

Semaine 8a

Question 8.1 – Axe neutre

Une poutre encastrée ABC de longueur L est fixée au point A et a un moment M_0 appliqué sur son extrémité libre, comme illustré sur la Figure 8.1. La section transversale est carrée. Pour le cas II, on applique aussi une axiale force F_0 .

Pour les cas I, II et III, calculer :

- La position de l'axe neutre y_0
- L'emplacement et la valeur absolue maximale de la contrainte normale $|\sigma_{max}|$

-Indice pour cas 3 : chaque partie ($x < L/2$, $x > L/2$) de la poutre peut être analysée indépendamment

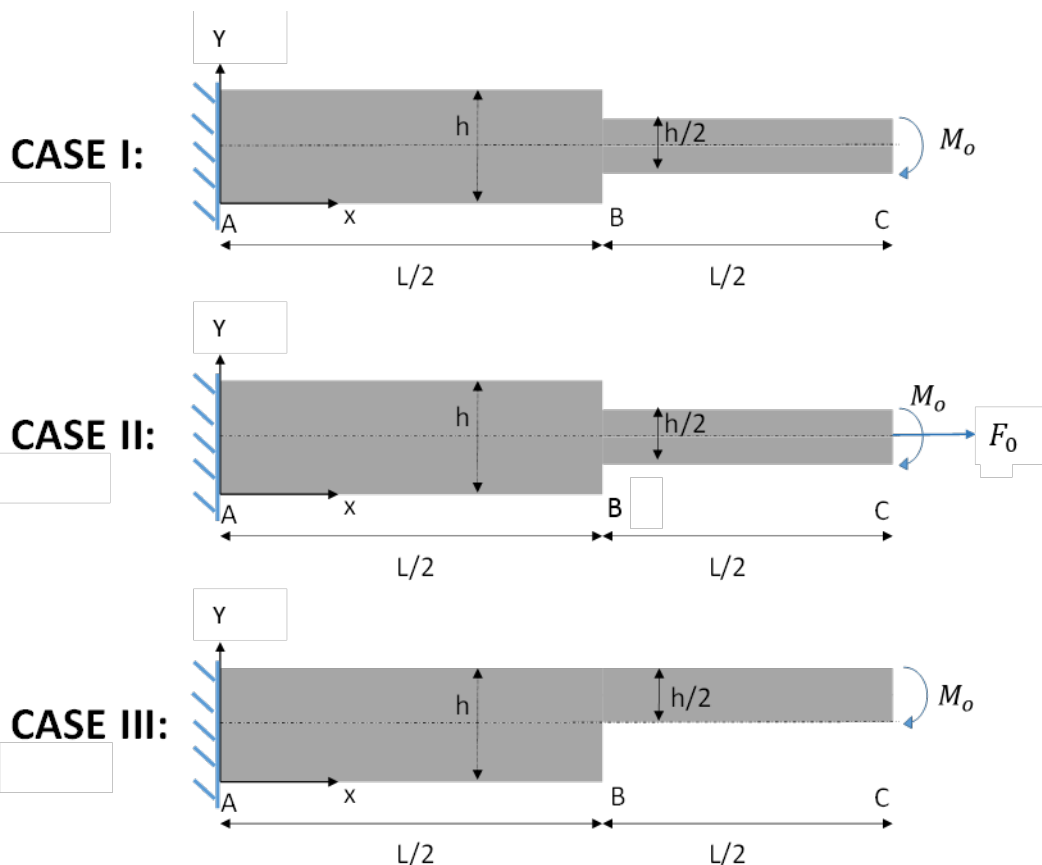


Figure 8.1 | Une poutre encastrée, de section carrée.

Solution

Ce qui est donné ?

Longueur L

Épaisseur h

Moment M_0

Charge ponctuelle F_0

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Ce qui est demandé ?

La position de l'axe neutre y_0 pour les cas I, II et III.

L'emplacement et la valeur absolue de la contrainte normale maximale $|\sigma_{max}|$

CAS I:

Nous sommes dans un cas de flexion pure, ce qui signifie que l'axe neutre coïncidera avec le centre de masse et sera donné par la formule que l'on peut trouver dans le formulaire (ou simplement par symétrie):

$$y_{0,bending} = \frac{\int_A E y dA}{\int_A E dA} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad (4.1)$$

En flexion pure, la contrainte maximale est donnée par :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_{int}}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_{max} c}{I_{z,y_0}} \quad (4.2)$$

Où c est la distance maximale de l'axe neutre au bord de la poutre et I est le moment d'inertie.

La position de l'axe neutre

Etant donné que la section transversale est symétrique, la position de l'axe neutre est au centre de chaque partie ($x > L/2$ et $x < L/2$), avec l'origine on bas à gauche comme dans la figure.

$$y_0(x) = \frac{h}{2} \quad (4.3)$$

La contrainte maximale dans la poutre :

Pour une section carrée :

$$I = \iint_A (y - y_0)^2 dy dz = \frac{h^4}{12} \quad (4.4)$$

Où h est l'épaisseur et la largeur de la section transversale. Il en résulte que :

Pour $x \leq \frac{L}{2}$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_1} c_1 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{12}} \frac{h}{2} = \frac{6M_0}{h^3} \quad (4.5)$$

Pour $x > \frac{L}{2}$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_2} c_2 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{16 \cdot 12}} \frac{h}{4} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.6)$$

Ce qui signifie que la valeur maximale de la contrainte se situera dans la zone $x > \frac{L}{2}$ à la fois en haut et en bas de la deuxième partie de la poutre ($y = \frac{h}{4}$ ou $y = \frac{3h}{4}$) et elle sera :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.7)$$

CAS II:

La position de l'axe neutre

Puisqu'il y a une charge axiale sur la poutre, la contrainte sera donnée par :

$$\sigma(x, y) = \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y - y_0}{\rho} \quad (4.8)$$

Pour calculer la position de l'axe neutre, nous appliquons le principe de superposition et trouvons la position où la contrainte est nulle :

