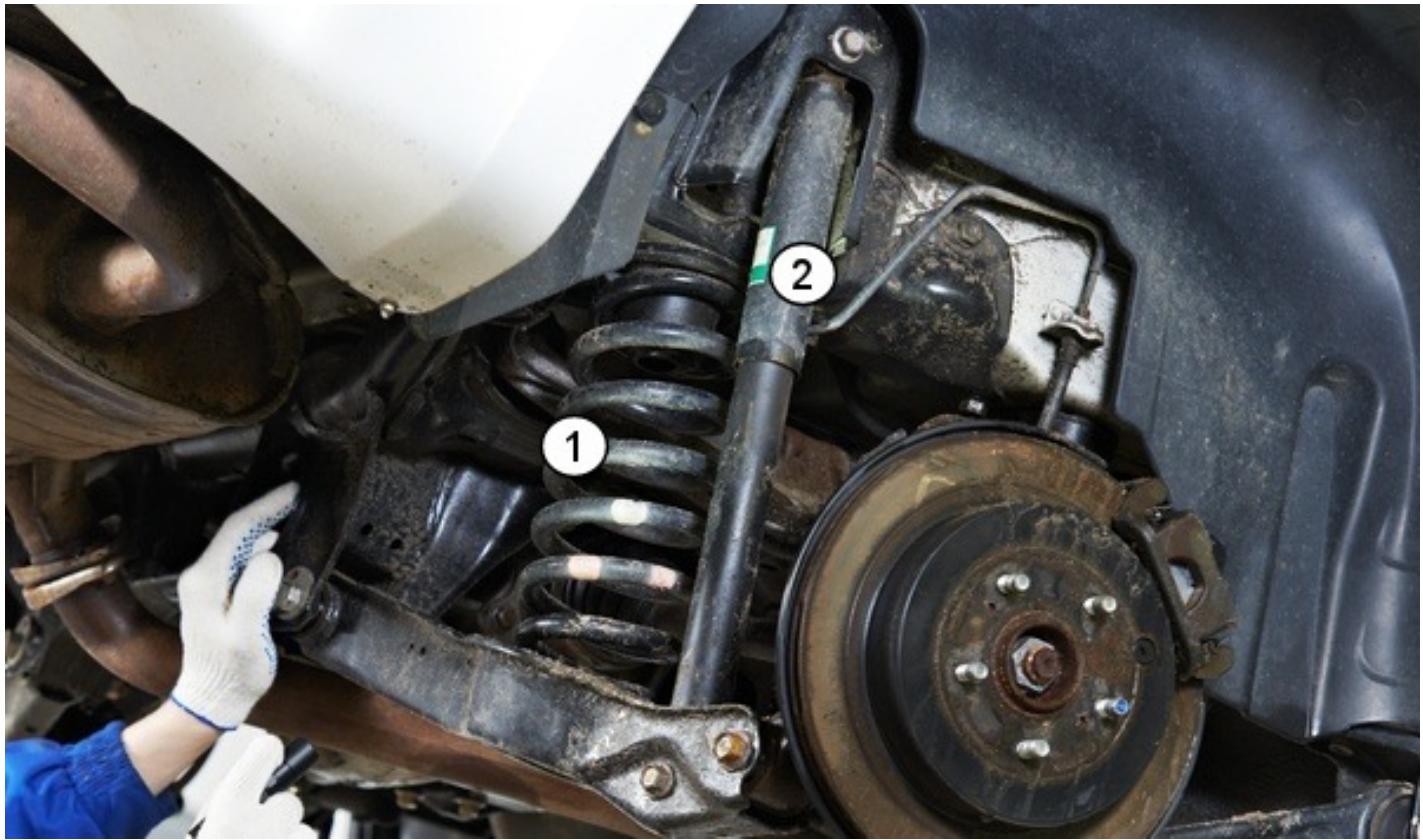


1. Ressort de barillet
2. Arbre de barillet (remontage)
3. Barillet



Ressort utilisé pour isolation vibratoire

Exemples

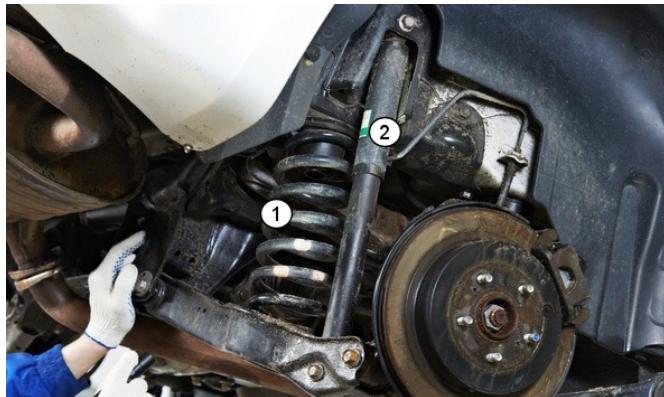
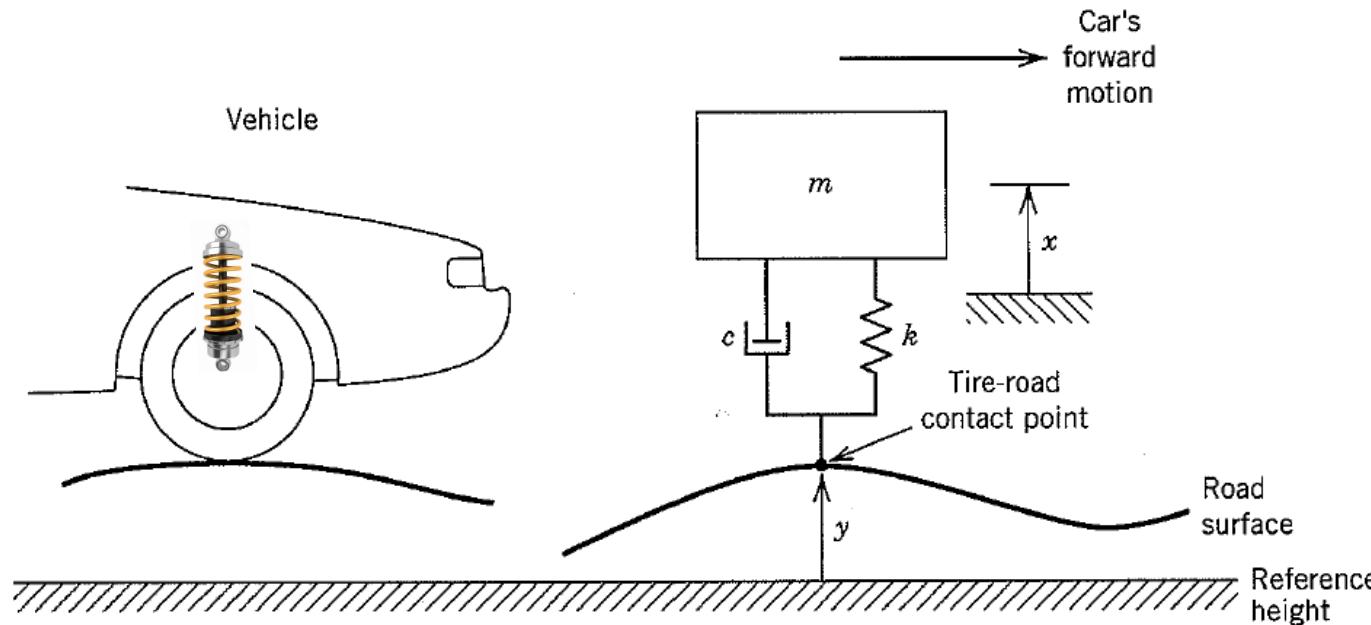


Suspension de véhicule

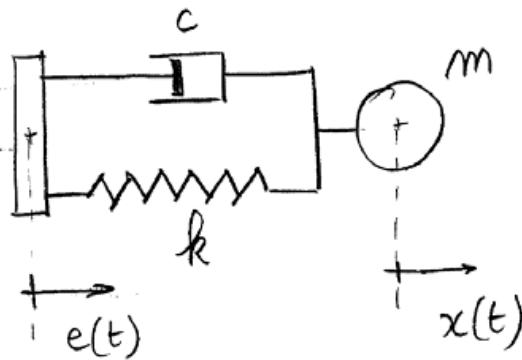
1. Ressort hélicoïdal
2. Amortisseur

Ressort utilisé pour isolation vibratoire

Exemple: suspension de véhicule



Suspension de véhicule
1. Ressort hélicoïdal
2. Amortisseur



Excitation: $e(t) = E \cos(\omega t)$

Equation du mouvement:

$$m\ddot{x} = -k(x - e) - c(\dot{x} - \dot{e})$$

$$\text{Pulsation relative: } \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{Amortissement relatif: } \eta = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Facteur d'amplification dynamique:

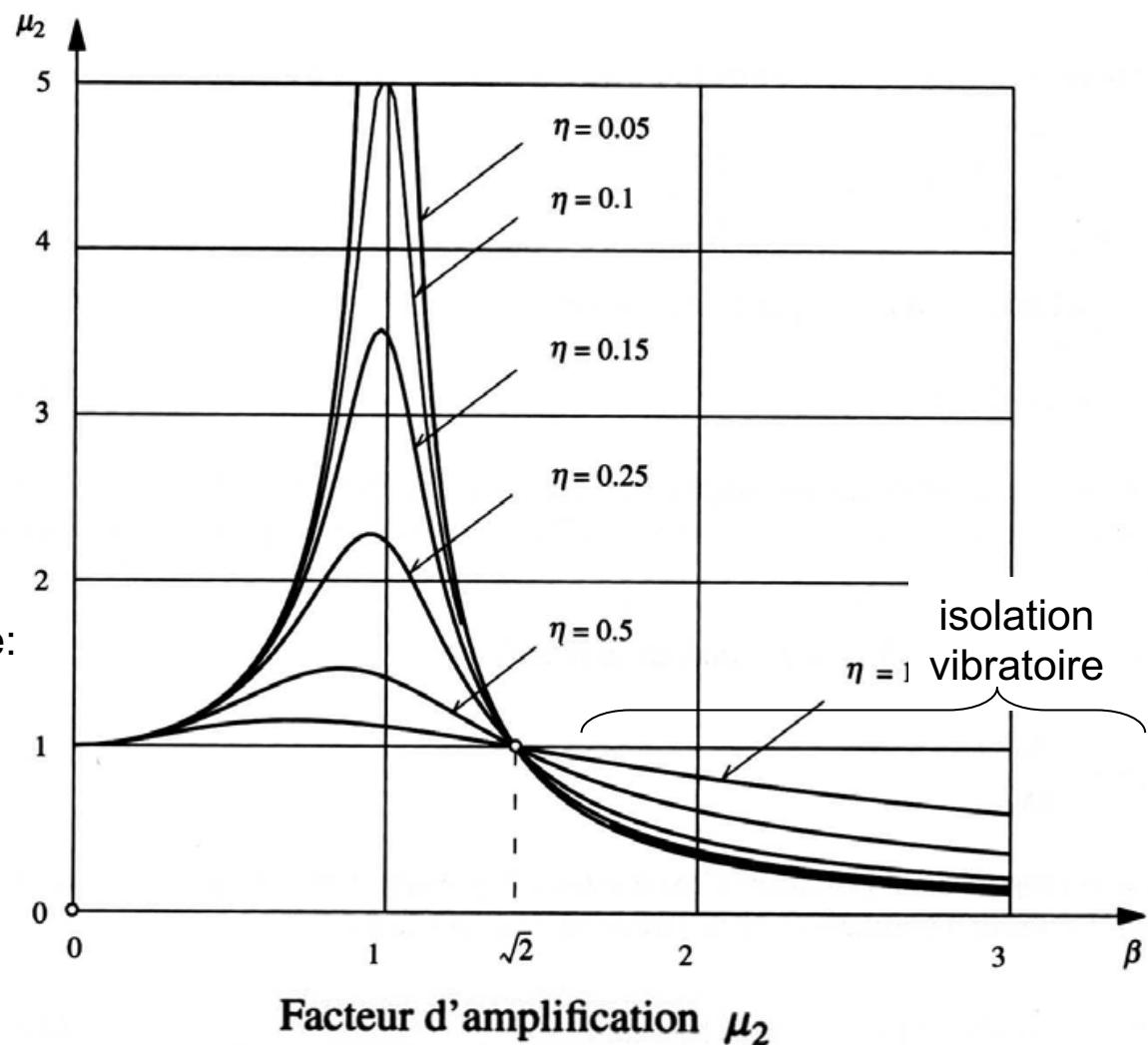
$$\mu_2 = \frac{X}{E} = \frac{\sqrt{1+4\eta^2\beta^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

