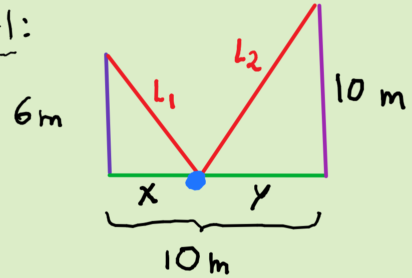
1 P#1:



Se debe minimizar la longitud del cable

P#2: $L(x,y) = \underbrace{\sqrt{6^2+x^2}}_{L_1} + \underbrace{\sqrt{y^2+10^2}}_{L_2}$

P#3: $x+y=10 \iff \boxed{y = 10-x}$

P#4: $L(x) = \sqrt{36+x^2} + \sqrt{(10-x)^2+100}$, $D_L = [0,10]$

P#5: $L'(x) = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{36+x^2}} \cdot \cancel{2}x + \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{(10-x)^2+100}} \cdot -\cancel{2}(10-x)$

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{36+x^2}} + \frac{-(10-x)}{\sqrt{(10-x)^2+100}}$$

$$L'(x) = \frac{x\sqrt{(10-x)^2+100} - (10-x)\sqrt{36+x^2}}{\sqrt{36+x^2}\cdot\sqrt{(10-x)^2+100}}$$

Luego $L'(x) = 0 \iff$

$$x\sqrt{(10-x)^2+100} - (10-x)\sqrt{36+x^2} = 0$$

$$x\sqrt{(10-x)^2+100} = (10-x)\sqrt{36+x^2}$$

$$x^2\left[(10-x)^2+100\right] = (10-x)^2(36+x^2)$$

$$(10-x)^2\cdot x^2 + 100x^2 = (10-x)^2(36+x^2)$$

$$(10-x)^2\cdot x^2 - (10-x)^2(36+x^2) = -100x^2$$

$$(10-x)^2\left[\cancel{x^2} - (36+\cancel{x^2})\right] = -100x^2$$

$$-36(10-x)^2 = -100x^2$$

$$36(x^2-20x+100) = 100x^2$$

$$9(x^2-20x+100) = 25x^2$$

$$9x^2 - 180x + 900 = 25x^2$$

$$16x^2 + 180x - 900 = 0$$

$$4x^2 + 45x - 225 = 0$$

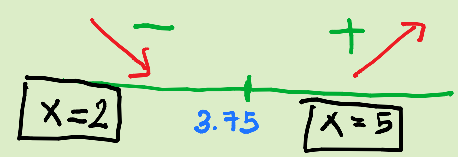
$$(x+15)(4x-15) = 0$$

$\boxed{x=-15}$ (no está en el dominio)

$\boxed{x = \frac{15}{4}}$ si está en el dominio

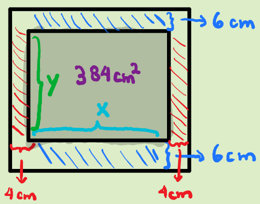
$x = \frac{15}{4} \approx 3.75$ m

Usando el criterio de la primera derivada verificamos que $x = 3.75$ m es un valor mínimo. En efecto:



P#6: De esta forma, el punto debe ubicarse a 3,75 m del poste de 6m para minimizar la longitud del cable

2



P#1:

P#2: $A(x,y) = (x+8)(y+12)$

P#3: $384 = xy \iff \boxed{\frac{384}{x} = y}$

P#4: $A(x) = (x+8)\left(\frac{384}{x}+12\right)$; $D_A =]0,+\infty[$

P#5: $A'(x) = [(x+8)]'\cdot\left(\frac{384}{x}+12\right) + (x+8)\cdot\left[\left(\frac{384}{x}+12\right)\right]'$

$A'(x) = 1\cdot\left(\frac{384}{x}+12\right) + (x+8)\cdot\left(\frac{-384}{x^2}\right)$

$A'(x) = \frac{384}{x} + 12 + \frac{-384\cancel{x}}{\cancel{x^2}} - \frac{3072}{x^2}$

$A'(x) = \cancel{\frac{384}{x}} + 12 - \cancel{\frac{384}{x}} - \frac{3072}{x^2}$

$A'(x) = 12 - \frac{3072}{x^2}$

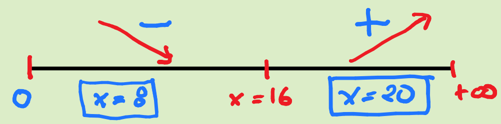
$A'(x) = \frac{12x^2 - 3072}{x^2}$

$A'(x) = \frac{12(x^2-256)}{x^2}$

$$\boxed{A'(x) = \frac{12(x+16)(x-16)}{x^2}}$$

Luego: $A'(x) = 0$ cuando $\boxed{x=16}$ y $\boxed{x=-16}$ y $A'(x)$ se indefine cuando $\boxed{x=0}$. Pero $\boxed{x=16}$ es el único valor que pertenece al dominio de $A(x)$.

