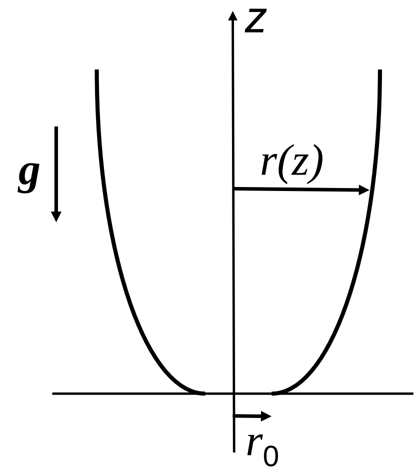
PHYSIQUE GÉNÉRALE: Electrom. (SMT) Examen extra du 11.03.2021

Nom: ....**N. Sciper**……………………**N. Place** :...........

Problème 1 [4 points]

Une clepsydre ouverte est constituée d'un récipient contenant un liquide parfait incompressible avec un trou de rayon r_0 dans sa partie inférieure. Le niveau du liquide (c.à.d., la surface libre supérieure du liquide) descend à une vitesse v constante. La variation de la pression atmosphérique P_{atm} et de la pesanteur g sur la hauteur du récipient sont négligeables, l'écoulement est approximativement stationnaire.

Déterminer la forme géométrique $r(z)$ du récipient possédant un axe de révolution vertical (c.à.d., la section est $S(z) = \pi r^2(z)$ avec $r(z=0) = r_0$) en fonction de (z, r_0, v, g).



Solution :

Nous pouvons appliquer l'équation de Bernoulli :

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2(0) \qquad \text{(1 point)}$$

$$\Rightarrow \quad v^2(z) + 2gz = v^2(0)$$

Nous pouvons appliquer aussi l'équation de continuité. Pour un fluide incompressible:

$$S(z)v(z) = S(0)v(0) \qquad \text{(1 point)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^2(z) + 2gz = v^2(0) \\ S(z)v(z) = S(0)v(0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ldots \\ v(0) = \dfrac{S(z)}{S(0)}v(z) = \dfrac{r^2(z)}{r_0^2}v(z) \end{cases}$$

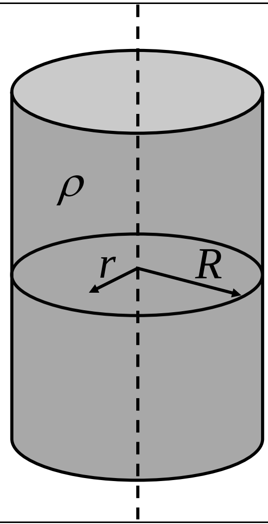
Si la vitesse de la surface libre est constante: $v(z) = v$

$$\begin{cases} v^2 + 2gz = \dfrac{r^4(z)}{r_0^4}v \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow r(z) = r_0 \left(\frac{2gz}{v^2} + 1\right)^{1/4} \qquad \text{(2 points)}$$

Problème 2 [4 points]

Un cylindre isolant de longueur infinie et de rayon R est chargé avec une densité volumique uniforme de charges libres ρ (en C/m^3). On indique avec r la distance de l'axe du cylindre. Le cylindre est composé d'un matériau ayant $\varepsilon_r = 1$.

Déterminer (en fonction de r, R et ρ):
a) le champ électrique $E(r)$ pour $0 \le r \le R$.
b) le champ électrique $E(r)$ pour $r \ge R$.
c) le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $0 \le r \le R$, en supposant que V est nul sur l'axe du cylindre (c.à.d., $V(r=0)=0$).
d) le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r \ge R$ en supposant que V est nul sur l'axe du cylindre (c.à.d., $V(r=0)=0$).
e) Comment expliquez-vous la valeur du potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r \to \infty$?



