Curso de Sistemas Lineares I

Natanael Junior [1, 2]
natmourajr@lps.ufrj.br, natmourajr.github.io

[1]Univeridade Federal do Rio de Janeiro

[2]Laboratório de Processamento de Sinais

26/04/2016

Estrutura do Curso

Objetivo do Curso

Disponibilizar e avaliar o conhecimento de uma turma do 3º período do curso de **Engenheria Eletrônica e de Computação** da Universidade Federal do Rio de Janeiro nos seguintes tópicos: *Modelagem, analogias e análise de sistemas físicos. Resposta a entrada zero, resposta ao estado zero e convolução. Resposta a uma entrada exponencial. Transformação de Fourier. Transformação de Laplace. Função de transferência, pólos e zeros. Resposta impulsional, resposta ao degrau, resposta senoidal. Sistemas de 1ª e 2ª ordens e de ordem superior, sistemas de fase não mínima: Resposta em freqüência e Diagramas de Bode.*

Bibliográfia Adotada

1. Linear Systems and Signals, 2nd Edition, B. P. Lathi [1]
2. Signals and systems, 2nd Edition, Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab [2]
3. Linear System Theory and Design, 3rd Edition, Chi-Tsong Chen [3]
4. Circuits, Signals and Systems, William Siebert [4]

Regras Gerais

- 2 Provas Escritas - P_1 (13/05) e P_2 (01/07)
- Média das Provas (MP): $\frac{P_1+P_2}{2}$
- 5 Listas de Exercícios - L_0, L_1, L_2, L_3, L_4
- 2^a Chamada (08/07) - **Substitutiva**
- Média das Listas (ML): $\frac{L_0+L_1+L_2+L_3+L_4}{5}$
- Média Inicial (MI): $MP + 0.1 \cdot ML$
- $MI \leq 3.0$ - Reprovado
- $MI \geq 8.0$ - Aprovado
- $3.0 < MI < 8.0$ - Trabalho Final
- Trabalho Final: Trabalho Escrito (T_e) e Trabalho Apresentado (T_a) - 05/07 a 12/07
- Rodadas de Apresentação: 15/07 - 22/07
- Média Final (MF): $\frac{2 \cdot T_e + 2 \cdot T_a + MI}{5}$
- $MF \geq 5.0$ - Aprovado
- $MF < 5.0$ - Reprovado

Resultados Anteriores

- 2015/01
  - Número de Inscritos: 43
  - Média da P_1: 3.9
  - Média da P_2: 3.1
  - Média da $P_{2^a Cham.}$: 1.4
  - Total de Reprovados: 18
- 2015/02
  - Número de Inscritos: 33
  - Média da P_1: 3.4
  - Média da P_2: 3.3
  - Média da $P_{2^a Cham.}$: 3.4
  - Total de Reprovados: 15

Lista 0

Em uma folha de papel A4, resolva os seguintes exercícios:

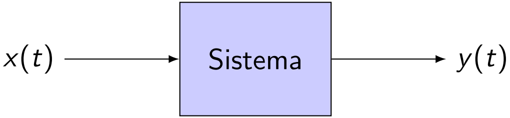
1. Para a EDO descrita por $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ com $a, b, c \in \Re$, $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac = 0$, mostre que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução.
2. Encontre a solução da EDO abaixo
$$\frac{\partial y}{\partial x} - 2xy = x$$
3. Utilizando o **VI** (Valor Inicial) $y(1/3) = e/3$, encontre a solução da EDO abaixo
$$\frac{\partial y}{\partial t} = e^{3t}$$
4. Dada a EDO abaixo, encontre a sua solução pelo **método do fator integrante**.
$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{2}{t}y(t) = t$$

Classificação de Sinais

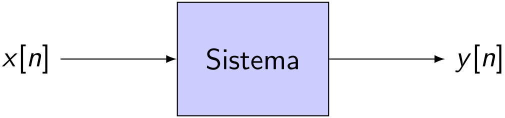
- O que é um **Sinal**?
  - Por Definição: Um função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informação sobre a natureza de um fenômeno físico
- Sinal dependente de uma variável $\rightarrow$ **Sinal Unidimensional**
  - Ex: $x(t)$, geralmente t representa a variável tempo contínuo
  - Ex: $y[n]$, geralmente n representa a variável tempo discreto
- Sinal dependente de duas ou mais variáveis $\rightarrow$ **Sinal Multidimensional**
  - Ex: $\Theta(t, x, y)$: temperatura em uma sala
  - Ex $V[\alpha, n]$: Valor de um ativo α da bolsa de valores na amostra n

Classificação de Sinais

- No curso de Sistemas Lineares I, sinais serão inseridos em **sistemas**.
- O que é um **Sistema**?
  - Um sistema é uma entidade que manipula um mais sinais para realizar uma função, produzindo como resposta novos sinais



- Para o sistema acima a entrada é $x(t)$ e a saída é $y(t)$



- Para o sistema acima a entrada é $x[n]$ e a saída é $y[n]$

Sinais no Tempo Contínuo e Sinais no Tempo Discreto

- $x(t)$ é dito de **tempo contínuo** se definido para todo tempo **t**

Sinais no Tempo Contínuo e Sinais no Tempo Discreto

- Um sinal de tempo discreto é frequentemente derivado de um sinal de tempo contínuo, amostrando-se o sinal a uma taxa uniforme. Definindo-se T como o período de amostragem e n como sendo um **número inteiro**, tem-se para $t = nT$, $x(t) = x(nT)$
- Por conveniência, utilizamos $x[n] = x(nT)$ para $n \in \mathbb{Z}$

Classificação de Sinais

Como um sinal é uma entidade que se desenvolve ao longo de uma variável (que seja tempo ou qualquer outra) temos que o seu comprimento pode ser determinado em função da variável independente.

