در تمام مسائل اثبات فرمول ضروری نیست، یعنی برای امتحان این نوع مسائل مورد نظر نیست.

مجموعه مسائل آمار توصیفی

أ ـ مسائل شاخص‌های مرکزی و پراکندگی در سری اعداد طبقه‌بندی نشده

۱ـ اگر داشته باشیم $\sum_{i=1}^{3} x_i = ۶$ و $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = ۱۴$ مطلوبست محاسبه عبارات

الف) $\sum_{i=1}^{3} (x_i - 3)^2$ ب) $\sum_{i=1}^{3} (x_i - 2)x_i$

جواب: الف ـ ۵ ب) ۲

۲ـ اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ میانگین حسابی بوده و داشته باشیم $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ و $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ صحت تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف ـ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$

ب ـ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$

۳ـ سود خالص شرکتی در سالهای ۱۳۷۴ تا ۱۳۷۸ بترتیب ۱۲ و ۱۵ و ۱۵ و ۲۰ و ۱۸ (میلیون تومان) بوده است. میانگین سود خالص شرکت را برای این مدت حساب کنید.

جواب: ۱۶ میلیون تومان

۴ـ سرمایه شرکتی در چهار سال متوالی بترتیب ۲۰ و ۴۰ و ۴۰ و ۱۶۰ میلیون تومان بوده است بطور متوسط سرمایه این شرکت در هر سال چند برابر شده است.

جواب: ۲ برابر

۵ـ اتومبیلی مسافت بین دو شهر را با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت طی کرده است و سپس همین مسافت را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت برگشته است. سرعت متوسط رفت و برگشت چقدر است؟

جواب: ۶۸/۵۷ کیلومتر در ساعت

۶- در سری اعداد زیر مد (نما) را بدست آورید ۵-۵-۶-۶-۶-۷-۸-۸-۸

جواب: ۶ و ۸

۷- قد تعدادی دانشجو بشرح زیر است. میانه قد آنها را مشخص کنید.

الف - ۱۶۸-۱۷۱-۱۶۸-۱۷۴-۱۷۹

ب - ۱۷۴-۱۷۲-۱۶۸-۱۶۵-۱۸۰-۱۷۴

جواب: الف - ۱۷۱، ب - ۱۷۳

۸- داده‌های زیر مفروضند: ۹-۲۱-۵-۱۳-۷-۱۵-۱۷-۱۱-۱۹-۲۳

مطلوبست:

الف - دامنه تغییرات متغیر — ب - انحراف متوسط از میانگین

ج - واریانس — د - انحراف معیار

ه - ضریب واریانس — و - چارکها و انحراف چارکها و ضریب انحراف چارکها

ز - دهک دوم — ح - صدک بیست و پنجم

جواب: $R = ۱۸$ و $AD_{\bar{x}} = ۵$ و $\sigma^2 = ۳۳$ و $\sigma = ۵/۷۴$ و $CV = \%۴۱$ و $Q_1 = ۹$ و $Q_3 = ۱۹$ و $Q = ۵$

و $K = ۰/۳۶$ و $D_2 = ۸$ و $P_{25} = ۹$

۹- میانگین نمره ریاضی ۵۰ نفر دانشجو در کلاس الف ۱۴ و واریانس آن ۶۴ می‌باشد. میانگین نمره همین درس برای ۵۰ نفر دانشجو در کلاس ب ۱۲ و واریانس آن ۳۶ است. ضریب واریانس را برای هر کلاس محاسبه و پراکندگی نسبی نمرات دو کلاس را بررسی و مقایسه نمائید.

جواب: ۵۷/۱۴٪ و ۵۰٪

۱۰- در سه مؤسسه تعداد و مزد کارگران بشرح زیر است. متوسط دستمزد کل کارگران چقدر است؟

مؤسسه اول ۲۰۰ کارگر و مزد متوسط ۱۰۰۰ تومان، مؤسسه دوم ۵۰ کارگر و مزد متوسط ۱۲۰۰ تومان و مؤسسه سوم ۱۵۰ کارگر با دستمزد متوسط ۸۰۰ تومان

جواب: ۹۵۰ تومان

۱۱- میزان بارندگی در ۴ شهر مختلف عبارتست از ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۹ میلیمتر مطلوبست محاسبه واریانس و انحراف معیار و ضریب تغییر میزان بارندگی در این ۴ شهر

جواب: $\bar{x} = ۱۴$ و $\sigma^2 = ۱۱/۵$ و $\sigma = ۳/۳۹$ و $CV = \%۲۴/۲۱$

۱۲- سازمانی جهت خرید لاستیک مصرفی ماشین‌آلات خود مشخصات دو نوع لاستیک بشرح زیر در اختیار دارد

نوع الف - انحراف معیار ۲۳۸۶ کیلومتر و میانگین ۳۷۰۰۰ کیلومتر

نوع ب - انحراف معیار ۳۷۶۱ کیلومتر و میانگین ۳۸۰۰۰ کیلومتر

با بهره‌گیری از ضریب واریانس بررسی کنید خرید از کدام لاستیک به صرفه است.

جواب: ۶/۴٪ و ۱۰٪

۲- مسائل شاخص‌های مرکزی و پراکندگی در سری اعداد طبقه‌بندی شده

۱۳- مجموعه مشاهدات از اندازه قد ۴۰ نفر که بترتیب صعودی مرتب شده‌اند بشرح زیر است (ارقام به سانتیمتر است)

۱۱۹-۱۲۵-۱۲۶-۱۲۸-۱۳۲-۱۳۵-۱۳۵-۱۳۵-۱۳۶-۱۳۸

۱۳۸-۱۴۰-۱۴۰-۱۴۲-۱۴۲-۱۴۴-۱۴۴-۱۴۵-۱۴۵-۱۴۶

۱۴۶-۱۴۷-۱۴۷-۱۴۸-۱۴۹-۱۵۰-۱۵۰-۱۵۲-۱۵۳-۱۵۴

۱۵۶-۱۵۷-۱۵۸-۱۶۱-۱۶۳-۱۶۴-۱۶۵-۱۶۸-۱۷۳-۱۷۶

الف - با استفاده از اعداد اصلی میانه را پیدا کنید.

ب - جدول توزیع فراوانی برای این اعداد تنظیم نمائید. فاصله طبقات را ۹ در نظر بگیرید و از عدد ۱۱۸ شروع کنید. سپس از این جدول میانه را محاسبه کنید و آنها را با هم مقایسه نمائید.

جواب: ۱۴۶ و ۱۴۷/۲۵

۱۴- جدول توزیع فراوانی صفت x بصورت زیر است: مطلوبست محاسبه میانگین، میانه و نما برای صفت x

CL	۴۰-۴۵	۴۵-۵۰	۵۰-۵۵	۵۵-۶۰	۶۰-۶۵	۶۵-۷۰	۷۰-۷۵	۷۵-۸۰	۸۰-۸۵	۸۵-۹۰
F_i	۲	۳	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۱۲	۱۰	۸	۳

جواب: $\bar{x} = ۶۷/۰۷$ و $Md = ۶۷/۳۳$ و $Mo = ۶۷/۵$

۱۵- در جامعه‌ای جدول توزیع فراوانی صفت x بصورت زیر است مطلوبست محاسبه میانگین و واریانس و انحراف معیار این توزیع.

CL	۱/۵-۲/۵	۲/۵-۳/۵	۳/۵-۴/۵	۴/۵-۵/۵	۵/۵-۶/۵	۶/۵-۷/۵	۷/۵-۸/۵	۸/۵-۹/۵
F_i	۲	۵	۵	۸	۱۰	۸	۷	۵

جواب: $\bar{x} = ۵/۹۲$ $\sigma^۲ = ۳/۷۰$ $\sigma = ۱/۹۲$

۱۶- با توجه به جدول توزیع فراوانی زیر مطلوبست محاسبه، میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب واریانس

CL	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰	۴۰-۵۰	جمع
F_i	۱	۳	۴	۲	۱۰

جواب: $\bar{x} = ۳۲$ و $\sigma^۲ = ۸۱$ و $\sigma = ۹$ و $CV = \%۲۸/۱۲۵$

۱۷- جدول توزیع فراوانی زیر مفروض است

CL	۱۵-۲۵	۲۵-۳۵	۳۵-۴۵	۴۵-۵۵	جمع
F_i	۱۰	۳۰	۴۰	۲۰	۱۰۰

مطلوبست:

الف- محاسبه میانگین و واریانس و انحراف معیار این توزیع

ب- رسم هیستوگرام و نشان دادن مد و میانه و چارکها روی آن

ج- محاسبه مد و میانه و چارکها از جدول

د- محاسبه ضریب واریانس

هـ- احتمال آنکه عدد x بین حداقل ۲۵ و حداکثر ۴۵ باشد.

۱۶- جدول توزیع فراوانی زیر مفروض است. مطلوب است محاسبه: میانگین، واریانس، انحراف معیار، مد، میانه، ضریب چولگی پیرسون شماره ۱ و شماره ۲ و تفسیر آنها

CL	F_i
۱۵-۲۵	۲۰
۲۵-۳۵	۲۵
۳۵-۴۵	۵۰
۴۵-۵۵	۱۱۰
۵۵-۶۵	۵۰
۶۵-۷۵	۲۵
۷۵-۸۵	۲۰

جواب: $\bar{x} = ۵۰$ ، $\sigma^۲ = ۲۲۰$ ، $\sigma = ۱۴/۸۳$ ، $Mo = ۵۰$ ، $Md = ۵۰$

$SK_1 = SK_2 = 0$

مثال: گشتاورهای مرتبهٔ اول تا چهارم نسبت به مبدأ صفر و نسبت به مبداء میانگین را برای سری اعداد ۷ و ۴ و ۵ و ۲ پیدا کنید.

الف ـ گشتاورهای اولیه:

x_i	x_i^1	x_i^2	x_i^3	x_i^4
۲	۲	۴	۸	۱۶
۴	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶
۵	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵
۷	۷	۴۹	۳۴۳	۲۴۰۱
Σ	۱۸	۹۴	۵۴۰	۳۲۹۸

$$m_1 = \frac{\Sigma x_i}{N} = ۴/۵ = \bar{x}$$

$$m_2 = \frac{\Sigma x_i^2}{N} = \frac{۹۴}{۴} = ۲۳/۵$$

$$m_3 = \frac{\Sigma x_i^3}{N} = \frac{۵۴۰}{۴} = ۱۳۵$$

$$m_4 = \frac{\Sigma x_i^4}{N} = \frac{۳۲۹۸}{۴} = ۸۲۴/۵$$

ب ـ گشتاورهای مرکزی

x_i	$(x_i-\bar{x})^1$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$
۲	-۲/۵	۶/۲۵	-۱۵/۶۲	۳۹/۰۶
۴	-۰/۵	۰/۲۵	-۰/۱۲۵	۰/۰۶
۵	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵	۰/۰۶
۷	۲/۵	۶/۲۵	۱۵/۶۷	۳۹/۰۶
Σ	۰	۱۳	۰	۷۸/۲۴

$$\mu_1 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})}{N} = \frac{۰}{۴} = ۰$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{N} = \frac{۱۳}{۴} = ۳/۲۵ = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^3}{N} = \frac{۰}{۴} = ۰$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^4}{N} = \frac{۷۸/۲۴}{۴} = ۱۹/۵۶$$

۲-۲ـ ضریب چولگی (ضریب انحراف توزیع از حالت قرینگی)

۲-۲-۱ـ تعریف

اگر منحنی توزیع فراوانی نامتقارن باشد، جامعه دارای چولگی می‌باشد که به آن عدم قرینگی هم می‌گویند

برای مقایسه نحوه توزیع دو جامعه علاوه بر معیارهای مرکزی و پراکندگی معیار دیگری بنام

چولگی وجود دارد. ضریب چولگی واحد ندارد (عدد نسبی است) و انواع آن بشرح زیر است:

۲ـ۲ـ۲ـ انواع ضریب چولگی

$SK = \frac{\Sigma F(X-\mu)^3}{\sigma^3}$

۲ـ۲ـ۲ـ۱ ضریب چولگی پیرسون شمارهٔ (۱)

$$SK_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

۲ـ۲ـ۲ـ۲ ضریب چولگی پیرسون شمارهٔ (۲)

$$SK_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

۲ـ۲ـ۲ـ۳ ضریب چولگی به طریق گشتاور که عبارت است از نسبت گشتاور مرتبهٔ سوم مرکزی (نسبت به میانگین) به مکعب انحراف معیار.

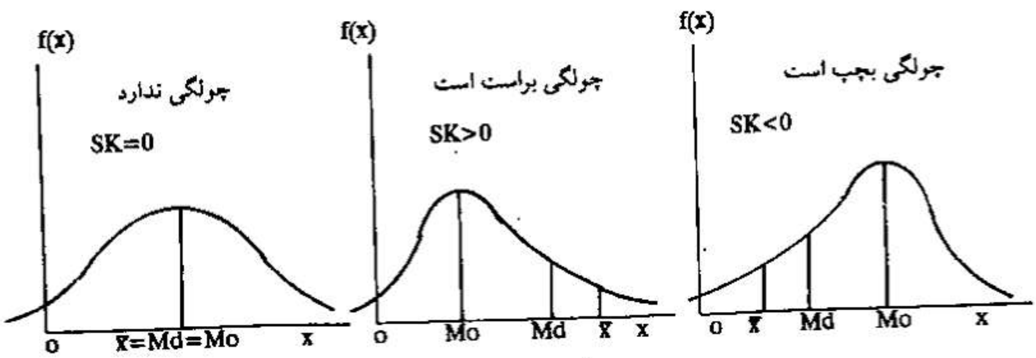
$$SK = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

الف ـ ضریب چولگی به طریق گشتاور وقتی که صفت متغیر به صورت کمی گسسته باشد.

$$SK = \frac{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^3}{N}}{\left[\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{N}}\right]^3}$$

ب ـ ضریب چولگی به طریق گشتاور وقتی که صفت متغیر به صورت کمی پیوسته باشد.

$$SK = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^3 f(x)dx}{\left[\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx}\right]^3}$$



۲-۲-۳- تفسیر ضریب چولگی

الف:

توزیع مورد نظر چولگی ندارد.	$SK = 0$
چولگی به سمت راست است	$Sk > 0$
چولگی به سمت چپ است	$SK < 0$

ب:

توزیع تقریباً چولگی ندارد	$\|SK\| \leq ۰/۱$
چولگی توزیع کم است	$۰/۱ < \|SK\| \leq ۰/۵$
چولگی توزیع زیاد است	$\|SK\| > ۰/۵$

مثال: در مثال نمونه موضوع بند ۱-۵-۲ چولگی توزیع را حساب کنید و آن را تفسیر نمائید.

حل: در مثال ۱-۵-۲ معیارهای مرکزی و پراکندگی بشرح زیر محاسبه گردید.

$\bar{x} = ۷۵$ $\quad Mo = ۷۷/۴ \quad Md = ۷۵/۶$ و $\sigma = ۲۱/۱۷$

$$SK_۱ = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{۷۵ - ۷۷/۴}{۲۱/۱۷} = \frac{-۲/۴}{۲۱/۱۷} = -۰/۱۱$$

$$SK_۲ = \frac{۳(\bar{x} - Md)}{\sigma} = \frac{۳(۷۵ - ۷۵/۶)}{۲۱/۱۷} = \frac{-۱/۸}{۲۱/۱۷} = -۰/۰۴$$

چولگی به چپ است و ناچیز است

۲-۲-۴- قاعده تجربی پیرسون

پیرسون به تجربه دریافته است که اگر چولگی توزیع متعادل باشد بین معیارهای مرکزی آن رابطه تقریبی زیر وجود دارد.

$\bar{x} - Mo \simeq ۳(\bar{x} - Md)$

$۲\bar{x} + Mo \simeq ۳Md$ فرمول تجربی پیرسون

۲-۳- ضریب کشیدگی

۲-۳-۱- تعریف ضریب کشیدگی

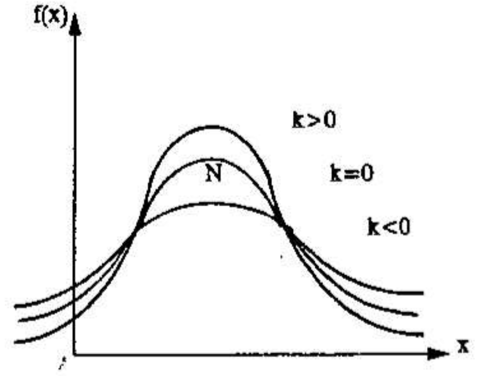
در هر توزیع فراوانی منظور از ضریب کشیدگی درجه کوتاهی و بلندی آن است که نسبت به توزیع

نرمال سنجیده می‌شود.

برای مقایسه نحوه توزیع دو جامعه علاوه بر معیارهای مرکزی و پراکندگی و چولگی شاخص دیگری بنام معیار کشیدگی وجود دارد که ضریب کشیدگی (که عددی بدون واحد و یک عدد نسبی است) از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$K = \frac{\sum f(x-\mu)^{4}}{\sigma^{4}}$$

$$K = E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - ۳$$



در فرمول فوق μ_4 گشتاور مرتبه چهارم مرکزی و σ انحراف معیار توزیع می‌باشد.

۲ـ۳ـ۲ـ تفسیر ضریب کشیدگی

الف:	توزیع نرمال است	$K = 0$
	توزیع مورد نظر از توزیع نرمال کشیده‌تر است	$K > 0$
	توزیع مورد نظر از توزیع نرمال کوتاهتر است	$K < 0$
ب:	توزیع تقریباً نرمال است	$\lvert K\rvert \leq ۰/۱$
	اختلاف بین توزیع مورد نظر و توزیع نرمال فاحش نیست	$۰/۱ < \lvert K\rvert \leq ۰/۵$
	اختلاف توزیع مورد نظر و توزیع نرمال فاحش است	$\lvert SK\rvert > ۰/۵$

تبصره: برحسب اینکه ضریب کشیدگی K مثبت و یا منفی باشد پراکندگی توزیع مورد نظر از پراکندگی توزیع نرمال کمتر و یا بیشتر خواهد بود.

مثال: ضریب کشیدگی توزیعی K = -۰/۴۵ بدست آمده است آن را تفسیر کنید.

جواب: توزیع مورد نظر از توزیع نرمال کوتاهتر است و اختلاف آن با نرمال فاحش نیست ضمناً توزیع مورد نظر پراکندگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال دارد.

فصل سوم

آنالیز ترکیبی

۳ـ۱ـ فاکتوریل

طبق تعریف فاکتوریل عدد n برابر است با حاصلضرب اعداد طبیعی از یک تا n و آن را بصورت زیر نشان می‌دهند:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots \times 2 \times 1$$

مثال: فاکتوریل عدد ۵ برابر است با: $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

تبصره: فاکتوریل عدد صفر برابر یک است یعنی: $0! = 1$

اثبات: در فرمول $n! = n(n-1)!$ بجای $n=1$ قرار می‌دهیم:

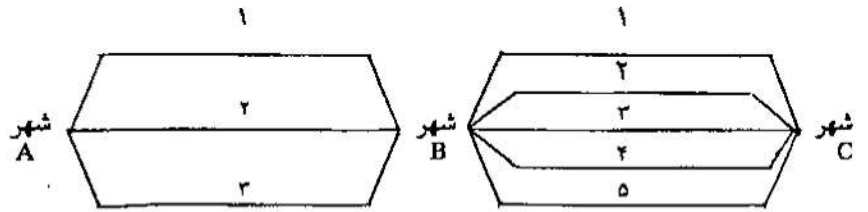
$$1! = 0! \times 1 \quad \Rightarrow \quad 0! = 1$$

۳ـ۲ـ اصل اساسی شمارش

هرگاه فعلی را بتوان به n طریق مختلف انجام داد و سپس فعل دیگری را به m طریق مختلف انجام داد. انجام هر دو فعل با هم را می‌توان به n.m طریق مختلف انجام داد.

مثال: بین شهر A و شهر B سه راه وجود دارد و بین شهر B و شهر C پنج راه وجود دارد بچند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت نمود بشرطی که باید از شهر B عبور کرد.

حل: جمعاً به $15 = 5 \times 3$ طریق می‌توان از شهر A به شهر C با عبور از شهر B مسافرت نمود.



۳ـ۳ـ تبدیل

منظور از تبدیل n شئی متمایز اینست که آن اشیاء را به چند طریق مختلف می‌توان در کنار هم قرار داد. تبدیل n شئی متمایز را به صورت P_n نشان می‌دهند و از فرمول زیر بدست می‌آید.

n	n-1		۲	۱

$$P_n = n!$$

مثال ۱: سه حرف متمایز a و b و c را به ۶ طریق مختلف می‌توان در کنار هم قرار داد.

abc – acb – bac – bca – cab – cba

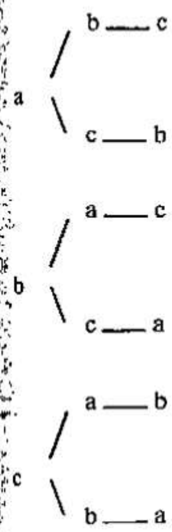
$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

مثال ۲: پنج جلد کتاب مختلف را می‌خواهیم در قفسه‌ای کنار هم قرار دهیم به چند طریق مختلف می‌توان این کار را انجام داد.

حل: جمعاً به ۱۲۰ طریق مختلف می‌توان کتابها را کنار هم قرار داد.

$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

تبصره ۱: تبدیل n شئی متمایز را می‌توان به صورت نمودار درختی (شجره‌ای) نشان داد.



تبصره ۲: تبدیل n شئی که در آن n_1 شئی مشابه هم و n_2 شئی مشابه هم و n_3 شئی هم مشابه یکدیگر باشند.

از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \qquad N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$$

مثال: سه جلد کتاب ریاضیات کاربردی ۱ و دو جلد کتاب ریاضیات کاربردی ۲ و یک جلد کتاب آمار و کاربرد آن در مدیریت را می‌خواهم در قفسه‌ای کنار هم قرار دهیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد.

حل:

$$N = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1\times1} = 60$$

۳ـ۴ـ ترتیب

منظور از ترتیب n شئی p به p این است که از بین n شئی متمایز به چند طریق مختلف می‌توان p شئی را انتخاب و در کنار هم قرار داد. البته تکرار حروف یا اشیاء مجاز نیست ولی ترتیب اشیاء مهم است یعنی ab و ba با هم فرق دارند.

ترتیب n شئی p به p را بصورت A_n^p نشان می‌دهند و از فرمولهای زیر حساب می‌شود.

n	n−1		n−p+1

$$A_n^p = n(n-1)........(n-p+1)$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثال ۱: از بین چهار حرف متمایز d,c,b,a دو حرف انتخاب و آنها را در کنار هم قرار می‌دهیم به ۱۲ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

ab–ac–ad–ba–bc–bd–ca–cb–cd–da–db–dc

$A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ یا $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$

مثال ۲: در یک اطاق ۵ صندلی در کنار هم قرار دارد ۳ نفر وارد اطاق می‌شوند. این ۳ نفر به چند طریق مختلف می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند.

$A_5^3 = 5\times4\times3 = 60$ یا $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$

۳ـ۵ـ ترکیب

منظور از ترکیب n شئی p به p اینست که از بین n شئی متمایز به چند طریق مختلف می‌توان p شئی را انتخاب نمود. با توجه به اینکه ترتیب اشیاء مهم نیست یعنی ab و ba یکی به حساب می‌آیند.

ترکیب n شئی p به p را به صورت C_n^p یا $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ نشان می‌دهند و از فرمولهای زیر محاسبه می‌شود.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \qquad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

مثال ۱: از بین ۴ حرف a و b و c و d دو حرف بصورت ترکیب انتخاب می‌شود به شش طریق می‌توان این کار را انجام داد.

ab–ac–ad–bc–bd–cd

$$C_4^2 = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6 \quad \text{یا} \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

مثال ۲: از بین ده نفر می‌خواهند سه نفر نماینده انتخاب کنند به چند طریق مختلف می‌توان این انتخاب را انجام داد.

$$C_{10}^3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120 \quad \text{یا} \quad C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

تبصره: تشخیص ترتیب و یا ترکیب از روی مفهوم مسأله مشخص می‌گردد. اگر جابجا شدن اشیاء در بین p شئی انتخاب شده فرق نکند از فرمول ترکیب استفاده می‌شود. مثلاً در انتخاب چند نماینده باید از ترکیب استفاده نمود.

۳ـ۶ـ بسط دو جمله‌ای نیوتن

دو جمله‌ای $(a+b)^n$ را طبق فرمول زیر می‌توان بسط داد.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

این فرمول را به صورت دیگر هم می‌توان نوشت:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^p a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n b^n$$

مثال:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

تبصره ۱: $C_n^0 = 1$ می‌باشد.

تبصره ۲: به جمله $C_n^p a^{n-p}b^p$ جمله عمومی یا جمله p+1 ام می‌گویند و استفاده ازآن در حل مسائل مفید است.

تبصره ۳: اگر در فرمول فوق به جای a=b=1 قرار دهیم تساوی زیر بدست می‌آید

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

تبصره ۴: تساوی زیر برقرار است:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

اثبات:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^{n-p}$$

تبصره ۵: برای محاسبه مجموع ضرایب بسط یک چند جمله‌ای می‌توان بجای مجهولات عدد یک قرار داد.

۳ـ۷ـ مثلث پاسکال ـ خیام

ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن را می‌توان بشرح زیر از مثلث پاسکال ـ خیام بدست آورد.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a + b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

مثال: جمله پنجم از دو جمله‌ای $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ را پیدا کنید. ضمناً جمله مستقل از x را بدست آورید.

حل: در دو جمله‌ای $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^{15} = (x^4 - x^{-2})^{15}$ داریم:

$a = x^4$ ، $b = -x^{-2}$ ، $n = 15$

x^{60-4p}

جمله عمومی بسط دو جمله‌ای فوق بشرح زیر است.

$$C_n^p a^{n-p} b^p = C_{15}^p (x^4)^{15-p} (-x^{-2})^p = (-1)^p C_{15}^p x^{60-6p}$$

$(-1)^p (x^{-2})^p$

$-2p$

در جمله پنجم ۴ = p می‌باشد بنابراین جمله پنجم عبارتست از:

$$(-1)^4 C_{10}^4 x^{36} = C_{10}^4 x^{36}$$

برای بدست آوردن جمله مستقل از x در جمله عمومی توان x را برابر صفر قرار می‌دهیم.

جمله مستقل از x: $60 - 6p = 0 \Rightarrow p = 10 \Rightarrow (-1)^{10} C_{10}^{10} = C_{10}^{10}$

مجموعه مسائل آنالیز ترکیبی

۱- ثابت کنید تعداد ترتیبات n شئی که در آن n_1 شئی مشابه هم و n_2 شئی مشابه هم و n_3 شئی هم مشابه یکدیگر باشند از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \qquad n = n_1 + n_2 + n_3$$

۲- با حروف کلمه Mississippi چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان ساخت؟

i = ۴   M = ۱

p = ۲   s = ۴

جواب: $N = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$

۳- عبارت زیر را بسط دهید.

$$(2x + y^2)^3 \;,\; (x^2 - 2y^2)^5 \;,\; (a+b)^6$$

جواب: $(x^2 - 2y^2)^5 = x^{10} - 10x^8y^2 + 40x^6y^4 - 80x^4y^6 + 80x^2y^8 - 32y^{10}$

۴- در بسط $(2x^2 - y)^8$ جمله‌ای که دارای x^{10} می‌باشد را پیدا کنید.

جواب: $-1792x^{10}y^3$

۵- می‌خواهیم یک تیم پینگ‌پنگ ۲ نفره و یک تیم بسکتبال ۵ نفره و یک تیم والیبال ۶ نفره از ۱۳ نفر انتخاب کنیم. تعداد حالات ممکن را حساب کنید.

جواب: $N = \frac{13!}{2!\,5!\,6!}$

۶- به چند طریق مختلف ۱۰ دانشجو می‌توانند در یک صف قرار بگیرند، بشرطی که دو نفر دانشجو همواره نفر اول و نفر آخر این صف را اشغال کنند.

جواب: $2 \times 8!$

۷- چند عدد می‌توان از ۳ رقم زوج مختلف (غیر از صفر) و دو رقم فرد مختلف تشکیل داد.

جواب: $C_5^2 \,.\, A_4^3 \,.\, A_5^5 = 4800$

فصل مربوط به احتمالات

فصل دوم

لزوم وارد شدن نظریه احتمال در روشهای آماری

۱.۲ لزوم وارد شدن نظریه احتمال در روشهای آماری

علم آمار با روشهای مورد استفاده در جمع‌آوری، ارائه، تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها سر و کار دارد. این داده‌ها از دو روش سرشماری و یا نمونه‌گیری بدست می‌آیند. انجام سرشماری به دلایلی چون هزینه سنگین، نیروی انسانی زیاد، گستردگی کار، کنترل صحت و دقت عملیات به نحو مطلوب امکان‌پذیر نمی‌باشد. به‌علاوه در پاره‌ای از بررسیها تکنیک مطالعه موجب انهدام و یا از دست رفتن خاصیت جسم و یا از دست رفتن تمامی کالا می‌شود بنابراین گاهی به هیچ‌وجه معقول به نظر نمی‌رسد. واضح است که آمارگیری نمونه‌ای مستلزم همان تسهیلات است که در سرشماری مورد احتیاج است. اما در نمونه‌گیری احتیاج به این تسهیلات به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد. لذا در مواردی که سرشماری امکان نداشته باشد می‌توان نمونه‌گیری را به کار برد. در واقع در بررسیها و تحقیقات نمونه‌گیری یکی از مهمترین مفاهیمی است که به عنوان پایه به شمار می‌رود نمونه‌گیری در کلیه رشته‌های علوم اجتماعی و اقتصادی و غیره به عنوان اساس تحقیقات به کار برده می‌شود.

راجع به این مطلب بعداً بیشتر سخن خواهد رفت. معمولاً پس از انجام آمارگیری نمونه‌ای و استخراج داده‌های آماری با جداول توزیعهای نمونه سروکار خواهیم داشت اگر از یک جامعه نمونه‌هایی با حجم‌های مختلف و یا مساوی انتخاب شود، طبیعی است که توزیعهای نمونه اعم از توزیع فراوانیهای مطلق و نسبی یکسان نخواهد بود. به سخن دیگر توزیع فراوانی نسبی دو نمونه از یک جامعه با یکدیگر یکسان نخواهند بود ولی اگر حجم نمونه را تا حد کافی زیاد کنیم این نسبتها به نسبتهای واقعی جامعه نزدیک می‌شوند به تجربه ثابت شده است، وقتی

حجم نمونه بزرگ باشد، توزیع فراوانی نسبی با توزیع احتمالات مقادیر صفت در جامعه اصلی یکسان خواهد بود. وانگهی تعریف و تعیین مشخص کننده‌های جامعه اصلی (μ، δ۲ ... ρ،) نیز با مفهوم احتمال مربوط می‌باشد.

بدین معنی که مشخص کننده‌های نمونه تقریبی از مشخص کننده‌های واقعی (اصلی) خواهند بود. چگونگی مطالعه این تقریبها از احتمالات نتیجه‌گیری می‌شود. زیرا در هر نمونه‌گیری طبیعتاً احتمال خطا خواهد بود، این خطاها مجهول‌اند و نمی‌توانیم به مقدار کمی خطاها را تعیین کنیم مگر اینکه از احتمالات یاری بگیریم. اینجاست که لزوم وارد شدن احتمالات در روشهای آماری مفهوم پیدا می‌کند. در واقع آمار و احتمالات آنچنان با هم همبستگی دارند که بحث در مورد آمار بدون درک معنی و مفهوم اصول نظریه احتمال غیر ممکن است. چراکه آگاهی از تئوری احتمال تفسیر نتایج داده‌های آماری را ممکن می‌سازد. از آنجایی که در روشهای آماری از روی نمونه به جامعه می‌رسیم و نمونه‌ها نیز همیشه تحت تاثیر تغییرات تصادفی قرار می‌گیرند به وسیله تئوری احتمالات می‌توانیم مقدار اجتناب ناپذیر عدم اعتماد و اطمینان را به صورت عددی بیان کنیم. به سخن دیگر مقدار خطای برآورد مشخص کننده‌ها را به صورت عدد نشان دهیم. در واقع موقعی می‌توان داده‌های آماری را بهتر پردازش و تجزیه و تحلیل کرد که اولاً بتوانیم احتمال وقوع آنها را تعیین کنیم و ثانیا پس از بررسی، احتمال اشتباه در قضاوت و نتیجه‌گیری‌ها را نیز اندازه بگیریم. برای این منظور ناگزیر به دانستن مفاهیم نظریه احتمالات می‌باشیم.

از آنچه گذشت می‌توان چنین نتیجه گرفت که کار محقق اساساً در ارتباط با نتیجه‌گیری و رجوع به آزمایشاتی است که درگیر مسائل غیر مسلم و احتمالی می‌باشد. به منظور صحیح و منطقی بودن استنباط و نتیجه‌گیری‌ها دانستن تئوری احتمالات ضروری است. این فصل منحصراً به شرح این مفاهیم اختصاص یافته است. البته نمی‌توان انتظار داشت که با مطالعه این فصل کوتاه همه چیز را در بارهٔ احتمالات بیاموزید. زیرا احتمالات دانش بسیار وسیع و پیچیده‌ای است. ولی امید است که بتوانید به اندازه مورد لزوم آن را فراگیرید تا کاربرد روشهای آماری در تحقیقات اجتماعی و اقتصادی برایتان معنی‌دار شود.

