Projet 1 : transformation du plan

Nathan Soufflet

29 avril 2018

1 Etude de la fonction $f(z) = z^2$

1.1

Soient $A(1,-1)$ et $B(1,1)$ les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 1 + i$
Le segment $[A, B]$ peut être paramétré comme suit :

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto z_A + 2ti$$

d'où $f(\gamma(t)) = (z_A + 2ti)^2 = (1 - i + 2ti)^2 = 4t(1-t) + i(4t-2)$
Soit $f(\gamma(t)) = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{cases} x = 4t(1-t) \\ y = 4t - 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = (y+2)(1 - \frac{y+2}{4})$ soit :

$$\boxed{x = -\frac{1}{4}y^2 + 1}$$

pour $y \in [-2, 2]$, il s'agit donc bien d'une portion de parabole.

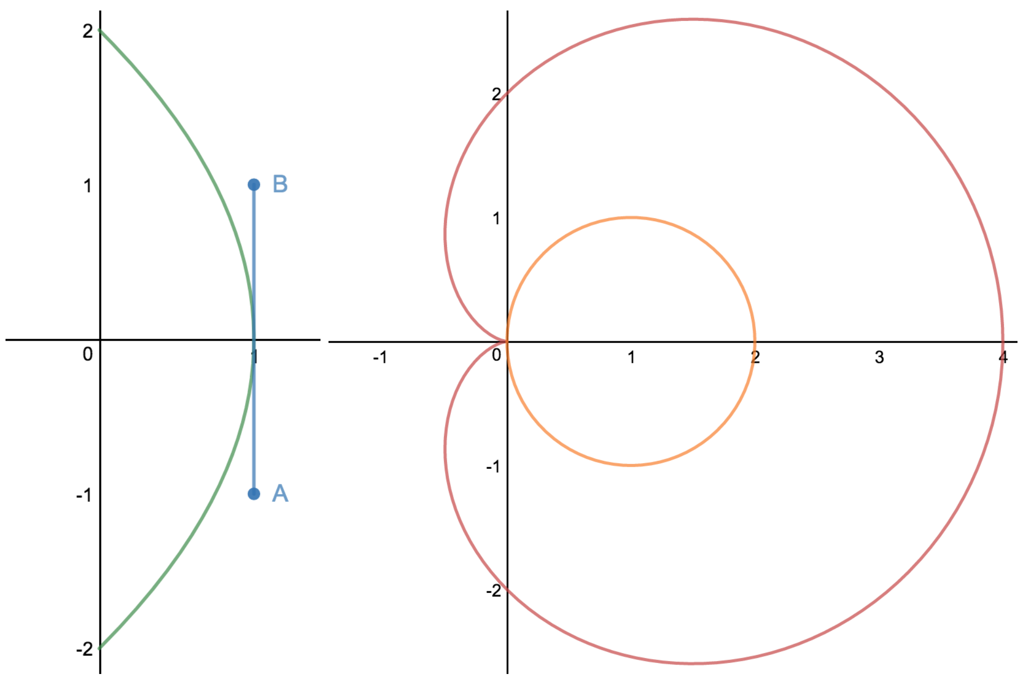

FIGURE 1 – Segment $[A, B]$, cercle $\mathscr{C}$ et leur image par f

1.2

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $C(1,0)$ et de rayon 1.
Une parametrisation de $\mathscr{C}$ est :

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{it} + 1$$

on a alors $f(\gamma(t)) = (e^{it} + 1)^2 = e^{2it} + 2e^{it} + 1$

d'où :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos(2t) + 2\cos(t) \\ y = \sin(2t) + 2\sin(t) \end{cases}$$

en utilisant les identités de l'angle double, on obtient :

$$\begin{cases} x = 2(1 + \cos(t))\cos(t) \\ y = 2(1 + \cos(t))\sin(t) \end{cases}$$

L'écriture polaire suit directement :

$$\boxed{\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))}$$

2 Transformations conformes

2.1 Translation

Expression d'une translation par $\vec{v}(a, b)$ dans le plan complexe : $\boxed{g(z) = z + a + ib}$
$g(z)$ est une somme de deux fonctions entières : $z \mapsto z$ et $z \mapsto a + ib$ et est donc également entière.

