TRACCIA 09_2022 RISAFI NATALE FRANCESCO PIO 223491

QUESITO TC (a)

1) Calcolare i modi naturali del sistema:

Data la seguente matrice A ∈ $R^{n \times n}$, dove n rappresenta il numero di stati del sistema lineare a tempo invariante tempo-continuo (LTI-TC):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -141 & -8 & 72 \\ 3 & 71 & 4 & -36 \\ -2 & -69 & -5 & 35 \\ 4 & 139 & 8 & -72 \end{pmatrix}$$

Per calcolare i suoi modi naturali, rappresento la geometria del problema in base al calcolo dei suoi autovalori, calcolandone il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (2+\lambda)^3(5+\lambda)$$

Ponendo tutto il polinomio caratteristico pari a 0 otteniamo come autovalori:

- $\lambda = -5$, che presenta una molteplicità algebrica (m.a.) pari a 1, dunque è un autovalore semplice, al quale è legato il modo naturale e^{-5t};
- $\lambda = -2$, che presenta una molteplicità algebrica (m.a.) pari a 3, e il cui modo naturale al quale è legato deve essere analizzato con maggiore cautela.

Dunque, la formula che caratterizza i modi naturali di un sistema LTI-TC è $e^{\lambda t}$, ma per analizzare i modi naturali legati all'autovalore (λ=2) possiamo utilizzare la forma canonica di Jordan; ipotizziamo di avere una matrice Ã, simile alla matrice A, tale che: $AT = T\tilde{A}$, dove T ∈ $R^{4 \times 4}$ ed è anche detta matrice di cambiamento di base. La matrice Ã sarà proprio la forma canonica di Jordan, secondo la Jordanizzazione:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J1 & 0 \\ 0 & J2 \end{pmatrix}$$

, dove J1 e J2 rappresentano i blocchi di Jordan; a tale scopo valuto la molteplicità geometrica (m.g.) dell'autovalore $\lambda = -2$, che è pari al numero di autovettori linearmente indipendenti di questo sottospazio, per determinare il numero di mini-blocchi di Jordan presenti all'interno del blocco di Jordan legato all'autovalore $\lambda = -2$. La molteplicità geometrica è pari ad 1, dunque il blocco J2 di Jordan sarà caratterizzato da un solo mini-blocco di dimensione 3x3.

Una volta estratta la matrice Ã, che rappresenta la forma canonica di Jordan, analizzo il suo esponenziale di matrice per mettere in evidenza i modi naturali del sistema:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Studiando l'esponenziale di matrice $e^{\tilde{A}t}$ di, ricavo 4 modi naturali, 3 all'interno del blocco di Jordan J2, mentre uno in J1 che rappresenta l'autovalore semplice:

$$\begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t}\,t & \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t^2 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & e^{-2t}\,t \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Uno di questi modi naturali è e^{-5t}, legato all'autovalore semplice $\lambda = -5$; gli altri sono legati al blocco di Jordan di dimensione massima legato a $\lambda = -2$: $(e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t})$. Il sistema presenta 4 stati e 4 modi naturali. Dunque, l'insieme di tutti i modi naturali del sistema sarà: $(e^{-5t}, e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t})$.

2) Calcolare la risposta libera nello stato nell'ipotesi che lo stato iniziale sia:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il calcolo della risposta libera sarà un vettore, le cui componenti saranno combinazioni lineari dei modi naturali del sistema, che avranno tutte dei pesi diversi. Essa rappresenta, nel caso di autovalori reali e distinti, il prodotto tra l'esponenziale di matrice ed il vettore stato iniziale; inoltre viene analizzata nell'ipotesi che u(t), l'ingresso, sia nullo. Dunque, nel caso in cui la matrice dinamica abbia autovalori reali e distinti, la risposta libera dipende temporalmente dalle funzioni esponenziali (TC):

$$e^{\lambda_i t} \qquad i = 1, ..., n.$$

che rappresentano i modi naturali del sistema LTI-TC, che saranno tanti quanti saranno gli autovalori di A.

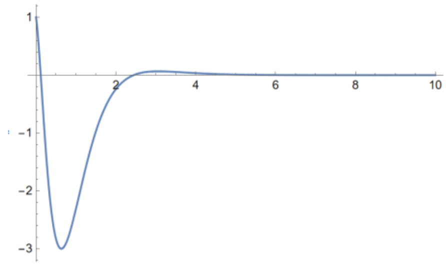
$$\begin{pmatrix} -\frac{440}{27}e^{-5t} + \frac{467\,e^{-2t}}{27} - \frac{467}{9}e^{-2t}\,t + \frac{55}{3}e^{-2t}\,t^2 \\ \frac{80\,e^{-5t}}{9} - \frac{80\,e^{-2t}}{9} + \frac{89}{3}e^{-2t}\,t - 11\,e^{-2t}\,t^2 \\ -\frac{22}{3}e^{-5t} + \frac{22\,e^{-2t}}{3} - 24\,e^{-2t}\,t + \frac{11}{2}e^{-2t}\,t^2 \\ \frac{448\,e^{-5t}}{27} - \frac{448\,e^{-2t}}{27} + \frac{484}{9}e^{-2t}\,t - \frac{121}{6}e^{-2t}\,t^2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la formula per il calcolo della risposta libera: $x_l(t) = e^{At}x_0$, ottengo questo vettore di 4 componenti, che rappresenta la risposta libera; inoltre, per ciascuna di queste componenti è presente una combinazione lineare dei 4 modi naturali del sistema.