اساس تئوری احتمالات مانند تمام فرضیه‌های دیگر در علوم پایه دارای تعاریف اولیه است که بر اساس آن، مفاهیم دیگر تئوری نیز صورت منطقی پیدا می‌کند.

۲.۲ فضای نمونه[1] یا فضای حوادث ساده

1. sample space

مجموعه‌ای که عناصر آن، نمایش تمام نتایج ممکنه در یک آزمایش باشد، فضای نمونه نامیده و آن را با علامت S و یا U نشان می‌دهند. این عناصر می‌توانند نماینده هر چیزی، از قبیل افراد، اعداد، مهره‌ها و غیره باشند.

از طرفی آزمایش عملی است که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد مثلاً در ریختن یک تاس فضای نمونه عبارت است از کلیه حالات ممکنه که می‌توانند ظاهر شوند. یعنی $S = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ که به صورت یک مجموعه نشان داده می‌شود. همچنین در ریختن یک سکه فضای نمونه عبارت است از $S = \{$خط ، شیر$\}$ و یا در ریختن دو سکه عبارت است از: $s = \{$(دومی خط، اولی خط)، (دومی شیر، اولی خط)، (دومی شیر و اولی شیر) ،(دومی خط و اولی شیر)$\}$

یعنی در ریختن دو سکه تعداد حالات ممکنه ۴=۲۲ است. ملاحظه می‌شود که حالات ممکن به صورت زوجهای مرتب نوشته شده‌اند، و اگر سه سکه باشد آنها را به صورت سه تایی می‌نویسند و تعداد آنها برابر خواهد بود با :۲۳، همین‌طور برای K سکه تعداد حالات ممکنه برابر با ۲^k می‌باشد به عنوان تمرین حالات ممکنه سه سکه را بنویسید.

مثال ۱: دو تاس کاملاً منظم و همگن را با هم می‌ریزیم. مطلوب است فضای نمونه و تعداد حالات ممکنه.

حل: همان طوری که قبلاً اشاره شد نتیجه پرتاب دو تاس را به صورت زوجهای مرتب می‌نویسند یعنی (x,y) که در آن x تعداد خالهای ظاهر شده برای تاس اول، y نیز تعداد خالهای ظاهر شده برای تاس دوم است. برای تفهیم بیشتر بهتر است تاسها را رنگی در نظر بگیرید (مثلاً اولی سفید و دومی خاکستری باشد). در این صورت تعداد کل حالات ممکنه مساوی است با ۳۶=۶۲ زیرا هر روی یکی از تاسها (مثلاً تاس سفید) با هر کدام از ۶ رویه تاس دیگر (مثلاً خاکستری) می‌تواند بیاید پس طبق اصل شمارش تعداد کل حالات ممکن مساوی است با: ۳۶=۶×۶

و فضای نمونه عبارت است از $S=\{(x , y) \mid x,y \in k\}$ که در آن $K=۱،۲،۳،۴،۵،۶$ ، می‌توان نتایج ممکن ریختن دو تاس را به وسیله مجموعه زیر بیان کرد

۶ و ۱	۵ و ۱	۴ و ۱	۳ و ۱	۲ و ۱	۱ و ۱
۶ و ۲	۵ و ۲	۴ و ۲	۳ و ۲	۲ و ۲	۱ و ۲
۶ و ۳	۵ و ۳	۴ و ۳	۳ و ۳	۲ و ۳	۱ و ۳
۶ و ۴	۵ و ۴	۴ و ۴	۳ و ۴	۲ و ۴	۱ و ۴
۶ و ۵	۵ و ۵	۴ و ۵	۳ و ۵	۲ و ۵	۱ و ۵
۶ و ۶	۵ و ۶	۴ و ۶	۳ و ۶	۲ و ۶	۱ و ۶

مثلاً حالات ممکن که در آن مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد عبارت است از

(۶،۱) و (۵،۲) و (۴،۳) و (۳،۴) و (۲،۵) و (۱،۶)

ملاحظه می‌شود که تعداد زوجهایی که حاصل جمع آنها رقم ۷ باشد از سایر زوجها بیشتر است.

حال اگر به جای دو تاس، سه تاس را در نظر بگیریم آن‌گاه تعداد حالات ممکن طبق اصل شمارش برابر با 6^3 خواهد شد. همین‌طور اگر k تاس در نظر گرفته شود تعداد حالات ممکن برابر با 6^k می‌باشد.

از آنچه گذشت می‌توان نتیجه گرفت که برای بیان تمامی نتایج ممکن طرق زیادی را می‌توان انتخاب کرد و طبق معمول طریقه انتخاب شده متأثر از مسأله مورد نظر در آزمایش است.

مثال ۲. کیسه‌ای دارای ۱۲ مهره است که از یک تا دوازده شماره‌گذاری شده است. مطلوب است تعداد حالات ممکن در هر یک از موارد زیر.

الف ـ یک مهره انتخاب شود.

ب ـ دو مهره انتخاب شود.

پ ـ سه مهره انتخاب شود.

ت ـ k مهره انتخاب شود ($k < 12$)

حل : الف ـ چون ۱۲ مهره در کیسه وجود دارد اگر یک مهره از دوازده مهره انتخاب شود تعداد حالات ممکن برابر است با ۱۲ و یا $C_{12}^{1}=12$

ب ـ اگر از ۱۲ مهره، دو مهره انتخاب شود تعداد حالات ممکن برابر است با :

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{10!\,2!}=66$$

پ ـ در صورتی که ۳ مهره از ۱۲ مهره انتخاب شود آن‌گاه تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{9!\times 3!}=220$$

ت ـ اگر k مهره انتخاب شود ($k < 12$) تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$C_{12}^{k}=\frac{12!}{(12-k)!\times k!}$$

۳.۲ پیشامد یا حادثه[1]

رویداد قابل مشاهده را پیشامد یا حادثه می‌نامند به سخن دیگر هر عضو از یک فضای نمونه، یک پیشامد یا حادثه نامیده می‌شود.پس به طور کلی هر زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه را حادثه خواهیم نامید و آن را با حروف بزرگ A و B و C و . . . نمایش می‌دهند هر حادثه یا پیشامد به سه حالت ظاهر می‌شود: پیشامد حتمی یا یقینی[2]، پیشامد غیرممکن[3] و پیشامد تصادفی[4].

الف. پیشامد حتمی یا یقینی: پیشامدی که تحت هر شرایط به‌طور اجتناب ناپذیر رخ دهد، پیشامد حتمی می‌نامند و آن را با I نشان می‌دهند. مثلاً در ریختن یک تاس معمولی آمدن رویه کمتر از ۷ یک پیشامد حتمی است.

ب . پیشامد غیرممکن: پیشامدی که رخ دادن آن تحت هیچ شرایطی هرگز ممکن نباشد، پیشامد غیر ممکن می‌نامند و آن را با O نشان می‌دهند. مثلاً در ریختن یک تاس معمولی آمدن عدد بزرگتر از ۶ غیرممکن است.

پ. پیشامد تصادفی: پیشامدی که ممکن است وقوع یابد و یا وقوع نیابد، مانند آمدن رویه ۵ در یک بار ریختن تاس پیشامد تصادفی نامیده می‌شود.

از تعاریف بالا نتیجه می‌شود که یقین بودن، غیرممکن بودن، یا تصادفی بودن یک پیشامد بدون برقراری مجموعه‌ای از شرطها مفهوم ندارد و همواره نسبت به یک مجموعه از شرطهای معین در نظر گرفته می‌شود.

۴.۲. تعریف احتمال[5]

احتمال پیشامد A عددی است که اندازه امکان وقوع آن پیشامد را نشان می‌دهد و آن را به طریق زیر تعیین می‌کنند.

اگر یک آزمایش برای هر N حالت مختلف، نتایج محتمل یکسان به‌دست دهد، و اگر n حالت ($n < N$) برای پیشامد A مساعد باشد، آن‌گاه احتمال وقوع پیشامد A که با $P(A)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$p(A)=\frac{n}{N}$$

1. Event 2. Certain 3. Impossible

4. Random 5. Probability

به سخن دیگر، اگر نتایج یک آزمایش بتواند کلاً به N حالت هم احتمال (یعنی از لحاظ وقوع پیشامد هیچ‌گونه امتیازی به هم نداشته باشند) و ناسازگار[1] (مانعت الجمع یعنی باوقوع یکی از آنها وقوع حالات دیگر امکان‌پذیر نباشد) واقع شود و n حالت آن برای پیشامد معین A مساعد باشد احتمال وقوع پیشامد A کسری است برابر با $p(A)=\frac{n}{N}$ به عبارت ساده‌تر نسبت تعداد حالات مساعد بر تعداد حالات ممکنه را احتمال می‌نامند.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای حادثه } A}{\text{تعداد حالات ممکنه}}$$

مثال ۳: دو تاس را می‌ریزیم اگر تاسها را سالم فرض کنیم، با انداختن دو تاس همان‌طوری که قبلاً اشاره شد ۳۶ حالت (مثال یک) رخ می‌دهد.

احتمال آنکه مجموع خالها مساوی ۲ باشد برابر $\frac{۱}{۳۶}$ است زیرافقط یک حالت است که مجموع دوتاس برابر با ۲ باشد. همین‌طور احتمال آنکه مجموع خالها مساوی ۳ باشد برابر با $\frac{۲}{۳۶}$ است، و احتمال آنکه مجموع خالهای دوتاس مساوی ۷ باشد برابر با $\frac{۶}{۳۶}$ است.

به سادگی با توجه به جدول مثال یک، می‌توان احتمالهای متناظر با به‌دست آوردن مجموع خالها ۲ تا ۱۲ را تعیین نمود. این احتمالها در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

A_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	جمع
$P(A_i)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	۱

که در آن i عبارت است از مجموع خالهای دو تاس در هر بار انداختن آنها و $P(A_i)$ احتمال وقوع هر یک از حالات است.

ملاحظه می‌شود که برای هر پیشامد A_i یک احتمال نسبت داده می‌شود به عبارتی یک عدد در تناظر می‌باشد. اینجاست که تابع احتمال تعریف می‌شود.

۱.۴.۲ تعریف تابع احتمال

تابع احتمال، قاعده یا قانون تناظری راگویند که با هر پیشامد A در فضای نمونه یک عدد حقیقی $P(A)$ راکه احتمال پیشامد A نامیده می‌شود، مربوط کند به طوری که:

1. Exclusive

برای هر پیشامد A اولاً $P(A)\geq ۰$ باشد، ثانیاً مجموع احتمالات مربوط به کلیه پیشامدهای متمایز مساوی یک گردد و ثانیاً اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند آنگاه تساوی زیر صادق باشد

$$P(A \text{ یا } B)=P(A)+P(B)$$

این خاصیت قضیه مجموع احتمالات نامیده می‌شود.

۵.۲. تعریف احتمال بر مبنای فراوانی نسبی

سکه‌ای را n بار می‌اندازیم اگر تعداد شیرآمدن آن را n_A بنامیم آنگاه فراوانی نسبی شیر آمدن سکه برابر با $\frac{n_A}{n}$ خواهد بود، حال اگر تعداد آزمایش (n) را زیادتر و زیادترکنیم ملاحظه می‌شود که این فراوانی نسبی به عدد $\frac{۱}{۲}$ نزدیکتر می‌شود. یعنی برای مقادیر بزرگ (n) فراوانی نسبی یک سری پیشامدهای تصادفی نسبتاً ثابت می‌ماند، پس می‌توان نتیجه گرفت که در رخ دادن این پیشامدها نظم به‌خصوصی که نابسته از آزمایش کننده می‌باشد وجود دارد. مقدار ثابت حد فراوانی نسبی را اندازه امکان وقوع پیشامدمی‌نامند و به عنوان مقدار تقریبی احتمال پیشامد تصادفی قبول می‌شود. $P(A)=\frac{n_A}{n}$

یعنی در عمل، احتمال همان فراوان نسبی است که برای بیشترین تعداد آزمایش به دست آمده باشد. این تعریف احتمال یعنی در نظر گرفتن احتمال به عنوان فراوانی نسبی در تعداد بزرگ ولی محدود آزمایشها برای مقاصد دیگر مثلاً برای فهم و اثبات قضایای احتمالات مناسب خواهد بود. با آنکه این تعریف کاملاً دقیق نیست، مع‌هذا هرگز ما را به یک نتیجه نادرست سوق نمی‌دهد و از واردشدن در بحث مربوط به حدود احتمال که خارج از موضوع این کتاب است جلوگیری می‌کند.

۶.۲. قضیه‌های مربوط به احتمال

۱. احتمال پیشامد غیرممکن صفر است $P(o)=۰$

۲. احتمال پیشامد یقینی مساوی یک است. $P(I)=۱$

۳. برای هر پیشامد دلخواه A عددی وجود دارد بین صفر و یک $۰\leq p(A)\leq ۱$

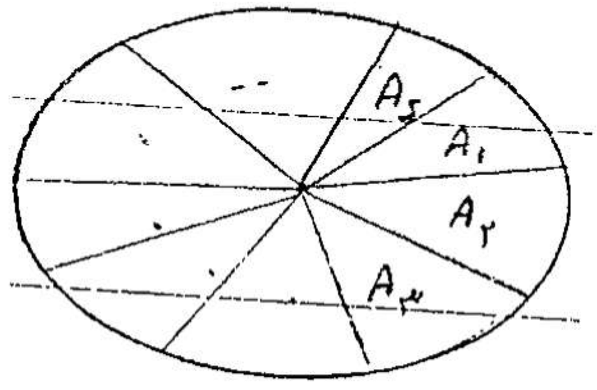
۴. اگر پیشامد A زیر مجموعه پیشامد B باشد $(A\subset B)$ آنگاه رابطه $P(A)\leq P(B)$ برقرار خواهد داد.

۵. اگر پیشامدهای A و B هم ارز باشند $(A=B)$ آن گاه احتمالهای آنها مساوی خواهندبود. $P(A)=P(B)$

مجموع احتمال وقوع پیشامد A و عدم وقوع پیشامد A یعنی $(\bar{A})$ مساوی است با یک.

$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

قضیه حاصل جمع احتمالات ـ اگر پیشامد A به S حالت ناسازگار A_1 و A_2 و ... A_S تجزیه گردد.



یعنی $A=A_1+A_2+A_3+\dots+A_S$

و یا $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_S$

آن گاه احتمال پیشامد A که آن را پیشامد مرکب می‌نامند مساوی خواهد بود با مجموع احتمالهای تک‌تک آنها.

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_S)=\sum_{i=1}^{s}p(A_i)$$

یعنی احتمال پیشامد مرکب A برابر است با مجموع احتمالات پیشامدهای ساده موجود در A. همان‌طوری که اشاره شد این قضیه در صورتی صادق است که پیشامدهای A_1 و A_2 و A_3 و ... A_S ناسازگار باشند، و در مورد پیشامدهای سازگار بعداً سخن خواهد رفت.

مثال ۴: در یک سمینار ۳۰ نفر از پنج استان شرکت کرده‌اند از آن عده ۱۰ نفر از استان اول، ۸ نفر از استان دوم، ۶ نفر از استان سوم، ۴ نفر از استان چهارم و سرانجام ۲ نفر از استان پنجم می‌باشند.

الف) از بین شرکت کنندگان یک نفر را به عنوان منشی جلسه انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه فرد انتخابی از استان پنجم نباشد چقدر است؟

ب) برای اداره جلسه ۵ نفر را از بین شرکت کنندگان انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر ۵ نفر انتخابی از استان اول باشند چقدر است؟

پ) احتمال اینکه از ۵ نفر انتخابی ۳ نفر از استان اول و ۲ نفر دیگر از استان دوم باشند چقدر است؟

ت) احتمال اینکه از هر استان یک نفر باشد چقدر است؟

ث) احتمال اینکه لااقل یک نفر از استان سوم باشد چقدر است؟

قبل از حل مسأله توجه دانشجویان عزیز را به این مطلب جلب می‌کنیم که در کلیه مسایل مربوط به احتمالات $P_1(A)$ عبارت است از جواب احتمال وقوع پیشامد «الف» صورت مسأله، $P_2(A)$ نیز جواب احتمال وقوع پیشامد «ب» صورت مسأله ... همین‌طور تا آخر.

در اینجا حرف A پیشامد وقوع هر قسمت از مسأله است.

حل ـ الف) از استان پنجم نباشد یعنی از استانهای اول یا دوم یا سوم و یا چهارم باشد. حال استانهای یک تا چهار را به ترتیب A_1 و A_2 و A_3 و A_4 می‌نامیم با استفاده از قضیه حاصل جمع احتمالات خواهیم داشت.

$$P_1(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=\frac{10}{30}+\frac{8}{30}+\frac{6}{30}+\frac{4}{30}=\frac{28}{30}=0/93$$

راه حل دیگر: می‌توان با استفاده از قضیه وقوع و عدم و قوع پیشامد احتمال مربوطه را به‌دست آورد یعنی اول احتمال اینکه فرد انتخابی از استان پنجم باشد را حساب کرده سپس آن را از یک کم کرده تا احتمال مربوطه به‌دست آید. پس $P(A_5)=\frac{2}{30}$ در نتیجه:

$$p_1(A)=1-p_1(\bar{A})=1-p(A_5)=1-\frac{2}{30}=\frac{28}{30}=0/93$$

راه حل سوم: می‌توان به‌طور مستقیم احتمال مربوط را به‌دست آورد بدین معنی که اول مجموع تعداد شرکت کنندگان استانهای اول، دوم، سوم و چهارم را به‌دست آورده ۲۸ $=4+6+8+10$ سپس با استفاده از تعریف احتمال می‌توان مقدار آن را محاسبه کرد. یعنی ۰/۹۳

$$P_1(A) = \frac{28}{30} =$$

ب) اگر از بین کلیه شرکت کنندگان ۵ نفر انتخاب شود تعداد کل حالات یعنی تعداد حالات ممکنه (فضای نمونه) برابر است با:

$$C^{5}_{30} = \frac{30!}{25! \times 5!} = 142506$$

حال می‌خواهیم ۵ نفر انتخابی از استان اول باشد. یعنی از ۱۰ نفر، ۵ نفر به طور تصادفی انتخاب شود.

$$C^{5}_{10} = \frac{10!}{(10-5)!5!} = 252$$

در نتیجه طبق تعریف، احتمال اینکه هر پنج نفر از استان اول باشند عبارت است از:

$$p_2(A) = \frac{C^{5}_{10}}{C^{5}_{30}} = \frac{252}{142506} = 0.002$$

پ) ۳ نفر، از ۱۰ نفر شرکت کنندهٔ استان اول باشند یعنی: $C^{3}_{10} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$ و همچنین ۲ نفر، از ۸ نفر شرکت کنندهٔ استان دوم باشند. $C^{2}_{8} = \frac{8!}{6! \times 2!} = 28$ پس طبق اصل شمارش ۳ نفر از استان اول و ۲ نفر از استان دوم باشند عبارت است از:

$$C^{3}_{10} \times C^{2}_{8} = 120 \times 28 = 3360$$

در واقع عدد بالا تعداد حالات مساعد است و تعداد حالات ممکنه نیز برابر با: $C^{5}_{30} = 142506$

در نتیجه احتمال اینکه ۳ نفر از استان اول و ۲ نفر از استان دوم باشند عبارت است از:

$$P_3(A) = \frac{C^{3}_{10} \times C^{2}_{8}}{C^{5}_{30}} = \frac{3360}{142506} = 0.024$$

ت) تعداد حالات مساعد برای اینکه از هر استان یک نفر باشد. طبق اصل شمارش برابر است با: $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 3840$

حالات ممکنه نیز برابر با: $C^{5}_{30} = 142506$

در نتیجه احتمال اینکه از هر استان یک نفر باشد برابر با:

$$P_4(A) = \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}{C^{5}_{30}} = \frac{3840}{142506} = 0.027$$

ث) احتمال اینکه لااقل یک نفر از استان سوم باشد بدین معنی است که اگر از استان سوم یک یا دو یا سه یا چهار و یا پنج نفر انتخاب شود مورد قبول است، در غیر این صورت یعنی وقتی که هیچ کدام از ۵ نفر انتخابی از استان سوم نباشد مورد قبول نیست. بنابراین بهتر است احتمال مورد قبول نبودن را پیدا کرده و از یک کم نمایید. یعنی با استفاده از قضیه وقوع و عدم وقوع، احتمال پیشامد مربوطه را حساب کنیم.

$$P_5(A) = 1 - p_5(\overline{A}) = 1 - \frac{C^{5}_{30-6}}{C^{5}_{30}} = 1 - \frac{C^{5}_{24}}{C^{5}_{30}} = 1 - 0.298 = 0.702$$

توجه داشته باشید که تا اینجا هر مطلبی را که یاد گرفته‌اید در این مسأله گنجانده شده است سعی کنید این مسأله را خودتان یک بار دیگر بدون توجه به کتاب حل کنید.

۲.۷.۲.احتمال هندسی

تعریفی که برای احتمال بیان شد، یعنی نسبت حالات مساعد بر حالات ممکنه در حالت کلی کافی نیست زیرا گاهی اوقات شمارش حالات مساعد ممکن به علت نامحدود بودن تعداد آنها امکان‌پذیر نیست. برای روشن شدن مطلب یک مثال می‌آوریم:

گیریم ناحیه G در یک صفحه و همچنین ناحیه g را که در داخل ناحیه G قرار دارد، در نظر بگیریم $(g \subset G)$ شکل ۱ را ببینید. نقطه‌ای مانند A درون G انتخاب می‌شود احتمال اینکه نقطه A در درون ناحیه g باشد چقدر است؟

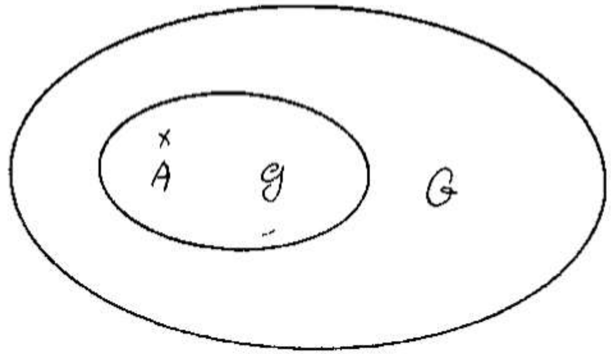
در این حال نقاط واقع در درون G و همچنین در درون g بی‌نهایت است و نمی‌توان مطابق تعریف بالا احتمال مربوطه را به‌دست آورد مگر اینکه تعریف را بسط داده و چنین بیان کنیم: احتمال اینکه نقطه A در درون ناحیه g باشد برابر با نسبت وسعت اندازه g بر وسعت اندازه G یعنی:

$$p(A \in g) = \frac{\text{اندازه وسعت ناحیه } g}{\text{اندازه وسعت ناحیه } G}$$

و یا
$$p(A\in g)=\frac{mes.G}{mes.g}$$

این مطلب را می‌توان برای حالتی که ناحیه G و g به صورت خط و یا به صورت حجم باشند نیز بیان کرد. چون در اینجا از مفاهیم هندسی مانند خط، سطح و حجم استفاده می‌شود بدین دلیل آن را احتمال هندسی می‌نامند. در احتمال هندسی نیز خواص زیر برقرار است.

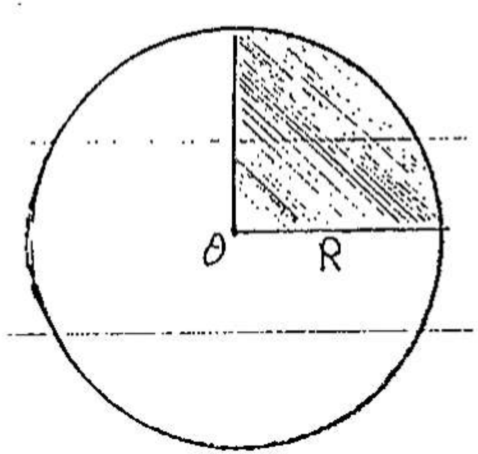
$$0\le p(A\in g)\le 1\ ,\ \ P(\phi)=0,\ \ P(A\in G)=1$$



شکل ۱:

مثال ۵: صفحه دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران می‌کند $\frac{1}{4}$ از مساحت این صفحه به رنگ سیاه و بقیه به رنگ سفید رنگ‌آمیزی شده است به این صفحه که در حال حرکت است تیراندازی می‌شود که یقیناً نیز به صفحه اصابت می‌کند.

احتمال اینکه تیر به ناحیه با رنگ سیاه اصابت کند چیست؟



شکل ۲:

$$P(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}=\frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{\pi R^2}=0.25$$

مثال ۶: فرض کنیم دایره‌ای به شعاع R حول محور عمود بر مرکزش می‌چرخد و عقربکی ثابت در بالای دایره واقع است (مطابق شکل ۳) نقطه‌ای مانند A روی دایره مشخص است. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه موقع توقف دایره نقطه A در مقابل نوک عقربک قرار گیرد.

ب) احتمال اینکه موقع توقف دایره نقطه A در مقابل نوک عقربک قرار نگیرد.

حل ـ الف) به عنوان اندازه مجموعه نقاط بر روی دایره می‌توان طول محیط آن دایره را قبول کرد در این صورت اندازه مجموعه A که از یک نقطه بر روی آن دایره تشکیل شده است، صفر خواهد بود.

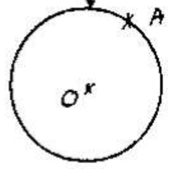
$$P_1(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}=\frac{mes\,A}{mes\,O}=\frac{0}{2\pi R}=0$$

یعنی مقدار احتمال برابر صفر می‌شود. چه بسا ممکن است نقطه A در مقابل عقربک قرار گیرد. بنابراین از صفر بودن احتمال پیشامد غیرممکن بودن پیشامد لزوماً نتیجه‌گیری نمی‌شود. در صورتی که عکس مطلب صادق است یعنی (احتمال پیشامد غیرممکن صفر است).

ب) در این حالت احتمال مربوط برابر یک خواهد بود.

$$P_2(A)=\frac{2\pi R}{2\pi R}=1$$

از یک بودن احتمال پیشامد، یقین بودن پیشامد نتیجه نمی‌شود زیرا ممکن است نقطه A در مقابل عقربک قرارگیرد. در اینجا نیز عکس مطلب صادق است یعنی (احتمال پیشامد یقین یک است).



شکل ۳:

تعریف) اگر رخ دادن یک حادثه (مانند A) مشروط به چگونگی وقوع حادثه دیگر (مانند B) باشد این دو حادثه را نسبت به هم شرطی می‌نامند بدیهی است که حوادث شرطی نسبت به هم وابسته می‌باشند.

۸.۲. احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A هنگامی که پیشامد B قبلاً اتفاق افتاده باشد احتمال شرطی نامیده می‌شود و به صورت $P(A|B)$ نشان داده می‌شود و چنین خوانده می‌شود. احتمال وقوع پیشامد A به‌شرط آنکه پیشامد B قبلاً وقوع یافته باشد.

مطالبی که راجع به احتمال غیرشرطی بیان گردیده برای احتمالهای شرطی نیز صادق است.

مثال ۷: دو تاس را با هم می‌ریزیم اگر مجموع شماره تاسهای نشسته ۷ باشد احتمال حالتی را پیدا کنید که شماره یکی از تاسهای نشسته ۳ باشد.

حل : فضای نمونه یعنی مجموعه حالتهایی که شماره تاسهای نشسته ۷ باشند عبارت است از : $B=$ {(۳ و۴)، (۴ و۳)، (۲ و۵)،(۵ و۲)،(۱ و۶)،(۶ و۱)} حالات مساعد برای این فضای نمونه (۴ و۳) و (۳ و۴) است به عبارتی فقط دو حالت وجود دارد که یکی از تاسها ۳ باشد. بدین جهت بر طبق تعریف احتمال خواهیم داشت. $P(A|B)=\frac{2}{6}$

اگر صورت و مخرج $\frac{2}{6}$ را بر ۳۶ تقسیم کنیم که تعداد کل حالات ممکن (فضای حوادث ساده) قبل از وارد کردن شرط وقوع حادثه B می‌باشد، آنگاه این احتمال شرطی بر حساب احتمالهای غیرشرطی $P(A|B)=\frac{2}{6}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{p(AB)}{P(B)}$ $P(AB),P(B)$ بیان خواهد شد.

در این رابطه صورت عبارت است از احتمال اینکه مجموع دو تاس ۷ باشد و یکی از رویه‌ها ۳ باشد. یعنی احتمال حالتی که A و B می‌توانند رخ دهد. در اینجا از کل ۳۶ حالت فقط دو حالت (۴و۳) و (۳و۴) مساعد می‌باشند (مراجعه شود به مثال ۱). پس طبق تعریف احتمال $p(AB)=\frac{2}{36}$. همین‌طور مخرج رابطه بالا (یعنی $P(B)$) عبارت است احتمال تعداد حالتهایی که B می‌تواند رخ دهد. برای حالت B نیز تعداد حالتهای مساعد برابر ۶ است در نتیجه $P(B)=\frac{6}{36}$.

در نظریه احتمال این نتیجه به دست آمده را به عنوان تعریف احتمال شرطی قبول کرده‌اند:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$ بشرط آنکه $P(B)=0$ باشد.

مثال ۸: جدول زیر یکصد دانشجوی دانشگاه پیام نور را بر حسب وضع اشتغال و جنس نشان می‌دهد. یکی از دانشجویان را به تصادف انتخاب می‌کنیم به فرض آنکه پیشامدهای A و B چنین باشند:

$A=$ انتخاب شده مرد خواهد بود، $B=$ انتخاب شده شاغل خواهد بود.

مطلوب است احتمال پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B اتفاق افتاده باشد. یعنی $P(A|B)$

وضع اشتغال / جنس	شاغل	غیرشاغل	جمع
مرد	۵۶	۱۴	۷۰
زن	۲۴	۶	۳۰
جمع	۸۰	۲۰	۱۰۰

حل : تعداد حالات مساعد برابر با ۵۶ و برای حالات ممکنه برابر ۸۰ می‌باشد پس احتمال اینکه دانشجوی انتخابی شاغل و مرد باشد برابر با:

$$P(A|B)=\frac{56}{80}=0/7$$

حال اگر مسأله را از تعریف احتمال شرطی حل کنیم خواهیم داشت:

صورت عبارت است از احتمال اینکه مرد شاغل انتخاب شود $P(A\cdot B)=\frac{56}{100}$ و مخرج عبارت است از احتمال اینکه شاغل انتخاب شود $P(B)=\frac{80}{100}$ پس احتمال اینکه شاغل باشد و مرد عبارت است:

$$P(A|B)=\frac{p(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{۵۶}{۱۰۰}}{\frac{۸۰}{۱۰۰}}=۰/۷$$

که همان نتیجه قبلی است.

۹.۲ تعریف پیشامدهای مستقل (نابسته) و نامستقل (وابسته)

۱.۹.۲ پیشامدهای مستقل (نابسته)

دو پیشامد A, B را مستقل (نابسته) از هم نامند که وقوع یکی روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد به عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد با احتمال شرطی آن پیشامد یکسان باشد یعنی:

$$P(A|B)=P(A) \qquad \text{همچنین} \qquad P(B|A)=P(B)$$

یعنی اگر پیشامد A مستقل از پیشامد B باشد پیشامد B نیز مستقل از پیشامد A خواهد بود. مثلاً اگر از یک جامعه نمونه‌ای برداریم و دوباره آن نمونه را به جای خود برگردانیم، یعنی عمل جای‌گذاری را انجام دهیم، آن‌گاه پیشامد اول تأثیری بر احتمال پیشامد دوم نخواهد داشت. این مطلب در مورد پرتاب سکه و تاس همیشه برقرار است. مثلاً گیریم یک سکه را ده بار پرتاب کرده‌ایم. می‌خواهیم احتمال اینکه دفعه یازدهم شیر بیاید را پیدا کنیم. طبیعی است احتمال این پیشامد $\frac{1}{2}$ است. ملاحظه می‌شود که احتمال وقوع پیشامد در دفعه یازدهم ربطی به ۱۰ بار قبل ندارد.

از آنچه گذشت چنین نتیجه می‌شود که دو یا چند پیشامد را موقعی مستقل نامند که احتمال وقوع هر یک از آنها تحت تاثیر وقوع دیگری قرار نگیرد. در غیر این صورت پیشامدها مستقل نخواهند بود.

۲.۹.۲ پیشامدهای نامستقل (وابسته)

دو پیشامد A, B را وابسته به هم می‌نامند که وقوع یکی روی وقوع دیگری تأثیر داشته باشد. مثلاً گیریم در یک کیسه ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است از آن کیسه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم و پس از ملاحظه رنگ آن را کنار می‌گذاریم دفعه دوم یک مهره دیگر از کیسه به تصادف خارج می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که در این حال احتمال دوم علاوه بر اینکه به رنگ مهره اول مربوط است به تعداد مهره‌های باقی مانده (۹ = ۱-۱۰) در کیسه نیز مربوط می‌شود. پس اگر از یک جامعه نمونه‌ای برداریم و دوباره آن را در جای خود قرار ندهیم یعنی بدون جای‌گذاری نمونه‌گیری انجام دهیم آن گاه این دو پیشامد را وابسته به یکدیگر می‌نامند.

حال که با تعریف پیشامدهای مستقل و نامستقل آشنا شدیم اینک قضیه‌های مربوط به حاصل جمع و حاصل ضرب آنها را بیان می‌کنیم. البته اثبات هیچ کدام از قضیه‌ها را اینجا نخواهیم داشت.