Pour $x \leq \frac{L}{2}$:

$$\begin{aligned} \sigma(y'_0) = 0 &= \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y'_0 - y_0}{\rho} \rightarrow y'_0 = \frac{F_0}{A_1 E} \rho + y_0 \\ y'_0 &= \frac{F_0 I_{z, y_0}}{A_1 M_{int}} + y_0 = -\frac{F_0 h^2}{12 M_0} + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où A_1 est l'aire de la section de la partie de la poutre $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

Pour $x > \frac{L}{2}$:

$$\begin{aligned} \sigma(y'_0) = 0 &= \frac{F_0}{A_2} - E \frac{y'_0 - y_0}{\rho} = \frac{F_0}{\frac{h^2}{4}} + \frac{M_{int}}{h^4/192} \left(y_0 - \frac{h}{2} \right) \\ y'_0 &= -\frac{F_0 h^2}{48 M_0} + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Où A_2 est l'aire de la section de la partie de la poutre pour $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

La contrainte maximale dans la poutre :

La contrainte maximale sera soit sur le dessus ou le dessous de la section:

Pour $x \leq \frac{L}{2}$:

$$\sigma(y_{top}) = \frac{6 M_0}{h^3} + \frac{F_0}{h^2} \quad \& \quad \sigma(y_{bottom}) = -\frac{6 M_0}{h^3} + \frac{F_0}{h^2} \quad (4.11)$$

Pour $x > \frac{L}{2}$:

$$\sigma(y_{top}) = \frac{48 M_0}{h^3} + \frac{4 F_0}{h^2} \quad \& \quad \sigma(y_{bottom}) = -\frac{48 M_0}{h^3} + \frac{4 F_0}{h^2} \quad (4.12)$$

Ce qui signifie que la contrainte maximale sera sur le dessus de la deuxième partie de la poutre :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} + \frac{4F_0}{h^2} \quad (4.13)$$

Autre option

$$\sigma(x, y) = E \frac{y - y'_0}{\rho}$$

En travaillant à partir de y'_0 , la force est déjà incluse

Par exemple, pour $x \leq \frac{L}{2}$, on a :

$$\sigma_{bot} = 12 \frac{M_0}{h^4} (0 - y'_0) = 12 \frac{M_0}{h^4} \left(\frac{F_0 h^2}{12 M_0} - \frac{h}{2} \right)$$

$$\sigma_{bot} = \frac{F_0}{h^2} - \frac{6M_0}{h^3} \text{ comme eq 4.11 ci-dessus}$$

CAS III: Moment appliqué à l'extrémité de la poutre, qui n'est plus symétrique.

La position de l'axe neutre

Comme dans le CAS I, nous sommes dans un cas de flexion pure, ce qui signifie que l'axe neutre coïncidera avec le centre de masse, et sera donné par l'Eq. (4.3). Cependant, la section est discontinue et asymétrique. L'axe neutre est situé au centre de masse de chaque section :

$$\begin{aligned} y_0 \left(x < \frac{L}{2} \right) &= \frac{h}{2} \\ y_0 \left(x > \frac{L}{2} \right) &= \frac{3h}{4} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La contrainte maximale dans la poutre :

Nous utilisons les mêmes formules que dans le CAS I:

Pour $x \leq \frac{L}{2}$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_1} c_1 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{12}} \frac{h}{2} = \frac{6M_0}{h^3} \quad (4.15)$$

Pour $x > \frac{L}{2}$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_2} c_2 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{16 \cdot 12}} \frac{h}{4} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.16)$$

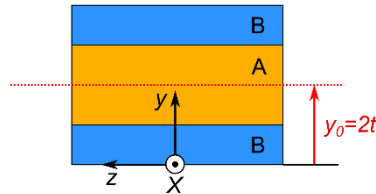
Ce qui signifie que la contrainte maximale sera située dans la zone $x > \frac{L}{2}$, et se trouve en haut et en bas et vaut :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.17)$$

Q2 Contrainte normale maximale

A) The location of the neutral axis:

$$y_0 = \frac{\sum E_i Q_i}{\sum E_i A_i} = \frac{E_A Q_A + E_B Q_B}{E_A A_A + E_B A_B} = \frac{9E(2wt)(2t) + 3E(wt)(\frac{t}{2} + \frac{7t}{2})}{9E(2wt) + 3E(2wt)} = 2t$$



B) Bending stiffness: $\langle EI \rangle = E_A I_A + E_B I_B = 9E \left(\frac{w(2t)^3}{12} \right) + 3E \left(\frac{w(4t)^3}{12} - \frac{w(2t)^3}{12} \right) = 20Ewt^3$

C) General formula of the radius of curvature (ρ):

$$\rho = \frac{\langle EI \rangle}{M} = \frac{20Ewt^3}{0.2Ewt^2} = 100t$$

D) Maximum and minimum longitudinal strains:

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}, y \in [0, 4t]$$

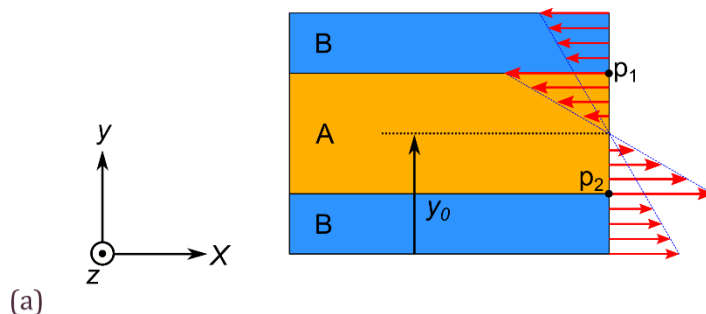
$$\varepsilon_{x,min} = -\frac{4t - 2t}{100t} = -0.02 \text{ and } \varepsilon_{x,max} = -\frac{0 - 2t}{100t} = 0.02$$

E) To find the maximum tensile stress in the composite beam. For this we need to find maximum tensile stress in both materials A and B.

