<u>פרויקט ממוחשב – שדות אלקטרומגנטיים</u>

<u>מגישים</u>:

עמית עוזרן - ת.ז 205601198

נתנאל ניסן – ת.ז 316458843

<u>שאלה 1</u>

א.

את כמות המטען הכוללת נחשב ע"י סכימת צפיפות מטען משטחית על פני שטח הדסקה:

עבור צפיפות המטען המשטחית נקבל: $\eta(r) = \frac{4\varepsilon_0 V}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$$Q_T = \int_0^{2\pi}\int_0^R \eta(r)\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{4\varepsilon\cdot V}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} r dr d\theta =$$

$$= 8\varepsilon_0 V\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2 dr}} \underset{\substack{R^2-r^2=t\\ -2rdr=dt\\ R^2<t<0}}{=} -4\varepsilon_0 V\int_{R^2}^0 t^{-\frac{1}{2}} dt = 8\varepsilon_0 V\cdot\sqrt{t}\big|_0^R = 8R\varepsilon_0 V$$

ב.

לשם הדיסקריטיזציה נבצע את הפעולות הבאות:

- נבנה ריבוע שצלעו **2R** ומרכזו בראשית, כך ששטח הדסקה חסום בתוכו כמתואר בתרשים (1).
- נסמן את שטח הדסקה $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2\}$.
- נחלק את שטח הריבוע כך שכל צלע תחולק ל- $\frac{2R}{d}$ קטעים כך שנקבל סריג **G** - כמתואר בתרשים (2).
- מתוך כלל הנקודות ב-**G**, נגדיר $In_{circle} = \{(X_M,Y_M)\in G|\ (X_M,Y_M)\in A\}$.)
- נתייחס לכל נקודה בIn_{circle} כמרכזו של ריבוע ששטחו d^2–כמתואר בתרשים (2).
- נבנה מטריצהl_{mn} , NXN , כאשר N – מספר הנקודות בIn_{circle}:
  – כל שורה במטריצה תייצג מידע עבור נקודה יחידה ב**A** ביחס לשאר הנקודות ב- **A**.

- נסמן $\boldsymbol{m}$ – שורה, $\boldsymbol{n}$ – עמודה, וערכי המטריצה יחושבו באופן הבא :

$$[\boldsymbol{l}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l_{00}} & \cdots & \boldsymbol{l_{0(N-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{l_{(N-1)0}} & \cdots & \boldsymbol{l_{(N-1)(N-1)}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{d^2}{\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}} & \boldsymbol{m = n} \\ \dfrac{d}{\pi\varepsilon_0} * \boldsymbol{0.8814} & \boldsymbol{m \neq n} \end{cases}$$

ניתן לראות כי המטריצה המתקבלת הינה סימטרית.

- מתוך קובץ ההקדמה לפרויקט ראינו כי מתקיים: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\sigma_{N-1}} \end{bmatrix} = [\mathbf{l}]^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix}$, על כן ניתן להציג את המשוואה כך ש :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dfrac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\sigma_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_{N-1}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{where\ x_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma_i d^2}{4\pi\epsilon_0}, 0 \leq i \leq N-1}$$

ולכן :

$$[\boldsymbol{l}] \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}}{\boldsymbol{d^2}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dfrac{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}}{\boldsymbol{d^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{l}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{d^2V}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\boldsymbol{d^2V}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}} \end{bmatrix}$$

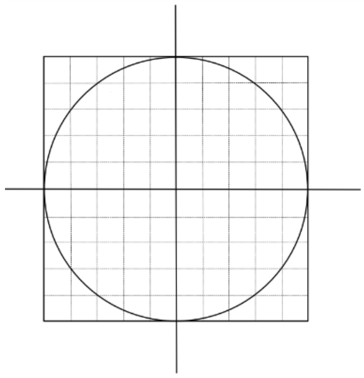
כפי שנתבקשנו בשאלה זו.

לצד זאת, מטעמי נוחות, נשתמש דווקא בבעיה בהצגתה הראשונית $[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{l}]^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix}$ לשמש אותנו במימוש הפתרון הממוחשב.

