数理リテラシー特別講座

Mathematical Essence of Wave

波動の数理

第2回
「波の性質」

■ 第2回「波の性質」

“波＝媒質の振動の空間的な伝わり”

◆ 波の表し方

物理量の時間的・空間的な変化は，時刻と位置の関数で表されること，特に波形が時間的に変化しない場合，波は関数の平行移動で表されることを理解しよう．

◆ 重ね合わせの原理

（線形方程式に従う）複数の波の合成波は，それぞれの波の単なる足し合わせであり，互いに振動数・波長を乱さない（波の独立性）．

◆ ホイヘンスの原理

波面のあらゆる点からの要素波の重ね合わせで，波の伝わりや反射・屈折の現象を統一的に説明できることを理解しよう．

■ 第2回「波の性質」

波とは

何らかの物理量の**振動**的変化が次々と周囲に伝わる現象

時間的・空間的な変化

振動を伝える物質 ＝ 媒質

媒質は平衡位置を中心に振動するだけで
それ自体が移動するわけではない！

波は身の回りにあふれている

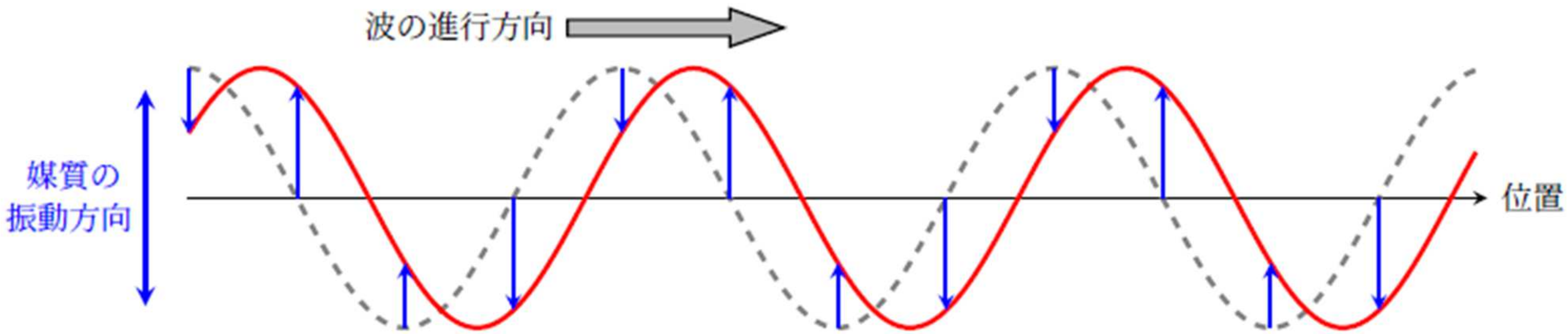
水面波，音波，光（電磁波），地震波，…

横波＋縦波　縦波　横波　横波・縦波

■ 第2回「波の性質」

