فضای نمونه

مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند. به عنوان مثال:

فضای نمونهٔ پرتاب دوسکه، اگر ظاهر شدن شیر را با H وخط را با T نشان دهیم، عبارت است از:

$$S = \{HH , HT , TH , TT\}$$

- **پیشامد**

یکی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه است. مثلاً در پرتاب یک سکه، خط آمدن یک پیشامد است و شیرآمدن پیشامد دیگری است.

❍ انواع بیان احتمال

۱ـ احتمال کلاسیک

احتمال وقوع پیشامد خاصی مانند A عبارت است از تعداد عضوهای پیشامد A (تعداد حالات مساعد) به تعداد عضوهای فضای نمونه (تعداد حالات ممکن).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

توجه کنید که همهٔ پیامدهای مقدماتی، شانس مساوی برابر انتخاب شدن دارند.

۲ـ احتمال هندسی

این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = \frac{\text{طول، سطح یا حجم مساعد}}{\text{طول، سطح یا حجم کل}}$$

۳ ـ احتمال آماری

در آزمایشاتی که پیامدهای مقدماتی **هم شانس نمی‌باشند**، تعریف احتمال به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{فراوانی نسبی پیشامد } A = \frac{\text{تعداد دفعاتی که } A \text{ در } N \text{ تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{N}$$

حوادث از نقطه نظر احتمال وقوع عبارتند از:

۱) غیرممکن	: $P(A) = 0$	
۲) تصادفی	: $0 < P(A) < 1$	$\Leftarrow \quad 0 \le P(A) \le 1$
۳) یقینی (حتمی)	: $P(A) = 1$	

حوادث با هم به صورت‌های زیر درنظر گرفته می‌شوند:

۱) حوادث هم‌تراز
۲) حوادث مستقل
۳) حوادث ناسازگار

○ حوادث هم‌تراز (هم‌شانس)

به حوادثی که احتمال وقوع یکسان وبرابر با هم را داشته باشند حوادث هم‌تراز (هم‌شانس) می‌گوئیم.

نتایج پرتاب یک تاس:

$$\begin{cases} P\left(A_i\right)=\dfrac{1}{6} \\ i=1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

نتایج پرتاب یک سکه:

$$\begin{cases} P\left(A_i\right)=\dfrac{1}{2} \\ i=\text{خط و شیر} \end{cases}$$

نکته : حوادث به طور پیش‌فرض هم‌تراز فرض می‌شوند و n حادثه هم‌تراز به طور پیش‌فرض هر کدام احتمال $\frac{1}{n}$ دارند.

○حوادث مستقل:

هرگاه وقوع یا عدم وقوع یک حادثه تأثیری در وقوع یا عدم وقوع حادثه دیگر نداشته باشد دو حادثه را مستقل گویند وخواهیم داشت:

$$\boxed{A\,,B\ \text{مستقل} \iff P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

توجه کنید که درمقابل حوادث مستقل، حوادث وابسته مطرح می‌شوند.

سه پیشامد A و B و C مفروض هستند:

$$\boxed{(1).\begin{cases} P(A\cap B)=P(A).P(B) \\ P(A\cap C)=P(A).P(C) \\ P(B\cap C)=P(B).P(C) \end{cases} \quad , \quad (2).P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)}$$

هرگاه رابطهٔ (1) و (2) همزمان برقرار باشند، سه پیشامد A و B و C مستقل می‌باشند.

هرگاه فقط رابطهٔ (1) برقرار باشد سه پیشامد A و B و C دوبه دو مستقل می‌باشند.

مثال۲: اگر $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.2$ و $P(A\cap B)=0.06$، رویدادهای (حوادث) A و B چگونه‌اند؟ (مدیریت ۷۸)

۱) مکمل　　۲) مستقل　　۳) ناسازگار　　۴) وابسته

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow 0.06=0.3\times 0.2 \rightarrow \text{A و B مستقل‌اند}$$

توجه کنید در احتمال « **و** » را با $\cap$ و «**یا**» را با $\cup$ نمایش می‌دهند.

مثال۳: در پرتاب یک تاس و یک سکه احتمال ظاهر شدن 2 و شیر چه خواهد بود؟

حل :

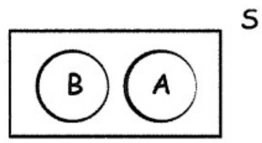
$A =$ پیشامد 2 آمدن تاس

$B =$ پیشامد شیرآمدن سکه

$$\xrightarrow{\text{مستقل } B \text{ و } A} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

○ حوادث ناسازگار

هرگاه وقوع همزمان دو حادثه **غیرممکن** باشد، حوادث را ناسازگار گوئیم و در نتیجه:



$$\boxed{A, B \text{ ناسازگار} \iff \begin{cases} A \cap B = \phi \\ P(A \cap B) = 0 \end{cases}}$$

مثال ۱: $P(A) = 0.1$ و $P(B) = 0.2$ و $P(A \cap B) = 0$ و A و B نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) مستقل ۲) ناسازگارند ۳) وابسته‌اند ۴) هیچ‌کدام

حل : چون $P(A \cap B) = 0 \Leftarrow A , B$ ناسازگارند.