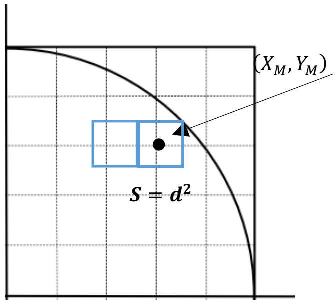
העקרון הבסיסי לחישוב הנומרי של מטען הדסקה ע״י שימוש בדיסקרטיזציה הוא חלוקת הדסקה לריבועים קטנים, חישוב מטען כל ריבוע בהתאם למיקומו , ולבסוף סכמה של כלל מטעני הריבועים לקבלת המטען הכולל של הדסקה. למען חישוב זה התבססנו על ההנחה שהפוטנציאל החשמלי על גבי כל הדסקה הוא קבוע.

המטען הכולל חושב באופן הבא : $$Q_t = \sum_{i=1}^{NXN} q_i \quad , q_i = \sigma_i * d^2$$

נציין כי בחרנו לבצע את חלוקת הדסקה לריבועים בצורה המתוארת מטה (חלוקת הריבוע החוסם לסריג כך שכל נקודה בסריג הינה מרכזו של ריבוע ששטחו d^2) ולא בצורה שהוצגה בדף ההנחיות (בה נק׳ הייחוס נמצאות בתוך ריבועי הסריג) מטעמי נוחות, ומתוך הנחה שבקירוב נומרי לא צפויה העדפה חישובית למי מהשיטות.



תרשים (1)

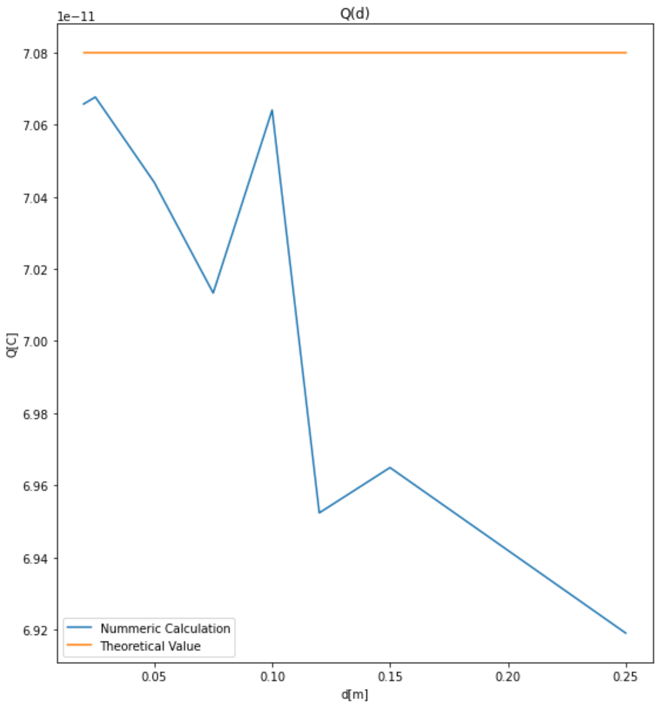


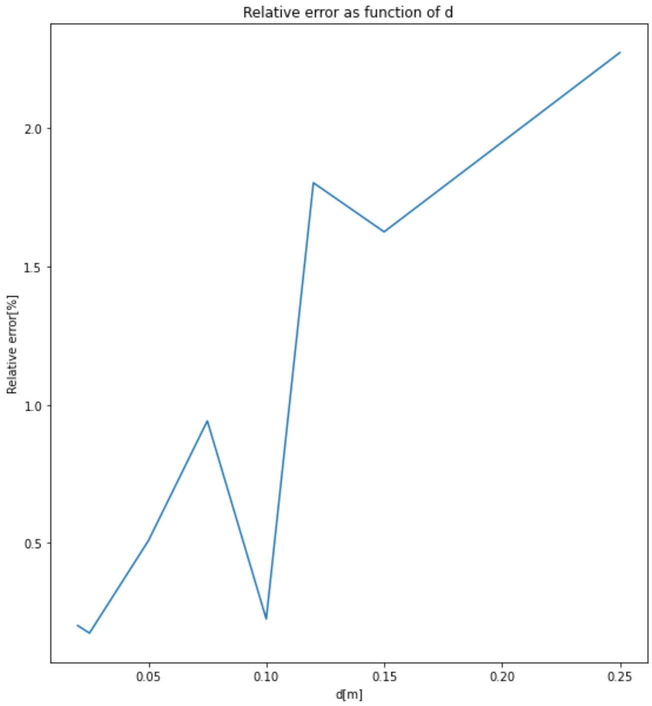
תרשים (2)

