Cálculo Diferencial e Integral: Límites de Funciones

Compiladores: Reiman Acuña Ch. y Lourdes Quesada V.

Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Semanas 2 y 3

Contenido

Idea intuitiva de límite

Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Si nos fijamos bien, el dominio de esta función está dado por

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Ya que si se calculara $f(1)$ tendríamos que

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

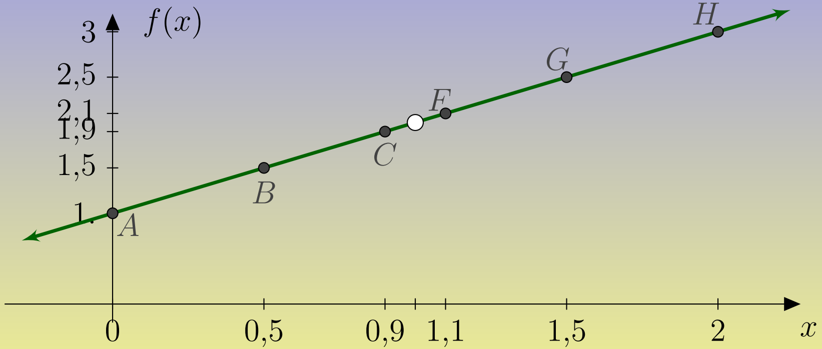
Idea intuitiva de límite

En este caso, nos interesa **aproximar** algunas preimágenes cerca de $x = 1$ para ver que sucede con sus imágenes.
Para hacer esto de una manera técnica, podemos hacer uso de los **enteros más próximos de** $x = 1$, en tal caso $x = 0$ y $x = 1$.
Luego hacemos una **tabla de valores** como sigue

x	0	0,5	0,9	0,99	1	1,01	1,1	1,5	2
$f(x)$	1	1,5	1,90005	1,99083	?	2,00916	2,09993	2,5	3
Punto	A	B	C	D		E	F	G	H

