Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии

Топонен Никита Андреевич

Содержание

List of Figures

List of Tables

Цель работы

Рассмотреть простейшую модель эпидемии. Написать модель в OpenModelica, построить и проанализировать графики количества еще не болевших, заболевших, выздоровевших и имеющих иммунитет.

Задание

Вариант 41

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 5000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 30$. А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 1$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0) = 4969$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) > I^*$
2. если $I(0) \leqslant I^*$

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы.

1. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$.
2. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$.
3. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha * S, & I(0) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I^* \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha * S - \beta * I, \;\; I(0) > I^* \\ -\beta * I, \;\; I(t) \leq I^* \end{cases} \qquad (2)$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$\frac{dR}{dt} = \beta * I \; (3)$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t(0)$ особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 1$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0) = 30$ и $S(0) = 4969$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) > I^*$ и $I(0) \leq I^*$

Выполнение лабораторной работы

Случай первый: $I(0) > I^*$

В этом случае значения $S(t), I(t), R(t)$ изменяются по следующим законам:

1. Из $(1) => \frac{dS}{dt} = -\alpha * S$
2. Из $(2) => \frac{dI}{dt} = \alpha * S - \beta * I$
3. $\frac{dR}{dt} = \beta * I$

Код модели для первого случая:

```
model lab06_case1

constant Real alpha=0.01 "коэффициент alpha";
constant Real beta=0.02 "коэффициент beta";

Real S "переменная с количеством восприимчивых к болезни, но пока здоровь
Real I "переменная с количеством инфецированных распространителей";
Real R "переменная с количеством здоровых с иммунитетом";

initial equation
I=30 "начальное количество инфецированных распространителей";
R=1 "начальное количество здоровых с иммунитетом";
S=4969 "начальное количество восприимчивых к болезни, но пока здоровых";
```

```
equation
der(S)=-alpha*S "изменение числа восприимчивых к болезни, но пока здоровы
der(I)=alpha*S-beta*I "изменение числа инфецированных распространителей";
der(R)=beta*I "изменение числа здоровых с иммунитетом";

end lab06_case1;
```

