ریاضیات عمومی2

فصل اول: بردارها

فصل دوم: هندسه تحلیلی در فضا

فصل سوم: توابع برداری در فضا، مشتق و انتگرال آنها

فصل چهارم: توابع چند متغیره

فصل پنجم: انتگرال های دوگانه

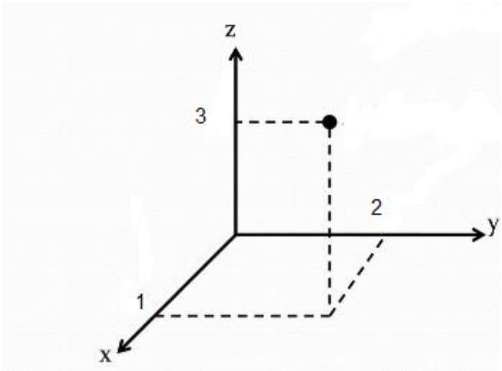
فصل ششم: اعداد مختلط

منبع: ریاضیات عمومی 2 مولف محمدعلی کرایه چیان

فصل اول: بردارها

در مباحث مختلف علمی با دو نوع کمیت برخورد می کنیم
کمیت های عددی: کمیت هایی که فقط بزرگی آن ها موردنظر است. مانند طول، جرم، زمان، دما و ...
کمیت های برداری: کمیت هایی که غیر از بزرگی، جهت آنها نیز موردنظر است. مانند سرعت، شتاب، نیرو و ...

در این فصل مفهوم بردار و ویژگی های آن را در فضا (فضای سه بعدی) توضیح می دهیم.
معرفی فضای سه بعدیR^3: برای نمایش هر نقطه در فضا سه محور دو به دو عمودبرهم که از یک نقطه ثابت می‌گذرند را درنظر می‌گیریم. این نقطه ثابت را مبدا نامیده و با O نمایش می‌دهیم. محور xها و محورyها را در یک صفحه افقی و محور z ها را عمود بر این صفحه درنظر می‌گیریم



هر نقطه در فضای R^3 را با سه تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) نشان می‌دهند. به طور مثال برای مشخص کردن نقطه $A = (1,2,3)$ در فضای R^3 ابتدا در صفحه xy محل تقاطع نقاط 1 و 2 را مشخص می‌کنیم سپس به ارتفاع 3 تا بالا می‌رویم

تعریف: هر پاره خط جهت‌دار در فضا را بردار می‌نامیم. دو بردار را مساوی می‌گوییم اگر دارای طول و جهت یکسان باشند.

هرگاه A و B دو نقطه در فضا باشند، پاره خط جهت‌داری که نقطهA را به B وصل می‌کند را بردار AB نامیده و مختصات آن را با پرانتز شکسته به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle \boldsymbol{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A} \rangle$$

مولفه های بردار $\overrightarrow{AB}$

طول بردار: هرگاه A و B دو نقطه در فضا باشند، طول بردار $\overrightarrow{AB}$ با طول پاره خط $\overrightarrow{AB}$ برابر است و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{x_B - x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B - y_A})^2 + (\boldsymbol{z_B - z_A})^2}$$

نکته: اگر بجای مختصات دونقطه مختصات بردار داده شد، به صورت زیر طول بردار را محاسبه می‌کنیم.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle \boldsymbol{x_{AB}, y_{AB}, z_{AB}} \rangle$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{x_{AB}}^2 + \boldsymbol{y_{AB}}^2 + \boldsymbol{z_{AB}}^2}$$

ضرب یک عدد در بردار: هرگاه t یک عدد حقیقی و $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ یک بردار باشد، بردار $t\vec{a}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$t\vec{a}=\langle ta_1,ta_2,ta_3\rangle$$

بردارهای موازی: دو بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ را موازی گوییم هرگاه عدد حقیقی مانند t موجود باشد به طوریکه $\vec{a}=t\vec{b}$

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی و دارای مولفه های غیرصفر باشند داریم: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

بطور مثال بردارهای $\vec{a}=\langle 2,1,3\rangle$ و $\vec{b}=\langle 6,3,9\rangle$ موازی یکدیگر هستند.

جمع و تفاضل دو بردار: مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\boldsymbol{\vec{a}\pm\vec{b}=\langle a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\rangle}$$

مثال: با فرض $\vec{a}=\langle 2,1,3\rangle$ و $\vec{b}=\langle -1,2,2\rangle$ طول بردارهای $2\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+3\vec{b}$ را محاسبه کنید.

جواب:

$$2\vec{a}-\vec{b}=\langle 2\times 2+1,2\times 1-2,2\times 3-2\rangle=\langle 5,0,4\rangle$$

$$\vec{a}+3\vec{b}=\langle 2+3\times(-1),1+3\times 2,3+3\times 2\rangle=\langle -1,7,9\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{2a-b}\right|=\sqrt{5^2+0^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$\left|\overrightarrow{a+3b}\right|=\sqrt{(-1)^2+7^2+9^2}=\sqrt{1+49+81}=\sqrt{131}$$

بردار یکانی: برداری که با بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ موازی و هم جهت بوده و طول آن برابر یک باشد. بردار یکانی یا بردار یکه $\vec{a}$ نامیده و با $\overrightarrow{u_a}$ نمایش می دهیم.

بردار $\overrightarrow{u_a}$ به صورت زیر محاسبه می شود: $\overrightarrow{u_a}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

مثال: بردار یکانی بردارهای $\vec{a}=\langle 2,-1,2\rangle$ و $\vec{b}=\langle 3,1,4\rangle$ را بدست آورید.

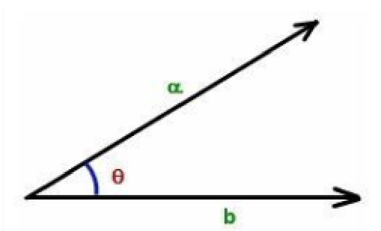
$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$$

$$\overrightarrow{u_a}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{3}\langle 2,-1,2\rangle=\left\langle\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right\rangle$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+1^2+4^2}=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{u_b}=\frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{26}}\langle 3,1,4\rangle=\left\langle\frac{3}{\sqrt{26}},\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{4}{\sqrt{26}}\right\rangle$$

زاویه بین دو بردار: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند می‌توان آنها را چنان جابجا کرد که مبدا آنها (ابتدای آنها) برهم منطبق شود. زاویه بین این دو پاره خط را زاویه بین دو بردار می‌گوییم.
هرگاه θ زاویه بین دو بردار باشد $2\pi - \theta$ را نیز می‌توان زاویه بین دو بردار تصور کرد ولی معمولا زاویه بین دو بردار را چنان در نظر می‌گیریم که بین 0 و 180 (در فاصله $[0, \pi]$) باشد.



ضرب داخلی دو بردار: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و زاویه بین آنها θ باشد، ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت مقابل تعریف می کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ضرب داخلی را ضرب نقطه ای یا ضرب عددی نیز می گویند

نکته: روش دیگر برای بدست آوردن ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ به صورت زیر است.

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

در واقع وقتی در سوال اندازه دو بردار و زاویه بین دو بردار داده شد برای بدست آوردن ضرب داخلی از روش اول و وقتی مولفه ها داده شد از روش دوم استفاده می‌کنیم.

مثال: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با طول‌های 2 و 5 باشند و زاویه بین آن‌ها 30 درجه باشد. مقدار ضرب داخلی آن‌ها را بدست آورید.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 \times 5 \times \cos 30 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

مثال: ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = \langle 1, -2,4 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2,3,5 \rangle$ را بدست آورید

$$\vec{a}.\vec{b} = 1 \times 2 + (-2) \times 3 + 4 \times 5 = 2 - 6 + 20 = 16$$

ویژگی های ضرب داخلی

1. حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.
2. همواره داریم: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
3. برای هر عدد حقیقی t داریم: $(t\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(t\vec{b}) = t(\vec{a}.\vec{b})$
4. همواره داریم: $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$

5. همواره داریم: $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}\,|^2$ زیرا $\cos 0 = 1$

$$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}\,||\vec{a}\,|\cos 0 = |\vec{a}\,|^2$$

6. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = 0$ (زیرا $\cos 90 = 0$)

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با طول های به ترتیب 2 و 3 و زاویه 120 درجه باشند. طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را با استفاده از ویژگی های ضرب داخلی محاسبه کنید.

$$\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{a}.2\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.2\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$= 4\vec{a}.\vec{a} - 2\vec{a}.\ \vec{b} - 2\vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}.\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\, 120\ \ + \left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 4 \times 2^2 - 4 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3^2 = 16 + 12 + 9 = 37$$

$$\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{37}$$

مثال: داریم $\vec{a} = \langle 2, t, 3\rangle$ و $\langle -4,2,1\rangle = \vec{b}$، مقدار t را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند.

جواب: چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود هستند داریم $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$$\vec{a}.\vec{b} = 2 \times (-4) + 2 \times t + 3 \times 1 = 0$$

$$-8 + 2t + 3 = 0$$

$$2t - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 2t = 5 \quad \rightarrow \quad t = \frac{5}{2} = 2.5$$

محاسبه زاویه بین دو بردار: اگر θ زاویه بین دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ باشد، به کمک ضرب داخلی دو بردار، می توان فرمول زیر را برای محاسبه θ ارائه کرد.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ را محاسبه کنید.

جواب: $\vec{b} = \langle 2, -3,2\rangle$ و $\vec{a} = \langle 0,3,4\rangle$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \times 2 + 3 \times (-3) + 4 \times 2 = -9 + 8 = -1$$

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}) = \cos^{-1}(\frac{-1}{5\sqrt{17}}) \approx 92.78$$

مثال: طول بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب 3 و 4 و زاویه بین آنها 60 درجه است. زاویه بین دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ را بدست آورید.

جواب:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\ \vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60 \ + |\vec{b}|^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4^2$$

$$= 9 + 12 + 16 = 37$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60 \ + |\vec{b}|^2$$

$$= 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

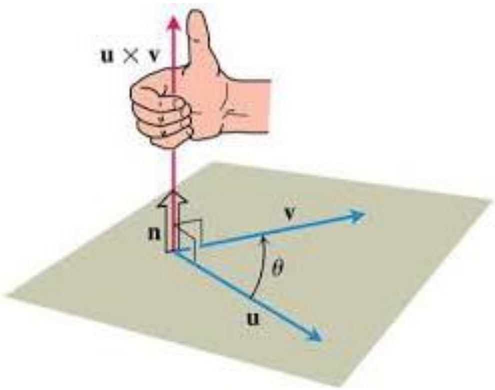
$$\theta = \cos^{-1}(\frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|}) = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{37} \times \sqrt{13}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9 - 16}{\sqrt{481}}\right) \approx 108.61$$

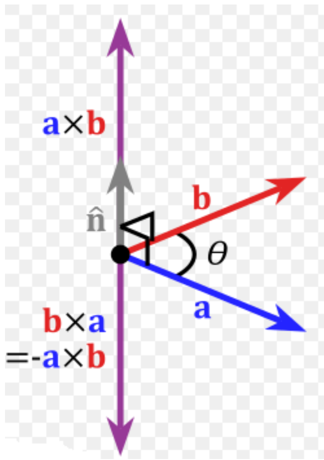
تمرین: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار به ترتیب با طولهای 2 و 5 و زاویه بین آنها 150 درجه باشد طول بردار $3\vec{a} - 2\vec{b}$ را بدست آورید.

تمرین: طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب 3 و 4 و زاویه بین آنها 60 درجه است. زاویه بین دو بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ را بدست آورید.

ضرب خارجی دوبردار: فرض کنید $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیرصفر و غیر موازی باشند این دو بردار در صفحه ای در فضا واقع اند. بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر صفحه شامل $\vec{b}$ و $\vec{a}$ عمود است و به آن ضرب خارجی دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ می گویند. طول این بردار برابر است با:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$





پیدا کردن جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با قانون دست راست: برای بدست آوردن جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ از سمت بردار اولی یعنی $\vec{a}$ به طرف بردار $\vec{b}$ (دومی) زاویه θ را رسم می کنیم. چهار انگشت دست راست را به سمت جهت زاویه رسم شده خم می کنیم جهت شست دست راست جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ می باشد.

