به نام خدا

میانترم ۷ یا ۸

پایان ترم ۱۰

فعالیت کلاسی ۳ یا ۲

اعداد مختلط، بردار در فضای R^3 - ضرب داخلی، خارجی

توابع برداری در فضا - مشتق و انتگرال آن ها

توابع چند متغیره، حد و پیوستگی آن ها

مشتقات جزئی - دیفرانسیل کامل - قاعده زنجیره ای برای مشتقات جزئی

و انتگرال دوگانه

۲

بردارها: در مباحث مختلف علمی با دو نوع کمیت برخورد می‌کنیم

کمیت‌های عددی: کمیت‌هایی هستند که فقط بزرگی آن‌ها مورد نظر است مثل

طول، جرم، زمان، دما ...

کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی که علاوه بر بزرگی آن‌ها جهت آن‌ها هم

مورد نظر است. مانند سرعت، شتاب، نیرو ...

این نوع کمیت‌ها را کمیت‌های برداری می‌نامند.

معرفی فضای سه بعدی: برای نمایش هر نقطه در فضا سه محور که دو به دو

عمود بر هم هستند و از یک نقطه ثابت می‌گذرند را در نظر می‌گیریم.

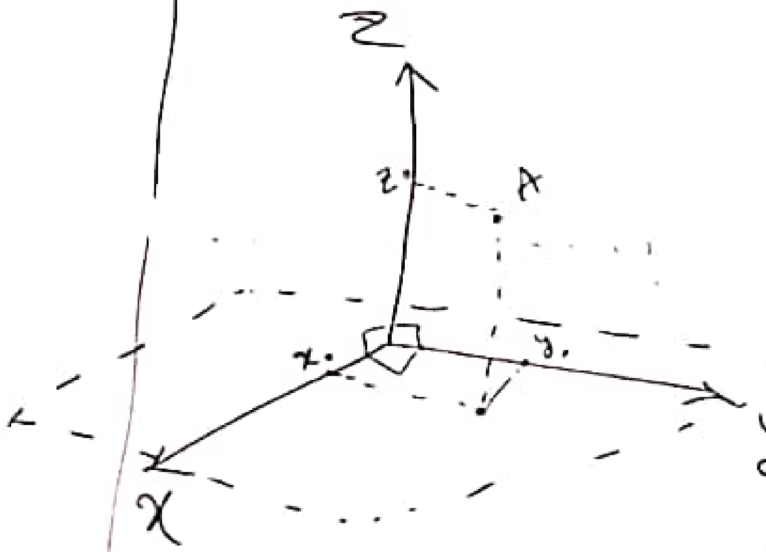
تعریف: ه

به نام خدا

به این نقطه ثابت را مبدأ می‌نامند و با O نمایش می‌دهند. محور xها و yها را در

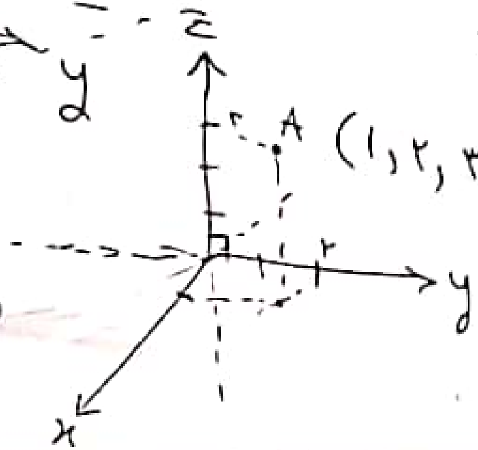
یک صفحه افقی و محور zها را عمود بر این صفحه در نظر می‌گیریم و بر هر محور

جهت مثبت اختیار می‌کنیم



هر نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ را با یک سه‌تایی مرتب

(x_0, y_0, z_0) نشان می‌دهیم



$A(1,2,3)$

تعریف: هر پاره خط جهت دار در فضا را بردار می نامند . دو بردار را وقتی مساوی می نامیم که دارای طول و جهت یکسان باشند.