ג. החישוב עבור סעיף זה בוצע באמצעות הקוד המצורף יחד עם הפרויקט והניב את הפלט הבא:

```
For d of length 0.25, the total charge Q is 6.918999050076218e-11, with relative error of 2.274%
For d of length 0.15, the total charge Q is 6.964905146039455e-11, with relative error of 1.6256%
For d of length 0.12, the total charge Q is 6.952342158019326e-11, with relative error of 1.8031%
For d of length 0.1, the total charge Q is 7.064066774242009e-11, with relative error of 0.225%
For d of length 0.075, the total charge Q is 7.013324023471772e-11, with relative error of 0.9418%
For d of length 0.05, the total charge Q is 7.044007131530998e-11, with relative error of 0.5084%
For d of length 0.025, the total charge Q is 7.067676343789668e-11, with relative error of 0.1741%
For d of length 0.02, the total charge Q is 7.065731496043051e-11, with relative error of 0.2015%
```

יחד עם התרשים:





הגרף משמאל מתאר את חישוב המטען על הדסקה בצורה נומרית, לצד ערכו התיאורטי. מימין מופיע גרף המציג את השגיאה היחסית בין הערך הנומרי לערך התיאורטי. השגיאה היחסית חושבה באמצעות

$$Rerror = \frac{|Q - Q_{theo}|}{Q_{theo}}$$

ניתן לראות מגמה כללית שבה ככל ש d קטן – מטען הדסקה המחושב מתקרב לערכו התיאורטי. מגמת העלייה איננה מונוטונית שכן קיימות נקודות קיצון מקומיות לגרף. השערתנו לכך נעוצה באופן חלוקת הדסקה לריבועים הקטנים -עבור כל ערך של d נוכל לחשב את ההפרש בשטח של סך הריבועים לבין שטח הדסקה - לעתים יהיו קצוות שטחים חסרים של דסקה שלא יפלו תחת אף ריבוע, ולעתים יהיו שטחים עודפים של הריבועים החורגים משטח הדסקה. אנו מסיקים כי היחס בין השטח ה"עודף" לשטח ה"חסר" כתלות ב- d אינו לינארי ובפרט איננו מונוטוני, אך המגמה הכללית ברורה, וצפויה לקיים את הקשר הבא:

$$\boldsymbol{\lim_{d\to 0} \frac{Sum\ of\ Squares\ (d)}{Disc\ Area} = 1}.$$

כאשר עבור d אינפיניטיסימלי, כל ריבוע מקורב לנקודה וסכום הריבועים הוא סך כל הנקודות המרכיבות את שטח המעגל – דהיינו ההפרש בין השטחים ישאף ל-0, ונקבל התכנסות של שטחי הריבועים לשטח המעגל.

שאלה 2:

הקדמה:

בבואנו לעסוק בבעיה של קבל המורכב משתי דסקות בעזרת שיטת המומנטים, אנו נרצה לחשב את סך המטען על כל אחת מהדסקות באופן דומה לזה שפעלנו בשאלה 1, אלא שכעת עלינו להביא לידי ביטוי במטריצה את השפעות הגומלין בפוטנציאל שיוצרים כל אחד מאלמנטי השטח, על כל אחת מהדסקות.

