Corrigé 21

Exercice 3

Utiliser la définition de la matrice inverse.

Calculer $U \cdot U' = \begin{pmatrix} P & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P' & T' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

$U \cdot U' = \begin{pmatrix} P & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P' & T' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P \cdot P' & P \cdot T' + T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

$\Leftrightarrow P \cdot P' = I_2$ et $P \cdot T' + T = 0$.

$\Leftrightarrow P' = P^{-1} = P^t$ et $T' = -P^{-1}\, T = -P^t\, T$.

Finalement :

$U^{-1} = \begin{pmatrix} P\, P^t & -P^t\, T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Utiliser la définition de la matrice inverse : $AA^{-1} = I_n \;\Leftrightarrow\; A$ inversible.

$\det M = \det M^t \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M, M^t$ inversibles.

On a $MM^{-1} = I_n$: on transpose

$(M^{-1})^t \cdot M^t = I_n$

Or $(M^t)^{-1} \cdot M^t = I_n$

donc $(M^{-1})^t \cdot M^t = (M^t)^{-1} \cdot M^t \quad | \cdot (M^t)^{-1}$

et finalement, on a $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.

Exercice 5

(a) On trouve le centre de la manière suivante :

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF'}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres de l'ellipse se calculent de la manière suivante :

Longueur du grand-axe de l'ellipse : $2a = 16$ donc $a = 8$

$$c = \text{dist}(\Omega F) = 2\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{donc} \quad b^2 = 56$$

De plus, on a :

Direction du grand axe : $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{\Omega F}\|}\,\overrightarrow{\Omega F}$.

Or, $\overrightarrow{\Omega F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{\Omega F}\| = 2\sqrt{2}$, et donc $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

et comme $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ direct, alors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ce qui donne un angle $\varphi = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{u}_1) = \dfrac{\pi}{4}$.

On obtient donc l'équation canonique de l'ellipse suivante :

$\mathcal{E}\ :\ \dfrac{\overline{x}^2}{64} + \dfrac{\overline{y}^2}{56} - 1 = 0$ dans $\mathcal{R}_u(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

(b) La matrice de rotation P de l'ancienne base à la nouvelle, et le vecteur de translation T de l'origine, composent la matrice U de la manière suivante :

$$U = \begin{pmatrix} P & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Revenons à l'équation canonique :

$56\overline{x}^2 + 64\overline{y}^2 - 64 \cdot 56 = 0 \mid : 8$
$7\overline{x}^2 + 8\overline{y}^2 - 448 = 0$
On obtient donc :

$$A' = U^t A U = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -448 \end{pmatrix}$$

En inversant cette relation, on obtient :

$$A = (U^t)^{-1}\, A'\, U^{-1}$$

Par les deux exercices précédents, on a :

$$A = (U^{-1})^t A'\, U^{-1} \quad \text{où} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} P^t & -P^t T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons :

$$A'\,U^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -448 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & -\frac{21\sqrt{2}}{2} \\ -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -448 \end{pmatrix}$$

Et finalement :

$$A = (U^{-1})^t\,A'\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & -\frac{21\sqrt{2}}{2} \\ -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -448 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{29}{2} \\ -\frac{13}{2} & -\frac{29}{2} & -\frac{825}{2} \end{pmatrix}$$

car $\dfrac{63}{2} + \dfrac{8}{2} - \dfrac{896}{2} = -\dfrac{825}{2}$.

Et on obtient l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}_e$:

$$X^t\,A\,X = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{15}{2}x^2 - xy + \frac{15}{2}y^2 - 13x - 29y - \frac{825}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 15x^2 - 2xy + 15y^2 - 26x - 58y - 825 = 0\,.$$