Projet MATH04

Printemps 2018

1 Présentation du projet

Les TPs de MATH04 consistent à étudier d'une part les transformations classiques du plan, ensuite à travailler sur des méthodes itératives très répandues pour la résolution numérique d'équations, et enfin à étudier les principaux résultats concernant les séries de Fourier. Certains résultats théoriques que vous obtiendrez seront mis en application à l'aide de Matlab, outil de calcul numérique et de visualisation durant les six séances de TP. Le contenu des TPs est associé à une des sections du cours (fonctions à valeurs complexes, suite numériques, séries de fonctions) mais n'est pas traité spécifiquement dans les chapitres du cours.

D'une part, les principales transformations du plan seront étudiées : translation, homothétie, symétrie, rotation et le lien entre ces transformations et les notions d'holomorphie et d'applications conformes sera discuté.

Ensuite, deux méthodes de résolution numérique d'équations seront étudiées. La méthode par dichotomie et la méthode de Newton permettent dans certaines conditions de résoudre une équation de type $f(x) = 0$. Ces méthodes seront implémentées et la vitesse de convergence des suites associées sera discutée.

Enfin, les séries de Fourier seront à l'étude. Elles permettent d'approcher un signal périodique par une somme de signaux sinusoïdaux. Les objectifs sont les suivants :

- Revoir les notions sur les séries de Fourier abordées en Math02.
- Approfondir les résultats de convergence grâce aux propriétés de cours.
- Mettre en évidence certains comportements asymptotiques associés aux séries de Fourier tels que le phénomène de Gibbs.
- Déterminer les harmoniques présentes dans un signal périodique.

Chaque partie fera l'objet d'un compte rendu. Chaque rapport présentera les résultats (calculs théoriques ou obtenus à l'aide de Matlab, graphiques pertinents, analyse) et sera de 8 pages maximum. Les codes sources pourront être présentés en annexe de chaque rapport, à condition d'être commentés. Il est tout à fait possible de rédiger les démonstrations et analyses de manière manuscrite. Chaque rapport sera évalué et comptera pour 10% de la note de l'UV. Le premier rapport est à rendre au plus tard au début du troisième TP. Le deuxième rapport est à rendre au plus tard au début du cinquième TP. Le dernier rapport est à rendre avant le final de MATH04.

2 Introduction très rapide à Matlab

Exemple 1 (Vecteurs) On peut définir un vecteur ou une matrice par ses éléments avec les séparateurs lignes ou colonnes ';' et ',' ou par intervalle $'a : b'(a \leq a+k \leq b)$ ou $'a : \delta : b'(a \leq a+\delta k \leq b)$.

```
> x=[1,2];
> x=[1;2];
> x=[0:7];
> x=[0:0.01:7];
```

Exemple 2 (Fonctions) Tous les opérateurs sont matriciels. Pour obtenir une évaluation de x^3 aux points 1 et 2, on ne peut pas écrire $[1,2]^3$. En revanche, on peut utiliser une multiplication terme à terme : Ce sont les opérateurs $.*, ./, ...$ Les calculs sous Matlab sont rarement utilisés de manière symbolique (définir la fonction $f(x) = x^3$ pour tout x), mais sont pratiquement toujours numériques (définir la fonction $f(x) = x^3$ pour un ensemble de points).

```
> x=[1,2];
> y=[1,2].^3;
```

Exemple 3 (Fonctions prédéfinies) De nombreuses fonctions sont déjà définies sous Matlab : abs, sqrt, sin, cos,...

