Colección #2 Cálculo Diferencial e Integral

Regla de la cadena

Para cada una de las siguientes funciones encuentre su primera derivada:

1) $y = \dfrac{2}{\sqrt{8m-1}}$ R// $y' = \dfrac{-8}{(8m-1)^{3/2}}$

2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{8x^2-3}{x^2+2}}$ R// $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{8x^2-3}{x^2+2}\right) \cdot \left[\dfrac{16(x^2+2)-(8x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}\right]$

3) $f(x) = \dfrac{(8x-1)^5}{(3x-1)^3}$ R// $f'(x) = \dfrac{5(8x-1)\cdot 8\cdot(3x-1)^3-(8x-1)^5\cdot 3(x-1)^2\cdot 3}{(3x-1)^6}$

4) $y = \tan^2(x)\cdot\cos(3x^2)$ R// $y' = 2\tan x\cdot\sec^2 x\cdot\cos(3x^2)+\tan^2 x\cdot -\operatorname{sen}(3x^2)\cdot 6x$

5) $f(z) = \sqrt{\csc(1-2z)}$ R// $\dfrac{1}{2\sqrt{\csc(1-2z)}}\cdot -\csc(1-2z)\cdot\cot(1-2z)\cdot -2$

6) $h(m) = \sec^3(\operatorname{sen}(3m^2+m))$ R// $3\sec^2(\operatorname{sen}(3m^2+m))\cdot\cos(3m^2+m)(6m+1)$

7) $y = \ln^6(e^{2\tan x}+3x^2)$ R// $5\ln^5(e^{2\tan x}+3x^2)\cdot\dfrac{1}{e^{2\tan x}+3x^2}\cdot(e^{2\tan x}\cdot 2\sec^2 x+6x)$

8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x^3-1)e^{-x^2}}{\sqrt{1-5x}}\right)$ R// $\dfrac{\sqrt{1-5x}}{(x^3-1)e^{-x^2}}\cdot\dfrac{\left[3x^2e^{-x^2}+(x^3-1)e^{-x^2}\cdot -2x\right]\sqrt{1-5x}-(x^3-1)e^{-x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-5x}}\cdot -5}{(1-5x)}$

9) $f(x) = e^{3x}\cdot g(\ln^2 x)$ donde g es derivable R// $e^{3x}\cdot 3\cdot g(\ln^2 x)+e^{3x}\cdot g'(\ln^2 x)\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$

10) $g(x) = \arctan^3(\ln(x^2+e^x))$ R// $3\arctan^2(\ln(x^2+e^x))\cdot\dfrac{1}{1+(\ln(x^2+e^x))^2}\cdot\dfrac{1}{x^2+e^x}\cdot(2x+e^x)$

11) $h(u) = e^{u\cdot \operatorname{sen} u} + \ln^3(3-2u^2)$ R// $e^{u\cdot\operatorname{sen}(u)}\cdot(\operatorname{sen}u + u\cos u) + 3\ln^2(3-2u^2)\cdot \dfrac{1}{3-2u^2}\cdot -4u$

12) $h(x) = \ln\left(3^{g(x^3+4)} + \arccos x\right)$ con g derivable R// $h'(x) = \dfrac{1}{3^{g(x^3+4)} + \arccos x}\cdot\left(3^{g(x^3+4)}\ln 3\cdot g'(x^3+4)\cdot 3x + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Derivadas de orden superior

13) Considere la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$. Compruebe que la función $y = (3x-5)e^{-2x}$ satisface la ecuación anterior.

14) Halle las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.
R// $A = \frac{-1}{2}$, $B = \frac{-1}{2}$, $C = -\frac{3}{4}$

En cada uno de los siguientes casos, encuentre la derivada indicada:

15) $f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$; $f'''(x)$ R// $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \cos x$

16) $f(x) = x + e^{-1/x}$; $f''(x)$ R// $f''(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x^4} - \dfrac{2e^{-1/x}}{x^3}$

17) $y = \dfrac{1}{5x-6}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ R// $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{-750}{(5x-6)^4}$

18) $f(x) = 2^{\cos x}$; $f''(x)$ R// $2^{\cos x}\cdot\left[\ln^2 2\cdot \operatorname{sen}^2 x - \ln 2\cdot \cos x\right]$

19) Sea f una función derivable tal que $x\cdot[f(x)]^3 + x\cdot f(x) = 6$ y $f(3) = 1$. Halle $f'(3)$. R// $-1/6$

20) Si $h(x) = f(g(x))$ donde $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ y $f'(6) = 7$. Halle $h'(3)$. R// 28

21) Dado que $h(x) = \sqrt{f(e^{x^2-x})}$, $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$, determine $h'(0)$. R// $-3/2$

Derivación implícita

Calcule la derivada que se solicita

22) $\frac{dz}{dx}$ en $(-3,0)$ dado $x^2z + xz^2 = 3x+9$ R// $1/3$

23) $\frac{dz}{dw}$, dado $z^2 = \ln(w+z)$ R// $z' = \frac{1}{2z(w+z)-1}$

24) $\frac{dx}{dy}$, dado $4x\ln(2x+y) = 4$ R// $x' = \frac{-x}{\ln(2x+y)(2x+y)+2x}$

