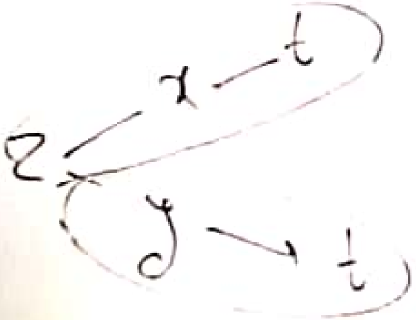
⁂ بسم الله الرحمن الرحیم ⁂

$z=x^{۲}+y^{۲}$

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $\quad \frac{dz}{dt}=?$



$\frac{\partial z}{\partial x}=۲x=۲\cos t$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$

$\frac{\partial z}{\partial y}=۲y \quad \frac{dy}{dt}=\cos t$

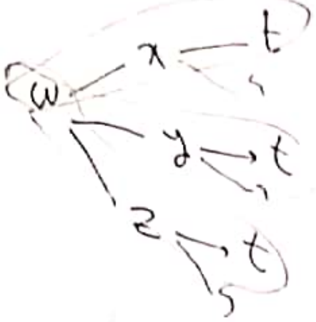
$=۲\sin t$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=۲\cos t\cdot(-\sin t)+۲\sin t(\cos t)$$

$$=-۲\cos t\sin t+۲\sin t\cos t=۰$$

مثال: $w = z - \operatorname{Sin}(x^۲ y)$

$$\begin{cases} x = ۲t^۲ \\ y = t^۳ \\ z = e^t \end{cases} \quad \frac{dw}{dt}$$



$\operatorname{Sin} u$

$u' \operatorname{Cos} u$

$x^۲ y = (۲t^۲)^۲ t^۳$
$= ۴t^۷$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{d}{d}$$

$$= -۲xy \operatorname{Cos}(x^۲ y) \cdot ۴t - x^۲ \operatorname{Cos} x^۲ y \cdot ۳t^۲ + ۱ \times e^t$$

$$= -۲ \cdot ۲t^۲ \cdot t^۳ \operatorname{Cos} ۴t^۷ \cdot ۴t - ۴t^۴ \operatorname{Cos} ۴t^۷ \, ۳t^۲ + e^t$$

$$= -۱۶ t^۶ \operatorname{Cos} ۴t^۷ - ۱۲ t^۶ \operatorname{Cos} ۴t^۷ + e^t$$

$$= -۲۸ t^۶ \operatorname{Cos} ۴t^۷ + e^t$$

روش دوم:
استفاده از جایگذاری x، y، z
به صورت مستقیم

$w = e^t - \operatorname{Sin} ۴t^۷$

$$\frac{dw}{dt} = e^t - ۲۸ t^۶ \operatorname{Cos} ۴t^۷$$

⁜ بسم الله الرحمن الرحیم ⁜

$z = x^{۲} + y^{۲} = \cos^{۲} t + \sin^{۲} t = ۱ \rightarrow \frac{dz}{dt} = ۰$

$x = \cos t$

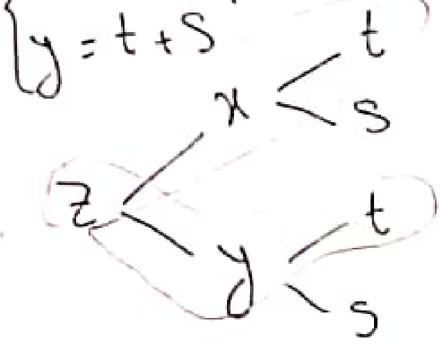
$y = \sin t$

---

$z = e^{x} \ln y \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

$\begin{cases} x = ۲t + s \\ y = t + s^{۲} \end{cases}$

$$= e^{x} \cdot \ln y \cdot ۲ + \frac{۱}{y} e^{x} \cdot ۱ = ۲ e^{۲t+s} \cdot \ln(t + s^{۲}) + \frac{۱}{t + s^{۲}} e^{۲t+s}$$

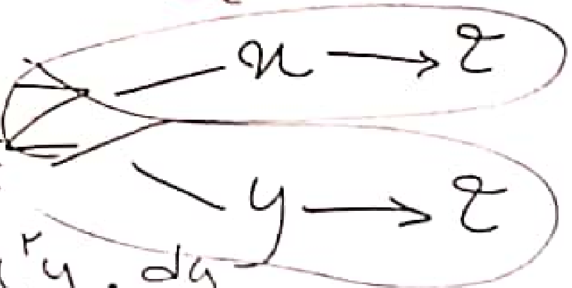


$Z = \sin(x^2 y) \longrightarrow$ در نقطه $(\sqrt{\pi}, 1)$ $\longrightarrow \frac{dx}{dt} = ۲$

$\underset{x,\ y}{}$

$\frac{dy}{dt} = ۳$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$



$$۲xy \underset{-1}{\cos x^2 y} \cdot \frac{dx}{dt} + x^2 \underset{-1}{\cos x^2 y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$۲\sqrt{\pi}\, \cancel{\cos \pi} \cdot ۲ + \pi\, \cancel{\cos \pi} \cdot ۳$$

$$-۲\sqrt{\pi} \cdot ۲ - \pi \cdot ۳ = -۴\sqrt{\pi} - ۳\pi$$

$x^2 y \quad \pi \cdot ۱$

بسم الله الرحمن الرحیم

مثال: در یک استوانه { شعاع با سرعت $0{,}2\ \frac{cm}{s}$ در حال افزایش $\frac{dr}{dt} = 0{,}2$
ارتفاع با سرعت $0{,}3\ \frac{cm}{s}$ $\frac{dh}{dt} = 0{,}3$

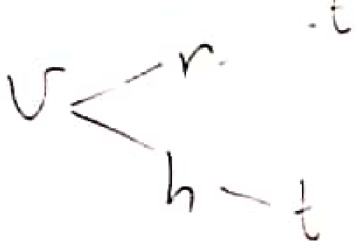
در لحظه ای که شعاع $10\ cm$ ارتفاع $8\ cm$ سرعت تغییر حجم استوانه را بدست آورید.

آهنگ تغییر حجم نسبت به زمان

مشتق

$(r, h)$

$V = \pi r^2 h$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= 2\pi r h \cdot \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}(\underset{r}{10}, \underset{h}{8}) = 2\pi \times 10 \times 8 \times \frac{2}{10} + \pi \times 100 \times \frac{3}{10} = 32\pi + 30\pi = 62\pi$$

ابعاد مکعب مستطیل
x ← با سرعت ۰٫۲ افزایش $\frac{dx}{dt} = +۰٫۲$
y ← با سرعت ۰٫۱ افزایش $\frac{dy}{dt} = +۰٫۱$
z ← با سرعت ۰٫۳ کاهش $\frac{dz}{dt} = -۰٫۳$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & t \\ v \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y \arrow[r] & t \\ & z \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

سرعت تغییر حجم در لحظه
x= ۵
y= ۱۰
z= ۴

$v = xyz$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$= yz\cdot\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}(\underset{x}{۵},\underset{y}{۱۰},\underset{z}{۴}) = ۴۰\times\frac{۲}{۱۰} + ۲۰\times\frac{۱}{۱۰} + ۵۰\times\frac{-۳}{۱۰} = ۸+۲-۱۵ = -۵\ \frac{cm}{s}$$

حجم مکعب مستطیل با سرعت $۵\frac{cm}{s}$ در حال کاهش است.