

# آزمایشات فاکتوریال "Factorial Experiments"

آزمایشات فاکتوریال: یک فاکتور یا مقدار متغیرت بر روی مرورد  
آزمایشات چند فاکتوریال: چند فاکتور عامل هر کدام در مقدار مختلف بطور همزمان مطالعه میشوند

A:  $a_1$   $a_2$   $a_3$

B:  $b_1$   $b_2$

C:  $c_1$   $c_2$   $c_3$

T:  $A \times B \times C$

$$3 \times 2 \times 3 = 18$$

مثال:

انواع آزمایشات فاکتوریال:

۱. سطوح یک فاکتور یکبارین

$$k^n : k \text{ سطوح}, n \text{ فاکتور}$$

$$5^2 \rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=5 \end{cases} \quad 5 \times 5 = 25$$

$$3^3 \rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=3 \\ C=3 \end{cases} \quad 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^4 \rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=3 \\ C=3 \\ D=3 \end{cases} \quad 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

A B C

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

۲. سطوح فاکتور یکبارین متبذ

نامش به روش توانی وجود ندارد

عزیمت کردن است تا فاکتورهای  
 تعیین بهترین سطح هر فاکتور  
 - تعیین اثر متقابل فاکتورهای فاکتور  
 "interaction"

تأثیر افزودن مقدار A بر عملکرد محصول

مقدار A			
0.1%	0.5%	افزودن	اثر فاکتور
1000	1400	→ 0.4% → 400	

مقدار B			
0.1%	0.5%	افزودن	اثر فاکتور
800	1400	→ 0.4% → 600	

مقدار 0.4% A  
 مقدار 0.4% B  
 → 400 + 600 = 1000  
 انتظار

اما ممکن است

800 یا 1200

سایر مثالها

فهم اثر متقابل

	$a_1$	$a_2$	$a_2 - a_1$
$b_1$	30	32	2
$b_2$	36	44	8
$b_2 - b_1$	6	12	

← اثر ساده A در  $b_1$

← اثر ساده A در  $b_2$

$$\frac{8+2}{2} = 5$$

اثر اصلی A

اثر ساده B در  $a_1$       اثر ساده B در  $a_2$

simple effect

Main effect

$$\frac{6+12}{2} = 9 \quad \text{اثر اصلی B}$$

می‌توانیم اثرات ساده اثر اصلی را پیدا کنیم

و اهداف نه

$$a_1 \rightarrow a_2 \quad 2$$

$$b_1 \rightarrow b_2 \quad 6$$