- Comprimento de um Sinal Contínuo - Intervalos de tempo contínuo
- Comprimento de um Sinal Discreto - quantidade de amostras no tempo discreto

Sinais Analógicos e Sinais Digitais

- Sinais Analógicos são definidos como sinais que podem assumir quaisquer valores em sua **faixa dinâmica**

Classificação de Sinais

Sinais Analógicos e Sinais Digitais

- Sinais Digitais são definidos como sinais que só podem assumir determinados valores em sua **faixa dinâmica**

Classificação de Sinais

Uma confusão natural (e muito frequente) é

- Sinal Analógico $\rightarrow$ Sinal em tempo contínuo
- Sinal Digital $\rightarrow$ Sinal em tempo discreto

Classificação de Sinais

Sinais Pares e Sinais Ímpares

- Um sinal $x(t)$ é chamado par se $x(t) = x(-t)$
- Par $\rightarrow$ Simetria em relação ao eixo das ordenadas

Classificação de Sinais

Sinais Pares e Sinais Ímpares

- Um sinal $x(t)$ é chamado ímpar se $x(t) = -x(-t)$
- Ímpar $\rightarrow$ assimetria em relação ao eixo das ordenadas

Sinais Pares e Sinais Ímpares - Propriedades

- Sinal par x Sinal ímpar = Sinal ímpar
- Sinal par x Sinal par = Sinal par
- Sinal ímpar x Sinal ímpar = Sinal par

Suponha um sinal $x_p(t)$ par e um sinal $x_i(t)$ ímpar. Sendo assim, temos:

$$\int_{-a}^{a} x_p(t)\partial t = 2\int_{0}^{a} x_p(t)\partial t \quad (1)$$

$$\int_{-a}^{a} x_i(t)\partial t = 0 \quad (2)$$

Sinais Periódicos e Sinais Não-Periódicos

- Sinais Periódicos são os sinais que atendem a equação de periodicidade (equação 3) para todos os valores possíveis de T

$$x(t) = x(t + T) \tag{3}$$

- Definições secundárias:
  - Período fundamental do sinal $x(t) = T$ segundos
  - Frequência fundamental do sinal $x(t) = f$ Hz (onde $f = \frac{1}{T}$)
  - Frequência angular fundamental do sinal $x(t) = \omega$ rad/s (onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$)
- Todo o sinal que não atende a equação 3, são chamados de Sinais Não-Periódicos ou Sinais Aperiódicos

Sinais Causais, Sinais Não-Causais e Sinais Anti-Causais

- Sinais Causais são os sinais definidos apenas para $t \geq 0$
- Sinais Não-Causais são os sinais definidos para $t \geq 0$ e $t < 0$
- Sinais Anti-Causais são os sinais definidos apenas para $t < 0$

Classificação de Sinais

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- Um sinal é caracterizado como **sinal de energia** se satisfizer a condição abaixo:

$$0 < E_{x(t)} < \infty \tag{4}$$

- Um sinal é caracterizado como **sinal de potência** se satisfizer a condição abaixo:

$$0 < P_{x(t)} < \infty \tag{5}$$

- Condições mutuamente excludentes

Classificação de Sinais

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- As unidades de Energia e de Potência dependem diretamente da unidade do sinal a ser medido.

Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

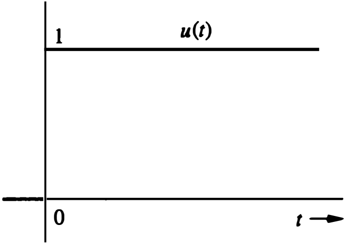
- São chamados de Sinais Determinísticos, os sinais aos quais não existe incerteza com respeito ao seu valor em qualquer instante de tempo
- São sinais aos quais podemos encontrar um modelo que modele **perfeitamente** o sinal
- Ex: $x(t) = sen(\pi \cdot t)$

Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

- São chamados de Sinais Aleatórios, os sinais aos quais existe alguma incerteza com respeito ao seu valor em qualquer instante de tempo
- São sinais aos quais não podemos encontrar um modelo que modele **perfeitamente** o sinal
- Ex: $x(t) = sen(\pi \cdot t)$+ruído

Modelos básicos de Sinais: Sinal Degrau unitário ($u(t)$)

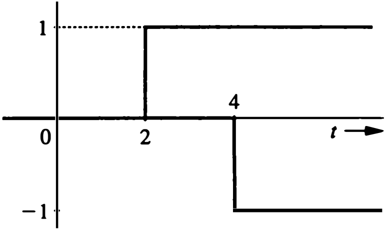
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

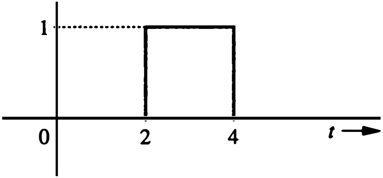


- Esse sinal também é chamado de **sinal causualizador**

Modelos básicos de Sinais: Sinal Degrau unitário ($u(t)$) - Composição de sinais

- Podemos unir dois degraus unitários para compor um sinal totalmente diferente, por exemplo $x(t) = u(t-2) - u(t-4)$