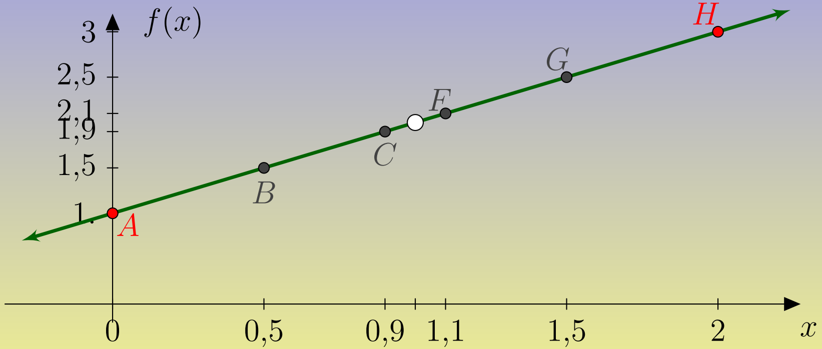
Idea intuitiva de límite

Gráficamente tenemos lo siguiente



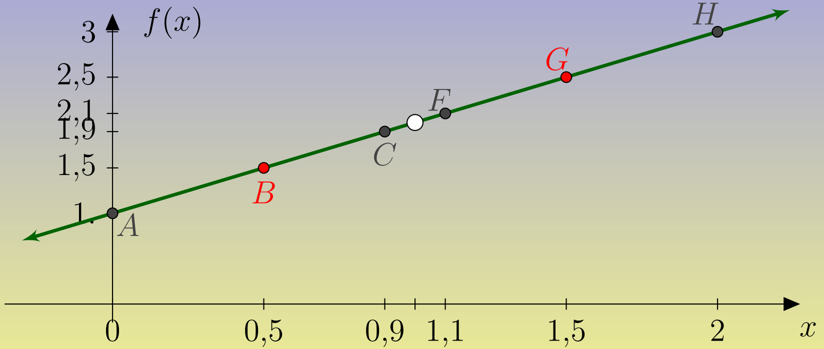
Idea intuitiva de límite

Gráficamente tenemos lo siguiente



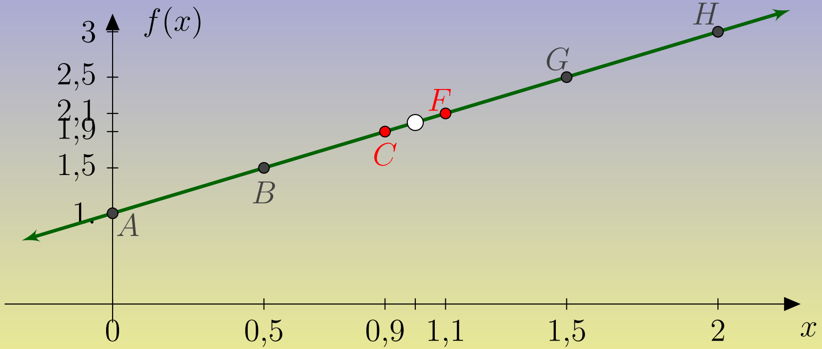
Idea intuitiva de límite

Gráficamente tenemos lo siguiente



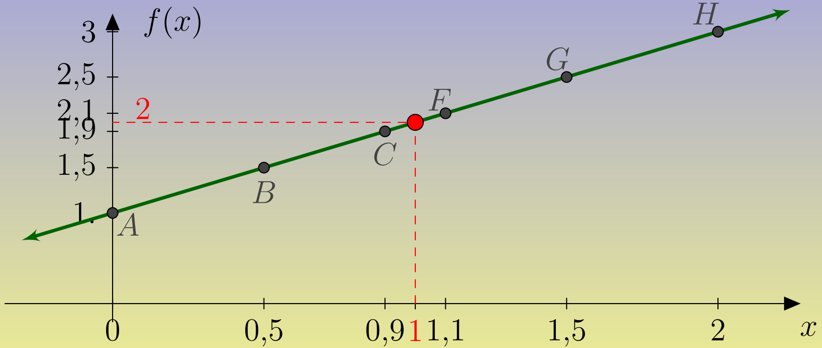
Idea intuitiva de límite

Gráficamente tenemos lo siguiente



Idea intuitiva de límite

Gráficamente tenemos lo siguiente



Idea intuitiva de límite

En este caso, decimos que **"si las preimagenes se aproximan a 1, entonces las imagenes se aproximan a 2"**. Simbólicamente

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Sin embargo $f(1)$ **no existe**, por lo cual, debe quedar claro que para esta situación en particular

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

Es decir, diferente es **aproximarse a** $x = 1$ que **evaluar en** $x = 1$

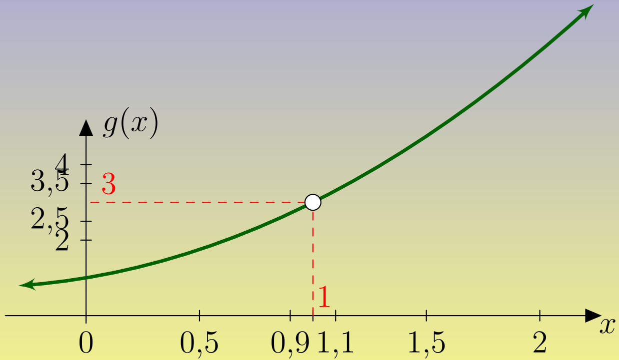
Idea intuitiva de límite

Ejercicio: Determine, para cada función, las aproximaciones sugeridas. Realice una tabla y una gráfica

1. $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ para $x = 1$
2. $h(x) = x^2$ para $x = -1$
3. $i(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$
4. $j(x) = \dfrac{1}{x + 3}$ para $x = -3$