Isolation vibratoire en décibels:

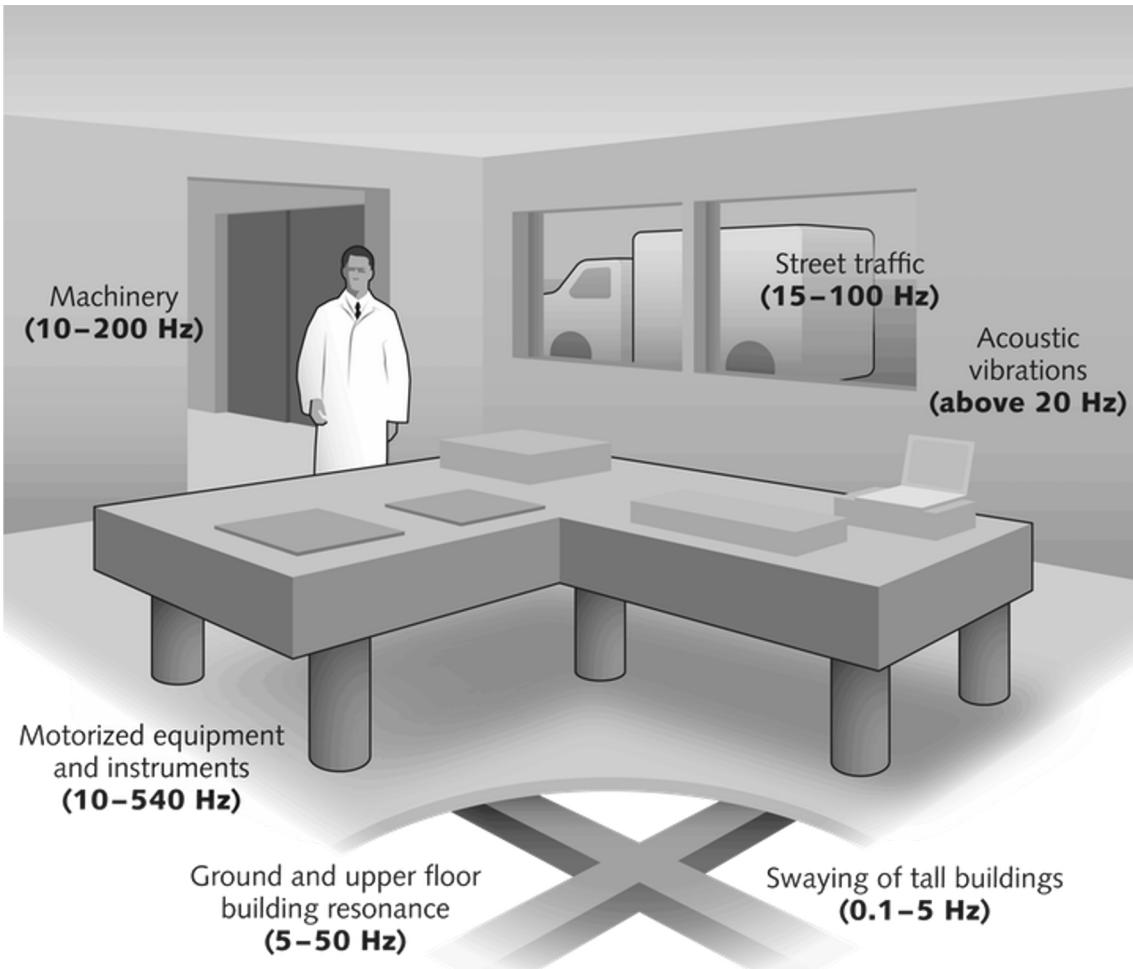
$$\mu_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{X}{E} \right) ; \quad \frac{X}{E} = 10^{(\mu_{dB}/20)}$$

Isolation vibratoire

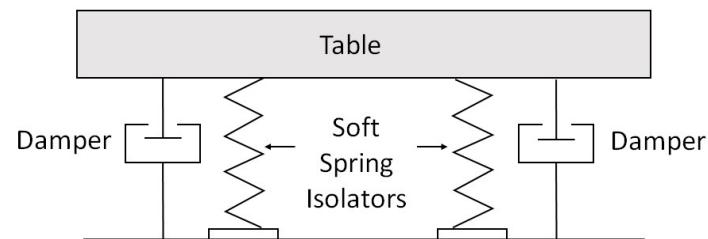
Exemple de l'oscillateur élémentaire
excité par la base



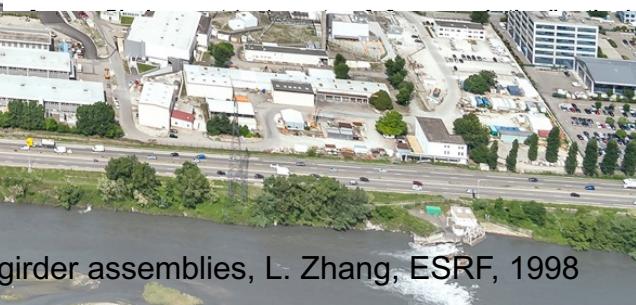
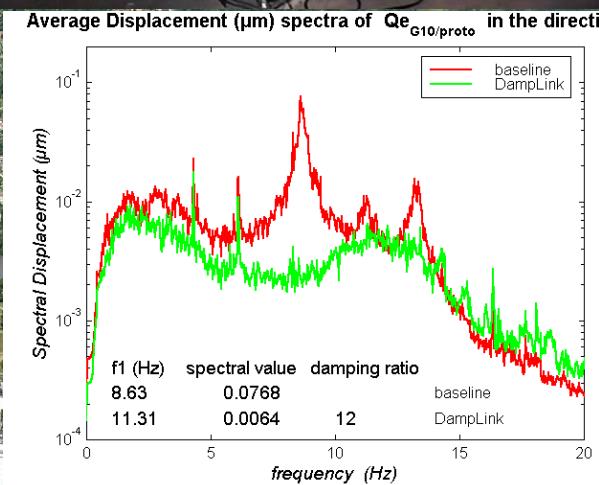
Ressorts utilisés pour réaliser une isolation vibratoire



Appareil de précision posé sur un sol qui vibre



Exemple: Poutrelle du synchrotron ESRF (Grenoble)

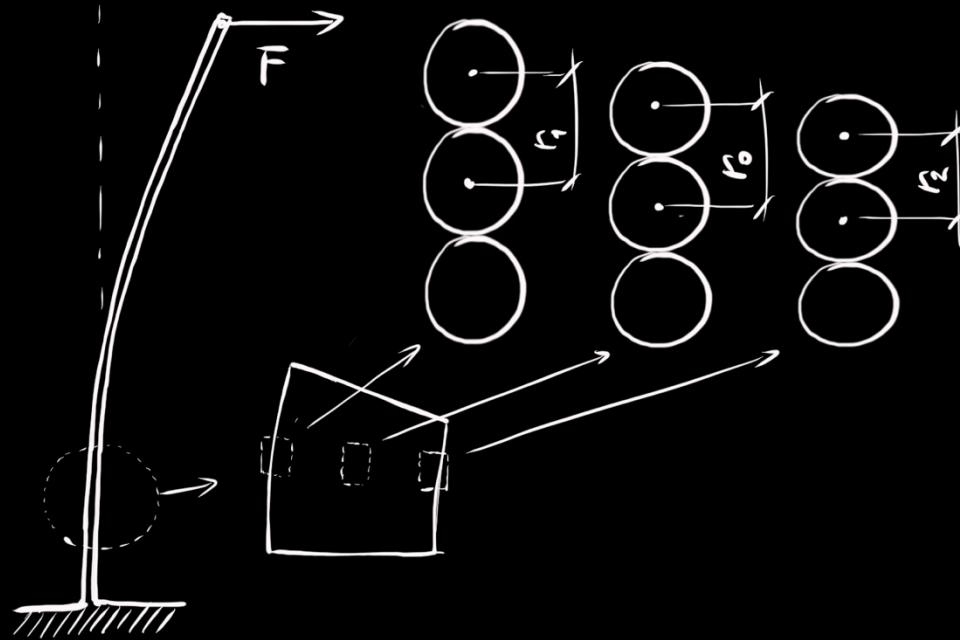
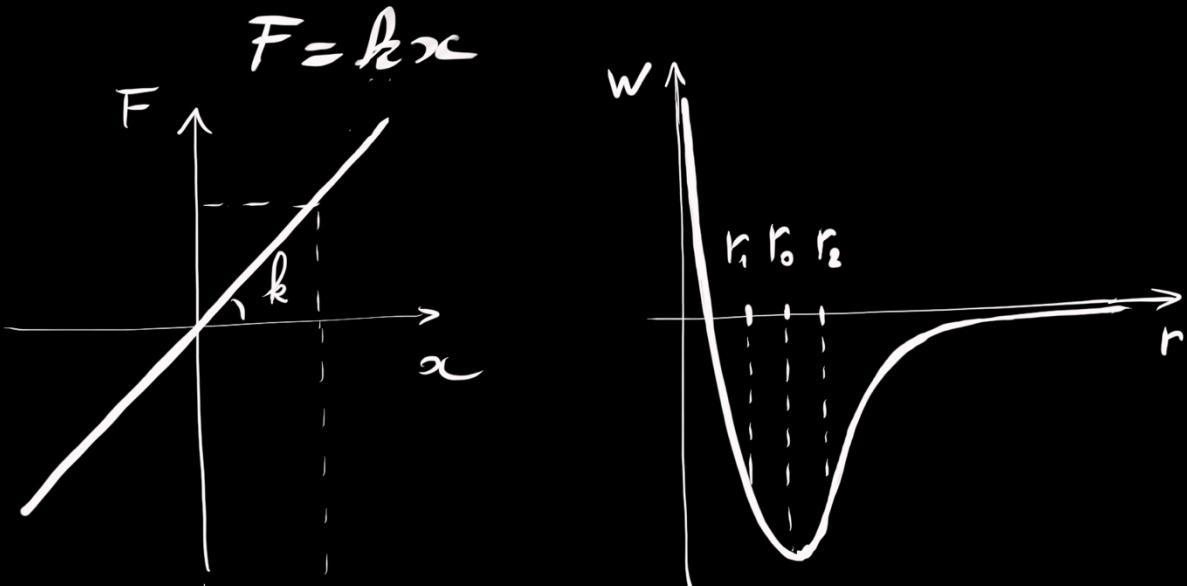


"ceiiinosssttuu"

"ut tensio, sic vis"

Hooke
1676

*"ut tensio,
sic vis"*



Propriétés des ressorts

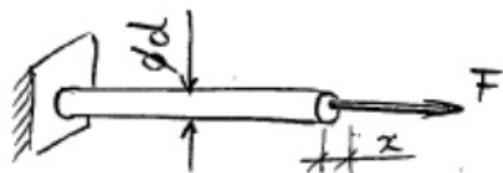
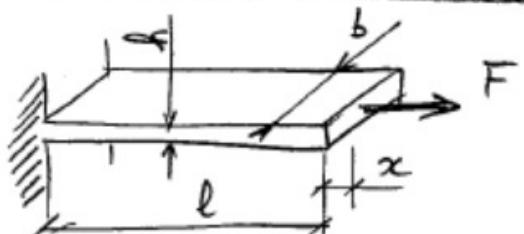
Détails traités au tableau noir

