数理リテラシー特別講座

Mathematical Essence of Wave

波動の数理

第3回
「連続体の波動」

■ 第3回「連続体の波動」

“波動方程式＝波の従う方程式”

◆ 波動方程式

波動方程式は連続体の運動を記述するニュートンの運動方程式から導き出される. 波は時間的･空間的変化を伴うので, 波動方程式は時間微分･空間微分を含む偏微分方程式となっていることを理解しよう. また, 波動方程式の解がこれまでに学んだ波の表現式で表されることを確かめよう.

※ 偏微分については, 第3回講座資料にある「偏微分.pdf」を参照

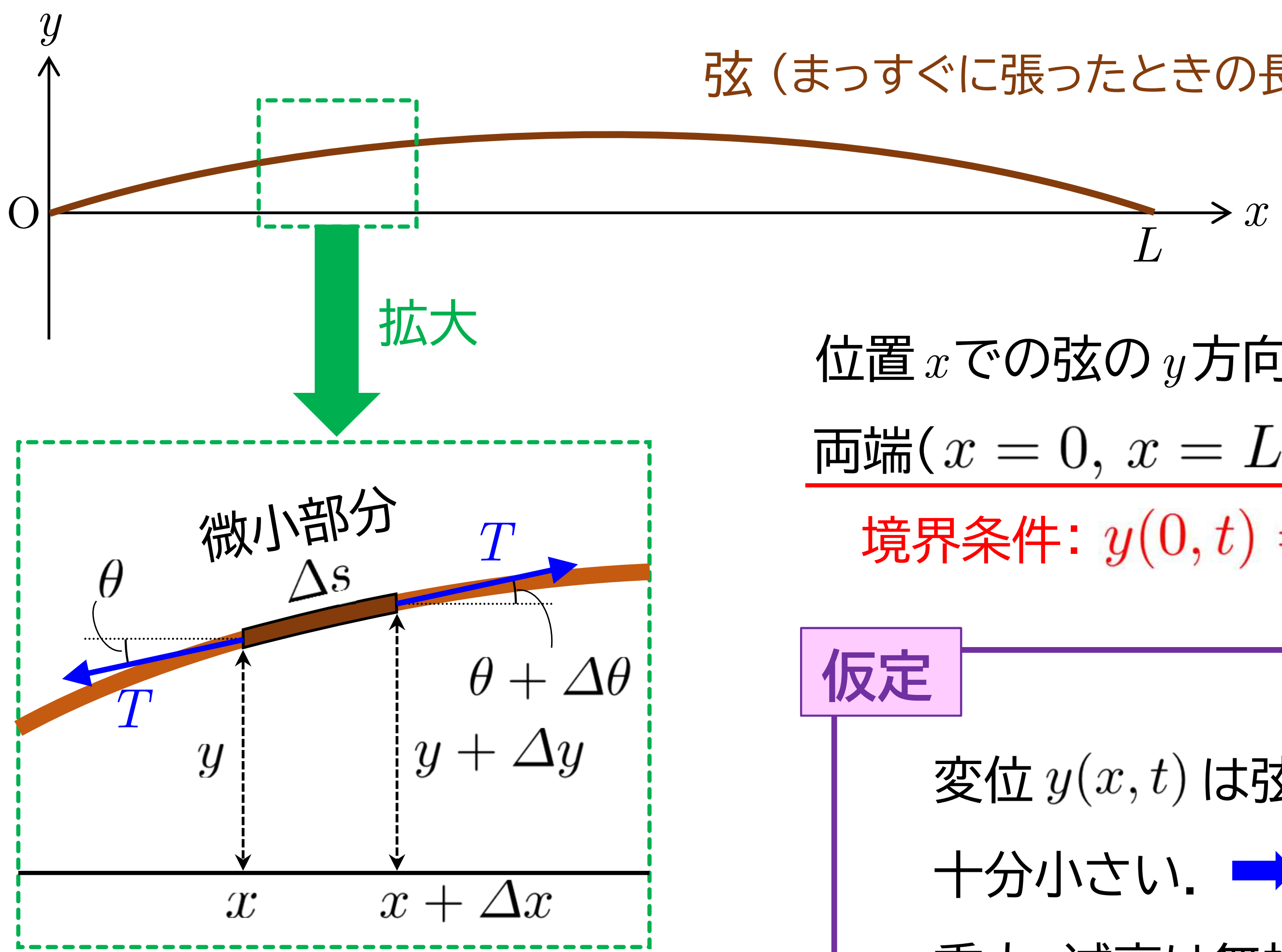
◆ 定在波

波動方程式の解は境界条件により定まった波長･振動数をもつ基準振動(基準モード)が存在し, 境界条件が固定端･自由端の場合, 定在波を形成することを理解しよう.

■ 第3回「連続体の波動」

◆ 波動方程式: 弦を伝わる横波 〔テキスト pp.27-28〕

弦 (まっすぐに張ったときの長さがL, 線密度 σ は一様)



位置 x での弦の y 方向の変位: $y(x,t)$

両端($x = 0,\ x = L$)で固定

境界条件: $y(0,t) = y(L,t) = 0$

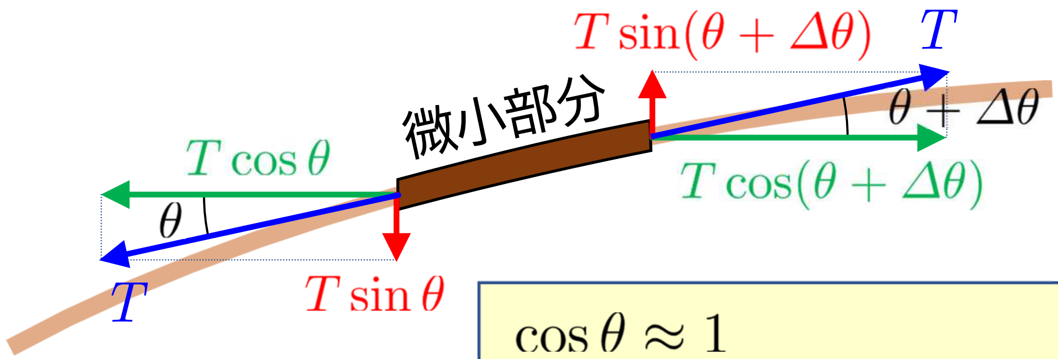
仮定

変位 $y(x,t)$ は弦の長さ Lに比べて十分小さい. ➡ 張力 T は一定

重力, 減衰は無視できるものとする.

◆ 波動方程式: 弦を伝わる横波 〔テキスト pp.27-28〕

○ 微小部分に作用する合力



x 方向:

$$F_x = T\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta \approx T - T = 0$$

y 方向:

$$F_y = T\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta \approx T(\theta+\Delta\theta) - T\theta = T\Delta\theta \quad \cdots ①$$

変位は微小 ➡

$\cos\theta \approx 1$

$\cos(\theta+\Delta\theta) \approx 1$

$\sin\theta \approx \theta$

$\sin(\theta+\Delta\theta) \approx \theta+\Delta\theta$

○ 微小部分の接線の傾き

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \xrightarrow{x\text{ で偏微分}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \quad \cdots ②$$

式 ① ② より, 微小部分に作用する力の y 方向成分は $F_y \approx T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$

◆ 波動方程式: 弦を伝わる横波 〔テキスト pp.27-28〕

微小部分についてのニュートンの運動方程式

質量: $\Delta m = \mu \Delta s \approx \mu \Delta x$

加速度(y成分): $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

※ 力はy成分のみなので, 運動方程式も
y成分のみ考えればよい.

