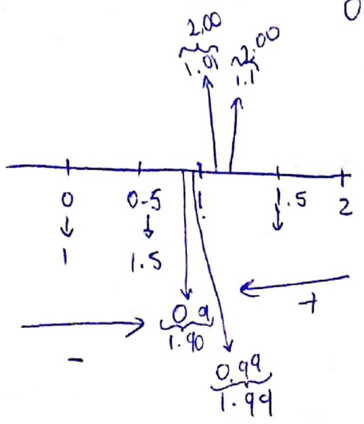
Idea intuitiva de límite

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad x=1 \rightsquigarrow \frac{0}{0} \text{ !!}$$



$f(x)$ en $x=1$ no está definida

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

El límite cuando los valores se aproximan a 1

Ejercicios

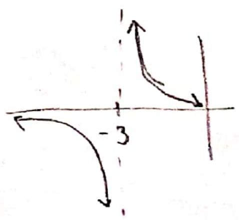
- $j(x) = \dfrac{1}{x+3}$ para $x=-3$

$$\lim_{x\to -3} j(x) = ?$$

+ lado derecho

x	-4	-3.5	-3.1	-3.01	-3	-2.99	-2.9	-2.5	-2
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	?	100	10	2	1

- lado izquierdo



$\lim_{x\to -3} j(x)$ no existe → Cuando no existe lo más probable es que haya una asíntota vertical

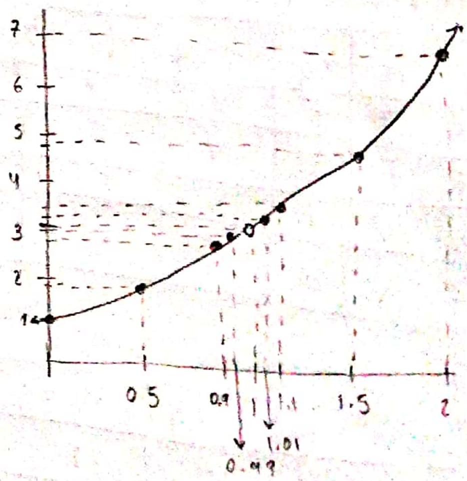
$$\lim_{x\to -3^+} j(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} j(x) = -\infty$$

- $g(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ para $x=1$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = ?$$

x	0	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5	2
$g(x)$	1	1.75	2.71	2.97	?	3.03	3.31	4.75	7



$$\lim_{x\to 1} g(x) = 3$$

- $h(x) = x^2$ para $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} h(x) = ?$$

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1	-0.99	-0.9	-0.5	0
$h(x)$	4	2.25	1.21	1.02	1	0.98	0.81	0.25	0

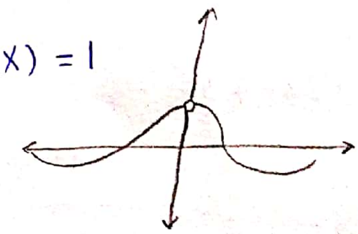
$$\lim_{x \to -1} h(x) = 1$$

- $i(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} i(x) = ?$$

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5	1
$i(x)$	0.84	0.96	0.998	1	?	1	0.998	0.96	0,84

$$\lim_{x \to 0} i(x) = 1$$



Existencia de límite

~~El límite existe~~ Presentación

Para calcular límites
- → Forma definida. Ej: $h(x)$
- → Forma indeterminada. Produce $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, ∞^0, $0 \cdot \infty$,
  Ej: $i(x)$
- → Forma indefinida. Ej: $j(x)$

$x \to c^+ \Rightarrow c < x$

$x \to c^- \Rightarrow x < c$

Propiedades de los límites (Hay que memorizarlos)

Presentación

Ejercicios (Forma Definida) Aplicando propiedades

- $\lim_{x \to 2} -3 = -3$

- $\lim_{y \to 9} \sqrt{y} + \log_3(y) = \sqrt{9} + \log_3(9) = 3 + 2 = 5$

- $\lim_{x \to -1} 2x^3 - 5^x = 2(-1)^3 - 5^{-1} = -2 - \frac{1}{5} = \frac{-11}{5}$