Exemple 4 (Fonctions Matlab) Il est souhaitable de créer une fonction pour chaque algorithme effectué. L'écriture générale est de la forme :

```
function [Output1,Output2] = Exemple1Math04(Input1,Input2)
x=Input1+Input2;
y=Input1*Input2;
Output1=max(x,y);
Output2=min(x,y);
```

Exemple 5 (Boucle For, Instructions conditionnelles) On souhaite faire la somme S des carrés des inverses des entiers impairs de 1 à 2001, puis $\sqrt{8S}$.

```
function y = Exemple2
S=0;
for i=1:2001
 if (mod(i,2)==1)
     S=S+1/i^2;
 end
end
y=(8*S)^0.5;
```

Exemple 6 (Tracé) Pour tracer l'ensemble de points (x, y) on utilise la fonction $plot(x, y)$. On utilise les options hold on/hold off pour afficher plusieurs fonctions sur un même graphique. On souhaite tracer sur une même figure les fonctions $t + sin(t)$ et $\frac{t^2}{10} + 2sin(10t)$ sur l'intervalle [0,10] :

```
> delta=0.01;
> inter=[0:delta:10];
> y= inter+sin(inter);
> z= inter.*inter/10+2*sin(10*inter);
>hold on
>plot(inter,y);
>plot(inter,z);
>hold off
```

Exemple 7 (Nuage de points dans le plan) Une autre représentation du point de coordonnées (x, y) est la valeur complexe $z = x + iy$. Si Z représente un vecteur de complexes, le nuage de points associé peut-être obtenu par $plot(Z)$ (courbe continue passant par les points) ou $plot(Z, '*')$ (nuage de points uniquement).

```
> delta=0.01;
> t=[0:delta:2*pi];
> A=exp(i*t); % cercle
> B=sin(t).*(1+i*cos(t)); % lemniscate
> C=2/3*exp(i*(t/6-2*pi/3)); % arc de cercle
> Z=[A,B,C];
> plot(Z,'*');
```

Exemple 8 (Intégration numérique) On souhaite intégrer de manière numérique la fonction $f(x) = \frac{2sin(x)}{x}$ entre 0 et 201. On crée tout d'abord la fonction f dans un fichier, puis on écrit la commande suivante : $quadl(@(x)f(x), 0, 201)$.

```
function y=f(x)
 if (x==0)
     y=2;
 else
     y=2.*sin(x)./x;
 end
```

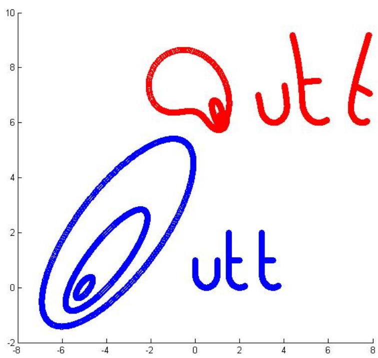
3 Projet 1 : transformation du plan

3.1 Etude de la fonction $f(z) = z^2$

La fonction entière $f(z) = z^2$ intervient par exemple en optique géométrique ou lors de l'étude de fractales. On s'intéresse à la transformation d'un cercle et d'un segment du plan par f.

- On considère le segment [AB], avec $A(1, -1)$ et $B(1, 1)$. Vérifier que l'image du segment par f est une portion d'une parabole du plan dont on précisera l'équation.
- Représenter le segment [AB] et son image par f.
- On s'intéresse au cercle de centre $C(1, 0)$ et de rayon 1. Donner une représentation polaire, puis paramétrique de l'image par f du cercle.
- Représenter le cercle et son image sur un même graphique. L'image correspond à un cardioïde.

3.2 Transformations conformes



Le fichier *alphabet.m* permet d'obtenir les coordonnées complexes d'une seule lettre de l'alphabet en minuscules. Les lettres sont inscrites entre les abscisses 0 et 1 et les ordonnées -2 et +2. Vous devez faire appel à cette fonction mais à aucun moment vous ne devez modifier ou réutiliser le code Matlab associé.

3.2.1 Translation

- Représenter une lettre quelconque de l'alphabet.
- La fonction g correspond à une translation d'un point du plan par un vecteur $\vec{v}(a, b)$. Donner une expression de g sous forme complexe.
- La fonction g est-elle holomorphe ?
- Utiliser le principe des translations afin d'afficher votre prénom (considérer une distance de 1.5 unités entre chaque début de lettre.)