運動方程式

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

➡

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ とおく

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

弦の波動方程式

x方向に速さvで伝わる波の従う方程式

波動方程式(1次元) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

線形偏微分方程式

◆ 波動方程式: 弦を伝わる横波 〔テキスト pp.27-28〕

弦の波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

何故, この部分が波の伝わる速さvの2乗なのか？

第2回で学習した波の表現 $y(x,t) = f(x \mp vt) = f(\xi)$ （$\xi = x \mp vt$）を代入すると

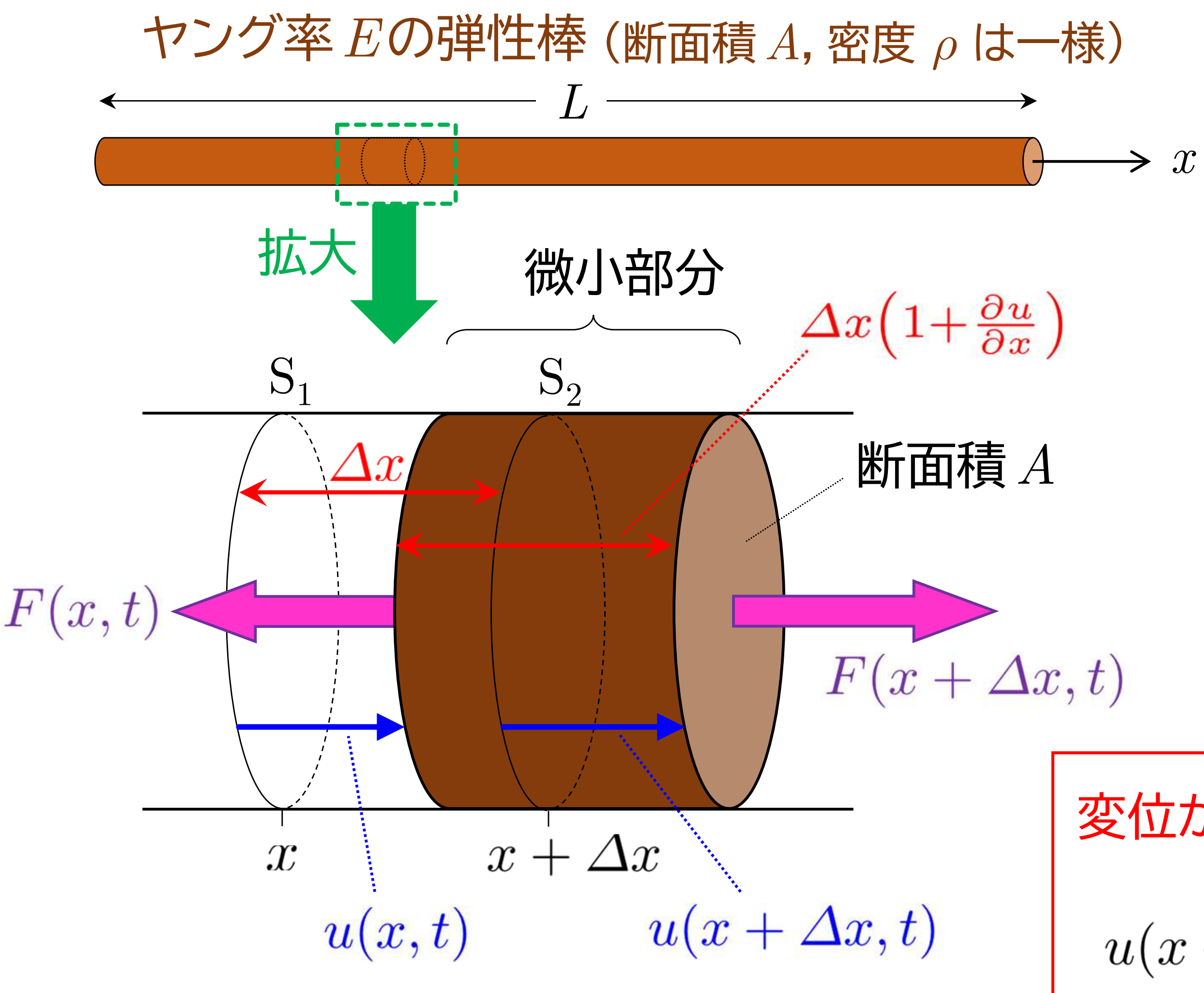
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{df(\xi)}{d\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v\dfrac{df(\xi)}{d\xi} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mp v\dfrac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = v^2\dfrac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{df(\xi)}{d\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{df(\xi)}{d\xi} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \end{cases}$$

