24.5.19

Corrigé de la Série 19

1. Soit $P(x) = -x^3 - \frac{3i}{2}\,x^2 + x + \frac{i}{2}$. Ecrivons la solution imaginaire $x = i\,b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$$P(i\,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(i\,b)^3 - \frac{3i}{2}\,(i\,b)^2 + (i\,b) + \frac{i}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\,b^3 + \frac{3i}{2}\,b^2 + i\,b + \frac{i}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,b^3 + 3\,b^2 + 2\,b + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b+1)\,(2\,b^2 + b + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -1\,.$$

$x = -i$ est une racine de P donc P est divisible par $(x+i)$. On effectue cette division pour obtenir

$$P(x) = (x+i)\,(-x^2 - \frac{i}{2}\,x + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\,(x+i)\,(2x^2 + i\,x - 1)\,.$$

Les deux autres racines de P sont les zéros de $(2x^2 + i\,x - 1)$, on les cherche à l'aide du discriminant Δ.

$$\Delta = 7\,, \quad x = \frac{-i \pm \sqrt{7}}{4}\,.$$

Les trois racines de P sont donc : $x_1 = -i$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{7} - i}{4}$, $x_3 = -\dfrac{\sqrt{7} + i}{4}$.

2. La condition a) implique $P_3(z) = (z-1)P_2(z)$;

La condition d) implique :

- Si P_3 possède deux racines non réelles z_1 et z_2, les conditions c) et d) nous donnent:

  $1 \cdot z_1 z_2 = 1 + i\,; \quad z_1 + z_2 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad P_2(z) = k(z^2 - (1+i)z + (1+i))$

  $P_3(z) = k(z-1)(z^2 - (1+i)z + (1+i))$ et la condition b) nous donne :

  $P_3(i) = i - 1$

  $\Leftrightarrow i - 1 = k(i-1)(-1 - i + 1 + 1 + i)$ d'ou $k = 1$

  $P_3(z) = (z-1)(z^2 - (1+i)z + (1+i)) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - (1+i)$

- Si P_3 ne possède qu'une racine non réelle $z = 1 + i$ (de la condition d))

  $P_2(z) = k(z - (1 + i))(z + a)$ et la condition b) nous donne : $P_3(i) = i - 1$

  $\Leftrightarrow i - 1 = k(i - 1)(-1)(i - a)$ d'ou $k(a - i) = 1$

  La condition c) implique : $1 \cdot (1 + i) \cdot a = (1 + i) \quad \Rightarrow \quad a = 1$

  On a alors : $k = \dfrac{1}{1 - i} = \dfrac{1}{2}(1 + i)$

  $P_3(z) = \dfrac{1}{2}(1+i)(z-1)^2(z-(1+i)) = \dfrac{1}{2}(1+i)z^3 - (1+2i)z^2 + \dfrac{1}{2}(1+5i)z - i.$

3. La troisième équation implique que $(x\,;y\,;z) \neq (0\,;0\,;0)$

On écrit le polynôme $P_3 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$;

sans restriction de la généralité (on utilise $P_3 \neq 0$), on pose $a_3 = 1$.

En multipliant la dernière équation par le produit xyz des racines, on obtient :

$$yz + xz + xy = xyz \quad (1)$$

Les formules de Viète donnent : $x + y + z = -a_2$; $xy + xz + yz = a_1$; $xyz = -a_0$.

On a donc : $x + y + z = 1 = -a_2$; $a_1 = -a_0$.

La deuxième équation s'écrit :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 9$$

ce qui se traduit pour les coefficients :

$$(-a_2)^2 - 2a_1 = 9 \quad (2)$$

Nous avons toutes les conditions pour déterminer les coefficients :

$a_2 = -1$; de (1) et de (2), $a_1 = -a_0 = -4$.

Nous connaissons complétement le polynôme :

$$P_3 = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

La factorisation du polynôme est élémentaire puisqu'on devine au moins la racine 1.

La solution qui satisfait la condition de non-nullité est donc :

$$x = -2\,, \quad y = 1\,, \quad z = 2\,.$$

4. (a) Il faut calculer les dérivées successives de la fonction donnée :

$$f(x) = \arcsin(x)\,;\; f^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\; f^{(2)}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,;\; f^{(3)}(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\,;$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\,;\; f^{(5)}(x) = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}\,.$$

On évalue ces dérivées au point $x_0 = 0$ et on introduit ces valeurs dans le polynôme de Taylor :

i. $f(0) = 0\,;\; f^{(1)}(0) = 1\,;\; f^{(2)}(0) = 0\,;\; f^{(3)}(0) = 1\,;\; f^{(4)}(0) = 0\,;\; f^{(5)}(0) = 9\,.$

On obtient alors : $\quad Arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)\,,$ car $f^{(6)}(0) = 0\,;$

ii. $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}\,;\; f^{(1)}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,;\; f^{(2)}(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,;\; f^{(3)}(\frac{1}{2}) = \frac{16}{3\sqrt{3}}\,.$

On obtient alors :

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})^3 + o((x-\frac{1}{2})^3)\,.$$

Dans ce dernier voisinage, nous constatons que la fonction n'est plus impaire et le d.l. est différent selon le voisinage considéré.

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\arcsin(x)-6x-x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{6x+x^3+\frac{9}{20}x^5+o(x^6)-6x-x^3}{x^5} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{20}x^5+o(x^6)}{x^5} = \frac{9}{20}\,.$$

5. (a) Il faut calculer les dérivées successives de la fonction donnée :

$f(x) = \cosh(x)\,;\; f^{(1)}(x) = \sinh(x)\,;\; f^{(2)}(x) = \cosh(x)\,...,\ etc\,;$

On évalue ces dérivées au point $x_0 = 0$ et on introduit ces valeurs dans le polynôme de Taylor :

$f^{(2k)}(0) = 1\,;\; f^{(2k+1)}(0) = 0\,;\quad k \in \mathbb{N}\,.$

On obtient alors : $\quad \cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7)\,;$

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{24\cosh(x) - 24 - 12x^2 - x^4}{x^5} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{24 + 12x^2 + x^4 + \frac{1}{30}x^6 + o(x^7) - 24 - 12x^2 - x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{30}x + \frac{o(x^7)}{x^5}] = 0\,.$$

Comme la limite de $f(x)$ au voisinage de 0 vaut 0, on peut donc la prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

oblème récréatif:

En posant $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}$, on trouve que $f^2(x) = x + f(x)$, d'où $2f'f = 1 + f'$, et

$$f'(x) = \frac{1}{2f - 1} = \frac{1}{-1 + 2\sqrt{x + \ldots}}.$$

On peut aussi remarquer, que puisque $f^2(x) = x + f(x)$, on obtient $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$ et ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}.$$