

Projet 3 - MATH04

Les séries de Fourier

Nathan Soufflet

28 juin 2018

1 Etude d'une série de fonctions

$$\text{Soit } f_n(x) = \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$$

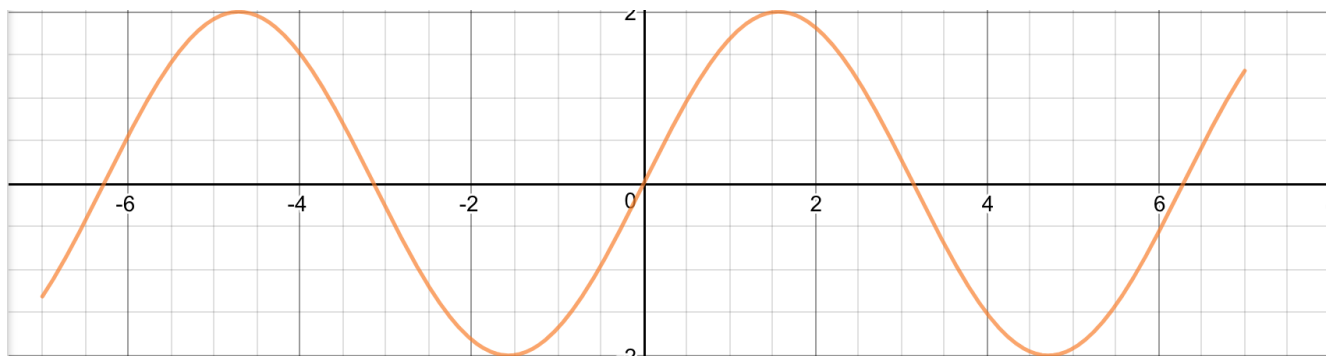


FIGURE 1 – $f_1(x)$ sur $[-7, 7]$

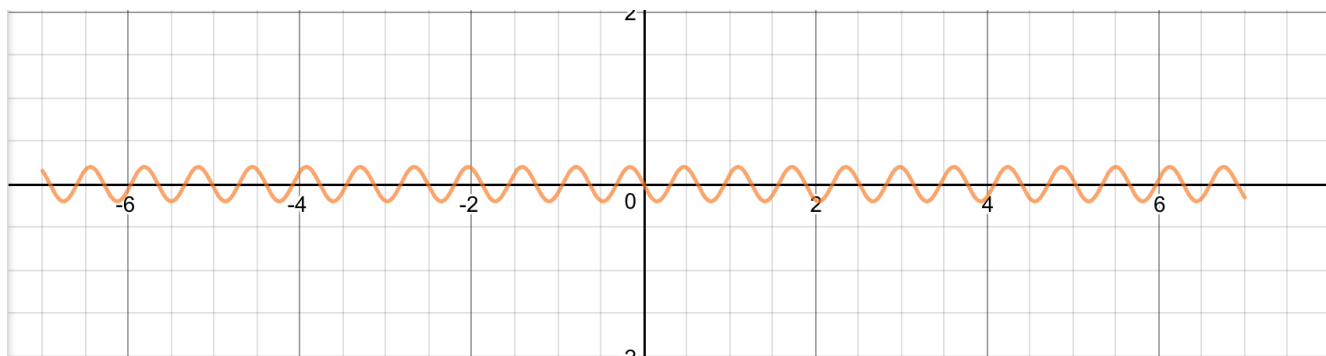


FIGURE 2 – $f_{10}(x)$ sur $[-7, 7]$

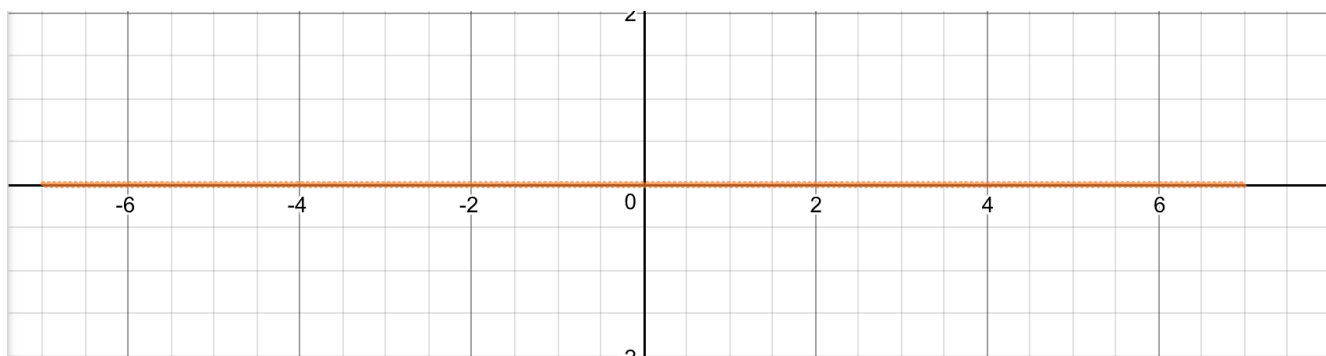


FIGURE 3 – $f_{100}(x)$ sur $[-7, 7]$

L'observation numérique du comportement de $f_n(x)$ quand n augmente semble vérifier l'hypothèse que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