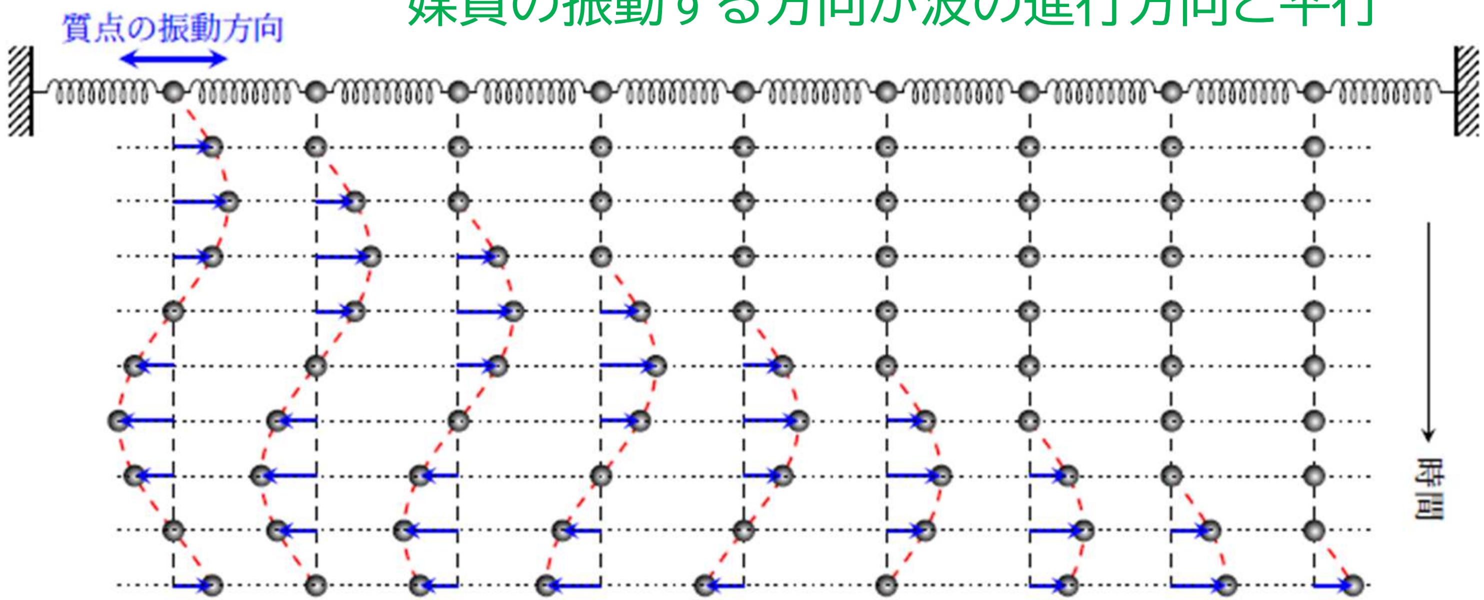
横波

媒質の振動する方向と垂直な方向に伝わる波



縦波

媒質の振動する方向が波の進行方向と平行



■ 第2回「波の性質」

◆ 波の表し方 〔テキスト pp.17-19〕

→ 時間的・空間的な変化

$\xi(x,t)$ は何らかの物理量を表すが，具体的には媒質の位置 x での変位などを考えればよい．

波を表す関数 $\xi(x,t)$ は位置 x(1次元)と時刻 t の関数

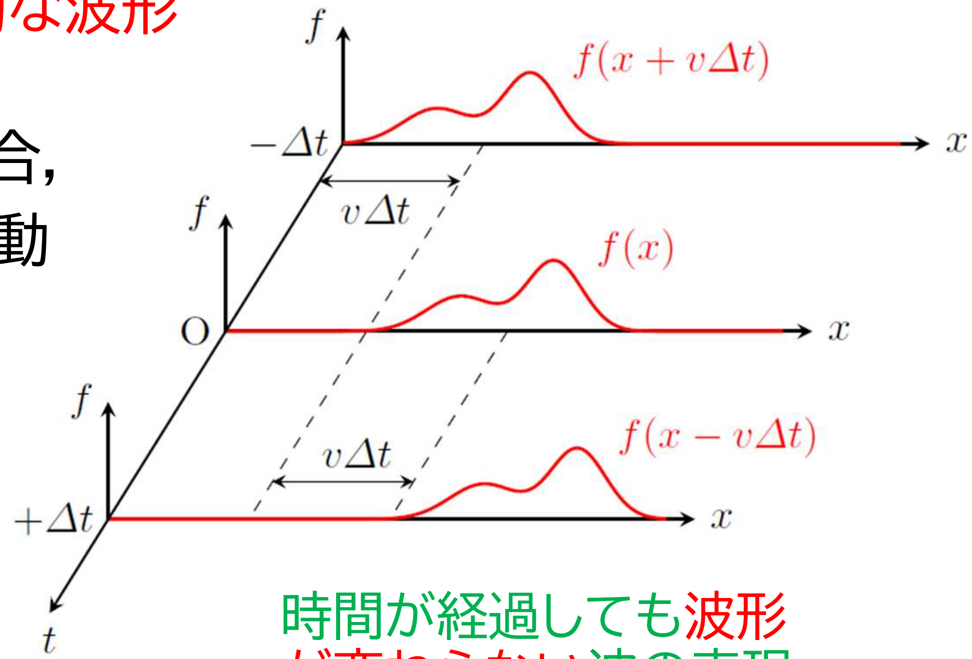
$$\xi(x,0) = \underline{f(x)}$$

は位置　$t=0$ での空間的な波形

波形が変わらず一定の速さ v で進む場合，
Δt 後の波は x 方向に $v\Delta t$ だけ平行移動

$+x$ 方向に進む ⇒ $f(x - v\Delta t)$

$-x$ 方向に進む ⇒ $f(x + v\Delta t)$



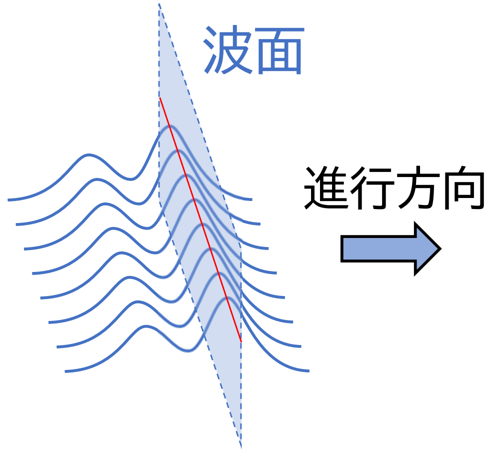
時間が経過しても波形が変わらない波の表現

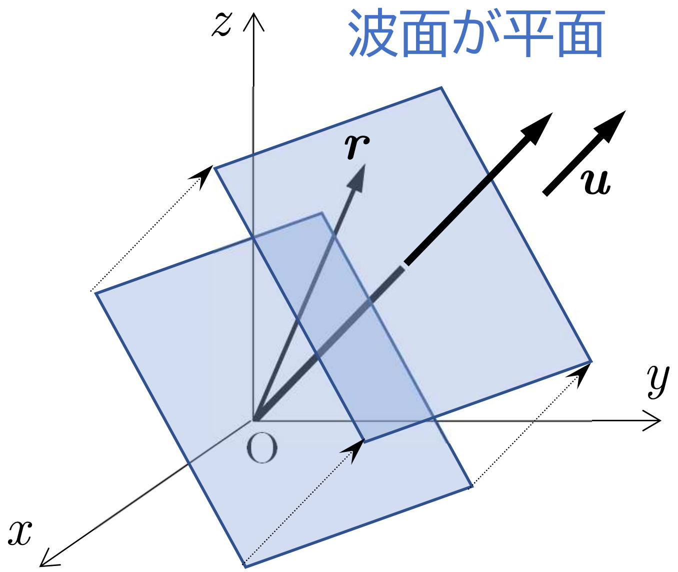
