بسم الله الرحمن الرحیم

۶

هرگاه a و b دو بردار به ترتیب با طول های ۲ و ۵ و زاویه

بین آن ها ۱۵۰ باشد طول بردار $3a-2b$

را بدست آورید

$|a|=2 \quad \theta=150$

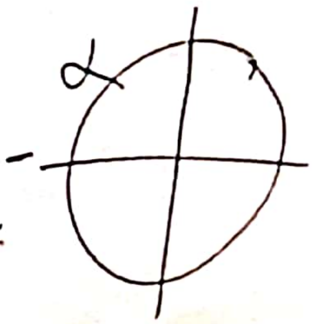
$|b|=5$

$|3a-2b|^2=(3a-2b)\cdot(3a-2b)$

$=9|a|^2-12a\cdot b+4|b|^2=$

$|a|\cdot|b|\cos\theta$

$=9\times4-12\times\cancel{2}\times5\times\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}}+\cancel{4}\times25=$



$\cos 150$

-30

$-\cos 30$

$=36+60\sqrt{3}+100=136+60\sqrt{3}$

$|3a-2b|=\sqrt{136+60\sqrt{3}}$

ض ۷

هرگاه طول بردارهای a, b ۳، ٤ باشد و زاویه ۶۰ باشد زاویه بین دو بردار $a+2b$, $a-b$ را بدست آورید.

$$|a+2b|^2 = |a|^2 + 4\overbrace{a.b}^{|a|.|b|\cos 60} + 4|b|^2$$

$$= 9 + 4\times 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} + 4\times 16$$

$$= 9 + \underbrace{24 + 64}_{88} = 97 \rightarrow |a+2b| = \sqrt{97}$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 - 2\overbrace{a.b}^{|a||b|\cos 60} + |b|^2$$

$$= 9 - \cancel{2}\times 3\times 4\times \frac{1}{\cancel{2}} + 16 = 9 \underbrace{- 12 + 16}_{4} = 13$$

$$|a-b| = \sqrt{13}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a+2b).(a-b)}{|a+2b|.|a-b|}\right)$$

$$(a+2b)(a-b) = |a|^2 + \overbrace{b.a}^{|a|.|b|\cos 60} - 2|b|^2$$

$$= 9 + 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} - 2\times 16$$

$$= \underbrace{9 + 6}_{15} - 32 = -17$$

اگر زاویه بین دو بردار a و b را بخواهد

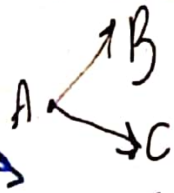
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right)$$

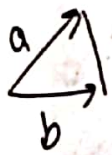
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{97}\times\sqrt{13}}\right)$$

بسم الله الرحمن الرحیم

ص ۹

مساحت مثلثی به رئوس های $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$ بدست آورید.





$S=\frac{1}{2}|a\times b|$

$\overrightarrow{AC}=\langle 4,0,6\rangle$

$\overrightarrow{AB}=\langle 2,-2,-3\rangle$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}\times 28=14$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-12-0)i-(12+12)j+(0+8)k=$$

$-12i-24j+8k$

ض ۷

هرگاه طول بردارهای a, b ، ۳ و ۴ باشد و زاویه ۶۰ باشد زاویه بین دو بردار $a+2b$ و $a-b$ را بدست آورید.

$$|a+2b|^2 = |a|^2 + 4\underbrace{a.b}_{|a|.|b|\cos 60} + 4|b|^2$$

$$= 9 + 4 \times 3 \times \cancel{4}^{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} + 4 \times 16$$

$$= 9 + \underbrace{24 + 64}_{88} = 97 \rightarrow |a+2b| = \sqrt{97}$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 - 2\underbrace{a.b}_{|a||b|\cos 60} + |b|^2$$

$$= 9 - \cancel{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{\cancel{2}} + 16 = \underbrace{9 - 12}_{-3} + 16 = 13$$

$$|a-b| = \sqrt{13}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a+2b).(a-b)}{|a+2b|.|a-b|}\right)$$

$$(a+2b)(a-b) = |a|^2 + b.a - 2|b|^2 \quad (b.a = |a|.|b|\cos 60,\ \cos 60 = \tfrac{1}{2})$$

$$= 9 + 3 \times \cancel{4}^{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} - 2 \times 16$$

$$= \underbrace{9 + 6}_{15} - 32 = -17$$

اگر زاویه بین دو بردار a و b را بخواهد

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right)$$

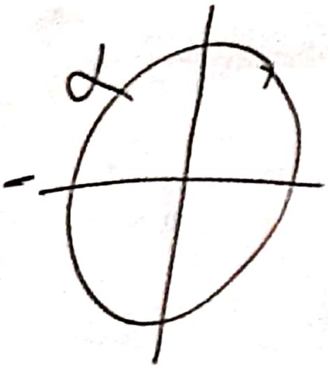
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{97} \times \sqrt{13}}\right)$$

