بسم الله الرحمن الرحیم

توابع چند متغیره

یک متغیره $y = f(x)$ $\longleftarrow$ $S_{\square} = x^2$

مکعب $V = x^3$

دو متغیره $z = f(x,y)$ $S = xy = S(x,y)$ مستطیل

سه متغیره $w = f(x,y,z)$ $V = \pi r^2 h = V(r,h)$ استوانه

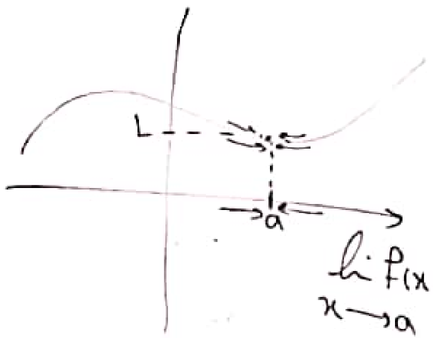
مکعب مستطیل $V = xyz$

Scanned with CamScanner

حد توابع چند متغیره

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. اگر وقتی نقطه (x,y) از هر مسیری در صفحه xy به نقطه (a,b) نزدیک شود $f(x,y)$ به عدد L نزدیک گردد، گوییم حد تابع f در نقطه (a,b) برابر L است.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$



$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}=\frac{0-1+5}{0+1+2}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x+2}{\sqrt{y}}=\frac{0+2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

بسم الله الرحمن الرحیم

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \frac{0}{0} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)} = \frac{2}{3}$$

مثال. پیوستگی را در نقطه $(1,1)$ بررسی کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x^3-y^3} & (x,y)\neq(1,1)\\[2mm] 0 & (x,y)=(1,1)\end{cases}\qquad f(1,1)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-xy}{x^3-y^3}=\lim\frac{x(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{1}{3}\neq 0$$

پیوسته نیست.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-y-2x+2}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{y(x-1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\cancel{(x-1)}(y-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{-1}{2}$$

پیوستگی: تابع f را در (a,b) پیوسته گویند هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$$

بسم الله الرحمن الرحیم

مشتق های جزئی از توابع چند متغیره

مثال: مشتق های جزئی مرتبه اول توابع زیر را بدست آورید.

مشتق f نسبت به $x \rightarrow f_x$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

$f(x,y) = x^2y^3 + 2xy - 2$

$f_x = 2xy^3 + 2y$

$f_y = 3y^2x^2 + 2x$

مشتق جزئی مراتب بالاتر:

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

اولین بار از x، دومین بار از y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

اول y دوم x

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}$$

$$f(x,y) = x \sin y + 2x^2 y$$

$$f_x = \sin y + 4xy$$

$$f_y = x \cos y + 2x^2$$

$$f(x,y) = \sin y + 3x^4 y^5 + \cos x$$

$$f_x = 12x^3 y^5 - \sin x$$

$$f_y = \cos y + 15 y^4 x^4$$

بسم الله الرحمن الرحيم

1) $f(x,y) = ۴x^{۳}y^{۲}$

$f_x = ۱۲x^{۲}y^{۲}$

$f_{xx} = ۲۴xy^{۲}$

$f_{xy} = ۲ \quad {}^{۲}y$

f_{xy} $\quad$ f_{xx}

اللي عندي

!

$e^{u} \to u' e^{u}$

$f(x,y) = e^{۳x+۴y} + ۳xy^{۲}$

$f_y = ۴e^{۳x+۴y} + ۶xy$

$f_{yy} = ۱۶e^{۳x+۴y} + ۶x$

$f_{yx} = ۱۲e^{۳x+۴y} + ۶y$

f_{yy}

f_{yx}

$$f(x,y)=\ln(2x-3y) \qquad \underset{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}}{f_{yx}} \qquad \underset{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f_{xx}} \qquad \underset{\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}}{f_{xy}} \qquad \underset{\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}}{f_{yy}}$$

$$\ln u \longrightarrow \frac{u'}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-3}{2x-3y} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{-2(-3)}{(2x-3y)^2}=\frac{+6}{(2x-3y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{2x-3y} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}=\frac{0-\overset{-4}{2(2)}}{(2x-3y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{0-(-3)(2)}{(2x-3y)^2}=\frac{+6}{(2x-3y)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=\frac{0-(-3)(-3)}{(2x-3y)^2}=\frac{-9}{(2x-3y)^2}$$

اول x دوم

$$f(x,y)=xe^{y}-ye^{x} \qquad f_{yx} \qquad f_{xy} \qquad f_{xx}$$

$$f_x=e^{y}-ye^{x} \qquad f_y=xe^{y}-e^{x}$$

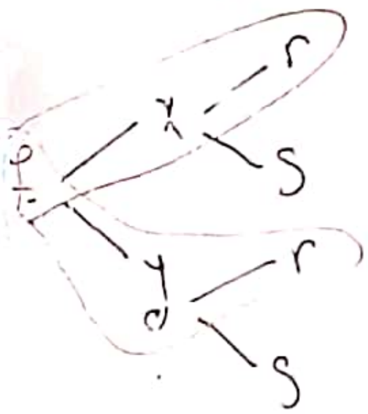
$$f_{xx}=-ye^{x} \qquad f_{yx}=e^{y}-e^{x}$$

$$f_{xy}=e^{y}-e^{x}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

قاعده زنجیره‌ای:

$$z = f(x,y) \qquad \begin{cases} x = g(r,s) \\ y = h(r,s) \end{cases}$$



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$z = \sin(x^2 y)$$

$$x = \sqrt{t}$$

$$y = t^2$$

$$\frac{dz}{dt}$$

$$z \begin{cases} x \to t \\ y \to t \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \cancel{2} t^2 \cancel{\sqrt{t}} \cos t^3 \times \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{t}}} + t \cos t^3 \cdot 2t$$

$$= 3t^2 \cos t^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \cos(x^2 y) = 2\sqrt{t} \cdot t^2 \cos(t \cdot t^2)$$

$$= 2t^2 \sqrt{t} \cos t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos x^2 y = t \cos t^3$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$