Aplicación de propiedades

Sea T una variable aleatoria con soporte en los reales positivos, cuya función de riesgo está dada por:

$$h(t) = \frac{(\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1}}{1+(t/\alpha)^{\beta}} \quad \text{con } \alpha > 0, \beta > 0$$

Derive expresiones para

a) $H(t)$
Respuesta

$$\begin{aligned}
H(t) &= \int_0^t h(x)dx && \text{Propiedad} \\
&= \int_0^t \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{1+(x/\alpha)^{\beta}}dx && \text{De enunciado} \\
&= \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t \frac{\alpha^{1-\beta}x^{\beta-1}}{1+\frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}}}dx && \text{Términos constantes}
\end{aligned}$$

Considere el cambio de variables $u = 1 + \frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}}$, luego, $du = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}dx$ y $dx = \frac{\alpha^{\beta}}{\beta x^{\beta-1}}du$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
H(t) &= \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t \frac{\alpha x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}(1+\frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}})}\cdot\frac{\beta}{\beta}dx && \text{1 conveniente} \\
&= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\int_0^t \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}(1+\frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}})}dx && \text{Términos constantes} \\
&= \int_0^t \frac{du}{u} && \text{Cambio de variables} \\
&= ln(1+\frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}})\Big|_0^t && \text{Corolario del Teorema Fundamental del Cálculo} \\
&= ln(1+\frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}}) - ln(1+\frac{0^{\beta}}{\alpha^{\beta}}) \\
&= ln(1+\frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}})
\end{aligned}$$

b) $S(t)$
Respuesta

$$\begin{aligned}
S(t) &= exp\{-H(t)\} && \text{Propiedad} \\
&= exp\{-ln(1+\frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}})\} && \text{Resultado a)} \\
&= exp\{ln(1+\frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}})^{-1}\} && \text{Propiedad de logaritmo} \\
&= (1+\frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}})^{-1} && \text{Funciones inversas} \\
&= \frac{1}{1+(t/\alpha)^{\beta}}
\end{aligned}$$

c) $f(t)$
Respuesta

$$
\begin{aligned}
f(t) &= h(t) \cdot S(t) && \text{Recordar que } h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \\
&= \frac{(\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1}}{1+(t/\alpha)^{\beta}} \cdot \frac{1}{1+(t/\alpha)^{\beta}} && \text{Reemplazar de enunciado y b)} \\
&= \frac{(\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1}}{[1+(t/\alpha)^{\beta}]^2}
\end{aligned}
$$

d) $F(t)$
Respuesta

$$
\begin{aligned}
F(t) &= 1 - S(t) && \text{Definición de la función de sobrevivencia} \\
&= 1 - \frac{1}{1+(t/\alpha)^{\beta}}
\end{aligned}
$$