Scanned with CamScanner

Cs۱۵۰

~~۱۸۰~~ ـ ۳۰

Cs۳۰



$۳۶ + ۶۰\sqrt{۳} + ۱۰۰ = ۱۳۶ + ۶۰\sqrt{۳}$

$|۳a \quad = \sqrt{۱۳۶ + ۶۰\sqrt{۳}}$

۶

هرگاه a و b دو بردار به ترتیب با طول های ۲ و ۵ و زاویه بین آن ها ۱۵۰ باشد طول بردار $۳a-۲b$ را بدست آورید.

$|a| = ۲ \qquad \theta = ۱۵۰$

$|b| = ۵$

$|۳a - ۲b|^۲ = (۳a - ۲b).(۳a - ۲b)$

$= ۹|a|^۲ - ۱۲a.b + ۴|b|^۲$

$|a|.|b| Cos ۱۵۰$

$= ۹ \times ۴ - ۱۲ \times ۲ \times ۵ \times \frac{-\sqrt{۳}}{۲} + ۴ \times ۲۵ =$ ۱۰۰

$$r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t^{۲}\, \vec{k}$$

$$v = -\sin t\, i + \cos t\, j + ۲t\, k$$

$$a = -\cos t\, i - \sin t\, j + ۲\, k$$

$$|V(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^{۲} + (\cos t)^{۲}}_{۱} + (۲t)^{۲}} = \sqrt{۴t^{۲} + ۱}$$

$$|a(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\cos t)^{۲} + (-\sin t)^{۲}}_{۱} + ۲^{۲}} = \sqrt{۵}$$

$$V(t) \cdot a(t) = \cancel{(-\sin t)(-\cos t)} + \cancel{(\cos t)(-\sin t)} + (۲t)(۲) = ۴t$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{V(t) \cdot a(t)}{|V(t)|\,|a(t)|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۴t}{\sqrt{۵}\,\sqrt{۱+۴t^{۲}}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{۴t}{\sqrt{۵(۱+۴t^{۲})}}\right)$$

معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $(-2,4,5)$ بگذرد و با صفحه $5x-2y+3z=7$ موازی باشد

$\vec{n} = \langle 5,-2,3 \rangle$

$$5(x-(-2)) + (-2)(y-4) + 3(z-5) = 0$$

$$5x + 10 - 2y + 8 + 3z - 15 = 0$$

$$5x - 2y + 3z + 3 = 0$$

$$r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t^{۲}\, \vec{k}$$

$$V = -\sin t\, i + \cos t\, j + ۲t\, k$$

$$a = -\cos t\, i - \sin t\, j + ۲\, k$$

$$|V(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^{۲} + (\cos t)^{۲}}_{1} + (۲t)^{۲}} = \sqrt{۴t^{۲} + 1}$$

$$|a(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\cos t)^{۲} + (-\sin t)^{۲}}_{1} + ۲^{۲}} = \sqrt{۵}$$

$$V(t) \cdot a(t) = \cancel{(-\sin t)(-\cos t)} + \cancel{(\cos t)(-\sin t)} + (۲t)(۲) = ۴t$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{V(t) \cdot a(t)}{|V(t)|\,|a(t)|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۴t}{\sqrt{۵}\,\sqrt{1 + ۴t^{۲}}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{۴t}{\sqrt{۵(1 + ۴t^{۲})}}\right)$$

Scanned with CamScanner

معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $(-2, 4, 5)$ بگذرد و با صفحه $5x-2y+3z=7$ موازی باشد

$$\vec{n} = \langle 5, -2, 3 \rangle$$

$$5(x-(-2)) + (-2)(y-4) + 3(z-5) = 0$$

$$5x + 10 - 2y + 8 + 3z - 15 = 0$$

$$5x - 2y + 3z + 3 = 0$$

م ـ ۹

نقطه (۳و۵و۱)

$$L: \overset{\div 2}{\frac{2x-1}{3}} = \frac{y+1}{4} = \overset{\div -2}{\frac{2-2z}{1}}$$

$$\vec{V} = \left\langle \frac{3}{2}, 4, -\frac{1}{2} \right\rangle \xrightarrow{\times 2} \left\langle 3, 8, -1 \right\rangle$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-1}{-1}$$

