Contrôle de géométrie analytique N°3

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 15 points

NOM :

PRENOM :

Groupe

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.

On donne les points $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 0)$.
Soient le cercle γ de diamètre AB et P un point courant de γ.
On considère les droites $a = (AP)$ et $b = (B\ ,\ \overrightarrow{\Omega P})$, où Ω est le centre de γ.

Lorsque P décrit le cercle γ, déterminer l'équation cartésienne du lieu de S intersection des droites a et b.
Caractériser avec précision ce lieu.

3.5 pts

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les équations cartésiennes de deux cercles γ_1 et γ_2 et les coordonnées d'un point P :

$$\gamma_1\ :\ (x-6)^2+(y-3)^2-1=0, \qquad \gamma_2\ :\ x^2+y^2-4=0 \qquad \text{et} \qquad P(0;-1).$$

On considère les cercles $\gamma\,(\Omega\,,\,r)$ orthogonaux à γ_1 et tels que la polaire de Ω par rapport à γ_2 passe par P.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la famille $\mathcal{F}$ des cercles γ dépendante d'un paramètre.

b) Soit M un point du plan et γ un cercle de la famille $\mathcal{F}$.
Déterminer les coordonnées de ce point M et de ce cercle γ sachant que les tangentes à γ_1, γ_2 et γ issues de M sont isométriques et de longueur $2\sqrt{3}$.
Donner la solution pour laquelle les coordonnées de M sont des entiers.

4 pts

Tourner la page

3. On considère la famille de coniques dépendante du paramètre réel λ suivantes:

$$\mathcal{F}: \quad \frac{(x-2-\lambda)^2}{(2+\lambda)^2}+\frac{(y-4\lambda)^2}{(\lambda+1)(\lambda+3)}-1=0 \quad , \quad \lambda \neq -3,-2,-1.$$

a) Déterminer les valeurs de λ de sorte que cette équation, relativement à un repère orthonormé du plan, soit une ellipse.

b) Déterminer la direction du grand-axe de ces ellipses selon les valeurs prises par le paramètre λ.

c) On considère l'ellipse dont le centre est sur l'axe Ox.
Déterminer le(s) point(s) de l'ellipse dont la tangente a pour pente $m=\frac{1}{2}$.

5 pts

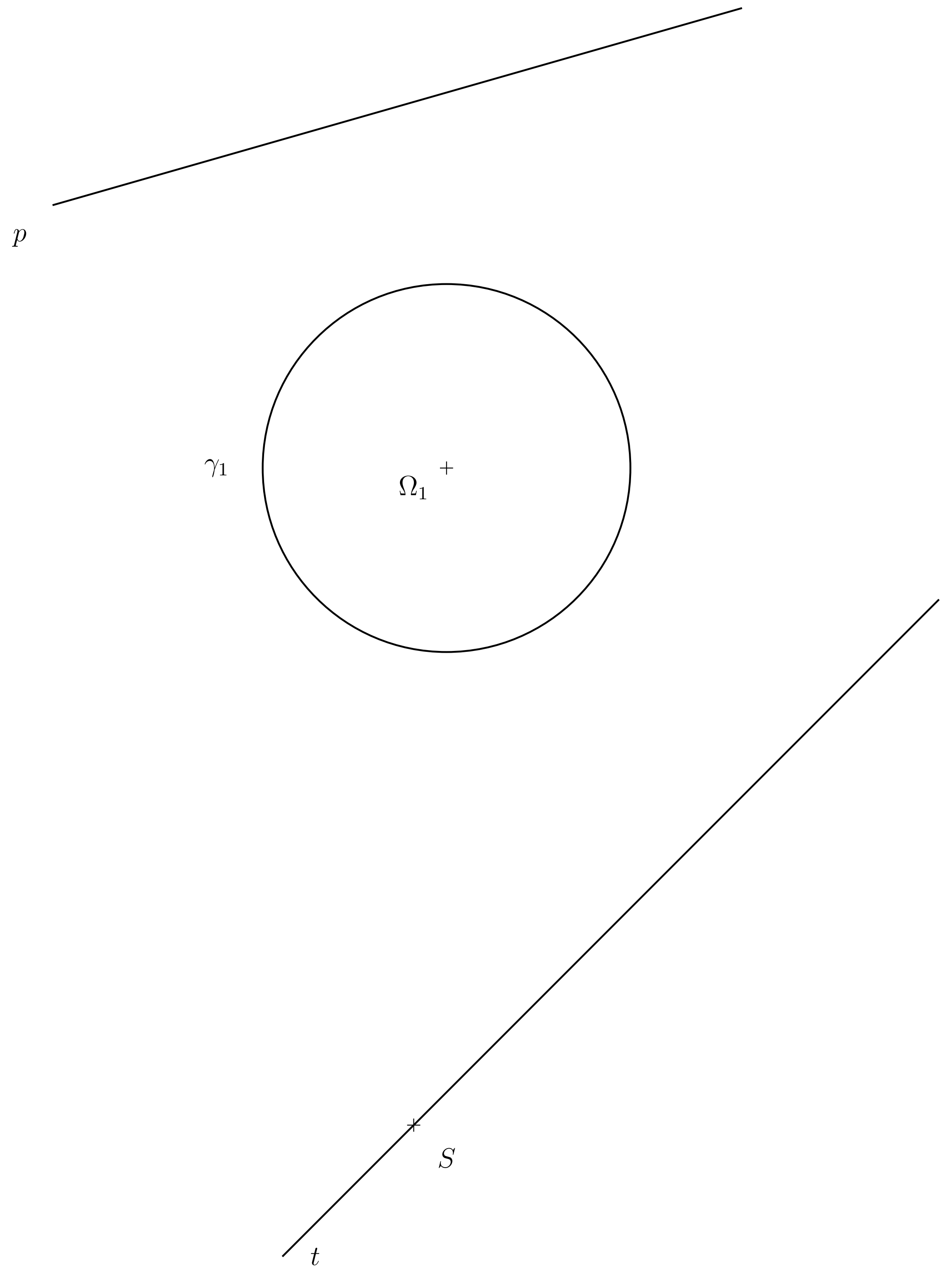
4. Dans le plan, on considère un cercle $\gamma_1\,(\Omega_1\,,\,r_1)$, une droite t, un point S appartenant à t et une droite p.

Soit γ un cercle de centre Ω et rayon r tel que :

- la droite t est une tangente à γ .
- le point S est le centre d'un cercle orthogonal à γ et à γ_1.
- le pôle de p par rapport à γ_1 appartient à γ.

Construire rigoureusement (règle, équerre, compas), sur la donnée graphique de la page suivante, le cercle γ.

2.5 pts



p
γ_1
Ω_1
S
t