

数理リテラシー特別講座（応用編）

波動の数理

2021 年度

金沢工業大学 数理工教育研究センター
西岡 圭太

目次

第 1 章	振動	1
1.1	単振動	1
1.2	減衰振動	3
1.3	強制振動	6
1.4	連成振動	9
第 2 章	波の性質	16
2.1	横波と縦波	16
2.2	波の表し方	17
2.3	重ね合わせの原理と波の干渉	20
2.4	波の反射と屈折・回折	23
第 3 章	連続体の波動	27
3.1	弦を伝わる横波	27
3.2	弾性体の棒を伝わる縦波	28
3.3	波動方程式の解	30
3.4	波のエネルギー	32
3.5	波の反射・透過と定在波	35
3.6	位相速度と群速度	39
第 4 章	音波	41
4.1	音波の方程式	41
4.2	気柱の振動	44
4.3	ドップラー効果	46
4.4	うなり	47
参考文献		49

第 1 章

振動

波動とは外部から加えられた何らかの乱れが次々と周囲へ伝わっていく現象である。このとき、波を伝える媒質を構成する粒子は平衡点を中心に振動するだけで、粒子そのものは移動はしない。この章では、波動を学習する準備として、振動について復習する。

まず最初に取り上げる単振動は波動を考える上での重要な現象である。単純な波動のモデルでは、波を伝える媒質粒子はその場で単振動するに過ぎない。実際の振動や波動の現象では、摩擦や空気抵抗などの運動を妨げる抵抗が働くため、現実的には減衰を伴う振動を考える必要がある。また、減衰を伴う振動は、外部からエネルギーを供給しないと、いずれ止まってしまうため、振動させ続けるためには外部から力を加えて、強制的に振動させる必要がある。これらの内容を理解するために、減衰振動と強制振動を学習する。最後に、振動が次々と伝わる系として、離散的な連成振動を考え、無限につながった連成振動が波動として扱えることを学習する。

1.1 単振動

ある物理量 x が時刻 t の関数として、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.1)$$

で表される運動をするとき、その運動を**単振動 (simple harmonic motion)** という。ここで、 $A(>0)$ は振幅 (amplitude), ω は角振動数 (angular frequency), ϕ_0 は初期位相 (initial phase) (時刻 $t=0$ のときの位相 (phase)) である。横軸に t , 縦軸に x をとって、式 (1.1) のグラフを描くと下図のようになる。

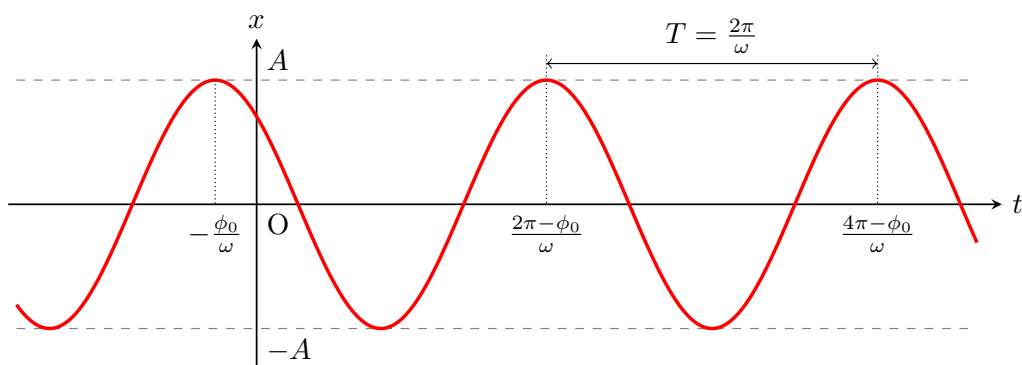


図 1.1 単振動 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$ のグラフ : $\phi_0 = \pi/4$

図 1.1 から分かるように、物理量 x は位相 $\omega t + \phi_0$ とともに変化し、周期 (period) $T = 2\pi/\omega$ だけ時間が経つごとに同じ値を繰り返す。周期の逆数 $f = 1/T = \omega/2\pi$ は、単位時間当たりに振動する回数を表し、周波数 (frequency) あるいは単に振動数という。

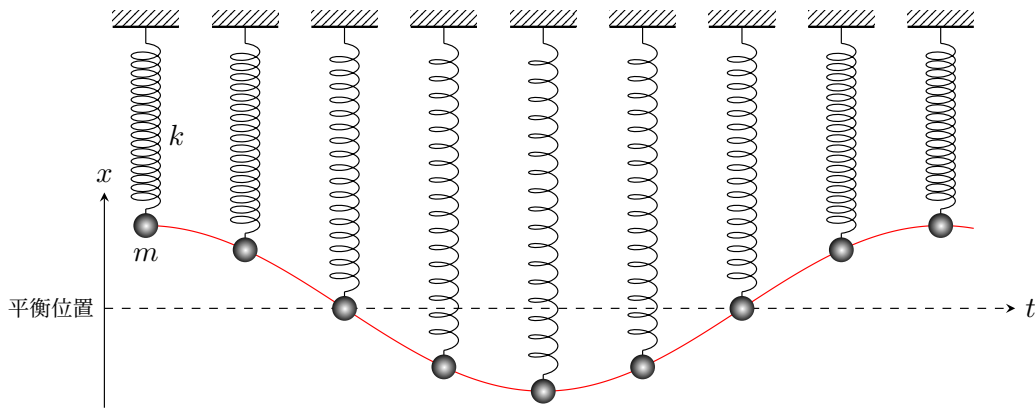


図 1.2 バネ-質量系

単振動を示す代表的な現象として、フック (Hooke) の法則^{*1}に従う「バネ-質量系」が挙げられる (図 1.7)。質量 m の質点の変位を x とし、変位に比例する復元力の比例定数を $k(>0)$ とすると、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.2)$$

となる。バネの復元力は変位と逆方向に働くので右辺には負号が付き、 k をバネ定数と呼ぶ。上式は定数係数の 2 階同次線形微分方程式であり、 $\omega = \sqrt{k/m}$ において整理すると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.3)$$

が得られ、その一般解が式 (1.1) である。このとき、式 (1.1) の A と ϕ_0 が初期条件で決まる任意定数である。式 (1.1) より、質点の速度は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0) \quad (1.4)$$

で表される。初期条件として $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ とすると、振幅 $A(>0)$ については、

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (1.5)$$

が得られ、初期位相 ϕ_0 については、次の 2 式

$$\cos \phi_0 = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \phi_0 = -\frac{v_0}{A\omega} \quad (1.6)$$

を満たすように、 $-\pi \leq \phi_0 \leq \pi$ の範囲で求めればよい。

単振動の運動方程式 (1.2) の両辺に速度 $v = dx/dt$ をかけて t について積分すると

$$\begin{aligned} \int m v \frac{dv}{dt} dt &= - \int k x \frac{dx}{dt} dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 &= K + U = E \end{aligned} \quad (1.7)$$

^{*1} バネの復元力が質点の変位に比例するという法則。変位が比較的小さい場合には成り立つものとみなせる。

が得られる (E は積分定数). 左辺の第1項目は運動エネルギー (kinetic energy) K , 第2項目は弾性力 (バネの復元力) によるポテンシャルエネルギー (potential energy) U であり, E は定数であるので, 上式はこのバネ-質量系の力学的エネルギー (mechanical energy) が保存することを意味する. 運動方程式からも分かるように, この系には摩擦などによる減衰がないため, 力学的エネルギーが減少することなく, 質点は一定の振幅で永久に振動し続ける. 式 (1.1) と式 (1.4) を上式に代入すると

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \quad (1.8)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (1.10)$$

となり, 単振動の力学的エネルギーは角振動数 ω の2乗と振幅 A の2乗に比例することがわかる. 運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U の時間変化を図 1.3 に示す. 質点が平衡位置 $x = 0$ を通過する瞬間, ポテンシャルエネルギーは $U = 0$ であるので, 運動エネルギーが最大 $K = K_{\max} = m\omega^2 A^2/2$ となる. また, 変位が $x = \pm A$ の瞬間, 質点の速度は $v = 0$ であるので運動エネルギーは $K = 0$ となり, ポテンシャルエネルギーが最大 $U = U_{\max} = kA^2/2$ となる. 力学的エネルギーの保存より $K_{\max} = U_{\max}$ の関係があり, このことから $\omega = \sqrt{k/m}$ が分かる.

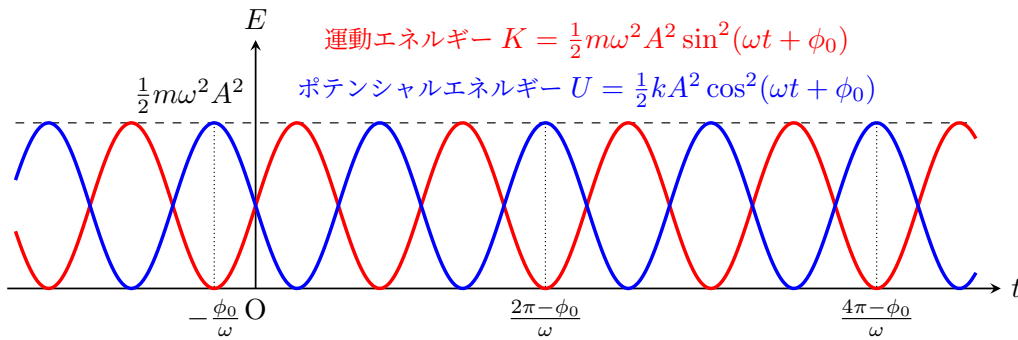


図 1.3 単振動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間変化: $\phi_0 = \pi/4$

1.2 減衰振動

振幅が時間の経過とともに小さくなってゆく振動を**減衰振動 (damped oscillation)**という. 現実には身の回りにある振動現象では, 単振動のように永久に振動し続けるのではなく, 摩擦や空気抵抗などの運動を妨げる抵抗が働いて, 物体の運動はいずれ停止してしまうことが多い. 減衰振動はそのような現実的な振動現象を表す. 振動を減衰させる作用は様々なものが考えられるが, ここでは前節のバネ-質量系の運動方程式 (1.2) に, 減衰力として質点の速度 $v = dx/dt$ に比例する抵抗力 (粘性抵抗 (viscous resistance)) を加えた場合を考える. その比例定数を $b(>0)$ とすると, この質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (1.11)$$

となる (抵抗力は運動方向 (速度方向) と逆向きであるので負号が付く). 上式は定数係数の2階同次線形微分方程式であり, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = b/2m$ を導入して整理すると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.12)$$

が得られる． ω_0 は減衰がないときの単振動の角振動数であり， γ を減衰係数 (damping coefficient) という．この微分方程式を解くと，一般解は ω_0 と γ の関係に応じて以下のように3つに分類される：

i) 不足減衰 (under damping) : $\gamma < \omega_0$ の場合

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (A, \phi_0: \text{任意定数}) \quad (1.13)$$

ここで， $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ である．

ii) 過減衰 (over damping) : $\gamma > \omega_0$ の場合

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\eta t} + c_2 e^{-\eta t}) \quad (c_1, c_2: \text{任意定数}) \quad (1.14)$$

ここで， $\eta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ である．

iii) 臨界減衰 (critical damping) : $\gamma = \omega_0$ の場合

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t} \quad (c_1, c_2: \text{任意定数}) \quad (1.15)$$

上の3つの一般解の式から分かるように，i) 不足減衰の場合では質点が振動しながら指数関数的に平衡点に向かって減衰していくが，ii) 過減衰及び iii) 臨界減衰の場合，質点は振動することなく平衡位置に向かって漸近的に近づいていく運動となる（非周期的減衰）．図 1.4 に示すように，不足減衰の状態から抵抗を強くしていくと， $e^{-\gamma t}$ により減衰が大きくなり，ついには振動しない臨界減衰に至る．さらに抵抗を強くしていくと，質点の動きが鈍くなり， $e^{-(\gamma-\eta)t}$ のためになかなか平衡位置に近づかない過減衰に至る．臨界減衰のときが最も減衰が速い．

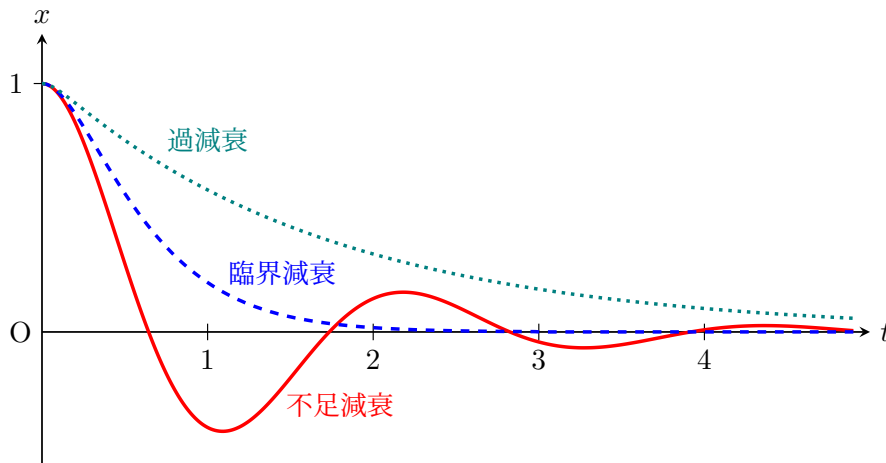


図 1.4 減衰振動のグラフ： $\omega_0 = 3.0$ として，初期条件 $x_0 = 1.0$, $v_0 = 0$ の下で，不足減衰 ($\gamma = 0.84$ ：赤線)，臨界減衰 ($\gamma = 3.0$ ：青線)，過減衰 ($\gamma = 7.8$ ：青緑線) の解曲線を描いたグラフ

ここで興味がある解は，振動しながら減衰していく不足減衰 ($\gamma < \omega_0$) の場合であるので，以降は不足減衰に限って考える．式 (1.13) より，質点の速度は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-\gamma t} \{ \gamma \cos(\omega t + \phi_0) + \omega \sin(\omega t + \phi_0) \} \quad (1.16)$$

で表される．初期条件として $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ とすると，振幅 $A(> 0)$ については，

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0 \gamma + v_0}{\omega} \right)^2} \quad (1.17)$$

が得られ、初期位相 ϕ_0 については、次の2式

$$\cos \phi_0 = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \phi_0 = -\frac{x_0 \gamma + v_0}{A\omega} \quad (1.18)$$

を満たすように、 $-\pi \leq \phi_0 \leq \pi$ の範囲で求めればよい。

減衰振動では、抵抗力の作用により時間の経過とともに力学的エネルギーが減少する。力学的エネルギーの時間変化を表す式を求めるために、まず、質点の運動エネルギーを時刻 t の関数として求める。質点の速度の式 (1.16) に三角関数の合成を適用すると

$$v = -Ae^{-\gamma t} \{\gamma \cos(\omega t + \phi_0) + \omega \sin(\omega t + \phi_0)\} = -A\omega_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi_1) \quad (1.19)$$

であり、ここで、 ϕ_1 は $\cos(\phi_0 - \phi_1) = \gamma/\omega_0$ と $\sin(\phi_0 - \phi_1) = \omega/\omega_0$ を満たす角度である。したがって、運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi_1) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \{1 + \cos 2(\omega t + \phi_1)\} \quad (1.20)$$

と表せる。ポテンシャルエネルギーは式 (1.13) より

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \{1 + \cos 2(\omega t + \phi_0)\} \quad (1.21)$$

と表せる。したがって、力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \{2 + \cos 2(\omega t + \phi_0) + \cos 2(\omega t + \phi_1)\} \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\omega_0} \cos(2\omega t + \phi_0 + \phi_1) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。エネルギーの表式には $e^{-2\gamma t}$ の項を含むことから、変位 x や速度 v よりも2倍の速さで減衰することがわかる。 $\gamma \ll \omega_0$ の場合、上式の最下段右辺の $\{ \}$ 内の2項目は微小量として無視できるので、力学的エネルギーは単純に指数関数的に減衰するものとみなせる。図1.4の不足減衰についての力学的エネルギーを図1.5に示す。

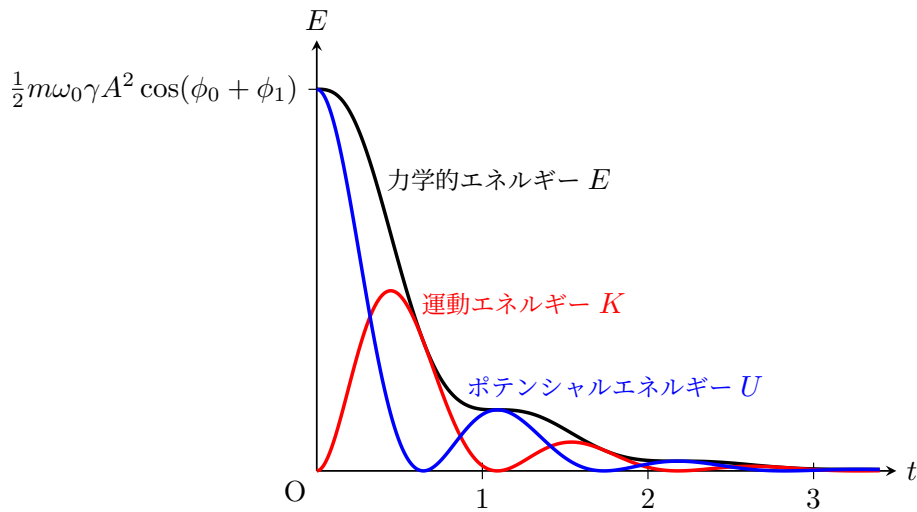


図1.5 不足減衰の力学的エネルギー： $\omega_0 = 3.0$, $\gamma = 0.84$, 初期条件 $x_0 = 1.0$, $v_0 = 0$