Possiamo analizzare tramite un grafico, ognuna di queste combinazioni lineari, ma noteremo che ognuna di esse convergerà a zero, perché l'argomento di ogni esponenziale è negativo:

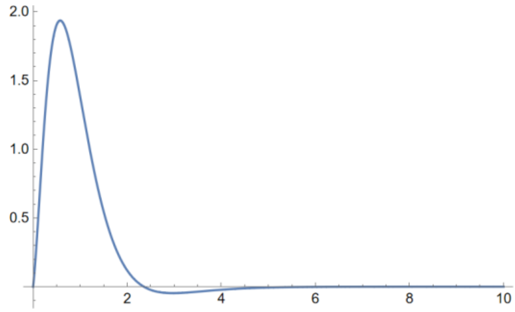
- Grafico per $x_l(t)\,[[1]]$:

```
Plot[x_l[t][[1]], {t, 0, 10}, PlotRange → Full]
```



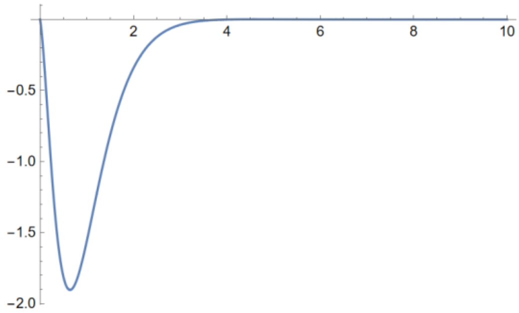
- Grafico per $x_l(t)\ [[2]]$:

```
Plot[x1[t][[2]], {t, 0, 10}, PlotRange → Full]
```



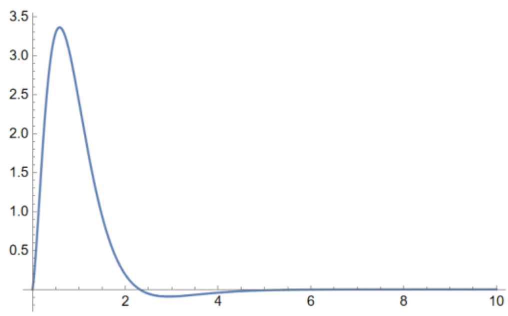
- Grafico per $x_l(t)\ [[3]]$:

```
Plot[x1[t][[3]], {t, 0, 10}, PlotRange → Full]
```



- Grafico per $x_l(t)\ [[4]]$:

```
Plot[x1[t][[4]], {t, 0, 10}, PlotRange → Full]
```



Come anticipato in precedenza, ognuno dei grafici che rappresentano una “combinazione lineare”, elemento del vettore della risposta libera, convergerà a zero; infatti, se tutti gli autovalori che caratterizzano la matrice dinamica A sono strettamente negativi allora possiamo dire che la risposta libera convergerà sicuramente a 0.

3) Studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no:

Per studiare come “attivare” sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no, bisogna riprendere la matrice di cambiamento di base, usata in precedenza durante la Jordanizzazione. Dovrò dunque scegliere lo stato iniziale “allineandolo” ad una colonna o più colonne della matrice di cambiamento di base, rispetto quale autovalore vorrò attivare e quale no nella risposta libera.

$$T = \begin{pmatrix} -220 & -10 & \frac{9}{11} & \frac{59}{121} \\ 120 & 6 & -\frac{1}{11} & -\frac{20}{121} \\ -99 & -3 & \frac{28}{11} & \frac{318}{121} \\ 224 & 11 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se all’interno della risposta libera, volessi far comparire solo il modo naturale che corrisponde all’autovalore $\lambda = -5$, scelgo come stato iniziale, la colonna “allineata” alla prima colonna della matrice T. Infatti, impostando come stato iniziale proprio:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -220 \\ 120 \\ -99 \\ 224 \end{pmatrix}$$

e calcolandone la risposta libera come $x_l(t) = e^{At}x_0$, otteniamo come vettore risposta libera, un vettore di 4 componenti, dove ognuna di esse presenta solo il modo naturale di e^{-5t}che corrisponde all’autovalore semplice $\lambda = -5$.

$$x_1[t] = \begin{pmatrix} -220\, e^{-5t} \\ 120\, e^{-5t} \\ -99\, e^{-5t} \\ 224\, e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, volendo “azzerare” la presenza dei modi polinomial-esponenziali ($te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t}$), nel calcolo della risposta libera, lo stato iniziale dovrà essere combinazione lineare di due vettori, entrambi “allineati” lungo le rispettive colonne della matrice di cambiamento di base, che corrispondono alle colonne dei due modi naturali: e^{-5t}, e^{-2t}. Guardando le immagini delle due matrici sopra, un esempio di stato iniziale potrebbe essere:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -220 \\ 120 \\ -99 \\ 224 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

tale per cui la risposta libera sarà: $\begin{pmatrix} -220\, e^{-5t} - 10\, e^{-2t} \\ 120\, e^{-5t} + 6\, e^{-2t} \\ -99\, e^{-5t} - 3\, e^{-2t} \\ 224\, e^{-5t} + 11\, e^{-2t} \end{pmatrix}$ che infatti sarà combinazione lineare dei solo modi naturali e^{-5t}, e^{-2t}.

Volendo considerare solo il modo polinomial-esponenziale $\frac{t^2}{2}e^{-2t}$ e il modo esponenziale e^{-2t}, basta un solo vettore, perché per attivare solo il modo polinomial-esponenziale useremo un vettore che sarà “allineato” anche con il modo esponenziale e^{-2t} ma esso stesso sarà allineato anche con il modo te^{-2t} , dunque all’interno della risposta libera sarà presente una combinazione lineare di tutti e tre i modi naturali; ad esempio, con lo stato iniziale:

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{59}{121} \\ -\frac{20}{121} \\ \frac{318}{121} \\ 0 \end{pmatrix}$$

la risposta libera sarà:

$$\begin{pmatrix} \frac{59\, e^{-2t}}{121} + \frac{9}{11} e^{-2t} t - 5 e^{-2t} t^2 \\ -\frac{20}{121} e^{-2t} - \frac{1}{11} e^{-2t} t + 3 e^{-2t} t^2 \\ \frac{318\, e^{-2t}}{121} + \frac{28}{11} e^{-2t} t - \frac{3}{2} e^{-2t} t^2 \\ \frac{11}{2} e^{-2t} t^2 \end{pmatrix}$$

Infine, volendo invece considerare solo il modo esponenziale e^{-2t}, ed azzerare tutti gli altri modi naturali basta considerare un vettore allineato con la seconda colonna della nostra matrice T, ad esempio:

con il seguente stato iniziale:

$$x_0 = 2 \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

avremo come risposta libera:

$$x_1[t] = \begin{pmatrix} -20\, e^{-2t} \\ 12\, e^{-2t} \\ -6\, e^{-2t} \\ 22\, e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4) La funzione di trasferimento del sistema, i suoi poli e zeri:

La funzione di trasferimento (F.D.T.) , essendo il sistema scalare, sarà un rapporto tra due polinomi, che dipenderà dai parametri del sistema, cioè le matrici A,B,C,D. Inoltre, nel caso di un sistema SISO (un ingresso ed una uscita) consente il calcolo della risposta forzata del sistema nel dominio s. La formula per il calcolo della F.D.T. per un sistema LTI-TC è la seguente:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Dove nel nostro caso i parametri del sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -141 & -8 & 72 \\ 3 & 71 & 4 & -36 \\ -2 & -69 & -5 & 35 \\ 4 & 139 & 8 & -72 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Cc = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Dd = 0$$

Applicando la formula sopra riportata, otterremo la funzione di trasferimento del nostro sistema dinamico:

$$G(s) = \frac{1 + 2s}{(2 + s)^3 (5 + s)}$$

Dunque, la funzione di trasferimento è un rapporto di polinomi a coefficienti reali, il cui denominatore coincide proprio con il polinomio caratteristico della matrice A, in generale le radici del denominatore della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovalori di A; i numeri che annullano il denominatore della funzione di trasferimento sono detti "poli" del sistema, che in questo caso coincidono proprio con gli autovalori del sistema, autovalori reali che sono tutti minori strettamente di 0 e dunque è rispettata la condizione di asintotica stabilità, che implica in questo caso la BIBO stabilità, in quanto i poli si estraggono dagli autovalori del sistema, hanno parte reale strettamente minore di 0:

```
Solve[Denominator[G[s]] == 0, s]
{{s → -5}, {s → -2}, {s → -2}, {s → -2}}
```

I poli coincideranno proprio con gli autovalori del sistema e saranno legati ai modi naturali, precedentemente analizzati: $(e^{-5t}, e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t})$.

Gli "zeri" della funzione di trasferimento sono invece le radici del numeratore, cioè quei numeri che annullano il numeratore:

```
Solve[Numerator[G[s]] == 0, s]
```

$$\left\{\left\{s \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

In questo caso la nostra funzione di trasferimento presenta un solo zero in $s = -\frac{1}{2}$.

Inoltre posso descrivere una considerazione importante per quanto riguarda la funzione di trasferimento: se il denominatore della F.D.T. ha come grado la dimensione della matrice A, allora gli autovalori del sistema coincidono con i poli del sistema, e quindi i modi naturali del sistema si possono analizzare a partire dai poli della funzione di trasferimento.

5) La risposta all'impulso del sistema:

una volta calcolata la funzione di trasferimento del nostro sistema dinamico, la risposta all'impulso è definita come la sua antitrasformata di Laplace, ed indica l'uscita di un sistema nel caso in cui il sistema stesso riceva una perturbazione generica:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

Analizzando la F.D.T. calcolata in precedenza, noteremo di avere 4 poli che coincidono con gli autovalori del sistema, e riscrivendola in fratti semplici tramite la funzione "apart" di Mathematica:

```
Apart[G[s]][[1, 1]]
```

$$-\frac{1}{(2+s)^3} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{3\times(2+s)} + \frac{1}{3\times(5+s)}$$

Riscrivo l'espressione in fratti semplici in maniera simbolica:

$$C_{23}\frac{1}{(2+s)^3} + C_{22}\frac{1}{(2+s)^2} + C_{21}\frac{1}{(2+s)} + C_1\frac{1}{(5+s)}$$

Calcolerò ognuno dei coefficienti C_{ij} sfruttando la formula di Heaviside (generalizzata per il calcolo dei coefficienti a polo multiplo):

$$C_{ij} = \frac{1}{(v_i - j)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{v_i-j}}{ds^{v_i-j}}((s-p_i)^{v_i}G(s))$$

$$C_1 = \lim_{s\to -5}(s+5)\,G[s][[1, 1]]$$

$$\frac{1}{3}$$

$$C_{23} = \lim_{s\to -2}(s+2)^3\,G[s][[1, 1]]$$

$$-1$$

$C_{22} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to-2} \partial_s \left((s+2)^3 G[s] \right) [[1, 1]]$

1

$C_{21} = \frac{1}{2!} \lim_{s\to-2} \partial_s \left(\partial_s \left((s+2)^3 G[s] \right)\right) [[1, 1]]$

$-\frac{1}{3}$

Adesso non resta nient'altro da fare che eseguire l'antitrasformata di Laplace per ogni termine moltiplicato dai coefficienti C_{ij}, che sono del dominio s di Laplace, per portarli nel dominio t del tempo.

$L^{-1}[\frac{1}{5+s}] \coloneqq e^{-5t}1(t);$

$L^{-1}[\frac{1}{2+s}] \coloneqq e^{-2t}1(t);$

$L^{-1}[\frac{1}{(2+s)^2}] \coloneqq te^{-2t}1(t);$

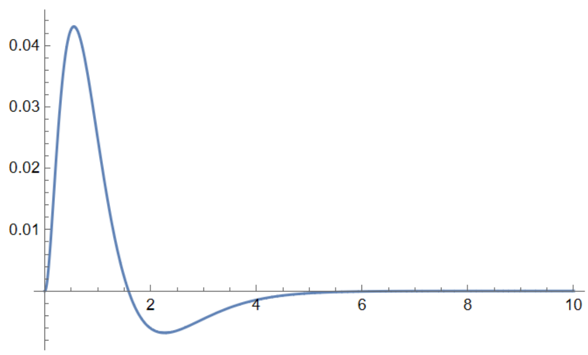
$L^{-1}[\frac{1}{(2+s)^3}] \coloneqq \frac{t^2}{2}e^{-2t}1(t);$

Dunque,aggiungendo per ognuno di essi il termine 1(t) perché sono funzioni rigth-sided, la risposta all'impulso,una volta riportato tutto nel dominio del tempo con le opportune antitrasformate di Laplace sarà:

$$g(t) = -\frac{t^2}{2}e^{-2t}1(t) + te^{-2t}1(t) - \frac{1}{3}\, e^{-2t}1(t) + \frac{1}{3}e^{-5t}1(t)$$

Infatti, verificando direttamente il calcolo con Mathematica, con la funzione InverseLaplaceTransform[G[s],s,t]: $\frac{e^{-5t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} + e^{-2t}\,t - \frac{1}{2}\, e^{-2t}\, t^2$

Volendo graficare la risposta all'impulso:



Inoltre posso verificare la convergenza a zero della mia risposta all'impulso grazie al "teorema del valore finale per la L-trasformata" essendo verificate le condizioni di continuità per la g(t) e l'esistenza del limite:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0 \text{ (esiste ed è finito)}$$

Allora avremo che il valore finale della nostra risposta all'impulso sarà:

$$g_\infty = \lim_{s\to 0} s\, G(s) = 0$$

Dunque, verifico la convergenza a 0 della mia risposta all'impulso evidenziata nel grafico.