ویژگی های ضرب خارجی

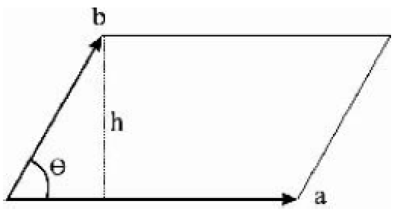
1. همواره داریم: $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

2. برای هر عدد حقیقی t داریم: $(t\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(t\vec{b}) = t(\vec{a}\times\vec{b})$

3. همواره داریم:

$$\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\end{cases}$$

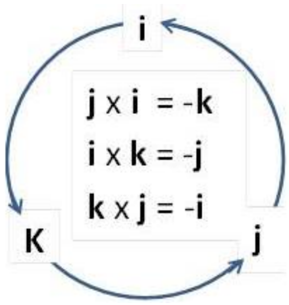
تعبیر هندسی اندازه ضرب خارجی: هرگاه $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیرصفر و غیر موازی باشند اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که توسط دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ساخته می شود.

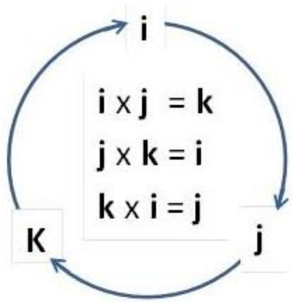


$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{|\vec{b}|} \rightarrow h = |\vec{b}|\sin\theta$$

$$S = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\vec{a}|h = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

ضرب خارجی بردارهای پایه:





$$i\times i = j\times j = k\times k = 0$$

محاسبه ضرب خارجی به کمک دترمینان ماتریس:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} k$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

مثال: ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را بدست آورید و سپس مساحت متوازی الاضلاعی که می توان به کمک این دو بردار رسم کرد را بدست آورید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

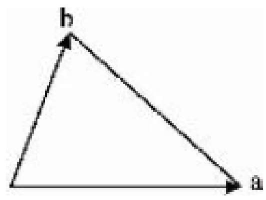
$$=(2-3)\vec{\imath}-(-1-6)\vec{\jmath}+(1+4)\vec{k}=-1\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+5\vec{k}$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+7^2+5^2}$$

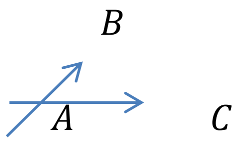
$$=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

مساحت مثلث: مساحت مثلث نصف مساحت متوازی الاضلاعی می تواند باشد که با سه نقطه یا دو بردار می توان تصور کرد. بنابراین داریم

$$\boldsymbol{S}_{\Delta}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$



مثال: مساحت مثلثی به راس های $A=(2,0,1)$، $B=(0,2,0)$ و $C=(0,0,1)$ بدست آورید.



$$\overrightarrow{AB}=\langle -2,2,-1\rangle$$

$$\overrightarrow{AC}=\langle -2,0,0\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} -2 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} -2 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

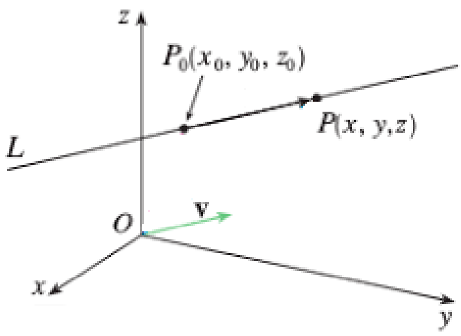
$$=0\vec{\imath}-(0-2)\vec{\jmath}+(0+4)\vec{k}=2\vec{\jmath}+4\vec{k}$$

$$\sqrt{5}S=\tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=$$

تمرین: مساحت مثلثی به راس های $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$ را بدست آورید.

فصل دوم: هندسه تحلیلی در فضا

معادله خط در فضا: معادله خط در صفحه را به کمک یک نقطه و شیب آن می نوشتیم و شکل کلی آن به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ بود اما معادله خط در فضا را به کمک یک نقطه و برداری که با خط مورد نظر موازی باشد، می نویسیم.



می خواهیم معادله خط L را که از نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و با بردار $\vec{v} = \langle a, b, c\rangle$ موازی است، بنویسیم. اگر $P = (x, y, z)$ نقطه دلخواه دیگری از خط باشد، بردارهای $\overrightarrow{P_0P}$ و $\vec{v}$ موازیند و لذا عدد حقیقی مانند t موجود است به طوری که $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$ بنابراین می توان نوشت:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = t\langle a, b, c\rangle$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

عبارت اخیر را **معادله پارامتری خط** می گویند.

تعریف: در معادله خط بردار$\vec{v} = \langle a, b, c\rangle$ را بردار هادی و همچنین مقادیر c و b و a را پارامترهای هادی خط می نامند. (پارامترهای هادی منحصر به فرد نمی باشند و هر مضربی از این اعداد را نیز می توان به عنوان پارامترهای هادی خط مورد استفاده قرار داد)

تذکر: به ازای هر عدد حقیقی t نقطه ای از خط بدست می آید

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه (7و3و2) می گذرد و با بردار $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ موازی است.

پاسخ:
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -5t + 3 \\ z = 2t + 7 \end{cases}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2,1,0)$ و $B(4,2,5)$ بگذرد.

پاسخ: $\overrightarrow{AB} = \langle 4-2, 2-1, 5-0 \rangle = \langle 2,1,5 \rangle$

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t + 2 \\ z = 5t + 5 \end{cases} \qquad \text{یا} \qquad \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 5t + 0 \end{cases}$$

شکل ظاهری این معادله متفاوت است ولی در واقع بین این دو تفاوتی وجود ندارد زیرا این دو معادله بیانگر دو مجموعه از نقاط در فضا هستند که این دو مجموعه یکسان می باشند مثلاً نقطه $(6,3,10)$ از این خط در معادله اول به ازای $t = 2$ و در معادله دوم به ازای $t = 1$ بدست می آید.

معادله متعارف خط: اگر مقادیر هادی خط یعنی a, b, c غیر صفر باشند می توان t را در معادله پارامتری خط حذف و شکل جدیدی برای معادله نوشت:

$$\begin{cases} x = at + x_0 & \to t = \frac{x-x_0}{a} \\ y = bt + y_0 & \to t = \frac{y-y_0}{b} \\ z = ct + z_0 & \to t = \frac{z-z_0}{c} \end{cases} \quad \to \quad \boldsymbol{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

معادله اخیر را معادله متعارف یا معادله متقارن خط می نامند.

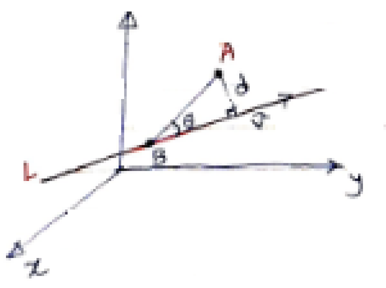
تذکر: اگر یکی از پارامترهای هادی صفر باشند به عنوان نمونه داشته باشیم: $z \neq 0$ و $b \neq 0$ و $a = 0$ در این حالت معادله خط را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \quad \text{و} \quad x = x_0$$

مثال: معادله متعارف خطی که از نقطه $(2,3,-4)$ می گذرد و با بردار $\vec{v} = \langle 3,5,2 \rangle$ موازی می باشد به صورت زیر است.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+4}{2}$$

فاصله نقطه از خط: فرض کنید L خطی موازی بردار غیر صفر $\vec{v}$ و A نقطه ای از فضا باشد. هرگاه B یک نقطه دلخواه خط L باشد و فاصله نقطه A تا خط L را با d نمایش دهیم، داریم:



$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

اثبات این فرمول در حالتی که θ زاویه حاده باشد به صورت زیر است:

با توجه به شکل فوق داریم: $\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{d}{|\overrightarrow{AB}|} \to d = |\overrightarrow{AB}|\sin\theta$

با ضرب و تقسیم $|\vec{v}|$ در عبارت فوق داریم:

$$d = |\overrightarrow{AB}|\sin\theta = \frac{|\vec{v}|.\,|\overrightarrow{AB}|\sin\theta}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

مثال: فاصله نقطه $A(5,-6,2)$ را از خط L را بدست آورید.

$$L: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

پاسخ: با توجه به ضریب t درمی‌یابیم که $\vec{v} = \langle 0,4,-3\rangle$ بردارهادی خط است. ابتدا نقطه دلخواهی (مثل B) روی خط پیدا می کنیم برای اینکار به دلخواه به t مقدار می‌دهیم و z و y و x را بدست می آوریم

$$t = 0 \quad \to \quad B = (1,-1,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-5, -1-(-6), 2-2\rangle = \langle -4,5,0\rangle$$

$$d = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} k$$
$$= \big(0-(-15)\big)i - (0-12)j + \big(0-(-16)\big)k = 15i + 12j + 16k$$

$$|\vec{v}\times\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = \sqrt{225+144+256} = \sqrt{625} = 25$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2+4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$d = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|} = \frac{25}{5} = 5$$

مثال: معادله متعارف خطی را بنویسید که از نقطه $A(7,5,-2)$ بگذرد و با خط

$L: \frac{2x-3}{5} = \frac{3y+2}{4} = \frac{3-z}{2}$ موازی باشد.

جواب: خط موردنظر با بردار هادی خط L موازی است ابتدا باید فرم متعارف خط را به حالت اصلی آن تبدیل کنیم برای این کار صورت و مخرج اولی را تقسیم بر 2 میکنیم. صورت و مخرج دومی را بر 3 تقسیم می کنیم و صورت و مخرج سومی را در 1- ضرب می کنیم.

$$L: \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y+\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\text{بردارهادی} \quad \boldsymbol{L} \quad \to \langle \tfrac{5}{2}, \tfrac{4}{3}, -2 \rangle \xrightarrow{\times \boldsymbol{6}} \vec{v} = \langle 15,8,-12 \rangle$$

$$\frac{x-7}{15} = \frac{y-5}{8} = \frac{z+2}{-12}$$

تمرین: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2,0,5)$ و $B(0,-2,1)$ بگذرد.

تمرین: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3,5,1)$ می گذرد و با خط زیر موازی است

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 5t+1 \\ z = 4-3t \end{cases}$$

تمرین: معادله خطی که از نقطه $(3,5,1)$ می گذرد و با خط زیر موازی است را بنویسید

$$L: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = 4-2z$$

معادله صفحه در فضا: در دستگاه مختصات قائم صفحه را به صورت یک متوازی الاضلاع رسم کرده و معمولاً با P نمایش می دهند. معادله صفحه را به کمک یک نقطه از آن و برداری که بر آن صفحه عمود است می توان مشخص کرد بردار عمود بر صفحه را بردار قائم بر صفحه یا بردار نرمال صفحه می گویند.

فرض می کنیم $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیرصفر $\vec{n} = \langle a,b,c \rangle$ بر صفحه عمود باشد اگر $B(x,y,z)$ نقطه دیگری از صفحه باشد، دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ برهم عمودند و داریم $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ بنابراین می توان نوشت:

$$\langle a,b,c \rangle . \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle = 0$$

$$\boldsymbol{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0} \quad \circledast$$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

معادله $\circledast$ را معادله صفحه می نامند. اگر به جای مقدار ثابت $ax_0 + by_0 + cz_0$ عدد $-d$ قرار دهیم معادله صفحه را به صورت $ax + by + cz + d = 0$ داریم.

مثال: معادله صفحه ای که از نقطه $(-2,1,3)$ می گذرد و بردار $\langle 2,5,-1 \rangle = \vec{n}$ بر آن عمود است را بنویسید.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$2(x+2)+5(y-1)+(-1)(z-3)=0$$

$$2x+4+5y-5-z+3=0$$

$$2x+5y-z+2=0$$

نکته: اگر دو صفحه با هم موازی باشند بردار قائم بر یکی، بر دیگری نیز عمود است

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از مبدا مختصات بگذرد و با صفحه $2x-y+3z=1$ موازی باشد.