1.3 強制振動

系の外部から時間的に変動する強制的な力を受けることにより、強制的に引き起こされる振動を**強制振動 (forced oscillation)** という。前節の減衰振動では時間の経過とともに振動の振幅は減衰し、いずれ止まってしまうが、そのような系に外力を作用させることにより振動させ続けることができたり、周期的な外力の場合、外力の振動数を系の固有振動数に近い値をとるようにすると振動の振れ幅を極端に大きくすることができる（共振）。また、工学的な振動問題では、系に強制力が作用するときに適切な減衰機構を組み込んで振動を抑えることが要求される場合があり、強制振動を理解することは需要である。

例として、前節の減衰振動系に外力が作用する場合を考える。このとき、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv + F(t) \quad (1.23)$$

となる。ここで、 $F(t)$ が時間的に変動する外力である。外力は必ずしも周期的ではないが、ここで興味があるのは

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (1.24)$$

のように角振動数 ω で周期的に変動する外力の場合である（ $F_0(>0)$ は定数）。ただし、フーリエ変換を用いると、パルス的な外力であっても様々な周期の三角関数の重ね合わせで表現できるので、三角関数で表された外力を考えることは有用である。 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = b/2m$, $f_0 = F_0/m$ を導入して整理すると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (1.25)$$

が得られる。上式は2階非同次線形微分方程式であり、その一般解は同次方程式(1.12)の一般解と、上式（非同次方程式）の特殊解から成る。ここでは、前節の不足減衰に対応する $\gamma < \omega_0$ の場合のみを考える。その場合、同次方程式の一般解は式(1.13)より

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi_0\right) \quad (A, \phi_0: \text{任意定数}) \quad (1.26)$$

である。式(1.25)の特殊解（強制振動）は外力に追従して同じ角振動数で振動するが、位相がずれるであろうと予測して

$$x_p(t) = B \sin(\omega t + \delta) \quad (B, \delta: \text{未定係数}) \quad (1.27)$$

とおき、式(1.25)を満たすように未定係数 B , δ を決定する（未定係数法）。式(1.27)を式(1.25)に代入して整理すると

$$f_0 \cos \delta = (\omega_0^2 - \omega^2)B \quad (1.28)$$

$$f_0 \sin \delta = -2\gamma\omega B \quad (1.29)$$

の関係式が得られ、これらから強制振動の振幅 $B(>0)$ が

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (1.30)$$

と求まり、位相のずれ δ は次の2式

$$\cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \sin \delta = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (1.31)$$

を満たすように, $-\pi \leq \delta \leq \pi$ の範囲で定めればよい. したがって, 式 (1.25) の特殊解 x_p は

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta) \quad (1.32)$$

となり, 式 (1.25) の一般解として

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi_0\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (1.33)$$

が得られる. 初期条件として $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ とすると, 振幅 $A(> 0)$ については,

$$A = \sqrt{(x_0 - B \sin \delta)^2 + \left(\frac{(x_0 - B \sin \delta)\gamma + v_0 - B\omega \cos \delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right)^2} \quad (1.34)$$

が得られ (B は式 (1.30) で与えられる), 初期位相 ϕ_0 については, 次の2式

$$\cos \phi_0 = \frac{x_0 - B \sin \delta}{A}, \quad \sin \phi_0 = -\frac{(x_0 - B \sin \delta)\gamma + v_0 - B\omega \cos \delta}{A\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (1.35)$$

を満たすように, $-\pi \leq \phi_0 \leq \pi$ の範囲で求めればよい. 強制振動の例を図 1.6 に示す.

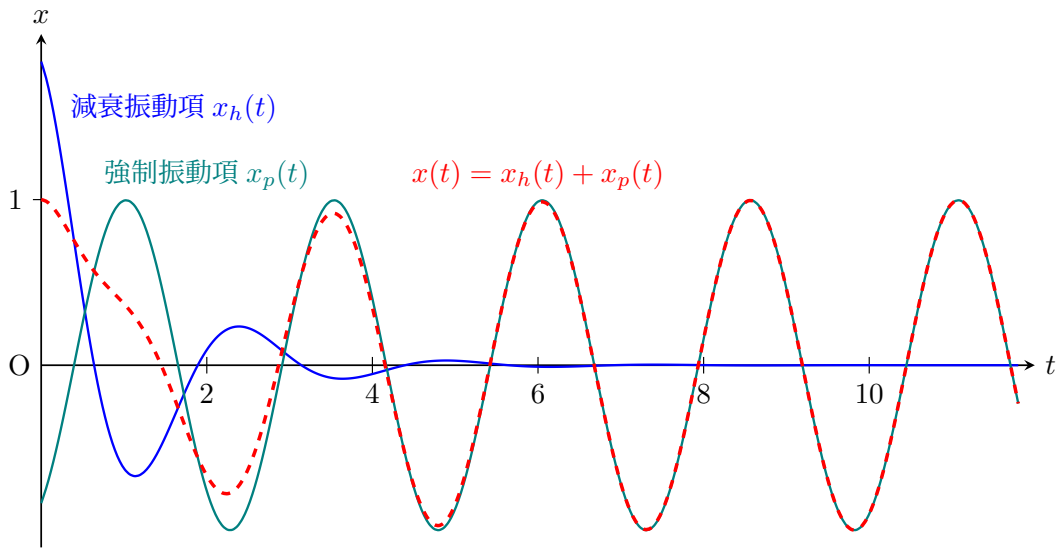


図 1.6 強制振動のグラフ: $\omega_0 = 3.0$, $\gamma = 0.84$, $\omega = 2.5$, $f_0 = 5.0$, 初期条件 $x_0 = 1.0$, $v_0 = 0$

式 (1.33) において, 減衰振動項 $x_h(t)$ は $e^{-\gamma t}$ により減衰するので, 十分時間が経過すると微小量となり無視できる. したがって, 十分時間が経過したときの振る舞いを考える場合は強制振動項 $x_p(t)$ のみに注目すればよい. x_p は外力を表す非同次項 (式 (1.25) の右辺) により付加される項であり, 入力 (外力) に対する系の応答と考えることができる.

強制振動 x_p の振幅が最大になるのは式 (1.30) の分母が最小となるときなので

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (1.36)$$

のときに最大振幅

$$B_{\max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{2\gamma\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{Q}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} \quad (1.37)$$

が生じる。ただし、最大振幅が生じるのは $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ の場合に限る。ここで、 $Q = \omega_0/2\gamma$ は Q 値と呼ばれ、後述の“共振の鋭さ”を表す無次元量である。

強制振動 x_p の ω （外力の角振動数）への依存性を以下の3つの場合で考える。

- i) 外力の角振動数 ω がバネの固有角振動数 ω_0 より十分小さい場合 ($\omega \ll \omega_0$)

式 (1.30), (1.31) より

$$B \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad \delta \approx 0 \quad (1.38)$$

と近似できるので、式 (1.32) は

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{k} \sin \omega t \quad (1.39)$$

と表せる。したがって、変位 x_p は外力と同位相で振動し、振幅は ω に依らず、バネの伸縮する方向に静的荷重 F_0 を作用させたときの変位の大きさ F_0/k となる。これは、外力による加振がバネの固有振動に比べて非常にゆっくりであるため質点にかかる慣性力はほとんど寄与せず、バネの復元力が支配的であることを示している。つまり、質点の振動は外力の時間的変化に十分追従できるということである。

- ii) 外力の角振動数 ω がバネの固有角振動数 ω_0 に限りなく近い場合 ($\omega \rightarrow \omega_0$)

式 (1.30), (1.31) より

$$B \approx \frac{f_0}{2\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k} Q, \quad \delta \approx -\frac{\pi}{2} \quad (1.40)$$

と近似できるので

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{k} Q \sin(\omega_0 t - \pi/2) = -\frac{F_0}{k} Q \cos \omega_0 t \quad (1.41)$$

$$v_p(t) = \frac{dx_p}{dt} \approx \frac{F_0}{k} Q \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (1.42)$$

と表せる。上式から分かるように、変位 x_p の振幅は静的荷重時の振幅 F_0/k の Q 倍となり、速度 v_p が外力と同位相で振動する。この場合、移動する向き（速度方向）に合わせて外力が作用するので振幅が大きくなる。実際に振幅が最大となるのは、式 (1.36) より $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ のときなので ω_0 より小さいが、 $Q = \omega_0/2\gamma$ が十分に大きい（減衰が十分小さい $\gamma \ll \omega_0$ ）場合にはその差は無視でき、バネの固有角振動数と同じ角振動数の外力が作用したときに応答が最大となるとみなせる。この現象を共振という。

- iii) 外力の角振動数 ω がバネの固有角振動数 ω_0 より十分大きい場合 ($\omega \gg \omega_0$)

式 (1.30), (1.31) より

$$B \approx \frac{f_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{k} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, \quad \delta \approx -\pi \quad (1.43)$$

と近似できるので

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{k} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sin(\omega t - \pi) = -\frac{F_0}{k} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sin \omega t \quad (1.44)$$

と表せる。したがって、変位 x_p は外力と逆位相で振動し、振幅は $(\omega_0/\omega)^2$ により非常に小さくなる。これは、i) の場合とは逆に外力による加振がバネの固有振動に比べて非常に速いため、質点の振動は外力の時間的変化にほとんど追従できないことを示す。

前節のように減衰を伴う振動は外部からエネルギーを供給しないといずれ止まってしまうが、この節で見てきたように周期的な外力を加えることで式 (1.32) で表される x_p のような定常運動を維持できる。ここでは、十分時間が経過した後の定常運動のみの状態を考え、単位時間あたりに外力が系に供給している平均のエネルギーを求めてみる。仕事率の定義より、外力は単位時間あたりに力 $F(t) \times$ 速度 $v_p(t)$ の仕事をする。この仕事率の1周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均は、単位時間あたりに外力が系に供給している平均のエネルギー、つまり系が単位時間あたりに吸収する平均エネルギーに対応する。式 (1.32) より

$$v_p(t) = \frac{f_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \delta) \quad (1.45)$$

なので、平均仕事率 \bar{P} は

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) v_p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \sin \omega t \cdot \frac{f_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \delta) dt \\ &= \frac{m f_0^2 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cdot \left(-\frac{\sin \delta}{2} \right) = \frac{m f_0^2 \gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (1.46)$$

となる。また、

$$\frac{d\bar{P}}{d(\omega^2)} = \frac{m f_0^2 \gamma (\omega_0^2 + \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2)}{\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2\}^2} \quad (1.47)$$

であることから、エネルギー吸収 \bar{P} は振幅 B とは異なり、 $\omega = \omega_0$ で最大値 $m f_0^2 / 4\gamma$ をとる。

1.4 連成振動

複数の質点がバネで繋がれて互いに力を及ぼし合いながら振動するような現象を**連成振動 (coupled oscillation)** という。簡単な例として、図に示すように、同じ質量 m の2つの質点が3つの同じバネ (バネ定数 k) に繋がれて両端が壁に固定された3バネ-2質量系を考える。静止状態でバネは自然長であり、摩擦などによる減衰は無視できるものとする。また、バネはフックの法則に従うものとする。

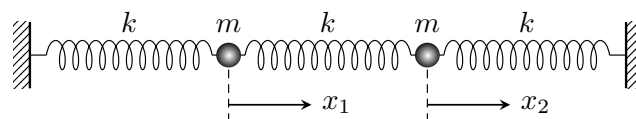


図 1.7 連成振動 (3 バネ - 2 質量系)

各質点の平衡位置からの変位をそれぞれ x_1, x_2 とすると、バネの伸びは左から順に $x_1, x_2 - x_1, -x_2$ と書いて、これらのバネの伸びに比例した復元力が各質点に作用する。したがって、各質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \quad (1.48)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - k x_2 \quad (1.49)$$

と表される。各質点は真ん中のバネからの復元力を通じて連成しており、上式は連立微分方程式となっている。単振動のときと同様に各質点はある角振動数 ω で単振動すると仮定し、式 (1.49) の解を

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t, \quad x_2(t) = A_2 \cos \omega t \quad (1.50)$$

とおく．これらを式 (1.49) に代入し，両辺に共通に含まれる $\cos \omega t$ を消去すると

$$-m\omega^2 A_1 = -kA_1 + k(A_2 - A_1) = -2kA_1 + kA_2 \quad (1.51)$$

$$-m\omega^2 A_2 = -k(A_2 - A_1) - kA_2 = kA_1 - 2kA_2 \quad (1.52)$$

が得られる．この連立方程式について，両辺を $-m$ で割り， $\omega_0^2 = k/m$ とおいて，行列表現を用いると

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

と表せる．

$$M = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (1.54)$$

とおくと，式 (1.53) は

$$M\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (1.55)$$

と書いて，ゼロでない \mathbf{a} が存在するとき， λ は行列 M の固有値 (eigen value)， \mathbf{a} は λ に対する固有ベクトル (eigen vector) となっている． $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ の解をもつためには，固有方程式 (secular equation)

$$|M - \lambda E| = 0 \quad (E: \text{単位行列}) \quad (1.56)$$

を満たせばよい．すなわち

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.57)$$

を満たす ω を求めることとなる．上式を展開して整理すると

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 3\omega_0^2) = 0 \quad (1.58)$$

となるので，この2質点の連成振動は2つの固有角振動数

$$\omega = \omega_0, \sqrt{3}\omega_0 \quad (1.59)$$

をもつことが分かる．これらの固有角振動数をもつ振動を系の**基準モード (normal mode)** または固有モード (eigen mode) という．上式の各固有角振動数を式 (1.53) に代入すれば，固有ベクトルが得られ，すなわち，各固有角振動数に応じた振幅 A_1 と A_2 の比が求まる．整理すると

i) $\omega = \omega_0$ の場合 (第1次モード)

振幅は $A_1 = A_2$ の関係となり，2つの質点は同位相で振動する．この場合，中央のバネの長さは変化しない．この基準モードの解を， $A_1 = A_2 = A$ として，初期位相 α を含めて表すと

$$x_1^{(i)}(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad x_2^{(i)}(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.60)$$

となる．*2ここで， A, α は任意定数である．

ii) $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ の場合 (第2次モード)

振幅は $A_1 = -A_2$ の関係となり，2つの質点は逆位相で振動する．この基準モードの解を， $A_1 = -A_2 = B$ として，初期位相 β を含めて表すと

$$x_1^{(ii)}(t) = B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta), \quad x_2^{(ii)}(t) = -B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \quad (1.61)$$

となる．ここで， B, β は任意定数である．

*2 式 (1.50) で仮定した解に任意の初期位相を含めても全く同じ式展開となる．または， $\sin \omega t$ を仮定しても同じ結果が得られるので，解を $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ との線形結合として考えることと同等である．

この3バネ-2質量系のすべての運動は、これらの基準モードの重ね合わせで表すことができ、式(1.49)の一般解は

$$x_1(t) = x_1^{(i)}(t) + x_1^{(ii)}(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \quad (1.62)$$

$$x_2(t) = x_2^{(i)}(t) + x_2^{(ii)}(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) - B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \quad (1.63)$$

と表される。任意定数 A , α , B , β は初期条件を満たすように決められる。初期条件をうまく選択すれば、第1モードや第2モードのいずれか一方だけを生じさせることもできる。

次に、連成振動のエネルギーを考える。式(1.62), (1.63)より、質点の速度は

$$v_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha) - \sqrt{3}\omega_0 B \sin(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \quad (1.64)$$

$$v_2(t) = \frac{dx_2}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha) + \sqrt{3}\omega_0 B \sin(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \quad (1.65)$$

であるので、運動エネルギーは

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= m\omega_0^2 \left\{ A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + 3B^2 \sin^2(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \right\} \end{aligned} \quad (1.66)$$

と表され、ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \\ &= k \left\{ A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + 3B^2 \cos^2(\sqrt{3}\omega_0 t + \beta) \right\} \end{aligned} \quad (1.67)$$

と表される。したがって、力学的エネルギーは

$$E = K + U = m\omega_0^2 A^2 + m(\sqrt{3}\omega_0)^2 B^2 \quad (1.68)$$

となる。ここで、 $k = m\omega_0^2$ を用いた。上式から分かるように、減衰がないため系の力学的エネルギーは保存し、個々の基準モードがもつエネルギーの単純な和となっている。

上で見てきた例は、2つの質点の連成振動であり、 x_1 と x_2 の2つの自由度をもつ。この場合、固有角振動数は2つであり、2つの基準モードが存在する。基準モードは自由度の数だけあり、各モードでは系を構成する全質点と同じ角振動数と初期位相をもって、モードに固有の振幅比で単振動する。系の力学的エネルギーについては、個々の基準モードのエネルギーの和で表され、モード間でエネルギーをやり取りすることはなく、初期条件によって配分されたエネルギーのままである。これらの性質は、より自由度の多い系の振動や連続体の振動においても当てはまるものである。

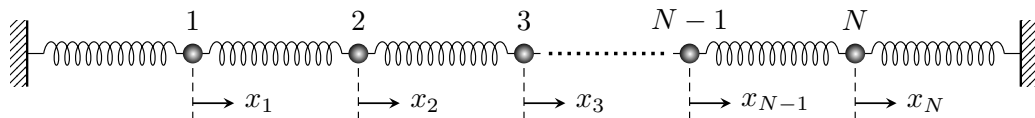


図 1.8 $(N+1)$ バネ - N 質量系

より一般的に N 個の質点がバネで繋がれた $(N+1)$ バネ- N 質量系を考える (図 1.8)。ここで、質点の質量はすべて等しく m とし、バネ定数もすべて等しく k とする。2 個の質点 (3 バネ-2 質量系) の場

合と同様に考えて、 ℓ 番目の質点の運動方程式を求めると

$$m \frac{d^2 x_\ell}{dt^2} = -k(x_\ell - x_{\ell-1}) + k(x_{\ell+1} - x_\ell) \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (1.69)$$