כפי שראינו בדף ההנחיות, אם נסמן את הלוח העליון ב-A ואת הלוח התחתון ב-B, נוכל לבנות את המטריצה $[l]$ בעזרת הבלוקים הבאים:

$$[l]=\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix}$$

כאשר המטריצות l_{AA}, l_{BB} מחושבות באופן זהה למטריצה $[l]$ שחישבנו בשאלה 1, ומימדי כל מטריצה מתוך ה-4 תואמים את מימד המטריצה של שאלה 1 עבור d = 0.025. נסמן את מימד זה ב-N. באשר לחישוב המטריצה l_{AB} , עלינו להתאים את הנוסחה לחישוב הפוטנציאל בין אלמנטים הנמצאים על שני לוחות שונים:

$$l_{AB_{nm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{d^2}{\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 + D^2}}$$

כאשר n, m הם אינדקסים של האלמנטים על הלוח העליון והתחתון בהתאמה, ו-D הינו קבוע המוגדר להיות המרחק בציר Z בין הלוחות. כמו כן, מתקיים $l_{BA} = (l_{AB})^T$. לאחר חישובה של המטריצה $[l]$, נוכל להרכיב מערכת משוואות מהצורה הבאה:

$$\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix}[\sigma_n]=\begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix}$$

ובהתאם לחשב את צפיפות המטען המשטחית על הלוחות ע"י:

$$\begin{bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \end{bmatrix} = [l]^{-1} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix}$$

כעת כאשר יש לנו את צפיפויות המטען המשטחיות על כל לוח, נוכל לחשב גם את המטען על כל לוח:

$$Q_A = \sum_{0}^{N} \sigma_{A_n} * d^2$$

$$Q_B = \sum_{0}^{N} \sigma_{B_n} * d^2$$

לבסוף את הקיבול שאנו מניבים מהחישוב בשיטת המומנטים נקבל מתוך הקשר:

$$C = \frac{|Q_{A|}}{V} = \frac{|Q_A|}{V_1 - V_2}$$

לשם השוואה, החישוב של הערך התיאורטי של הקיבול של קבל לוחות אינסופי יתבצע באופן הבא:

$$C_{theo} = \epsilon_0 \frac{A}{D}$$

כאשר A הוא שטח כל לוח, ו-D מסומן בתרגיל זה כמרחק ביניהם. בנוסף, על מנת לאמוד את טיב הקירוב בהשוואה לערך התיאורטי נחשב גם את השגיאה היחסית בכל סעיף, Rerror, אותה נחשב באופן הבא:

$$Rerror = \frac{|C - C_{theo}|}{C_{theo}}$$

א.

בסעיף זה נתון כי המרחק בין הלוחות הוא: D = R/2 = 0.5m.

לאחר הרצת הקטע המתאים בקוד עבור סעיף זה מתקבל הפלט הבא:

```
The charge on the upper disc is 9.473591153333605e-11 [C], and the charge on the lower disc
is -9.473591153333605e-11 [C]
The total charge is 6.462348535570529e-27 [C]
the capacitance in the nummeric calculation is 9.473591153333605e-11 [F], while the theoret
ical value is 5.560618996853933e-11 [F]
The realtive error of is 70.3694%
```

כלומר:

$$C = 9.476 * 10^{-11}[F]\,,\ C_{theo} = 5.56 * 10^{-11},\ Rerror = 70.367\%, |Q| = 9.476 * 10^{-11}\ [c]$$

$$Q_{tot} = 6.46 * 10^{-27}[c]$$

להלן נתייחס לתוצאות:

1. השגיאה היחסית: אנו רואים שהקיבול שחושב בשיטה הנומרית גדול ב-70.37% בהשוואה לערך התיאורטי שחושב עבור קבל לוחות אינסופי עם אותם נתונים גיאומטריים.
אנו סבורים כי הסיבה לפער זה בחישוב נעוצה בראש ובראשונה באי-הדיוק שבחישוב התיאורטי הנובע מנתוני סעיף זה.
אנו יודעים כי הנוסחה לחישוב הקיבול של קבל לוחות אינסופיים תקפה תחת ההנחה ש- $A >> D$, אך תנאי זה לא מתקיים. למעשה, $D/A = 0.16$, ולכן המרחק בין הלוחות כלל אינו זניח ביחס לשטחם. על כן, אין אנו מופתעים מהסטייה הגדולה, שכן אנו לא יכולים להתייחס כראוי לחישוב של הערך התיאורטי בסעיף זה.
2. סך המטען על כל דסקה שווה גודל ומנוגד סימן. ניתן לראות בבירור שהמטען הכולל קטן בסדרי גודל משמעותיים ובטל בשישים בהשוואה למטען שחושב עבור דסקה בודדת. הלכה למעשה, המטען הכולל של הדסקות שווה ל-0 כצפוי, והמספר המוצג בתכנה נובע מאי-דיוקים בחישובי המחשב עבור **float**-ים ארוכים מאוד.