$$\sigma_{max,B} = -E_B \frac{y - y_0}{\rho_0} = -300[MPa] \frac{0 - 20 [mm]}{1000 [mm]} = 6 [MPa]$$

$$\sigma_{max,A} = -E_A \frac{y - y_0}{\rho_0} = -900[MPa] \frac{10 - 20 [mm]}{1000 [mm]} = 9 [MPa] \leftarrow \text{Maximum tensile stress}$$

F) Stress distribution:



The maximum tensile stress occurs at $y = t$ (point p_2) and the maximum compressive stress at $y = 3t$ (point p_1)

Q8.3 Contrainte normale maximale

Une poutre, de largeur b , est composée de deux matériaux collés, à la section montrée en Fig 8.3. Les modules de Young des deux matériaux sont $E_1 = 300 \text{ GPa}$ et $E_2 = 100 \text{ GPa}$. On donne que la courbure de la poutre est $\kappa = 8/h \cdot 10^{-4}$.

Quel est la valeur absolue de la contrainte normale maximale σ_x ?

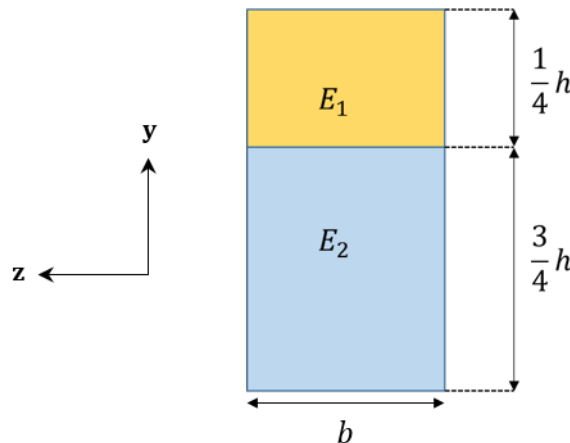


Fig 8.3 | Vue en coupe de la section de la poutre

Solution

What is given?

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}h \\ t_2 &= \frac{3}{4}h \\ E_1 &= 300 \text{ GPa} \\ E_2 &= 100 \text{ GPa} \\ \kappa &= 8/h \cdot 10^{-4} \\ \text{width} &= b \end{aligned}$$

Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

The cross-section of the beam in the YZ plane remains un-deformed along the length of the beam.

What is asked?

Maximum bending stress σ_x

Principles and formula

We first start by calculating the location of the neutral axis, which we can do using the formula from the formula sheet and, for example, setting the origin at the bottom of the cross-section :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\int_A E(y)y dA}{\int_A E(y) dA} = \frac{\int_0^b \left(\int_0^{\frac{3h}{4}} E_2 y dy \right) dz + \int_0^b \left(\int_{\frac{3h}{4}}^h E_1 y dy \right) dz}{\int_0^b \left(\int_0^{\frac{3h}{4}} E_2 dy \right) dz + \int_0^b \left(\int_{\frac{3h}{4}}^h E_1 dy \right) dz} = \\ &= \frac{E_2 \frac{b}{2} \frac{9}{16} h^2 + E_1 \frac{b}{2} \left(h^2 - \frac{9}{16} h^2 \right)}{E_2 \frac{3}{4} bh + E_1 \frac{1}{4} bh} = \frac{5}{8} h \end{aligned} \quad (0.1)$$

To find the maximum bending stress, we start with the flexure formula for composite and the relationship between the moment and the curvature:

$$\begin{aligned} M_z(x) &= \frac{1}{\rho} \langle EI_{z,y_0} \rangle = \kappa \langle EI_{z,y_0} \rangle \\ \sigma_x(x, y) &= -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) = -E(y)\kappa(y - y_0) \end{aligned} \quad (0.2)$$

The maximum stresses occur at both extremes of the cross section:

$$|\sigma_{bottom}| = \left| -E_2 \cdot \frac{8}{h} \cdot 10^{-4} \cdot -\frac{5}{8}h \right| = 50 \text{ MPa} \quad (0.3)$$

$$|\sigma_{top}| = \left| -E_1 \cdot \frac{8}{h} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{3}{8}h \right| = 90 \text{ MPa} \quad (0.4)$$

The maximum normal stress is therefore 90 MPa.

Q8.4 Question courte – Contrainte normale maximale

Une poutre composite, faite d'un panneau aggloméré (matériau A, en bleu) recouvert de deux parois en fibre de verre (matériau B, en gris), a une section telle qu'illustrée en Fig 8.2

La largeur de la poutre est de 5 cm, l'épaisseur des parois est de 0.25 cm et l'épaisseur du panneau central est de 1 cm. La poutre est soumise à un moment de flexion positif de 28 N.m selon l'axe z. Les modules de Young des deux matériaux sont $E_A = 10 \text{ GPa}$ et $E_B = 27.5 \text{ GPa}$.

- Déterminez les contraintes normales maximales σ_A et σ_B dans les matériaux A et B
- Même question si on inverse les matériaux : fibre de verre au centre et aggloméré à l'extérieur

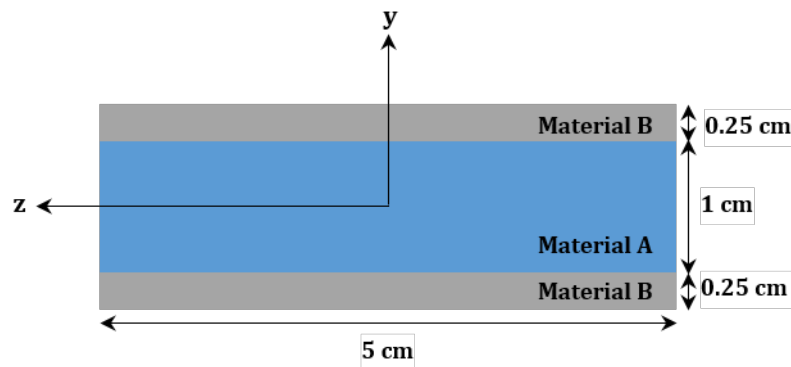


Figure 8.2 | Vue en coupe de la section de la poutre composite

Solution

What is given?

$$\begin{aligned} w_{beam} &= 5.00 \text{ cm} \\ t_A &= 1.00 \text{ cm} \\ t_B &= 0.25 \text{ cm} \\ M &= 2.80 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\ E_A &= 10.00 \text{ GPa} \\ E_B &= 27.50 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

The cross-section of the beam in the YZ plane remains un-deformed along the length of the beam.

