

עבודת חקר – תמסורת גלים ומערכות מפולגות

מגישים:

עמית עזרן – 205601198

נתנאל ניסן - 316458843

שאלה 1:

בשאלה זו נדרשנו לבצע דיסקרטיזציה של קו תמסורת באורך l ע"י חלוקת הקו ל- N חלקים זהים. בחרנו בבעיה זו להשתמש ב- $N=1000$ ועל בסיס חלוקה זו נגדיר $\Delta = \frac{l}{N}$. את הדיסקרטיזציה ביצענו על מנת למצוא את הזרם והמתח על קו התמסורת באופן הבא:

1. וקטור הנעלמים: התייחסנו למתח ולזרם של כל חלק של קו התמסורת כנעלם כך שקיבלנו וקטור נעלמים בגודל $2N$.

$$[V_0 \quad \dots \quad V_{N-1} \quad I_0 \quad \dots \quad I_{N-1}]$$

2. המטריצה $(M_{n,m})$: מטריצה בסדר גודל של $2N * 2N$. משוואת הטלגרפיה בתצורתן הבדידה סיפקו לנו $4 - 2N$ משוואות. 4 משוואות נוספות קיבלנו מ-4 תנאי השפה על הזרם והמתח ב-2 קצוות קו התמסורת. בכל צד ישנו תנאי (תנאים 1 ו-3) המבוסס על חוק אוהם, ועל התייחסותנו לקצוות הקו כמערכות מקובצות. בנוסף על כך, בכל צד אנו מוסיפים תנאי שפה (תנאים 2 ו-4) שפותח על בסיס השיטה "the ghost point procedure" שהוצגה במטלה שנועד להתמודד עם שתי משוואות הטלגרף החסרות בקצוות. כמו כן, ניתן מספר הבהרות להצגה של המשוואות:

- המשוואות מתוארות כך שהן תואמות את המשוואות הנמצאות בקובץ הקוד WaveTransmissionProject.py (עד כדי העברות אגפים) וראו הערה 1;
- האינדקס n מייצג את מספר השורה במטריצה.
- האינדקס m באיברי המטריצה $V_{n,m}, I_{n,m}$ במשוואות שיוצגו להלן תואם את המיקומים של המתח והזרם בוקטור הנעלמים, כך ש- $V_{n,m}$ תואם מתאים ל- V_m בוקטור הנעלמים, ו- $I_{n,m}$ במטריצה מתאים ל- I_{m-N} בוקטור הנעלמים.

משוואת הטלגרפיה הבדידות:

$$\frac{V_{n,m+1}}{2\Delta} - \frac{V_{n,m-1}}{2\Delta} = j\omega L * I_{n,N+m-1} : M_{2 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq N-1}$$
$$\frac{I_{n,m+1}}{2\Delta} - \frac{I_{n,m-1}}{2\Delta} = j\omega C * V_{n,m} : M_{N+2 \leq n \leq 2N-1, N+2 \leq m \leq 2N-1}$$

תנאי השפה עבור $z=0$:

$$(1) V_g = V_{0,0} - I_{0,N} * R_g$$

$$(2) \frac{V_{1,1} - V_{1,0}}{\Delta} = j\omega\Delta \frac{L * I_{1,N} + L * I_{1,N+1}}{2}$$

תנאי השפה עבור $z=1$:

$$(3) V_{N,N-1} = I_{N,2N-1} * Z_L$$

$$(4) \frac{V_{N+1,N-1} - V_{N+1,N-2}}{\Delta} = j\omega\Delta \frac{L * I_{N+1,2N-1} + L * I_{N+1,2N-2}}{2}$$

3. וקטור הפתרונות: וקטור זה יהיה וקטור אפסים מלבד האיבר הראשון שהיה 1 וזאת על מנת לקיים את תנאי השפה ב $z=0$.

$$[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

להלן אילוסטרציה של המטריצה להמחשה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & R_G & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & j\frac{\omega L \Delta}{2} & j\frac{\omega L \Delta}{2} & 0 \dots 0 \\ -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 & 0 & j\omega L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & j\omega L & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 & j\omega L & 0 \\ 0 & j\omega C & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & j\omega C & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & Z_L \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & j\frac{\omega L \Delta}{2} & j\frac{\omega L \Delta}{2} \end{bmatrix}$$

בנוסף, נדרשנו לפתור את הבעיה המתוארת בשאלה בצורה אנליטית, כאשר נעזרנו בפיתוחים שנעשו בתרגול : 3

