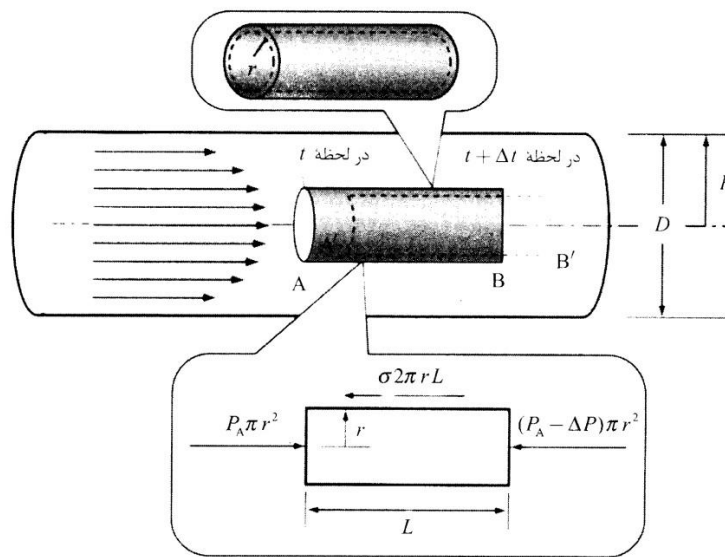


نمونه سرعت سیال در ناحیه جریان کامل توسعه یافته

- تقسیم نمونه سرعت در ناحیه دردی شکل است رابطه بنامه شعاعی در محوری به نمودار نشان داده اند
- در ناحیه توسعه یافته نیروی دراز و دراز از یک سو و نیروی دراز و دراز از جهت مخالف
- تحلیل موازنه نیرو بر روی یک عنصر سیال با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن



شکل ۵-۱۵ موازنه نیرو برای مایع در حال جریان در یک لوله.

سرعت در محوری جریان کامل توسعه یافته با اثرش ۲ کاهش می یابد

$$\begin{aligned}
 P_A \pi r^2 &= \text{نیروی دراز در مکان A} \\
 (P_A - \Delta P) \pi r^2 &= \text{نیروی دراز در مکان B} \\
 \Delta P (2\pi r L) &= \text{نیروی مخالف دراز} \\
 &\rightarrow \text{تغییر دراز}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_A &\leftarrow \text{نیروی دراز در A} \\
 P_B &\leftarrow \text{نیروی دراز در B} \\
 \Delta P = P_A - P_B &\leftarrow \text{تغییر دراز از A به B}
 \end{aligned}$$

$$F_x = ma_x$$

$$a_x = 0$$

$$F_x = 0$$

طبق قانون دوم حرکت نیوتن، نیرو در جهت x
در این نقطه صاف است.

$$\sum F_x = \sum ma_x = 0$$

$$P_A(Rr^2) - (P_A - \Delta P)Rr^2 - \sigma(2RrL) = 0$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2\sigma}{r}$$

با ساده سازی

$$\sigma = -\mu \frac{du}{dr}$$

رابطه تنش برشی در محفظه استوانه

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta P}{2L\mu}\right)r$$

جایگذاری در معادله بالا

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

نیم رخ سرعت برای حالت آرام در یک لوله افقی
در حالت توسعه یافته

$$u(r) = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

معادله کلی

$$r=0 \longrightarrow u = u_{max}$$

در محور

$$u_{max} = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

$$\dot{V} = \int u(r) dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r dr$$

محاسبه شدت جریان جرمی

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \mu L}$$

قانون پوازویل

برای دو برابر شدن قطر به شش برابر شدن

$$\bar{u} = \frac{V}{\pi R^2}$$

سرعت متوسط برای نسبت شدت جریان جرمی به سطح مقطع لوله

$$\bar{u} = \frac{\Delta P R^2}{8 \mu L}$$

جایگزینی

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = 0.5$$

جریان آرام

تقسیم دو معادله

تحلیل منفرجه سرعت در جریان متلاطم در ناحیه کانال توسعه یافته از رابطه تجربی

$$\frac{u(r)}{u_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$$

ن: تمامی از عدد رینولدز و در اغلب موارد 7 > n

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$$

منفرجه سرعت در شرایط متلاطم

رابطه قانون توان یک بر هفت بلاسیوس (Blasius)