- Caractéristique force-déformation : $F(x)$
- Rigidité tangente: $k = \frac{dF}{dx}$
- Rigidité sécante: $k_s = \frac{F}{x}$
- Contrainte admissible: σ_{adm}
- Force admissible: F_{adm}
- Course admissible: x_{adm}
- Energie admissible: W_{adm}
- Coefficient d'utilisation: η_A

Propriétés des ressorts

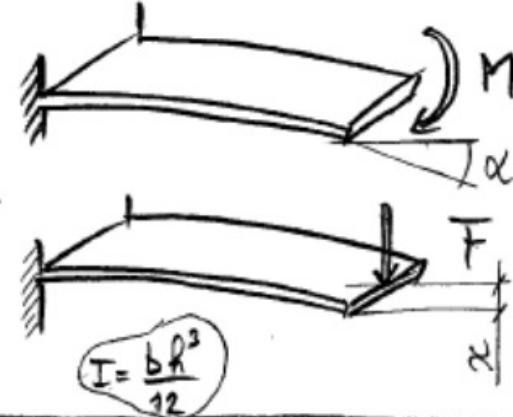
Cas de charges typiques

TRACTION



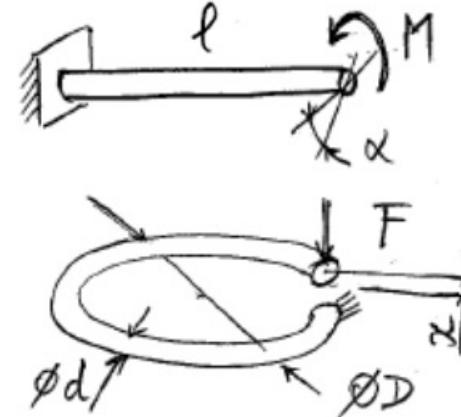
FLEXION

SIMPLE / PURE



TORSION

M SPiRES / BARRE



$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; G \approx \frac{E}{2,6}; \tau = \frac{F}{2} q$$

Tige en traction

Force admissible: $F_{adm} = \sigma_{adm} S$

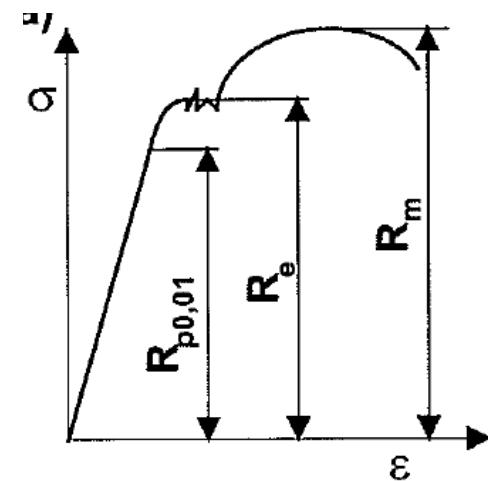
Course admissible: $x_{adm} = \frac{l \sigma_{adm}}{E} = l \varepsilon_{adm}$

Rigidité: $k = \frac{S E}{l}$

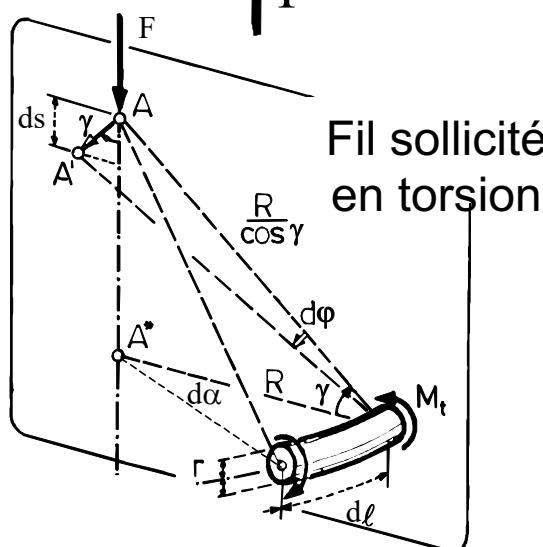
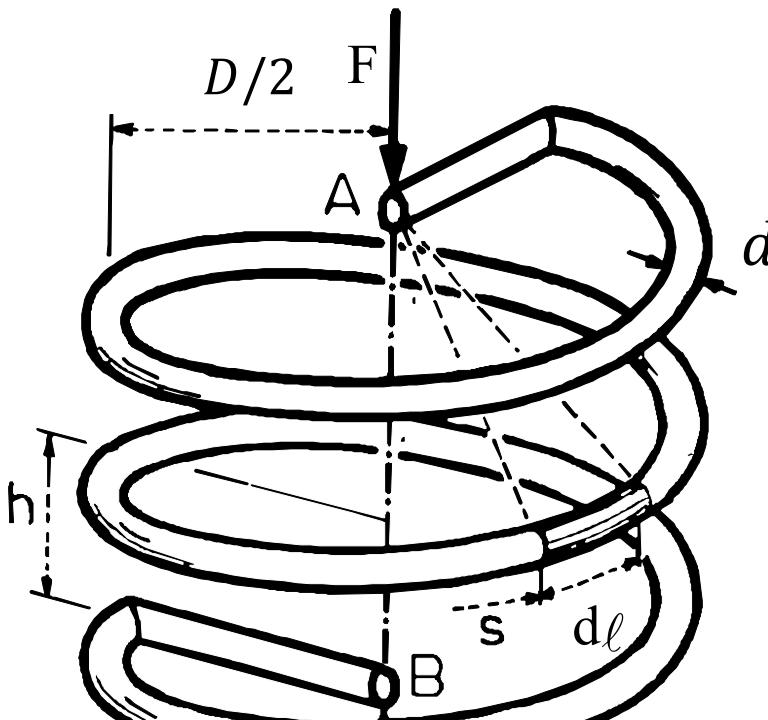
Energie élastique admissible: $W_{adm} = \frac{\sigma_{adm}^2 S l}{2 E} = \frac{\sigma_{adm}^2 Volume}{2 E}$



- F : Force axiale
- x : Flèche
- l : Longueur de la tige
- S : Section de la tige
- E : Module de Young
- σ_{adm} : Contrainte admissible



Ressort hélicoïdal de traction-compression



$$\text{Rigidité: } K = \frac{F}{x} \cong \frac{G d^4}{8 n D^3}$$

$$\text{Force admissible: } F_{adm} \cong \frac{\tau_{adm} \pi d^3}{8 D}$$

$$\text{Course admissible: } x_{adm} \cong \frac{n \tau_{adm} \pi D^2}{G d}$$

Energie élastique admissible:

$$W_{adm} \cong \frac{n \tau_{adm}^2 \pi^2 d^2 D}{16 G}$$

F : Force axiale

x : Flèche du resort

d : Diamètre du fil

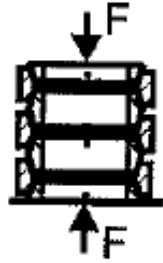
D : Diamètre moyen du ressort

n : Nombre de spires

G : Module de glissement

τ_{adm} : Cisaillement admissible

Coefficients d'utilisation des ressorts



Energie élastique maximale qui peut être stockée dans une barre en traction

$$\int_0^{s_{\max}} F \cdot ds = \int_0^{s_{\max}} \frac{F}{A} \cdot A \cdot l \cdot \frac{ds}{l} = \int_0^{s_{\max}} \sigma \cdot V \cdot \frac{ds}{l} = \int_0^{s_{\max}} \sigma \cdot V \cdot d\varepsilon$$

Hooke $d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}$

$$W = \int_0^{\sigma_{\max}} \frac{\sigma \cdot V}{E} \cdot d\sigma = \frac{\sigma_{\max}^2 \cdot V}{2E}$$

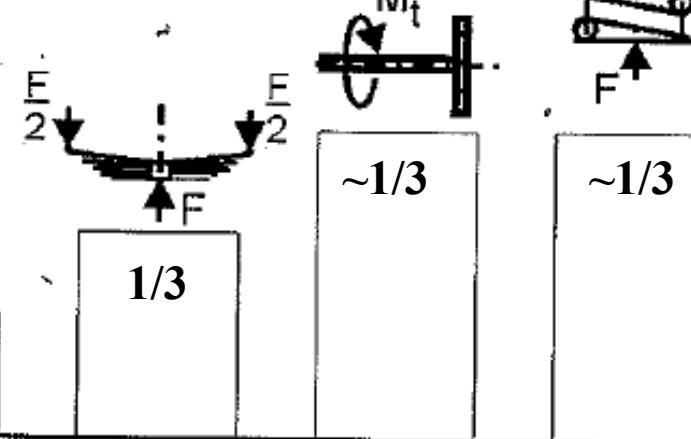
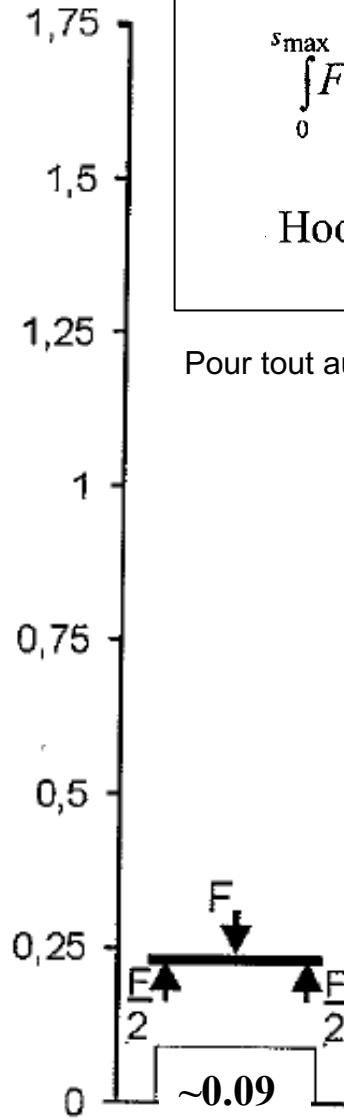


1.62

Pour tout autre ressort nous définissons le coefficient d'utilisation η_A tel que:

$$W = \eta_A \cdot \frac{\sigma_{\max}^2 \cdot V}{2E}$$

Coefficient d'utilisations η_A



1

Ressorts de traction et compression: valeurs typiques

24

		D _a - Diamètres normaux												
		(1)	(1,5)	2	(2,5)	3	(3,5)	4	(4,5)	5	6	(7)	8	(9)
	P	20	14											
	f./sp.	0,54	0,99											
(0,15)	P	62	50	39	33									
	f./sp.	0,30	0,63	1	1,5									
0,2	P	140	110	87	78	67	58							
	f./sp.	0,19	0,40	0,66	1,1	1,5	2							
0,25	P	265	205	175	140	132	115	100	90					
	f./sp.	0,13	0,28	0,51	0,75	1,15	1,55	2	2,5					
0,3	P	360	280	250	210	202	179	155	131					
	f./sp.	0,22	0,37	0,61	0,85	1,25	1,60	2	3					
0,35	P	550	458	370	340	296	258	255	210	178				
	f./sp.	0,16	0,30	0,46	0,71	0,95	1,24	1,72	2,53	3,50				
0,4	P	646	565	474	440	388	345	311	264	233				
	f./sp.	0,24	0,39	0,55	0,81	1,05	1,29	2,15	3,02	3,98				
0,45	P	1055	820	685	587	560	500	451	381	334	295			
	f./sp.	0,19	0,33	0,47	0,65	0,92	1,13	1,88	2,64	3,50	4,47			
0,5	P	1055	955	820	715	695	570	529	459	404				
	f./sp.	0,27	0,41	0,56	0,73	1,01	1,51	2,31	3,07	3,98				
0,6	P	1575	1460	1270	1125	1000	840	810	700					
	f./sp.	0,29	0,44	0,58	0,73	1,22	1,69	2,51	3,21					
(0,7)	P	2195	1910	1830	1480	1365	1180	1040						
	f./sp.	0,33	0,43	0,61	0,92	1,40	1,92	2,45						
0,8	P	2920	2580	2250	1890	1775	1560							
	f./sp.	0,36	0,47	0,77	1,11	1,63	2,10							
(0,9)	P	3765	3275	2730	2350	2255								
	f./sp.	0,39	0,66	0,95	1,29	1,82								
1	P	4230	3620	3275	2870									
	f./sp.					0,53	0,83	1,12	1,47					

$$J_2' = 700 \text{ MN/m}^2$$

P : cN
f./sp.: mm

Eviter l'emploi des dimensions entre () ou situées hors des limites

Exemple de dimensionnement de ressort hélicoïdal

1. Spécifications et contraintes d'intégration du ressort:

- Type de ressort: hélicoïdal, de compression
 - Force à transmettre: 5N
 - Condition d'encombrement (volume à disposition): cylindre de Ø6mm
 - Condition de rigidité: la plus faible possible

