数理リテラシー特別講座

Mathematical Essence of Wave

波動の数理

第4回
「音波」

“音＝空気中を伝わる縦波”

◆ 音波の方程式

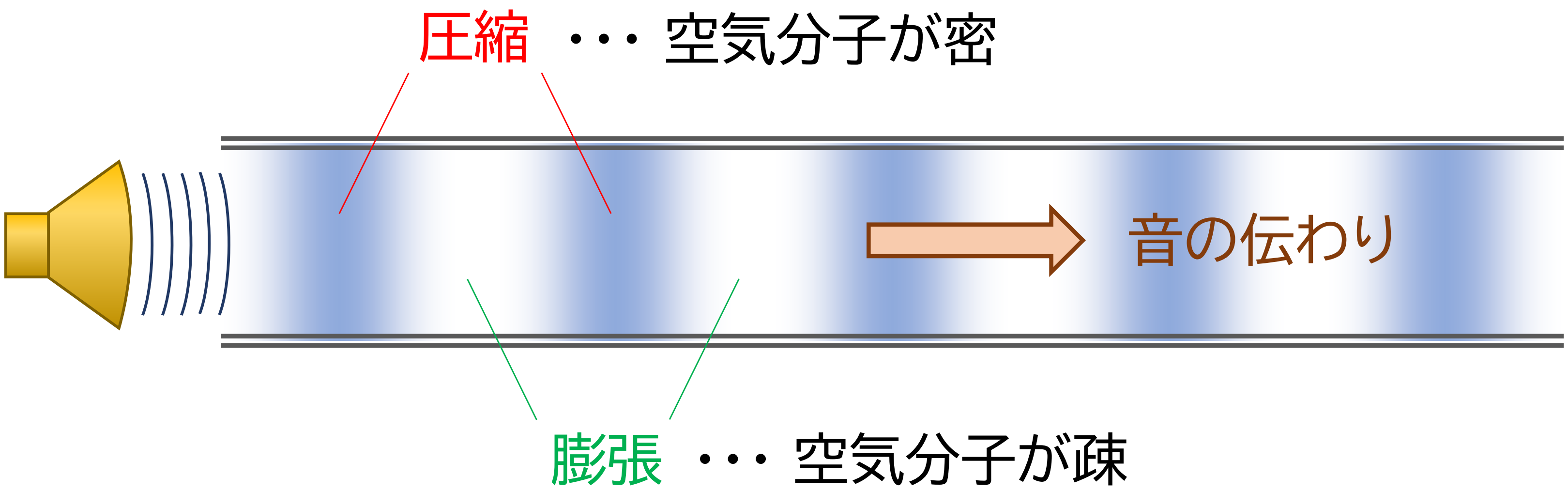
空気は弾性体とみなすことができ，気体の断熱変化の関係式と空気の微小部分の運動方程式を結び付けて，音波に対する波動方程式が導出できることを理解しよう．