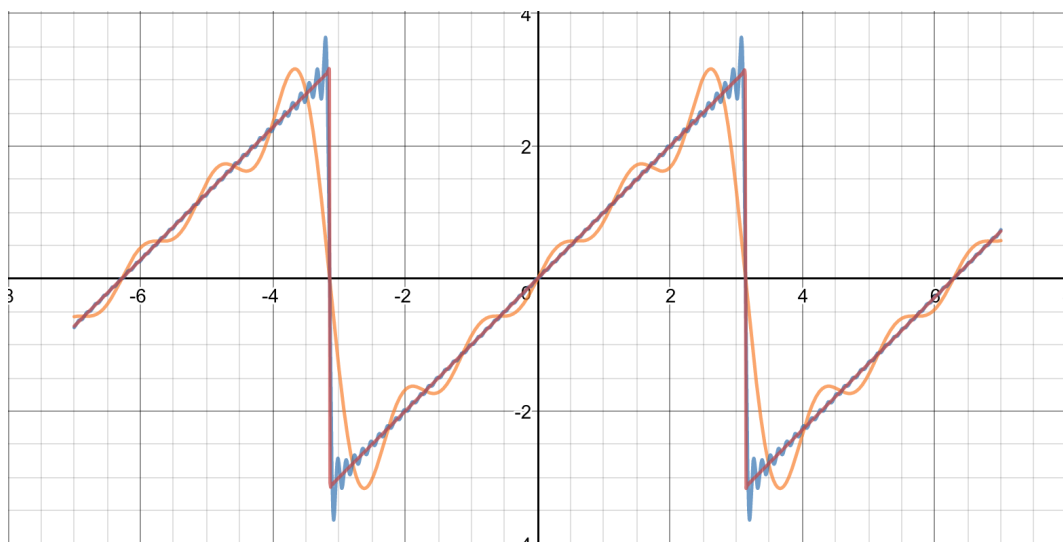


FIGURE 4 – Suite des sommes partielles de la série de terme général f_n pour $n = 5, 50$ et 5000

Ce graphique permet de conjecturer que la suite de terme général f_n converge vers un signal en dents de scie 2π -périodique d'amplitude π : $f(x) = x - \pi \pmod{2\pi} - \pi$

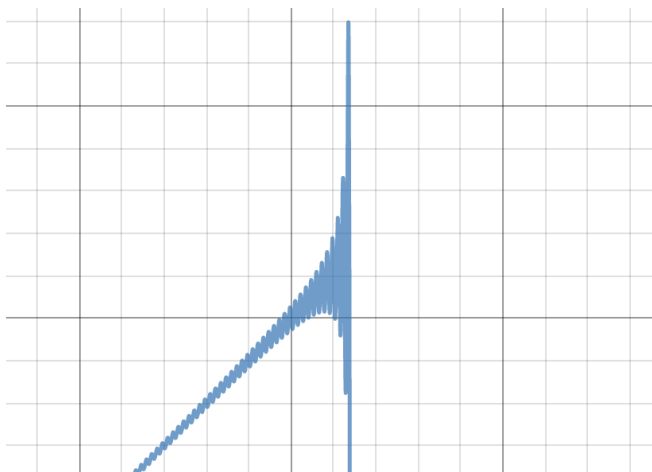


FIGURE 5 – Phénomène de Gibbs près de $x = 3.14$, pour $n = 500$

Dans un voisinage de $x = \pi$, on observe une amplification de la discontinuité de la fonction somme en ce point (Phénomène de Gibbs).