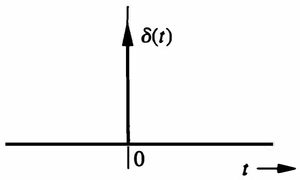




Modelos básicos de Sinais: Sinal Impulso unitário ($\delta(t)$)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

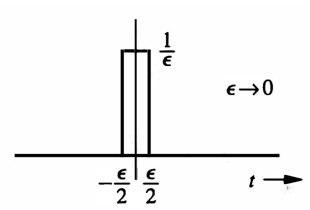
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\partial t = 1 \tag{8}$$

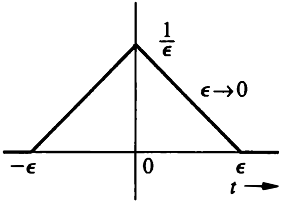


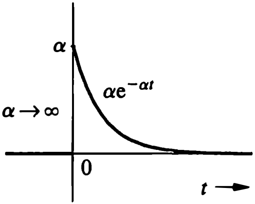
- Esse é o impulso ideal, idealizado por **Paul Adrien Maurice Dirac**. Na prática, esse impulso é impossivel de ser concebido.

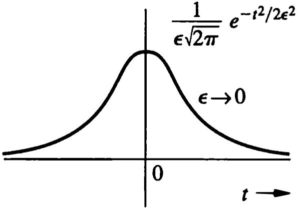
Classificação de Sinais

Modelos básicos de Sinais: Sinal Impulso unitário ($\delta(t)$) - Aproximações









Modelos básicos de Sinais: Sinal Exponencial (e^{st})

$$s = \sigma + j\omega \tag{9}$$

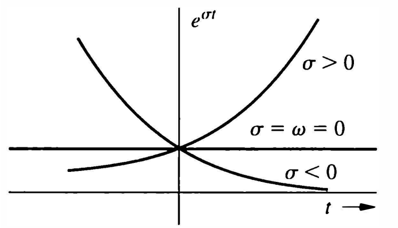
$$e^{st} = e^{\sigma t + j\omega t} \tag{10}$$

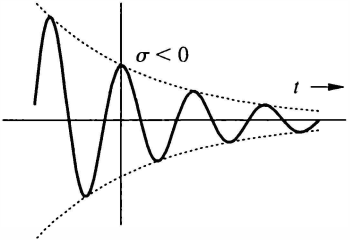
$$e^{st} = e^{\sigma t}(cos(\omega t) + jsen(\omega t)) \tag{11}$$

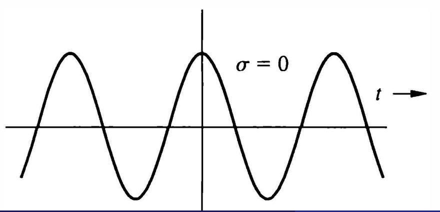
Representações mais utilizadas

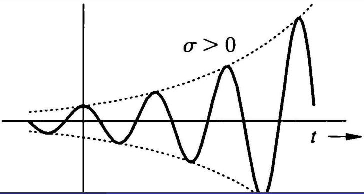
1. Valor Constante (k) $\rightarrow ke^0$ (s $= 0$)
2. Exponencial ($e^{\sigma t}$) $\rightarrow (\omega = 0)$
3. Senóide ($e^{j\omega t}$) $\rightarrow (\sigma = 0)$
4. Senóide Descrescente $\rightarrow (\sigma < 0)$
5. Senóide Crescente $\rightarrow (\sigma > 0)$

Modelos básicos de Sinais: Sinal Exponencial (e^{st}) - Análise









- Energia Total de um sinal contínuo

$$E_{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) \partial t \tag{12}$$

- Energia Total de um sinal discreto

$$E_{x[n]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \tag{13}$$

- Potência Média de um sinal contínuo

$$P_{x(t)} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t) \partial t \tag{14}$$

- Potência Média de um sinal contínuo **periódico**

$$P_{x(t)} = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t) \partial t \tag{15}$$

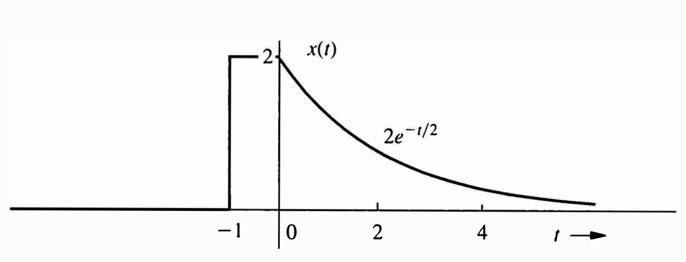
- Potência Média de um sinal discreto

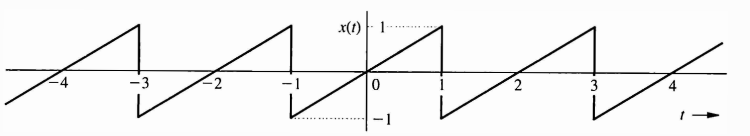
$$P_{x(t)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] \tag{16}$$

- Potência Média de um sinal discreto **periódico**

$$P_{x(t)} = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] \tag{17}$$

Calcule a Energia e a Potência Média dos Sinais abaixo





Solução:

- Para o primeiro sinal, podemos ver que para $t \rightarrow \infty$, a amplitude $\rightarrow 0$, ou seja, podemos calcular a energia da seguinte forma:

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\partial t = \int_{-1}^{0} 2^2 \partial t + \int_{0}^{+\infty} 4e^{-t}\partial t = 4 + 4 = 8u.a.e.$$

- Para o segundo sinal, vemos que a amplitude não tende a zero, ou seja, a energia não converge para um valor. Mas a potência média pode ser calculada através de

$$P_{x(t)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^2(t)\partial t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^2 \partial t = \frac{1}{3}u.a.p.$$

Supondo dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$

Adição de Sinais

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{18}$$

Multiplicação de Sinais

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \tag{19}$$

Mudança de Escala de Sinais

$$y(t) = \alpha \cdot x_1(t) \tag{20}$$

Operações Básicas com Sinais

Supondo um sinal $x(t)$

Diferenciação de Sinais

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \tag{21}$$

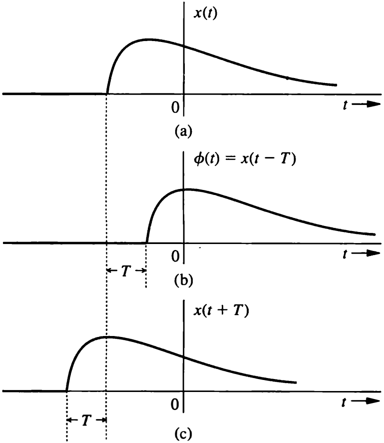
Integração de Sinais

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\partial t \tag{22}$$

Deslocamento no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

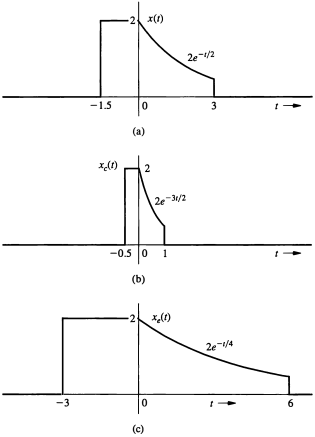
- O descolamento é expresso por: $x(t \pm T)$
- Na figura **b**, temos o sinal atrasado ($T < 0$)
- Na figura **c**, temos o sinal adiantado ($T > 0$)



Compactação/Expansão no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

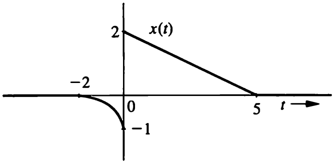
- Para $0 < \alpha < +\infty$
- A compactação é dada por $x(\alpha \cdot t)$, se $\alpha > 1$ (figura **b**)
- A expansão é dada por $x(\alpha \cdot t)$, se $\alpha < 1$ (figura **c**)



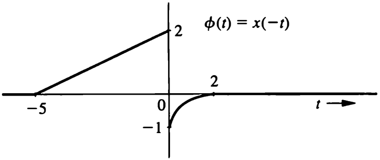
Inversão no Tempo

Considere um sinal $x(t)$ (expresso na figura ao lado)

- A inversão pode ser vista como uma complementação do processo de compactação ou expansão no tempo.
- Com $\alpha = -1$, temos a figura expressa ao lado (figura **b**)



(a)



(b)

Combinação entre duas ou mais operações básicas

- A combinação entre operações deve ser feito com bastante cuidado. Pois o domínio e a imagem da operação deve ser observado.
- Por exemplo: $x(at-b)$, este sinal pode ser obtido de duas maneiras diferentes:
  1. Podemos atrasar o sinal em b e depois compactar o sinal atrasado por a (uma vez que a compactação afeta somente a variável tempo)

$$x(t) \rightarrow x(t-b) \rightarrow x(at-b)$$

  2. Podemos compactar o sinal de a e depois atrasar o sinal compactado por $\frac{b}{a}$ (uma vez que o atraso afeta o argumento do sinal na sua totalidade)

$$x(t) \rightarrow x(at) \rightarrow x\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)$$

Multiplicação por um Impulso Unitário

- Na equação 7 temos a definição do impulso unitário **ideal**. Nesta equação, vemos que para $t = 0$ o impulso unitário assume o valor 1. Com isso, podemos inferir que se um sinal $f(t)$ for multiplicado por $\delta(t)$, teremos:

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

- Ou seja, uma função contínua $f(t)$ multiplicada por um impulso unitário gera um impulso com altura (ou **"força"**) de $f(0)$ (valor da função na posição do impulso)
- Caso o impulso esteja atrasado de T, temos o seguinte comportamento:

$$f(t)\delta(t - T) = f(T)\delta(t - T)$$

Propriedade da Amostragem por um Impulso Unitário

- Na equação 8 temos a definição da área de impulso unitário **ideal**. De posse da equação 8 somada com a multiplicação por um impulso unitário, podemos montar um processo de **amostragem**. Com isso, podemos inferir que se um sinal $f(t)$ for multiplicado por $\delta(t)$ e depois integrado para todo o tempo, teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\partial t = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\partial t = f(0)$$

- Caso o impulso esteja atrasado de T, temos o seguinte comportamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T)\partial t = f(T)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\partial t = f(T)$$

Decomposição de Sinais em partes pares e ímpares

- Todo Sinal pode ser expresso como uma soma de sinais pares e ímpares. Sendo que a sua forma final pode ser vista como:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}_{\text{parte ímpar}}$$

Desenhe o sinal e faça a operação pedida.

