ماکزیمم و مینیمم توابع چندمتغیره:

آزمون Δ: فرض کنید $f(x,y)$ تابعی با مشتق های جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد. بعضی از نقاط اکسترمم نسبی تابع به ترتیب زیر است:

(۱) دستگاه
$$\begin{cases} f_y = 0 \\ f_x = 0 \end{cases}$$
را حل می‌کنیم فرض کنید (x,y) جواب این دستگاه باشد

(۲) عبارت زیر که چنین نام دارد را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

۳) اگر $\Delta(x_0, y_0) > 0$ باشد و $f_{xx} < 0$ باشد آنگاه در (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی داریم

اگر $\Delta > 0$ باشد و $f_{xx} > 0$ باشد در (x_0, y_0) مینیمم نسبی داریم.

اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه (x_0, y_0) اکسترمم نیست این نقطه را نقطه زینی می‌گویند.

اگر $\Delta = 0$ آنگاه نقطه (x_0, y_0) یک نقطه اکسترمم یا زینی است اما نمی‌توان تشخیص داد.

$$f(x,y) = 2xy - 5y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4$$

$$(x_0, y_0) = ? \leftarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$\begin{cases} f_x = 2y + 4 - 4x = 0 \\ f_y = 2x - 10y + 4 = 0 \quad \times 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{4x} + 2y = -4 \\ \cancel{4x} - 20y = -8 \end{cases}$$

$$-18y = -12$$

$$y = -\frac{12}{-18} = \frac{2}{3}$$

$$-4x + 2 \times \frac{2}{3} = -4$$

$$-4x = -\frac{12}{3} - \frac{4}{3} = \frac{-16}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$\Delta > 0 \;,\; f_{xx} < 0 \rightarrow (x_0, y_0)$ ماکزیمم نسبی

$\Delta > 0 \;,\; f_{xx} > 0 \rightarrow$ min نسبی

$\Delta < 0 \rightarrow$ زینی

$\Delta = 0 \rightarrow$ زینی یا اکسترمم نسبی، قابل تشخیص نیست

$$\overset{x_0}{} \quad \overset{y_0}{} \qquad \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_{xx} = -4$$

$$f_{yy} = -10 \rightarrow \Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = -4 \times -10 - (2)^2 = +40 - 4 = 36 > 0$$

$$f_{xy} = 2$$

$\Delta > 0$, $f_{xx} < 0 \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ max نسبی

$$f(x,y) = x^{۲} - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^{۳} - ۳y$$

$$f_x = ۲x - ۲y = ۰ \longrightarrow ۲x = ۲y \longrightarrow x = y$$

$$f_y = -۲x + y^{۲} - ۳ = ۰ \longrightarrow x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$$ ض

$$(x-۳)(x+۱) = ۰$$

$$x = ۳ \qquad x = -۱$$

$$\xrightarrow{x=۳} (۳,۳)$$

$$\longrightarrow (-۱,-۱)$$

$$f_{xx} = ۲ > ۰$$

$$f_{yy} = ۲y$$

$$f_{xy} = -۲$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{۲} = ۴y - ۴$$

$$\Delta(۳,۳) = ۱۲ - ۴ = ۸ > ۰ \xrightarrow{f_{xx}>۰} \min$$ نسبی

$$\Delta(-۱,-۱) = -۴ - ۴ = -۸ \longrightarrow (-۱,-۱)$$ زینی

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \longrightarrow x = 0 \\ f_y = 3y^2 = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases} \longrightarrow (0,0)$$

$f_{xx} = 2$

$f_{yy} = 6y$

$f_{xy} = 0$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 =$$

$$2 \times 6y - \cancel{(0)^2} = 12y$$

$$\Delta(0,0) \longrightarrow 12 \times 0 = 0$$

یعنی با این تست نسبی قابل تشخیص نیست

$f(x,y) = x^{۲} + xy + y^{۲} + ۳x - ۳y + ۴$

$$\begin{cases} f_x = ۲x + y = -۳ \\ f_y = x + ۲y = ۳ \quad (\times -۲) \end{cases}$$

$-۲x - ۴y = -۶$

$-۳y = -۹ \rightarrow y = ۳$

$x + ۲(۳) = ۳$

$x = -۶ + ۳ = -۳ \rightarrow x = -۳$

$(-۳, ۳)$

$f_{xx} = ۲ > ۰ \qquad f_{yy} = ۲ \qquad f_{xy} = ۱$

$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^{۲} = ۳ \Rightarrow \Delta > ۰,\ f_{xx} > ۰$

$۴ - ۱$

min نسبی

$$f(x,y) = e^y - 4\ln x + x - y$$

$$-\frac{4}{x} + 1$$

$$f_x = -\frac{4}{1} \times \frac{1}{x} + 1 = 0 \rightarrow -\frac{4}{x} = -\frac{1}{1} \rightarrow -x = -4$$

$$x = 4$$

$$f_y = e^y - 1 = 0 \rightarrow e^y = 1 = e^0 \rightarrow y = 0$$

$$\rightarrow (4,0)$$

$$f_{xx} = \frac{0 - 1 \times -4}{x^2} = \frac{4}{x^2} > 0$$

$$f_{yy} = e^y$$

$$f_{xy} = 0 \longrightarrow \Delta = \frac{4}{x^2} \times e^y - \cancel{0^2}$$

$$\Delta(4,0) = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{4\,\cancel{16}} \times e^0 = \frac{1}{4} > 0$$

min$(4,0)$ نسبی

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

$$f_x = 2x - 2y = 0 \rightarrow 2x = 2y \rightarrow x = y$$

$$f_y = -2x + y^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad -1$$

$$\xrightarrow{x=3} (3,3)$$

$$\longrightarrow (-1,-1)$$

$$f_{xx} = 2 > 0$$

$$f_{yy} = 2y \qquad \Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4y - 4$$

$$f_{xy} = -2 \qquad \Delta(\overset{x}{3},\overset{y}{3}) = 12 - 4 = 8 > 0 \xrightarrow{f_{xx}>0} \text{min}$$

نسبی

$$\Delta(-1,-1) = -4 - 4 = -8 \longrightarrow (-1,-1)$$ زینی