数理リテラシー特別講座

Mathematical Essence of Wave

波動の数理

第1回
「振動」

■ はじめに

【講座の目的】

波動に共通の**数学的表現**を理解すること

- 波動方程式
- 基準モード
- 重ね合わせの原理

等々

世界は“波動”で満ち溢れている！

水面波, 音波, 光(電磁波), 地震, …

様々な分野への応用が可能！

■ 第1回「振動」

“振動は波動を考えるときの第一歩”

◆ 単振動

質点とバネから成る減衰のない系において生じる振動.
振動は正弦波で表され, 質点の質量とバネ定数で決まる固有の角振動数で振動することを理解しよう.

◆ 連成振動

複数の質点(N個)とバネから成る系において生じる振動.
離散的な振動数をもつN個の基準振動(基準モード)が存在し, 任意の振動は基準振動の重ね合わせで表されることを理解しよう.

◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕

バネ定数 k のバネに質量 m の質点を付けてぶら下げる.

フックの法則　$F = -kx$

バネの復元力は変位 x に比例

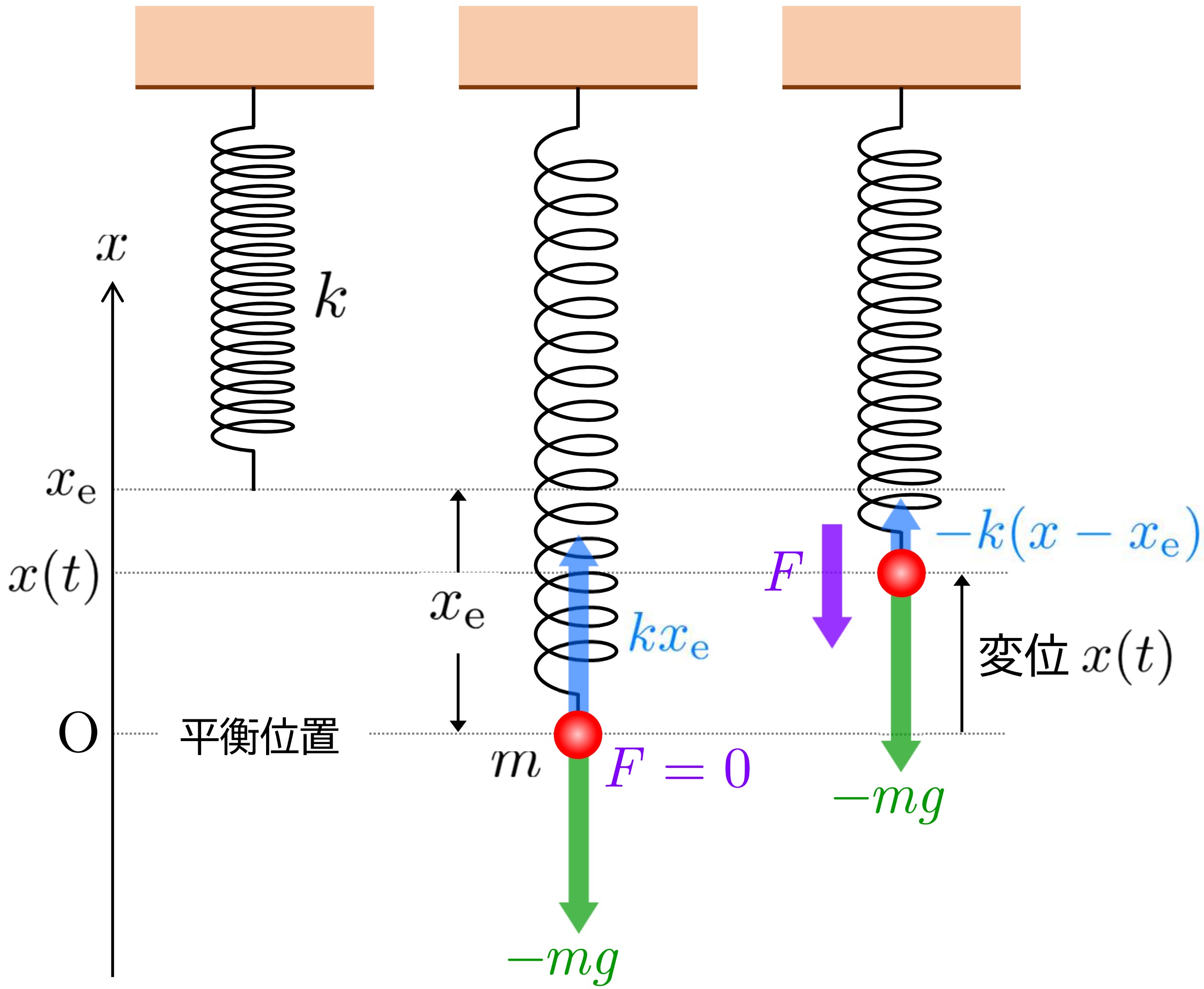
平衡位置での力のつり合い

$$kx_{\mathrm{e}} - mg = 0$$

運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_e) - mg$$
$$= -kx + \underbrace{kx_e - mg}_{=0}$$
$$= -kx$$