1. $x_1(t) = sen\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$, expandir o sinal por 2
2. $x_2(t) = e^{-at}u(t)$, inverter o sinal no tempo
3. $x_3(t) = \delta(t)$, $x_3'(t) = x_3(3t-5)$
4. $x_4(t) = cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, multiplicação por $\delta(t)$
5. $x_5(t) = sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, multiplicação por $\delta(t-1)$ e integração no tempo
6. $x_6(t) = e^{j\omega t}$, decomposição em sinais pares e ímpares

Sistemas Lineares e Sistemas Não-Lineares

- Para provar a **linearidade**, devemos provar duas características separadamente:
  1. Aditividade - É a propriedade de um sistema responder da **mesma maneira** na presença de uma ou mais entradas. Então, supondo que para a entrada $x_1(t)$, um sistema S_1 responda $y_1(t)$ e para uma entrada $x_2(t)$ o mesmo sistema responda $y_2(t)$, então a propriedade da aditividade diz que:

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \tag{23}$$

  2. Homogeneidade - É a propriedade de um sistema responde da **mesma maneira** para diferentes aplitudes de entrada. Então, supondo que para a entrada $x_1(t)$, um sistema S_1 responda $y_1(t)$, então a propriedade da homogeneidade diz que:

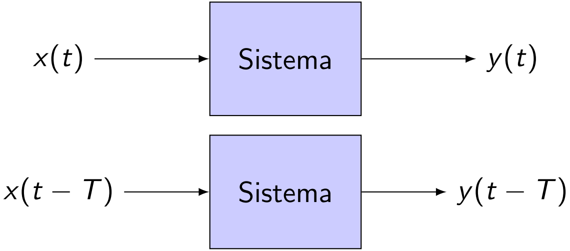
$$\alpha x_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t) \tag{24}$$

- Sistemas que não atendem uma das propriedades acima são chamados de **Sistemas Não-Lineares**

Classificação de Sistemas

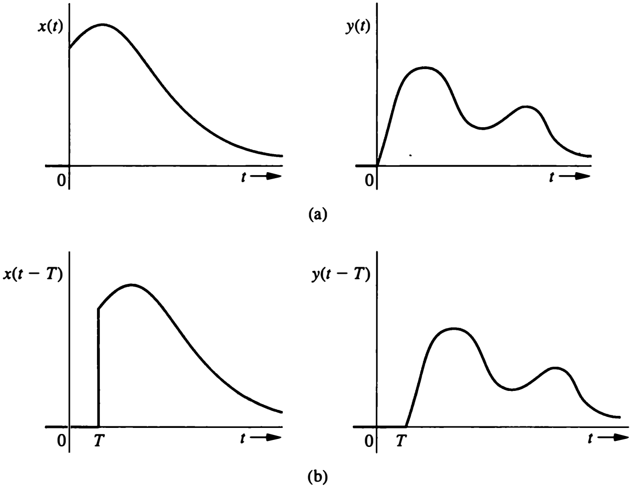
Sistemas Variantes no tempo e Sistemas Invariantes no tempo

- A **propriedade da invariância no tempo** representa a capacidade do sistema não se modificar durante um intervalo de tempo T.



- Caso $y(t) = y(t - T)$, dizemos que o sistema é Invariante no Tempo.

Sistemas Variantes no tempo e Sistemas Invariantes no tempo



Sistemas Instantâneos e Sistemas Dinâmicos

- Sistemas Instantâneos - Sistemas que dependem apenas do instante de tempo t para gerar a resposta $y(t)$. Também são chamados de **Sistemas sem Memória**, pois entradas anteriores ao tempo t são irrelevantes para a resposta $y(t)$.
- Sistemas Dinâmicos - Sistemas que dependem de instantes de tempo T anteriores a t para gerar a resposta $y(t)$ são chamados de **Sistemas Dinâmicos ou com memória**. Podemos ter sistemas com memória **finita** (sistemas digitais de processamento de sinais) ou memória **infinita** (sistemas analógicos de processamento de sinais).

Sistemas Causais e Sistemas não-Causais

- Sistemas Causais (ou Sistemas Físicos ou Sistemas Não-Antecipativos) são sistemas geram a resposta $y(t)$ somente **dependendo** de instantes de tempo anteriores a t.
- Sistemas não-Causais (ou Sistemas Antecipativos) são sistemas geram a resposta $y(t)$ com alguma **dependência** de instantes de tempo posteriores a t.
- Ex: $y(t) = x(t-2)$ é um sistema causal (a saída $y(t)$ depende apenas da entrada no instante no instante $t-2$)
- Ex: $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$ é um sistema não-causal (a saída $y(t)$ depende da entrada no instante no instante $t-2$ e no instante $t+2$, ou seja no futuro)
- Na prática, sistemas reais não podem ser não-causais, pois teríamos que fazer uma predição dos valores da entrada no **futuro**, o que geraria um erro de estimação inerente ao processo (tornando o projeto inviável.