6) la risposta al gradino ed il suo grafico:

Per determinare la risposta al gradino unitario devo analizzare la risposta forzata con una relazione tra la funzione di trasferimento e l'ingresso stesso (condizioni iniziali), che in questo caso è rappresentato propro dal gradino unitario:

$$y_f(t) = G(t)\,u(t)$$

Dove u(t) è l'antitrasformata di Laplace del gradino $u(s) = \frac{1}{s}$.

Nel caso di dominio in s: $y_f(s) = G(s)\,u(s)$, dove $y_f(s)$ è la trasformata di Laplace di $y_f(t)$, posso riscrivere la funzione come:

$$y_f(s) = \frac{1 + 2\,s}{s\,(2 + s)^3\,(5 + s)}$$

E riscrivendola in maniera simbolica in fratti semplici:

$$\frac{C_1}{s} + \frac{C_{23}}{(2+s)^3} + \frac{C_{22}}{(2+s)^2} + \frac{C_{21}}{(2+s)} + \frac{C_3}{(5+s)}$$

Una volta calcolati tutti i coefficienti con la formula di Heaviside generalizzata, passo al calcolo delle antitrasformate di Laplace così da ottenere la risposta al gradino unitario:

$$C_1 = \lim_{s \to 0} s\,Y_f[s]$$

$$\frac{1}{40}$$ (Il coefficiente del gradino è sempre ottenibile come G[0])

$$C_3 = \lim_{s \to -5} (s + 5)\,Y_f[s]$$

$$-\frac{1}{15}$$

$$C_{23} = \lim_{s \to -2} (s + 2)^3\,Y_f[s]$$

$$\frac{1}{2}$$

$$C_{22} = \frac{1}{1\,!} \lim_{s \to -2} \partial_s \left((s + 2)^3\,Y_f[s]\right)$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$C_{21} = \frac{1}{2\,!} \lim_{s \to -2} \partial_s \left(\partial_s \left(((s + 2))^3\,Y_f[s]\right)\right)$$

$$\frac{1}{24}$$

Passando alle antitrasformate:

$$L^{-1}\frac{1}{s} := 1(t)$$
$$L^{-1}\frac{1}{(2+s)^3} := \frac{t^2}{2}e^{-2t}\,1(t)$$
$$L^{-1}\frac{1}{(2+s)^2} := te^{-2t}\,1(t)$$
$$L^{-1}\frac{1}{(2+s)} := e^{-2t}\,1(t)$$
$$L^{-1}\frac{1}{(5+s)} := e^{-5t}\,1(t)$$

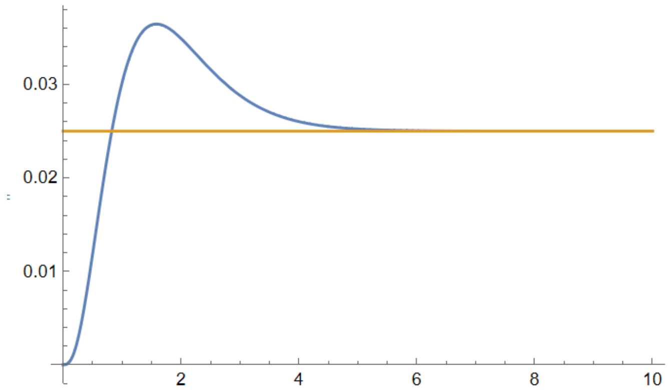
Posso adesso scrivere la risposta al gradino come “somma” di due componenti, risposta a regime e risposta transitoria, che è combinazione lineare dei modi naturali del sistema:

$$y_f(t) = \frac{1}{40}1(t) + \frac{1}{4}t^2e^{-2t}1(t) - \frac{1}{4}te^{-2t}1(t) + \frac{1}{24}e^{-2t}1(t) - \frac{1}{15}e^{-5t}1(t)$$

Facilmente verificabile con la funzione InverseLaplaceTransform[Y_f[s],s,t] di Mathematica:

$$\frac{1}{40} - \frac{e^{-5t}}{15} + \frac{e^{-2t}}{24} - \frac{1}{4}e^{-2t}t + \frac{1}{4}e^{-2t}t^2$$

Volendo graficare la risposta al gradino:



7) la risposta forzata al segnale periodico u(t) = sin(t) 1(t):

Ripeto il ragionamento precedente considerando come ingresso il segnale periodico elementare u(t) = sin(t) 1(t); calcolo la trasformata di Laplace del mio ingresso in maniera tale da legarlo, tramite la risposta forzata all’ingresso stesso, alla funzione di trasferimento, tramite la formula:

$$y_f(s) = G(s)\,u(s)$$

Dove in questo caso G(s) è la funzione di trasferimento ed u(s) è la trasformata di Laplace dell’ingresso u(t) = sin(t) 1(t) che sarà $u(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Scompongo in maniera simbolica in fratti semplici:

$$\frac{D_{23}}{(2+s)^3} + \frac{D_{22}}{(2+s)^2} + \frac{D_{21}}{(2+s)} + \frac{D_1}{(5+s)} + \frac{D_3}{(s+i)} + \frac{\bar{D}3}{(s-i)}$$

Una volta scomposto in fratti semplici calcolo con la formula di Heaviside generalizzata tutti i coefficienti:

$$D_1 = \lim_{s\to-5} (5+s)\, Y_f[s]$$

$$\frac{1}{78}$$

$$D_{23} = \lim_{s\to-2} (2+s)^3\, Y_f[s]$$

$$-\frac{1}{5}$$

$$D_{22} = \lim_{s\to-2} \partial_s \left((2+s)^3\, Y_f[s]\right)$$

$$\frac{1}{25}$$

$$D_{21} = \frac{1}{2\,!} \lim_{s\to-2} \partial_s \left(\partial_s \left((2+s)^3\, Y_f[s]\right)\right)$$

$$\frac{2}{375}$$

$$D_3 = \lim_{s\to-i} (s+i)\, Y_f[s]$$

$$-\frac{59}{6500} + \frac{113\, i}{6500}$$

Calcolare anche $\overline{D}3$ non avrebbe senso, perché sarebbe il complesso e coniugato di D_3.