バネ-質量系



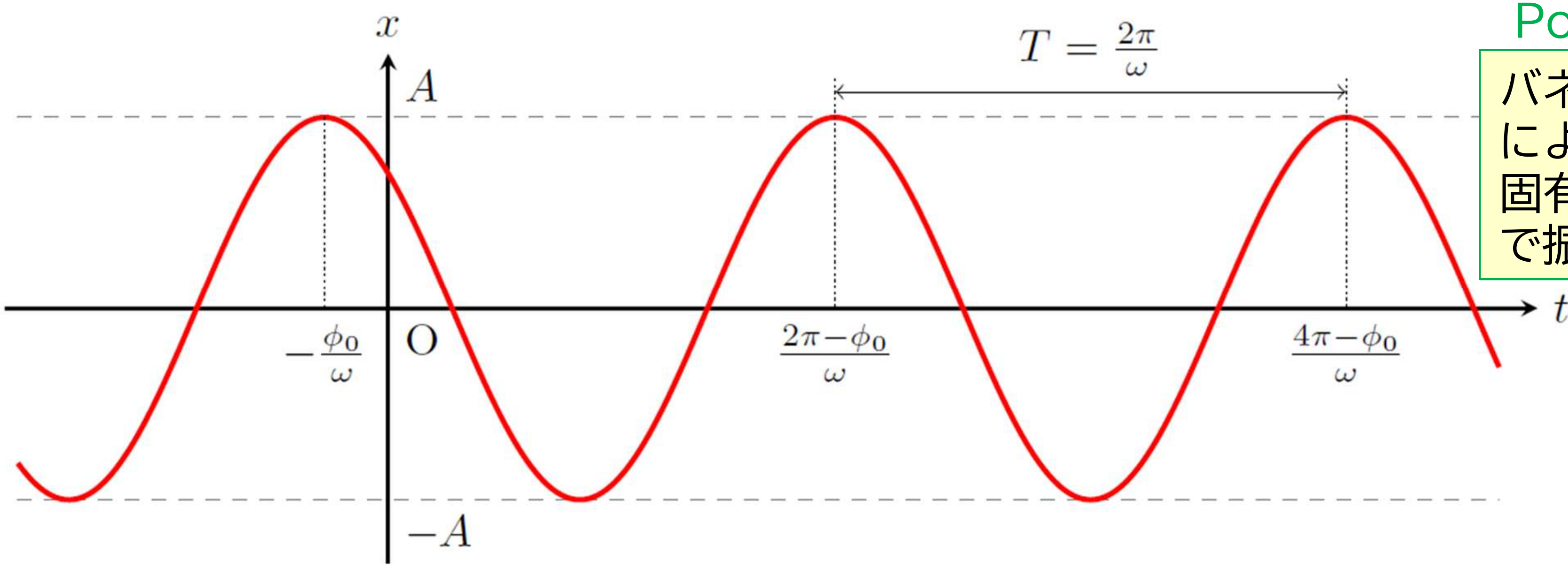
◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕

定数係数の2階同次線形微分方程式

運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ ➡ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ 角振動数

一般解 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$ （A, ϕ_0：任意定数）

演習1-1 運動方程式を満たす解を求めてみよう．



Point!

