مجموعه مسائل آمار توصیفی

۱- اگر داشته باشیم $\sum_{i=1}^{۳} x_i = ۶$, $\sum_{i=1}^{۳} x_i^{۲} = ۱۴$ مطلوب است، محاسبه عبارات:

الف: $\sum_{i=1}^{۳} (x_i - ۳)^{۲}$ ب: $\sum_{i=1}^{۳} (x_i - ۲)\, x_i$

جواب: الف) $\sum_{i=1}^{۳} (x_i - ۳)^{۲} = \sum_{i=1}^{۳} \left(\cancel{x_i^{۲} - ۲x_i(۳) + (۳)^{۲} = ۹}\right) = \sum_{i=1}^{۳} \left[X_i^{۲} - ۶X_i + ۹\right]$

$$= \sum_{i=1}^{۳} x_i^{۲} - ۶\sum_{i=1}^{۳} x_i + \sum_{i=1}^{۳} ۹$$

$$= ۱۴ - ۶(۶) + ۲۷$$

$$= ۵$$

ب) $\sum_{i=1}^{۳} (x_i - ۲)\, x_i = \sum_{i=1}^{۳} x_i^{۲} - ۲\sum_{i=1}^{۳} x_i$

$$= ۱۴ - ۲(۶)$$

$$= ۲$$

۲- اگر $\bar{x}, \bar{y}$ میانگین حسابی بوده و داشته باشیم $\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{۱}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ صحت تساوی‌های زیر را ثابت کنید. X

الف: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{۲} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{۲} - \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{۲} = \sum x_i^{۲} - n\bar{x}^{۲}$

ب: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$

حل: الف) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{۲} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{۲} - ۲x_i\bar{x} + \bar{x}^{۲}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(n\bar{x}\right)\bar{x} + n\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

ب) $$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i - y_i\bar{x} - x_i\bar{y} + \bar{x}\bar{y}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

۳- سود خالص در سال‌های ۱۳۷۴ تا ۱۳۷۸ به ترتیب ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۲۰، ۱۸ (میلیون تومان) بوده است. میانگین سود خالص شرکت را برای این مدت حساب کنید.

جواب:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{5}(12+15+15+20+18) = \frac{80}{5} = 16$$ میلیون تومان

۴- سرمایه شرکتی در چهار سال متوالی به ترتیب ۲۰، ۴۰، ۴۰، ۱۶۰ تومان بوده است بطور متوسط سرمایه این شرکت در هر سال چند برابر شده است.

سال چهارم ۴ برابر شده ، سال سوم ۱ برابر ، سال دوم ۲ برابر شده

جواب:

$$x_1 = \frac{40}{20} = 2 \qquad x_2 = \frac{40}{40} = 1 \qquad x_3 = \frac{160}{40} = 4$$

$$\bar{x}_G = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

۵- اتومبیلی مسافت بین دو شهر را با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت طی کرده است و سپس همین مسافت را با سرعت

۸۰کیلومتر در ساعت برگشته است. سرعت متوسط رفت و برگشت چقدر است.

جواب:

$$\bar{x}_H = \frac{۲}{\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۸۰}} = \frac{۲}{\frac{۸۰+۶۰}{(۶۰)۸۰}} = \frac{۹۶۰۰}{۱۴۰} = ۶۸/۵۷$$

کیلومتر در ساعت

۶- در سری اعداد زیر مد (نما) را بدست آورید.

۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۷, ۸, ۸۸

جواب: مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد.

$M_۰ = ۶, ۸$

۷- قد تعدادی دانشجو به شرح زیر است. میانه قد آن‌ها را مشخص کنید؟

الف: ۱۶۸ - ۱۷۱ - ۱۶۸ - ۱۷۴ - ۱۷۹

ب: ۱۷۴ - ۱۷۲ - ۱۶۸ - ۱۶۵ - ۱۸۰ - ۱۷۴

جواب: داده‌ها را مرتب می‌کنیم. الف) ۱۶۸ - ۱۶۸ - ۱۷۱ - ۱۷۴ - ۱۷۹

$Me = ۱۷۱$

ب) ۱۶۵ - ۱۶۸ - ۱۷۲ - ۱۷۴ - ۱۷۴ - ۱۸۰ $\qquad Me = \frac{۱۷۲ + ۱۷۴}{۲} = ۱۷۳$

۸- داده‌های زیر مفروضند ۹, ۲۱, ۵, ۱۳, ۷, ۱۵, ۱۷, ۱۱, ۱۹, ۲۳

مطلوب است:

الف: دامنه تغییرات ب: انحراف متوسط از میانگین ج: واریانس

د: انحراف معیار ه: ضریب واریانس و: چارک‌ها، انحراف چارک‌ها و ضرایب انحراف چارک ها

ز: دهک دوم ح: صدک بیست و پنجم

جواب: داده‌ها را مرتب می‌کنیم. ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱, ۲۳

الف: دامنه تغییرات $= R = ۲۳ - ۵ = ۱۸$

ب: $AD_{\bar{x}} = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰} |x_i - \bar{x}|$

$$\bar{x} = \frac{۱}{۱۰}\sum x_i = \frac{۵+۷+۹+۱۱+۱۳+۱۵+۱۷+۱۹+۲۱+۲۳}{۱۰} = ۱۴$$

$$AD_{\bar{x}} = \frac{۱}{۱۰}(۹+۷+۵+۳+۱+۱+۳+۵+۷+۹)$$

$AD_{\bar{x}} = 5$

ج: $\sigma^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{10}[81+49+25+9+1+1+9+25+49+81] = 33$

د: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{33} = 5/74$

ه: $c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5/74}{14} \times 100 = \%41$

و: $Q_2 = \frac{13+15}{2} = 14 \qquad Q_1 = 9 \qquad Q_3 = 19$

$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{19-9}{2} = 5$

$K = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{19-9}{19+9} = 0/36$

ز: $C_{D_2} = \frac{2(10)}{10} + \frac{1}{2}$ محل دهک دوم $\Rightarrow D_2 = \frac{7+9}{2} = 8$

ح: $P_{25} = Q_1 = 9$

۹- میانگین نمره ریاضی ۵۰ نفر دانشجو درکلاس الف ۱۴ و واریانس آن ۶۴ می‌باشد میانگین نمره همین درس برای ۵۰ نفر دانشجو درکلاس ب ۱۲ و واریانس آن ۳۶ است. ضریب واریانس را برای هر دوکلاس محاسبه و پراکندگی نسبی نمرات درکلاس را بررسی و مقایسه کنید.

حل: پراکندگی نسبی درکلاس الف بیشتر ازکلاس ب است.

$c.v_{\text{الف}} = \frac{8}{14} \times 100 = \%57/14$

$c.v_{\text{ب}} = \frac{6}{12} \times 100 = \%50$

۱۰- در سه مؤسسه تعداد و مزدکارگران به شرح زیر است. متوسط دستمزد کل کارگران چقدر است؟ مؤسسه اول ۲۰۰ کارگر و مزد متوسط ۱۰۰۰ تومان، مؤسسه دوم ۵۰ کارگر و مزد متوسط ۱۲۰۰ تومان و مؤسسه سوم ۱۵۰ کارگر با دستمزد و متوسط ۸۰۰ تومان

حل:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3} \qquad \bar{x} = \frac{۲۰۰(۱۰۰۰) + ۵۰(۱۲۰۰) + ۱۵۰(۸۰۰)}{۲۰۰ + ۵۰ + ۱۵۰}$$

$$\bar{x} = \frac{۲۰۰۰۰۰ + ۶۰۰۰۰ + ۱۲۰۰۰۰}{۴۰۰} = \frac{۳۸۰۰۰۰}{۴۰۰} \qquad \bar{x} = ۹۵۰$$

۱۱- میزان بارندگی در ۴ شهر مختلف عبارت است از ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۹ میلی‌متر مطلوب است محاسبه واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییر میزان بارندگی در این چهار شهر:

حل:

$$x_i , ۱۰ , ۱۲ , ۱۵ . ۱۹ \qquad \bar{x} = \frac{۱۰ + ۱۲ + ۱۵ + ۱۹}{۴} = \frac{۵۶}{۴} = ۱۴$$

$$\sigma^2 = \frac{۱}{۴}\sum_{i=1}^{۴} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$x_i - \bar{x} : -۴ , -۲ , ۱ , ۵ \qquad \sigma^2 = \frac{۴۶}{۴} = ۱۱/۵$$

$$\sigma = \sqrt{۱۱/۵} = ۳/۳۹$$

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times ۱۰۰ = \frac{۳/۳۹}{۱۴} \times ۱۰۰ = \%۲۴/۲۱$$

۱۲- سازمانی جهت خرید لاستیک مصرفی ماشین آلات خود مشخصات دو نوع لاستیک به شرح زیر در اختیار دارد.