◆ 波の表し方 〔テキスト pp.17-19〕

(1) 平面波

波面が平面となって伝わる波

└ 位相(媒質の変位)の等しい点の集合



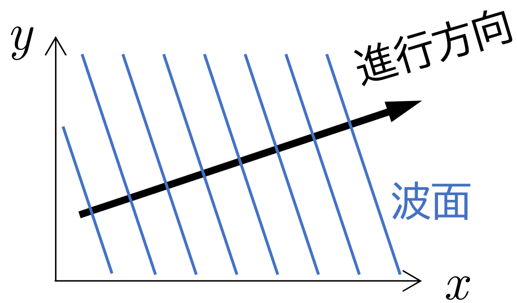


平面波の表現

$$f(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} \mp v\Delta t)$$

$\boldsymbol{u}$: 波の進行方向の単位ベクトル

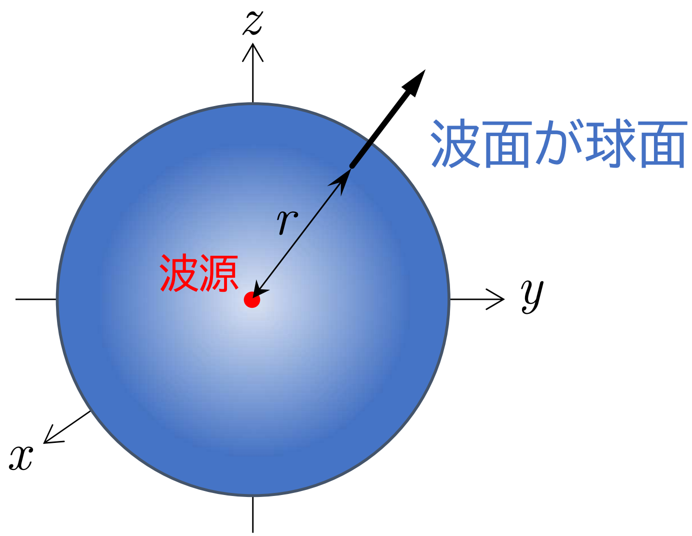
※ 2次元の平面波では，波面が直線として表される．



◆ 波の表し方 〔テキスト pp.17-19〕

（2）球面波

1点の波源から発生して伝わり，
波面が球面となる波



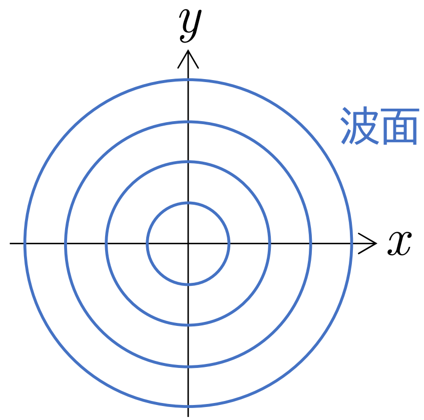
球面波の表現

$$\frac{1}{r}f(r \mp v\Delta t)$$

r：点波源からの距離

点波源からの距離が大きくなるにしたがって $1/r$ で減衰

※ 2次元の球面波では波面が円として表される．



◆ 波の表し方〔テキスト pp.17-19〕

具体的な波形の関数として**正弦波**を考える.

