

Curso de Sistemas Lineares I

Natanael Junior^{1 2}

natmourajr@lps.ufrj.br, [natmourajr.github.io](https://github.com/natmourajr)

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro

²Laboratório de Processamento de Sinais

07/07/2016

Estrutura do Curso I

- 1 Objetivo do Curso
- 2 Bibliografia Adotada
- 3 Regras Gerais
- 4 Resultados Anteriores
- 5 Classificação de Sinais
- 6 Operações Básicas com Sinais
- 7 Classificação de Sistemas
- 8 Modelagem de Sistemas Elétricos
- 9 Análise de Sistemas no Domínio do Tempo
- 10 Transformada de Laplace
- 11 Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas
- 12 Resposta em Frequências de um Sistema Linear
- 13 Diagrama de Bode
- 14 Série de Fourier
- 15 Transformada de Fourier
- 16 Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

Estrutura do Curso II

17 Referências Bibliográficas

Objetivo do Curso

Disponibilizar e avaliar o conhecimento de uma turma do **3º período** do curso de **Engenharia Eletrônica e de Computação** da Universidade Federal do Rio de Janeiro nos seguintes tópicos: *Modelagem, analogias e análise de sistemas físicos. Resposta a entrada zero, resposta ao estado zero e convolução. Resposta a uma entrada exponencial. Transformação de Fourier. Transformação de Laplace. Função de transferência, pólos e zeros. Resposta impulsional, resposta ao degrau, resposta senoidal. Sistemas de 1^a e 2^a ordens e de ordem superior, sistemas de fase não mínima: Resposta em freqüência e Diagramas de Bode.*

Bibliografia Adotada

- ① Linear Systems and Signals, 2nd Edition, B. P. Lathi [1]
- ② Signals and systems, 2nd Edition, Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab [2]
- ③ Linear System Theory and Design, 3rd Edition, Chi-Tsong Chen [3]
- ④ Circuits, Signals and Systems, William Siebert [4]

Regras Gerais

- 2 Provas Escritas - P_1 (13/05) e P_2 (01/07)
- Média das Provas (MP): $\frac{P_1+P_2}{2}$
- 5 Listas de Exercícios - L_0, L_1, L_2, L_3, L_4
- 2^a Chamada (08/07) - **Substitutiva**
- Média das Listas (ML): $\frac{L_0+L_1+L_2+L_3+L_4}{5}$
- Média Inicial (MI): $MP + 0.1 \cdot ML$
- $MI \leq 3.0$ - **Reprovado**
- $MI \geq 8.0$ - **Aprovado**
- $3.0 < MI < 8.0$ - **Trabalho Final**
- Trabalho Final: Trabalho Escrito (T_e) e Trabalho Apresentado (T_a) - 05/07 a 12/07
- Rodadas de Apresentação: 15/07 - 22/07
- Média Final (MF): $\frac{2 \cdot T_e + 2 \cdot T_a + MI}{5}$
- $MF \geq 5.0$ - **Aprovado**
- $MF < 5.0$ - **Reprovado**

Resultados Anteriores

- 2015/01
 - Número de Inscritos: 43
 - Média da P_1 : 3.9
 - Média da P_2 : 3.1
 - Média da $P_{2^a Cham.}$: 1.4
 - Total de Reprovados: 18
- 2015/02
 - Número de Inscritos: 33
 - Média da P_1 : 3.4
 - Média da P_2 : 3.3
 - Média da $P_{2^a Cham.}$: 3.4
 - Total de Reprovados: 15

Lista 0

Em uma folha de papel A4, resolva os seguintes exercícios:

- ① Para a EDO descrita por $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac = 0$, mostre que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução.
- ② Encontre a solução da EDO abaixo

$$\frac{\partial y}{\partial x} - 2xy = x$$

- ③ Utilizando o **VI** (Valor Inicial) $y(1/3) = e/3$, encontre a solução da EDO abaixo

$$\frac{\partial y}{\partial t} = e^{3t}$$

- ④ Dada a EDO abaixo, encontre a sua solução pelo **método do fator integrante**.

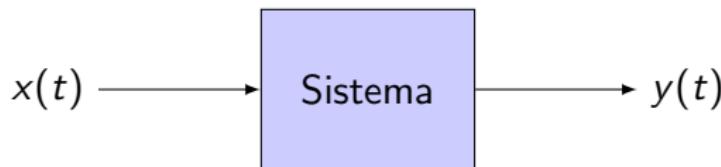
$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{2}{t}y(t) = t$$

Classificação de Sinais

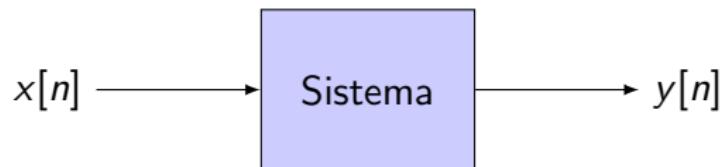
- O que é um **Sinal**?
 - Por Definição: Um função de uma ou mais **variáveis**, a qual veicula informação sobre a natureza de um fenômeno físico
- Sinal dependente de uma variável → **Sinal Unidimensional**
 - Ex: $x(t)$, geralmente t representa a variável tempo contínuo
 - Ex: $y[n]$, geralmente n representa a variável tempo discreto
- Sinal dependente de duas ou mais variáveis → **Sinal Multidimensional**
 - Ex: $\Theta(t, x, y)$: temperatura em uma sala
 - Ex $V[\alpha, n]$: Valor de um ativo α da bolsa de valores na amostra n

Classificação de Sinais

- No curso de Sistemas Lineares I, sinais serão inseridos em **sistemas**.
- O que é um **Sistema**?
 - Um sistema é uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo como resposta novos sinais



- Para o sistema acima a entrada é $x(t)$ e a saída é $y(t)$



- Para o sistema acima a entrada é $x[n]$ e a saída é $y[n]$

Classificação de Sinais

Sinais no Tempo Contínuo e Sinais no Tempo Discreto

- $x(t)$ é dito de **tempo contínuo** se definido para todo tempo t

Classificação de Sinais

Sinais no Tempo Contínuo e Sinais no Tempo Discreto

- Um sinal de tempo discreto é frequentemente derivado de um sinal de tempo contínuo, amostrando-se o sinal a uma taxa **uniforme**. Definindo-se T como o período de amostragem e n como sendo um **número inteiro**, tem-se para $t = nT$, $x(t) = x(nT)$
- Por conveniência, utilizamos $x[n] = x(nT)$ para $n \in \mathbb{Z}$

Classificação de Sinais

Como um sinal é uma entidade que se desenvolve ao longo de uma variável (que seja tempo ou qualquer outra) temos que o seu comprimento pode ser determinado em função da variável independente.

- Comprimento de um Sinal Contínuo - Intervalos de tempo contínuo
- Comprimento de um Sinal Discreto - quantidade de amostras no tempo discreto

Classificação de Sinais

Sinais Analógicos e Sinais Digitais

- **Sinais Analógicos** são definidos como sinais que podem assumir quaisquer valores em sua **faixa dinâmica**

Classificação de Sinais

Sinais Analógicos e Sinais Digitais

- **Sinais Digitais** são definidos como sinais que só podem assumir determinados valores em sua **faixa dinâmica**

Classificação de Sinais

Uma confusão natural (e muito frequente) é

- Sinal Analógico → Sinal em tempo contínuo
- Sinal Digital → Sinal em tempo discreto

Classificação de Sinais

Sinais Pares e Sinais Ímpares

- Um sinal $x(t)$ é chamado **par** se $x(t) = x(-t)$
- Par → Simetria em relação ao eixo das ordenadas

Classificação de Sinais

Sinais Pares e Sinais Ímpares

- Um sinal $x(t)$ é chamado **ímpar** se $x(t) = -x(-t)$
- Ímpar → assimetria em relação ao eixo das ordenadas

Classificação de Sinais

Sinais Pares e Sinais Ímpares - Propriedades

- Sinal par x Sinal ímpar = Sinal ímpar
- Sinal par x Sinal par = Sinal par
- Sinal ímpar x Sinal ímpar = Sinal par

Suponha um sinal $x_p(t)$ par e um sinal $x_i(t)$ ímpar. Sendo assim, temos:

$$\int_{-a}^a x_p(t) dt = 2 \int_0^a x_p(t) dt \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a x_i(t) dt = 0 \quad (2)$$

Classificação de Sinais

Sinais Periódicos e Sinais Não-Periódicos

- **Sinais Periódicos** são os sinais que atendem a equação de periodicidade (equação 3) para todos os valores possíveis de T

$$x(t) = x(t + T) \quad (3)$$

- Definições secundárias:
 - Período fundamental do sinal $x(t) = T$ segundos
 - Frequência fundamental do sinal $x(t) = f$ Hz (onde $f = \frac{1}{T}$)
 - Frequência angular fundamental do sinal $x(t) = \omega$ rad/s (onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$)
- Todo o sinal que não atende a equação 3, são chamados de **Sinais Não-Periódicos** ou **Sinais Aperiódicos**

Classificação de Sinais

Sinais Causais, Sinais Não-Causais e Sinais Anti-Causais

- **Sinais Causais** são os sinais definidos apenas para $t \geq 0$
- **Sinais Não-Causais** são os sinais definidos para $t \geq 0$ e $t < 0$
- **Sinais Anti-Causais** são os sinais definidos apenas para $t < 0$

Classificação de Sinais

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- Um sinal é caracterizado como **sinal de energia** se satisfizer a condição abaixo:

$$0 < E_{x(t)} < \infty \quad (4)$$

- Um sinal é caracterizado como **sinal de potência** se satisfizer a condição abaixo:

$$0 < P_{x(t)} < \infty \quad (5)$$

- Condições mutuamente **excludentes**

Classificação de Sinais

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- As unidades de Energia e de Potência dependem **diretamente** da unidade do sinal a ser medido.

Classificação de Sinais

Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

- São chamados de **Sinais Determinísticos**, os sinais aos quais não existe incerteza com respeito ao seu valor em qualquer instante de tempo
- São sinais aos quais podemos encontrar um modelo que modele **perfeitamente** o sinal
- Ex: $x(t) = \sin(\pi \cdot t)$

Classificação de Sinais

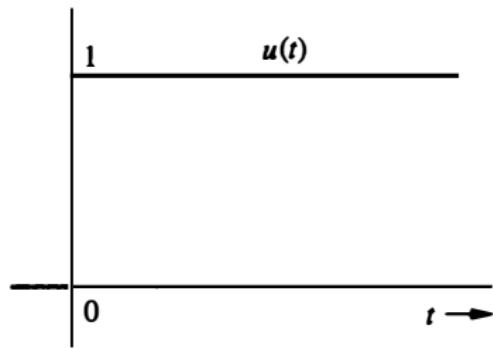
Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

- São chamados de **Sinais Aleatórios**, os sinais aos quais existe **alguma** incerteza com respeito ao seu valor em qualquer instante de tempo
- São sinais aos quais não podemos encontrar um modelo que modele **perfeitamente** o sinal
- Ex: $x(t) = \sin(\pi \cdot t) + \text{ruído}$

Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Degrau unitário ($u(t)$)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

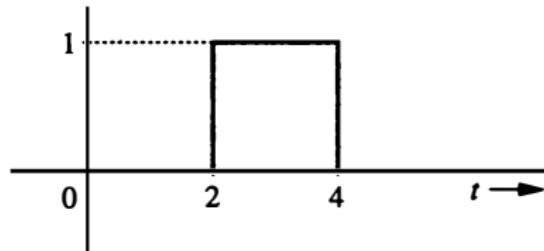
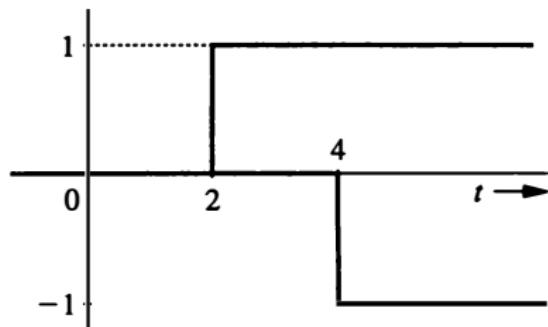


- Esse sinal também é chamado de **sinal causalizador**

Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Degrau unitário ($u(t)$) - Composição de sinais

- Podemos unir dois degraus unitários para compor um sinal totalmente diferente, por exemplo $x(t) = u(t - 2) - u(t - 4)$

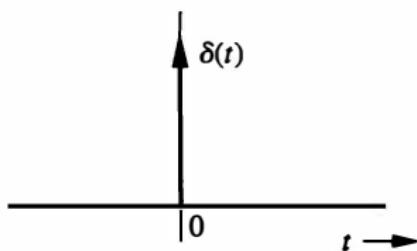


Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Impulso unitário ($\delta(t)$)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

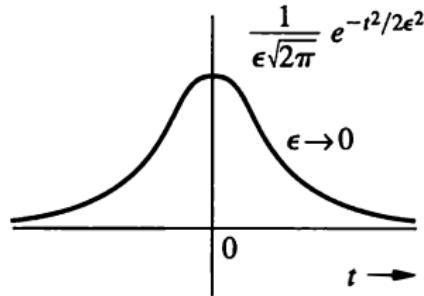
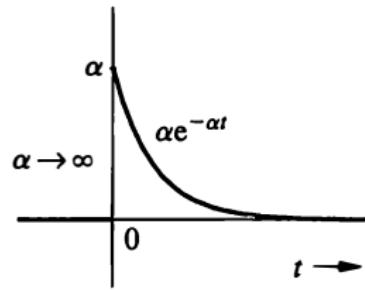
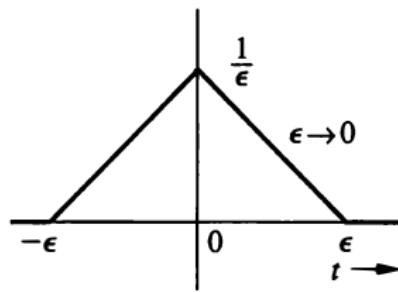
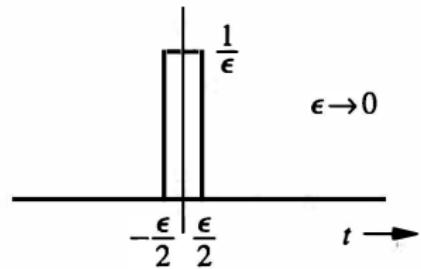
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8)$$



- Esse é o impulso ideal, idealizado por **Paul Adrien Maurice Dirac**. Na prática, esse impulso é impossível de ser concebido.

Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Impulso unitário ($\delta(t)$) - Aproximações



Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Exponencial (e^{st})

$$s = \sigma + j\omega \quad (9)$$

$$e^{st} = e^{\sigma t + j\omega t} \quad (10)$$

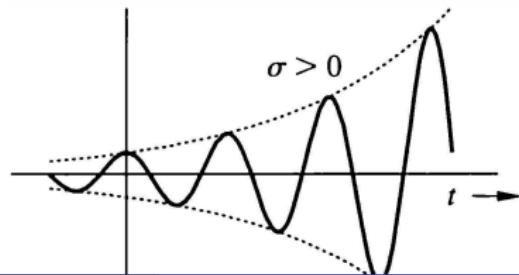
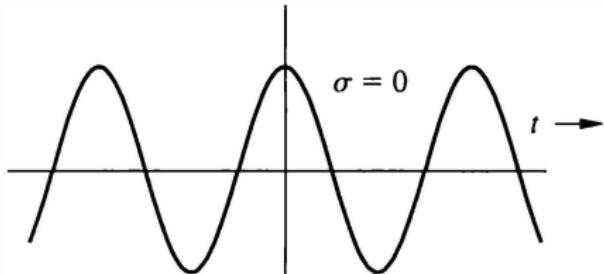
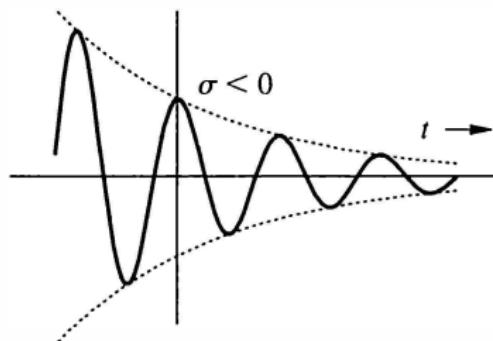
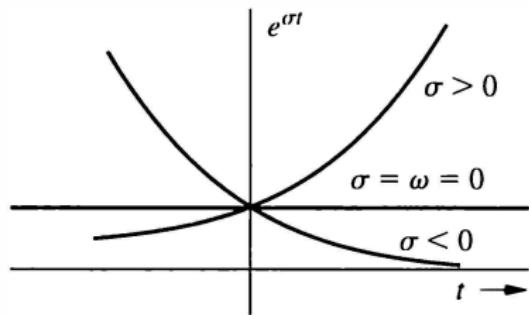
$$e^{st} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) \quad (11)$$

Representações mais utilizadas

- ① Valor Constante (k) $\rightarrow ke^0$ ($s = 0$)
- ② Exponencial ($e^{\sigma t}$) $\rightarrow (\omega = 0)$
- ③ Senóide ($e^{j\omega t}$) $\rightarrow (\sigma = 0)$
- ④ Senóide Descrescente $\rightarrow (\sigma < 0)$
- ⑤ Senóide Crescente $\rightarrow (\sigma > 0)$

Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Exponencial (e^{st}) - Análise



Operações Básicas com Sinais

- Energia Total de um sinal contínuo

$$E_{x(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t) dt \quad (12)$$

- Energia Total de um sinal discreto

$$E_{x[n]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \quad (13)$$

Operações Básicas com Sinais

- Potência Média de um sinal contínuo

$$P_{x(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t) dt \quad (14)$$

- Potência Média de um sinal contínuo **periódico**

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad (15)$$

Operações Básicas com Sinais

- Potência Média de um sinal discreto

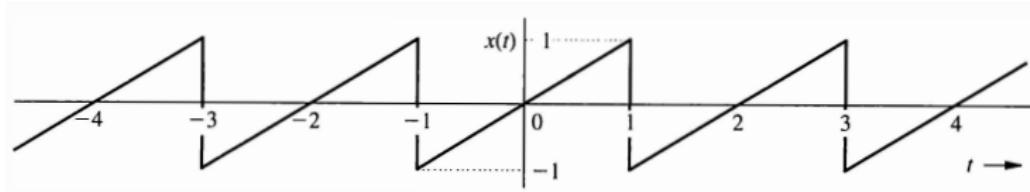
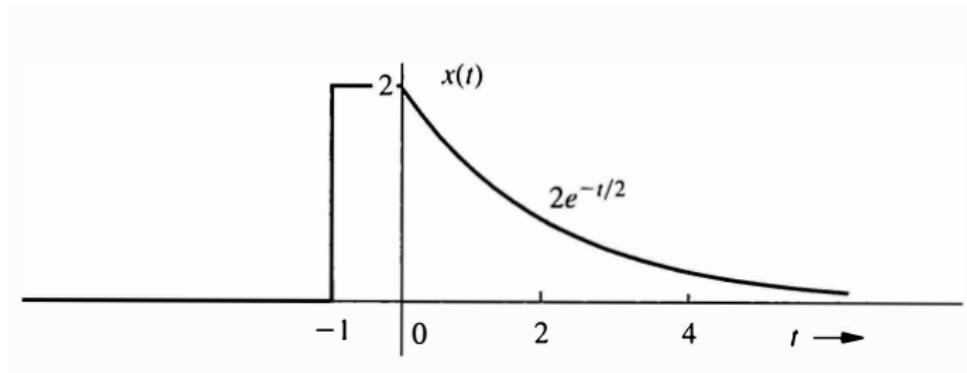
$$P_{x(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \quad (16)$$

- Potência Média de um sinal discreto **periódico**

$$P_{x(t)} = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \quad (17)$$

Operações Básicas de Sinais

Calcule a Energia e a Potência Média dos Sinais abaixo



Operações Básicas de Sinais

Solução:

- Para o primeiro sinal, podemos ver que para $t \rightarrow \infty$, a amplitude $\rightarrow 0$, ou seja, podemos calcular a energia da seguinte forma:

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-1}^0 2^2 dt + \int_0^{+\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8 \text{ u.a.e.}$$

- Para o segundo sinal, vemos que a amplitude não tende a zero, ou seja, a energia não converge para um valor. Mas a potência média pode ser calculada através de

$$P_{x(t)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ u.a.p.}$$

Operações Básicas com Sinais

Supondo dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$

Adição de Sinais

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (18)$$

Multiplicação de Sinais

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (19)$$

Mudança de Escala de Sinais

$$y(t) = \alpha \cdot x_1(t) \quad (20)$$

Operações Básicas com Sinais

Supondo um sinal $x(t)$

Diferenciação de Sinais

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \quad (21)$$

Integração de Sinais

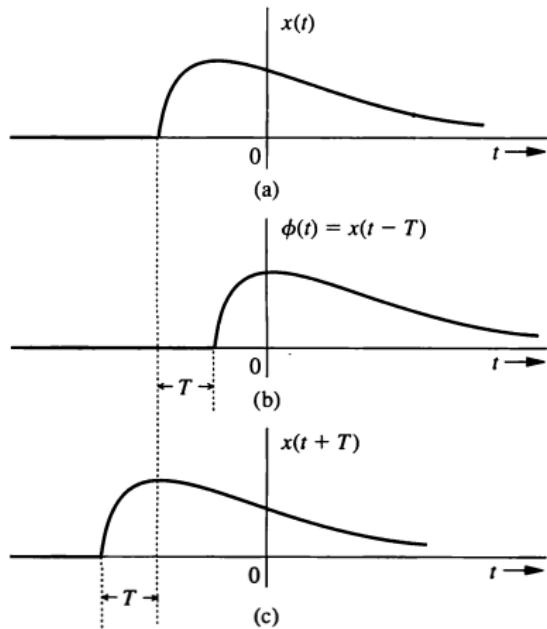
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt \quad (22)$$

Operações Básicas com Sinais

Deslocamento no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

- O descolamento é expresso por:
 $x(t \pm T)$
- Na figura **b**, temos o sinal atrasado ($T < 0$)
- Na figura **c**, temos o sinal adiantado ($T > 0$)

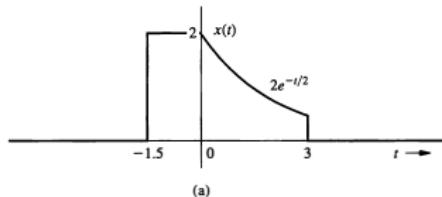


Operações Básicas com Sinais

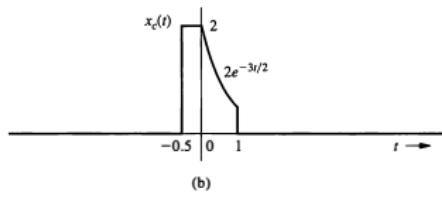
Compactação/Expansão no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

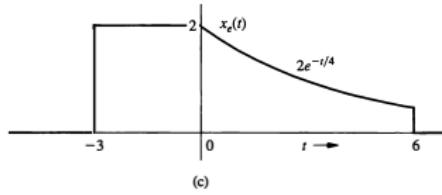
- Para $0 < \alpha < +\infty$
- A compactação é dada por $x(\alpha \cdot t)$, se $\alpha > 1$ (figura b)
- A expansão é dada por $x(\alpha \cdot t)$, se $\alpha < 1$ (figura c)



(a)



(b)

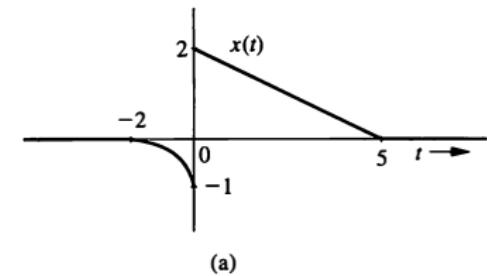


(c)

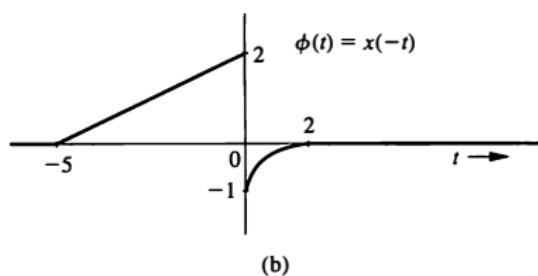
Inversão no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

- A inversão pode ser vista como uma complementação do processo de compactação ou expansão no tempo.
- Com $\alpha = -1$, temos a figura expressa ao lado (figura b)



(a)



(b)

Combinação entre duas ou mais operações básicas

- A combinação entre operações deve ser feito com **bastante** cuidado.
Pois o domínio e a imagem da operação deve ser observado.
- Por exemplo: $x(at - b)$, este sinal pode ser obtido de duas maneiras diferentes:
 - ① Podemos atrasar o sinal em b e depois compactar o sinal atrasado por a (uma vez que a compactação afeta somente a variável tempo)

$$x(t) \rightarrow x(t - b) \rightarrow x(at - b)$$

- ② Podemos compactar o sinal de a e depois atrasar o sinal compactado por $\frac{b}{a}$ (uma vez que o atraso afeta o argumento do sinal na sua totalidade)

$$x(t) \rightarrow x(at) \rightarrow x\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right)$$

Multiplicação por um Impulso Unitário

- Na equação 7 temos a definição do impulso unitário **ideal**. Nesta equação, vemos que para $t = 0$ o impulso unitário assume o valor 1. Com isso, podemos inferir que se um sinal $f(t)$ for multiplicado por $\delta(t)$, teremos:

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

- Ou seja, uma função contínua $f(t)$ multiplicada por um impulso unitário gera um impulso com **altura** (ou “**força**”) de $f(0)$ (valor da função na posição do impulso)
- Caso o impulso esteja atrasado de T , temos o seguinte comportamento:

$$f(t)\delta(t - T) = f(T)\delta(t - T)$$

Propriedade da Amostragem por um Impulso Unitário

- Na equação 8 temos a definição da área de impulso unitário **ideal**. De posse da equação 8 somada com a **multiplicação por um impulso unitário**, podemos montar um processo de **amostragem**. Com isso, podemos inferir que se um sinal $f(t)$ for multiplicado por $\delta(t)$ e depois integrado para todo o tempo, teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

- Caso o impulso esteja atrasado de T , temos o seguinte comportamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T)dt = f(T) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(T)$$

Decomposição de Sinais em partes pares e ímpares

- Todo Sinal pode ser expresso como uma soma de sinais pares e ímpares. Sendo que a sua forma final pode ser vista como:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]}_{\text{parte ímpar}}$$

Operações Básicas com Sinais

Desenhe o sinal e faça a operação pedida.

- ① $x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$, expandir o sinal por 2
- ② $x_2(t) = e^{-at}u(t)$, inverter o sinal no tempo
- ③ $x_3(t) = \delta(t)$, $x'_3(t) = x_3(3t - 5)$
- ④ $x_4(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, multiplicação por $\delta(t)$
- ⑤ $x_5(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, multiplicação por $\delta(t - 1)$ e integração no tempo
- ⑥ $x_6(t) = e^{j\omega t}$, decomposição em sinais pares e ímpares

Sistemas Lineares e Sistemas Não-Lineares

- Para provar a **linearidade**, devemos provar duas características separadamente:
 - Aditividade** - É a propriedade de um sistema responder da **mesma maneira** na presença de uma ou mais entradas. Então, supondo que para a entrada $x_1(t)$, um sistema S_1 responda $y_1(t)$ e para uma entrada $x_2(t)$ o mesmo sistema responda $y_2(t)$, então a propriedade da aditividade diz que:

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (23)$$

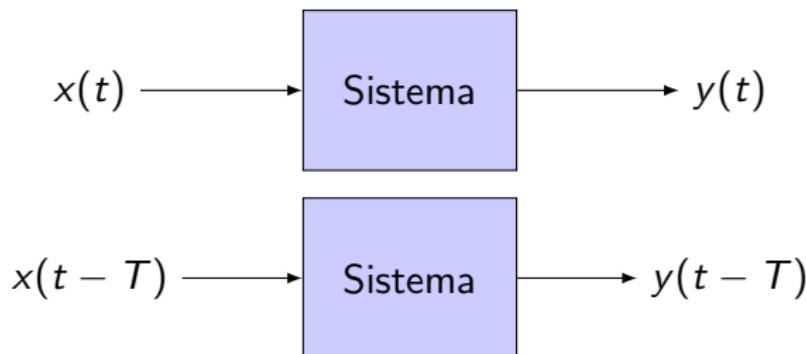
- Homogeneidade** - É a propriedade de um sistema responder da **mesma maneira** para diferentes amplitudes de entrada. Então, supondo que para a entrada $x_1(t)$, um sistema S_1 responda $y_1(t)$, então a propriedade da homogeneidade diz que:

$$\alpha x_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t) \quad (24)$$

- Sistemas que não atendem uma das propriedades acima são chamados de **Sistemas Não-Lineares**

Sistemas Variantes no tempo e Sistemas Invariantes no tempo

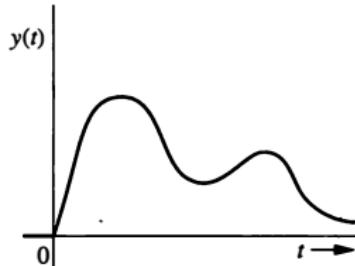
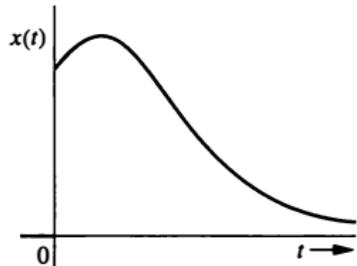
- A **propriedade da invariância no tempo** representa a capacidade do sistema não se modificar durante um intervalo de tempo T .



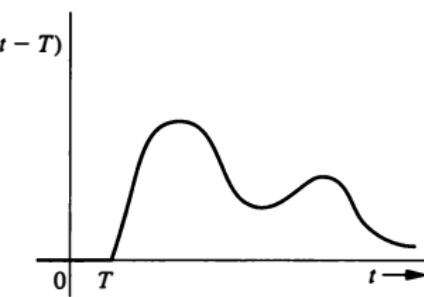
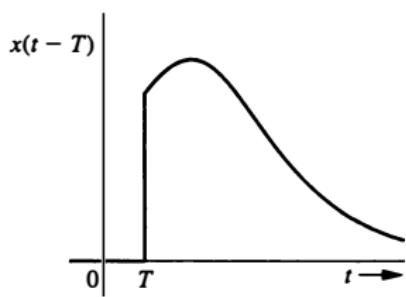
- Caso $y(t) = y(t - T)$, dizemos que o sistema é **Invariante no Tempo**.