➡ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ が成り立つ！ ➡

$y(x,t) = f(x \mp vt)$
は波動方程式の解

※ 弦の変位yが波の進行方向と垂直なので横波

◆ 波動方程式：棒を伝わる縦波〔テキスト pp.28-30〕



微小部分の質量 $\Delta m = \rho A \Delta x$

応力と伸び率の関係

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

微小部分は静止状態で位置 $x \sim x+\Delta x$ の間にあり，垂直断面を S_1, S_2 とする.

S_1 の変位： $u(x,t)$

S_2 の変位： $u(x+\Delta x,t)$

変位が十分小さいときの微小部分の伸び

$$u(x+\Delta x,t) - u(x,t) \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta x$$

◆ 波動方程式：棒を伝わる縦波 〔テキスト pp.28-30〕

応力と伸び率の関係

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

伸び

S_1の両側の弾力：$F(x,t) = AE\dfrac{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta x}{\Delta x} = AE\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

S_2の両側の弾力：$F(x+\Delta x,t) = AE\dfrac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\Delta x}{\Delta x} = AE\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$

➡ 微小部分に作用する力

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x+\Delta x,t) - F(x,t) \\ &= AE\left\{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} \\ &= AE\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x\end{aligned}$$

◆ 波動方程式：棒を伝わる縦波 〔テキスト pp.28-30〕

微小部分についてのニュートンの運動方程式

質量：$\Delta m \approx \rho A \Delta x$ （変位uは十分小さいとする）

加速度：$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

運動方程式

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta F = AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

縦波の伝わる速さ

$v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ とおく

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

弾性棒の波動方程式

※ 変位uが波の進行方向と平行なので縦波

※ 弾性棒は横波も伝わる.

弾性棒の剛性率を G とすると横波の伝わる速さ $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

■ 第3回「連続体の波動」

◆ 波動方程式の解 〔テキスト pp.30-32〕

1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

線形偏微分方程式

x方向に速さv で伝わる波の従う方程式

変位が十分小さい波について, 多くの場合に成り立つ方程式

線形近似

波動方程式の解

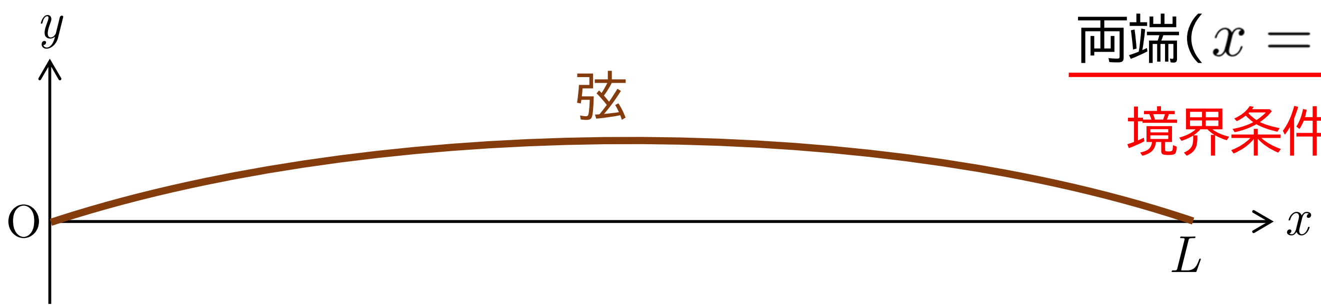
$$u(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{+x\text{方向に進む}} + \underbrace{g(x+vt)}_{-x\text{方向に進む}}$$

方程式が線形なので, 重ね合わせの原理が成り立つ.