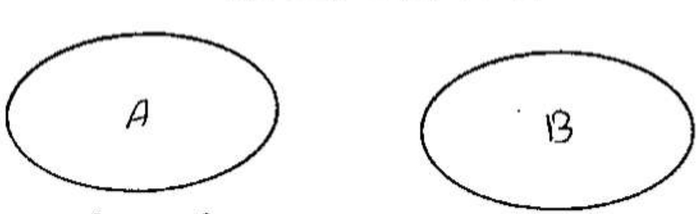
۱۰.۲. قضیه‌های مربوط به حاصل جمع و حاصلضرب دو پیشامد

۱.۱۰.۲. قضیه حاصل جمع دو پیشامد ناسازگار

این قضیه را قبلاً توضیح داده‌ایم حالا برای مقایسه و هماهنگ کردن آن با بقیه قضیه‌ها دوباره متذکر می‌شویم.

گیریم دو پیشامد B,A ناسازگار باشند (مانند شکل زیر) آن‌گاه احتمال حاصل جمع این دو پیشامد برابر با حاصل جمع احتمال تک‌تک آنها خواهد بود یعنی

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B)$$



احتمال مذکور برای S پیشامد مستقل برابر است با : $P(\sum_{i=1}^{s} A_i)=\sum_{i=1}^{s} P(A_i)$

مثال ۹: در یک کیسه ۵ مهره سفید، ۷ مهره سیاه و ۸ مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم احتمال اینکه مهره خارج شده سفید یا سیاه باشد چقدر است؟

$$P(\text{سفید یا سیاه}) = P(\text{سفید}) + P(\text{سیاه})$$

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B) = \frac{۵}{۲۰} + \frac{۷}{۲۰} = \frac{۱۲}{۲۰} = ۰/۶$$

۲.۱۰.۲ قضیه حاصلضرب دو پیشامد مستقل

اگر دو پیشامد A ، B مستقل (نابسته) از هم باشند آن گاه احتمال حاصلضرب این دو پیشامد مساوی است با حاصلضرب احتمالهای آن دو پیشامد.

$$\text{یعنی} \quad P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

می‌توان این قضیه را برای S پیشامد مستقل $A_1, A_2, \dots A_s$ نیز تعمیم داد.

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s)=P(A_1)\cdot p(A_2)\cdots P(A_s)$$

مثال ۱۰: در مثال بالا سه بار و هر بار یک مهره از کیسه خارج می‌کنیم. پس از مشاهده رنگ مهره آن را دوباره در کیسه قرار می‌دهیم.

مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه مهره انتخابی سفید باشند.

ب) هر سه مهره انتخابی قرمز باشند.

پ) اولی سفید، دومی سیاه و سومی قرمز باشد.

ت) یکی سفید، یکی سیاه و دیگری قرمز باشد یعنی هر کدام از یک رنگ باشند.

حل ـ الف: $P(\text{هر سه سفید})=\frac{۵}{۲۰}\times\frac{۵}{۲۰}\times\frac{۵}{۲۰}=(\frac{۵}{۲۰})^{۳}=۰٫۰۱۶$

ب ـ $P(\text{هر سه قرمز})=\frac{۸}{۲۰}\times\frac{۸}{۲۰}\times\frac{۸}{۲۰}=(\frac{۸}{۲۰})^{۳}=۰٫۰۶۴$

پ ـ $P(\text{اولی سفید، دومی سیاه، سومی قرمز})=\frac{۵}{۲۰}\times\frac{۷}{۲۰}\times\frac{۸}{۲۰}=۰٫۰۳۵$

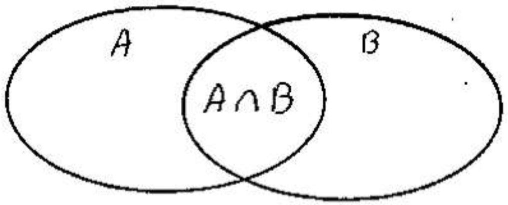
$P(\text{هرکدام از یک رنگ})=۳!\times\frac{۵}{۲۰}\times\frac{۷}{۲۰}\times\frac{۸}{۲۰}=۰٫۲۱$

دلیل اینکه به ۳! ضرب کردیم این است که سه رنگ مختلف به طرق گوناگون پهلوی هم قرار می‌گیرند.

۱۱.۲ قضیه‌های مربوط به حاصل جمع و حاصلضرب دو پیشامد وابسته (نامستقل)

۱.۱۱.۲ قضیه حاصل جمع دو پیشامد در حالت کلی

گیریم دو پیشامد A,B داشته باشیم.



در این صورت احتمال حاصل جمع این دو پیشامد برابر با حاصل جمع احتمال تک تک آنها منهای احتمال اشتراک دو پیشامد، که ممکن است این احتمال صفر باشد.

یعنی $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

این قضیه را نیز می‌توان برای S پیشامد $A_1, A_2 \dots A_s$ تعمیم داد. مثلاً برای سه پیشامد سازگار C,B,A عبارت است از:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ملاحظه می‌شود که پیشامدهای فرد دارای علامت مثبت و پیشامدهای زوج دارای علامت منفی می‌باشند. این مطلب برای فرمول کلی نیز صادق است.

مثال ۱۱: به یک هدف دو نفر تیراندازی می‌کنند احتمال اینکه نفر اول به هدف بزند $\frac{۱}{۵}$ و احتمال اینکه نفر دوم بزند $\frac{۱}{۶}$ می‌باشد مطلوب است احتمال اینکه:

الف: هر دو به هدف بزنند.

ب: لااقل یکی از آنها به هدف بزند.

پ: فقط یکی از آنها به هدف بزند.

حل: احتمال اینکه نفر اول بزند $\frac{۱}{۵}$ و نتواند بزند $\frac{۴}{۵}$، همچنین احتمال اینکه نفر دوم بزند $\frac{۱}{۶}$ و نتواند بزند $\frac{۶}{۵}$ است.

الف) چون پیشامدهای A , B مستقل هستند یعنی احتمال اینکه نفر دوم به هدف بزند ربطی به نفر اول ندارد پس طبق قضیه حاصلضرب دو پیشامد مستقل داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=0/03$$

ب) با توجه به قضیه حاصل جمع دو پیشامد خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

یعنی: احتمال اینکه هر دو بزنند ـ احتمال اینکه دومی بزند + احتمال اینکه اولی بزند = احتمال اینکه لااقل یکی بزند

در نتیجه: $P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=0/33$

می‌توان این مسأله را از طریق قضیه احتمال وقوع و عدم وقوع پیشامد حل کرد بدین طریق: احتمال اینکه هر دو نتواند بزنند مساوی است با $P(\overline{A\cup B})=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}$ بنابراین احتمال اینکه اولی یا دومی بزند برابر می‌شود با:

$$p(A\cup B)=1-p(\overline{A\cup B})=1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}=0/33$$

راه حل سوم: با توجه به شکل بالا می‌توان چنین نوشت:

هر دو بزنند + فقط دومی بزند + فقط اولی بزند

(منظور از فقط اولی بزند یعنی اولی بزند ولی دومی نتواند بزند)

پس : هر دو بزنند + اولی نتواند بزند × دومی بزند + دومی نتواند بزند × اولی بزند

و یا $P(A\cup B)=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=0/33$

راه حل چهارم: با توجه به شکل می‌توان گفت:

احتمال اینکه لااقل یکی از آنها بزند = احتمال اینکه اولی بزند + احتمال اینکه فقط دومی بزند پس $P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=0/33$

راه حل پنجم: مانند بالا می‌توان نوشت:

احتمال اینکه لااقل یکی از آنها بزند مساوی است با احتمال اینکه دومی بزند بعلاوه احتمال اینکه اولی بزند (یعنی دومی نتواند بزند) $P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}=0/33$ ملاحظه می‌شود که این گونه مسایل را با استفاده از دیاگرام ون واولر بهتر می‌توان حل کرد.

پ) احتمال اینکه فقط یکی از آنها بزند. یعنی اولی بزند دومی نزند و یا دومی بزند اولی نتواند بزند $P(\text{فقط یکی بزند})=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=0/3$ و یا اینکه سئوال مورد نظر را می‌توان

چنین حل کرد.

(هر دو بزنند ـ دومی بزند) + (هر دو بزنند ـ اولی بزند) = فقط یکی بزند

$$P(\text{فقط یکی بزند})=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\right)=0/3$$

باز خاطر نشان می‌سازیم که تمامی این راه حلها از روی شکل بیان شده است. راه حلهای متفاوت بدین دلیل گفته شده است که از هر راهی که به نظر ساده‌تر است مسأله را حل کنید. سعی کنید مسأله فوق را یک بار دیگر بدون توجه به کتاب حل کنید.

مثال ۱۲: یک مسأله به سه دانش‌آموز داده شده است احتمال اینکه نفر اول مسأله را حل کند ۰/۷ و اینکه نفر دوم آن را حل کند ۰/۸ و سرانجام احتمال اینکه نفر سوم نیز حل کند ۰/۵ است. اگر هر سه تصمیم به حل مسأله گرفته باشند احتمال اینکه مسأله حل شود چقدر است؟

حل : دانش‌آموز اولی را با A، دومی را با B و سومی را با C نشان می‌دهیم. طبق قضیه حاصل جمع حوادث خواهیم داشت.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A\cup B\cup C)=0/7+0/8+0/5-0/7\times 0/8-0/7\times 0/5$$
$$-0/8\times 0/5+0/7\times 0/8\times 0/5=0/97$$

ملاحظه می‌شود که حل مسأله با این روش مستلزم زمان زیادی است، بدین جهت اینجا مناسب است که از قضیه وقوع و عدم وقوع پیشامد استفاده کرد.

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup c})=1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$$

(چون پیشامدهای $\bar{A}$، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ مستقل هستند)

$$P(A\cup B\cup C)=1-(1-0/7)(1-0/8)(1-0/5)=0/97$$

راه حل سوم :چون پیشامدهای A، B، C مستقل هستند داریم.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C)=0/7\times 0/8\times 0/5=0/97$$

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد چون سه پیشامد مستقل هستند احتمال اشتراک پیشامدها حاصلضرب احتمالات آنها می‌باشد

۲.۱۱.۲ قضیه حاصلضرب دو پیشامد وابسته (نامستقل)

احتمال حاصلضرب دو پیشامد وابسته مساوی است با حاصلضرب احتمال یکی از این پیشامدها در احتمال شرطی پیشامد دیگر به شرطی که پیشامد قبل وقوع یافته باشد یعنی:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=p(B)\cdot P(A\mid B)$$

این فرمول از طرفین و وسطین کردن احتمال شرطی بدست آمده است.

قضیه حاصلضرب دو پیشامد وابسته را می‌توان برای S پیشامد $A_1, A_2, ..., A_S$ تعمیم داد. $P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_S)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_S\cap A_1A_2\cdots A_{S-1})$ این قضیه به نام قضیه عمومی حاصلضرب احتمالها نامیده می‌شود.

مثال ۱۳: یک بار دیگر مثال ۹ را در نظر می‌گیریم و از کیسه سه مهره با هم خارج می‌کنیم مطلوب است احتمالات زیر:

الف) هر سه مهره انتخابی سفید باشد.

ب) هر سه مهره انتخابی قرمز باشد.

پ) اولی سفید دومی سیاه و سومی قرمز باشد.

ت)از هر رنگ یکی انتخاب شود.

توجه داشته باشید که این مثال همان مثال ۹ است با این تفاوت که در آنجا عمل جای‌گذاری انجام می‌شد در صورتی که در اینجا مهره‌ها را با هم استخراج کرده‌ایم یعنی انتخاب مهره بدون جایگذاری آنها در کیسه انجام گرفته است.

حل ـ الف): چون بدون جایگذاری است هربار از صورت و مخرج یکی کم می‌شود

$$P(\text{هر سه سفید باشند})=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{3}{18}=0.009$$

$$P(\text{هر سه قرمز باشند})=\frac{8}{20}\times\frac{7}{19}\times\frac{6}{18}=0.049$$

$$P(\text{اولی سفید، دومی سیاه، سومی قرمز})=\frac{5}{20}\times\frac{7}{19}\times\frac{8}{18}=0.041$$

$$P(\text{هر کدام از یک رنگ})=3!\times\frac{5}{20}\times\frac{7}{19}\times\frac{8}{18}=0.246$$

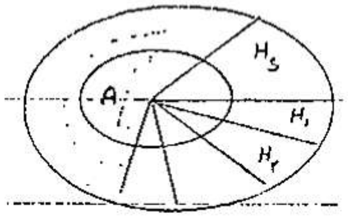
دلیل اینکه به !۳ ضرب شده این است که سه رنگ مختلف به طرق گوناگون پهلوی هم قرار می‌گیرند.

۱۲.۲ قضیه بیس[1] (یابیز)[2]

گیریم $H_1, H_2, ..., H_S$ پیشامدهایی ناسازگار باشند که یکی از آنها باید در یک آزمایش رخ دهد، یعنی:

$$P(H_1)+P(H_2)+\cdots+P(H_S)=1$$

و A عبارت است از پیشامدی که برای آن $P(A)\neq 0$ باشد.



در این صورت احتمال شرطی $P(H_i\mid A)$ برای هر یک از پیشامدهای $H_1, H_2, ..., H_S$ به شرطی که پیشامد A رخ داده باشد از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\times P(A\mid H_i)}{\sum_{i=1}^{s}P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}$$

مخرج کسر را احتمال متوسط می‌نامند و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهند برای اینکه مطلب روشن شود مثالی می‌زنیم.

فرض کنید در خیابانی به یک دانشجویی برخورد کردید که اظهار می‌دارد دانشجوی رشته علوم اجتماعی است. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه این فرد دانشجوی دانشگاه پیام نور باشد چقدر است؟

پاسخ این سئوال از روی قضیه بیس می‌توان داد.

یک مثال دیگر ـ فروشگاهی کالایی را از سه کارخانه $H_1, H_2, ..., H_3$ به نسبتهای معین خریداری می‌کند هیچ کدام از کالاها علامتی که معرف کارخانه مربوطه باشد، ندارد. یک

1. Bayes
2. Boyesse

کالا از بین آنها انتخاب می‌شود ملاحظه می‌شود که کالای انتخابی معیوب است (یعنی حادثه A اتفاق افتاده) احتمال اینکه کالای انتخابی مربوط به یکی از کارخانه‌های معین باشد را به‌وسیله قضیه بیس به‌دست می‌آورند.

در واقع قضیه بیس وقتی به کار برده می‌شود که پیشامدی اتفاق افتاده است می‌خواهیم بدانیم که این پیشامد متعلق به کدام یک از جامعه‌های مورد نظر است. حال مثال عددی می‌زنیم.

مثال ۱۴: دانشجویان یک کلاس از ۵ استان مختلف می‌باشند توزیع درصد قبولیهای استانها و همچنین توزیع درصد پسران در استانهای پنجگانه در جدول زیر آورده شده است از بین کلیه دانشجویان حاضر در کلاس یک نفر را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که این دانشجو پسر است. احتمال آنکه این دانشجو از استان سوم باشد چقدر است؟

نام استان	درصد قبولی در استان	درصد پسران در استان
۱	۳۲	۶۰
۲	۲۵	۶۴
۳	۲۰	۷۰
۴	۱۵	۷۲
۵	۸	۸۵
جمع	۱۰۰	-

حل: قبل از حل مسأله یادآوری نکات زیر ضروری به نظر می‌رسد. برای اینکه در محاسبات اشتباهی رخ ندهد بهتر است کلیه محاسبات به‌کمک جدول انجام گیرد. زیرا اولاً نظم و ترتیب محاسبات مراعات می‌گردد ثانیاً جلو اشتباهات گرفته می‌شود.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. نام استانها را به ترتیب H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 می‌نامیم و پسر بودن را با B نشان می‌دهیم. بنابراین با توجه به جدول بالا می‌توان نوشت

$$P(H_1)=۰/۳۲ \quad P(H_2)=۰/۲۵$$

$$P(H_3)=۰/۲۰ \qquad P(H_4)=۰/۱۵ \qquad P(H_5)=۰/۰۸$$

همچنین احتمال آنکه فرد مورد نظر پسر باشد و از استان اول یا دوم ... پنجم باشد عبارت است از: $P(B|H_1)=۰/۶۰ \quad P(B|H_2)=۰/۶۴$

$$P(B|H_3)=۰/۷۰ \qquad P(B|H_4)=۰/۷۲ \qquad P(B|H_5)=۰/۸۵$$

حال جدول محاسبات را تشکیل می‌دهیم.

H_i	$P(H_i)$	$P(B\|H_i)$	$P(H_i).P(B\|H_i)$	$P(H_i\|B)$
H_1	۰/۳۲	۰/۶۰	۰/۱۹۲	۰/۲۸۷
H_2	۰/۲۵	۰/۶۴	۰/۱۶۰	۰/۲۳۹
H_3	۰/۲۰	۰/۷۰	۰/۱۴۰	۰/۲۱۰
H_4	۰/۱۵	۰/۷۲	۰/۱۰۸	۰/۱۶۲
H_5	۰/۰۸	۰/۸۵	۰/۰۶۸	۰/۱۰۲
جمع	۱	—	۰/۶۶۸	۱

با توجه به جدول ملاحظه می‌شود که احتمال مربوطه برابر با: $P(H_3|B)=۰/۲۱۰$ یعنی مربوط است به سطر سوم جدول.

از ستون آخر جدول چنین استنباط می‌شود که احتمال آنکه این دانشجو از دبستان اول باشد از همه بیشتر است. به سخن دیگر محتمل‌ترین پیشامد استان اول است. بنابراین اگر صورت مسأله محتمل‌ترین پیشامد را بخواهد باید از ستون آخر جدول استفاده نمود.

مثال ۱۵: ۸ کیسه ظاهراً یکسان وجود دارد که ترکیبات آنها به قرار زیر می‌باشد ۳ کیسه هر یک دارای ۱۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه (ترکیب H_1) دو کیسه هر کدام ۱۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه (ترکیب H_2) و دو کیسه دارای ۱۳ مهره سفید و ۷ مهره سیاه (ترکیب H_3) و سرانجام یک کیسه دارای ۱۲ مهره سفید و ۸ مهره سیاه (ترکیب H_4) می‌باشد.

کیسه‌ای به‌طور تصادفی از بین ۸ کیسه انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم ملاحظه می‌شود که رنگ مهره سفید است (پیشامد A) محتمل‌ترین پیشامد برای آمدن مهره سفید کدام ترکیب است؟

حل : با توجه به محتوای کیسه‌ها می‌توان جدول زیر را تنظیم کرد.

H_i	$P(H_i)$	$P(A\|H_i)$	$P(H_i).P(A\|H_i)$	$P(H_i\|A)$
H_1	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{30}{160}$	۰/۳۰
H_2	$\frac{2}{8}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{32}{160}$	۰/۳۲
H_3	$\frac{2}{8}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{26}{160}$	۰/۲۶
H_4	$\frac{1}{8}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{160}$	۰/۱۲
جمع	۱	—	$\frac{100}{160}$	۱

ملاحظه می‌شود که ستون اول مربوط به نام ترکیب است.

ستون دوم احتمال این است که یک کیسه با ترکیبهای یاد شده انتخاب شود. ستون دوم احتمال اینکه مهره انتخابی سفید باشد به شرط آن که یکی از آن ترکیبات باشد. ستون چهارم و پنجم نیز مربوط به عملیات محاسبه می‌باشند.

با توجه به ستون آخر جدول معلوم می‌شود که محتمل‌ترین پیشامد ترکیب دومی باشد.

۱۳.۲ حل مسایل احتمالات به وسیله دیاگرام درخت

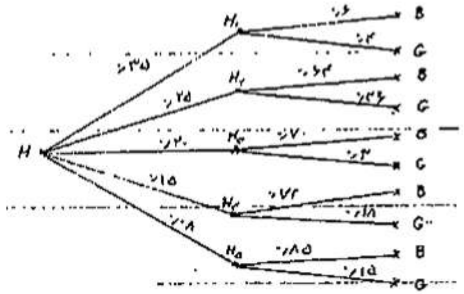
اگر تعداد آزمایشها (n) محدود باشد، می‌توان شمارش پیشامدهای ممکن و مساعد را با استفاده از یک روش ترسیمی که به نام دیاگرام درخت نامیده می‌شود به‌راحتی تعیین و احتمالهای این قبیل پیشامدها را به آسانی محاسبه کرد. سادگی خاص این روش در حل مسایل پیچیده احتمالات بیشتر نمایان می‌شود برای روشن شدن مطلبْ مثالهای ۱۴ و ۱۵ را که قبلاً با روش معمولی حل کردیم با این روش حل می‌کنیم.

مثال ۱۶: حل مثال ۱۴ با استفاده از روش دیاگرام درخت

حل : چون دانشجویان کلاس از ۵ استان مختلف می‌باشند. از نقطه دلخواه H پنج خط که هر کدام نشانه یکی از استانها باشد را رسم می‌کنیم و انتهای خطوط را H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 می‌نامیم. البته H_1 معرف استان اول، H_2 معرف استان دوم و بالاخره H_5 معرف استان پنجم می‌باشد.

چون در مرحله اول یک نفر را به‌طور تصادفی از بین کلیه دانشجویان انتخاب کردیم پس احتمال اینکه نفر انتخابی از هر کدام از استانها باشد را حساب کرده روی هر یک از این پاره‌خطها می‌نویسیم. از طرفی چون هر استان شامل دانشجوی دختر و پسر است از انتهای هر یک از نقاط

H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 دوپاره‌خط که یکی معرف پسربودن و دیگری معرف دختر بودن را رسم می‌کنیم انتهای آنها را B (پسر بودن) و G (دختر بودن) می‌نویسیم. آنگاه احتمال پسر و دختر بودن هر کدام از استانها را محاسبه کرده روی خطوط مربوطه می‌نویسیم. مطابق دیاگرام زیر:



ملاحظه می‌شود که انتهای شاخه‌ها به ده نقطه ختم می‌شود که تنها ۵ تا از آنها با علامت B (پسربودن) مشخص شده است.

حال احتمال آنکه دانشجوی انتخابی از استان سوم باشد به شرط آنکه پسر باشد را چنین تعیین می‌کنند:

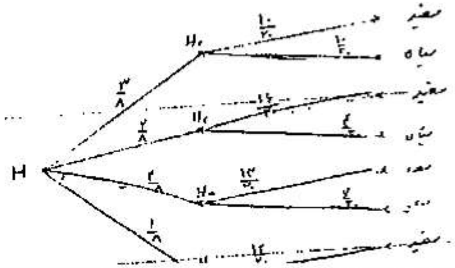
حاصلضرب اعدادی که در مسیر H_3 قرار گرفته و به B ختم می‌شود را بر کل مجموع حاصلضرب‌هایی که انتهای آنها B است تقسیم می‌کنند. باید توجه داشت که از یک نقطه هر چند خط رسم شود باید مجموع احتمالات آن نقطه برابر با یک شود.

$$P(H_3|B)=\frac{0.2\times0.7}{0.35\times0.6+0.25\times0.64+0.2\times0.7+0.15\times0.72+0.08\times0.85}$$

$$=\frac{0.140}{0.668}=0.21$$

مثال ۱۷: حل مثال ۱۵ با استفاده از روش دیاگرام درخت

حل : مانند قبل ترکیبات کیسه‌ها را با H_1, H_2, H_3, H_4 نشان می‌دهیم در نتیجه دیاگرام درخت توصیف کننده، مطابق شکل زیر می‌باشد.



تمامی مسیرهایی که به سفید ختم می‌شوند را حساب کرده جواب هر کدام از آنها بزرگتر باشد محتملترین احتمال است. ملاحظه می‌شود که بزرگترین مقدار مربوط است به مسیر H_2 (خودتان مسأله را پی‌گیری کنید).

۱۴.۲. آزمایشهای تکراری

در کاربرد نظریه احتمال اکثراً با مسایلی برخورد می‌کنیم که یک آزمایش معینی چندین بار تکرار می‌شود در چنین آزمایشهایی معمولاً یک آزمایش به تنهایی برای محقق مد نظر نیست بلکه تعداد وقوع پیشامد در کل آزمایش مورد نظر است مثلاً در تعلیم سربازان به تیراندازی برای متعلم نتیجه هر یک از تیرها مورد نظر نیست بلکه تعداد کل تیرهایی که به هدف اصابت کرده مورد نظر است.

ملاحظه می‌شود که هر آزمایش شامل فقط دو نتیجه است یکی موفقیت و دیگری عدم موفقیت است منظور از موفقیت یکی از دو جواب نتیجه آزمایش است که مورد نظر می‌باشد مثلاً بلی یا نه. شیر یا خط، سفید بودن یا نبودن در ریختن تاس ۵ آمدن و ۵ نیامدن و غیره. معمولاً احتمال موفقیت را با P و عدم موفقیت را با q نشان می‌دهند. در این نوع آزمایشها فرض بر این است که در تمام آزمایشها احتمال موفقیت (پیشامد A) ثابت است. منظور از ثابت بودن احتمال یعنی: ثابت بودن $P(A)$ که پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند. مثلاً در انداختن سکه آمدن شیر در هر بار در n آزمایش مکرر مقداری است ثابت و برابر با $\frac{1}{2}$ است. با توجه به مطالب بالا حال قضیه خاص راجع به آزمایشهای تکراری را مطرح می‌کنیم.

قضیه: اگر در یک آزمایش تکراری P (یا $P(A)$) احتمال موفقیت یک پیشامد در یک آزمایش و q احتمال عدم موفقیت آن باشد. احتمال این که در n آزمایش مورد نظر موفقیت آن آزمایش درست m بار تکرار شود، توسط فرمول زیر بیان می‌شود.

$$P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m}$$

که در آن $P_n(m)$ نشانگر احتمالی است که در n بار آزمایش پیشامد A به تعداد m بار رخ می‌دهد و

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

چون این فرمول را اولین بار برنولی به‌کار گرفته است بدین دلیل آن را فرمول برنولی می‌نامند.

ملاحظه می‌شود که $C_n^m p^m q^{n-m}$ جمله‌ای از بسط دو جمله‌ای خیام و نیوتن $(P+q)^n$

می‌باشد به همین دلیل مجموعه احتمالات $P_n(m)$ قانون توزیع احتمال دو جمله‌ای نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱۸: یک تاس را ۵ بار می‌ریزیم احتمال اینکه ۳ بار رویه ۵ ظاهر شود چقدر است؟

حل: احتمال موفقیت (به دست آوردن یک پنج) در یک آزمایش برابر با $p=\frac{1}{6}$ است و احتمال عدم موفقیت نیز در یک بار آزمایش یعنی q برابر با $\frac{5}{6}$ است. از طرفی تعداد آزمایشها یعنی $n=5$ می‌باشد و این که در صورت مسأله گفته شده رویه ۵، سه بار ظاهر شود یعنی توان p باید ۳ باشد. بنابراین احتمال مورد نظر جمله‌ای در بسط $(P+q)^5$ است که شامل P^3 می‌باشد یعنی $P_5(3)=C_5^3 p^3 q^2$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{250}{7760}=0.033$$

مثال ۱۹: می‌دانیم که ۲۵ درصد دانشجویان دانشکده علوم اجتماعی تهرانی می‌باشند. از دانشجویان این دانشکده ۵ نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه ۲ نفر از این ۵ نفر تهرانی باشند چقدر است؟

حل: $P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m}$

در اینجا $n=5$, $m=2$, $p=0.25$ و همچنین $q=0.75$

در نتیجه $P_5(2)=C_5^2(0.25)^2(0.75)^3=0.2637$

مثال ۲۰: دو سکه همتراز را ۴ بار می‌افکنیم احتمال اینکه رویه شیر ۵ بار ظاهر شود چقدر است؟

حل: دو سکه را ۴ بار افکندن معادل این است که یک سکه را ۸ بار افکندن در نتیجه $n=8$ می‌شود. ازطرفی احتمال هر بار آمدن رویه شیر برابر با $p=\frac{1}{2}$ است. چون رویه شیر باید ۵ بار ظاهر شود پس توان P برابر با ۵ می‌شود در نتیجه $n=8$ ، $m=5$, $P=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ پس خواهیم داشت

$$P_8(5)=C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\left(\frac{1}{2}\right)^8=0/219$$

مثال ۲۱: احتمال این که نوزادی پسر به دنیا بیاید، $\frac{1}{2}$ است. یک خانواده ۵ فرزندی را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه کلیه فرزندان دختر باشند.

ب) احتمال اینکه دو فرزند دختر و سه فرزند پسر باشند.

پ) احتمال اینکه تعداد پسر بیش از تعداد دختر باشد.

حل: احتمال تولد پسر را P و دختر را q می‌نامیم، در نتیجه: $p=q=\frac{1}{2}$ برای اینکه بیشتر به

مطالب آشنا شوید احتمال کلیه حالات را با استفاده از دو جمله‌ای خیام و نیوتن می‌نویسیم

$$(P+q)^5=C_5^5p^5q^0+C_5^4P^4q^1+C_5^3p^3q^2+C_5^2p^2q^3+C_5^1pq^4+C_5^0p^0q^5$$

آنگاه هر یک از سئوالات را با استفاده از آن بدست می‌آوریم.

(البته می‌توانید ضرایب جملات را از مثلث خیام و پاسکال بنویسید.)

الف) احتمال اینکه کلیه فرزندان دختر باشد بدان معنی است که اصلاً پسر نداشته باشد به عبارتی جمله‌ای که توان p صفر و توان q پنج باشد. (یعنی $C_5^0p^0q^5$) اندازه این احتمال برابر است با:

$$p_1(A)=C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=1\times1\times\frac{1}{32}=\frac{1}{32}=\frac{1}{36}=0.03$$

ب) احتمال اینکه دو فرزند دختر و سه فرزند پسر باشند یعنی جمله‌ای که توان q دو و توان p سه باشد. یعنی جمله $C_5^3p^3q^2$

$$P_2(A)=C_5^3p^3q^2=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}=0.31$$

پ) احتمال اینکه تعداد پسر بیشتر از تعداد دختر باشد یعنی جملاتی که توان p بزرگتر از توان q باشد. $P_3(A)=C_5^5p^5q^0+C_5^4p^4q^1+C_5^3p^3q^2$

$$P_3(A)=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0+5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=0.5$$

بقیه مطالب احتمالات را می‌توانید به کتاب روشهای آماری تألیف اینجانب مراجعه کنید.

خلاصه فصل دوم

۱. **تعریف احتمال:** $\dfrac{\text{حالات مساعد برای پیشامد } A}{\text{حالات ممکنه}}=$ احتمال پیشامد A

فرمول کلی آن عبارت است از $p(A)=\dfrac{n}{N}$

که در آن n تعداد حالات مساعد و N تعداد کل حالات ممکنه می‌باشد.

۲. **فضای نمونه:** فضای نمونه مجموعه‌ای است که عضوهای آن حالات ممکن پیشامد مورد نظر می‌باشد که آن را با S نشان می‌دهیم.

۳. **دو قضیهٔ مهم احتمال:**

الف) $p(A)+p(\bar{A})=1$ ، $p+q=1$

ب) $0\le P(A)\le1$

۴. **تعریف احتمال هندسی:** $p(A\in g)=\dfrac{\text{اندازهٔ وسعت ناحیه } g}{\text{اندازه وسعت ناحیه } G}$

۵. **احتمال شرطی:** اگر علاوه بر شرایط ذکر شده در تعریف احتمال (هم احتمال و ناسازگار) شرایط دیگری برای وقوع یک پیشامد در نظر گرفته شود در این صورت احتمال وقوع این پیشامد را احتمال شرطی می‌نامند. احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد را با علامت $P(A|B)$ نشان می‌دهند.

۶. **تعریف پیشامدهای مستقل و نامستقل**

۶.۱: **پیشامدهای مستقل (نابسته):** دو پیشامد A و B را مستقل از هم می‌نامند اگر وقوع یکی روی وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد یعنی احتمال وقوع پیشامد با احتمال شرطی آن پیشامد یکسان باشد.

$$P(A|B)=P(A)\quad P(B|A)=P(B)$$

۶.۲: **پیشامدهای نامستقل (وابسته):** دو پیشامد A و B را وابسته به هم می‌نامند که وقوع یکی بر روی وقوع دیگری تاثیر داشته باشد.

۷. **پیشامدهای ناسازگار :** پیشامدهای A و B را ناسازگار گویند در صورتی که رخ دادن هر دوی آنها به‌طور همزمان غیرممکن باشد.

۸. **قضیه‌های مربوط به حاصل جمع و حاصلضرب پیشامدها.**

الف) حاصل جمع دو پیشامد ناسازگار A و B عبارت است از:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ب) حاصلضرب دو پیشامد مستقل A و B عبارت است از:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

۹. قضیه‌های مربوط به دو پیشامد نامستقل (وابسته)

الف): حاصل جمع دو پیشامد A و B در حالت کلی (پیشامدها هر رابطه‌ای با هم داشته باشند)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ب): حاصلضرب دو پیشامد وابسته A و B عبارت است از:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)$$

و یا $P(A\cap B)=P(B)\times p(A\mid B)$

۱۰. قضیه بیس:

تاکنون احتمال پیشامد را قبل از آزمایش مورد مطالعه قرار می‌دادیم. اینک احتمالی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که آزمایش انجام گرفته است. حال مسئله رابدین طریق مطرح می‌کنیم.

گیریم پیشامد A به همراه یکی و تنها یکی از S پیشامدهای فراگیر و ناسازگار $H_1, H_2, \ldots H_s$ وقوع یابد در این صورت احتمال فرضیه H_i پس از مشاهده پیشامد A طبق فرمول زیر تعیین می‌شود.

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\times P(A\mid H_i)}{\sum P(H_i)\times p(A\mid H_i)}$$

از این قضیه چنین استنباط می‌شود که پیشامد A وقوع یافته. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه این پیشامد مربوط به یکی از پیشامدهای $H_1, H_2, \ldots, H_s$ باشد چقدر است.

