Distribuciones discretas

Dada la naturaleza de ciertas variables, se puede asociar a estas una distribución de probabilidad específica. La más conocida es la distribución normal. Sin embargo, existen otras distribuciones, como la distribución binomial, poisson, hipergeométrica, entre otras.

Distribución	**Uso**	Fórmula
Binomial	Discreta	$P(X=k)=\binom{N}{k}\cdot p^k q^{N-k}$
Geométrica	Discreta	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$
Poisson	Discreta	$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
Hipergeométrica	Discreta	$P(X=k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

1. Con objeto de estudiar el número de salmones de cierto río que llegan vivos al mar se marca el 20% de la camada en el lugar de nacimiento. Posteriormente, en una estación de seguimiento río abajo, se registra el paso de 10 salmones de dicha camada. ¿Cuál es la probabilidad de que se registren 3 de los marcados? ¿Y con qué probabilidad se registrarán 2 ó menos de los marcados?

Respuesta
Una variable binomial modela el recuento del número de éxitos al repetir n veces un experimento éxito-fracaso. En este caso el éxito sería registrar un salmón marcado y el experimento se repite 10 veces (se registran 10 peces). Además, la probabilidad de registrar un pez marcado es del 20% = 0.2.
Nos piden: $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0.2^3 0.8^7=\frac{10!}{3!7!}0.2^3 0.8^7=0.2013$.

Para la siguiente pregunta:

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=0.107+0.268+0.3=0.67$$

2. Los pacientes llegan a la urgencia de Christus UC San Joaquín de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de 3 por hora. Considere que un módulo horario de atención es de 4 hrs.

a) ¿Cuál es la probabilidad que durante un módulo horario de atención lleguen más de 5 pacientes?

Respuesta
Un módulo de atención consta de 4 horas y cada hora llegan 3 personas. Luego la tasa de llegada en un módulo de horario es:

$$\lambda=4\cdot 3=12$$

Luego, sea X la llegada de pacientes en un módulo de horario distribuye Poisson(12).

Por lo tanto, nos piden:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) =$$

$$1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5))$$
$$= 1–0.0203 = 0.9707$$

b) Si revisamos los últimos 10 módulos de atención, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente en tres de ellos lleguen a lo más de 5 pacientes?

Respuesta
Note que ahora estamos realizando el mismo experimento realizado en parte **a)** pero con n=10 veces, por lo tanto esta variable Y correponde a una distribución binomial con $n = 10$ y con p la probabilidad de éxito/falla. En este caso, nos interesa que lleguen a lo más 5 pacientes, es decir $p = P(X \leq 5)$ que ya habiamos calculado en parte **a)**, $p = P(X \leq 5) = 0,0203$. Luego la probabilidad buscada, proviene de una distribución Bin(10,0.0203):

$$P(Y = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,0203^3(1 - 0.0203)^7 = \tfrac{10!}{3!7!}0.0203^3 0.9707^7$$

c) Considere que durante el último módulo horario se atendió un total de 87 pacientes. De ellos, uno de cada tres fue derivado al sistema central. Si Usted selecciona al azar 10 fichas entre todos los pacientes atendidos el último módulo horario, ¿cuál es la probabilidad que exactamente dos de ellos hayan sido derivados al sistema central?

Respuesta
Recuerde que la distribución hipergeométrica se utiliza para calcular la probabilidad de una selección aleatoria de un objeto sin repetición, donde:

$$p(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N = tamaño de población
K = nº individuos que...
n = tamaño de la muestra
x = valor que toma la variable

Luego, es fácil reconocer que:

- N= 87 Tamaño de la población, son los 87 pacientes en total.
- k= $\frac{87}{3}$= 29 Número de individuos que fueron derivados al sistema central.
- n= 10, número de la muestra o número de los pacientes seleccionados.
- x=2 el valor al que le queremos calcular la probabilidad (probabilidad de que exactamente dos de estos pacientes seleccionados haya sido derivado al sistema central)

Y reemplazamos:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{29}{2}\binom{87-29}{10-2}}{\binom{87}{10}} = 0.1945$$

3. Un matrimonio quiere tener una hija, y por ello deciden tener hijos hasta el nacimiento de una hija. Calcular el número esperado de hijos entre varones y mujeres que tendrá el matrimonio.

Calcular la probabilidad de que la pareja acabe teniendo tres hijos o más. Asuma que los eventos de tener un hijo o hija son equiprobables.

Respuesta
Recuerde que la distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la obtener un éxito o resultado deseado (es decir, la variable es la cantidad de intentos hasta un éxito). En este caso el éxito sería tener una hija. Y la variable aleatoria X sería el número de intentos (número de hijos varones) hasta tener una hija, Luego:

$$X \sim Geom(\frac{1}{2})$$

La probabilidad de que la pareja acabe teniendo tres o más hijos, es la de que tenga 2 o más hijos varones:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) =$$

$$1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0.5 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.25$$

4. El número de nacimientos en un hospital constituye un proceso de Poisson con intensidad de 21 nacimientos por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan al menos tres nacimientos la próxima semana?

Respuesta
Por enunciado, sabemos que X (la variable aleatoria del número de nacimientos en un hospital por semana) cumple que:

$$X \sim Pois(21)$$

Nos piden $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$

$$= 1 - (\frac{e^{-21}21^0}{0!} + \frac{e^{-21}21^1}{1!} + \frac{e^{-21}21^2}{2!}) = 0,999999816$$

Es decir, la probabilidad de que hayan al menos tres nacimientos la próxima semana es prácticamente 1, un evento casi seguro.