Sostituendo nella nostra formula della risposta all'ingresso periodico assegnato ed effettuando le antitrasformate di Laplace per portare tutto nel dominio del tempo, otterrò:

$$\left(\left(-\frac{59}{6500}+\frac{113\,i}{6500}\right)e^{-it}\right)+\left(\left(-\frac{59}{6500}-\frac{113\,i}{6500}\right)e^{it}\right)-\frac{1}{5}\frac{t^2}{2}\,e^{-2t}\,1\,(t) + \frac{1}{25}te^{-2t}\,1(t)+\frac{2}{375}e^{-2t}1(t)+\frac{1}{78}e^{-5t}1(t)$$

Dove il primo addendo, $\left(\left(-\frac{59}{6500}+\frac{113\,i}{6500}\right)e^{-it}\right)+\left(\left(-\frac{59}{6500}-\frac{113\,i}{6500}\right)e^{it}\right)$,detto risposta a regime lo posso riscrivere come:

$$2\,\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{59}{6500}-\frac{113\,i}{6500}\right)e^{it}\right]=2\,\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{59}{6500}-\frac{113\,i}{6500}\right)\left(\mathrm{Cos}[t]+i\,\mathrm{Sin}[t]\right)\right]$$

Facilmente calcolabile con la funzione di mathematica:

```
ComplexExpand[D3 e^(-i t) + Conjugate[D3] e^(i t)]
```

$$-\frac{59\,\mathrm{Cos}[t]}{3250}+\frac{113\,\mathrm{Sin}[t]}{3250}$$

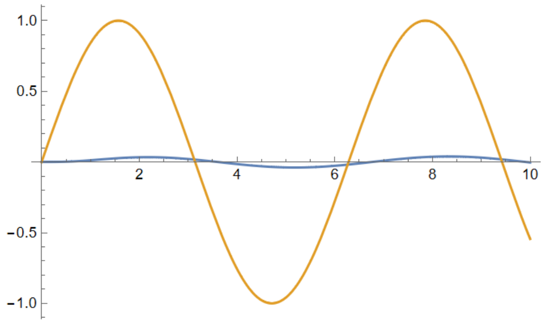
Riscrivendo tutto nel dominio del tempo, otterrò che la risposta all'ingresso periodico u(t) = sin(t) 1(t) è:

$$y_f(t) = -\frac{59}{3250}\cos(t)1(t)+\frac{113}{3250}\sin(t)1(t)-\frac{t^2}{10}e^{-2t}1(t)+\frac{1}{25}te^{-2t}1(t)+\frac{2}{375}e^{-2t}1(t)+\frac{1}{78}e^{-5t}1(t)$$

Che posso verificare con Mathematica:

$$\frac{e^{-5t}}{78}+\frac{2\,e^{-2t}}{375}+\frac{1}{25}e^{-2t}\,t-\frac{1}{10}e^{-2t}\,t^2-\frac{59\,\mathrm{Cos}[t]}{3250}+\frac{113\,\mathrm{Sin}[t]}{3250}$$

Volendo graficare la risposta a questo segnale periodico:



Noto che la differenza principale tra l'ingresso e la risposta forzata all'ingresso è proprio dettata dallo sfasamento e dall'ampiezza, e non dalla pulsazione che invece resta sempre uguale; infatti scrivendo la componente di regime della nostra risposta come un sistema di due equazioni in due incognite, possiamo calcolare sia l'ampiezza che lo sfasamento: $Ysin(t+\theta) = Ysin(\theta)\cos(t) + Ycos(\theta)\sin(t)$; dove le due equazioni da risolvere saranno: $Ysin(\theta) = \frac{-59}{3250}$ ed $Ycos(\theta) = \frac{113}{3250}$ ed una volta risolte otterremo come ampiezza e come sfasamento:

$$Y = \frac{1}{5\sqrt{26}};\ \theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{-650+113\sqrt{26}}{59\sqrt{26}}\right)$$

8) un possibile modello i/u a partire dalla funzione di trasferimento ottenuta:

Riprendendo la funzione di trasferimento ottenuta:

$$G(s) = \frac{1+2s}{(2+s)^3(5+s)}$$

Possiamo riscriverla come un rapporto $G(s) = \frac{y_f(s)}{U(s)}$, dove suppongo $y_f(s)$ essere una generica risposta forzata ed $U(s)$ la trasformata di Laplace di un generico ingresso. Adesso moltiplico e divido ambo i membri per $(2+s)^3(5+s)$ e per $U(s)$, ottenendo:

$$(2+s)^3(5+s)y_f(s) = U(s)(1+2s)$$

$$s^4y_f(s) + 11s^3y_f(s) + 42s^2y_f(s) + 68sy_f(s) + 40y_f(s) = 2sU(s) + U(s)$$

Passando nel dominio del tempo, tramite il teorema della derivata di ordine n sulla trasformata di Laplace, questa identità algebrica diventerà una identità differenziale.

$$Y''''(t) + 11Y'''(t) + 42Y''(t) + 68Y'(t) + 40Y(t) = 2\,U'(t) + U(t)$$

Questa è la cosiddetta rappresentazione I/U che è equivalente alla I/S/U (almeno per quanto riguarda la trasformata di Laplace). Per risolvere questa equazione differenziale dovrò assegnare delle condizioni iniziali a partire dallo stato iniziale x_0:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -141 & -8 & 72 \\ 3 & 71 & 4 & -36 \\ -2 & -69 & -5 & 35 \\ 4 & 139 & 8 & -72 \end{pmatrix} \quad Cc = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y[0] = (Cc.x_0) = 1$$