Sabiendo que las ecuaciones siguientes definen a y como función implícita de x, obtenga y'

25) $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ R// $y' = \frac{x^2-2y}{2x-y^2}$

26) $x^3 - \operatorname{sen} y + x\ln^2 y = ye^{2x}$ R// $y' = \frac{2y^2e^{2x} - 3x^2y - y\ln^2 y}{2x\ln y - y\cos y - ye^{2x}}$

27) $x + \cos x + xy^2 = e^y$ R// $y' = \frac{\operatorname{sen} x - y^2 - 1}{2xy - e^y}$

28) $x + e^{xy} - y^3 - y = 3$ R// $y' = \frac{ye^{xy}+1}{1+3y^2-xe^{xy}}$

Derivación logarítmica

Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

29) $f(x) = (x+1)^{x^2}$ R// $f'(x) = \left(2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right)(x+1)^{x^2}$

30) $g(x) = \sqrt{(2x)^x}$ R// $g'(x) = \frac{2^{x-1}x^x(\ln(2x)+1)}{\sqrt{(2x)^x}}$

31) $h(x) = (x^3+x)^{3x-2}$ R// $h'(x) = \left(3\ln(x^3+x) + \frac{(3x^2+1)(3x-2)}{x^3+x}\right)(x^3+x)^{3x-2}$

32) $f(x) = x^{\tan x} + x^6$ R// $f'(x) = \left(\sec^2 x \cdot \ln x + \frac{\tan x}{x}\right)(x^{\tan x} + x^6)$

Utilice derivación logarítimica para obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

33) $y=\dfrac{(x+3)^2}{e^x\cdot\cos x}$ R// $y'=\dfrac{(x+3)[\operatorname{sen}(x)\cdot(x+3)-\cos(x)\cdot(x+1)]}{e^x\cdot\cos^2(x)}$

34) $h(x)=\dfrac{x^{3/4}\cdot\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ R// $h'(x)=\dfrac{39x^3-14x^2+51x-6}{4x^{1/4}(3x+2)^6\sqrt{x^2+1}}$

35) $f(x)=\dfrac{x^2(x^3-2)}{(5x^3+1)^2}$ R// $f'(x)=\dfrac{x(5x^6-45x^3+4)}{(5x^3+1)^3}$

Rectas tangentes y normales a curvas

36) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x\sqrt{x}$ en el punto $(1,1)$.
R// $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

37) Encuentre los puntos sobre la curva de ecuación $y=x^4-6x^2+4$ en los que la recta tangente es horizontal. R// $(0,4)$, $(\sqrt{3},-5)$, $(-\sqrt{3},-5)$

38) Encuentre las ecuaciones de las rectas a la curva $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x-2y=2$. R// $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$; $y=\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$

39) Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y=\dfrac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta con ecuación $10x-y=5$. R// $(2,4)$

40) Halle la ecuación de la recta normal y tangente a la curva $x^2+xy+y^2-3y=10$ en el punto $(2,3)$.
R// $5x-7y+11=0$

41) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y^3-xy^2+\cos(xy)=2$, en $x=0$.
R// $y=\frac{1}{3}x+1$

42) Sea $y=f(x)$ definida por $f(x)=x^2+3\ln(x+3)$. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto de la abcisa $x=0$. Verificar que la curva tiene otra recta tangente paralela a la recta anterior y determinarla. R// $y=x+3\ln 3$. La 2da recta tangente $y=x+\frac{35}{4}-\ln 8$.

43) Encuentre los puntos de la curva con ecuación $h(x)=\dfrac{x}{x+2}$, donde la recta normal a la curva h es paralela a la recta $4x+2y=5$. Además determine la ecuación de la recta normal en cada punto. R// $y=-2x$; $y=-2x-6$.

44) Halle la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $x^2+xy+y^2-3y=10$ en el punto $(2,3)$. R// $y=\frac{5}{7}x+\frac{11}{7}$

45) Hallar la o las ecuaciones de las rectas que sean tangentes a la gráfica de $y=x^3$ y que sean paralelas a la recta $3x-y+1=0$. R// $y=3x+2$; $y=3x-2$.

46) Suponga que la curva C está dada por la ecuación $x^3y^2-\ln(y+1)=-1+(1-2x)^{10}$ la cual define a y como función implícita de variable x.

a) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$

b) Determine la ecuación de la recta normal a C en $(1,0)$.

47) Suponga que la relación $xy=\arctan(y)+x$, define a y como función implícita de x. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(0,0)$.