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} [1 + \Gamma(z = 0) e^{j2\beta z}]$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_c} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma(z = 0) e^{j2\beta z}]$$

כאשר:

$$\Gamma(z = 0) = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

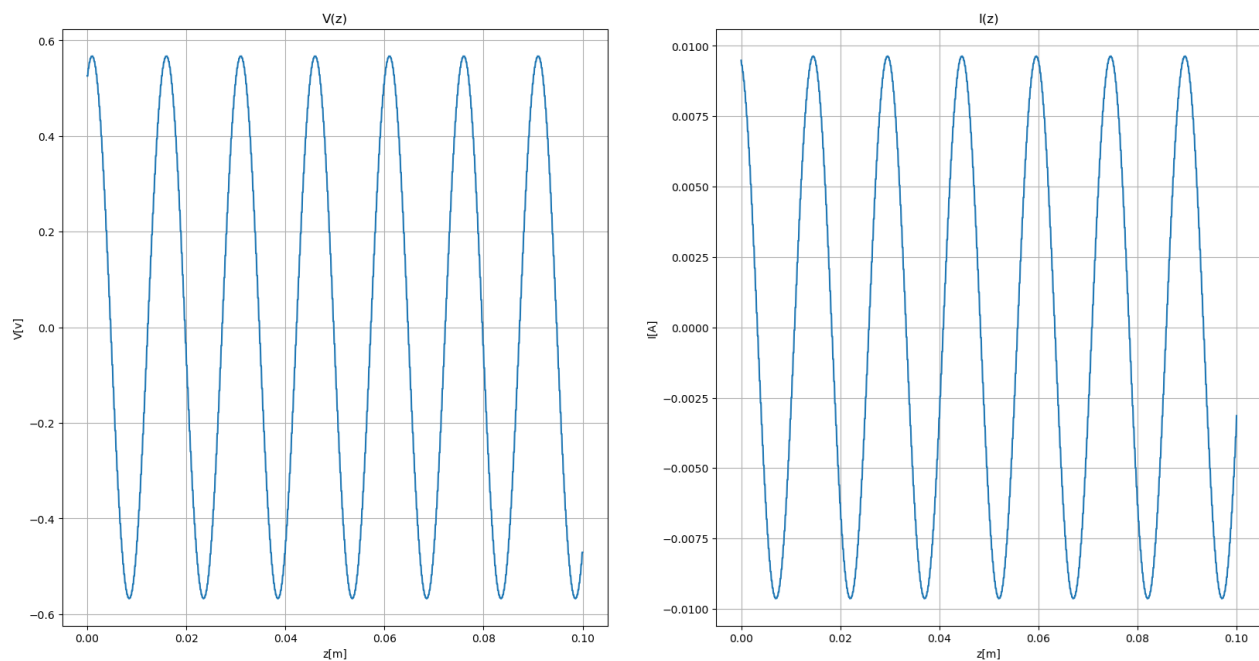
$$V_0^+ = \frac{\frac{Z_c}{Z_c + Z_G} V_G}{e^{j\beta l} [1 - \frac{Z_G - Z_c}{Z_G + Z_c} \Gamma_L e^{-2j\beta l}]}$$

את השגיאה היחסית בין כל ערך של מתח או זרם בקו שחושב באופן נומרי לבין החישוב האנליטי (התיאורטי למעשה), חישבנו באופן הבא (בלי הגבלת הכלליות נציג עבור המתח):