バネ定数と質量によって決まる固有の角振動数で振動する．

【参考】単振動のシミュレーション

◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕

「第1回講座資料」内の「単振動のシミュレーション」フォルダをダウンロードし，htmlファイルをダブルクリックで実行

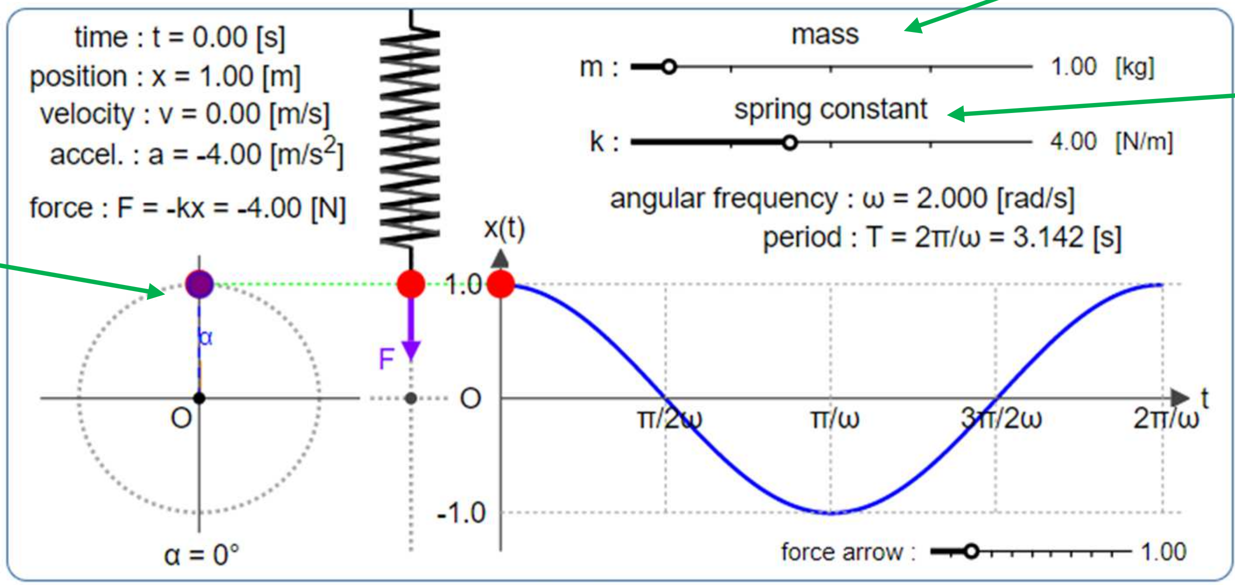
単振動のシミュレーション

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

質量の設定

バネ定数の設定

初期位相の設定



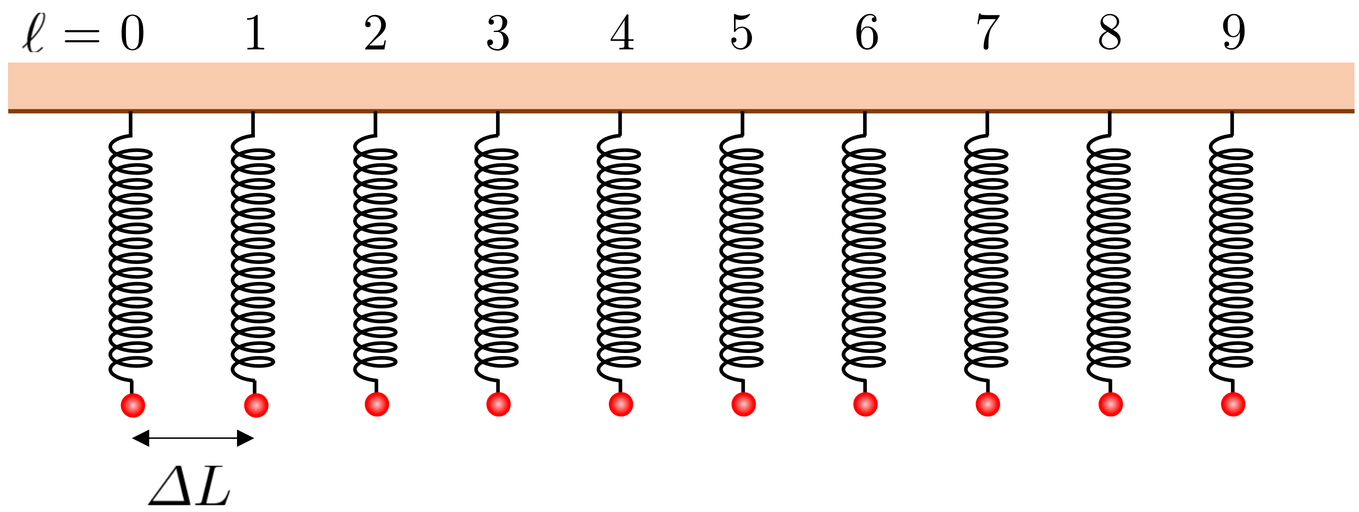
バネ定数と質量の値が変化すると角振動数が変化することを確認しよう．

JSXGraph Copyright (C) see http://jsxgraph.org

Startボタンで動作開始 → [Start] the simple harmonic motion. [Initialize] the position. 設定を変更したらInitializeボタンを押す

■ 第1回「振動」

◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕



ΔL の間隔を空けてバネ-質量系を10個ならべ, 左端($\ell = 0$)から時間差 Δt で順に単振動させると, 10個の質点はどのような動きを示すか？

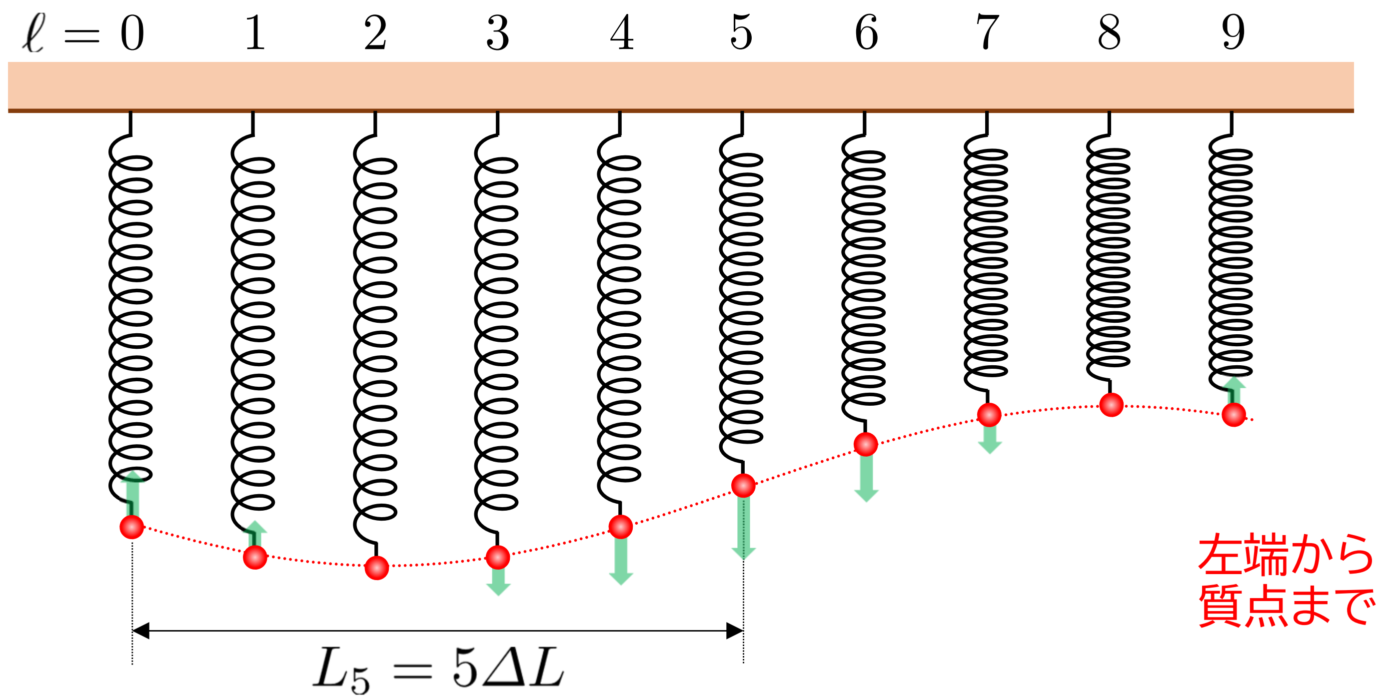
$t = 0$ で $\ell = 0$ の質点が単振動を開始 $x_0(t) = A\cos\omega t$