(1) 平面波

$$f(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}\mp vt) = A\sin[\,k(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}\mp vt)+\delta\,]$$

$$= A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\mp\omega t+\delta)$$

波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

波数ベクトル $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{u}$

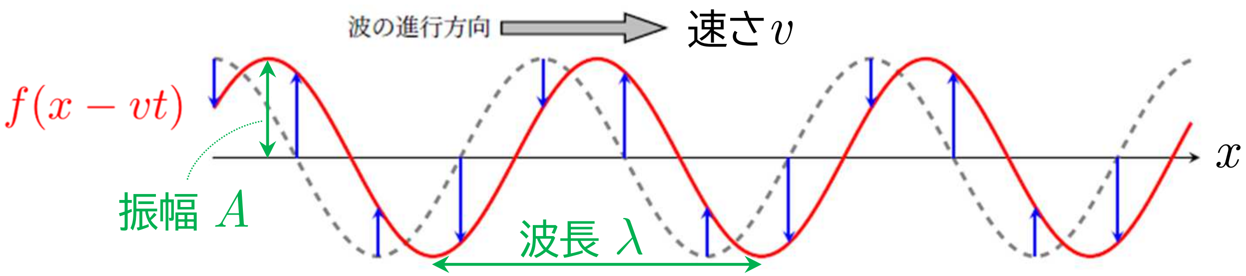
角振動数 $\omega = kv$

(2) 球面波

$$\frac{1}{r}f(r\mp vt) = \frac{A}{r}\sin[\,k(r\mp vt)+\delta\,] = \frac{A}{r}\sin(kr\mp\omega t+\delta)$$

◆ 波の表し方 〔テキスト pp.17-19〕

講座第3回以降では主に1次元の**正弦波**を考える.



※ 1次元なので波面という概念自体存在しないが, 分類でいうと平面波

$$f(x \mp vt) = A\sin[\,k(x \mp vt) + \delta\,] = A\sin(kx \mp \omega t + \delta)$$

表現の仕方は様々

$$= A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right]$$

$$= A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \nu t\right) + \delta\right]$$

$$= A\sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} \mp t\right) + \delta\right]$$

波数 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

角振動数 $\omega = kv$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

振動数 $\nu = \dfrac{1}{T}$

◆ 重ね合わせの原理 〔テキスト pp.20-23〕

線形微分方程式の解を f_1 , f_2 とすると, その線形結合 $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ (C_1, C_2 :結合定数) も元の線形微分方程式の解となる.

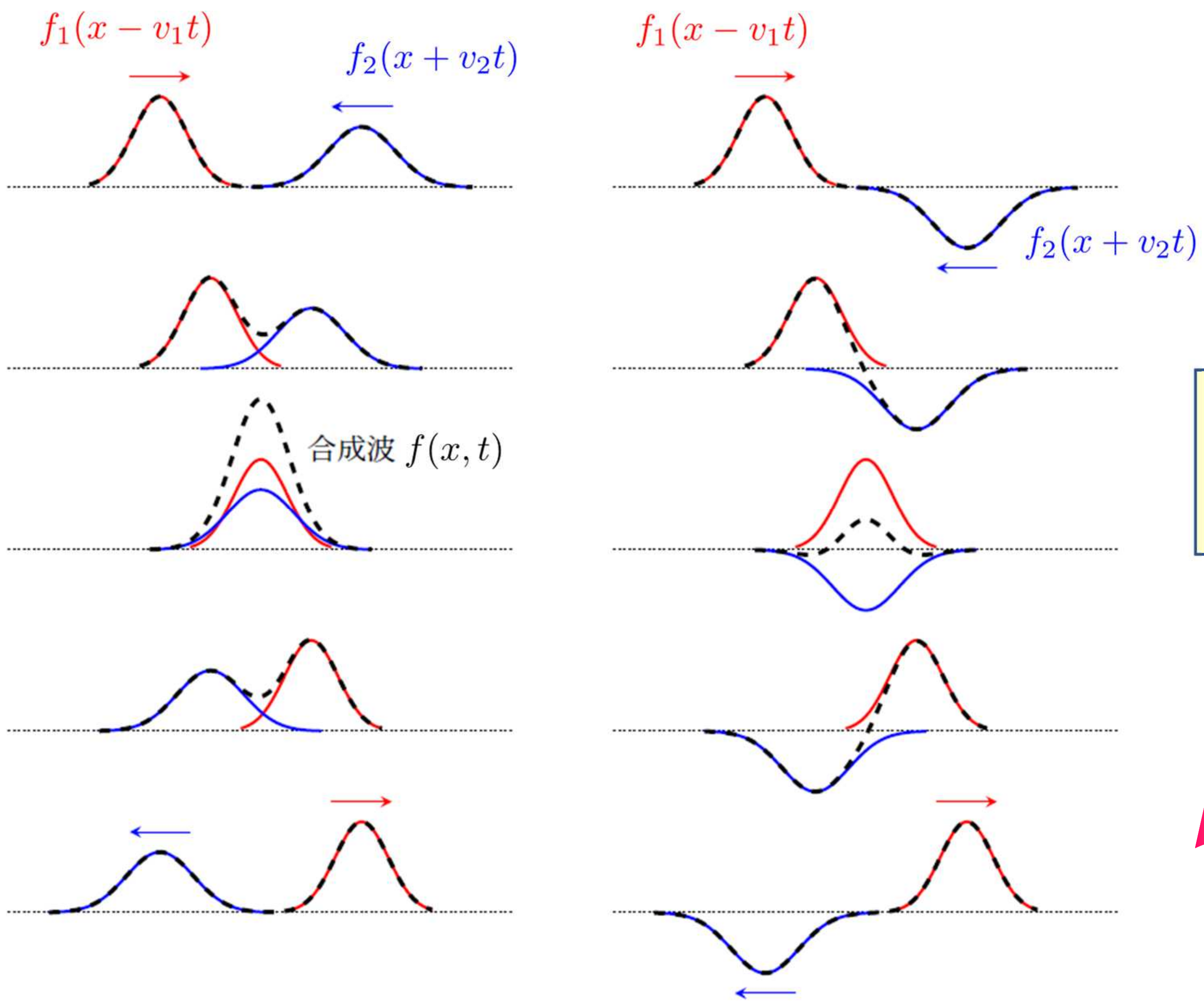
波の従う方程式が線形の場合, 複数の波が発生したときの波はそれらの足し合わせで表せ, 互いに振動数・波長を乱さない(波の独立性).