What is asked?

Maximum bending stress σ_A & σ_B

Principles and formulas:

$$\sigma_{x,i}(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

Pour trouver les $\langle EI_{z,y_0} \rangle$, nous commençons par trouver les moments d'inertie de chaque matériau.

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA \quad (0.1)$$

For a rectangular cross section and $y_0 = 0$:

$$I_A = \frac{w_{\text{beam}} t_A^3}{12} \quad (0.2)$$

For the moment of inertia of material B, a difference is made between the moment of inertia of the whole beam and material A:

$$I_B = I_{\text{beam}} - I_A = \frac{w_{\text{beam}}}{12} (h^3 - t_A^3) \quad (0.3)$$

Where $h = 2t_B + t_A$.

To find the normal stresses, one uses the flexure formula for composite beams:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i}(x, y) &= -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) \\ \langle EI_{z,y_0} \rangle &= \sum_i EI_{z,y_0,i} = E_A I_A + E_B I_B \end{aligned} \quad (0.4)$$

attention, ici c'est facile d'utiliser I_A et I_B , car tout les moments d'inertie sont autour de l'axe $y=0$. Et donc pas de Steiner à utiliser...

Ainsi:

$$\sigma_A = \frac{M_z E_A}{E_A I_A + E_B I_B} \left(\frac{t_A}{2} \right); \quad \sigma_B = \frac{M_z E_B}{E_A I_A + E_B I_B} \left(\frac{h}{2} \right) \quad (0.5)$$

Résultats numériques:

$$I_A = 0.41 \text{ cm}^4; \quad I_B = 0.99 \text{ cm}^4 \quad (0.6)$$

$$\sigma_A = 4.46 \text{ MPa}; \quad \sigma_B = 18.4 \text{ MPa} \quad (0.7)$$

OPTIONNEL

Q 8.5 Deformation d'un composite soumis a une force excentrique

Dans ce problème, nous allons analyser comment une structure composite se déforme lorsque soumise à une force excentrique. il faudra trouver l'axe neutre et le rayon de courbure que nous utiliserons pour analyser la répartition des contraintes et déformations dans les différentes couches.

Ce problème est une version simplifiée d'un modèle développé par Bekir Aksoy durant sa thèse de doctorat pour un actionneur souple. Article sur moodle et à <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/adfm.202001597>

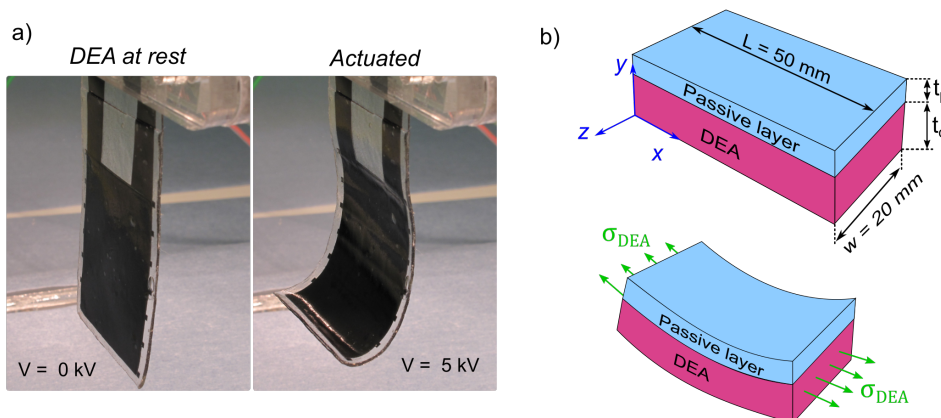


Figure 8.4 | a) Un DEA à 0 kV et 5 kV. b) Le schéma du dispositif composite.

La force excentrique est générée par un actionneur diélectrique souple (Dielectric Elastomer Actuator ou DEA). Lorsque l'on applique une tension électrique au DEA, sa surface augmente et son épaisseur diminue. Le DEA est incompressible, donc son volume est constant et le coefficient de poisson $\nu=0.5$. En collant une couche "passive" sur le DEA, il est possible de transformer cette déformation dans le plan en un mouvement de flexion (voir fig 8.4a).

La structure du dispositif est illustrée en Fig 8.4b. Sa longueur est $L = 50$ mm et sa largeur est $w = 20$ mm. La couche passive et le DEA ont un module d'élasticité de $E_{\text{pass}} = 1.20$ MPa et $E_{\text{DEA}} = 0.60$ MPa et leur épaisseurs initiales sont $t_{\text{pass}} = 20$ μm and $t_{\text{dea}} = 200$ μm .

Lorsqu'une tension de 5 kV est appliquée au DEA, la structure fléchit selon l'axe z avec un rayon de courbure ρ_0 au niveau de l'axe neutre y_0 .