Solution :

La symétrie du problème permet d'obtenir $\mathbf{E}$ en utilisant la loi de Gauss: $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$ (0.5 points)

a) $0 \le r \le R: \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E2\pi rL$ et $\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi r^2 L$

$\Rightarrow E2\pi rL = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi r^2 L \Rightarrow E(0 \le r \le R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ (0.5 points)

b) $r \ge R: \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E2\pi rL$ et $\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi R^2 L$

$\Rightarrow E2\pi rL = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi R^2 L \Rightarrow E(r \ge R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ (0.5 points)

c) $V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_0) = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ pour $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$ et $V(\mathbf{x}_0) = 0$

$\Rightarrow V(\mathbf{x}) = -\int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$. Dans notre cas, pour un parcour radiale $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{l} \Rightarrow V(r) = -\int_0^r E dr$

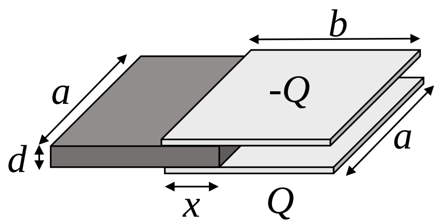
$\Rightarrow V(r) = -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} \Rightarrow V(0 \le r \le R) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$ (0.5 points)

d) $V(r) = -\int_0^r E dr = -\int_0^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr - \int_R^r \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}(\ln(r) - \ln(R))$

$\Rightarrow V(r \ge R) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}(\ln(r) - \ln(R))$ (1 point)

e) $V(r \to \infty) = -\infty$
Ceci est dû au fait que nous supposons un cylindre infiniment long,
ce qui n'est pas physiquement possible et qui détermine
une diminution du champ électrique en $(1/r)$ également à de très grandes distances du cylindre.
Pour un "vrai" cylindre (c.à.d., de longueur finie),
le champ électrique à grandes distances sera proportionnel à $(1/r^2)$
car il sera le même que pour une charge ponctuelle. (1 point)

Problème 3 [4 points]

Considérons un condensateur à plaques parallèles rectangulaires, avec côtés a et b et séparation $d \ll a,b$. Le condensateur est partiellement rempli d'un diélectrique de constante diélectrique ε_r et épaisseur d. La distance de chevauchement est x. Le condensateur est isolé et a une charge constante Q. Déterminer (en fonction de x, Q, a, b, d, ε_r): **a)** L'énergie électrostatique U_E stockée dans le système. **b)** La force F sur le diélectrique. **c)** La force F tire-t-elle le diélectrique dans le condensateur ou le pousse-t-il hors du condensateur?	

Solution :

a) Le potentiel électrostatique V est constant sur chacune des deux plaques conductrices.

$$\int_0^d E_1 dl = \Delta V,\ \int_0^d E_2 dl = \Delta V \Rightarrow E_1 = E_2 = E = \frac{\Delta V}{d}$$

La capacitè du condensateur est:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{ax}{d} + \varepsilon_0 \frac{a(b-x)}{d} = \varepsilon_0 \frac{a}{d}\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)}$$

L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur lorsque la plaque est à l'extérieur est:

$$U_E = U_{E,1} + U_{E,2} = \frac{1}{2}\int_{V_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1 dV + \frac{1}{2}\int_{V_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \int_{V_1} E_1^2 dV + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V_2} E_2^2 dV =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \int_{V_1} E^2 dV + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V_2} E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dax + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 da(b-x) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 daE^2\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 da\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)}\right)^2 \left(\varepsilon_r x + (b-x)\right) = \frac{1}{2}d\left(\frac{Q^2}{\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)}\right) \Rightarrow$$

$$U_E = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r x + (b-x)\right)} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a\left(x(\varepsilon_r - 1) + b\right)}$$ (2 points)

b)

$$F = -\frac{\partial}{\partial x}U_E = -\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left(x(\varepsilon_r - 1) + b\right)} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a}\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\left(x(\varepsilon_r - 1) + b\right)^2} \Rightarrow$$

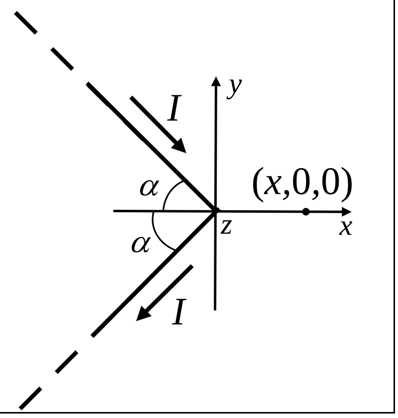
$$F = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a}\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\left(x(\varepsilon_r - 1) + b\right)^2}$$ (1.5 points)

c) La force F tire le dielectrique dans le condensateur. (0.5 points)

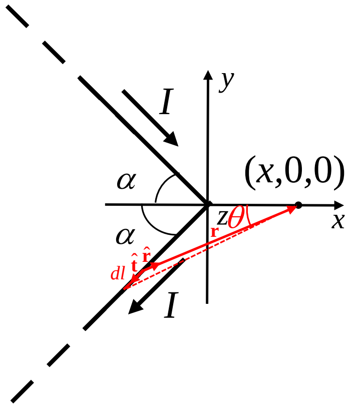
Problème 4 [4 points]

Un fil de longueur infinie et de diamètre négligeable est placé dans le plan *xy* et «plié» comme indiqué sur la figure. Le fil est parcouru par un courant indépendant du temps *I*.