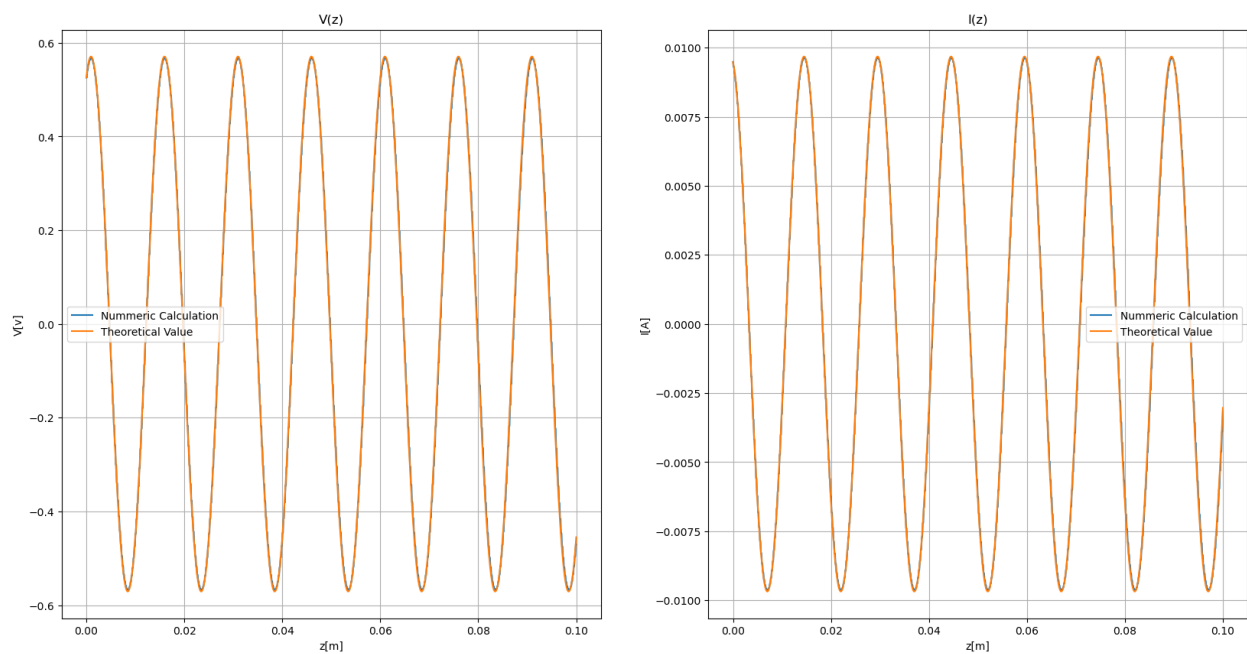
$$e_{relative} = \left| \frac{V_{i_{theo}} - V_{i_{numeric}}}{V_{i_{theo}}} \right| * 100\%$$

יש לציין שהפיתוחים הנ"ל פותחו לבעיה שקולה כך שקו התמסורת נמצא בקטע $[-l, 0]$ ולכן ביצענו הזחה לתוצאות כך שתתאמנה לקטע $[0, l]$ בבעיה שלנו.

הפתרונות הנומריים והאנליטיים עבור המתח והזרם בכל נקודה בקו:



איור 1.1 – המתח והזרם על גבי הקו מחושבים בצורה נומרית



איור 1.2 – המתח והזרם על גבי הקו מחושבים בצורה אנליטית ונומריית

איור 1.1 מתאר את המתח והזרם המחושבים בצורה דיסקרטית על הקו ואיור 1.2 מתאר את המתח והזרם בצורה דיסקרטית ואנליטית. **השגיאה היחסית הממוצעת** המתקבלת באיור 1.2 בין החישוב והאנליטי והדיסקרטי הינה 3.81% עבור ערכי המתח ו-3.97% עבור ערכי הזרם. ניתן לראות, כי הגרפים למעשה כמעט מתלכדים לכל אורכם.

שאלה 2:

1. על מנת לבצע תיאום אימפדנסים צריך להתקיים ש $\Gamma_{in}\left(z = \frac{l}{2}\right) = 0$. נחשב אנליטית בהתאם לדרישה זו מה צריכים להיות נתוני הקו המתואם:

מתקיים ש-

$$1. \quad v_p = \sqrt{\frac{1}{L'C'}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{f\sqrt{L'C'}}$$

$$2. \quad Z_1 = \sqrt{Z_0 R_L}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

כאשר Z_1 הוא האימפדנס על חצי הקו הימני.

אנו מעוניינים ליצור למעשה שנאי רבע אורך גל, לכן נוסיף דרישה ש- $\frac{\lambda}{4} = \frac{l}{2}$, ונקבל אילוץ נוסף:

$$\lambda = 2l = 0.2m$$

כך אנו למעשה מקבלים 2 משוואות עבור 2 הנעלמים L', C' כאשר יתר הערכים ידועים.