۱۱. فرمول برنولی: فرمول برنولی بر اساس آزمایشهای تکراری عبارت است از :

$$P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m}$$

که در آن n تعداد کل آزمایش، n تعداد حالات خواسته شده و p , q نیز به ترتیب احتمال و عدم احتمال وقوع یک پیشامد در یک بار آزمایش است.

یادآوری‌های لازم برای حل مسأله‌های خودآزمایی

انگیزه طرح این مسأله‌ها این است که به دانشجویان کمک کند با حل مسأله‌ها خود را ارزشیابی کنند و برای امتحان پایانی آماده شوند قبل از حل مسأله‌های خودآزمایی توجه دانشجویان عزیز را به این نکته جلب می‌نماید برای حل مسأله‌ها توصیه می‌شود که ابتداء مطالب درسی را با دقت مطالعه و مرور کنید و به نکته‌های مهم آن توجه کامل مبذول دارید و سپس به حل مسأله‌ها پرداخته و سعی کنید با دقت آنها را مورد مطالعه قرار دهید و از حفظ و از برکردن راه حل مسأله‌ها خودداری نمایید. چون شما دانشجویان ناگزیر باید همه مطالب را خود فراگیرید و امتحان دهید بنابراین باید به توصیه‌ها توجه بیشتری داشته باشید تا نبودن استاد درکلاس جبران گردد و از توضیح و تفسیر استاد بی‌نیاز باشید و یا این نیاز به حداقل برسد. پس قبل از آنکه به حل مسأله‌ها نگاه کنید سعی کنید خودتان تا آنجایی که امکان‌پذیر است آنها را حل کنید تا مادامی که از فکر کردن خسته نشده‌اید به جواب مسأله‌ها نگاه نکنید، در غیر این صورت می‌توانید به حل آنها رجوع کنید. طبیعی است در صورت فکر نکردن نمی‌توانید مسأله‌هایی را که امتحان می‌دهند، حل نمایید. البته در حل مسأله‌ها توضیح کافی داده نشده است تا خودتان در بارهٔ حل آنها بیندیشید و توضیحات لازم را به‌دست آورید. انشاالله که به توصیه‌ها عمل خواهید کرد تا موفقیت شما تضمین گردد.

خودآزمایی فصل دوم

۱. در یک کیسه ۵ مهره آبی و ۱۰ مهره قرمز وجود دارد اگر از آن چهار مهره را با هم خارج سازیم احتمال اینکه آنها از یک رنگ نباشند چقدر است؟

۲. در مسأله بالا اگر چهار مهره را یکی یکی خارج ساخته و پس از مشاهده رنگ دوباره در کیسه قرار دهیم احتمال اینکه آنها از یک رنگ نباشد چقدر است؟

۳. در یک کیسه تعدادی مهره‌های سفید و سیاه و قرمز موجود است اگر یک مهره از آن خارج سازیم می‌دانیم که احتمال اینکه مهره سیاه باشد $\frac{1}{5}$ است و احتمال اینکه سیاه یا سفید باشد $\frac{1}{4}$ است معین کنید اولاً احتمال اینکه مهره خارج شده قرمز باشد چیست؟ ثانیاً احتمال

اینکه سفید باشد چیست؟

۴. از ۳۰ بلیط که روی آنها اعداد یک تا ۳۰ نوشته شده یکی را انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد بلیط خارج شده نه بر ۵ و نه بر ۶ قابل قسمت باشد چقدر است؟

۵. کیسه‌ای محتوی ۱۰ مهره سفید و ۱۰ مهره قرمز است، مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم اگر این مهره قرمز باشد آن را در کیسه می‌اندازیم، اگر سفید باشد به جای آن ۳ مهره قرمز می‌گذاریم بعداً مهره دومی که به دیدن رنگ آن اکتفا می‌کنیم از کیسه خارج می‌کنیم.

مطلوب است محاسبه احتمالهای این که مهره‌های خارج شده به صورتهای ذیل باشند.

الف) هر دو سفید باشند. ب) هر دو قرمز باشند. پ) از هر کدام یک رنگ باشد (رنگ مختلف)

۶. هدفی به شکل مربع و به ضلع a و مستطیلی به طول $\frac{a}{2}$ و به عرض $\frac{a}{4}$ در داخل مربع مفروض است. به این هدف تیراندازی می‌شود (با فرض اینکه هیچ یک از تیرها از سطح مربع خارج نمی‌شود) مطلوب است احتمال اینکه به سطح مستطیل اصابت نماید.

۷. یک مسأله به دو دانش‌آموز داده شده است احتمال اینکه نفر اول مسأله را حل کند $\frac{2}{3}$ و اینکه نفر دوم آن را حل کند $\frac{3}{4}$ است اگر هر دو تصمیم به حل مسأله گرفته باشند.

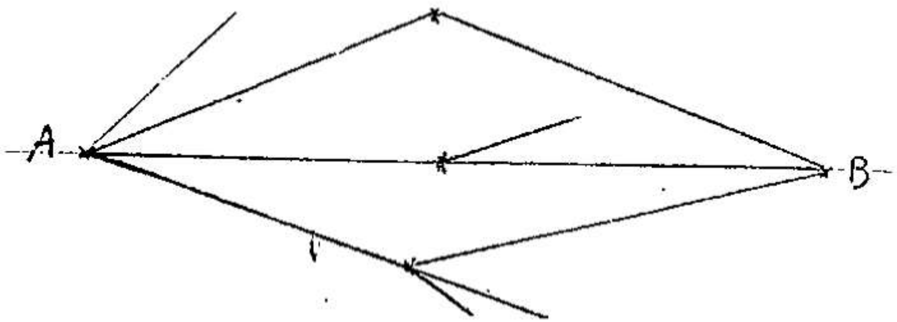
الف) احتمال اینکه هر دو آن را حل کنند چیست؟

ب) احتمال اینکه فقط یکی از آنها مسأله را حل کند چیست؟

پ) احتمال اینکه مسأله حل شود چیست؟

۸. یک دسته می‌خواهند از نقطه A به نقطه B راهپیمایی نمایند ولی شناختی از راههای مختلف اتصال این دو محل را نمی‌دانند و بسته به راهی که انتخاب می‌کنند ممکن است به مقصد (B) برسند یا نرسند اگر راههای اتصال به شکل زیر باشد.

مطلوب است احتمال اینکه این عده به مقصد (B) برسند.



۹. در یک ناحیه به منظور اکتشاف نفت، ۵ چاه اکتشافی می‌خواهند حفر کنند اکتشافهای قبلی در منطقه نفت‌خیز نزدیک به آن ناحیه نشان داده است که از هر ۱۰ چاه، ۲ چاه به منبع نفت

برنخورده است. احتمال این که از ۵ چاه اکتشافی ۴ چاه به منبع نفت برخورد کند چیست؟

۱۰. در یک سمینار ۴۰ نفر از چهار استان به تعداد مساوی شرکت کرده‌اند از این افراد به طور تصادفی ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم احتمال این که ۲ نفر از یک استان و ۳ نفر دیگر از یک استان دیگر باشد چقدر است؟

۱۱. یک کلاس آمار در علوم اجتماعی مرکب از ۱۵ دانشجوی سال دوم، ۳۰ دانشجوی سال سوم و ۵ دانشجوی سال چهارم می‌باشد. سه دانشجوی سال دوم، ۵ دانشجوی سال سوم و ۲ دانشجوی سال چهارم در امتحان نیم ترم رگرسیون نمره الف می‌گیرند. اگر به‌طور تصادفی یک دانشجو از کلاس انتخاب شود. معلوم شود که الف گرفته است، احتمال اینکه دانشجو سال سوم باشد چقدر است؟

۱۲. مدرسه‌ای شامل ۵ کلاس است و از هر کلاس ۴ دانش‌آموز را انتخاب کرده یکی از والدین (پدر یا مادر) آنان را برای انجمن خانه مدرسه دعوت کرده‌ایم. می‌خواهیم برای اداره انجمن خانه مدرسه ۳ نفر از والدین را انتخاب نماییم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه نفر بچه‌هایشان در یک کلاس باشند.

ب) ۲ تا در یک کلاس و بعدی در کلاس دیگر باشد.

۱۳. بعد از یک جنگ سه سرباز تصمیم می‌گیرند اگر بعد از ۲۵ سال حداقل دو نفر آنها زنده باشند با هم ملاقات کرده و این پیشامد را جشن بگیرند. احتمال اینکه بتوانند تصمیم خود را عملی کنند به شرط اینکه احتمال ۲۵ سال زنده بودن آنها $\frac{5}{6}$، $\frac{4}{5}$، $\frac{3}{4}$ باشد، چقدر است؟

۱۴. احتمال اینکه مردی تا ۳۰ سال آینده زنده بماند $\frac{3}{5}$ است، و احتمال اینکه زن او تا ۳۰ سال آینده زنده باشد $\frac{2}{3}$ است. احتمالات ذیل را پیدا کنید.

الف) زن و شوهر هر دو زنده باشند.

ب) فقط زن زنده باشد.

پ) فقط مرد زنده باشد.

ت) حداقل یکی از آندو زنده باشد.

۱۵. یک نماینده بیمه برای پنج نفر بیمه نامه صادر می‌کند که هر پنج نفر آنها از لحاظ سن و سلامت مزاج یکسانند. با توجه به جدول عمر بیمه‌گر درگذشته، احتمال اینکه شخصی در این سن از تاریخ بیمه‌شدن تا ۲۵ سال زنده بماند $\frac{2}{3}$ است. احتمال را در ۲۵ سال آینده برای حالات ذیل پیدا کنید.

الف) هر ۵ نفر زنده بمانند.

ب) حداقل ۳ نفر زنده بماند.

پ) فقط ۲ نفر زنده بماند.

ت) حداقل یک نفر زنده بماند.

حل مسایل خودآزمایی

سعی کنید مسأله‌ها را اول خودتان حل کنید و سپس به جواب آنها نگاه کنید.

۱. $p(\text{از یک رنگ نباشند}) = 1 - p(\text{از یک رنگ باشند}) =$
$1 - [p(\text{هر چهار تا قرمز باشند}) + p(\text{هر چهار تا آبی باشند})]$

$$P(\text{از یک رنگ نباشند}) = 1-\left(\frac{C_5^4}{C_{15}^4}+\frac{C_{10}^4}{C_{15}^4}\right) = 0.8425$$

۲. $P(\text{از یک رنگ نباشند}) = 1 - P(\text{از یک رنگ باشند}) =$
$1 - [P(\text{هر چهار تا قرمز باشند}) + P(\text{هر چهار تا آبی باشند})] =$

$$P(\text{از یک رنگ نباشند}) = 1-\left[\left(\frac{5}{15}\right)^4+\left(\frac{10}{15}\right)^4\right] = 0.7901$$

۳. $P(\text{قرمز}) = 1 - P(\text{سفید یا سیاه}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$P(\text{سفید}) = P(\text{سفید یا سیاه}) - P(\text{سیاه}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

۴. $P(\text{بر ۵ و ۶ قابل قسمت نباشند}) = 1 - P(\text{بر ۵ یا ۶ قابل قسمت باشند})$
زیرا کلاً ۱۰ عدد است که بر ۵ یا ۶ قابل قسمت هستند: $P(A) = 1 - \frac{10}{30} = \frac{20}{30}$

۵. $P(\text{هر دو سفید باشند}) = \frac{10}{20} \times \frac{9}{22} = 0.2045$
$P(\text{هر دو قرمز باشند}) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = 0.25$
$P(\text{از هر کدام یک رنگ باشد}) = P(\text{اولی قرمز و دومی سفید}) + P(\text{اولی سفید و دومی قرمز})$

$$P(\text{از هر کدام یک رنگ باشد}) = \frac{10}{20}\times\frac{10}{20} + \frac{10}{20}\times\frac{13}{22} = 0.4555$$

۶. $$p(A\in g) = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{a}{2}\times\frac{a}{4}}{a\times a} = \frac{1}{8} = 0.125$$

۷. $P_1(A) = P(\text{هر دو حل کنند}) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = 0.5$
$P_2(A) = P(\text{اولی حل کند و دومی نتواند}) + P(\text{دومی حل کند و اولی نتواند})$

$$P_2(A) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = 0.42$$

$$p_3(A) = p_1(A) + P_2(A) = 0.5 + 0.42 = 0.92$$

۸. $$P(A) = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{11}{24} = 0.4583$$

۹. $$P(A) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_5^4\left(\frac{8}{10}\right)^4\left(\frac{2}{10}\right)^1 = 0.4096$$

۱۰. $$P(A) = A_4^2\left(\frac{C_{10}^2\times C_{10}^3}{C_{40}^5} = 0.098\right.$$

۱۱. $$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\times P(A\mid H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\times P(A\mid H_i)} =$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{\frac{30}{50}\times\frac{5}{30}}{\frac{15}{50}\times\frac{3}{15}+\frac{30}{50}\times\frac{5}{30}+\frac{5}{50}\times\frac{2}{5}} = 0.5$$

یک بار دیگر داده‌ها را به صورت جدول تنظیم نموده و آن را حل کنید.

۱۲. $$P_1(A) = \frac{C_4^3}{C_{20}^3}\times 5 = 0.018$$

$$P_2(A) = \frac{C_4^2\times C_{16}^1}{C_{20}^3}\times 5 = 0.4211$$

۱۳. $P(A) = P(\text{فقط دو نفر زنده بماند}) + P(\text{هر سه زنده بماند})$
$P(\text{فقط دو نفر زنده بماند}) = P(\text{اولی و دومی زنده بماند}) . P(\text{سومی بمیرد}) +$
$P(\text{اولی و سومی زنده بماند}) . P(\text{دومی بمیرد})$
$+ P(\text{دومی و سومی زنده بماند}) . P(\text{اولی بمیرد})$

$$P(A) = \frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4} = P(A) = 0.8917$$

۱۴. P(هر دو زنده بمانند) = P(مرد زنده بماند) . P(زن زنده بماند)

P(هر دو زنده بمانند) = $\frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۳}$ = ۰ر۴

P (فقط زن زنده بماند) = P (زن زنده بماند) . P (مرد بمیرد)

P(فقط زن زنده بماند) = $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۵}$ = ۰ر۲۷

P(فقط مرد زنده بماند) = $\frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۵}$ = ۰ر۲۰

P(حداقل یکی زنده بماند) = P (فقط زن زنده بماند) + P(فقط مرد زنده بماند) + P (هر دو زنده بماند)

p(حداقل یکی زنده بماند) = ۰ر۲۷ + ۰ر۲۰ + ۰ر۴ = ۰ر۸۷

p(هر ۵ نفر زنده بماند) = $(\frac{۲}{۳})^{۵}$ = ۰ر۱۳۱۷

P(حداقل سه نفر زنده بماند) = P (سه نفر زنده بماند) + P (چهار نفر زنده بماند)

+ P (هر ۵ نفر زنده بماند) = $C_{۵}^{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳})^{۲} + C_{۵}^{۴}(\frac{۲}{۳})^{۴}(\frac{۱}{۳})^{۱} + C_{۵}^{۵}(\frac{۲}{۳})^{۵}(\frac{۱}{۳})^{۰}$ = ۰ر۷۹۰۱

P (فقط دو نفر زنده بماند) = $C_{۵}^{۲}(\frac{۲}{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳})^{۳}$ = ۰ر۱۶۴۶

P(حداقل یک نفر زنده بماند) = ۱ - P (کسی زنده نماند) = $۱ - (\frac{۱}{۳})^{۵}$ = ۰ر۹۹۵۹

فصل پنجم

متغیر تصادفی و توزیع احتمال

۵-۱- تعریف متغیر تصادفی

متغیر تصادفی روش و یا قانونی است که براساس آن به هر حادثه‌ای از یک آزمایش (به هر نقطه فضای نمونه) یک عدد حقیقی نسبت داده می‌شود.

مثال: دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم فضای نمونه به شرح زیر است.

(H = شیر و T = خط) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

به هر یک از حادثه‌ها عددی نسبت می‌دهیم مثلاً تعداد شیرهای ظاهر شده. این عدد یعنی تعداد شیرها را به x نشان داده و به آن متغیر تصادفی می‌گوئیم. در این مثال متغیر تصادفی x می‌تواند اعداد صفر و یک و دو را بپذیرد.

$x = ۰, ۱, ۲$ $\quad x(TT) = ۰ \quad x(HT) = x(TH) = ۱ \quad x(HH) = ۲$

در مواردی می‌توان تابعی از متغیر x را در نظر گرفت مثلاً $y = f(x) = x^۲$ را که به y هم متغیر تصادفی می‌گویند.

$y = ۰, ۱, ۴$ $\quad y(TT) = ۰ \quad y(HT) = y(TH) = ۱ \quad y(HH) = ۴$

۵-۱-۱- متغیر تصادفی پیوسته و متغیر تصادفی گسسته

اگر متغیر تصادفی بتواند فقط اعداد گسسته را به نقاط فضای نمونه نسبت دهد به آن متغیر تصادفی گسسته می‌گویند.

مانند: مثال فوق (پرتاب دو سکه) که x و y متغیرهای تصادفی گسسته هستند.

اگر متغیر تصادفی بتواند هر یک از مقادیر حقیقی در یک فاصلهٔ مشخص را به نقاط فضای نمونه

نسبت دهد به آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند.

مثال: اندازه طول قد افراد = x که x متغیر تصادفی پیوسته می‌باشد.

مثال: جعبه‌ای حاوی سه توپ قرمز و دو توپ سفید می‌باشد. اگر سه توپ را بدون جایگذاری و به طور متوالی از جعبه خارج نمائیم و تعداد توپ‌های قرمز خارج شده را متغیر تصادفی x بنامیم. پیش‌آمدهای ممکن و مقادیر x را برای هر یک بنویسید.

حل:

پیشامدهای ممکن	RRR	WRR	RWR	RRW	RWW	WRW	WWR
x	۳	۲	۲	۲	۱	۱	۱

x=۱و۲و۳

۵-۲- توزیع احتمال

یکی از مفاهیم مهم احتمال، توزیع احتمال متغیر تصادفی می‌باشد. به کمک آن می‌توان در یک آزمایش احتمال پیش آمدهای گوناگون را محاسبه نمود توزیع احتمال به توزیع احتمال گسسته و توزیع احتمال پیوسته تقسیم می‌شود.

۵-۳- توزیع احتمال گسسته

اگر متغیر تصادفی x مقادیر $x_1, x_2, ..., x_n$ را با احتمال‌های $P_1, P_2, ..., P_n$ قبول نماید به قسمی که اولاً $P_i \geq 0$ و ثانیاً $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ باشد در اینصورت می‌گوئیم توزیع احتمال گسسته برای متغیر تصادفی x تعریف شده است.

۵-۳-۱- جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته

به جدولی گفته می‌شود که در آن مقادیر مختلف متغیر تصادفی x و احتمال مربوط به آن‌ها نوشته شود.

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p(x)	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

مثال ۱: دو سکه با هم پرتاب می‌شوند. متغیر تصادفی عبارت است از: تعداد شیرهای ظاهر شده =x
جدول توزیع احتمال متغیر x را تنظیم نمائید.

حل:

x	۰	۱	۲	جمع
P(x)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۱

مثال ۲: در پرتاب دو مکعب متغیر تصادفی x به صورت زیر تعریف می‌شود. جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی x را تنظیم نمائید.

x = مجموع نقاط روی دو مکعب

حل: ابتدا جدول کمکی زیر را تشکیل می‌دهیم

مکعب اول

مکعب دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

سپس با توجه به جدول کمکی فوق جدول توزیع احتمال x را به ترتیب زیر تنظیم می‌کنیم.

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
P(x)	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

تبصره: با استفاده از جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی می‌توان احتمال پیش‌آمدهای مختلف را محاسبه نمود.

مثال: در مثال ۲ فوق (پرتاب دو مکعب) احتمال‌های زیر را حساب کنید.

۱) احتمال اینکه مجموع نقاط ظاهر شده روی مکعب‌ها فرد باشد.

۲) احتمال اینکه مجموع نقاط ظاهر شده روی مکعب‌ها بین ۶ و ۹ باشد.

۳) احتمال اینکه مجموع نقاط ظاهر شده روی مکعب‌ها حداقل ۱۱ باشد.

۴) احتمال اینکه مجموع نقاط ظاهر شده روی مکعب‌ها حداکثر ۳ باشد.

حل:

۱) $P(x = \text{فرد}) = P(x=3) + P(x=5) + P(x=7) + P(x=9) + P(x=11)$

$$= \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

۲) $P(6 < x < 9) = P(x=7) + P(x=8) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{11}{36}$

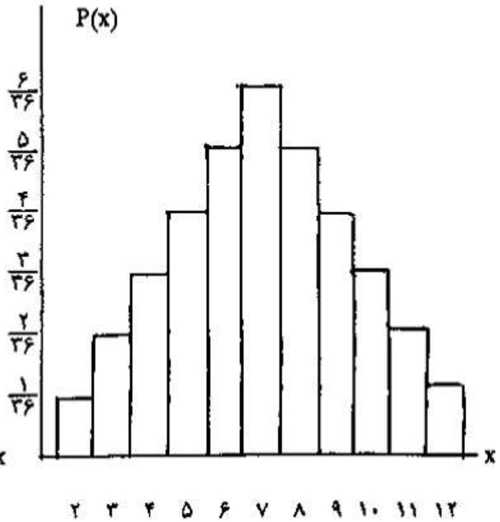
۳) $P(x \geq 11) = P(x=11) + P(x=12) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

۴) $P(x \leq 3) = P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

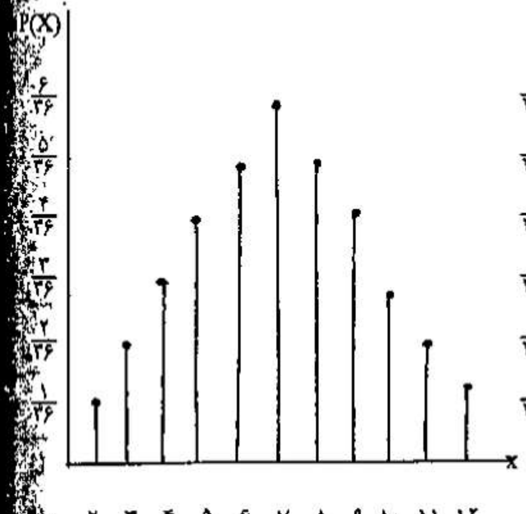
۵-۳-۲- نمودار توزیع احتمال

نمودار توزیع احتمال را می‌توان به روشهای میله‌ای و هیستوگرام رسم نمود.

مثال: در مثال ۲ فوق (پرتاب دو مکعب) نمودار توزیع احتمال را به روش میله‌ای و هیستوگرام رسم کنید.



هیستوگرام توزیع احتمال



نمودارمیله‌ای توزیع احتمال

۵-۴- امید ریاضی $x = E(x)$

اگر تعداد تکرار یک آزمایش زیاد شود فراوانی نسبی پیش آمد یعنی f_i به سمت احتمال حادثه یعنی P_i میل خواهد نمود. مثلاً اگر سکه‌ای را به دفعات زیاد پرتاب کنیم فراوانی نسبی آمدن شیر به احتمال آمدن شیر یعنی $\frac{1}{2}$ نزدیک خواهد شد خواص عمومی فراوانی نسبی یعنی f_i و احتمال یعنی P_i نظیر یکدیگرند منتهی فراوانی نسبی جنبه تجربی و عملی ولی احتمال جنبه نظری و تئوری دارد.

۵-۴-۱- تعریف امید ریاضی متغیر تصادفی x

به میانگین توزیع احتمال متغیر تصادفی x امید ریاضی x می‌گویند و از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

مثال ۱: در مثال ۱ فوق (پرتاب دو سکه) امید ریاضی x بشرح زیر حساب می‌شود

x	۰	۱	۲	جمع
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱
xp(x)	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	E(x)=۱

$$E(x) = \Sigma x_i p_i = 1$$

مثال ۲: در مثال ۲ فوق (پرتاب دو مکعب) امید ریاضی متغیر تصادفی x بشرح زیر حساب می‌شود

$$E(x) = \Sigma x_i p_i = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{36} + \dots\dots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

۵-۴-۲- امید ریاضی متغیر تصادفی $y = f(x)$

به طوری که قبلاً اشاره شد هر تابعی از متغیر تصادفی x یعنی $f(x)$ خود یک متغیر تصادفی می‌باشد که امید ریاضی آن به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$E(y) = E(f(x)) = \Sigma f(x_i) P_i$$

مثال: امید ریاضی $f(x) = 3x + 1$ را در مثال پرتاب دو سکه بدست آورید.

حل:

$$E(f(x)) = E(3x+1) = \Sigma(3x_i+1)P_i = 4$$

x	۰	۱	۲	جمع
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱
$f(x)=3x+1$	۱	۴	۷	
$(3x+1)P(x)$	$\frac{1}{4}$	۲	$\frac{7}{4}$	$4=E(3x+1)$

۵-۴-۳- خواص امید ریاضی

الف - امید ریاضی عدد ثابت برابر همان عدد است. $E(a)=a \qquad a\in R$

اثبات: $E(a) = \Sigma aP_i = a\Sigma P_i = a\times 1 = a$

ب - $E(bx) = bE(x) \qquad b\in R$

اثبات: $E(bx) = \Sigma bx_iP_i = b\Sigma x_iP_i = bE(x)$

ج - $E(a+bx) = a + bE(x)$

اثبات: $E(a+bx) = \Sigma(a+bx_i)P_i = a\Sigma P_i + b\Sigma x_iP_i = a + bE(x)$

د - $E(a+bx+Cx^2) = a + bE(x) + CE(x^2) \qquad a, b, c \in R$

ه - $E(E(x)) = E(x)$

اثبات: $E(E(x)) = E(\mu) = \mu = E(x)$

مثال: در مثال فوق امید ریاضی $y = f(x) = 3x + 1$ را با استفاده از خواص امید ریاضی حساب کنید.

حل: با استفاده از خاصیت ج داریم: $E(y) = E(3x+1) = 3E(x) + 1 = 3\times 1 + 1 = 4$

۵-۵- واریانس توزیع احتمال

قبلاً در آمار توصیفی ذکر نمودیم که برای صفت متغیر x معیار مرکزی (میانگین) و شاخص پراکندگی (واریانس) تعریف می‌شود.

که فرمول واریانس بشرح زیر است $\sigma^2 = \frac{\Sigma F_i(x_i-\bar{x})^2}{N} = \Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2$

اکنون با توجه به تشابه فراوانی نسبی f_i و احتمال P_i واریانس متغیر تصادفی x در توزیع احتمال بشرح زیر می‌باشد.

(a) $Var(x) = \sigma_x^2 = \Sigma(x_i-\mu)^2P_i = E(x-\mu)^2$

تبصره: فرمول واریانس (a) را می‌توان بصورت زیر هم نوشت:

(b) $Var(x) = \sigma_x^2 = \Sigma x_i^2P_i - \mu^2 = E(x^2) - \mu^2$

اثبات: $E(x-\mu)^2 = E(x^2-2\mu x+\mu^2) = E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2) = E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(x^2) - \mu^2$

مثال: در مثال ۱ فوق (پرتاب دو سکه) امید ریاضی متغیر تصادفی x را به هر دو روش حساب کنید.

الف - از فرمول a استفاده می‌کنیم.

x	۰	۱	۲	جمع
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱
$(x-\mu)^2=(x-1)^2$	۱	۰	۱	
$(x-1)^2P(x)$	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}=E(x-1)^2$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E(x-\mu)^2 = \Sigma(x_i-\mu)^2P_i = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0/7$$

ب - از فرمول b استفاده می‌کنیم.

x	۰	۱	۲	جمع
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱
x^2	۰	۱	۴	
$x^2P(x)$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}=E(x^2)$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E(x^2) - \mu^2 = \Sigma x_i^2P_i - \mu^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0/7$$

۵-۵-۱- خواص واریانس

الف - واریانس، یک عدد نامنفی است $Var(x) \ge 0$

اثبات: $Var(x) = E(x-\mu^2) = \Sigma(x_i-\mu)^2P_i \ge 0$

ب - واریانس عدد ثابت برابر صفر است. $Var(a) = 0 \qquad a\in R$

اثبات: $Var(a) = E(a-\mu)^2 = E(a-a)^2 = E(0) = \Sigma 0 \times P_i = 0$

ج - $Var(bx) = b^2 var(x) \qquad b\in R$

اثبات: $Var(bx) = E(bx-\mu_{bx})^2 = E(bx-b\mu_x)^2 = b^2E(x-\mu_x)^2 = b^2Var(x)$

د - $Var(a+bx) = b^2Var(x)$

اثبات:

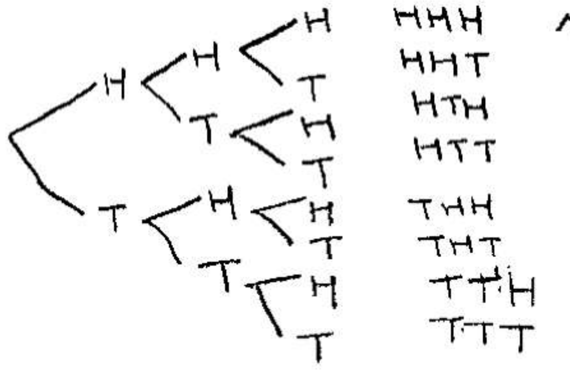
$$Var(a+bx) = E(a+bx-\mu_{a+bx})^2 = E(a+bx-a-b\mu_x)^2 = Eb^2(x-\mu_x)^2 = b^2E(x-\mu)^2 = b^2Var(x)$$

مثال: اگر متغیر تصادفی x دارای واریانس $\frac{1}{4}$ باشد، واریانس و انحراف معیار متغیرهای تصادفی زیر را حساب کنید.

الف - $y_1 = 2x \Rightarrow Var(y_1) = Var(2x) = 4Var(x) = 4\times\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sigma_{2x} = 1$

ب - $y_2 = -2x \Rightarrow Var(y_2) = Var(-2x) = 4Var(x) = 4\times\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sigma_{-2x} = 1$

ج - $y_3 = -2x+4 \Rightarrow Var(y_3) = Var(-2x+4) = 4Var(x) = 4\times\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sigma_{-2x+4} = 1$



مجموعه مسائل متغیر تصادفی و توزیع احتمال

x متغیر تصادفی با توزیع احتمال زیر است:

x	۰	۱	۲	۳
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{6}$

مطلوبست:

الف - $E(x)$ ب - σ_x^2 ج - $E(x-3)^2$ د - $E(x-E(x))^2$

جواب: الف: ۱ ب: ۱ ج: ۵ د: ۱

۲- در یک بازی شخصی ۳ سکه را پرتاب می‌کند. اگر هر سه شیر یا هر سه خط باشد ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند و اگر یک یا دو شیر بیاید ۳۰۰ تومان می‌پردازند امید ریاضی مبلغ برد او چقدر است.

جواب: ۱۰۰

۳- در یک بازی هرکس ۲۰۰ تومان می‌دهد و وارد بازی می‌شود و یک جفت مکعب شماره‌دار را می‌ریزد اگر جفت بیاورد به ازاء هر خال ۱۰۰ تومان می‌گیرد امید ریاضی برد او چقدر است؟

جواب: ۱۱۶/۶۶

احتمال اینکه تیم فوتبالی در مسابقه‌ای برنده شود ۰/۶ است و این تیم در یکسری مسابقات شرکت کرده است و قرار است پنج مسابقه انجام دهد فرض کنید x تعداد مسابقاتی است که این تیم قبل از اولین شکست خود بازی می‌کند. توزیع x را یافته و میانگین و واریانس آن را حساب کنید.

جواب:

x	۰	۱	۲	۳	۴
	/۴	/۲۴	/۱۴۴	/۰۸۶۴	/۱۲۹۶

فصل ششم

توزیع‌های مهم احتمال گسسته

همان طور که قبلاً شرح داده شد در توزیع احتمال گسسته متغیر تصادفی x مقادیر جدا از هم را می‌پذیرد.

در فصل پنجم کلیات مربوط به توزیع احتمال گسسته شرح داده شد مخصوصاً نحوه محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی x و خواص امید ریاضی و واریانس بررسی گردید. اکنون در این فصل بعضی از توزیع‌های مهم احتمال گسسته شرح داده می‌شود.

۶-۱- توزیع احتمال یکنواخت

ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته، توزیع احتمال یکنواخت می‌باشد که متغیر تصادفی x تمام مقادیر خود را با احتمالهای مساوی اختیار می‌کند.

اگر متغیر تصادفی X مقادیر x_1 و x_2 و ...... و x_n را با احتمال مساوی قبول کند توزیع احتمال X را یکنواخت می‌گویند و فرمول احتمال آن بشرح زیر است:

$$x = x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_n \qquad \boxed{P(x\ ,\ n) = \frac{1}{n}}$$

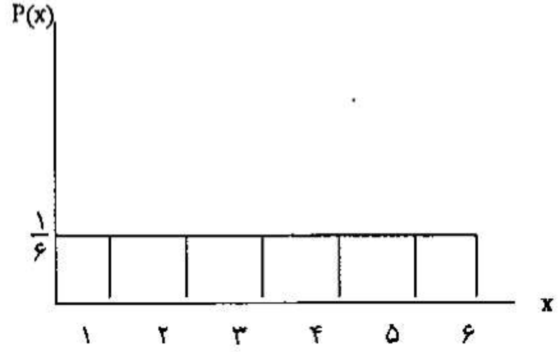
توزیع احتمال یکنواخت دارای یک پارامتر n می‌باشد.