$Y'[0] = (Cc.A.x_0) = -2$

$Y''[0] = (Cc.A.A.x_0) = -1$

$Y'''[0] = (Cc.A.A.A.x_0) = 4$

Dopo aver effettuato tutte le semplificazioni del caso, eliminando la componente U[0], separando la componente forzata dalla risposta libera, con Mathematica, e sostituendo le condizioni iniziali appena calcolate otterremo la risposta libera nel dominio s:

$$\frac{-23+19\,s+9\,s^2+s^3}{(2+s)^3\,(5+s)}$$

Portandola nel dominio del tempo, attraverso la sua antitrasformata di Laplace, noteremo come sarà una combinazione lineare dei modi naturali del sistema:

$$\frac{2\,e^{-5t}}{3}+\frac{e^{-2t}}{3}+2\,e^{-2t}\,t-\frac{11}{2}\,e^{-2t}\,t^2$$

9) determinare lo stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino coincide con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria):

Prendendo nuovamente la funzione di trasferimento: $\frac{1+2\,s}{(2+s)^3\,(5+s)}$, posso scrivere la risposta al gradino unitario come: $y_f(s) = G(s)u(s)$
dove u(s) è la trasformata di Laplace del gradino; posso però scrivere la risposta al gradino come somma algebrica di due componenti, che sono la risposta transitoria e la risposta a regime, inoltre (come in questo caso) visto che sto analizzando la risposta al gradino, la risposta a regime è proprio la quantità: $Y_{ss}(s) = \frac{G[0]}{s}$, dove la quantità G[0] viene chiamata "guadagno statico"; allora posso scrivere la risposta transitoria come: $Y_{tr}(s) = y_f(s) - \frac{G[0]}{s}$. Sapendo che la risposta complessiva al gradino è data dalla somma algebrica tra risposta libera e risposta forzata, con tutte le semplificazioni del caso svolte in Mathematica, noto che lo stato iniziale x_0, per avere come risposta complessiva al gradino solo la componente a regime, dovrà essere tale per cui riuscirà a compensare completamente, e quindi azzerare, la componente transitoria: $Y_s = Y_{ss}(s)$, solo se $C(sI-A)^{-1}x_0 + Y_{tr}(s) = 0$, nel nostro caso analizzando lo stato iniziale x_0, questo perché $Y(s) = C(\mathrm{s}\mathrm{I}-A)^{-1}x_0 + Y_{\mathrm{tr}}(s) + \frac{G[0]}{s}$.

Usando Mathematica e calcolando la risposta libera, mettendo in evidenza come incognita le componenti del vettore di stato iniziale che stiamo cercando, ed estraendone il numeratore: $40 + 80s - (2+s)^3(5+s) + 40s((-23+s(19+s(9+s)))x_{10} - (65+s(76+s(14+s)))x_{20} + (44+s(32+s(10+s)))x_{30} + (1+2s)(32+s(10+s))x_{40})$, possiamo estrarre i coefficienti del polinomio, ottenendo un vettore in 5 componenti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 12-920\,x_{10}-2600\,x_{20}+1760\,x_{30}+1280\,x_{40} \\ -42+760\,x_{10}-3040\,x_{20}+1280\,x_{30}+2960\,x_{40} \\ -11+360\,x_{10}-560\,x_{20}+400\,x_{30}+840\,x_{40} \\ -1+40\,x_{10}-40\,x_{20}+40\,x_{30}+80\,x_{40} \end{pmatrix}$$

Potremmo anche escludere la componente 0, ma la includiamo, determinando i coefficienti x_{i0} tale per cui questo sistema si annulla; otteniamo il vettore stato iniziale cercato:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Per verificare che effettivamente il vettore stato iniziale trovato sia giusto, e dunque la risposta complessiva al gradino sia pari solo alla componente di regime, possiamo verificare con Mathematica:

$$C(sI - A)^{-1}x_0 + \frac{G[s]}{s} = \frac{1}{40\,s}$$

Dunque la verifica conferma che la risposta complessiva al gradino, somma della risposta libera e della risposta forzata è pari solo alla componente della risposta a regime, la cui antitrasformata di Laplace è $\frac{1}{40}1(t)$.

QUESITO TD (b)

1) Calcolare i modi naturali del sistema:

Data la seguente matrice A ∈ R^{nxn}, dove n rappresenta il numero di stati del sistema lineare a tempo invariante tempo-discreto (LTI-TD):

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{97}{120} & \frac{53}{120} & -\frac{1}{40} & \frac{7}{120} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{217}{120} & -\frac{53}{120} & \frac{41}{40} & -\frac{127}{120} \end{pmatrix}$$

Per studiare i modi naturali del sistema, rappresento la geometria del problema partendo dal calcolo del suo polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (1 + 2\lambda)^2(2 + 3\lambda)(1 + 5\lambda)$$

Ponendo l'intero polinomio caratteristico pari a 0, ottengo i seguenti autovalori:

- $\lambda = -\frac{1}{5}$, che presenta una molteplicità algebrica (m.a.) pari ad uno, e dunque è un autovalore semplice che genera il modo naturale $(-\frac{1}{5})^k$;
- $\lambda = -\frac{2}{3}$, che presenta una molteplicità algebrica (m.a.) pari ad uno, e dunque è un autovalore semplice che genera il modo naturale $(-\frac{2}{3})^k$;
- $\lambda = -\frac{1}{2}$, che presenta molteplicità algebrica (m.a.) pari a due, quindi è un autovalore multiplo, e dunque bisogna studiare attentamente i modi naturali ad esso legati attraverso la Jordanizzazione.

Per valutare la forma canonica di Jordan, dovrò considerare la molteplicità geometrica, numero di autovettori linearmente indipendenti nel sottospazio, dell'autovalore multiplo (che sarà pari ad uno), per determinare il numero di miniblocchi di Jordan presenti dentro il blocco di Jordan legato all'autovalore multiplo; ipotizziamo di avere una matrice Ã, simile alla matrice A, tale che: $AT = T\tilde{A}$, dove T ∈ $R^{4,4}$ ed è anche detta matrice di cambiamento di base. La matrice Ã sarà proprio la forma canonica di Jordan, ed una volta estratta, secondo la Jordanizzazione:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

con questa matrice posso studiare i modi naturali del sistema, analizzando la sua potenza k-esima $\tilde{A}^k$, che li metterà in evidenza:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & (-1)^{1+k}\, 2^{1-k}\, k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

Oltre ai due modi già analizzati in precedenza legati agli autovalori semplici $(-\frac{2}{3})^k e (-\frac{1}{5})^k$, ne troviamo altri due, all' interno del blocco di Jordan legato all'autovalore multiplo: $(-\frac{1}{2})^k e (-1)^{1+k} 2^{1-k} k$; $(-1)^{1+k} 2^{1-k} k$ può essere riscritto come $k(-\frac{1}{2})^{k-1}$oppure come il binomiale: $\binom{k}{1}(-\frac{1}{2})^{k-1}$. Dunque, posso definire l'insieme dei modi naturali del sistema: $((-\frac{2}{3})^k, (-\frac{1}{5})^k, k(-\frac{1}{2})^{k-1}, (-\frac{1}{2})^k$).

