Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Топонен Никита Андреевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

Цель работы

Рассмотреть модель конкуренции двух фирм. Написать модель в OpenModelica, построить и проанализировать графики эффективности рекламы для трех случаев.

Задание

Вариант 41

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

, где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2} \quad (16)$$

,

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - (\frac{b}{c_1} + 0.00021) M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Начальные условия и параметры

$M_0^1 = 5.5$ — оборотные средства фирмы 1

$M_0^2 = 5$ — оборотные средства фирмы 2

$p_{cr} = 35$ — критическая стоимость продукта

$N = 41$ — число потребителей производимого продукта

$q = 1$ — максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\tau_1 = 14$ — длительность производственного цикла фирмы 1

$\tau_2 = 7$ — длительность производственного цикла фирмы 2

$\tilde{p}_1 = 6.5$ — себестоимость продукта у фирмы 1

$\tilde{p}_2 = 15$ — себестоимость продукта у фирмы 2

Теоретическое введение

Для одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы,производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}}), \tag{1}$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при p = pcr (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина pcr = Sq/k. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa \tag{2}$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{3}$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}) \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\partial M/\partial t$ = 0:

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \tag{7}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \tag{8}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения М равны

$$\tilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})} \tag{9}$$

Первое состояние $\tilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_-$ неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($\partial M/\partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\tilde{M}_-$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Для двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2 \end{cases} \tag{10}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases} \tag{11}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases} \tag{12}$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma(\frac{M_1}{\tau_1\tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2\tilde{p}_2} - Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{13}$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr}(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1\tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2\tilde{p}_2})) \tag{14}$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - bM_1M_2 - a_1M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - bM_1M_2 - a_2M_2^2 - \kappa_2 \end{cases} \tag{15}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2} \tag{16}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1\theta$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2 \end{cases} \tag{17}$$

Стационарная точка

Приравниваем первое уравнение из системы (17) к нулю и находим корни:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{c_1 - by}{a_1} \end{cases} \tag{18}$$

Отбрасываем 0, потому что он не может быть стационарным состоянием, и находим вторую точку:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - by}{a_1} \\ y = \frac{a_1 c_2 - bc_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{cases} \tag{18}$$

Подставляем значение y и получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 a_2 - bc_2}{a_1 a_2 - b^2} \\ y = \frac{a_1 c_2 - bc_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{cases} \tag{19}$$

Выполнение лабораторной работы

Случай первый:

Код модели для первого случая:

```
model lab08_case1

constant Real p_cr = 35 "критическая стоимость продукта";
constant Real N = 41 "число потребителей производимого продукта";
constant Real q = 1 "максимальная потребность одного человека в продукте
constant Real tau_1 = 14 "длительность производственного цикла фирмы 1";
constant Real tau_2 = 7 "длительность производственного цикла фирмы 2";
constant Real p_tilda_1 = 6.5 "себестоимость продукта, то есть переменные
constant Real p_tilda_2 = 15 "себестоимость продукта, то есть переменные
constant Real a1 = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*N*q);
constant Real a2 = p_cr/((tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant Real b = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*(tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N
constant Real c1 = (p_cr-p_tilda_1)/(tau_1*p_tilda_1);
constant Real c2 = (p_cr-p_tilda_2)/(tau_2*p_tilda_2);

Real M1 "оборотные средства предприятия 1";
Real M2 "оборотные средства предприятия 2";
Real teta "безразмерное время";
Real stationary_1 "стационарное состояние фирмы 1";
```

```
Real stationary_2 "стационарное состояние фирмы 2";

initial equation
M1 = 5.5;
M2 = 5;
teta = 0;

equation
stationary_1 = (c1*a2-b*c2)/(a1*a2-b*b);
stationary_2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b);
teta = time/c1;
der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1^2;
der(M2)/der(teta)=(c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2^2;

end lab08_case1;
```