* هرگاه A و B دو نقطه در فضا باشند پاره خط جهت داری که نقطه A را به B وصل می کند را می توان با $\overrightarrow{AB}$ نمایش داد و این بردار را با براکت شکسته به صورت زیر نمایش می دهیم

$A = (x_A , y_A , z_A)$ مختصات نقطه

$B = (x_B , y_B , z_B)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A \rangle$$

مختصات بردار براکت شکسته

مولفه های بردار

به نام خدا

طول بردار: اگر A و B دو نقطه در فضا باشند برای محاسبه طول بردار $\overrightarrow{AB}$ یا طول پاره خط AB از فرمول زیر استفاده می کنیم

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

اگر مختصات خود بردار AB داده شده بود به این روش زیر عمل می کنیم

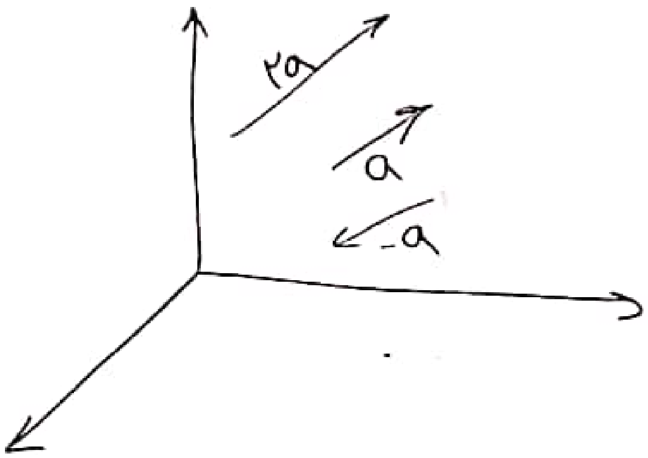
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} \rangle \longrightarrow \text{مختصات بردار}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2} \longrightarrow \text{طول بردار}$$

ضرب یک عدد در بردار: اگر t یک عدد حقیقی و $\vec{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ یک بردار دلخواه

باشد بردار $t\vec{a}$ به صورت زیر می باشد

$$t\vec{a}=\langle ta_1 , ta_2 , ta_3\rangle$$



۲- دو بردار موازی: بردارهای $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ را موازی گویند

هرگاه عددی حقیقی مانند t موجود باشد به طوری که $\vec{a}=t\vec{b}$ دیگر دو بردار

ضرب یک عدد در بردار باشد

a و b دارای مؤلفه های غیر صفر باشند داریم

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

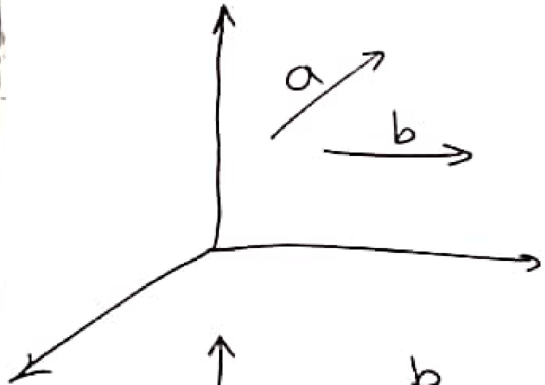
به طور مثال: بردارهای $a=\langle 2,1,3\rangle$ و $b=\langle 4,2,6\rangle$ باهم موازی هستند

جمع دو بردار: هرگاه $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ حاصل جمع دو بردار به صورت زیر خواهد بود