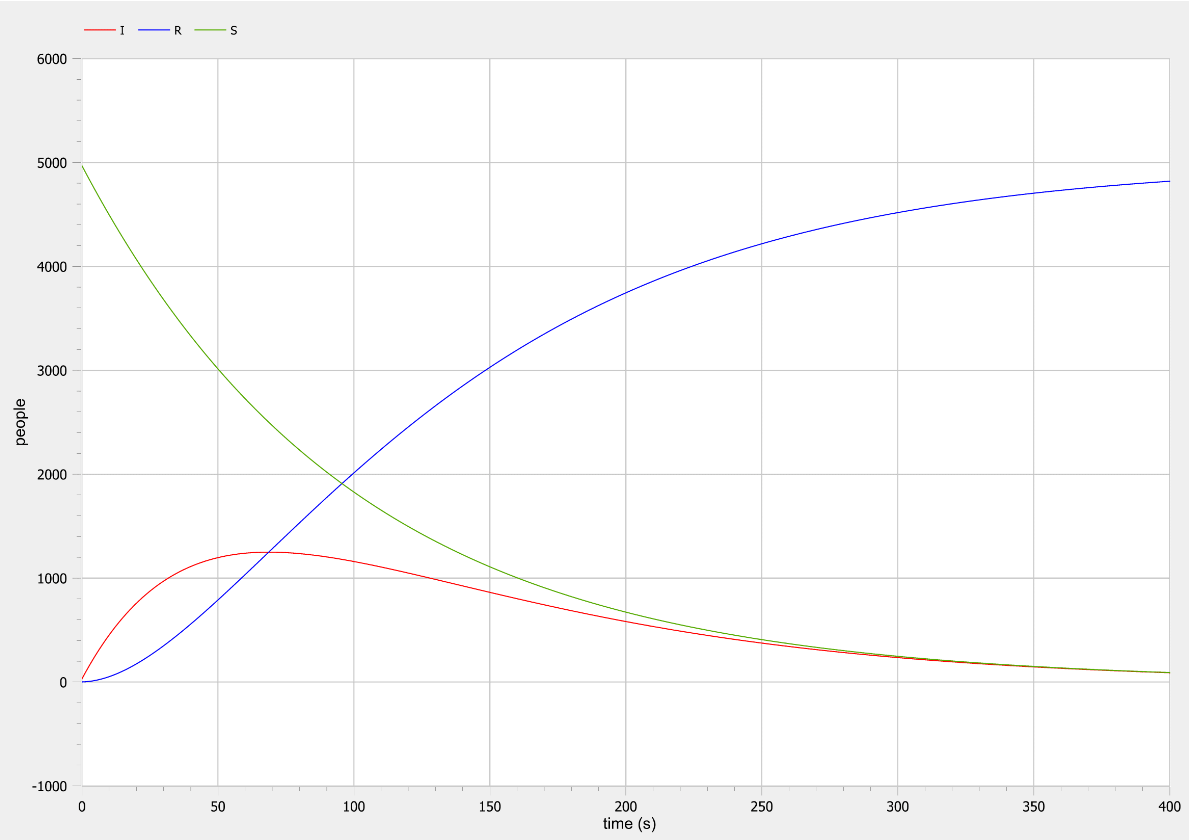

Figure 1: График изменения I(t), R(t), S(t) в случае 1

Случай второй: $I(t) \leq I^*$

В этом случае значения $S(t),\ I(t),\ R(t)$ изменяются по следующим законам:

1. Из $(1) => \frac{dS}{dt} = 0$

2. Из $(2) => \frac{dI}{dt} = -\beta * I$
3. $\frac{dR}{dt} = \beta * I$

Код модели для второго случая:

```
model lab06_case2

constant Real beta=0.02 "коэффициент beta";

Real S "переменная с количеством восприимчивых к болезни, но пока здоровь
Real I "переменная с количеством инфецированных распространителей";
Real R "переменная с количеством здоровых с иммунитетом";

initial equation
I=30 "начальное количество инфецированных распространителей";
R=1 "начальное количество здоровых с иммунитетом";
S=4969 "начальное количество восприимчивых к болезни, но пока здоровых";

equation
der(S)=0 "число восприимчивых к болезни, но пока здоровых не меняется";
der(I)=-beta*I "изменение числа инфецированных распространителей";
der(R)=beta*I "изменение числа здоровых с иммунитетом";

end lab06_case2;
```