نوع الف: انحراف معیار ۲۳۸۶ کیلومتر و میانگین ۳۷۰۰۰ کیلومتر

نوع ب: انحراف معیار ۳۷۶۱ کیلومتر و میانگین ۳۸۰۰۰ کیلومتر

با بهره‌گیری از ضریب واریانس بررسی کنید خرید از کدام لاستیک به صرفه است؟

جواب:

$$c.v \text{ الف } = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۳۸۶}{۳۷۰۰۰} \times ۱۰۰ = \%۶/۴$$

$$c.v \text{ ب } \frac{۳۷۶۱}{۳۸۰۰۰} \times ۱۰۰ \simeq \%۱۰$$

ضریب تغییرات در نوع ب بیشتر است و در نتیجه بهتر است که از نوع الف خریداری کند.

مسائل شاخص‌های مرکزی و پراکندگی در سری اعداد طبقه‌بندی شده

۱۳- مجموعه مشاهدات از اندازه قد ۴۰ نفر که به ترتیب صعودی مرتب شده است به شرح زیر است (ارقام به

سانتی‌متر است)

۱۱۹ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۸ - ۱۳۲ - ۱۳۵ - ۱۳۵ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۸
۱۳۸ - ۱۴۰ - ۱۴۰ - ۱۴۲ - ۱۴۲ - ۱۴۴ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۵ - ۱۴۶
۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۰ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴
۱۵۶ - ۱۵۷ - ۱۵۸ - ۱۶۱ - ۱۶۳ - ۱۶۴ - ۱۶۵ - ۱۶۸ - ۱۷۳ - ۱۷۶

الف: با استفاده از اعداد اصلی میانه را پیدا کنید.

جواب:

$$n = ۴۰ \qquad \frac{n}{۲} = ۲۰ \;,\; \frac{n}{۲} + ۱ = ۲۱$$

$$Me = \frac{X_{۲۰} + X_{۲۱}}{۲} = \frac{۱۴۶ + ۱۴۶}{۲} = ۱۴۶$$

ب: جدول توزیع فراوانی برای این اعداد تنظیم نمائید. فاصله طبقات را ۹ در نظر بگیرید و از عدد ۱۱۸ شروع کنید. سپس از این جدول میانه را محاسبه کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

جواب:

کران طبقات	F_i	Fc_i	
۱۱۸ - ۱۲۷	۳	۳	
۱۲۷ - ۱۳۶	۵	۸	
۱۳۶ - ۱۴۵	۹	۱۷	
۱۴۵ - ۱۵۴	۱۲	۲۹	طبقه میانه
۱۵۴ - ۱۶۳	۵	۳۴	
۱۶۳ - ۱۷۲	۵ ۴	۳۹	
۱۷۲ - ۱۸۱	۲ ۲	۴۰	

$$Me = L + \left[\frac{\frac{n}{۲} - Fc_{i-۱}}{F_i}\right] I$$

$$= ۱۴۵ + \left[\frac{۲۰ - ۱۷}{۱۲}\right] ۹$$

$$Me = ۱۴۷/۲۵$$

۱۴- جدول توزیع فراوانی صفت X بصورت زیر است: مطلوب است محاسبه میانگین، میانه و نما برای صفت X:

CL	۴۰ - ۴۵	۴۵ - ۵۰	۵۰ - ۵۵	۵۵ - ۶۰	۶۰ - ۶۵	۶۵ - ۷۰	۷۰ - ۷۵	۷۵ - ۸۰	۸۰ - ۸۵	۸۵ - ۹۰
F_i	۲	۳	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۱۲	۱۰	۸	۳

حل:

CL	F_i	X_i	u_i	$F_i u_i$	Fc_i
۴۰ - ۴۵	۲	۴۲/۵	۵-	۱۰-	۲
۴۵ - ۵۰	۳	۴۷/۵	۴-	۱۲-	۵
۵۰ - ۵۵	۷	۵۲/۵	۳-	۲۱-	۱۲
۵۵ - ۶۰	۱۰	۵۷/۵	۲-	۲۰-	۲۲
۶۰ - ۶۵	۱۲	۶۲/۵	۱-	۱۲-	۳۴
۶۵ - ۷۰	۱۵	۶۷/۵	۰	۰	۴۹
۷۰ - ۷۵	۱۲	۷۲/۵	۱	۱۲	۶۱
۷۵ - ۸۰	۱۰	۷۷/۵	۲	۲۰	۷۱
۸۰ - ۸۵	۸	۸۲/۵	۳	۲۴	۷۹
۸۵ - ۹۰	۳	۸۷/۵	۴	۱۲	۸۲
	۸۲			۷-	

طبق میانه و قد

$$U = \frac{-۷}{۸۲} = ۰/۰۸۵$$

میانگین

$$\bar{X} = ۵(-/۰۸۵) + ۶۷/۵ = ۶۷/۰۷۳$$

میانه

$$\frac{n}{۲} = \frac{۸۲}{۲} = ۴۱ \qquad Me = ۶۵ + \left[\frac{۴۱ - ۳۴}{۱۵}\right] ۵ = ۶۷/۳۳$$

مد

$$M_۰ = ۶۵ + \left[\frac{۳}{۳+۳}\right] ۵ = ۶۷/۵$$

۱۵- در جامعه‌ای جدول توزیع فراوانی صفت X بصورت زیر است. مطلوب است محاسبه میانگین واریانس، انحراف معیار این توزیع

CL	۱/۵ - ۲/۵	۲/۵ - ۳/۵	۳/۵ - ۴/۵	۴/۵ - ۵/۵	۵/۵ - ۶/۵	۶/۵ - ۷/۵	۷/۵ - ۸/۵	۸/۵ - ۵/۹
F_i	۲	۵	۵	۸	۱۰	۸	۷	۵

حل:

	F_i	X_i	F_iX_i	$F_iX_i^2$
۱/۵ - ۲/۵	۲	۲	۴	۸
۲/۵- ۳/۵	۵	۳	۱۵	۴۵
۳/۵- ۴/۵	۵	۴	۲۰	۸۰
۴/۵ - ۵/۵	۸	۵	۴۰	۲۰۰
۵/۵ - ۶/۵	۱۰	۶	۶۰	۳۶۰
۶/۵ - ۷/۵	۸	۷	۵۶	۳۹۲
۷/۵ - ۸/۵	۷	۸	۵۶	۴۴۸
۸/۵ - ۹/۵	۵	۹	۴۵	۴۰۵
	۵۰		۲۹۶	۱۹۳۸

$\bar{x} = \frac{۲۹۶}{۵۰} = ۵/۹۲$ میانگین

$\sigma^۲ = \frac{۱}{۵۰}\left[\sum F_i x_i^۲ - ۵۰\,\bar{x}^۲\right]$

$\sigma^۲ = \frac{۱}{۵۰}\left[۱۹۳۸ - ۵۰\,(۵/۹۲)^۲\right]$

$\sigma^۲ = ۳/۷۱۳۶$ واریانس

$\sigma = ۱/۹۳$ انحراف معیار

۱۶- با توجه به جدول توزیع فراوانی زیر مطلوب است محاسبه، میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب واریانس

CL	۱۰ - ۲۰	۲۰ - ۳۰	۳۰ - ۴۰	۴۰ - ۵۰	جمع
F_i	۱	۳	۴	۲	۱۰

حل: با توجه به جدول فراوانی داریم:

$\bar{U} = \frac{-۳}{۱۰} = -۰/۳$

$\bar{X} = ۱۰\,(-۰/۳) + ۳۵ = ۳۲$ میانگین

$$S_u^2 = \frac{1}{10}\left[\sum F_i U_i^2 - 10\,\bar{U}^2\right]$$

$$S_u^2 = 0/81$$

$$\sigma_u^2 = (10)^2(0/81) = 81$$

$$\sigma = \sqrt{81} = 9$$

$$c.v = \frac{9}{23} = \%28$$

CL	F_i	X_i	U_i	F_iU_i	$F_iU_i^2$
۱۰ - ۲۰	۱	۱۵	۲-	۲-	۴
۲۰ - ۳۰	۳	۲۵	۱-	۳-	۳
۳/۵- ۴/۵	۵	۴	۲۰	۸۰	۰
۴۰ - ۵۰	۲	۴۵	۱	۲	۲
۱۰			۳-		۹

۱۷- جدول توزیع فراوانی زیر مفروض است. مطلوب است:

CL	۱۵ - ۲۵	۲۵ - ۳۵	۳۵ - ۴۵	۴۵ - ۵۵	جمع
F_i	۱۰	۳۰	۴۰	۲۰	۱۰۰

الف: محاسبه میانگین، واریانس و انحراف معیار این توزیع

ب: رسم هستوگرام و نشان دادن مد، میانه و چارک‌ها روی آن

ج: محاسبه مد، میانه و چارک‌ها از جدول

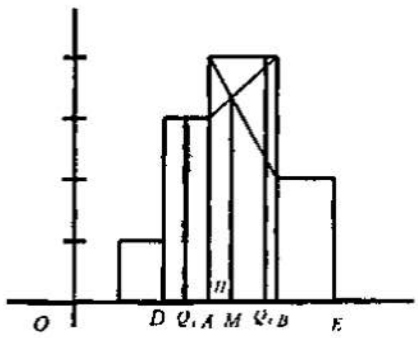
د: محاسبه ضریب واریانس

هـ: احتمال آن‌که بین حداقل ۲۵ و حداکثر ۴۵ باشد.