合成波

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= f_1(x,t) + f_2(x,t) + f_3(x,t) + \cdots \\
&= \sum_i f_i(x,t)
\end{aligned}
$$

フーリエ解析においても重要な概念

◆ 重ね合わせの原理 〔テキスト pp.20-23〕



第2回講義資料フォルダ内にある動画

重ね合わせ1.mp4
重ね合わせ2.mp4

を参照

合成波 $f(x,t)$

$$= f_1(x - v_1 t) + f_2(x + v_2 t)$$

図の場合，合成波は時間の経過に伴い波形が変わる．

演習2-1

2つの波の進行する様子，及び合成波を描いてみよう．

◆ 重ね合わせの原理 〔テキスト pp.20-23〕

2つの正弦波の重ね合わせ

$$\begin{cases} f_1(x,t) = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1) \\ f_2(x,t) = A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

➡ $f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t) = \underline{A(x,t)} \sin(kx - \omega t + \delta)$

動画「重ね合わせ3.mp4」参照　　x,tに依存し, 一般に複雑

◆ $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ の場合, 単なる三角関数の合成

➡ $f(x,t) = A_1 \sin(kx - \omega t + \delta_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \delta_2)$

$$= A_1\{\sin(kx - \omega t)\cos\delta_1 + \cos(kx - \omega t)\sin\delta_1\}$$
$$+ A_2\{\sin(kx - \omega t)\cos\delta_2 + \cos(kx - \omega t)\sin\delta_2\}$$
$$= A\sin(kx - \omega t + \delta)$$

動画「重ね合わせ4.mp4」参照

演習2-2 左式を導出してみよう.