$t = \Delta t$ で $\ell = 1$ の質点が単振動を開始 $x_1(t) = A\cos\omega(t - \Delta t)$

$t = 2\Delta t$ で $\ell = 2$ の質点が単振動を開始 $x_2(t) = A\cos\omega(t - 2\Delta t)$

⋮

◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕



左端からℓ番目の質点までの距離L_ℓ

ℓ番目の質点の変位 $x_\ell(t) = A\cos\omega(t - \ell\Delta t) = A\cos\omega\left(t - \dfrac{\ell\Delta L}{\dfrac{\Delta L}{\Delta t}}\right)$

$$= A\cos\omega\left(t - \frac{L_\ell}{v}\right)$$

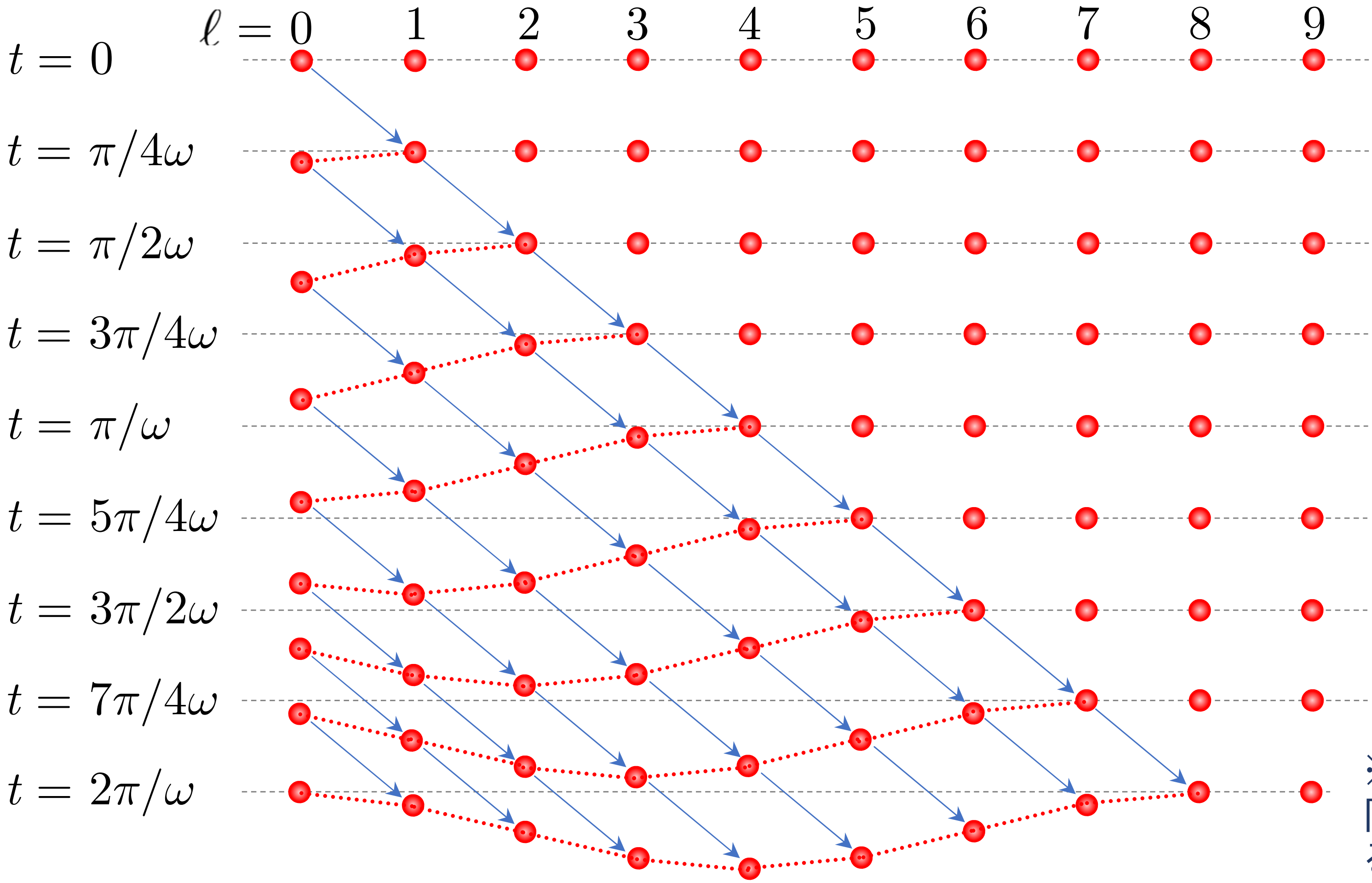
隣の質点に伝わる速さv

演習1-2 上式のグラフを描いて振動が伝わる様子を確かめよう.