ב.

בסעיף זה נתון כי המרחק בין הלוחות הוא **$D = R/5 = 0.2m$.** לאחר הרצת הקטע המתאים בקוד עבור סעיף זה של השאלה מתקבל הפלט הבא:

```
The charge on the upper disc is 9.473591153333605e-11 [C], and the charge on the lower disc
is -9.473591153333605e-11 [C]
The total charge is 5.169878828456423e-26 [C]
the capacitance in the nummeric calculation is 1.3901547492134831e-10 [F], while the theore
tical value is 5.560618996853933e-11
The realtive error of is 32.114%
```

כלומר:

$$C = 1.39 * 10^{-10}[F],\ C_{theo} = 5.56 * 10^{-11},\ Rerror = 32.11\%, |Q| = 1.836 * 10^{-10}\ [c]\ ,$$
$$Q_{tot} = 5.17 * 10^{-26}[c]$$

להלן נתייחס לתוצאות:

1. <u>השגיאה היחסית</u>: אנו רואים שהשגיאה היחסית עומדת כעת על כ-32.11% בהשוואה לערך התיאורטי שחושב עבור קבל לוחות אינסופי עם אותם נתונים גיאומטריים.
ניתן לראות שעל אף השגיאה הגדולה, זו הצטמצמה משמעותית עם הירידה במרחק בין הלוחות. כעת $D/A = 0.06$. כלומר התנאי הדרוש עבור חישוב מהימן של הקיבול התיאורטי, מתקיים באופן טוב יותר על אף שעדיין לא ניתן לומר שהמרחק בין הלוחות זניח ביחס לשטחם. בהתאם לכך – השגיאה היחסית עודנה

גדולה, וקשה לדעת כמה ממנה ניתן לייחס לפערים בחישוב הנומרי, לעומת אי הדיוק של הנוסחה התיאורטית גם תחת תנאי סעיף זה.

2. כצפוי, המטענים של כל אחד מהלוחות שווים בגודלם ומנוגדים בסימן. המטען הכולל הוא 0, כצפוי.

ג.

בסעיף זה נתבקשנו לשרטט גרף של הקיבול כתלות ב- Dעבור הערכים : $d/3 < D < 1$.

על מנת לבצע משימה זו, ביצענו את אותה פרוצדורת חישובים של סעיפים א׳ ו-ב׳ עבור וקטור של ערכים בתחום הנ״ל, ואלו נקבעו כך שיתקבל אופיין מייצג עבור התנהגות החישוב הנומרי לעומת זה התיאורטי.

להלן הווקטור :