مثال: مکعبی را پرتاب می‌کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده شماره روی مکعب می‌باشد اولاً توزیع احتمال X را بنویسید و ثانیاً نمودار هیستوگرام آن را رسم کنید.

حل: فضای نمونه این توزیع یکنواخت عبارتست از $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

و قانون احتمال آن بشرح زیر است: $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad P(x) = \frac{1}{6}$

هیستوگرام این توزیع در زیر رسم شده است.



۶-۱-۱- امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال یکنواخت

میانگین $E(x) = \frac{n+1}{2}$ $\quad E(x) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

واریانس $\sigma_x^2 = \frac{n^2-1}{12}$ $\quad Var(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

مثال: در مثال فوق (پرتاب مکعب) امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی x را بدست آورید.

حل: $E(x) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3/5$

$\sigma_x^2 = Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-3/5)^2 = 2/92$

$\sigma_x = \sqrt{2/92} = 1/71$

۶-۲- توزیع احتمال دو جمله‌ای - توزیع بینم

هرگاه آزمایشی دو حالت بیشتر نداشته باشد و در هر بار آزمایش فقط یکی از این دو حالت اتفاق بیفتد به آن آزمایش برنولی می‌گویند. اگر احتمال موفقیت P و احتمال عدم موفقیت $q = 1-p$ باشد و آزمایش را n بار انجام دهیم و آزمایشها مستقل از یکدیگر باشند احتمال آنکه تعداد موفقیت‌ها $k=$ باشد از فرمول توزیع احتمال دو جمله‌ای بشرح زیر استفاده می‌شود.

$$\boxed{P(x=k) = C_n^k p^k q^{n-k}} \qquad K = 0, 1, 2, \ldots, n$$

فرمول توزیع احتمال دو جمله‌ای را بترتیب زیر هم می‌توان نوشت

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

توزیع احتمال دو جمله‌ای دارای دو پارامتر n و P می‌باشد.

مثال: یک سکه را شش بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه دو بار شیر بیاید چقدراست؟

حل: داریم: $n=6 \quad x=2 \quad P=\frac{1}{2} \quad , \quad q = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(x=2) = C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6\times5}{2\times1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15\times\frac{1}{64} = \frac{15}{64} = 0/23$$

۶-۲-۱- امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال دو جمله‌ای

در توزیع احتمال دو جمله‌ای به کمک پارامترهای n و p می‌توان میانگین و واریانس توزیع را بشرح زیر محاسبه نمود.

میانگین $\quad E(x) = \mu = np$

واریانس $\quad Var(x) = \sigma_x^2 = npq$

تبصره: جداولی وجود دارد که با معلوم بودن پارامترهای توزیع احتمال دو جمله‌ای یعنی n و P می‌توان احتمال وقوع هر مقداری از متغیر x را از آن جداول استخراج نمود.

مثال: یک سکه ناهمگن را ۵ بار پرتاب می‌کنیم فرض می‌کنیم که احتمال ظاهر شدن شیر (موفقیت) $P=\frac{1}{3}$ باشد. اگر تعداد موفقیت‌ها را در این پنج بار متغیر تصادفی X بنامیم مطلوب است.

الف- جدول توزیع احتمال x

ب- احتمال اینکه حداکثر یک شیر ظاهر شود

ج- احتمال اینکه حداقل یک شیر ظاهر شود

د- تعیین میانگین و واریانس توزیع احتمال متغیرتصادفی X

حل: $n = 5$ $\quad X =$ تعداد شیرهای ظاهر شده $\quad P = \frac{1}{3} \quad q = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$P(x) = C_n^x P^x q^{n-x} \Rightarrow P(x) = C_5^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$$

$$P(x=0) = C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$P(x=1) = C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

$$P(x=2) = C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

$$P(x=3) = C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

$$P(x=4) = C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

$$P(x=5) = C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}$$

الف:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
P(x)	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$	۱

ب: $P(x \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = \frac{32}{243} + \frac{80}{243} = \frac{112}{243}$

ج: $P(x \ge 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$

د: $\mu = E(x) = np = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.67$

$\sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{10}}{3}$

تبصره: در توزیع احتمال دو جمله‌ای محتملترین وقوع متغیر تصادفی X مربوط به میانگین می‌باشد (اگر np عدد درست باشد و در غیر اینصورت مربوط به عدد درست مجاور np می‌باشد.)

۶-۳- توزیع احتمال برنولی

اگر در توزیع احتمال دو جمله‌ای $n = 1$ اختیار گردد. توزیع احتمال برنولی را خواهیم داشت. به عبارت دیگر آزمایشی را در نظر می‌گیریم که دارای دو حالت باشد. یکی از دو حالت را موفقیت و حالت دیگر را عدم موفقیت می‌نامیم اگر متغیر تصادفی X طوری تعریف شود که اعداد ۱ و ۰ را بترتیب برای موفقیت و عدم موفقیت قبول کند و احتمال موفقیت و عدم موفقیت بترتیب p و $q=1-p$ باشد و اگر

این آزمایش را فقط یکبار انجام دهیم توزیع احتمال برنولی بوجود می‌آید.

فرمول توزیع احتمال برنولی بشرح زیر است:

$$\boxed{P(x) = p^x q^{1-x}} \qquad x = 0, 1$$

توزیع احتمالی برنولی دارای یک پارامتر p می‌باشد.

۶-۳-۱- امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال برنولی

به کمک پارامتر P می‌توان میانگین و واریانس توزیع احتمال برنولی را بشرح زیر محاسبه نمود.

$E(x) = \mu = P$ میانگین

$Var(x) = \sigma_x^2 = pq$ واریانس

مثال: سکه سالمی را یکبار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی را X نشان دهند تعداد شیر ظاهر شده باشد میانگین واریانس X حساب کنید.

حل:

$\mu = p = \frac{1}{2}$

$\sigma^2 = pq = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

۶-۴- توزیع احتمال چند جمله‌ای

در توزیع احتمال دو جمله‌ای هر آزمایش شامل دو حالت یا دو حادثه می‌باشد. اکنون آزمایشی را در نظر می‌گیریم که دارای K حالت (حادثه) باشد احتمال وقوع پیشآمدهای A_1 و A_2 و .... و A_k را بترتیب P_1 و P_2 و .... و P_k می‌نامیم ($\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$) اگر این آزمایش را n بار تکرار نمائیم و آزمایشها مستقل از یکدیگر باشند احتمال آنکه در n بار آزمایش حادثه‌های A_1 و A_2 و .... و A_k بترتیب x_1 و x_2 و .... x_k بار رخ دهند از فرمول احتمال چند جمله‌ای بشرح زیر بدست می‌آید: ($\sum_{i=1}^{k} x_i = n$)

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \cdot P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$$

مثال: یک کارخانه کالائی را تولید می‌کند که ۵۰٪ تولیدات مرغوب و ۳۰٪ متوسط و ۲۰٪ نامرغوب می‌باشد. یک نمونه ۵ تائی به تصادف از بین این کالاها انتخاب می‌کنیم احتمال آن را حساب کنید که ۲

کالا مرغوب و ۱ کالا متوسط و ۲ کالا نامرغوب باشند.

حل: $n=۵ \quad , \quad n_1=۲ \quad , \quad n_2=۱ \quad , \quad n_3=۲$

$$P_1=۰/۵ \, , \, P_2=۰/۳ \, , \, P_3=۰/۲$$

$$P(۲,۱,۲)=\frac{۵!}{۲!\times ۱!\times ۲!}\,(۰/۵)^2(۰/۳)(۰/۲)^2=۰/۰۹$$

۶ـ۵ـ توزیع فوق هندسی (هیپرژئومتریک)

فرض می‌کنیم در پارکینگ یک کارخانه N دستگاه ماشین وجود دارد که X تای آن ها خراب و بقیه یعنی N-X تای آن سالم باشد. از بین تمام ماشین‌ها بطور تصادفی n دستگاه ماشین انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه در این نمونه x تای آن خراب باشد چقدر است.

حل: بدیهی است که تعداد ماشینهای سالم بین n دستگاه ماشین انتخابی n-x دستگاه می‌باشد. با استفاده از تعریف کلاسیک احتمال (یعنی تعداد حالات مساعد تقسیم بر تعداد حالات ممکن) فرمول زیر بدست می‌آید.

دستگاه	خراب	سالم
N	X	N-X
n	x	n-x

$$\boxed{P(x)=\frac{C_X^x \cdot C_{N-X}^{n-x}}{C_N^n}} \qquad x=۰\,,\,۱\,,\,۲\,\dots\dots\,,\,\min(n,X)$$

فرمول فوق فرمول توزیع احتمال فوق هندسی نامیده می‌شود.

مثال: از ۹ نفر افراد شاغل در یک کارگاه پنج نفر با سواد و چهار نفر بی‌سواد می‌باشند. اگر ازاین کارگاه پنج نفر را به طور تصادفی انتخاب کنیم احتمال آنکه ۳ نفر با سواد و ۲ نفر بی‌سواد باشند چقدر است.

شاغل	باسواد	بی‌سواد
۹	۵	۴
۵	۳	۲

$$P(x)=\frac{C_۵^۳\times C_۴^۲}{C_۹^۵}=\frac{\frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱}\times\frac{۴\times۳}{۲\times۱}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}}=۰/۴۹$$

تبصره: توزیع احتمال فوق هندسی دارای سه پارامتر N و X و n می‌باشد.

۶ـ۵ـ۱ـ امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال فوق هندسی

به کمک پارامترهای توزیع احتمال فوق هندسی می‌توان امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی x را بشرح زیر محاسبه نمود:

میانگین $\mu=E(x)=np \qquad (P=\frac{X}{N})$

واریانس $\sigma_x^2=Var(x)=npq\,\frac{N-n}{N-۱}$

مثال: در مثال فوق فرض می‌کنیم متغیر تصادفی x تعداد افراد با سواد بین ۵ نفر انتخاب شده باشد. امید ریاضی و واریانس و انحراف معیار متغیر تصادفی x را حساب کنید.

حل: مفروضات مسأله عبارتند از: ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ = x و ۵ = n و ۵ = X و ۹ = N ضمناً $P=\frac{X}{N}=\frac{۵}{۹}$ می‌باشد.

میانگین $\mu=E(x)=n.p=۵\times\frac{۵}{۹}=\frac{۲۵}{۹}=۲/۷۸$

واریانس $\sigma^2=Var(x)=npq\,\frac{N-n}{N-۱}=۵\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۹-۵}{۹-۱}=۰/۶۲$

انحراف معیار $\sigma=\sqrt{۰/۶۲}=۰/۷۸$

۶ـ۵ـ۲ـ تعمیم توزیع احتمال فوق هندسی

در توزیع احتمال فوق هندسی بند ۶ـ۵ جامعه به دو دسته افراز گردید. اگر در توزیع فوق هندسی جامعه به چند دسته افراز شود صورت کلی‌تری از توزیع احتمال فوق هندسی بدست می‌آید که فرمول آن بشرح زیر است:

$$\begin{array}{lllll} N & X_1 & X_2 & \dots\dots & X_k \\ n & x_1 & x_2 & \dots\dots & x_k \end{array}$$

$$P(x_1,x_2,\dots\dots,x_k)=\frac{C_{X_1}^{x_1}\cdot C_{X_2}^{x_2}\cdots C_{X_k}^{x_k}}{C_N^n}$$

در فرمول فوق N تعداد کل افراد جامعه می‌باشد که آن را به K دسته X_1 و X_2 و ..... و X_K تائی افراز کرده‌ایم. n تعداد افراد نمونه تصادفی انتخابی می‌باشد که می‌خواهیم از آن x_1 و x_2 و ..... و x_k عدد بترتیب از دسته‌های ۱ تا K انتخاب شود.

ضمناً داریم: $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ و $\sum_{i=1}^{K} X_i = N$

مثال: از یک گروه متشکل از ۵ دانشجوی دکتری و ۷ دانشجوی کارشناسی ارشد و ۸ دانشجوی کارشناسی ۳ نفر را بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که از هر مقطع تحصیلی یک نفر انتخاب شود.

$$P(1,1,1) = \frac{C_5^1\, C_7^1\, C_8^1}{C_{20}^3}$$

تبصره: تفاوت بین توزیع احتمال دو جمله‌ای و توزیع احتمال فوق هندسی در اینست که در توزیع احتمال دو جمله‌ای،حجم جامعه یعنی N داده نمی‌شود (نامحدود فرض می‌شود) و احتمال موفقیت در هر بار تکرار ثابت است (P) ولی در توزیع احتمال فوق هندسی حجم جامعه یعنی N داده می‌شود و معمولاً عدد بزرگی نیست و ضمناً احتمال موفقیت در هر بار تکرار تغییر می‌کند ($\frac{X}{N}, \frac{X-1}{N-1}, \ldots\ldots$) اگر N بزرگ باشد یا نسبت $\frac{X}{N}$ کوچک باشد (کمتر از ۰/۰۵) می‌توان مسائل توزیع احتمال فوق هندسی را بطور تقریب از توزیع احتمال دو جمله‌ای حل نمود.

۶-۶- توزیع احتمال هندسی

فرض می‌کنیم آزمایشی دارای دو حالت باشد. یکی از آنها را موفقیت و احتمال آن را p می‌نامیم. حالت دیگر را عدم موفقیت و احتمال آن را $q = 1 - p$ می‌نامیم اگر این آزمایش را آنقدر تکرار کنیم تا اولین موفقیت رخ دهد. احتمال آنکه اولین موفقیت در آزمایش xام رخ دهد از فرمول زیر که بنام توزیع احتمال هندسی نامیده می‌شود بدست می‌آید.

$$\boxed{P(x) = pq^{x-1}} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

توزیع احتمال هندسی دارای یک پارامتر P می‌باشد.

۶-۶-۱- امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال هندسی

با استفاده از پارامتر P (احتمال موفقیت) می‌توان میانگین و واریانس توزیع احتمال هندسی را بشرح زیر بدست آورد.

میانگین $E(x) = \mu = \frac{1}{P}$

واریانس $\sigma^2 = Var(x) = \frac{q}{P^2}$

مثال: سکه سالمی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر ظاهر شود. احتمال آن را حساب کنید که اولین شیر در پرتاب پنجم رخ دهد ضمناً امید ریاضی و واریانس و انحراف معیار این توزیع را حساب کنید.

$$P(x=5) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32}$$

$$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \quad \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} =$ ۱/۴

۶-۷- توزیع احتمال پواسون

توزیع احتمال پواسون یکی از توزیع‌های مهم احتمال گسسته می‌باشد. که جنبه کاربردی وسیعی دارد. هرگاه در یک فاصله زمانی یا در ناحیه‌ای بخواهند احتمال تعداد موفقیت را بدست آورند از توزیع احتمال پواسون استفاده می‌کنند. مثلاً تعداد بیمارانی که در ساعت خاصی به یک بیمارستان مراجعه می‌کنند یا تعداد اتومبیلهائی که در روز خراب می‌شوند. اگر متوسط تعداد موفقیت در هر فاصله زمانی یا در هر ناحیه معینی برابر λ باشد تابع احتمال پواسون بشرح زیر است.

$$\boxed{P(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

توزیع احتمال پواسون دارای یک پارامتر λ می‌باشد.

مثال: تعداد کشتیهائی که جهت تخلیه کالاهایشان بین ساعت ۷ تا ۸ صبح وارد یک بندر می‌شوند یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۰/۲ = λ می‌باشد. مطلوبست محاسبه احتمال تعداد کشتیهای وارده

به بندر در مدت فوق:

حل: $P(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \Rightarrow P(x, ۰/۲) = \frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^x}{x!}$

اکنون با استفاده از فرمول فوق جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X را تشکیل می‌دهیم.

x = تعداد کشتیهای وارده	$P(x, ۰/۲)$
۰	$\frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^۰}{۰!} = ۰/۸۱۸۷$
۱	$\frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^۱}{۱!} = ۰/۱۶۳۷$
۲	$\frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^۲}{۲!} = ۰/۰۱۶۴$
۳	$\frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^۳}{۳!} = ۰/۰۰۱۱$
۴	$\frac{e^{-۰/۲}(۰/۲)^۴}{۴!} = ۰/۰۰۰۱$

تبصره: برای پیدا کردن احتمالهای توزیع پواسون جداولی وجود دارد که احتمال را بصورت ساده و یا تجمعی با معلوم بودن پارامتر λ برای مقادیر مختلف متغیر x در اختیار قرار می‌دهد. که به ضمیمه کتاب می‌باشد.

۶ـ۷ـ۱ـ امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال پواسون

با استفاده از پارامتر λ می‌توان میانگین و واریانس توزیع احتمال پواسون را بشرح زیر محاسبه نمود:

میانگین $\mu = E(x) = \lambda$

واریانس $Var(x) = \sigma^2 = \lambda$

مثال: در مثال فوق احتمال آن را حساب کنید که در یک روز معین و بین ساعت ۷ تا ۸ صبح هیچ کشتی وارد بندر نشود یا حداکثر دو کشتی وارد بندر شود. مشخص نمائید که بطور متوسط در ۵ روز در ساعات

ذکر شده چند کشتی وارد بندر می‌شود و هم چنین امیدریاضی و واریانس تعداد کشتیهای وارد به بندر را در مدت فوق بدست آورید:

حل:

$P(x = ۰) = ۰/۸۱۸۷$

$P(x \leq ۲) = P(x = ۰) + P(x = ۱) + P(x = ۲) = ۰/۸۱۸۷ + ۰/۱۶۳۷ + ۰/۰۱۶۴ = ۰/۹۹۹$

$E(۵x) = ۵E(x) = ۵ \times ۰/۲ = ۱$

$E(x) = \lambda = ۰/۲$

$\sigma_x^2 = \lambda = ۰/۲$

۶ـ۷ـ۲ـ رابطه بین توزیع احتمال پواسون و توزیع احتمال دو جمله‌ای

اگر در توزیع احتمال دو جمله‌ای n بزرگ و p (یا q) کوچک باشد بطوری که np<۵ (یا nq<۵) باشد به طور تقریب می‌توان از توزیع احتمال پواسون استفاده نمود در این صورت پارامتر توزیع پواسون $\lambda = np$ خواهد بود. ضمناً داریم:

$$\lim_{n \to \infty} C_n^x P^x q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \qquad (\lambda = np)$$

تبصره: با توجه به توضیحات بند ۶ـ۷ـ۲ یادآوری می‌نماید که در دو مورد زیر می‌توان از توزیع احتمال پواسون استفاده نمود.

الف ـ متغیر گسسته x مقادیر درست نامنفی را اختیار کند بطوری که میانگین این متغیر یعنی λ معلوم باشد. در این صورت برای محاسبه احتمالهای مقادیر مختلف متغیر تصادفی x از فرمول پواسون و یا جدول مربوطه استفاده می‌شود.

ب ـ استفاده از فرمول پواسون بطور تقریب بجای فرمول توزیع احتمال دو جمله‌ای که شرایط و نحوه استفاده از آن در بند ۶ـ۷ـ۲ ذکر گردیده است.

مثال: احتمال وقوع تصادف در یک مسافرت ۰/۰۰۱ می‌باشد اگر شخصی ۱۰۰۰ بار این مسافرت را انجام دهد. احتمال اینکه تصادفی رخ ندهد چقدر است. احتمال اینکه یک بار یا دوبار تصادف روی دهد چقدر است.

حل: از توزیع پواسون استفاده می‌کنیم

$P = ۰/۰۰۱$ $\quad n = ۱۰۰۰ \quad$ $\lambda = np = ۱۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۱ < ۵$

$P(x = ۰) = ۰/۳۶۸$

$P(x = ۱) = ۰/۳۶۸$

$P(x = ۲) = ۰/۱۸۴$

مجموعه مسائل توزیع‌های مهم احتمال گسسته

توزیع یکنواخت

۱- از یک جعبه مداد رنگی ۱۲ تائی، یک مداد به تصادف خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده رنگ مداد باشد. توزیع احتمال x را مشخص و هیستوگرام آن را رسم کنند.

جواب: $f(x,۱۲) = \frac{۱}{۱۲}$

۲- اگر متغیر تصادفی X مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ...... و n را با احتمالهای مساوی قبول کند. ثابت کنید:

$$\mu = E(x) = \frac{n+۱}{۲} \quad , \quad \sigma^۲ = \frac{n^۲-۱}{۱۲}$$

۳- یک صفحه دایره‌ای شکل هدف‌زنی به ۱۰ قطاع مساوی تقسیم و با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده است. فرض می‌کنیم متغیرتصادفی X برابر عددی باشد که سوزن در قطاع مربوط بـه آن اصـابت می‌کند احتمال X را بنویسید و میانگین و واریانس آن را حساب کنید.

جواب: $x = ۱, ۲, ..., ۱۰ \quad , \quad f(x) = \frac{۱}{۱۰} \quad , \quad \mu = ۵/۵ \quad , \quad \sigma^۲ = \frac{۳۳}{۴}$

توزیع احتمال برنولی

۱- احتمال آنکه بازیکنی توپ بسکتبال را داخل حلقه کند ۰/۶ است اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد موفقیت در یک پرتاب توپ باشد. امیدریاضی و واریانس X را حساب کنید.

جواب: $E(x) = ۰/۶ \quad , \quad \sigma^۲ = ۰/۲۴$

۲- احتمال آمدن عدد زوج در پرتاب یک مکعب ناهمگن سه برابر احتمال آمدن عدد فرد است. اگر مکعب را یکبار پرتاب کنیم. امید ریاضی و واریانس آمدن عدد ۲ را حساب کنید.

جواب: $\mu = \frac{۱}{۴} \quad , \quad \sigma^۲ = \frac{۳}{۱۶}$

توزیع احتمال دو جمله‌ای

۱ـ مدیر فروشگاهی حدس می‌زند که احتمال آنکه بتواند بطور تصادفی مشتری انتخاب کند که خرید نماید ۲۰٪ باشد اگر شش مشتری وارد فروشگاه شوند احتمال اینکه مدیر فروشگاه بتواند به ۴ نفر یا بیشتر فروش نماید چقدر است؟

جواب: $\frac{265}{15625}$

۲ـ اگر احتمال وجود پسر و دختر مساوی باشد احتمال وجود پسران (یا دختران) را در خانواده‌ای که دارای ۳ فرزند هستند پیدا کنید (بصورت جدول توزیع احتمال) و نمودار آن را رسم کنید.

جواب:

x	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

۳ـ فرض کنید که X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای P و n باشد میانگین و انحراف معیار متغیر $y = n-x$ را حساب کنید در مورد y چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت.

جواب: $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{npq}$, $E(x)=np$, $E(y)=nq$

۴ـ از هر ۳۰ سفارش خرید که روزانه به یک مرکز تهیه و توزیع کالا می‌رسد ۳ سفارش باید به منظور تکمیل اطلاعات آن به سفارش دهنده بازگردانده شود احتمال آنکه در روز معینی در بررسی ۶ سفارش رسیده بمرکز حداکثر یک سفارش ناقص داشته باشیم چقدر است.

۵ـ فرض کنیم ۵٪ اقلامی که از یک ماشین تولیدی حاصل می‌شود معیوب باشد تعداد ۵ قلم از اقلام تولیدی این ماشین را انتخاب کرده‌ایم و آنها را بازرسی نموده‌ایم احتمال آنکه حداکثر دو عضو معیوب پیدا شود چیست.

۶ـ خانواده خاصی دارای ده فرزند است به فرض آنکه احتمال تولد یک پسر و یک دختر مساوی باشند احتمال پیش‌آمدهای زیر را حساب کنید.

الف ـ تعداد ۵ پسر و ۵ دختر در این خانواده باشند.

ب ـ تعداد پسرها بین ۳ تا ۸ باشند.

توزیع احتمال چند جمله‌ای

۱ـ در یک گروه از دانشجویان ۵ نفر دانشجوی دوره کارشناسی و ۶ نفر دانشجوی دوره کارشناسی ارشد و

۴ نفر دانشجوی دوره دکتری می‌باشند. از بین آنان یک نفر را بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم و مقطع تحصیلی او را سؤال می‌کنیم و سپس او به جای خود باز می‌گردد. این عمل را ۸ بار تکرار می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که در این ۸ بار ۴ بار دانشجوی دوره کارشناسی و ۳ بار دانشجوی دوره کارشناسی ارشد و یکبار دانشجوی دور دکتری انتخاب گردد.

جواب: $f(4,3,1)=\frac{8!}{4!3!1!}\left[\frac{5}{15}\right]^4\left[\frac{6}{15}\right]^3\left[\frac{4}{15}\right]^1$

۲ـ اگر مکعب سالمی را ۱۲ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ هرکدام دوبار بیایند چقدر است.

جواب: $f(2,2,2,2,2,2) = \frac{12!}{2^6} \times \frac{1}{6^{12}} = 0/00344$

توزیع احتمال هندسی

۱ـ احتمال آن که شخصی در کنکور کارشناسی ارشد قبول شود ۰/۸ است. احتمال آن را حساب کنید که این شخص در سومین بار قبول شود.

جواب: ۰/۰۳۲

۲ـ احتمال معیوب بودن کالائی ۰/۱ است. احتمال آن را حساب کنید که در یک بررسی کنترل کیفیت اولین کالای معیوب چهارمین کالای آزمایش شده باشد.

جواب: ۰/۰۷۲۹

توزیع فوق هندسی

۱ـ در جعبه‌ای ۱۵ قطعه لوازم یدکی وجود دارد که ۱۰ تا از این قطعات سالم بوده و بقیه معیوبند اگر سه قطعه از این جعبه به تصادف برداشته شود احتمال پیش‌آمدهای زیر را حساب کنید.

الف ـ همه سالم باشند. ب ـ ۲ سالم و یک معیوب. ج ـ حداقل ۲ سالم باشد.

جواب: الف) $\frac{24}{91}$ ب) $\frac{45}{91}$ ج) $\frac{69}{91}$

۲ـ از ۶ کارمند شاغل در مؤسسه‌ای ۳ نفر آنها دارای سابقه کار می‌باشند اگر ۴ نفر بتصادف از این گروه انتخاب شوند احتمال اینکه دقیقاً دو نفر از آنها سابقه کار داشته باشند چیست؟

جواب: ۰/۶

۳ـ فرض می‌کنیم ۶ داروی شیمیائی که ۳ عدد از آنها سمی و سه عدد از آنها غیرسمی می‌باشند و از نظر ظاهر مشابهند در اختیار متصدی آزمایشگاه قرار دارد وی بدون تشخیص سه عدد از آنها را به موشی تزریق می‌کند اگر بدانیم تزریق حداقل ۲ عدد باعث مرگ موش می‌شود احتمال تلف شدن موش چقدر است؟

جواب: $\frac{1}{2}$

۴ـ ۵۰ لاستیک در انبار شرکتی وجود دارد که ۱۰ تای آنها معیوب است مشتری ۵ عدد ازاین لاستیکها را می‌خرد توزیع احتمال را برای تعداد لاستیکهای سالم خریداری شده بوسیله مشتری را بدست آورید امید ریاضی و واریانس و انحراف معیار تعداد لاستیکهای سالم خریداری شده را حساب کنید.

جواب: $P(x)=\frac{C_{40}^{x}\, C_{10}^{5-x}}{C_{50}^{5}} \qquad x=0,1,2,3,4,5$

$E(x)=4 \quad , \quad \sigma_x^2=\frac{36}{49} \quad , \quad \sigma_x=\frac{6}{7}$

۵ـ از یک گروه متشکل از ۲۵ دانشجوی رشته مدیریت و ۱۵ دانشجوی رشته حسابداری و ۱۰ دانشجوی رشته اقتصاد یک کمیته ۶ نفری تشکیل می‌دهیم چقدر احتمال دارد که از رشته‌های مدیریت و حسابداری و اقتصاد بترتیب ۳ و ۲ و ۱ نفر دراین کمیته باشند.

$$P(3,2,1)=\frac{C_{25}^{3}\, C_{15}^{2}\, C_{10}^{1}}{C_{50}^{6}}$$

توزیع احتمال پواسون

۱ـ می‌دانیم که ۲٪ فیوزهای وارداتی معیوب است احتمال آنکه در یک نمونه ۲۰۰ تایی تعداد فیوزهای معیوب از ۵ بیشتر باشد چقدر است.

جواب: ۰/۲۱۵

۲ـ یک شرکت بیمه مشاهده کرده است که ۰/۰۰۰۵ جمعیت یک شهر در اثر بیماری مالاریا از بین می‌روند شرکت ۱۰۰۰۰ نفر را برضد این حادثه بیمه می‌کند احتمال اینکه در سال مجبور باشد به بیش از سه نفر خسارت به‌پردازد چقدر است.

جواب: ۰/۷۳۵

۳ـ یک مرکز تلفن خودکار هنگام شلوغی به طور متوسط در یکساعت ۳۰۰ مکالمه دریافت می‌کند و این مرکز قادر است در هر دقیقه تنها ۱۰ ارتباط برقرار کند مطلوبست احتمال آنکه این مرکز در یک دقیقه معین قادر به برقراری ارتباط نباشد.

جواب: ۰/۰۱۴

۴ـ به طور متوسط در هر ساعت ۵ مرتبه به اداره تعمیرات مخابرات تلفن زده می‌شود احتمال اینکه دقیقاً سه تلفن جهت تعمیرات در یکساعت زده شود چقدر است.

جواب: ۰/۱۴

۵ـ ۵۰۰ نفر را تصادفی انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه x نفر آن‌ها روز اول سال متولد شده باشند چیست؟ احتمال آنکه دو نفر آنها روز اول سال متولد شده باشند چیست؟

۶ـ احتمال آنکه در جامعه تهران افراد درآمد ماهیانه بیش از یک میلیون تومان داشته باشند P = ۰/۰۰۱ است مطلوبست احتمال آنکه در یک نمونه ۴۰۰۰ نفری تعداد افراد با این درآمد کمتر از ۲ نفر باشد.

۷ـ ۳۰۰ مسافر برای هواپیما جا رزرو کرده‌اند اگر احتمال نیامدن مسافری که جا رزرو کرده است طبق تجارب گذشته برابر ۰/۰۱ باشد احتمال اینکه ۳ نفر مسافر نیایند چقدر است؟

جواب: ۰/۲۲۴

۸ـ اگر تعداد مراجعین به بانک به طور متوسط درهر ساعت ۷۲ نفر باشد احتمال اینکه ۴ نفر در سه دقیقه اول به بانک مراجعه کنند چقدر است.

جواب: ۰/۱۹۱

۹ـ در یک امتحان تستی چند جوابی ۲۰ سوال داده شده است، هر سئوالی دارای ۴ جواب بوده است که فقط یکی از آنها درست است اگر دانشجوئی جواب صحیح را فقط حدس بزند احتمال اینکه به ۳ سؤال جواب صحیح بدهد چقدر است.

۱۰ـ احتمال آنکه در یک کارخانه پیچ و مهره‌سازی یک پیچ معیوب باشد برابر P = ۰/۰۱۵ می‌باشد احتمال آنکه یک جعبه پیچ صدتایی پیچ معیوبی نداشته باشد چقدر است احتمال اینکه دو پیچ معیوب داشته باشد چیست؟

۱۱ـ در یک تیراندازی احتمال اصابت هر تیر به هدف برابر ۰/۰۱ است احتمال آنکه در پانصد تیراندازی حداقل دوبار هدف مورد اصابت قرار گیرد چیست؟

۱۲ـ تعداد دانشجویان دانشکده‌ای ۷۳۰ نفر است محتملترین تعداد دانشجویانی که در روز اول فروردین متولد شده باشند چیست احتمال اینکه ۳ دانشجو روز تولدشان یکسان باشد کدام است.

۱۳ـ احتمال تولید مته‌های با شکنندگی زیاد (معیوب) مساوی ۰/۰۲ است این مته‌ها را در بسته‌های ۱۰۰ تائی بسته‌بندی می‌کنیم احتمال آنکه در جعبه‌ای مته معیوب نباشد چیست. احتمال آنکه مته‌های معیوب در جعبه‌ای ۳ عدد باشد چیست چند مته را در یک جعبه مته قرار دهیم تا با احتمال بیش از ۹۰٪ حداقل ۱۰۰ مته خوب در جعبه داشته باشیم.

۱۴ـ یک شرکت بیمه تعداد ۱۰۰۰۰ بیمه‌نامه برای افرادی با سن و گروه اجتماعی یکسان صادر کرده است احتمال مرگ هر شخص در عرض یکسال مساوی ۰/۰۶٪ است در ابتدای هر سال هر بیمه شده مبلغ ۱۲۰۰۰ تومان از بابت بیمه خود می‌پردازد اگر در عرض آن سال این شخص بمیرد بازماندگان او ده میلیون تومان از شرکت بیمه دریافت می‌دارند احتمال اینکه در عرض یکسال خسارتی متوجه شرکت بیمه شود چقدر است. احتمال اینکه این شخص حداقل مقدار ۴۰ میلیون تومان یا ۶۰ و یا ۸۰ میلیون تومان نفع کند چیست.

۱۵ـ اگر احتمال باریدن در هر روز مهرماه برابر ۰/۰۲ باشد احتمال آنکه در این ماه بیش از ۳ روز باران نیاید چیست.

۱۶ـ احتمال آنکه هر شخص بیمه شده در عرض یکسال در حوادث مختلف بمیرد برابر ۰/۰۶٪ است احتمال آنکه یک شرکت بیمه که ۱۰۰۰۰ مشتری را بیمه کرده است در عرض یکسال به بیش از ۳ بیمه شده خسارت بدهد چیست.