3.2.2 Fonction holomorphe quelconque

Soit N le nombre de lettres dans votre prénom. Afficher l'image de votre prénom par la fonction $g(z) = exp(4iz/N)$.

3.2.3 Rotation

- La fonction g correspond à une rotation de centre $M_0(z_0)$ et d'argument θ. Donner une expression de g sous forme complexe.
- La fonction g est-elle holomorphe ?
- Afficher l'image de votre prénom avec $z_0 = 1 + i$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

3.2.4 Homothétie

Une homothétie de centre C et de rapport réel k transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tels que $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. Il s'agit d'un changement d'échelle (zoom), centré en C.

- La fonction g correspond à une homothétie de centre $M_0(z_0)$ et de rapport réel k. Donner une expression de g sous forme complexe.
- La fonction g est-elle holomorphe ?
- Afficher l'image de votre prénom avec $z_0 = -1 + i$ et $k = -2$.
- Soit f une translation de coordonnées (2,2), g une rotation de centre 0 et d'argument $\theta = \frac{\pi}{3}$ et h une homothétie de centre 0 et de rapport $k = 2$. Donner l'expression complexe de $h \circ g \circ f$. S'agit-il d'une fonction holomorphe ? Ces trois fonctions sont-elles commutatives ? Toutes les compositions de rotations, translations et homothétie sont appelées **similitudes directes**. Elles conservent les angles orientés. Il s'agit des fonctions affines en z à coefficients complexes.

3.2.5 Symétrie centrale

- La fonction g correspond à une symétrie centrale de centre $M_0(z_0)$. Donner une expression de g sous forme complexe.
- La fonction g est-elle holomorphe ?
- Afficher l'image de votre prénom avec $z_0 = 3 + 3i$.
- A partir de son expression, en déduire que g peut s'écrire comme la composition d'une translation et d'une rotation (bien préciser l'ordre de composition et les paramètres associés).

3.2.6 Symétrie axiale

- La fonction g correspond à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses. Donner une expression de g sous forme complexe.

- La fonction g est-elle holomorphe ?
- Afficher l'image de votre prénom par g.
- Soit h la symétrie axiale par rapport à la droite passant par l'origine et $M_0(e^{i\theta})$, avec θ fixé. Donner une expression de h sous forme complexe.
- En déduire qu'une rotation centrée en l'origine est la composée de deux symétries axiales passant par l'origine (utiliser le fait qu'une symétrie est une involution ou que $\overline{\overline{z}} = z$).

3.2.7 Symétrie axiale (démonstration)

Une symétrie axiale d'axe (Δ) transforme un point M en un point M' tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[MM']$. La définition vue en cours consite à dire que la fonction f de la forme $f(z) = a\overline{(z - z_0)} + z_0$, avec a de module 1 (on notera $a = e^{i\theta}$) est une symétrie dont l'axe (Δ_0) passe par z_0 et de vecteur directeur d'affixe $a + 1$. On souhaite vérifier la cohérence entre les deux définitions.

- Que représente l'ensemble $\{z_0 + (1 + a)\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$?
- Soit α réel. Montrer que $f(z_0 + (1 + a)\alpha) = z_0 + (1 + a)\alpha$. Que vient-on de prouver ?
- Vérifier l'égalité suivante :

$$1 + a = 2cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

- On souhaite montrer que le milieu de $[MM']$ est sur l'axe (Δ_0) (droite passant par z_0 et de vecteur directeur d'affixe $a + 1$). Montrer que :

$$\frac{f(z) + z}{2} = z_0 + \frac{a + 1}{4cos(\theta/2)}(e^{i\theta/2}(\overline{z - z_0}) + e^{-i\theta/2}(z - z_0))$$

- En déduire que le milieu de $[MM']$ est sur l'axe (Δ_0).
- Soient deux vecteurs d'affixes respectives z et z'. Montrer que les deux vecteurs sont orthogonaux (produit scalaire nul) si :

$$z\overline{z'} + z'\overline{z} = 0$$

- On souhaite montrer que le segment $[MM']$ est perpendiculaire à la droite (Δ_0). Démontrer que le vecteur d'afixe $f(z) - z$ est orthogonal au vecteur d'affixe $a + 1$.
- En déduire que (Δ_0) est la médiatrice du segment $[MM']$. Conclure.