Déterminer le champ magnétique **B** le long de l'axe *x* (c.à.d.,, **B**(*x*,0,0)) avec *x*>0 en fonction de (*x*, *I*, α).



Solution :



Nous pouvons appliquer la loi Biot-Savart: $d\mathbf{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{r}}$ (0.5 point)

$\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{r}}$ est dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$, donc $d\mathbf{B}(\mathbf{x})$ est dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$. (1 point)

$$\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{r}} = \sin(\alpha-\theta)\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$r\,d\theta = dl\sin(\alpha-\theta) \Rightarrow dl = \frac{r\,d\theta}{\sin(\alpha-\theta)}$$

Théorème des sinus: $\frac{x}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{r}{\sin(\pi-\alpha)} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{x}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{1}{x}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow$

$$dB(x,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{r\,d\theta}{\sin(\alpha-\theta)}\sin(\alpha-\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}d\theta$$

$$\Rightarrow B(x,0,0) = \int_0^\alpha \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1}{\sin\alpha}\int_0^\alpha \sin(\alpha-\theta)\,d\theta =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1}{\sin\alpha}\left[\cos(\alpha-\theta)\right]_0^\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow B(x,0,0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

La contribution des deux parties du fil est identique et elles s'additionnent.

$\Rightarrow \mathbf{B}(x,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\hat{\mathbf{z}}$ (2.5 points)

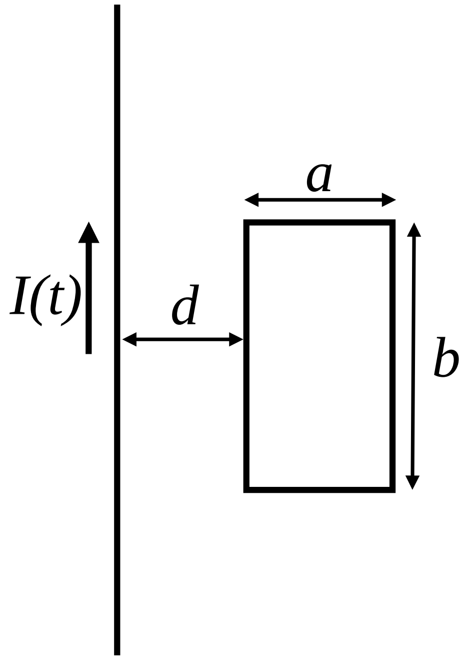
Problème 5 [4 points]

Un fil infini est parcouru par un courant dépendant du temps $I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ avec I_0 le courant initial (en A) et τ la constante de temps (en s) de la décroissance exponentielle. Une bobine rectangulaire avec côtés *a* et *b* est située à une distance *d* dans le même plan que le fil. La boucle rectangulaire a une résistance *R* et une inductance négligeable.

Déterminer:

a) La force électromotrice induite ε dans la bobine rectangulaire (en fonction de a, b, d, τ, I_0, t)

b) L'énergie dissipée E_J par effet Joule dans la résistance *R* dans l'intervalle de temps de zéro à l'infini (en fonction de a, b, d, τ, I_0, R)



Solution :

a)

Ampere: $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} \Rightarrow 2\pi x B = \mu_0 I \Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ (0.5 points)

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right) \Rightarrow \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$$ (1 point)

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\exp(-t/\tau) \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\exp(-t/\tau)$$ (1 point)

b)

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\exp(-t/\tau)$$

$$E_J = \int_0^\infty R I^2 dt =$$ (1 point)

$$= \int_0^\infty R\left(\frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\exp(-t/\tau)\right)^2 dt = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\right)^2 \int_0^\infty (\exp(-t/\tau))^2 dt =$$