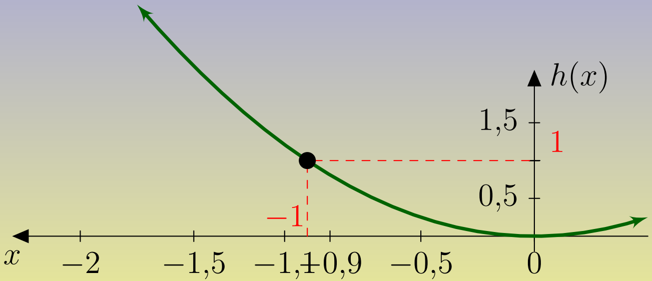
Ejercicios Resueltos

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$



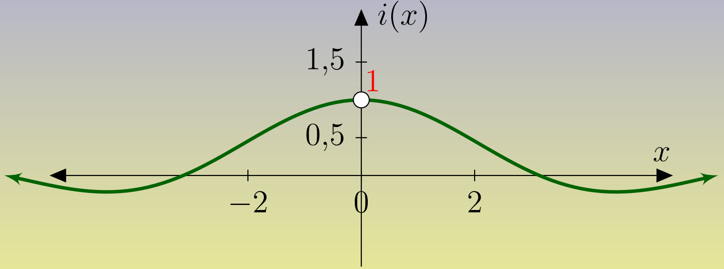
Ejercicios Resueltos

$$h(x) = x^2$$



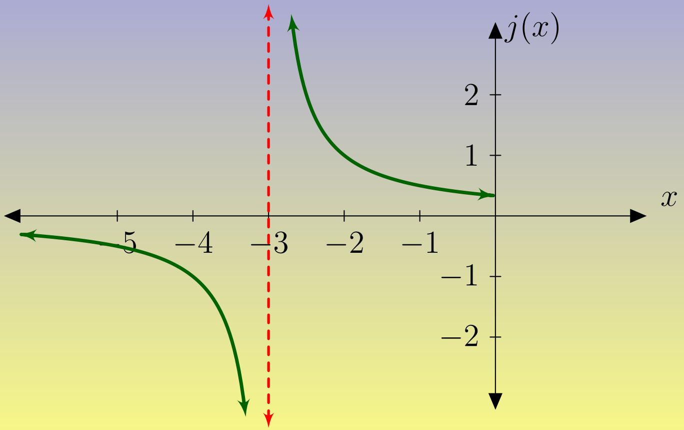
Ejercicios Resueltos

$$i(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$



Ejercicios Resueltos

$$j(x) = \frac{1}{x+3}$$



Definición de límite

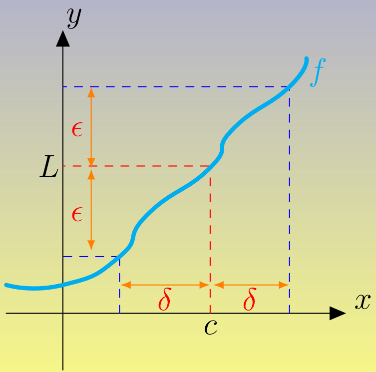
Informalmente, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a c, y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si se puede encontrar, para cada ocasión, un x suficientemente cerca de c tal que el valor de $f(x)$ sea tan próximo a L como se desee.

Definición de límite

Para un mayor rigor matemático se utiliza la definición **épsilon-delta** de límite, que es más estricta y convierte al límite en una gran herramienta del análisis real pero, para efectos de este curso, no es necesario que lo consideremos.



Definición de Límite

Límites Unilaterales

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha, es L se escribe

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Análogamente, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es L, se escribe

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Definición de Límite

Existencia de un límite

Se tiene que el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to c^+} f(x)$ y $\lim_{x \to c^-} f(x)$ existen y son iguales a L. es decir

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Consideraciones sobre el cálculo de Límites

Para calcular límites

Posibilidad 1

Forma Definida

La sustitución directa produce el resultado. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

Posibilidad 2

Forma Indeterminada

La sustitución directa produce la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ o 0^0. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$$

Posibilidad 3

Forma Indefinida

La sustitución directa produce la forma $\frac{c}{0}$ para $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to -2} \frac{2}{x+2} = \text{“}\frac{2}{0}\text{”}$$

Consideraciones sobre el Cálculo Límites

Cuando se tiene que

$$x \to c^{+} \Leftrightarrow c < x \Leftrightarrow 0 < x - c$$

Cuando se tiene que

$$x \to c^{-} \Leftrightarrow x < c \Leftrightarrow x - c < 0$$

Propiedades de los Límites

Suponga que k es una constante y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ existen, es decir, son números reales. Entonces se cumple que:

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$; $f(x) = k$ la función constante
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$; $f(x) = x$ la función identidad
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$
4. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. Si n es par suponemos $a > 0$.
5. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
6. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

Propiedades de los Límites

7. $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = k\cdot L$
8. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\cdot M$
9. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
10. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^m = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^m = L^m; m\in\mathbb{Z}^+$
11. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt{L}$ donde $n\in\mathbb{Z}^+$ $\left(\text{si } n \text{ es par suponemos que } \lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0\right)$

Propiedades de los Límites

12. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios entonces $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ y $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ si $Q(a) \neq 0$.
13. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios entonces $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ y $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ si $Q(a) \neq 0$.
14. $\lim_{x\to b} a^x = a^b$

Propiedades de los Límites

15. $\lim\limits_{x \to b} e^x = e^b$
16. $\lim\limits_{x \to b} \log_a x = \log_a b$; con $b > 0$
17. $\lim\limits_{x \to b} \ln x = \ln b$; con $b > 0$

Nota: *Las reglas son válidas para límites por la izquierda y por la derecha.*

Ejemplos (Formas Definidas)

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 2} -3$
2. $\lim\limits_{y \to 9} \sqrt{y} + \log_3(y)$
3. $\lim\limits_{x \to -1} 2x^3 - 5^x$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left[(3x+2)(x-1)\right]$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \left(-3x^2 + 2x - 7\right)$
6. $\lim\limits_{y \to 1} \sqrt{\dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}}$
7. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x^3 + 2x^2}{-x^2 - 1}$

Respuesta a los Ejemplos

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} -3 = -3$
2. $\lim\limits_{y\to 9} \sqrt{y} + \log_3(y) = 5$
3. $\lim\limits_{x\to -1} 2x^3 - 5^x = -\dfrac{11}{5}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left[(3x+2)(x-1)\right] = -2$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \left(-3x^2 + 2x - 7\right) = -15$
6. $\lim\limits_{y\to 1} \sqrt{\dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$
7. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^3 + 2x^2}{-x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo

Considere la función definida por:

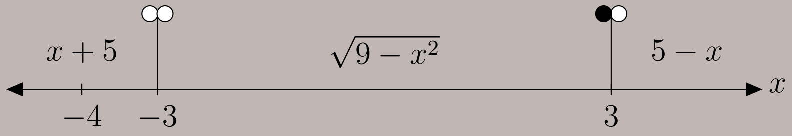
$$f(x) = \begin{cases} x+5 & si \quad x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & si \quad -3 < x \leq 3 \\ 5-x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Calcule si existen los siguientes valores:

$a)$ $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ $\quad b)$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $\quad c)$ $f(3)$ $\quad d)$ $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

Respuesta al Ejemplo

Considere la función definida por:



a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ **No existe**

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **No existe**

c) $f(3) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 1$

Ejemplos

1. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=1$, halle $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.
2. Considere la función definida por:

$$h(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\leq 2 \\ k+x & si \quad x>2 \end{cases}$$

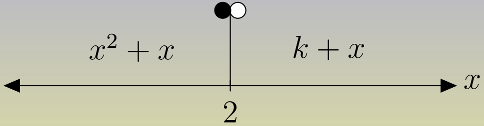
Determine el valor de k para que $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ exista.

Respuesta a los Ejemplos

1. Utilizando propiedades de los límites tenemos que

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} f(x) - 5}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = 7$$

2. Tendremos que



Luego el $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ existe si y solo si

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = 6 = k+2 = \lim_{x\to 2^+} h(x)$$

Es decir, $k = 4$

Análisis Gráfico de Límites

1) $\lim\limits_{t\to 3^+} g(t)$

2) $\lim\limits_{t\to -1^-} g(t)$

3) $\lim\limits_{t\to -1^+} g(t)$

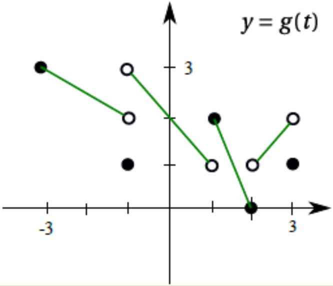
4) $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t)$