	CL	F_i	X_i	F_iX_i	$F_iX_i^۲$
	۱۵ - ۲۵	۱۰	۲۰	۲۰۰	۴۰۰۰
طبقه چارک اول	۲۵ - ۳۵	۳۰	۳۰	۹۰۰	۲۷۰۰۰
طبقه مد، میانه	۳۵- ۴۵	۴۰	۴۰	۱۶۰۰	۶۴۰۰۰
چارک سوم	۴۵ - ۵۵	۲۰	۵۰	۱۰۰۰	۵۰۰۰۰
		۱۰۰		۳۷۰۰	۱۴۱۰۰۰

$\bar{X} = \frac{۳۷۰۰}{۱۰۰} = ۳۷$

$\sigma^۲ = \frac{۱}{۱۰۰}\left[\sum F_i X_i^۲ - ۱۰۰ X^{-۲}\right]$



$\sigma^۲ = ۴۱$

$\sigma = \sqrt{۴۱} = ۶/۴$

$C_{Md} = \frac{N}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$

$M_d = OH = OA + AH$

$\frac{AH}{AB} = \frac{۱۰}{۴۰} \Rightarrow \frac{AH}{۱۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow AH = ۲/۵, OA = ۳۵$

$M_d = OH = ۳۷/۵$

$C_{Q_۱} = \frac{N}{۴} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$ $\quad \frac{DQ_۱}{DA} = \frac{۱۵}{۳۰} \Rightarrow \frac{DQ_۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DQ_۱ = ۵, OD = ۲۵$

$Q_۱ = OQ_۱ = OD + DQ_۱$ $\quad Q_۱ = OQ_۱ = ۲۵ + ۵ = ۳۰$

$C_{Q_۳} = \frac{۳N}{۴} = \frac{۳۰۰}{۴} = ۷۵$

$$Q_۳ = OQ_۳ = OA + AQ_۳ \quad \frac{AQ_۳}{AB} = \frac{۳۵}{۴۰} \Rightarrow \frac{AQ_۳}{۱۰} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow AQ_۳ = ۸/۷۵ , OA = ۳۵$$

$$Q_۳ = ۳۵ + ۸/۷۵ = ۴۳/۷۵$$

$$\frac{n}{۴} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵ \qquad Q_۱ = L + \left(\frac{\frac{n}{۴} - Fc_i - ۱}{F_i}\right) I$$

$$Q_۱ = ۲۵ + \left(\frac{۲۵ - ۱۰}{۳۰}\right) \times ۱۰ = ۳۰$$

$$\frac{n}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰ \qquad M_e = L + \left(\frac{\frac{n}{۲} - Fc_i - ۱}{F_i}\right) I$$

$$M_e = ۳۵ + \left(\frac{۵۰ - ۴۰}{۴۰}\right) \times ۱۰ = ۳۵ + \frac{۱۰}{۴} = ۳۷/۵$$

$$\frac{۳n}{۴} = ۷۵ \qquad Q_۳ = L + \left(\frac{\frac{۳n}{۴} - Fc_i - ۱}{F_i}\right) I$$

$$Q_۳ = ۳۵ + \left(\frac{۷۵ - ۴۰}{۴۰}\right) \times ۱۰ = ۳۵ + ۸/۷۵ = ۴۳/۷۵$$

$$M_e = L + \left(\frac{d_۱}{d_۱ + d_۲}\right) I = ۳۵ + \left[\frac{۱۰}{۳۰}\right] \times ۱۰ = ۳۸/۳۳$$

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times ۱۰۰ = \frac{۶/۴}{۳۷} \times ۱۰۰ = \%۱۷/۲۹$$

احتمال آن

$$p\ (۲۵ < x < ۴۵) = \frac{۳۰ + ۴۰}{۱۰۰} = ۰/۷$$

مجموعه مسائل آنالیز ترکیبی

۱- ثابت کنید تعداد ترتیبات n شیء که در آن $n_۱$ شیء مشابه هم و $n_۲$ شیء مشابه هم و $n_۳$ شیء هم مشابه یکدیگر باشند از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$N = \frac{n!}{n!\, n_۲!\, n_۳!} \qquad n = n_۱ + n_۲ + n_۳$$

حل: تعداد ترتیبات n شیء برابر $n!$ است ولی چون n_1 شیء مشابه هم هستند پس جابجائی بین این‌ها تفاوتی را ایجاد نمی‌کنند. و تعداد $n_1!$ یکسان هستند و برای دو حالت دیگر نیز برقرار است و باید حالات یکسان را از $n!$ خارج کنیم یعنی

$$N=\frac{n!}{n_۱!\,n_۲!\,n_۳!}$$

۲- با حروف Mississippi چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب:

$$N=\frac{۱۱!}{۱!\,۴!\,۴!\,۲!}=۳۴۶۵۰$$

۳- عبارات زیر را بسط دهید.

$$\left(۲x+y^۲\right)^۳ \;;\; \left(x^۲-۲y^۲\right)^۵ \;,\; (a+b)^۶$$

حل: طبق بسط نیوتن داریم.

$$(a+b)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a+b)^۶=\binom{۶}{۰}a^۶+\binom{۶}{۱}a^۵b+\binom{۶}{۲}a^۴b^۲+\binom{۶}{۳}a^۳b^۳+\binom{۶}{۴}a^۲b^۴$$

$$+\binom{۶}{۵}ab^۵+b^۶$$

$$(a+b)^۶=a^۶+۶a^۵b+۱۵a^۴b^۲+۲۰a^۳b^۳+۱۵a^۲b^۴+۶ab^۵+b^۶$$

$$(x^۲-۲y^۲)^۵=\left(x^۲\right)^۵+۵\left(x^۲\right)^۴\left(-۲y^۲\right)+۱۰\left(x^۲\right)^۳\left(-۲y^۲\right)^۲$$

$$+۱۰\left(x^۲\right)^۲\left(-۲y^۲\right)^۳+۵\left(x^۲\right)\left(-۲y^۲\right)^۴+\left(-۲y^۲\right)^۵$$

$$\left(x^۲+۲y^۲\right)^۵=x^{۱۰}-۱۰x^۸y^۲+۴۰x^۶y^۴-۸۰x^۴y^۶+۸۰x^۲y^۸-۳۲y^{۱۰}$$

$$\left(۲x+y^۲\right)^۳=(۲x)^۳+۳(۲x)^۲(y^۲)+۳(۲x)(y^۲)^۲+(y^۲)^۳$$

$$\left(۲x+y^۲\right)^۳=۸x^۳+۱۲x^۲y^۲+۶xy^۴+y^۶$$

۴- در بسط $\left(۲x^۲-y\right)^۸$ جمله‌ای که دارای $x^{۱۰}$ می‌باشد را پیدا کنید.

حل:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$\binom{8}{k}(2x^2)^{8-k}y^k=Ax^{10}$$

$$x^{16-2k}=x^{10}$$

$$16-2k=10 \qquad k=3$$

$$-\binom{8}{3}(2x^2)^5y^3=-1792x^{10}y^3$$

۵- می‌خواهیم یک تیم پینگ پنگ ۲ نفره و یک بسکتبال ۵ نفره و یک تیم والیبال ۶ نفره از ۱۳ نفر انتخاب کنیم. تعداد حالات ممکن را حساب کنید.

حل: $N=\binom{13}{2\ 5\ 6}=\frac{13!}{6!5!2!}=\frac{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6!}{6!\times5\times4\times3\times2\times2}=36036$

۶- به چند طریق مختلف ۱۰ دانشجو می‌توانند در یک صف قرار بگیرند، بشرطی که دو نفر دانشجو همواره نفر اول و نفر آخر این صف را اشغال کنند.

حل: تعداد ترتیبات دانشجویان وسط !۸ است و به دو طریق نفر اول و آخر قرار خواهند گرفت.

$$N=2\times8!=80640$$

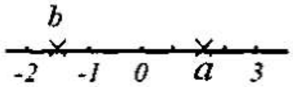
۷- چند عدد می‌توان از ۳ رقم عدد زوج مختلف غیر صفر و دو رقم فرد مختلف تشکیل داد. X ؟

حل: ترتیب ۳ عدد زوج برابر A_4^3 و ترتیب ۲ عدد فرد برابر A_5^2 می‌باشد تعداد حالات جابجائی بین ۳ رقم زوج و ۲ رقم فرد برابر C_5^2 می‌باشد.

$$N=C_5^2A_5^2A_4^3=10(20)(24)=4800$$

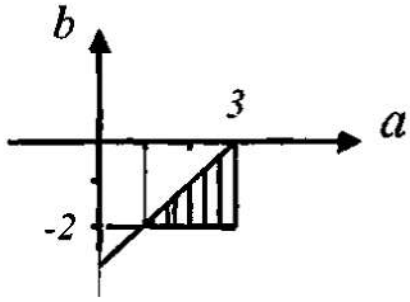
مجموعه مسائل احتمالات

۱- روی خط مستقیم Δ مطابق شکل نقاط b,a با شرط $0\le a\le3$, $-2\le b\le0$ انتخاب شده‌اند. مطلوب است احتمال این که فاصله b,a بزرگتر از ۳ باشد.