FIGURE 2 – Mon prénom composé des lettres de alphabet.m

2.2 Fonction holomorphe quelconque

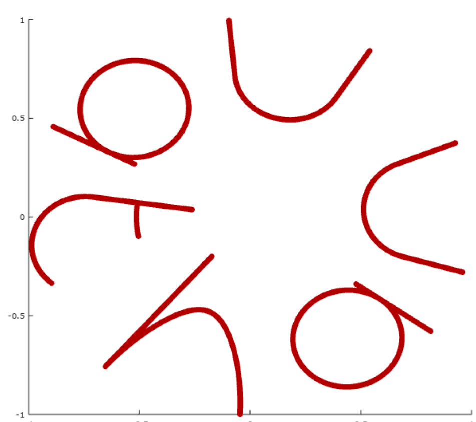

FIGURE 3 – Image de mon prénom par $z \mapsto exp(\frac{2iz}{3})$

2.3 Rotation

Expression d'une rotation de centre $M_0(z_0)$ et d'argument θ : $\boxed{g(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0}$
$g(z)$ peut s'écrire $g(z') = az' + z_0$, avec $a = e^{i\theta}$ et $z' = z - z_0$, il s'agit ainsi d'une fonction affine donc entière.

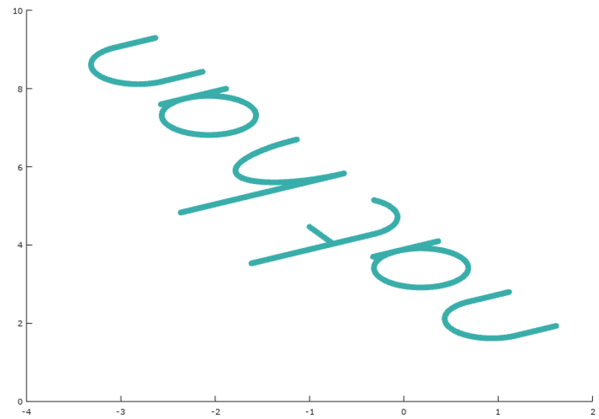

FIGURE 4 – Rotation de mon prénom avec $z_0 = 1 + i$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$

2.4 Homothétie

Expression d'une homothétie de centre $M_0(z_0)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$: $\boxed{g(z) = k(z - z_0) + z_0}$
$g(z)$ est une fonction affine donc entière.

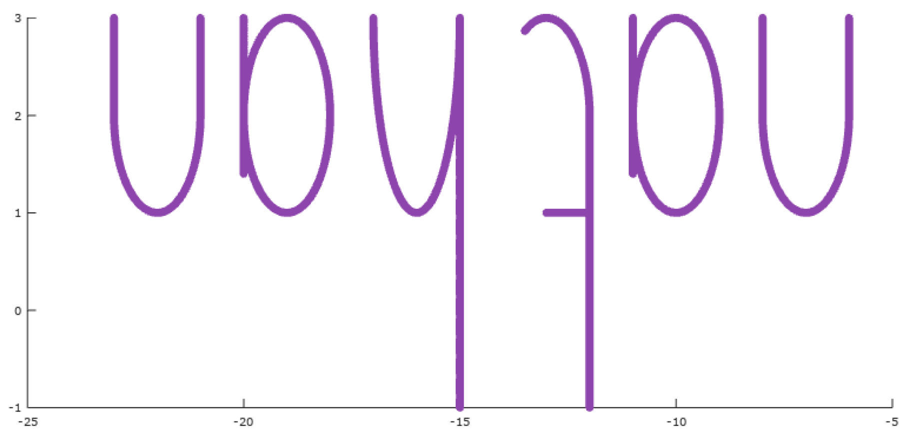

FIGURE 5 – Homothétie de mon prénom avec $z_0 = i - 1$ et $k = -2$

Soient f, g et h telles que :

$$\begin{cases} f(z) = z + 2 + 2i \\ g(z) = e^{i\frac{\pi}{3}} z \\ h(z) = 2z \end{cases}$$

$h \circ g \circ f$ est la composition de fonctions entières, et est don également entière.