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲: در پرتاب یک سکه و یک تاس (دو حادثه مستقل) احتمال ظاهرشدن 7 و شیر کدام است؟

حل :

A پیشامد = ظاهر شدن شیر $\longrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

B پیشامد = ظاهر شدن 7 $\longrightarrow P(B) = 0$

مسائل مهم احتمال

مهمترین مسائل مربوط به احتمال عبارتند از:

پرتاب تاس

پرتاب سکه

پرتاب تاس وسکه

مسئله مهره‌ها

سیستم سری و موازی

❍ پرتاب تاس

توجه کنید که در پرتاب m تاس فضای نمونه 6^m می‌باشد.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow\ P(A)=\frac{5}{36}$ توجه کنید که زوج (3 , 3) یک بار باید نوشته شود.
b)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 و تاس اول کمتر از 3 چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,5),(2,4)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow\ P(A)=\frac{2}{36}$
C)	در پرتاب دوتاس احتمال آن‌که مجموع کمتر از 5 باشد و یکی از تاس‌ها کمتر از 2 باشد چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,3),(1,2),(1,1),(2,1),(3,1)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow\ P(A)=\frac{5}{36}$

❍ پرتاب سکه

در پرتاب n سکه، فضای نمونه 2^n است.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب 2 سکه احتمال ظاهرشدن نتایج یکسان چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد : {(خ و خ) ، (ش و ش)} حالت کل: 2^2 $\Rightarrow\ P(A)=\frac{2}{4}$

d)	در پرتاب دو سکه احتمال آن‌که نتایج متفاوت باشد، چقدر است؟ **حل :** { (ش و خ) ، (خ و ش) } : حالات مساعد 2^2: حالات کل $\Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{4}$

پرتاب تاس و سکه

توجه کنید که تاس و سکه مستقل از هم بررسی می‌شوند.

ردیف	سؤال وحل
a)	در پرتاب یک تاس و یک سکه، احتمال آن‌که تاس 5 و سکه خط ظاهر شود؟ **حل :** P (سکه خط و تاس 5) =P (تاس 5) × P (سکه خط) $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

مسئله مهره‌ها

ردیف	سؤال و حل
a)	کیسه‌ای دارای 10 مهره از شماره 1 تا 10 است مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. ـ احتمال آن‌که مهره 4 باشد؟ **حل :** $\{4\}$:حالات مساعد $\{1, 2, \dots, 10\}$:حالات کل $\quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{1}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره یک عدد بین 1 تا 10 باشد؟ **حل :** $P(A)=\frac{10}{10}=1$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج باشد؟ **حل :** $\{2, 4, 6, 8, 10\}$:حالات مساعد $\{1, 2, \dots, 10\}$:حالات کل $\quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{5}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج و کمتر از 6 باشد؟ **حل :** $\{2, 4\}$:حالات مساعد $\{1, 2, \dots, 10\}$:حالات کل $\quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{10}$

b) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز است و 5 مهره آبی است، مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که قرمز باشد؟

حل :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد مهره قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}} = \frac{4}{9}$$

c) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و 5 مهره آبی است، 2 مهره آبی از آن خارج می‌کنیم، سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره قرمز باشد؟

حل :

قرمز	آبی
4	5

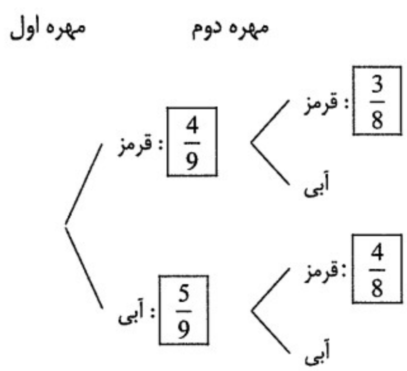
$\xrightarrow{\text{2 مهره آبی خارج}}$

قرمز	آبی
4	3

$$P\,(\text{مهره قرمز}) = \frac{4}{7}$$

d) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و5 مهره آبی است، یک مهره را از آن خارج می‌کنیم سپس مهره‌ای دیگر از آن خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره آخر خارج شده قرمز باشد؟