پاسخ: بردار قائم بر صفحه $\langle 2\text{و}1-\text{و}3 \rangle$ می‌باشد بنابراین معادله صفحه به صورت زیر می‌باشد

$$2(x-0)+(-1)(y-0)+3(z-0)=0$$

$$2x-y+3z=0$$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $(-2,4,5)$ بگذرد و با صفحه $5x-2y+3z=7$ موازی باشد.

فاصله یک نقطه از صفحه: فاصله نقطه $A(x_., y_., z_.)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$، به کمک فرمول زیر بدست می‌آید.

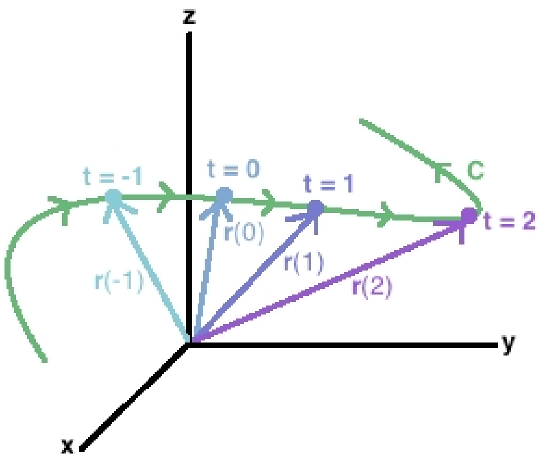
$$h=\frac{|ax_.+by_.+cz_.+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فصل سوم: توابع برداری در فضا، مشتق و انتگرال آنها

توابع برداری در فضا: فرض کنید h و g و f توابعی از متغیر حقیقی t باشند. به ازای هر عدد t در دامنه مشترک این سه تابع، بردار $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$ را یک تابع برداری در فضا می نامیم.

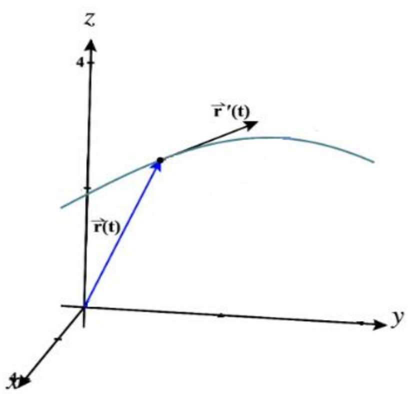
نمودار تابع برداری: به ازای هر t هرگاه ابتدای بردار $\vec{r}(t)$را مبدا مختصات در نظر بگیریم، مجموعه نقاط

انتهایی بردارهای $\vec{r}(t)$ یک منحنی جهت دار مانند C را در فضا به وجود می آورد. این منحنی را نمودار تابع برداری می نامند.



مشتق توابع برداری: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری و $t \in D_{\vec{r}}$، در صورت وجود $\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$ گوییم تابع $\vec{r}(t)$ در t مشتق پذیر است و مقدار این حد را با علامت $\vec{r}'(t)$ نمایش می دهیم.

تعبیر هندسی: از نظر هندسی بردار $\vec{r}'(t)$ را می توان بردار مماس بر منحنی $\vec{r}(t)$ در لحظه t در نظر گرفت.



قضیه: هرگاه برای تابع برداری $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$، $\vec{r}'(t)$ موجود باشد آنگاه داریم

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{\imath} + g'(t)\vec{\jmath} + h'(t)\vec{k}$$

مثال: مشتق اول و دوم تابع برداری $\vec{r}(t) = \sin 2t\,\vec{\imath} + \cos 3t\,\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$ را بدست آورید.

$$\vec{r}'(t) = 2\cos 2t\,\vec{\imath} - 3\sin 3t\,\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$$

$$\vec{r}''(t) = -4\sin 2t\,\vec{\imath} - 9\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

مثال: بردار مماس بر منحنی $\vec{r}(t) = 2t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t^3\vec{k}$ در نقطه نظیر $t = 1$ را بدست آورید.

$$\vec{r}'(t) = 2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}$$

$$\vec{r}'(1) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

مثال: مشتق توابع برداری زیر را بدست آورید.

1. $\boldsymbol{\vec{r}(t) = \sin(t^2)\,\vec{\imath} + \sqrt{t}\vec{\jmath} + e^{5t-1}\vec{k}}$

$$\vec{r}'(t) = 2\text{t}\cos(t^2)\,\vec{\imath} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{\jmath} + 5e^{5t-1}\vec{k}$$

2. $\boldsymbol{\vec{r}(t) = \frac{t}{t+1}\vec{\imath} + \sqrt{2t-1}\vec{\jmath} + (t-1)^3\vec{k}}$

$$\vec{r}'(t) = \frac{(t+1)-t}{(t+1)^2}\vec{\imath} + \frac{2}{2\sqrt{2t-1}}\vec{\jmath} + 3(t-1)^2\vec{k}$$

معادله خط مماس: برای نوشتن معادله یک خط در صفحه به یک نقطه روی خط و شیب آن خط نیاز داشتیم اما برای نوشتن معادله یک خط در فضا باید مختصات یک نقطه روی خط و بردار موازی خط(بردار هادی) را داشته باشیم. فرض کنید $P(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه روی خط و بردار $\vec{v} = \langle a, b, c\rangle$ موازی خط مورد نظر باشد در این صورت معادله خط به صورت زیر است

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $\vec{r}(t) = (t-1)\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + \frac{t+1}{t}\vec{k}$ در نقطه نظیر $t = 1$ بدست آورید.

پاسخ: اولا باید نقطه ای بیابیم که خط مماس از آن می گذرد. انتهای بردار $\vec{r}(1)$ نقطه ای است که خط مماس از آن می گذرد

$$\vec{r}(1) = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 2\vec{k} \qquad A(0,1,2)$$

ثانیا باید برداری را بیابیم که موازی خط مماس باشد. بردار $\vec{r}'(1)$ بردار مماس بر منحنی در نقطه A است و موازی خط مماس می باشد.

$$\vec{r}'(t)=\vec{\imath}+2t\vec{\jmath}+\frac{t-(t+1)}{t^2}\vec{k}=\vec{\imath}+2t\vec{\jmath}-\frac{1}{t^2}\vec{k}$$

$$\vec{r}'(1)=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-1\vec{k}=\langle 1,2,-1\rangle$$

حال می توان معادله خط را نوشت

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

نکته: با توجه به مثال قبل می توان نتیجه گرفت که برای بدست آوردن معادله خط مماس مولفه های $\vec{r}(t)$ مختصات نقطه روی خط را نشان می دهند و $\vec{r}'(t)$ بردار هادی را مشخص می کند.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $\vec{r}(t)=\sqrt{2t-1}\vec{\imath}+\sqrt{t}\vec{\jmath}+2t\vec{k}$ در نقطه نظیر $t=1$ را بدست آورید.

$$\vec{r}(1)=\sqrt{2-1}\vec{\imath}+\sqrt{1}\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t)=\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}\vec{\imath}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

$$\vec{r}'(1)=\frac{2}{2\sqrt{2-1}}\vec{\imath}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\vec{\jmath}+2\vec{k}=\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}+2\vec{k}=\langle 1,\frac{1}{2},2\rangle$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-2}{2}$$

معادله حرکت: هرگاه t متغیرزمان باشدو مکان متحرک M را در لحظه t، با انتهای بردار $\vec{r}(t)$ در صفحه یا فضا نشان دهیم، $\vec{r}(t)$ را معادله حرکت متحرک M می‌نامیم. مسیر حرکت M همان منحنی نظیر تابع برداری $\vec{r}(t)$ می‌باشد. همانند حرکت یک متحرک روی خط راست برای این متحرک هم می‌توان سرعت و شتاب تعریف کرد.

سرعت متحرک: اگر $\vec{r}(t)$ معادله حرکت یک متحرک باشد، سرعت متحرک را با نماد $\vec{v}(t)$ نمایش داده و برابر است با: $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$

طول بردار $\vec{v}(t)$ را اندازه سرعت یا تندی متحرک در لحظه t می‌گویند. بنابر تعبیر هندسی مشتق، بردار سرعت بر مسیر حرکت منحنی مماس خواهد بود.

شتاب متحرک: اگر $\vec{r}(t)$ معادله حرکت متحرکی باشد شتاب لحظه‌ای متحرک در زمان t را با نماد $\vec{a}(t)$ نمایش داده و برابر است با: $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$

طول بردار $\vec{a}(t)$ را اندازه شتاب می‌گویند.

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $\vec{r}(t) = 3t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + \frac{2}{3}t^3\vec{k}$ می‌باشد. بردار سرعت، بردارشتاب اندازه سرعت و اندازه شتاب را در لحظه $t = 1$ بیابید.

مثال: در مثال قبل لحظه‌هایی را پیدا کنید که دو بردار سرعت و شتاب برهم عمود باشند.

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$ می‌باشد. زاویه بین دو بردار سرعت و شتاب را در لحظه t بدست آورید.

منحنی هموار: تابع برداری $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$ را بر فاصله $[a, b]$ تابع هموار گوییم هرگاه داشته باشیم:

الف) توابع f', g', h' موجود و در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند.

ب) در فاصله(a, b) توابع f', g', h' همزمان صفر نشوند.

منحنی نظیر یک تابع برداری هموار را منحنی هموار می‌نامیم.

بردار یکانی مماس: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک منحنی هموار باشد بردار یکانی $\vec{r}'(t)$ را با $\vec{T}(t)$ نمایش داده و آن را بردار یکانی مماس می‌گویند.

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

بردار $\vec{T}(t)$ بر منحنی $\vec{r}(t)$ مماس می‌باشد. و طول آن همواره برابر یک است.

بردار یکانی قائم: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک منحنی هموار باشد، بردار یکانی $\vec{T}'(t)$ را با $\vec{N}(t)$ نمایش داده و آن را بردار یکانی قائم اصلی یا بردار یکانی قائم اول می‌گویند.

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T'}(t)}{\left|\vec{T'}(t)\right|}$$

بردارهای $\vec{N}(t)$ و $\vec{T}(t)$ همواره برهم عمودند و جهت بردار $\vec{N}(t)$ به سمت تقعر منحنی $\vec{r}(t)$ می‌باشد.

تعریف: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک منحنی هموار باشد، ضرب خارجی بردارهای یکانی مماس و یکانی قائم اصلی را با $\vec{B}(t)$ نمایش داده و آن را بردار یکانی قائم فرعی یا بردار یکانی قائم دوم می‌گویند.

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

صفحه بوسان: برای منحنی $\vec{r}(t)$ در نقطه P، صفحه شامل دو بردار $T\ , N$ را صفحه بوسان منحنی در آن نقطه می‌گویند. بردار $\vec{B}$ برصفحه بوسان عمود است.

مثال: برای تابع $\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{\imath} + \sin t\, \vec{\jmath} + t\vec{k}$ (مارپیچ استوانه‌ای) بردارهای یکانی مماس، یکانی قائم اصلی و یکانی قائم فرعی را مشخص کنید.

مثال: معادله صفحه بوسان را برای توابع برداری زیر در نقطه نظیر $t = 0$ بدست آورید.

1)$\vec{r}(t) = t^3\vec{\imath} + \sin 2t\,\vec{\jmath} + \cos t\,\vec{k}$

2)$\vec{r}(t) = e^t\vec{\imath} + \sqrt{2}t\vec{\jmath} + e^{-t}\vec{k}$

ضمیمه فرمولهای مشتق : در اینجا c عددی ثابت و u تابعی از x است.