◆ 気柱の定在波

管の一端を閉じた開管と両端の開いた開管のそれぞれにおいて，音波の固定端反射と自由端反射が起こり，基準モード（定在波）が生じることを理解しよう．

◆ 音波の方程式 〔テキスト pp.41-44〕

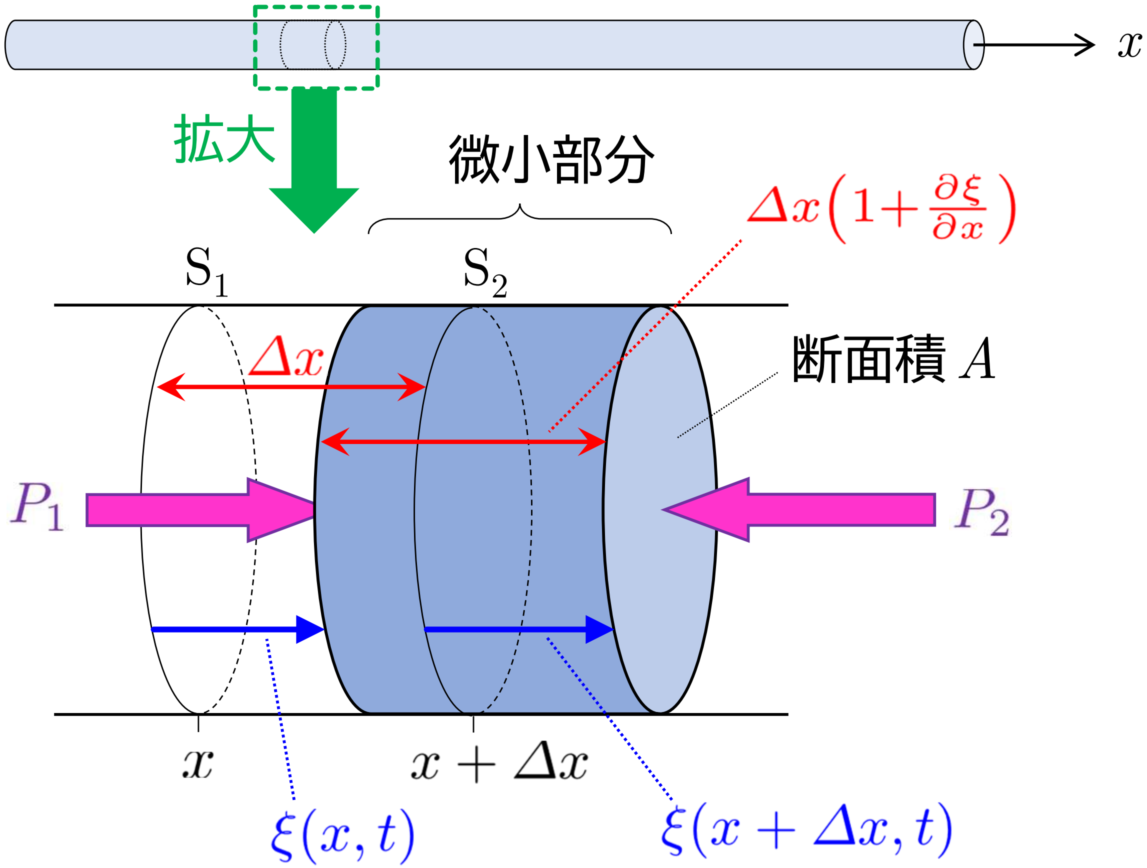
音を鳴らすと, その周りの空気が圧縮と膨張をくり返し, その振動が**縦波(疎密波)**となって空気中を伝わる



空気分子が振動することにより, 圧縮(空気分子が密な部分)と膨張(空気分子が疎の部分)が交互に起き, 体積・圧力・温度の変動が空気中を伝わる.

◆ 音波の方程式 〔テキスト pp.41-44〕

細長い管内の気体(密度 ρ)中を伝わる1次元の音波を考える.



管内の空気は一種の弾性体の棒と考えることができる.

応力を気体の圧力に置き換え

第３回講座で学習した「弾性棒を伝わる縦波」の議論が適用できる.

微小部分の体積 $V = A\Delta x$　微小部分の質量 $m = \rho V = \rho A\Delta x$

◆ 音波の方程式　〔テキスト pp.41-44〕

微小部分についてのニュートンの運動方程式

- 質量: $\Delta m \approx \rho A \Delta x$ （ρの変化, 変位ξは十分小さいとする）
- 加速度: $\dfrac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$
- 作用する力: $F = (P_1 - P_2)A$

運動方程式

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2)A \cdots ①$$

気体の断熱変化の関係式

音波による圧縮と膨張は熱の移動が無視できるほど素早く起こる.

断熱変化

断熱変化における関係式　$\boxed{PV^\gamma = 一定}$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

C_P: 定圧比熱

C_V: 定積比熱

◆ 音波の方程式 〔テキスト pp.41-44〕

気体の断熱変化の関係式

$$PV^\gamma = \text{一定} \xrightarrow{V\text{に関して微分}} \frac{dP}{dV}V^\gamma + P\cdot\gamma V^{\gamma-1} = 0 \quad V^{\gamma-1}\text{で割る}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{-\frac{dP}{dV}V}}_{\text{体積弾性率 } K} = \gamma P \quad \cdots ②$$

式②の意味

音波は気体の圧力・体積に<u>微小な変動</u>を引き起こす.　$\Delta P,\ \Delta V$

その変動は断熱的であり

$$\Delta P \approx -K\frac{\Delta V}{V} \quad \cdots ③$$

という関係がある.

一方, 図より音波による体積変化は

$$\Delta V = A\left\{\xi(x+\Delta x, t) - \xi(x,t)\right\}$$

$$\approx A\Delta x\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = V\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \quad \cdots ④$$

◆ 音波の方程式 〔テキスト pp.41-44〕

式④ を 式③ に代入すると

$$\Delta P(x,t) = -K\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$$ 圧力の変動は x, t の関数

S_1 にかかる圧力 $P_1 = P + \Delta P(x,t)$

S_2 にかかる圧力 $P_2 = P + \Delta P(x+\Delta x,t)$

➡ $$P_1 - P_2 = \Delta P(x,t) - \Delta P(x+\Delta x, t)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\Delta P(x,t)\cdot \Delta x = K\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$$