جواب:

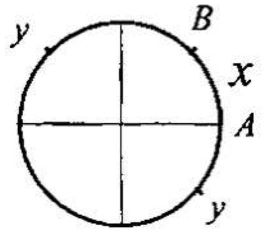
حل: فضای نمونه در مستطیل به طول ۳ و عرض ۲ قرار دارد اگر بخواهیم فاصله b, a بزرگتر از ۳ باشد یعنی $a - b > ۳$ مثلث هاشور خورده خواهد بود با ارتفاع ۲ و قاعده ۲ است.



$$p(a - b > ۳) = \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲- سه نقطه بطور تصادفی روی محیط یک دایره انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه نقاط انتخاب شده بر روی نیم دایره قرار گیرند چیست؟

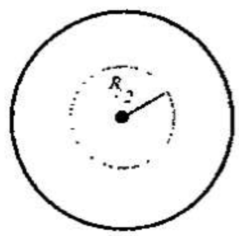
حل: اگر x در ربع اول باشد y باید در ربع دوم یا چهارم قرار گیرند تا هر سه نقطه در یک ربع قرار گیرد.



$$p(۰ \le y < \pi \;\text{ یا }\; \frac{۳\pi}{۲} < y < ۲\pi) = \frac{\pi}{۲\pi} + \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲\pi} = \frac{۳}{۴}$$

۳- نقطه‌ای بطور تصادفی در درون یک دایره انتخاب می‌شود احتمال آن‌که نقطه مورد نظر به مرکز دایره نزدیکتر از محیط آن باشد چیست؟

حل: نقطه باید در دایره‌ای باشد هم مرکز دایره به شعاع $\frac{R}{۲}$



$$p(A) = \frac{\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}\pi}{R^{۲}\pi} = \frac{۱}{۴}$$

۴- میله‌ای به طول L را به طور تصادفی در دو نقطه می‌شکنیم احتمال آن‌که از قطعات بدست آمده بتوان یک مثلث ساخت چقدر است؟

جواب: شکل مثلث است که مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر و تفاضل دو ضلع از ضلع سوم کوچکتر باشد.

۵- فرض کنید

p احتمال این باشد که هوا (آفتابی یا بارانی) در روز معینی مثل روز قبل باشد اگر امروز هوا آفتابی باشد احتمال آن که پس‌فردا آفتابی باشد چقدر است.

جواب:

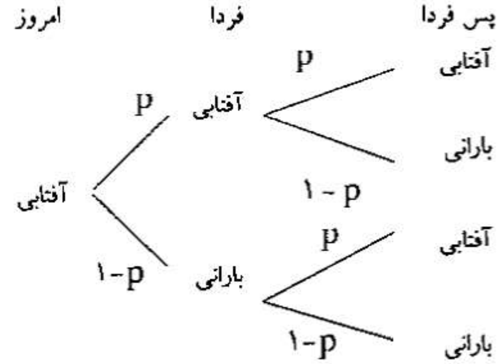
$A_۱$ امروز آفتابی $\quad p(A_۲) = p \quad p(A_۳ \mid A_۲) = p$

$A_۲$ فردا آفتابی $\quad p(A'_۲) = ۱ - p \quad p(A_۳ \mid A'_۲) = ۱ - p$

$A_۳$ پس فردا آفتابی

$$p(A_۳) = p(A_۳ \mid A_۲)p(A_۲) + p(A_۳ \mid A'_۲)p(A'_۲)$$

$$p(A_۳) = (p)(p) + (۱ - p)(۱ - p)$$
$$p(A_۳) = p^۲ + (۱ - p)^۲$$



۶- یک مرد و همسر او از تنها اتومبیل خانوادگی به ترتیب با نسبتهای ۶۵ و ۳۵ درصد استفاده می‌کنند. درصد تصادفات آن‌ها به ترتیب یک و دو درصد می‌باشد احتمال آن که تصادف قبلی (بعدی) را مرد مرتکب شده باشد چقدر است؟

جواب: تصادف کردن B $\quad$ مرد از اتومبیل استفاده‌کند $A_۱$

$$p(A_۱) = ۰/۶۵ \quad p(B \mid A_۱) = ۰/۰۱$$

همسر او از اتومبیل $A_۲$ استفاده‌کند

$$p(A_۲) = ۰/۳۵ \quad p(B \mid A_۲) = ۰/۰۲$$

$$p(A_۱ \mid B)=\frac{p(B \mid A_۱)p(A_۱)}{p(B \mid A_۱)p(A_۱)+p(B \mid A_۲)p(A_۲)}=$$

$$=\frac{(۰/۶۵)(۰/۰۱)}{(۰/۶۵)(۰/۰۱)+(۰/۳۵)(۰/۰۲)}$$

۷- سه جعبه با محتویات زیر در اختیار داریم. جعبه اول دارای ۱۰ لامپ که ۴ عدد آن معیوب است. جعبه دوم دارای ۶ لامپ که کلیه آن‌ها معیوب است جعبه سوم ۸ لامپ که ۳ تای آن‌ها معیوب است. جعبه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و لامپی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این لامپ معیوب باشد چقدر است؟ اگر بدانیم لامپ خارج شده معیوب است احتمال این که متعلق به جعبه اول باشد چقدر است؟

جواب:

$$p(A_i)=\frac{۱}{۳} \qquad p(B \mid A_۱)=\frac{۴}{۱۰} \qquad p(B \mid A_۲)=۱ \qquad p(B \mid A_۳)=\frac{۳}{۸}$$

$$p(B)=\sum_{i=۱}^{۳}p(B \mid A_i)p(A_i)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)+\frac{۱}{۳}(۱)+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۸}\right)=\frac{۳۲۶}{۷۲۰}=\frac{۱۶۳}{۳۶۰}$$

$$p(A_۱ \mid B)=\frac{p(B \mid A_۱)p(A_۱)}{p(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)}{\frac{۱۶۳}{۳۶۰}}=\frac{۴۸}{۱۶۳}$$

مجموعه مسائل متغیر تصادفی و توزیع احتمال

۱- متغیر تصادفی با توزیع احتمال زیر است.

x	۰	۱	۲	۳
f(x)	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۶}$

مطلوب است:

الف: $E(x)$ ب: $\sigma_x^۲$ ج: $E(x-۳)^۲$ د: $E(x-E(x))^۲$

جواب:

الف) $E(x)=۰\left(\frac{۱}{۳}\right)+۱\left(\frac{۱}{۲}\right)+۲(۰)+۳\left(\frac{۱}{۶}\right)=۱$

ب) $\sigma_x^۲=E(x^۲)-E^۲(x)$

$$E(x^۲)=\sum_{x=۰}^{۳}x^۲f(x)=۰+۱\left(\frac{۱}{۲}\right)+۰+۹\left(\frac{۱}{۶}\right)=۲$$

$$\sigma_x^۲=۲-۱=۱$$

ج) $E(x-۳)^۲=?$

$x-۳$	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۶}$

$\Rightarrow$

$(x-۳)^۲$	۹	۴	۱	۰
$f(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۶}$

$$E(x-۳)^۲=۹\left(\frac{۱}{۳}\right)+۴\left(\frac{۱}{۲}\right)=۳+۲=۵$$

د) $E(x-E(x))^۲$

$x-E(x):\quad -۱ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۲ \qquad -۱, ۰, ۱, ۲$

$(x-E(x))^۲$	۱	۰	۱	۴
$f(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۶}$

$$E(x-E(x))^۲=\frac{۱}{۳}+۴\left(\frac{۱}{۶}\right)=۱$$

۲- در یک بازی شخصی ۳ سکه را پرتاب می‌کند. اگر هر سه شیر یا هر سه خط باشد ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند و اگر یک یا دو شیر بیاید ۳۰۰ تومان می‌پردازد امید ریاضی مبلغ برد او چقدر است؟

جواب:

x	۵۰۰	-۳۰۰
$f(x)$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۶}{۸}$

$$E(x)=۵۰۰\left(\frac{۲}{۸}\right)+(-۳۰۰)\left(\frac{۶}{۸}\right)$$

$$E(x)=-۱۰۰$$

۳- در یک بازی هرکس ۲۰۰ تومان می‌دهد و وارد بازی می‌شود و یک جفت مکعب شماره‌دار را می‌ریزد اگر جفت بیاورد به ازاء هر خال ۱۰۰ تومان می‌گیرد. امید ریاضی برد او چقدر است؟

جواب: برای ورود بازی ۲۰۰ تومان می‌پردازد به ازای هر جفت خال می‌برد مثلاً وقتی جفت دو بیاورد مجموعاً ۴۰۰ تومان برده است.

