بسم الله الرحمن الرحیم

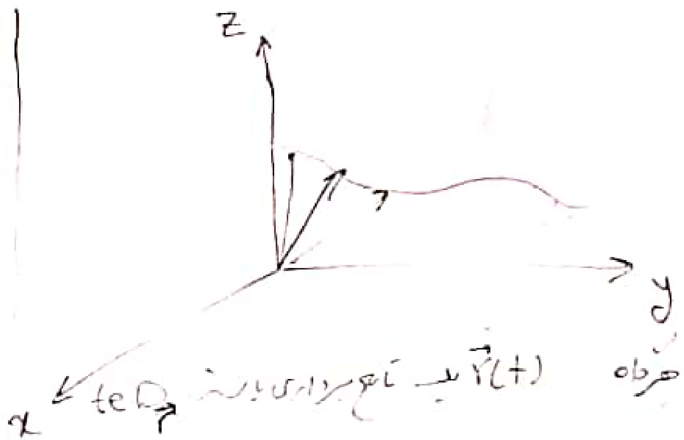
توابع برداری: فرض کنید توابع f و g و h توابعی از متغیر (حقیقی) t باشند، روی یک دامنه مشترک. آنگاه

تابع $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ را یک تابع برداری می‌نامند.

مجموعه نقاط

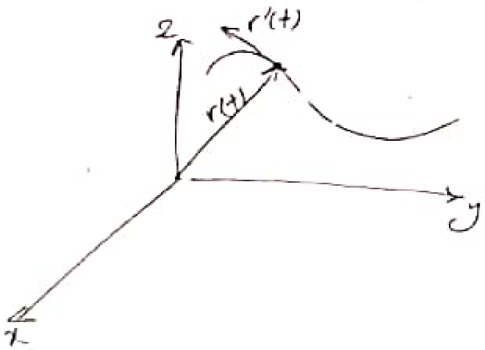
نمودار تابع برداری: به ازای هر t هرگاه ابتدای بردار را مبدأ مختصات و انتهای آن را $\vec{r}(t)$

در نظر بگیریم. این منحنی جهت‌دار مانند C در فضا به وجود می‌آید. این منحنی را تابع برداری می‌نامند.



مشتق توابع برداری: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری باشد $t \in D_r$ درصورت وجود $\lim_{h \to 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{h}$ گوئیم تابع $r(t)$ در t مشتق‌پذیر است. و مقدار این حد برابر است با $r'(t)$

تعبیر هندسی: از نظر هندسی بردار $r'(t)$ را می‌توان بردار مماس بر منحنی در لحظه t در نظر گرفت



هرگاه برای تابع $r(t)=f(t)i+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

$$r'(t)=f'(t)i+g'(t)\vec{j}+h'(t)\vec{k}$$

مثال. مشتق اول و دوم تابع برداری $\vec{r}(t)=\sin 2t\,\vec{i}+\cos 3t\,\vec{j}+t^2\vec{k}$ را بدست آورید

$$\vec{r}\,'(t)=2\cos 2t\,\vec{i}-3\sin 3t\,\vec{j}+2t\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,''(t)=-4\sin 2t\,\vec{i}-9\cos 3t\,\vec{j}+2\vec{k}$$

مثال. بردار مماس بر منحنی $r(t)=2t\,i+t^2 j+t^3 k$ در نقطه نظیر $t=1$ را بدست آورید.

$$\vec{r}\,'(t)=2\vec{i}+2t\,\vec{j}+3t^2\,\vec{k}$$

$$r'(1)=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k} \qquad \langle 2,2,3\rangle$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $\vec{r}(t)=(t-1)\vec{i}+t^2\vec{j}+\frac{t+1}{t}\vec{k}$ را در نقطه نظیر $t=1$ بدست آورید

$$r'(t)=1\vec{i}+2t\vec{j}+\frac{t-1(t+1)}{t^2}k$$

نقطه داده

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

بردار هادی

$$r'(1)=1i+2j+\frac{1-(2)}{1}k=1i+2j-k$$

مؤلفه های بردار هادی (بردار موازی) ← بردار مماس

نقطه

$$r(1)=0i+1j+2k$$

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

مشتق توابع برداری زیر را بدست آورید

الف) $r(t)=\sin(t^2)\,i+\sqrt{t}\,j+e^{5t-1}k$ $\qquad e^u\to u'e^u$

$$2t\cos(t^2)\,i+\frac{1}{2\sqrt{t}}\,j+5e^{5t-1}k$$

ب) $r(t)=\frac{t}{t+1}i+\sqrt{2t-1}\,\vec{j}+(t-1)^3k$

$$r'(t)=\frac{(1)(t+1)-(1)(t)}{(t+1)^2}i+\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}j+(3)(1)(t-1)^2k$$