Vous pouvez faire les hypothèses suivantes :

- le DEA exerce une force uniquement dans la direction x.
- la contrainte σ_{DEA} est uniformément répartie dans la section du DEA
 $(\epsilon_{\text{permittivity}} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ N/V}^2)$ et est :
$$\sigma_{DEA} = \epsilon_{\text{permittivity}} \frac{V^2}{t_{\text{dea}}^2}$$

Votre mission :

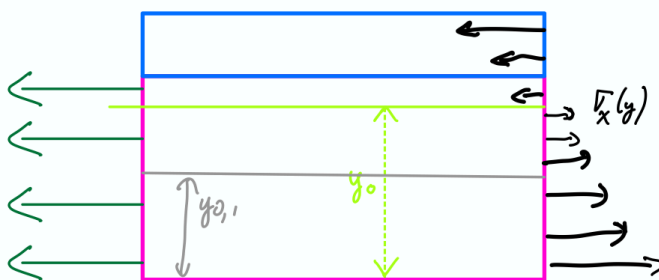
- Trouvez le rayon de courbure ρ_0 et l'axe neutre y_0 en utilisant l'équilibre des forces et moments. L'axe neutre est-il compris dans la section du dispositif ou à l'extérieur de celui ?
- Quel est le type de contrainte dans chaque couche (tension/compression) ?
- Calculez les déformations longitudinales maximales et minimales.
- Calculez la longueur moyenne du DEA lorsqu'il est en flexion. Vous pouvez pour cela

calculer la longueur du plan à $y = 100 \mu\text{m}$.

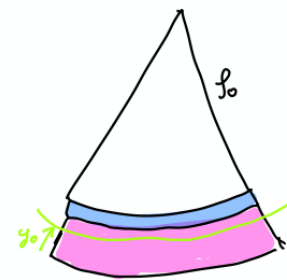
5. Dessinez un schéma représentant la répartition des contraintes internes et des déformations.

Processus proposé option 1 (nous semble être la plus simple)

- A. **Faire une coupe**, montrant d'un côté les contraintes dues à σ_{DEA} et de l'autre les contraintes $\sigma_x(y)$ – voir exemple ci-dessous
- B. **Sur ce dessin, utiliser l'équilibre des forces et des moments**. Coté gauche, moment et forces en fonction de σ_{DEA} . Coté droite, moment et forces en fonction de ρ_0 et y_0
- C. **Résoudre pour trouver ρ_0 et y_0**
- D. **Dessiner les contraintes et déformations relatives en fonction de y** .



- ce dessin est conceptuellement juste
 - mais ne représente pas exactement les $\tau_x(y)$ que nous allons calculer



Processus Option 2

- E. Calculer forces et moments internes dues à F_{DEA}
- F. Exprimer forces et moments internes en fonction de ρ_0 et y_0
- G. trouver ρ_0 et y_0 en passant par l'équilibre des forces et des moment.
- H. Dessiner contraintes et déformations relatives en fonction de y .

Solution

What is given?

Dimensions: $w = 20\text{ mm}$, $L = 50\text{ mm}$, $t_{\text{pass}} = 20\text{ }\mu\text{m}$, and $t_{\text{dea}} = 200\text{ }\mu\text{m}$

The Young's moduli: $E_{\text{pass}} = 1.20\text{ MPa}$ and $E_{\text{dea}} = 0.60\text{ MPa}$

The applied voltage: 5 kV

$\epsilon_{\text{permittivity}} = 4 \cdot 10^{-11}\text{ N/V}^2$

Assumptions

The applied stress acting uniformly on the cross-section of the device and it is always perpendicular to this surface.

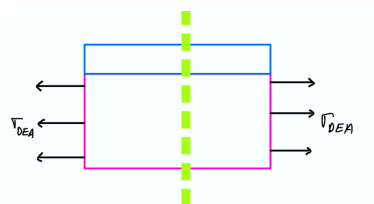
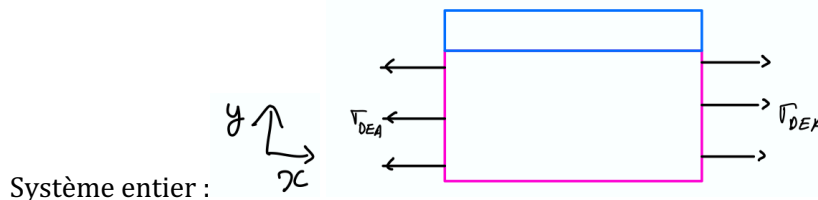
The deformation is constrained in the transverse direction.

What is asked?

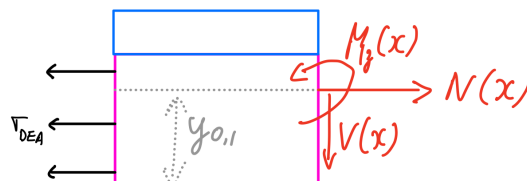
- The location of the neutral axis and the radius of the curvature, ρ_0 and y_0
- Stress types that each layer undergoes, i.e. tensile or compressive.
- The maximum and the minimum longitudinal strains.
- The average length of the dielectric layer after the bending.
- The stress distribution on the cross-section

Principles and formula

Etape A : dessins. le système n'est pas encore déformé dans le diagramme des forces ici



On « coupe » au trait vert.



Attention : $M(x)$, $V(x)$ et $N(x)$ sont appliqués au centroïde (c'est-à-dire où serait l'axe neutre si pas de forces appliquées). Le centroïde est située à $y_{0,1}$ du bas de l'objet (ici $y_{0,1} = 118\text{ }\mu\text{m}$ mais vous n'en avez pas besoin). Ce n'est pas l'axe neutre y_0 car les forces axiales décalent y_0 de $y_{0,1}$

Maintenant on laisse le système se déformer. La coupe ressemble au schéma ci-dessous, car $M_z(x)$ et $N(x)$ donnent lieu à des contraintes $\sigma_x(y)$