L'ordre dans lequel sont effectuées des rotations, translations et homotheties importe, ce qui s'exprime par la non-commutativité de la composition de ces transformations :

$$h \circ g \circ f = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z + 2 + 2i) \neq f \circ g \circ h = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 + 2i$$

2.5 Symétrie centrale

Une symétrie centrale correspond à une rotation d'un demi-tour autour d'un point. On en déduit une expression d'une symétrie centrale de centre $M_0(z_0)$: $\boxed{g(z) = e^{i\pi}(z - z_0) + z_0 = 2z_0 - z}$

$g(z)$ étant une rotation, il s'agit d'une fonction entière.

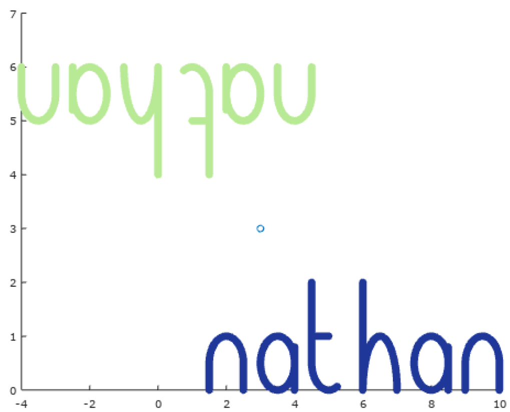

FIGURE 6 – Symétrie centrale de centre d'affixe $z_0 = 3 + 3i$

Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{cases} u(z) = e^{i\pi} z = -z \\ v(z) = z + 2z_0 \end{cases}$$

Par identification, u correspond à une rotation et v à une translation, avec :

$$\boxed{(v \circ u)(z) = g(z)}$$

la symmetrie centrale est donc la composition d'une rotation de π radians suivie d'une translation de $2z_0$.

2.6 Symétrie axiale

Expression d'une symétrie d'axe $x = 0$: $\boxed{g(z) = \overline{z}}$

$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$ donc $g(z)$ n'est holomorphe nulle part, en effet une symétrie axiale ne conserve pas l'orientation des angles (sens inversé).

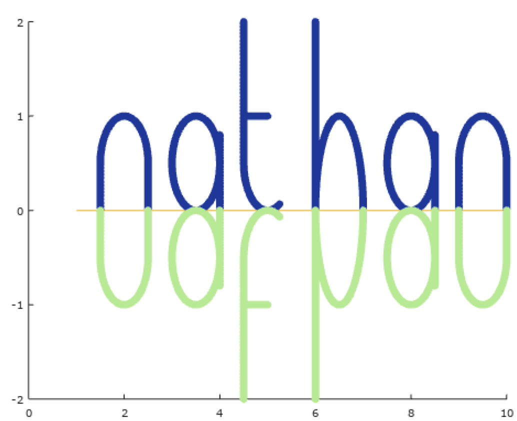

FIGURE 7 – Symétrie axiale selon l'axe des abscisses

2.7 Symétrie axiale (démonstration)

- L'ensemble $\{z_0 + (1+a)\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ représente l'axe (Δ_0).

- Soit $f(z) = a\overline{(z - z_0)} + z_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $a = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
d'où $f(z_0 + (1+a)\alpha) = a\overline{(1+a)\alpha} + z_0 = \alpha[cos(\theta) + i\sin(\theta)][1 + \cos(\theta) - i\sin(\theta)] + z_0$
finalement $f(z_0 + (1+a)\alpha) = \alpha[\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + z_0 = z_0 + (1+a)\alpha$

On a donc bien $\boxed{f(z_0 + (1+a)\alpha) = z_0 + (1+a)\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(\Delta_0) = \Delta_0}$

On vient ainsi de démontrer que l'axe (Δ_0) est un ensemble d'invariants de f et correspond donc à l'axe de symétrie de la transformation $f(z)$.