על בסיס המשוואות ב-2, נבודד את L' ונציב במשוואה 1:

$$2l = \lambda = \frac{1}{f\sqrt{Z_0 R_L} C'}$$

$$C' = \frac{1}{2lf\sqrt{Z_0 R_L}}$$

לאחר הצבת הערכים הנתונים נקבל:

$$C' = 4.714 * 10^{-12} [F]$$

$$L' = 5.3033 * 10^{-8} [H]$$

על כן, עבור $L(z), C(z)$, נבחר ערכים של:

$$L(z): L_1 = L', \alpha_1 = 0$$

$$C(z): C_1 = C', \alpha_2 = 0$$

כאשר נציב ערכים אלו במשוואות נקבל כי

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 R_L} \rightarrow Z_{in} \left(z = \frac{l}{2} \right) = Z_0 \rightarrow \Gamma \left(z = \frac{l}{2} \right) = 0$$

לסיכום: עבור הערכים לקיבול והשראות של קו התמסורת הנוסף שחישבנו, תחת הדרישות שצוינו לעיל, קיבלנו תיאום עבור חצי קו התמסורת ראשון.

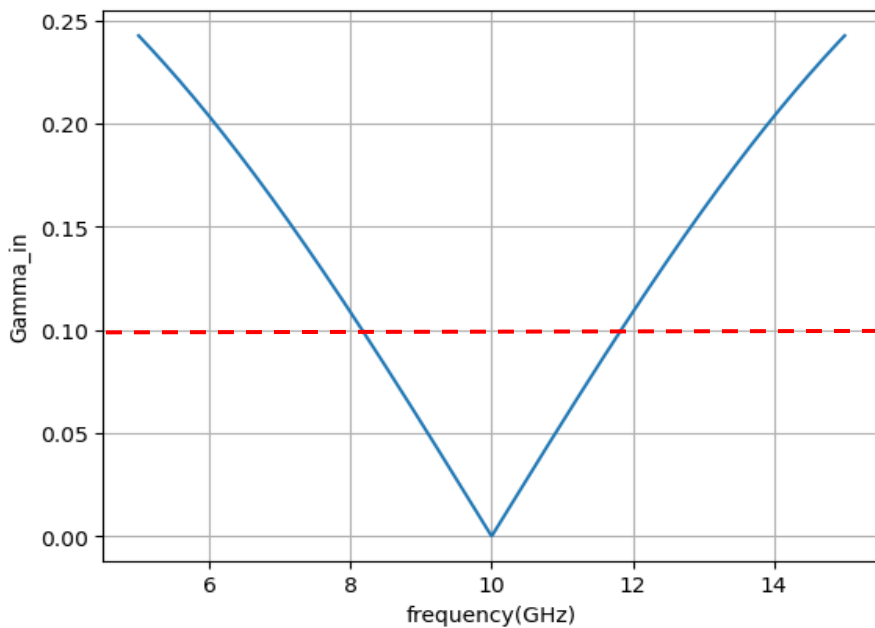
2. כעת נחשב את מקדם ההחזרה שאנו רואים עבור הקו המתואם, לכל תדר בספקטרום $5GHz - 15GHz$ שאותו נחלק ל- N תדרים במרחקים שווים זה מזה.

את חישוב מקדם ההחזרה לכל תדר נבצע בעזרת הנוסחאות:

$$\beta = \frac{2\pi f}{v_p}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(2\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(2\beta l)}$$

$$\Gamma_{in} = \left| \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \right|$$



רוחב הסרט המתקבל עבור הערכים
שבחרנו הינו 3.67Ghz.

3.

תחילה נדרשנו לבצע הצגה מטריצית של המתח והזרם על גבי קו התמסורת.

נציג:

1. וקטור הנעלמים: התייחסנו למתח ולזרם של כל חלק של קו התמסורת כנעלם כך שקיבלנו וקטור נעלמים בגודל $2N$.

$$[V_0 \quad \cdots \quad V_{N-1} \quad I_0 \quad \cdots \quad I_{N-1}]$$

2. המטריצה $(M_{n,m})$: מטריצה בסדר גודל של $2N * 2N$. בחרנו להתייחס למערכת כ-2 קווי תמסורת נפרדים. כל אחד באורך $\frac{l}{2}$, ומחולק ל- $\frac{N}{2}$ חלקים. מתוך כך נדרשו להוסיף עוד 4 תנאי שפה עבור נקודת המפגש שלהם, $Z = \frac{l}{2}$. משוואת הטלגרפיה בתצורתן הבדידה סיפקו לנו $2N - 8$ משוואות. 8 משוואות נוספות קיבלנו מתוך 4 תנאי השפה עבור כל קו תמסורת (8 בסה"כ).

היגיון מסדר עבור תנאי השפה:

ארבעת תנאי השפה שהצגנו בשאלה 1 הקודמים עודם עומדים.

שני תנאי שפה נוספים מגיעים מתוך דרישת רציפות המתח והזרם בין קווי התמסורת. על המתח והזרם בקצוות הקווים בנק' המפגש להיות שווים.