بسم الله الرحمن الرحیم

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $r(t)=\sqrt{2t-1}\,\vec{i}+\sqrt{t}\,\vec{j}+2t\,k$ را در نقطه نظیر $t=1$ بدست آورید.

$$r'(t)=\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}\vec{i}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{j}+2K$$

$$r'(1)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1}}\vec{i}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\vec{j}+2K=\vec{1i}+\frac{1}{2}\vec{j}+2K$$ بردار مماس هم راستای خط

نقطه

$$r(1)=\sqrt{1}\,\vec{i}+\sqrt{1}\,\vec{j}+2K \Longrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-2}{2}$$

نقطه روی خط

معادله حرکت: هرگاه متغیر زمان متحرک M باشد و در لحظه t انتهای بردار $r(t)$ در صفحه یا فضا مکان متحرک M باشد.

$\vec{r}(t)$ را معادله حرکت متحرک M می‌نامیم. مسیر حرکت M همان منحنی نظیر تابع برداری $\vec{r}(t)$ می‌باشد.

سرعت متحرک: اگر $r(t)$ معادله حرکت یک متحرک باشد بردار سرعت متحرک با نماد $\vec{v}(t)$ نمایش داده می‌شود و

$$\vec{v}(t)=r'(t)$$

طول بردار $\vec{v}(t)$ برابر است با مقدار سرعت متحرک در لحظه t می‌باشد.

شتاب متحرک: اگر $r(t)$ معادله حرکت

شتاب متحرک را با $\vec{a}(t)$ نمایش می‌دهند

$$\vec{a}(t)=v'(t)=r''(t)$$

طول بردار شتاب اندازه شتاب را در لحظه t نمایش می‌دهد

مثال. معادله حرکت متحرکی به صورت $\vec{r}(t)=3t\vec{i}+t^2j+\frac{2}{3}t^3k$ می‌باشد بردار سرعت و شتاب و اندازه سرعت و شتاب را در لحظه $t=1$ بیابید

$$v(t)=r'(t)=3i+2tj+2t^2k \rightarrow v(1)=3i+2j+2k \rightarrow |\vec{v}(1)|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$$

سرعت برابر است

$$\vec{a}(t)=v'(t)=0i+2j+4tk \rightarrow \vec{a}(1)=2j+4k \rightarrow |\vec{a}(1)|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

شتاب متحرک: اگر $r(t)$ معادله حرکت

شتاب متحرک را با $\vec{a}(t)$ نمایش می‌دهند

$$\vec{a}(t) = v'(t) = r''(t)$$

طول بردار شتاب اندازه شتاب را در لحظه t نمایش می‌دهد

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $\vec{r}(t) = 3t\,i + t^2 j + \frac{2}{3}t^3 k$ می‌باشد بردار سرعت و شتاب و اندازه سرعت و شتاب را در لحظه $t=1$ بیابید

$v(t) = r'(t) = 3i + 2tj + 2t^2 k \to v(1) = 3i + 2j + 2k \to |\vec{v}(1)| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

بردار سرعت

$\vec{a}(t) = v'(t) = 0i + 2j + 4tk \to \vec{a}(1) = 2j + 4k \to |\vec{a}(1)| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

مثال: در مثال قبل لحظه‌ای را بیابید که بردار سرعت و شتاب بر هم عمود باشند.

$\vec{v}(t) \cdot a(t) = 0$

$v(t) = \langle 3, 2t, 2t^2 \rangle$

$a(t) = \langle 0, 2, 4t \rangle$

$v(t) \cdot a(t) = 0 + 4t + 8t^3 = 0$

$4t(1+2t^2) = 0 \; \begin{cases} 4t = 0 \to t = 0 \\ 1 + 2t^2 = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ 2t^2 = -1 \\ t^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$