となる。ただし、両端は固定されているので $x_0 = x_{N+1} = 0$ である（境界条件）。これら N 個の微分方程式について、2 質点の場合の微分方程式で用いた解析方法と基本的には同じ方法を適用する。つまり、各質点が同一の角振動数 ω で振動する基準モードを求める。 n 番目の質点の解を

$$x_\ell(t) = A_\ell \cos \omega t \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (1.70)$$

とおき、式 (1.69) に代入して、 $\omega_0^2 = k/m$ を用いて整理すると

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) A_\ell - \omega_0^2 (A_{\ell+1} + A_{\ell-1}) = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (1.71)$$

を得る。両端は固定されているという境界条件から $A_0 = A_{N+1} = 0$ である。あとは、これら N 個の連立方程式を解けばよいのであるが、2 個の質点の場合のようにこれらを連立させて（固有値問題を）解く方法は N が非常に大きな数になると現実的ではない。2 個の質点の場合、すべての振幅が 0 にならない解が存在するならば、固有角振動数に応じた振幅比が求まった。これと同じことは N 個の質点の場合にもいえる。式 (1.71) を書き直すと

$$\frac{A_{\ell+1} + A_{\ell-1}}{A_\ell} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (1.72)$$

となり、ある ω の値に対して右辺は一定値をとるので、左辺の比は ℓ の値に関わらず一定でなければならない。この条件と境界条件 $A_0 = A_{N+1} = 0$ を同時に満たすような A_ℓ が分かれば ω も分かり、式 (1.70) のように仮定した解が求まることになる。

ここでは式 (1.72) を解くのではなく、振幅 A_ℓ を

$$A_\ell = C \sin \ell \theta \quad (1.73)$$

と仮定してみる。 C は任意定数で、 $\theta (\neq 0)$ はある角度である。すると、式 (1.72) の左辺の分子は

$$A_{\ell+1} + A_{\ell-1} = C \{ \sin(\ell+1)\theta + \sin(\ell-1)\theta \} = 2C \sin \ell \theta \cdot \cos \theta \quad (1.74)$$

となるので

$$\frac{A_{\ell+1} + A_{\ell-1}}{A_\ell} = 2 \cos \theta \quad (1.75)$$

が得られる。上式の右辺は ℓ の値に依らず一定値であるので、条件式 (1.72) の要請を満たす。次に、境界条件 $A_0 = A_{N+1} = 0$ を満たすような θ を考えると、式 (1.73) より $\ell = 0$ のときは自動的に満たすので、 $\ell = N+1$ のときに $A_\ell = 0$ を満たすために $(N+1)\theta$ が π の整数倍であればよい。したがって、

$$\theta = \frac{n\pi}{N+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.76)$$

が得られる。したがって、式 (1.73) の仮定は妥当であり、上式を代入すると

$$A_\ell = C \sin \left(\frac{\ell n \pi}{N+1} \right) \quad (1.77)$$

が得られる。このとき、式 (1.72) と式 (1.75) から

$$\frac{A_{\ell+1} + A_{\ell-1}}{A_\ell} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \quad (1.78)$$

となり、基準モードの角振動数 ω について

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left\{ 1 - \cos \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \right\} = 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(N+1)} \right) \quad (1.79)$$

を得る．整数 n の値が異なれば角振動数 ω の値も異なるので， n 番目の基準モードの角振動数に n の添え字を付けることにし，上式の平方根をとると

$$\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{n\pi}{2(N+1)} \right) \right| \quad (1.80)$$

となる．さらに，振幅については式 (1.77) より質点番号 ℓ とモード番号 n の両方に依存するので，

$$A_{\ell,n} = C_n \sin \left(\frac{\ell n \pi}{N+1} \right) \quad (1.81)$$

と表すことにする．ここで，任意定数 C_n もモードにより異なるので添え字 n を付けた．したがって， n 番目の基準モードで振動している ℓ 番目の質点の変位は，各モード毎の初期位相 δ_n を含めて

$$x_{\ell,n}(t) = A_{\ell,n} \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (1.82)$$

と表される．基準モードの角振動数 ω_n の n 依存性を見るために， $N = 9$ の場合を考え，横軸に $n\pi/2(N+1)$ をとった式 (1.80) のグラフを図 1.9 に示す． n は整数という条件があるだけなので，いくらでも大きな値がとれるが式 (1.80) から分かるように ω_n は同じ値を繰り返し，独立な角振動数は N 個だけである． n が $N+1$ の奇数倍のとき $\omega_n = 2\omega_0$ であるが，このときは式 (1.81) より振幅がすべてゼロとなるので振動としては存在せず， n が $N+1$ の偶数倍のときは $\omega_n = 0$ なので振動しない．

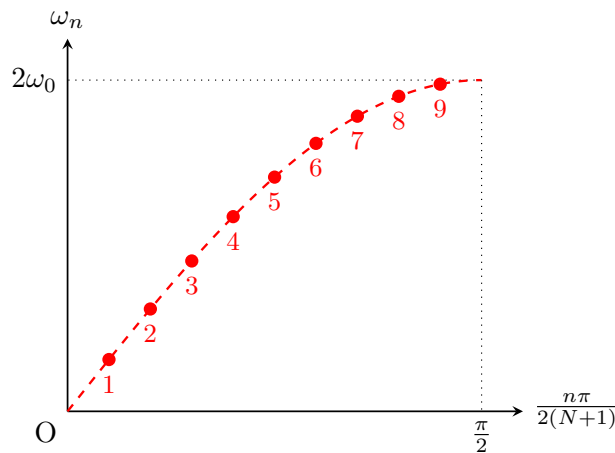


図 1.9 基準モードの角振動数 ω_n ：赤点は質点の数 $N = 9$ としたときの各基準モード ($n = 1 \sim 9$) の点を表す．

また，式 (1.81) で表される振幅 $A_{\ell,n}$ のグラフを第 1 次モード $n = 1$ ，第 2 次モード $n = 2$ ，及び第 3 次モード $n = 3$ について図 1.10 に示す．これは式 (1.82) において位相 $\omega_n t + \delta_n = 0$ の瞬間の各質点の変位を表す．第 1 次モードでは $\ell = 1 \sim 9$ の全質点が同位相で振動するのに対し，第 2 次モードでは $\ell = 1 \sim 4$ と $\ell = 6 \sim 9$ の質点が逆位相で振動し， $\ell = 5$ の質点は常に静止している．

質点の数 N を非常に大きくした場合を考えてみる． N を増加させるときには質点間の間隔 a^* を小さくし，この系の全長 $L = (N+1)a$ が一定に保たれるようにし，質点の質量 m を小さくし全質量

*3 バネが自然長であるときの平衡位置での質点間の間隔

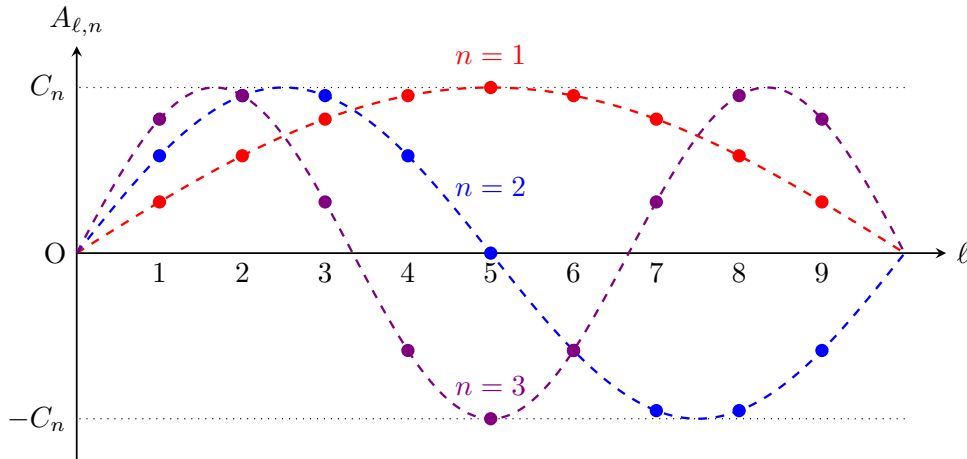


図 1.10 第1～3次モード $n=1$ (赤線), $n=2$ (青線), $n=3$ (紫線) の場合の各質点の振幅 $A_{\ell,n}$: 質点の数 $N=9$

$M = Nm$ も一定に保たれるようにする. ここで, 質点の位置を ℓ で表す代わりに, 左の固定端からの各質点の平衡位置までの距離を $X_\ell = \ell a$ で表し, $\kappa_n = (\pi/L)n$ とおくと, 振幅 $A_{\ell,n}$ の位相部分は

$$\ell\theta = \frac{\ell n\pi}{N+1} = \frac{\ell na\pi}{(N+1)a} = \frac{\pi}{L}n \cdot \ell a = \kappa_n X_\ell \quad (1.83)$$

と書ける. このとき, 式 (1.80) の固有角振動数は

$$\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{\kappa_n a}{2} \right) \right| \quad (1.84)$$

と表される. $N \rightarrow \infty$ の極限では X_ℓ を連続的な量 $0 \leq X \leq L$ とみなすことができ, 位置 X における質点 (質量 $m \rightarrow 0$) の変位は

$$x_n(X, t) = C_n \sin(\kappa_n X) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (1.85)$$

と表される. これは, 次章以降でも述べるが, 連続体 (弾性体) における縦波の定在波解を表す. 上で導入した

$$\kappa_n = \frac{\pi}{L}n = \frac{2\pi}{2L/n} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (1.86)$$

を**波数 (wave number)**といい,*⁴ 境界条件 (今の場合, 両端の変位は常にゼロ) を満たすように離散的な値となる. $\lambda_n = 2L/n$ は第 n 次モードの波長 (wave length) を表し, ちょうど図 1.10 で示した点線の波の波長に対応する. 式 (1.84) で表される角振動数と波数の間の関係を**分散関係 (dispersion relation)**といい, それを図示した曲線を分散曲線という. 分散曲線は図 1.9 の横軸を波数 κ_n にした図に対応し, 横軸の $\pi/2$ の位置は波数の場合 π/a となる. 分散関係から分かるように, $\kappa_n = \pi/a$ のとき角振動数は最大値 $\omega_{\max} = 2\omega_0$ をとる.*⁵ このような基準モードが存在できる限界の周波数を**遮断周波数 (cut-off frequency)**という. 第 n 次モードの波は 1 周期 $T_n = 2\pi/\omega_n$ で 1 波長 $\lambda_n = 2\pi/\kappa_n$ 分進むので, この波の伝播速度 (位相速度) は

$$V_n = \frac{\lambda_n}{T_n} = \frac{2\pi/\kappa_n}{2\pi/\omega_n} = \frac{\omega_n}{\kappa_n} \quad (1.87)$$

*⁴ 一般的に波数は k を用いて表すが, バネ定数と区別するため κ を用いている.

*⁵ $\kappa_n = \pi/a$ ではすべての振幅 $A_{\ell,n}$ がゼロになるので, この角振動数での振動は現実にはありえない.

である。伝搬速度が波数に依存する波を分散性波動 (dispersive wave) という。

固有角振動数について、モード数 n が小さい場合 ($n \ll N$), κ_n は小さく (波長 λ_n は大きく), $\kappa_n a$ は微小量となるので,

$$\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{\kappa_n a}{2} \right) \right| \approx 2\omega_0 \cdot \frac{\kappa_n a}{2} = \omega_0 \kappa_n a = n\omega_0 \frac{\pi}{L} a = n\omega_1 \quad (1.88)$$

と近似できる。したがって、 $n \ll N$ では、固有角振動数は最低角振動数 ω_1 の整数倍とみなせる。また、波の伝播速度は $V_n = \omega_n / \kappa_n \approx \omega_0 a = V$ (一定) と近似できるため、低次モードは波数に依存しない非分散性 (線形分散) の波とみなせる。つまり、低次モードでは近似的にモードに依らず速度が一定とみなせる。また、波長の大きい低次モードの場合、隣り合う質点の変位差は十分小さいため、運動方程式 (1.69) の右辺について、 $\Delta x_{\ell,n} = x_{\ell,n} - x_{\ell-1,n}$ とおくと

$$\begin{aligned} -k(x_{\ell,n} - x_{\ell-1,n}) + k(x_{\ell+1,n} - x_{\ell,n}) &= k(\Delta x_{\ell+1,n} - \Delta x_{\ell,n}) = k\Delta(\Delta x_{\ell,n}) \\ &= ka^2 \cdot \frac{\Delta(\Delta x_{\ell,n})}{a^2} \\ &\sim ka^2 \cdot \frac{d^2 x_n(X, t)}{dX^2} \end{aligned} \quad (1.89)$$

と表せる。最下段において微小間隔 $a \rightarrow dX$ とした。すると運動方程式は

$$\frac{d^2 x_n(X, t)}{dt^2} \sim (\omega_0 a)^2 \frac{d^2 x_n(X, t)}{dX^2} = V^2 \frac{d^2 x_n(X, t)}{dX^2} \quad (1.90)$$

のように書いて、次章で述べる波動方程式に帰着する。これはバネ-質量系における縦波の伝播を表す式であり、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ であるので、伝播速度 $V = a\sqrt{k/m}$ はバネ定数 k と間隔 a が大きく、質量 m が小さいほど波の伝わりが速いことを示しており、直感的に理解できる。

第 2 章

波の性質

波とは外部から加えられた力により物質（固体・液体・気体）の一部に起こった振動が他の部分へ遅れて伝わる現象である。波によって伝わるのは振動という運動状態（全体的には波形となる）であり、その振動エネルギーである。物質を構成する粒子に次々とエネルギーを伝えていく現象が波動であり、波を伝える物質（**媒質 (medium)** という）そのものは単に平衡点を中心に振動するだけであって移動はしない。波が発生するのに必要な条件は以下の通りである：

- 1) 波を伝える連続した物質（媒質 medium）があること（電磁波は空間を伝わる）
- 2) 波を作り出す振動源（波源）があること（振動のエネルギーを供給する）
- 3) 媒質が運動を持続させる慣性（質量）を持っていること
- 4) 媒質の変位を元に戻そうとする復元力があること
 - 波の速さは質量と復元力で決まる。抵抗があると波は減衰してゆく。
 - 水面波・弦・固体内の横波は、重力・張力・ずれの弾性力が復元力になる。横波はずれの弾性がない気体や液体中を伝わることはできない。（光は横波であるが液体・気体、さらには真空中をも伝わるができる。）
 - 縦波の復元力は媒質の伸びや体積の弾性によるので、すべての物質を伝わる。（水面波もしくは固体の表面波では横波と縦波が合成され、楕円軌道を描く。）

2.1 横波と縦波

図 2.1 に示すように、媒質の振動する方向と垂直な方向に伝わる波を**横波 (transverse wave)** という。代表的な横波の例は、ピンと張られた弦を伝わる波であり、弦は横波を伝える媒質となる。横波は媒質が横にずれたときに元に戻そうとする復元力により生じるため、基本的には固体中で伝播する波である。また、気体・液体・透明な物質や真空中でさえも伝わる光（電磁波）は横波として知られている。

図 2.2 に示すように、媒質の振動する方向が波の進行方向と平行であるものを**縦波 (longitudinal wave)** という。縦波は媒質が密な部分と疎な部分が繰り返し交互に生じて伝わっていくので、**疎密波 (compressional wave)** ともいう。どのような媒質も伸縮させれば元に戻ろうとする復元力が生じるので、一般に縦波はあらゆる媒質中を伝わる。縦波は、媒質の振動する方向と波の進行方向が同じなので、横波とは違って波の状態が分かりづらいため、変位を 90 度回転させて横波のように表現することがある。

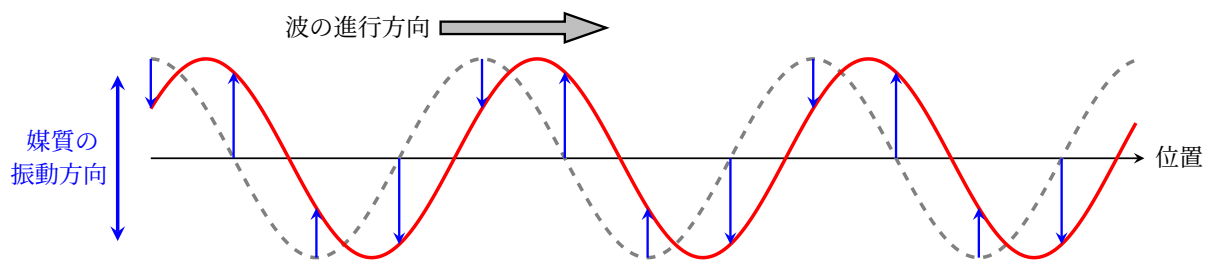


図 2.1 横波

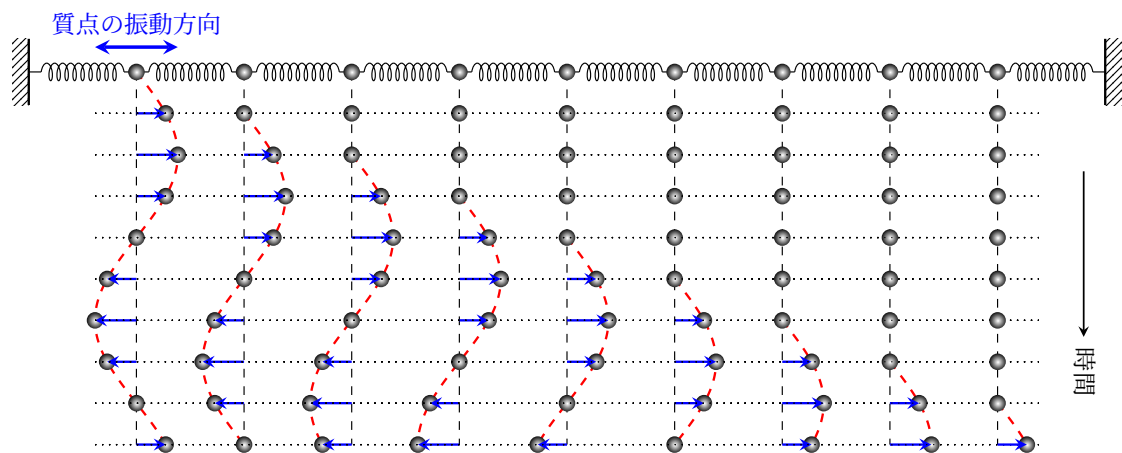


図 2.2 縦波

2.2 波の表し方

x 軸方向に伝わる波（1次元の波）を考え、時刻 t 、位置 x における媒質の変位を $f(x, t)$ と表すことにする。^{*1} ある時刻 t_0 における関数 $f(x, t_0)$ を描くと、その瞬間の空間的な波形を表す。その形は、規則的に繰り返される形であったり、不規則な形であったり、ある限られた領域にのみ波形が存在していても構わない。また、ある位置 x_0 における関数 $f(x_0, t)$ を描くと、その位置での変位の時間変化、つまり時間的な波形を表す。