Classificação de Sistemas

Sistemas de tempo contínuo e Sistemas de tempo discreto

- Sistemas em tempo contínuo são sistemas que operam em tempo contínuo
- Sistemas em tempo discreto são sistemas que operam em tempo discreto

Sistemas Analógicos e Sistemas Digitais

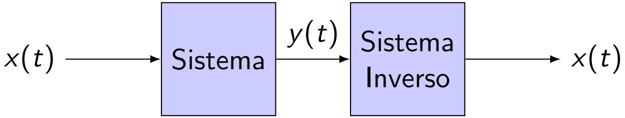
- Sistemas Analógicos são sistemas que operam em sinais analógicos
- Sistemas Digitais são sistemas que operam em sinais digitais

Sinais em tempo contínuo analógicos **podem** ser processados em sistemas digitais e de tempo discreto

Classificação de Sistemas

Sistemas Inversíveis e Sistemas Não-Inversíveis

- Se um sistema S processa um conjunto de operações que pode ser desfeito, este sistema é chamado **sistema inversível**. Ex: $y(t) = 2 \cdot x(t)$.
- O sistema que processa o conjunto inverso de operações é chamado de **sistema inverso** de S



- Se um sistema S processa um conjunto de operações que não pode ser desfeito (distorcendo o sinal **permanentemente**), este sistema é chamado de **sistema não-inversível**. Ex: $y(t) = |x(t)|$

Sistemas Estáveis e Sistemas Instáveis

- Sistemas Estáveis: Estabilidade Interna vs. Estabilidade Externa
  - Estabilidade Externa: Toda entrada limitada **gera** saída limitada, chamada de estabilidade **BIBO** (*bounded input - bounded output*)
  - Estabilidade Interna: Depende da estabilidade das variáveis internas do sistema (a serem analisadas mais profundamente posteriormente)
- Caso o sistema não apresente uma das estabilidades acima, o mesmo será considerado instável no sentido da estabilidade rompida.

Responda a afirmativa, justificando (onde $y(t)$ é a saída e $x(t)$ é a entrada):

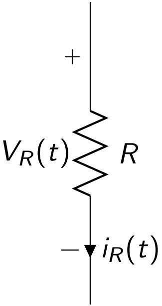
1. $y(t) = x^2(t)$, é linear?
2. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\partial t$, é instantâneo?
3. $y(t) = \frac{1}{3}(x(t) + x(t-1) + x(t-2))$, é linear?
4. $y(t) = x(t) + n(t)$,onde $n(t)$ é ruído, é inversível?
5. $y(t) = \int_{t}^{+\infty} x(t)\partial t$, é causal?
6. $y(t) = \alpha^t x(t)$, onde $\alpha \leq 1$, é instável?

Leis de Kirchhoff

- Foram desenvolvidas pelo físico alemão **Gustav Robert Kirchhoff**
  1. LKC - *Lei de Kirchhoff das Correntes* ou *Lei dos Nós*: Em um nó, a soma das correntes elétricas que entram é igual à soma das correntes que saem, ou seja, um nó não acumula carga.
  2. LKT - *Lei de Kirchhoff das Tensões* ou *Lei das Malhas*: A soma algébrica das tensões em um percurso fechado é nula.

Equações Características de Componentes Elétricos

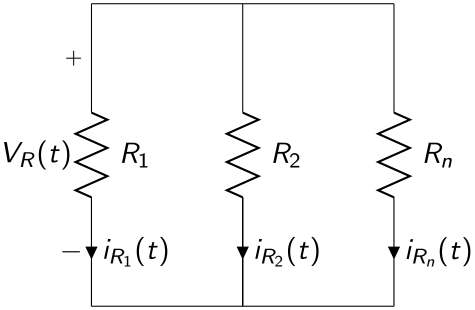
- Resistor (R)
- Unidade: Ohm (Ω)
- Lei de Ohm



$$V_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad (25)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

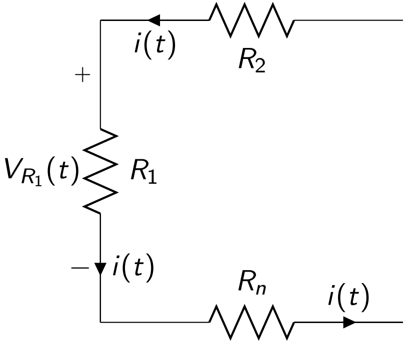
- Associação de Resistores



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{26}$$

Equações Características de Componentes Elétricos

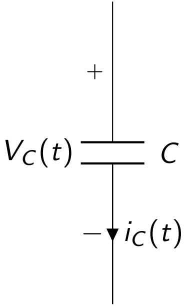
- Associação de Resistores



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \qquad (27)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Capacitor (C)
- Unidade: Faraday (F)



Quantidade de Carga:

$$q(t) = C \cdot V_C(t) \tag{28}$$

Corrente em um Capacitor

$$i_C(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t} = C\frac{\partial V_C(t)}{\partial t} \tag{29}$$

Tensão em um Capacitor

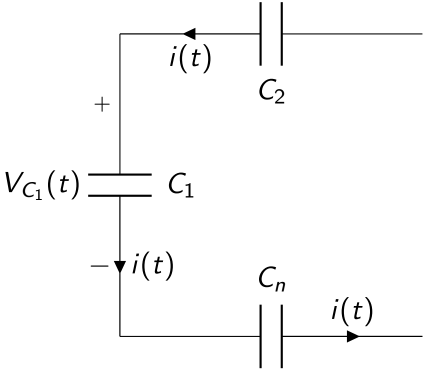
$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\partial t \tag{30}$$

