دیفرانسیل کل:

دیفرانسیل تابع دو متغیره $z = f(x,y)$

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

تابع متغیره $w = f(x,y,z)$

$$dw = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

نام خداوندی که تکیه بر ناصر

$y = f(x)$ دیفرانسیل تابع

$dy = f' dx$

$z = e^{xy}$

$dz = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$

$z = \frac{x}{y} \longrightarrow f_x = \frac{y - 0}{y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$

$dz = \frac{1}{y} dx + \frac{0 - 1 \times x}{y^2} dy$

$w = x^2 y^3 z^2$

$dw = 2xy^3z^2 dx + 3y^2x^2z^2 dy + 2zx^2y^3 dz$

$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$dw = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy + \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz$

$w = \ln(xy) + e^{2z}$

$dw = \frac{y}{xy} dx + \frac{x}{xy} dy + 2e^{2z} dz$

Scanned with CamScanner

به نام خداوندی که تکیه بر نامش

$y = f(x)$ دیفرانسیل تابع

$dy = f' dx$

دیفرانسیل کل:

$z = f(x,y)$ دیفرانسیل تابع دو متغیره

$dz = f_x dx + f_y dy$

$w = f(x,y,z)$

$dw = f_x dx + f_y dy + f$

$z = e^{xy}$

$dz = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$

$z = \frac{x}{y} \longrightarrow f_x = \frac{y-0}{y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$

$dz = \frac{1}{y} dx + \frac{0 - 1\times x}{y^2} dy$

$w = x^2 y^3 z^2$

$dw = 2x y^3 z^2 dx + 3y^2 x^2 z^2 dy + 2z x^2 y^3 dz$

$w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$dw = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy + \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz$

$w = \ln(xy) + e^{2z}$

$dw = \frac{y}{xy} dx + \frac{x}{xy} dy + 2e^{2z} dz$

بردار گرادیان: برای تابع $z=f(x,y)$ گرادیان تابع را با ∇f نمایش می‌دهند و برابر است با برداری که مولفه اول آن f_x و مولفه دوم آن f_y می‌باشد

$$z=f(x,y)$$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = \langle f_x , f_y \rangle$$

$$w=f(x,y,z)$$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$= -\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 1\vec{k}$$

تابع سه متغیره

بردار گرادیان

$D_{\vec{u}} f(x,y,z)$

$$|u| = 1 \xrightarrow[\text{اگر نبود}]{} \frac{u}{|u|} \leftarrow$$ روش یکه شدن

به نام خداوندی که کمک برنامه‌ست

دیفرانسیل تابع

$$y = f(x)$$

$$dy = f' dx$$

$$f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$= -\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 1\vec{k}$$

مشتق جهت‌دار (سویی) : مشتق جهتی تابع سه متغیره f در نقطه (x,y,z) در جهت $\boxed{\text{بردار یکانی}}$ $u = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\cdot u_1 + f_y(x,y,z)\, u_2 + f_z(x,y,z)\cdot u_3$$

$|u| = 1$ اگر نبود $\longrightarrow \frac{u}{|u|} \longleftarrow$ روش یکه شدن

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ مشتق جهتی f را

در نقطه $(1,1,0)$ در جهت بردار $a=2i-3j+6k$

$|a|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$ است را بدست آورید.

$f_x=3x^2-y^2\Big|_{(1,1,0)}=3-1=2$

$f_y=-2yx=-2$

$f_z=-1$

$\longrightarrow a=\frac{2}{7}i-\frac{3}{7}j+\frac{6}{7}k$

$$D_{\vec{a}}f=f_x a_1+f_y a_2+f_z a_3$$

$$=2\times\frac{2}{7}+(-2)\left(-\frac{3}{7}\right)+(-1)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

مشتق جهتی تابع $f(x,y) = 2x^3y - 3y^2$ را در نقطه $(2,-1)$ در جهت بردار $V = 3i + 4j$ را بدست آورید.

$$f_x = 6x^2y \Big|_{(2,-1)} = 6 \times 4(-1) = -24$$

$$f_y = 2x^3 - 6y \Big|_{(2,-1)} = 16 + 6 = 22$$

$$|V| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{V}{|V|} = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$$

$$D_{\vec{v}}f = -24 \times \frac{3}{5} + 22 \times \frac{4}{5} = \frac{-72}{5} + \frac{88}{5} = \frac{16}{5} = 3/2$$