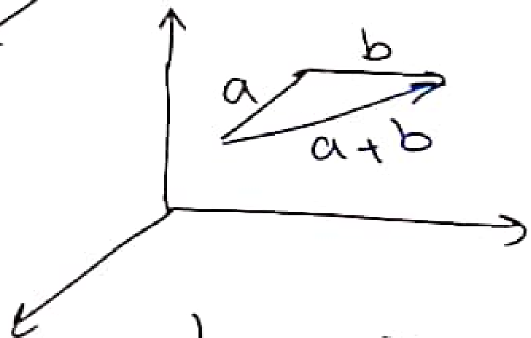
$$\vec{a}+\vec{b}=\langle a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\rangle$$

Scanned with CamScanner

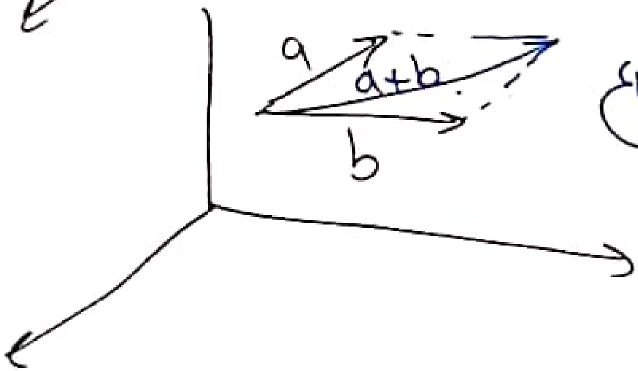
نمایش هندسی جمع دو بردار



روش مثلثی



روش متوازی الاضلاع



مثال: با فرض $\vec{a}=\langle 2,1,3\rangle$, $\vec{b}=\langle -1,2,2\rangle$ طول بردارهای $2\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+3\vec{b}$ را محاسبه کنید.

$$2\vec{a}-\vec{b}=\langle 4-(-1),\ 2-2,\ 6-2\rangle=\langle 5,0,4\rangle$$

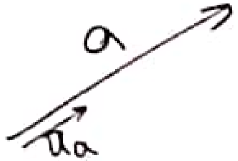
$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+0^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$\vec{a}+3\vec{b}=\langle 2+(-3),\ 1+6,\ 3+6\rangle=\langle -1,7,9\rangle$$

$$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{1+49+81}=\sqrt{131}$$

بردار یکانی (یکه): بردار یکانی a یا (یکه a) برداری است هم‌راستای بردار a اما با طول ۱ که آن را با $u_{\vec{a}}$ نمایش می‌دهند. و برابر است با:

$$u_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



مثال: بردار یکانی بردارهای $\vec{a} = \langle 2, -1, 2 \rangle$, $b = \langle 3, 1, 4 \rangle$ را بدست آورید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow u_{\vec{a}} = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$u_{\vec{b}} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}} \right\rangle$$

بردارهای پایه: سه بردار یکانی و عمود برهم زیر را بردارهای پایه یا یکانی محوری می نامند

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

با استفاده از ضرب یک عدد در بردار و قانون جمع و تفریق بردارها می توان هر برداری را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نوشت.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$

$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال: هرگاه $A=(4,3,1)$, $B(2,5,7)$, $C=(-2,4,0)$ سه نقطه از فضا باشند مطلوبست

۱) مولفه های بردارهای $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

۲) طول بردار $\vec{AB}$

۳) بردار یکانی $\vec{AB}$

$$U_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

۴) بردار $\vec{AB} - 2\vec{AC}$ برحسب بردارهای پایه

ابتدا - انتها

$x_B - x_A$

$$1)\ \vec{AB} = \langle 2-4 , 5-3 , 7-1 \rangle = \langle -2 , 2 , 6 \rangle$$

$$\vec{AC} = \langle -2-4 , 4-3 , 0-1 \rangle = \langle -6 , 1 , -1 \rangle$$

$$2)\ |AB| = \sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2+(7-1)^2} = \sqrt{4+4+36} = $$

$$3)\ |AB| = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} \quad U_{AB} = \langle \frac{-2}{\sqrt{44}} , \frac{2}{\sqrt{44}} , \frac{6}{\sqrt{44}}$$