Отчет по лабораторной работе по предмету Научное программирование

Лабораторная работа №4. Системы линейных уравнений

Никита Андреевич Топонен

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

- Научиться решать СЛАУ с помощью Octave.

2 Задание

- Повторить примеры решения СЛАУ с помощью Octave.

3 Теоретическое введение

Запишем исходную систему

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

в матричном виде:

$$\mathrm{A}x = b,$$

где

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & & \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}.$$

Рис. 3.1: Метод Гаусса

Матрица A называется основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа.

- На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

- На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки. Для приведения матрицы к треугольному виду для системы уравнений $Ax = b$ используют расширенную матрицу вида:

$$\mathrm{B} = [\mathrm{A}|b] = \mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ & \dots & & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right].$$

Рис. 3.2: Расширенная матрица

LU-разложение — это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу A в виде $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица, а U — верхняя треугольная матрица.

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все главные миноры матрицы A невырождены.

4 Выполнение лабораторной работы

Повторял примеры из материалов лабораторной работы.

Привел расширенную матрицу к верхнему треугольному виду “в ручную”.

```
>> B = [ 1 2 3 4; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0]
B =

   1   2   3   4
   0  -2  -4   6
   1  -1   0   0

>> B(2,3)
ans = -4
>> B(1, :)
ans =

   1   2   3   4

>> B(3,:) = (-1) * B(1,:) + B(3,:)
B =

   1   2   3   4
   0  -2  -4   6
   0  -3  -3  -4

>> B(3,:) = -1.5 * B(2,:) + B(3,:)
B =

    1     2     3     4
    0    -2    -4     6
    0     0     3   -13
```

Рис. 4.1: Приведение матрицы к верхнему треугольному виду “в ручную”

Далее привел расширенную матрицу к верхнему треугольному виду с помощью встроенной функции с разным количеством знаков после запятой.

```
>> rref(B)
ans =

   1.0000        0        0   5.6667
        0   1.0000        0   5.6667
        0        0   1.0000  -4.3333

>> format long
>> rref(B)
ans =

   1.000000000000000                   0                   0   5.666666666666667
                   0   1.000000000000000                   0   5.666666666666666
                   0                   0   1.000000000000000  -4.333333333333333

>> format short
```

Рис. 4.2: Приведение матрицы к верхнему треугольному виду с помощью встроенной функции

Затем решил СЛАУ так называемым левым делением в Octave.

```
>> B = [ 1 2 3 4; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0]
B =

   1   2   3   4
   0  -2  -4   6
   1  -1   0   0

>> A = B(:, 1:3)
A =

   1   2   3
   0  -2  -4
   1  -1   0

>> b = B(:,4)
b =

   4
   6
   0

>> A\b
ans =

   5.6667
   5.6667
  -4.3333
```

Рис. 4.3: Решение СЛАУ левым делением

В конце нашел LUP разложение матрицы с помощью функции lu.

```
>> [L U P] = lu(A)
L =

   1.0000        0         0
   1.0000   1.0000         0
        0   0.6667    1.0000

U =

   1    2    3
   0   -3   -3
   0    0   -2

P =

Permutation Matrix

   1    0    0
   0    0    1
   0    1    0
```

Рис. 4.4: Нахождение LUP разложения

5 Выводы

В результате выполнения данной работы я:

- Научился решать СЛАУ в Octave.

Список литературы