Debemos probar que $x=16$ representa un valor mínimo.
Para ello, utilizamos el criterio de la primera derivada. Esto es:

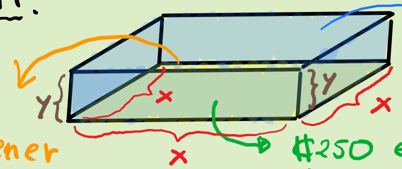


Así, nos damos cuenta que $x=16$ representa un valor mínimo. Con ello, $y = \frac{384}{16} = 24$ representa el valor mínimo asociado a y.

P#6: Las dimensiones del cartel para un área mínima son:

$$\begin{cases} x+8 = 16+8 = 24 \text{ cm} & (\text{ancho}) \\ y+12 = 24+12 = 36 \text{ cm} & (\text{largo}) \end{cases}$$

③ P#1:



\$83 el metro cuadrado de los laterales

Debe contener $125\ m^3$

\$250 el metro cuadrado de la base.

P#2: $\underset{\text{costo}}{C(x,y)} = \underbrace{250}_{\text{precio}} \cdot \underset{\text{área de la base}}{x^2} + \underbrace{83}_{\text{precio}} \cdot \underset{\text{áreas laterales}}{4yx}$

P#3: $125 = x^2 y \iff \boxed{\dfrac{125}{x^2} = y}$

P#4: $C(x) = 250x^2 + 332 \cdot \left(\dfrac{125}{\cancel{x^2}}\right)\cancel{x}$

$C(x) = 250x^2 + \dfrac{41500}{x}$; $D_C =]0,+\infty[$

P#5: $c'(x) = 500x - \dfrac{41500}{x^2}$

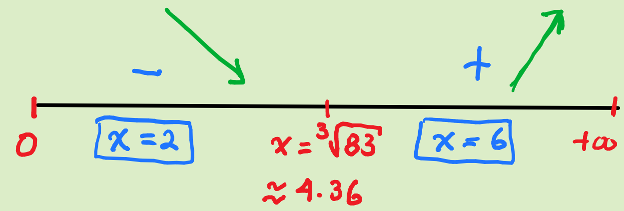
$c'(x) = \dfrac{500x^3 - 41500}{x^2}$

$c'(x) = \dfrac{500(x^3 - 83)}{x^2}$

$c'(x) = \dfrac{500(x - \sqrt[3]{83})(x^2 + x\sqrt[3]{83} + \sqrt[3]{83^2})}{x^2}$

Luego $\boxed{c'(x) = 0}$ cuando $\boxed{x = \sqrt[3]{83}}$ y $c'(x)$ se indefine cuando $\boxed{x = 0}$. Pero $x = \sqrt[3]{83}$ es el único valor que pertenece al dominio de $C(x)$.

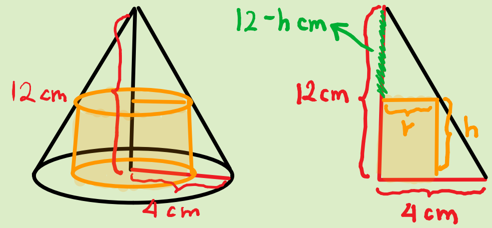
Debemos probar que $x = \sqrt[3]{83}$ representa un valor mínimo. Para ello utilizamos el criterio de la primera derivada. Esto es:



Así, nos damos cuenta que $x = \sqrt[3]{83}$ representa un valor mínimo. Con ello, $y = \dfrac{125}{(\sqrt[3]{83})^2} \approx 6.56$ representa el valor mínimo asociado a y.

P#6: Las dimensiones para que la construcción de la caja sea económica deben ser aproximadamente 4.36 cm para el lado de la base y 6.56 cm de altura.