مشاهده	(۱, ۱)	(۲,۲)	(۳,۳)	(۴,۴)	(۵,۵)	(۶,۶)	غیره
X	۰ ۲۰۰	۲۰۰ ۴۰۰	۴۰۰ ۶۰۰	۶۰۰ ۸۰۰	۸۰۰ ۱۰۰۰	۱۰۰۰ ۱۲۰۰	-۲۰۰
f(x)	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳۰}{۳۶}$

اعداد اصلاح شود

$$E(x)=\sum x.f(x)=۰\times\frac{۱}{۳۶}+۲۰۰\times\frac{۱}{۳۶}+۴۰۰\times\frac{۱}{۳۶}+۶۰۰\times\frac{۱}{۳۶}+۸۰۰\times\frac{۱}{۳۶}$$

$$+۱۰۰۰\times\frac{۱}{۳۶}+(-۲۰۰)\times\frac{۳۰}{۳۶}$$

$$E(x)=-۸۳/۳۳$$

۴- احتمال این‌که تیم فوتبالی در مسابقه‌ای برنده شود ۰/۶ است و این تیم در یک سری مسابقات شرکت کرده است و قرار است پنج مسابقه انجام دهد. فرض کنید X تعداد مسابقاتی است که این تیم قبل از اولین شکست خود بازی می‌کند. توزیع X را یافته و میانگین و واریانس آن را حساب کنید.

حل: تکیه‌گاه X برابر $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. مقدار صفر زمانی است که در اولین بازی شکست بخورد.

$f(۰)=۰/۴$ ۱−۰/۶ =۰/۴

$f(۱)=(۰/۴)(۰/۶)$ یعنی یک بازی کند و بازی دوم شکست بخورد

$f(۱)=۰/۲۴$

$f(۲)=(۰/۶)(۰/۶)(۰/۴)=۰/۱۴۴$

$f(۳)=(۰/۶)(۰/۶)(۰/۶)(۰/۴)=۰/۰۸۶۴$

$f(۴)=۱-f(۰)-f(۱)-f(۲)-f(۳)$

یعنی ۳ برد داشته و چهارمی را شکست خورده است

احتمال هر برد ۰/۶ و احتمال هر شکست ۰/۴ است

x	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)	۰/۴	۰/۲۴	۰/۱۴۴	۰/۰۸۶۴	۰/۱۲۹۶ ٪۰۵۱۸٤

$$E(x)=۰+۱(۰/۲۴)+۲(۰/۱۴۴)+۳(۰/۰۸۶۴)+۴(۰/۱۲۹۶)=۱/۳۱ ✓$$ → صحیح است

~~۳/۱۳۳۳۷۷۴~~

$$E(x^{۲}) = ۰ + ۱(۰/۲۴) + ۴(۰/۱۴۴) + ۹(۰/۰۸۶۴) + ۱۶(۰/۱۲۹۶) = ۳/۶۶۷۲$$

$$\sigma_x^{۲} = ۳/۶۶۷۲ - (۱/۳۱)^{۲} = ۱/۹۵۱۱$$

۵- مردی چهار کلید مشابه در دست دارد که فقط یکی از آنها در معینی را باز می‌کند ولی کلیدها را یکی پس از دیگری روی در امتحان می‌کند (بعد از آزمایش کلید در صورت بازنشدن در، آن را کنار می‌گذارد) اگر x و میانگین آن را حساب کنید.

جواب:

$f(۱) = \frac{۱}{۴}$ اولین کلید در را باز کرده است

$f(۲) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳}$ دومین کلید در را باز کرده است

$f(۳) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}$ سومین کلید در را باز کرده است

$f(۴) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times ۱$

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

$$E(x) = \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۴} = ۲/۵$$

۶- متغیر تصادفی x چهار مقدار d, c, b, a را به ترتیب بااحتمال‌های $\frac{۱+۳x}{۴}, \frac{۱-x}{۴}, \frac{۱+۲x}{۴}, \frac{۱-۴x}{۴}$ انتخاب می‌کند. برای چه مقدار x بیان فوق‌الذکر یک توزیع احتمال را تشکیل می‌دهد.

حل: طبق تعریف توزیع احتمال داریم که

$$\sum f(x) = ۱$$

$$۰ \le f(x) \le ۱$$

$$۰ \le \frac{۱+۳x}{۴} \le ۱ \qquad \frac{-۱}{۳} \le x \le ۱$$

$$۰ \le \frac{۱-x}{۴} \le ۱ \qquad -۱ \le x \le \frac{۱}{۳}$$

$$۰ \le \frac{۱-۴x}{۴} \le ۱ \qquad \frac{-۳}{۴} \le x \le \frac{۱}{۴} \qquad \Rightarrow \quad \frac{-۱}{۳} \le x \le \frac{۱}{۴}$$

$$۰ \le \frac{۱+۲x}{۴} \le ۱ \qquad \frac{-۱}{۳} \le x \le \frac{۳}{۲}$$

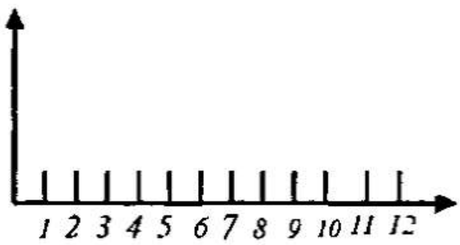
مجموعه مسائل توزیع‌های مهم احتمال گسسته

توزیع یکنواخت:

۱- از یک جعبه مداد رنگی ۱۲ تائی، یک مداد به تصادف خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده رنگ مداد باشد. توزیع احتمال X را مشخص کنید و هیستوگرام آن را رسم کنید.

حل: مدادها یکسان هستند پس احتمال انتخاب هر کدام برابر است.

$$f(x)=\frac{1}{12} \qquad x=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$$



۲- اگر متغیر تصادفی X مقادیر ۱ , ۲ , ۳ , ... , n را با احتمال‌های مساوی قبول کند. ثابت کنید.

$$\mu=E(x)=\frac{n+1}{2} \qquad \sigma^2=\frac{n^2-1}{12}$$

$$E(x)=\sum_{x=1}^{n} x.f(x)=\sum_{x=1}^{n} x.\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x=\frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n+1}{2}$$

$$E(x^2)=\sum_{x=1}^{n} x^2 f(x)=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sigma^2=E(x^2)-E^2(x)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12}$$

۳- یک صفحه دایره‌ای شکل هدف‌زنی به ۱۰ قطاع مساوی تقسیم و با شماره‌ای ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده است. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی X برابر عددی باشد که سوزن در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند. احتمال X را بنویسید و میانگین و واریانس آن را حساب کنید.

جواب: قطاع مساوی هستند. پس احتمال آن هم مساوی است و توزیع یکنواخت است.

$$f(x)=\frac{1}{10} \qquad x=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

$$E(x)=\frac{n+۱}{۲}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

$$\sigma x=V(x)=\frac{n^{۲}-۱}{۱۲}=\frac{۱۰۰-۱}{۱۲}=\frac{۹۹}{۱۲}=\frac{۳۳}{۴}$$

توزیع احتمال برنولی

۱- احتمال آن‌که بازیکنی توپ بسکتبال را داخل حلقه‌کند ۰/۶ است اگر تصادفی X نشان دهنده تعداد موفقیت در یک پرتاب توپ باشد. امید ریاضی و واریانس X را حساب کنید.

جواب: یا موفق می‌شود یا خیر و یک پرتاب بیشتر ندارد و $p=۰/۶$ است.

$$f(x)=(۰/۶)^{x}(۰/۴)^{۱-x}\quad x=۰,۱$$

$$E(x)=۰\,(۰/۴)+(۰/۶)=۰/۶ \qquad \mu = E(x) = P = /۶$$

$$E(x^{۲})=۰/۶ \qquad \sigma_x^{۲}=۰/۶-(۰/۳۶)=۰/۲۴ \qquad var(x): \sigma_x^{۲} = P.q = ۰٫۶ \times ۰٫۴ = ۰٫۲۴$$

۲- احتمال آمدن عدد زوج در پرتاب یک مکعب ناهمگن سه برابر احتمال فرد است. اگر مکعب را یک بار پرتاب کنیم. امید ریاضی و واریانس عدد ۲ را حساب کنید.

جواب:

$$p\,(\text{زوج})+p\,(\text{فرد})=۱$$

$$p(۲)+p(۴)+p(۶)+p(۱)+p(۳)+p(۵)=۱$$

$$۳x+۳x+۳x+x+x+x=۱ \qquad x=\frac{۱}{۱۲} \qquad p(۲)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

مکعب یک بار پرتاب می‌شود و $p=\frac{۱}{۴}$ است.

$$E(x)=p=\frac{۱}{۴}$$

$$V(x)=pq=\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۳}{۱۶}$$

توزیع احتمال دوجمله‌ای

۱- مدیر فروشگاهی حدس می‌زند که احتمال آن‌که بتواند بطور تصادفی مشتری انتخاب کند که خرید نماید ۲۰٪ باشد اگر شش مشتری وارد فروشگاه شوند احتمال این‌که مدیر فروشگاه بتواند به ۴ نفر یا بیشتر فروش نماید چقدر است؟

جواب: تعداد مشتری‌هائی که خرید نماید در بین ۶ نفر X

X دارای توزیع جمله‌ای با $p=۰/۲$, $n=۶$ است.