1. $f(x) = c$ عدد ثابت $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$ $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = u^n$ $f'(x) = nu'u^{n-1}$
4. $f(x) = cg(x)$ $f'(x) = cg'(x)$
5. $f(x) = g(x) + h(x)$ $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
6. $f(x) = g(x).h(x)$ $f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$
7. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$
8. $f(x) = \sqrt{g(x)}$ $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
9. $f(x) = ln\, u$ $f'(x) = \frac{u'}{u}$
10. $f(x) = e^u$ $f'(x) = u'e^u$
11. $f(x) = a^u$ $f'(x) = u'(ln\, a)\, a^u$

مشتق توابع مثلثاتی و معکوس مثلثاتی

12. $f(x) = sin\, x$ $f'(x) = cosx$
13. $f(x) = cos\, x$ $f'(x) = -sinx$
14. $f(x) = tan\, x$ $f'(x) = 1 + tan^2x$
15. $f(x) = cot\, x$ $f'(x) = -(1 + cot^2x)$
16. $f(x) = sin\, u$ $f'(x) = u' \cos u$
17. $f(x) = \cos u$ $f'(x) = -u' \sin u$
18. $f(x) = \tan u$ $f'(x) = u'(1 + \tan^2 u)$
19. $f(x) = \cot u$ $f'(x) = -u'(1 + \cot^2 u)$
20. $f(x) = \sin^{-1} u = arc \sin u$ $f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21. $f(x) = \cos^{-1} u = arc \cos u$ $f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
22. $f(x) = \tan^{-1} u = arc \tan u$ $f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$
23. $f(x) = \cot^{-1} u = arc \cot u$ $f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$

ضمیمه فرمولهای انتگرال

1. $\int a\,dx = ax + c$
2. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$
4. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$
5. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$
6. $\int \sin ax\;\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
7. $\int (1 + tan^2x)dx = \tan x + c$
8. $\int 1 + cot^2 x\,dx = -\cot x + c$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$
10. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + c$
11. $\int a^x dx = \frac{1}{ln\,a}a^x + c$
12. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

روش تغییر متغیر: در برخی انتگرال‌های پیچیده‌تر قسمتی از عبارت جلوی انتگرال را برابر با متغیر u قرار می‌دهیم و دیفرانسیل عبارت را محاسبه می‌کنیم سپس انتگرال را برحسب متغیر u می‌نویسیم.

نکته 1: برای تغییر متغیر دادن باید عبارتی را انتخاب کنیم که مشتق آن نیز داخل انتگرال باشد مگر اینکه مشتق آن یک عدد باشد که می توان به راحتی آن را در انتگرال ضرب و تقسیم کرد.

نکته 2: معمولاً عبارت زیر توان، قوس sin و cos، مخرج کسرها، زیر رادیکال، توان توابع نمایی(e^u) را برابر u قرار می دهیم.

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

1. $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x^2+1)^6}{6} + c$

$u = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 2xdx$ (عبارت زیر توان)

2. $\int (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int 2(2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2} \times \frac{u^4}{4} + c = \frac{(2x-1)^4}{8} + c$

$u = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad du = 2dx$ (عبارت زیر توان)

3. $\int 3x^2 e^{x^3-3} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^3-3} + c$

$u = x^3 - 3 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2 dx$ (توان توابع نمایی)

4. $\int \frac{10x+3}{5x^2+3x} dx = \int \frac{1}{u}\, du = ln\,|u| + c = \ln|5x^2 + 3x| + c$

$u = 5x^2 + 3x \quad \rightarrow \quad du = (10x + 3)dx$ (مخرج کسر)

انتگرال معین: اگر داشته باشیم $\int f(x)dx = F(x)$ آنگاه حاصل انتگرال معین به صورت زیر خواهد بود.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

به بیان ساده‌تر در انتگرال‌های معین در مرحله اول باید انتگرال تابع را محاسبه کرد سپس ابتدا حد بالایی را بجای x قرار داده و سپس حد پایینی را جایگذاری می کنیم و تفاضل آنها را به همین ترتیب بدست می آوریم.

مثال: حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

انتگرال توابع برداری: فرض کنید $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$ ، انتگرال نامعین تابع $\vec{r}(t)$ بر فاصله $[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\int \vec{r}(t)dt = \int f(t)dt\,\vec{\imath} + \int g(t)\,dt\vec{\jmath} + \int h(t)dt\,\vec{k}$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b f(t)dt\,\vec{\imath} + \int_a^b g(t)dt\,\vec{\jmath} + \int_a^b h(t)dt\,\vec{k}$$

مثال: انتگرال توابع زیر را بدست آورید.

1. $\int \vec{r}(t)dt = \int (\cos 3t\ \vec{\imath} + \sin 4t\ \vec{\jmath} + cost\,\vec{k})dt$

$$\int \vec{r}(t)dt = \int \cos 3tdt\ \vec{\imath} + \int \sin 4tdt\ \vec{\jmath} + \int cost\ dt\,\vec{k}$$

$$= \frac{1}{3} sin3t\,\vec{\imath} - \frac{1}{4} cos4t\,\vec{\jmath} + sint\vec{k}$$

2. $\int_0^1 \left(t^2\vec{\imath} + 3t^3\vec{\jmath} + \sqrt{t}\vec{k}\right)dt = \int_0^1 t^2 dt\,\vec{\imath} + \int_0^1 3t^3 dt\vec{\jmath} + \int_0^1 \sqrt{t} dt\,\vec{k}$

$$= \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1 \vec{\imath} + \left(\frac{3t^4}{4}\right)_0^1 \vec{\jmath} + \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^1 \vec{k} = \left(\frac{1}{3} - 0\right)\vec{\imath} + \left(\frac{3}{4} - 0\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} - 0\right)\vec{k}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{3}{4}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

3. $\int_0^\pi [cost\vec{\imath} - 2sint\vec{\jmath} + 5\vec{k}]dt = \int_0^\pi cost\ \ dt\vec{\imath} - 2\int_0^\pi sint\ dt\ \vec{\jmath} + \int_0^\pi 5dt\ \ \vec{k}$

$$= (sint)_0^\pi\vec{\imath} - 2(-cost)_0^\pi\vec{\jmath} + (5t)_0^\pi\vec{k} = (sin\pi - sin0)\vec{\imath} + 2(cos\pi - cos0)\vec{\jmath} + (5\pi)\vec{k}$$

$$= 0\vec{\imath} + 2(-1-1)\vec{\jmath} + 5\pi\vec{k} = -4\vec{\jmath} + 5\pi\vec{k}$$

4. $\int \left[\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\vec{\imath} + \frac{1}{1+t^2}\vec{\jmath} + e^{3t}\vec{k}\right] dt = \sin^{-1} t\,\vec{\imath} + \tan^{-1} t\,\vec{\jmath} + \frac{1}{3}e^{3t}\vec{k}$

5. $\int_0^1 \left[(2t+1)^3\vec{\imath} + \sqrt{2t+1}\vec{\jmath}\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2(2t+1)^3\ dt\vec{\imath} + \frac{1}{2}\int_0^1 2\sqrt{2t+1}\,dt\vec{\jmath} =$

$$2t + 1 = u \quad \to \quad 2dt = du \quad \to \begin{cases} t = 0 & \to u = 1 \\ t = 1 & \to u = 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du\ \vec{\imath} + \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{u} du\ \vec{\jmath} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{u^4}{4}\right)_1^3 \vec{\imath} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_1^3 \vec{\jmath} = \frac{1}{8}(3^4 - 1^4)\vec{\imath} + \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$= \frac{80}{8}\vec{\imath} + \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 1)\vec{\jmath} = 10\vec{\imath} + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{\jmath}$$

6. $\int_1^3 \left[(t-1)^3\vec{\imath} + \left(\frac{2}{t+1}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{4}{t^3}\right)\vec{k}\right] dt$

$$t-1=u \quad \rightarrow \quad dt=du \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t=1 & \rightarrow u=0 \\ t=3 & \rightarrow u=2 \end{cases}$$

$$t+1=m \quad \rightarrow \quad dt=dm \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t=1 & \rightarrow m=2 \\ t=3 & \rightarrow m=4 \end{cases}$$

$$=\int_1^3 (t-1)^3 dt\,\vec{\imath} + \int_1^3 \frac{2}{t+1} dt\,\vec{\jmath} + \int_1^3 4t^{-3} dt\,\vec{k} = \int_0^2 u^3 du\,\vec{\imath} + \int_2^4 \frac{2}{m} dm\,\vec{\jmath} + \int_1^3 4t^{-3} dt\,\vec{k}$$

$$=\left(\frac{u^4}{4}\right)_0^2 \vec{\imath} + (2\ln|m|)_2^4\,\vec{\jmath} + \left(\frac{4t^{-2}}{-2}\right)_1^3 \vec{k} = \left(\frac{16}{4}-0\right)\vec{\imath} + (2\ln 4 - 2\ln 2)\vec{\jmath} + \left(\frac{-2}{9}-\frac{-2}{1}\right)\vec{k}$$

$$=4\vec{\imath} + 2\ln 2\;\vec{\jmath} + \frac{16}{9}\vec{k}$$

فصل چهارم: توابع چند متغیره

هرگاه متغیر y به متغیر x وابسته و یا به عبارت دیگر y تابعی از x باشد از نماد $y = f(x)$ استفاده می کردیم و آن را یک تابع یک متغیره می گفتیم. اما توابعی وجود دارند که نیاز به بیش از یک متغیر مستقل دارند. مانند بدست آوردن حجم یک استوانه که نیاز به شعاع و ارتفاع دارد. $(v = \pi r^2 h)$ یا حجم یک مکعب مستطیل که سه متغیر مستقل دارد.$(v = abc)$ در این فصل اغلب توابعی را در نظر می گیریم که شامل دو متغیر هستند. وقتی تابع f به دو متغیر مستقل بستگی دارد، معمولا متغیرهای مستقل را با x وy و متغیر وابسته را با z نمایش می دهیم و می نویسیم: $z = f(x, y)$

حد توابع چند متغیره: مفهوم حد توابع چند متغیره شبیه توابع یک متغیره می باشد. برای روشن شدن موضوع تعریف را فقط برای توابع دو متغیره ارائه می کنیم.

تعریف: فرض کنید $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد اگر وقتی نقطه (x, y) از هر مسیری در صفحه xy به نقطه (a, b) نزدیک شود مقدار $f(x, y)$ به عدد L نزدیک گردد، گوییم حد تابع f در نقطه (a, b) برابر L است و می نویسیم: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2} = \frac{0-1+5}{0+1+2} = \frac{4}{3}$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x+2}{\sqrt{y}} = \frac{0+2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$

حدهای مبهم: هرگاه حد یک تابع دو متغیره به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در آید یکی از روش های رفع ابهام تجزیه کسر می باشد. روش های دیگری نیز وجود دارد که نیازمند اطلاعات وسیع تری می باشد و در این اینجا به آنها نمی پردازیم.

مثال: حدود زیر را بدست آورید

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

2. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

پیوستگی: تابع $f(x,y)$ را در نقطه (a,b) پیوسته گوییم هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

نکته: برای بررسی پیوستگی تابع سه شرط زیر باید برقرار باشد.

الف) $\boldsymbol{f(a,b)}$ موجود باشد

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد

ج) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (1و1) بررسی کنید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{x^3-y^3} & (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

پاسخ: شرایط پیوستگی را بررسی می کنیم

1) $f(1,1) = 0$

2) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \frac{0}{0}$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{3}$$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) \neq f(1,1)$

بنابراین تابع f در $(1,1)$ پیوسته نیست

تمرین: پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x+y} & (x,y)\neq(1,-1)\\ 3 & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$

2) $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$ $\qquad (-1,1)$

مشتق گیری جزیی از توابع چند متغیره:

در یک تابع چند متغیره می توان تمام متغیرها به جز یک متغیر را ثابت فرض کرد و نسبت به این متغیر مشتق گرفت این عمل را مشتق گیری جزیی می نامیم. به طور مثال در تابع دو متغیر $z=f(x,y)$ مشتق جزیی مرتبه اول f نسبت به x را با نماد f_x یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ نمایش می دهیم. (می خوانیم رُند f به رُند x)

مثال: مشتق های جزیی مرتبه اول توابع زیر را مشخص کنید.

