Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2016/1
Prova 2
Data: 01/07/2016
Total de Pontos: 110 Pontos - 100 das Questões + 10 Bônus

Questão 1 (25 pontos)

A Modulação em Frequências (FM) é uma técnica largamente utilizada para a transmissão de sinais. Teoricamente, a modulação consiste na variação da frequência da portadora (f_c) de acordo com a variação em amplitude do sinal $x(t)$ a ser transmitido, sendo esse comportamente regido pela equação abaixo, onde A_c é a amplitude da portadora e $y(t)$ é o sinal de saída efetivamente transmitido.

$$y(t) = A_c cos\left((2\pi f_c + x(t))t\right)$$

(a) (5 pontos) Suponha $A_c = 10$ e que a portadora opere a $\frac{1000}{2\pi}$ Hz. Reescreva a equação do sinal efetivamente transmitido, de maneira que obtenhamos apenas um argumento por função.

> **Solução:** Com as informações dadas, o sinal $y(t)$ se torna
>
> $$y(t) = 10cos(1000t + x(t)t)$$
>
> Utilizando a identidade trigonométrica $cos(\theta+\phi) = cos(\theta)cos(\phi) - sen(\theta)sen(\phi)$, podemos escrever o sinal $y(t)$ como sendo:
>
> $$y(t) = 10cos(1000t)cos(x(t)t) - 10sen(1000t)sen(x(t)t)$$

(b) (10 pontos) Prove a Transformada de Fourier de $x_1(t) = sen(\omega_0 t)$ e a Transformada de Fourier de $x_2(t) = cos(\omega_0 t)$

> **Solução:** Como a Transformada de Fourier do $\delta(t)$ é $\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 1$, pela propriedade da dualidade podemos encontrar $\mathcal{F}\left[1\right] = 2\pi\delta(\omega)$ e pela propriedade do deslocamento nas frequências podemos encontrar que $\mathcal{F}\left[e^{j\pm\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$ então:
>
> $$\mathcal{F}\left[sen(\omega_0 t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right] = j\pi\left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right]$$
>
> $$\mathcal{F}\left[cos(\omega_0 t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

(c) (10 pontos) Suponha $x(t) = 10$, encontre e esboce a Transformada de Fourier do sinal a ser transmitido.

Solução: Como o sinal é composto por duas parcelas, vamos analisar cada uma delas separadamente. O primeiro termo se torna:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[10cos(1000t)cos(x(t)t)\right] = 10\mathcal{F}\left[cos(1000t)\right] * \mathcal{F}\left[cos(x(t)t)\right] \\ &= 10\left[\pi\delta(\omega-1000)+\pi\delta(\omega+1000)\right] * \left[\pi\delta(\omega-10)+\pi\delta(\omega+10)\right] \\ &= 10\pi^2\delta(\omega-1010)+10\pi^2\delta(\omega-990)+ \\ &\quad 10\pi^2\delta(\omega+990)+10\pi^2\delta(\omega+1010)\end{aligned}$$

O segundo termo se torna:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[-10sen(1000t)sen(x(t)t)\right] = -10\mathcal{F}\left[sen(1000t)\right] * \mathcal{F}\left[sen(x(t)t)\right] \\ &= -10\left[j\pi\delta(\omega-1000)-j\pi\delta(\omega+1000)\right] * \\ &\quad \left[j\pi\delta(\omega-10)-j\pi\delta(\omega+10)\right] \\ &= 10\pi^2\delta(\omega-1010)-10\pi^2\delta(\omega-990)- \\ &\quad 10\pi^2\delta(\omega+990)+10\pi^2\delta(\omega+1010)\end{aligned}$$

Somando os termos temos:

$$\mathcal{F}\left[10cos(1000t)cos(10t)-10sen(1000t)sen(10t)\right] = 10\pi^2\delta(\omega+1010)+10\pi^2\delta(\omega-1010)$$

Questão 2 (25 pontos)

As frequências audíveis, normalmente, por seres humanos vão de 20 Hz a 20k Hz. Um paciente foi diagnosticado com um problema auditivo passivo de tratamento. Durante um exame de audiometria, foi levantada a resposta em frequências do sistema auditivo do paciente (expresso na figura abaixo).