波が形を変えることなく一定の速さ v で x 軸の正の方向に進む場合、この関数 f を

$$f(x - vt) \quad (2.1)$$

と表すことができる。つまり、時刻 t での波形は $t = 0$ のときの波形が x 方向に vt だけ平行移動したものに等しい（図 2.3）。速さ v で x 軸の負の方向に進む場合には

$$f(x + vt) \quad (2.2)$$

と表すことができ、 $t = 0$ のときの波形が $-x$ 方向に vt だけ平行移動したものに等しい。このように、波形が変化しない場合は f は時刻 t と位置 x それぞれの独立な関数ではなく、 $x \pm vt$ の関数となる。この節では、以降、波形が変化しない波のみを考える。

^{*1} 媒質の変位でなくても、伝播する現象を表す何らかの物理量であればよい。

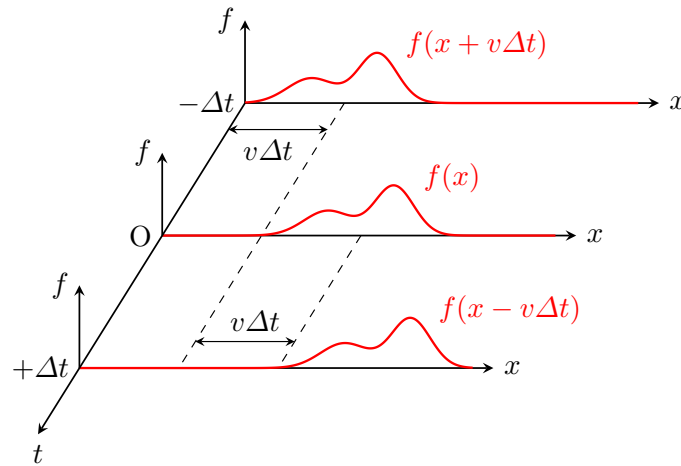


図 2.3 波形の変化しない波の表現

(1) 正弦波

波の形で最も基本的なものは正弦波であり、 x 方向および $-x$ 方向に速さ v （位相速度）で伝わる正弦波を

$$f(x \mp vt) = A \sin[k(x \mp vt) + \delta] \quad (2.3)$$

と表す。ここで、 A は振幅、 δ は位相角 ($x = 0$, $t = 0$ のときの位相) である。 k は波数であり、波長 (x についての周期) λ を用いて

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4)$$

で与えられる。空間波形は λ ごとに繰り返し、波数 k は単位長さあたりに含まれる波長の数（に 2π を掛けたもの）を表す。^{*2} 式 (3.47) を

$$f(x \mp vt) = A \sin\left[-kv\left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \delta\right] = -A \sin\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right) - \delta\right] \quad (2.5)$$

と書くこともでき、 $\omega = kv$ は角振動数を表す。時間波形は周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v} \quad (2.6)$$

ごとに繰り返す。振動数は

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \quad (2.7)$$

で与えられ、よって、波の伝わる速さは $v = \lambda\nu$ と表せる。これらのパラメータ k , v , λ , ω , T , ν を用いて、式 (3) の位相部分を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} f(x \mp vt) &= A \sin[k(x \mp vt) + \delta] = A \sin(kx \mp \omega t + \delta) \\ &= A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right] = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \nu t\right) + \delta\right] \\ &= A \sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} \mp t\right) + \delta\right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

^{*2} 波数として $k = 1/\lambda$ を用いることもある。

また、正弦関数の代わりに余弦関数 $A \cos(kx \mp \omega t + \delta)$ や複素関数

$$A \exp i(kx \mp \omega t + \delta) = A \{ \cos(kx \mp \omega t + \delta) + i \sin(kx \mp \omega t + \delta) \} \quad (2.9)$$

を用いて表すことも可能である。

(2) 平面波

3次元空間を伝わる波において、位相の等しい点（つまり1波長内で媒質の変位の等しい点）の集合は1つの曲面を表し、これを**波面 (wave front)**という。波面が平面となって伝わる波を平面波という。波面は波の伝わる方向と常に垂直となっている。よって、平面波の場合、波の伝わる方向は1方向のみであり、この方向の単位ベクトルを \mathbf{u} とすると、位相速度 v で伝わる平面波の時刻 t 、位置ベクトル \mathbf{r} における媒質の変位は

$$f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mp vt) \quad (2.10)$$

で表される。上式の \mp については、平面波が \mathbf{u} と同じ向きに進むとき $-$ 、逆向きに進むとき $+$ をとる。 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とすると、*3 式 (2.10) は $f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mp vt) = f(xu_x + yu_y + zu_z \mp vt)$ と書けて、特に波形が正弦波で表される場合、

$$f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mp vt) = A \sin [k(xu_x + yu_y + zu_z \mp vt) + \delta] \quad (2.11)$$

となる。ここで、ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (ku_x, ku_y, ku_z)$ 、および $\omega = kv$ を導入すると

$$f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mp vt) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t + \delta) \quad (2.12)$$

が得られる。この波の進行方向を向いた大きさ k のベクトル \mathbf{k} を波数ベクトルという。2次元平面を伝わる波において、等位相の点の集合は曲線を表すが、これが直線となる2次元の波も平面波と表現する。

(3) 球面波

3次元空間に存在する一様で等方的な媒質中の1点の波源から発生して伝わる波の等位相面は、その点波源を中心とする球面となる。このような波を**球面波 (spherical wave)**といい、中心からの距離 r の位置における媒質の変位は

$$\frac{1}{r} f(r \mp vt) \quad (2.13)$$

で表される。上式の \mp については、球面波が中心から遠ざかる向きに進むとき $-$ 、中心に向かって進むとき $+$ をとる。特徴として、点波源からの距離が大きくなるにしたがって減衰し、 $r \rightarrow \infty$ の極限で振幅は0となる。球面波の特別な場合として、正弦関数を用いて

$$\frac{1}{r} f(r \mp vt) = \frac{A}{r} \sin [k(r \mp vt) + \delta] = \frac{A}{r} \sin(kr \mp \omega t + \delta) \quad (2.14)$$

で与えられる波を調和球面波という。

*3 u_x, u_y, u_z は \mathbf{u} 方向の方向余弦である。

2.3 重ね合わせの原理と波の干渉

複数の波が媒質の1点に到達したときの媒質の変位 $f(x, t)$ が、それぞれの波が単独で伝わったときのその点における変位 $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$, \dots の和

$$f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t) + \dots + f_N = \sum_{i=1}^N f_i(x, t) \quad (2.15)$$

で表されるとき、これを波の**重ね合わせの原理 (superposition principle)** といい、重ね合わせによってできた波を**合成波 (resultant wave)** という (図 2.4). このとき、複数の波は重なり合って媒質に合成した振動を与えるだけで、その後は元通りの波に戻って進行する. 互いに他の波の進行を妨げたり、振幅、波長、速度を乱したりはしない. これを**波の独立性**という.

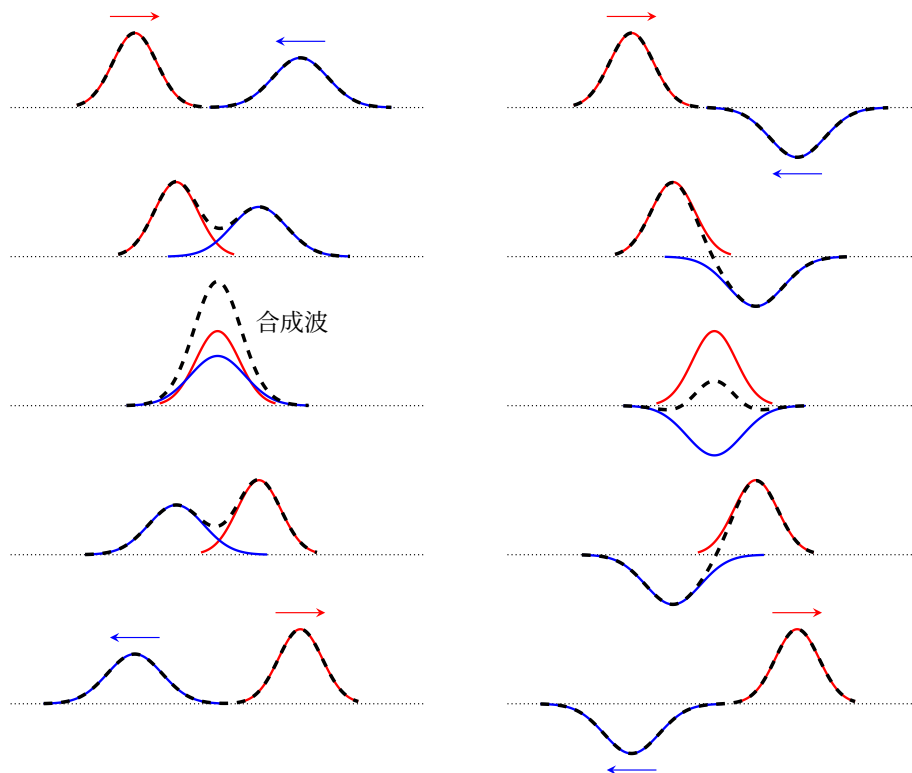


図 2.4 波の重ね合わせ：互いに反対方向に進む赤線の波と青線の波が重なり合ったときの合成波（黒破線）

第1章で見てきたように振動現象では、振幅が十分小さい場合、振動する質点の運動方程式は線形微分方程式で表された. 多くの質点がバネで繋がった連成振動では、連立線形微分方程式の解である基準モードが独立して起こり、任意の振動は基準モードの単なる重ね合わせとして表されることを学習した. 基準モードの重ね合わせにより解を表現できるのは、基本となる運動方程式が線形であるからである. 多くの場合、波動を記述する方程式は線型性をもっており、それに従う波動については重ね合わせの原理が成り立つ.

複数の波が重ね合わさるとき、波の山と山もしくは谷と谷が重なり合う点では強め合って振幅が大きくなり、谷と山が重なり合う点では打ち消し合って振幅が小さくなる. その強め合う位置と打ち消し合う位置のパターンが時間的に変化しないという現象のことを波の**干渉 (interference)** という.

(1) 2つの正弦波の重ね合わせ

$A_i, k_i, \omega_i, \delta_i$ ($i = 1, 2$) を定数として、同一直線上の2つの正弦波

$$f_1(x, t) = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1) \quad (2.16)$$

$$f_2(x, t) = A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2) \quad (2.17)$$

が重なり合うと

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_1(x, t) + f_2(x, t) \\ &= A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2) \\ &= A(x, t) \sin(kx - \omega t + \delta) \end{aligned} \quad (2.18)$$

と表せる。ここで、

$$A(x, t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t + \delta_1 - \delta_2]} \quad (2.19)$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \varphi \quad (2.20)$$

であり、 φ は

$$\tan \varphi = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t + \delta_1 - \delta_2}{2} \quad (2.21)$$

を満たす角である。式 (2.18) は単振動の式に見えるが、振幅 $A(x, t)$ が式 (2.19) のように位置 x と時刻 t に依存しているため複雑である。

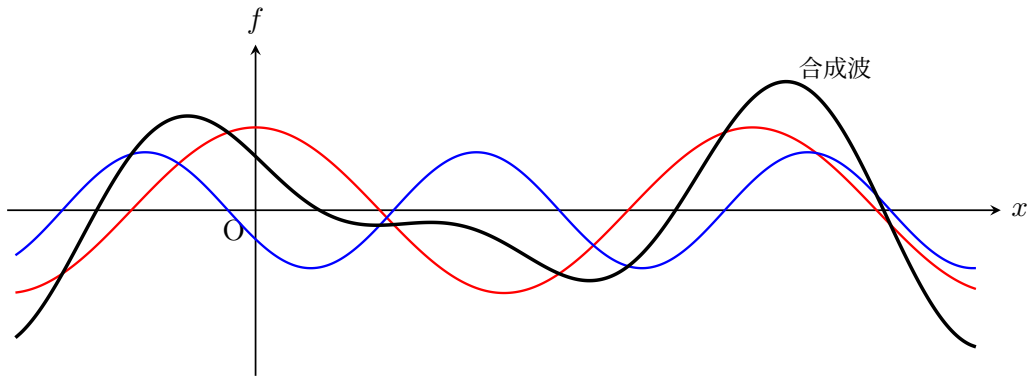


図 2.5 正弦波の重ね合わせ：赤線の波と青線の波の合成波（黒線）

ここでは簡単のため、同じ波数 $k_1 = k_2 = k$ 、同じ角振動数 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ の場合（同一方向に進む波長・周期の等しい2つの正弦波）を考え、位相角を $\delta_1 = 0$ 、 $\delta_2 = \alpha$ にとると、振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \alpha} \quad (2.22)$$

が得られ、位置 x と時刻 t に依存しない定数となる。また

$$\varphi = -\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (2.23)$$

より、 δ は

$$\tan \delta = \frac{A_2 \sin \alpha}{A_1 + A_2 \cos \alpha} \quad (2.24)$$

を満たす角となる。したがって、合成波は

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (2.25)$$

のように f_1 と f_2 と同じ波長・周期の正弦波となる（単なる三角関数の合成の問題）。 $\alpha = 2n\pi$ (n : 整数) の場合、合成波の振幅は最大 $A_{\max} = A_1 + A_2$ となり、位相角 $\delta = 0$ である。 $\alpha = (2n+1)\pi$ (n : 整数) の場合、位相角は同じく $\delta = 0$ 、振幅は最小 $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ となり、さらに $A_1 = A_2$ のときは振幅がゼロとなり完全に打ち消し合う。これは、2つの波が同じ振幅・波長・周期で互いに逆位相だからである。

(2) 2つの点波源から同位相で発生する波長・周期の等しい球面波の干渉

点 $S_1(x_1, y_1, z_1)$, $S_2(x_2, y_2, z_2)$ から出る球面波を、波数と角振動数をともに k, ω とし、

$$f_1(r_1, t) = \frac{A_1}{r_1} \sin(kr_1 - \omega t) \quad (2.26)$$

$$f_2(r_2, t) = \frac{A_2}{r_2} \sin(kr_2 - \omega t) \quad (2.27)$$

と表す。 A_1, A_2 は定数で、 r_1, r_2 はそれぞれ S_1, S_2 から任意の点 $P(x, y, z)$ までの距離

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (2.28)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \quad (2.29)$$

である。2つの波は同位相で発生する ($r_1 = r_2 = 0$ における位相差はない) ので、位相角はともにゼロとする。任意の点 P での合成波は

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 = \frac{A_1}{r_1} \sin(kr_1 - \omega t) + \frac{A_2}{r_2} \sin(kr_2 - \omega t) \\ &= \left(\frac{A_1}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A_2}{r_2} \sin kr_2 \right) \cos \omega t - \left(\frac{A_1}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A_2}{r_2} \cos kr_2 \right) \sin \omega t \\ &= A_P \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (2.30)$$

と表すことができる。ここで

$$A_P = \sqrt{\left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos k(r_1 - r_2)} \quad (2.31)$$

$$\tan \delta = \frac{(A_1/r_1) \cos kr_1 + (A_2/r_2) \cos kr_2}{(A_1/r_1) \sin kr_1 + (A_2/r_2) \sin kr_2} \quad (2.32)$$

である。式 (2.31) より、合成波の振幅は、 n を整数として

$$k(r_1 - r_2) = 2n\pi \Rightarrow \text{最大値: } A_P = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} \quad (2.33)$$

$$k(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Rightarrow \text{最小値: } A_P = \left| \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right| \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

をとる。波長を λ とすると $k = 2\pi/\lambda$ なので、強め合う（振幅が最大となる）点と弱め合う（振幅が最小となる）点は

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & (\text{強め合う}) \\ (n + \frac{1}{2})\lambda & (\text{弱め合う}) \end{cases} \quad (2.36)$$

と表せる．上式は2点 S_1 , S_2 からの距離の差が一定である点の軌跡を表しており，図 2.6 に示すように，2次元平面での球面波を考えると，強め合う点の集合および弱め合う点の集合が点 S_1 , S_2 を焦点とする双曲線となることを示す．式 (2.31) は時刻 t を含んでいないことから，この双曲線の位置は時間変化しない．

