1. Найти производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных.

$$U = x^3 + 3xy^2 + z^2 - 39x - 36y + 2z + 26$$

$$U'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39;$$
$$U'_y = 6xy - 36;$$
$$U'_z = 2z + 2;$$
$$U''_{xx} = 6x; \quad U''_{xy} = 6y; \quad U''_{xz} = 0;$$
$$U''_{yy} = 6x; \quad U''_{yx} = 6y; \quad U''_{yz} = 0;$$
$$U''_{zz} = 2; \quad U''_{zx} = 0; \quad U''_{zy} = 0;$$
$$U''_{xy} = U''_{yx} = 6y.$$

2. Найти производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных.

$$U = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$$

$$U'_x = -\frac{256}{x^2} + \frac{2x}{y};$$
$$U'_y = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{z};$$
$$U'_z = -\frac{y^2}{z^2} + 2z;$$
$$U''_{xx} = \frac{2 \cdot 256}{x^3} + \frac{2}{y}; \quad U''_{xy} = -\frac{2x}{y^2}; \quad U''_{xz} = 0;$$
$$U''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} + \frac{2}{z}; \quad U''_{yx} = -\frac{2x}{y^2}; \quad U''_{yz} = -\frac{2y}{z^2};$$
$$U''_{xy} = U''_{yx} = -\frac{2x}{y^2};$$
$$U''_{zz} = \frac{2y^2}{z^3} + 2; \qquad U''_{zy} = -\frac{2y}{z^2}; \quad U''_{zx} = 0;$$
$$U''_{yz} = U''_{zy} = -\frac{2y}{z^2}.$$

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(9,8,-12)$ в точке M(8,-12,9).

Найдем длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{9^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{81+64+144} = \sqrt{289} = 17.$$

Запишем единичный вектор $\vec{c_o}$:

$$\vec{c_o} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right).$$

Найдем градиент в точке M(8,-12,9).

$$U'_x = 2x; \quad U'_y = 2y; \quad U'_z = 2z; \quad \mathrm{grad}U = (16,-24,18).$$

Найдем значение производной

$$U'_{\vec{c}} = \frac{9}{17}\cdot 16 + \frac{8}{17}\cdot(-24) - \frac{12}{17}\cdot 18 = \frac{144-192-216}{17} = \frac{264}{17}.$$

4. Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{c}(4,-13,-16)$ в точке L(-16,4,-13).

Найдем длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} = \sqrt{4^2+(-13)^2+(-16)^2} = \sqrt{16+169+256} = \sqrt{441} = 21.$$

Запишем единичный вектор $\vec{c}_o$:

$$\vec{c}_o = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right).$$

Найдем градиент в точке L(-16,4,-13).

$$U'_x = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}; \quad U'_y = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}; \quad U'_z = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2};$$

$$e^{x^2+y^2+z^2} = e^{441} = \exp(441) = 3.340923e+191;$$

$$\mathrm{grad}U = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441}).$$

Найдем значение производной

$$U'_{\vec{c}} = \frac{4}{21}\cdot\left(-32e^{441}\right) - \frac{13}{21}\cdot 8e^{441} - \frac{16}{21}\cdot\left(-26e^{441}\right) = \frac{-128e^{441} - 104e^{441} + 416e^{441}}{21} = \frac{184e^{441}}{21}.$$

6. Исследовать на экстремум функцию:

$$U = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} U'_x = 2xy + 4x, \\ U'_y = x^2 + y^2 + 6y. \end{cases}$$