שני תנאי השפה הנוותרים מבוססים על שיטת "the ghost point procedure", אחד עבור קצהו הימני של חצי הקו השמאלי (הקו המקורי), ואחד עבור קצהו השמאלי של חצי הקו הימני (קו התיאום). את תנאי השפה הללו אנו דורשים כדי להתמודד עם אי הרציפות ב-L ו-C ב- $\frac{l}{2}$, שבגינה הנגזרת של המתח והזרם בנקודת החיבור אינה מוגדרת היטב, ולכן אנו סבורים ששימוש ב-"ghost point procedure" עדיף משימוש במשוואות הטלגרף עבור נקודות התפר שבין הקווים. ראו הערה 2 בסוף הקובץ.

ניגש להצגת המטריצה:

ההערות לגבי נוטציה במשוואות שניתנו בשאלה 1 תקפות גם כן.

בנוסף, נסמן: $\tilde{L} = L' + \alpha_1 (k\Delta)^2$, $\tilde{C} = C' + \alpha_2 (k\Delta)^2$, ו- m זהו מספר טבעי הנע בין הערכים

$$0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

מדובר למעשה בדיסקרטיזציה ע"י של הביטויים:

$$\tilde{L} = L' + \alpha_1 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2, \quad \tilde{C} = C' + \alpha_2 \left(z - \frac{l}{2}\right)^2$$

המשוואות ותנאי השפה עבור קו התמסורת הראשון:

א. משוואות הטלגרפיה הבדידות:

$$\frac{V_{n,m+1}}{2\Delta} - \frac{V_{n,m-1}}{2\Delta} = j\omega L_0 * I_{n,N+m-1} : M_{2 \leq n \leq \frac{N}{2}-1, 2 \leq m \leq \frac{N}{2}-1}$$

$$\frac{I_{n,m+1}}{2\Delta} - \frac{I_{n,m-1}}{2\Delta} = j\omega C_0 * V_{n,m} : M_{N+3 \leq n \leq \frac{3N}{2}, N+3 \leq m \leq \frac{3N}{2}}$$

ב. תנאי השפה עבור $z=0$:

$$(1) \quad 1 = V_g = V_{0,0} - I_{0,N} * R_g$$

$$(2) \quad \frac{V_{1,1} - V_{1,0}}{\Delta} = j\omega \Delta \frac{L * I_{1,N} + L * I_{1,N+1}}{2}$$

ג. תנאי השפה עבור $z = l/2$:

$$(3) \frac{V_{N, \frac{N}{2}-1} - V_{N, \frac{N}{2}-2}}{\Delta} = j\omega\Delta \frac{L_0 * I_{N, \frac{3N}{2}-2} + L_0 * I_{N, \frac{3N}{2}-1}}{2}$$

המשוואות ותנאי השפה עבור קו התמסורת השני :

א. משוואת הטלגרפיה הבדידות :

$$\frac{V_{m+1}}{2\Delta} - \frac{V_{m-1}}{2\Delta} = j\omega\tilde{L} * I_{N+m-1} : M_{\frac{N}{2}+2 \leq n \leq N-1, \frac{N}{2}+2 \leq m \leq N-1}$$

$$\frac{I_{m+1}}{2\Delta} - \frac{I_{m-1}}{2\Delta} = j\omega\tilde{C} * V_m : M_{\frac{3N}{2}+2 \leq n \leq 2N-1, \frac{3N}{2} \leq m \leq 2N-1}$$

ב. תנאי השפה עבור $z = l/2$:

$$(4) \frac{V_{N/2, N/2-1} - V_{N/2, N/2-2}}{\Delta} = j\omega\Delta \frac{\tilde{L} * I_{N/2, 3N/2-2} + \tilde{L} * I_{N/2, 3N/2-1}}{2}$$

ג. תנאי השפה עבור $z=l$:

$$V_{\frac{3N}{2}+1, N-1} = I_{\frac{3N}{2}+1, 2*N-1} * Z_L$$

$$\frac{V_{N+2, N-1} - V_{N+2, N-2}}{\Delta} = j\omega\Delta \frac{\tilde{L} * I_{N+2, 2N-1} + \tilde{L} * I_{N+2, 2*N-2}}{2}$$