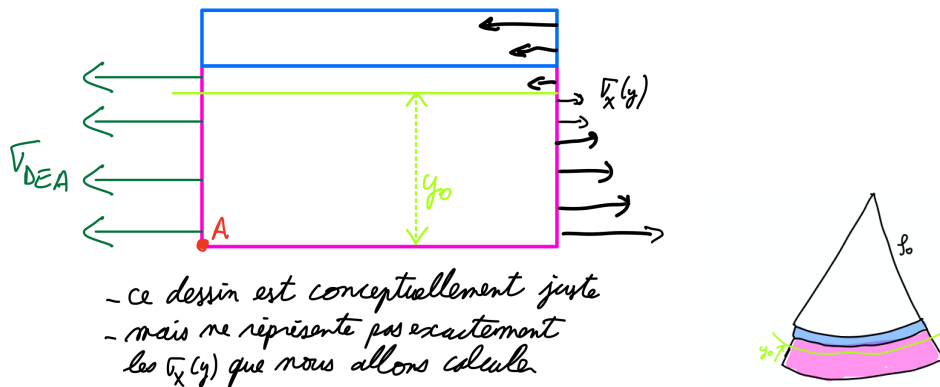
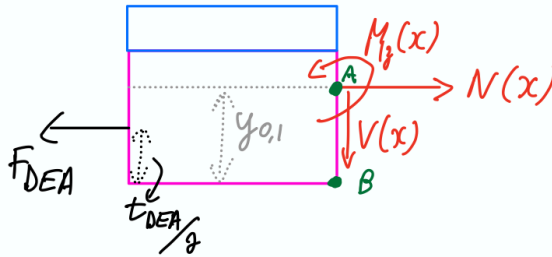


Fig 31

ATTENTION: dans ce dessin, pour la coupe de la poutre déformée, on ne fait pas apparaître de moment $M(z)$ car elle est déjà prise en compte dans les contraintes $\sigma_x(y)$

Etape B. (une autre façon de résoudre l'étape B est donné à la fin de ces solutions)

B1. La force du DEA,



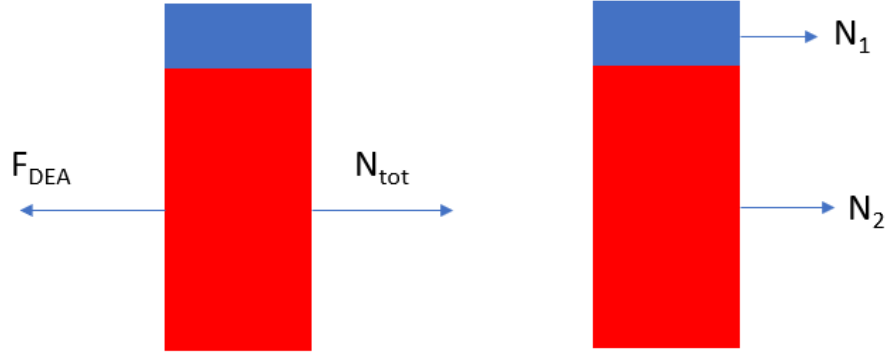
À gauche, on intègre pour trouver la force du DEA

$$F_{DEA} = \int_0^w \int_0^{t_{dea}} \varepsilon_{permittivity} \frac{V^2}{t_{dea}^2} dA = \varepsilon \frac{V^2}{t_{dea}} w = 0.1 [N] \quad (0.1)$$

Le point d'application de cette force est à $t_{DEA}/2$ du bas.

$$\text{statique, donc } \sum F = 0. \quad \text{donc. } N(x) = F_{DEA}$$

La force interne $N(x)$ du à $\sigma_x(y)$ est (nous travaillons ici en mm)



The device bends due to the dielectric force and the limiting effect of the passivation layer. Since no external axial forces are applied, the integrated total stress in the x direction is equal to zero at equilibrium:

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_{\text{DEA}} + \sigma_x(y) = 0$$

At equilibrium: $F_{\text{DEA}} = -N_{\text{tot}}$ with $N_{\text{tot}} = N_1 + N_2$ (see figure above)

N_1 acts only on the passivation layer and N_2 acts only on the dielectric layer.

The force F_{DEA} acts as an axial load on the composite structure:

Combining the formula in the course for an axial loaded structure and a composite structure:

$$\sigma_{\text{total},x}(y) = \frac{N_{\text{tot}}}{A} - E(y) \frac{(y - y_0)}{\rho}$$

By definition: $N_{\text{tot}} = \int_A \sigma_x(y) dA$

We get at equilibrium:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \frac{F_{\text{dea}}}{A} - E_i \frac{y - y_0}{\rho_0} dA = \\ &= \int_0^{t_{\text{dea}}} \int_0^w \frac{N_1}{A} dA - \int_0^{t_{\text{dea}}} \int_0^w -E_{\text{dea}} \frac{y - y_0}{\rho_0} dA + \int_{t_{\text{dea}}}^{t_{\text{dea}}+t_{\text{pass}}} \int_0^w \frac{N_2}{A} dA - \int_{t_{\text{dea}}}^{t_{\text{dea}}+t_{\text{pass}}} \int_0^w -E_{\text{pass}} \frac{y - y_0}{\rho_0} dA \\ &= N_1 + N_2 + w \int_0^{t_{\text{dea}}} -E_{\text{dea}} \frac{y - y_0}{\rho_0} dy + w \int_{t_{\text{dea}}}^{t_{\text{dea}}+t_{\text{pass}}} -E_{\text{pass}} \frac{y - y_0}{\rho_0} dy = 0 \end{aligned}$$

By substituting $N_1 + N_2 = -F_{\text{DEA}}$, $E_{\text{dea}} = 0.6 \text{ MPa}$, $E_{\text{pass}} = 1.2 \text{ MPa}$, and $w = 20 \text{ mm}$ we get:

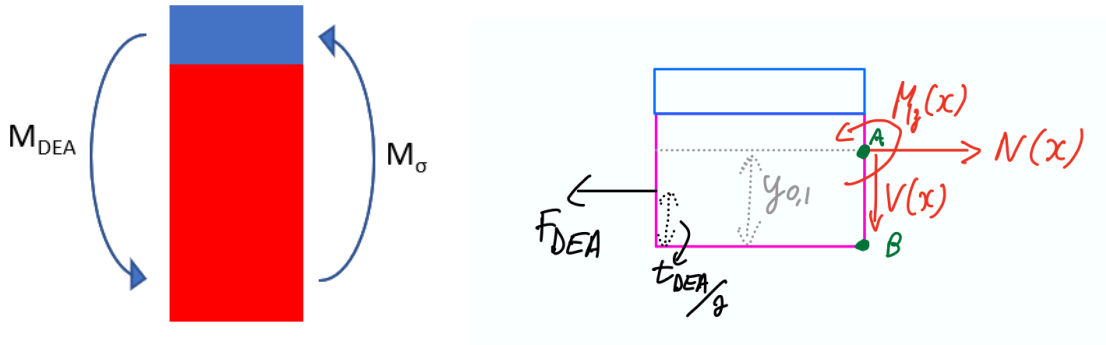
$$\begin{aligned} -N_{\text{tot}} &= -\frac{E_{\text{dea}} w}{\rho_0} \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_0^{0.2} - \frac{E_{\text{pass}} w}{\rho_0} \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{0.2}^{0.22} \\ &= -\frac{0.3408 - 2.88 y_0}{\rho_0} [\text{N}] \end{aligned}$$

$$-N_{\text{tot}} = F_{\text{DEA}} = -\frac{0.3408 - 2.88y_0}{\rho_0} = 0.1 \text{ [N]}$$

B2. Les moments au point B: il y a plusieurs façons de la calculer. Soit par les forces ponctuelles, soit par forces distribuées. Nous allons travailler au point B ($y=0$, pour simplifier les calculs)

Similaire au point précédent mais en calculant le moment et non la contrainte axiale totale :

$$M_{\text{total}}(y) = M_{\text{DEA}} - M_{\text{due à } \sigma} = 0$$



$$M_{\text{DEA}} = \int_0^w dz \int_0^{t_{\text{dea}}} \left(\epsilon_{\text{permittivity}} \frac{V^2}{t_{\text{dea}}^2} \right) y dy = \epsilon \frac{V^2}{2} w = 0.01 \text{ [N} \cdot \text{mm]}$$

$$M_{\text{due à } \sigma} = \int_A \sigma_x(y) y dA =$$

On a donc à l'équilibre :

$$M_{\text{total}}(y) = \int_0^w dz \int_0^{t_{\text{dea}}} \left(\epsilon_{\text{permittivity}} \frac{V^2}{t_{\text{dea}}^2} \right) y dy - \int_A \left(-E_i \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dA = 0 \quad (0.2)$$

$$\int_A \left(-E_i \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dA = \int_0^w dz \int_0^{t_{\text{dea}}} \left(-E_{\text{dea}} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy + \int_0^w dz \int_{t_{\text{dea}}}^{t_{\text{dea}}+t_{\text{pass}}} \left(-E_{\text{pass}} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy$$

$$\epsilon \frac{V^2}{2} w - \int_A \left(-E_i \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dA = 0$$

$$\epsilon \frac{V^2}{2} w - \int_0^w dz \int_0^{t_{\text{dea}}} \left(-E_{\text{dea}} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy + \int_0^w dz \int_{t_{\text{dea}}}^{t_{\text{dea}}+t_{\text{pass}}} \left(-E_{\text{pass}} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy = 0$$

En utilisant $E_{\text{dea}} = 0.6 \text{ MPa}$, $E_{\text{pass}} = 1.2 \text{ MPa}$, et $w = 20 \text{ mm}$ nous obtenons:

$$0 = \epsilon \frac{V^2}{2} w - \frac{E_{\text{dea}} w}{\rho_0} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y_0 y^2}{2} \right) \Big|_0^{0.2} - \frac{E_{\text{pass}} w}{\rho_0} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y_0 y^2}{2} \right) \Big|_{0.2}^{0.22}$$

$$0 = 0.01 - \frac{0.053 - 0.341y_0}{\rho_0} \text{ [N} \cdot \text{mm]} \quad (0.3)$$

$$0.01 \text{ [N mm]} = -\frac{0.053 - 0.341y_0}{\rho_0} \text{ [N} \cdot \text{mm]}$$

Etape C

On veut trouver ρ_0 et y_0 . On divise les deux équations en rouge ci-dessus et on obtient

$$\frac{0.341 - 2.88y_0}{-0.053 + 0.341y_0} = 10 \rightarrow y_0 = 0.3618 \text{ [mm]} \quad (0.4)$$

Et donc $\rho_0 = 7.0124 \text{ mm}$. Le DEA s'est donc enroulé sur lui même!

L'axe neutre est à l'EXTERIEUR du DEA! (le dispositif a une épaisseur de 220 μm)

What does this mean? The neutral axis is $362 \mu\text{m} - 220 \mu\text{m} = 142 \mu\text{m}$ above the top surface of the passive layer. **Thus both the dielectric and the passive layers are under tensile stress.**

Etape D

The maximum strain is at $y = 0$ (bottom surface), and the minimum strain occurs at $y = 0.22 \text{ mm}$ (top surface). Note both values are positive.

$$\varepsilon_{\max} = -\frac{y - y_0}{\rho_0} = -\frac{0 - 0.3618}{7.01} = 0.0516 \quad (0.5)$$

$$\varepsilon_{\min} = -\frac{0.220 - 0.3618}{7.01} = 0.00202 \quad (0.6)$$

The average length of the dielectric layer can be found using the strain value at its center.

$$L_{d,\text{center}} = L(1 + \varepsilon_{\text{dea,center}}) = L\left(1 - \frac{y_{\text{dea,center}} - y_0}{\rho_0}\right) = 51.87 \text{ [mm]} \quad (0.7)$$

So the center of the DEA is 1.87 mm longer.