■ 第1回「振動」

◆ 単振動〔テキスト pp.1-3〕

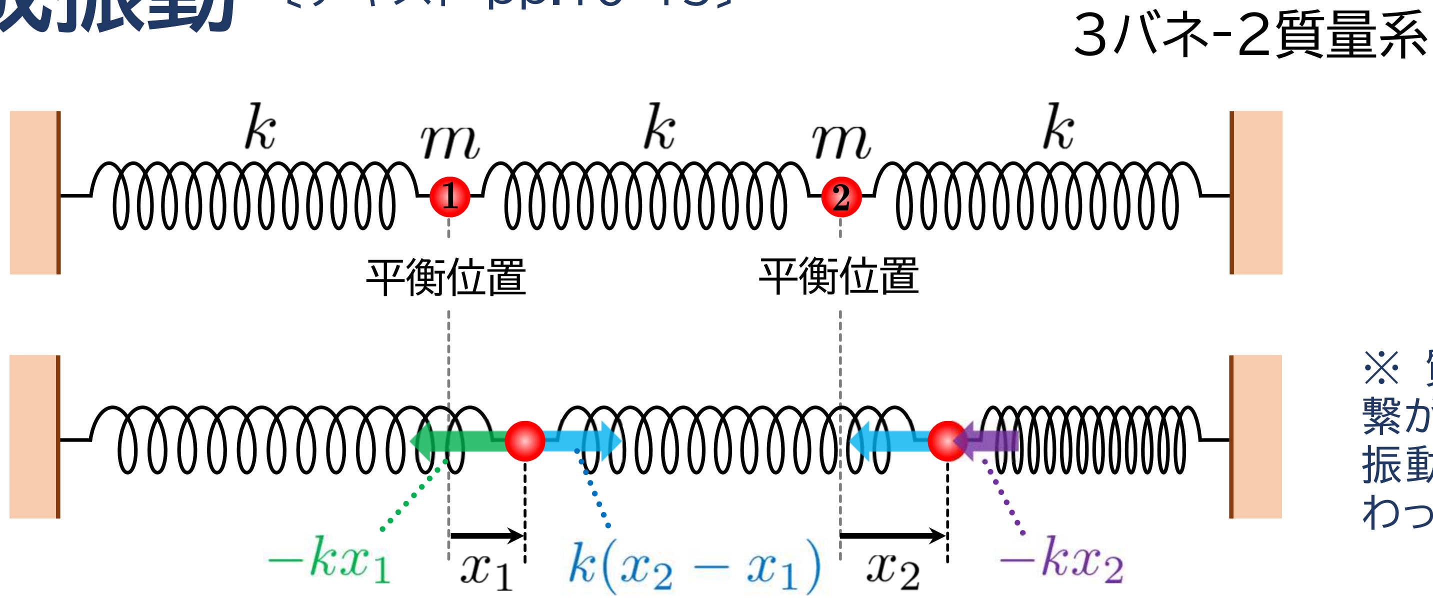
「第1回講座資料」内の「時間差振動のシミュレーション」フォルダをダウンロードし，htmlファイルを実行



※ 今考えている系では質点同士が物理的に繋がっているわけではないが，時間差で振動を開始するという合図（信号）が隣に順々に伝わり，振動が空間を伝わっているように見える．

Point! 振動の空間的な伝わり ＝ “波”

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕



※ 質点同士が物理的に繋がっており，質点の縦振動が順々に空間を伝わっていく．

左のバネの伸び：x_1

真ん中のバネの伸び：$x_2 - x_1$

右のバネの縮み：x_2

2つの質点の運動方程式

$$
\begin{cases}
\text{質点1} \quad m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) & \cdots ① \\
\text{質点2} \quad m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 & \cdots ②
\end{cases}
$$

➡ 定数係数の2階同次連立線形微分方程式

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

※ テキストと解き方が異なるが結果は同じ

$\frac{①+②}{2}$ ➡ $$m\frac{d^2X_1}{dt^2} = -kX_1 \qquad X_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$\frac{①-②}{2}$ ➡ $$m\frac{d^2X_2}{dt^2} = -3kX_2 \qquad X_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$$

X_1 と X_2 について独立な運動方程式

⬇ 上の2つの独立な運動方程式を解くと

基準振動（基準モード）

$$X_1 = A\cos(\omega_1 t + \alpha) \qquad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$ 第1次モード

$$X_2 = B\cos(\omega_2 t + \beta) \qquad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$ 第2次モード

一般解

$$x_1 = X_1 + X_2 = A\cos(\omega_1 t + \alpha) + B\cos(\omega_2 t + \beta)$$

$$x_2 = X_1 - X_2 = A\cos(\omega_1 t + \alpha) - B\cos(\omega_2 t + \beta)$$

基準モードの重ね合わせ（微分方程式の線形性）

演習1-3 この連成振動の解を求めてみよう.