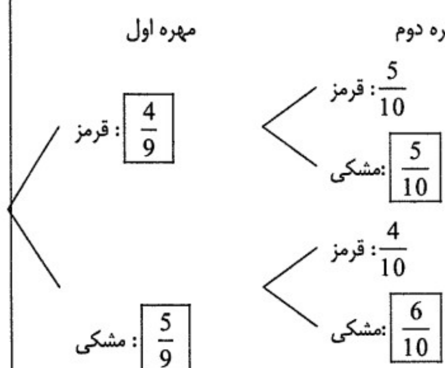
حل :



$$P\,(\text{قرمز}) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

e) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز، 5 مهره مشکی است، یک مهره از آن خارج کرده و به همراه یک مهره همرنگ آن دوباره داخل ظرف می‌گذاریم سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره مشکی باشد؟

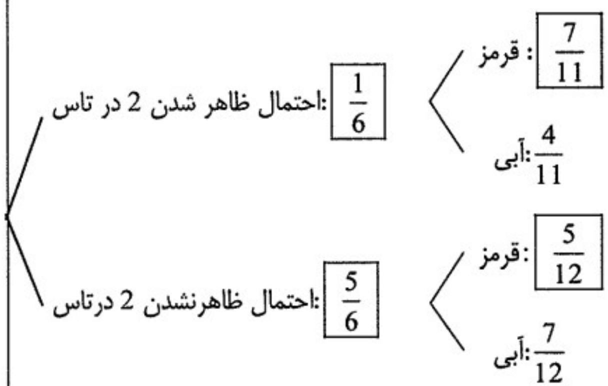
حل :



$$P\,(\text{مشکی}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

f) کیسه‌ای شامل 5 مهره قرمز و 4 مهره آبی است، تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر 2 آمد، 2 مهره قرمز در غیر این صورت 3 مهره آبی به کیسه اضافه می‌کنیم، سپس مهره‌ای از ظرف خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد؟

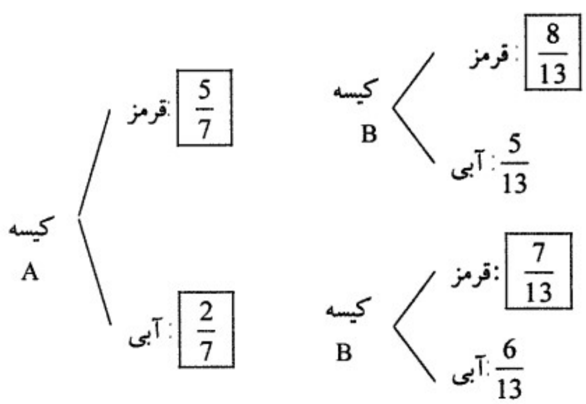
حل :



$$P(\text{قرمز})=\frac{1}{6}\times\frac{7}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{12}$$

g) کیسه A شامل 5 مهره قرمز و 2 مهره آبی وکیسه B شامل 7 مهره قرمز و 5 مهره آبی است مهره‌ای از کیسه A خارج کرده‌ایم و به کیسهB ریخته‌ایم، سپس مهره‌ای از کیسه B خارج کنیم، مطلوبست احتمال این‌که این مهره قرمز باشد:

حل :



$$P(\text{قرمز})=\frac{5}{7}\times\frac{8}{13}+\frac{2}{7}\times\frac{7}{13}=\frac{54}{91}$$

احتمال شرطی

هنگامی که دو پیشامد به یکدیگر وابسته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری می‌گذارد، در این صورت وقوع یکی را پس از این که دیگری به وقوع پیوسته باشد، محاسبه می‌نمایند چنین احتمالی را احتمال شرطی می‌گویند.

وقوع حادثه A ، به شرط آن‌که بدانیم B رخ داده است را به صورت $P(A|B)$ نشان داده و از فرمول زیر بدست می‌آید:

احتمال A به شرط B ؛ $P(B) \neq 0$ ؛ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

همچنین می‌توان احتمال وقوع حادثه B را به شرط وقوع حادثه A به صورت زیر بیان کرد:

احتمال B به شرط A ؛ $P(A) \neq 0$ ؛ $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

به شکل زیر توجه کنید:

نکته ؛ در صورتی که حوادث A و B **ناسازگار**، **وابسته**، یا **مستقل** باشند به نتایج زیر می‌رسیم:

$$P(A|B) = \begin{cases} = 0 & A\,,\,B \text{ ناسازگار؛} \\ = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & A\,,\,B \text{ وابسته؛} \\ P(A) & A\,,\,B \text{ مستقل؛} \end{cases}$$

$$P(B|A) = \begin{cases} = 0 & A\,,\,B \text{ ناسازگار؛} \\ = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} & A\,,\,B \text{ وابسته ؛} \\ = P(B) & A\,,\,B \text{ مستقل؛} \end{cases}$$

مثال۱: یک تاس را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن را حساب کنید که عدد 6 رخ دهدبه شرط آن که می‌دانیم عدد بزرگتر از 4 رخ داده است.