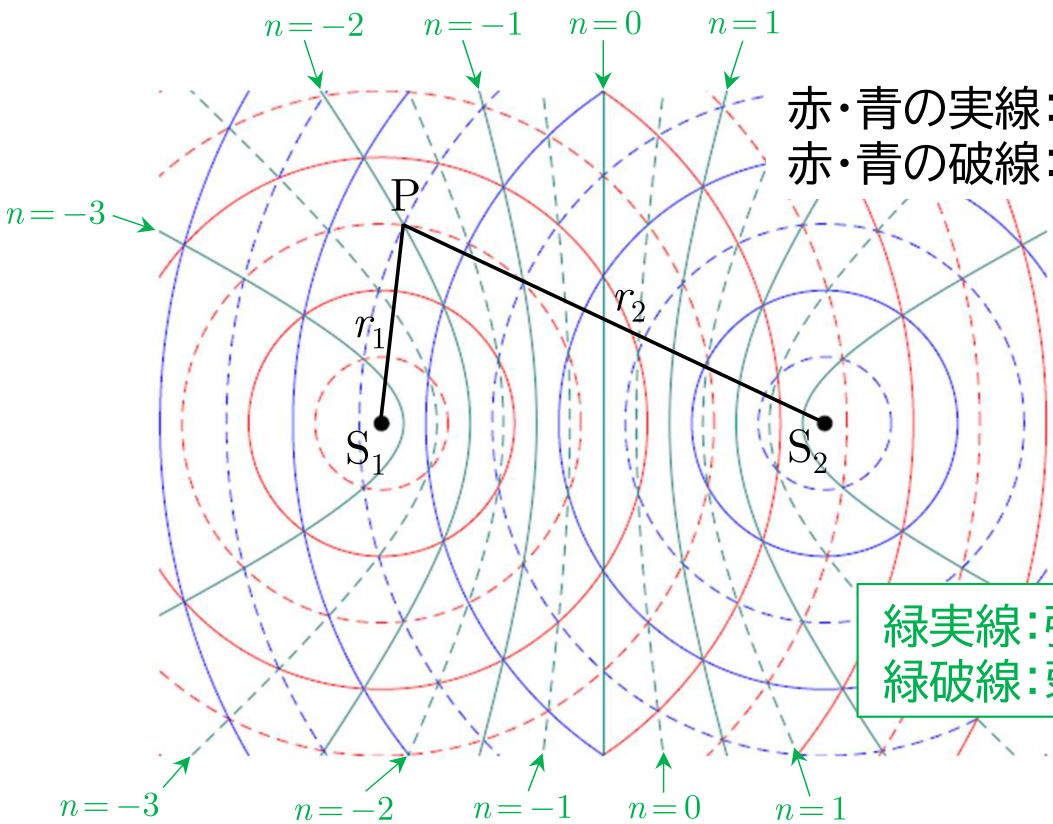
◆ 重ね合わせの原理 〔テキスト pp.20-23〕

干渉 :2つの球面波(正弦波型)の重ね合わせ

点波源S_1, S_2から点Pまでの距離 r_1, r_2

$$\begin{cases} \text{強め合う点:} & r_1 - r_2 = n\lambda \\ \text{弱め合う点:} & r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \end{cases} \quad (\text{整数 } n)$$

波長



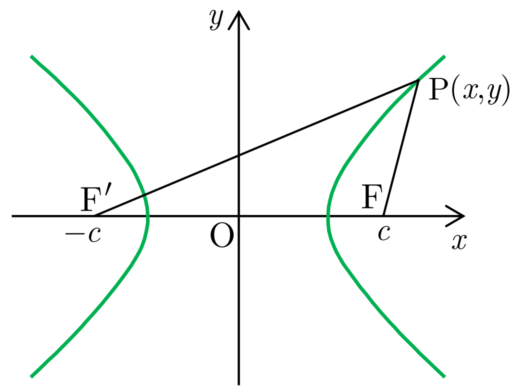
赤・青の実線:波の山の波面
赤・青の破線:波の谷の波面

双曲線を形成

緑実線:強め合う点の集合
緑破線:弱め合う点の集合

【双曲線の定義】

焦点 F, F′からの距離の差が等しい点 P の集合



$$\mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = \pm 2a \ (\text{一定})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

◆ 重ね合わせの原理 〔テキスト pp.20-23〕

干渉 :2つの球面波(正弦波型)の重ね合わせ

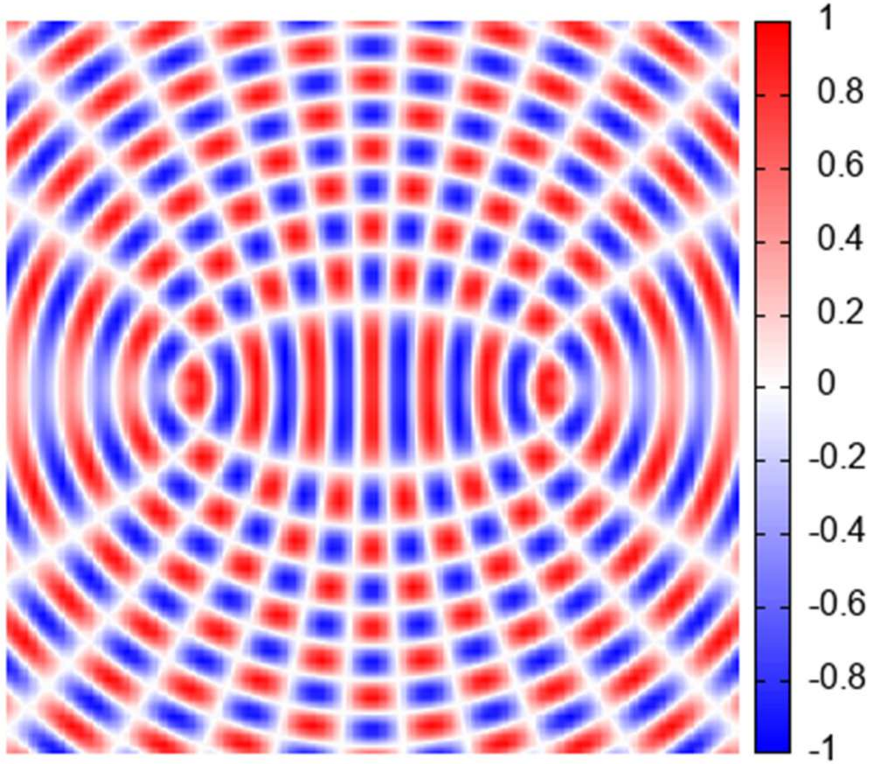
点波源S_1, S_2から点Pまでの距離 r_1, r_2

波長

強め合う点: $r_1 - r_2 = n\lambda$

弱め合う点: $r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$

(整数 n)



