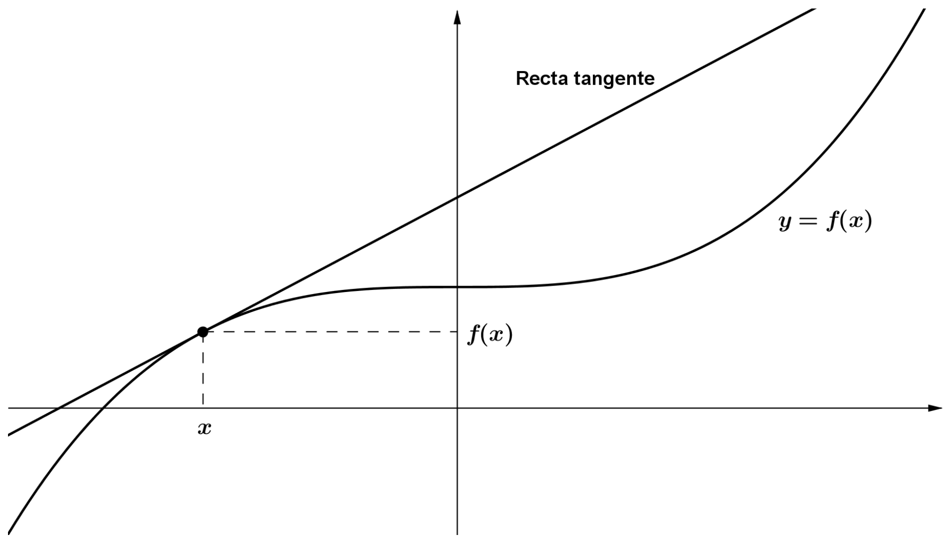
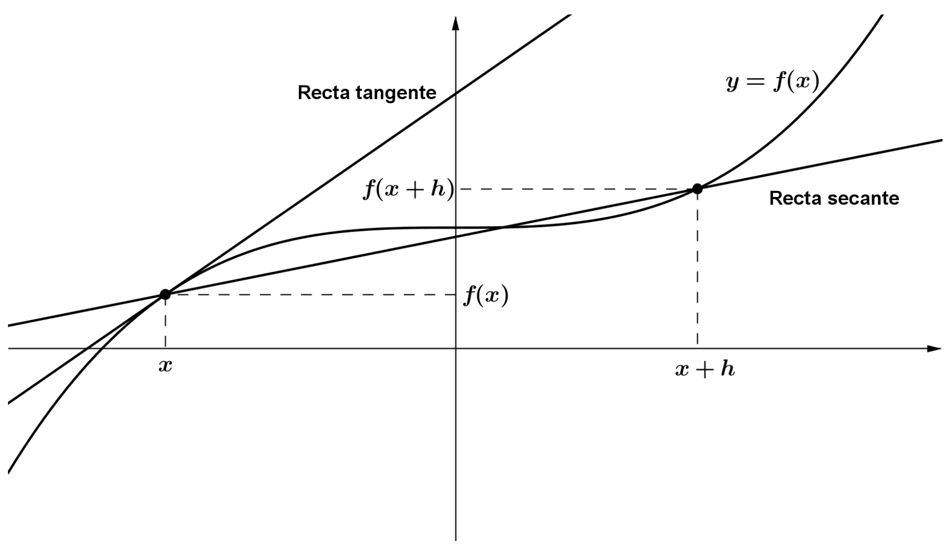
Derivadas

1. El problema de la recta tangente

Suponga que se tiene una curva $y = f(x)$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $(x, f(x))$ como se muestra en la figura:



Suponga ahora que se tiene la recta secante a $y = f(x)$ que pasa por el punto de tangencia y el punto $(x + h, f(x + h))$, tal y como se muestra en la gráfica:



La pendiente de la recta secante, la cual pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$, está dada por:

$$\begin{aligned} m_{secante} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

Note que conforme h se hace suficientemente pequeño, la pendiente de la recta secante tiende a ser igual a la pendiente de la recta tangente, por lo que si $h \to 0$, entonces se tiene que $m_{secante} = m_{tangente}$.

$$m_{tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Al límite anterior se le llama derivada de f con respecto a x y se denota por f':

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Otras notaciones utilizadas para las derivadas son: y', $\dfrac{dy}{dx}$.