2. Présélection des dimension d et D_g , étapes:

1. Condition d'encombrement $\rightarrow D_a < 6mm$
 2. Condition de rigidité \rightarrow Maximiser $D_a \rightarrow$ On présélectionne $D_a = 5mm$
 3. Condition de force $\rightarrow F_{adm} > 5N \rightarrow D_a \geq 0.5mm$
 4. Condition de rigidité \rightarrow Minimiser $d \rightarrow$ On présélectionne $d = 0.5mm$

3. Conclusion: Le ressort suivant remplit les spécifications

- Matériaux: $\tau_{adm} = 700 \text{ MPa}$
 - Diamètre du fil: $d = 0.5 \text{ mm}$
 - Diamètre moyen: $D = D_a - d = 4.5 \text{ mm}$

		D _a - Diamètres normaux										
		(1,5)	2	(2,5)	3	(3,5)	4	(4,5)	5	6	(7)	(9)
(0,1)	P	20	14									
	f./sp.	0,54	0,99									
(0,15)	P	62	50	39	33							
	f./sp.	0,30	0,63	1	1,5							
0,2	P	140	110	87	78	67	58					
	f./sp.	0,19	0,40	0,66	1,1	1,5	2					
0,25	P	265	205	175	140	132	115	100	90			
	f./sp.	0,13	0,28	0,51	0,75	1,15	1,55	2	2,5			
0,3	P		360	280	250	210	202	179	155	131		
	f./sp.		0,22	0,37	0,61	0,85	1,25	1,60	2	3		
0,35	P		550	458	370	340	296	258	255	210	178	
	f./sp.		0,16	0,30	0,46	0,71	0,95	1,24	1,72	2,53	3,50	
0,4	P			646	565	474	440	388	345	311	264	233
	f./sp.			0,24	0,39	0,55	0,81	1,05	1,29	2,15	3,02	3,98
0,45	P				1055	820	685	587	560	500	451	381
	f./sp.				0,19	0,33	0,47	0,65	0,92	1,13	1,88	2,64
0,5	P					1055	955	820	715	695	570	529
	f./sp.					0,27	0,41	0,56	0,73	1,01	1,51	2,31
0,6	P						1575	1460	1270	1125	1000	840
	f./sp.						0,29	0,44	0,58	0,73	1,22	1,69
(0,7)	P							2195	1910	1830	1480	1365
	f./sp.							0,33	0,43	0,61	0,92	1,40
0,8	P								2920	2580	2250	1890
	f./sp.								0,36	0,47	0,77	1,11
(0,9)	P									3765	3275	2730
	f./sp.									0,39	0,66	0,95
1	P									4230	3620	3275
	f./sp.									0,53	0,83	1,12

Ressort hélicoïdal de compression

Cas de charge

Poutre en torsion pure

Caractéristique force-déformation

Linéaire

Limite de course

La longueur comprimée limite L_c est atteinte lorsque les spires sont jointives.

Limite d'intégration

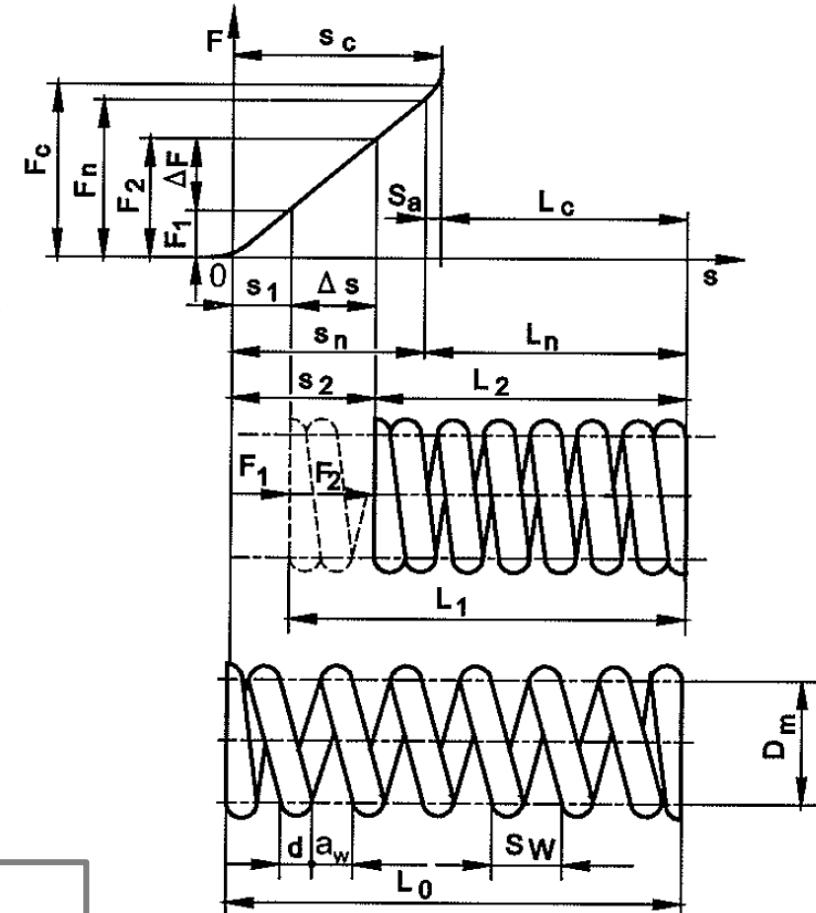
Si $L_0 \geq 5D_m$, il y a risque de flambage.

Limite de fabrication

Pour faciliter la fabrication, le pas $S_W \leq \frac{2}{5} D_m$

$$\text{Rigidité: } k = \frac{F}{x} \cong \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

$$\text{Force admissible: } F_{adm} \cong \frac{\tau_{adm} \cdot \pi d^3}{8D}$$



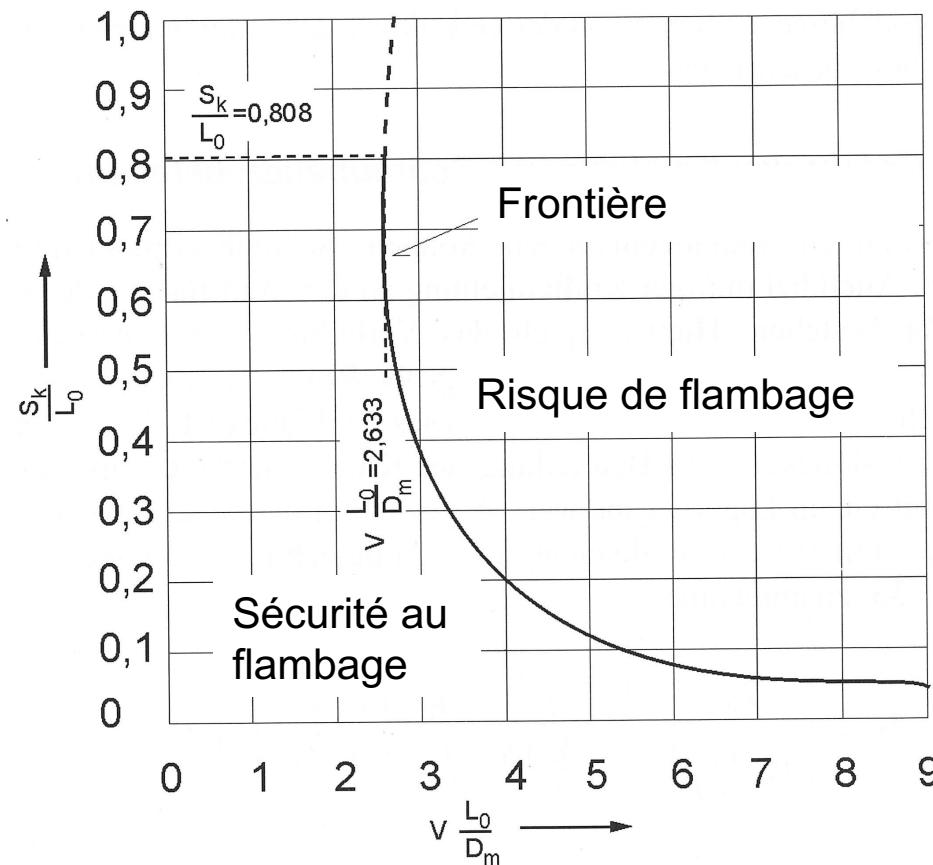
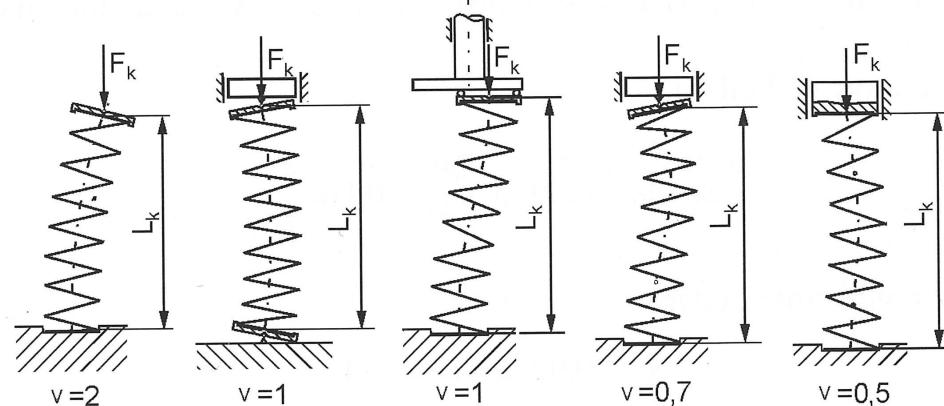
Flambage des ressorts hélicoïdaux de compression