5) $\lim\limits_{t\to 1^+} g(t)$

6) $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$

7) $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$

8) $\lim\limits_{t\to 3^-} g(t)$



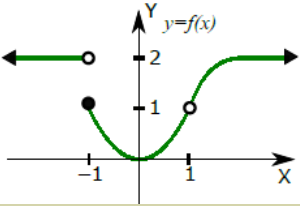
Análisis Gráfico de Límites

1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

4) $\lim\limits_{t \to 1^-} f(x)$



Análisis Gráfico de Límites

1) $\lim\limits_{x \to -4} m(x)$

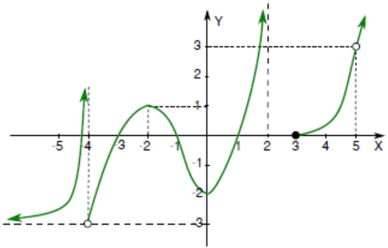
2) $\lim\limits_{x \to -2} m(x)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} m(x)$

4) $\lim\limits_{x \to 2} m(x)$

5) $\lim\limits_{x \to 3} m(x)$

6) $\lim\limits_{x \to 5} m(x)$



Análisis Gráfico de Límites

2. Para cada uno de los siguientes casos, construya la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las condiciones dadas

(a)

- $D_f = I\!R - \{-2, 3\}$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$
- $f(0) = 0$

Análisis Gráfico de Límites

(c)

- $D_f = [-3, +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1$
- $f(x) \neq 0, \ \forall x \in \,]0, +\infty[$
- $f(x) = 2, \ \forall x \in [-1, 1]$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$
- $f(-3) = f(3) = -1$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe $\forall x_0 \in [0, +\infty[$

Formas Indeterminadas

Las formas definidas son fáciles de calcular como se consideró en los ejemplos respectivos. No obstante, una forma indeterminada conlleva a al uso de diferentes estrategias dependiendo de la estructura del límite que tengamos. En tal caso, se puede utilizar métodos como la factorización, la racionalización o la sustitución para determinar si el límite existe o no. Incluso se puede hacer referencia a diversos teoremas para esclarecer la naturaleza del límite.

Límites por factorización

Algunos límites que tienen de la forma $\dfrac{0}{0}$ se pueden resolver utilizando factorización. En este caso se deben tener presentes todos los métodos.

¿Qué sucede al calcular usando evaluación directa el límite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$?

Límites por factorización

Calcule los siguientes límites:

1. $$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3}$$
2. $$\lim_{h\to -1} \frac{h^2+2h+1}{h+1}$$
3. $$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x^3+5x-3x^2-15}$$
4. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{8-x^3}$$
5. $$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$

Respuesta a los Límites por factorización

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} = -5$
2. $\lim\limits_{h\to -1} \dfrac{h^2+2h+1}{h+1} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+5x-3x^2-15} = \dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{8-x^3} = -\dfrac{1}{3}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$

Límites por racionalización

Algunos límites que tienen de la forma $\dfrac{0}{0}$ se pueden resolver realizando racionalizaciones. Para esto es indispensable recordar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Ejemplos

Calcule los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{3+x}}$ $\quad f)\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8a}-3}{\sqrt{4a}-2}$

Respuesta a los Ejemplos

$a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}=\dfrac{1}{12}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $d)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}=3\sqrt{3}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{3+x}}=2$ $\qquad$ $f)\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8a}-3}{\sqrt{4a}-2}=\dfrac{4}{3}$

Límites por sustitución

Algunos límites que tienen de la forma $\dfrac{0}{0}$ se pueden resolver mediante una sustitución. Los casos más comunes contienen raíces como se muestra a continuación.

Límites por sustitución

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[5]{3-2x}$.

Como $x \to 1$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{u\to 1} \frac{u-1}{1-\left(\dfrac{3-u^5}{2}\right)} = \lim_{u\to 1} \frac{2u-2}{u^5-1} = \frac{2}{5}$$

Límites por sustitución

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[5]{3-2x}$.