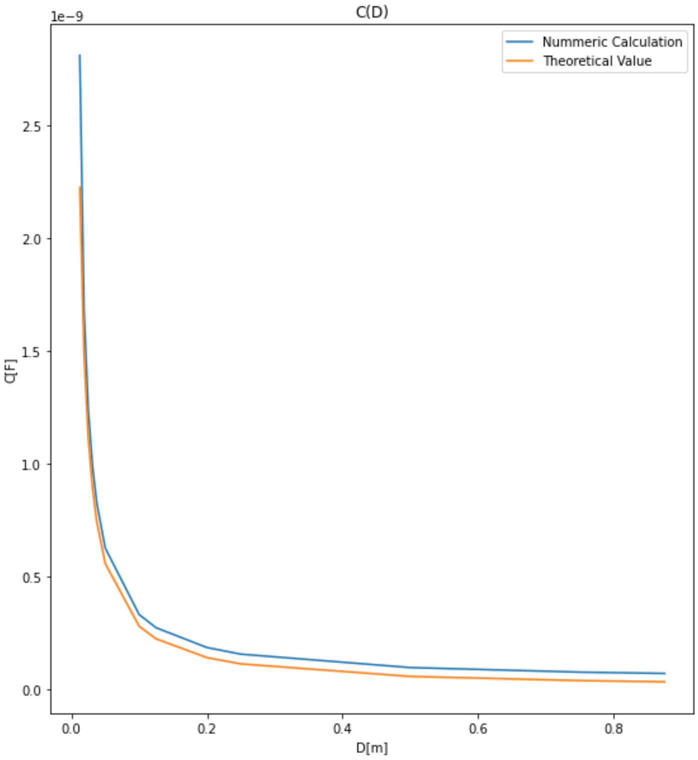
$$D_{stock} = \left[\frac{d}{2}, \frac{3d}{4}, d, \frac{5d}{4}, \frac{3d}{2}, 2d, \frac{R}{10}, \frac{R}{8}, \frac{R}{5}, \frac{R}{4}, \frac{R}{2}, \frac{3R}{4}, \frac{7R}{8}\right] d = 0.025m R = 1m$$

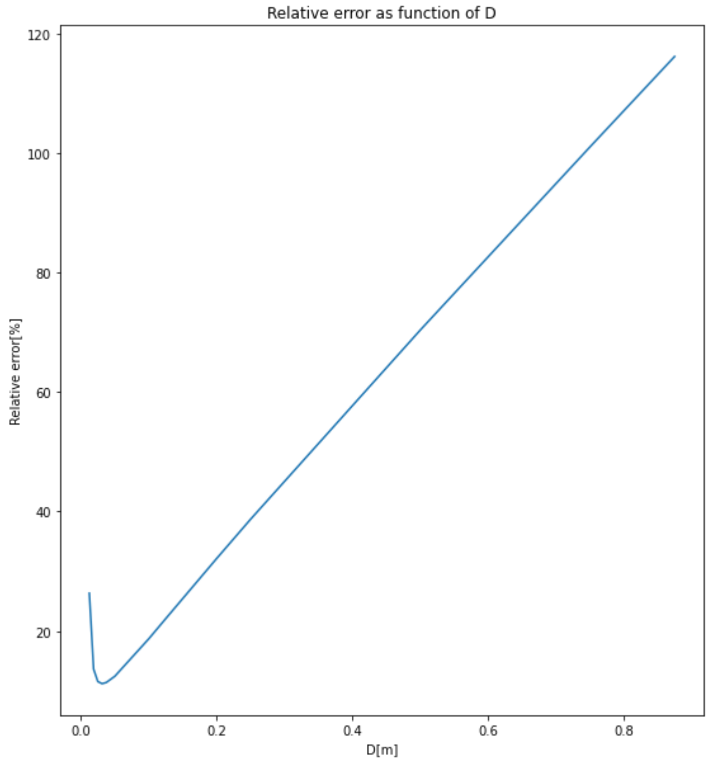
בעת ההרצה התקבל הפלט מודפס, שערכיו מסוכמים בטבלה שלהלן :

D [m]	C Nummeric [F]	C Theoretical [F]	Relative Error [%]
0.0125	$2.81 * 10^{-9}$	$2.22 * 10^{-9}$	**26.31%**
0.1875	$1.68 * 10^{-9}$	$1.48 * 10^{-9}$	**13.61%**
0.025	$1.24 * 10^{-9}$	$1.11 * 10^{-9}$	**11.52%**
0.03125	$9.89 * 10^{-10}$	$8.9 * 10^{-10}$	**11.16%**
0.0375	$8.25 * 10^{-10}$	$7.41 * 10^{-10}$	**11.36%**
0.05	$6.25 * 10^{-10}$	$5.56 * 10^{-10}$	**12.4%**
0.1	$3.3 * 10^{-10}$	$2.78 * 10^{-10}$	**18.7%**
0.125	$2.175 * 10^{-10}$	$2.22 * 10^{-10}$	**22.046%**
0.2	$1.84 * 10^{-10}$	$1.39 * 10^{-10}$	**32.11%**
0.25	$1.54 * 10^{-10}$	$1.11 * 10^{-10}$	**38.69%**
0.5	$9.47 * 10^{-11}$	$5.56 * 10^{-11}$	**70.37%**
0.75	$7.45 * 10^{-11}$	$3.71 * 10^{-11}$	**101.035%**