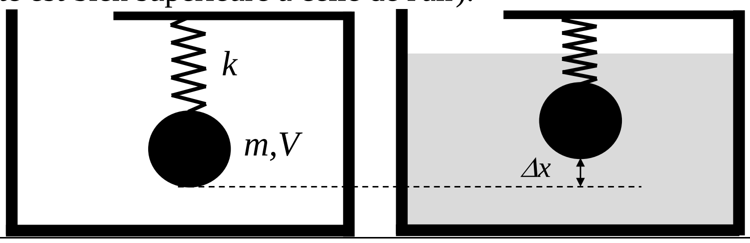
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\right)^2 \left[-\frac{1}{2}\exp(-2t/\tau)\right]_0^\infty = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{I_0}{\tau}\right)^2 \frac{1}{2}\tau$$

$$\Rightarrow E_J = \frac{1}{2\tau R}\left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right) I_0\right)^2$$ (0.5 points)

Questions [une seule réponse correcte par question, 1 point/question, 12 points]

ε_0	$\varepsilon_0 \cong 8.85\times10^{-12}$ F/m	
μ_0	$\mu_0 \cong 1.26\times10^{-6}$ H/m	
Vitesse de la lumière	$c \cong 3\times10^{8}$ m/s	(dans le vide)
Accélération de la pesanteur (gravité)	$g \cong 9.8$ m/s	(à la surface de la Terre)
Pression atmospherique	$P_{atm} \cong 1.0\times10^{5}$ Pa	(pression atmosphérique "normale")
Masse de l'électron	$m_e \cong 9.11\times10^{-31}$ kg	(au repos)
Charge de l'électron	$e \cong -1.6\times10^{-19}$ C	

Une sphère de masse m et volume V est suspendue à un ressort de constante élastique k. Si la sphère est entièrement immergée dans un liquide, la position d'équilibre statique change de Δx. Déterminer la densité du liquide (en supposant que sa densité est bien supérieure à celle de l'air).

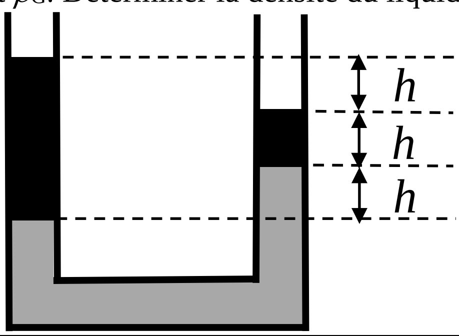


A. 0
B. $k\Delta x/(Vmg)$
C. $gk\Delta x/V$
D. $(mg+k\Delta x)/(Vg)$
E. $(mg-k\Delta x)/(Vg)$
F. $k\Delta x/V$
G. $k\Delta x/(Vg)$

Les deux ailes très fines d'un avion ont une surface de 25 m^2 chacune. L'avion vole horizontalement. La vitesse de l'air est 50 m/s et 65 m/s respectivement au-dessous et au-dessus des ailes. La densité de l'air est de 1 kg/m^3. Déterminer la masse de l'avion.

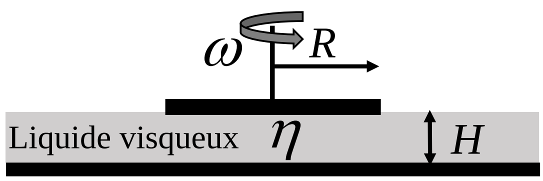
A. $\cong$ 1100 kg
B. $\cong$ 2200 kg
C. $\cong$ 3500 kg
D. $\cong$ 4400 kg
E. $\cong$ 6600 kg
F. $\cong$ 8800 kg
G. $\cong$ 11000 kg

Un tube ouvert en forme de U contient deux fluides incompressibles et immiscibles. La densité du liquide en gris est ρ_G. Déterminer la densité du liquide en noir ρ_N.