④ P#1:



$$\frac{12}{12-h} = \frac{4}{r}$$

$$\boxed{12r = 4(12-h)}$$

P#2: $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$

P#3: $12r = 4(12-h) \iff 3r = 12-h \iff \boxed{r = \frac{12-h}{3}}$

P#4: $V(h) = \pi \cdot \left(\frac{12-h}{3}\right)^2 \cdot h \iff \boxed{V(h) = \frac{\pi}{9}(12-h)^2 \cdot h}$

Los valores que puede tener la altura del cilindro $\leftrightarrow$ $D_V = [0, 12]$

P#5: $V'(h) = \frac{\pi}{9} \cdot \left[(12-h)^2 \cdot h\right]'$ faltó "h"

$$V'(h) = \frac{\pi}{9}\left[2 \cdot (12-h)(-1) \cdot h + (12-h)^2 \cdot 1\right]$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{9}(12-h)\left[-2h + (12-h)\right]$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{9}(12-h)(12-3h)$$

Luego $\boxed{V'(h)=0}$ cuando $\boxed{h=12}$ y $\boxed{h=4}$. $V'(h)$ no se indefine. Aquí se puede probar fácilmente que $h=4$ representa el valor máximo, sustituyendo todos los valores en la función, dado que el dominio es un intervalo cerrado.

En efecto:

$V(0) = 0$

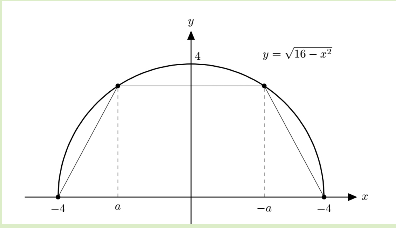
$V(4) = \frac{256\pi}{9} \approx 89{,}36 \text{ cm}^3$

$V(12) = 0$

Así nos damos cuenta que $h=4$ representa un valor máximo. Luego: $r = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$ representa el valor máximo asociado a r.

P#6: Las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en el cono dado son $\boxed{r = \frac{8}{3} \text{ cm}}$ y $\boxed{h = 4 \text{ cm}}$.

⑤ P#1:



P#2: $A(a,y) = \dfrac{(8+2a)\cdot y}{2}$ → altura

Área Trapecio   Base Mayor   Base menor

P#3: $y = \sqrt{16-a^2}$

P#4: $A(a) = \dfrac{(8+2a)\cdot\sqrt{16-a^2}}{2}$

$A(a) = (4+a)\sqrt{16-a^2}$; $D_A = [0,4]$

pues son los únicos valores que puede tomar a.

P#5: $A'(a) = [(4+a)]'\cdot\sqrt{16-a^2} + (4+a)\cdot[\sqrt{16-a^2}]'$

$A'(a) = \sqrt{16-a^2} + (4+a)\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{16-a^2}}\cdot -\cancel{2}a$

$A'(a) = \sqrt{16-a^2} - \dfrac{(4+a)\cdot a}{\sqrt{16-a^2}}$

$A'(a) = \dfrac{(16-a^2)-(4a+a^2)}{\sqrt{16-a^2}}$

$A'(a) = \dfrac{16-a^2-4a-a^2}{\sqrt{16-a^2}}$

$A'(a) = \dfrac{-2a^2-4a+16}{\sqrt{16-a^2}}$

$A'(a) = \dfrac{-2(a^2+2a-8)}{\sqrt{16-a^2}}$

$A'(a) = \dfrac{-2(a+4)(a-2)}{\sqrt{16-a^2}}$

Luego $\boxed{A'(a)=0}$ cuando $\boxed{a=-4}$ y $\boxed{a=2}$ y $A'(a)$ se indefine cuando $\boxed{a=4}$ o $\boxed{a=-4}$. Por el dominio de la función, se puede probar fácilmente que $a=2$ representa el valor máximo, sustituyendo todos los valores en la función, dado que el dominio es un intervalo cerrado. En efecto:

$A(0) = 16$

$A(2) = 6\sqrt{12} = 6\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20.78$

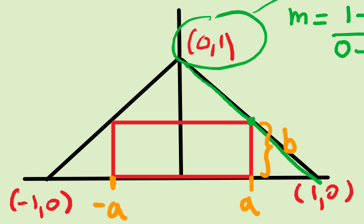
$A(4) = 0$

Así nos damos cuenta que $\boxed{a=2}$ representa un valor máximo.

Luego, $y = \sqrt{16-2^2} = \sqrt{12}$ representa el valor máximo asociado a y.