音波の速さ

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

式① より $\rho A \Delta x \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = K\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x A$ ➡

音波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

◆ 音波の方程式 〔テキスト pp.41-44〕

音波の速さ ＝ “音速”

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{\rho V}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

絶対温度 Tの関数

断熱変化の体積弾性率 $K = \gamma P$

状態方程式 $PV = nRT$

モル質量 $M = \dfrac{\rho V}{n}$

空気の0℃における密度 $\rho = 1.293\,\mathrm{kg/m^3}$, $\gamma = 1.402$, 1気圧 $P = 1.013 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$

$\sim 273.15\ \mathrm{K}$

$$v(273.15) = \sqrt{\frac{1.402 \cdot 1.013 \times 10^5}{1.293}} \sim 331.4\ \mathrm{m/s}$$

0℃の音速

◆ 気柱の定在波 〔テキスト pp.44-46〕

細長い管内の気体

管楽器は気柱の**基準モード**により音を出している.

閉管 ・・・管の一端が閉じている

$x=0$ 固定端 定在波の節

$x=L$ 自由端 定在波の腹

境界条件

$$\xi(0,t)=0$$

固定端

$$\frac{\partial \xi(L,t)}{\partial x}=0$$

自由端

開管 ・・・管の両端が開いている

$x=0$ 自由端 定在波の腹

$x=L$ 自由端 定在波の腹

境界条件

$$\frac{\partial \xi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial \xi(L,t)}{\partial x}=0$$

自由端

■ 第4回「音波」

◆ 気柱の定在波 〔テキスト pp.44-46〕

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{K}{\rho}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ 密度 ρ, 体積弾性率 K の気柱

解を $\xi(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)$ とおき, $v = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ とする.

閉管の場合

境界条件 $\xi(0,t) = 0$ より

$$\xi(0,t) = A\sin(-\omega t) + B\sin\omega t = (-A+B)\sin\omega t = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow \xi(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t) = 2A\sin kx\cos\omega t$$

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 2Ak\cos kx\cos\omega t$$

基準モードの波数

波長 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{4L}{n}$

境界条件 $\dfrac{\partial \xi(L,t)}{\partial x} = 0$ より $\cos kL = 0 \Rightarrow$ $k = \dfrac{\pi}{2L}n \quad (n = 1, 3, 5, \cdots)$

第 n 次モードの定在波 $\xi_n(x,t) = A_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2L}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}\,t\right)$ n: 奇数

◆ 気柱の定在波 〔テキスト pp.44-46〕

開管の場合

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = Ak\cos(kx-\omega t) + Bk\cos(kx+\omega t)$$

境界条件 $\dfrac{\partial \xi(0,t)}{\partial x} = 0$ より $\dfrac{\partial \xi(0,t)}{\partial x} = (A+B)k\cos\omega t = 0$ ➡ $B=-A$

➡ $\xi(x,t) = A\sin(kx-\omega t) - A\sin(kx+\omega t) = -2A\cos kx\sin\omega t$

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 2Ak\sin kx\sin\omega t$$

波長 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2L}{n}$

基準モードの波数

境界条件 $\dfrac{\partial \xi(L,t)}{\partial x} = 0$ より $\sin kL = 0$ ➡ $\boxed{k = \dfrac{\pi}{L}n \qquad (n=1,2,3\cdots)}$

第 n 次モードの定在波 $\xi_n(x,t) = A_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}t\right)$ n：整数