Classificação de Sistemas

Sistemas Variantes no tempo e Sistemas Invariantes no tempo



(a)



(b)

Sistemas Instantâneos e Sistemas Dinâmicos

- **Sistemas Instantâneos** - Sistemas que dependem apenas do instante de tempo t para gerar a resposta $y(t)$. Também são chamados de **Sistemas sem Memória**, pois entradas anteriores ao tempo t são irrelevantes para a resposta $y(t)$.
- **Sistemas Dinâmicos** - Sistemas que dependem de instantes de tempo T anteriores a t para gerar a resposta $y(t)$ são chamados de **Sistemas Dinâmicos ou com memória**. Podemos ter sistemas com memória **finita** (sistemas digitais de processamento de sinais) ou memória **infinita** (sistemas analógicos de processamento de sinais).

Classificação de Sistemas

Sistemas Causais e Sistemas não-Causais

- **Sistemas Causais** (ou Sistemas Físicos ou Sistemas Não-Antecipativos) são sistemas que geram a resposta $y(t)$ somente dependendo de instantes de tempo anteriores a t .
- **Sistemas não-Causais** (ou Sistemas Antecipativos) são sistemas que geram a resposta $y(t)$ com alguma dependência de instantes de tempo posteriores a t .
- Ex: $y(t) = x(t - 2)$ é um sistema causal (a saída $y(t)$ depende apenas da entrada no instante no instante $t - 2$)
- Ex: $y(t) = x(t - 2) + x(t + 2)$ é um sistema não-causal (a saída $y(t)$ depende da entrada no instante no instante $t - 2$ e no instante $t + 2$, ou seja no futuro)
- Na prática, sistemas reais não podem ser não-causais, pois teríamos que fazer uma **predição** dos valores da entrada no **futuro**, o que geraria um erro de estimativa inerente ao processo (tornando o projeto inviável).

Classificação de Sistemas

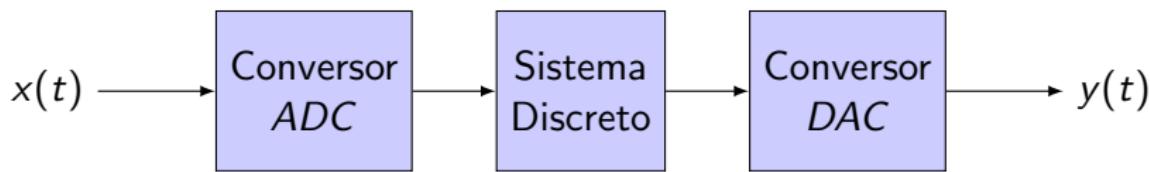
Sistemas de tempo contínuo e Sistemas de tempo discreto

- **Sistemas em tempo contínuo** são sistemas que operam em tempo contínuo
- **Sistemas em tempo discreto** são sistemas que operam em tempo discreto

Sistemas Analógicos e Sistemas Digitais

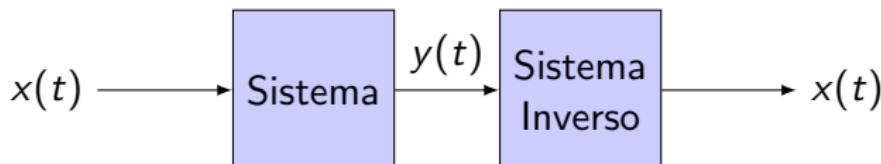
- **Sistemas Analógicos** são sistemas que operam em sinais analógicos
- **Sistemas Digitais** são sistemas que operam em sinais digitais

Sinais em tempo contínuo analógicos **podem** ser processados em sistemas digitais e de tempo discreto



Sistemas Inversíveis e Sistemas Não-Inversíveis

- Se um sistema S processa um conjunto de operações que pode ser **desfeito**, este sistema é chamado **sistema inversível**. Ex:
 $y(t) = 2 \cdot x(t)$.
- O sistema que processa o conjunto **inverso** de operações é chamado de **sistema inverso** de S



- Se um sistema S processa um conjunto de operações que não pode ser **desfeito** (distorcendo o sinal **permanentemente**), este sistema é chamado de **sistema não-inversível**. Ex: $y(t) = |x(t)|$

Sistemas Estáveis e Sistemas Instáveis

- Sistemas Estáveis: Estabilidade Interna vs. Estabilidade Externa
 - Estabilidade Externa: Toda **entrada limitada gera saída limitada**, chamada de estabilidade **BIBO** (*bounded input - bounded output*)
 - Estabilidade Interna: Depende da estabilidade das variáveis internas do sistema (a serem analisadas mais profundamente posteriormente)
- Caso o sistema não apresente uma das estabilidades acima, o mesmo será considerado **instável** no sentido da estabilidade rompida.

Classificação de Sistemas

Responda a afirmativa, justificando (onde $y(t)$ é a saída e $x(t)$ é a entrada):

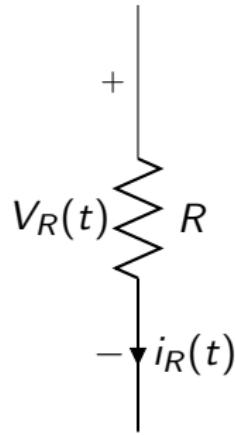
- ① $y(t) = x^2(t)$, é linear?
- ② $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, é instantâneo?
- ③ $y(t) = \frac{1}{3}(x(t) + x(t - 1) + x(t - 2))$, é linear?
- ④ $y(t) = x(t) + n(t)$, onde $n(t)$ é ruído, é inversível?
- ⑤ $y(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau) d\tau$, é causal?
- ⑥ $y(t) = \alpha^t x(t)$, onde $\alpha \leq 1$, é instável?

Leis de Kirchhoff

- Foram desenvolvidas pelo físico alemão **Gustav Robert Kirchhoff**
 - ① LKC - *Lei de Kirchhoff das Correntes ou Lei dos Nós*: Em um nó, a soma das correntes elétricas que entram é igual à soma das correntes que saem, ou seja, um nó não acumula carga.
 - ② LKT - *Lei de Kirchhoff das Tensões ou Lei das Malhas*: A soma algébrica das tensões em um percurso fechado é nula.

Equações Características de Componentes Elétricos

- Resistor (R)
- Unidade: Ohm (Ω)
- Lei de Ohm

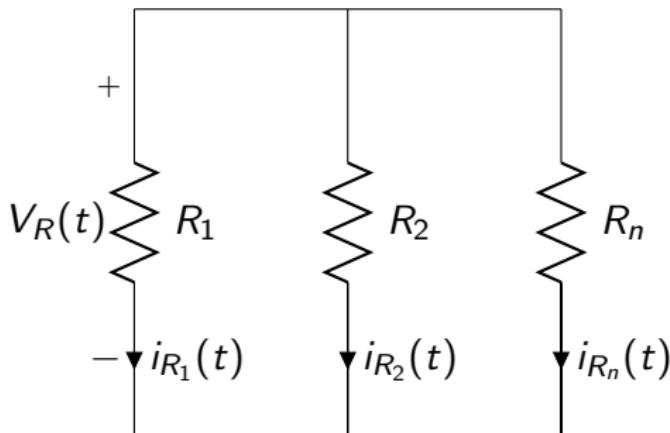


$$V_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (25)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Resistores

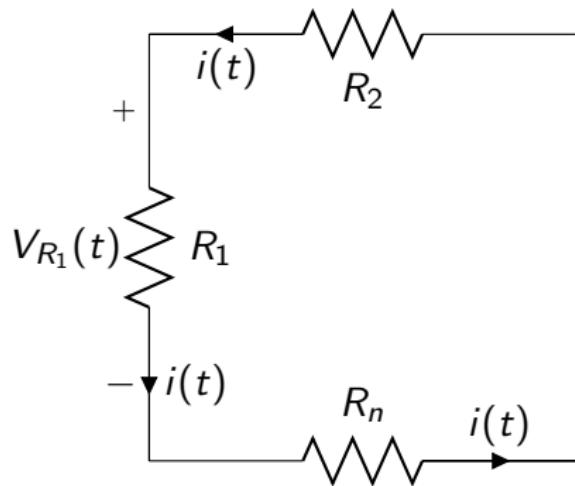


$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (26)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Resistores



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (27)$$

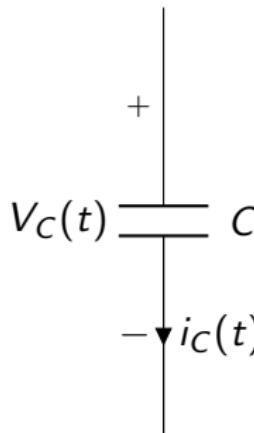
Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Capacitor (C)
- Unidade: Faraday (F)

Quantidade de Carga:

$$q(t) = C \cdot V_C(t) \quad (28)$$



Corrente em um Capacitor

$$i_C(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t} = C \frac{\partial V_C(t)}{\partial t} \quad (29)$$

Tensão em um Capacitor

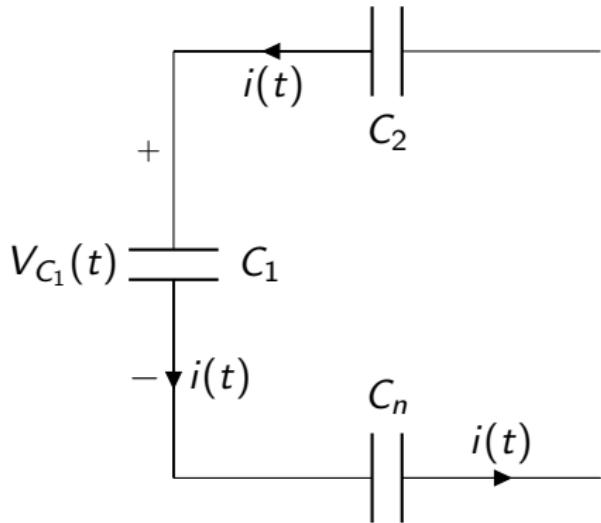
$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt \quad (30)$$

Energia armazenada

$$E_C(t) = \frac{C \cdot V^2(t)}{2} \quad (31)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Capacitores

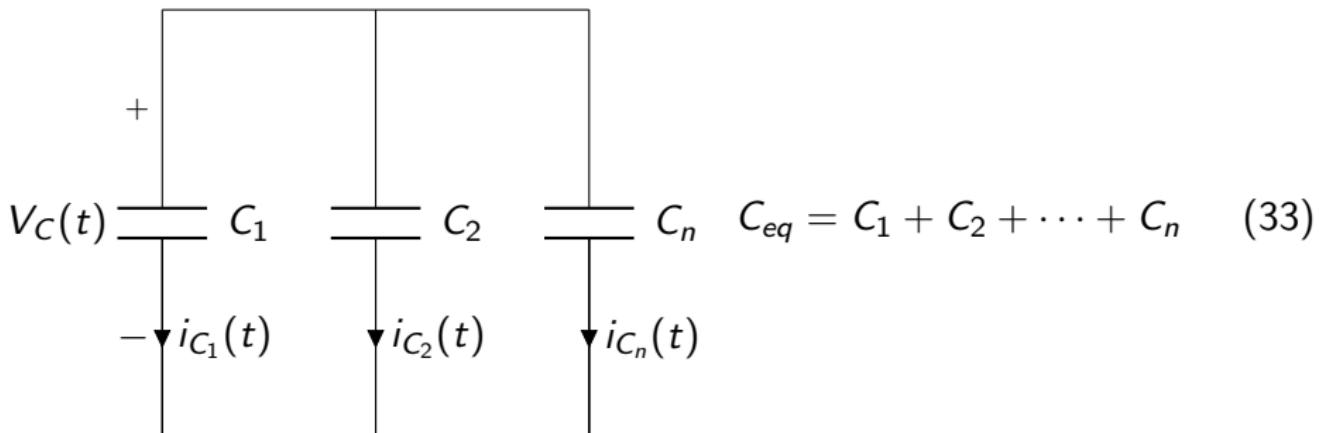


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (32)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Capacitores



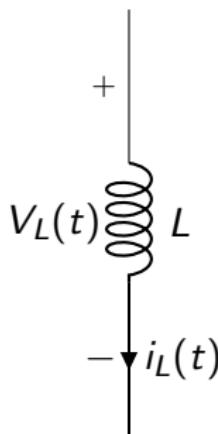
Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Indutor (L)
- Unidade: Henry (H)

Quantidade de Carga:

$$\phi(t) = L \cdot i_L(t) \quad (34)$$



Tensão em um Indutor

$$V_L(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = L \frac{\partial i_L(t)}{\partial t} \quad (35)$$

Tensão em um Capacitor

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t) dt \quad (36)$$

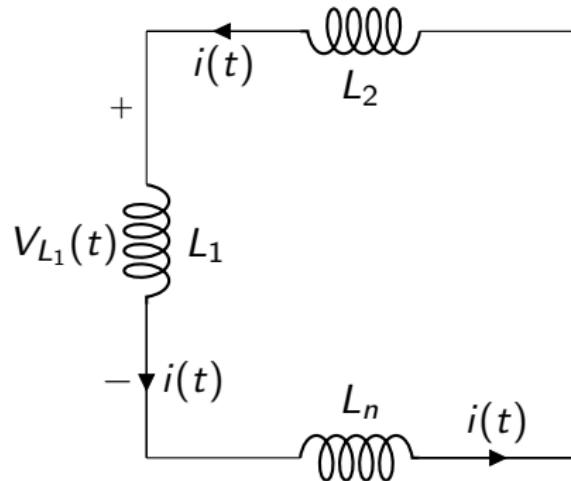
Energia armazenada

$$E_L(t) = \frac{L \cdot i_L^2(t)}{2} \quad (37)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Indutores

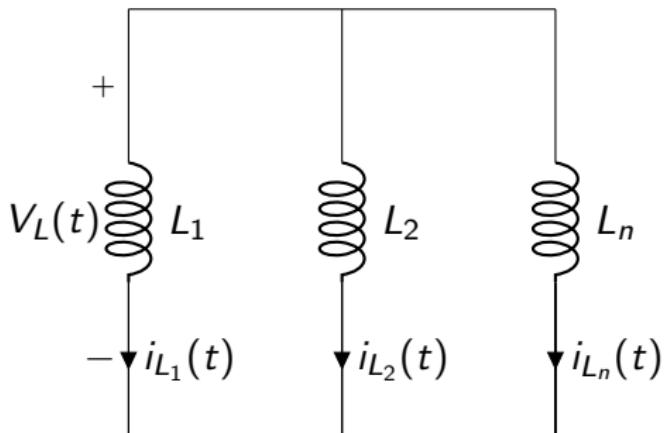


$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (38)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

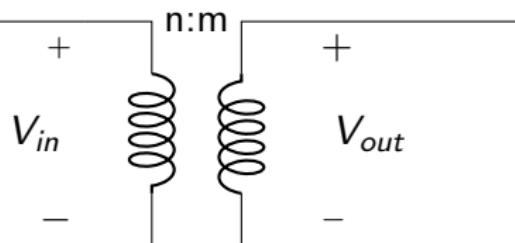
- Associação de Indutores



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (39)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