1) $f(x,y)=x^2y^3+2xy-2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+2x$$

2) $f(x,y)=x\sin y+2\,x^2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y+4xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y+2x^2$$

مشتق های جزیی مراتب بالاتر: با چند بار مشتق گرفتن از یک تابع مشتق مراتب بالاتر بدست می آید. این مشتق ها که مشتق های جزیی مراتب بالاتر نامیده می شوند با نمادهای زیر نمایش داده می شوند.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}$$

مثال: مشتقات جزیی خواسته شده را بدست آورید.

1) $\boldsymbol{f(x,y)=4x^3y^2}$ $\qquad \boldsymbol{f_{xy}}\ ,\ \boldsymbol{f_{xx}}$

$$f_x=3\times 4x^2y^2=12x^2y^2 \qquad f_{xy}=2\times 12x^2y=24x^2y$$

$$f_{xx} = 2 \times 12xy^2 = 24xy^2$$

2) $\boldsymbol{f(x,y) = e^{3x+4y} + 3xy^2}$ $\qquad \boldsymbol{f_{yy}} \quad , \quad \boldsymbol{f_{yx}}$

$$f_y = 4e^{3x+4y} + 6xy \qquad\qquad f_{yy} = 16e^{3x+4y} + 6x$$

$$f_{yx} = 12e^{3x+4y} + 6y$$

3) $\boldsymbol{f(x,y) = xe^y - ye^x}$ $\qquad \boldsymbol{f_{xy}} \quad , \quad \boldsymbol{f_{yx}} \quad , \quad \boldsymbol{f_{xx}}$

$$f_x = e^y - ye^x \qquad\qquad f_y = xe^y - e^x$$

$$f_{xy} = e^y - e^x \qquad\qquad f_{yx} = e^y - e^x \qquad\qquad f_{xx} = -ye^x$$

4) $\boldsymbol{f(x,y) = \ln(2x - 3y)}$ $\qquad \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x - 3y} \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3}{2x - 3y}$$

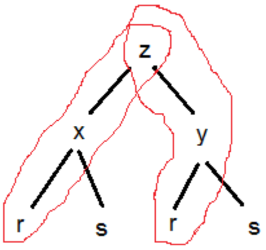
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{0 - 2 \times (-3)}{(2x - 3y)^2} = \frac{6}{(2x - 3y)^2} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{0 - 2 \times 2}{(2x - 3y)^2} = \frac{-4}{(2x - 3y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{0 - (-3) \times 2}{(2x - 3y)^2} = \frac{6}{(2x - 3y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{0 - (-3) \times (-3)}{(2x - 3y)^2} = \frac{-9}{(2x - 3y)^2}$$

قاعده زنجیره ای: بر حسب تعداد متغیرها در یک تابع چند متغیره فرمول قاعده زنجیره ای متفاوت است.

الف) برای حالتی که $z = f(x,y)$ و $\begin{cases} x = g(r,s) \\ y = h(r,s) \end{cases}$ توابعی مشتق پذیر از r,s باشند. آن گاه z دارای مشتق های جزیی نسبت به r , s بوده و داریم.



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

ب) اگر $z = f(x, y)$ مشتق پذیر بوده و y و x توابعی مشتق پذیر از t باشند آنگاه z تابعی مشتق پذیر از t است و داریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

مثال: اگر $z = sin\,(x^2y)$ و $x = \sqrt{t}$ و $y = t^2$ ، باشد $\frac{dz}{dt}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy\cos x^2y = 2\sqrt{t} \times t^2 \cos\left(\left(\sqrt{t}\right)^2 t^2\right) = 2t^2\sqrt{t}\cos t^3 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos x^2y = t\cos t^3 \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2t^2\sqrt{t}\cos t^3 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} + t\cos t^3 \times 2t = t^2\cos t^3 + 2t^2\cos t^3 = 3t^2\cos t^3$$

مثال: به کمک قاعده زنجیره ای مشتق خواسته شده را محاسبه کنید.

1. $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$, $\begin{cases} \boldsymbol{x = \cos t} \\ \boldsymbol{y = \sin t} \end{cases}$ $\boldsymbol{\frac{dz}{dt}} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2\cos t \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 2\sin t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 2\cos t \times (-\sin t) + 2\sin t\cos t = 0$$

2. $\boldsymbol{w = z - \sin(x^2y)}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2t^2} \\ \boldsymbol{y = t^3} \\ \boldsymbol{z = e^t} \end{cases}$ $\boldsymbol{\frac{dw}{dt}} = ?$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2xy\cos x^2y = -2 \times 2t^2t^3\cos((2t^2)^2t^3) = -4t^5\cos 4t^7$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -x^2\cos x^2y = -(2t^2)^2\cos 4t^7 = -4t^4\cos 4t^7$$

$$\frac{dw}{dt} = e^t + (-4t^5 \cos 4t^7) \times 4t + (-4t^4 \cos 4t^7) \times (3t^2)$$
$$= e^t - 16t^6 \cos 4t^7 - 12t^6 \cos 4t^7 = e^t - 28t^6 \cos 4t^7$$

روش دوم: ابتدا w را برحسب t بنویسیم و سپس نسبت به t مشتق بگیریم

$$w = e^t - \sin((2t^2)^2 t^3) = e^t - \sin 4t^7 \qquad \frac{dw}{dt} = e^t - 28t^6 \cos 4t^7$$

3. $\boldsymbol{z = e^x \ln y}$ $\quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 2t + s} \\ \boldsymbol{y = t + s^2} \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial t} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial s} = ?}$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \ln y = e^{2t+s} \ln(t + s^2) \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \times \frac{1}{y} = \frac{e^x}{y} = \frac{e^{2t+s}}{t + s^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{2t+s} \ln(t + s^2) \times 2 + \frac{e^{2t+s}}{t + s^2} \times 1 = 2e^{2t+s} \ln(t + s^2) + \frac{e^{2t+s}}{t + s^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} = e^{2t+s} \ln(t + s^2) + \frac{e^{2t+s}}{t + s^2} \times 2s$$

مثال: اگر $z = \sin(x^2 y)$ و x و y توابعی مشتق پذیر از متغیر t و در نقطه $(\sqrt{\pi}, 1)$ داشته باشیم $\frac{dx}{dt} = 2$ و $\frac{dy}{dt} = 3$ ، $\frac{dz}{dt}$ را در نقطه $(\sqrt{\pi}, 1)$ محاسبه کنید.

پاسخ: $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2xy \cos x^2 y \ \frac{dx}{dt} + x^2 \cos x^2 y \ \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz\left(\sqrt{\pi}, 1\right)}{dt} = 2\sqrt{\pi} \cos(\pi) \times 2 + \pi \cos(\pi) \times 3 = -4\sqrt{\pi} - 3\pi$$

مثال: در استوانه ای شعاع با سرعت $0.2 \ \frac{cm}{s}$ و ارتفاع با سرعت $0.3 \ \frac{cm}{s}$ در حال افزایش است درلحظه ای که شعاع $10 \ cm$ و ارتفاع $8 \ cm$ است سرعت تغییرحجم استوانه را بدست آورید

پاسخ: در اینجا زمان را t در نظر می گیریم

$$V = \pi r^2 h \qquad \frac{dr}{dt} = 0.2 \qquad \frac{dh}{dt} = 0.3 \qquad (r,h) = (10,8)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}.\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}.\frac{dh}{dt} = 2\pi rh.\frac{dr}{dt} + \pi r^2.\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV(10,8)}{dt} = 2\pi \times 10 \times 8 \times 0.2 + \pi \times 100 \times 0.3 = 32\pi + 30\pi = 62\pi$$

حجم استوانه با سرعت $\frac{cm}{s}$ 62π افزایش می یابد.

مثال: ابعاد یک مکعب مستطیل $x\;,\;y\;,\;z$ می باشد. طول x با سرعت $\frac{cm}{s}$ 0.2 ، طول y با سرعت $\frac{cm}{s}$ 0.1 در حال افزایش و طول z با سرعت $\frac{cm}{s}$ 0.3 در حال کاهش است. سرعت تغییر حجم این مکعب را در لحظه $x_\cdot = 5\ cm$ و $y_\cdot = 10\ cm$ و $z_\cdot = 4cm$ را بدست آورید.

پاسخ: $V = xyz \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 0.2 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 0.1 \quad , \quad \frac{dz}{dt} = -0.3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}.\frac{dz}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV(5,10,4)}{dt} = 10 \times 4 \times 0.2 + 5 \times 4 \times 0.1 + 5 \times 10 \times (-0.3) = 8 + 2 - 15 = -5$$

حجم مکعب با سرعت $\frac{cm}{s}$ 5 کاهش می یابد.

دیفرانسیل کل: هرگاه $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، دیفرانسیل کل تابع f را با df یا dz نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

به طور مشابه دیفرانسیل کل تابع سه متغیره $w = f(x,y,z)$ را با df یا dw نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$df(x,y,z) = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

یا به اختصار

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

مثال: دیفرانسیل توابع زیر را محاسبه کنید.

1. $\boldsymbol{z = e^{xy}} \quad \rightarrow \quad dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

2. $\boldsymbol{z = \frac{x}{y}} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{1}{y}dx + \frac{0-x}{y^2}dy = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$

3. $\boldsymbol{w = x^2y^3z^2} \quad \rightarrow \quad dw = 2xy^3z^2dx + 3x^2y^2z^2dy + 2x^2y^3zdz$

4. $\boldsymbol{w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$dw = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dy + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dz$$

5. $\boldsymbol{w = \ln(xy) + e^{2z}} \quad \rightarrow \quad dw = \frac{y}{xy}dx + \frac{x}{xy}dy + 2e^{2z}dz$

تمرین: دیفرانسیل توابع زیر را بدست آورید.

1. $w = \cos xy - \sin z$ 3. $z = \frac{x^2}{x+y}$

2. $z = x^3 + x^2y^2 - y^4$ 4. $z = x^2e^{3y}$

بردار گرادیان: برای تابع حقیقی $z = f(x,y)$ گرادیان تابع f را با نماد ∇f (بخوانید دِل یا نابلای f) یا $gradf$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

مثال: گرادیان تابع زیر را بدست آورید.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y = -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad f_z = 1$$

$$\nabla f = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

مشتق جهتی(سویی): مشتق جهتی تابع سه متغیره f در نقطه (x,y,z) و در جهت بردار یکانی $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$D_{\vec{u}}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)u_1 + f_y(x,y,z)u_2 + f_z(x,y,z)u_3$$

نکته: برای بدست آوردن مشتق جهتی تابع در جهت بردار u، حتما باید بردار $\vec{u}$ یکه باشد یعنی $|\vec{u}| = 1$ اگر اینگونه نبود ابتدا بردار u را یکانی می کنیم سپس مراحل بدست آوردن مشتق جهتی را ادامه می دهیم و روش یکه کردن بردار u به صورت زیر است

$$\overrightarrow{U_u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$. مشتق جهتی f را در نقطه $(1,1,0)$ و در جهت بردار $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ بدست آورید.

پاسخ: ابتدا بردار a را یکانی می کنیم

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{U_a} = \frac{1}{7}\left(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}\right) = \frac{2}{7}\vec{\imath} - \frac{3}{7}\vec{\jmath} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$f_x = 3x^2 - y^2 \qquad f_y = -2xy \qquad f_z = -1$$

$$f_x(1,1,0) = 3(1) - (1)^2$$

$$f_y(1,1,0) = -2(1)(1) = -2$$

$$D_{\vec{u}}f(1,1,0) = 2 \times \frac{2}{7} + (-2) \times \left(-\frac{3}{7}\right) + (-1) \times \frac{6}{7} = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

مثال: مشتق جهتی تابع $f(x,y) = 2x^3y - 3y^2$ را در نقطه $(2,-1)$ و در جهت بردار $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ بدست آورید.