Problemas de tasas de cambio relacionadas

48) De un tubo sale arena a razón de 16 dm^3/s. Si la arena forma una pirámide cónica en el suelo cuya altura es siempre $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide de cuando tiene 4dm de altura? R// $0{,}079\ \frac{dm}{s}$

49) Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito en forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) a razón de $3\pi\ m^3/h$. Si el depósito tiene un radio de 2,5 m en su parte superior y una profundidad de 10 m, entonces:

a) ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8m? R// 0.75 m/h

b) ¿A qué razón varia el área de la superficie del nivel de aceite en ese mismo instánte? R// $\frac{3\pi}{4}\ m^2/h$

50) En un muelle una mujer tira de un bote a razón de 15 m/min sirviéndose de una soga amarrada en el bote a nivel del agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4.8 m por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6m? R// 25 m/min

51) Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000m, en una trayectoria que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instánte dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del avión es $\frac{\pi}{3}$ radianes y aumenta a razón de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la velocidad del avión. R// −66.67 m/s

52) Una partícula se está moviendo sobre una curva cuya ecuación es

$$\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$$

Suponga que la coordenada x se está incrementando a razón de 6 unid/s cuando la partícula está en el punto (1,2).

a) ¿Con qué rapidez está cambiando la coordenada y del punto en ese instánte? 8.57 unid/s

b) ¿La partícula esta ascendiendo o descendiendo en ese instánte? R// Descendiendo

53) Una ardilla en la base de un árbol comienza a subirlo a razón de 2.5 m/s. Dos segundos después un gato situado a 36 m de la base del árbol ve la ardilla y comienza a correr hacia el árbol con una rapidez de 3 m/s. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el gato y la ardilla 4s después de iniciada la persecución? R// Disminuye a razón de 1.22 m/s.

54) Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) en la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. El controlador detecta que el avión A viaja a 450 km/h y el avión B a 600 km/h.

a) ¿A qué ritmo varia la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 km y 200 km, respectivamente, del punto de convergencia? R// −750 km/h

b) ¿De cuanto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?
R// 20 min

55) Un hombre se aleja de un edificio de 18 m de altura a una velocidad de 1.8 m/s. Una persona ubicada en la azotea del edificio observa al hombre alejarse. ¿A qué velocidad varia el ángulo de depresión de la persona en la azotea hacia el hombre cuando éste dista 24 m de la base del edificio? R// Disminuye a 0.036 rad/s.

56) Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva $y = 2^x$. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de 1 unid/s. ¿A qué velocidad aumenta el área del rectángulo cuando $x = 2$? R// 3.44 $unid^2/s$.

57) Una esfera de hielo se derrite de manera tal que su superficie decrece a $2 cm^2$ por minuto. ¿A qué velocidad disminuye el radio de la esfera cuando es 15 cm? R// −0,00530516 cm/min

56) Una piscina mide 12 m de largo y 6 m de ancho. Su profundidad es 1.2 m en un extremo y 2.7 m en el otro extremo, aumentando en línea recta de un extremo a otro. Si se bombea agua en la piscina a $3 m^3$ por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando es 1 m el extremo más profundo? R// 6,25 cm/min

57) Un auto viaja por una carretera recta y plana a una velocidad constante de 5 m/s. En cierto momento pasa por debajo de un globo que está, en ese instante, a una altura de 100m sobre el nivel del suelo. Dicho globo está descendiendo verticalmente a una velocidad de 1/3 m/s. Determine la velocidad a la que cambia la distancia entre el globo y el auto 9 segundos después de que el auto pasó por debajo del globo.

Regla de L'Hopital

Utilice la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:

58) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$ RII $-1/6$

59) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\log(e^x - 1)}{\log(3x)}$ RII 1

60) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{5 - 4^x}$ RII 0

61) $\lim_{x \to 0} \left[(1 - e^x) \ln x^2\right]$ RII 0

62) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\tan x)}$ RII 1

63) $\lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ RII 1

64) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2}\right)$ RII $-1/4$

65) $\lim_{x \to 1^+} \left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{x}{\ln x}\right]$ RII $-3/2$

66) $\lim_{x \to -\infty} \left(x e^{1/x} - x\right)$ RII 1

67) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^x$ RII e^{-1}

68) $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} + 1\right)^{1/x}$ RII e^2

69) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$ RII e^{-6}

70) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(2x-\pi)^2}$ R|| $-1/8$

71) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)^{\sqrt{x}}$ R|| 1

72) $\lim_{x \to 0^+} x^{(1-e^x)}$ R|| 1

73) $\lim_{x \to 0^+} (\tan(x))^{x^2}$ R|| 1

74) $\lim_{x \to +\infty} (2x+1)^{1/\ln(x)}$ R|| e

75) $\lim_{x \to 0} (1+x^2)^{1/x}$ R|| 1

76) $\lim_{x \to 0^+} x^{\tan x}$ R|| 1

77) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+1}{3}\right)^{1/(x-2)}$ R|| $1/3$

78) $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{1/x}+\ln x\right)$ R|| $+\infty$

79) $\lim_{x \to 0} (\cos(2x))^{3/x^2}$ R|| e^{-6}

80) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{x(e^x+1)}\right]$ R|| $1/4$

81) $\lim_{r \to 0} (1-2r)^{\cot(3r)}$ R||