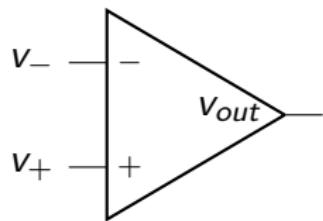
- Transformador Ideal



$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{n}{m} = \frac{i_{out}}{i_{in}} \quad (40)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Amplificador Operacional



$$v_{out} = A_v(v_+ - v_-) \quad (41)$$

Para análise:

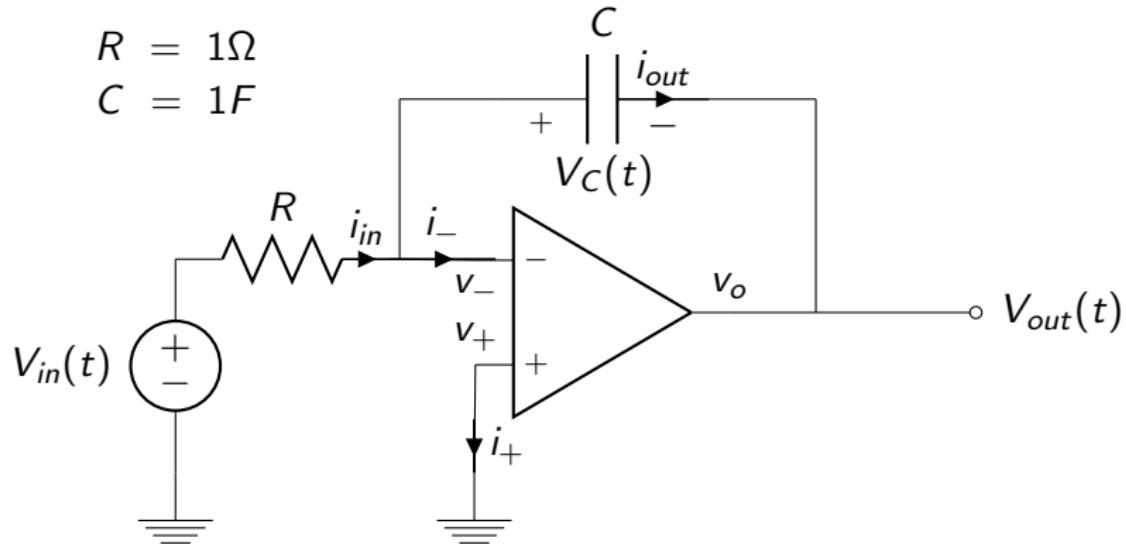
$$v_+ = v_-$$

$$A_v \rightarrow +\infty$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Modelagem de Circuitos

Modele o circuito abaixo



- Para a análise, vamos considerar **SLIT Diferenciais**.
- Supondo $x(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída.
- Assim sendo, podemos descrever a relação entrada e saída como:

$$\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^N} + a_1 \frac{\partial^{N-1} y(t)}{\partial t^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{\partial y(t)}{\partial t} + a_N y(t) = \\ b_{N-M} \frac{\partial^M x(t)}{\partial t^M} + b_{N-M+1} \frac{\partial^{M-1} x(t)}{\partial t^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + b_N x(t)$$

Operador Linear Diferencial

- Vamos definir o Operador Linear Diferencial D
- $D = \frac{\partial}{\partial t}$
- $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- $D^N = \frac{\partial^N}{\partial t^N}$
- $Dx(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$

- Com essa definição, podemos reescrever a equação

$$\begin{aligned} & \left(D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N \right) y(t) = \\ & \left(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} \cdots b_{N-1} D + b_N \right) x(t) \end{aligned}$$

- Fazendo:

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N \quad (42)$$

$$P(D) = b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} \cdots b_{N-1} D + b_N \quad (43)$$

- temos:

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t) \quad (44)$$

- Teoricamente, N e M podem assumir quaisquer valores.
- Embora, por considerações **práticas**, $M > N$ não é desejável.
- Com $M > N$ temos uma maior possibilidade de **instabilidade**
- Com $M > N$ temos uma tendência a amplificação de ruído.

- Como o Sistema é Linear, podemos decompor a saída total do sistema em **duas** partes distintas

$$y(t) = y_{\text{Entrada Zero}}(t) + y_{\text{Estado Zero}}(t) \quad (45)$$

- $y_{\text{Entrada Zero}}(t)$ é o componente da resposta que não depende da **entrada** do sistema. Geralmente, pode ser obtida na saída do sistema com $x(t) = 0$. Majoritariamente regida pelas condições iniciais do sistema.
- $y_{\text{Estado Zero}}(t)$ é o componente da resposta que não depende do **estado** do sistema. Geralmente, pode ser obtida na saída do sistema com a entrada sendo aplicada e o sistema totalmente relaxado.

Resposta à Entrada Zero

- Na equação 44, podemos ver a resposta à Entrada Zero como:

$$Q(D)y(t) = 0 \quad (46)$$

- Ou seja, a equação 44 se torna:

$$\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N \right) y(t) = 0 \quad (47)$$

- Assim devemos ter um comportamento **bastante peculiar**, onde a composição linear de $y(t)$ e suas derivadas deve ser zero.

Resposta à Entrada Zero

- Algumas funções se encaixam no comportamento descrito.
- Uma proposta: $y(t) = ce^{\lambda t}$
- $\frac{\partial y(t)}{\partial t} = c\lambda e^{\lambda t}$
- $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$
- $\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^N} = c\lambda^N e^{\lambda t}$

Resposta à Entrada Zero

- Então

$$Q(D)y(t) = \left(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N \right) y(t) = 0$$

- se torna:

$$c \left(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N \right) e^{\lambda t} = 0 \quad (48)$$

- Como $e^{\lambda t}$ não assume o valor zero, então:

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N = 0 \quad (49)$$

- Podendo ser reescrito como:

$$Q(\lambda) = 0 \quad (50)$$

Resposta à Entrada Zero - Raízes Distintas

- Se pudermos reescrever a equação 49, como:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_N) = 0 \quad (51)$$

- É possível ver que a equação acima, possui N soluções, a saber:
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$
- Cada uma das soluções, gera uma resposta $y_{\text{Entrada Zero}}(t)$, ou seja:

$$y_{\text{Entrada Zero}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t} \quad (52)$$

- Onde c_1, c_2, \dots, c_N são constantes arbitrárias que serão **definidas** baseadas nas **condições iniciais do sistema**

Resposta à Entrada Zero - Raízes Repetidas

- Para o caso de raízes repetidas, o efeito sobre a resposta se torna um pouco diferente.
- Supondo uma raiz que se repete r vezes, então temos:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r = 0 \quad (53)$$

- Para $r = 2$, podemos ver que a solução se torna:

$$y(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}te^{\lambda_1 t} \quad (54)$$

- Por generalização, para r não especificado:

$$y(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}te^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{1r}t^{r-1}e^{\lambda_1 t} \quad (55)$$

Resposta à Entrada Zero - Raízes Imaginárias

- No caso de sistemas reais, **raízes imaginárias** podem ocorrer. Embora que esse fenômeno só possa ocorrer da seguinte maneira: **duas raízes imaginárias complexas conjugadas**.
- Por exemplo: se $\alpha + j\beta$ for raiz, então $\alpha - j\beta$ também será.
- Ou seja:

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t} \quad (56)$$

- Para um sistema real, a resposta $y(t)$ deve ser real, e isso só é possível se:

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta}$$

$$c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

- Assim sendo:

$$y(t) = ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \quad (57)$$

Encontre a resposta à entrada zero dos sistemas abaixo

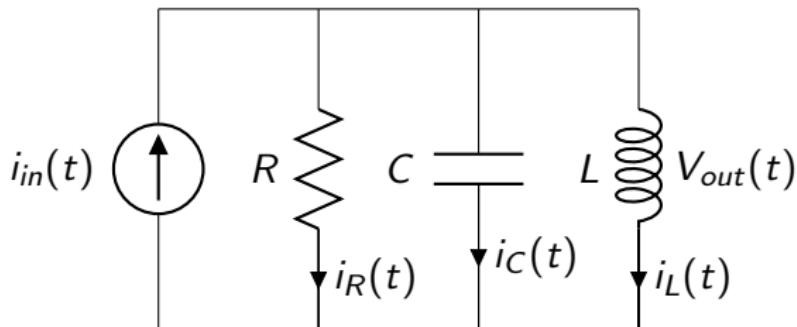
① $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 6y(t) = x(t)$

② $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t) = x(t)$

③ $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = x(t)$

Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

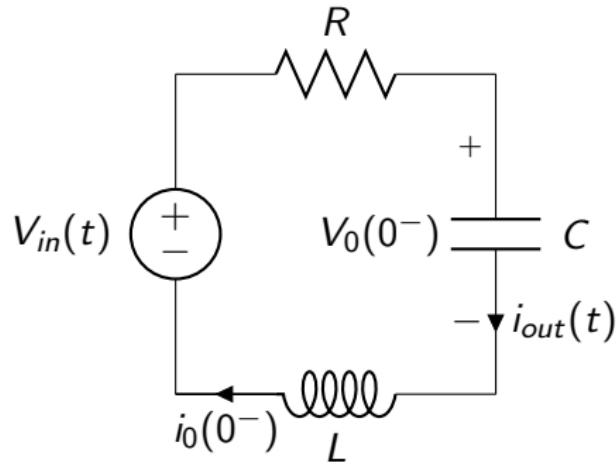
Equacione e encontre a resposta a entrada zero dos circuitos abaixo:



Suponha: $R = 1$, $C = 1$, $L = 1$, $V_C(0^-) = 1V$ e $i_L(0^-) = 1A$

Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

Equacione e encontre a resposta a entrada zero dos circuitos abaixo:



Suponha: $R = 1$, $C = 1$, $L = 1$, $V_C(0^-) = 1V$ e $i_L(0^-) = 1A$

Resposta à Entrada Zero - Estabilidade

- Para uma análise rápida de estabilidade, podemos verificar a posição das raízes do polinomio característico do sistema.

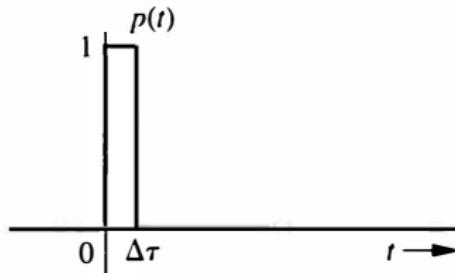
| | Raízes Simples | Raízes Repetidas | Raízes Imaginárias (parte) |
|---------------|----------------|------------------|----------------------------|
| $\lambda > 0$ | Instável | Instável | Instável |
| $\lambda = 0$ | Assin. Estável | Instável | Instável |
| $\lambda < 0$ | Estável | Estável | Estável |

Resposta ao Estado Zero

- Para a análise da resposta ao **Estado Zero**, supomos que o sistema está relaxado, ou seja, condições iniciais (**CI's**) iguais a zero.
- Outra definição a ser adotada é a definição temporal de entrada
 - O Instante de tempo $t = 0^-$ é chamado de instante de tempo **imediatamente anterior** a entrada
 - O instante de tempo $t = 0^+$ é chamado de instante de tempo **imediatamente posterior** a entrada
 - O instante de tempo $t = 0$ é chamado de instante de tempo onde a entrada foi aplicada
- Para facilitar a análise, vamos trabalhar com a **resposta do sistema ao impulso unitário**

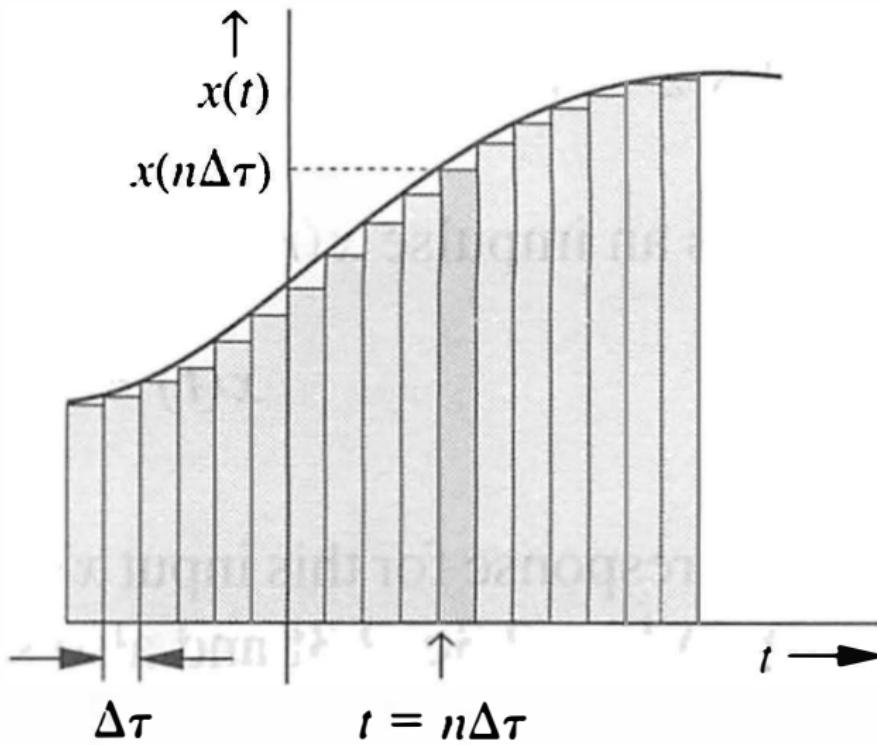
Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$

- Suponha uma função $p(t)$ com altura unitária, largura $\Delta\tau$ e que se inicia em $t = 0$



- Sendo assim, poderíamos decompor o um sinal $x(t)$ na soma de infinitos pulsos $p(t)$

Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$



Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$

- Assim, uma possível representação para $x(t)$ (decomposto por $p(t)$) é

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) \quad (58)$$

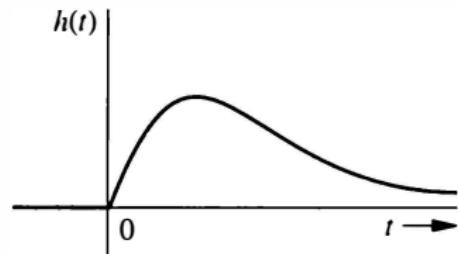
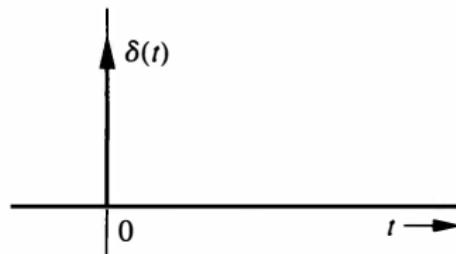
- Multiplicando-se e dividindo-se a equação 58 por $\Delta\tau$, temos:

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n \left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau) \Delta\tau \quad (59)$$

- Na equação 59, o termo $\left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau)$ representa um pulso de $p(t - n\Delta\tau)$ com altura $\left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right]$, ou seja, sua área é igual a $x(n\Delta\tau)$
- No limite, temos que $\left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau)$, se torna $x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)$

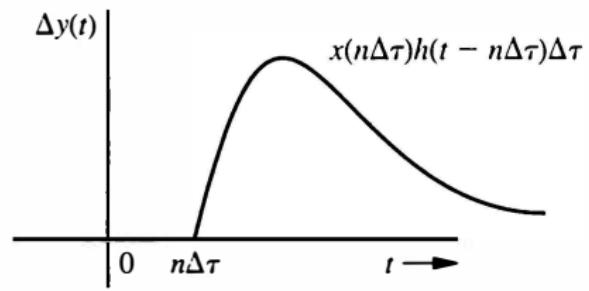
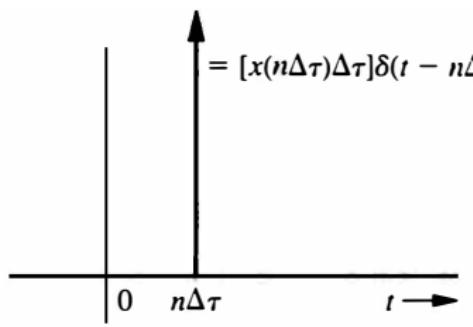
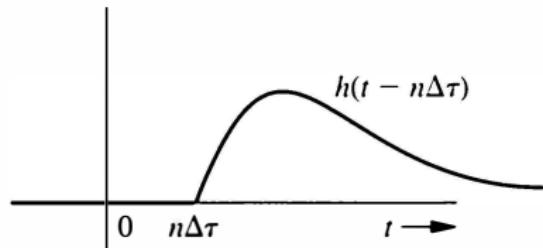
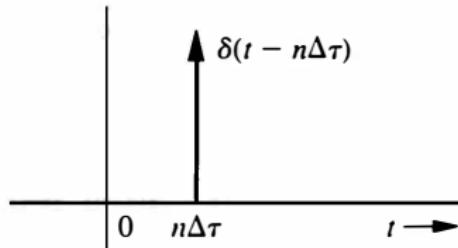
Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$

- Como podemos decompor todos os sinais como um somatório de impulsos atrasados, podemos determinar somente a resposta a um único impulso, e isso será suficiente para encontrarmos a resposta a toda a entrada.