0.875	$6.87 * 10^{-11}$	$3.18 * 10^{-11}$	**116.21%**

על בסיס נתונים אלו, נבנו התרשימים הבאים :





משמאל – ערכי הקיבול המתקבלים מהחישוב הנומרי, לעומת אלו המתקבלים מהחישוב התיאורטי כפונקציה של **D**

מימין – ערכי השגיאה היחסית של חישוב הקיבול הנומרי ביחס לחישוב הקיבול התיאורטי באחוזים, כפונקציה של **D**

<u>ניתוח התרשימים :</u>

- עבור ערכים של $R > D > d$ - ניתן לזהות את המגמה הצפויה נוכח התוצאות של סעיפים א׳ ו-ב׳, שמצביעה על התאמה טובה יותר בין החישוב הנומרי לזה התיאורטי ככל ש-D קטן, הן מגרף ההשוואה בין ערכי הקיבול והן מגרף השגיאה היחסית. תחזית זו מתבססת על כך שככל ש- D קטן, כך הופכים הלוחות ל״אינסופיים״ ביחס למרחק ביניהם ותוצאת חישוב הקיבול התיאורטי נעשית אמינה יותר.
- עבור ערכים של $d \geq D > \frac{d}{3}$ – ניתן לראות כי ערכי הקיבול המחושבים בחישוב הנומרי מאמירים מהר יותר ביחס לערכי הקיבול התיאורטי והשגיאה היחסית גדלה חזרה. תופעה זו קורית דווקא בתחום בו הערך התיאורטי צפוי להיות אמין וקרוב מאוד לערך הקיבול המעשי.

ההסבר שאנו מציעים לתופעה זו נעוץ הפעם דווקא בחישוב הנומרי.

הנוסחה שפותחה עבור חישוב כל איבר במטריצה $[\boldsymbol{l}]$, שבה השתמשנו עוד בסעיף 1, נעשתה תחת התנאי שהמרחק בין אלמנטי השטח הטעונים לא יהיה קטן ממימדי האלמנטים עצמים.

בבעיה של שאלה 2 בה יש לנו שני לוחות מקבילים, מתקיים שכאשר D < đ, המרחק בין כל אלמנט לאלמנט שנמצא בדיוק מעליו/ מתחתיו בלוח הנגדי אכן קטן מ-d**.** כלומר התנאי שהנחנו בעת תכנון ההערכה הנומרית לצפיפות המטען המשטחית, ששימשה בתורה לאחר מכן גם לחישוב הקיבול, איננו תקף עוד. לכן, אנו לא מופתעים כאשר אנו מזהים שהשגיאה היחסית גדלה חזרה בדיוק בתחום זה במקום להמשיך במגמת ההתכנסות לערך התיאורטי.

ד.

בסעיף זה, השתנו ערכי המתח על לוחות הקבל ונתבקשנו לחזור על סעיף א', ולהציג את המטען על הלוחות בסעיף זה. בעת חזרה על השאלה, מודפס הפלט הבא:

```
Recaulculating 2.a with the new voltage

The charge on the upper disc is 1.166484535957046e-10, and on the lower disc is -7.28233694
7096752e-11
The total charge is 4.382508412473706e-11
```

בסך הכל המטען הכולל הוא: $Q_{tot_a} = 4.38 * 10^{-11}\ [C]$.