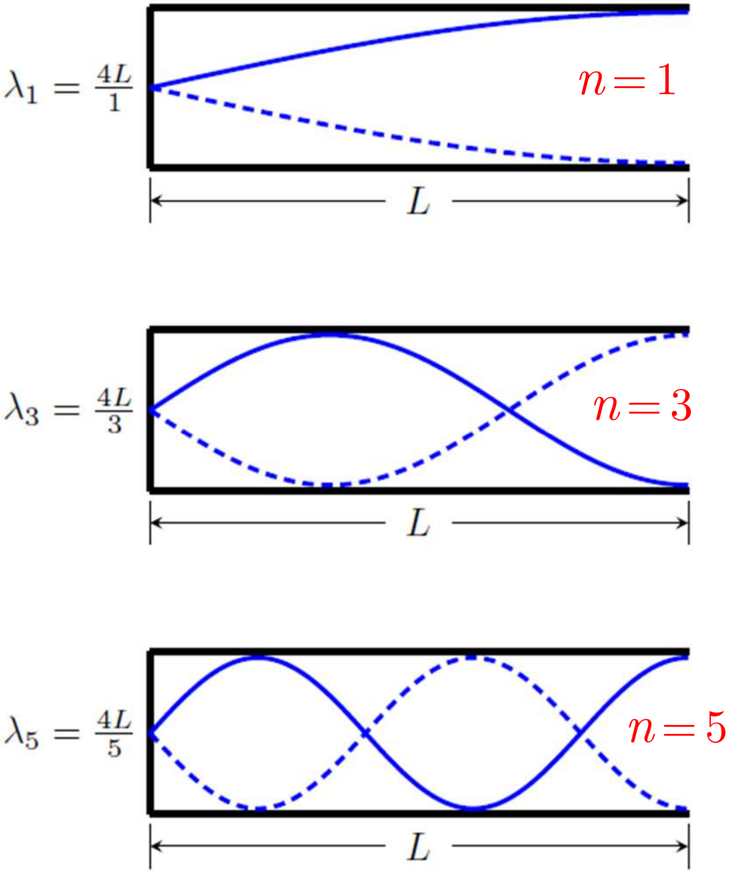
◆ 気柱の定在波 〔テキスト pp.44-46〕

※ 下図は縦波の横波表現

閉管の気柱

$$\xi_n(x,t) = A_n \boxed{\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}\,t\right)$$

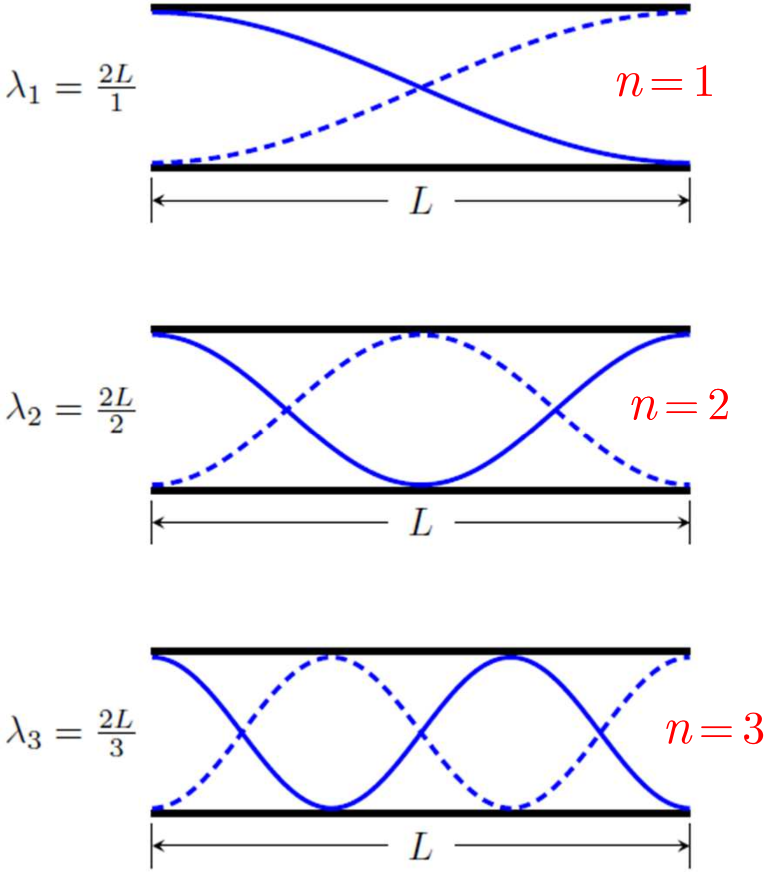
この関数を描いたもの



開管の気柱

$$\xi_n(x,t) = A_n \boxed{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}\,t\right)$$

この関数を描いたもの



まとめ

音波＝空気(気体)を媒質として伝わる**縦波**

※ 広義には, 液体や固体でも伝わる縦波も音波

空気は一種の弾性体 ➡ 音波は弾性体の波動方程式に従う

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

音速 $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$ 絶対温度 Tの関数

復元力のパラメータ(体積弾性率K)と
質量のパラメータ(密度)の比の平方根

細長い管内の気体(気柱)の振動

境界条件(閉管・開管)により定まる波数・波長・角振動数の基準モードが存在

➡ 固定端反射・自由端反射により**定在波**が生じる.

■「波動の数理」

終わりに

弾性波・音・光(電磁波)・地震・量子など

媒質の種類により**様々な波**が存在するが, 縦波にせよ横波にせよ

多くの場合, これらの波には共通の **数学的表現** が適用できる.

$$\boxed{\text{波動方程式} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

線形方程式のため扱いやすい ⇒ "重ね合わせの原理"

※ 非線形の波動方程式も存在する.

一般に解は基準モードの重ね合わせで表現可能！

フーリエ級数展開

さらに自学自習して自身の専門分野に活かしていってもらいたい.