- En utilisant la formule d'Euler : $\boxed{2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}} = (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})e^{i\frac{\theta}{2}} = 1 + e^{i\theta} = 1 + a}$

- En utilisant l'égalité précedente, on a :

$$z_0 + \frac{a+1}{4\cos(\frac{\theta}{2})}(e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z_0)} + e^{-i\frac{\theta}{2}}(z - z_0)) = z_0 + \frac{2cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}}{4\cos(\frac{\theta}{2})}(e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z_0)} + e^{-i\frac{\theta}{2}}(z - z_0))$$

$$= z_0 + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}[e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z0)} + e^{-i\frac{\theta}{2}}(z_0 - z)] = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z_0)} + z_0 + z}{2} = \frac{f(z) + z}{2}$$

On a donc bien $\boxed{\frac{f(z)+z}{2} = z_0 + \frac{a+1}{4\cos(\frac{\theta}{2})}(e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z_0)} + e^{-i\frac{\theta}{2}}(z - z_0))}$

- Soit α_m tel que :

$$\alpha_m = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{(z - z_0)} + e^{-i\frac{\theta}{2}}(z - z_0)}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$$

où $z - z_0 = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a alors :

$$\alpha_m = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(x + iy) + e^{-i\frac{\theta}{2}}(x - iy)}{4\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{x(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) + iy(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$$

En utilisant l'écriture complexe de cos et sin, on obtient $\forall\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

$$\alpha_m = \frac{x\cos(\frac{\theta}{2}) + y\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{1}{2}(x + y\tan\frac{\theta}{2}) \in \mathbb{R}$$

Notons $M(z), M'(f(z))$ et M_m milieu du segment $[M, M']$ d'affixe $\frac{f(z)+z}{2}$, ce qui permet d'écrire :

$$(1) : \forall\theta \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\},\ \exists\alpha = \alpha_m \in \mathbb{R} \mid z_0 + (1+a)\alpha = \frac{f(z) + z}{2} \Rightarrow \boxed{M_m\ \in (\Delta_0)}$$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, on a alors :

$$z\overline{z'} + z'\overline{z} = (x + iy)(x' - iy') + (x' + iy')(x - iy)$$

$$= (xx' - ixy' + ix'y + yy') + (xx' - ix'y + ixy' + yy') = 2(xx' + yy')$$

On en déduit :

$$\boxed{z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2(\vec{u}.\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs d'affixes respectives $f(z) - z$ et $a + 1$, d'après l'équivalence précédente, on a :

$$\vec{u} \ \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\overline{a} + 1)(f(z) - z) + (a + 1)(\overline{f(z) - z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a} + 1)(a(\overline{z - z_0}) + z_0 - z) + (a + 1)(a(z - z_0) + \overline{z_0 - z}) = 0$$

Or $a = e^{i\theta}$ d'où :

$$\begin{cases} a(\overline{a} + 1) = (\cos\theta + i\sin\theta)(1 + \cos\theta - i\sin\theta) = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = a + 1 \\ \overline{a}(a + 1) = (\cos\theta - i\sin\theta)(1 + \cos\theta + i\sin\theta) = 1 + \cos\theta - i\sin\theta = \overline{a} + 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (a + 1)(\overline{z - z_0} + \overline{z_0 - z}) + (\overline{a} + 1)(z_0 - z + z - z_0) = 0$$

Finalement,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \vec{u} \perp \vec{v}$$

De plus, le segment $[MM']$ et la droite (Δ_0) ont pour vecteur directeur (resp.) $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on en déduit :

$$\boxed{(2) : [MM'] \perp (\Delta_0)}$$

- D'après (1) et (2) on a donc (pour toute droite (Δ_0) non verticale) :

$$\boxed{\forall M(z \in \mathbb{C}), \ M_m \in (\Delta_0) \wedge [MM'] \perp (\Delta_0)}$$

(Δ_0) est donc la médiatrice du segment $[MM']$.

Ainsi, la fonction f transforme un point $M(z)$ en $M'(f(z))$ tel que la droite (Δ_0) passant par z_0 et de vecteur directeur d'affixe $1 + a$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.
<u>La définition algébrique est donc cohérente avec la définition géométrique.</u>