※ 速さが異なる波の重ね合わせはできない(同じ波動方程式に従わない).

◆ 波動方程式の解 〔テキスト pp.30-32〕

両端を固定した弦を伝わる波について, 具体的な波動方程式の解を考える.



両端($x = 0,\ x = L$)で固定

境界条件: $y(0,t) = y(L,t) = 0$

解を $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)$ とおき, $v = \omega/k =$ 一定とする.

波動方程式に代入すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2\left\{A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)\right\} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k^2\left\{A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

波動方程式を満たす！

◆ 波動方程式の解 〔テキスト pp.30-32〕

一つ目の境界条件より $y(0,t) = A\sin(-\omega t) + B\sin(\omega t) = -(A-B)\sin\omega t = 0$

任意の時刻で成り立つためには $A = B$

➡ $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) = 2A\sin kx\cos\omega t$

二つ目の境界条件より $y(L,t) = 2A\sin kL\cos\omega t = 0$

任意の時刻で成り立つためには $\sin kL = 0$

➡ 波数 $k = \dfrac{\pi}{L}n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ この条件を満たす波数のみが許される.

➡ 角振動数 $\omega = kv = \dfrac{\pi}{L}n \cdot \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ 波長 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2L}{n}$

➡ 解 $y(x,t) = 2A\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}t\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

◆ 波動方程式の解 〔テキスト pp.30-32〕

整数 n で定められる固有の振動(基準振動)のみが解となる.

"基準モード"

振幅, 初期位相もモード毎に指標 n を付けて表すと

初期位相

弦の基準モード $$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n)$$ 第 n 次モード

$$k_n = \frac{\pi}{L} n \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \omega_n = \underbrace{\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}_{\omega_1} n = n\omega_1$$