Flèche critique: s_k

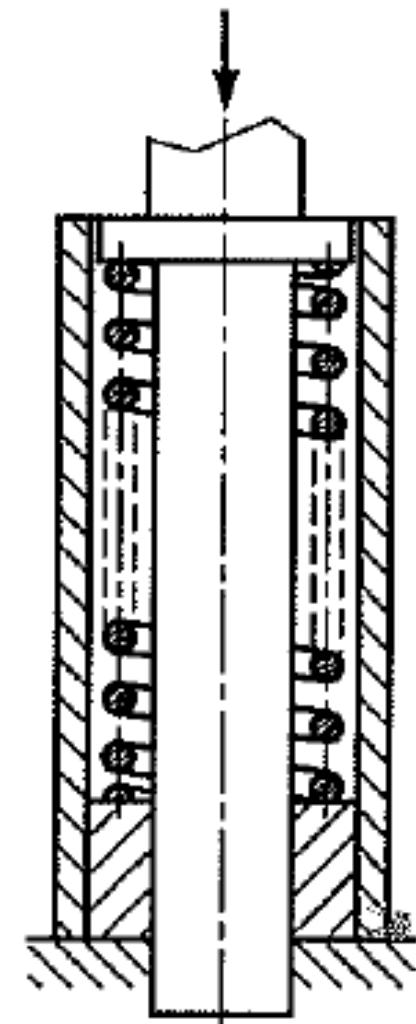
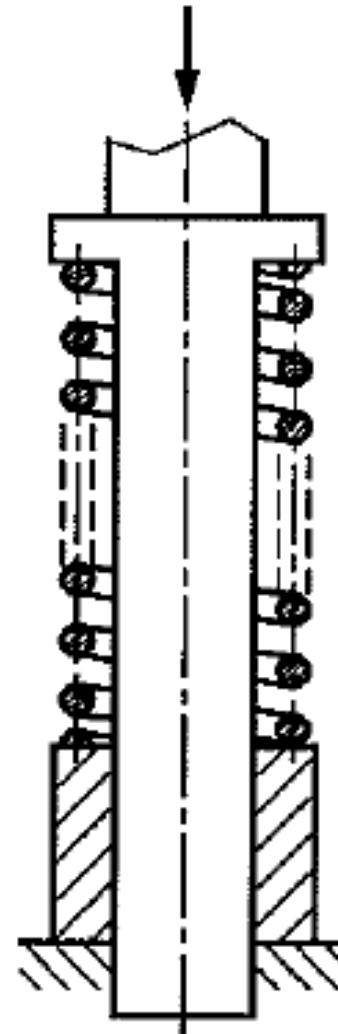
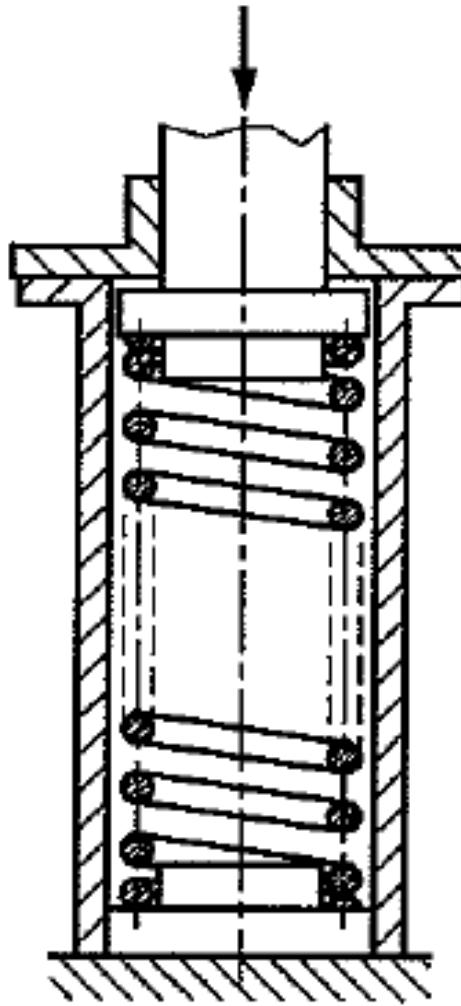
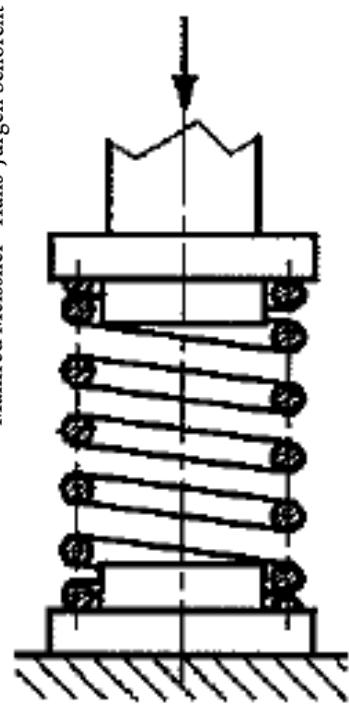
Indice de mode de flambage: ν

Longueur à vide du ressort: L_o

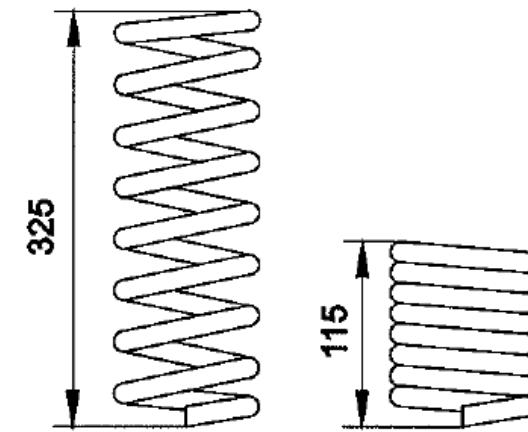
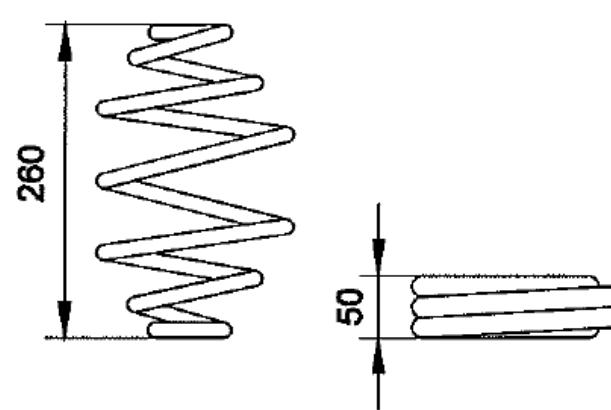
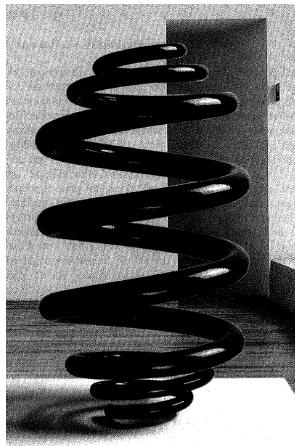
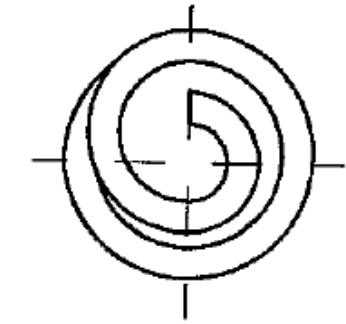
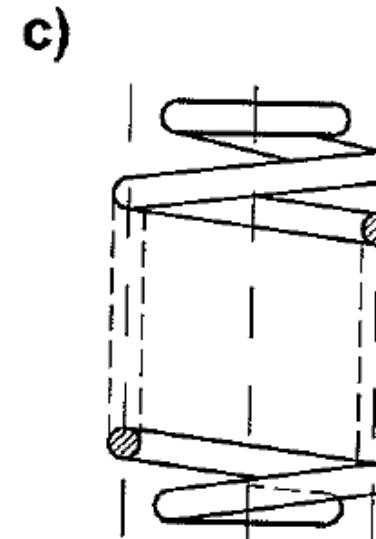
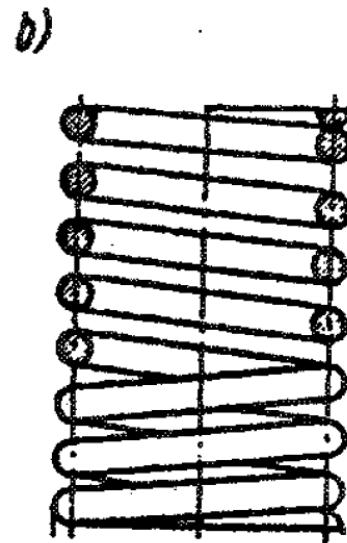
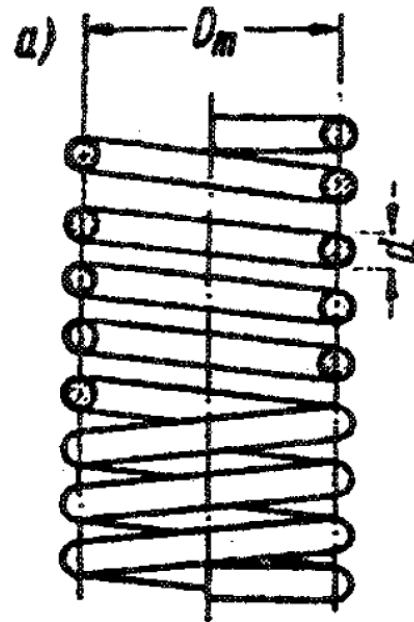
Diamètre moyen du ressort: D_m



Guidage des ressort hélicoïdaux de compression pour éviter le risque de flambage



Extrémités des ressorts hélicoïdaux de compression



Ressort hélicoïdal de traction

Cas de charge de la matière

Poutre en torsion pure

Limite de course

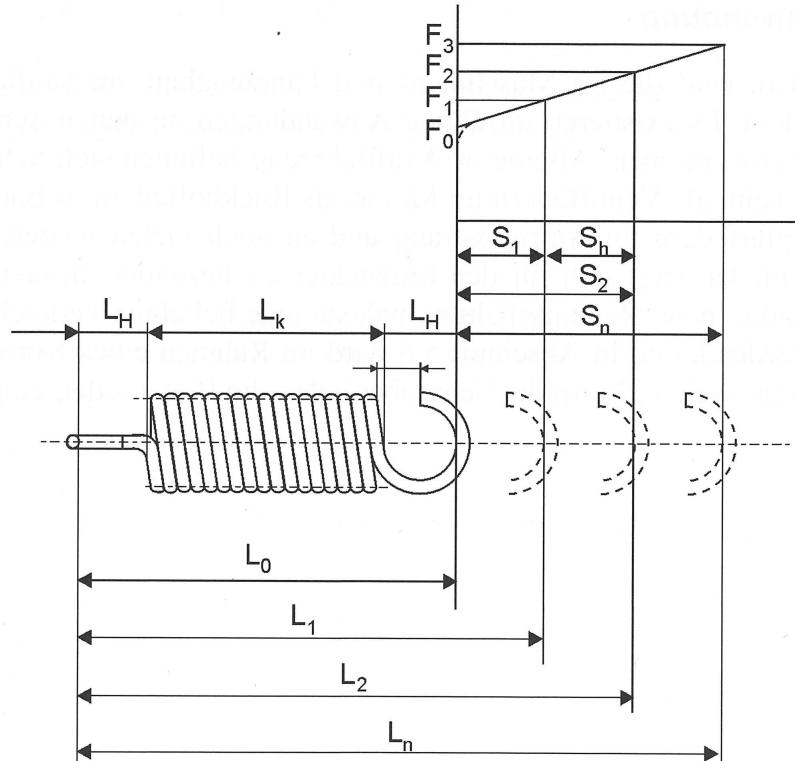
La course est limitée par la contrainte admissible en torsion du matériaux.

Limite d'intégration

Selon l'application, des butées doivent être prévue pour éviter la surcharge du ressort.