■ 第1回「振動」

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

「第1回講座資料」内の「連成振動のシミュレーション」フォルダをダウンロードし，htmlファイルを実行

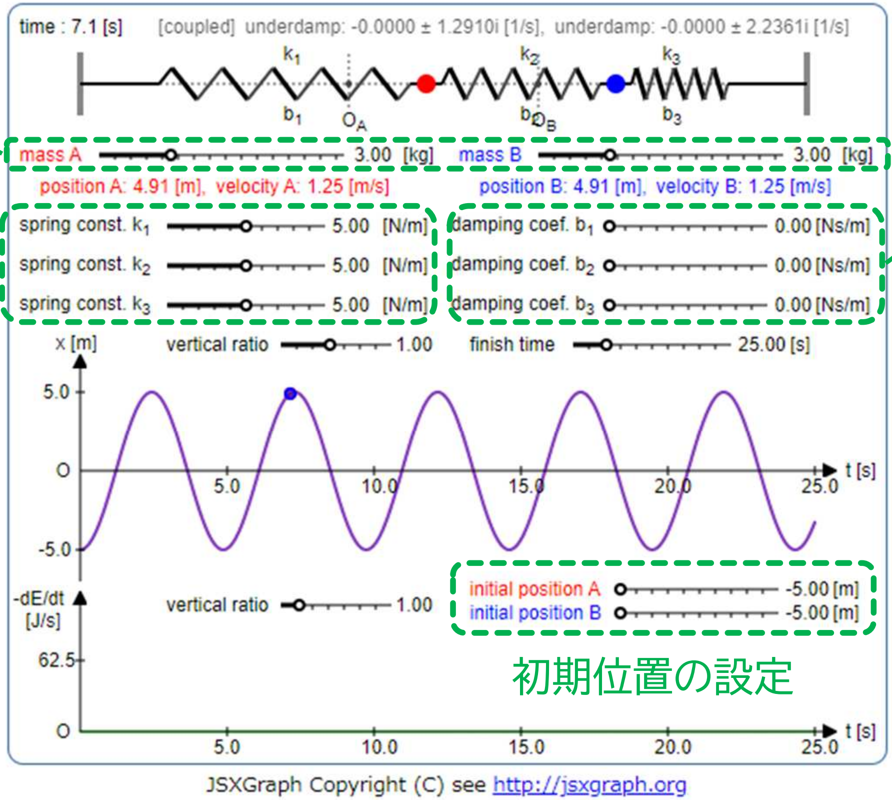
質量の設定

第1次モード

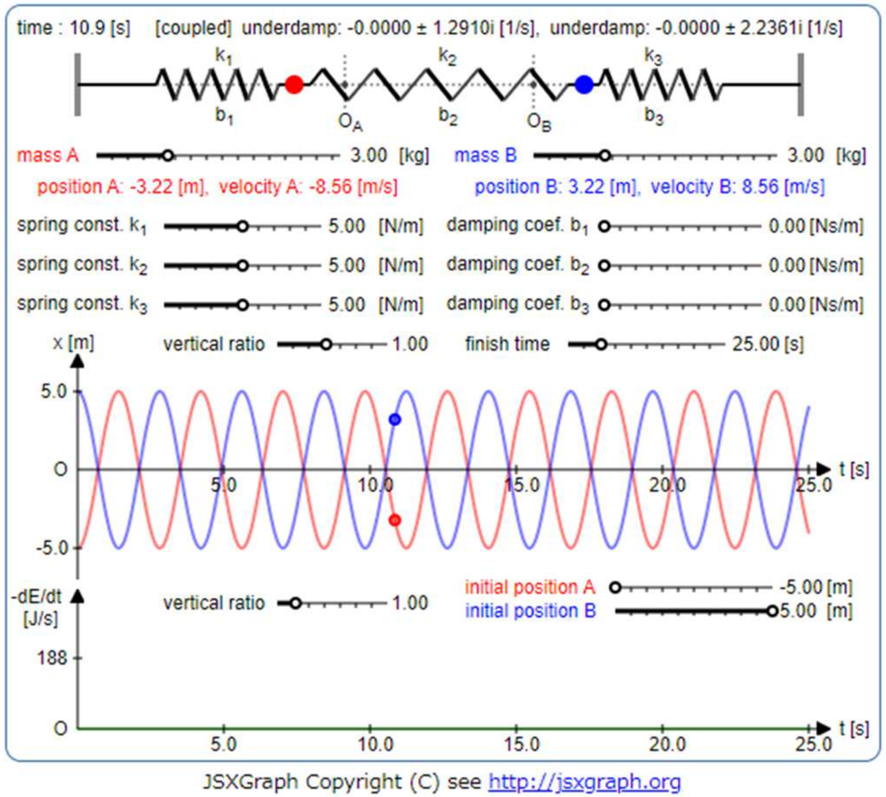
減衰定数の設定

第2次モード

バネ定数の設定



初期位置の設定



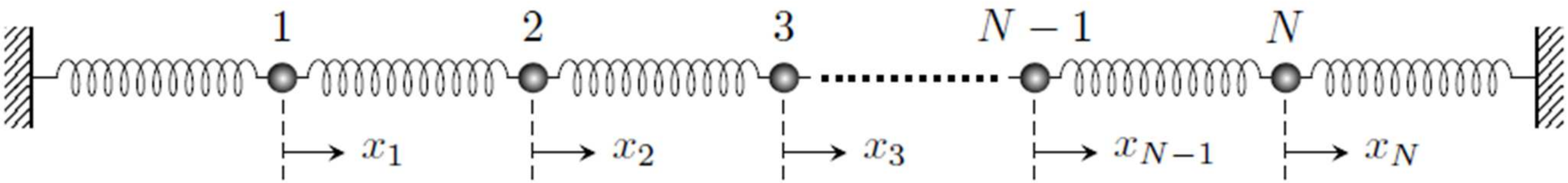
Start the coupled damped oscillation. Initialize the position.

Start the coupled damped oscillation. Initialize the position.

初期条件を適切に設定すると，個々の基準モードを見ることができる．
色々な初期位置に設定して，振動させてみよう！

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

(N+1)バネ-N質量系
(質量 m, バネ定数 k)



ℓ 番目の質点の運動方程式 ➡ 連立線形微分方程式

$$m\frac{d^2x_\ell}{dt^2} = -k(x_\ell - x_{\ell-1}) + k(x_{\ell+1} - x_\ell) \quad \cdots ③ \qquad \ell = 1 \sim N$$

➡ N個の式

境界条件 $x_0 = x_{N+1} = 0$

このN個の連立微分方程式を解くのは一般に難しい！

(2質点系のように容易には解けない)

運動方程式③の解を $x_\ell(t) = A_\ell \cos\omega t$ と仮定し，A_ℓ と ω の満たすべき条件から解を求めてみよう(境界条件より $A_0 = A_{N+1} = 0$).

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

仮定した解 $x_\ell(t) = A_\ell \cos\omega t$ を ③ に代入して整理すると次式を得る.

$A_\ell\,,\omega$ の条件式

$$\boxed{\frac{A_{\ell+1}+A_{\ell-1}}{A_\ell} = \frac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2} \quad \left[\omega_0 = \sqrt{k/m}\right]} \quad \cdots ④$$

④ を満たす A_ℓ を求めるのも難しいので, $A_\ell = C\sin\ell\theta$ (C:任意定数)と仮定すると

$$\boxed{\frac{A_{\ell+1}+A_{\ell-1}}{A_\ell} = 2\cos\theta} \quad \cdots ⑤$$

※ 加法定理を用いて整理

が求まり, また, 境界条件 $A_0 = \boxed{A_{N+1} = 0}$ から θ の条件式が求まる.

$$\boxed{\theta = \frac{n\pi}{N+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)} \quad \cdots ⑥$$

離散的

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

式 ④ ⑤ ⑥ から振幅と角振動数が求まる.　※ nによって値が異なるので添字を付ける.

振幅 $A_{\ell,n} = C_n \sin\left(\dfrac{\ell n\pi}{N+1}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

角振動数 $\omega_n = 2\omega_0 \left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{2(N+1)}\right)\right|$　※ n番目の基準振動の角振動数

… ⑦

境界条件から求まる条件式 ⑥ の整数 n が基準モード番号に対応する.