$A_n,\ \delta_n$:任意定数

一般解 $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

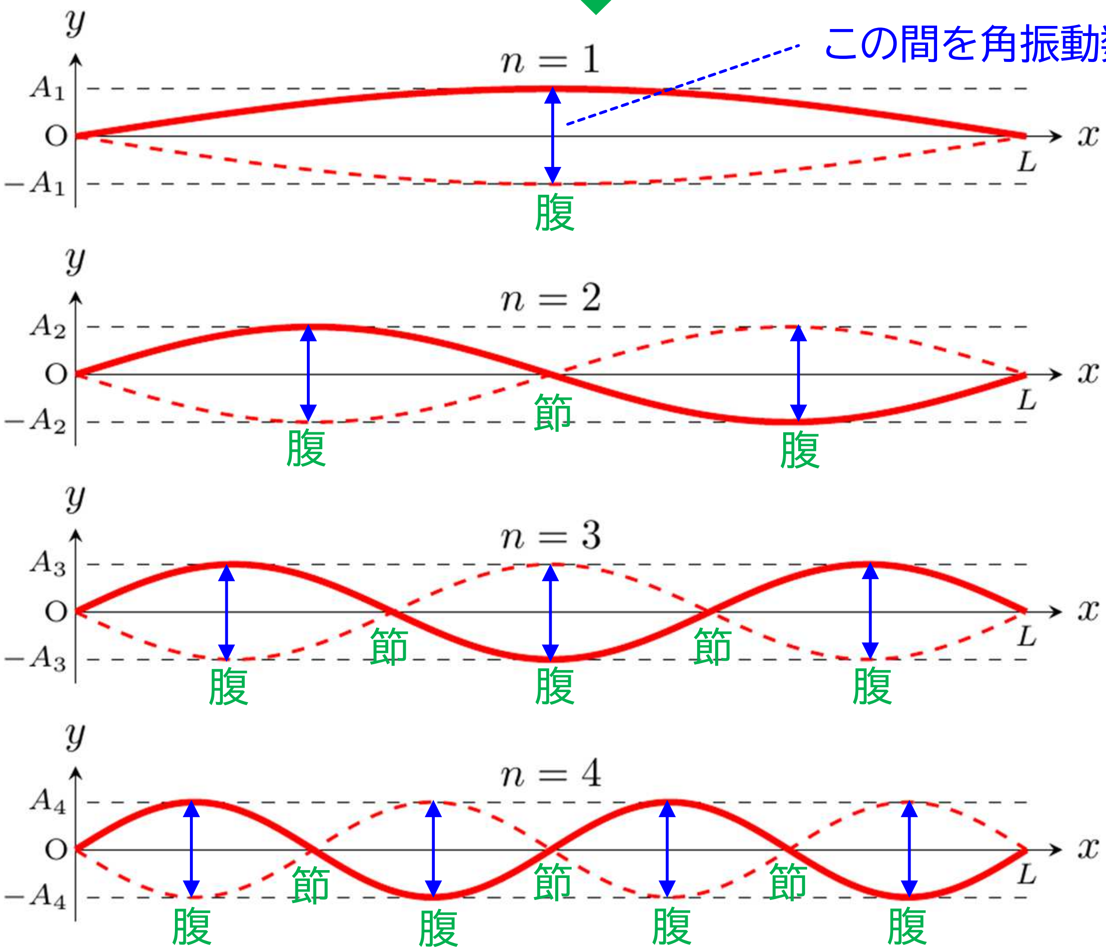
重ね合わせの原理

$A_n,\ \delta_n$ は初期条件を満たすように定まる.

◆ 波動方程式の解 〔テキスト pp.30-32〕

第n次モード $y_n(x,t) = \boxed{A_n \sin k_n x} \cos(\omega_n t + \delta_n)$　　波長 $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$

この間を角振動数 ω_n で振動



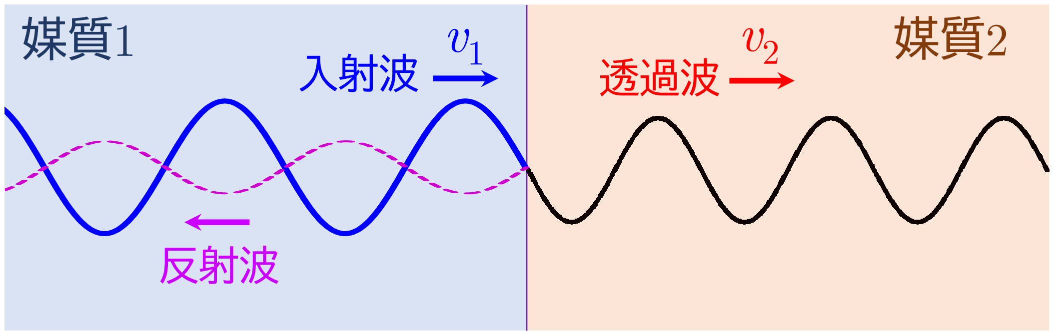
モード数が上がるにつれて，波長は短く，振動数は高くなる

第3回講座資料フォルダにある「弦の振動」動画を参照

※ 動画の弦は，左端で強制振動させているので厳密には状況が異なることに注意

◆ 反射・透過と定在波 〔テキスト pp.35-38〕

波が異なる媒質を伝わるとき, その境界で反射・透過が起こる.



媒質1での波: $y_1(x,t) = \underbrace{g_i(t-x/v_1)}_{\text{入射波}} + \underbrace{g_r(t+x/v_1)}_{\text{反射波}}$ ⇒ 合成波

媒質2での波: $y_2(x,t) = \underbrace{g_t(t-x/v_2)}_{\text{透過波}}$

※ 波の表現を次式のように変更しただけ

$$f(x-vt) = f(-v(t-x/v)) = g(t-x/v)$$

◆ 反射・透過と定在波 〔テキスト pp.35-38〕

波が異なる媒質を伝わるとき, その境界で反射・透過が起こる.