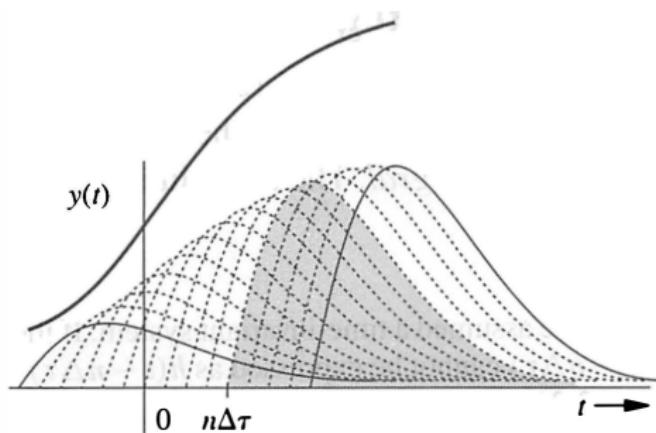
Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$



Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$

- A decomposição completa é feita quando somamos a influência de cada uma das respostas impulsas e pode ser vista abaixo.



Integral de Convolução

- $x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)$ representa apenas a influência da entrada no instante $t = n\Delta\tau$ na saída (que pode ser influenciada por entradas aplicadas em outros instantes de tempo)
- Para encontrarmos toda a saída devemos fazer o somatório de todas as influências geradas por todas as entradas
- Se $\delta(t)$ gera uma saída $h(t)$ e o sistema é um **SLIT**, podemos observar que

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) \quad (60)$$

- No limite, temos a chamada **Integral de Convolução**, e pode ser vista abaixo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (61)$$

Integral de Convolução

- A integral de convolução representa um passo muito grande para a análise de SLIT.
- Uma interpretação para a equação 61 é: **Para determinarmos a saída de um SLIT à qualquer entrada, basta que conheçamos a saída do sistema para entrada impulso unitário**
- A resposta $h(t)$ pode ser vista como o comportamento do sistema a uma entrada infinitesimal (que em teoria tem todos as frequências representadas)
- $h(t)$ pode também ser vista como os **modos naturais de um sistema** ou **modos normais de um sistema**

Propriedades da Convolução

Propriedade de Comutatividade

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (62)$$

Propriedade Distributiva

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (63)$$

Propriedade Associativa

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) \quad (64)$$

Propriedades da Convolução

Propriedade do Deslocamento no Tempo

$$x_1(t) * x_2(t) = c(t)$$

Então:

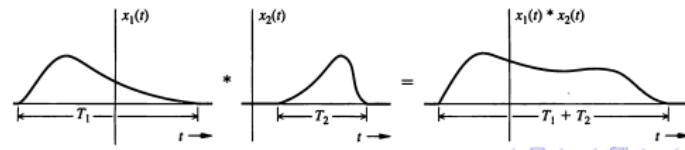
$$x_1(t) * x_2(t - T) = x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T) \quad (65)$$

Convolução com um impulso

$$x_1(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x_1(t)$$

Propriedade Largura da Convolução

- Suponha $x_1(t)$ com largura T_1 e $x_2(t)$ com largura T_2
- Então $x_1(t) * x_2(t)$ possui largura $T_1 + T_2$



Convolução Gráfica

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

O procedimento para a fazer a interpretação da convolução graficamente é

- ① Fixar um dos sinais (pela propriedade 62 não fará diferença qual dos dois) $\rightarrow x_1(\tau)$
- ② Espelhe o sinal não fixada $\rightarrow x_2(-\tau)$
- ③ Desloque o sinal não fixado em t_0 segundos $\rightarrow x_2(t_0 - \tau)$
- ④ Faça o produto entre os sinais $\rightarrow x_1(\tau) \cdot x_2(t_0 - \tau)$
- ⑤ Encontre a área sob a curva do produto
- ⑥ O valor da **área** é o valor da convolução para o instante t_0
- ⑦ Repita os passos 3 – 6 para todos os valores possíveis de t

Estabilidade pela Convolução - BIBO Estável

- Se a saída de um sistema é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Ou seja:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau$$

- Como $x(t)$ é limitadada (BIBO), $|x(t - \tau)| \leq K < +\infty$, assim:

$$|y(t)| \leq K \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

- Para estabilidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau \leq +\infty$$

Faça $x_1(t) * x_2(t)$ para:

- ① $x_1(t) = u(t)$ e $x_2(t) = \delta(t - T)$
- ② $x_1(t) = u(t)$ e $x_2(t) = u(t)$
- ③ $x_1(t) = u(t) - u(t - 2)$ e $x_2(t) = u(t) - u(t - 3)$

Transformada de Laplace

- Um pouco de história...
- A transformada de Laplace foi batizada com esse nome em homenagem ao matemático e astronomo **Pierre-Simon Laplace**, que na verdade **não utilizou a transformada** e sim uma transformada similar (**Transformada Z**) para alguns estudos de **probabilidade**.
- Logo após a Segunda Guerra Mundial, o uso da transformada foi amplamente difundido (especialmente na **engenharia**) devido a sua simplicidade.
- A transforma em si já havia sido descoberta e utilizada nos séculos XVIII e XIV.

Leonard Euler

$$X = \int x(t)e^{at} dt$$

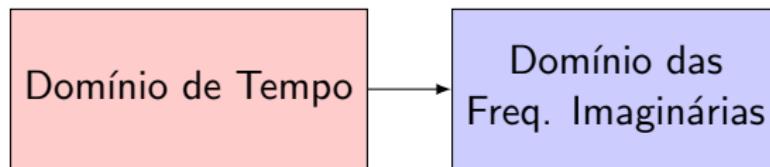
Joseph Louis Lagrange

$$X = \int x(t)e^{-at} a^t dt$$

Oliver Heaviside →
Equações diferenciais

Transformada de Laplace

Objetivo da Transformada



- Equações diferenciais e integrais de convolução geralmente são **muito úteis** para sinais simples no tempo
- Equações diferenciais e integrais de convolução pode se tornar **muito complicadas** para sinais um **pouco** mais complexos no tempo.
- Para solução de Equações Diferenciais, o Domínio das Freq. Complexas, geralmente, torna o problema mais simples

Transformada de Laplace

Definição da Transformada

- Suponha um sinal $x(t)$, sendo assim, a transformada de Laplace $X(s)$ pode ser definida como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (66)$$

- Onde, s é chamado de operador de Laplace e pode ser decomposto em:

$$s = \sigma + j\omega \quad (67)$$

Definição da Transformada Inversa de Laplace

- Suponha um sinal transformado $X(s)$, sendo assim, a transformada inversa de Laplace $X(s)$ pode ser definida como:

$$x(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (68)$$

- onde c é uma constante escolhida para garantir que a integração se mantenha na região convergência da equação 66.

Transformada de Laplace

Notação da Transformada de Laplace

- Suponha um sinal $x(t)$, sendo assim, a transformada de Laplace $X(s)$ pode ser definida como:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

- Suponha um sinal transformado $X(s)$, sendo assim, a transformada inversa de Laplace $x(t)$ pode ser definida como:

$$X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

- Idealmente, teremos:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[x(t)]] \quad X(s) = \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[X(s)]]$$

Transformada de Laplace

Exemplo da Transformada de Laplace

Para o Sinal $x(t) = u(t)$, encontre $X(s)$.

- ① Aplicando-se a definição da transformada, temos:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt$$

- ② Como $u(t) \neq 0$, para $t \geq 0$, então temos:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

- ③ Integrando, temos:

$$X(s) = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty}$$

Transformada de Laplace

Região de Convergência da Transformada

- No exemplo anterior, a integral resulta em

$$X(s) = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty}$$

- Para resolver essa equação, podemos supor que $e^{-st} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, embora isso nem sempre ocorra.
- Como s é um complexo ($s = \sigma + j\omega$), devemos avaliar a região do espaço em s onde a integral converge para algum valor. A essa região, chamamos **Região de Convergência** ou **Região de Existência** ou **ROC**.
- Voltando ao exemplo:

$$X(s) = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{-1}{s} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \Big|_{t=0}^{+\infty}$$

Região de Convergência da Transformada

- Como $|e^{-j\omega t}| = 1$ para quaisquer valores de ω e de t , então temos que para a integral convergir, $\sigma > 0$, levando a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sigma t} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \sigma < 0 \\ 0 & \text{se } \sigma > 0 \end{cases}$$

- Assim, dizemos que a nossa região de convergência para a transformada de Laplace é $\operatorname{Re}\{s\} > 0$
- Caso não se especifique a região de convergência, podemos ter dois sinais levando a transformadas idênticas.
- Ex: $x_1(t) = u(t)$ e $x_2(t) = u(-t)$ geram $X_1(s) = \frac{1}{s}$ com ROC: $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ e $X_1(s) = \frac{1}{s}$ com ROC: $\operatorname{Re}\{s\} < 0$

Região de Convergência da Transformada

- Observação: Para sinais de **duração finita** e **absolutamente integráveis**, a ROC é todo o plano s . Pois a integração será feita em um intervalo finito (definido pela duração do sinal).

Transformada de Laplace Unilateral

- Inicialmente, as análises dos sistemas serão feitas com a chamada **Transformada de Laplace Unilateral** que é definida por:

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (69)$$

- Para utilizarmos essa transformada, o sinal $x(t)$ deve ser **causal**.
- Mesmo que essa transformada reduza bastante a gama de sinais que podem ser analisados, o fato dela trazer a **unicidade** da solução, faz com que ela valha a pena.
- Basicamente, não existem diferença entre a Transformada de Laplace e a Transformada de Laplace Unilateral (exceto a ROC)

Transformada inversa de Laplace Unilateral

- Para se encontrar a transformada inversa de Laplace Unilateral podemos lançar mão de dois artifícios:
- Como sabemos que a solução da integral é única, podemos fazer a transformada pela definição (equação 68)
- Ou podemos consultar a **Tabela de Transformações**

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada I

① Linearidade

Dado $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ e $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$.

Prova: Pela definição

$$\mathcal{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) e^{-st} dt = \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

② Deslocamento no Tempo

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)e^{-st_0}$

O deslocamento desloca o inicio do sinal também. Ou seja,

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} x(\tau) u(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau$$

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada

II

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

③ Deslocamento na Frequência

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $x(t)e^{s_0 t} \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0)$

$$\mathcal{L}[x(t)e^{s_0 t}] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{(s-s_0)t} dt = X(s - s_0)$$

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada

III

④ Derivação no Tempo

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $\frac{\partial x}{\partial t} \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-)$

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial x(t)}{\partial t} \right] = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\partial x(t)}{\partial t} e^{-st} dt$$

Fazendo integração por partes, temos

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial x(t)}{\partial t} \right] = x(t)e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Por generalização, temos $\frac{\partial^n x}{\partial t^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$

⑤ Derivação na Frequência

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $tx(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\partial X(s)}{\partial s}$

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada

IV

⑥ Integração no Tempo

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s}$

$$\theta(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) d\tau \rightarrow \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = x(t)$$

Supondo $\theta(0) = 0$, temos

$$X(s) = \mathcal{L} \left[\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} \right] = s\Theta(s) - \theta(0) \rightarrow \Theta(s) = \frac{X(s)}{s}$$

⑦ Integração na Frequência

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $\frac{x(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^{+\infty} X(z) dz$

⑧ Compactação/Expansão no Tempo

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $x(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\alpha} X(\frac{s}{\alpha})$

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada

∨

⑨ Convolução no Tempo e na Frequência

Dado $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ e $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$.