En $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(nx) = \sin(\frac{n\pi}{2})$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi, seuls les termes impairs sont non-nuls, par changement de variable on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

or $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

2 Convergence

2.1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Par intégration par partie, on a :

$$\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \left[\cos(\lambda a) f(a) - \cos(\lambda b) f(b) + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt \right]$$

Par continuité de f et f' sur $[a, b]$, f et f' sont bornées et donc majorées sur $[a, b]$ on en déduit l'existence d'un majorant $M \in \mathbb{R}^+$ de $|\cos(\lambda a) f(a) - \cos(\lambda b) f(b) + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt|$ d'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) \sin(\lambda t)| dt \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{M}{\lambda} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

2.2 Noyau de Dirichlet

Soit $D(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(n\theta)$

En multipliant des deux côtés par $2 \sin(\frac{\theta}{2})$, et en utilisant l'identité du produit de deux cosinus, on a :

$$2 \sin(\frac{\theta}{2}) D(\theta) = \sin(\frac{\theta}{2}) + \sum_{k=1}^n \sin(\theta(k + \frac{1}{2})) - \sin(\theta(k - \frac{1}{2}))$$

Qui est une somme telescopique, que l'on peut simplifier comme suit :

$$2 \sin(\frac{\theta}{2}) D(\theta) = \sin(\frac{\theta}{2}) + \sin(\theta(n + \frac{1}{2})) - \sin(\frac{\theta}{2})$$

On en déduit :

$$D(\theta) = \frac{\sin(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}$$

2.3 Theoreme de Dirichlet

2.3.1

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

En substituant a_n et b_n :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \cos(nx) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \sin(nx) dt \right]$$

Par interversion de la somme et de l'intégrale et en utilisant les identités du produit de deux cosinus et sinus :

$$S_N(x) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N f(t) \cos(n(t+x)) dt$$

or $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ d'où :

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} + \cos(n(t+x)) \right] f(t) dt$$

2.3.2

On a :

$$D(\theta) = \frac{\sin(\theta(N + \frac{1}{2}))}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2}(2N + 1))}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}$$

d'où, avec le changement de variable $\theta = t - x$:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta + x) \frac{\sin(\frac{\theta}{2}(2N + 1))}{\sin(\frac{\theta}{2})} dt$$

2.3.3

En découpant l'intégrale en deux :

$$I = \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] 2D(t) dt = \int_0^\pi f(x+t) 2D(t) dt + \int_0^\pi f(x-t) 2D(t) dt$$

Par périodicité de $f(x)$:

$$I = \int_0^\pi f(x+t) 2D(t) dt + \int_\pi^{2\pi} f(x+t) 2D(t) dt = \int_0^{2\pi} f(x+t) 2D(t) dt = 2\pi S_N(x)$$

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}$, on déduit du résultat précédent que :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2D(t) dt$$

d'où $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2D(t) dt = 1$

2.3.4

Soit $\epsilon_N(x) = S_N(x) - \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$

En multipliant la dernière égalité par la constante $\frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)]$:

$$\frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((2N+1)\frac{\theta}{2}) dt$$

D'où :

$$\epsilon_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t) - f(x_+) - f(x_-)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((2N+1)\frac{\theta}{2}) dt$$

Finalement :

$$\epsilon_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_x(t) \sin((2N+1)\frac{\theta}{2}) dt$$

Par continuité de g , on peut alors appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_N(x) = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)]$$

Ce qui démontre le théorème de Dirichlet.

3 Application du theoreme de Dirichlet

3.1 Retour au premier exemple

3.1.1

Soit la fonction 2π -périodique f telle que $f(x) = x, \forall x \in]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$
 $f(x)$ étant impaire, seuls les coefficients b_n sont non-nuls :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$b_n = \frac{-2 \cos(2\pi n)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

3.1.2

En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue, on confirme que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 0$$

D'après le théorème de Dirichlet (sur $] -\pi, \pi[$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n} = f(x)$$

Donc la série étudiée en première partie converge bien vers $f(x)$.

Le résultat $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$ est donc valide.

3.2 Un autre exemple

3.2.1

Soit la fonction 2π -périodique f telle que $f(x) = |x|$
 $f(x)$ étant paire, seuls les coefficients a_n sont non-nuls :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

En intégrant par partie, on obtient ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $a_0 = \pi$, d'où :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cos((2n+1)x)}{\pi(2n+1)^2}$$

3.2.2

On observe que le phénomène de Gibbs n'est pas apparent pour $f(x) = |x|$ (voir Fig. 6)

3.2.3

$\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n \times 0) = 1$ d'où :

$$T = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - f(0) \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

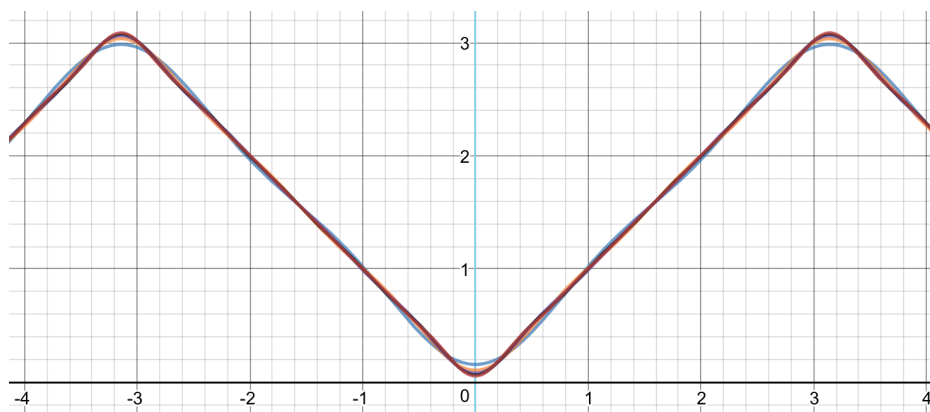


FIGURE 6 – 5 premières sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$

3.2.4

Par décalage d'indice :