پاسخ: ابتدا بردار $\vec{v}$ را یکانی می کنیم

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overrightarrow{U_v} = \frac{1}{5}(3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$

$$f_x = 6x^2y \qquad f_x(2,-1) = 6(2)^2(-1) = -24$$

$$f_y = 2x^3 - 6y \qquad f_y(2,-1) = 2(2)^3 - 6(-1) = 16 + 6 = 22$$

$$D_{\vec{u}}f(2,-1) = -24 \times \frac{3}{5} + 22 \times \frac{4}{5} = \frac{-72+88}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

تمرین: مشتق جهتی تابع f را در نقطه P و در جهت بردار $\vec{v}$ بدست آورید.

1. $f(x,y) = 2xy - 3y^2 \qquad P(2,1) \qquad \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
2. $f(x,y) = e^{xy} - \ln y \qquad P(2,1) \qquad \vec{v} = 2\vec{j}$
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 \qquad P(1,1,1) \qquad \vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$

کاربرد بردار گرادیان:

کاربرد 1: مشتق جهتی تابع f در نقطه P و در جهت بردار یکانی $\vec{u}$ را می توان به کمک بردار گرادیان و ضرب داخلی بردارها به صورت زیر نوشت

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P).\vec{u}$$

کاربرد 2: تابع $f(x,y,z)$ (یا $f(x,y)$) و نقطه P و بردار یکانی $\vec{u}$ را در نظر بگیرید. اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{u}$ و $\nabla f(P)$ باشد، داریم:

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P).\vec{u} = |\nabla f(P)||\vec{u}\,|\cos\theta = |\nabla f(P)|\cos\theta$$

عبارت فوق با فرض $\cos 0 = 1$ بیش ترین و با فرض $\cos\pi = -1$ کمترین مقدار را دارد. مقدار $D_u f(p)$ میزان تغییرات مقدار تابع f در نقطه P در جهت u را نشان می دهد. بنابراین اگر نقطه P در جهت بردار $\nabla f(P)$ حرکت کنیم (زاویه u و ∇f صفر باشد) تابع بیشترین افزایش را دارد و میزان این بیشترین افزایش برابر $|\nabla f(P)|$ است و اگر در جهت بردار $-\nabla f(P)$ حرکت کنیم (زاویه بین u و ∇f 180 درجه (π) باشد) تابع f بیشترین کاهش را دارد و میزان این بیشترین کاهش برابر $-|\nabla f(P)|$ است.

مثال: دما در هر نقطه یک صفحه فلزی برابر $T(x,y) = x^2e^{-y}$ می باشد از نقطه $(2,1)$ در چه جهتی حرکت کنیم تا افزایش درجه حرارت بیشترین باشد. میزان این افزایش را نیز محاسبه کنید.

پاسخ: جهت بیشترین افزایش $\nabla T(2,1)$ مقدار بیشترین افزایش $|\nabla T(2,1)|$

$$T_x = 2xe^{-y} \quad \rightarrow \quad T_x(2,1) = 2(2)e^{-1} = 4e^{-1}$$

$$T_y = -x^2e^{-y} \quad \rightarrow \quad T_y(2,1) = -2(2)e^{-1} = -4e^{-1}$$

$$\nabla T(2,1) = 4e^{-1}\vec{i} - 4e^{-1}\vec{j}$$

$$|\nabla T(2,1)| = \sqrt{(4e^{-1})^2 + (-4e^{-1})^2} = \sqrt{16e^{-2} + 16e^{-2}} = \sqrt{32e^{-2}} = 4\sqrt{2}e^{-1}$$

مثال: دمای ناحیه ای از فضا در هر نقطه آن با ضابطه $T(x,y,z) = 2x^2 - xyz$ مشخص می گردد. از نقطه $(1,-2,1)$ در چه جهت هایی حرکت کنیم تا افزایش و کاهش درجه حرارت بیشترین مقدار باشد. میزان این تغییرات را نیز محاسبه کنید.

پاسخ:

$$T_x = 4x - yz \quad \rightarrow \quad T_x(1,-2,1) = 4(1) - (-2)(1) = 6$$

$$T_y = -xz \quad \rightarrow \quad T_y(1,-2,1) = -(1)(1) = -1$$

$$T_z = -xy \quad \rightarrow \quad T_y(1,-2,1) = -(1)(-2) = 2$$

$\nabla T(1,-2,1) = 6\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ جهت بیشترین افزایش

$-\nabla T(1,-2,1) = -6\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ جهت بیشترین کاهش

$|\nabla T(1,-2,1)| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$ بیشترین افزایش

$-|\nabla T(1,-2,1)| = -\sqrt{41}$ بیشترین کاهش

ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره

در اینجا به بررسی اکسترمم های نسبی با استفاده از آزمون Δ (آزمون مشتق های دوم) می پردازیم.

آزمون Δ (آزمون مشتق های دوم): فرض کنید $f(x,y)$ تابعی با مشتق های جزیی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد. بعضی از نقاط اکسترمم نسبی تابع را به ترتیب زیر می توان پیدا کرد.

1) دستگاه $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ را حل می کنیم. فرض کنید (x_0, y_0) جواب این دستگاه باشد.
2) عبارت زیر که مبین f نامیده می شود را محاسبه می کنیم:

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$$

3) الف) اگر $\Delta(x_0,y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ آنگاه f در (x_0,y_0) ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر $\Delta(x_0,y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ آنگاه f در (x_0,y_0) مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر $\Delta(x_0,y_0) < 0$ آنگاه (x_0,y_0) اکسترمم نسبی نیست. این نقطه را نقطه زینی می گویند.
د) اگر $\Delta(x_0,y_0) = 0$ آنگاه (x_0,y_0) یک نقطه اکسترمم نسبی یا زینی می باشد. ولی به کمک این آزمون نمی توان تشخیص داد.
مثال: اکسترمم های نسبی توابع زیر را بدست آورید.

1) $\boldsymbol{f(x,y) = 2xy - 5y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4}$

$$\begin{cases} f_x = 2y + 4 - 4x = 0 \\ f_y = 2x - 10y + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{5\times} \begin{cases} 2y - 4x = -4 \\ -10y + 2x = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \begin{cases} 10y - 20x = -20 \\ -10y + 2x = -4 \end{cases} \\ \hline -18x = -24 \end{array}$$

$$x = \frac{-24}{-18} = \frac{4}{3} \quad \to \quad 2y - 4\left(\frac{4}{3}\right) = -4 \quad \to \quad 2y = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \quad \to \quad y = \frac{2}{3}$$

نقطه $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$را برای اکسترمم های نسبی بررسی می کنیم

$$f_{xx} = -4 \quad f_{yy} = -10 \quad f_{xy} = 2$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = (-4)(-10) - 2^2 = 40 - 4 = 36 > 0$$

بنابراین نقطه$(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ نقطه ماکزیمم نسبی است $\quad \to \quad \Delta > 0$ و $f_{xx} < 0$

2) $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y}$

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \quad \to \\ f_y = -2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad 2x = 2y \quad \to \quad x = y$$

با جایگذاری $x = y$ در معادله دوم داریم

$$-2x + x^2 - 3 = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x - 3 = 0 \quad \to \quad x = 3 \quad \to y = 3 \\ x + 1 = 0 \quad \to \quad x = -1 \quad \to \quad y = -1 \end{cases}$$

بنابراین در دو نقطه $(3,3)$ و $(-1,-1)$ بررسی می کنیم

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2y \quad f_{xy} = -2$$

$$\begin{cases} f_{yy}(3,3) = 6 \\ f_{yy}(-1,-1) = -2 \end{cases}$$

$\Delta(3,3) = 2 \times 6 - 4 = 8 > 0 \quad f_{xx} > 0$ $\quad (3,3)$نقطه مینیمم نسبی

$\Delta(-1,-1) = 2 \times (-2) - 4 = -8 < 0$ $\quad (-1,-1)$نقطه زینی

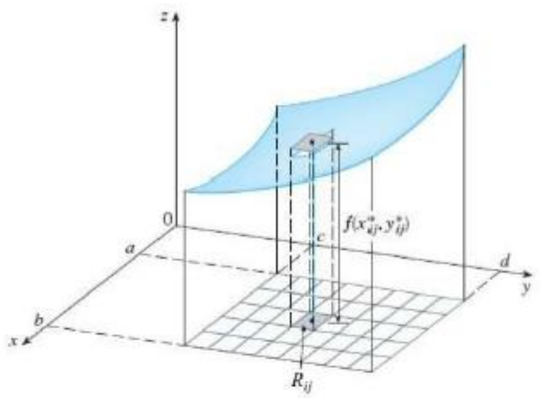
فصل پنجم: انتگرال‌های دوگانه

انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات دکارتی: در این فصل مفهوم انتگرال معین را به توابع دومتغیره تعمیم می‌دهیم. همانطورکه محاسبه مساحت زیر منحنی انگیزه ای برای تعریف انتگرال معین توابع یک متغیره بود، محاسبه حجم زیر سطح نیز انگیزه تعریف انتگرال توابع دو متغیره می باشد. برای محاسبه حجم محدود به سطح $z = f(x, y)$ و ناحیه R، ابتدا ناحیه R را به $n \times m$ مستطیل کوچکتر تقسیم می کنیم.($n, m \in \mathbb{N}$)

هر یک از این مستطیل ها را با R_{ij} و مساحت آن ها را با $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ نمایش می دهیم. ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) در هر یک از این مستطیل ها نقطه دلخواه (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را اختیار می کنیم. حجم هر مکعب مستطیل با قاعده R_{ij} و ارتفاع $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ برابر است با

$$V_{ij} = f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \times \Delta A_{ij}$$

مساحت قاعده ارتفاع



مجموع حجم این مکعب مستطیل ها یک مقدار تقریبی برای حجم محدود به سطح f و ناحیه R می باشد. بنابراین داریم.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta x_i \Delta y_j$$

هرچقدر تعداد مستطیل ها را بیشتر کنیم و یا به عبارت دیگر مساحت مستطیل های R_{ij} را کمتر کنیم، حجم محاسبه شده به حجم واقعی زیر سطح نزدیک تر می شود. بنابراین داریم:

$$V = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{m \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta x_i \Delta y_j \right)$$

با توجه به اینکه حد مجموع نامتناهی را با انتگرال معین نمایش می دادیم، عبارت اخیر را می توان به یکی از دو صورت زیر نمایش داد

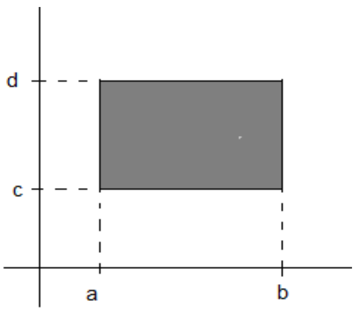
$$V=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \qquad , \qquad V=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

عبارتهای فوق را انتگرال دوگانه می نامند و گاهی به اختصار آنها را به صورت زیر نمایش می دهند

$$V=\iint\limits_R f(x,y)dA$$

محاسبه انتگرال دوگانه مشابه انتگرال معین توابع یک متغیره می باشد. ولی آنچه در محاسبه این انتگرال ها بسیار اهمیت دارد، تعیین کران های انتگرال از روی ناحیه R است. در این جا سه حالت را بررسی می کنیم.