$$a_1 b_1 \rightarrow a_2 b_2 \quad 8 \rightarrow ?$$

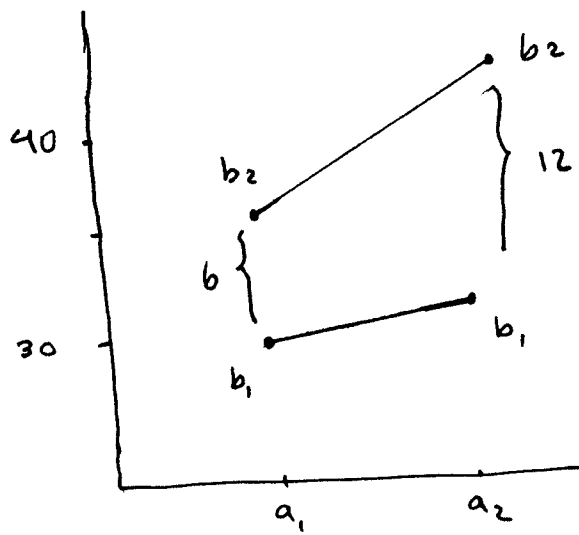
استفاده

تفاوت اثرات ساده = اثر متقابل

$$8 - 2 = 6 \quad \text{اثر متقابل AB}$$

$$12 - 6 = 6 \quad \text{اثر متقابل BA}$$

نمایش اثر متقابل بعورت هفتی



حالت دوم

	$a_1$	$a_2$	$a_2 - a_1$
$b_1$	30	32	2
$b_2$	36	38	2
$b_2 - b_1$	6	6	

$$\frac{2+2}{2} = 2$$

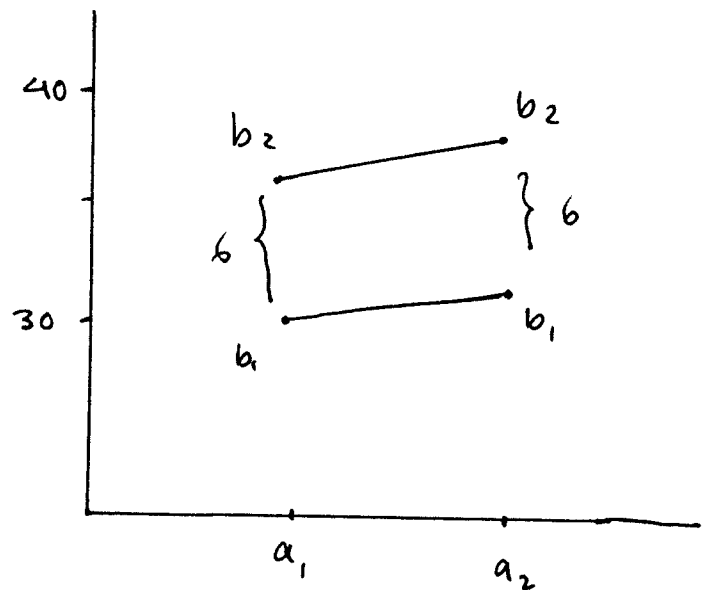
$$\frac{6+6}{2} = 6$$

$$a_1 \rightarrow a_2 \quad 2$$

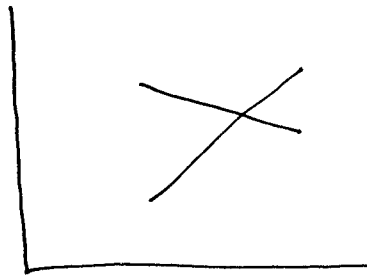
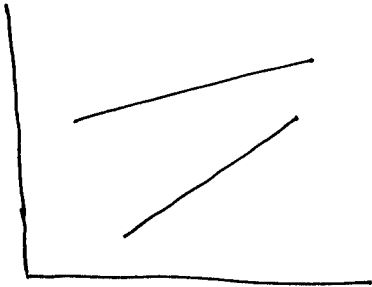
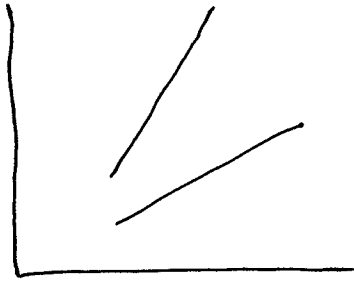
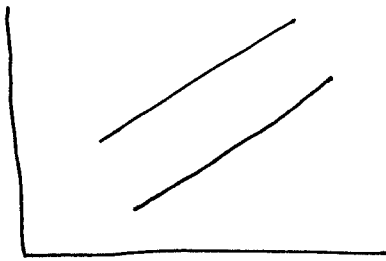
$$b_1 \rightarrow b_2 \quad 6$$

$$a_1 b_1 \rightarrow a_2 b_2 \quad 8 \rightarrow ?$$

(نقطه)



حالت های مختلف اثر متقابل



اجرای آزمایشات فاکتوریال

تعیین فاکتورهای آزمایش ← تعیین سطح فاکتورهای آزمایش ← تعیین تعداد تکرارهای آزمایش ← اجرای آزمایشات

$$3 \times 4 = 12$$

$$A = 3$$

$$B = 4$$

$$A, B$$

آزمایشات فاکتوریال در قالب یکی از طرح های زیر اجرا می شوند

A:  $a_1, a_2$

→  $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$

B:  $b_1, b_2$

تکرار	$a_1b_1$	$a_1b_2$	$a_2b_1$	$a_2b_2$
1				
2				
3				
4				
مجموع				

$$\text{تعداد بار} = A \times B$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$\text{تعداد تکرار} = 4 \times 4 = 16$$

S.O.V	df	SS
$\bar{F}$	4-1=3:	
A	1	
B	1	
AB	1	
خطا	12	
کل	16-1=15	

$$df_{AB} = df_A \times df_B$$

$$df_{\bar{F}} = df_A + df_B$$

A	2	طرح سیدکامل
B	2	
C	2	۳ سید

$$A \times B \times C$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ } \bar{F}$$

$$8 \times 3 = 24 \text{ نمره}$$

A	2	طرح سیدکامل
B	2	
C	2	۳ سید
D	2	

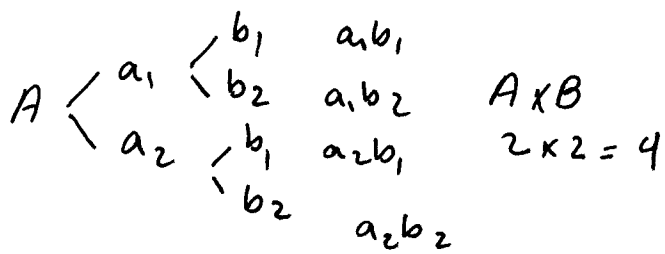
$$A \times B \times C \times D$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ } \bar{F}$$