2つの球面波の合成波の変位をカラーマップで表した図

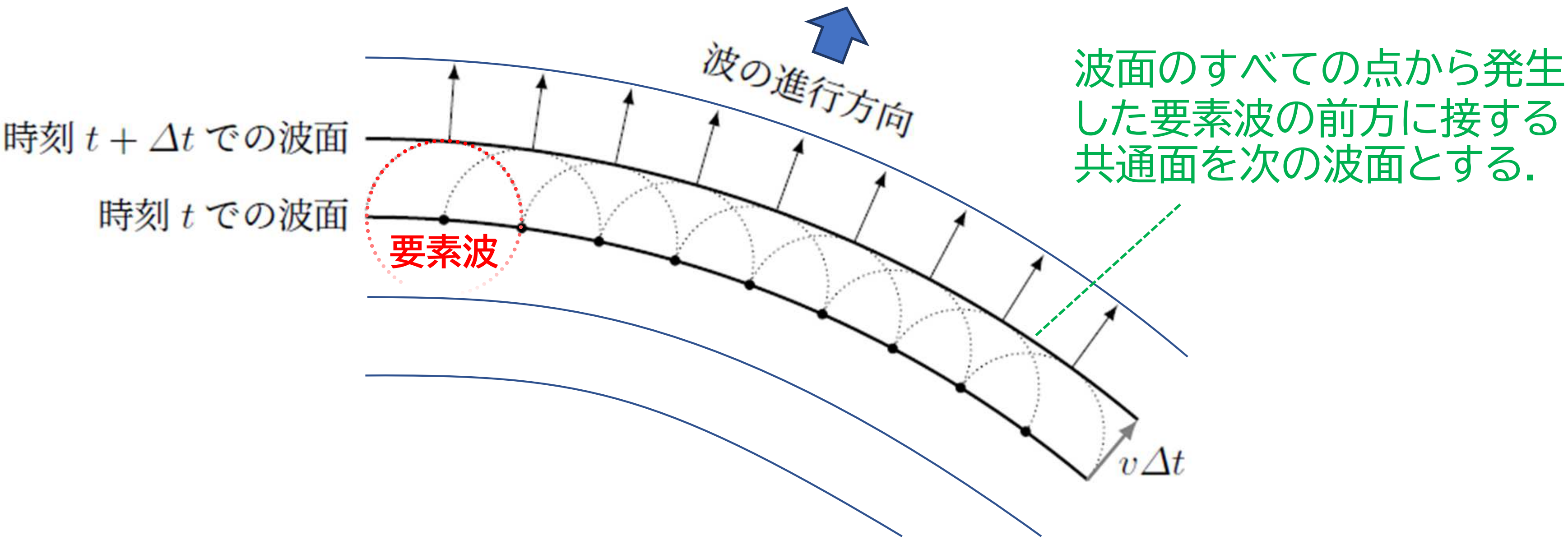
動画「干渉.mp4」参照

変位がゼロの点が白で表される. 白い双曲線は2つの球面波が干渉して弱め合っている点の集合を表している.

◆ 波の反射・屈折〔テキスト pp.23-26〕

ホイヘンスの原理

1. ある瞬間の波面上のすべての点からは, その点を波源として, 到達した波と同じ振動数・速さの球面波(**要素波**)が発生する.
2. 要素波同士が干渉し, 波の進む前方に共通に接する面ができ, それが次の瞬間の波面として観測される.