4 Projet 2 : Suites numériques pour la résolution numérique d'équations

On étudie une fonction continue f (à valeurs réelles ou complexes) et on souhaite obtenir les racines de cette fcontion dans un domaine donné. Une solution analytique peut exister mais être trop coûteuse ou bien ne pas exister. Deux méthodes très répandues sont étudiées : la méthode par dichotomie et la méthode de Newton.

4.1 La méthode par dichotomie

4.1.1 Principe

Empr. au gr. $\delta\iota\chi o\tau o\mu\acute{\iota}\alpha$ *"division en deux parties égales" (TLFi).*

On suppose que la fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles. D'autre part, on fait l'hypothèse que $f(a)f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (MATH01), f s'annule au moins une fois dans $]a, b[$. L'idée est d'évaluer f au milieu de l'intervalle $c = \frac{a+b}{2}$. Si cette valeur est nulle (ou en valeur absolue inférieure à un seuil prédéterminé), la solution est obtenue. Sinon, on étudie le signe de $f(a)f(c)$. S'il est négatif, cela signifie qu'une solution se trouve dans l'intervalle $[a, c]$ et s'il est positif, cela signifie qu'une solution se trouve dans l'intervalle $[c, b]$ (*pourquoi ?*). Cette même technique est employée sur le nouvel intervalle (d'où son nom de méthode itérative) jusqu'à ce que la solution soit obtenue. Le fait que cette méthode converge systématiquement sera étudié plus loin. Voici l'algorithme de dichotomie sur n étapes qui fait appel à plusieurs suites numériques.

Conditions initiales : $a < b$, $f(a)f(b) < 0$, $a_0 = a, b_0 = b$

Étape i $(i = 1..n)$:

- Déterminer le milieu $c_i = \frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}$
- Évaluer $z_i = f(c_i)$.
- Étudier le signe de z_i :
  - nul (ou inférieur en valeur absolue à un seuil) : $a_i = b_i = c_i$ (ou sortie de boucle quand c'est possible)
  - strictement positif : $a_i = c_i$ et $b_i = b_{i-1}$.
  - strictement négatif : $a_i = a_{i-1}$ et $b_i = c_i$.

4.1.2 Exemple

On souhaite déterminer les racines du polynôme $f(x) = x^3 - 10x + 2$.

- Effectuez le tableau de variations de f et vérifiez que f admet trois racines réelles distinctes $t_1 < t_2 < t_3$.
- Grâce à la méthode de Cardan (hors programme), il est possible de déterminer les racines de f à savoir :

$$t_1 = -((1-i\sqrt{3})(-9+i\sqrt{2919})^{1/3})/(23^{2/3})-(5(1+i\sqrt{3}))/(3(-9+i\sqrt{2919}))^{1/3}$$

$$t_2 = -((1+i\sqrt{3})(-9+i\sqrt{2919})^{1/3})/(23^{2/3})-(5(1-i\sqrt{3}))/(3(-9+i\sqrt{2919}))^{1/3}$$

$$t_3 = (-9+i\sqrt{2919})^{1/3}/3^{2/3} + 10/(3(-9+i\sqrt{2919}))^{1/3}$$

Cette écriture n'est pas facilement exploitable et on souhaite approcher ses trois valeurs. Implémentez l'algorithme de dichotomie pour une des trois racines. Préciser bien les conditions initiales. Effectuez $n = 20$ itérations.

4.1.3 Convergence

D'après la condition initiale $f(a)f(b) < 0$, on sait l'existence d'au moins une racine sur l'intervalle $]a, b[$. Supposons que f soit strictement monotone sur cet intervalle. Il existe donc une unique racine x^* sur cet intervalle. On souhaite vérifier que la suite $(c_n)_{\{n\geq 1\}}$ converge vers x^*.