2) Calcolare la risposta libera nello stato nell'ipotesi che lo stato iniziale sia:

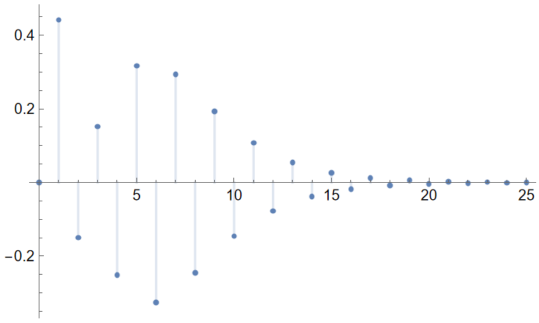
$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo la risposta libera come il prodotto tra la potenza k-esima della matrice A e il vettore stato iniziale assegnato $x_l[k] = A^k x_0$; la risposta libera sarà un vettore di 4 componenti, ognuna delle quali, al netto delle semplificazioni adottate da Mathematica, sarà una combinazione lineare dei modi naturali del sistema (infatti ogni componente sarà somma di 4 addendi):

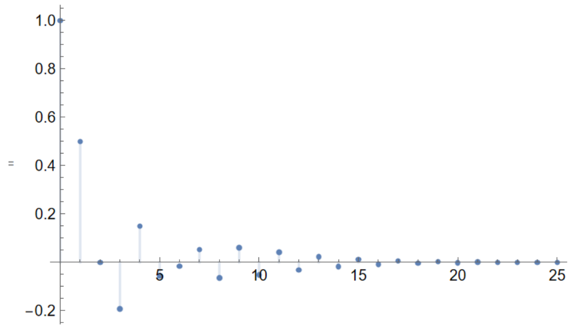
$$\begin{pmatrix} \frac{53}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{923}{126}\left(-\frac{1}{5}\right)^k - \frac{185}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^k 2^{-1+k} + \frac{95}{3}(-1)^k\, 2^{-2-k}\, k \\ -\frac{13}{9}(-1)^k\, 2^{1-k} - \frac{5}{7}(-2)^k\, 3^{2-k} + \frac{26}{63}(-1)^k\, 5^{2-k} + \frac{19}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k k \\ -\frac{25}{3}(-1)^k\, 2^{1-k} + \frac{25}{7}(-2)^k\, 3^{2-k} - \frac{13}{21}(-1)^k\, 5^{2-k} - 19\left(-\frac{1}{2}\right)^k k \\ -\frac{117}{14}\left(-\frac{1}{5}\right)^k - 11(-1)^k\, 2^{1-k} + \frac{425}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^k 2^{-1+k} - 57(-1)^k\, 2^{-2-k}\, k \end{pmatrix}$$

Analizzo tramite un grafico, ognuna di queste componenti:

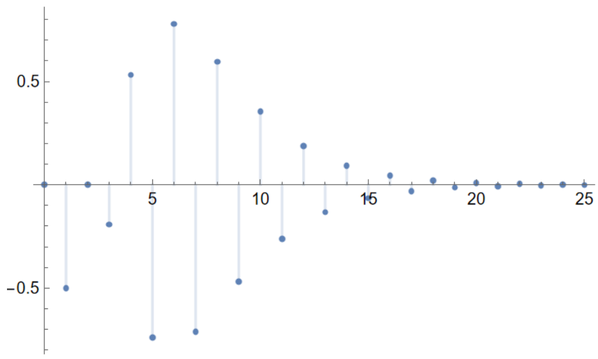
- Grafico per $x_l[k][[1]]$:



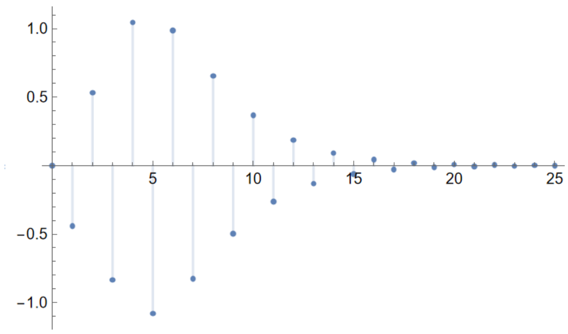
- Grafico per $x_l[k][[2]]$:



- Grafico per $x_l[k][[3]]$:



- Grafico per $x_l[k][[4]]$:



Noto che analizzando con un grafico ciascuna componente, ognuna di queste convergerà a 0, questo succede perché ogni modo naturale è una successione potenza avente base in modulo inferiore ad 1.

3) Studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;

Per analizzare come e quali modi naturali attivare e quali no sulla risposta libera, riprendo la matrice T di cambiamento di base e la potenza k-esima della forma canonica di Jordan:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{37}{85} & -\frac{5}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{71}{81} \\ -\frac{18}{85} & -\frac{4}{9} & -\frac{16}{9} & -\frac{100}{81} \\ \frac{18}{17} & \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{50}{27} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & (-1)^{1+k}\, 2^{1-k}\, k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