Energia armazenada

$$E_C(t) = \frac{C \cdot V^2(t)}{2} \tag{31}$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Associação de Capacitores

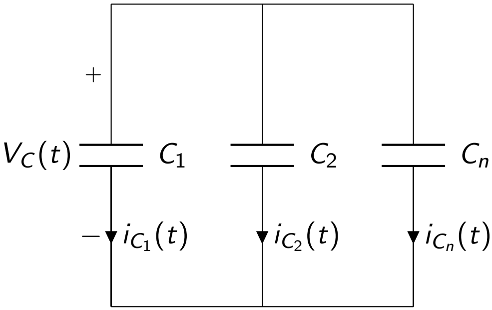


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (32)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

Equações Características de Componentes Elétricos

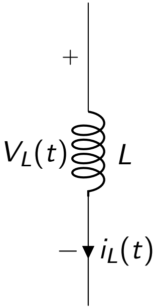
- Associação de Capacitores



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{33}$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Indutor (L)
- Unidade: Henry (H)



Quantidade de Carga:

$$\phi(t) = L \cdot i_L(t) \tag{34}$$

Tensão em um Indutor

$$V_L(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = L \frac{\partial i_L(t)}{\partial t} \tag{35}$$

Tensão em um Capacitor

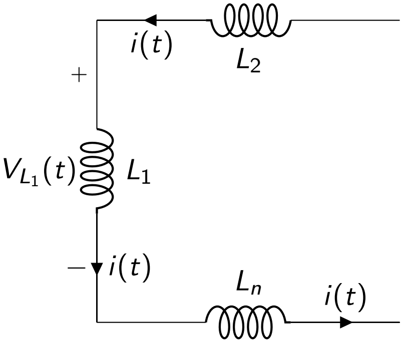
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} V_L(t) \partial t \tag{36}$$

Energia armazenada

$$E_L(t) = \frac{L \cdot i_L^2(t)}{2} \tag{37}$$

Equações Características de Componentes Elétricos

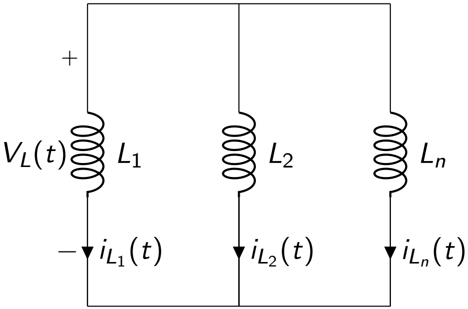
- Associação de Indutores



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \qquad (38)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

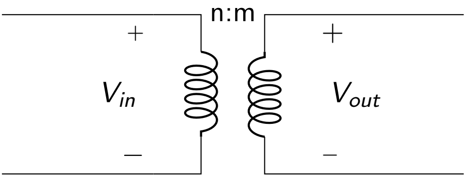
- Associação de Indutores



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \qquad (39)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

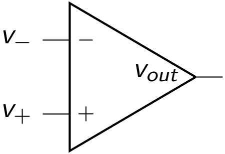
- Transformador Ideal



$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{n}{m} = \frac{i_{out}}{i_{in}} \qquad (40)$$

Equações Características de Componentes Elétricos

- Amplificador Operacional



$$v_{out} = A_v(v_+ - v_-) \qquad (41)$$

Para análise:

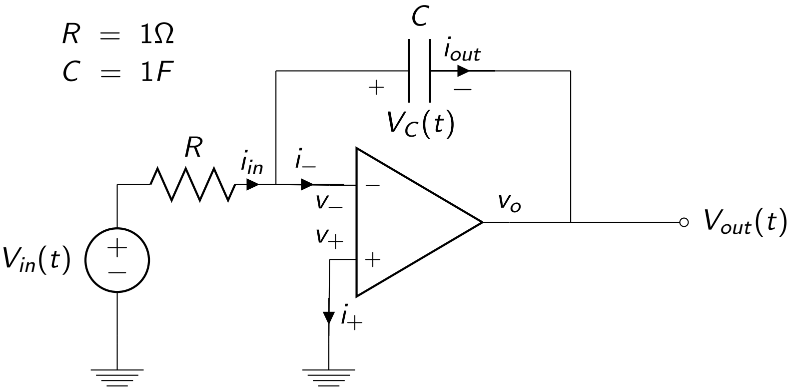
$$v_+ = v_-$$

$$A_v \rightarrow +\infty$$

Modelagem de Circuitos

Modele o circuito abaixo

$$R = 1\Omega$$
$$C = 1F$$



- Para a análise, vamos considerar **SLIT Diferenciais**.
- Supondo $x(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída.
- Assim sendo, podemos descrever a relação entrada e saída como:

$$\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^N} + a_1 \frac{\partial^{N-1} y(t)}{\partial t^{N-1}} + \cdots a_{N-1} \frac{\partial y(t)}{\partial t} + a_N y(t) =$$
$$b_{N-M} \frac{\partial^M x(t)}{\partial t^M} + b_{N-M+1} \frac{\partial^{M-1} x(t)}{\partial t^{M-1}} + \cdots b_{N-1} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + b_N x(t)$$

Operador Linear Diferencial

- Vamos definir o Operador Linear Diferencial D
- $D = \frac{\partial}{\partial t}$
- $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- $D^N = \frac{\partial^N}{\partial t^N}$
- $Dx(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$

- Com essa definição, podemos reescrever a equação

$$\left(D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N\right) y(t) =$$
$$\left(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} \cdots b_{N-1} D + b_N\right) x(t)$$

- Fazendo:

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N \tag{42}$$
$$P(D) = b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} \cdots b_{N-1} D + b_N \tag{43}$$

- temos:

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t) \tag{44}$$

- Teoricamente, N e M podem assumir quaisquer valores.
- Embora, por considerações práticas, $M > N$ não é desejável.
- Com $M > N$ temos uma maior possibilidade de instabilidade
- Com $M > N$ temos uma tendência a amplificação de ruído.