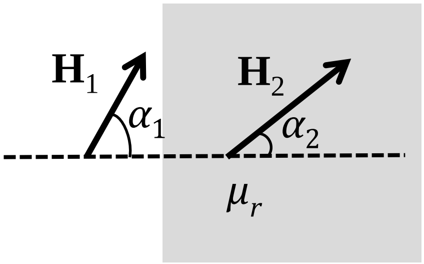
A. $(1/4)\rho_G$
B. $(1/3)\rho_G$
C. $(1/2)\rho_G$
D. $(3/4)\rho_G$
E. ρ_G
F. $2\rho_G$
G. $3\rho_G$
H. $4\rho_G$

Un disque horizontal de rayon R tourne à une distance H au-dessus d'une surface immobile. L'espace entre le disque et la surface immobile est rempli d'un liquide visqueux de viscosité η. Estimez la puissance (en W) requise pour faire tourner le disque à une vitesse angulaire ω. Nous supposons un profil de vitesse linéaire entre le disque et la surface immobile.



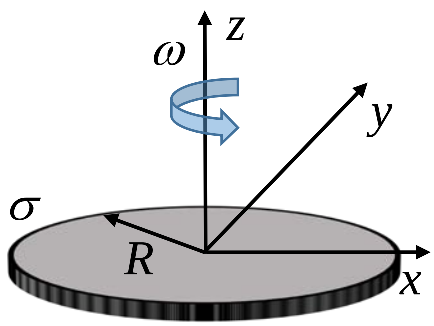
A. $2\pi\eta\omega R^4/3H$
B. $\pi\eta\omega R^3/2H$
C. $\eta\omega R^2/2$
D. $\pi\eta\omega R^4/H$
E. $\pi\eta\omega R^4/2H$
F. $\pi\eta\omega^2 R^4/2H$
G. $\pi\eta\omega^2 R^4/H$

Considérez le champ magnétique **H** à l'interface entre le vide et un matériau de perméabilité magnétique relative μ_r. Dans le vide l'angle entre le champ $\mathbf{H}_1$ et la normale à l'interface est α_1. Dans le matériau avec perméabilité magnétique relative μ_r l'angle entre le champ $\mathbf{H}_2$ et la normale à l'interface est α_2. Déterminez l'angle α_2 à l'intérieur du matériau.



A. 0
B. $\arctan(\mu_r \tan\alpha_1)$
C. $\arctan(\mu_0\mu_r \tan\alpha_1)$
D. $\arctan(2\mu_r \tan\alpha_1)$
E. $\arctan(\tan\alpha_1 / \mu_r)$
F. $\arctan(\mu_0 \tan\alpha_1 / \mu_r)$
G. $\arctan(\mu_0\alpha_1 / \mu_r)$
H. $\arctan(1/\mu_r)$

Un disque très fin de rayon R et de densité de charge superficielle σ tourne avec fréquence angulaire ω. Quel est le champ magnétique au centre du disque (i.e., en (0,0,0)) ?



A. $\mu_0\sigma\omega R/4$
B. $\mu_0\sigma\omega R/2$
C. $\mu_0\sigma\omega R$
D. $2\mu_0\sigma\omega R$
E. $\pi\mu_0\sigma\omega R$
F. 0
G. $\sigma\pi R^2 / 4\pi\varepsilon_0$
H. $\sigma\pi R^2 / \varepsilon_0$

Un électron se déplace à une vitesse de $0.01c$ sur une orbite circulaire de rayon 10^{-10} m. Quelle est l'amplitude du champ magnétique B résultant au centre de l'orbite?

A. $\cong 4.8$ T
B. $\cong 12$ T
C. $\cong 120$ T
D. $\cong 1.2$ T
E. $\cong 9.6$ T
F. $\cong 18$ T
G. $\cong 2.4$ T

Une spire circulaire de rayon R dont la normale est $\hat{\mathbf{z}}$, est plongée dans un champ magnétique dépendent du temps t décrit par $\mathbf{B} = 2at\hat{\mathbf{x}} - 2at\hat{\mathbf{y}} + 4at\hat{\mathbf{z}}$, où a est une constante indépendante du temps (en T/s). Déterminer l'amplitude de la force électromotrice induite dans la spire circulaire.

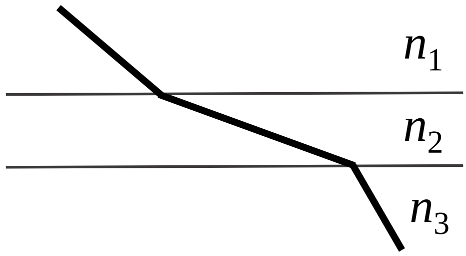
A. 0
B. $8\pi aR$
C. $4\pi aR^2 t$
D. $8\pi aRt$
E. $4\pi aR^2$
F. $\sqrt{32}\pi aR^2$
G. πaR^2

La lumière pénètre, depuis le vide, à l'extrémité d'une fibre optique cylindrique d'indice de réfraction n. Quel est l'angle d'entrée maximum θ tel que le rayon incident subit une réflexion totale à l'intérieur de la fibre ?