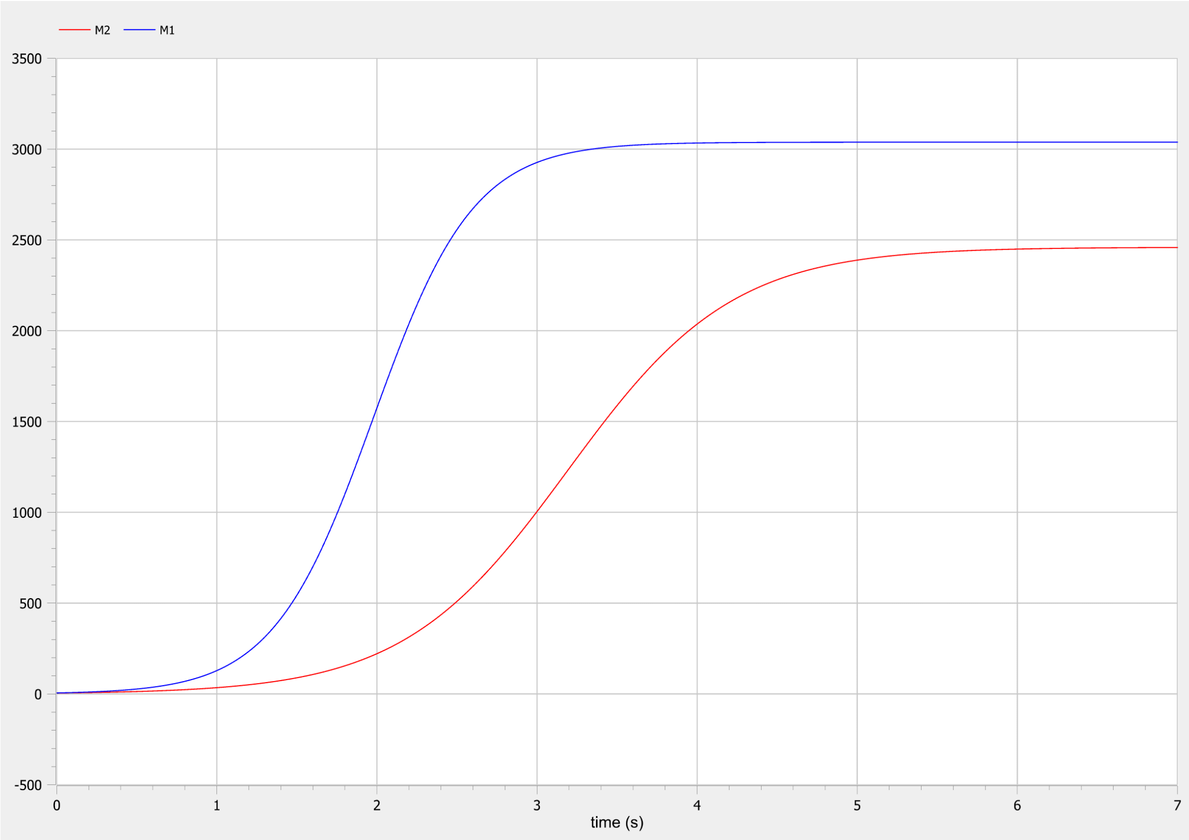

Рис. 1: График изменения оборотных средств предприятий в случае 1

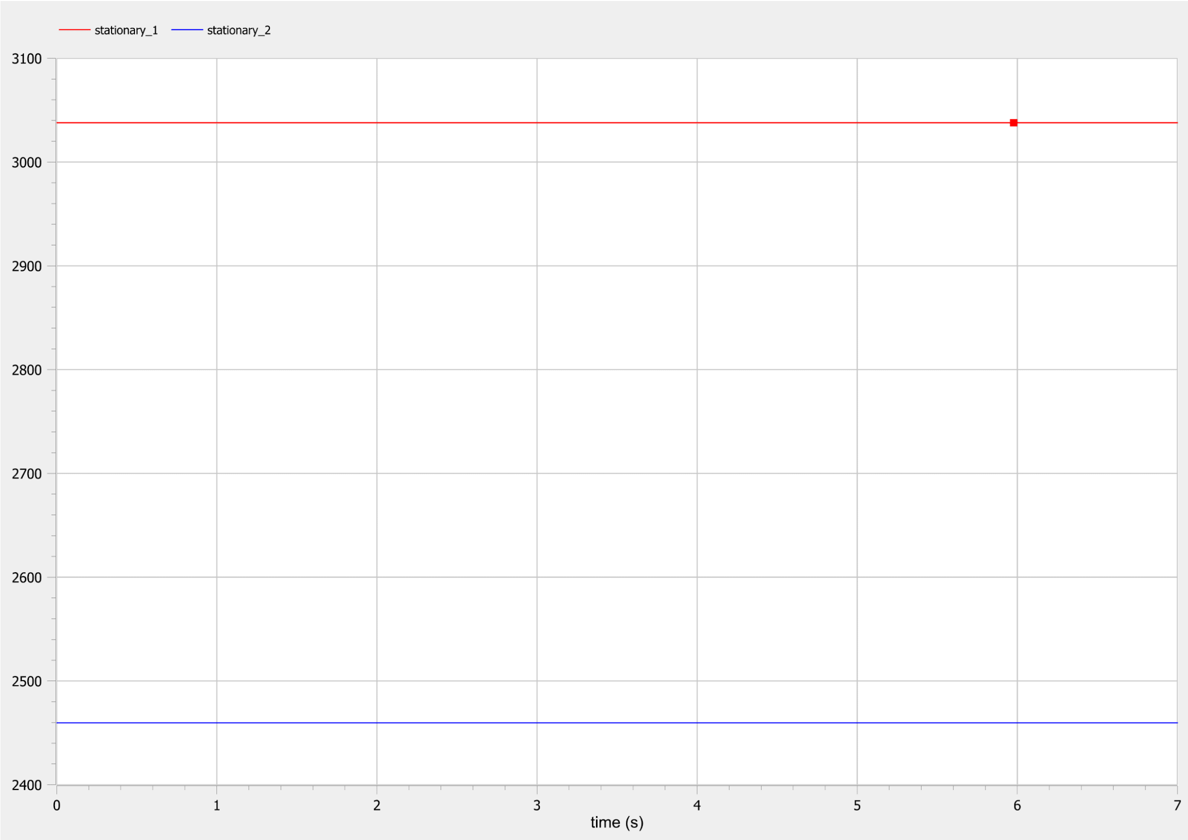

Рис. 2: Стационарные состояния оборотных средств предприятий в случае 1

Случай второй:

Код модели для второго случая:

```
model lab08_case2

constant Real p_cr = 35 "критическая стоимость продукта";
constant Real N = 41 "число потребителей производимого продукта";
constant Real q = 1 "максимальная потребность одного человека в продукте
constant Real tau_1 = 14 "длительность производственного цикла фирмы 1";
constant Real tau_2 = 7 "длительность производственного цикла фирмы 2";
```

```
constant Real p_tilda_1 = 6.5 "себестоимость продукта, то есть переменные
constant Real p_tilda_2 = 15 "себестоимость продукта, то есть переменные
constant Real a1 = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*N*q);
constant Real a2 = p_cr/((tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant Real b = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*(tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N
constant Real c1 = (p_cr-p_tilda_1)/(tau_1*p_tilda_1);
constant Real c2 = (p_cr-p_tilda_2)/(tau_2*p_tilda_2);

Real M1 "оборотные средства предприятия 1";
Real M2 "оборотные средства предприятия 2";
Real teta "безразмерное время";

initial equation
M1 = 5.5;
M2 = 5;
teta = 0;

equation
teta = time/c1;
der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1^2;
der(M2)/der(teta)=(c2/c1)*M2-(b/c1+0.00021)*M1*M2-(a2/c1)*M2^2;

end lab08_case2;
```