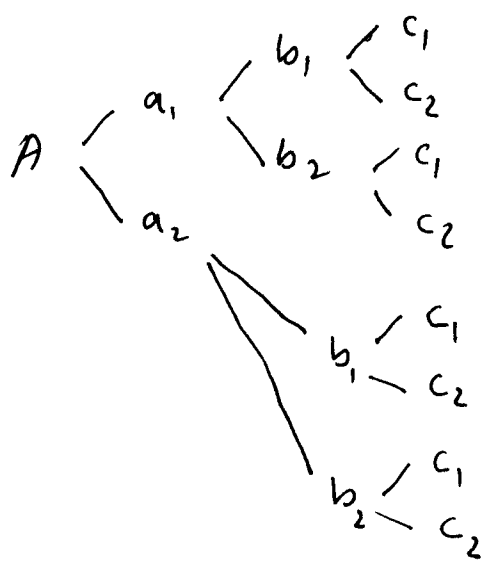
$$16 \times 3 = 48 \text{ نمره}$$

S.O.V.	df
$\bar{F}$	15:
A	1
B	1
C	1
D	1
AB	1
AC	1
AD	1
BC	1
BD	1
CD	1
ABC	1
ABD	1
ACD	1
BCD	1
ABCD	1
خطا	32

S.O.V	df	SS
سید	2	
$\bar{F}$	7:	
A	1	
B	1	
C	1	
AB	1	
AC	1	
BC	1	
ABC	1	
خطا	14	
کل	23	



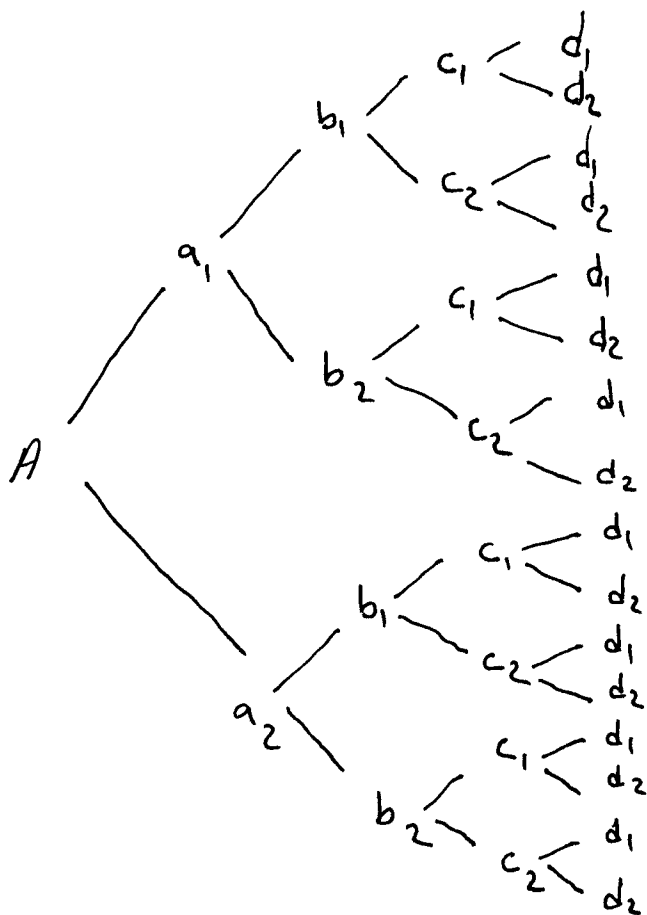
نمودار درختی



$a_1b_1c_1$   
 $a_1b_1c_2$   
 $a_1b_2c_1$   
 $a_1b_2c_2$   
 $a_2b_1c_1$   
 $a_2b_1c_2$   
 $a_2b_2c_1$   
 $a_2b_2c_2$