$$S - T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{S}{4}$$

d'où :

$$S = \frac{4}{3}T = \frac{\pi^2}{6}$$

4 Harmoniques d'un signal

4.1

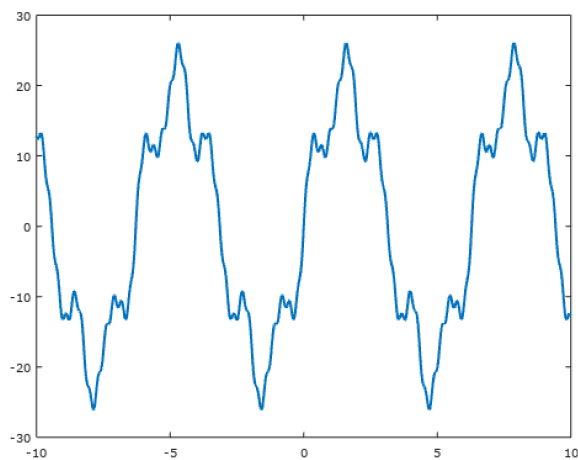


FIGURE 7 – $f_{_math04}$ sur $[-10, 10]$

La fonction $f_{_math04}$ semble effectivement 2π -périodique

4.2

Les coefficients de valeur absolue supérieure à 0.05 sont (pour $n \leq 100$) :

$$\{b_1 \approx 19.99992, b_5 \approx 4.999982, b_8 \approx 0.9993442, b_{21} \approx 0.9956820\}$$

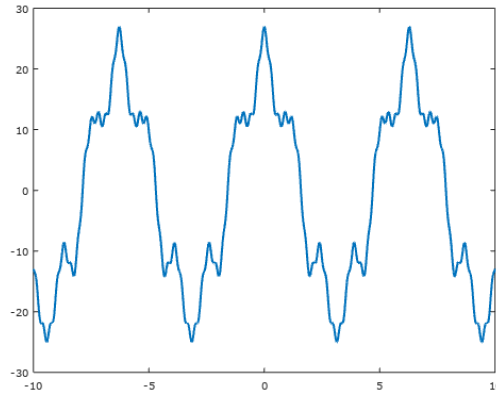


FIGURE 8 – Approximation de f_{math04} sur $[-10, 10]$

L'approximation avec les coefficients non-négligeables est cohérente avec la figure 7 (à un décalage près).

4.3

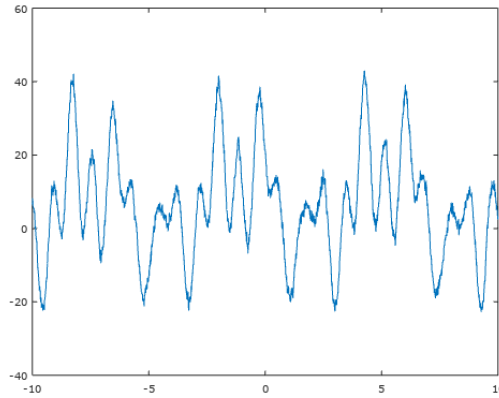


FIGURE 9 – g_{math04} sur $[-10, 10]$

$g_{\text{math04}}(2) = 4.5009$ et $g_{\text{math04}}(2 + 2\pi) = 1.6677$, cette fonction n'est donc pas 2π -périodique, il faut alors un très grand nombre d'harmoniques pour l'approximer, en effet, 56 coefficients a_n et 55 b_n , pour $n \leq 100$ sont de valeur absolue supérieure à 0.05.

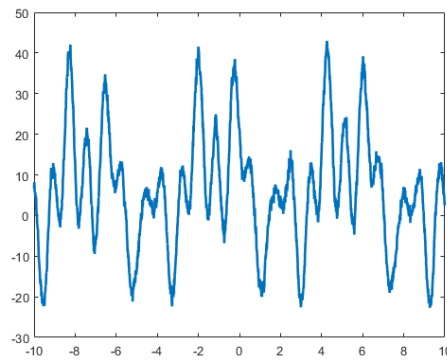


FIGURE 10 – Approximation de g_{math04} sur $[-10, 10]$