Contrôle d'algèbre linéaire N°1 : corrigé

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

Groupe

PRENOM : ______________________

1. On considère la proposition suivante :

T: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, m est impair ou n est pair $\Rightarrow$ $2m^2 - n^2 + 1$ n'est pas multiple de 8.

a) Enoncer la proposition réciproque de T, notée R.
b) Enoncer la proposition contraposée de R, notée C_R.
c) Démontrer la proposition C_R par la méthode directe.
d) Enoncer la négation de la proposition C_R, notée nonC_R.
e) De ce qui précède, que peut-on dire de la valeur de vérité des propositions T, R et nonC_R ? Justifier rigoureusement la réponse.

5.5 pts

Réponses :

a) R: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, $2m^2 - n^2 + 1$ n'est pas multiple de 8 $\Rightarrow$ m est impair ou n est pair.
b) C_R: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, m est pair et n est impair $\Rightarrow$ $2m^2 - n^2 + 1$ est multiple de 8.
d) nonC_R: $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}$, m est pair et n est impair et $2m^2 - n^2 + 1$ n'est pas multiple de 8.
e) On ne peut rien dire sur T (réciproque de R).

2. On définit $S(n)$ par

$$S(n) = 1 - \frac{1}{2\cdot 0!} - \frac{1}{3\cdot 1!} - \frac{1}{4\cdot 2!} - \cdots - \frac{1}{(n+1)\cdot(n-1)!} \qquad n \in \mathbb{N}^* .$$

Montrer par récurrence que

$$S(n) = \frac{1}{(n+1)!} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* .$$

2.5 pts

3. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{x^2+4}{(x+2)^2}\,. \end{array}$$

a) L'application f est-elle injective ? Justifier rigoureusement la réponse.

b) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$.

c) L'application f est-elle surjective ? Justifier rigoureusement la réponse.

5 pts

Réponses :

a) On essaye de montrer que f est injective. Le cas échéant, cela générera tous les contre-exemples.
f est non injective selon la négation de la définition

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f(x)=f(y) \text{ et } x\neq y\,.$$

Par exemple $x=-1$, $y=-4$ et $f(x)=f(y)=5$.

b) $\operatorname{Im} f = \left[\frac{1}{2}, \rightarrow\right[$.

c) Comme $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}$, f n'est pas surjective.

4. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f\ : & [-5,5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & \big(x+1,\, 5-|x|\big)\,. \end{array}$$

a) f est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

b) Déterminer rigoureusement $\operatorname{Im} f$ et en donner la représentation graphique.

On donne encore l'application g définie par

$$\begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & uv\,. \end{array}$$

c) Déterminer $g(A\times B)$ avec $A=[-1,1]$ et $B=\{2\}$.

d) Déterminer $g^{-1}\Big(g\big(\{(1,1)\}\big)\Big)$ et en donner la représentation graphique.

e) Déterminer $g\circ f$.

7 pts

Réponses :

a) f est injective.

b) $\operatorname{Im} f = \big\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, x'\in[-4,6],\ y'=5-|x'-1|\big\}$.

Branches :

- $x' - 1 \geq 0$: $x' \in [1, 6]$, $y' = 5 - (x' - 1) = 6 - x'$.
- $x' - 1 < 0$: $x' \in [-4, 1[$, $y' = 5 + (x' - 1) = 4 + x'$.

c) $g(A \times B) = [-2, 2]$.

d) $g^{-1}\Big(g\big(\{(1,1)\}\big) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u \neq 0, v = \frac{1}{u}\right\}$

e) $$\begin{array}{rcl} g \circ f \ : \ [-5, 5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)(5 - |x|) \,. \end{array}$$