運動方程式の解

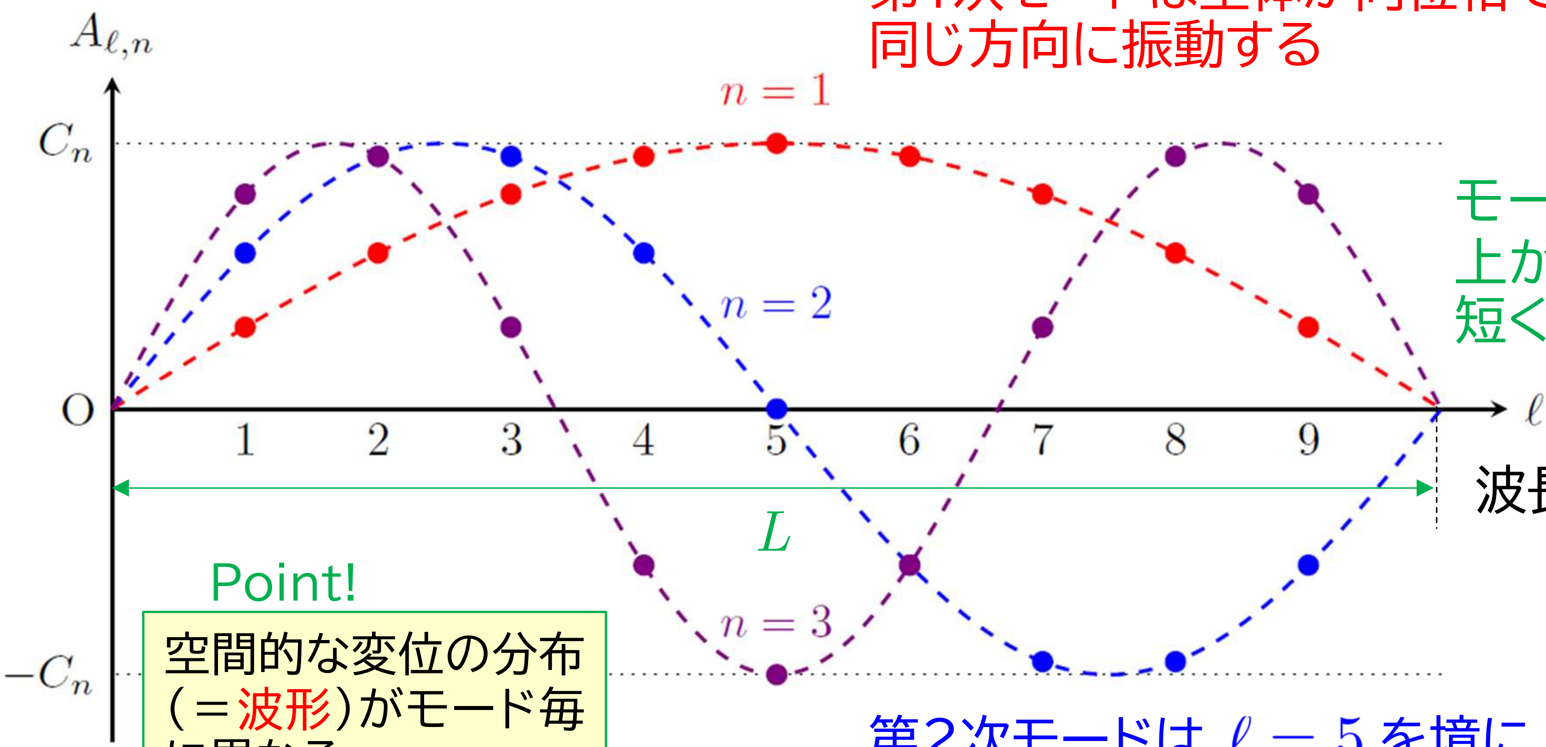
第 n 次モードの変位 $x_{\ell,n}(t) = A_{\ell,n}\cos(\omega_n t + \delta_n)$

演習1-4 式⑦の振幅と角振動数を求めてみよう.

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

振幅 $A_{\ell,n} = C_n \sin\left(\dfrac{\ell n \pi}{N+1}\right)$ の $n\!=\!1\!\sim\!3$ のグラフ($N\!=\!9$)

第1次モードは全体が同位相で
同じ方向に振動する



モードの次数が
上がると波長が
短くなる

波長: $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$

Point!

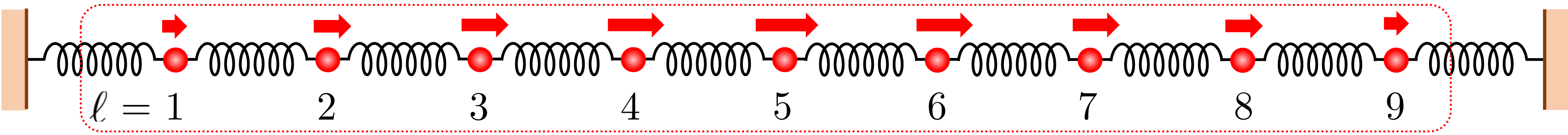
空間的な変位の分布
(＝波形)がモード毎
に異なる.