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = 0.82$$

جریان متلاطم

برای جریان متلاطم سرعت میانی 82٪ سرعت حداکثر است

مثال: سیاهی تحت شرایط آیریم در لوله استوانه‌ای با قطر 2 cm جریان دارد. افت فشار 330 Pa ، گرانروی سیال $5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ و طول لوله 3 m است. سرعت میانگین و سرعت سیال را در مکان‌های شعاعی مختلف در لوله محاسبه نماید.

$$u = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

با معادله فوق سرعت در مکان‌های مختلف

$$r = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 \text{ cm}$$

$$r = 0 \text{ cm} \rightarrow u = \frac{330 \text{ Pa}}{4 \times 5 \text{ Pa}\cdot\text{s} \times 3 \text{ m}} (0.01 - 0)^2 \text{ m}^2 = 5.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$r = 0.25 \text{ cm} \rightarrow u = 5.16 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$r = 0.5 \text{ cm} \rightarrow u = 4.13 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$r = 0.75 \text{ cm} \rightarrow u = 2.41 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$r = 1 \text{ cm} \rightarrow u = \frac{330 \text{ Pa}}{4 \times 5 \text{ Pa}\cdot\text{s} \times 3 \text{ m}} (0 - 0)^2 \text{ m}^2 = 0 \text{ m/s}$$

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = 0.5 \rightarrow \bar{u} = u_{\max} \times 0.5 = 5.5 \times 10^{-4} \text{ m/s} \times 0.5 = 2.75 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

مثال: شیراز لوله‌ای به قطر 2.291 cm با سرعت میانگین 0.459 m/s عبور می‌کند. چگالی شیر 1032 kg/m^3 و گرانروی آن $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ در دمای محط است. سرعت حداکثر جریان شیر را در لوله می‌توان به دست آورد؟

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} = \frac{1032 \text{ kg/m}^3 \times 0.459 \text{ m/s} \times 0.02291 \text{ m}}{1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}}$$

$$N_{Re} = 8159.5$$

جریان متلاطم

$$u_{max} = \frac{\bar{u}}{0.82} = \frac{0.459 \text{ m/s}}{0.82} = 0.559 \text{ m/s}$$

مثال: لوله‌ای به قطر داخلی 2 cm و دامن 2 cm برای اندازه‌گیری گرانروی یک سیال نیوتنی با چگالی 998 kg/m^3 به کار می‌رود. هنگامی که شدت جریان جرمی 1 kg/s است، افت فشار 25 kPa اندازه‌گیری می‌شود. گرانروی سیال را می‌توان به دست آورد؟

$$\dot{m} = \rho \bar{u} A = \rho \bar{u} (\pi R^2) \rightarrow \bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho \pi R^2} = \frac{1 \text{ kg/s}}{998 \text{ kg/m}^3 \times \pi \times (0.02 \text{ m})^2} = 0.797 \text{ m/s}$$

فرض می‌شود نفوذ جریان سیال آرام است با استفاده از معادله هagen-Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 L \mu} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \bar{u} (\pi R^2) \rightarrow \mu = \frac{R^2 \Delta P}{8 L \bar{u}} = \frac{(0.02 \text{ m})^2 (2500 \text{ Pa})}{8 (0.2 \text{ m}) (0.797 \text{ m/s})} =$$

$$0.784 \text{ Pa.s}$$

برای امتحان درستی فرض، عدد N_{Re} را به دست می آوریم

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} = \frac{(998 \text{ kg/m}^3)(0.797 \text{ m/s})(0.04 \text{ m})}{0.784 \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 40.6$$

فرض جریان آرام درست است $40.6 < 2100$

نیز در فاشی از اصطکاک

نیز در حرکت مایع در یک لوله علی کرانه که اصطکاک بین مایع و سطح دیواره لوله را می بیند. حرکت لایه مایع در مرکز لوله است. اصطکاک بین مایع و سطح دیواره لوله را می بیند. اصطکاک بین مایع و سطح دیواره لوله را می بیند.

نیز در اصطکاک لغزنده فشرده اصطکاک (f) را می بیند:

برای جریان آرام:

$$f = \frac{\text{تنش برشی در دیواره}}{\text{انرژی جنبشی مایع}} = \frac{\tau_w}{\rho \bar{u}^2 / 2}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2 \tau_w}{r} \xrightarrow{r = D/2} \tau_w = \frac{D \Delta P}{4L}$$

$$f = \frac{\Delta P D}{2L \rho \bar{u}^2} \longrightarrow E_f = \frac{\Delta P}{f} = 2f \frac{\bar{u}^2 L}{D}$$

معادله فانینگ (Fanning)

$$\bar{u} = \frac{\Delta p r^2}{8 \mu L} \xrightarrow{r=D/2} \Delta p = \frac{32 \mu \bar{u} L}{D^2}$$