$A \times B \times C$

$2 \times 2 \times 2 = 8$



$a_1b_1c_1d_1$   
 $a_1b_1c_1d_2$   
 $a_1b_1c_2d_1$   
 $a_1b_1c_2d_2$   
 $a_1b_2c_1d_1$   
 $a_1b_2c_1d_2$   
 $a_1b_2c_2d_1$   
 $a_1b_2c_2d_2$   
 $a_2b_1c_1d_1$   
 $a_2b_1c_1d_2$   
 $a_2b_1c_2d_1$   
 $a_2b_1c_2d_2$   
 $a_2b_2c_1d_1$   
 $a_2b_2c_1d_2$   
 $a_2b_2c_2d_1$   
 $a_2b_2c_2d_2$

$A \times B \times C \times D$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$
1	a	b	ab

$a_1 b_1 c_1$	$a_2 b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_2 b_2 c_1$	$a_2 b_1 c_2$	$a_1 b_2 c_2$	$a_2 b_2 c_2$	$a_1 b_1 c_2$
1	a	b	ab	ac	bc	abc	c

مثال: در آزمایش اثرات درفاکتور A و B هر کدام در دو سطح در قالب طرح فاکتوریل با ۵ تکرار یکباره است. طرح را تجزیه و تحلیل نموده و میانگین‌ها را مقایسه کنید.

A	$\begin{cases} a_1 \\ a_2 \end{cases}$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$
B	$\begin{cases} b_1 \\ b_2 \end{cases}$	1	b	a	ab

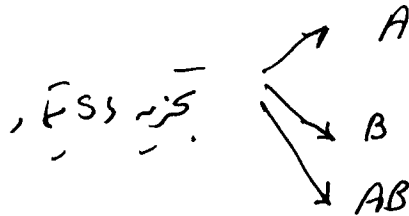
تکرار	1	a	b	ab	
1	8.53	39.14	17.53	32.00	
2	20.53	26.20	21.07	23.80	
3	12.53	31.33	20.80	28.87	
4	14.00	45.80	17.33	25.56	
5	10.80	40.20	20.07	29.83	
مجموع	66.39	182.67	96.80	139.06	484.92



$$\mu' SS = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 8.53^2 + \dots + 29.03^2 - \frac{(484.92)^2}{20} = 1919.33$$

$$\mu' SS = \frac{1^2 + a^2 + b^2 + ab^2}{r} - CF = \frac{66.39^2 + \dots + 139.06^2}{5} - 11757.37 = 1539.41$$

$$\mu' SS = \mu' SS - \mu' SS = 1919.33 - 1539.41 = 379.92$$



$$SS_A = \frac{A_1^2 + A_2^2}{b \times r} - CF$$

	$b_1$	$b_2$	$\Sigma$
$a_1$	66.39	96.80	163.19
$a_2$	182.67	139.06	321.73
$\Sigma$	249.06	235.86	484.92

$$SS_A = \frac{163.19^2 + 321.73^2}{10} - CF = 1256.75$$

$$SS_B = \frac{B_1^2 + B_2^2}{a \times r} - CF$$

$$SS_B = \frac{249.06^2 + 235.86^2}{10} - CF = 8.71$$

$$SS_{AB} = \frac{a_1 b_1^2 + a_1 b_2^2 + a_2 b_1^2 + a_2 b_2^2}{r} - CF - SS_A - SS_B$$

$$SS_{AB} = \frac{66.39^2 + \dots + 139.06^2}{5} - 11757.37 - 1256.75 - 8.71 = 273.95$$

ANOVA				
S.O.V	df	SS	MS	F
$\bar{F}_-$	3:	1539.41	513.13	21.60
A	1	1256.75	1256.75	52.91
B	1	8.71	8.71	0.4
AB	1	273.95	273.95	11.5
خطا	16	23.75	23.75	
کل	19	1919.33	—	

$$F \nearrow 3, 16 \\ \searrow 5\% = 3.24$$

$$F \nearrow 3, 16 \\ \searrow 1\% = \cancel{4.59} = 5.29$$

$$F \nearrow 1, 16 \\ \searrow 5\% = 4.49$$

$$F \nearrow 1, 16 \\ \searrow 1\% = 8.52$$

مقایسه میانگین ها:

$$LSD = \sqrt{\frac{2MS_{خطا}}{r}} \times t = \sqrt{\frac{2 \times 23.75}{5}} \times 2.921 = 9$$

$$t \nearrow df=16 \\ \searrow \alpha = 1\% = 2.921$$

LSD	1	b	ab	a	$\bar{F}_-$
9	13.27	19.36	27.81	36.53	$\bar{X}$

بهترین ترکیب:  $a_1 b_1 < a_1 b_2 < a_2 b_2 < a_2 b_1$