Como $x \to 1$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{u\to 1} \frac{u-1}{1-\left(\dfrac{3-u^5}{2}\right)} = \lim_{u\to 1} \frac{2u-2}{u^5-1} = \frac{2}{5}$$

Límites por sustitución

2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[12]{x-1}$

Note que $m.c.m(3,4) = 12$.

Como $x \to 2$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{u\to 1} \frac{1-u^3}{1-u^4} = \frac{3}{4}$$

Límites por sustitución

2 $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[12]{x-1}$

Note que $m.c.m(3,4) = 12$.

Como $x \to 2$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{u\to 1} \frac{1-u^3}{1-u^4} = \frac{3}{4}$$

Límites que involucran valor Absoluto

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|1-x|}{2x^2-5x+3}$.

Note que la tendencia $x \to 1$ coincide con uno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe estudiar los límites laterales. Así, tendremos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{2x^2-5x+3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = -1$$

y $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{2x^2-5x+3} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 1$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

Límites que involucran valor Absoluto

1 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|1-x|}{2x^2-5x+3}$.

Note que la tendencia $x \to 1$ coincide con uno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe estudiar los límites laterales. Así, tendremos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{2x^2-5x+3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = -1$$

y $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{2x^2-5x+3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 1$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

Límites que involucran valor Absoluto

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1|-|x+1|}{x}$.

Note que la tendencia $x \to 0$ **no** coincide con alguno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe escoger uno de los casos respectivos para cada valor absoluto presente, en relación con la tendencia. Así, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(3x-1)-(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = \lim_{x\to 0} -4 = -4$$

.

Límites que involucran valor Absoluto

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1|-|x+1|}{x}$.

Note que la tendencia $x \to 0$ **no** coincide con alguno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe escoger uno de los casos respectivos para cada valor absoluto presente, en relación con la tendencia. Así, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(3x-1)-(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = \lim_{x\to 0} -4 = -4$$

.

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Lo cuales también pueden aparecer como

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

Lo cuales también pueden aparecer como

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}=1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0}$$

Límites Trigonométricos

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{3x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3}$$

.

Límites Trigonométricos

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{3x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3}$$

.

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

ya que

$$\lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$$

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

ya que

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0$$

Límites Trigonométricos

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot (1+\cos x) = 2$$

.

Límites Trigonométricos

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot (1+\cos x) = 2$$

.

Límites Trigonométricos

5 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

Respuesta Aplicar identidad. Racionalizar. Nuevamente otra identidad. Factorizar y cancelar. Al final

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Límites Trigonométricos

5 $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$

Respuesta Aplicar identidad. Racionalizar. Nuevamente otra identidad. Factorizar y cancelar. Al final

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{x \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Límites infinitos

El símbolo ∞ se lee infinito, es de carácter posicional, no representa ningún número real.
Si una variable independiente x está creciendo indefinidamente a través de valores positivos, se escribe $x \to +\infty$ (que se lee: x tiende a más infinito), y si decrece a través de valores negativos, se denota como $x \to -\infty$(que se lee: x tiende a menos infinito).
Similarmente, cuando $f(x)$ crece indefinidamente y toma valores positivos cada vez mayores, se escribe $f(x) \to +\infty$, y si decrece tomando valores negativos escribimos $f(x) \to -\infty$.

Reglas algebraicas de $+\infty$ y $-\infty$

Si $l \in \mathbb{R}$ entonces

$$a)\begin{cases} l + (+\infty) = +\infty \\ l - (+\infty) = -\infty \\ l + (-\infty) = -\infty \\ l - (-\infty) = +\infty \\ \dfrac{l}{\pm\infty} = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} l \cdot +\infty = +\infty, \ l > 0 \\ l \cdot +\infty = -\infty, \ l < 0 \\ l \cdot -\infty = -\infty, \ l > 0 \\ l \cdot -\infty = -\infty, \ l < 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \\ +\infty \cdot +\infty = +\infty \\ -\infty \cdot -\infty = +\infty \\ +\infty \cdot -\infty = -\infty \end{cases}$$

