数理リテラシー特別講座「波動の数理」 第1回　演習課題		担当：西岡	提出 期限	2021年2月12日(金)23:59		点数	/25
学籍番号		クラス		番 号		氏 名	

この演習課題の用紙を印刷できる人は印刷して解答を記入して下さい．印刷できない人は，レポート用紙やノートなどに解答を記入して下さい．解答を写真に撮って PDF に変換し，指定の方法で必ず提出期限(2/12(金)23:59)までに提出して下さい(締切厳守)．ファイル名は【クラス名列 氏名】第1回波動の数理.pdf と付けてください．

演習1-1

(1) バネ定数 k のバネに繋がれた質量 m の質点の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ から導かれる2階同次線形微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ （$\omega=\sqrt{k/m}$）の一般解が $x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$（$A,\phi_0$：任意定数）と表せることを示せ．〔3 点〕　（ヒント：第 1 回講座資料の「定数係数の 2 階同次線形微分方程式」を参照）

(2) 質量 $m=2.0\ \mathrm{kg}$，バネ定数 $k=8.0\ \mathrm{N/m}$ とする．(1)で求めた一般解から，時刻 $t=0\,\mathrm{s}$ において質点の変位 $x(0)=1.0\,\mathrm{m}$，質点の速度 $v(0)=0\,\mathrm{m/s}$ という初期条件を満たす特殊解を求め，そのグラフを描け（グラフ描画ソフトを用いてもよい）．〔3 点〕