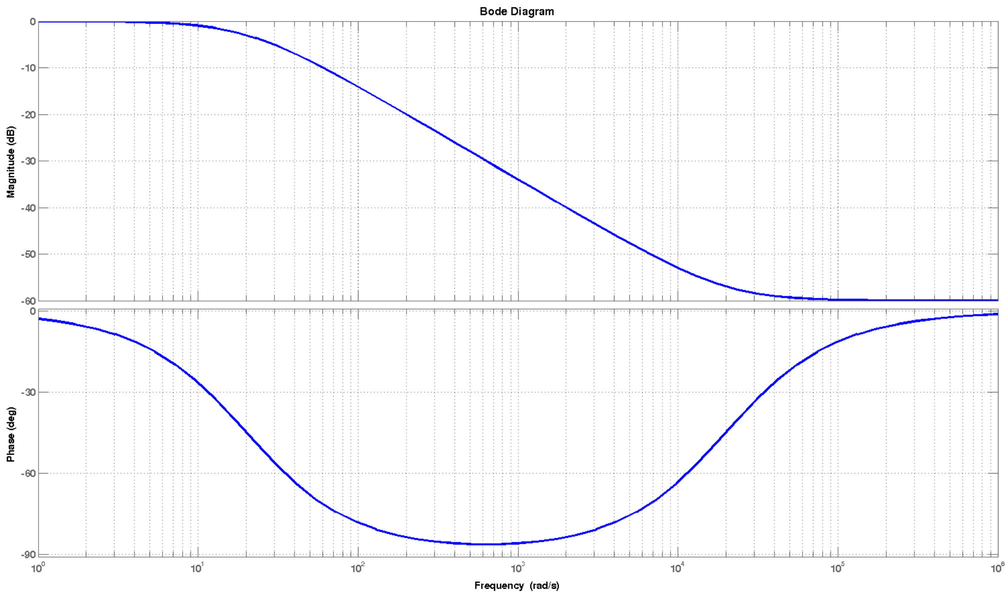
(a) (5 pontos) Tendo em visto o gráfico expresso na figura, descreva o problema do paciente?

Solução: O paciente em questão possui uma atenuação muito grande para altas frequências, ou seja, não escuta sinais provenientes de frequências altas

(b) (10 pontos) Encontre a função de transferência do sistema auditivo do paciente

Solução: Por inspeção pode determinar a função de transferência do sistema auditivo.

$$\frac{0.001(s+20000)}{s+20}$$



(c) (10 pontos) Encontre uma função de transferência que possa ser embarcada em um dispositivo, que será perfeitamente acoplado em série com o sistema auditivo do paciente e usada para a resposta em frequência uniforme para todas as frequências e útil para o paciente

Solução: Para que o paciente possua todas as frequências espaçadas de maneira uniforme, a função de transferência deve ser:

$$\frac{1000(s+20)}{(s+20000)}$$

Questão 3 (25 pontos)

(a) (10 pontos) Suponha que o sinal expresso pela equação abaixo se repita com período de 2π segundos. Faça a decomposição do sinal na **Série de Fourier Trigonométrica**.

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < \pi \\ \pi & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Solução: Para decompor o sinal $x(t)$ (que possui período de 2π segundos e frequência angular de 1 rad/s na série trigonométrica de fourier temos a seguinte formulação