תנאי השפה לדרישת רציפות הזרם והמתח בנקודה $z=l/2$:

$$V_{N, \frac{N}{2}-1} = V_{N, \frac{N}{2}}$$

$$I_{N+1, \frac{3N}{2}-1} = I_{N+1, \frac{3N}{2}}$$

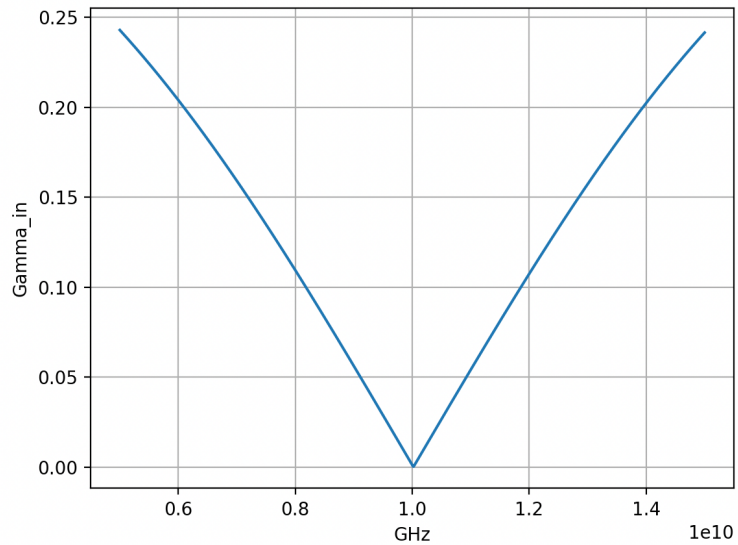
וקטור הפתרונות: וקטור זה היה וקטור אפסים מלבד האיבר הראשון שהיה 1 וזאת על מנת לקיים את תנאי השפה ב $z=0$.

$$[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

להלן אילוסטרציה של המטריצה להמחשה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & R_G & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & j\frac{\omega L\Delta}{2} & j\frac{\omega L\Delta}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & 0 & jwL & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j\omega C & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 & \frac{1}{2\Delta} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & j\omega C & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & jw(C_1 + \alpha_2(\Delta k)^2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & jw(C_1 + \alpha_2(k\Delta)^2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & Z_L \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & \dots & 0 & j\frac{\omega L\Delta}{2} & j\frac{\omega L\Delta}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כמו כן, על מנת לוודא את אמיתות הפתרון שבנינו, הרצנו "בדיקת שפיות" שמחשבת את רוחב הסרט כאשר $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, כדי לראות שמתקבלת תוצאה דומה לזו שקיבלנו בסעיף השני של שאלה זו. בדיקה זו נמצאת בקובץ `WaveTransmissionProject_2.py` ובה מתקבל רוחב הפס **3.65GHz** (עבור $N=1000$).



4. בסעיף זה נתבקשנו להגדיל את רוחב הפס שעבורו $|\Gamma_{in}| < 0.1$, בעזרת ארבעת המשתנים $L_1, L_2, \alpha_1, \alpha_2$. לצורך כך עשינו שימוש במטריצה שכתבנו בשאלה 3 על מנת לחשב את המתח והזרם על פני קו התמסורת, ומתוכם חישבנו את מקדם ההחזרה לסדרת תדרים בתחום $5GHz - 15GHz$.

החישוב של מקדם ההחזרה, בוצע באופן הבא:

ראשית נחשב את אימפדנס הקו בכניסה לקו התיאום (כלומר ב- $\frac{l}{2}$). במקרה שלנו, לאחר דיסקרטיזציה אנו נדרשים לחשב את המתח והזרם בנקודה ה- $N/2$ ואת אימפדנס הכניסה בעזרתם. לאחר מכן נוכל לחשב את מקדם ההחזרה באופן דומה לזה שנעשה בסעיפים הקודמים.

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} \rightarrow Z_{in} = \frac{V_N}{I_N \frac{1}{2}}$$