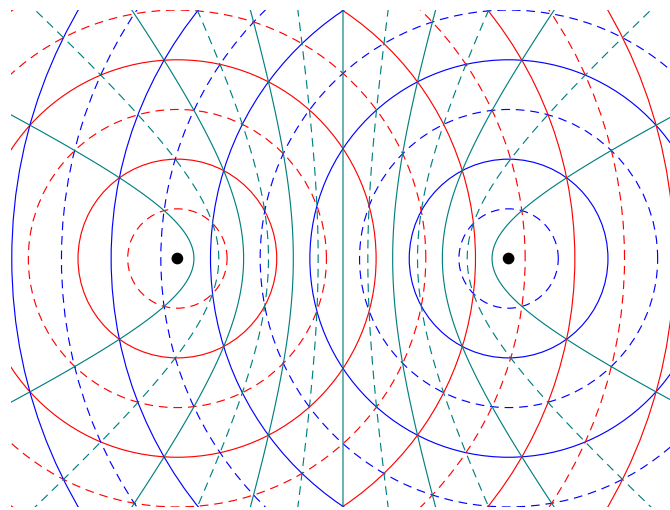


図 2.6 2つの点波源から発生する波の干渉：点 S_1 (S_2) から発生する球面波の山の波面を赤（青）実線，谷の波面を赤（青）点線で表す．2つの波の重ね合わせの結果，緑実線上で強め合い（振幅が最大となり），緑破線上で弱め合う（振幅が最小となる）．

2.4 波の反射と屈折・回折

波の伝わり方を見るということは，波を伝える媒質が存在する空間において，その波の等位相の波面の移動する様子を見るということである．一様な媒質中では，平面波は常に平面波として伝わり，点波源から発生した球面波は常に球面波として伝わるが，一様でない媒質中や壁などの障害物がある場合は，波面は時間とともに複雑に変化していく．このような波の伝わり方は**ホイヘンスの原理 (Huygens' principle)**^{*4}を用いて説明することができ，ある瞬間の波面の形が分かっているとき，その瞬間から短い時間が経過した後の波面の形を簡単に求めることができる．

ホイヘンスの原理

1. ある瞬間の波面上のすべての点からは，その点を波源として，到達した波と同じ振動数・速さの球面波（これを**要素波 (elementary wave)** または**素元波**という）が送り出される．
2. 個々の要素波は観測されないが，それらが干渉されて波の進む前方に共通に接する面ができ，それが次の瞬間の波面として観測される．

元々ホイヘンスの提案した形では，数学的な裏付けがなく，要素波を球面波と考えるために波の進行方向とは逆の後方にも波面を作り，前方に進むことが説明困難であるなどの欠点を持っていた．後にフレネル (Fresnel) によって，波面の各点から前方だけに新しい要素波が伝わるとして修正拡張され解説理論の

^{*4} ホイヘンス-フレネルの原理ともいう．

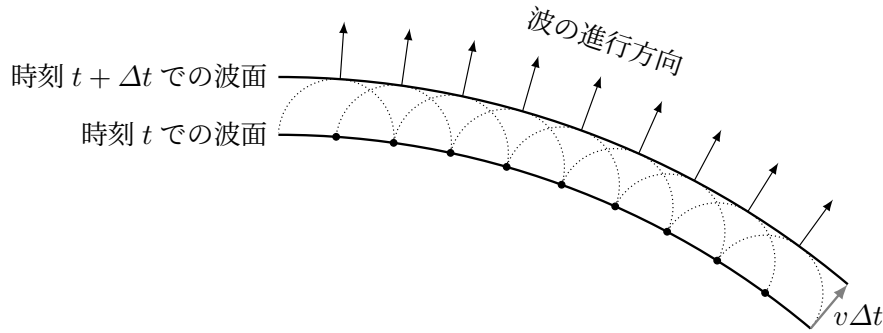


図 2.7 ホイヘンスの原理

基礎となり、さらに 19 世紀末にキルヒホッフ (Kirchhoff) が、後方にも小さな波が伝わるが干渉によって波は弱め合い前方にのみ大きな振幅を持つ波が伝わると説明を加え、波動方程式と結び付けて数学的に厳密な形式を整えた。ホイヘンスの原理は重ね合わせの原理による干渉から導かれ、反射・屈折・回折現象などを統一的に説明することができる点が非常に有用である。

平面波の反射と屈折

媒質 I の中を伝わる平面波が媒質 II との平面的な境界に入射する場合を考える。このとき、波の一部は**反射 (reflection)** してもとの媒質 I に戻り、残りは境界を透過して媒質 II へ進入する。媒質 I と媒質 II が異なると一般に透過した波の進行方向は必ずしも入射波の進行方向とは同じではない。このように媒質の境界を透過したときに進行方向が変わる現象を**屈折 (refraction)** という。図 2.8 で示すような入射波、反射波、屈折波の進行方向に対して次の法則が成り立つ。

- i) 入射波、反射波、屈折波の進行方向と、境界面の法線はすべて同一平面内にある。
- ii) 入射角 θ_i と反射角 θ_j は等しい (**反射の法則**)。
- iii) 入射角 θ_i と屈折角 θ_r との間には次の関係が成り立つ。

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12} = \text{一定} \quad (2.37)$$

この関係を**屈折の法則**もしくは**スネルの法則 (Snell's law)** という。ここで、 v_1 , v_2 はそれぞれ媒質 I, 媒質 II における波の速さ、 λ_1 , λ_2 はそれぞれ媒質 I, 媒質 II における波長である。 n_{12} を媒質 I に対する媒質 II の**屈折率** (相対屈折率) という。また、式 (2.37) から分かるように、媒質 II に対する媒質 I の屈折率 n_{21} について

$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}} \quad (2.38)$$

の関係がある。

反射・屈折の現象をホイヘンスの原理に基づいて考えてみる。図 2.9 に示すように、入射角 θ_i の入射波が境界面において反射角 θ_j で反射するとき、波面 OA について、点 O から反射波の要素波が生じ、その後、OC 上の点で O から C に向かって ($O \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow C$) 順次要素波が生じる。図の点 A にあった波が点 C に達したとき、反射波の波面は要素波に共通の接線 BC となる。入射波と反射波の伝わる速さは等しいので、AC と OB の長さは等しく、 $\triangle OAC$ と $\triangle CBO$ は合同であることが分かる。したがって、入射角 θ_i と反射角 θ_j は等しいという反射の法則が成り立つ。

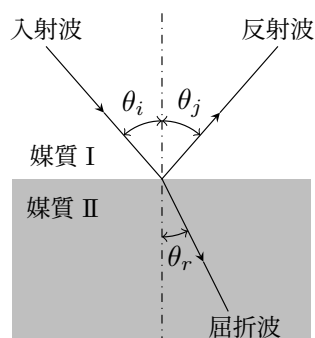


図 2.8 平面波の反射と屈折

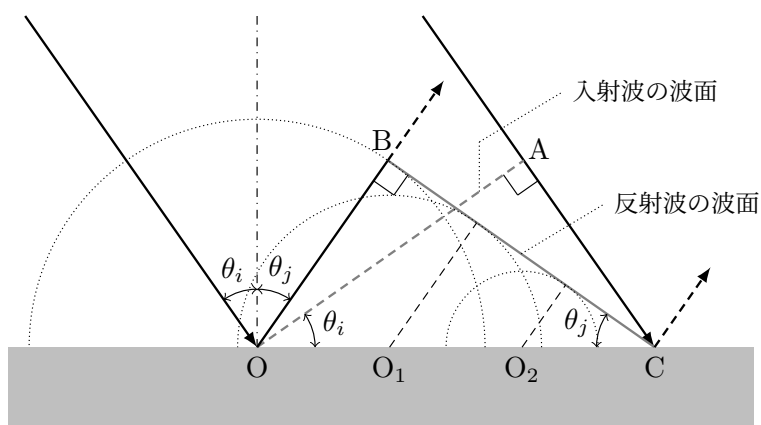


図 2.9 ホイヘンスの原理による反射の説明

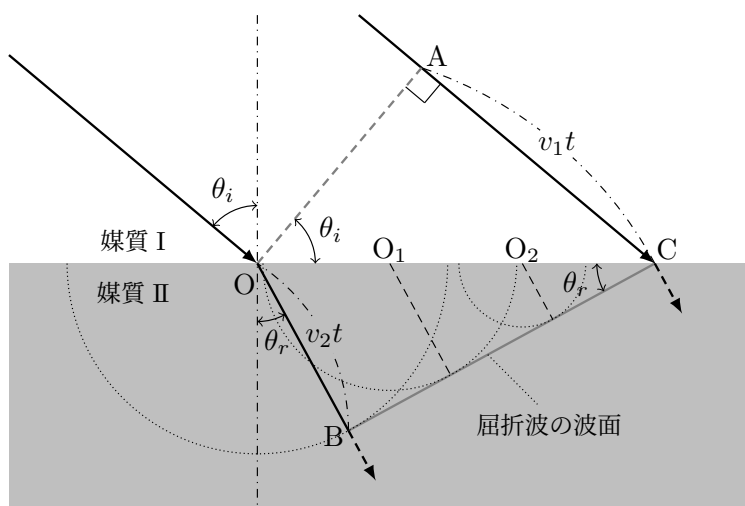


図 2.10 ホイヘンスの原理による屈折の説明

図 2.10 に示すように、入射角 θ_i の入射波の波面 OA について、点 O から媒質 II に進む向きに要素波が生じ、その後、OC 上の点で O から C に向かって ($O \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow C$) 順次要素波が生じる。媒質 I, II での波の速さをそれぞれ v_1, v_2 とし、図の点 A にあった波が点 C に達するまでの時間を t とすると、BD の長さは $v_1 t$ であり、点 O から発生した要素波はこのとき半径 $v_2 t$ の円周上まで進み、屈折波の

波面は要素波に共通の接線 BC となる．したがって，

$$\begin{cases} OC \sin \theta_i = AC = v_1 t \\ OC \sin \theta_r = OB = v_2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.39)$$

となり屈折の法則が成り立つ．

波の回折

一様な媒質中では波は直進するが，障害物などで一部が遮られると，障害物の背後の部分にもある程度回り込むという性質をもつ．このように，波が障害物の背後に回り込む現象を波の**回折 (diffraction)** という．回折現象は，波面の各点から送り出される要素波の干渉によって起こるものと理解でき，ホイヘンスの原理により説明することができる．図 2.11 に示すように，左側から進行してきた平面波が障害物にぶつかる状況を考えると，波面はホイヘンスの原理により描かれ，波が障害物の後方に回り込むことが分かる．

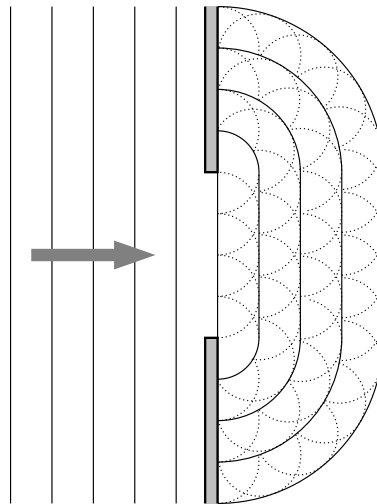


図 2.11 波の回折

第 3 章

連続体の波動

3.1 弦を伝わる横波

1 次元の媒質における波動の代表的な例が、ピンと張られた弦を伝わる横波である．図 3.1 のように、長さ L で線密度（単位長さ当たりの質量） μ が一様な弦について、静止して真っ直ぐな状態の弦に沿って x 軸をとり、両端（ $x = 0$, $x = L$ ）が固定されている状況を考える．弦の各点の振動方向は x 軸に垂直であり、その方向における弦の変位を位置 x と時刻 t の関数 $y(x, t)$ とする．この弦は大きさ T の張力で引っ張られており、変位 $y(x, t)$ は L に比べ十分小さいものとして T は一定と考える．また、重力の影響、及び空気の影響は無視できるものとする．

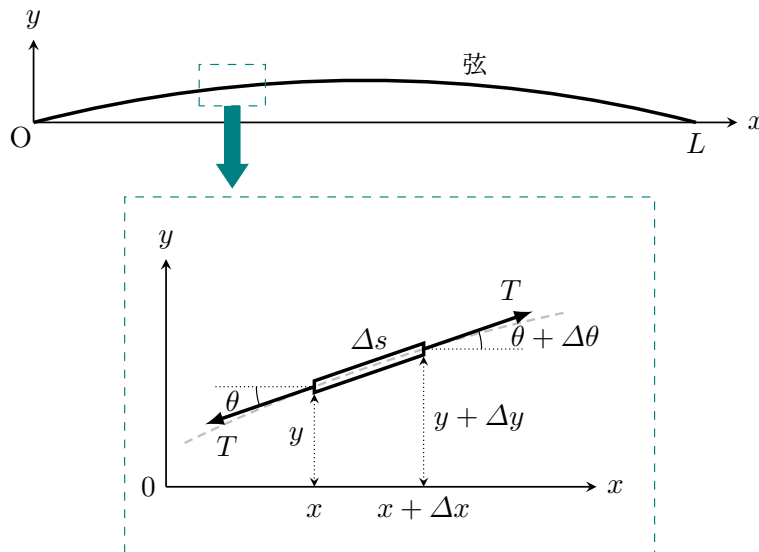


図 3.1 弦の微小部分に作用する力

位置 x にある弦の部分が x 軸となす角度を $\theta(x)$ とすると、変位が十分小さい場合、 $|\theta(x)| \ll 1$ であるので、 $\cos \theta(x) \approx 1$, $\sin \theta(x) \approx \theta(x)$ と近似できる．上図のように、 $\Delta \theta = \theta(x + \Delta x) - \theta(x)$ とおいて、位置 x と $x + \Delta x$ の間にある微小部分に作用する力を考えると

$$x \text{ 方向の合力} : T \cos(\theta + \Delta \theta) - T \cos \theta \approx T - T = 0 \quad (3.1)$$

$$y \text{ 方向の合力} : T \sin(\theta + \Delta \theta) - T \sin \theta \approx T(\theta + \Delta \theta) - T\theta = T\Delta \theta \quad (3.2)$$

と書ける．よって、微小部分に作用する力の x 方向成分は無視でき、力の y 方向成分が微小部分を平衡

位置に戻そうとする復元力となる (上図では $\Delta\theta < 0$ なので y 軸の負の方向の力). 式 (3.2) に関して, 角 $\theta(x)$ は位置 x での弦の接線方向の角度を表すので,

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.3)$$

であり, 両辺を x で微分することにより

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \Delta\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \quad (3.4)$$

となり, $\cos \theta \approx 1$ を用いると

$$\Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \quad (3.5)$$

を得る. 変位が小さい場合, 微小部分の長さ Δs は近似的に Δx とみなせ, その質量が $\mu \Delta x$ と書けるので, 位置 x にある微小部分の運動方程式の y 方向成分は

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \quad (3.6)$$

となり, 整理すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

を得る. この2階の線形偏微分方程式を**波動方程式 (wave equation)**という. ここで

$$v = \sqrt{T/\mu} \quad (3.8)$$

であり, これが弦を伝わる波の速さ (厳密には位相速度) を表す. 弦の場合に限らず, 波の速さ v は復元力と慣性力を代表するパラメータの比で与えられる.*1 $\sqrt{T/\mu}$ が波の伝わる速さを表すことは, 2.2 節で導入した一定の速さ v で進む波の表現 $f(x \mp vt)$ を代入すれば理解できる. $y(x, t) = f(x \mp vt) = f(\xi)$ ($\xi = x \mp vt$) を式 (3.7) に代入すると, 左辺は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} (\mp v)^2 = v^2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \quad (3.9)$$

となり, 右辺は

$$v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = v^2 \cdot \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \cdot 1^2 = v^2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \quad (3.10)$$

となるので, $f(x \mp vt)$ は波動方程式を満たす. このように, 弦の微小部分の変位が十分小さいとしたときの, その各部分の運動方程式から, 弦を伝わる波 (変位 $y(x, t)$ の空間的・時間的变化) の満たす波動方程式が導かれる.

3.2 弾性体の棒を伝わる縦波

1次元の媒質における波動として, 弾性体で作られた細い棒を伝わる縦波を考える. 一様な密度 ρ , 断面積 A , ヤング率 (Young's modulus) E *2の弾性体の棒の一端を固定し, もう一端を棒に沿った方向

*1 1.4 節の無限個の質点がバネで繋がれた系では, 縦波の伝播速度が $V = a\sqrt{k/m} = \sqrt{ka/(m/a)}$ で表された (a は質点間の間隔, k はバネ定数, m は質点の質量).

*2 長さ L , 断面積 A の一様な弾性棒の両端を力 F で引っ張ったときの棒の微小な伸びを ΔL とすると, 応力 F/A と伸び率 $\Delta L/L$ の間に

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (E: \text{比例定数}) \quad (3.11)$$

の関係が成り立つ (フックの法則). この比例定数 E をヤング率という.