Reglas algebraicas de $+\infty$ y $-\infty$

Nota: Son formas indeterminadas las expresiones:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty)$$

$$\pm\infty \cdot 0$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

También son formas indeterminadas

$$0^0, 1^\infty \text{ y } \infty^0$$

Reglas algebraicas a considerar

Si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$a^+ - a = 0^+ \text{ y } a - a^+ = 0^-$$

$$a^- - a = 0^- \text{ y } a - a^- = 0^+$$

También si $a > 0$ entonces

$$\frac{a}{+\infty} \to 0^+, \frac{a}{-\infty} \to 0^-$$

También si $a < 0$ entonces

$$\frac{a}{+\infty} \to 0^-, \frac{a}{-\infty} \to 0^+$$

Límites Infinitos

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

Límites Infinitos

2 $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{y-7}{|y-5|}$

Límites Infinitos

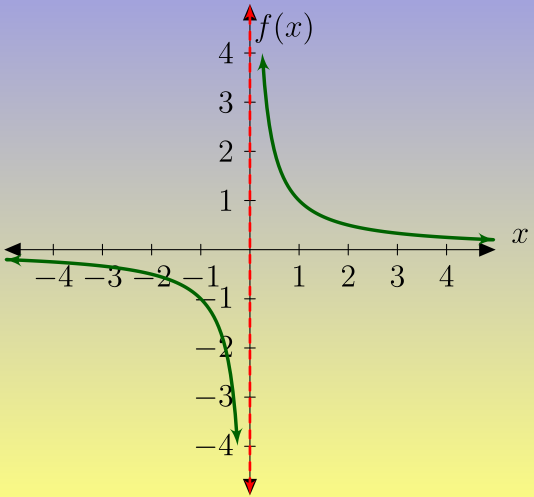
3 $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{4}{(2-x)^3}$

Límites Infinitos

4 $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{4}{(2-x)^2}$

Límites al Infinito

Considere el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Límites al Infinito

A partir de ello se puede generalizar las siguientes propiedades

a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0^+$ siempre que $c > 0$ y $r > 0$

b $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es par } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es impar} \\ 0^- & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es impar } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es par} \end{cases}$

Límites al Infinito

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{x^3}$

Límites al Infinito

Suponga que $p(x)$ y $q(x)$ representan polinomios de grado n.

Suponga que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ representa una forma indeterminada.

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si grado}(p(x))>\text{grado}(q(x))\\ L & \text{si grado}(p(x))=\text{grado}(q(x))\\ 0 & \text{si grado}(p(x))<\text{grado}(q(x))\end{cases}$$

Límites al Infinito

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{(2x+1)^5}$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2}{x+3}$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2-3x}$

Límites al Infinito

Hay casos en donde se puede obtener resultados diferentes si el límite se evalúa en ∞ o en $-\infty$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

Hay casos en donde obtenemos la forma indeterminada $\infty - \infty$. Si esto sucede muchas veces se puede racionalizar. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

Límites al Infinito

Hay casos en donde se puede obtener resultados diferentes si el límite se evalúa en ∞ o en $-\infty$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

Hay casos en donde obtenemos la forma indeterminada $\infty - \infty$. Si esto sucede muchas veces se puede racionalizar. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

Límites al Infinito

Hay límites al infinito en los que se puede utilizar las funciones exponenciales. Para tales casos debe seguir la siguiente regla

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Y bien

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Límites al Infinito

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \pi^x$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x$

Límites al Infinito

Hay límites al infinito en los que se puede utilizar las funciones logarítmicas. Para tales casos debe seguir la siguiente regla

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Y bien

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Límites al Infinito

11 $\lim_{x\to+\infty} \log_3 x$

12 $\lim_{x\to 0^+} \log_3 x$

13 $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

14 $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

15 $\lim_{x\to 0+} \log_{\frac{1}{2}} x$

Ejemplos Variados

16 $\lim_{x \to 0} (e^{\frac{2}{x}} + 1)$

17 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{7}\right)^{\cot |x|}$

18 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\dfrac{2}{\ln(x+1)}}$

Referencias

Hernández, E.(1984)
Límites y Continuidad de Funciones
Editorial Tecnológico de Costa Rica

Muchas Gracias