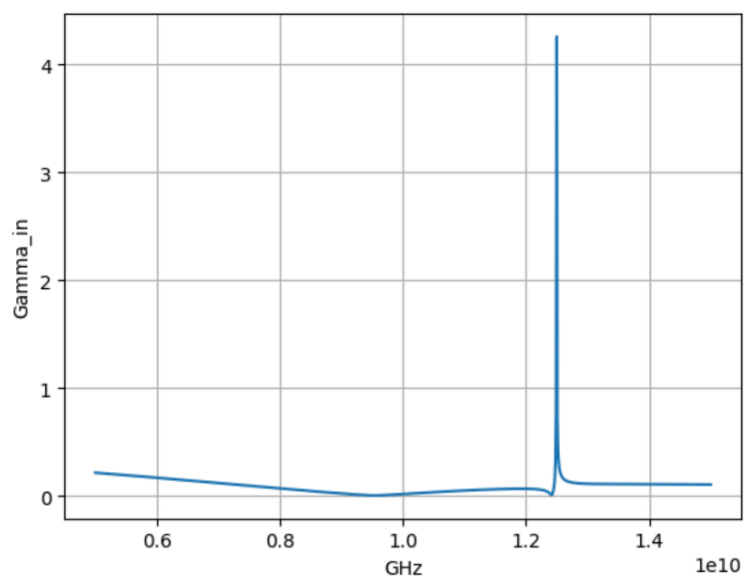
$$\Gamma_{in} = \left| \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \right|$$

בחרנו לפתור את הבעיה באופן איטרטיבי כאשר בדקנו מה רוחב הסרט המתקבל לצירופים שונים של ארבעת הפרמטרים $L_1, L_2, \alpha_1, \alpha_2$. מדובר בבעיה עם 4 דרגות חופש למשתנים (כלומר בעיה חישובית שגדלה ברביעית), וכמו כן מספר רב של איטרציות על התדר. על כן בקובץ הקוד שלנו *Q2d.py* נציג תוצאה סופית בלבד.

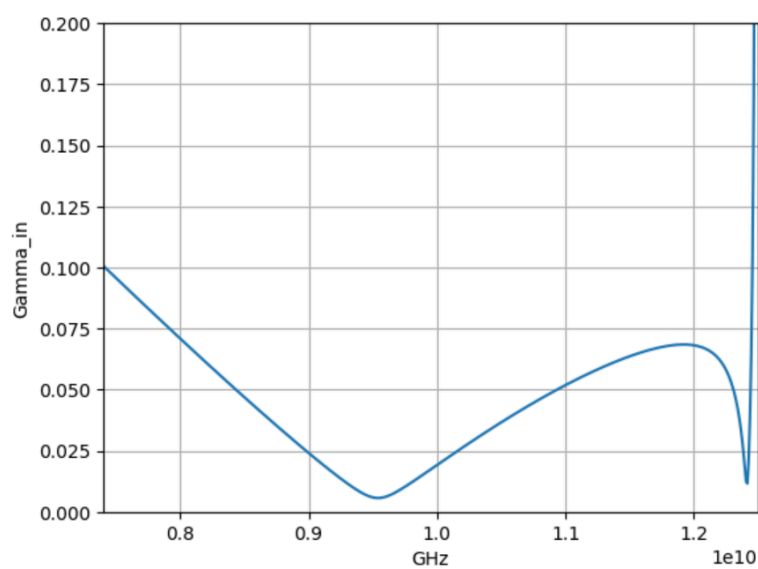
עבור הפרמטרים :

$$L_1 = 0.977 * L', C_1 = 1.55 * C', \alpha_1 = 754L', \alpha_2 = 135C'$$

מתקבל רוחב פס של $4.91GHz$, עם התרשים :



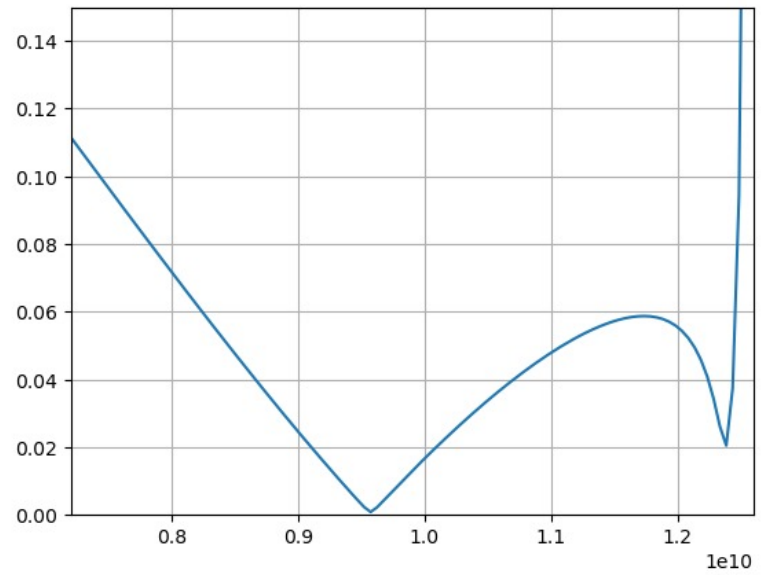
ובזום לתחום התדרים $7.4GHz-12.5GHz$



ראו הערות 3 ו-4.