Então $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s)$

Prova:

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) \partial\tau e^{-st} \partial t$$

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \int_0^{+\infty} x_2(t - \tau) e^{-st} \partial t \partial \tau$$

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_0^{+\infty} x_1(\tau) X_2(s) e^{-s\tau} \partial \tau = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

$$\text{E } x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

Transformada de Laplace - Propriedades da Transformada

VI

10 Teorema do Valor Inicial

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$

11 Teorema do Valor Final

Dado $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

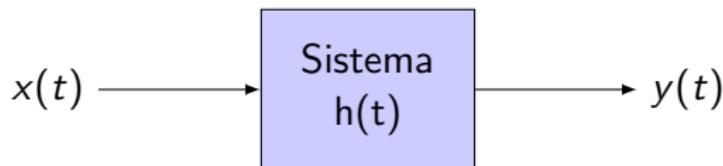
Transformada de Laplace

Faça a transformada de Laplace Unilateral dos Sinais Abaixo

- ① $x_1(t) = \delta(t - t_0)$
- ② $x_2(t) = \cos(\beta t)u(t)$
- ③ $x_3(t) = \sin(\beta t)u(t)$
- ④ $x_4(t) = e^{+\alpha t}u(t)$
- ⑤ $x_5(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

- Suponha o Sistema abaixo



- Onde $h(t)$ é a resposta ao impulso unitário.
- Sabemos que a resposta ao estado zero desse sistema é:
 $y_{EstadoZero}(t) = h(t) * x(t)$
- Pela propriedade da convolução da transformada de Laplace, sabemos que:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- Esta equação é válida somente quando as condições iniciais são zero.
- $H(s)$ é chamada de Função de Transferência de um sistema linear

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Características de $H(s)$

- Suponha $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$
- As raízes de $P(s)$ são chamados os **zeros** da função de Transferência
- As raízes de $Q(s)$ são chamados os **pólos** da função de Transferência
- Idealmente, o grau de $Q(s)$ deve **ser maior** do que o grau de $P(s)$
- Se $P(s)$ e $Q(s)$ possuem alguma raiz igual, a mesma deve ser cancelada
- O cancelamento de pólos pode acarretar efeitos diversos (**a ser visto no futuro**)

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Mapa de Pólos e Zeros

- É uma outra representação para $H(s)$
- Em um plano $\Re e \Im m$, posicionam-se **todos** os pólos e zeros de uma função de transferência
- Os **pólos** são representados por x
- Os **zeros** são representados por o

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Transformada Inversa de Laplace

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- Suponha que $Y(s)$ possua alguns **pólos simples**, representados por a_i , um **pólo repetido**, representado por b (com multiplicidade $m \geq 2$)
- Com esse cenário, podemos decompor o sinal $Y(s)$ da seguinte maneira:

$$Y(s) = K_0 + \sum_i \frac{k_i}{s - a_i} + \frac{c_1}{s - b} + \frac{c_2}{(s - b)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(s - b)^m}$$

- Os coeficientes serão dados por:

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

$$K_i = [(s - a_i)Y(s)] \Big|_{s=a_i}$$

$$c_j = \frac{1}{(m-j)!} \frac{\partial^{m-j} [(s - b)^m Y(s)]}{\partial s^{m-j}} \Big|_{s=b}$$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Transformada Inversa de Laplace - Exemplo

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

- k_0 : Teorema do Valor Inicial

$$k_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + 5s^2 + 5s}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = 1$$

- Decompoço $Q(s) = (s + 1)(s + 2)^2$, para o pólo simples $s + 1$

$$k_1 = \left[\frac{s^2 + 5s + 5}{(s + 2)^2} \right] \Big|_{s=-1} = k_1 = 1$$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Transformada Inversa de Laplace - Exemplo

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

- Para o pólo com multiplicidade $m = 2$: $(s + 2)^2$

$$c_2 = \frac{1}{0!} \left[\frac{s^2 + 5s + 5}{s + 1} \right] \Big|_{s=-2} = c_2 = 1 \quad c_1 = \frac{1}{1!} \frac{\partial^1}{\partial s^1} \left[\frac{s^2 + 5s + 5}{s + 1} \right] \Big|_{s=-2} = c_1 = 1$$

- Juntando tudo, temos:

$$Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$$

- Consultando a **Tabela de Transformações**, temos:

$$y(t) = \delta(t) + [e^{-t} + e^{-2t} + te^{-2t}] u(t)$$

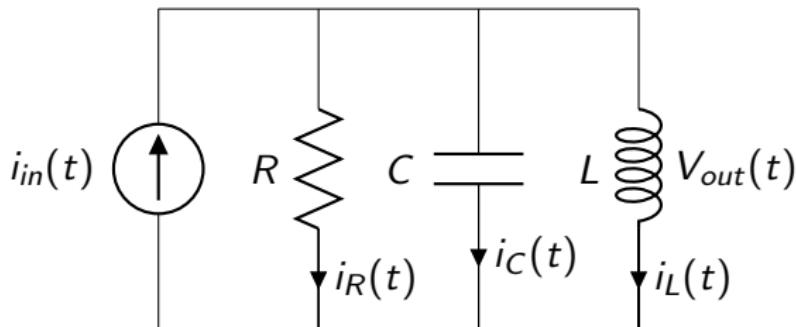
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Estabilidade de uma Função de Transferência

- Estabilidade no Sentido de Aleksandr Lyapunov ou Estabilidade de Lyapunov
 - ① Um SLIT é **assintoticamente estável** se e somente se todos os **pólos** da sua função de transferência estiverem no **SPLE** (Semi-Plano Lateral Esquerdo)
 - ② Um SLIT é **marginalmente estável** se e somente se não houverem pólos de multiplicidade maior de que 1 sobre o **eixo imaginário** e não houverem pólos no **SPLD**
 - ③ Um sistema é considerado **instável** se:
 - Houver, em sua função de transferência, um pólo no **SPLD**
 - Houver, em sua função de transferência, um pólo com multiplicidade maior do que 1 sobre o eixo imaginário

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

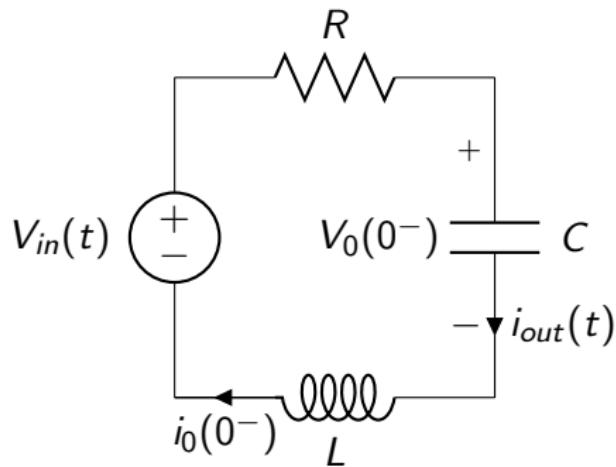
Equacione e encontre a resposta total do circuito abaixo, para $i_{in}(t) = \delta(t)A$



Suponha: $R = \frac{1}{5}$, $C = 1$, $L = \frac{1}{6}$, $V_C(0^-) = 1V$ e $i_L(0^-) = 1A$

Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

Equacione e encontre a resposta total do circuito abaixo, para
 $V_{in}(t) = u(t)V$



Suponha: $R = \frac{1}{5}$, $C = 1$, $L = \frac{1}{6}$, $V_C(0^-) = 1V$ e $i_L(0^-) = 1A$

Resposta de um SLIT a uma exponencial imaginária

- Suponha que a um sistema com **resposta ao impulso unitário** $h(t)$, seja submetida a entrada $x(t) = e^{st}$. Então a sua resposta pode ser obtida por:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- Ou, abrindo a integral de convolução, temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\text{Transf. Laplace}}$$

- Ou seja, a resposta à uma exponencial imaginária pode ser descrita como:

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Resposta de um SLIT a uma cossenóide

- Como $s = \sigma + j\omega$, podemos fazer $\sigma = 0$ e assim teremos:

$$x(t) = e^{j\omega t} \rightarrow y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

- Como $\Re[e^{j\omega t}] = \cos(\omega t)$, então:

$$\Re[x(t)] = \cos(\omega t) \rightarrow y(t) = \Re[H(j\omega)] \cos(\omega t)$$

- Podemos ver $H(j\omega)$ como um número imaginário dependente exclusivamente de ω , sendo assim:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\angle H(j\omega)}$$

- Obtendo assim, para $x(t) = \cos(\omega t)$:

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

Observações

- ① Este resultado só é válido para Sistemas que possuem $H(s)$ definido, ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ definido, ou seja, que seja estáveis.
- ② Encontrar a resposta em frequências para um Sistema Linear Linear se torna um processo relativamente simples. Para uma dada frequência ω , calcula-se o **módulo** e a **fase** de $H(s)$ substituindo $s \rightarrow j\omega$.
- ③ Um interpretação para $|H(j\omega)|$ é que este valor é o ganho do sistema para uma dada frequência, que também chamamos de magnitude do sistema a uma determinada frequência

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplo

- Dado

$$H(s) = \frac{s + 0.1}{s + 5}$$

- Encontre a resposta em frequência para:

① $\cos(2t)$

② $\cos(10t - 50^\circ)$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplo

- O módulo de $H(s)$ pode ser obtido por:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(j\omega)^2 + 0.1^2}}{\sqrt{(j\omega)^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0.01}}{\sqrt{\omega^2 + 25}}$$

- A fase de $H(s)$ pode ser obtida por:

$$\angle H(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{0.1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

- Para o item 1: $\omega = 2$, então:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{2^2 + 0.01}}{\sqrt{2^2 + 25}} = ?$$

$$\angle H(j\omega) = \arctg\left(\frac{2}{0.1}\right) - \arctg\left(\frac{2}{5}\right) = ?$$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplo

- O módulo de $H(s)$ pode ser obtido por:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(j\omega)^2 + 0.1^2}}{\sqrt{(j\omega)^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0.01}}{\sqrt{\omega^2 + 25}}$$

- A fase de $H(s)$ pode ser obtida por:

$$\angle H(j\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{0.1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{5} \right)$$

- Para o item 1: $\omega = 2$, então:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{2^2 + 0.01}}{\sqrt{2^2 + 25}} = ?$$

$$\angle H(j\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{0.1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{5} \right) = ?$$

- Assim: $y(t) = 0.372 \cos(2t + 65.3^\circ)$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplo

- Para o item 2: $\omega = 10$, então:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{10^2 + 0.01}}{\sqrt{10^2 + 25}} = ?$$

$$\angle H(j\omega) = \arctg \left(\frac{10}{0.1} \right) - \arctg \left(\frac{10}{5} \right) = ?$$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplo

- Para o item 2: $\omega = 10$, então:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{10^2 + 0.01}}{\sqrt{10^2 + 25}} = ?$$

$$\angle H(j\omega) = \arctg\left(\frac{10}{0.1}\right) - \arctg\left(\frac{10}{5}\right) = ?$$

- Assim:

$$y(t) = 0.894\cos(10t - 50^\circ + 26^\circ) = y(t) = 0.894\cos(10t - 24^\circ)$$

Exemplos

- Esboce a resposta em frequências para:
 - ① Um atraso no tempo de 4 segundos
 - ② Um diferenciador ideal
 - ③ Um integrador ideal
- Encontre a resposta em frequências para os SLIT abaixo
 - ① $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$, para $x(t) = 20\text{sen}(3t + 61.91^\circ)$

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Exemplos

- Esboce a resposta em frequências para:
 - ① Um atraso no tempo de 4 segundos
 - ② Um diferenciador ideal
 - ③ Um integrador ideal
- Encontre a resposta em frequências para os SLIT abaixo
 - ① $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$, para $x(t) = 20\text{sen}(3t + 61.91^\circ)$
 - ② $y(t) = 5.26 * \text{sen}(3t + 161.81^\circ)$

Diagrama de Bode

- O objetivo dos Diagramas de Bode é prover uma **aproximação** da **resposta em frequências** de um sistema linear para todas as frequências possíveis.
- É uma **aproximação** que tem um **nível de confiabilidade**, ou seja, precisamos saber onde estamos errando e por quanto estamos errando.
- Esboçar a resposta em frequência de um sistema se torna mais fácil na **escala logarítmica**.
- Vamos utilizar o **comportamento assintótico** da resposta do sistema para nos auxiliar.

Função de Transferência Básica

- Suponha uma função de transferência $H(s)$, como descrita abaixo:

$$H(s) = \frac{K(s + a_1)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)}$$

- Suponha também que o pólo $s^2 + b_2s + b_3$ possui raízes complexas conjugadas.

Função de Transferência Básica

- Suponha uma função de transferência $H(s)$, como descrita abaixo:

$$H(s) = \frac{K(s + a_1)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)}$$

- Suponha também que o pólo $s^2 + b_2s + b_3$ possui raízes complexas conjugadas.

Diagrama de Bode

Função de Transferência Básica

- Podemos reorganizar a função de transferência como sendo:

$$H(s) = \frac{K a_1}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{s}{a_1} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{b_1} + 1\right) \left(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}s + 1\right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{K a_1}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{j\omega}{a_1} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1\right) \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1\right)}$$

Diagrama de Bode

Função de Transferência Básica

- O módulo dessa função de transferência pode ser obtido por:

$$|H(j\omega)| = \frac{K a_1}{b_1 b_3} \frac{\left| \frac{j\omega}{a_1} + 1 \right|}{|j\omega| \left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right| \left| \frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1 \right|}$$

- A fase dessa função de transferência pode ser obtida por:

$$\angle H(j\omega) = \angle \left(\frac{j\omega}{a_1} + 1 \right) - \angle j\omega - \angle \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1 \right) - \angle \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1 \right)$$

Logarítmico de uma grandeza

- Para obtermos a fase basta que façamos um conjunto de somas e subtrações para cada uma das frequências avaliadas. O que não parece ser muito difícil.
- Já no caso do módulo, temos que fazer um conjunto de produtos e divisões que não simplifica a vida em nada.
- Para isso, usamos a escala logaritmica que transforma os produtos em somas e as divisões em subtrações.
- Como estamos na escala logaritmica, podemos usar como unidade o **decibel** que é igual a 20 vezes o logarítmico de uma medida física.
- Obs: Caso a grandeza física expresse potência, o decibel será apenas 10 vezes o logarítmico da grandeza física.

Diagrama de Bode

Logarítmico do Módulo

- Uma vez que estamos usando o decibel como unidade, temos:

$$\begin{aligned}20\log(|H(j\omega)|) &= 20\log\left(\frac{Ka_1}{b_1b_3}\right) + 20\log\left(\left|\frac{j\omega}{a_1} + 1\right|\right) - 20\log(|j\omega|) \\&\quad - 20\log\left(\left|\frac{j\omega}{b_1} + 1\right|\right) - 20\log\left(\left|\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1\right|\right)\end{aligned}$$

- Uma vez que podemos somar os logarítmicos de cada um dos termos acima.