$A = (۳, ۵, ۱)$

$v = \langle ۲, ۵, -۳ \rangle$

$$\begin{cases} x = ۲t + ۳ \\ y = ۵t + ۵ \\ z = -۳t + ۱ \end{cases}$$

معادله پارامتری

$$\frac{x - \overset{\text{نقطه}}{۳}}{۲} = \frac{y - ۵}{۵} = \frac{z - ۱}{-۳}$$

معادله متعارف خط

Scanned with CamScanner

بردار هادی

$B(5, -2, 1)$ ، $A(2, 0, 5)$

$$AB = \langle 5-2, -2-0, 1-5 \rangle = \langle 2, -2, -4 \rangle$$

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = -2t + 0 \\ z = -4t + 5 \end{cases}$$

A

یا

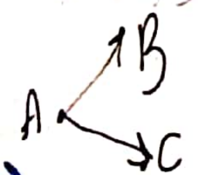
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -4t + 1 \end{cases}$$

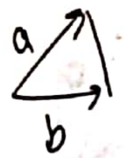
B

بسم الله الرحمن الرحیم

ص ۹

مساحت مثلثی به راس های $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$ بدست آورید.





$$S=\frac{1}{2}|a\times b|$$

$$\overrightarrow{AC}=\langle 4,0,6\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}=\langle 2,-2,-3\rangle$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}\times 28$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{28}=14$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-12-0)i-(12+12)j+(0+8)k=$$

$$-12i-24j+8k$$

ض ۷

هرگاه طول بردارهای a, b ، ۳ و ۴ باشد و زاویه ۶۰ باشد زاویه بین دو بردار $a+2b$ ، $a-b$

رابطه بدست آورید. $|a|\cdot|b|\cos 60$

$$|a+2b|^2 = |a|^2 + 4a\cdot b + 4|b|^2$$

$$= 9 + 4\times 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} + 4\times 16$$

$$= 9 + \underbrace{24 + 64}_{88} = 97 \to |a+2b| = \sqrt{97}$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 - 2\overset{|a||b|\cos 60}{a\cdot b} + |b|^2$$

$$= 9 - \cancel{2}\times 3\times 4\times \frac{1}{\cancel{2}} + 16 = \underbrace{9 - 12 + 16}_{13} = 13$$

$$|a-b| = \sqrt{13}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a+2b)\cdot(a-b)}{|a+2b|\cdot|a-b|}\right)$$

$$(a+2b)(a-b) = |a|^2 + \overset{|a|\cdot|b|\cos 60}{b\cdot a} - 2|b|^2$$

$$= 9 + 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} - 2\times 16$$

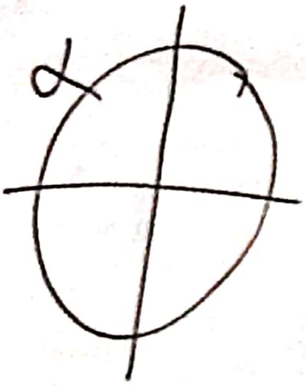
$$= \underbrace{9 + 6}_{15} - 32 = -17$$

اگر زاویه بین دو بردار a و b را بخواهد

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{97}\times\sqrt{13}}\right)$$

بسم الله الرحمن الرحیم



$\cos 150 = -\cos 30$

$\cancel{180} - 30$

$36 + 60\sqrt{3} + 100 = 136 + 60\sqrt{3}$

$|3a - 2b| = \sqrt{136 + 60\sqrt{3}}$

۶

هرگاه a , b دو بردار به ترتیب با طول های ۲ و ۵ و زاویه بین آن ها ۱۵۰ باشد طول بردار $3a-2b$ را بدست آورید.

$|a| = 2 \quad \theta = 150$

$|b| = 5$

$|3a - 2b|^2 = (3a - 2b)\cdot(3a - 2b)$

$= 9|a|^2 - 12\, a\cdot b + 4|b|^2 =$

$|a|\,|b| \cos\theta$

$= 9 \times 4 - 12 \times \cancel{2} \times 5 \times \frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \cancel{4 \times 25} =$ 100

$$\vec{r}(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t^2 \vec{k}$$

$$v = -\sin t\, i + \cos t\, j + 2t\, k$$

$$a = -\cos t\, i - \sin t\, j + 2\, k$$

$$|v(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1} + (2t)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$$|a(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2}_{1} + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$v(t) \cdot a(t) = \cancel{(-\sin t)(-\cos t)} + \cancel{(\cos t)(-\sin t)} + (2t)(2) = 4t$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{v(t) \cdot a(t)}{|v(t)|\,|a(t)|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4t}{\sqrt{5}\,\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4t}{\sqrt{5(1+4t^2)}}\right)$$

ص ۱۵

معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $(-2,4,5)$ بگذرد و با صفحه $5x-2y+3z=7$ موازی باشد

$$\vec{n} = \langle 5,-2,3 \rangle$$

$$5\big(x-(-2)\big)+(-2)(y-4)+3(z-5)=0$$

$$5x+10-2y+8+3z-15=0$$

$$5x-2y+3z+3=0$$

م ـ ۹

نقطه (۳و۵و۱)

$$L: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{2-2z}{1} \qquad \div 2 \qquad \div -2$$

$$\vec{V} = \left\langle \frac{3}{2}, 4, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \langle 3, 8, -1 \rangle$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-1}{-1}$$