- Soit k un entier positif. Déterminer la largeur de l'intervalle $[a_k, b_k]$.
- Vérifier que grâce à la méthode par dichotomie, x^* appartient à $[a_k, b_k]$.
- En déduire une borne de $|c_k - x^*|$.
- Conclure sur la convergence de la suite $(c_n)_{\{n\geq 1\}}$.
- Plus précisément, on souhaite déterminer le nombre n minimal nécessaire afin d'être certain d'avoir une précision d'au moins ϵ de la solution, i.e. $|c_n - x^*| < \epsilon$. Déterminer n en fonction des données du problème.
- Déterminer n afin d'avoir une précision de 10^{-10} sur la racine que vous avez choisie dans la précédente section.

4.2 La méthode de Newton

4.2.1 Principe

On considère une fonction f holomorphe ou à valeurs réelles et deux fois continûment dérivable. On souhaite obtenir une racine de f dans un voisinage d'un point x_0. Si l'on considère que f est à valeurs réelles, la méthode de Newton revient à assimiler localement la fonction à sa tangente. En première approximation, on considère que la racine de f se situe au voisinage de x_1, intersection de la tangente avec l'axe des abscisses. Cela revient à négliger les termes d'ordres supérieurs ou égaux à 2 dans le développement de Taylor au voisinage de x_0. Comme la méthode par dichotomie, la méthode de Newton est itérative, puisque l'on réitère là même technique à partir de x_1. Pour que cette intersection existe, il faut que la tangente ne soit pas parallèle à l'axe des abscisses. Dans un premier temps, on fait donc l'hypothèse supplémentaire que f' ne s'annule pas dans le domaine d'étude. Les conditions précises pour avoir la convergence de cette méthode, à savoir la convergence de la suite $(x_n)_{\{n\geq 0\}}$ vers x^* racine de f, seront discutées plus loin. L'algorithme de Newton est le suivant :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Un exemple d'application de la méthode de Newton (ou Newton-Raphson) est présentée sur la Figure 1, avec $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$. Dans cette configuration, on obtient $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, ce qui est un algorithme (méthode de Héron, algorithme de Babylone) connu depuis plus de 3000 ans pour approcher $\sqrt{2}$. On remarque graphiquement que la convergence est rapide. On peut montrer que la convergence est généralement meilleure que la méthode par dichotomie (vitesse quadratique au lieu d'une vitesse linéaire).

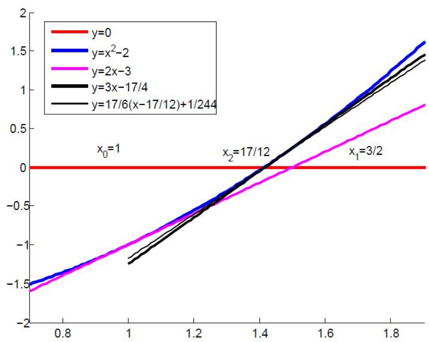


FIGURE 1 – Approche graphique de la méthode de Newton

4.2.2 Exemple

1. Comme dans la précédente section, on souhaite déterminer les racines du polynôme $f(x) = x^3 - 10x + 2$.
   – Déterminer l'algorithme de Newton correspondant.
   – En prenant plusieurs valeurs entre -5 et +5, vérifiez que l'algorithme converge toujours vers une racine de f hormis pour un nombre fini de points (à déterminer). Plus précisément, vérifier numériquement qu'il existe des bassins d'attraction, à savoir qu'une zone de points initiaux converge vers une racine particulière.
2. Déterminer l'algorithme de Newton pour la fonction $g(x) = \sqrt{|x|}$ et x_0 réel quelconque. Sans implémenter cet algoritme sous Matlab, vérifiez que la méthode de Newton ne peut pas converger. Quelle hypothèse n'est pas vérifiée ici ?
3. La méthode de Newton fonctionne généralement pour obtenir des racines de fonctions holomorphes. On considère le polynome $f(z) = z^3 - 10z + 2$. Vérifier que la convergence a lieu en prenant quelques valeurs initiales au hasard dans le plan.
4. Soit $P(z) = z^7 - 2z^3 + 5$. Justifier mathématiquement que les racines de z ont un module plus petit que 2 (inégalité triangulaire). Justifier mathématiquement que P admet au moins une racine réelle. En effectuant un maillage suffisamment fin du plan complexe, retrouver numériquement l'ensemble des racines de P.