P#6: Las dimensiones del trapecio isósceles con mayor área sucede cuando $\boxed{a=2}$ y $\boxed{y=\sqrt{12}}$, es decir, la base menor mide 4 unidades lineales y la altura del mismo es $\sqrt{12}$ unidades lineales.

⑥ P#1:



$m = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$; $b = y - mx$, $b = 1 - (-1)\cdot(0)$, $\boxed{b=1}$

$\boxed{y = -x+1}$ recta en verde

En particular, $\boxed{b = -a+1}$

P#2: $A(a,b) = \underbrace{2a}_{\text{base}} \cdot \underbrace{b}_{\text{altura}}$

P#3: $b = -a+1$

P#4: $A(a) = 2a(-a+1) = -2a^2+2a$; $D_A = [0,1]$ ($a \in$)

P#5: $A'(a) = -4a+2$

Luego, $A'(a) = 0$ cuando $\boxed{a = \frac{1}{2}}$. Por el dominio de la función, se puede probar fácilmente que $a = \frac{1}{2}$ representa el valor máximo, sustituyendo todos los valores en la función, dado que el dominio es un intervalo cerrado. En efecto:

$A(0) = 0$

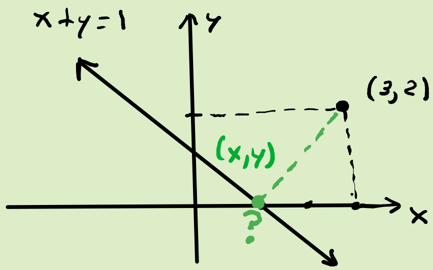
$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$A(1) = 0$

Así nos damos cuenta que $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ representa un valor máximo. Luego $b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ representa el valor máximo asociado a b.

P#6: Las dimensiones del rectángulo con mayor área sucede cuando $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ y $\boxed{b = \frac{1}{2}}$, es decir, la base del rectángulo es de una unidad lineal y la altura es de media unidad lineal.

⑦ P#1:



P#2: $d((3,2),(x,y)) = \sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2} = d(x,y)$

P#3: $x+y=1 \iff \boxed{y=1-x}$

P#4: $d(x) = \sqrt{(3-x)^2+(2-(1-x))^2}$

$d(x) = \sqrt{(3-x)^2+(1+x)^2}$; $D_d = \mathbb{R}$

P#5: $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(3-x)^2+(1+x)^2}} \cdot [(3-x)^2+(1+x)^2]'$

$d'(x) = \dfrac{2(3-x)\cdot(-1)+2(1+x)}{2\quad (3-x)^2+(1+x)^2}$

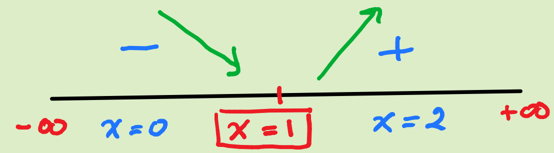
$d'(x) = \dfrac{-2(3-x)+2(1+x)}{2\quad (3-x)^2+(1+x)^2}$

$d'(x) = \dfrac{\cancel{2}[(x-3)+(x+1)]}{\cancel{2}\quad (3-x)^2+(1+x)^2}$

$d'(x) = \dfrac{2x-2}{(3-x)^2+(1+x)^2}$

Luego $\boxed{d'(x)=0}$ cuando $\boxed{x=1}$. $d'(x)$ no se indefine (¿porqué?)

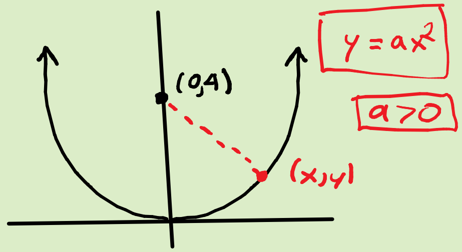
Debemos probar que $\boxed{x=1}$ representa un valor mínimo. Para ello utilizamos el criterio de la primera derivada. Esto es:



Así, nos damos cuenta que $x=1$ representa un valor mínimo. Con ello, $y=1-1=0$ representa el valor mínimo asociado a y.

P#6: El punto sobre la recta $x+y=1$ más cercano al punto $(3,2)$ es $(1,0)$.