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - 0/655 = 0/345$$

$$p(X \geq 4) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6)$$

$$= \binom{6}{4} (0/2)^4 (0/8)^2 + \binom{6}{5} (0/2)^5 (0/8)^1 + \binom{6}{6} (0/2)^6 = 0/01696$$

۲- اگر احتمال وجود پسر و دختر مساوی باشد احتمال وجود پسران (یا دختران) را در خانواده‌ای که دارای ۳ فرزند هستند را پیدا کنید. بصورت جدول توزیع احتمال و نمودار آن را حساب کنید.

جواب:

X: تعداد پسران خانواده سه فرزندی

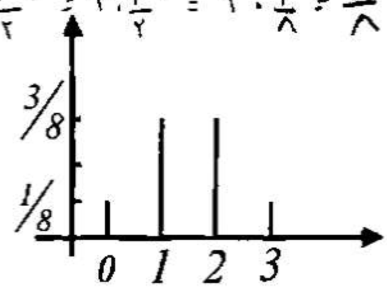
0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad C_3^0 p^0 q^{3-0}$$

$$f(1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad C_3^1 \frac{1}{2}^1 \frac{1}{2}^2 = \frac{3!}{1!2!} \frac{1}{2}^3 = 3 \cdot \frac{1}{2}^3 = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f(3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$



حزف X

۳- فرض کنید که X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامتر n, p باشد میانگین و انحراف معیار متغیر Y = n - X را حساب کنید. در مورد Y چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جواب:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, .. n \quad E(X) = np \quad \sigma_X = npq$$

$$f(x) = \binom{n}{n-x} (1-p)^{n-x} p^x \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$Y = n - X \Rightarrow f_Y(y) = \binom{n}{y} (1-p)^y p^{n-y} \quad y = 0, 1, 2, ..., n$$

Y دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n, q = 1 - p$ است.

$$E(Y) = nq \qquad \sigma_y = npq$$

۴- از هر ۳۰ سفارش خرید که روزانه به یک مرکز تهیه و توزیع کالا می‌رسد سه سفارش باید به منظور تکمیل اطلاعات آن به سفارش دهنده بازگردانده شود احتمال آن که در روز معینی در بررسی ۶ سفارش رسیده به مرکز حداکثر یک سفارش ناقص داشته باشیم چقدر است؟

جواب: متغیر X: تعداد سفارشات ناقص در بین ۶ سفارش بررسی شده است و احتمال ناقص بودن برابر ۰/۱ است.

$$p(X \le ۱) = \sum_{x=۰}^{۱} \binom{۶}{x} (۰/۱)^x (۰/۹)^{۶-x}$$

$$= ۰/۸۸۶$$ باکمک جدول دو جمله‌ای خواهیم داشت

۵- فرض کنید ۵% اقلامی که از یک ماشین تولیدی حاصل می‌شود معیوب باشد تعداد ۵ قلم از اقلام تولیدی این ماشین را انتخاب کرده‌ایم و آن‌ها را بازرسی نموده‌ایم احتمال آن که حداکثر دو عضو معیوب پیدا شود چیست؟

جواب: متغیر X: تعداد اقلام معیوب در بین ۵ قلم تولیدی و احتمال معیوب بودن ۰/۰۵ است.

$$p(x \le ۲) = \sum_{x=۰}^{۲} \binom{۵}{x} (۰/۰۵)^x (۰/۹۵)^{۵-x} = ۰/۹۹۹$$

۶- خانواده خاصی دارای ده فرزند است. به فرض آن که احتمال تولد پسر و دختر مساوی باشند احتمال پیش‌آمدهای زیر را حساب کنید.

الف: تعداد پسر ۵ و ۵ دختر در این خانواده باشند.

ب: تعداد پسرها بین ۳ تا ۸ باشند.

جواب: X تعداد فرزندان پسر خانواده ده فرزندی و احتمال پسر بودن برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

الف) $p(X = ۵) = ۰/۶۲۳ - ۰/۳۷۷ = ۰/۲۴۶$

$$p(۳ < X < ۸) = p(x \le ۷) - p(x \le ۳) = ۰/۹۴۵ - ۰/۱۷۲ = ۰/۷۷۳$$

توزیع احتمال چند جمله‌ای

۱- در یک گروه از دانشجویان ۵ نفر دانشجوی دوره کارشناسی، ۶ نفر دانشجوی کارشناسی ارشد و ۴ نفر دانشجوی دوره دکتری می‌باشد از بین آنان یک نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و مقطع تحصیلی او را سؤال می‌کنیم و سپس او به جای خود باز می‌گردد. این عمل را ۸ بار تکرار می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که در این ۸ بار ۴ بار دانشجوی دوره کارشناسی ۳ بار دانشجوی دوره کارشناسی ارشد و یکبار دانشجوی دوره دکتری انتخاب گردد.

جواب: احتمال انتخاب دانشجوی کارشناسی $\frac{۵}{۱۵}$، احتمال انتخاب دانشجوی ارشد $\frac{۶}{۱۵}$ و احتمال انتخاب دانشجوی

دکتری $\frac{۴}{۱۵}$ می‌باشد.

$$p(x_۱ = ۴, x_۲ = ۳, x_۳ = ۱) = \binom{۸}{۴\ ۳\ ۱} \left(\frac{۵}{۱۵}\right)^۴ \left(\frac{۶}{۱۵}\right)^۳ \left(\frac{۴}{۱۵}\right)^۱$$

$$= \frac{۸!}{۴!\,۳!} \left(\frac{۵}{۱۵}\right)^۴ \left(\frac{۶}{۱۵}\right)^۳ \left(\frac{۴}{۱۵}\right) = ۰/۰۶$$

۲- اگر مکعب سالمی را ۱۲ بار پرتاب کنیم. احتمال اینکه اعداد ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ هرکدام دو بار بیایند چقدر است؟

جواب: احتمال مشاهده هر عدد $\frac{۱}{۶}$ است و ۱۲ پرتاب داریم.

$$f(۲,۲,۲,۲,۲,۲) = \binom{۱۲}{۲\ ۲\ ۲\ ۲\ ۲\ ۲} \left(\frac{۱}{۶}\right)^{۱۲}$$

$$= \frac{۱۲!}{(۲!)^۶} \left(\frac{۱}{۶}\right)^{۱۲} = ۰/۰۰۲۴۴$$

توزیع احتمال هندسی

۱- احتمال آن‌که شخصی در کنکور کارشناسی ارشد قبول شود ۰/۸ است. احتمال این‌که شخص در سومین بار قبول شود؟

جواب: X: تعداد آزمایش‌ها تا اولین قبولی در آزمون، دارای توزیع هندسی با $p = ۰/۸$ است.

$$p(X = ۳) = (۰/۸)(۰/۲)^۲ = ۰/۰۳۲$$

۲- احتمال معیوب بودن کالائی ۰/۱ است. احتمال آن را حساب کنید که در یک بررسی کنترل کیفیت اولین کالای معیوب چهارمین کالای آزمایش شده باشد.

جواب: X: تعداد آزمایش‌ها تا مشاهده اولین کالای معیوب، $p = ۰/۱$ است دارای توزیع هندسی است.

$$p(X = ۴) = (۰/۱)(۰/۹)^۳ = ۰/۰۷۲۹$$

توزیع فوق هندسی

۱- در جعبه‌ای ۱۵ قطعه لوازم یدکی وجود دارد که ۱۰ تا از این قطعات سالم بوده و بقیه معیوبند اگر سه قطعه از این جعبه به تصادف برداشته شود احتمال پیش‌آمدهای زیر را حساب کنید.

الف: همه سالم باشند ب: ۲ سالم و یک معیوب باشد ج: حداقل ۲ سالم باشد.

جواب: متغیر تصادفی X را تعداد قطعه‌های سالم در نمونه سه‌تائی تعریف می‌کنیم. که دارای توزیع فوق هندسی با $n=۳ , k=۳ , N=۱۵$ است.

$$p(X=۳)=\frac{\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{\frac{۱۰!}{۳!۷!}}{\frac{۵!}{۳!۱۲!}}=\frac{۱۰!\,۱۲!}{۷!\,۵!}=\frac{۷۲۰}{۲۷۳۰}=۰/۲۶$$

$$p(X=۲)=\frac{\binom{۱۰}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۴۵\times۵}{۴۵۵}=\frac{۴۵}{۹۱}=۰/۴۹$$

$$p(X\geq ۲)=p(X=۲)+p(X=۳)$$
$$=۰/۲۶+۰/۴۹=۰/۷۵$$

۲- از ۶ کارمند شاغل در مؤسسه‌ای ۳ نفر آن‌ها دارای سابقه کار می‌باشند اگر ۴ به تصادف از این گروه انتخاب شود احتمال این‌که دقیقاً دو نفر از آن‌ها سابقه کار داشته باشند چیست؟

جواب: X تعداد کارمندان با سابقه کار در نمونه ۴ نفره تعریف می‌شود و دارای توزیع فوق هندسی با $n=۴ , k=۳ , N=۶$ است.

$$p(x=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

۳- فرض می‌کنیم ۶ داروی شیمیائی که ۳ عدد از آن‌ها سمی و سه عدد از آن‌ها غیر سمی باشند و از نظر ظاهر مشابهند در اختیار متصدی آزمایشگاه قرار دارد وی بدون تشخیص سه عدد از آن‌ها را به موشی تزریق می‌کند اگر بدانیم تزریق حداقل ۲ عدد باعث مرگ می‌شود احتمال تلف شدن موش چقدر است.