にたたくと、棒の各部分が棒に沿って変位するような振動が生じ、弾性体の中を縦波が伝わる。図 3.2 のように、棒に沿って x 軸をとり、静止している状態で位置 x と $x + \Delta x$ の間に存在する微小部分に注目し、 x と $x + \Delta x$ での垂直断面をそれぞれ S_1 , S_2 とする (Δx は十分小さい)。振動している状態では、この微小部分の断面 S_1 , S_2 は時間とともに変位し、時刻 t における位置 x からの S_1 の変位を $u(x, t)$ と表すと、 S_2 の変位は $u(x + \Delta x, t)$ である。このとき、微小部分の静止状態からの x 方向の伸びは

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) \approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x \quad (3.12)$$

となる。したがって、断面 S_1 を通して両側の部分が及ぼし合う弾力は

$$F(x, t) = AE \frac{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} = AE \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (3.13)$$

で表される (断面 S_2 についても同様)。微小部分の質量は $\rho A \Delta x$ 、加速度は $\partial^2 u / \partial t^2$ と書けるので、微小部分の運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= F(x + \Delta x, t) - F(x, t) \\ &= AE \left\{ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\} \\ &= AE \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。上式を整理すると

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

となり、弾性体の棒を伝わる縦波の波動方程式が得られる。ここで

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.16)$$

であり、縦波の伝わる速さを表す。ちなみに、弾性体の棒の剛性率を G とすると、この棒を伝わる横波の速さは

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.17)$$

であり、単に式 (3.16) のヤング率 E を剛性率 G に置き換えればよい。

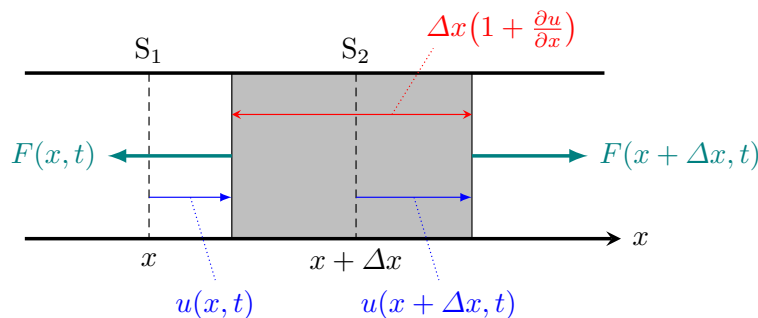


図 3.2 弾性体の棒を伝わる縦波

弾性体の棒は伸縮により細くなったり太くなったりする．式 (3.16) の波動方程式は，そのような場合に適用されるが，棒状ではなく，3 次元的に広がった弾性体中の縦波を考えると，伸縮する方向に垂直な方向の変化が許されないで，このままの形では適用できない．

3.3 波動方程式の解

前節において，一定の速さ c で弦を伝わる波の空間的・時間的变化を記述する式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

を導出した（ここでは，波の伝わる速さを c ，媒質の変位を u とする）．上式は弦を伝わる波に限らず，様々な波の現象を表現することから波動方程式と呼ばれる．関数 $u(x, t) = f(x \mp ct)$ で表現される波が，この式を満たすことは前節で確認した．また，波動方程式は線形微分方程式であるので， $f_1(x \mp ct)$ と $f_2(x \mp ct)$ が解であれば，その線形結合

$$y = C_1 f_1(x \mp ct) + C_2 f_2(x \mp ct) \quad (C_1, C_2: \text{任意定数}) \quad (3.19)$$

も波動方程式の解となる（複合任意）．この波動方程式の解として重要な性質は，解 $u(x, t)$ で表される波は，その波形を変えずに一定の速さ c で伝わるということである (2.2 節)．波動方程式に従うこのような波を非分散性波動といい，一方で，波動方程式に従わずに，伝わる速さが振動数に依存するような波を分散性波動という．任意の波形は複数のフーリエ成分で構成することができるが，各成分が等しい速さで伝わる場合，波形は変化しないが，各成分が異なる速さで伝わる場合，波形は時間とともに崩れていくであろう．

x 軸方向に制限なく伝わる（境界条件のない）場合の一般的な解を考えてみる． $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ と変数変換すると*3

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left\{ -c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right\}^2 = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (3.23)$$

なので，波動方程式 (3.18) は

$$c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u \quad (3.24)$$

となり，整理すると変数変換後の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3.25)$$

*3 $c \neq 0$ である限り ξ と η は独立

を得る。この方程式の解は $u = f(\xi) + g(\eta)$ であり、 f と g は定数項を含む任意の関数である。元の独立変数 x, t を用いて表すと、一般解として

$$u = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.26)$$

が得られる。これは式 (3.19) を含む形である。

式 (3.18) の波動方程式は 1 次元の場合であるが、より一般に 3 次元空間における波 $u(\mathbf{r}, t)$ に対する波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.27)$$

と表せる。ここで

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.28)$$

として、

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.29)$$

である。 ∇ をナブラ、 Δ をラプラシアンという。2 次元の場合は z 成分を考えなければよい。2 次元以上の波動方程式の解について、あまり詳細には立ち入らないが、最も簡単な解として、位相速度 $c = \omega/k$ で伝わる平面波 $u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)$ が考えられる。ここで、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ であり、波は \mathbf{k} の向きに進行する。 $\xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t$ とおいて $u = f(\xi)$ を式 (3.27) に代入すると、左辺は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \omega^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} \quad (3.30)$$

となり、右辺は

$$\begin{aligned} c^2 \Delta u &= \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \left\{ \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} = \omega^2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

となるので、3 次元の波動方程式を満たす。

次に、点波源から一定の速さで全方向に向かって等方的に伝わっていく、もしくはある点に向かって等方的に集中していく球面波を波動関数の解として考えてみる。球面波を表す関数 u の空間座標は中心点からの距離 r のみに依存するため、これを記述する波動関数は球対称である。この場合、直交座標系で考えるよりも極座標系で考えた方が都合がよい。球面極座標 (r, θ, ϕ) のラプラシアン

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.32)$$

の θ, ϕ による偏微分をゼロとして、球対称の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.33)$$

と書ける。この波動方程式の解として

$$u(r, t) = \frac{U(r, t)}{r} \quad (3.34)$$

と仮定して、式 (3.33) に代入すると、左辺は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

となり、右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(-\frac{U}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-U + r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} + r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

となので、 $U(r, t)$ について、1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad (3.37)$$

が成り立つ。したがって、上式の一般解は $U(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct)$ であり、 $u(r, t)$ の解として

$$u(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r} \quad (3.38)$$

が得られる (f, g は任意関数)。上式の右辺第 1 項目は、点波源から等方的に外側に伝わる球面波で、 r に反比例して減衰していく成分である。右辺第 2 項目は、球の中心点に向かって等方的に集中していく球面波で、中心点に近づくにつれ増大していく成分である。

3.4 波のエネルギー

3.1 節における弦を伝わる波を考える。 y 方向に $y(x, t)$ だけ変位したときの、位置 x と $x + \Delta x$ の間にある弦の微小部分の運動エネルギーは、微小部分の質量 $\sigma \Delta x$ 、速度 $\partial y / \partial t$ を用いて

$$\Delta K = \frac{1}{2} \sigma \Delta x \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.39)$$

である。よって、単位長さ当たりの運動エネルギー密度は

$$w_K(x, t) = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (3.40)$$

となる。この微小部分について、平衡状態での長さ Δx から変位 $y(x, t)$ での長さ Δs になったときの弾性ポテンシャルエネルギーの変化量は、その間に張力 T がした仕事に等しいので

$$\begin{aligned} \Delta U &= T(\Delta s - \Delta x) \\ &= T \left\{ \sqrt{(\Delta x)^2 + [y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]^2} - \Delta x \right\} \\ &= T \left\{ \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2} - \Delta x \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} T \Delta x \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

と表せる。ここで、変位は $\partial y / \partial x \ll 1$ であるくらい十分小さいとして、 $a \ll 1$ のときに成り立つ近似 $\sqrt{1+a} \approx 1 + a/2$ を用いた。よって、単位長さ当たりのポテンシャルエネルギー密度は

$$w_U(x, t) = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (3.42)$$

となる。波動方程式の解は、 $v = \sqrt{T/\sigma}$ として $y(x, t) = f(x \mp vt) = f(\xi)$ と書けて

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v f'(\xi), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) \quad (3.43)$$

なので、各エネルギー密度は

$$w_K(x, t) = \frac{\sigma v^2}{2} \{f'(\xi)\}^2 \quad (3.44)$$

$$w_U(x, t) = \frac{T}{2} \{f'(\xi)\}^2 = \frac{\sigma v^2}{2} \{f'(\xi)\}^2 \quad (3.45)$$

となり、2つのエネルギー密度は等しいことが分かる。また、全エネルギー密度は

$$w(x, t) = w_K(x, t) + w_U(x, t) = \sigma v^2 \{f'(\xi)\}^2 \quad (3.46)$$

と表される。

具体的な波として、波数 k 、波速 v の正弦波

$$y(x, t) = A \sin k(x - vt) = A \sin(kx - \omega t) \quad (\omega = kv) \quad (3.47)$$

を考えると

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t) \quad (3.48)$$

より、各エネルギー密度は

$$w_K(x, t) = \frac{\sigma(\omega A)^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) \quad (3.49)$$

$$w_U(x, t) = \frac{T(kA)^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) = \frac{\sigma(\omega A)^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) \quad (3.50)$$

となり、全エネルギー密度は

$$w(x, t) = \sigma(\omega A)^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (3.51)$$

となる。エネルギー密度の空間平均と時間平均を求めてみる。運動エネルギー密度の空間平均は、波長 $\lambda = 2\pi/k$ として

$$\begin{aligned} \langle w_K \rangle_x &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda w_K(x, t) dx = \frac{\sigma(\omega A)^2}{2\lambda} \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx \\ &= \frac{\sigma(\omega A)^2}{2\lambda} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2(kx - \omega t)}{4k} \right]_0^\lambda \\ &= \frac{\sigma(\omega A)^2}{4} \end{aligned} \quad (3.52)$$

となり、時刻 t に依らない。また、ポテンシャルエネルギー密度の空間平均も同じ値 ($\langle w_U \rangle_x = \langle w_K \rangle_x$) であり、全エネルギー密度の空間平均は上式の2倍

$$\langle w \rangle_x = \frac{\sigma(\omega A)^2}{2} \quad (3.53)$$

である。運動エネルギー密度の時間平均は、周期 $T_p = 2\pi/\omega$ として

$$\begin{aligned} \langle w_K \rangle_t &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} w_K(x, t) dt = \frac{\sigma(\omega A)^2}{2T_p} \int_0^{T_p} \cos^2(kx - \omega t) dt \\ &= \frac{\sigma(\omega A)^2}{2T_p} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2(kx - \omega t)}{4\omega} \right]_0^{T_p} \\ &= \frac{\sigma(\omega A)^2}{4} \end{aligned} \quad (3.54)$$

となり、位置 x に依らず、しかも空間平均と同じ値となる。エネルギー密度の空間平均または時間平均が (ωA) に比例する点は単振動の場合と共通している。 ωA は振動する媒質の最大の速さである。

片方の端が固定された十分長い弦を、大きさ T の張力で直線状に張り、もう片方の端を横振動させて、弦に沿って進行する正弦波を作することを考える。この過程では一端を振動させ続けて、外から絶えずエネルギーが供給されており、そのエネルギーは1波長当たり $\langle w \rangle_x \lambda$ である。作られる正弦波は式 (3.47) とし、弦の端 ($x = 0$) で駆動装置により発生しているとする。このとき、駆動力 \mathbf{F} の大きさは張力の大きさ T に等しく、弦の接線方向に作用している (図 3.3)。したがって、弦の端では

$$y_0(t) = y(0, t) = A \sin(-\omega t) = -A \sin \omega t \quad (3.55)$$

で与えられる運動を強制されている。

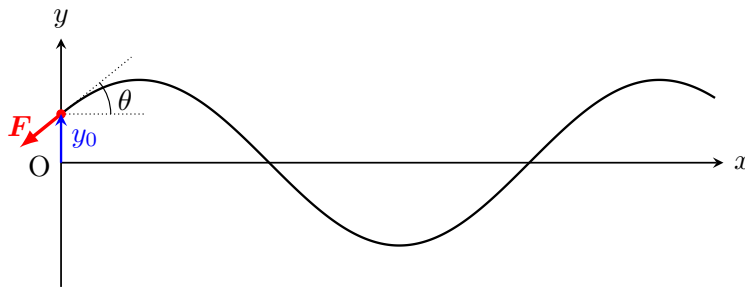


図 3.3 弦の端での強制振動による正弦波の発生

駆動力 \mathbf{F} の y 成分は

$$F_y = -T \sin \theta \approx -T \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} \quad (3.56)$$

で与えられる。ここで、実際は変位 $y(x, t)$ が十分小さいので、 $\theta \ll 1$ であり、 $\sin \theta \approx \tan \theta = \partial y / \partial x$ と近似した。式 (3.47) より

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = kA \cos(-\omega t) = kA \cos \omega t \quad (3.57)$$

であるので

$$F_y(t) = -TkA \cos \omega t = -\sigma v \omega A \cos \omega t \quad (3.58)$$

となる。ここで、 $T = \sigma v^2$ 、 $k = \omega/v$ を用いて整理した。弦の端が dy_0 だけ移動したときの、この力のする仕事は $F_y dy_0$ であり、 $dy_0 = -\omega A \cos \omega t dt$ より任意の時間内にする仕事

$$W = \int F_y dy_0 = \sigma v \omega^2 A^2 \int \cos^2 \omega t dt = \frac{\sigma v (\omega A)^2}{2} \int (1 + \cos 2\omega t) dt \quad (3.59)$$

が得られる。したがって、仕事率 P は1周期 $T_p = 2\pi/\omega$ の仕事の時間平均をとって

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_p} \frac{\sigma v (\omega A)^2}{2} \int_0^{T_p} (1 + \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{T_p} \frac{\sigma v (\omega A)^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T_p} \\ &= \frac{\sigma v (\omega A)^2}{2} = \frac{\sigma (\omega A)^2}{2} \cdot v \end{aligned} \quad (3.60)$$

と表される。式 (3.53) から分かるように、これは全エネルギー密度の空間平均に波速 v を掛けたものである。今の場合、波速 v は単位時間当たりに波源から波として入っていく弦の長さに対応するので、単位

時間当たりに式 (3.60) のエネルギーが供給され、そのエネルギーは弦に沿って伝わっていくと解釈できる。このように弦はエネルギーを波速 v で伝える媒質として振舞うのである。

3.5 波の反射・透過と定在波

x 軸上において、線密度 μ_1 (媒質 1) と線密度 μ_2 (媒質 2) の 2 種類の一様な弦が位置 $x = 0$ で接続され、張力 T で張られているとする。左側 (x 軸の負側) の媒質 1 から境界 ($x = 0$) に入射してきた波について、一部がその境界を通過して媒質 2 に進むと同時に、残りは反射して逆方向に進むという現象が起こる。弦の張力 T は一定であるものとして、この現象を考える。媒質 1, 媒質 2 での波速はそれぞれ

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (3.61)$$

で与えられる。媒質 1 から境界に向かう入射波を $f_i(x - v_1 t)$, 反射波を $f_r(x + v_1 t)$, 媒質 2 への透過波を $f_t(x - v_2 t)$ とし、表現を変えてそれぞれ

$$f_i(x - v_1 t) = f_i(-v_1(t - x/v_1)) = g_i(t - x/v_1) \quad (3.62)$$

$$f_r(x + v_1 t) = f_i(v_1(t + x/v_1)) = g_r(t + x/v_1) \quad (3.63)$$

$$f_t(x - v_2 t) = f_i(-v_2(t - x/v_2)) = g_t(t - x/v_2) \quad (3.64)$$

と表すことにすると、2 種類の弦の変位 y_1, y_2 はそれぞれ

$$y_1(x, t) = g_i(t - x/v_1) + g_r(t + x/v_1) \quad (3.65)$$

$$y_2(x, t) = g_t(t - x/v_2) \quad (3.66)$$

となる。2 種類の弦は点 $x = 0$ で接続しているので、この点において変位 y_1, y_2 が等しく、さらに、接続点の両側で復元力 (張力の y 方向成分) は等しいので、傾き $\partial y_1/\partial x, \partial y_2/\partial x$ も等しくなければならない。このことから

$$y_1(0, t) = y_2(0, t) \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (3.68)$$

という条件式が得られる。したがって、

$$g_i(t) + g_r(t) = g_t(t) \quad (3.69)$$

$$-\frac{1}{v_1} g'_i(t) + \frac{1}{v_1} g'_r(t) = -\frac{1}{v_2} g'_t(t) \quad (3.70)$$

となる。式 (3.69) を t に関して微分し、式 (3.70) に $v_1 v_2$ を掛けて整理すると

$$\begin{cases} g'_t(t) - g'_r(t) = g'_i(t) \\ v_1 g'_t(t) + v_2 g'_r(t) = v_2 g'_i(t) \end{cases} \quad (3.71)$$

のように $g'_r(t)$ と $g'_t(t)$ についての連立方程式が得られる。この連立方程式を解いて、 t について積分し、 $g_i(t), g_r(t), g_t(t)$ は定数項を含まないとする

$$g_r(t) = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} g_i(t) \quad (3.72)$$

$$g_t(t) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} g_i(t) \quad (3.73)$$

が得られる。これらの式は、任意の時刻における $x = 0$ での波の状態を記述する式であるが、変数が同じ値のときの g_i , g_r , g_t の関係をも示している。つまり、ある変数 τ に対して、式 (3.72), (3.73) の t を τ に置き換えた関係式が成り立ち、 τ を $x = 0$ のときの t の値として解釈しなくてもよい。

例えば、ある時刻 t における入射波と反射波の関係は式 (3.72) より

$$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (3.74)$$

となり、反射波が入射波より係数 $(v_2 - v_1)/(v_1 + v_2)$ だけ小さくなっていると同時に、入射波に対して左右反対になっている。さらに、 $v_2 < v_1$ の場合は係数の符号が反転するので上下反対になっている。これは反射波の位相が媒質 1, 2 での半波長ずれることを示しており、 $v_2 < v_1$ のとき反射波は入射波と逆位相となる。同様に、ある時刻 t における入射波と透過波の関係は式 (3.73) より

$$g_t\left(t - \frac{(v_2/v_1)x}{v_2}\right) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (3.75)$$

となり、透過波は入射波より係数 $2v_2/(v_1 + v_2)$ だけ振幅が変化し、さらに x 軸に沿う大きさの変化も伴っている。

結局、入射波と反射波・透過波の関係は、反射係数 $C_r = (v_2 - v_1)/(v_1 + v_2)$ と透過係数 $C_t = 2v_2/(v_1 + v_2)$ によって決まり、すなわち、媒質の性質（今の場合、弦の線密度）で決まり、入射波の波形や振幅、周期には無関係である。ここで、 $|C_r| \leq 1$ であり、常に $C_t = 1 + C_r$ の関係が成り立つ。

具体的に、入射波として正弦波

$$g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) = A_i \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\right] \quad (3.76)$$