8 P#1:



P#2: $d(x,y)=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$

P#3: $y=ax^2$; $\boxed{a>0}$

P#4: $d(x)=\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}$; $D_d=\mathbb{R}$

P#5: $d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}\cdot\left[x^2+(ax^2-4)^2\right]'$

$$d'(x)=\frac{2x+2(ax^2-4).(2ax)}{2\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{\cancel{2}\left[x+(ax^2-4)\cdot(2ax)\right]}{\cancel{2}\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{x+2a^2x^3-8ax}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{(x-8ax)+2a^2x^3}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{(1-8a)x+2a^2x^3}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{x\left[(1-8a)+2a^2x^2\right]}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

$$d'(x)=\frac{x\left[2a^2x^2-(8a-1)\right]}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

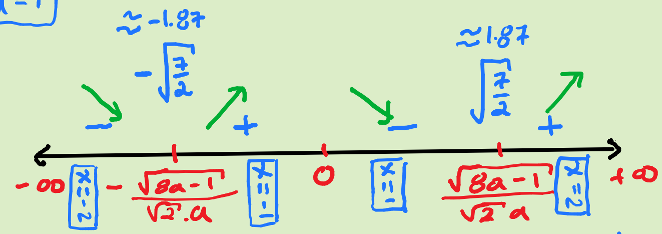
$$d'(x)=\frac{x\left(\sqrt{2}ax+\sqrt{8a-1}\right)\left(\sqrt{2}ax-\sqrt{8a-1}\right)}{\sqrt{x^2+(ax^2-4)^2}}$$

Luego, $\boxed{d'(x)=0}$ cuando $\boxed{x=0}$, $\boxed{x=\pm\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}a}=\pm\sqrt{\dfrac{8a-1}{2a^2}}}$

Como $a>0 \Rightarrow 8a>0 \Rightarrow 8a-1>-1>0$
$\Rightarrow \sqrt{8a-1}>0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}a}>0}$. Se debe aclarar que $d'(x)$ no se indefine. (¿por qué?).

Utilizando el criterio de la primera derivada:

$\boxed{a=1}$



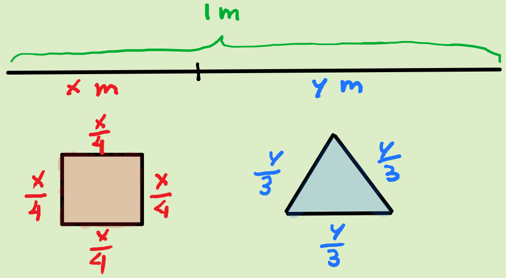
$$d'(x)=\frac{x\left(\sqrt{2}x+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{7}\right)}{\sqrt{x^2+(x^2-4)^2}}$$

Luego en $x=\pm\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}\cdot a}$ ocurre un valor mínimo. Luego,

$y=a\cdot\left(\pm\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}\cdot a}\right)^2=a\cdot\dfrac{(8a-1)}{2\cdot a^2}=\dfrac{8a-1}{2a}$ es el valor mínimo asociado a y.

P#6: Existen dos puntos más cercanos a la curva $y=ax^2$. Estos son: $\left(\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}\cdot a}, \dfrac{8a-1}{2a}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{8a-1}}{\sqrt{2}\cdot a}, \dfrac{8a-1}{2a}\right)$

⑨ P#1:



P#2: $A(x,y) = \underbrace{\left(\frac{x}{4}\right)^2}_{\text{área del cuadrado}} + \underbrace{\left(\frac{y}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}_{\text{área triángulo equilátero}} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36}$

P#3: $\boxed{x+y=1} \iff \boxed{x=1-y}$ longitud del trozo de alambre

P#4: $A(y) = \frac{(1-y)^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36}$; $D_A = [0,1]$

P#5: $A'(y) = \frac{2(1-y)\cdot(-1)}{16} + \frac{2y\cdot\sqrt{3}}{36}$

$$A'(y) = \frac{y-1}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{18}$$

$$A'(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{4} + \frac{y\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A'(y) = \frac{9(y-1)+4y\sqrt{3}}{2\cdot 36}$$

$$A'(y) = \frac{9y-9+4y\sqrt{3}}{72}$$

$$A'(y) = \frac{(9+4\sqrt{3})y-9}{72}$$

Luego, $\boxed{A'(y)=0}$ cuando $y = \frac{9}{9+4\sqrt{3}} \approx 0.5650$.