En fait, il existe une infinité de points initiaux pour lesquels la méthode ne converge pas. D'autre part, la détermination des bassins d'attraction n'est pas simple et fait intervenir les fractales de Newton. Les deux figures suivantes montrent ces bassins d'attraction pour le polynôme f. La couleur rouge (verte, jaune) désigne l'ensemble des valeurs de x_0 pour lequel l'algorithme converge vers $t_1(t_2, t_3)$, l'algorithme ne convergeant pas aux frontières.

4.2.3 Convergence

La proposition suivante donne une condition de convergence de l'algorithme de Newton : Soit f holomorphe (ou à valeurs réelles et deux fois continûment

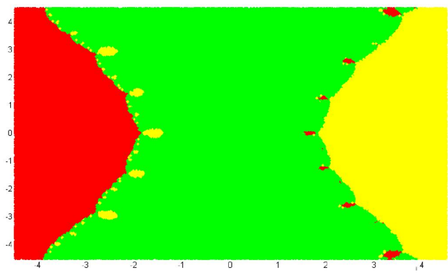


FIGURE 2 – Bassin d'attraction

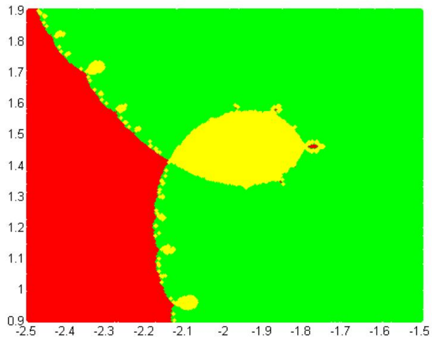


FIGURE 3 – Bassin d'attraction (zoom)

dérivable) sur un ouvert simplement connexe Ω et $x^* \in \Omega$ vérifiant $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. Alors il existe un voisinage V de x^* (cercle fermé de rayon non nul centré en x^*) tel que la suite définie par $x_0 \in V$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers x^*. La démonstration de la convergence est très proche de la convergence d'une suite récurrente vue en MATH02.

1. On pose $g = id - \frac{f}{f'}$ où id est l'opérateur identité. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et g.
2. Calculer $g(x^*)$.
3. Calculer g' et en déduire que $g'(x^*) = 0$.
4. Soit $\epsilon < 1$. Une fonction holomorphe est en particulier continue. En déduire qu'il existe un cercle V centré en x^* et de rayon α non nul tel $|g'(z)| < \epsilon$ pour tout z de V.
5. Montrer que g vérifie la condition de Lipschitz de rapport ϵ dans V :
$$\forall x \in V, \forall y \in V \quad |g(x) - g(y)| < \epsilon |x - y|$$
6. Soit $z \in V$. En déduire que $|g(z) - x^*| \leq \alpha$. On a montré que l'image par g d'un élément de V reste dans V (stabilité).
7. Soit $x_0 \in V$. En déduire que x_n obtenu par l'algorithme de Newton appartient aussi à V.
8. Montrer par récurrence que $|x_n - x^*| \leq \epsilon^n |x_0 - x^*|$.
9. Conclure.

5 Projet 3 : les séries de Fourier

5.1 Définition

On se place dans le cadre des fonctions $2\pi-$périodiques, continues par morceaux. Les coefficients de Fourier sont les suivants :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$$

On appelle série de Fourier à l'ordre N la fonction suivante :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

5.2 Etude d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{2(-1)^{n+1}sin(nx)}{n}$ pour $x \in [-7, 7]$ $(n \geq 1)$.

