Série 8

1. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{(2x+1)^2(3x-1)\,(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$

b) $b(x) = \dfrac{|x|\,\sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

c) $c(x) = \dfrac{\cos x\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+\sin x}}$

e) $e(x) = \dfrac{(x^2+1)\,(\sin x - 2)}{2x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x$.

2. Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

3. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + 2x\right)(3 - \cos^2 x)$

c) $c(x) = x^2\left(\sqrt[3]{8x^3-1} - 2x\right)$

d) $d(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2-x}$.

4. Déterminer p et q réels de sorte que $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$ on ait

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right] = 0\,.$$

5. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) \cdot \operatorname{sgn}(1-x)$.

a) Faire la représentation graphique de la fonction f (unité = 6 carrés).

b) Pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, déterminer graphiquement $\delta = \delta_1$ vérifiant la relation suivante :

$$0 < |x-1| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - 2| < \varepsilon\,.$$

c) Qu'en est-il pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$?

6. Soit $f(x) = a\,x + b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques.

Montrer à l'aide de la définition que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = a\,x_0 + b$.

7. Exercice facultatif.

Démontrer le résultat suivant :

Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Réponses de la série 8

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 5$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} b(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} c(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} e(x) = -\infty$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
On le démontre en définissant deux suites (a_n) et (b_n) qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$.

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} b(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} c(x) = -\dfrac{1}{12}$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = -\dfrac{1}{2}$.

4. $p = -1$ et $q = -\dfrac{a}{2}$.
