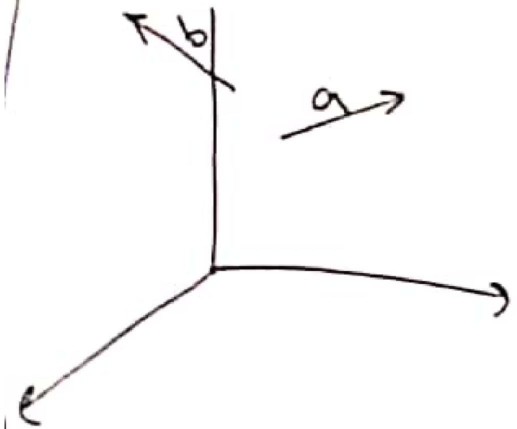
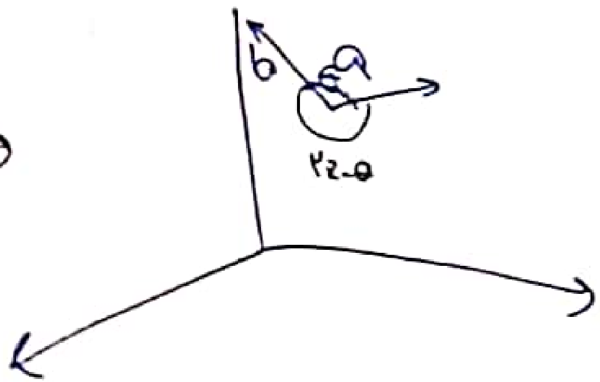
زاویه بین دو بردار: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند می‌توان آن‌ها را چنان جابجا کرد که مبدأ آن‌ها روی هم منطبق شود. زاویه بین این دو پاره‌خط را زاویه بین دو بردار a و b می‌گویند.

هرگاه θ زاویه بین دو بردار باشد در این صورت $2\pi-\theta$ نیز زاویه بین این دو بردار می‌باشد



ولی معمولاً زاویه بین دو بردار را بین ۰ تا ۱۸۰ در نظر می‌گیرند



ضرب داخلی دو بردار: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند و θ زاویه بین این دو بردار باشد در این صورت

ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ضرب داخلی را ضرب نقطه‌ای یا عددی دو بردار نیز می‌گویند

* روش زیر برای محاسبه ضرب داخلی دو بردار در صورتی که مؤلفه‌های دو بردار را بدهند اما زاویه بین دو بردار را ندهند از روش این پیروی می‌کنیم

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

مثال: هرگاه a و b به ترتیب دو بردار به طول های ۲ و ۵ و زاویه بین آن ها ۳۰ باشد

مقدار ضرب داخلی آن ها را حساب کنید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = ۲\times۵\cos ۳۰ = \cancel{۲}\times۵\times\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = ۵\sqrt{۳}$$

ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}=\langle ۱,-۲,۴\rangle$ ، $\vec{b}=\langle ۲,۳,۵\rangle$ را بدست آورید

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۲+(-۶)+۲۰=۱۶$$

ویژگی های ضرب داخلی:

① حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.

② $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

③ برای هر عدد حقیقی t داریم $t\,\vec{a}\,\vec{b} = (ta)\cdot b = a\,(tb)$

④ همواره داریم

$$(a+b)\,c = a\cdot c + b\cdot c$$

$$a\,(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

⑤ همواره داریم

$$a\cdot a = |a|^2$$

$$a\cdot a = |a|\,|a|\,\overset{1}{\cos 0^{\circ}} = |a|^2$$

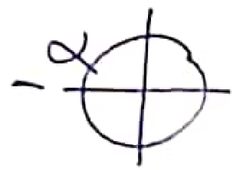
۶) a , b دو بردار عمود بر هم هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

چون $\cos 90 = 0$

مثال: اگر a , b دو بردار با طول‌های به ترتیب ۲ و ۳ دارای زاویه ۱۲۰ باشند طول بردار $2a-b$ را با استفاده از ویژگی‌های ضرب داخلی محاسبه کنید.

$$|2a-b|^2 = (2a-b)\cdot(2a-b) = 4|a|^2 \underbrace{-2ab-2b.a}_{-4ab} + |b|^2$$

$$= 4|a|^2 - 4|a||b|\cos\theta + |b|^2$$



$$= 4\times 2^2 - 4\times 2\times 3\cos \overset{180-60}{120} + 9 =$$

$$\cos 120 = -\frac{1}{2}$$

$$= 16+12+9 = 37 \longrightarrow |2a-b| = \sqrt{37}$$

مثال: در دو بردار $\vec{a}=\langle 2, t, 3\rangle$ و $\vec{b}=\langle -4, 2, 1\rangle$ مقدار t را چنان بیابید

که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشد.