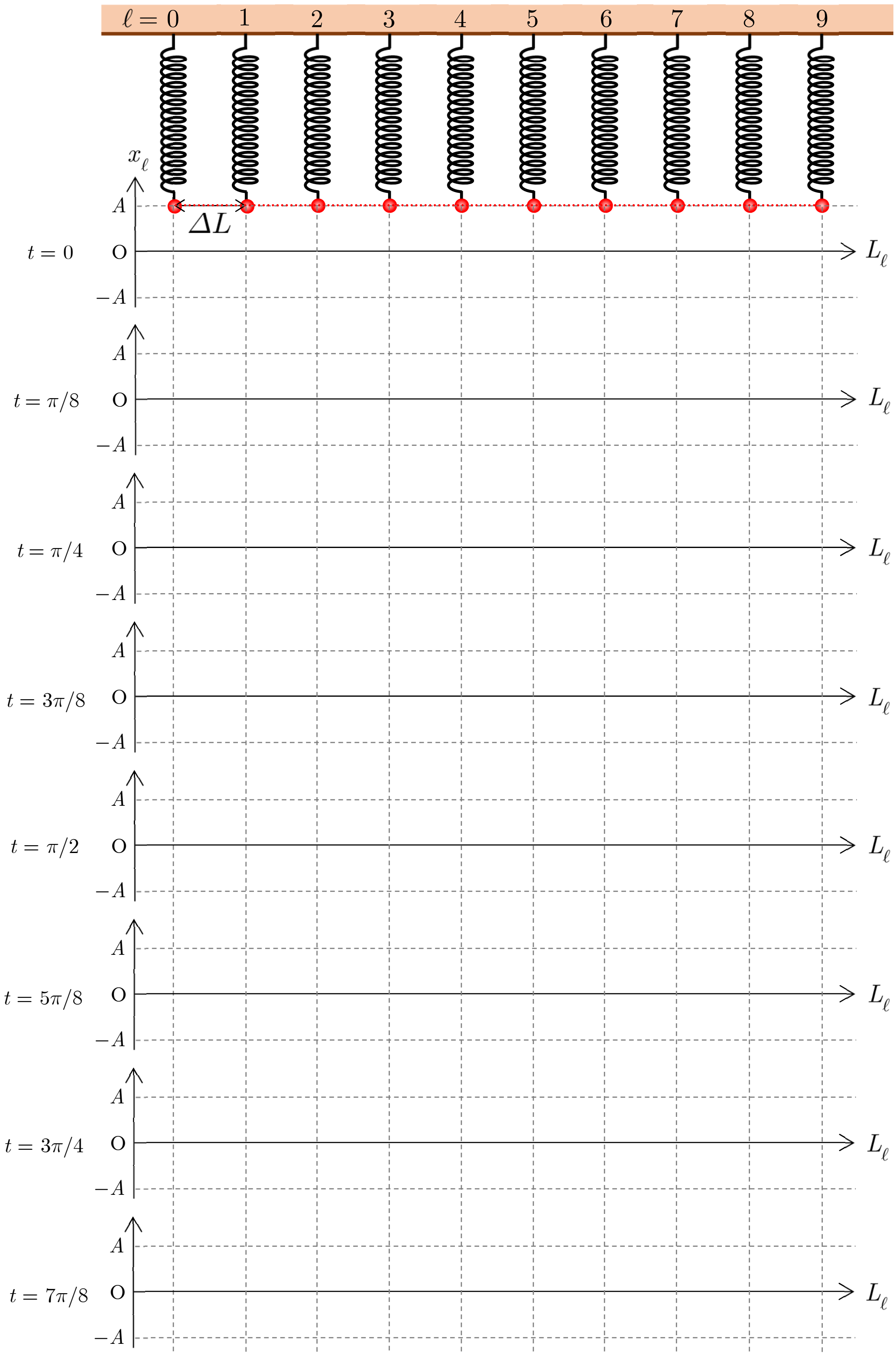
特殊解のグラフ

演習1-2

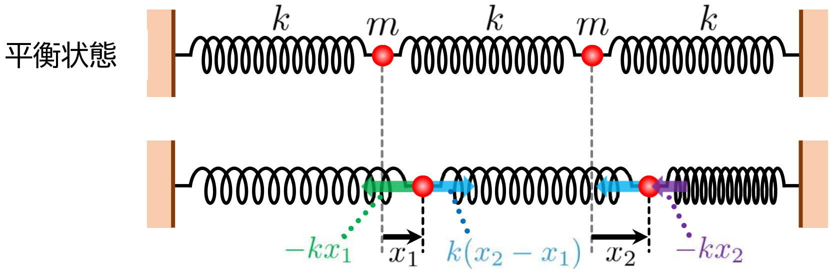
下図のようにバネ-質量系を間隔 $\varDelta L$ で10個並べ，左端から時間差 $\varDelta t$ で順に同じ振幅で単振動させた．このとき，ℓ 番目の質点の変位は次式で表されるとする．

$$x_\ell(t) = A\cos\left[\omega(t-\ell\varDelta t)\right] \qquad \left(\omega = \sqrt{k/m}\right)$$

質量 $m = 2.0$ kg，バネ定数 $k = 8.0$ N/m，時間差 $\varDelta t = \pi/8$ とし，横軸に左端からの質点の位置，縦軸に質点の変位をとって，各時刻 $t = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{8}$ での各質点の変位を下のグラフに赤丸でプロットせよ．ただし，$t-\ell\varDelta t<0$ の場合は，$x_\ell = A$ とする．〔7点〕



演習1-3 下図の3バネ-2質量系の連成振動を考え，すべての質点の質量はm，バネ定数はすべてkとする．



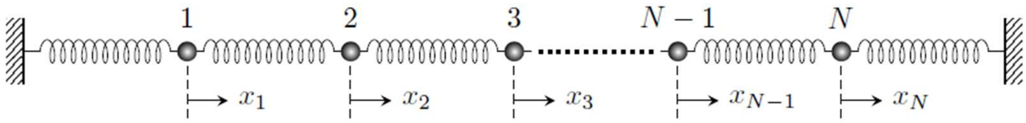
（1）運動方程式 $\begin{cases} \text{質点1} \quad m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ \text{質点2} \quad m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$ の一般解を求めよ．〔4 点〕

（ヒント：上の2式を連立させ，$X_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$X_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ とおいてX_1, X_2について解けばよい．）

（2）質量$m = 2.0$ kg，バネ定数$k = 8.0$ N/mとする．以下の 2 通りの初期条件を満たす会を求めよ．〔4 点〕

$\begin{cases} \text{初期条件(i)} \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.0\ \mathrm{m},\ v_1(0) = v_2(0) = 0\ \mathrm{m/s} \\ \text{初期条件(ii)} \quad x_1(0) = 1.0\ \mathrm{m},\ x_2(0) = -1.0\ \mathrm{m},\ v_1(0) = v_2(0) = 0\ \mathrm{m/s} \end{cases}$

演習1-4 下図のようなN個の質点から成る連成振動（すべての質量m，バネ定数k）について，



ℓ番目の質点の運動方程式は $m\dfrac{d^2x_\ell}{dt^2} = -k\left(x_\ell - x_{\ell-1}\right) + k\left(x_{\ell+1} - x_\ell\right)$ となる（$\ell = 1 \sim N$）．ただし，$x_0 = x_{N+1} = 0$（境界条件）である．運動方程式の解を $x_\ell(t) = A_\ell \cos\omega t$ と仮定して，振幅A_ℓと角振動数ωの満たす式が $A_\ell = C\sin\left(\dfrac{\ell n\pi}{N+1}\right)$，$\omega = 2\omega_0\left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{2(N+1)}\right)\right|$（正の整数$n = 1, 2, 3, \cdots$）となることを示せ（途中式もできるだけ詳細に書け）．ここで，$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である．〔4 点〕