۱۷ـ تعداد نفت‌کشهایی که هر روز به پالایشگاه معینی می‌رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ می‌باشد امکانات بندری موجود می‌تواند سه نفت‌کش را هر روز تخلیه کند چنانچه بیش از سه نفت‌کش وارد بندر شوند نفت‌کشهای اضافی باید به بندر دیگری فرستاده شوند احتمال فرستادن نفت‌کشها به بندر دیگر چیست. امکانات این بندر به چه قدر باید برسد تا تقریباً ۹۰٪ از نفت‌کشها را بتوان تخلیه نمود امید ریاضی تعداد نفت‌کشهای رسیده در هر روز چیست. محتملترین تعداد نفت‌کشهای رسیده در روز چیست. امید ریاضی تعداد نفت‌کشهای تخلیه شده در روز چیست.

جدول ۳-۱ توزیع احتمال شیرها در دو بار پرتاب یک سکهٔ تراز.

تعداد شیرها	برآمدهای ممکن	احتمال شیرها
۰	TT	۰٫۲۵
۱	TH , HT	۰٫۵۰
۲	HH	۰٫۲۵
		۱٫۰۰

شکل ۳-۳ توزیع احتمال شیرها در دو بار پرتاب یک سکهٔ تراز.

مثال ۷: با استفاده از توزیع دوجمله‌ای می‌توانیم احتمال آمدن ۴ شیر از ۶ پرتاب یک سکهٔ تراز را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$P(۴) = \frac{۶!}{۴!(۶-۴)!}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۲\times ۱}\left(\frac{۱}{۱۶}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)$$

$$= ۱۵\left(\frac{۱}{۶۴}\right) = \frac{۱۵}{۶۴} = ۰٫۲۳$$

وقتی n و X، اعداد بزرگی باشند می‌توان با استفاده از پیوست ۱ از محاسبات طولانی برای این احتمالات اجتناب کرد. تعداد انتظاری[1] شیرها در ۶ پرتاب $\mu = np = ۶(۱/۲) = ۳$ شیر است و انحراف معیار توزیع احتمال ۶ پرتاب

$$\sigma = \sqrt{np(۱-p)} = \sqrt{۶\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)} = \sqrt{\frac{۶}{۴}}\sqrt{۱٫۵} \cong ۱٫۲۲$$

شیر است. چون داریم $p = ۰٫۵$، این توزیع احتمال متقارن است. اگر در اینجا از سکه استفاده نمی‌شد و تکرارها مستقل نبودند (مانند نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری)، می‌بایست از توزیع فوق هندسی[2] استفاده کنیم (به مسئله ۳-۲۷ مراجعه کنید).

1. expected 2. hypergeometric distribution

۳-۴ توزیع پواسون[1]

توزیع پواسون یکی دیگر از توزیع‌های احتمال گسسته است. این توزیع در تعیین تعداد موفقیت‌ها در واحد زمان، وقتی که پیشامدها یا موفقیت‌ها مستقل هستند و تعداد متوسط موفقیت‌ها در واحد زمان ثابت باقی می‌ماند، استفاده می‌شود.

$$P(X) = \frac{\lambda^{X} e^{-\lambda}}{X!} \qquad (۳-۱۳)$$

که در آن:

$X =$ تعداد موفقیت‌ها

$P(X) =$ احتمال X تعداد موفقیت

λ «حرف یونانی لامبدا» = تعداد متوسط موفقیت‌ها در واحد زمان

$e =$ پایهٔ لگاریتم طبیعی یا ۲٫۷۱۸۲۸

با مشخص بودن مقدار λ (مقدار انتظاری یا میانگین و واریانس توزیع پواسون) می‌توانیم $e^{-\lambda}$ را با استفاده از جدول پیوست ۲ محاسبه و در معادلهٔ ۳-۱۳ جایگزین کنیم و $P(X)$ را به‌دست آوریم.

مثال ۸: به‌طور متوسط به ادارهٔ پلیس در هر ساعت ۵ تلفن زده می‌شود. احتمال دریافت ۲ تلفن در ساعتی که به‌طور تصادفی انتخاب شده عبارت است از:

$$P(X) = \frac{\lambda^{X} e^{-\lambda}}{X!} = \frac{۵^{۲}e^{-۵}}{۲!} = \frac{(۲۵)(۰٫۰۰۶۷۴)}{۲} = ۰٫۰۸۴۲۵$$

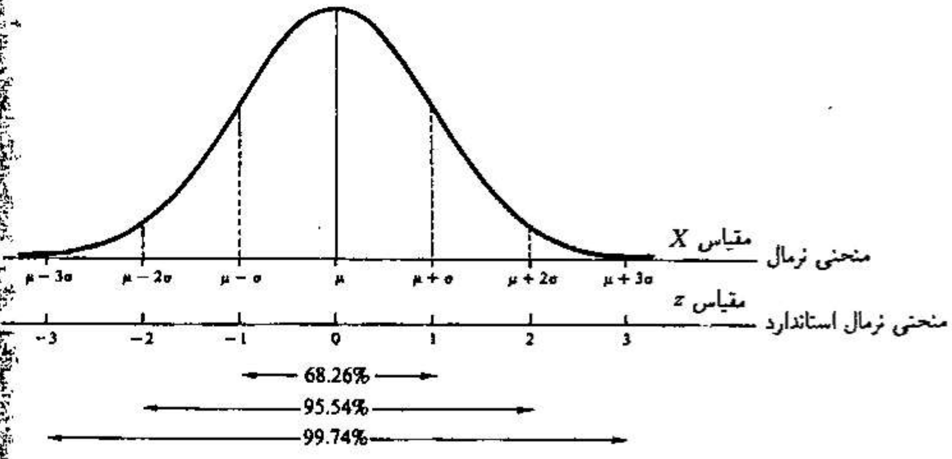
زمانی که n بزرگ و p یا $۱-p$ کوچک باشد [مثلاً $n \geq ۳۰$ و $np < ۵$ یا $n(۱-p) < ۵$] می‌توان توزیع پواسون را به‌عنوان تقریبی از توزیع دوجمله‌ای به‌کار برد. به مسئلهٔ ۳-۳۰ مراجعه کنید.

۳-۵ توزیع احتمال پیوسته: توزیع نرمال

متغیر تصادفی پیوسته X، متغیری است که بی‌نهایت مقدار را در هر فاصلهٔ معینی اختیار می‌کند. احتمالی که X درون هر فاصله معین قرار می‌گیرد به‌وسیلهٔ سطح زیر توزیع احتمال (یا تابع چگالی) در آن فاصله مشخص می‌شود. کل سطح زیر منحنی (احتمال) ۱ است (به مسئله ۳-۳۱ مراجعه کنید).

توزیع نرمال، یک توزیع احتمال پیوسته با بیشترین کاربرد در تجزیه و تحلیل‌های آماری است (به مسئلهٔ ۳-۳۲ مراجعه کنید). منحنی نرمال زنگدیس و حول میانگین متقارن است. این توزیع در هر

1. Poisson



شکل ۳-۴

دو طرف تا بی‌نهایت گسترش می‌یابد. اما بیشتر سطح (احتمال) حول میانگین مجتمع است (به شکل ۳-۴ مراجعه کنید).

توزیع نرمال استاندارد، توزیع نرمالی با میانگین صفر و انحراف معیار یک است ($\mu = 0$ و $\sigma = 1$). توزیع نرمال [در مقیاس X در شکل ۳-۴] را می‌توان با صفر کردن μ و نوشتن انحرافات از μ به‌صورت واحد انحراف معیار (مقیاس z) به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد. تحت چنین شرایطی ۶۸٫۲۶٪ از سطح (احتمال) زیر منحنی نرمال استاندارد بین یک انحراف معیار از میانگین (یعنی، بین $\mu \pm 1\sigma$)، ۹۵٫۴۴٪ بین $\mu \pm 2\sigma$ و ۹۹٫۷۴٪ بین $\mu \pm 3\sigma$ را دربر می‌گیرد.

برای پیدا کردن احتمالات (سطوح) در مسائلی که با توزیع نرمال سروکار دارند، ابتدا می‌بایست مقدار X را به مقدار z متناظر خود به‌صورت زیر تبدیل کنیم:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (۳-۱۴)$$

سپس مقادیر z را از پیوست ۳ استخراج می‌کنیم. از اینجا درصدی از سطح (احتمال) زیر منحنی بین میانگین و آن مقدار z به‌دست می‌آید.

مثال ۹: سطح (احتمال) زیر منحنی نرمال استاندارد بین $z = 0$ و $z = 1.96$ با مراجعه به مقدار ۱٫۹۶ در پیوست ۳ به‌دست می‌آید. در ستون z جدول به سمت پایین حرکت می‌کنیم تا به ۱٫۹ برسیم و سپس به‌طور افقی حرکت می‌کنیم تا به سر ستون ۰٫۰۶ برسیم، مقداری که به‌دست می‌آید ۰٫۴۷۵۰ است. این بدین معنی است که ۴۷٫۵۰٪ از کل سطح (از ۱ تا ۱۰۰٪) زیر منحنی بین $z = 0$ و $z = 1.96$ قرار می‌گیرد (سطح هاشورخورده در شکل بالای جدول). به علت تقارن منحنی، سطح

بین $z = 0$ و $z = -1.96$ (در جدول ذکرنشده) را نیز همان ۰٫۴۷۵۰ یا ۴۷٫۵٪ در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۰: فرض کنید X، متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال با $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 4$ است و می‌خواهیم احتمال X را بین مقادیر ۸ و ۱۲ به‌دست آوریم. ابتدا مقادیر z متناظر مقادیر X برابر ۸ و ۱۲ را محاسبه کرده و سپس این مقادیر z را از پیوست ۳ پیدا می‌کنیم.

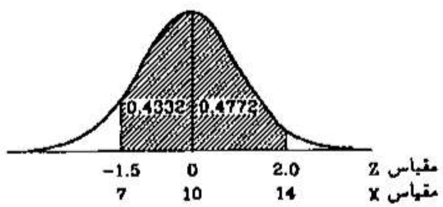
$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 10}{2} = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = +1$$

برای $z = 1$ از پیوست ۳ مقدار ۰٫۳۴۱۳ به‌دست می‌آید، سپس $z = \pm 1$ برابر $(0.3413) \times 2$ یا ۰٫۶۸۲۶ خواهد شد. این بدین معنی است که احتمال اینکه X مقداری بین ۸ و ۱۲ اختیار کند، یا $P(8 < X < 12)$، ۶۸٫۲۶٪ است (به شکل ۳-۴ مراجعه کنید).

مثال ۱۱: مجدداً فرض کنید که X متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 4$ باشد، احتمال اینکه X مقداری بین ۷ و ۱۴ اختیار کند را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{7 - 10}{2} = -1.5 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{14 - 10}{2} = 2$$

برای $z = -1.5$، از پیوست ۳ مقدار ۰٫۴۳۳۲ به‌دست می‌آید و برای $z = 2$ مقدار ۰٫۴۷۷۲، بنابراین، $P(7 < X < 14) = 0.4332 + 0.4772 = 0.9104$ یا ۹۱٫۲٪ است (به شکل ۳-۵ مراجعه کنید). بنابراین احتمال اینکه X مقدار کوچک‌تر از ۷ یا بزرگ‌تر از ۱۴ را اختیار کند (دنباله‌های هاشورنخورده سطح در شکل ۳-۵) $1 - 0.9104 = 0.0896$ یا ۸٫۹۶٪ است. توزیع نرمال، توزیع دوجمله‌ای را وقتی که $n \geq 30$ و $np > 5$ و هم $n(1-p) > 5$ باشد، و توزیع پواسون را وقتی که $\lambda \geq$ [illegible] باشد تقریب می‌زند. (به مسائل ۳-۳۷ و ۳-۳۸ مراجعه کنید). توزیع احتمال پیوستهٔ دیگر توزیع نمایی است (به مسئلهٔ ۳-۳۹ مراجعه کنید). قضیه یا نابرابری چبی‌شف بیان می‌کند که بدون توجه به شکل توزیع، نسبتی از مشاهدات یا سطح محدود که بین K انحراف معیار از میانگین قرار می‌گیرد، حداقل $1 - 1/K^2$، برای $K \geq 1$ است (به مسائل ۳-۴۰ و ۳-۷۲ مراجعه کنید).



شکل ۳-۵

(ب) از آنجا که $n = 30$، $np = (30)(0{,}01) = 0{,}3$، می‌توانیم از توزیع پواسون به‌عنوان تقریب توزیع دوجمله‌ای استفاده کنیم. با توجه به اینکه $\lambda = np = 0{,}3$، باید $P(X > 1) = 1 - P(x \le 1)$ را محاسبه کنیم که در آن X تعداد لامپ‌های معیوب است. با استفاده از معادلهٔ (۳-۱۳)، خواهیم داشت:

$$P(1) = \frac{0{,}3^1 e^{-0{,}3}}{1!} = (0{,}3)(0{,}74082) = 0{,}222246$$

$$P(0) = \frac{0{,}3^0 e^{-0{,}3}}{0!} = e^{-0{,}3} = 0{,}74082$$

$$P(X \le 1) = P(1) + P(0) = 0{,}222246 + 0{,}74082 = 0{,}963066$$

بنابراین

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - 0{,}963066 = 0{,}036934 \quad \text{یا} \quad \%3{,}69$$

با بزرگ‌تر شدن n، تقریب نزدیک‌تر هم خواهد شد.

توزیع‌های احتمال پیوسته: توزیع نرمال

۳-۲۹. (الف) متغیر پیوسته را تعریف کرده چند مثال برای آن ذکر کنید. (ب) توزیع احتمال پیوسته را تعریف کنید. (ج) فرمول محاسبهٔ کمیت انتظاری و واریانس توزیع احتمال پیوسته را استخراج کنید.

(الف) متغیر پیوسته[1] متغیری است که بتواند هر مقداری را در یک فاصلهٔ مشخص اختیار کند. متغیر پیوسته را می‌توان با هر میزان دقتی، با کوچک‌تر کردن واحدهای اندازه‌گیری، محاسبه کرد. به‌عنوان مثال، اگر بگوییم که فرآیند تولید ۱۰ ساعت طول می‌کشد بدین معنی است که می‌تواند هر مقداری بین ۹٫۵ و ۱۰٫۴ (۱۰ ساعت به نزدیک‌ترین ساعت روندشده) اختیار کند. اگر دقیقه را به‌عنوان واحد اندازه‌گیری در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم که فرآیند تولید ۱۰ ساعت و ۲۰ دقیقه طول می‌کشد. یعنی، هر مقداری بین ۱۰ ساعت ۱۹٫۵ دقیقه و ۱۰ ساعت و ۲۰٫۴ دقیقه را شامل می‌شود و الی‌آخر. بنابراین، زمان، همچنین وزن، مسافت و درجهٔ حرارت متغیرهای پیوسته هستند.

(ب) توزیع متغیر پیوسته[2] به محدودهٔ مقادیر ممکن یک متغیر تصادفی پیوسته، همراه با احتمالات متناظر آن، اطلاق می‌شود. توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته اغلب تابع چگالی

1. continuous variable 2. continuous probability distribution
3. probability density function

احتمال[3] یا برای سادگی تابع احتمال[1] خوانده می‌شود. این تابع را می‌توان به‌صورت یک منحنی (سطح (احتمال) زیر منحنی برابر ۱ است) نشان داد. از آنجا که متغیر تصادفی پیوسته می‌تواند دامنهٔ نامحدودی از مقادیر را بین یک فاصلهٔ مشخص اختیار کند، احتمال مقدار خاص صفر است. با وجود این، می‌توانیم احتمال متغیر تصادفی پیوستهٔ X را در فاصلهٔ مشخص (به‌عنوان مثال بین X_1 و X_2) با استفاده از سطح زیر منحنی در آن فاصله اندازه‌گیری کنیم. یعنی،

$$P(X_1 < X < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(X)dX \tag{۳-۲۳}$$

که در آن $f(X)$، معادلهٔ تابع چگالی احتمال و علامت انتگرال $\int$ به‌جای علامت مجموع $\sum$ برای متغیر گسسته به‌کار می‌رود. جداول احتمال برای برخی از متداول‌ترین توزیع‌های احتمال پیوسته در پیوست‌ها آمده است و بنابراین دیگر نیازی به انتگرال‌گیری نیست.

(ج) کمیت انتظاری یا میانگین و واریانس توزیع احتمال پیوسته را می‌توان با جانشین کردن $\int$ برای $\sum$ و $f(X)$ به‌جای $P(X)$ در فرمول کمیت انتظاری و واریانس توزیع احتمال گسسته [معادلات (۳-۱۹) و (۳-۲۰)] به‌دست آورد. یعنی:

$$E(X) = \mu = \int Xf(X)dX \tag{۳-۲۴}$$

$$\text{Var } X = \sigma^2 = \int [X - E(X)]^2 f(X)dX \tag{۳-۲۵}$$

۳-۳۰. (الف) توزیع نرمال چیست؟ (ب) فایده آن چیست؟ (ج) توزیع نرمال استاندارد چیست؟ (د) فایدهٔ آن چیست؟

(الف) توزیع نرمال[2]، تابع احتمال پیوسته‌ای به شکل زنگ است که حول میانگین خود متقارن می‌باشد (همان‌طورکه در بخش ۲-۴ گفتیم). اگر از میانگین در هر دو طرف منحنی نرمال دور شویم منحنی به سمت محور افقی گرایش پیدا می‌کند (اما هرگز آن را قطع نمی‌کند). معادلهٔ تابع احتمال نرمال عبارت است از:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{۳-۲۶}$$

1. probability function 2. normal distribution

که در آن $f(X)$ = ارتفاع منحنی نرمال
$\exp$ = مقدار ثابت ۲٫۷۱۸۳
π = مقدار ثابت ۳٫۱۴۱۶
μ = میانگین توزیع
σ = انحراف معیار توزیع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dX = 1$$

(تمامی سطح زیر منحنی نرمال از منفی تا مثبت بی‌نهایت)

(ب) توزیع نرمال متداول‌ترین توزیع احتمال در تحلیل‌های آماری است. اکثر توزیع‌های موجود در طبیعت و صنعت نرمال است. برخی از مثال‌ها در این مورد عبارت‌اند از: IQ، وزن و قد تعداد زیادی از افراد و تفاوت‌های ابعاد تعداد زیادی از قطعات تولیدشده توسط یک ماشین. توزیع نرمال اغلب به‌عنوان تقریبی از دیگر توزیع‌ها نظیر توزیع دوجمله‌ای و پواسون (به مسائل ۳-۳۵ و ۳-۳۶ مراجعه کنید) به‌کار می‌رود. توزیع میانگین‌های نمونه و نسبت بدون توجه به شکل توزیع مادر غالباً نرمال است (به بخش ۴-۲ مراجعه کنید).

(ج) توزیع نرمال استاندارد[1]، توزیع نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma^2 = ۱$ است. هر توزیع نرمال (که با μ و σ^2 مشخص شده باشد) را می‌توان با قرار دادن $\mu = ۰$ و بیان انحرافات از μ برحسب واحد انحراف معیار به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد. اغلب می‌توانیم سطوح (احتمالات) را با تبدیل مقادیر به z متناظر خود (یعنی $z = (X-\mu)/\sigma$) و با مراجعه به مقادیر z در پیوست ۳ به‌دست آوریم.

۳-۳۱. سطح زیر منحنی نرمال استاندارد را: (الف) بین $z = \pm ۱$ و $z = \pm ۲$ و $z = \pm ۳$، (ب) از $z = ۰$ تا $z = ۰٫۸۸$، (ج) از $z = -۱٫۶$ تا $z = ۲٫۵۵$، (د) سمت چپ $z = -۱٫۶۰$، (ه) سمت راست $z = ۲٫۵۵$، (و) سمت چپ $z = -۱٫۶۰$ و سمت راست $z = ۲٫۵۵$ به‌دست آورید.

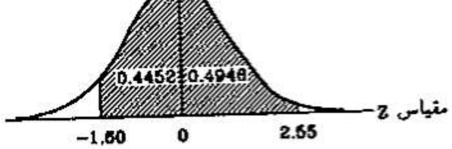
(الف) سطح (احتمال) زیر منحنی نرمال استاندارد بین $z = ۰$ و $z = ۱$ از مقدار ۱٫۰۰ در پیوست ۳ به‌دست می‌آید. بدین ترتیب که در ستون z جدول مربوطه تا ۱٫۰۰ به سمت پایین حرکت می‌کنیم و سپس به‌طور افقی تا سر ستون که با ۰٫۰۰ مشخص شده است پیش می‌رویم. کمیتی که به‌دست می‌آید، ۰٫۳۴۱۳ است، یعنی ۳۴٫۱۳٪ کل سطح (از ۱ یا ۱۰۰٪) زیر منحنی بین $z = ۰$ و $z = ۱٫۰۰$ قرار می‌گیرد. به علت تقارن منحنی، سطح بین $z = ۰$ و $z = -۱$ نیز ۰٫۳۴۱۳ یا ۳۴٫۱۳٪ است. بنابراین، سطح

[1] normal *standard*

بین $z = -۱$ و $z = ۱$ (به شکل ۳-۴ مراجعه کنید) ۶۴٫۲۶٪ است. به همین ترتیب، سطح بین $z = ۰$ و $z = ۲$ (با مراجعه به $z = ۲٫۰۰$ در جدول) ۴۷٫۷۲٪ و سطح بین $z = \pm ۲$، ۹۵٫۴٪ است (به شکل ۳-۴ مراجعه کنید). سطح بین $z = \pm ۳$، ۹۹٫۷۴٪ است (به شکل ۳-۴ مراجعه کنید). توجه کنید که جدول فقط مقادیر z را تا مقدار ۲٫۹۹ دربر می‌گیرد زیرا، سطح زیر منحنی از $z = \pm ۳$ به بعد قابل اغماض است.

(ب) سطح بین $z = ۰$ و $z = ۰٫۸۸$ با مراجعه به عدد ۰٫۸۸ در جدول به‌دست می‌آید. یعنی، ۰٫۳۱۰۶.

(ج) سطح بین $z = ۰$ و $z = -۱٫۶۰$ با مراجعه به عدد $z = ۱٫۶۰$ در جدول به‌دست می‌آید. یعنی، ۰٫۴۴۵۲. سطح بین $z = ۰$ و $z = ۲٫۵۵$ با مراجعه به $z = ۲٫۵۵$ در جدول به‌دست می‌آید، یعنی ۰٫۴۹۴۶. بنابراین، سطح زیر منحنی نرمال استاندارد از $z = -۱٫۶۰$ تا $z = ۲٫۵۵$ برابر با ۰٫۴۴۵۲ + ۰٫۴۹۴۶ است، یعنی، ۰٫۹۳۹۸ یا ۹۳٫۹۸٪ (به شکل ۳-۱۱ مراجعه کنید). در تمامی این نوع مسائل، رسم شکل بسیار مفید است.



شکل ۳-۱۱

(د) می‌دانیم که کل سطح زیر منحنی نرمال استاندارد برابر ۱ است. به علت تقارن منحنی، ۵۰٪ سطح کل آن در هر طرف $\mu = ۰$ قرار می‌گیرد. از آنجا که ۰٫۴۴۵۲ از $z = ۰$ تا $z = -۱٫۶۰$ را دربر می‌گیرد، ۰٫۰۵۴۸ = ۰٫۴۴۵۲ − ۰٫۵، یا ۵٫۴۸٪ سطح رهاشده در دنباله چپ به سمت چپ ۱٫۶۰− است (به شکل ۳-۱۱ مراجعه کنید).

(ه) ۰٫۰۰۵۴ = ۰٫۴۹۴۶ − ۰٫۵، یا ۰٫۵۴٪ سطح رهاشده در دنباله راست به سمت راست $z = ۲٫۵۵$ است (به شکل ۳-۱۱ مراجعه کنید).

(و) دنباله‌های رهاشده در سمت چپ $z = -۱٫۶۰$ و سمت راست $z = ۲٫۵۵$ برابر با ۰٫۹۳۹۸ − ۱ است. یعنی، ۰٫۰۶۰۲، یا ۶٫۰۲٪ از کل.

[illegible] می‌دانیم طول عمر لامپ‌های روشنایی دارای توزیع نرمال با $\mu = ۱۰۰$ ساعت و $\sigma = ۸$ ساعت است. احتمال اینکه یک لامپ انتخاب‌شده (به‌طور تصادفی)، طول عمری بین ۱۱۰ و ۱۲۰ ساعت داشته باشد چیست؟

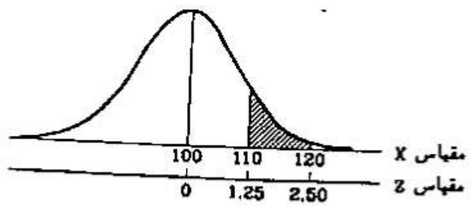
باید $P(۱۱۰ < X < ۱۲۰)$ را محاسبه کنیم، که در آن X ساعات طول عمر لامپ است. از آنجا که $\mu = ۱۰۰$ و $\sigma = ۸$ ساعت است، و اگر $X_1 = ۱۱۰$ و $X_2 = ۱۲۰$ ساعت را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{۱۱۰ - ۱۰۰}{۸} = ۱٫۲۵$$

و

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{۱۲۰ - ۱۰۰}{۸} = ۲٫۵۰$$

بنابراین، می‌خواهیم سطح (احتمال) بین $z_1 = ۱٫۲۵$ و $z_2 = ۲٫۵۰$ (سطح هاشورخورده در شکل ۳-۱۲) را به‌دست آوریم. با مراجعه به $z_2 = ۲٫۵۰$ در پیوست ۳، ۰٫۴۹۳۸ به‌دست می‌آید که سطح $z = ۰$ تا $z_2 = ۲٫۵۰$ است. با مراجعه به $z_1 = ۱٫۲۵$، ۰٫۳۹۴۴ به‌دست می‌آید که سطح $z = ۰$ تا $z_1 = ۱٫۲۵$ است. با کم کردن ۰٫۳۹۴۴ از ۰٫۴۹۳۸، ۰٫۰۹۹۴ یا ۹٫۹۴٪ سطح هاشورخورده که $P(۱۱۰ < X < ۱۲۰)$ است، به‌دست می‌آید.



شکل ۳-۱۲

۳-۳۳. فرض کنید که درآمدهای خانوارها دارای توزیع نرمال با $\mu = ۱۶۰۰۰$ دلار و $\sigma = ۲۰۰۰$ دلار است، احتمال اینکه خانواده انتخاب‌شده (به‌طور تصادفی) درآمدی برابر (الف) بین ۱۵۰۰۰ و ۱۸۰۰۰ دلار، (ب) کمتر از ۱۵۰۰۰ دلار، (ج) بیش از ۱۸۰۰۰ دلار، (د) بیش از ۲۰۰۰۰ دلار داشته باشد چیست؟

(الف) می‌خواهیم $P(۱۵۰۰۰ < X < ۱۸۰۰۰)$ دلار را که در آن X درآمد خانوار است به‌دست آوریم:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{۱۵۰۰۰ - ۱۶۰۰۰}{۲۰۰۰} = -۰٫۵$$

و

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{۱۸۰۰۰ - ۱۶۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۱$$

بنابراین سطح (احتمال) از $z_1 = -۰٫۵$ تا $z_2 = ۱$ (ناحیهٔ هاشورخورده از شکل ۳-۱۳) مدنظر است. با مراجعه به $z = ۰٫۵$ در پیوست ۳، مقدار ۰٫۱۹۱۵ به‌دست می‌آید که سطح از $z = ۰$ تا $z = -۰٫۵$ است. با مراجعه به $z = ۱$، مقدار ۰٫۳۴۱۳ به‌دست می‌آید که سطح از $z = ۰$ تا $z = ۱$ است. بنابراین،

$$P(۱۵۰۰۰ \le X \le ۱۸۰۰۰) = ۰٫۱۹۱۵ + ۰٫۳۴۱۳ = ۰٫۵۳۲۸ = ٪۵۳٫۲۸$$

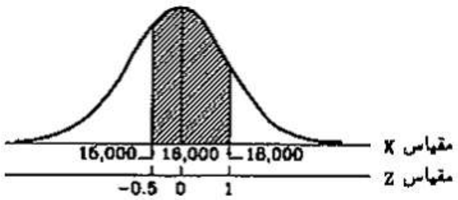
(ب) $P(X < ۱۵۰۰۰) = ۰٫۵ - ۰٫۱۹۱۵ = ۰٫۳۰۸۵$

$= ٪۳۰٫۸۵$ (سطح هاشورنخورده دنباله سمت چپ شکل ۳-۱۳)

(ج) $P(X > ۱۸۰۰۰) = ۰٫۵ - ۰٫۳۴۱۳ = ۰٫۱۵۸۷$

$= ٪۱۵٫۸۷$ (سطح هاشورنخورده دنباله سمت راست شکل ۳-۱۳)

(د) $X = ۲۰۰۰۰$ در مقیاس استاندارد $z = (۲۰۰۰۰ - ۱۶۰۰۰)/۲۰۰۰ = ۲$ است. بنابراین، $P(X > ۲۰۰۰۰) = ۰٫۵ - ۰٫۴۷۷۲ = ۰٫۰۲۲۸$ یا ٪۲٫۲۸ است.



شکل ۳-۱۳

۳-۳۴. نمرات امتحان میان ترم در یک کلاس آمار بزرگ، دارای توزیع نرمال با میانگین ۷۸ و انحراف معیار ۸ است. استاد می‌خواهد به ۱۰٪ دانشجویان نمرهٔ (الف) بدهد. پایین‌ترین نمره‌ای که می‌تواند (الف) کسب کند چیست؟ در این مسئله باید نمره‌ای پیدا کنیم که نمرات ۱۰٪ دانشجویان بیش از آن باشد. یعنی، باید نمرهٔ Xی را بیابیم که ۱۰٪ سطح زیر منحنی نرمال در سمت راست آن قرارگیرد. (سطح هاشورخورده در شکل ۳-۱۴). از آنجاکه کل سطح زیر منحنی در سمت راست نمرهٔ ۷۸، ۰٫۵ است، سطح هاشورنخوردهٔ شکل (۳-۱۴) در سمت راست ۷۸، باید ۰٫۴ باشد. با مراجعه به متن جدول پیوست ۳، نزدیک‌ترین مقدار به ۰٫۴ را پیدا می‌کنیم که ۰٫۳۹۹۷ می‌باشد و z متناظر آن ۱٫۲۸ است. حال با استفاده از $z = ۱٫۲۸$ و فرمول $z = (X - \mu)/\sigma$ مقدار X را به‌صورت زیر به‌دست

فصل دهم

همبستگی و رگرسیون

از یک جامعه یا نمونه‌ای از یک جامعه دو صفت متغیر x و y را در نظر می‌گیریم و مقادیر مختلف را اندازه‌گیری می‌کنیم. مثلاً در یک کلاس نمرات ریاضی و معدل دانشجویان را مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از این مبحث این است که آیا بین دو صفت متغیر x و y همبستگی و رابطه خطی وجود دارد یا خیر و روش آماری آن را مورد توجه قرار دهیم.

مثال ۱: از $n = ۵$ نفر دو صفت x و y را یادداشت کرده‌ایم که نتیجه در جدول زیر منعکس است.

x	۲	۳	۵	۷	۸
y	۱۰	۸	۶	۴	۲

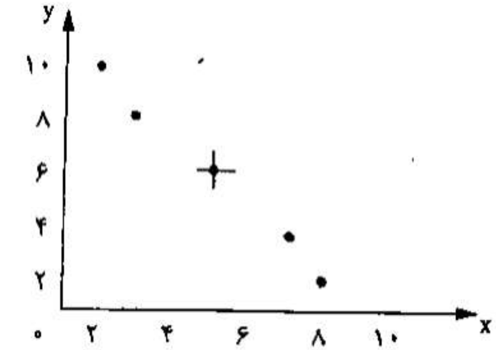
می‌خواهیم بررسی نمائیم که آیا بین دو صفت x و y همبستگی و رابطه خطی وجود دارد یا خیر؟

۱۰-۱- دیاگرام یا نمودار پراکندگی

اگر هر زوج مرتب (x_i, y_i) را به عنوان مختصات یک نقطه در نظر بگیریم و آنها را در صفحه مختصات رسم کنیم نمودار پراکندگی بدست خواهد آمد که با مطالعه روی آن و از نحوه قرارگرفتن نقاط می‌توان حدس زد که آیا رابطه و بستگی بین x و y وجود دارد یا خیر؟

مثال ـ در مثال فوق نمودار پراکندگی بشرح زیر است.

x	y
۲	۱۰
۳	۸
۵	۶
۷	۴
۸	۲
Σ: ۲۵	۳۰



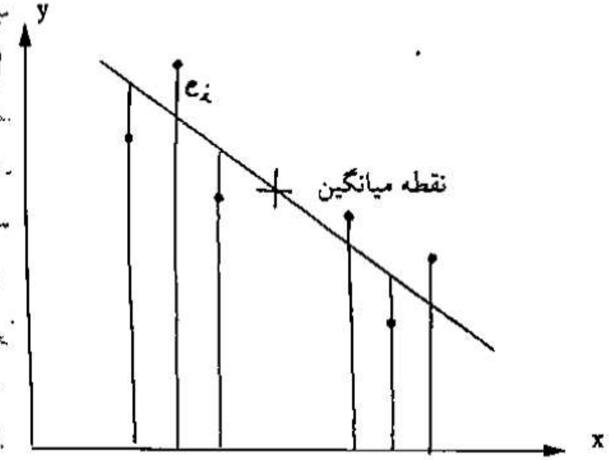
از مقایسه |r| با این دو عدد داریم. ۰/۹۹ > ۰/۹۵۹ > ۰/۸۷۸

بنابراین با اطمینان ۹۹٪ ضریب همبستگی معنی‌دار است.