Por el dominio de la función, se puede probar que $y = \frac{9}{9+4\sqrt{3}}$ representa un valor mínimo, sustituyendo los extremos del dominio y el valor crítico en el criterio obtenido en el paso #4. En efecto:

$$A(0) = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$A\left(\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{16}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right)^2}_{\left(\frac{9+4\sqrt{3}-9}{9+4\sqrt{3}}\right)^2} + \left(\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{1}{(9+4\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{16}\cdot 48 + \frac{81\sqrt{3}}{36}\right]$$

$$= \frac{1}{(9+4\sqrt{3})^2}\cdot\left[3+\frac{9\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$= \frac{12+9\sqrt{3}}{4(9+4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3(4+3\sqrt{3})}{4(9+4\sqrt{3})^2} \approx 0.02718$$

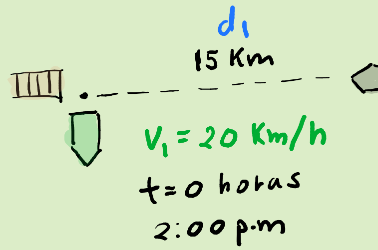
$$A(1) = \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0.04811$$

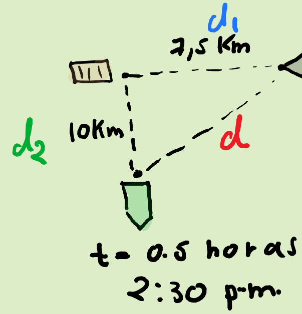
$0 \to 0.0625$
$0.5650 \to 0.0271$
$1 \to 0.0481$

Así nos damos cuenta que $\boxed{y \approx 0.5650}$ representa el valor mínimo. Luego $x = 1-\left(\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 0.4349$ representa el valor mínimo asociado a x. Por otro lado, $\boxed{y=0}$ el valor máximo que puede tener la función asociada. Con este valor, $x = 1-0 = 1$ es el valor máximo asociado a x.

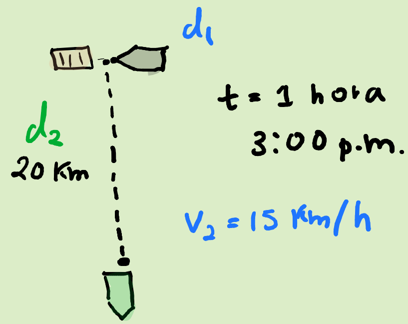
P#6: Si no se corta el cable, se obtiene el área máxima de la suma de ambas figuras formando el cuadrado. (únicamente). Si se emplea 0.56 metros de cable, aproximadamente para formar el triángulo y el resto del cable para formar el cuadrado, se minimiza la suma de las áreas.

⑩ P#1:





Para modelar el movimiento de ambas barcas, hay que ver que uno se acerca y otro se aleja.



Así: $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow \boxed{v \cdot t = d}$

Luego, el tiempo oscila entre 0 y 1 hora.

P#2: $d(d_1, d_2) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

P#3: $d_1 = v_1 \cdot \underbrace{(1-t)}_{\text{decrece en una hora}} = 15(1-t)$

$d_2 = v_2 \cdot \underbrace{t}_{\text{aumenta en una hora}} = 20t$

P#4: $d(t) = \sqrt{[15(1-t)]^2 + (20t)^2}$, $D_d = [0,1]$

$d(t) = \sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}$

P#5: $d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}} \cdot [225(1-t)^2 + 400t^2]'$

$d'(t) = \frac{450(1-t)(-1) + 800t}{\sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}}$

$d'(t) = \frac{-450 + 450t + 800t}{\sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}}$

$d'(t) = \frac{1250t - 450}{\sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}}$

$d'(t) = \frac{50(25t - 9)}{\sqrt{225(1-t)^2 + 400t^2}}$

Luego, $\boxed{d'(t) = 0}$ cuando $t = \frac{9}{25} = 0.36$. Por el dominio de la función, se puede probar que este valor representa un valor mínimo, sustituyendo los extremos del dominio y el valor obtenido en el paso #4. En efecto:

$A(0) = 15$

$\boxed{A\left(\frac{9}{25}\right) = 12}$

$A(1) = 20$

Así, nos damos cuenta $y = \overbrace{0.36}^{\frac{9}{25}}$ representa el valor mínimo.

P#6: Con esto, deben transcurrir $t = 0.36$ horas, unos 22 minutos con 36 segundos para que ambos barcos se encuentren a una distancia mínima de 12 km.