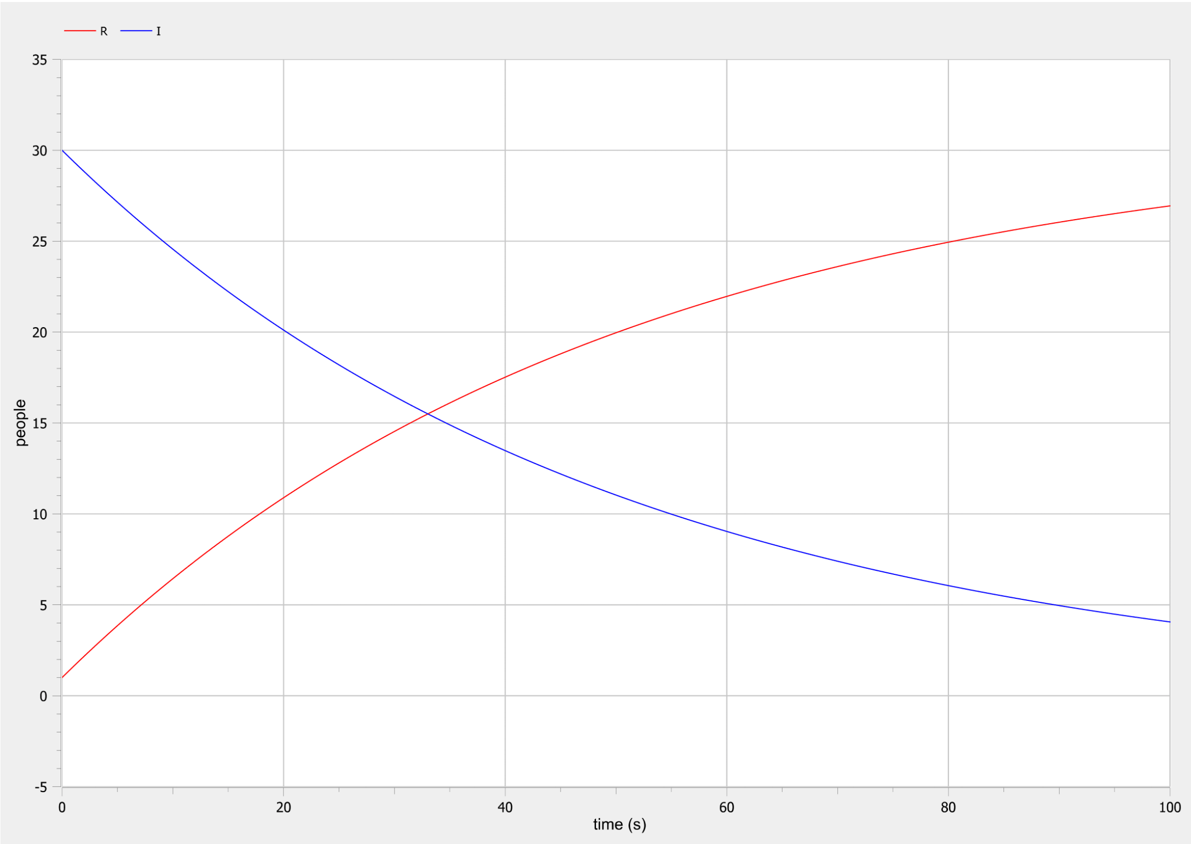

Figure 2: График изменения I(t), R(t) в случае 2

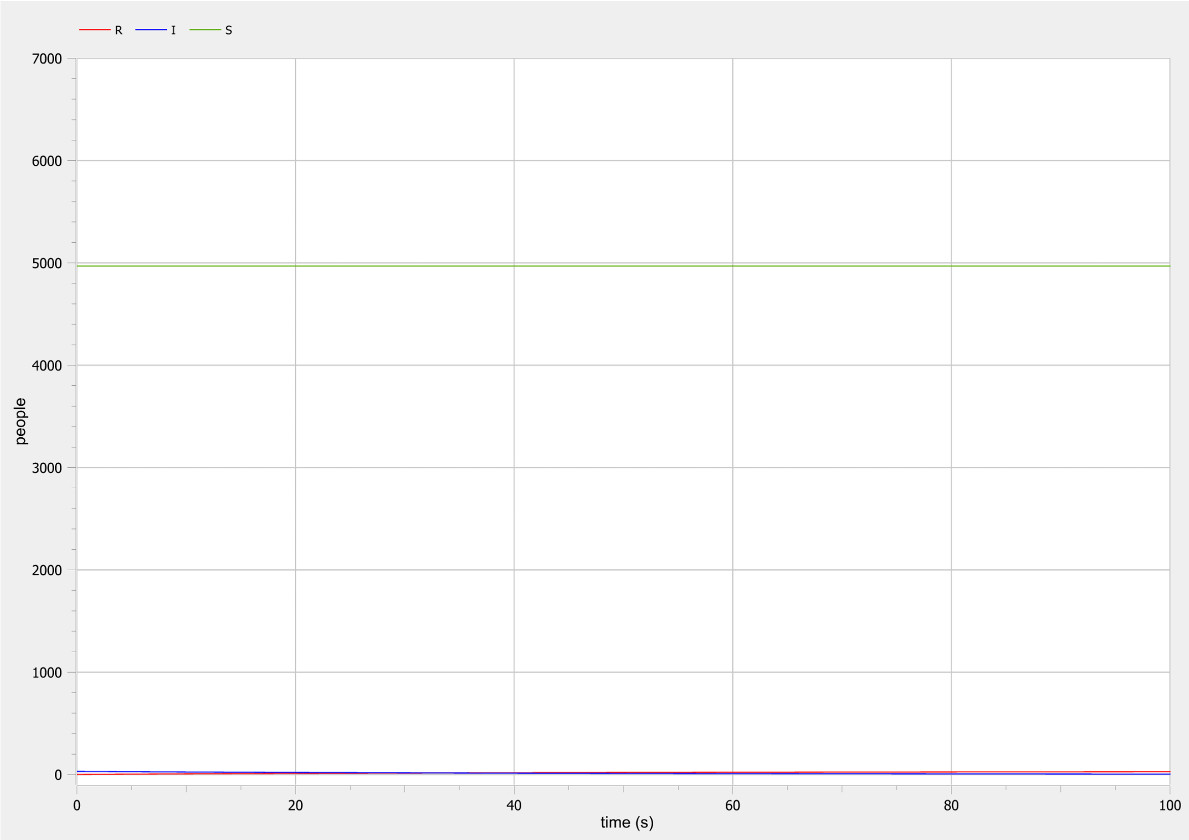

Figure 3: График изменения I(t), R(t), S(t) в случае 2

Выводы

В первом случае видно, что количество болеющих сначала резко растет, но затем плавно снижается к нулю вместе с количеством еще не болевших особей, так как все они обретают иммунитет после того как переболели, что видно по синему графику, который плавно растет и неизбежно станет равным N.

Во втором случае так как инфицированные особи никого не заражают, то число людей не болевших не изменяется и остается на планке в 4969, а инфицированные постепенно переходят в разряд переболевших с иммунитетом, что видно на графике (@fig002).

Список литературы

- Кулябов Д.С. *Лабораторная работа №6*
- Кулябов Д.С. *Задания к лабораторной работе №6 (по вариантам)*