Limite de fabrication

- Précontraintre F_0
- Longueur du corps du ressort: $L_k \geq D_m + d$
- Rapport $\frac{D_m}{d}$ compris entre 5 et 20



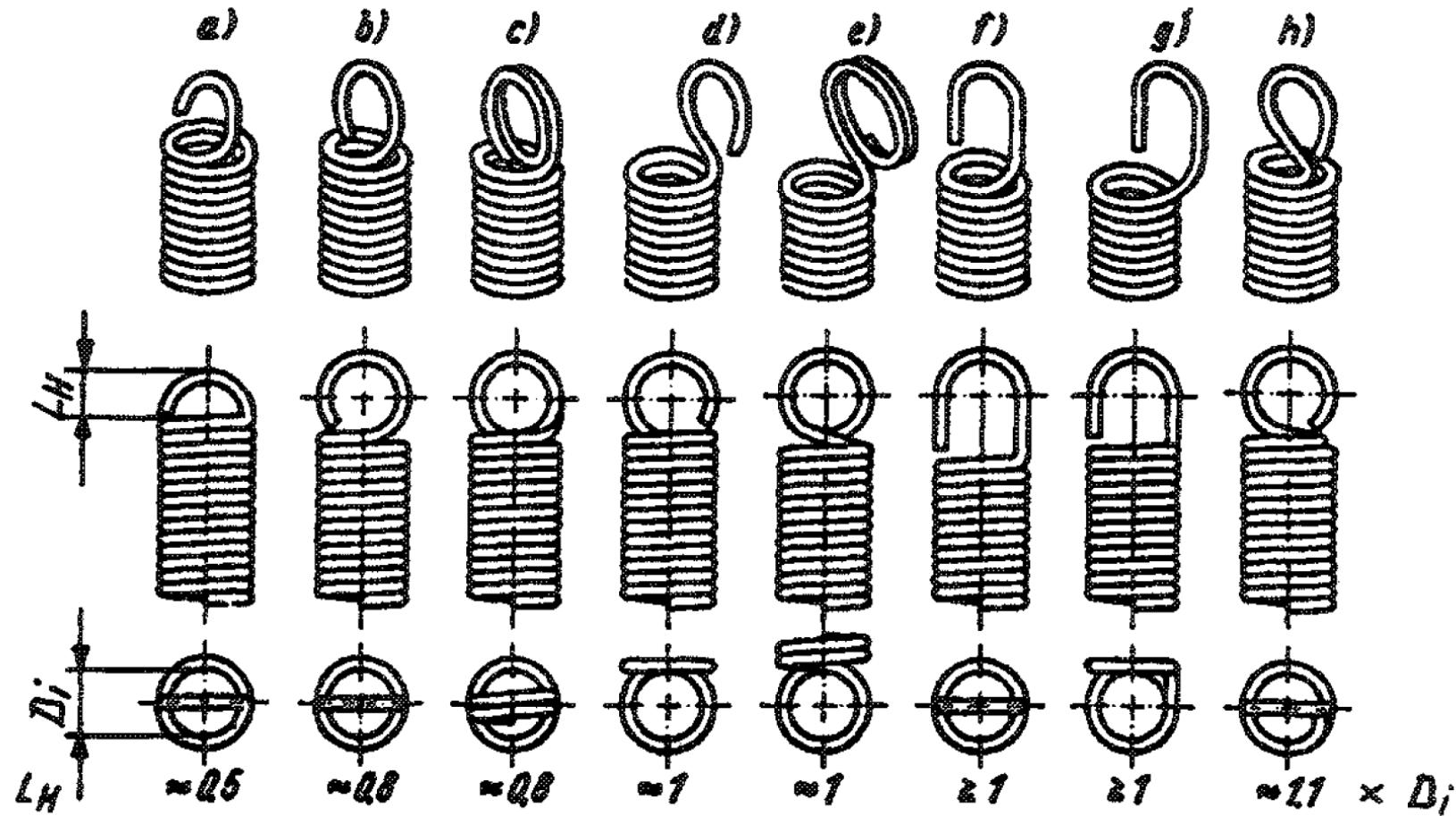
$$\text{Rigidité: } k = \frac{F}{x} \cong \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

$$\text{Force admissible: } F_{adm} \cong \frac{\tau_{adm} \cdot \pi d^3}{8D}$$

Extrémités des ressort hélicoïdaux

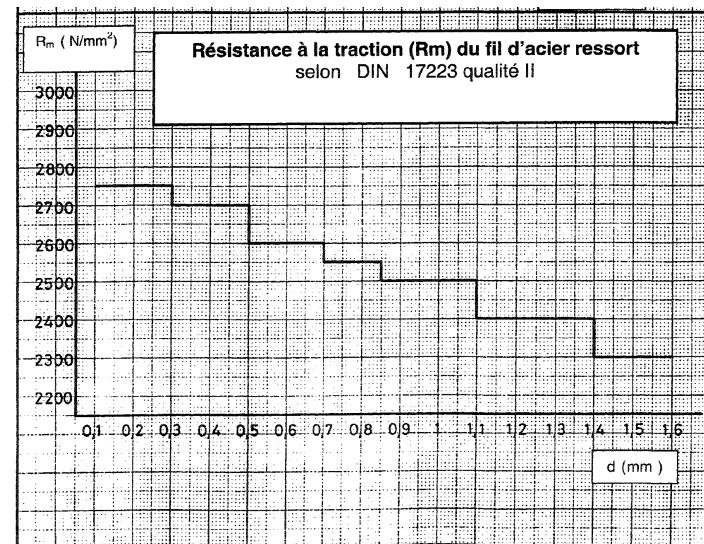
Types de boucles

- Les types b) et h) sont les plus standards.



Matériaux usuels pour la fabrication de ressorts

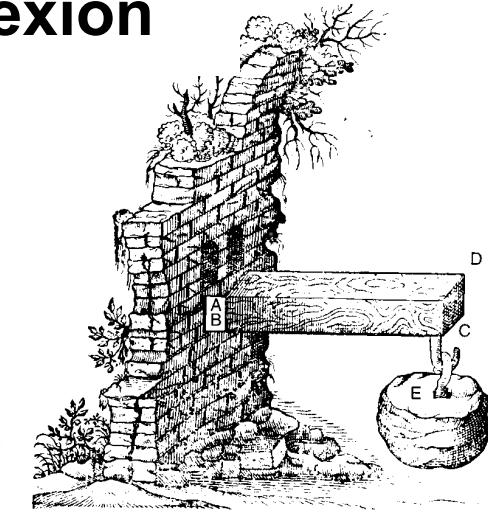
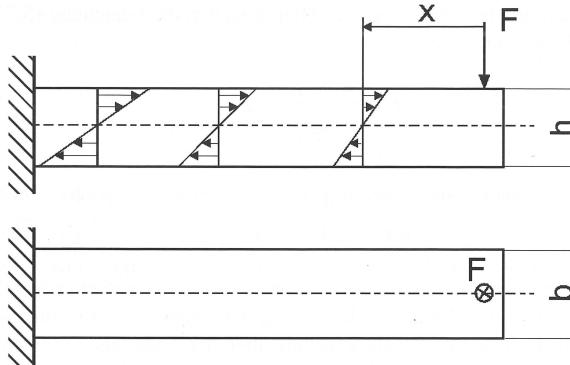
Matériaux	Module E (MN / m ²)	Module G (MN / m ²)	R_m (MN / m ²)	Contrainte maximales (MN / m ²)	
				Flexion	Torsion
C75S+C+QT(+LC) Fil	210'000	≈ 83'000	Voir tableau	≈ 1'200	1'000
X12CrNi17-7 Fil	194'000	≈ 71'000	d (mm) 0,3 : 2 200 0,5 : 2 000 1,0 : 1 900 2,0 : 1 700	≈ 850 ≈ 750	700
CuSn8 – H Fil	≈ 112'000	≈ 42'000	950	400	300
CuNi18Zn20-H	≈ 135'000	≈ 45'000	800	350	250
CuBe2 Traité 3h à 320° fil ou bande	≈ 134'000	≈ 45'000	1'200	700	450
C75S+C+QT Bande	210'000	≈ 83'000	s(mm) < 0,25 : 1'800 < 0,5 : 1'600 < 1 : 1'500	850 700	
X12CrNi18-8 Traité 4h à 425° Bande	194'000	≈ 71'000	s (mm) < 0,1 : 2'600*	≈ 2'000	
NIVAROX® bande s 0,1	190'000	≈ 70'000	* valeur exceptionnelle	2'000	≈ 1'500



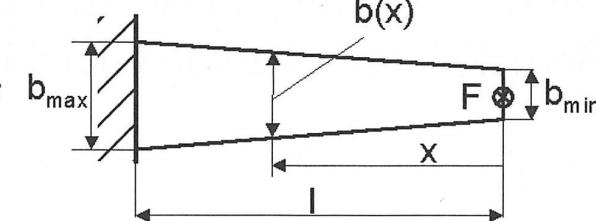
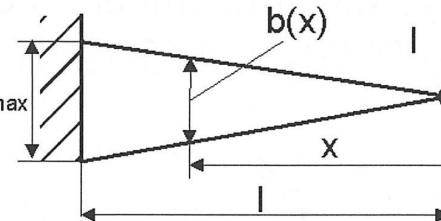
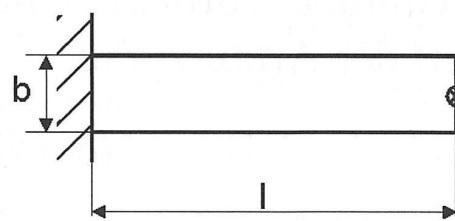
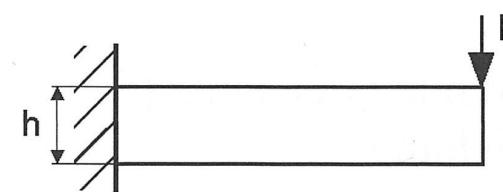
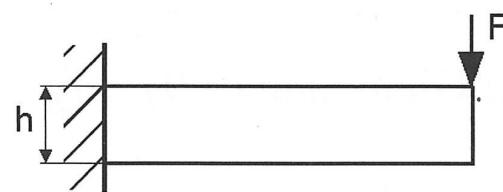
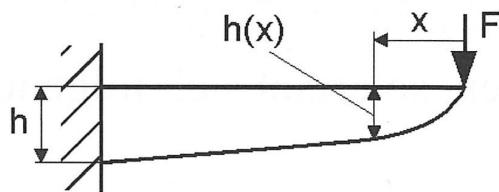
Poutres d'égale résistance à la flexion

- Poutre de section constante

$$\sigma_{max}(x) = \frac{6 F x}{b h^2}$$



- Poutre d'égale résistance à la flexion



Profil à hauteur parabolique

Profil à largeur triangulaire

Profil à largeur trapèzoïdale

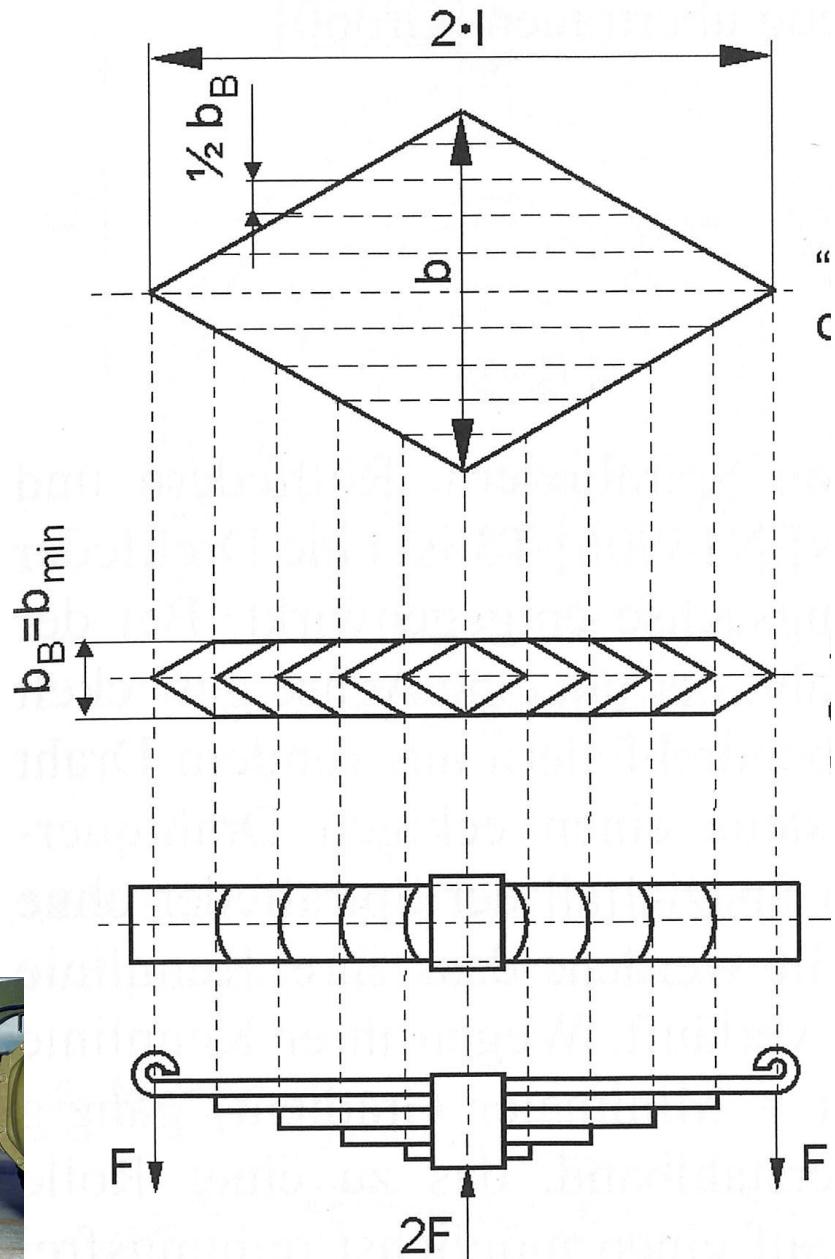
$$h(x) = h \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}$$