- Vérifier numériquement que la suite f_n converge simplement vers la fonction nulle.
- Sur un même graphique, tracer les sommes partielles de la série de terme général f_n pour différentes valeurs de n entre 5 et 5000.
- Vers quelle fonction somme f cette série semble converger ?
- Qu'observe-t-on pour des valeurs proches de ± 3.14 [Avoir un pas d'intervalle δ suffisamment petit pour observer le phénomène de Gibbs].
- En admettant la convergence de la série vers f, et en se basant sur $x = \frac{\pi}{2}$, déterminer la somme suivante $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

5.3 Convergence

On souhaite démontrer le théorème de Dirichlet : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique, sa série de Fourier converge en tout point vers la moyenne entre limite à gauche et limite à droite de f.

Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, $a < b$, alors :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t)sin(\lambda t)dt = 0$$

On souhaite démontrer cette propriété dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. En justifiant que $|f|$ et $|f'|$ admettent une borne supérieure sur $[a, b]$ et en effectuant une intégration par partie de $\int_a^b f(t)sin(\lambda t)dt$, démontrer le lemme.

Noyau de Dirichlet

Démontrer l'égalité suivante : $1/2 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.

Théorème de Dirichlet

A partir de la définition de la série de Fourier, démontrer l'égalité suivante :

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1/2 + \sum_{n=1}^{N} cos(n(t-x)))f(t)dt$$

En utilisant le noyau de Dirichlet et un changement de variable, en déduire :

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+x)\frac{sin((2N+1)t/2)}{sin(t/2)}dt$$

En utilisant le fait que f soit périodique et en découpant l'intégrale en 2, vérifier que :

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{sin((2N+1)t/2)}{sin(t/2)}dt$$

En déduire que : $1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sin((2N+1)t/2)}{sin(t/2)}dt$.

On considère enfin la fonction $\epsilon_N(x) = S_N(x) - \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$. A partir des deux questions précédentes et en regroupant judicieusement les termes, démontrer que $\epsilon_N(x)$ se met sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g_x(t) sin((2N+1)t/2)dt$$

où g est une fonction continue par morceaux. Conclure.

5.4 Application du théorème de Dirichlet

5.4.1 Retour au premier exemple

On considère la fonction 2π-périodique f avec $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi,\pi[$ et $f(\pi) = 0$.

1. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n.
2. Retrouver l'ensemble des résultats de la première partie.

5.4.2 Un autre exemple

On considère la fonction 2π-périodique f avec $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi,\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n.
2. Ecrire f comme somme d'une Série de Fourier.
3. Comme dans la première partie, vérifier graphiquement que les sommes partielles convergent vers f. Observe-t-on le phénomène de Gibbs ?
4. Grâce au théorème de Dirichlet, calculer la somme suivante : $T = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$. En déduire $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ [on s'intéressera à $S - T$].

5.5 Harmoniques d'un signal

On observe un signal 2π-périodique. Sa pulsation est donc $\omega = 1$ est cette fonction se décompose en une série de fonctions sinusoïdales de pulsation $n\omega$ appelées harmoniques de rang n. On souhaite déterminer l'ensemble des harmoniques pour lesquelles l'amplitude associée est non négligeable. Cela permettra d'approcher le signal de manière efficace avec un nombre fini de fonctions. On travaille sur la fonction f_math04, accessible sur Moodle.

1. Représenter f_math04 sur $[-10, 10]$ et vérifier sa périodicité.
2. Ecrire les fonctions permettant de calculer numériquement a_n et b_n.
3. On ne conserve que les harmoniques dont les amplitudes ($|a_n|$ ou $|b_n|$) sont supérieures à 0.05. Déterminer ces harmoniques (en pratique, ces harmoniques se trouvent pour des valeurs de n relativement peu élevées).
4. Reconstruire le signal à partir des harmoniques significatives et vérifier la cohérence de ce résultat.
5. Reprendre cette démarche en utilisant la fonction g_math04. Quelle est la différence notable avec la fonction précédente ?