حالت اول: ناحیه R یک مستطیل به صورت زیر است:

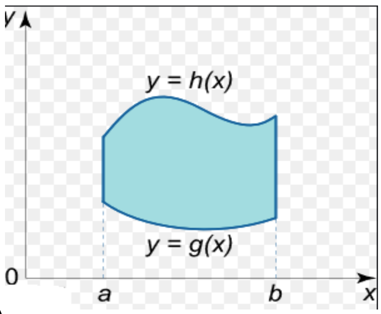


$$R:\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{cases}$$

در این حالت انتگرال $f(x,y)$ بر ناحیه R به صورت زیر محاسبه می شود

$$V=\iint\limits_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

حالت دوم: ناحیه R غیر مستطیل و به صورت زیر است:

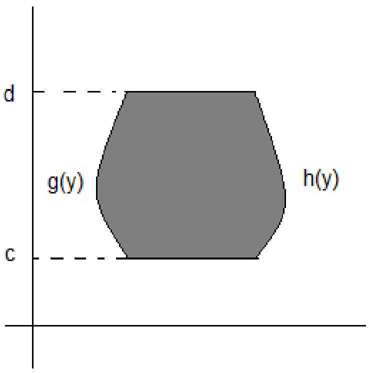


$$R:\begin{cases} a\le x\le b \\ g(x)\le y\le h(x)\end{cases}$$

در این حالت انتگرال $f(x,y)$ بر ناحیه R به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

حالت سوم: ناحیه R غیر مستطیل و به صورت زیر است:



$$R:\begin{cases} g(y)\le x\le h(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

در این حالت انتگرال $f(x,y)$ بر ناحیه R به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy$$

مثال: در مثالهای زیر ابتدا ناحیه R را رسم کنید سپس کرانهای انتگرال تابع $f(x,y)$ بر ناحیه داده شده مشخص کنید.

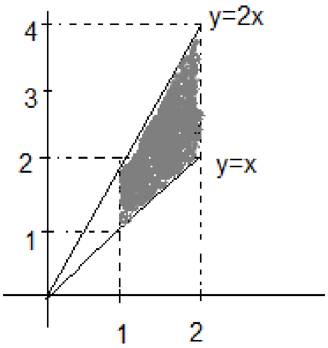
الف) ناحیه محدود به خط های $y=x$ و $y=2x$ و $x=1$ و $x=2$

y=x

x	0	1
y	0	1

y=2x

x	0	1
y	0	2



$$R:\begin{cases} 1\le x\le 2\\ x\le y\le 2x\end{cases}$$

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_1^2\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$$

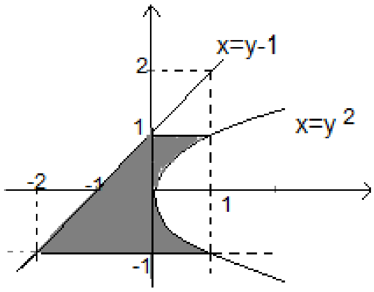
ب) ناحیه محدود به منحنی های $x = y^2$ و $y = x + 1$ و $y = 1$ و $y = -1$

y=x+1

x	0	1
y	1	2

$x=y^2$

x	1	0	1
y	-1	0	1



$$R:\begin{cases} y - 1 \le x \le y^2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \qquad \iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{y^2} f(x,y)dxdy$$

روش محاسبه انتگرال دوگانه: برای محاسبه $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$، عبارت $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$ را انتگرال داخلی نامیده و با $G(x)$ نمایش می دهیم. در انتگرال داخلی x را ثابت فرض می کنیم سپس از محاسبه $G(x)$، انتگرال اصلی را می توان محاسبه کرد.

$$I = \int_a^b G(x)dx$$

به طور مشابه برای محاسبه $\int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy$، ابتدا $G(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx$ را محاسبه کرده، سپس انتگرال اصلی را بدست می آوریم: $I = \int_c^d G(y)dy$

مثال: حاصل انتگرال های دوگانه زیر را بدست آورید:

1. $\int_0^\pi \int_0^\pi (\sin x + \cos y)dydx = \int_0^\pi (y\sin x + \sin y)_0^\pi dx$

$$= \int_0^\pi (\pi \sin x + \sin \pi - (0 \times \sin x + \sin 0))dx = \int_0^\pi \pi \sin x \, dx = (-\pi \cos x)_0^\pi$$

$$= -\pi \cos \pi - (-\pi \cos 0) = \pi + \pi = 2\pi$$

2. $\int_0^1 \int_x^{x^2} (x - 2y)dydx = \int_0^1 \left(xy - \frac{2y^2}{2}\right)_x^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 - (x^2)^2 - (x^2 - x^2)\right) dx$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

3. $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} xy^2 dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} y^2\right)_{y^2}^{y} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} y^2 - \frac{(y^2)^2}{2} y^2\right) dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^4}{2} - \frac{y^6}{2}\right) dy = \left(\frac{y^5}{2\times 5} - \frac{y^7}{2\times 7}\right)_0^1 = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) = \frac{14-10}{140} = \frac{4}{140} = \frac{1}{35}$$

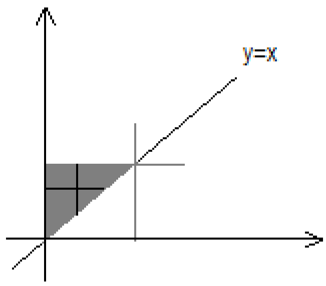
4. $\int_0^3 \int_x^0 e^{x^2} dydx = \int_0^3 \left(ye^{x^2}\right)_x^0 dx = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^3 \left(0 - xe^{x^2}\right) dx = \int_0^9 \frac{-1}{2} e^u du$

$$= \left(-\frac{1}{2} e^u\right)_0^9 = -\frac{1}{2}(e^9 - e^0) = -\frac{1}{2}(e^9 - 1)$$

تعویض ترتیب انتگرال گیری: گاهی بعضی انتگرال های دوگانه قابل محاسبه نمی باشند و یا به سختی حل می شوند، ولی اگر ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم. انتگرال را می توان حل کرد و یا انتگرال به شکل ساده تری حل می شود. برای اینکار ابتدا باید ناحیه انتگرال گیری را رسم کنیم.

مثال: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1. $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dydx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dxdy$ $\quad \begin{cases} y^2 = u \\ 2ydy = du \end{cases}$



$$R: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases} \rightarrow R': \begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

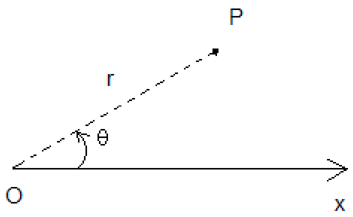
$$= \int_0^1 \left(xe^{y^2}\right)_0^y dy = \int_0^1 \left(ye^{y^2} - 0\right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e^1 - 1)$$

مختصات قطبی

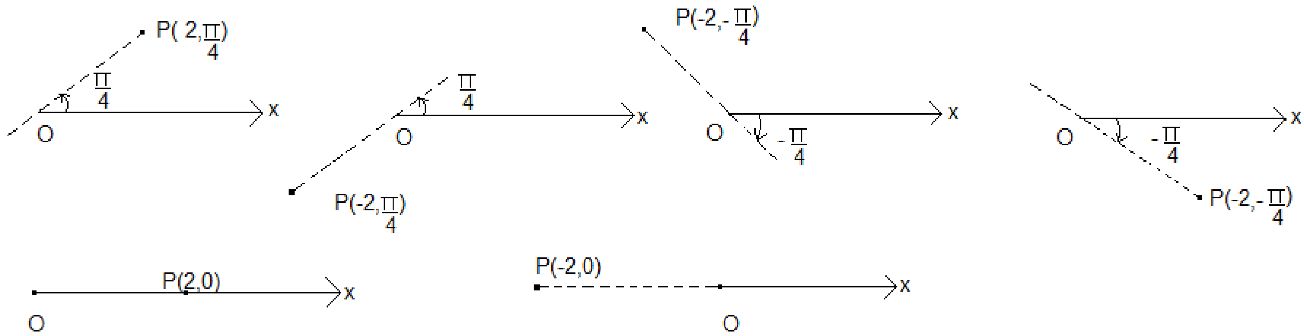
تاکنون برای نمایش یک نقطه در صفحه از دو محور عمود بر هم استفاده کردیم و هر نقطه را با زوج مرتب (a, b) نمایش می دادیم. این نوع نمایش را دستگاه مختصات دکارتی می نامیدیم.

غیر از دستگاه مختصات دکارتی، دستگاه های دیگری هم وجود دارند که می توانند مورد استفاده قرار گیرند. یکی از مهم ترین این دستگاه ها، دستگاه مختصات قطبی می باشد. این دستگاه از یک نقطه ثابت به نام قطب(O) و یک نیم خط به نام محور قطبی (Ox) تشکیل شده است. در این دستگاه هر نقطه مانند P را با زوج مرتب

(r, θ) نمایش می دهیم به طوریکه θ زاویه جهتدار خط OP با نیم خط Ox (در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت) و r فاصله جهت دار از نقطه P تا نقطه O می باشد. مثال بعد این مطلب را توضیح می دهد.



مثال: در شکل های زیر مختصات چند نقطه در دستگاه قطبی را مشخص کنید.



رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی: هرگاه مختصات نقطه P را دستگاه دکارتی با $(x_\circ, y_\circ)$ و در دستگاه قطبی با (r, θ) نمایش دهیم رابطه های زیر بین مولفه های آن ها برقرار است.

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} \quad \rightarrow \quad y = r\sin\theta$$

تبدیل مختصات قطبی به دکارتی:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

تبدیل مختصات دکارتی به قطبی:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (\tan\theta = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad \theta = k\pi + \alpha \quad , k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

مثال: مختصات نقاط $(2, \frac{\pi}{3})$ و $(-2, \frac{5\pi}{3})$ را در دستگاه دکارتی بنویسید.

$$\left(2, \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad r = 2 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1 \\ y &= r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \qquad \left(2,\frac{\pi}{3}\right)\to\left(1,\sqrt{3}\right)$$

$$\left(-2,\frac{5\pi}{3}\right) \quad \to \quad r=-2 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\cos\frac{5\pi}{3} = -2\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -2\times\frac{1}{2} = -1 \\ y &= -2\sin\frac{5\pi}{3} = -2\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\left(-2,\frac{5\pi}{3}\right)\to\left(-1,\sqrt{3}\right)$$

مثال: نقاط زیر در دستگاه مختصات دکارتی می باشند، شکل قطبی آنها را با فرض $r>0$ و $0\le\theta<2\pi$ بدست آورید.

1. $\boldsymbol{P_1(2,-2)}$ $\qquad x=2 \;,\; y=-2$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2}{2}=-1=\tan(-\frac{\pi}{4}) \quad\to\quad \theta=k\pi-\frac{\pi}{4}\;\;(k\in\mathbb{Z})$$

چون $(2,-2)$ در ربع چهارم واقع است پس به ازای $k=2$ داریم $\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

بنابراین شکل قطبی نقطه P_1 به صورت $\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$ می باشد.

2. $\boldsymbol{P_2(-3,0)}$ $\qquad x=-3 \;,\; y=0$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{-3}=0=\tan 0 \quad\to\quad \theta=k\pi-0=k\pi\;\;(k\in\mathbb{Z})$$

چون نقطه $(-3,0)$ در مرز ربع دوم و سوم واقع است با در نظر گرفتن $k=1$ داریم $\theta=\pi$

بنابراین شکل قطبی نقطه P_2 به صورت $(3,\pi)$ می باشد.

$\boldsymbol{3.}\quad \boldsymbol{P_3(-\sqrt{3},-1)} \quad x=-\sqrt{3}\ ,\ y=-1 \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6} \quad \to \quad \theta=k\pi+\frac{\pi}{6}\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

چون P_3 در ربع سوم واقع است به ازای $k=1$ داریم $\theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

بنابراین شکل قطبی نقطه P_2 به صورت $\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$ می باشد.

انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات قطبی: یکی از مهمترین روش‌های انتگرال‌گیری برای انتگرال‌های یگانه، روش تغییر متغیر می‌باشد. مشابه این روش برای انتگرال‌های دوگانه نیز وجود دارد که در این بخش حالت خاصی از آن به نام تغییر متغیر قطبی بیان می‌شود در تغییر متغیر قطبی انتگرال از مختصات دکارتی به انتگرال در مختصات قطبی تبدیل م شود. لازم به یادآوری است که بین مختصات دکارتی و قطبی رابطه‌های زیر برقرار است.