جواب: X تعداد داروهای تزریق شده تا موش تلف شود، تعریف می‌شود و دارای توزیع فوق هندسی با $n=۳ , k=۳ , N=۶$ است.

$$p(X\geq ۲)=p(X=۲)+p(X=۳)$$

$$=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۶}{۳}}=\frac{۹}{۲۰}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

۴- ۵۰ لاستیک در انبار شرکتی وجود دارد که ۱۰ تای آن‌ها معیوب است مشتری ۵ عدد از این لاستیک‌ها را می‌خرد توزیع احتمال را برای تعداد لاستیک‌های سالم خریداری شده بوسیله مشتری را بدست آورید. امید ریاضی و واریانس و انحراف معیار تعداد لاستیک‌های سالم خریداری شده را حساب کنید.

جواب: X تعداد لاستیک‌های سالم بین ۵ لاستیک خریداری؛ جامعه ۵۰ عدد و به دو قسمت سالم و معیوب است. X دارای توزیع فوق هندسی است و $n=۵\ ,\ k=۴۰\ ,\ N=۵۰$ می‌باشد.

توزیع احتمال متغیر

$$p(x)=\frac{\binom{۴۰}{x}\binom{۱۰}{۵-x}}{\binom{۵۰}{۵}} \qquad x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$$

$$E(x)=\frac{K}{N}.n=\left(\frac{۴۰}{۵۰}\right)۵=۴$$

$$V(x)=\left(\frac{N-n}{N-۱}\right)n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)=\left(\frac{۴۵}{۴۹}\right)(۵)\left(\frac{۴۰}{۵۰}\right)\left(\frac{۱۰}{۵۰}\right)=\frac{۳۶}{۴۹}$$

$$\sigma_x=\frac{۶}{۷}$$

۵- از یک گروه متشکل از ۲۵ دانشجوی رشته مدیریت و ۱۵ دانشجوی رشته حسابداری و ۱۰ دانشجوی رشته اقتصاد یک کمیته ۶ نفری تشکیل می‌دهیم چقدر احتمال دارد که از رشته‌های مدیریت، حسابداری و اقتصاد به ترتیب ۳، ۲، ۱ نفر در این کمیته باشند.

جواب: توزیع مورد نظر تعمیم فوق هندسی است.

$$p(۳,۲,۱)=\frac{\binom{۲۵}{۳}\binom{۱۵}{۲}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۵۰}{۶}}=۰/۰۷۶$$

توزیع احتمال پواسون

جدول ۱- می‌دانیم که ۲٪ فیوزهای وارداتی معیوب است احتمال آن که در یک نمونه ۲۰۰ تایی تعداد فیوزهای معیوب از ۵ بیشتر باشد چقدر است؟ ٤۷۰

جواب: X تعداد فیوزهای وارداتی معیوب در ۲۰۰ فیوز با احتمال ۲٪ دارای توزیع دو جمله‌ای است برای محاسبه احتمال از تقریب پواسون استفاده می‌کنیم با $\lambda=۴$ است. $P(X=۵)=٪۷۸۵$ ... $P(X=۰)+P(X=۱)$

$$p(X>۵)=۱-p(X\leq۵)=۱-۰/۷۸۵=۰/۲۱۵$$

۲- یک شرکت بیمه مشاهده کرده است که ۰/۰۰۰۵ جمعیت یک شهر در اثر بیماری مالاریا از بین می‌روند شرکت ۱۰۰۰۰ نفر را بر ضد این حادثه بیمه می‌کند احتمال این که در سال مجبور باشد بیش از سه نفر خسارت بپردازد چقدر است؟

جواب: X تعداد افراد بیمار در بین ۱۰۰۰۰ نفر با احتمال بیماری برابر ۰/۰۰۰۵؛ دارای توزیع دو جمله‌ای است ولی برای محاسبع احتمال از تقریب پواسون استفاده می‌شود.

$$p(X>۳)=۱-p(X\leq۳) \qquad \lambda=n\ p=۵$$

طبق جدول ٤۷۰

۰/۰۰۶۷ + ۰/۰۳۳۷ + ۰/۰۸٤۲ + ۰/۱٤۰٤ = ۰/۲۶۵

$$= ۱ - ۰/۲۶۵ = ۰/۷۳۵$$

۳- یک مرکز تلفن خودکار هنگام شلوغی به طور متوسط در یک ساعت ۳۰۰ مکالمه دریافت می‌کند و این مرکز قادر است در هر دقیقه تنها ۱۰ ارتباط برقرار کند مطلوب است احتمال آن‌که این مرکز در یک دقیقه معین قادر به برقراری ارتباط نباشد.

$\frac{۳۰۰}{۶۰} = ۵$

جواب: X تعداد تلفن‌ها در دقیقه دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۵$ است.

$$p(x > ۱۰) = ۱ - p(x \leq ۱۰)$$

$(۰/۰۰۶۷) + (۰/۰۳۳۷) + \dots + (۰/۰۱۸۱)$

$P(X=0) \quad \dots \quad P(X=10)$

$$= ۱ - ۰/۹۸۶۳ = ۰/۰۱۳۷$$

۴- به طور متوسط در هر ساعت ۵ مرتبه به اداره تعمیرات مخابرات تلفن زده می‌شود احتمال این‌که دقیقاً ۳ تلفن جهت تعمیرات در یک ساعت زده شود چقدر است؟

جواب: X دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۵$ است.

$$p(X = ۳) = \frac{e^{-۵}(۵)^۳}{۳!} = ۰/۱۴۰۴$$

۵- ۵۰۰ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال این‌که x نفر آن‌ها در روز اول سال متولد شده باشند چیست؟ احتمال این‌که دو نفر آن‌ها روز اول متولد شده باشند چیست؟

جواب: X دارای توزیع دو جمله‌ای با $n = ۵۰۰$ ، $p = \frac{۱}{۳۶۵}$ است.

$$f(x) = \binom{۵۰۰}{x} \left(\frac{۱}{۳۶۵}\right)^x \left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^{۵۰۰-x} \qquad x = ۰, ۱, \dots, ۱۰$$

$n.p = ۵۰۰ \times \frac{۱}{۳۶۵} = ۱/٤$

برای مقدار احتمال از توزیع پواسون با $\lambda = ۱/۴$ می‌باشد.

$$p(X = ۲) = ۰/۲۴۱۷$$

۶- احتمال آن‌که در جامعه تهران افراد درآمد ماهیانه بیش از یک میلیون تومان باشد $p = ۰/۰۰۱$ است مطلوب است احتمال آن‌که در یک نمونه ۴۰۰۰ نفری تعداد افراد با این درآمد کمتر از ۲ نفر باشد.

جواب: X تعداد افراد با درآمد بیش از یک میلیون تومان در یک نمونه ۴۰۰۰ تایی با احتمال $p = ۰/۰۰۱$ که در محاسبه احتمالات از تقریب پواسون استفاده می‌کنیم با $\lambda = ۴$

$$p(X < ۲) = p(X \leq ۱) = ۰/۰۹۱۶$$

$۰/۰۱۸۳ + ۰/۰۷۳۳ = ۰/۰۹۱۶$

۷- ۳۰۰ مسافر برای هواپیما جا رزرو کرده‌اند اگر احتمال نیامد مسافری که جا رزرو کرده است طبق تجارت گذشته برابر ۰/۰۱ باشد. احتمال این‌که ۳ نفر مسافر نیایند چقدر است؟

جواب: X تعداد مسافرانی که جا رزرو کرده‌اند ولی نیایند بین ۳۰۰ نفر با احتمال ۰/۰۱ از توزیع دو جمله‌ای تبعیت می‌کند که در محاسبات از تقریب پواسون با $\lambda = ۳$ استفاده می‌شود

$$p(X=۳)=\frac{e^{-۳}(۳)^{۳}}{۳!}=۰/۲۲۴$$

۸- اگر تعداد مراجعین به بانک بطور متوسط در هر ساعت ۷۲ نفر باشد. احتمال این‌که ۴ نفر در سه دقیقه اول به بانک مراجعه کنند چقدر است؟

جواب: تعداد مراجعین در سه دقیقه اول از قانون پواسون با $\lambda=\frac{۷۲}{۲۰}=۳/۶$ تبعیت می‌کند. $\frac{۷۲}{۶۰}=۱/۲\times۳=۳/۶$

$$p(X=۴)=\frac{e^{-۳/۴}(۳/۴)^{۴}}{۴!}=۰/۱۹۱$$

۹- در یک امتحان تستی چند جوابی ۲۰ سؤال داده شده است، هر سؤالی دارای ۴ جواب بوده است که فقط یکی از آن‌ها درست است. اگر دانشجوئی جواب صحیح را فقط حدس بزند احتمال این‌که به ۳ سؤال جواب صحیح بدهد چقدر است؟