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\partial t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\partial t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\partial t = a_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)cos(n\omega t)\partial t = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi cos(n\omega t)\partial t + \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} tcos(n\omega t)\partial t$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, para n par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{, para n ímpar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)sen(n\omega t)\partial t = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi sen(n\omega t)\partial t + \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} tsen(n\omega t)\partial t$$

$$b_n = \frac{-1}{n}$$

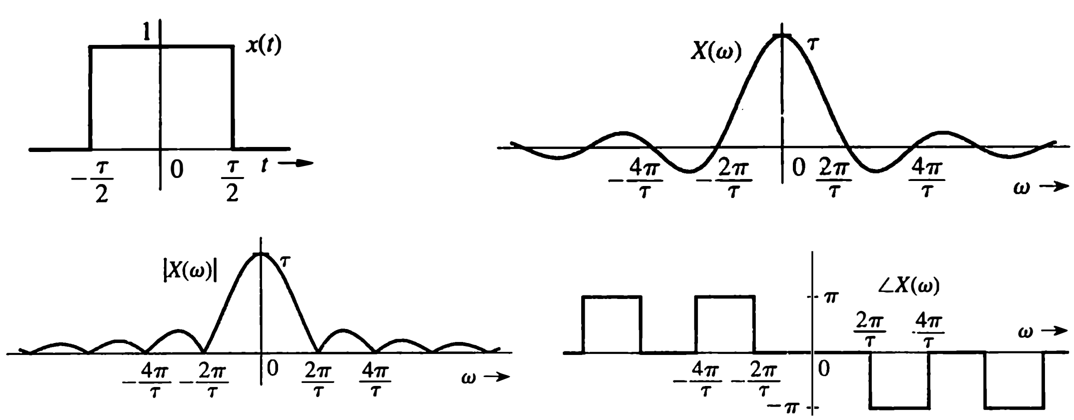
(b) (5 pontos) Suponha que o sinal $x(t)$ do item anterior foi aplicado a um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte $\omega_c = 5.5$ rad/s (o filtro passa-baixas ideal rejeita todas as frequências maiores do que a sua frequência de corte e não altera outros sinais). Qual será a equação do sinal de saída $y(t)$?

Solução: Como o filtro é um passa-baixas ideal, as frequências menores do que ω_c não serão atenuadas. Ou seja, até $n = 5$, o sinal não será alterado e após $n = 5$ o sinal será totalmente atenuado. Ou seja,

$$y(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{5} \frac{-1}{n} sen(nt) + \frac{-1}{2\pi}cos(2t) + \frac{-1}{8\pi}cos(4t)$$

(c) (10 pontos) Encontre e esboce a transformada de Fourier $X(j\omega)$ de $x(t) = rect(t/\pi)$

Solução: Pelo esboço apresentado nos slides, temos que a resposta será:



Substituindo $\tau = \pi$

Questão 4 (25 pontos)

(a) (5 pontos) Encontre a transformada de Fourier de $x(t) = e^{-|t|}$

Solução: Podemos decompor o sinal $x(t)$ da seguinte maneira:

$$x(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

Pela propriedade da escala no tempo com $\alpha = -1$ ($x(-t) \to X(-\omega)$) temos: $\mathcal{F}\left[e^{t}u(-t)\right] = \frac{1}{a - j\omega}$.
Então vemos que a transformada de $e^{-|t|}$ se torna:

$$\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right] = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

(b) (10 pontos) Utilize a propriedade da diferenciação na frequência para encontrar a transformada de Fourier de $x(t) = te^{-|t|}$

Solução: Pela propriedade da diferenciação na frequência

$$\mathcal{F}\left[te^{-|t|}\right] = j\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{2}{1+\omega^2}\right] = -\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

(c) (10 pontos) Utilize a propriedade da dualidade para encontrar a transformada de Fourier de $x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$

Solução: Como:

$$te^{-|t|} \to -\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

Então pela propriedade da dualidade (se $x(t) \to X(\omega)$ então $X(t) \to 2\pi x(-\omega)$), temos:

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \to 2\pi j\omega e^{-|t|}$$

Questão Bonus 5 (10 pontos)

Qual nome do conjunto de condições para a convergência da Série de Fourier e cite cada uma delas

Solução: As condições para a convergência da Série de Fourier são as chamadas **Condições de Dirichlet**

1. o Sinal a ser decomposto deve ser absolutamente integrável em um período
2. o Sinal deve possuir um número finito de descontinuídades em um período
3. o Sinal deve possuir um número finito máximos e mínimos em um período