境界条件 $x = 0$ において次式を満す必要がある.

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \qquad \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x}$$

反射波・透過波と入射波との関係

v_1 と v_2 の関係によって同位相・逆位相が決まる.

反射係数

反射波 $$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = \boxed{\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}} g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

入射波に対し, $x = 0$ に関して対称

透過波 $$g_t\left(t - \frac{(v_2/v_1)x}{v_2}\right) = \boxed{\frac{2v_2}{v_1 + v_2}} g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

波長が v_2/v_1 倍

透過係数

◆ 反射・透過と定在波 〔テキスト pp.35-38〕

特別な場合を考えることによって，いわゆる固定端および自由端での波の反射を記述できる．

○ **固定端反射** （媒質2が無限大の質量をもち，$v_2 = 0$ の場合）

反射波 $$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = -g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

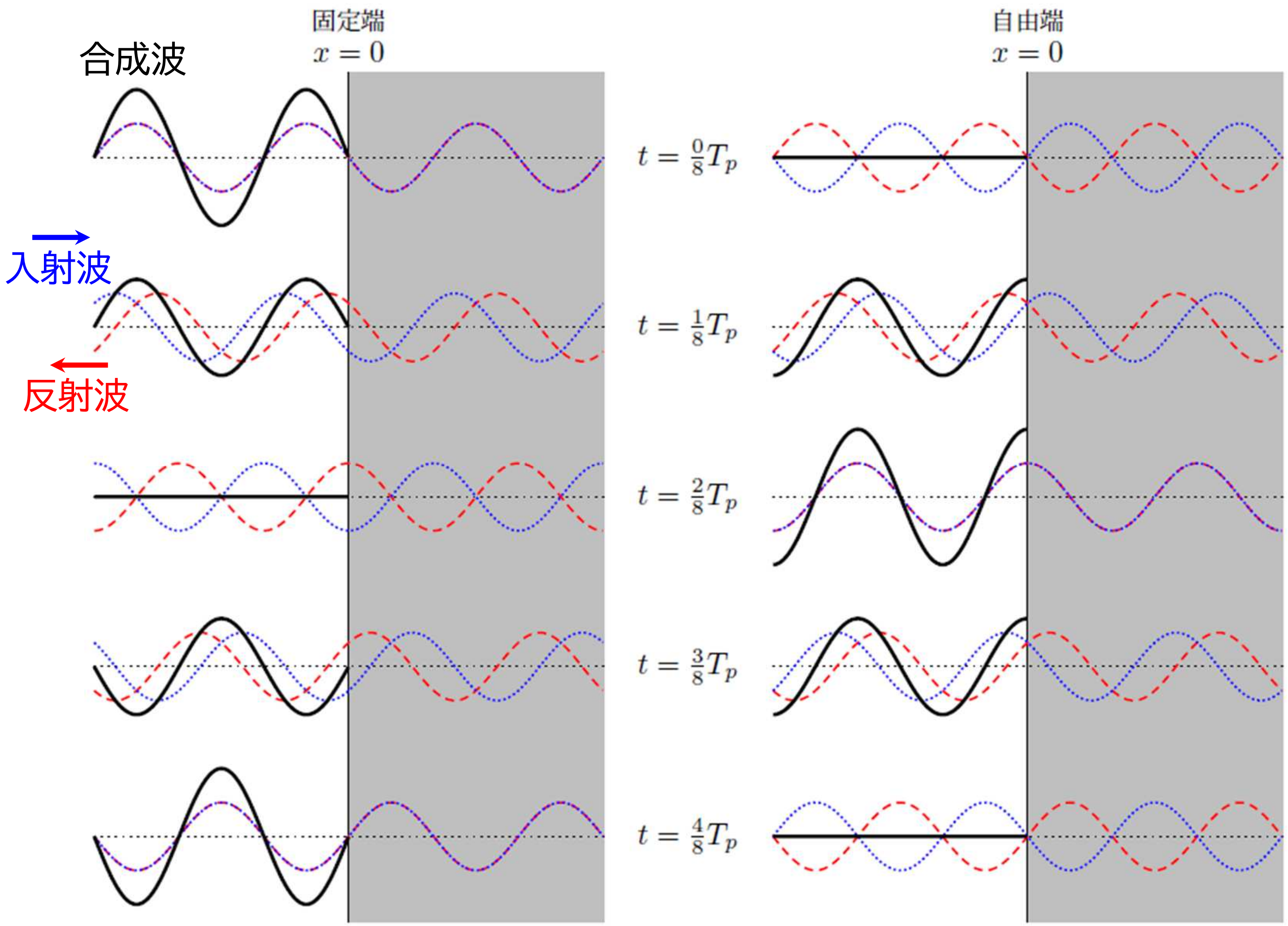
入射波と同じ振幅で逆位相の反射波となる．

○ **自由端反射** （媒質2に質量がなく，$v_2 \to \infty$ の場合）

反射波 $$g_r\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = g_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