を考え、反射波と透過波を求めてみる。式 (3.5) より反射波は

$$g_r\left(t + \frac{x}{v_1}\right) = C_r A_i \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)\right] = A_r \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)\right] \quad (3.77)$$

と求まり、式 (3.75) より透過波は

$$g_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right) = C_t A_i \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right] = A_t \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right] \quad (3.78)$$

と求まる。したがって、入射波、反射波、透過波の振幅の間には $A_r = C_r A_i$, $A_t = C_t A_i$ の関係がある。

式 (3.5) の特別な場合を考えることによって、いわゆる固定端および自由端での波の反射を記述できる。

固定端 媒質 2 が無限大の質量をもち、 $v_2 = 0$ の場合

$$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = -g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (3.79)$$

となり、反射波は入射波に対し左右反転で、さらに上下反転（逆位相）となる。つまり、入射波が固定端を通過して進行すると考えた仮想の波を、 $x = 0$ での固定端に関して点対称に移した波が反射波となる。

自由端 媒質 2 に質量がなく（もしくは媒質 2 がなく）、 $v_2 \rightarrow \infty$ の場合

$$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (3.80)$$

となり、反射波は入射波に対し左右反転で、上下は反転しない（同位相）。つまり、入射波が固定端を通過して進行すると考えた仮想の波を、 $x = 0$ での境界面に関して対称に移した波が反射波となる。

上の特別な場合において、具体的に式 (3.76) で表される正弦波（角振動数 ω 、波速 v ）が固定端、及び自由端で反射される状況を考える。この波について、波長 $\lambda = 2\pi v/\omega$ 、周期 $T_p = 2\pi/\omega$ である。実際に観測される波は、入射波と反射波とを重ね合わせた合成波であり、式 (3.79)、(3.80) を用いて、固定端・自由端について、半周期分の入射波（赤破線）・反射波（青点線）・合成波（黒実線）の波形を描いたものを図 3.4 に示す。この図から分かるように、合成波は位置に応じて決まった一定の振幅で振動する。角振動数も波速も振幅も等しく互いに反対方向に進行する 2 つの正弦波の重ね合わせで表される合成波は、同じところで振動し進行しないように見えることから、このような波を**定在波 (standing wave または stationary wave)**、または定常波という。定在波において、全く振動しない点を**節 (node)**、振幅の最大の点を**腹 (anti-node)** という。節と節の間隔、及び、腹と腹の間隔は波長 λ の半分となる。また、図より固定端は節、自由端は腹となることも分かる。よって、固定端での境界条件は変位 $y = 0$ 、自由端での境界条件は変位の勾配 $\partial y/\partial x = 0$ である。

定在波の例として、3.1 節のように、張力 T で引っ張られ両端を固定された長さ L の弦（線密度 μ ）の波動を考える。この波は波動方程式に従うものとし、減衰がない場合、永久に両端で反射を繰り返すので、弦を伝わる波は波速 $v = \sqrt{T/\mu}$ で $\pm x$ 方向に伝わる波の重ね合わせで表される。正弦波を考え

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi) + B \sin(\omega t + kx + \phi) \quad (k = \omega/v) \quad (3.81)$$

とする。両端を固定されているという境界条件は

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0 \quad (3.82)$$

であり、1 つ目の条件から、 $B = -A$ （位相の反転）が得られるので

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi) - A \sin(\omega t + kx + \phi) = 2A \sin kx \cos(\omega t + \phi) \quad (3.83)$$

となる。また 2 つ目の条件から、 $\sin kL = 0$ が得られるので

$$k = \frac{\pi}{L}n \quad (n: \text{整数}) \quad (3.84)$$

を満たす波数のみが存在する。波長 $\lambda = 2\pi/k$ より、上式を書き直すと

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n: \text{整数}) \quad (3.85)$$

という波長に対する条件が得られる。つまり、弦長が半波長の整数倍の場合（ $L = n(\lambda/2)$ ）に限り、このような波が存在するというを示す。ここで、 n は $1, 2, 3, \dots$ から無限大まで取ることができ、 n で指定される弦固有の振動を弦の基準モードという。特に、 $n = 1$ の場合を基本モードという。第 n 次モードの波動は

$$y_n(x, t) = A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.86)$$

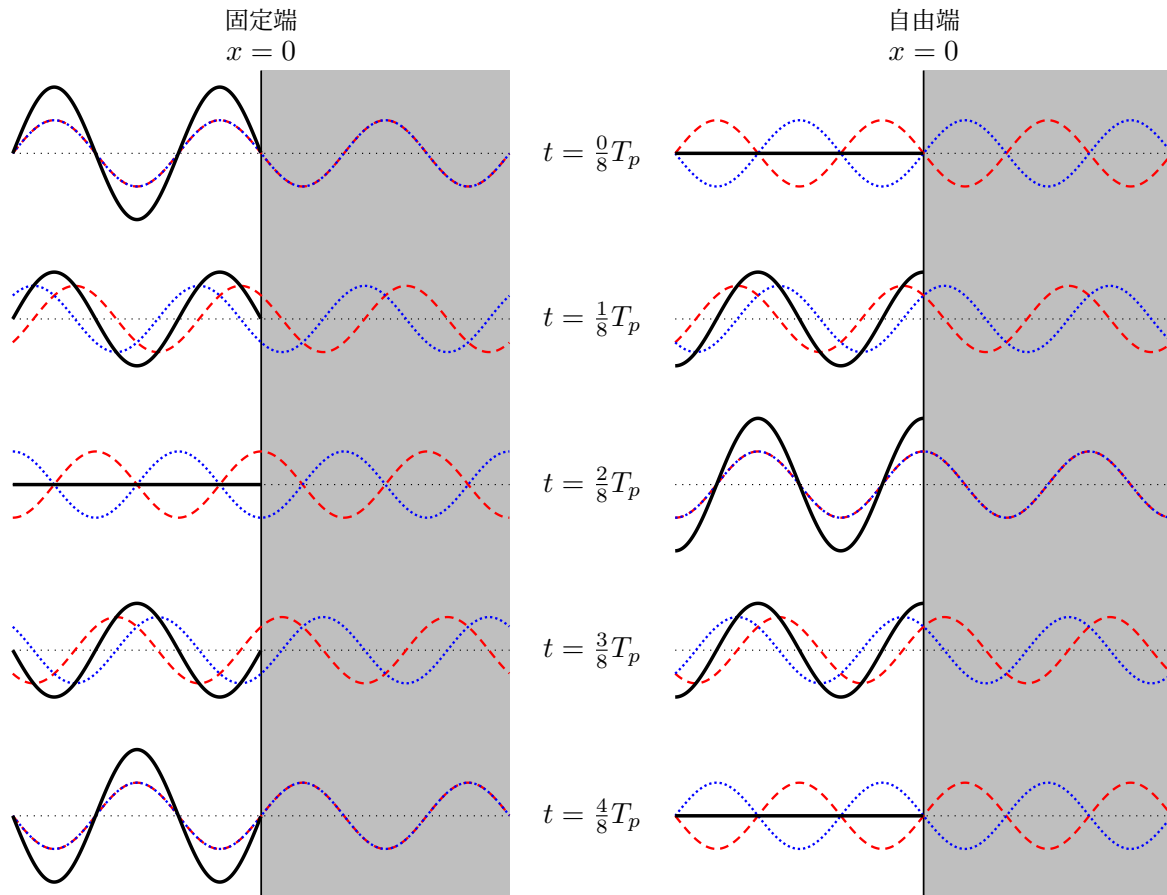


図 3.4 固定端・自由端における時間 $T_p/8$ ごとの入射波（赤破線）・反射波（青点線）・合成波（黒実線）の様子。入射波は左から右に向かって進行し、 $x = 0$ で反射する。 $x = 0$ より右側の灰色領域に描かれた波は、反射波を考える上での仮定の波である。固定端の場合、 $x > 0$ の領域の入射波を上下反転し、 $x = 0$ を軸に折り返したものが反射波となる。自由端の場合、 $x > 0$ の領域の入射波を単に $x = 0$ を軸に折り返したものが反射波となる。

と表され、波数 $k_n = n\pi/L$ 、固有角振動数 $\omega_n = k_nv = n\pi v/L$ である。振幅 A_n と初期位相 ϕ_n は初期条件から決定される。式 (3.86) における $A_n \sin k_n x$ が位置 x での弦の振動の振幅を表し、固定端を含む振動しない点 ($x = 2m(L/2n)$) と最も大きく振動する点 ($x = (2m+1)(L/2n)$) が存在する ($m = 0, \dots, n-1$)、つまり節と腹が存在することが分かる。式 (3.86) について、 $n = 1, \dots, 5$ までのグラフを図 3.5 に示す。各モードの実線と破線の 2 つの曲線は、1 つ目の腹の変位が最大になる時刻と最小となる時刻のグラフを表す。図から分かるように第 n 次モードには n 個の腹がある。また、この弦の波のように波速 v で $\pm x$ 方向にここで述べられた基準モードや定在波は、1.4 節の連成振動で述べたものと同様であるが、弦の基準モードでは、高次の固有角振動数が基本角振動数 ($n = 1$ のモードの角振動数) の整数倍となることが連成振動の場合と異なる。^{*4}

^{*4} 連成振動の場合も、低次モードでは近似的に、第 1 次モードの角振動数の整数倍であり、波速もモードに依らず一定とみなせる。

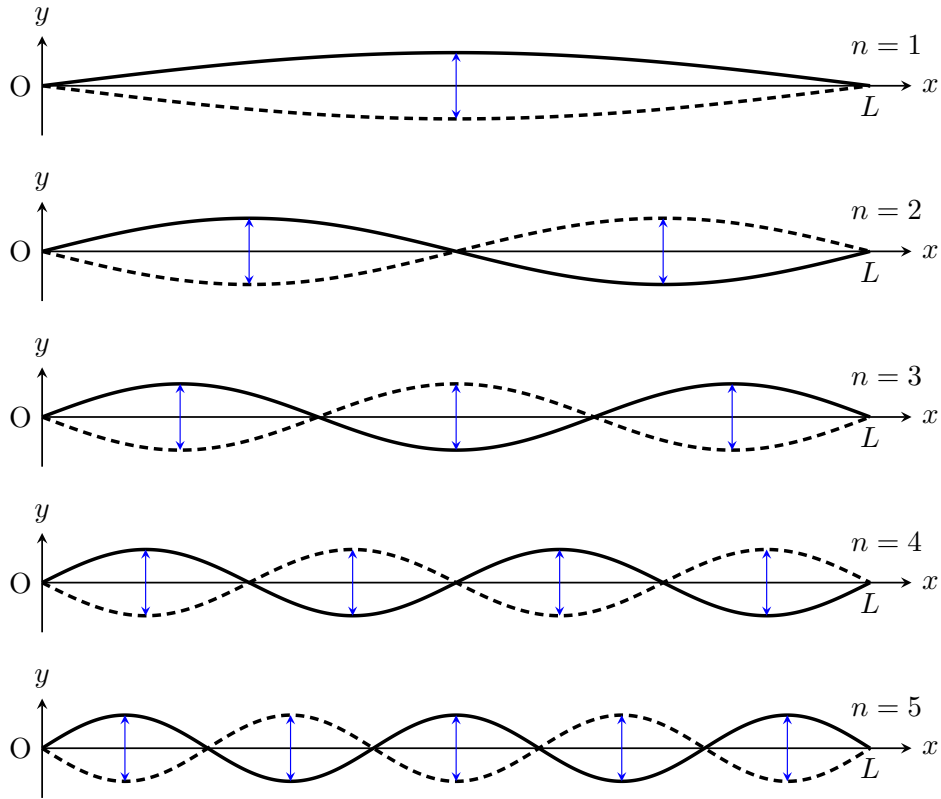


図 3.5 第 1~5 次の基準モードの様子

3.6 位相速度と群速度

3.1 節では、一様な線密度 σ の弦を伝わる波が従う波動方程式を導いた。その導出において、引っ張られている弦の張力 T は一定のものと仮定した結果、一定の波速 $v = \sqrt{T/\sigma}$ で伝わる波を解にもつ波動方程式が得られた。これは弦に沿った方向と垂直な方向の変位が十分小さく、弦に沿った方向の変化による張力の変化を無視した近似の下で成り立つものであり、現実の弦では必ずしも成り立つとは限らない。したがって、一般には、伝わる速さが振動数（もしくは波長）に依存する分散性波動について考える必要がある。^{*5}

分散をより具体的に調べるため、振幅が等しくて角振動数と波数がわずかに異なる 2 つの正弦波が x 軸に沿って伝わる時の合成波を考えてみる。2 つの正弦波は

$$y_+(x, t) = A \sin(k_+ x - \omega_+ t) \quad (3.87)$$

$$y_-(x, t) = A \sin(k_- x - \omega_- t) \quad (3.88)$$

とし、波数と角振動数はそれぞれ

$$k_{\pm} = k \pm \Delta k \quad (3.89)$$

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta \omega \quad (3.90)$$

^{*5} 実際、1.4 節の連成振動の例では、波の伝わる速さ（位相速度）はモードにより異なった。

と表す．ここで、 $\Delta k \ll k$ 、 $\Delta \omega \ll \omega$ とする．合成波は

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_+(x, t) + y_-(x, t) = A \sin(k_+ x - \omega_+ t) + A \sin(k_- x - \omega_- t) \\ &= 2A \sin \left[\frac{(k_+ + k_-)x - (\omega_+ + \omega_-)t}{2} \right] \cos \left[\frac{(k_+ - k_-)x - (\omega_+ - \omega_-)t}{2} \right] \\ &= 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \sin(k x - \omega t) \end{aligned} \quad (3.91)$$

と表され、時刻 $t = 0$ の合成波をグラフで描くと図 4.4 のようになる．

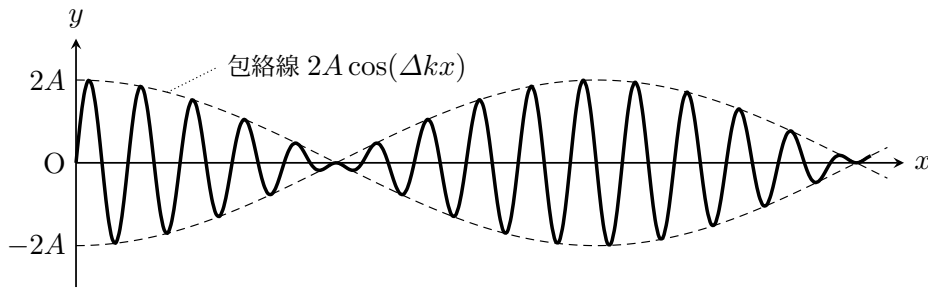


図 3.6 わずかに異なる角振動数と波数をもつ 2 つの正弦波の合成

図に示されているように、式 (3.91) は、振幅が長波長 $2\pi/\Delta k$ の包絡線 $2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)$ によって変調し、短波長 $2\pi/k$ で急速に変化する波とみなせ、いわば包絡線の中に波が詰まった波の塊（波束）として伝播する．また、この式から 2 つの固有の速さが存在することが分かる．一つは波数 k 、角振動数 ω の波がもつ速さで、位相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (3.92)$$

である．もう一つは、包絡線の伝わる速さ、つまり波束の伝わる速さ

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (3.93)$$

で、これを**群速度 (group velocity)** という．一般の場合、波動は多くの波長の波の重ね合わせで表され、その場合の群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.94)$$

で与えられる．このとき、 ω は k の関数として表され、 $\omega = \omega(k)$ を分散関係という．群速度 v_g が波数 k に依らず一定の (ω が k に比例する) 場合、群速度と位相速度は常に一致する．群速度が波数に依存して一定値にならない場合、*6 波束の形は保たれず、伝播に伴い形は崩れてしまう．このような波動を分散性波動という．

*6 位相速度が波数に依存して一定値にならない場合といってもよい．

第 4 章

音波

音とは、元来、空気の圧力、体積、密度などの微小な変動が縦波として空間を伝わる現象のことであるが、現在では解釈を広げて、物質中を伝わる力学的な波動全般を総称して音もしくは音波と呼ぶ。したがって、空気（気体）中だけでなく水（液体）中を伝わる波も、さらには前節でみた弦を伝わる波や弾性体を伝わる波なども広い解釈では音波である。しかしながら、ここでは元来の空気中を伝わる縦波としての音を取り扱うことにする。音波は空気の圧力、体積、密度の変化に関わることから、これらの物理量の間の基本的な関係（気体の状態方程式）と空気を弾性体とみなしたときの各微小部分の運動方程式を結び付けて、音波を記述する波動方程式を導く。

4.1 音波の方程式

気体中で音が伝わると、気体の各部は音波による圧力の勾配からくる力を受けて振動するとともに体積が変化して変形する。気体の各部の運動や変形について、簡単のため細長い管内の気体中を伝わる 1 次元の音波を考える。管内の気体は圧縮率の高い一種の弾性体の棒と考えることができ、3.2 節で扱った「弾性体の棒を伝わる縦波」と同様に取り扱いうる。図 4.2 に示すように、密度 ρ 、圧力 P の気体で満たされた断面積 A の真直ぐな管について、管内の気体を弾性体とみなし、3.2 節と同様に、 x 、 $x + \Delta x$ の位置に断面 S_1 、 S_2 を考える。音波による気体の振動が生じて、 S_1 、 S_2 はそれぞれ $\xi(x, t)$ 、 $\xi(x + \Delta x)$ だけ変位し、その状態での S_1 、 S_2 での圧力をそれぞれ P_1 、 P_2 とする。 S_1 と S_2 で挟まれた気体の微小部分の質量は $\rho A \Delta x$ であり、この部分に対する運動方程式は

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2) A \quad (4.1)$$

と書ける。

ところで、音波による振動によって管内の気体は部分的に圧縮と膨張をくり返し、その部分が圧縮されれば温度が上がり、膨張すれば温度が下がる。この音波による圧縮と膨張は熱の移動が無視できるほどすばやく起こると考えることができ、その気体の変形は断熱変化とみなせる。理想気体の場合、断熱変化において圧力 P と体積 V の間には