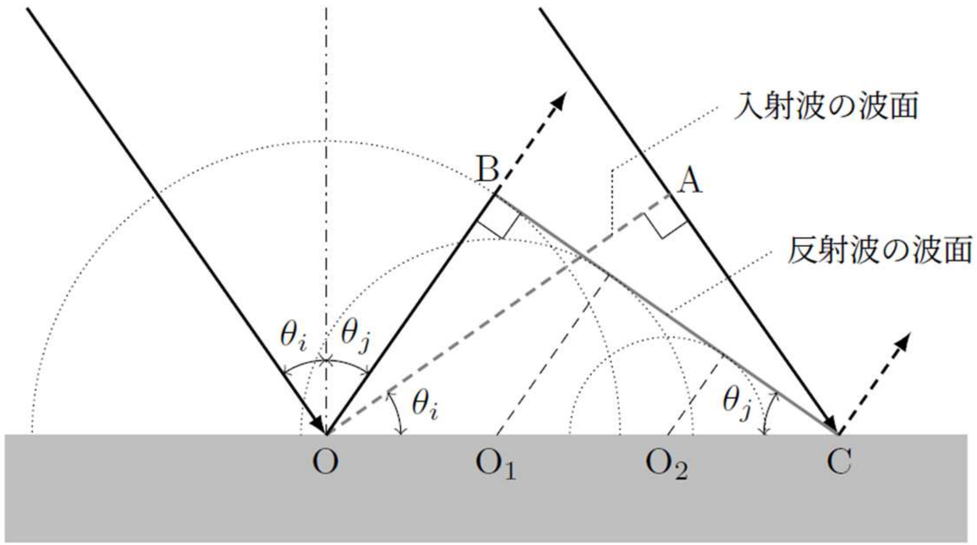


◆ 波の反射・屈折 〔テキスト pp.23-26〕

反射の法則

入射角 θ_i = 反射角 θ_j

入射波の波面OA上の各点が境界面に達した瞬間にOC上で順次発生する要素波を考えたとき，それらの要素波に共通の接線が反射波の波面BCとなる．波面BCは波面OAの点Aが点Cに達した瞬間の反射波の波面である．



演習2-3 ホイヘンスの原理と上の図を使って，反射の法則を説明しよう．

■ 第2回「波の性質」

◆ 波の反射・屈折 〔テキスト pp.23-26〕

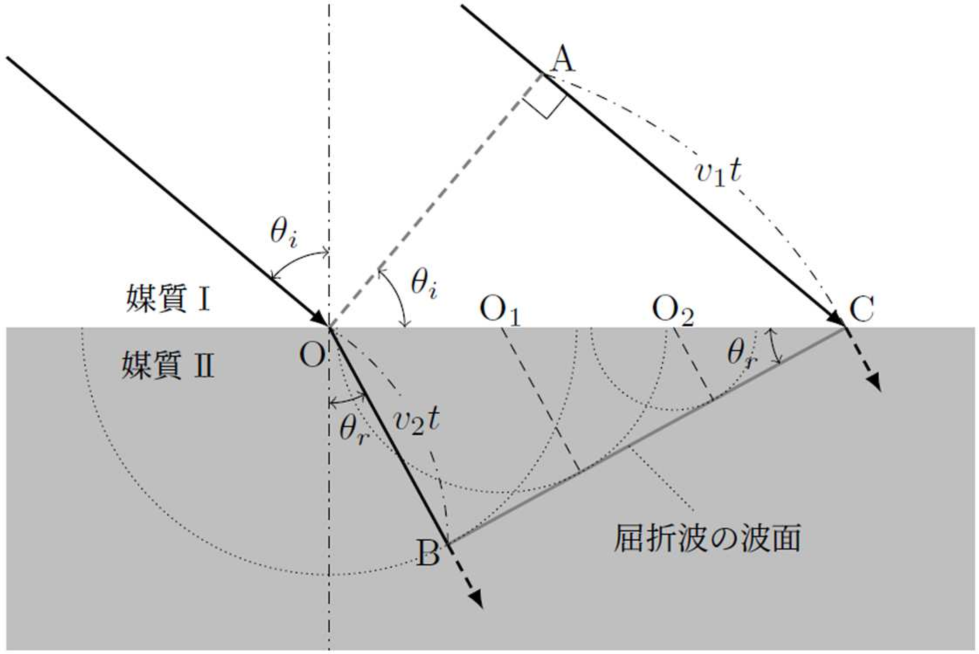
屈折の法則

媒質Ⅰに対するⅡの屈折率

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}\ (\text{相対屈折率})$$

v_1 :入射波の速さ, v_2 :屈折波の速さ

入射波の波面OA上の各点が境界面に達した瞬間にOC上で媒質Ⅱ側で順次発生する要素波を考えたとき，それらの要素波に共通の接線が反射波の波面BCとなる．波面BCは波面OAの点Aが時間 t かけて点Cに達した瞬間の反射波の波面である．



演習2-3 ホイヘンスの原理と上の図を使って，屈折の法則を説明しよう．

まとめ

波 ＝ 物理量の**時間的・空間的**な変化の伝わり

└→ 時刻 t と位置 x の関数

時間経過で<u>波形が変わらない</u>場合

$$\xi(x,t) = \begin{cases} f(x-vt) & +x \text{ 方向に速さ } v \text{ で進む} \\ f(x+vt) & -x \text{ 方向に速さ } v \text{ で進む} \end{cases}$$

波の方程式が線形 ➡ <u>複数の波の足し合わせで波を表現</u>（**合成波**）

<u>重ね合わせの原理</u>

個々の波は互いに振動数・波長を乱さない（**波の独立性**）

要素波の重ね合わせの結果（干渉）で波面を表現

<u>ホイヘンスの原理</u>

波の反射・屈折・回折の現象を統一的に説明