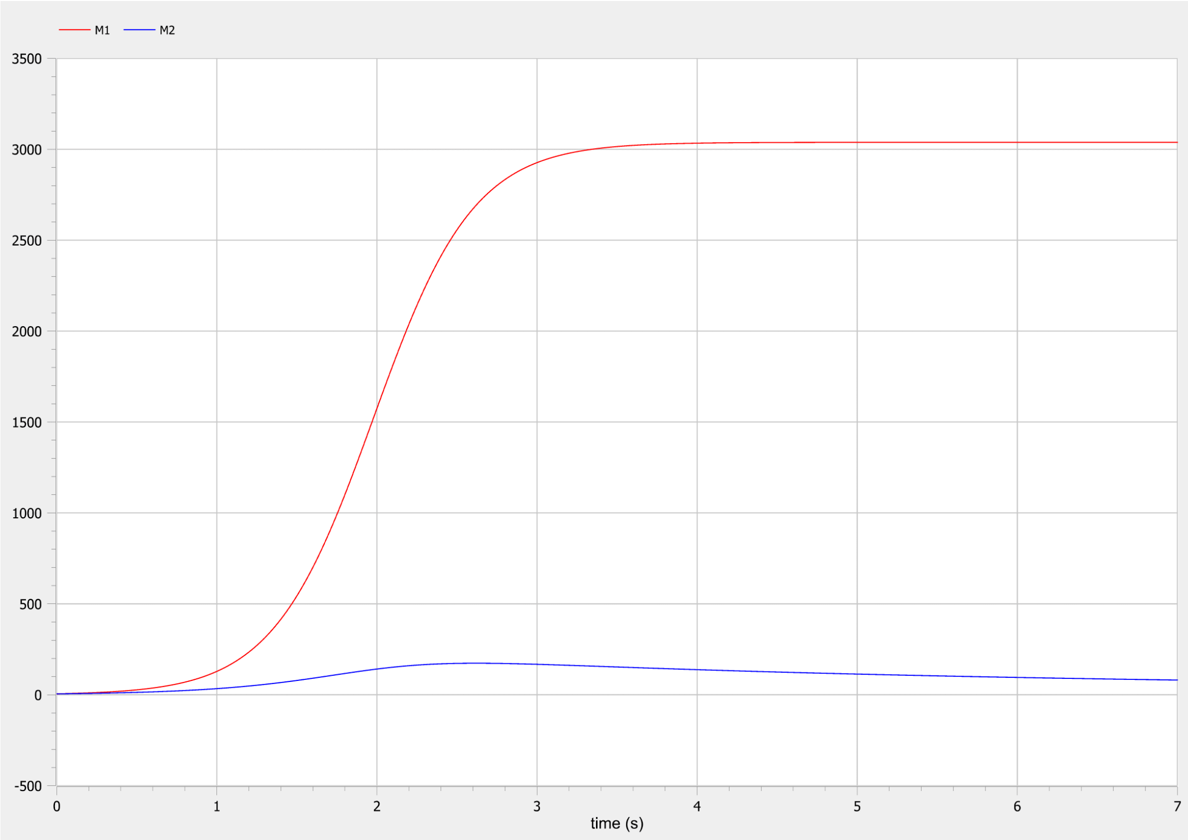

Рис. 3: График изменения оборотных средств предприятий в случае 2

Выводы

Рассмотрел модель конкуренции двух фирм в двух случаях, построил и проанализировал графики, а также нашел стационарное состояние оборотных средств предприятий в случае 1.

Список литературы

- Кулябов Д.С. *Лабораторная работа №8*
- Кулябов Д.С. *Задания к лабораторной работе №8 (по вариантам)*