$$b(x) = b_{max} \cdot \frac{x}{l}$$

$$b(x) = (b_{max} - b_{min}) \cdot \frac{x}{l} + b_{min}$$

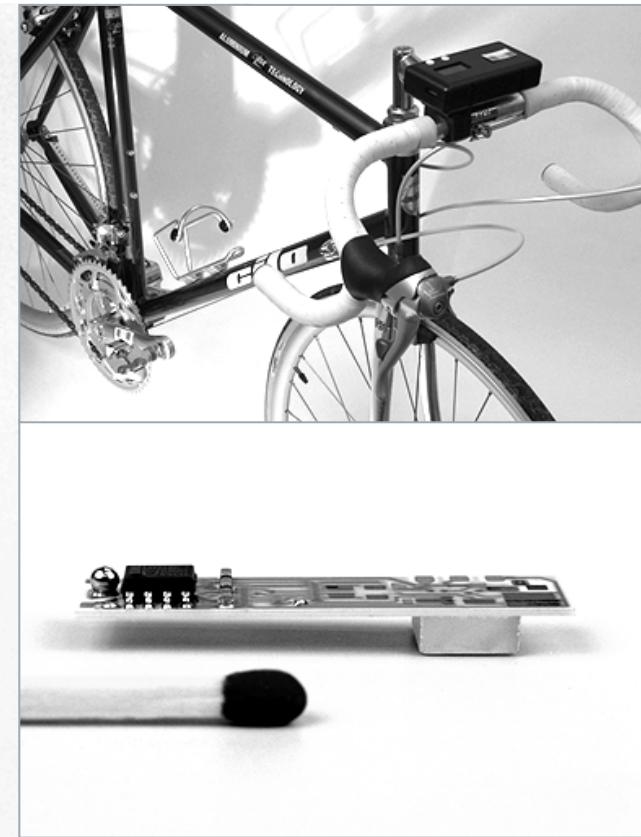
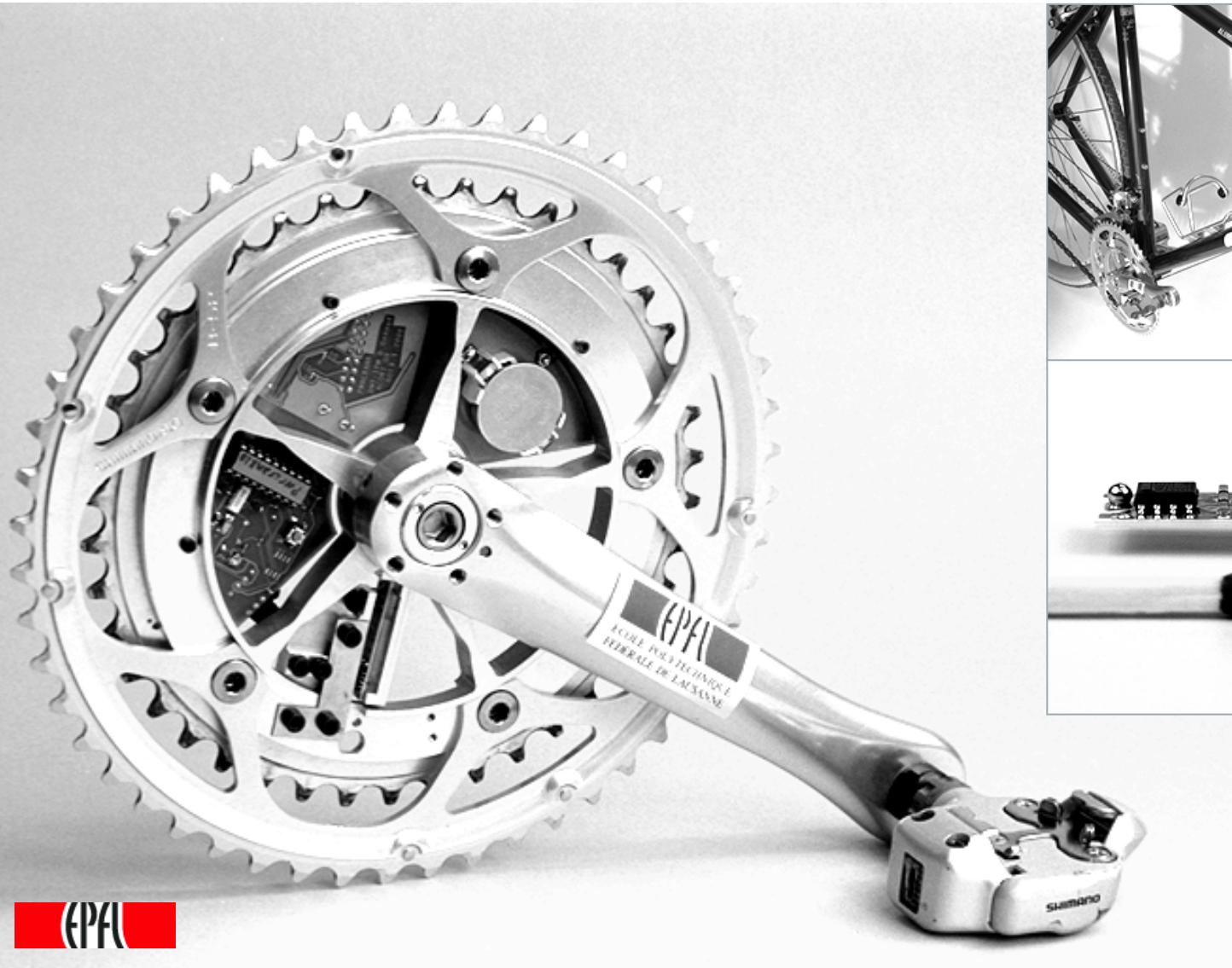
Poutres d'égale résistance à la flexion: ressort à lames

- Poutre de largeur variable découpée en tranches
- Empilement théorique
- Empilement pratique
- Ressort à lames



Poutres d'égale résistance à la flexion

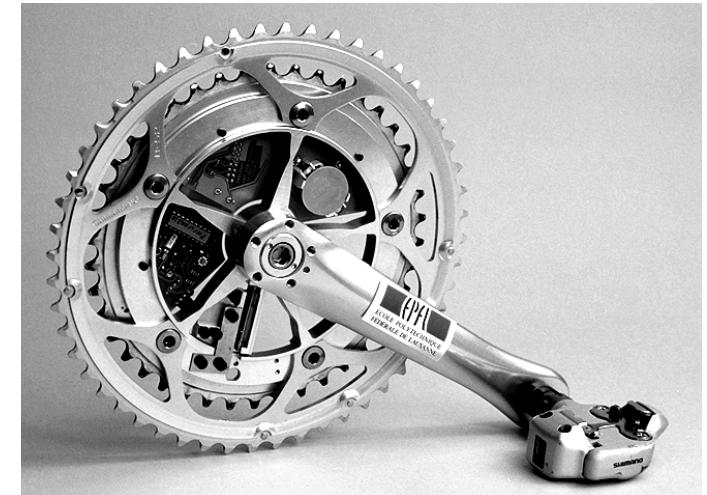
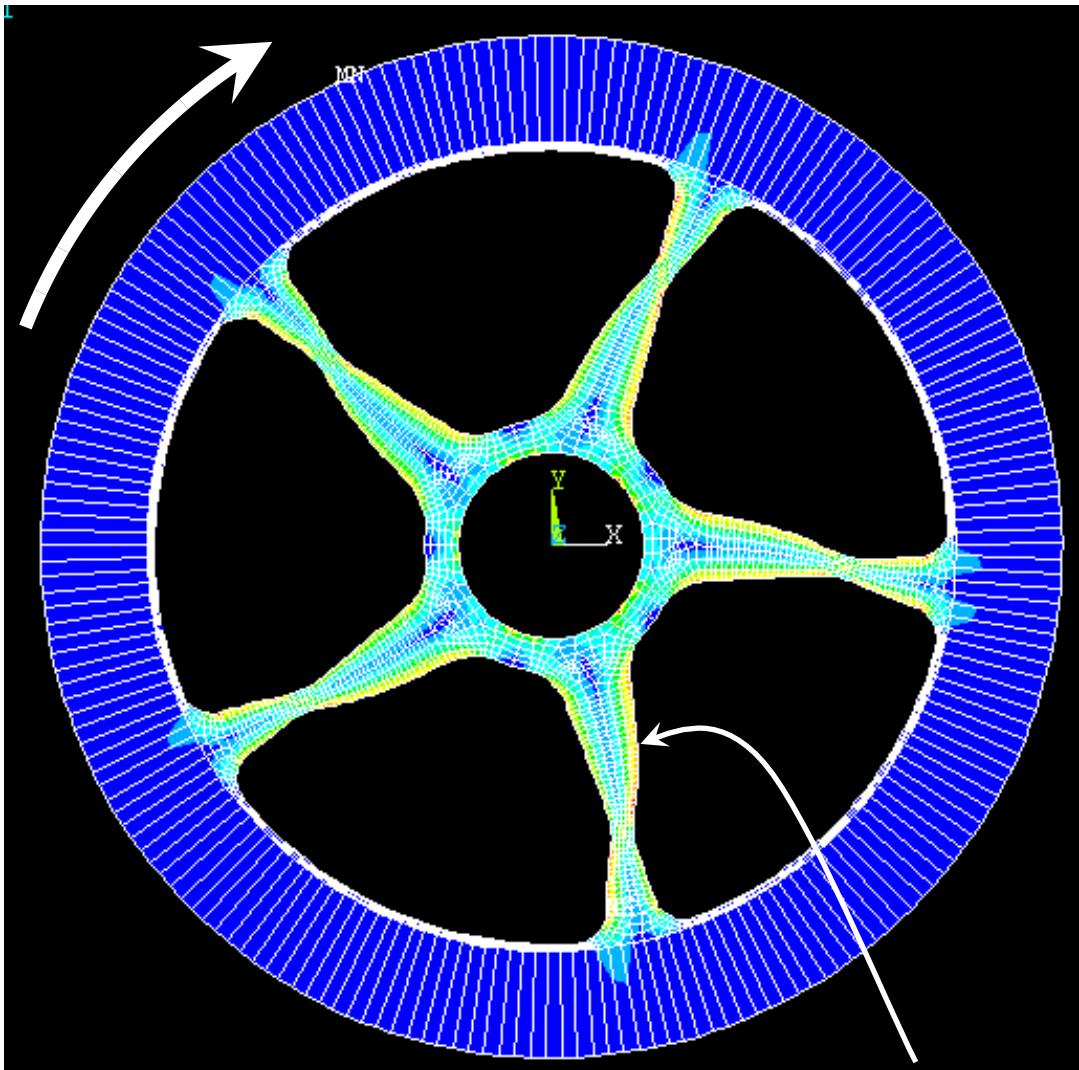
Exemple du capteur de couple pour vélo



[S.Henein et al. (2000). Power Sensing Device, European Patent N°001109196.6]