入射波と同じ振幅で同位相の反射波となる．

◆ 反射・透過と定在波 〔テキスト pp.35-38〕



反対向きに同じ速さで進む，波長・振幅の等しい正弦波が重なると，それらの合成波は進行しないように見える.

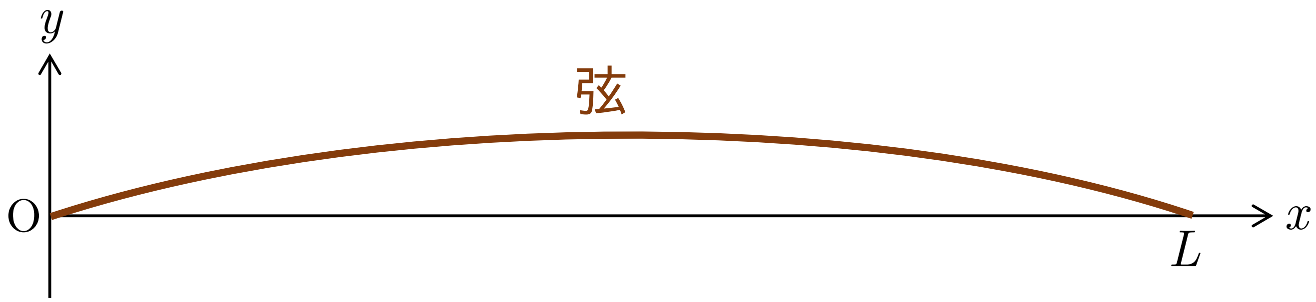
⬇

定在波

第３回講座資料フォルダ「定在波.mp4」動画参照

◆ 反射・透過と定在波 〔テキスト pp.35-38〕

両端を固定した弦を伝わる波



両端$(x=0,\ x=L)$で固定 ➡ 両端で固定端反射が起こっている！

境界条件により $y(x,t) = \underline{A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t)}$ $\quad \omega = kv$

同じ速さ・振幅・波長で反対方向に進む波の重ね合わせ

$$= 2A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,t\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

基準モード ＝ 定在波

まとめ

連続体(媒質)の各微小部分の振動を表す運動方程式

➡ **波動方程式**

振動の変位が小さい場合, 波動方程式は**線型**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

線形偏微分方程式

x方向に速さvで伝わる波の方程式

解 $u(x,t) = \underbrace{f(x - vt)}_{+x\text{方向に進む}} + \underbrace{g(x + vt)}_{-x\text{方向に進む}}$

境界条件が課されると, その条件を満たす波数・波長・角振動数をもつ**基準モード**のみが許される.

境界条件が固定端・自由端 ➡ **定在波**が生じる

線密度 μ, 張力 Tの弦

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

密度 ρ, ヤング率 Eの弾性棒

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

いずれも復元力と質量を表すパラメータの比の平方根