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (4.2)$$

の関係が成り立つ。^{*1} ここで、 $\gamma = C_P/C_V$ であり、 C_P は定圧比熱、 C_V は定積比熱である。上式を V

^{*1} 導出は付録

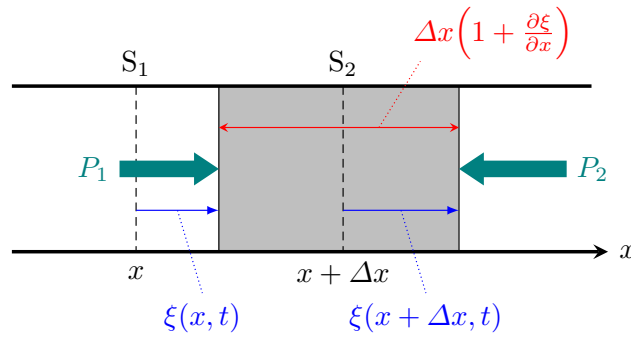


図 4.1 管内の気体の変形と運動

に関して微分すると

$$\frac{dP}{dV}V^\gamma + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} = 0 \quad (4.3)$$

となり、 $V^{\gamma-1}$ で割って整理すると

$$K = -\frac{dP}{dV}V = \gamma P \quad (4.4)$$

という関係式が得られる． $K = -(dP/dV)V$ を**体積弾性率 (Bulk modulus)*2**といい，上式は気体の断熱変化における体積弾性率が $K = \gamma P$ であることを示す．音波は気体の圧力 P ，体積 V に微小な変動 ΔP ， ΔV を引き起こすが，その変化は断熱的であり，式 (4.4) により圧力の微小変化は

$$\Delta P \approx -\gamma P \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\Delta V}{V} \quad (4.5)$$

と表せる．図 4.2 の状況において，音波がないときの S_1 と S_2 で挟まれた気体の体積は $V = A\Delta x$ であり，音波があるときの振動による体積変化は

$$\begin{aligned} \Delta V &= A\xi(x + \Delta x, t) - A\xi(x, t) \\ &\approx A\Delta x \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = V \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

と表せる．したがって，体積変化 ΔV と元の体積 V との比は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad (4.7)$$

となる．これを式 (4.8) に代入すると

$$\Delta P(x, t) = -K \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad (4.8)$$

が得られ，圧力の変動 ΔP は x ， t の関数となっている． S_1 と S_2 にかかる圧力 P_1 ， P_2 は振動が起きていないときの圧力 P から，それぞれの位置での圧力の変化分 ΔP だけずれているので

$$\begin{aligned} P_1 &= P + \Delta P(x, t) \\ P_2 &= P + \Delta P(x + \Delta, t) \end{aligned}$$

*2 圧縮率 $-(1/V)(dV/dP)$ の逆数である．

と表せる．よって

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_2 &= \Delta P(x, t) - \Delta P(x + \Delta, t) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} \Delta P(x, t) \cdot \Delta x \\
 &= K \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \Delta x
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

が得られる．上式を式 (4.1) に代入すると

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \Delta x A \tag{4.10}$$

となり，さらに整理すると波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \tag{4.11}$$

を得る．ここで

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{4.12}$$

であり，管内の気体中での音波の伝わる速さ，つまり音速を表す．断熱変化における体積弾性率 $K = \gamma P$ と理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ (R : 気体定数, T : 絶対温度, n : 物質質量) を用いると，音速は

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{4.13}$$

と書いて，絶対温度 T の関数として表せる．ここで， $M = \rho V/n$ は分子量（気体分子 1 mol あたりの質量）である．絶対温度 $T[\text{K}]$ を摂氏温度 $t[^\circ\text{C}]$ で表すと

$$T = 273.15 + t \tag{4.14}$$

であるので，室温程度の場合，音速は

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \sqrt{\frac{\gamma R}{M} (273.15 + t)} \\
 &= c(0) \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}} \\
 &\approx c(0) \left(1 + \frac{t}{546.3} \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

と書ける．ここで 0°C における空気中の音速 $c(0) \approx 331.45 \text{ m/s}$ を代入すれば

$$c(t) \approx 331.45 + 0.607t \text{ [m/s]} \tag{4.16}$$

が得られる．よって，気温が 1°C 上昇すると空気中の音速は約 0.6 m/s 増加する．

式 (4.8) で表される音波による圧力の変動を音圧という．この音圧を $p(x, t)$ ($= \Delta P$) で表すと，式 (4.8) と式 (4.11) より，音圧 $p(x, t)$ についても波動方程式

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \tag{4.17}$$

が成り立つことが分かる．また，上の議論では1次元の音波として管内の気体の振動を考えたが，気体の微小部分の運動方程式 (4.1) と体積変化に関する式 (4.7) を3次元空間に拡張することにより，3次元の音波の方程式が得られる．時刻 t での，点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ における変位の x, y, z 成分をそれぞれ $\xi(\mathbf{r}, t)$, $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\zeta(\mathbf{r}, t)$ とすると，音波がないときの気体の微小部分の体積 $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ，音波による体積変化

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \Delta z + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y \cdot \Delta x \Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z \cdot \Delta x \Delta y \\ &= V \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (4.18)$$

より，体積変化の比率は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (4.19)$$

であるので，音圧は

$$p(\mathbf{r}, t) = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (4.20)$$

となる．気体の微小部分の運動方程式は

$$\rho V \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\xi, \eta, \zeta) = -V \nabla p = -V \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (4.21)$$

となるので，式 (4.20), (4.21) から ξ, η, ζ を消去すると3次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = c^2 \Delta p \quad (4.22)$$

が得られる．

4.2 気柱の振動

細長い管内の気体を**気柱**といい，管楽器などは気柱を振動させて音を出している．前節で述べたように，気柱の振動は弾性体の棒と同じように取り扱うことができ，管の一端を閉じた閉管の場合と両端の開いた開管の場合を考える必要がある．管の端が閉じている場合，その端では当然，音波の反射が起こるが，閉口端では気体が振動できないので変位 $\xi = 0$ という境界条件が課せられる．つまり，3.5節で述べた固定端反射となる．管の端が開いている場合，管外の気体は自由に動けるため，管内の気体と管外の気体は管の端を境界としてあたかも異なる媒質とみなすことができ，管外は近似的に質量がない媒質と考えてよい．したがって，開口端では自由端反射が起こる．このように音波の固定端反射，自由端反射が起こることから，閉管，開管ともに3.5節で述べたように管内で定在波が生じ，閉口端では定在波の節，開口端では定在波の腹となる．したがって，閉口端での境界条件は音波の変位 $\xi = 0$ ，開口端での境界条件は変位の勾配 $\partial \xi / \partial x = 0$ である．

具体的に気柱の定在波を考えるため，3.5節と同様に，長さ L の管に沿って x 軸をとり，密度 ρ ，体積弾性率 K の気柱について，音速 $v = \sqrt{K/\rho}$ の正弦波

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi) + B \sin(\omega t + kx + \phi) \quad (k = \omega/v) \quad (4.23)$$

を考える．

閉管での気柱の振動

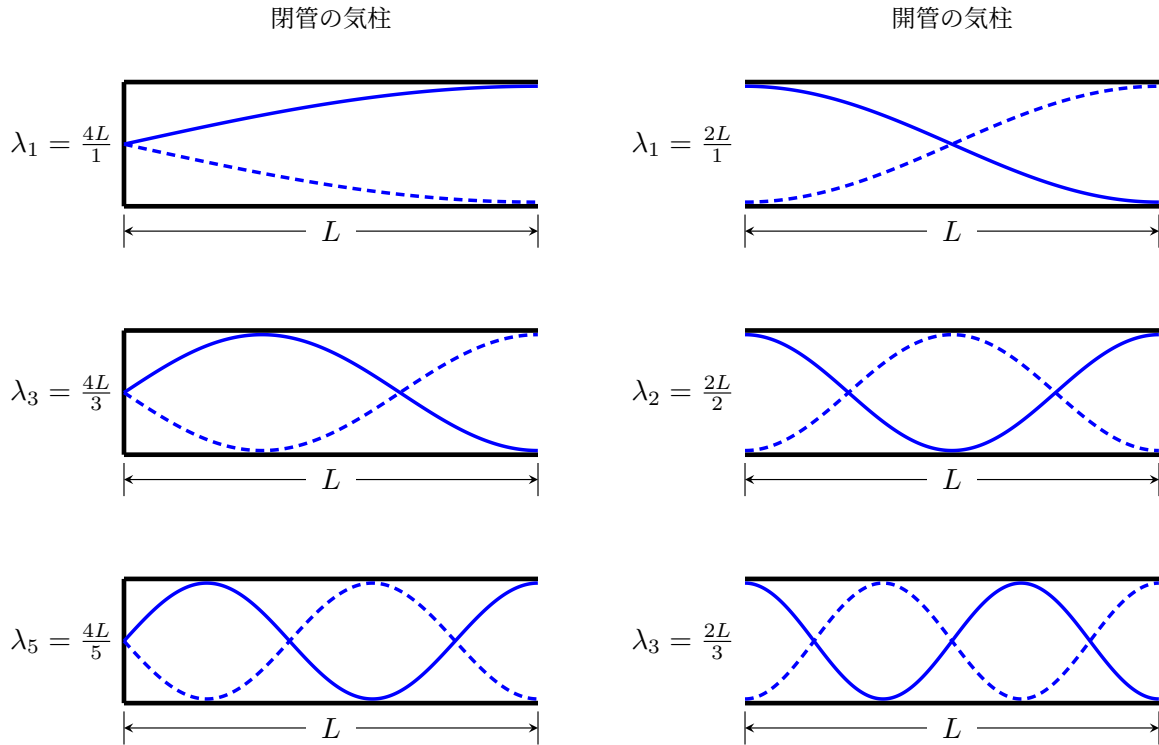


図 4.2 気柱の振動：左側は閉管の場合の基準モード，右側は開管の場合の基準モードを表す．描かれている正弦波は音波の縦波を横波表示したイメージである．

管の一端を閉じた閉管を考え， $x = 0$ の位置で閉口端， $x = L$ の位置で開口端とする．この場合の境界条件は

$$\xi(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \xi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

である．式 (4.23) に 1 つ目の条件を課すと， $B = -A$ が得られ

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \sin(\omega t - kx + \phi) - A \sin(\omega t + kx + \phi) \\ &= 2A \sin kx \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 2kA \cos kx \cos(\omega t + \phi) \quad (4.26)$$

となり，2 つ目の条件から $\cos kL = 0$ が得られるので

$$k_n = \frac{n\pi}{2L} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.27)$$

を満たす波数のみが存在する．角振動数 ω_n 及び波長 λ_n はそれぞれ

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (4.28)$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{n} \quad (4.29)$$

となる． $n = 1$ は基本モードであり，第 n 次モード (n は奇数) の振動数は基本モードの奇数倍となる．第 n 次モードの定在波は

$$\xi_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \phi_n\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.30)$$

と表せる． A_n, ϕ_n は初期条件を満たすように決定する．図 4.2 の左側に閉管の気柱の基準モード ($n = 1, 3, 5$) を示す．実際の音波は縦波であるが，分かりやすいように横波表示している．

開管での気柱の振動

管の両端が開いた開管を考える ($x = 0, x = L$ の位置で開口端)．この場合の境界条件は

$$\frac{\partial \xi(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

である．式 (4.23) より

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx + \phi) + kB \cos(\omega t + kx + \phi) \quad (4.32)$$

なので，1 つ目の条件から $B = A$ が得られ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -kA \cos(\omega t - kx + \phi) + kA \cos(\omega t + kx + \phi) \\ &= -2kA \sin kx \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (4.33)$$

となり，2 つ目の条件から $\sin kL = 0$ が得られるので

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.34)$$

を満たす波数のみが存在する．角振動数 ω_n 及び波長 λ_n はそれぞれ

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (4.35)$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (4.36)$$

となる． $n = 1$ は基本モードであり，第 n 次モードの振動数は基本モードの整数倍となる．第 n 次モードの定在波は

$$\xi_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \phi_n\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.37)$$

と表せる． A_n, ϕ_n は初期条件を満たすように決定する．図 4.2 の右側に開管の気柱の基準モード ($n = 1, 2, 3$) を示す．

実際には，開口端から管外へ音波が放射されるので，定在波の腹の位置は開口端より少し外側に出ている．図 4.3 に示すように，管口から管外へ少し出ている腹の位置までの長さを **開口端補正 (end correction)** という．開口端補正 ΔL は近似的に管の半径 a に比例し，長波長近似では $\Delta L \approx 8a/3\pi$ となる．

4.3 ドップラー効果

救急車がサイレンを鳴らしながら通り過ぎるとき，近づいてくるまではサイレンの音の高さは高くなっていき，通り過ぎると音の高さは低くなる現象を誰しも体験したことがあるであろう．音源と観測者の一

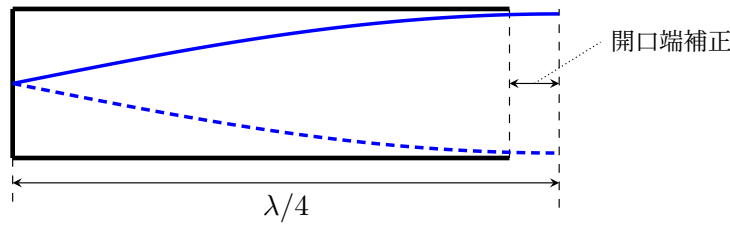


図 4.3 開口端補正

方または両方が運動している場合、観測者に聞こえる音の高さ（振動数）は一般に元の音源の音の高さとは異なる。これをドップラー効果 (Doppler effect) という。

音源 S と観測者 O が一直線上において、それぞれ一定の速度 v_S, v_O で運動している場合を考える。 v_S, v_O の符号は、音源と観測者が互いに近づく方向を向いているときにともに正とする。音波は音源や観測者の運動に関係なく、媒質（空気）中を一定の速さ V で伝わるものとする（媒質は一様）。また、無風であり空気の流れはないものとする。音源の振動数を f_S とすると観測者の聞く音波の振動数 f_O は

$$f_O = \frac{V + v_O}{V - v_S} f_S \quad (4.38)$$

となる。音源が観測者に近づく場合 ($v_S > 0$) または観測者が音源に近づく場合 ($v_O > 0$) において、観測者の聞く音波の振動数 f_O は音源の振動数 f_S より大きくなり、遠ざかる場合には小さくなることが分かる。もし媒質（空気）が音源と観測者の運動方向に沿って一定の速さ移動している（一定の風が吹いている）場合、その直線上の媒質の速度を v とすると、観測者の聞く音波の振動数は

$$f_O = \frac{V + v + v_O}{V + v - v_S} f_S \quad (4.39)$$

となる。

4.4 うなり

振動数が非常に接近している2つの音を同時に聞くと、2つの重なり合った音の強さが大きくなったり小さくなったりする現象が起こる。この現象をうなり (beat) といい、2つの音波の合成波の振動数が、基本的に、2つの音波の振動数の平均値をとるのに対し、その振幅が時間とともにゆるやかに周期的に変化することから説明される。3.6節で取り扱ったように、振幅が等しくて角振動数と波数がわずかに異なる2つの正弦波の合成を考えると理解しやすい。2つの音波 $\xi_+(x, t)$, $\xi_-(x, t)$ を正弦波として考え、その波数と角振動数をそれぞれ $k_{\pm} = k \pm \Delta k$, $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega$ とすると

$$\xi_+(x, t) = A \sin(\omega_+ t - k_+ x) \quad (4.40)$$

$$\xi_-(x, t) = A \sin(\omega_- t - k_- x) \quad (4.41)$$

$$\xi(x, t) = \xi_+ + \xi_- = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \sin(\omega t - k x) \quad (4.42)$$

のように合成波 $\xi(x, t)$ が表され、位置 $x = 0$ での合成波をグラフで描くと図??のようになる。図の包絡線で表される振幅の周期的な変化がうなりとして聞こえ、その周期は包絡線の周期 $T_0 = 2\pi/\Delta\omega$ である。したがって、単位時間当たりのうなりの回数

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi} = f_+ - f_- \quad (4.43)$$

となる。ここで、 f_+, f_- は2つの音波の振動数である ($f_+ > f_-$)。

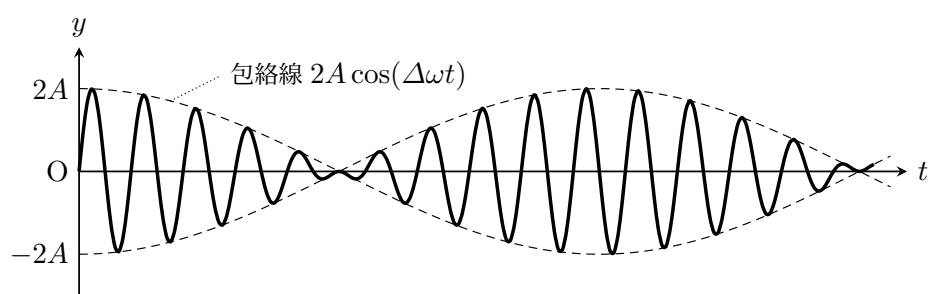


図 4.4 わずかに異なる角振動数と波数をもつ 2 つの正弦波の合成

参考文献

- [1] A.P. フレンチ著/平松惇・安福精一監訳 『MIT 物理 振動・波動』 培風館
- [2] 平尾雅彦著 『音と波の力学』 岩波書店
- [3] 原康夫著 第 5 版 『物理学基礎』 学術図書出版社
- [4] 有山正孝編 『振動・波動演習』 裳華房
- [5] Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr. *Principles of Physics, fifth edition*, BROOKS/COLE