第2次モードは $\ell = 5$ を境に
逆位相で振動する

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

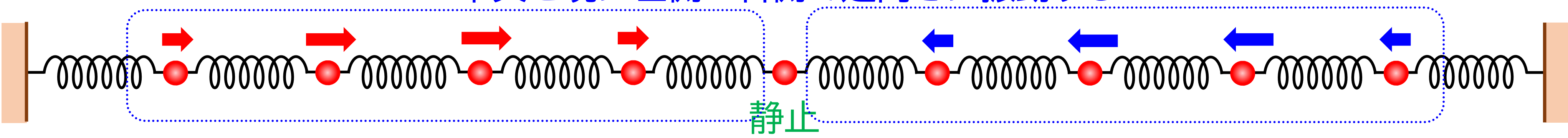
第1次モード $n = 1$

全体が同位相で同じ方向に振動する



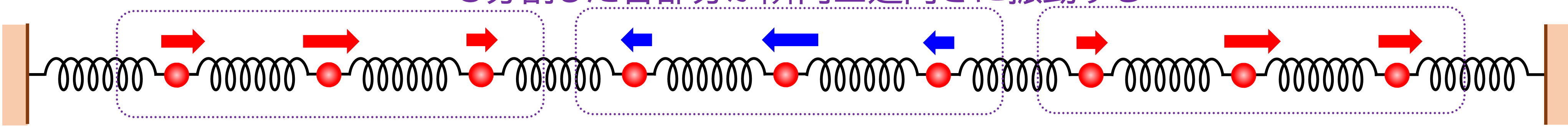
第2次モード $n = 2$

中央を境に左側と右側で逆向きに振動する



第3次モード $n = 3$

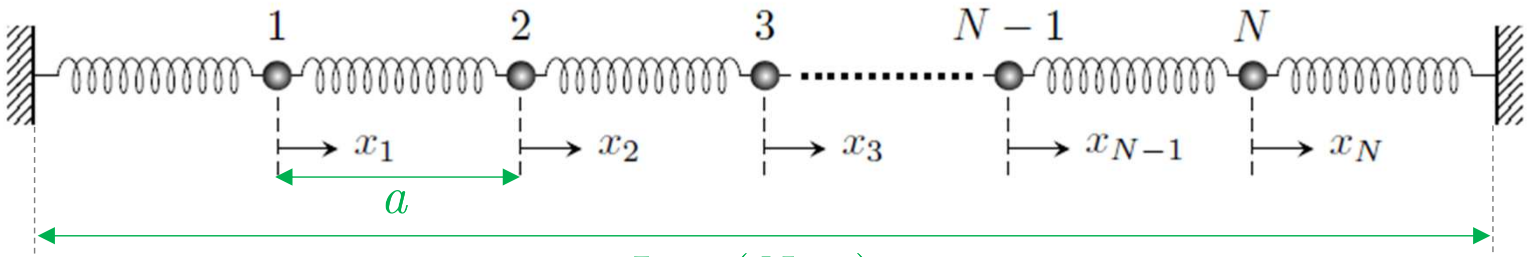
3分割した各部分が隣同士逆向きに振動する



⋮

■ 第1回「振動」

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕



$L = (N+1)a$

ℓ 番目の質点の位置 X_ℓ

振幅の位相: $\ell\theta = \dfrac{\ell n\pi}{N+1} = \dfrac{\pi}{(N+1)a} n \cdot \ell a = \dfrac{\pi}{L} n \cdot \ell a = \kappa_n X_\ell \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

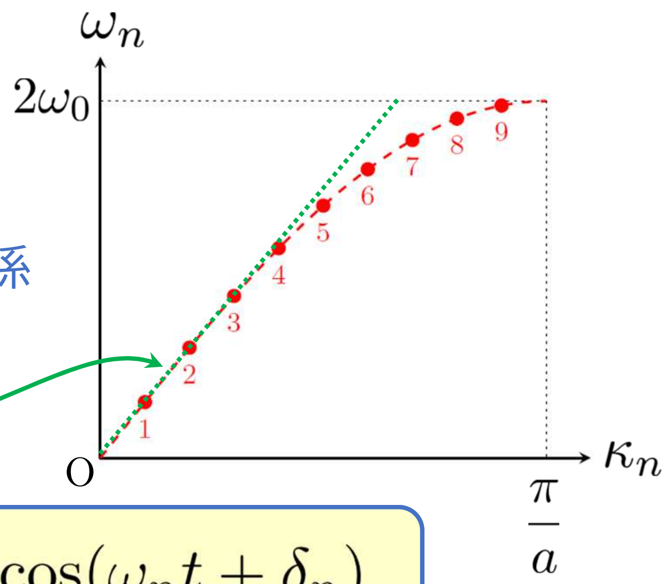
波数 κ_n

波数: $\kappa_n = \dfrac{\pi}{L} n = \dfrac{2\pi}{2L/n} = \dfrac{2\pi}{\lambda_n}$

角振動数: $\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin\left(\dfrac{\kappa_n a}{2}\right) \right|$ 角振動数と波数の関係

分散関係

〔 n が小さい範囲 $\omega_n \approx \omega_0 \kappa_n a$ 線形近似 〕



第 n 次モードの変位 $x_{\ell,n}(t) = C_n \sin(\kappa_n X_\ell) \cos(\omega_n t + \delta_n)$

◆ 連成振動 〔テキスト pp.10-15〕

一般解 $$x_\ell(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \sin(\kappa_n X_\ell) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

基準モードの重ね合わせ(線形性)

重要 Point!

◆ **境界条件により**

離散的な角振動数をもつ基準振動(基準モード)のみが許される.

◆ **運動方程式の線形性により**

運動方程式の解は基準振動(基準モード)の重ね合わせで表される.

まとめ

フックの法則 $F = -kx$ 変位 xが小さいときに成り立つ線形近似

単振動

線形の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 一般解 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta_0)$

固有角振動数 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 復元力と質量を表すパラメータの比

連成振動

線形の運動方程式 $m\dfrac{d^2x_\ell}{dt^2} = -k(x_\ell - x_{\ell-1}) + k(x_{\ell+1} - x_\ell)$

→ 解は境界条件により許される波数・角振動数をもつ基準モード

基準モードの波数 $\kappa_n = \dfrac{\pi}{L}n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 角振動数 $\omega_n \approx \omega_0 \kappa_n a$

線形近似

→ 一般解は基準モードの重ね合わせ