۱ـ۵ـ معادله خط رگرسیون

پس از تحقیق معنی‌دار بودن r می‌توان معادله همبستگی خطی را نوشت و خط رگرسیون را رسم نمود:

معادله خط رگرسیون بصورت کلی $y = a + bx$ می‌باشد.



خط رگرسیون به خطی می‌گویند که از لابلای نقاط نمودار پراکندگی می‌گذرد و مجموع مربعات فواصل نقاط از این خط در امتداد محور yها حداقل می‌باشد.

اگر e_i اختلاف بین y_i نقطه iام و y محاسبه شده از قرار دادن $x=x_i$ در معادله خط رگرسیون باشد داریم:

$$e_i = y_i - (a + bx_i)$$

اکنون باید در معادله خط رگرسیون ضرایب a و b را طوری حساب کنیم که عبارت زیر حداقل شود:

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)^2\right]$$

$f(a,b)$ یک معادله دو مجهولی نسبت به a و b می‌باشد. با استفاده از روش پیداکردن اکسترمم توابع

دو متغیر می‌توان a و b را طوری تعیین کرد که $f(a,b)$ حداقل گردد. برای این منظور مشتقات نسبی تابع دو متغیره را نسبت به a و b حساب می‌کنیم و آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم. از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی a و b پیدا می‌شوند که اگر آنها را در معادله خط رگرسیون قرار دهیم. معادله بدست می‌آید.

تبصره ـ معادله خط رگرسیون همواره از نقطه میانگین یعنی $(\bar{x}, \bar{y})$ می‌گذرد و شیب آن b می‌باشد.

با توجه به توضیحات فوق ضرایب معادله خط رگرسیون بشرح زیر بدست می‌آیند.

$$b = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

و چون خط رگرسیون از نقطه میانگین می‌گذرد یعنی $\bar{y} = a + b\bar{x}$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

با معلوم بودن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و b مقدار ثابت a محاسبه می‌گردد.

تبصره ۱ـ ضرایب a و b را می‌توان به کمک واریانس و کوواریانس بشرح زیر بدست آورد.

اگر صورت و مخرج کسر b فوق را بر n تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$b = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2} \qquad , \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

تبصره ۲ـ ضریب b را می‌توان با بسط صورت و مخرج کسر b بشرح زیر هم محاسبه نمود.

$$b = \frac{\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2} \qquad \text{یا} \qquad b = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

تبصره ۳ـ یکی از کاربردهای خط رگرسیون پیش‌بینی مقدار y بازاء هر x مفروض می‌باشد برای این منظور x مفروض را در معادله خط رگرسیون قرار می‌دهیم تا y بدست آید.

مثال ـ در مثال ۱ فوق معادله خط رگرسیون را بنویسید و آن را رسم کنید ضمناً بازاء x=۶ مقدار y را پیش‌بینی کنید.

حل: معادله خط رگرسیون را بصورت $y=a+bx$ در نظر می‌گیریم و ضرایب a و b را بشرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$b = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = \frac{-۳۶}{۲۶} = -۱/۲۳$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = ۶ - (-۱/۲۳)(۵) = ۱۲/۱۵$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

ضمناً نقطه میانگین یعنی (۶ و ۵) را روی نمودار نشان داده‌ایم.
این نمودار نشان می‌دهد که احتمالاً x و y بستگی خطی دارند

۱۰ـ۲ـ ضریب همبستگی

بهترین معیار تشخیص وجود همبستگی یا عدم آن و حتی نوع و جهت و میزان همبستگی خطی ضریب همبستگی می‌باشد.
اگر ضریب همبستگی را با r نشان دهیم. فرمولهای ضریب همبستگی ساده بشرح زیر می‌باشند.

$$r = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 \Sigma (y_i - \bar{y})^2}} \qquad (a)$$

اگر صورت و مخرج این کسر را بر n تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} \cdot \frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n}}}$$

با توجه به تعریف واریانس‌های x و y و کوواریانس x و y داریم:

$$r = \frac{E(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (b)$$

از بسط فرمول (a) داریم:

$$r = \frac{\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{\sqrt{\left[\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2\right]\left[\Sigma y_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2\right]}} = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{\sqrt{\left[n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2\right]\left[n\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2\right]}} \qquad (c)$$

و اگر در فرمول (c) از $\Sigma x_i = n\bar{x}$ و $\Sigma y_i = n\bar{y}$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$r = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)(\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2)}} \qquad (d)$$

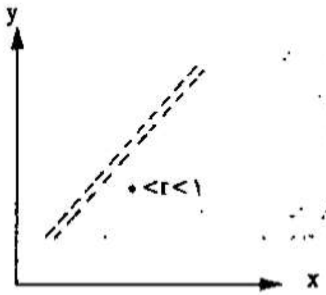
تبصره ۱: ضریب همبستگی همواره بین ۱ـ و ۱+ قرار دارد یعنی $-1 \le r \le 1$.

۱

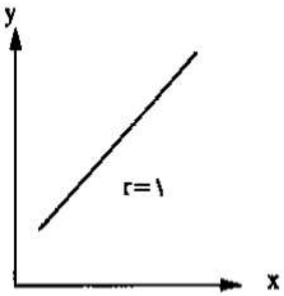
تبصره ۲: اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ اعداد صحیح باشند استفاده از فرمول (a) مناسب است و اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ اعداد صحیح باشند استفاده از فرمول (c) مناسب است.

۱۰ـ۳ـ انواع همبستگی‌ها

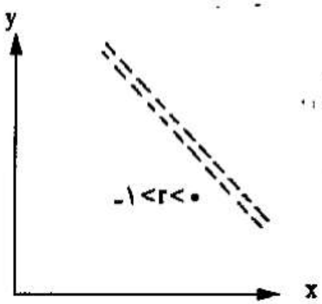
بین نمودار پراکندگی و ضریب همبستگی r که از فرمولهای فوق بدست می‌آید رابطه بشرح زیر وجود دارد.



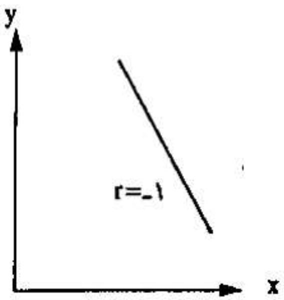
همبستگی مستقیم و ناقص است



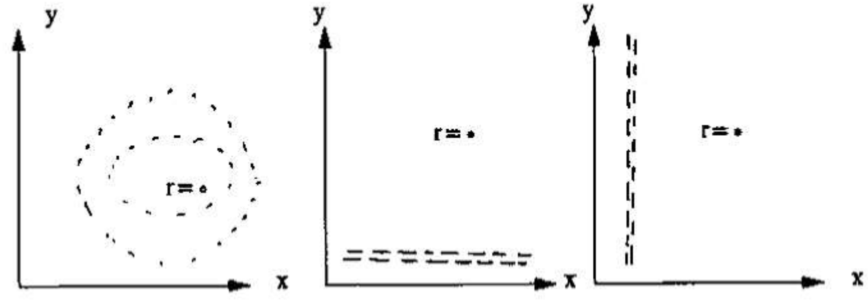
همبستگی مستقیم و کامل است



همبستگی معکوس و ناقص است



همبستگی معکوس و کامل است



عدم همبستگی　　　عدم همبستگی　　　عدم همبستگی

مثال: در مثال ۱ فوق ضریب همبستگی را حساب کنید و نوع آن را تعیین نمائید. چون $\bar{x} = ۵$ و $\bar{y} = ۶$ اعداد صحیح است از فرمول (a) استفاده می‌کنیم. توجه گردد که در هر شرایط از فرمول (c) و (d) هم می‌توان استفاده نمود.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^۲$	$(y_i - \bar{y})^۲$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
۲	۱۰	-۳	۴	۹	۱۶	-۱۲
۳	۸	-۲	۲	۴	۴	-۴
۵	۶	۰	۰	۰	۰	۰
۷	۴	۲	-۲	۴	۴	-۴
۸	۲	۳	-۴	۹	۱۶	-۱۲
Σ ۲۵	۳۰	۰	۰	۲۶	۴۰	-۳۲

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{۲۵}{۵} = ۵ \quad و \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

اکنون مقادیر جدول فوق را در فرمول (a) قرار می‌دهیم تا ضریب همبستگی بدست آید.

$$r = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^۲ \Sigma(y_i - \bar{y})^۲}} = \frac{-۳۲}{\sqrt{۲۶ \times ۴۰}} = -۰/۹۹$$

بنابراین همبستگی ناقص و معکوس است. (یعنی نقاط کاملاً روی یک خط قرار نمی‌گیرند و تغییرات x و y در خلاف جهت یکدیگرند)

۱۰-۴-درجه اعتماد ضریب همبستگی

پس از محاسبه r برای تعیین درجه اعتماد ضریب همبستگی بشرح زیر عمل می‌گردد.

ابتدا درجه آزادی را از فرمول $d_f = n-۲$ بدست می‌آوریم. سپس به جدول معنی‌دار بودن r که در آخر این کتاب وجود دارد مراجعه می‌کنیم. در این جدول دو ستون در زیر $\alpha = ۰/۰۱$ و $\alpha = ۰/۰۵$ وجود دارد. در مقابل ردیف درجه آزادی بدست آمده، اعداد مربوط را در زیر ستونهای فوق استخراج می‌کنیم و $|r|$ محاسبه شده را با این اعداد مقایسه می‌کنیم و بترتیب زیر نتیجه‌گیری می‌نمائیم.

الف - اگر $|r|$ محاسبه شده بزرگتر از هر دو عدد جدول باشد. در این صورت ضریب همبستگی با اطمینان ۹۹٪ معنی‌دار است.

ب - اگر $|r|$ محاسبه شده بین دو عدد جدول قرار گیرد. در این حالت ضریب همبستگی با اطمینان ۹۵٪ معنی‌دار است.

ج - اگر $|r|$ محاسبه شده از هر دو عدد جدول کوچکتر باشد ضریب همبستگی معنی‌دار نیست.

مثال - در مثال فوق درجه اعتماد ضریب همبستگی را بررسی کنید.

ابتدا $|r|$ را بدست می‌آوریم. $|r| = |-۰/۹۹| = ۰/۹۹$

سپس درجه آزادی $df = n-۲$ را حساب می‌کنیم. $df = ۵-۲ = ۳$

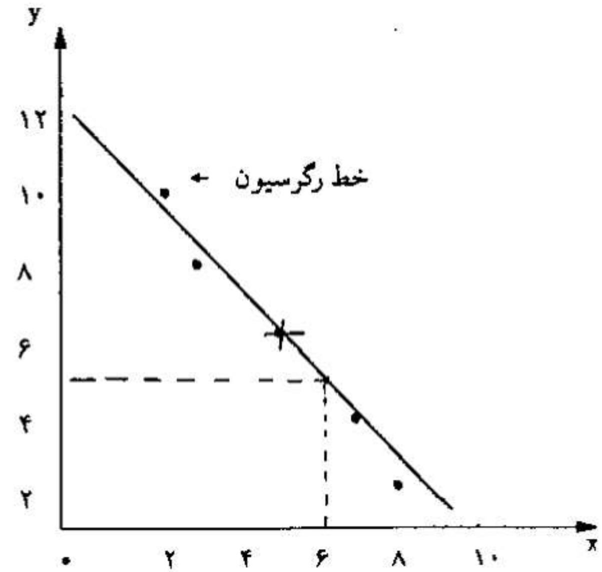
به جدول معنی‌دار بودن r مراجعه می‌کنیم در مقابل ردیف درجه آزادی ۳ دو عدد بشرح زیر وجود دارد.

درجه آزادی	۰/۰۵	۰/۰۱
۱	...	...
۲	...	...
۳	۰/۸۷۸	۰/۹۵۹

معادله خط رگرسیون $y = ۱۲/۱۵ - ۱/۲۳x$

برای رسم خط رگرسیون دو نقطه از آن را پیدا می‌کنیم و خط را رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۲/۱۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = ۹/۸۸ \\ y = ۰ \end{cases}$$



برای پیش‌بینی y بازاء x=۶ آن را در معادله خط رگرسیون قرار می‌دهیم.

$$x = ۶ \Rightarrow y = ۱۲/۱۵ - (۱/۲۳)(۶) = ۴/۷۷$$

از روی نمودار هم می‌توان بازاء x=۶ مقدار y را پیدا کرد.

۱۰-۶- ضریب تشخیص یا ضریب تعیین

ضریب تشخیص بیان کننده نسبت درصد تغییرات تابع یعنی y بوسیله تغییرات متغیر یعنی x می‌باشد. به عبارت دیگر ضریب تشخیص معلوم می‌کند که چند درصد از تغییرات y ناشی از تغییرات x

است. ضرایب تشخیص $R^۲$ با معلوم بودن ضریب همبستگی یعنی r از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$R^۲ = r^۲ \qquad ۰ \le R^۲ \le ۱$$

مثال - در مثال ۱ فوق ضریب تشخیص را بدست آورید و آن را تفسیر کنید.

$$R^۲ = (-۰/۹۹)^۲ = ۰/۹۸$$

تفسیر آن اینست که ۹۸٪ از تغییرات y ناشی از تغییرات x است و ۲٪ از تغییرات y مربوط به x نیست و به سایر عوامل بستگی دارد.

مثال ۲: اندازه وزن (x) و قد (y) دوازده نوجوان محصل اندازه‌گیری شده است که در جدول زیر منعکس است.

x	۶۵	۷۳	۷۰	۶۸	۶۶	۶۹	۷۵	۷۰	۶۴	۷۲	۶۵	۷[illegible]
y	۱۲۶	۱۸۴	۱۶۱	۱۶۴	۱۴۰	۱۵۴	۲۱۰	۱۶۴	۱۲۶	۱۷۲	۱۳۳	۱۵[illegible]

مطلوبست: الف - تعیین ضریب همبستگی x و y و تعیین نوع همبستگی. آیا با اطمینان ۹۹٪ همبستگی بین وزن و قد افراد وجود دارد یا خیر؟

ب - تعیین معادله خط رگرسیون و رسم نمودار پراکندگی و خط رگرسیون.

ج - اگر وزن نوجوانی x=۶۷ کیلوگرم باشد اندازه قد او را پیش‌بینی کنید.

د - ضریب تشخیص را بدست آورید و آن را تفسیر کنید.

حل: ابتدا جدول محاسبات را تشکیل می‌دهیم.

تفسیر آن اینست که در این نمونه ۱۲ نفری از نوجوانان ۸۷٪ از قد افراد به وزن آنها بستگی دارد و ۱۳٪ از تغییرات قد مربوط به سایر عوامل می‌باشد.

۱۰-۷- همبستگی و رگرسیون تجربی

۱۰-۷-۱- رگرسیون تجربی

در جداول دو بعدی توزیع فراوانی در مقابل هر x ممکن است چندین y داشته باشیم با متناظر قرار دادن هر x با میانگین شرطی صفت y و در نظر گرفتن فراوانی هر زوج مرتب $(x_i \, , \, \bar{y}_i)$ می‌توان معادله خط رگرسیون را بشرح زیر بدست آورد.

معادله خط رگرسیون

$$\bar{y}_x = a + bx$$

$$b = \frac{\Sigma F_{io} x_i \bar{y}_i - \frac{1}{N}(\Sigma F_{io} x_i)(\Sigma F_{io} \bar{y}_i)}{\Sigma F_{io} x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma F_{io} x_i)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma F_{io} x_i}{N} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma F_{io} \bar{y}_i}{N}$$

در مثال زیر نحوه عمل شرح داده می‌شود.

مثال ۳- در جدول توزیع فراوانی دو بعدی زیر معادله خط رگرسیون y روی x را بدست آورید.

x \ y	۱	۲	۳	۴	F_{io}	ΣF_{ij}	$\bar{y}_i = \frac{\Sigma F_{ij}}{F_{io}}$
۲	۱۵	۵	۰	۰	۲۰	۲۵	۱/۲۵
۳	۵	۲۰	۵	۰	۳۰	۶۰	۲
۴	۰	۱۰	۱۵	۵	۳۰	۸۵	۲/۸۳
۵	۰	۵	۱۰	۵	۲۰	۶۰	۳
F_{oj}	۲۰	۴۰	۳۰	۱۰	۱۰۰		

اکنون جدول محاسبات را تنظیم می‌کنیم

x_i	$\bar{y}_i$	F_{io}	$f_{io} x_i$	$f_{io} x_i^2$	$F_{io}\bar{y}_i$	$F_{io} x_i \bar{y}_i$
۲	۱/۲۵	۲۰	۴۰	۸۰	۲۵	۵۰
۳	۲	۳۰	۹۰	۲۷۰	۶۰	۱۸۰
۴	۲/۸۳	۳۰	۱۲۰	۴۸۰	۸۵	۳۴۰
۵	۳	۲۰	۱۰۰	۵۰۰	۶۰	۳۰۰
Σ		۱۰۰	۳۵۰	۱۳۳۰	۲۳۰	۸۷۰

$$b = \frac{\Sigma F_{io} x_i \bar{y}_i - \frac{1}{N}(\Sigma F_{io} x_i)(\Sigma F_{io} \bar{y}_i)}{\Sigma F_{io} x_i^2 - \frac{1}{N}(\Sigma F_{io} x_i)^2}$$

$$b = \frac{۸۷۰ - \frac{۱}{۱۰۰}(۳۵۰)(۲۳۰)}{۱۳۳۰ - \frac{۱}{۱۰۰}(۳۵۰)^2} = ۰/۶۲$$

از طرفی داریم:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma F_{io} x_i}{N} = \frac{۳۵۰}{۱۰۰} = ۳/۵$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma F_{io} \bar{y}_i}{N} = \frac{۲۳۰}{۱۰۰} = ۲/۳$$

بنابراین ضریب a بشرح زیر محاسبه می‌گردد.

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = ۲/۳ - ۰/۶۲ \times ۳/۵ = ۰/۱۳$$

معادله خط رگرسیون y روی x

$$\bar{y}_x = ۰/۱۳ + ۰/۶۲x$$

تبصره- با فرمولهای نظیر فرمولهای فوق می‌توان معادله خط رگرسیون x را بر روی y نوشت.

۱۰-۷-۲- ضریب همبستگی تجربی

در جداول دو بعدی طبقه‌بندی شده تجربی همبستگی از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F_{ij}x_iy_j - (\sum_{i=1}^{n} F_{io}x_i)(\sum_{j=1}^{m} F_{oj}y_j)}{\sqrt{\left[N\sum_{i=1}^{n} F_{io}x_i^{۲} - (\sum_{i=1}^{n} F_{io}x_i)^{۲}\right]\left[N\sum_{j=1}^{m} F_{oj}y_j^{۲} - (\sum_{i=1}^{m} F_{oj}y_j)^{۲}\right]}}$$

مثال- در جدول دو بعدی طبقه‌بندی شده زیر ضریب همبستگی را حساب کنید.

$x_i - x_{i+1}$ / $y_i - y_{i+1}$	۰-۴	۵-۹	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	F_i	y_i	F_iy_i	$f_i(y_i)^۲$	Σf_ix_i	$y_i\Sigma f_i$
۶-۱۰	۱	۴	۳		۲	۱۰	۸	۸۰	۶۴۰	۱۱۰	۸۸۰
۱۱-۱۵		۳	۶	۴		۱۳	۱۳	۱۶۹	۲۱۹۷	۱۶۱	۲۰۹۳
۱۶-۲۰	۲	۳	۲	۶	۲	۱۵	۱۸	۲۷۰	۴۸۶۰	۱۹۵	۳۵۱۰
۲۱-۲۵	۲	۳	۴	۲	۱	۱۲	۲۳	۲۷۶	۶۳۴۸	۱۲۹	۲۹۶۷
F_i	۵	۱۳	۱۵	۱۲	۵	۵۰		۷۹۵	۱۴۰۴۵		۹۴۵۰
x_i	۲	۷	۱۲	۱۷	۲۲						
F_ix_i	۱۰	۹۱	۱۸۰	۲۰۴	۱۱۰	۵۹۵					
$F_i(x_i)^۲$	۲۰	۶۳۷	۲۱۶۰	۳۴۶۸	۲۴۲۰	۸۷۰۵					
Σf_iy_i	۹۰	۱۹۴	۲۳۰	۲۰۶	۷۵						
$x_i\Sigma f_iy_i$	۱۸۰	۱۳۵۸	۲۷۶۰	۳۵۰۲	۱۶۵۰	۹۴۵۰					

$$r = \frac{\Sigma(y_i\Sigma f_ix_i) - \frac{(\Sigma F_iy_i)(\Sigma F_ix_i)}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma F_ix_i^{۲} - \frac{(\Sigma F_ix_i)^{۲}}{N}\right]\left[\Sigma F_iy_i^{۲} - \frac{(\Sigma F_iy_i)^{۲}}{N}\right]}} =$$

$$\frac{۹۴۵۰ - \frac{۷۹۵ \times ۵۹۵}{۵۰}}{\sqrt{\left[۸۷۰۵ - \frac{(۵۹۵)^{۲}}{۵۰}\right]\left[۱۴۰۴۵ - \frac{(۷۹۵)^{۲}}{۵۰}\right]}} = \frac{۹۴۵۰ - ۹۴۶۰/۵}{\sqrt{۱۶۲۴/۵ \times ۱۴۰۴/۵}} = \frac{-۱۰/۵}{۱۵۱۰/۵} = -۰/۰۰۷$$

۱۰-۸- ضریب همبستگی اسپیرمن (رتبه‌ای)

اگر صفات مورد بررسی کیفی باشند برای بررسی همبستگی بین صفات می‌توان از ضریب

همبستگی رتبه‌ای استفاده نمود.

در مواردی که صفات x و y کیفی یا کمی باشند می‌توان آنها را برحسب رتبه مرتب نمود و سپس از فرمول همبستگی اسپیرمن بشرح زیر استفاده نمود.

$$r_s = ۱ - \frac{۶\Sigma d_i^{۲}}{n(n^{۲} - ۱)}$$

در این فرمول $d_i = x_i - y_i$ (تفاضل رتبه‌های متناظر دو صفت) و n تعداد زوجهای مرتب در نمونه می‌باشد.

مجموعه مسائل رگرسیون همبستگی

۱ـ جدول زیر برای مقادیر دو صفت x و y در دست است.

x	۴	۸	۱۳	۱۵	۲۰
y	۳	۸	۱۳	۱۲	۱۴

مطلوبست:

الف ـ محاسبه ضریب همبستگی x و y و تفسیر آن و آزمون معنی‌دار بودن r

ب ـ محاسبه خط رگرسیون و رسم نمودار پراکندگی و خط رگرسیون

ج ـ برای x=۱۰ مقدار $\hat{y}$ را تخمین بزنید.

د ـ محاسبه ضریب تشخیص و تفسیر آن

جواب: r = ۰/۹۳۴ و y = ۰/۶۸x + ۱/۸۴ و y = ۸/۶۴ و R^2 = ۰/۸۷

۲ـ جدول زیر مقادیر دو صفت x و y را نشان می‌دهند.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۲	۴	۵	۶	۸

مطلوبست:

الف ـ محاسبه ضریب همبستگی x و y و تفسیر آن و آزمون ضریب همبستگی

ب ـ خط رگرسیون را پیدا کنید و نمودارهای پراکندگی و خط رگرسیون را رسم کنید.

ج ـ تخمین y بازاء x=۶

د ـ محاسبه ضریب تعیین و تفسیر آن.

جواب: r = ۰/۹۹ و y = ۱/۴x + ۰/۸ و y = ۹/۲ و R^2 = ۰/۹۸

۳ـ در یک کارخانه مقادیر تولید و ضایعات تولید در روزهای مختلف آمارگیری شده است و نتایج در جدول زیر منعکس است:

x	۲۰	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۵	۲۶	۳۰	۳۵	۴۰
y	۴	۵	۵	۶	۸	۱۰	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶

مطلوبست:

الف ـ ضریب همبستگی

ب ـ نوع همبستگی

ج ـ آیا با اطمینان ۹۵٪ همبستگی وجود دارد؟

د ـ تعیین معادله خط رگرسیون

هـ ـ رسم نمودار پراکندگی و خط رگرسیون

و ـ بازاء مقدار تولید x=۳۲ مقدار ضایعات را پیش‌بینی کنید.

ز ـ چند درصد تغییرات ضایعات ناشی از مقدار تولید است؟

جواب: r = ۰/۹۵ و y = ۰/۶x ـ ۸ و y = ۱۱/۲ و R^2 = ۰/۹۰

۴ـ ضریب همبستگی بین استعداد در ریاضی و استعداد در زبان برابر ۰/۴ محاسبه شده است. نمونه را چقدر باید بزرگ انتخاب کنیم تا تقریباً مطمئن شویم فرض عدم همبستگی رد خواهد شد.

جواب: n = ۲۵

۵ـ جدول دو بعدی توزیع فراوانی کمیت‌های x و y بشرح زیر مفروض است.

الف ـ ضریب همبستگی x و y را پیدا کنید.

ب ـ معادله خط رگرسیون y روی x را بنویسید.

x \ y	۶	۸	۱۰	۱۲
۱۰	۰	۲	۰	۳
۲۰	۱	۰	۳	۲
۳۰	۲	۴	۰	۲
۴۰	۰	۱	۴	۲
۵۰	۱	۰	۲	۱

۶ـ توزیع فراوانی دو صفت x و y یک نمونه ۳۰۰تائی در جدول زیر منعکس است.

مطلوبست:

فصل دوازدهم

نظریه نمونه‌ها

۱۲ـ۱ـ تعاریف

در فصول قبل دیدیم که برای بررسی صفت متغیر در یک جامعه در حالت کلی نمی‌توان تمام اعضای جامعه را مورد بررسی قرار داد. بنابراین در چنین شرایطی می‌توان بررسی را روی تعداد محدودی از اعضاء که نمونه نام دارد انجام داد و براساس نتایج حاصله از آن نسبت به تمام جامعه قضاوت و نتیجه‌گیری نمود. برای اینکه نتیجه‌گیری براساس معیارهای علمی باشد باید شرایط مشخصی را رعایت نمود که از آن جمله تصادفی بودن انتخاب می‌باشد.

۱۲ـ۱ـ۱ـ انتخاب تصادفی

انتخاب تصادفی به انتخابی می‌گویند که تمامی افراد جامعه شانس مساوی برای انتخاب شدن داشته باشند. انتخاب اعضاء می‌تواند بدون جایگذاری و یا با جایگذاری انجام گیرد.

۱۲ـ۱ـ۲ـ نمونه تصادفی

نمونه تصادفی به نمونه‌ای می‌گویند که افراد تشکیل‌دهنده آن دارای خصوصیات افراد جامعه اصلی باشند.

۱۲ـ۱ـ۳ـ آماره و پارامتر

آماره اصطلاحی است که در رابطه با نمونه بکار می‌رود و خصوصیتی از نمونه را بررسی می‌کند. مثلاً میانگین، واریانس یا نسبت نمونه آماره می‌باشد. آماره از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند. پارامتر عددی است که خصوصیتی از یک جامعه را بیان می‌کند. مانند میانگین، واریانس و میانه جامعه که پارامتر می‌باشند. با اینکه پارامترها در یک جامعه ثابت می‌باشند ولی معمولاً مجهول می‌باشند و به کمک آماره‌ها باید پارامترها را برطبق روش‌های آماری برآورد کرد که به آن استنباط و یا استنتاج آماری

می‌گویند. بنابراین اطلاع از توزیع یک آماره که خود یک متغیر تصادفی است اهمیت خاصی دارد. در این فصل نحوه توزیع بعضی آماره‌های مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. معمولاً پارامترها را با حروف یونانی و آماره‌ها را با حروف لاتین نشان می‌دهند. پارامترها و آماره‌های مهم در جدول زیر منعکس است.

شاخص	گروه	نمادکلی	میانگین	واریانس	نسبت
آماره	نمونه	$\hat{\theta}$	$\bar{x}$	s^2	P
پارامتر	جامعه	θ	μ	σ^2	π

۱۲-۲- توزیع میانگین نمونه‌ای

۱۲-۲-۱- امید ریاضی و واریانس میانگین نمونه‌ای

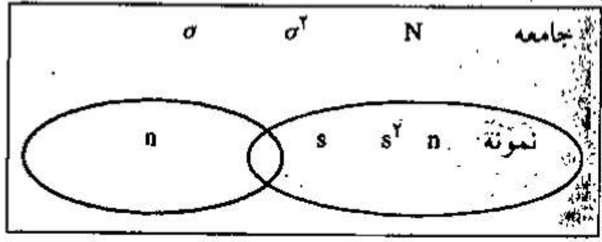
جامعه‌ای به حجم N و میانگین μ و انحراف معیار σ را در نظر می‌گیریم و در اینصورت پارامترهای μ و σ^2 بشرح زیر محاسبه می‌شوند.

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}$$

اکنون از این جامعه نمونه‌ای تصادفی به حجم n و میانگین $\bar{x}$ و انحراف معیار s را در نظر می‌گیریم در این حالت آماره‌های $\bar{x}$ و s^2 بشرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \quad , \quad S^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

تبصره: در محاسبه واریانس نمونه در مخرج کسر n-1 قرار می‌دهند. همانطور که متعاقباً مطرح خواهد شد در اینصورت s^2 برآوردکننده بهتری برای واریانس جامعه یعنی σ^2 خواهد بود. ثابت می‌شود که واریانس نمونه‌ای که باین ترتیب محاسبه شود، برآوردکننده نااریب برای واریانس جامعه خواهد بود. $\bar{x}$ یعنی میانگین نمونه یک آماره می‌باشد. حال اگر نمونه‌های مستقل دیگری به حجم n از جامعه انتخاب و میانگین هر یک را حساب کنیم $\bar{x}$ یعنی میانگین نمونه از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییرخواهد کرد پس $\bar{x}$ را می‌توان یک متغیر تصادفی دانست. برای این متغیر تصادفی یک توزیع احتمال وجود دارد که میانگین و واریانس و انحراف معیار آن بشرح زیر بدست می‌آید.



$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

اثبات:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E(\Sigma x_i) = \frac{1}{n} \Sigma E(x) = \frac{1}{n} \Sigma \mu = \frac{1}{n} . n\mu = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(\Sigma x_i) = \frac{1}{n^2} \Sigma Var(x) = \frac{1}{n^2} \Sigma \sigma^2 = \frac{1}{n^2} . n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

یعنی اگر برای تمام نمونه‌های به حجم n (که تعداد آنها C_N^n می‌باشد) میانگین نمونه‌ها یعنی $\bar{x}$ را حساب کنیم، میانگین $\bar{x}$ ها برابر میانگین جامعه و واریانس $\bar{x}$ ها برابر $\frac{1}{n}$ واریانس جامعه خواهد بود. این فرمول نشان می‌دهد که پراکندگی $\bar{x}$ از پراکندگی x کمتر خواهد بود.

۱۲-۲-۲- قضیه حد مرکزی

آنچه در بند ۱۲-۲-۱ مورد بررسی قرار گرفت محاسبه امید ریاضی و واریانس آماره $\bar{x}$ در تمام نمونه‌هائی بحجم ثابت n بود. قضیه حد مرکزی که از اهمیت خاصی برخوردار است نحوه توزیع $\bar{x}$ را در نمونه‌های مختلف مشخص می‌کند. اگر x_1 و x_2 و .... x_n یک نمونه از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد توزیع $\bar{x}$ با هر حجمی از نمونه دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ خواهد بود. اگر $\bar{x} \to N(\mu , \frac{\sigma^2}{n})$، $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ استاندارد شده متغیر تصادفی $\bar{x}$ باشد توزیع Z در نمونه‌های مختلف دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود.

اگر توزیع جامعه نامشخص باشد توزیع $\bar{x}$ فقط در صورتی تقریباً نرمال (و استاندارد شده آن تقریباً نرمال استاندارد) است که حجم نمونه بزرگ باشد ($n>۳۰$). هر قدر حجم نمونه افزایش یابد توزیع $\bar{x}$ به سمت توزیع نرمال و توزیع z بسمت توزیع نرمال استاندارد گرایش می‌یابد.

تبصره: اگر تمام نمونه‌های تصادفی با حجم n از یک جامعه متناهی نرمال با حجم N و میانگین μ و واریانس σ^2 بدون جایگذاری انتخاب شود. توزیع $\bar{x}$ نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$ خواهد بود. اگر $n>۳۰$ باشد توزیع $\bar{x}$ بدون توجه به نوع توزیع جامعه تقریباً نرمال می‌باشد.

مثال ۱: جامعه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

از این جامعه تمام نمونه‌های تصادفی ۲ تائی ممکن را با جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف ـ میانگین و واریانس جامعه را حساب کنید.

ب ـ جدول توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$ را تشکیل دهید و $E(\bar{x})$ و $\sigma^2_{\bar{x}}$ را حساب کنید.

ج ـ صحت فرمولهای $E(\bar{x}) = \mu$ و $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$ را تحقیق نمائید.

حل:

الف: میانگین جامعه $\mu = E(x) = \Sigma x_i f(x_i) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$

$$E(x^2) = \Sigma x_i^2 f(x_i) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

واریانس جامعه $\sigma^2 = E(x^2) - \mu_x^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

ب: جدول زیر تمام نمونه‌های ممکن دوتائی (با جایگذاری) و میانگین آنها را نشان می‌دهد.