$A=(۳,۵,۱)$

$v=\langle ۲,۵,-۳ \rangle$

$$\begin{cases} x = ۲t + ۳ \\ y = ۵t + ۵ \\ z = -۳t + ۱ \end{cases}$$

معادله پارامتری

نقطه

$$\frac{x-۳}{۲} = \frac{y-۵}{۵} = \frac{z-۱}{-۳}$$

معادله متعارف خط

B(۵ , -۲ , ۱) ; A(۲ , ۰ , ۵)

بردار هادی

AB = ⟨۵-۲ , -۲-۰ , ۱-۵⟩ = ⟨۳ , -۲ , -۴⟩

x = -۲t + ۲
y = -۲t + ۰
z = -۴t + ۵

(A)

یا

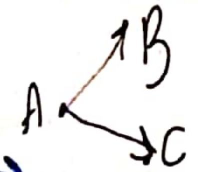
x = -۲t
y = -۲t - ۲
z = -۴t + ۱

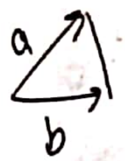
(B)

بسم الله الرحمن الرحیم

ص ۹

مساحت مثلثی به راس های $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$





$S=\frac{1}{2}|a\times b|$

بدست آورید

$\overrightarrow{AC}=\langle 4,0,6\rangle$

$\overrightarrow{AB}=\langle 2,-2,-3\rangle$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cancel{\sqrt{144+576+64}}=\frac{1}{2}\sqrt{784}$$

28

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{28}=14$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-12-0)i-(12+12)j+(0+8)k=$$

$-12i-24j+8k$

ص ۷

هرگاه طول بردارهای a, b ، ۳ و ۴ باشد و زاویه ۶۰ باشد زاویه بین دو بردار $a+2b$ و $a-b$

رابطه ت آرین: $|a|\cdot|b|\cos 60$

$$|a+2b|^2 = |a|^2 + 4a.b + 4|b|^2$$

$$= 9 + 4\times 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} + 4\times 16$$

$$= 9 + \underbrace{24 + 64}_{88} = 97 \rightarrow |a+2b| = \sqrt{97}$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 - 2a.b + |b|^2 \quad (a.b = |a||b|\cos 60)$$

$$= 9 - \cancel{2}\times 3\times 4\times \frac{1}{\cancel{2}} + 16 = 9 \underbrace{-12+16}_{4} = 13$$

$$|a-b| = \sqrt{13}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a+2b)\cdot(a-b)}{|a+2b|\cdot|a-b|}\right)$$

$$(a+2b)(a-b) = |a|^2 + b.a - 2|b|^2 \quad (b.a = |a|\cdot|b|\cos 60,\ \cos 60 = \tfrac{1}{2})$$

$$= 9 + 3\times \cancel{4}^{2}\times \frac{1}{\cancel{2}} - 2\times 16$$

$$= \underbrace{9+6}_{15} - 32 = -17$$

اگر زاویه بین دو بردار a و b را بخواهد

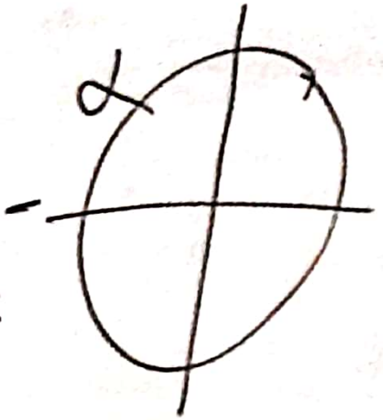
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{97}\times\sqrt{13}}\right)$$

$\cos 150$

$\cancel{X}0 - 30$

$\cos 30$



$36 + 60\sqrt{3} + 100 = 136 + 60\sqrt{3}$

$|3a \ldots = \sqrt{136 + 60\sqrt{3}}$

سؤال ۶

هرگاه a و b دو بردار به ترتیب با طول های ۲ و ۵ و زاویه بین آن ها ۱۵۰ باشد طول بردار $3a-2b$ را بدست آورید.

$|a| = 2 \quad \theta = 150$

$|b| = 5$

$|3a - 2b|^2 = (3a - 2b)\cdot(3a - 2b)$

$= 9|a|^2 - 12a\cdot b + 4|b|^2 =$

$|a|\,|b| \cos \theta$

$= 9 \times 4 - 12 \times \cancel{2} \times 5 \times \frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \cancel{4 \times 25}^{100} =$