Note: $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

A. $\theta = \arcsin(1/n)$
B. $\theta = \arcsin(n\sqrt{n^2-1})$
C. $\theta = \arcsin(\sqrt{n-1})$
D. $\theta = \arcsin(\sqrt{n^2-1})$
E. $\theta = \arcsin(\sqrt{1-n^2})$
F. $\theta = \arcsin(n^2-1)$
G. $\theta = \arcsin(1/n^2)$
H. $\theta = \arcsin(2\sqrt{n^2-1})$

Voici la trajectoire d'un rayon lumineux traversant trois milieux d'indices de réfraction différents n_1, n_2, n_3. La figure est à l'échelle. Que peut-on conclure ?

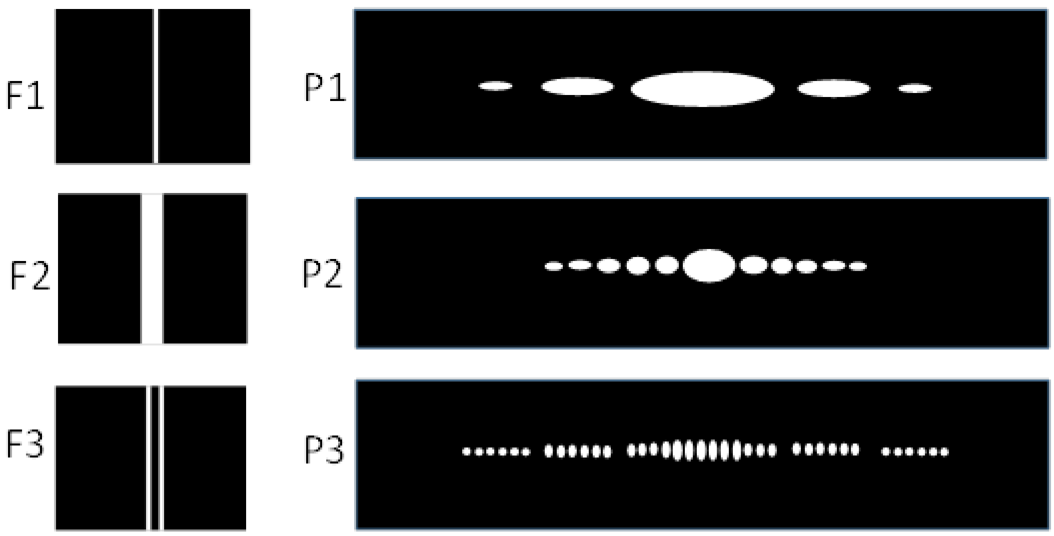


A. $n_2 < n_1 < n_3$
B. $n_1 > n_2 > n_3$
C. $n_3 < n_1 < n_2$
D. $n_2 < n_3 < n_1$
E. $n_1 < n_3 < n_2$

La sirène d'une ambulance émet un son à 400 Hz. L'ambulance se déplace à 100 km/h. Le conducteur d'une voiture qui suit l'ambulance entend une fréquence de 384.9 Hz. La vitesse du son dans l'air est de 340 m/s. Quelle est la vitesse de la voiture ?

A. $\cong 30$ km/h
B. $\cong 50$ km/h
C. $\cong 60$ km/h
D. $\cong 83$ km/h
E. $\cong 109$ km/h
F. $\cong 143$ km/h
G. $\cong 150$ km/h
H. $\cong 340$ km/h

On diffracte de la lumière laser au moyen de trois systèmes de fentes différents, en gardant la même source et la même distance entre le système de fentes et l'écran. Attribuer chacune des fentes à son image de diffraction.



A. F1 → P2 , F2 → P1
F3 → P3

B. F1 → P2, F2 → P3
F3 → P1

C. F1 → P1, F2 → P2
F3 → P3

D. F1 → P3, F2 → P1
F3 → P2

E. F1 → P3, F2 → P2
F3 → P1

F. F1 → P1, F2 → P3
F3 → P2