- Como o Sistema é Linear, podemos decompor a saída total do sistema em duas partes distintas

$$y(t) = y_{\text{Entrada Zero}}(t) + y_{\text{Estado Zero}}(t) \tag{45}$$

- $y_{\text{Entrada Zero}}(t)$ é o componente da resposta que não depende da entrada do sistema. Geralmente, pode ser obtida na saída do sistema com $x(t) = 0$. Majoritariamente regida pelas condições iniciais do sistema.
- $y_{\text{Estado Zero}}(t)$ é o componente da resposta que não depende do estado do sistema. Geralmente, pode ser obtida na saída do sistema com a entrada sendo aplicada e o sistema totalmente relaxado.

Resposta à Entrada Zero

- Na equação 44, podemos ver a resposta à Entrada Zero como:

$$Q(D)y(t) = 0 \tag{46}$$

- Ou seja, a equação 44 se torna:

$$\left(D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N\right) y(t) = 0 \tag{47}$$

- Assim devemos ter um comportamento bastante peculiar, onde a composição linear de $y(t)$ e suas derivadas deve ser zero.

Resposta à Entrada Zero

- Algumas funções se encaixam no comportamento descrito.
- Uma proposta: $y(t) = ce^{\lambda t}$
- $\frac{\partial y(t)}{\partial t} = c\lambda e^{\lambda t}$
- $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$
- $\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^N} = c\lambda^N e^{\lambda t}$

Resposta à Entrada Zero

- Então

$$Q(D)y(t) = \left(D^N + a_1 D^{N-1} \cdots a_{N-1} D + a_N\right) y(t) = 0$$

- se torna:

$$c\left(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} \cdots a_{N-1}\lambda + a_N\right) e^{\lambda t} = 0 \qquad (48)$$

- Como $e^{\lambda t}$ não assume o valor zero, então:

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} \cdots a_{N-1}\lambda + a_N = 0 \qquad (49)$$

- Podendo ser reescrito como:

$$Q(\lambda) = 0 \qquad (50)$$

Resposta à Entrada Zero - Raízes Distintas

- Se pudermos reescrever a equação 49, como:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_N) = 0 \tag{51}$$

- É possível ver que a equação acima, possui N soluções, a saber: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$
- Cada uma das soluções, gera uma resposta $y_{\text{Entrada Zero}}(t)$, ou seja:

$$y_{\text{Entrada Zero}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t} \tag{52}$$

- Onde $c_1, c_2, \cdots, c_N$ são constantes arbitrárias que serão definidas baseadas nas **condições iniciais do sistema**

Resposta à Entrada Zero - Raízes Repetidas

- Para o caso de raízes repetidas, o efeito sobre a resposta se torna um pouco diferente.
- Supondo uma raíz que se repete r vezes, então temos:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r = 0 \tag{53}$$

- Para $r = 2$, podemos ver que a solução se torna:

$$y(t) = c_{1_1} e^{\lambda_1 t} + c_{1_2} t e^{\lambda_1 t} \tag{54}$$

- Por generalização, para r não especificado:

$$y(t) = c_{1_1} e^{\lambda_1 t} + c_{1_2} t e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{1_r} t^{r-1} e^{\lambda_1 t} \tag{55}$$

Resposta à Entrada Zero - Raízes Imaginárias

- No caso de sistemas reais, raízes imaginárias podem ocorrer. Embora que esse fenômeno só possa ocorrer da seguinte maneira: **duas raízes imaginárias complexas conjugadas**.
- Por exemplo: se $\alpha + j\beta$ for raíz, então $\alpha - j\beta$ também será.
- Ou seja:

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} \tag{56}$$

- Para um sistema real, a resposta $y(t)$ deve ser real, e isso só é possível se:

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \qquad\qquad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

- Assim sendo:

$$y(t) = ce^{\alpha t} cos(\beta t + \theta) \tag{57}$$

Encontre a resposta à entrada zero dos sistemas abaixo

1. $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 5\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 6y(t) = x(t)$
2. $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t) = x(t)$
3. $\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 4\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = x(t)$

Resposta a Entrada Zero

Resposta ao Impulso Unitário - $h(t)$

Integral de Convolução

Convolução Gráfica

Resposta ao Estado Zero

Transformada de Laplace

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências Complexas

Resposta em Frequências de um Sistema Linear

Transformada de Fourier

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

Referências Bibliográficas I

[1] B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*.
Oxford, UK: Oxford University Press, 2nd ed., 2009.

[2] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals &Amp; Systems (2Nd Ed.)*.
Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.

[3] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*.
New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 3rd ed., 1998.

[4] W. M. Siebert, *Circuits,Signals,and Systems*.
Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1986.