ضرب داخلی $= 0$

$$\vec{a}\,\vec{b} = -8 + 2t + 3 = 0$$

$$2t = 5$$

$$\boxed{t = \frac{5}{2}}$$

محاسبه زاویه بین دو بردار: اگر θ زاویه بین دو بردار غیرصفر a و b باشد برای محاسبه
زاویه آن در از فرمول ضرب داخلی استفاده می‌کنیم

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

$\langle 2, -3, 2 \rangle$ $\qquad$ $\langle 0, 3, 4 \rangle$

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 3j + 4k$, $\vec{b} = 2i - 3j + 2k$ را محاسبه کنید.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{5\sqrt{17}}\right) \simeq 92.78$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 - 9 + 8 = -1$$

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

با فرض $a=\langle 2,-1,5\rangle$ و $b=\langle 0,2,1\rangle$, $c=\langle 1,4,0\rangle$ زاویه بین

بردارهای a , b و بردارهای b و c را محاسبه کنید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0-2+5=3$$

$$a=\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{4+1+25}=\sqrt{30}\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{3}{\underbrace{\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}}_{\sqrt{150}=\sqrt{25\times 6}}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5\sqrt{6}}\right)$$

$$b=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0+8+0=8$$

$$|b|=\sqrt{5}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right)$$

$$|c|=\sqrt{1^2+4^2+0^2}=\sqrt{17}$$

مثال: طول بردارهای $\overset{۳}{\vec{a}}$, $\overset{۴}{\vec{b}}$ به ترتیب ۳ و ۴ و زاویه بین آن ها °۶۰ است زاویه بین دو بردار

$a+b$, $a-b$ را به دست آورید.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{|a+b|\,|a-b|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-۷}{\sqrt{۳۷}\times\sqrt{۱۳}}\right)$$

$$(a+b)(a-b) = |a|^{۲} - |b|^{۲} = ۹-۱۶ = -۷$$

$$۲|a||b|\cos ۶۰$$

$$|a+b|^{۲} = (a+b)(a+b) = |a|^{۲} + ۲a\cdot b + |b|^{۲} = ۹ + \overset{۱۲}{\cancel{۲}\times ۳\times ۴\times \frac{۱}{\cancel{۲}}} + ۱۶$$

$$= ۳۷$$

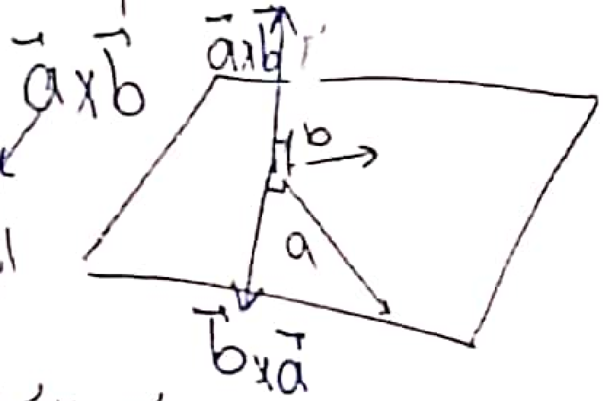
$$|a-b|^{۲} = (a-b)(a-b) = |a|^{۲} - ۲ab + |b|^{۲} = ۹ \underbrace{-۱۲+۱۶}_{۴} = ۱۳$$

تمرین: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار به ترتیب با طول های ۲ و ۵ و زاویه ۱۵۰° باشند طول بردار $\overrightarrow{3a-2b}$ را بدست آورید

تمرین: هرگاه a و b دو بردار به ترتیب با طول های ۳ و ۴ و زاویه بین ۶۰° باشند زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a-b}$ و $\overrightarrow{a+2b}$ را بدست آورید.

ضرب خارجی دو بردار: فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و غیر موازی باشند این دو بردار در صفحه ای در فضا واقع اند. بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر این صفحه عمود است و به آن ضرب خارجی دو بردار می گویند جهت آن از قانون دست راست استفاده می شود. طول آن برابر است با

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |a|\,|b|\sin\theta$$



چهار انگشت انتهای سمت بردار اولی و پس به سمت بردار دوم بچرخد

جهت شست جهت بردار حاصل ضرب

ویژگی های ضرب خارجی :

۱) حاصل ضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

۲) همواره داریم $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

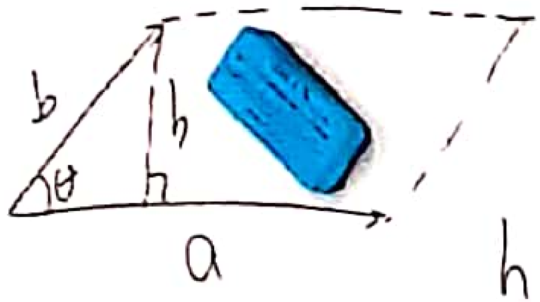
۳) اگر t یک عدد حقیقی باشد $(t.a)\times b=\vec{a}\times(t.\vec{b})=t(\vec{a}\times\vec{b})$

۴) همواره داریم

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$$

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

نکته: اندازه ضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که با استفاده از دو بردار a و b ساخته شده است



$S_{\square} =$ قاعده $\times$ ارتفاع

$h = |b| \sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{h}{|b|}$

$S = |a| \cdot h =$

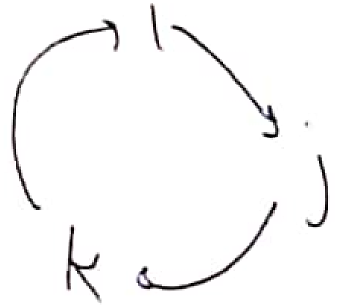
$= |a||b| \sin\theta$

$= |a \times b|$

$i \times j = k$

$j \times k = i$

$k \times i = j$



$i \times k = -j$

$j \times i = -k$

$k \times j = -i$

$\vec{i} \times \vec{i} = 0$

$\vec{k} \times \vec{k} = 0$

$j \times j = 0$