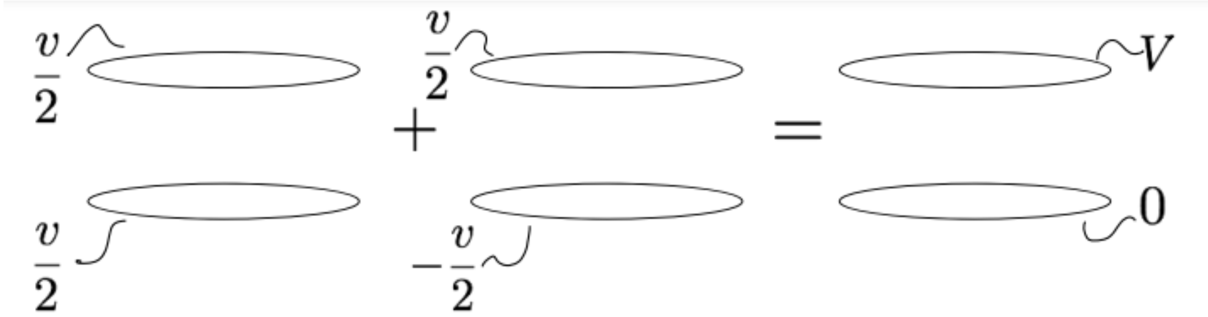
ניתן לזהות מיד כי המטען הכולל הוא מאותו סדר גודל של המטענים על כל אחד מהלוחות בנפרד, והוא איננו זניח. על פניו, מדובר בתוצאה חריגה – שכן אנו יודעים שעל קבל לוחות במצב סטטי סך המטען על הלוחות הוא 0, וראיה לכך ראינו גם בעת החישובים בסעיפים הקודמים. בנוסף, בהנחה שהגיאומטריה של הקבל לא השתנתה, וגם הפרש הפוטנציאל בין הלוחות נותר זהה, היינו מצפים לקבל את אותן תוצאות בדיוק כמו בסעיפים א' וב'. ההסבר שלנו לתוצאה זו נעוץ בשיטת החישוב של המטען על לוחות הקבל. סך המטען על הלוחות מחושב ע"י חישוב של צפיפות המטען המשטחית על כל אחד מהלוחות – על פי שיטת המומנטים שנלמדה במהלך ההכנה לעבודה זו.
בשיטה זו פותח ביטוי לפוטנציאל שיוצר כל אלמנט מטען משטחי במרחב על בסיס הנוסחה:

$$\Phi(x,y,z) = \iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dx'dy'dz'$$

כאשר לשם ייחוס אנו קובעים את $\phi(r \to \infty) = 0$.

הפוטנציאל הינו ערך שניתן לקבל ממנו מידע הפיזיקלי רק כאשר הוא נתון ביחס לנק' ייחוס מוגדרת (המידע מתקבל מתוך ההפרש), ואילו בבעיה החדשה המוצגת בסעיף ד', נקבעת נקודת (או במקרה זה סביבה) ייחוס שונה לפוטנציאל 0 (הלוח התחתון). לכן, על מנת לקבל ערכים מהימנים פיזיקלית למטען על הלוחות, היה עלינו להתאים

את פיתוח החישובים הנומריים בהתאם ביחס ללוח התחתון. למעשה, תחת השיטה שפותחה בתרגיל זה, המטען שמתקבל על הלוחות שקול לפתרון בעיית הסופרפוזיציה הבאה :



לאחר מימוש בעיה זו בקוד קיבלנו :

```
For V1 = 0.5, V2 = -0.5 : The charge on the upper disc is 9.473591153333605e-11 [C], the charge on the lower disc
 is -9.473591153333603e-11 [C], and the total charge is 3.2311742677852644e-27[C]
For V1 = 0.5, V2 = 0.5 : The charge on the upper disc is 2.191254206236853e-11 [C], the charge on the lower disc
 is 2.1912542062368535e-11 [C], and the total charge is 4.382508412473703e-11[C]
For V1 = 1v, V2 = 0v : The charge on the upper disc is 1.1664845359570457e-10 [C],  the charge on the lower disc
 is -7.282336947096752e-11 [C], and the total charge is 4.382508412473706e-11[C]
```

ואכן ניתן לומר כי סך המטען הכולל שווה עבור 2 צידי המשוואה.