Diagrama de Bode

Termo Constante: $\frac{K a_1}{b_1 b_3}$

- Contribuição para o módulo: $20 \log \left(\frac{K a_1}{b_1 b_3} \right)$
- Contribuição para fase: 0 se $\frac{K a_1}{b_1 b_3} \leq 0$ e π se $\frac{K a_1}{b_1 b_3} > 0$

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) na origem: $j\omega$

- Contribuição para o módulo: $-20\log(|j\omega|)$
- Análise: $-20\log(|j\omega|) = -20\log(\omega)$, podemos fazer sua substituição para simplificar,

$$u = \log\omega$$

- Assim sendo, podemos interpretar $-20\log(\omega)$ como sendo $-20u$ ou uma **reta que cruza a origem**
- A reta $-20u$ possui inclinação de 20 dB/década (ou 6 dB/oitava) devido a sua relação com ω .
 - Uma década: variação de **10x** entre uma frequência e outra. Ex: De 5 para 50, temos 1 década
 - Uma oitava: variação de **2x** entre uma frequência e outra. Ex: De 5 para 10, temos 1 oitava
- O módulo cruza o eixo, caso o mesmo esteja agindo isoladamente, na frequência $\omega = 1$ ($\log_{10}\omega = 0 \rightarrow \omega = 1$)

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) na origem: $j\omega$

- Contribuição para a fase: $-arctg\left(\frac{\omega}{0}\right)$
- Análise: Não importa a frequência ω , o valor da fase será sempre $-\pi/2$ ou -90°

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) na origem: $j\omega$

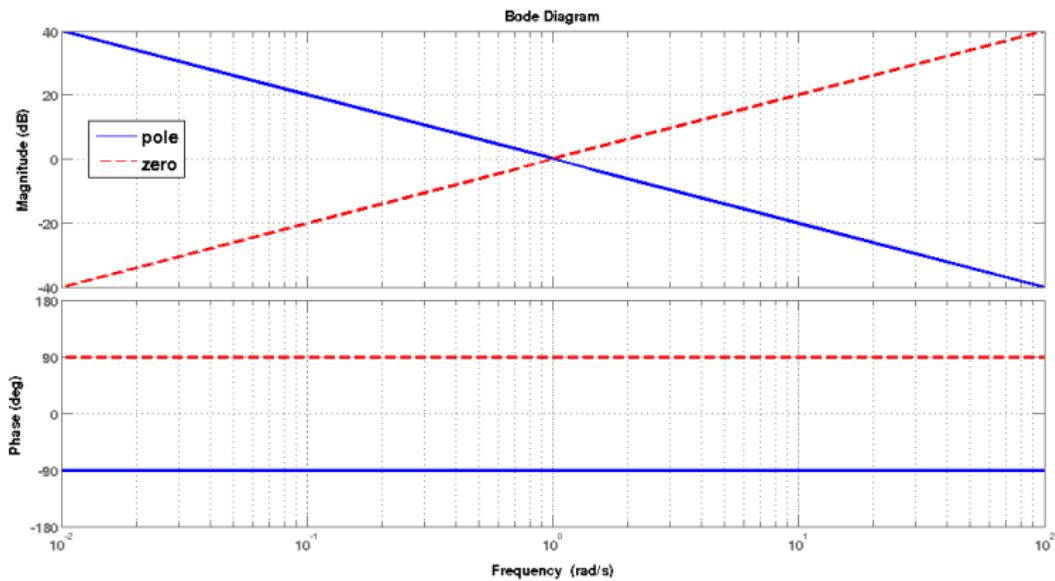


Diagrama de Bode I

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{b_1} + 1$ ou $\frac{j\omega}{a_1} + 1$

- Fazendo a análise para o pólo $\frac{j\omega}{b_1} + 1$, podemos definir a frequência de corte do pólo como sendo b_1 . Então a análise será referenciada para esta frequência.
- Contribuição para o módulo:

- ① Para valores $\omega \ll b_1$, temos:

$$-20\log \left(\left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right| \right) \approx -20\log (1) = 0$$

- ② Para valores $\omega \gg b_1$, temos:

$$\begin{aligned} -20\log \left(\left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right| \right) &\approx -20\log \left(\frac{\omega}{b_1} \right) = -20\log (\omega) + 20\log (b_1) \\ &= -20u + 20\log (b_1) \end{aligned}$$

Diagrama de Bode II

- ③ Para valores $\omega = b_1$, temos:

$$-20\log \left(\left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right| \right) = -20\log \left(\frac{\omega^2}{b_1^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = -10\log \left(\frac{\omega^2}{b_1^2} + 1 \right)$$

- Para o pólo de primeira ordem, temos dois comportamentos diferentes que se encontram na frequência de corte. O primeiro comportamento é de uma reta em 0 dB. O segundo é uma reta com coeficiente angular de -20 dB/década e coeficiente linear de $20\log(b_1)$.

Diagrama de Bode I

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{b_1} + 1$ ou $\frac{j\omega}{a_1} + 1$

- Contribuição para a fase:
 - ➊ Para valores $\omega \ll b_1$, temos:

$$\angle \frac{j\omega}{b_1} + 1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{b_1} \right) \approx 0^\circ$$

- ➋ Para valores $\omega \gg b_1$, temos:

$$\angle \frac{j\omega}{b_1} + 1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{b_1} \right) \approx -90^\circ$$

- Para o pólo de primeira ordem, temos três comportamentos diferentes que aproximam na região da frequência de corte. O primeiro comportamento é de uma reta em 0° . O segundo é uma reta com coeficiente angular de $-45^\circ/\text{década}$. O terceiro é de uma reta em -90°

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{a} + 1$

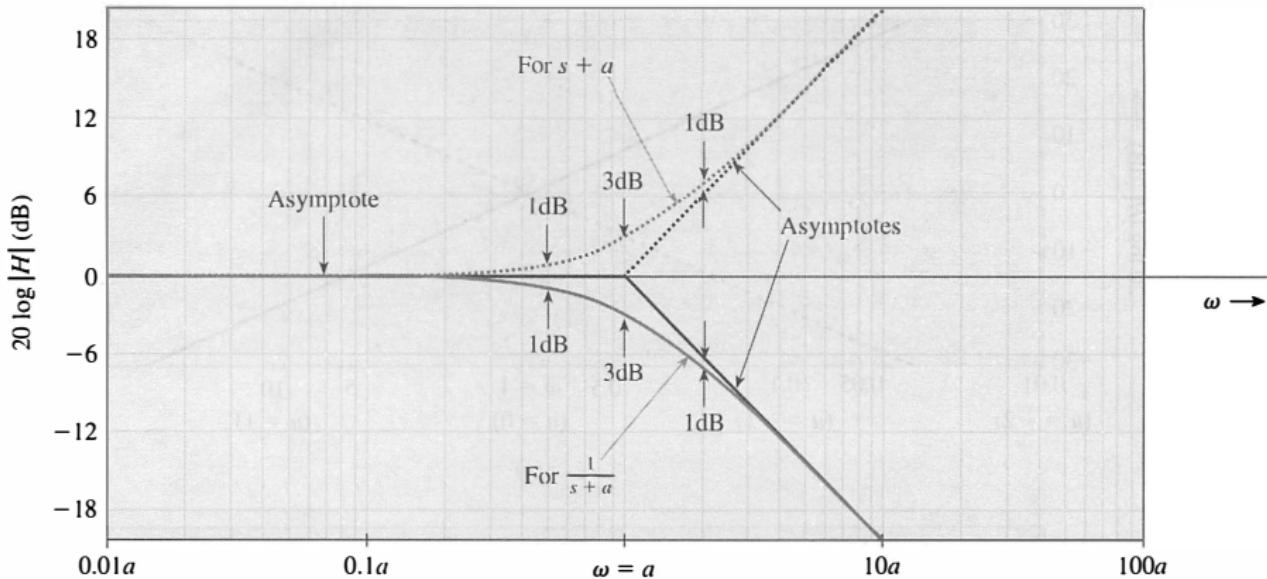


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{a} + 1$

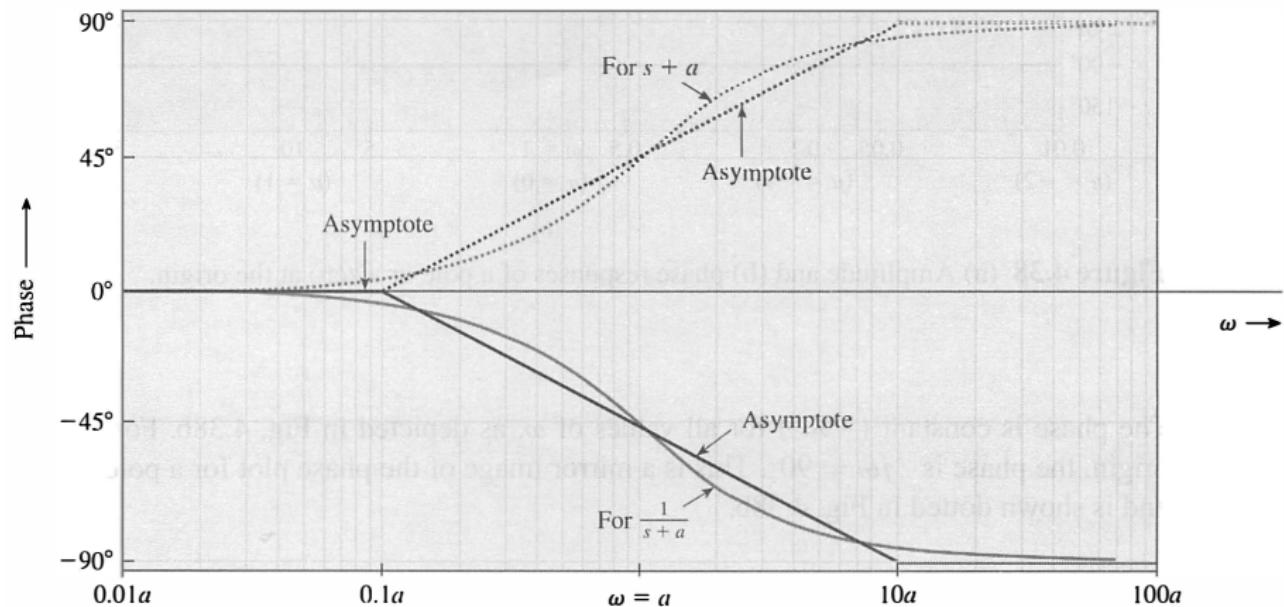


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{a} + 1$

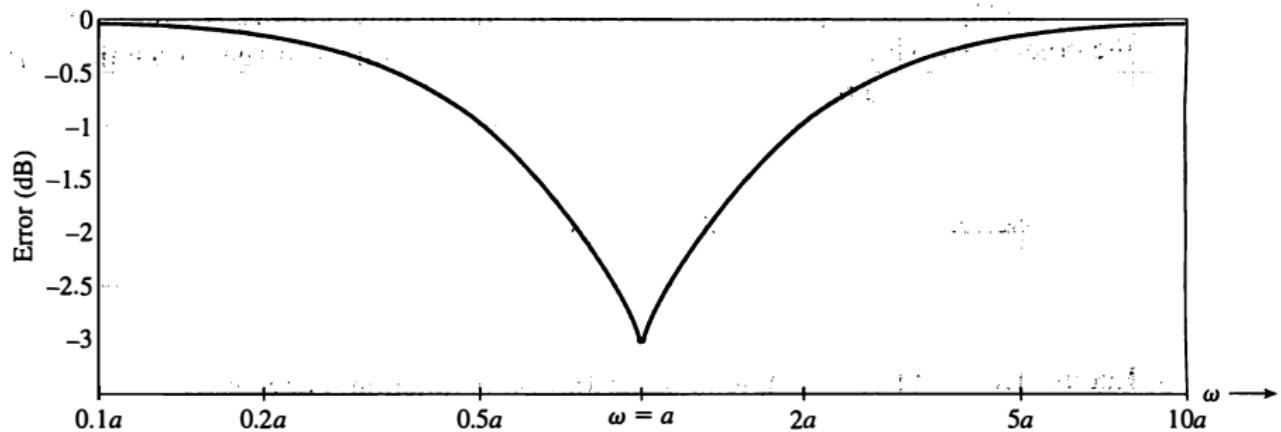


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de primeira ordem: $\frac{j\omega}{a} + 1$

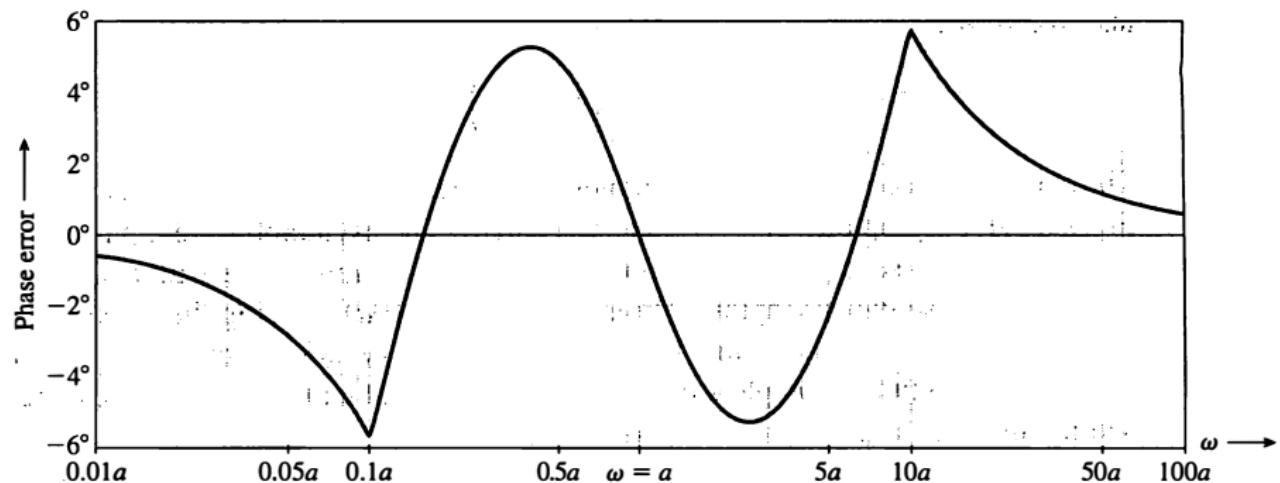


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

- Para fazer a análise do pólo $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$, vamos introduzir um outro formato de **representação** do pólo.

$$s^2 + b_2s + b_3 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

- Onde ζ é chamado de **coeficiente de amortecimento** e ω_n é a frequência natural do pólo.
- Para $0 \leq \zeta \leq 1$, temos pólos complexos conjugados.

Módulo

$$-20\log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right|$$

Fase

$$-\angle \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]$$

Diagrama de Bode I

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

- contribuição para o módulo

$$-20\log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right|$$

- Para $\omega \ll \omega_n$

$$-20\log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n^2} \right) + 1 \right| \approx -20\log 1 = 0$$

- Para $\omega \gg \omega_n$

$$\begin{aligned} -20\log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n^2} \right) + 1 \right| &\approx -20\log \left| \left(-\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \\ &= -40\log \left| \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right| \end{aligned}$$

Diagrama de Bode II

- Ou seja:

$$-40 \log \left| \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right| = -40u + 40 \log (\omega_n)$$

- Para $\omega = \omega_n$

$$\begin{aligned} & -20 \log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2j\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right| \\ &= -20 \log \left[\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

- Para pólos conjugados podemos ter o fenomeno da **ressonância**.
- A ressonância ocorre quando $\zeta < 0,707$ e se torna maior quando $\zeta \rightarrow 0$

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

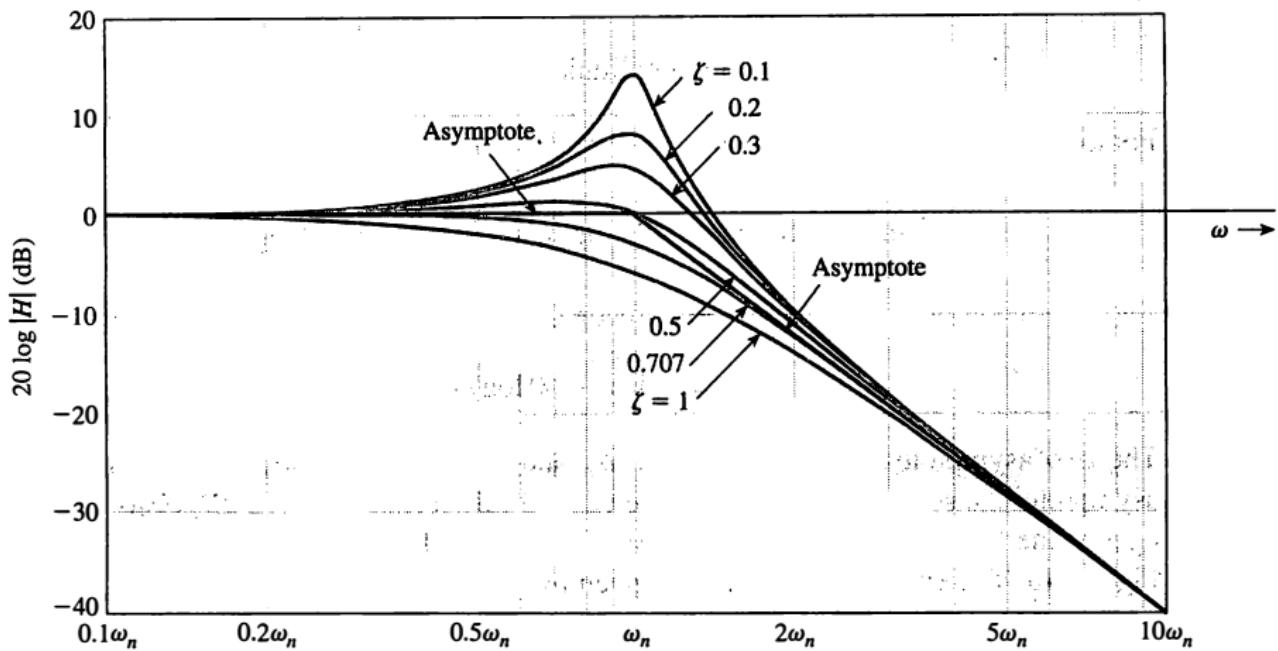


Diagrama de Bode I

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

- contribuição para a fase

$$\angle H(j\omega) = \arctg \left(\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$