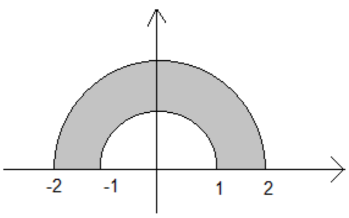
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

همچنین ثابت می شود $dxdy=rdrd\theta$

بنابراین اگر R ناحیه انتگرال گیری در مختصات دکارتی و D همین ناحیه در مختصات قطبی باشد، داریم:

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_D f(rcos\theta,rsin\theta)rdrd\theta$$

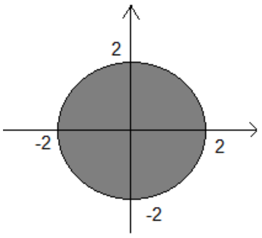
مثال: R ناحیه محدود به دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ در ناحیه اول و دوم می باشد. انتگرال $\iint_R e^{x^2+y^2}dxdy$ را به شکل قطبی بنویسید و سپس آن را محاسبه کنید.



$$D:\begin{cases} 1\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

$$\iint_D e^{r^2}rdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_1^2 2re^{r^2}drd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^{r^2}\right)_1^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e^4-e^1)d\theta$$
$$=\left(\frac{1}{2}(e^4-e^1)\theta\right)_0^{\pi}=\frac{1}{2}(e^4-e^1)\pi$$

مثال: هرگاه R دایره ای به مرکز$(0,0)$ و شعاع 2 باشد انتگرال $\iint_R \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$ را به شکل قطبی تبدیل و آن را محاسبه کنید.



$$D:\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{9-r^2}\, rdrd\theta = \qquad \begin{cases} 9-r^2 = u & \begin{cases} r=0 \ \to u=9 \\ r=2 \ \to u=5 \end{cases} \\ -2rdr = du \ \to & rdr = -\frac{1}{2}du \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_9^5 \sqrt{u}\, dud\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_9^5 u^{\frac{1}{2}}\, dud\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_9^5 d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\times\left((5)^{\frac{3}{2}}-(9)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{9^3}\right)d\theta$$

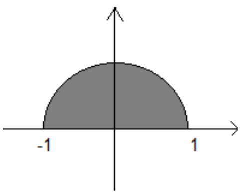
$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(5\sqrt{5}-27\right)d\theta = \left(-\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-27\right)\theta\right)_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-27\right)2\pi$$

مثال: انتگرال های زیر را پس از تبدیل به انتگرال قطبی محاسبه کنید.

1. $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{dydx}$

$$R:\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \to y=\sqrt{1-x^2} \ \to y^2 = 1-x^2 \ \to x^2+y^2 = 1$$

ناحیه بصورت دایره‌ای به شعاع یک است اما چون y ها بیشتر از صفر است نیم دایره بالای محور xها مدنظر می‌باشد



$$D:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx = \int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{r\cos\theta}{r} rdrd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^1 r\cos\theta\, drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\cos\theta\right)_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\cos\theta\left(\frac{1}{2}-0\right)d\theta = \left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

2. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^3-xy^2)\,dxdy$ $\qquad R:\begin{cases}-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ -1\le y\le 1\end{cases}$

$x=\sqrt{1-y^2}\ \to\ x^2=1-y^2\ \to\ x^2+y^2=1$ دایره ای به شعاع یک $D:\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^3cos^3\theta+r\cos\theta\ r^2sin^2\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\big(cos^3\theta+\cos\theta\,(1-cos^2\theta)\big)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4(cos^3\theta+\cos\theta-cos^3\theta)drd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos\theta\,drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^5}{5}\cos\theta\right)_0^1 d\theta=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\frac{1}{5}(\sin\theta)_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{5}(\sin 2\pi-\sin 0)=0$$

کاربرد انتگرال دوگانه: انتگرال دوگانه کاربردهای مختلفی دارد که در اینجا دو مورد را توضیح می دهیم

کاربرد اول(محاسبه حجم): با این کاربرد که در واقع انگیزه ی تعریف انتگرال دوگانه بود در ابتدای این فصل آشنا شدید. اکنون آن را به شکل رسمی تر بیان می کنیم. اگر $z=f(x,y)$ معادله یک سطح در فضا و D ناحیه ای از صفحه xy باشد و برای هر نقطه این ناحیه داشته باشیم $f(x,y)\ge 0$ در این صورت حجم قسمتی از فضا که بین سطح f و ناحیه D محدود است از فرمول های زیر بدست می آید.

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{یا} \quad V=\iint_D f(x,y)dydx$$

یا به صورت مختصر $\qquad V=\iint_D zdA$

مثال: حجم زیر صفحه $5z+4y=20$ که تصویر آن بر صفحه xy مستطیل $0\le y\le 3$ و $0\le x\le 2$ می باشد را بیابید

پاسخ: $\qquad 5z=20-4y$ معادله این سطح را به صورت $z=f(x,y)=\frac{20-4y}{5}$ می توان نوشت.
بنابراین حجم شکل موردنظر به صورت زیر محاسبه می شود

$$V=\int_0^2\int_0^3\left(\frac{20-4y}{5}\right)dydx=\int_0^2\int_0^3\left(4-\frac{4y}{5}\right)dydx=\int_0^2\left(4y-\frac{4y^2}{5\times 2}\right)_0^3 dx$$

$$= \int_0^2 \left(12 - \frac{2}{5} \times 9 - 0\right) dx = \int_0^2 \left(12 - \frac{18}{5}\right) dx = \int_0^2 \frac{42}{5} dx = \left(\frac{42}{5} x\right)_0^2 = \frac{84}{5}$$

مثال: حجم زیر سطح استوانه $z = x^2 + 2$ و بالای مثلث $2 \leq x \leq y$ و $2 \leq y \leq 0$ را محاسبه کنید.

$$V = \int_0^2 \int_y^2 (x^2 + 2)\, dxdy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)_y^2 dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2^3}{3} + 2 \times 2 - \left(\frac{y^3}{3} + 2y\right)\right)_y^2 dy = \int_0^2 \left(\frac{20}{3} - \left(\frac{y^3}{3} + 2y\right)\right) dy$$

$$= \left(\frac{20}{3} y - \frac{y^4}{3 \times 4} - y^2\right)_0^2 = \frac{40}{3} - \frac{16}{12} - 4 = \frac{40 - 4}{3} - 4 = 12 - 4 = 8$$

مثال: حجم قسمتی از فضا که زیر سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ و بالای ناحیه $1 \leq x + y$ **و** $1 \leq x + y$ **و** $0 \leq x$ **و** $0 \leq y$ محدود شده است را بیابید.

پاسخ:
$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x^2 - y^2)\, dydx &= \int_0^1 \left(y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - x^2(1 - x) - \frac{(1 - x)^3}{3}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - x^2 + x^3 - \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - x^2 + x^3 - \frac{1}{3} + x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2x^2 + \frac{4x^3}{3}\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^4}{3 \times 4}\right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

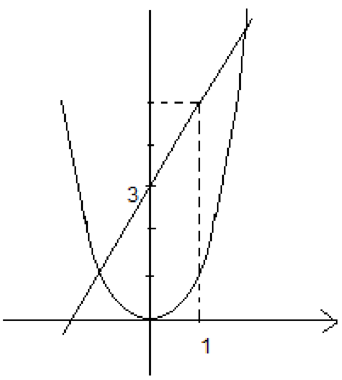
مثال: حجم قسمتی از فضا که زیر سطح $z = xy$ و بالای مثلث به راس های $(2,0)$, $(0,2)$, $(0,0)$ محدود شده است را بیابید.

$$V = \iint_D z\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{2-x} xydydx = \int_0^2 \left(x\frac{y^2}{2}\right)_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left(x\frac{(2-x)^2}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{x(4-4x+x^2)}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(2x-2x^2+\frac{x^3}{2}\right)dx$$
$$= \left(x^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{2\times 4}\right)_0^2 = \left(2^2-\frac{2\times 2^3}{3}+\frac{2^4}{8}\right) = 4-\frac{16}{3}+2=\frac{2}{3}$$

کاربرد دوم(محاسبه مساحت یک ناحیه در صفحه xy): تاکنون مساحت یک ناحیه را به کمک انتگرال یگانه (ساده) محاسبه می کردیم، اما اگر فرمول محاسبه حجم یعنی $V=\iint_D zdA$ تابع $x^2f(x,y)=1$ اختیار شود عدد مربوط به حجم با عدد مربوط به مساحت ناحیه D در صفحه xy برابر است. بنابراین مساحت ناحیه D در صفحه xy را به کمک انتگرال دوگانه $S=\iint_D dA$ نیز می توان بدست آورد.

مثال: مساحت ناحیه محصور بین منحنی های $y=x^2$ و $y=2x+3$ را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

پاسخ: چون حدود x مشخص نشده است باید مختصات نقاطی که این منحنی و خط به هم برخورد می کنند را بدست آورد.



x	0	1
y	3	5

$$x^2=2x+3 \rightarrow x^2-2x-3=0 \qquad (x-3)(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$S=\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dydx = \int_{-1}^{3} (y)_{x^2}^{2x+3} dx = \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)dx$$

$$= \left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{3} = 3^2+9-\frac{3^3}{3}-\left(1-3-\frac{-1}{3}\right) = 9+\frac{5}{3}=\frac{32}{3}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی های داده شده را به کمک انتگرال دوگانه بیابید.

1. $\boldsymbol{y=\sin x \quad ,y=x+1 \quad ,x=0 \quad , \quad x=\frac{\pi}{2}}$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sin x}^{x+1}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y)_{\sin x}^{x+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1-\sin x)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x+\cos x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-(0+0+1)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-1$$

2. $\boldsymbol{x=y^2-2 \qquad , \quad x=y}$

$$y^2-2=y \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y^2-y-2=0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(y-2)(y+1)=0}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$S=\int_{-1}^{2}\int_{\boldsymbol{y^2-2}}^{y}dxdy=\int_{-1}^{2}(x)_{\boldsymbol{y^2-2}}^{y}\,dy=\int_{-1}^{2}(y-y^2+2)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+2y\right)_{-1}^{2}$$

$$=\left(2-\frac{8}{3}+4-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2)\right)=\left(-\frac{2}{3}+4-\left(\frac{3+2-12}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{-4+24+7}{6}=\frac{27}{6}=4.5$$

3. $\boldsymbol{xy=1 \quad , \quad y=0\, , \quad x=\frac{1}{4} \quad , \quad x=4}$

$$y=\frac{1}{x}$$

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\int_0^{\frac{1}{x}}dydx=\int_{\frac{1}{4}}^{4}(y)_0^{\frac{1}{x}}\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\left(\frac{1}{x}\right)dx=(\ln|x|)_{\frac{1}{4}}^{4}=\ln|4|-\ln\left|\frac{1}{4}\right|=\ln\left(\frac{4}{\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{4}}\right)=\ln 16$$

توجه: می توان فرمول مساحت یا حجم یک ناحیه در مختصات دکارتی را به کمک انتگرال دوگانه را به مساحت یا حجم یک ناحیه در مختصات قطبی نیز تعمیم داد.

مثال: حجم قسمتی از فضا که زیر سطح $z = x^2 + y^2$ و بالای دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy است را بیابید.

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad r^2 = 4 \quad \rightarrow \quad r = 2$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 . rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{16}{4} d\theta = (4\theta)_0^{2\pi} = 8\pi$$

تمرین: حجم قسمتی ازفضا که زیرسطح $z = 4 - x^2 - y^2$ و بالای دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy را بدست آورید

تمرین: حجم قسمتی ازفضا که زیرسطح $z = x^2 + 1$ و بالای ناحیه $0 \leq x \leq y$ و $0 \leq y \leq 1$ در صفحه xy را بدست آورید

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید

1. $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos y \, dydx$

2. $\int_1^2 \int_0^x 2x^2y^2 \, dydx$

3. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (y^2 + x^2) \, dxdy$

4. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x \, dxdy$

تمرین: مشتقات جزیی مرتبه اول توابع را بدست آورید

1. $f(x, y, z) = yz\ln x$

2. $f(x, y, z) = (2xy + z^2)^5$

3. $f(x, y, z) = e^{2x+yz} + z^2xy$

4. $f(x, y) = tan^{-1}(2xy)$