הערות:

1. לשם נוחות ומניעת ערבוב בין משתנים, פיצלנו את הקוד לשני קבצים. הראשון `WaveTransmissionProject.py` מכיל את הקוד הרלוונטי לשאלה 1 כולה, ולשני הסעיפים הראשונים של שאלה 2. הקובץ `WaveTransmissionProject_2.py` רלוונטי לסעיפים 3 ו-4 של שאלה 2. לקוד בקובץ השני לוקחות מספר דקות לרוץ ומתקבלים ממנו שלושה תרשימים.
2. התלבטנו רבות האם להשתמש ב-"ghost point procedure" בשני הקצוות של כל אחד מהקווים, או להסתפק בדרישת רציפות בלבד. בדיקה שערכנו הראתה שהתוצאות מתקבלות באופן דומה ולא אחת גם זהה, למשל עבור "בדיקת השפיות" שנציג בסעיף 2-ד'. בנוסף ראינו שגם תופעות כמו $|\Gamma| > 1$ שנראו לנו תחילה חריגות ובהן נדון בהערה הבאה, נצפו באותה מידה (אך ערכים שונים) בפתרון מין זה. **נדגיש שיחד עם זאת, פתרון שבו דורשים רציפות בלבד לא מביא בחשבון את אי הרציפות של נגזרות המתח והזרם בעוד שהפתרון שלנו אכן מביא זאת בחשבון ועל כן הוא זה שנבחר.**
3. ניתן לראות שבסביבת התדר $12.55GHz$ אנו רואים שערכי $|\Gamma| > 1$. לכאורה מדובר בתוצאה שאיננה פיזיקלית או לכל הפחות לא כזו שנגענו בה במסגרת הקורס שבו אנו עוסקים בהתנגדות ממשית חיובית בלבד. על כן, פנינו למקורות מידע נוספים על מנת לבדוק האם ערכים כאלו אכן יכולים להתקבל בעת חישוב מקדמי החזרה על קו תמסורת, ומה הם מייצגים.
בין הממצאים עלה שערכים גדולים מ-1 של מקדמי החזרה אכן אפשריים. ערכים אלו מתקבלים כאשר קיימת נק' בקו (במקרה שלנו, אנו עוסקים באימפדנס ב- $\frac{l}{2}$) עם "התנגדות שלילית" – זו למעשה דרך לבטא מצב שבו הגל המוחזר גדול באמפליטודה שלו מהגל הפוגע.
עבור מקרים כאלו אף קיימת דיאגרמת סמית' מותאמת וניתן לראותה באתר:
<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/smith-chart>
לחילופין, מדובר בבעיה נפוצה בחישובים נומריים שאיננה בהכרח מצביעה על התופעה הפיזיקלית הנ"ל ולכך מצאנו עדויות במספר פורומים מחקריים. למשל:
https://community.altair.com/community?id=community_question&sys_id=f8b680ba1b2bd0908017dc61ec4bcb13
https://www.researchgate.net/post/Can_reflection_coefficient_be_greater_than_one2
ועוד.
4. בגלל הקושי החישובי בבעיה, החיפוש אחר הפרמטרים האופטימליים לפתרון הבעיה נעשה כאשר קו התמסורת מחולק ל- $N=400$ חלקים, ולא $N=1000$ כמו בסעיפים הקודמים. כמו כן, את טווח התדרים הנבדקים חילקנו ל-200 חלקים. על מנת לראות שמדובר בקירוב טוב לבעיה, ביצענו "בדיקת שפיות", בה הזנו ערכים
 $L_1 = L', C_1 = C', \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ וראינו שאכן התקבל רוחב סרט של $3.67GHz$ כמו בסעיף 2.ב'.
בניסיונות אלו, כאשר מצאנו את הערכים הנבחרים קיבלנו רוחב פס גדול אף יותר העומד על $5.08GHz$ עם הפלט והתרשים:



בנוסף אנו רואים לנכון לציין שעבור N שונה, וחלוקה שונה של תחום התדרים, ניתן מתקבל רוחב פס שונה
 במקצת. הפרמטרים הנ"ל הוזנו לקובץ הקוד ורצים גם כן בתכנית של הקובץ
WaveTransmissionProject_2.py