به نام خداوندی که تکیه بر نامش

$$\nabla f = \langle f_x , f_y , f_z \rangle \qquad u = \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$$

$$D_u f = f_x u_1 + f_y u_2 + f_z u_3 = \nabla f \cdot \vec{u}$$

کاربرد بردار گرادیان

کاربرد ۱

کاربرد ۲ اگر θ زاویه بین بردار خواسته شده و گرادیان تابع باشد

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot \cancel{|u|}^{\,1} \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

وقتی $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$) ← $D_u f = |\nabla f|$

اگر تابع f در جهت بردار ∇f حرکت کند ← بیشترین افزایش

وقتی $\theta = 180$ ← $\cos 180 = -1$ ← $D_u f = -|\nabla f|$

اگر تابع در خلاف جهت بردار ∇f حرکت کند ← بیشترین کاهش را داریم

بنام خداوندی که کمک برنامش

$$\nabla f = \langle f_x , f_y , f_z \rangle \qquad u = \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$$

$$D_u f = f_x u_1 + f_y u_2 + f_z u_3 = \nabla f \cdot \vec{u}$$

کاربرد بردار گرادیان

کاربرد ۱

کاربرد ۲ اگر θ زاویه بین بردار خواسته شده و گرادیان تابع باشد

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot \cancel{|u|} \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

وقتی $\cos\theta = 1$ میزان افزایش $D_u f = |\nabla f|$

وقتی $\theta = 180 \rightarrow \cos 180 = -1 \leftarrow$ $D_u f = -|\nabla f|$ میزان کاهش

اگر تابع f در جهت بردار ∇f حرکت کند ← بیشترین افزایش

اگر تابع در جهت خلاف بردار ∇f حرکت کند ← بیشترین کاهش را داریم

دما در هر نقطه از یک صفحه فلزی برابر $T(x,y) = x^2 e^{-y}$ از نقطه $(2,1)$ در چه جهت حرکت کنیم تا افزایش دما حداکثر بیشترین باشد میزان این افزایش را نیز محاسبه کنید.

در جهت ∇T

$$T_x = 2xe^{-y}\Big|_{(2,1)} = 4e^{-1}$$

$$T_y = -x^2 e^{-y}\Big|_{(2,1)} = -4e^{-1}$$

در جهت $\nabla f = 4e^{-1}\vec{i} - 4e^{-1}\vec{j}$

$$|\nabla f| = \sqrt{(4e^{-1})^2 + (-4e^{-1})^2} = \sqrt{16e^{-2} + 16e^{-2}} = \sqrt{32e^{-2}} = 4e^{-1}\sqrt{2}$$

$$32 = 2 \times 16$$

بنام خداوندی که تکیه بر ناصر

دمای هر نقطه از یک صفحه فلزی برابر $T(x,y)=x^2e^{-y}$ از نقطه (۲,۱) در چه جهتی حرکت کنیم تا افزایش درجه حرارت بیشترین باشد. میزان این افزایش را نیز محاسبه کنید.

$+\nabla T$ در جهت

$T_x = 2xe^{-y}\Big|_{(2,1)} = 4e^{-1}$

$T_y = -x^2e^{-y}\Big|_{(2,1)} = -4e^{-1}$

در جهت $\nabla f = 4e^{-1}i - 4e^{-1}j$

$|\nabla f| = \sqrt{(4e^{-1})^2+(-4e^{-1})^2} = \sqrt{16e^{-2}+16e^{-2}} = \sqrt{\underbrace{32}_{2\times 16}e^{-2}} = 4e^{-1}\sqrt{2}$

دمای ناحیه‌ای از فضا در هر نقطه آن با ضابطه $T(x,y,z)=2x^2-xyz$ مشخص می‌گردد. از نقطه (۱,-۲,۱) در چه جهتهایی حرکت کنیم تا افزایش و کاهش درجه حرارت بیشترین مقدار باشد. میزان این تغییرات را محاسبه کنید.

در جهت ∇T بیشترین افزایش

" " $-\nabla T$ بیشترین کاهش

$T_x = 4x - yz\Big|_{(1,-2,1)} = 4-(-2)(1) = 6$

$T_y = -xz = -1 \longrightarrow \nabla T = \langle 6,-1,2\rangle$ جهت بیشترین افزایش

$T_z = -xy = -1(-2) = 2 \qquad -\nabla T = \langle -6,+1,-2\rangle \rightarrow$ جهت بیشترین کاهش

$|\nabla T| = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$ میزان بیشترین افزایش

$-\sqrt{41}$ " " کاهش