حل :

$$\text{فضای نمونه}: S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \ \text{پیشامد}: A = \{6\} \longrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B \ \text{پیشامد}: B = \{5, 6\} \longrightarrow P(B) = \frac{2}{6}$$

$$A \cap B = \{6\} \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

مثال۲: اگر $P(A) = 0.30$ و $P(B) = 0.50$ و $P(A \mid B) = 0.30$ باشد. می‌توان گفت A و B هر دو: (حسابداری ۸۱)

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = P(A) \Rightarrow$ B , A مستقل هستند.

مثال۳: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \mid B) = 0$ باشند. می‌توان گفت A و B هردو :

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$ B , A ناسازگار هستند.

مثال۴: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \mid B) = 0.1$ باشد می‌توان گفت A و B هر دو:

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) مکمل

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) \neq P(A)$ پس A و B مستقل نمی‌باشند و هم‌چنین $P(A|B) \neq 0$ پس A و B ناسازگار نیز نمی‌باشند. بنابراین A و B دو حادثه وابسته می‌باشند.

مثال۵: اگر $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$ و $P(B \mid A) = 0.1$ باشد آن‌گاه $P(A \mid B)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) 0.0153 ۲) 0.04 ۳) 0.05 ۴) 0.067

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.04}{0.6} = 0.067$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$$

مثال۶: اگر $P(A) = 0.5$ و $P(B) = 0.4$ و $P(A \mid B) = 0.1$ باشد آن‌گاه $P(A \cup B)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) 0.75 ۲) 0.86 ۳) 0.8 ۴) 0.9

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ $P(A \cup B)$ به $P(A \cap B)$ نیاز است، بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.04 = 0.86$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B).P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$$

مسائل قضیه بیس

مثال ۱: احتمال وقوع سه پیشامد A ، B و C به ترتیب برابر است با 0.35 ، 0.45 و 0.20 احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد A ، 0.8 است، احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد B ، 0.3 است و احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد C ، 0.65 است $P(A \mid X)$ کدام است؟

حل : ابتدا باید $P(X)$ (احتمال متوسط) را حساب کنیم:

$$\text{احتمال متوسط} = P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$$

$$P(X) = (0.35)(0.8) + (0.45)(0.3) + (0.20)(0.65) = 0.545$$

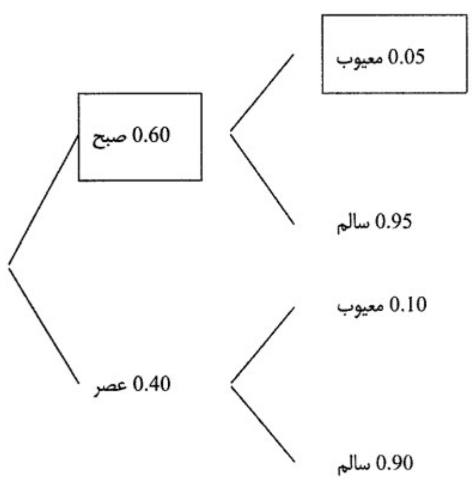
بنابراین:

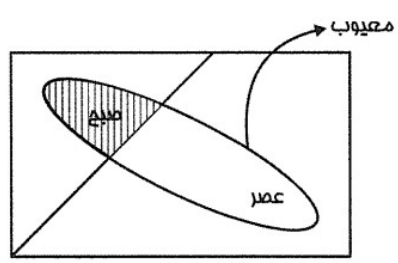
$$P(A \mid X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(X)} = \frac{(0.35)(0.8)}{0.545} = \frac{0.28}{0.545} \simeq 0.51$$

مثال ۲: در کارخانه‌ای 0.60 تولیدات توسط شیفت صبح و 0.40 تولیدات توسط شیفت عصر تولید می‌شود. 5 درصد تولیدات شیفت صبح و 10 درصد تولیدات شیفت عصر معیوبند اگر محصولی که به تصادف انتخاب شده است، معیوب تشخیص داده شود، احتمال آن‌که این محصول توسط شیفت صبح تولید شده باشد، چیست؟(اقتصاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.





$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح})}{\underbrace{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح}) + P(\text{عصر})\,P(\text{معیوب} \mid \text{عصر})}_{P(\text{معیوب})}}$$

$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.60)(0.05) + (0.40)(0.10)} = \frac{0.03}{0.03 + 0.04} = \frac{3}{7}$$