- $\lim_{x \to 0} [(3x+2)(x-1)] = (3 \cdot 0 + 2)(0-1) = 2 \cdot -1 = -2$

- $\lim_{x \to 2} (-3x^2 + 2x - 7) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 7 = -12 + 4 - 7 = -15$

- $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{3}{2} y + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$

- $\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^3 + 2x^2}{-x^2 - 1} = \frac{3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2}{-(-1)^2 - 1} = \frac{-3 + 2}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$

- Considere

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 < x \leq 3 \\ 5 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

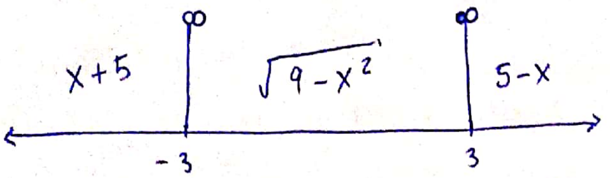
Calcule si existen los siguientes factores

a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

b) $\lim_{x \to 3} f(x)$

c) $f(3)$

d) $\lim_{x \to -4} f(x)$



a) $\lim_{x \to -3} f(x) =$ " Hay funciones diferentes a cada lado entonces hay que hacer límites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (-3)^2} = 0 \\ \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} x + 5 = -3 + 5 = 2 \end{cases}$$

lado derecho

lado izquierdo

El límite no existe

Si los límites laterales son diferentes

$\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe

b) $\lim_{x \to 3} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 3^+} 5 - x = 5 - 3 = 2 \\ \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3)^2} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe

c) $f(3) = \sqrt{9 - (3)^2} = 0$ → bolita cerrada

d) $\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} x + 5 = -4 + 5 = 1$

• Sabiendo $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, halle $\lim_{x \to 4} f(x)$

R/ $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$

$$\frac{\lim_{x \to 4} f(x) - 5}{\lim_{x \to 4} x - 2} = 1$$

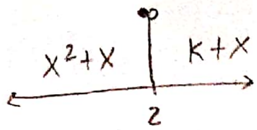
$$\frac{\lim_{x \to 4} f(x) - \overbrace{\lim_{x \to 4} 5}^{5}}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2 + 5 = 7$$

• Considere la función

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 2 \\ k + x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine el valor de k para que el $\lim_{x \to 2} h(x)$ exista



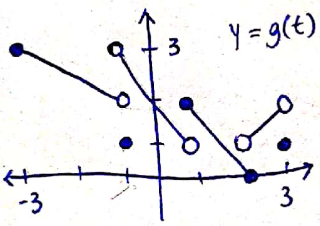
$\lim_{x \to 2} h(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} k + x = k + 2 \\ \lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + x = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

$\boxed{k = 4}$

El $\lim_{x \to 2^-} h(x)$ existe si y solo si $\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^+} h(x)$

• Determinar límites a partir del gráfico



a) $\lim_{t \to 3^+} g(t)$ no existe

b) $\lim_{t \to -1^-} g(t) = 2$

c) $\lim_{t \to -1^+} g(t) = 3$

d) $\lim_{t \to 1^-} g(t) = 1$

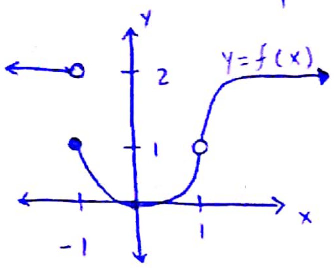
e) $\lim_{t \to 1^+} g(t) = 2$

f) $\lim_{t \to 2^-} g(t) = 0$

g) $\lim_{t \to 2^+} g(t) = 1$

h) $\lim_{t \to 3^-} g(t) = 2$

- Determinar a partir del gráfico



a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

d) $\lim_{t \to 1^-} f(x) = 1$

-

Scanned by CamScanner