- Para $\omega \ll \omega_n$

$$\angle H(j\omega) \approx 0$$

- Para $\omega \gg \omega_n$

$$\angle H(j\omega) \simeq -180^\circ$$

- Para $\omega = \omega_n$

$$\angle H(j\omega) = -90^\circ$$

Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

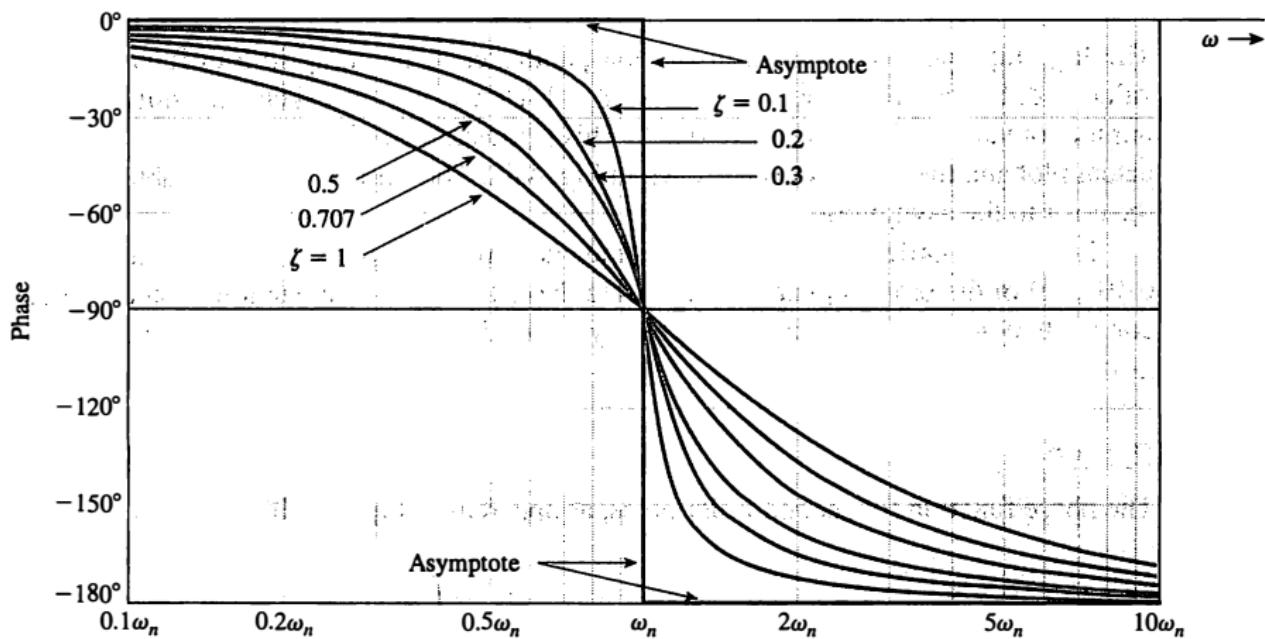


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

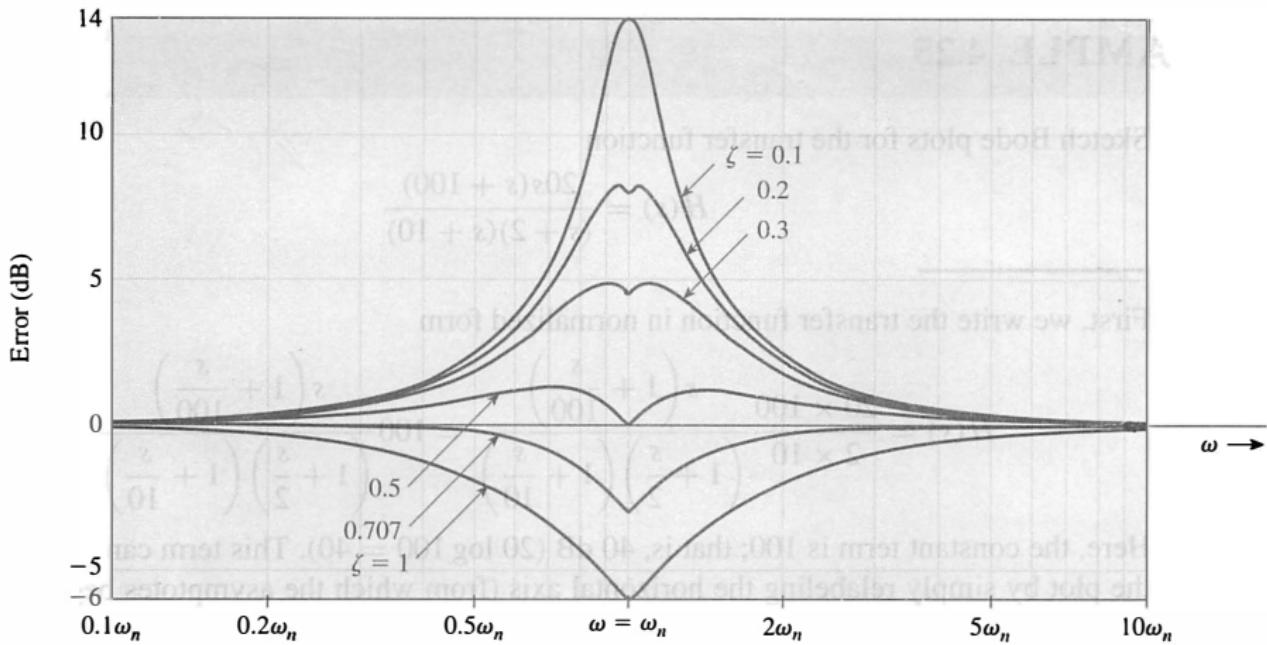


Diagrama de Bode

Pólo (ou Zero) de segunda ordem: $\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1$

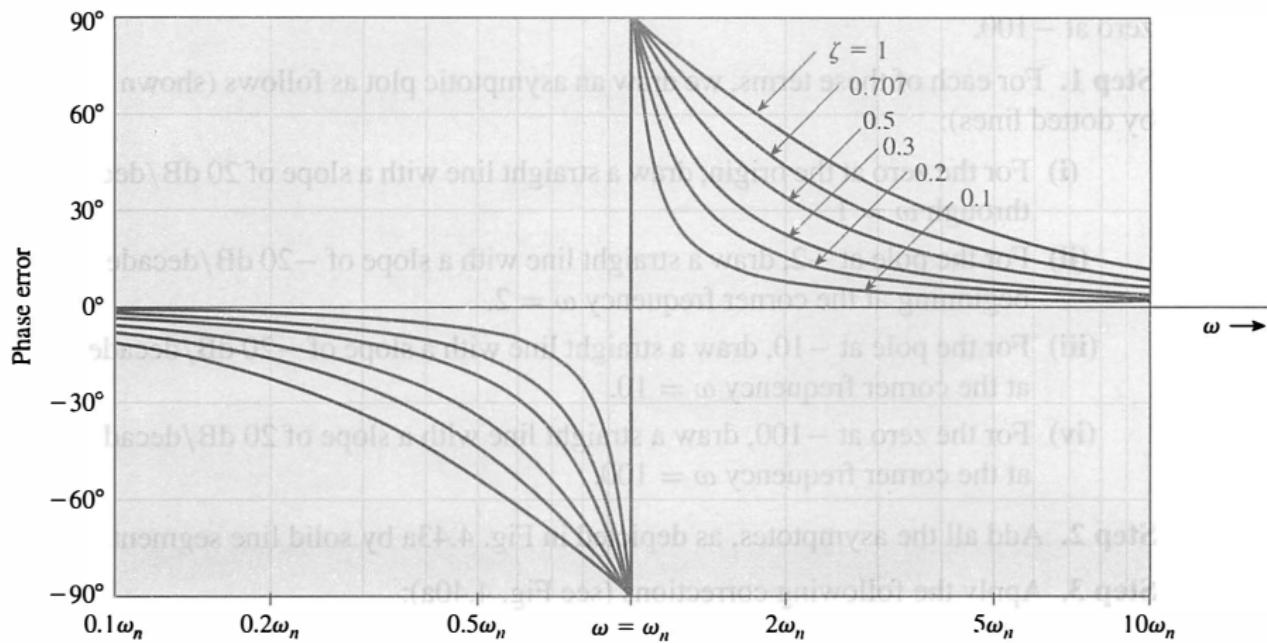


Diagrama de Bode

Exemplo: Esboce o diagrama de Bode para as funções de transferência abaixo

① $H(s) = \frac{20s(s+100)}{s^2+12s+20}$

② $H(s) = \frac{10(s+100)}{s^2+2s+100}$

Diagrama de Bode

Pico e Frequência de Ressonância

- Podemos observar que temos um deslocamento nas frequências. Esse deslocamento se dá devido ao processo de ressonância.
- A avaliação do deslocamento das frequências é regido por:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- A magnitude na frequência de ressonância (ω_r) é definida por:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Para $\zeta \rightarrow 0,707$, temos $M_r \rightarrow 1$
- Para $\zeta \rightarrow 0$, temos $M_r \rightarrow +\infty$
- A fase na frequência de ressonância (ω_r) é definida por:

$$\phi_r = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Periodicidade

- Supondo um sinal $x(t)$, o mesmo será periódico se:

$$x(t) = x(t - T_0)$$

- Para o menor valor de T temos o chamado **período fundamental**
- Além disso, vamos definir, para um sinal periódico $x(t)$, com período T_0 :

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt = \int_{T_0} x(t) dt$$

- Isto é: O cálculo da área sob a curva de um sinal periódico pode ser feito em qualquer ponto, desde que abranja um período.

Periodicidade

- Se um sinal possui T_0 como período fundamental, então possui como frequência fundamental f_0

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- Podemos definir uma frequência angular fundamental ω_0 como:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

Relações de Funções Periódicas

- Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T , então
 - ➊ $f(\alpha t)$, para $\alpha \neq 0$ é periódica e tem período $\frac{T}{\alpha}$
 - ➋ $f\left(\frac{t}{\beta}\right)$, para $\beta \neq 0$ é periódica e tem período βT
- Sejam dois sinais periódicos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com período T , então

$$h(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

- O sinal $h(t)$ será periódico com período T .

Relações de Funções Periódicas

- Sejam dois sinais periódicos $x_1(t)$ (com período T_1) e $x_2(t)$ (com período T_2), então

$$g(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

- O sinal $g(t)$ será periódico se a razão entre períodos for **uma razão de números inteiros** e o período fundamental será o **Mínimo Múltiplo Comum** dos períodos vezes o menor período.

Relações de Funções Periódicas

- Exemplo: Suponha o sinal

$g(t) = 10\cos(\frac{1}{3}t) + 5.34\sin(\frac{2}{7}t) + 1.27\cos(\frac{5}{2}t)$, então $g(t)$ é periódico? Se sim, qual o seu período?

- Solução: os períodos dos sinais que compõem $g(t)$ são:

$$T_1 = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi, T_2 = \frac{2\pi}{2/7} = 7\pi \text{ e } T_3 = \frac{2\pi}{5/2} = \frac{4\pi}{5}.$$

- O menor período é $T_3 = \frac{4\pi}{5}$, fazendo a razão entre o período T_3 e os outros é:

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{\frac{4\pi}{5}}{6\pi} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{\frac{4\pi}{5}}{7\pi} = \frac{4}{35}$$

- O M.M.C. entre os denominadores é 105, ou seja, o período fundamental é $T_g = 105 T_3 = 84\pi$

Série de Fourier

Série de Fourier

- Suponha um sinal $x(t)$ periódico e que este sinal possa ser decomposto em diversos senos e cossenos. Sendo assim, uma **proposta** para decompor esse sinal pode ser:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

- Podemos provar a **periodicidade** do sinal $x(t)$ através de:

$$\begin{aligned} x(t + T_0) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0(t + T_0)) + b_n \cdot \sin(n\omega_0(t + T_0)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t + 2\pi n) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t + 2\pi n) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

Série de Fourier - Calculo dos Coeficientes

- Para o calculo dos coeficientes da série vamos utilizar uma função auxiliar definida por:

$$I = \int_{T_0} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

- Através de identidades trigonométricas, temos simplificar a equação acima como:

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos((n+m)\omega_0 t) dt + \int_{T_0} \cos((n-m)\omega_0 t) dt \right]$$

- Essa integral é facilmente solucionada, pois para $m \neq n$, I é zero.
- Para $m = n$, $I = \frac{1}{2} T_0$

Relações Trigonométricas

- $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$
- $\cos(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)$
- $\sin(\theta - \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)$
- $\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)$
- $2\cos(\theta)\cos(\phi) = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)$
- $2\sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)$
- $2\cos(\theta)\sin(\phi) = \sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi)$

Série de Fourier - Calculo dos Coeficientes

- Para o calculo de a_0 , façamos a integral de $x(t)$

$$\int_{T_0} x(t) dt = a_0 \int_{T_0} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{T_0} \cos(n\omega_0 t) dt + b_n \int_{T_0} \sin(n\omega_0 t) dt$$

- Assim, obtemos:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

Série de Fourier - Calculo dos Coeficientes

- Para o calculo de a_m , façamos a integral de $x(t) \cdot \cos(m\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} \int_{T_0} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= a_0 \int_{T_0} \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

- Assim, obtemos:

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

Série de Fourier - Calculo dos Coeficientes

- Para o calculo de b_m , façamos a integral de $x(t) \cdot \operatorname{sen}(m\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} \int_{T_0} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= a_0 \int_{T_0} \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{T_0} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

- Assim, obtemos:

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt$$

Outras Formas da Série de Fourier

- Forma Compacta da Série de Fourier

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

- Onde:

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctg \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

Outras Formas da Série de Fourier

- Forma Exponencial da Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Onde:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Exemplos

- Calcule a Série de Fourier para os Sinais abaixo

Transformada de Fourier

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

Referências Bibliográficas I

- [1] B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*.
Oxford, UK: Oxford University Press, 2nd ed., 2009.
- [2] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals & Systems (2Nd Ed.)*.
Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [3] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*.
New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 3rd ed., 1998.
- [4] W. M. Siebert, *Circuits, Signals, and Systems*.
Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1986.