جواب: تعداد جواب‌های صحیح در بین ۲۰ سؤال با احتمال $p=\frac{۱}{۴}$ دارای توزیع دو جمله‌ای است.

$$p(X=۳)=\binom{۲۰}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۷}$$

$$=\frac{۲۰\times۱۹\times۱۸}{۶}(۰/۲۵)^{۳}(۰/۷۵)^{۱۷}=۰/۱۳۴$$

اگر مقدار احتمال را از جدول پواسون با $p(X=۳)=\frac{e^{-۵}۵^{۳}}{۳!}=۰/۱۴$

۱۰- احتمال آن‌که در یک کارخانه پیچ و مهره‌سازی یک پیچ معیوب باشد برابر $p=۰/۰۱۵$ می‌باشد احتمال آن که یک جعبه پیچ صدتایی پیچ معیوب نداشته باشد چقدر است؟ احتمال این‌که دو پیچ معیوب داشته باشد چیست؟

جواب: X دارای توزیع دو جمله‌ای با $n=۱۰۰$, $p=۰/۰۱۵$ است. می‌توان احتمالات را از توزیع پواسون محاسبه کرد با $\lambda=۱/۵$

$$p(X=۰)=\frac{e^{-۱/۵}(۱/۵)^{۰}}{۰!}=۰/۲۲۳۱$$

$$p(X=۲)=\frac{e^{-۱/۵}(۱/۵)^{۲}}{۲!}=۰/۲۵۱$$

۱۱- در یک تیراندازی احتمال اصابت هر تیر به هدف برابر ۰/۰۱ است احتمال آن‌که در پانصد تیراندازی حداقل دوبار هدف مورد اصابت قرار گیرد چیست؟ ۲ وبیشتر

جواب: X تعداد تیرهایی که در ۵۰۰ تیراندازی به هدف بخورد با $p=۰/۰۱$ دارای توزیع دو جمله‌ای است. که

برای محاسبه احتمالات از توزیع پواسون با $\lambda = ۵$ محاسبه می‌شود.

$$p(X \geq ۲) = ۱ - p(X \leq ۱)$$

$$= ۱ - ۰/۰۴۰۴ = ۰/۹۵۹۶$$

۰/۰۰۹۷۸ /۰۳۳۷

۱۲- تعداد دانشجویان دانشکده ۷۳۰ نفر است محتملترین تعداد دانشجویان‌که در روز اول فروردین متولد شده باشند چیست؟ احتمال این‌که ۳ دانشجو روز تولدشان یکسان باشد کدام است؟

جواب: X تعداد دانشجویان متولد در روز اولین فروردین در بین ۷۳۰ نفر می‌باشد.

$$E(x) = ۷۳۰ \left(\frac{۱}{۳۶۵}\right) = ۲$$

p (سه نفر تولدشان یکسان باشد) $= p(X = ۳) = ۰/۱۸۰۴$

از توزیع پواسون با $\lambda = ۲$ محاسبه می‌شود.

ص ۱۳- احتمال تولید مته‌های با شکنندگی زیاد (معیوب) مساوی ۰/۰۲ است این مته‌ها را در بسته‌های ۱۰۰ تایی بسته‌بندی می‌کنیم احتمال آن‌که در جعبه مته معیوب نباشد چیست؟

احتمال آن‌که مته‌های معیوب در جعبه ۳ عدد باشد چیست؟ چند مته در یک جعبه قرار دهیم تا با احتمال بیش از ٪۹۰ حداقل ۱۰۰ مته خوب در جعبه داشته باشیم.

جواب: X تعداد مته‌های معیوب در بسته‌های ۱۰۰ تایی با $p = ۰/۰۲$ دارای توزیع دو جمله‌ای است و برای احتمال‌ها از توزیع پواسون با $\lambda = ۲$ محاسبه می‌گردد.

$$p(X = ۰) = ۰/۱۳۵۳$$

$$p(X = ۳) = ۰/۱۸۰۴$$

p (حداقل ۱۰۰ مته خوب) $= p(X < n - ۱۰۰) \geq ۰/۹$

س ۱۴- یک شرکت تعداد ۱۰۰۰۰ بیمه‌نامه برای افرادی با سن و گروه اجتماعی یکسان صادر کرده است. احتمال مرگ هر شخص در عرض یک سال مساوی ٪۰/۰۶ است در ابتدای هر سال هر بیمه شده مبلغ ۱۲۰۰۰ تومان از بابت بیمه خود می‌پردازد اگر در عرض آن سال این شخص بمیرد بازماندگان او ده میلیون تومان از شرکت بیمه دریافت می‌دارند. احتمال این‌که در عرض یک سال خساراتی متوجه بیمه شده شود چقدر است؟ احتمال این‌که این شخص حداقل مقدار ۴۰ میلیون تومان یا ۶۰ و یا ۸۰ تومان نفع کند چقدر است؟ |الزکسی نمیرد خسارتی متوجه شرکت بیمه نمی‌شود

الف: X تعداد افرادی‌که در بین $n = ۱۰۰۰۰$ فوت‌کنند با $p = ۰/۰۰۰۶$ ؛ دارای توزیع دو جمله‌ای است‌که برای محاسبه احتمالات از توزیع پواسون با $\lambda = ۶$ محاسبه می‌گردد.

$$p(X \neq ۰) = ۱ - p(X = ۰) = ۱ - ۰/۰۰۲۵ = ۰/۹۹۷۵$$

? برای حداقل ۴۰ میلیون تومان باید $x \geq ۲$، ۶۰ تومان برابر $x \geq ۳$، ۸۰ تومان $x \geq ۴$ است.

$p(X \geq ۲) = ۱ - p(X \leq ۱) = ۱ - ۰/۰۱۷۴ = ۰/۹۸۲۶$

$p(X \geq ۳) = ۱ - p(X \leq ۲) = ۱ - ۰/۰۶۲ = ۰/۹۳۸$

$p(X \geq ۴) = ۱ - p(X \leq ۳) = ۱ - ۰/۱۵۱۲ = ۰/۸۴۸۸$

۱۵- اگر احتمال باریدن در هر روز مهرماه برابر ۰/۰۲ باشد احتمال آن‌که در این ماه بیش از ۳ روز باران نیاید چیست؟

جواب: X تعداد روزهای بارانی در مهرماه دارای توزیع دوجمله‌ای با $n = ۳۰$, $p = ۰/۰۲$ است که برای احتمالات از توزیع پواسون با $\lambda = ۰/۶$ محاسبه می‌گردد.

$p(x \leq ۳) = ۰/۹۹۶۶$

$P(x=۰) + P(x=۱) - - P(x=۳) =$ مثل جدول ۰/۷۰ ۴ احتمالات محاسبه شود.

۱۶- احتمال آن‌که هر شخص بیمه شده در عرض یک سال در حوادث مختلف بمیرد برابر ۰/۰۶ % است. احتمال آن‌که یک شرکت بیمه که ۱۰۰۰۰ مشتری را بیمه کرده است در عرض یک سال به بیش از ۳ بیمه شده خسارت بدهد چیست؟

$\lambda = nP = ۰/۰۰۰۶ \times ۱۰۰۰۰$

جواب: احتمال را از توزیع پواسون با $\lambda = ۶$ محاسبه می‌گردد.

$p(x > ۳) = ۱ - p(x \leq ۳) = ۱ - ۰/۱۵۱۲ = ۰/۸۴۸۸$

۱۷- تعداد نفت‌کش‌هایی که هر روز به پالایشگاه معینی می‌رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۲$ می‌باشد امکانات بندری موجود می‌تواند سه نفت‌کش را در هر روز تخلیه کند چنانچه بیش سه از نفت‌کش وارد بندر شوند نفت‌کش‌های اضافی باید به بندر دیگری فرستاده شوند احتمال فرستادن نفت‌کش‌ها به بندر دیگر چیست؟ امکانات این بندر به چه قدر باید برسد تا تقریباً ۹۰% از نفت‌کش‌ها را بتوان تخلیه نمود امید ریاضی تعداد نفت‌کش‌های رسیده در هر روز چیست؟ محتملترین تعداد نفت‌کش‌های رسیده در هر روز چیست؟ امید ریاضی تعداد نفت‌کش‌های تخلیه شده در روز چیست؟

۰/۱۸۰۴ + ... ۰/۱۲۵۳ ...

$p(x > ۳) = ۱ - p(x \leq ۳) = ۱ - ۰/۸۵۷۱ = ۰/۱۴۲۹$

جواب: امید ریاضی تعداد نفت‌کش‌های رسیده در هر روز برابر $\lambda = ۲$ است.

$p(x \leq a) \simeq ۰/۹ \qquad a \simeq \qquad ۳ < a < ۴$

مجموعه مسائل توزیع احتمال پیوسته

۱- تابع f با ضابطه $f(x) = k(-x^۲ + ۱۰x)$ در دامنه $(۰, ۱۰)$ تعریف شده است و تابع چگالی یک متغیر تصادفی است.

الف: مقدار k را حساب کنید.