The strain and the stress distribution on the layers (note all layers are in tension) are found using

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho} \quad \text{and} \quad \sigma_x(y) = -E(y) \frac{y - y_0}{\rho}$$

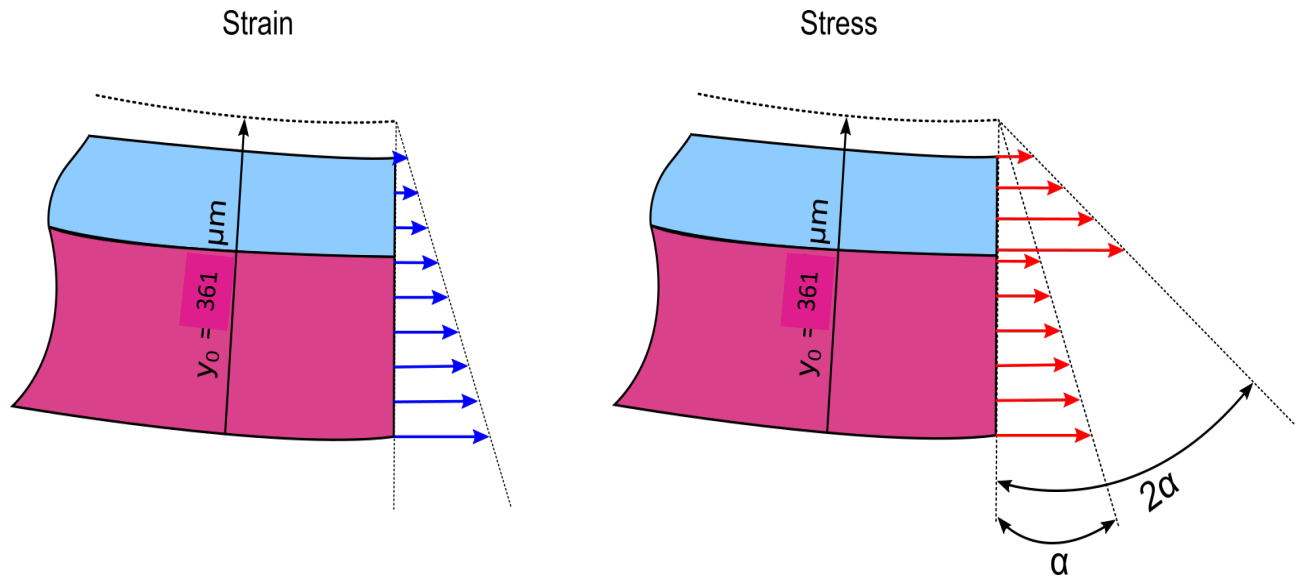
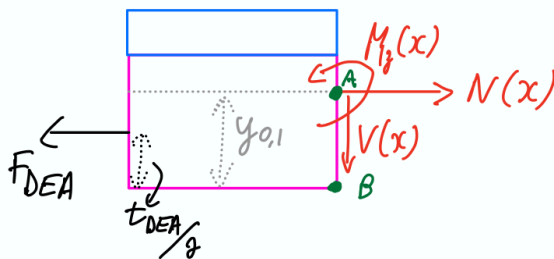


Figure 0.1 | The strain and the stress distribution on the device cross-section

Alternative pour Etape B

Etape B

B1. La force du DEA.



À gauche, on intègre pour trouver la force du DEA

$$F_{DEA} = \int_0^w \int_0^{t_{dea}} \epsilon_{permittivity} \frac{V^2}{t_{dea}^2} dA = \epsilon \frac{V^2}{t_{dea}} w = 0.1 [N] \quad (0.8)$$

Le point d'application de cette force est à $t_{DEA}/2$ du bas.

La force interne $N(x)$ du à $\sigma_x(y)$ est (nous travaillons ici en mm)

$$N = \int_A \sigma_x(y) dA =$$

$$N = \int_A -E_i \frac{y-y_0}{\rho_0} dA = w \int_0^{t_{dea}} -E_{dea} \frac{y-y_0}{\rho_0} dy + w \int_{t_{dea}}^{t_{dea}+t_{pass}} -E_{pass} \frac{y-y_0}{\rho_0} dy$$

By substituting $E_{dea} = 0.6$ MPa, $E_{pass} = 1.2$ MPa, and $w = 20$ mm we get:

$$N = -\frac{E_{dea}w}{\rho_0} \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_0^{0.2} - \frac{E_{pass}w}{\rho_0} \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{0.2}^{0.22} = -\frac{0.3408 - 2.88y_0}{\rho_0} \text{ [N]}$$

$$\text{statique, donc } \sum F = 0. \quad \text{donc. } N(x) = F_{DEA}$$

$$N = F_{DEA} = -\frac{0.3408 - 2.88y_0}{\rho_0} = 0.1 \text{ [N]}$$

B2. Les moments au point B: il y a plusieurs façons de la calculer. Soit par les forces ponctuelles, soit par forces distribuées (fig 33). Nous allons travailler au point B ($y=0$, pour simplifier les calculs)

à Gauche.

$$M_{DEA} = \int_0^w dz \int_0^{t_{dea}} \left(\varepsilon_{permittivity} \frac{V^2}{t_{dea}^2} \right) y dy = \varepsilon \frac{V^2}{2} w = 0.01 \text{ [N} \cdot \text{mm]}$$

Et à droite :

$$M_{\text{due à } \sigma} = \int_A \sigma_x(y) y dA = \int_A \left(-E_i \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dA = \int_0^w dz \int_0^{t_{dea}} \left(-E_{dea} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy + \int_0^w dz \int_{t_{dea}}^{t_{dea}+t_{pass}} \left(-E_{pass} \frac{y-y_0}{\rho_0} \right) y dy \quad (0.9)$$

En utilisant $E_{dea} = 0.6$ MPa, $E_{pass} = 1.2$ MPa, et $w = 20$ mm nous obtenons:

$$M_{\text{due à } \sigma} = -\frac{E_{dea}w}{\rho_0} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y_0 y^2}{2} \right) \Big|_0^{0.2} - \frac{E_{pass}w}{\rho_0} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y_0 y^2}{2} \right) \Big|_{0.2}^{0.22} = -\frac{0.053 - 0.341y_0}{\rho_0} \text{ [N} \cdot \text{mm]} \quad (0.10)$$

$$\sum M = 0. \quad \text{Et donc :}$$

$$0.01 \text{ [N mm]} = -\frac{0.053 - 0.341y_0}{\rho_0} \text{ [N} \cdot \text{mm]}$$