Poutres d'égale résistance à la flexion

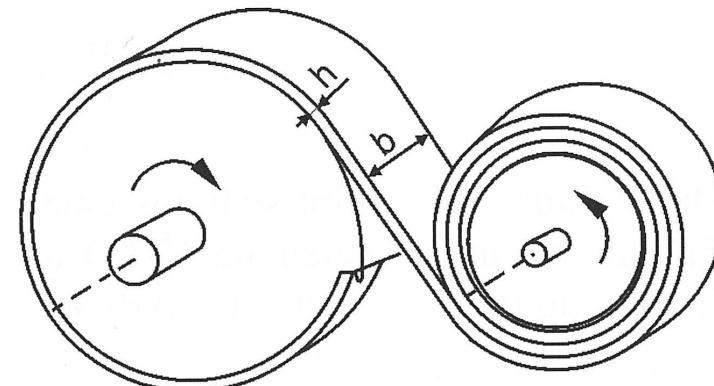
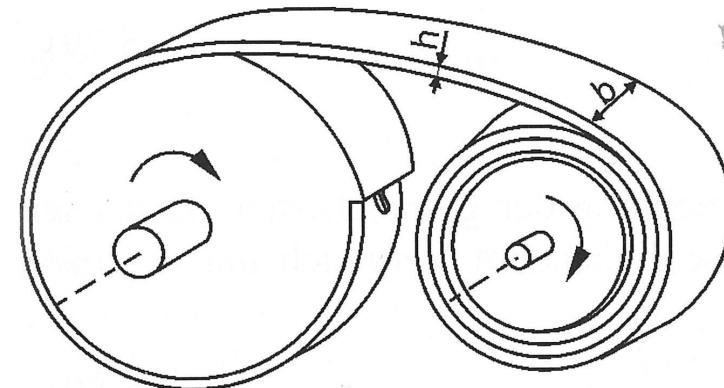
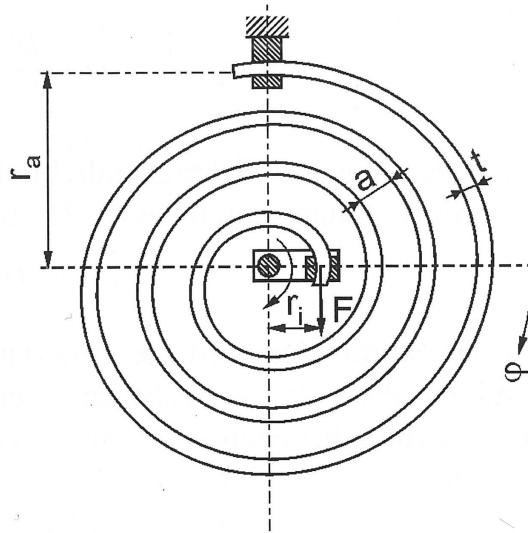
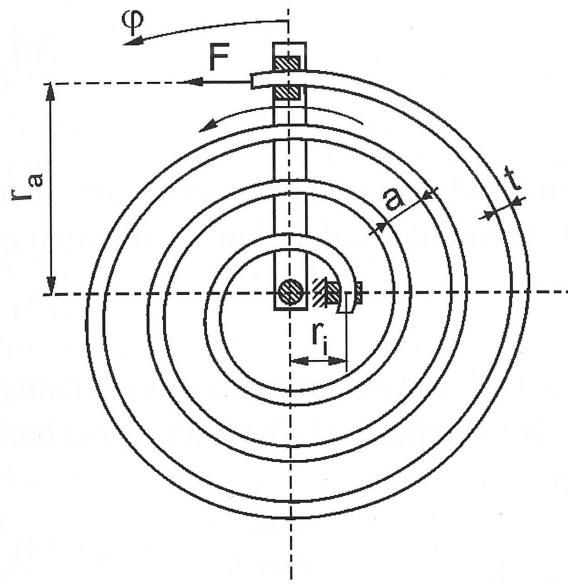
Exemple du capteur de couple pour vélo



Poutres à profil
parabolique avec
contraintes
quasi-constantes

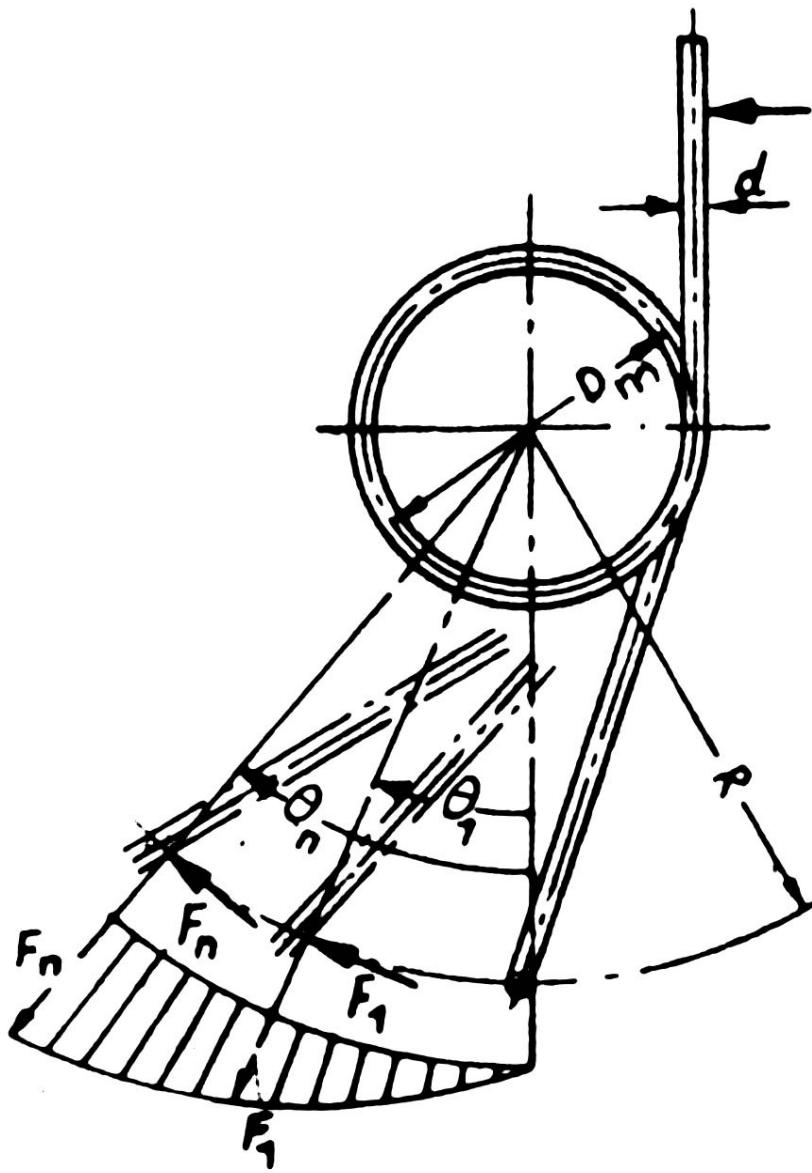
Ressorts en rotation (poutres en flexion)

Exemples



Guidage hélicoïdaux de rotation

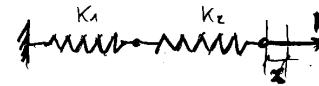
Exemples



Combinaison de ressorts

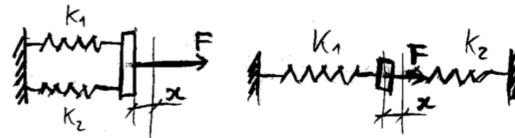
SÉRIE

$$K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$



PARALLÈLE

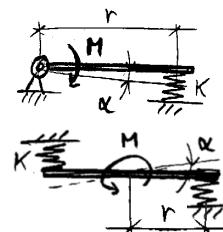
$$K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = K_1 + K_2$$



Les deux ressorts sont toujours tendus

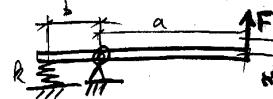
ROTATION

$$K_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = K \cdot r^2$$



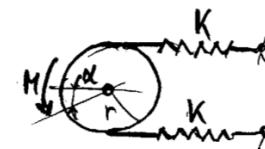
LEVIER

$$K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$$



COURROIE

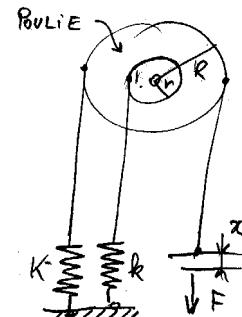
$$K_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = 2 \cdot K \cdot r^2$$



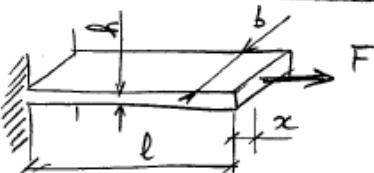
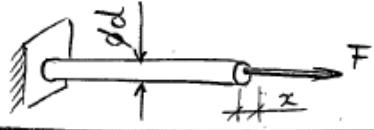
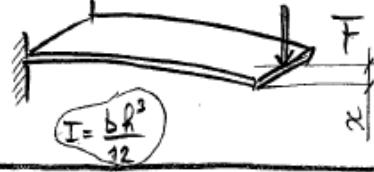
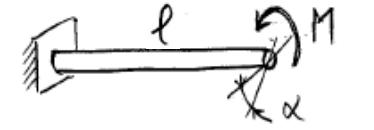
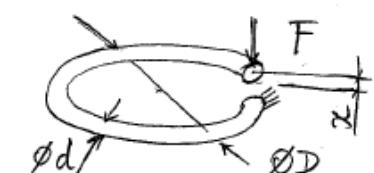
COMBINAISON

$$\frac{1}{2} \cdot K_{\text{eq}} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x \frac{r}{R}\right)^2$$

$$K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = K + k \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2$$



Formulaire synthétique manuscrit

RESSORTS		RIGIDITÉ $K: N/m$ $K_a: Nm/rad$	DÉPLACEMENT ADMISSIBLE $x: m$ $\alpha: rad$	FORCE / MOMENT ADMISSIBLE $F: N$ $M: Nm$	ENERGIE ADMISSIBLE $W: J$ $W = \frac{1}{2} K x^2$ $W = \frac{1}{2} F x$	COEFF. D'UTILISATION η_A
TRACTION		$K = \frac{E b h}{l}$	$x = \frac{\sigma l}{E}$	$F = \sigma b h$	$W = \frac{\sigma^2 b h l}{2E}$	1
		$K = \frac{E \pi d^2}{4l}$	$x = \frac{\sigma l}{E}$	$F = \frac{\sigma \pi d^2}{4}$	$W = \frac{\sigma^2 \pi d^2 l}{8E}$	1
FLEXION SIMPLE / PURE		$K_\alpha = \frac{E b h^3}{12l}$	$\alpha = \frac{2\sigma l}{E R}$	$M = \frac{\sigma b h^2}{6}$	$W = \frac{\sigma^2 b h l}{6E}$	$\frac{1}{3}$
		$K = \frac{E b h^3}{4l^3}$	$x = \frac{2\sigma l^2}{3ER}$	$F = \frac{\sigma b h^2}{6l}$	$W = \frac{\sigma^2 b h l}{18E}$	$\frac{1}{9}$
TORSION / BARRE N SPIRES		$K_a = \frac{G \pi d^4}{32l}$	$\alpha = \frac{2\tau l}{Gd}$	$M = \frac{\tau \pi d^3}{16}$	$W = \frac{\tau^2 \pi d^2 l}{16G}$	$\approx \frac{1}{3}$
		$K = \frac{G d^4}{8n D^3}$	$x = \frac{n \tau \pi D^2}{Gd}$	$F = \frac{\tau \pi d^3}{8D}$	$W = \frac{n \tau^2 \pi^2 d^2 D}{16G}$	$\approx \frac{1}{3}$
$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, $G = \frac{E}{2,6}$; $\tau = \frac{\sigma}{2}$		LÉGENDE: E : Module de Young σ : Contrainte admissible		G : Module de glissement τ : Cisaillement admissible	n : Nombre de spires	S. HENEIN, AOÛT 2007