معادله لواز دلی

با جایگذاری در معادله قبل

$$f = \frac{16}{N_{Re}}$$

f: ضریب اصطکاک فاشینگ

ضریب اصطکاک دایسی: بسیار بزرگتر از ضریب اصطکاک فاشینگ

$$f = \frac{64}{N_{Re}}$$

هندسی مکاشف و فشان

برای جریان استقامتی، مقدار از نمودار برآورد می‌شود

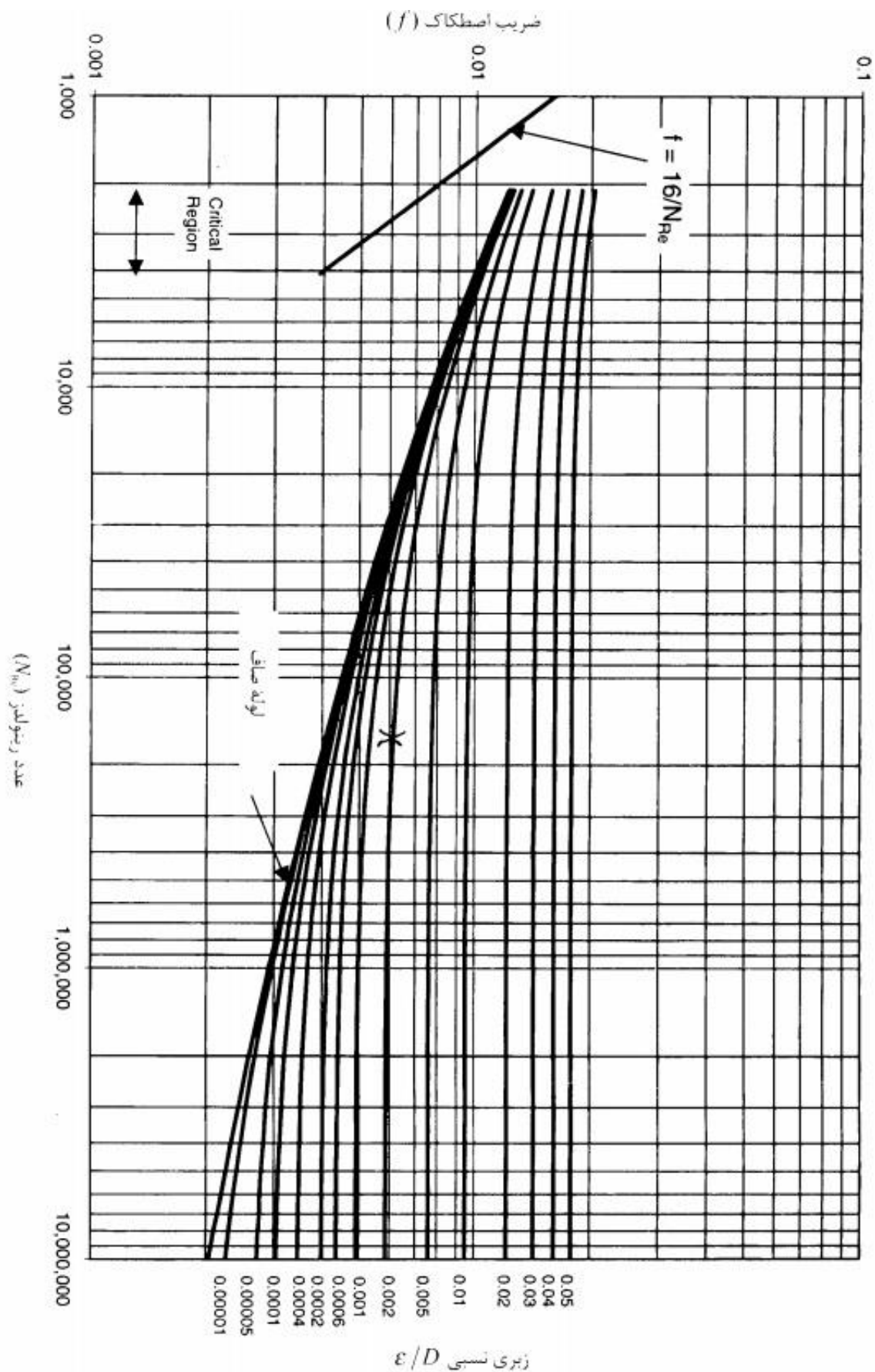
Moody chart: ضریب اصطکاک تابع از عدد رینولدز

