1. Найти предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1}$

В данном примере максимальная степень в числителе и знаменателе равны, рассмотрим его более подробно, раскроем скобки. В итоге предел будет равен коэффициентам при наибольших степенях:

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-18n^6+3n^4-344n^2+6647}{4n^6+n-1}=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{(97-2n)^3}{2n(3n^2+15)+8n}$

Так как в данном примере, как и в а) максимальная степень в числителе и знаменателе равны, то сразу оставим только ту часть числителя и знаменателя, которая содержит старшую степень:

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{(97-2n)^3}{2n(3n^2+15)+8n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-8n^3}{6n^3}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3};$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{2n^3+13n(n+18)}{(27-2)(2n+19)^2}$

Максимальные степени в числителе и знаменателе равны. Решим пример кратко:

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{2n^3+13n(n+18)}{(27-n)(2n+19)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2n^3}{-4n^3}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}=(\sqrt{n^2+1}-n)$

$$\lim_{n\to\infty}=(\sqrt{n^2+1}-n)=(\infty-\infty)=(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)}{(\sqrt{n^2+1}+n)}=$$

$$=\frac{n^2+1-n^2}{(\sqrt{n^2+1}+n)}=\frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+n)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0;$$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{(-4)^n+5\cdot7^n}{(-4)^{n-1}+7^{n+2}}$

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{(-4)^n+5\cdot7^n}{(-4)^{n-1}+7^{n+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{7^n\left(\left(-\frac{4}{7}\right)^n+5\right)}{7^n\left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{7}\right)^n+49\right)}=\frac{5}{49}.$$

2. Представьте 1 в виде суммы трех рациональных дробей с разными знаменателями и числителем равным 1.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

3*. То же задание, только в виде суммы 6 дробей.

Если у нас 1 представлена в виде суммы k дробей с числителем 1, то для получения представления 1 в виде суммы k+2 дробей необходимо взять наименьшую дробь (в сумме из k) и представить ее в виде:

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{2d}+\frac{1}{3d}+\frac{1}{6d}. \quad (1)$$

1 в виде суммы 2 дробей:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

Разложим $\frac{1}{2}$ по формуле (1) $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ и получим разложение 1 на 4 дроби:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=\frac{12}{12}=1.$$

Теперь мы можем получить разложение 1 на 6 дробей. Разложим наименьшую дробь по формуле (1):

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}.$$

Представим 1 в виде суммы 6 дробей:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=\frac{36+18+12+3+2+1}{72}=\frac{72}{72}=1.$$

4. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость прогрессии.

Так как $|\sin x|\leq 1$, то все числители мы можем заменить на 1.

Последовательность сходится, но доказать не успеваю.