Si se hace el cambio de variable $a = x+h$, la fórmula para calcular la derivada se transforma en:

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ejecicios:

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - x$ en el punto $(-1, 2)$.

2. Utilice la definición para hallar la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$
   b) $f(x) = 4x - 7$
   c) $f(x) = x^2 + 3x - 1$
   d) $f(x) = \sqrt{1-3x}$
   e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$
   f) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+2}}$

3. Utilice la definición de derivada, para calcular $g'(-1)$ para la función $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

4. Utilice la definición de derivada para probar que si $g(x) = x^2 f(x)$, donde f es una función derivable, entonces $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$.

2. Reglas de derivación

1. $[k]' = 0$
2. $[x]' = 1$
3. $[x^n]' = nx^{n-1}$
4. $[e^x]' = e^x$
5. $[a^x]' = a^x \ln a$
6. $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
7. $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$
8. $[\operatorname{sen} x]' = \cos x$
9. $[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$
10. $[\tan x]' = \sec^2 x$
11. $[\cot x]' = -\csc^2 x$
12. $[\sec x]' = \sec x \tan x$
13. $[\csc x]' = -\csc x \cot x$
14. $[\operatorname{arc\,sen} x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $[\arccos x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $[\arctan x]' = \dfrac{1}{x^2+1}$
17. $[\operatorname{arccot} x]' = \dfrac{-1}{x^2+1}$
18. $[\operatorname{arcsec} x]' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
19. $[\operatorname{arccsc} x]' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

3. Propiedades de la derivada

1. $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$
2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejercicios: Determine la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = -8x^3 + 5e^x + \log_3 x$
2. $f(x) = (3x^2 - 5x + 2) \cdot \sec x$
3. $f(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 3x}{-4x^3 + 2\sqrt{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{3^x - \cos x} + \ln(4)$
5. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{\tan x - \arccos x}$

4. La derivada como razón de cambio

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, es decir tiene un movimiento rectilíneo. Considere la ecuación $y = f(t)$, la cual describe la distancia de la partícula (en metros) a un punto fijo, en cualquier tiempo t (en segundos).

La velocidad promedio de la partícula es la razón de cambio de la distancia con respecto al cambio en el tiempo. Así, si a los t segundos la partícula ha recorrido $f(t)$ metros y a los t_0 segundos la partícula ha recorrido $f(t_0)$ metros, entonces la velocidad promedio viene dada por:

$$v_{promedio} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Si se quiere determinar la velocidad instantánea a los t_0 segundos, entonces de la fórmula anterior se debe hacer que $t \to t_0$ y así la velocidad instantánea viene dada por:

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

De esta manera se tiene que la velocidad instantánea, en el instante t_0, está dada por la derivada de la función distancia con respecto al tiempo.

Ejercicios:

1. Suponga que se deja caer un objeto desde una altura de 30 pies. Su altura h (en pies) en el instante t (en segundos) viene dada por la fórmula $h(t) = -4{,}9t^2 + 30$.

   a) Determine la velocidad media del objeto en los intervalos $[2, 3]$, $[2, 2.5]$ y $[2, 2.1]$.

   b) Determine la velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos.

2. Suponga que se deja caer una bola desde lo alto de un edificio de 32 pies de altura. La posición de la bola con respecto al tiempo viene dada por la ecuación $s = -16t^2 + 16t + 32$.

   a) Determine el tiempo que tarda la bola en llegar al suelo.

   b) Halle la velocidad de la bola al momento del impacto con el suelo.