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -3.6 \log \left[\frac{6.9}{N_{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad \text{Haaland equation}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \sqrt{3.7 D/\epsilon} \quad \text{colebrook equation}$$

زبری یا زبری مطلق: میانگین ارتفاع برآمدگی بسیار کوچک سطح داخلی لوله بر حسب متر

زبری نسبی: زبری مطلق به قطر لوله



شکل ۵-۱۶ دیاگرام مودی برای ضریب اصطکاک فاینینگ. زبری معادل برای لوله‌های نو (ϵ بر حسب متر) جدن، ۱۰-۲۵۹؛ لوله کشیده شده ۱۰-۱۵۲۳۵، آهن گالوانیزه، ۱۰-۱۵۲؛ فولاد یا آهن کار شده ۱۰-۱۸۷

(L.F. Moody, 1944, *Trans. ASME*, 66, 671)

مثال: آب در دمای 30°C از میان یک بخش ۳ متری از یک لوله فولادی به قطر 2.5 cm با شدت جریان جری 2 kg/s عبور می‌شود. افت فشار ناشی از اصطکاک را در این بخش لوله محاسبه نمایید.

با توجه به جدول خواص فیزیکی آب در دمای 30°C

$$\rho = 995.7\text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 792.377 \times 10^{-6}\text{ Pa.s}$$

$$L = 30\text{ m}, \quad D = 2.5\text{ cm}, \quad \dot{m} = 2\text{ kg/s}$$

$$\dot{m} = A \cdot \bar{u} \cdot \rho \rightarrow$$

$$\bar{u} = \frac{2\text{ kg/s}}{995.7\text{ kg/m}^3 \times \frac{\pi}{4} \times (0.025\text{ m})^2} = 4.092\text{ m/s}$$

عدد رینولدز

$$N_{Re} = \frac{\bar{u} \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{4.092\text{ m/s} \times 0.025\text{ m} \times 995.7\text{ kg/m}^3}{792.377 \times 10^{-6}\text{ Pa.s}} = 128550$$

ضریب اصطکاک

$$\epsilon/D = \frac{45.7 \times 10^{-6}\text{ m}}{0.025\text{ m}} = 1.828 \times 10^{-3}$$

$\epsilon = 45.7 \times 10^{-6}\text{ m}$ → نوع لوله فولادی

$$f = 0.006$$

با استفاده از عدد رینولدز و ضریب

$$\frac{\Delta P}{f} = 2f \frac{\bar{u}^2 L}{D}$$

معادله هانسن

$$\frac{\Delta P}{f} = 2 \times 0.006 \times \frac{(4.092 \text{ m/s})^2 (30 \text{ m})}{(0.025 \text{ m})} = 241.12 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\frac{\Delta P}{f} = 241.12 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 241.12 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} = 241.12 \text{ J/kg}$$

اثر مغز شده در اثر اصطکاک بر پایه داده جرم

$$\Delta P = (241.12 \text{ J/kg}) (995.7 \text{ kg/m}^3) = 240.08 \times 10^3 \text{ kg/ms}^2$$

$$\Delta P = 240.08 \text{ kPa}$$

مثال: یک مایع نیوتنی با شدت جریان جرمی 0.05 kg/s ، گرانروی 2 cP و چگالی 1000 kg/m^3 از یک لوله بهداشتی به قطر $1/4$ (0.02291 m) عبور می‌کند. افت فشار در لوله 170 Pa است. طول لوله را محاسبه کنید!

$$\dot{m} = \bar{u} \cdot A \cdot f \rightarrow \bar{u} = \frac{\dot{m}}{f \pi D^2} = \frac{0.05 \text{ kg/s}}{1000 \text{ kg/m}^3 \times \pi \times (0.02291 \text{ m})^2} = 0.12 \text{ m/s}$$

$$N_{Re} = \frac{f \bar{u} D}{\mu} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.12 \text{ m/s} \times 0.02291 \text{ m}}{2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 1374.6$$

پس جریان آرام است

$$f = \frac{16}{N_{Re}} = \frac{16}{1374.6} = 0.01164$$

$$\frac{\Delta P}{f} = 2 \rho \frac{\bar{u}^2 L}{D}$$

مساحة مقطع

$$L = \frac{\Delta P D}{2 \rho \bar{u}^2 f} = \frac{70 \text{ Pa} \times 0.02291 \text{ m}}{2 \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times (0.12 \text{ m/s})^2 \times 0.01164} = 4.78 \text{ m}$$