نمونه	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)
$\bar{x}$	۱	۱/۵	۲	۱/۵	۲	۲/۵	۲	۲/۵	۳

براساس این جدول می‌توان $E(\bar{x})$ و $\sigma^2_{\bar{x}}$ را بشرح زیر محاسبه نمود

$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\bar{x}f(\bar{x})$	$\bar{x}^2$	$\bar{x}^2 f(\bar{x})$
۱	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	۱	$\frac{1}{9}$
۱/۵	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	۲/۲۵	$\frac{4/5}{9}$
۲	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	۴	$\frac{12}{9}$
۲/۵	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	۶/۲۵	$\frac{12/5}{9}$
۳	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	۹	$\frac{9}{9}$
Σ	۱	۲		$\frac{13}{3}$

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \Sigma \bar{x}_i f(\bar{x}_i) = 2$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \mathrm{Var}(\bar{x}) = E(\bar{x})^2 - \mu^2_{\bar{x}} = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

از مقایسه نتایج بندهای الف و ب نتیجه می‌شود که:

$$E(\bar{x}) = \mu = 2$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{3}$$

مثال ۲: فرض می‌کنیم که نمرات یک آزمون استخدامی دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۶۰ و انحراف معیار ۲۰ می‌باشد اگر یک نمونه ۱۶ تائی از این جامعه انتخاب کنیم مطلوبست احتمال آنکه میانگین حاصله:

الف) از ۱۶۵ بیشتر باشد   ب) از ۱۵۰ کمتر باشد.

حل:

$$x \to N(160, 400)$$

$$E(\bar{x}) = \mu = 160 \quad , \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5$$

$$\bar{x} \to N(160, 25)$$

$$\bar{x}_1 = 165 \Rightarrow Z_1 = \frac{\bar{x}_1 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{165 - 160}{5} = 1$$

$$p(\bar{x} > 165) = p(z > 1) = 1 - p(z < 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$\bar{x} = 150 \Rightarrow z_2 = \frac{\bar{x}_2 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{150 - 160}{5} = -2$$

$$P(\bar{x} < 150) = P(z < -2) = F(-2) = 0.0228$$

مثال ۳: وزن افراد جامعه کارکنان شاغل در یک ساختمان اداری بزرگ به طور نرمال با میانگین ۷۵ کیلوگرم و انحراف معیار ۱۰ کیلوگرم توزیع شده است. گروهی تصادفی مرکب از ۲۵ نفر هر صبح وارد آسانسور می‌شوند امید ریاضی و واریانس و انحراف معیار متوسط وزن آنها را بیابید. اگر بار مجاز آسانسور ۲ تن باشد احتمال آن را حساب کنید که وزن این گروه از بار مجاز آسانسور تجاوز کند.

$$x \to N(75, 100)$$

$$E(\bar{x}) = \mu = ۷۵$$

$$\sigma^{۲}_{\bar{x}} = \frac{\sigma^{۲}}{n} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۵}} = ۲$$

چون بار مجاز آسانسور ۲۰۰۰ کیلوگرم است پس میانگین وزن مجاز گروه ۲۵ نفری برابر $\bar{x}_۱ = \frac{۲۰۰۰}{۲۵} = ۸۰$ کیلوگرم می‌باشد.

$$\bar{x}_۱ = ۸۰ \qquad Z_۱ = \frac{\bar{x}_۱ - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{۸۰-۷۵}{۲} = ۲/۵$$

$$P(\bar{x} > ۸۰) = P(z>۲/۵) = ۱ - p(z \le ۲/۵) = ۱ - ۰/۹۹۳۸ = ۰/۰۰۶۲$$

۱۲-۲-۳- توزیع t استیودنت

طبق قضیه حد مرکزی توزیع نمونه‌ای آماره $\bar{x}$ وقتی که حجم نمونه بزرگ باشد $(n>۳۰)$ تقریباً نرمال و توزیع آماره $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ که استاندارد شده $\bar{x}$ می‌باشد تقریباً نرمال استاندارد می‌باشد اگر توزیع جامعه نرمال باشد توزیع $\bar{x}$ همواره نرمال و توزیع z نرمال استاندارد خواهد بود و بستگی به حجم نمونه ندارد.

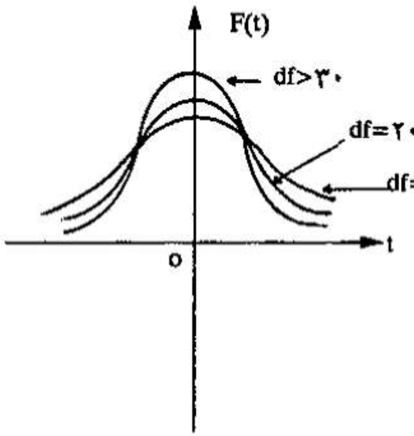
اکنون فرض می‌کنیم که توزیع جامعه نرمال باشد. اگر واریانس جامعه معلوم نباشد در فرمول $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ بجای انحراف معیار مجهول جامعه یعنی σ برآورد کننده آن s یعنی انحراف معیار نمونه را قرار می‌دهیم در اینصورت متغیر جدیدی بصورت $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ خواهیم داشت.

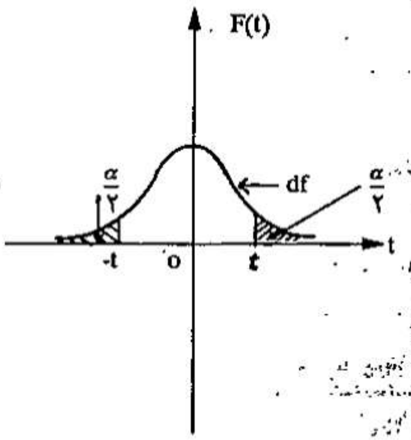
متغیر t از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر خواهد کرد چون هم $\bar{x}$ و هم s تغییر میکند بنابراین t یک متغیر تصادفی می‌باشد که دارای توزیع احتمال می‌باشد که به آن توزیع t استیودنت می‌گویند.

توزیع t به حجم نمونه یعنی n بستگی دارد. به عبارت دیگر توزیع t به پارامتری که آن را درجه آزادی می‌گویند یعنی به $df=n-۱$ بستگی دارد هر قدر درجه آزادی بیشتر شود توزیع t به نرمال استاندارد نزدیکتر می‌شود و هنگامی که حجم نمونه بزرگ باشد توزیع t به توزیع نرمال استاندارد بسیار نزدیک

می‌شود ولی اگر حجم نمونه کوچک باشد منحنی توزیع t کوتاهتر از توزیع نرمال استاندارد خواهد شد.

نظر باهمیتی که توزیع t استیودنت دارد جداولی تنظیم شده است که برای درجات آزادی مختلف یعنی df مقدار t را برحسب مقادیر مختلف α (مساحت زیر منحنی) در اختیار قرار می‌دهد.





مثال: اگر $df = ۲۰$ باشد برای $\alpha = ۰/۱۰$ و $\alpha = ۰/۰۵$ مقدار t را پیدا کنید.

جواب:

$$\begin{cases}\alpha = ۰/۰۵ \\ df = ۲۰\end{cases} \Rightarrow t = ۲/۰۸۶ \qquad \begin{cases}\alpha = ۰/۱۰ \\ df = ۲۰\end{cases} \Rightarrow t = ۱/۷۲۵$$

تبصره ۱- اگر حجم نمونه بزرگ شود یعنی $df \to \infty$ توزیع t استیودنت به توزیع نرمال استاندارد گرایش پیدا می‌کند بنابراین در جدول t استیودنت در سطر آخر $(df = \infty)$ مقادیر جدول t استیودنت با مقادیر جدول نرمال استاندارد تطبیق دارد و در صورت در اختیار نبودن جدول نرمال می‌توان از جدول t استیودنت برای بعضی مقادیر α مقدار z را در سطر آخر جدول پیدا نمود.

تبصره ۲- جدول مورد اشاره جدول دو طرفه می‌باشد یعنی α در دو طرف زیر منحنی t استیودنت به تساوی تقسیم شده است ولی جداولی وجود دارد که یک طرفه می‌باشد یعنی α فقط در سمت راست

منحنی t استیودنت قرار دارد. در استخراج از جدول t استیودنت باید به یکطرفه یا دو طرفه بودن آن توجه نمود.

تبصره ۳ـ توزیع t دارای میانگین $\mu=0$ است یعنی محور قائم محور تقارن آن است. انحراف معیار توزیع t از یک بیشتر است در نتیجه پراکندگی توزیع t از توزیع نرمال استاندارد بیشتر است.

تبصره ۴ـ شرایط توزیع t استیودنت به شرح زیر است:

الف ـ نمونه تصادفی کوچک باشد ($n \le 30$)

ب ـ واریانس جامعه مجهول باشد.

ج ـ توزیع جامعه اصلی نرمال باشد.

۱۲ـ۳ـ توزیع نسبت نمونه‌ای

فرض می‌کنیم جامعه مورد مطالعه یک جامعه دو جمله‌ای باشد. یعنی اعضای جامعه فقط یکی از دو حالت موفقیت و یا عدم موفقیت را بپذیرند (آزمایش برنولی) احتمال موفقیت هر عضوی از جامعه π و احتمال عدم موفقیت آن $1-\pi$ می‌باشد. بنابراین نسبت درصد اعضای موفق در این جامعه π می‌باشد.

اکنون نمونه‌ای تصادفی به حجم n از این جامعه انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد موفقیت در نمونه باشد نسبت درصد اعضای موفق دراین نمونه $p=\frac{X}{n}$ می‌باشد که p نسبت نمونه‌ای می‌باشد چون X در هر نمونه بین صفر و n تغییر می‌کند بنابراین نسبت نمونه بین صفر و یک تغییر می‌کند از این جامعه تمام نمونه‌های ممکن با حجم ثابت n را انتخاب می‌کنیم. بدیهی است نسبت نمونه از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند. چون تعداد اعضای موفق در نمونه یعنی x تغییر می‌کند چون احتمال موفقیت هر عضو نمونه همان احتمال موفقیت هر عضو جامعه یعنی π و احتمال عدم موفقیت آن $1-\pi$ می‌باشد بنابراین امید ریاضی و واریانس x در نمونه‌ها طبق قانون توزیع دو جمله‌ای بصورت زیر خواهد بود.

$$E(x)=n\pi \quad , \quad \sigma_x^2 = Var(x) = n\pi(1-\pi)$$

امید ریاضی و واریانس p یعنی نسبت نمونه‌ای بشرح زیر می‌باشد.

$$E(p)=\pi \quad , \quad \sigma_p^2 = Var(p)=\frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

یعنی میانگین نسبت نمونه‌ای برابر نسبت جامعه یعنی π و واریانس آن برابر $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$ می‌باشد.

اثبات:

$$E(p)=E(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}E(x)=\frac{1}{n}\cdot n\pi=\pi$$

$$\sigma_p^2 = Var(p)=Var(\frac{x}{n})=\frac{1}{n^2}Var(x)=\frac{1}{n^2}\cdot n\pi(1-\pi)=\frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

تبصره: اگر حجم نمونه یعنی n باندازه کافی بزرگ باشد توزیع نمونه‌ای p نرمال و توزیع استاندارد شده آن یعنی $z=\frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$ نرمال استاندارد خواهد بود.

مثال: می‌دانیم که ۲۰٪ از محصولات کارخانه معیوب است. یک نمونه تصادفی به حجم n=۱۰۰ انتخاب می‌کنیم اگر x تعداد اقلام معیوب در این نمونه باشد.

الف ـ امید ریاضی و واریانس x را پیدا کنید.

ب ـ امید ریاضی و واریانس نسبت نمونه‌ای p را پیدا کنید.

ج ـ احتمال آن را حساب کنید که نسبت کالاهای معیوب در نمونه از ۱۰٪ کمتر باشد.

حل: می‌دانیم نسبت جامعه $\pi=0/2$ و حجم نمونه n=۱۰۰ می‌باشد.

الف ـ

$$E(x)=n\pi=100\times 0/2=20 \qquad x=0,1,2,\dots,100$$

$$Var(x)=n\pi(1-\pi)=100\times0/2\times0/8=16 \quad , \quad \sigma_x=4$$

ب ـ

$$E(p)=\pi=0/2 \qquad \sigma_p^2=\frac{\pi(1-\pi)}{n}=\frac{0/2\times0/8}{100}=0/0016$$

ج ـ

$$p_1=0/1 \qquad z_1=\frac{p_1-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}=\frac{0/1-0/2}{\sqrt{\frac{0/2(1-0/2)}{100}}}=-0/25$$

$$p(p<0/1)=p(z<-0/25)=0/0062$$

۱۲ـ۴ـ توزیع تفاضل میانگین‌های نمونه‌ای $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$

یکی از بررسیهای آماری مقایسه میانگین‌های دو جامعه می‌باشد. برای این منظور از هر جامعه یک

نمونه تصادفی مستقل با حجم‌های n_1 و n_2 انتخاب می‌کنیم و میانگین‌های دو نمونه را $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ می‌نامیم. حال آماره $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ را در نظر می‌گیریم و توزیع این آماره را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت اول: حجم دو نمونه بزرگ است $n_1,n_2>30$

اگر نمونه‌های تصادفی مستقل با حجم‌های n_1 و n_2 از دو جامعه با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 انتخاب شوند. توزیع تفاضل میانگین‌های دو نمونه $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ تقریباً نرمال با پارامترهای زیر خواهد بود:

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

و توزیع استاندارد شده $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ یعنی

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

تقریباً نرمال استاندارد می‌باشد.

تبصره ۱ ـ اگر توزیع دو جامعه نرمال باشد توزیع آماره $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ با هر حجمی از نمونه‌ها دقیقاً نرمال و توزیع آماره z یعنی استاندارد شده آماره $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ با هر حجمی از نمونه‌های دقیقاً نرمال استاندارد خواهد بود.

تبصره ۲ ـ اگر واریانس دو جامعه یعنی σ_1^2 و σ_2^2 مجهول باشند و بجای آنها از برآورد کننده‌های s_1^2 و s_2^2 یعنی از واریانس نمونه‌ها استفاده کنیم و اگر حجم نمونه‌ها بزرگ باشد $(n_1,n_2>30)$ در این صورت توزیع آماره

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

تقریباً نرمال استاندارد خواهد بود.

حالت دوم: حجم دو نمونه کوچک است. $n_1 , n_2 \le 30$

در این حالت فرض براینست که توزیع دو جامعه نرمال می‌باشد.

الف ـ واریانسهای دو جامعه یعنی σ_1^2 و σ_2^2 معلوم می‌باشند.

در اینصورت میانگین و واریانس آماره $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ بشرح زیر است:

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

توزیع آماره $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ نرمال و توزیع استاندارد شد آن یعنی

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

نرمال استاندارد خواهد بود:

ب ـ واریانس‌های دو جامعه مجهول می‌باشند

در این صورت بجای σ_1^2 و σ_2^2 از واریانسهای نمونه‌ها یعنی s_1^2 و s_2^2 استفاده می‌کنیم در این صورت متغیر استاندارد z به متغیر t تبدیل خواهد شد.

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

توزیع آماره اخیر از توزیع t استیودنت تبعیت می‌کند.

تبصره ۱ ـ توزیع دو جامعه نرمال و واریانسهای آنها یکسان فرض می‌شود.

تبصره ۲ ـ اگر حجم نمونه‌ها بزرگ باشد می‌توان بجای t از متغیر استاندارد z استفاده نمود.

مثال: از محصولات کارخانه A که دارای متوسط وزن ۴۰۰۰ گرم و انحراف معیار ۳۰۰ گرم می‌باشد یک نمونه تصادفی $n_1=100$ و از محصولات کارخانه B که دارای متوسط وزن ۴۵۰۰ گرم و انحراف معیار ۲۰۰ گرم می‌باشد یک نمونه تصادفی $n_2=50$ انتخاب می‌کنیم. با فرض اینکه این دو نمونه مستقل انتخاب شده‌اند.

مطلوبست: $p(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 600)$

$$z_1 = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{600 - (4500 - 4000)}{\sqrt{\frac{90000}{100} + \frac{40000}{50}}} = 2/42$$

$$p(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 600) = p(z > 2/42) = 1 - p(z \le 2/42) = 1 - F(2/42) = 1 - 0/9922 = 0/0078$$

۱۲-۵- توزیع تفاضل نسبت‌های نمونه‌ای $(p_1 - p_2)$

در مواردی لازم است نسبتهای بین دو جامعه یعنی π_1 و π_2 را مورد مقایسه قرار دهیم. برای این منظور از هر جامعه یک نمونه مستقل و تصادفی با حجم‌های بزرگ n_1 و n_2 انتخاب می‌کنیم و نسبت

این نمونه‌ها را p_1 و p_2 می‌نامیم. اگر تمام نمونه‌های ممکن با حجم‌های ثابت n_1 و n_2 از دو جامعه را انتخاب کنیم تفاضل نسبت‌های این دو نمونه p_1-p_2 یک متغیر تصادفی خواهد بود که دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین و واریانس زیر می‌باشد.

$$E(p_1-p_2) = \mu_{p_1-p_2} = \pi_1-\pi_2$$

$$Var(p_1-p_2) = \sigma^2_{p_1-p_2} = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$

ضمناً متغیر استاندارد شده p_1-p_2 بصورت زیر دارای توزیع تقریبی نرمال استاندارد خواهد بود.

$$Z=\frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$$

۱۲ـ٦ـ توزیع واریانس نمونه‌ای (S^2) ـ توزیع کای دو χ^2

در مباحث توزیع نمونه‌ای تاکنون پیرامون توزیع نمونه‌ای میانگین یعنی $\bar{X}$ و توزیع نمونه‌ای نسبت یعنی p و تفاضل میانگین آنها یعنی $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ و تفاضل نسبت آنها یعنی p_1-p_2 بحث شد ولی سایر آماره‌های دیگر هم در نمونه وجود دارد.

مثلاً در یک نمونه به حجم n از جامعه‌ای با توزیع نرمال و با واریانس σ^2 آماره $S^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ وجود دارد که از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند. برای بررسی نحوه توزیع آماره S^2 آماره جدیدی را که مضرب ثابتی از S^2 می‌باشد بشرح زیر معرفی می‌کنیم.

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \text{یا} \quad \chi^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

این آماره جدید که کای دو (χ^2) نام دارد از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند چون S^2 تغییر می‌کند. توزیع کای دو بستگی به حجم نمونه یعنی n یا بستگی به درجه آزادی یعنی $df=n-1$ دارد. با تغییر حجم نمونه شکل توزیع χ^2 فرق می‌کند. اگر n زیاد شود توزیع کای دو به سمت توزیع گرایش نرمال می‌یابد.

الف ـ توزیع χ^2 برخلاف توزیع‌های نرمال و t استیودنت متقارن نیست.

مجموعه مسائل نظریه نمونه‌ها

۱ـ از جامعه ۳و۲و۱ = x و $f(x)=\frac{1}{3}$ تمام نمونه‌های تصادفی ۳ تائی ممکن را با جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف ـ میانگین و واریانس جامعه را حساب کنید.

ب ـ جدول توزیع $\bar{x}$ نمونه‌های سه‌تایی فوق را تشکیل دهید و $E(\bar{x})$ و $Var(\bar{x})$ را حساب کنید.

ج ـ مقادیر بدست آمده از بندهای الف و ب را مقایسه کنید.

جواب: $E(x)=2$ و $\sigma_x^2=\frac{2}{3}$ و $E(\bar{x})=2$ و $\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{2}{9}$

۲ـ متغیر تصادفی x با توزیع احتمال زیر مفروض است.

x	۰	۱	۲
p(x)	۰/۷	۰/۲	۰/۱

الف ـ میانگین و انحراف معیار جامعه را بدست آورید.

ب ـ جدول توزیع $\bar{x}$ را برای نمونه‌های تصادفی با حجم n=۲ بنویسید.

ج ـ میانگین و انحراف $\bar{x}$ را حساب کنید و نشان دهید که $\mu_{\bar{x}}=\mu_x$ و $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

جواب: $E(x)=0/4$ و $\sigma_x=0/66$ و $E(\bar{x})=0/4$ و $\sigma_{\bar{x}}=0/47$

۳ـ متغیر x دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ و انحراف معیار ۴ می‌باشد، یک نمونه ۶۴تایی از مقادیر x به تصادف انتخاب می‌شود: مطلوب است احتمال آنکه $\bar{x}$ یعنی میانگین نمونه‌ای

الف) از ۲۴ بیشتر شود　　ب) از ۲۵/۵ بیشتر شود

ج) بین ۲۶،۲۴/۵ قرار گیرد　　د) از ۲۳ کمتر شود

جواب: الف) ۰/۹۷۷۲　ب) ۰/۱۶　ج) ۰/۸۱۸　د) صفر

۴ـ در دانشگاه مشخصی، دانشجویی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، فرض می‌کنیم X میانگین نمرات این دانشجو باشد، می‌دانیم X دارای توزیع نرمال با میانگین ۲/۵ و انحراف معیار ۰/۴ می‌باشد، اگر نمونه‌ای ۳۶ تایی از دانشجویان این دانشگاه را انتخاب کنیم مطلوب است:

احتمال آنکه میانگین حاصل از این نمونه در فاصله ۲/۷−۲/۴ قرار گیرد.

جواب: ۰/۹۳۱

۵ـ از بین کیسه‌های برنج که متوسط وزن آنها ۲۵ کیلوگرم و واریانس آنها ۴ و توزیع نرمال دارند، ۱۶ کیسه را بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه میانگین وزن ۱۶ کیسه انتخاب شده بین ۲۵/۵−۲۴ باشد.

جواب: ۰/۸۱۸

۶ـ وزن بسته‌هایی که توسط یک ماشین بسته‌بندی می‌شوند، بطور نرمال با میانگین ۲۵۰ گرم و با انحراف معیار ۲۰ گرم توزیع می‌شوند. احتمال آنکه ۱۶ بسته توسط این ماشین دارای متوسط وزنی کمتر از ۲۴۰ گرم باشد، چقدر است؟

جواب: ۰/۰۲۲۸

۷ـ تخمین نسبت کنتورهای آب منازل که باید در آینده عوض شوند $\pi=0/4$ است. یک نمونه تصادفی به حجم n=۶۴ کنتور را انتخاب کرده‌ایم:

الف ـ میانگین و انحراف معیار توزیع نمونه‌ای p را حساب کنید.

ب ـ با استفاده از تقریب نرمال و بدون تصحیح پیوستگی احتمال آن را حساب کنید که $p>0/35$ و یا p حداکثر در فاصله ۰/۰۵± از نسبت جامعه (π) قرار گیرد.

جواب: الف) ۰/۴ و ۰/۰۶　ب) ۰/۷۹۶۷ و ۰/۵۹۳۴

۸ـ در یک نمونه n=۵۰ تائی از کودکان یک دبستان چقدر احتمال دارد که بیش از ٪۶۰ آنها پسر باشند.

جواب: بدون تصحیح پیوستگی ۰/۰۷۹۳ و با تصحیح پیوستگی ۰/۰۵۹۴

۹ـ از جامعه‌ای با میانگین $\mu_1=6/5$ و انحراف معیار $\sigma_1=0/9$ یک نمونه تصادفی $n_1=36$ و از جامعه دیگری با میانگین $\mu_2=6$ و انحراف معیار $\sigma_2=0/8$ یک نمونه تصادفی $n_2=49$ تائی و مستقل از نمونه اول انتخاب کرده‌ایم. مطلوبست محاسبه $p(\bar{x}_1-\bar{x}_2>1)$

جواب: ۰/۰۰۴

۱۰ـ اگر X دارای توزیع نرمال با واریانس $\sigma^2=\frac{10}{3}$ باشد. احتمال آنکه واریانس یک نمونه تصادفی ۱۱ تائی از این جامعه بزرگتر از ۸/۴ باشد چقدر است؟

جواب: ۰/۰۰۵

۱۱ـ احتمال اینکه یک نمونه تصادفی ۲۵ تائی از یک جامعه نرمال با واریانس $\sigma^2=6$ دارای واریانس S^2

ضمیمه ۳

جداول آماری

جدول شماره ۱

جدول توزیع احتمال دو جمله‌ای

LOI BINOMIALE : Table (à triple entrée) des probabilités

$$P(X \leqslant c) = \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

	c \ p	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
n=2	0	.902	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.002
	1	.997	.990	.960	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190	.097
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=3	0	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000
	1	.993	.972	.896	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028	.007
	2	1.000	.999	.992	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271	.143
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=4	0	.815	.656	.410	.240	.130	.063	.026	.008	.002	.000	.000
	1	.986	.948	.819	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004	.000
	2	1.000	.996	.973	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052	.014
	3	1.000	1.000	.998	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344	.185
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=5	0	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000
	1	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000
	2	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001
	3	1.000	1.000	.993	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081	.023
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=6	0	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000
	2	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000
	3	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002
	4	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=7	0	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.577	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000	.000
	2	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000
	3	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000
	4	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004
	5	1.000	1.000	1.000	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150	.044
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522	.302
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=8	0	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.943	.813	.503	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000
	2	.994	.962	.797	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000	.000
	3	1.000	.995	.944	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000	.000
	4	1.000	1.000	.990	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005	.000
	5	1.000	1.000	.999	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038	.006
	6	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187	.057
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570	.337
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=9	0	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.929	.775	.436	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000
	2	.992	.947	.738	.463	.232	.090	.025	.004	.000	.000	.000
	3	.999	.992	.914	.730	.483	.254	.099	.025	.003	.000	.000
	4	1.000	.999	.980	.901	.733	.500	.267	.099	.020	.001	.000
	5	1.000	1.000	.997	.975	.901	.746	.517	.270	.086	.008	.001
	6	1.000	1.000	1.000	.996	.975	.910	.768	.537	.262	.053	.008
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.564	.225	.071
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.866	.613	.370
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=10	0	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000
	2	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000
	3	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000
	4	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000
	5	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000
	6	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001
	7	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

جدول شماره ۲

جدول توزیع احتمال پواسون (ساده)

LOI DE POISSON : Table (à double entrée) des probabilités

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^{k}/k!$$

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000								
0.2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000							
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0002	0,0000							
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0.0000						
0.5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000						
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000						
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000					
0,8	0,4493	0.3595	0,1438	0,0383	0,0077	0.0012	0,0002	0,0000					
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000					
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000				
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000				
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000				
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000			
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0.0000			
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000			
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000			
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0081	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000		
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000		
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000		
2.0	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000		
2.2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0.0000	
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000
3,0	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001
3,2	0,0408	0,1304	0,2087	0,2226	0,1781	0,1140	0,0608	0,0278	0,0111	0,0040	0,0013	0,0004	0,0001
3,4	0,0334	0,1135	0,1929	0,2186	0,1858	0,1264	0,0716	0,0348	0,0148	0,0056	0,0019	0,0006	0,0002
3,6	0,0273	0,0984	0,1771	0,2125	0,1912	0,1377	0,0826	0,0425	0,0191	0,0076	0,0028	0,0009	0,0003
3,8	0,0224	0,0850	0,1615	0,2046	0,1944	0,1477	0,0936	0,0508	0,0241	0,0102	0,0039	0,0013	0,0004
4,0	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006
5,0	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034
6,0	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0688	0,0413	0,0225	0,0113
7,0	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490	0,1490	0,1304	0,1014	0,0710	0,0452	0,0264
8,0	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481
9,0	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607	0,0911	0,1171	0,1318	0,1318	0,1186	0,0970	0,0728
10,0	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948

جدول شماره ۳

جدول توزیع احتمال پواسون (تجمعی)

$\sum_{r=0} p(r:\mu)$ توزیع پواسن

r	μ 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

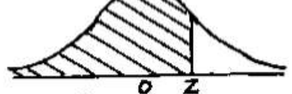
r	μ 1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

ادامه جدول توزیع احتمال پواسون (تجمعی)

ادامه جدول توزیع پواسن $\sum p(x:\mu)$

r	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

جدول شماره ۴



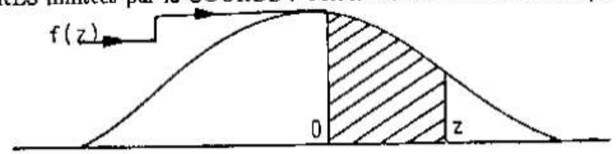
جدول توزیع احتمال نرمال استاندارد (تجمعی)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4362	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول شماره ۵

جدول توزیع احتمال نرمال استاندارد

AIRES limitées par la COURBE NORMALE STANDARDISEE (de 0 à Z)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

جدول شماره ٦

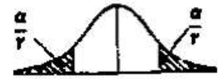
جدول معنی‌دار بودن r برای ۰/۰۱ و ۰/۰۵

درجهٔ آزادی	۰/۰۵	۰/۰۱
۱	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰
۲	۰/۹۵۰	۰/۹۹۰
۳	۰/۸۷۸	۰/۹۵۹
۴	۰/۸۱۱	۰/۹۱۷
۵	۰/۷۵۴	۰/۸۷۴
۶	۰/۷۰۷	۰/۸۳۴
۷	۰/۶۶۶	۰/۸۹۸
۸	۰/۶۳۲	۰/۷۶۵
۹	۰/۶۰۲	۰/۷۳۵
۱۰	۰/۵۷۶	۰/۷۰۸
۱۱	۰/۵۵۳	۰/۶۸۴
۱۲	۰/۵۳۲	۰/۶۶۱
۱۳	۲/۴۱۴	۰/۶۴۱
۱۴	۰/۴۹۷	۰/۶۲۳
۱۵	۰/۴۸۲	۰/۶۰۶
۱۶	۰/۴۶۸	۰/۵۹۰
۱۷	۰/۴۵۶	۰/۵۷۵
۱۸	۰/۴۴۴	۰/۵۶۱
۱۹	۰/۴۳۳	۰/۵۴۹
۲۰	۰/۴۲۳	۰/۵۳۷
۲۱	۰/۴۱۳	۰/۵۲۶
۲۲	۰/۴۰۴	۰/۵۱۵
۲۳	۰/۳۹۶	۰/۵۰۵

درجهٔ آزادی	۰/۰۵	۰/۰۱
۲۴	۰/۳۸۸	۰/۴۹۶
۲۵	۰/۳۸۱	۰/۴۸۷
۲۶	۰/۳۷۴	۰/۴۷۸
۲۷	۰/۳۶۷	۰/۴۷۰
۲۸	۰/۳۶۱	۰/۴۶۳
۲۹	۰/۳۵۵	۰/۴۵۶
۳۰	۰/۳۴۹	۰/۴۴۹
۳۵	۰/۳۲۵	۰/۴۱۸
۴۰	۰/۳۰۴	۰/۳۹۳
۴۵	۰/۲۸۸	۰/۳۷۲
۵۰	۰/۲۷۳	۰/۳۵۴
۶۰	۰/۲۵۰	۰/۳۲۵
۷۰	۰/۲۳۲	۰/۳۰۲
۸۰	۰/۲۱۷	۰/۲۸۳
۹۰	۰/۲۰۵	۰/۲۶۷
۱۰۰	۰/۱۹۵	۰/۲۵۴
۱۲۵	۰/۱۷۴	۰/۲۲۸
۱۵۰	۰/۱۵۹	۰/۲۰۸
۲۰۰	۰/۱۳۸	۰/۱۸۱
۳۰۰	۰/۱۱۳	۰/۱۴۸
۴۰۰	۰/۰۹۸	۰/۱۲۸
۵۰۰	۰/۹۸۸	۰/۱۱۵
۱۰۰۰	۰/۰۱۲	۰/۰۸۱

جدول شماره ۷

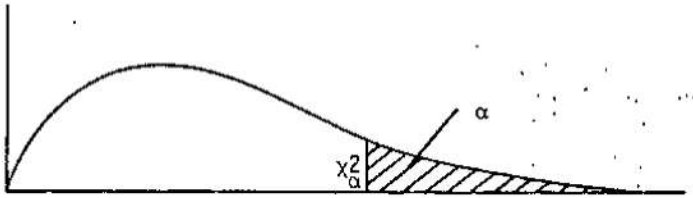
جدول توزیع احتمال t استیودنت

df						
		سطح معنی‌دار در آزمونهای یک دامنه				
	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
	 $\frac{\alpha}{۲}+\frac{\alpha}{۲}=\alpha$	سطح معنی‌دار در آزمونهای دو دامنه				
	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.065	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.706	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

جدول شماره ۸

جدول توزیع احتمال کای‌دو χ^2

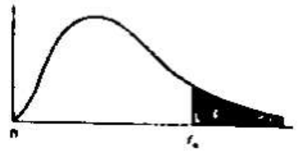
VALEURS de la DISTRIBUTION χ^2



ν	$\chi_{0.005}$	$\chi_{0.01}$	$\chi_{0.025}$	$\chi_{0.05}$	$\chi_{0.10}$	$\chi_{0.25}$	$\chi_{0.50}$	$\chi_{0.75}$	$\chi_{0.90}$	$\chi_{0.95}$	$\chi_{0.975}$	$\chi_{0.99}$	$\chi_{0.995}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.00
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0506	0.0201	0.01
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

جدول شماره ۹

جدول احتمال توزیع F



مقادیر $F_{0.05,\nu_1,\nu_2}$

درجهٔ آزادی صورت = ν_1

درجهٔ آزادی مخرج = ν_2

ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	[illegible]
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	[illegible]
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	[illegible]
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	[illegible]
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	[illegible]
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	[illegible]
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	[illegible]
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	[illegible]
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	[illegible]
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	[illegible]
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	[illegible]
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	[illegible]
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	[illegible]
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	[illegible]
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	[illegible]
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	[illegible]
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	[illegible]
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	[illegible]
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	[illegible]
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	[illegible]
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	[illegible]
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	[illegible]
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	[illegible]
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	[illegible]
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	[illegible]
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	[illegible]
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	[illegible]
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	[illegible]
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	[illegible]
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	[illegible]

ادامه جدول توزیع احتمال F

مقادیر $F_{0.01,\nu_1,\nu_2}$

درجهٔ آزادی صورت = ν_1

ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	[illegible]
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00