1. Найти производную y'_x функции:

$$arctg\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left(arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2};$$

$$(\ln\sqrt{x^2+y^2})'=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2y\cdot y');$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2y\cdot y');$$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2};$$

$$y'x-y=x+y\cdot y';$$

$$y'(x-y)=x+y;$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y};$$

2. Найти производную y'_x функции:

$$\begin{cases} y=\dfrac{t^2}{t-1} \\ x=\dfrac{t}{t^2-1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y'_t=\dfrac{2t(t-1)-1\cdot t^2}{(t-1)^2} \\ x'_t=\dfrac{1\cdot(t^2-1)-2t\cdot t}{(t^2-1)^2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y'_t=\dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2} \\ x'_t=\dfrac{-1-t^2}{(t^2-1)^2} \end{cases};$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\div\frac{-1-t^2}{(t^2-1)^2}=\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\cdot\frac{(t^2-1)^2}{-1-t^2};$$

3. Найти производную с помощью логарифмирования:

$$y=(x^2+2)^5\cdot(3x-x^3)^3$$

$y' = f(x) \cdot (\ln f(x))';$

$\ln((x^2+2)^5 \cdot (3x-x^3)^3) = 5\ln(x^2+2) + 3\ln(3x-x^3);$

$y' = (x^2+2)^5 \cdot (3x-x^3)^3 \cdot \left(5 \cdot \frac{2x}{x^2+2} + 3 \cdot \frac{3-3x^2}{3x-x^3}\right);$

4. Найти производную с помощью логарифмирования:

$y = x^x$

$y' = f(x) \cdot (\ln f(x))';$

$y' = x^x \cdot (x \cdot \ln(x))' = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x)+1);$

5. Найти производную с помощью логарифмирования:

$y = \frac{(2-x^2)^3 \cdot (x-1)^2}{(2x^3-3x) \cdot e^x};$

$y' = f(x) \cdot (\ln f(x))';$

$\ln\left(\frac{(2-x^2)^3 \cdot (x-1)^2}{(2x^3-3x) \cdot e^x}\right) = 3\ln(2-x^2) + 2\ln(x-1) - \ln(2x^3-3x) - \ln e^x;$

$\ln e^x = x;$

$y' = \frac{(2-x^2)^3 \cdot (x-1)^2}{(2x^3-3x) \cdot e^x} \cdot \left(3 \cdot \frac{-2x}{2-x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{6x^2-3}{2x^3-3x} - 1\right);$

7. Найти длину x и ширину у прямоугольника при заданном периметре з=144см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

Площадь прямоугольника найдем по формуле:
$S = x \cdot y.$
Функцию площади мы должны максимизировать.
Периметр равен $P = 2(x+y) = 144.$
Выразим у через x из уравнения периметра.

$P = 2(x+y) = 144 \Rightarrow x+y = 72 \Rightarrow y = 72 - x.$
Тогда площадь будет равна:

$S = x \cdot y = x(72-x) = 72x - x^2.$

Найдем производную функции S:
$S' = (72x - x^2)' = 72 - 2x = 0.$
Отсюда x=36.

Это критическая точка. Проверим значения производной в окрестностях критической точки.

$$S'(35) = 72 - 2 \cdot 35 = 2 > 0;$$
$$S'(37) = 72 - 2 \cdot 37 = -2 < 0.$$

Точка x=36 является точкой максимума, потому что до 36 функция возрастает, а после 36 убывает.

Найдем y: при x=36, y=72-36=36.

Ответ: Наибольшая площадь будет у квадрата с длиной стороны, равной 36.