Contrôle de géométrie analytique N°4

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ______________________

Groupe ☐

PRENOM : ______________________

1. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C} \, : \, x^2 + 8xy + 7y^2 + 4x - 20y + 4 = 0$$

a) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère R_u dans lequel l'équation est réduite. Donner la matrice U du changement de repère.

b) Déterminer le point d'intersection T entre la conique et l'axe Ox ainsi que l'équation cartésienne de la tangente en T dans le repère R_e.
A l'aide de la matrice U déterminer l'équation cartésienne de la tangente dans le repère R_u.

c) Représenter avec soin et précision la conique dans le repère R_e.
(1 unité = 2 carrés,
placer l'origine du repère à 10 carrés du bord gauche de la feuille et 20 carrés du bord inférieur)

7.5 pts

Réponse : *a)* $-x^2 + 9\,y^2 + 36 = 0$ dans $\mathcal{R}_u = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\Omega = (6, -2)$,

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 6 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $T = (-2, 0)$ et $y = 0$ dans $\mathcal{R}_e$.

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y - 2 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{R}_u.$$

2. Dans le plan muni du repère orthonormé $R_e = (O,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$, on définit une famille de coniques $\mathcal{F}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{F} \,:\, 8x^2 - 2mxy + 8y^2 + 6x - 6y + 1 = 0\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

a) Déterminer l'équation cartésienne des droites de dégénérescence de genre hyperbole.

b) Soit $m > 0$.
On considère les ellipses de la famille.
Déterminer le paramètre m de sorte que la conique soit une ellipse dont le petit axe a pour longueur $\frac{2}{3}$.

6.5 pts

Réponse : *a)* $2\,x - 4\,y + 1 = 0$ et $4\,x - 2\,y + 1 = 0$.
b) $m = 1$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la parabole d'équation $y^2 = 2px\,,\ p > 0$.

On note d sa directrice et F son foyer.

Soit M un point quelconque de la parabole, D la projection orthogonale de M sur d et t la tangente en M .

a) Montrer que la perpendiculaire à t menée de F passe par D .

b) Soit I le point d'intersection de la directrice avec l'axe de la parabole. Lorsque M décrit la parabole, déterminer l'équation cartésienne du lieu de K , point de concours des médiatrices du triangle IDM .

Montrer que ce lieu est une parabole et donner les coordonnées de son sommet et de son foyer.

c) Sur la donnée graphique ci-dessous, on considère la parabole définie par son sommet S , son foyer F et passant par M .

Déduire de a) une construction rigoureuse de la tangente en M .

6 pts

Réponse : *b)* $y = p\,(x + \frac{p}{4})$: parabole de sommet $S = (-\frac{p}{4}, 0)$ et $F = (0\,,\,0)$.