Per azzerare un modo naturale all'interno della risposta libera mi basta prendere un vettore stato iniziale che è combinazione lineare di tutte le colonne della matrice T esclusa quella allineata con la corrispondente alla forma canonica di Jordan dove è presente il modo naturale che voglio "azzerare"; ad esempio, volendo azzerare il modo $(-1)^{1+k}2^{1-k}k$, prendo come vettore stato iniziale un vettore le cui componenti sono combinazione lineare della prima, della seconda e della quarta colonna di T, escludendo la terza colonna:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{12857}{6885} \\ -\frac{13018}{6885} \\ \frac{1948}{459} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ed applicando la formula precedente, il prodotto tra la potenza k-esima di A ed il vettore x_0 appena considerato $x_l[k] = A^k x_0$, otterremo come risposta libera:

$$\begin{pmatrix} -\frac{37}{85}\left(-\frac{2}{3}\right)^k - \frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{71}{81}\left(-\frac{1}{5}\right)^k \\ -\frac{1}{9} \times 2^{2-k}\, e^{i k \pi} - \frac{1}{85} \times 2^{1+k} \times 3^{2-k}\, e^{i k \pi} - \frac{4}{81} \times 5^{2-k}\, e^{i k \pi} \\ \frac{1}{3} \times 2^{2-k}\, e^{i k \pi} + \frac{1}{17} \times 2^{1+k} \times 3^{2-k}\, e^{i k \pi} + \frac{2}{27} \times 5^{2-k}\, e^{i k \pi} \\ \left(-\frac{2}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

Dove, al netto delle semplificazioni adottate da Mathematica, ogni componente è combinazione lineare di 3 modi naturali (ogni componente ha 3 addendi), ed in ognuna di queste è escluso il modo $(-1)^{1+k}2^{1-k}k$. Inoltre, compare il termine $e^{ik\pi} = (-1)^k$.

Volendo invece azzerare nella risposta libera il modo naturale $(-\frac{2}{3})^k$, prendo come stato iniziale una combinazione lineare della seconda, della terza e della quarta colonna:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{188}{81} \\ -\frac{280}{81} \\ \frac{134}{27} \\ 2 \end{pmatrix}$$

E riapplicando la formula per il calcolo della risposta libera:

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{9} \times 2^{-k} e^{i k \pi} - \frac{71}{81} \times 5^{-k} e^{i k \pi} + \frac{5}{9} \times 2^{1-k} e^{i k \pi} k \\ -\frac{5}{9} \times 2^{2-k} e^{i k \pi} - \frac{4}{81} \times 5^{2-k} e^{i k \pi} + \frac{1}{9} \times 2^{3-k} e^{i k \pi} k \\ \frac{7}{9} \times 2^{2-k} e^{i k \pi} + \frac{2}{27} \times 5^{2-k} e^{i k \pi} - \frac{1}{3} \times 2^{3-k} e^{i k \pi} k \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{5}\right)^k + (-1)^{1+k} 2^{1-k} k \end{pmatrix}$$

Sarà un vettore le cui componenti saranno combinazione lineare di tre modi naturali, escluso $(-\frac{2}{3})^k$.

Se invece nella risposta libera volessi attivare solo il modo naturale $(-\frac{2}{3})^k$, dovrei dunque azzerare tutti gli altri modi, e per azzerarli devo prendere una combinazione lineare che in questo caso coincide solo alla prima colonna. Allora il vettore stato iniziale x_0:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{37}{85} \\ -\frac{18}{85} \\ \frac{18}{17} \\ 1 \end{pmatrix}$$

E la risposta libera ottenuta sarà:

$$\begin{pmatrix} -\frac{37}{85} \left(-\frac{2}{3}\right)^k \\ -\frac{1}{85} \times 2^{1+k} \times 3^{2-k} e^{i k \pi} \\ \frac{1}{17} \times 2^{1+k} \times 3^{2-k} e^{i k \pi} \\ \left(-\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}$$

Dunque, per attivare un solo modo all'interno della risposta libera, basta prendere la colonna associata al modo all'interno della matrice di cambiamento di base come una sua combinazione lineare.

Volendo fare un altro esempio, attivando solo il modo naturale $(-\frac{1}{5})^k$, nel calcolo della risposta libera, prendo come vettore stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{71}{81} \\ -\frac{100}{81} \\ \frac{50}{27} \\ 1 \end{pmatrix}$$

E la risposta libera sarà:

$$\begin{pmatrix} -\frac{71}{81} \left(-\frac{1}{5}\right)^k \\ -\frac{4}{81} (-1)^k 5^{2-k} \\ \frac{2}{27} (-1)^k 5^{2-k} \\ \left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

4) Calcolo della funzione di trasferimento del sistema, i suoi poli e zeri;

La funzione di trasferimento (F.D.T.) sarà un rapporto tra due polinomi, che dipenderà dai parametri del sistema, le matrici A, B, C e D, facilmente ottenibile dalla formula $G(z) = C(z\mathrm{I} - A)^{-1}B + D$, nel nostro caso D = 0, perché i parametri assegnati sono:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Cc = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal calcolo otterrò G(z), la mia funzione di trasferimento:

$$\frac{60 \times (-1 + 3z)}{(1 + 2z)^2 \left(2 + 13z + 15z^2\right)}$$

Dalla funzione di trasferimento posso studiare gli zeri e i poli di quest'ultima: gli zeri sono i valori che annullano il numeratore della funzione di trasferimento, nel nostro caso ci sarà un solo "zero" $z = \frac{1}{3}$; i poli della funzione di trasferimento sono invece i valori che annullano il denominatore della F.D.T., ed in questo caso visto che il massimo grado del denominatore coincide con il numero di stati del sistema, il denominatore della funzione di trasferimento coincide proprio con il polinomio caratteristico di A e dunque i poli coincidono con gli autovalori del sistema; questa considerazione è rilevante perché in questi casi per studiare i modi naturali del sistema basterebbe studiare la funzione di trasferimento. Prendendo i poli della funzione di trasferimento:

$$\left\{\left\{z \to -\frac{2}{3}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$$

Posso anche dare una considerazione riguardo la stabilità del sistema; gli autovalori del sistema, come vediamo, in modulo sono tutti inferiori ad 1 e dunque si può affermare che il sistema è asintoticamente stabile, questo implica la BIBO stabilità, in quanto i poli si estraggono dagli autovalori del sistema ed ognuno dei poli in modulo sono tutti inferiori ad 1.

5) Calcolo della risposta all'impulso del sistema:

La risposta all'impulso è definita come l'antitrasformata z della funzione di trasferimento $g(t) = \zeta^{-1}(G(z))$, utilizzata per descrivere la risposta di un sistema dinamico ad una perturbazione generica, inizio scrivendo in fratti semplici (in maniera simbolica) secondo la z-trasformata la mia funzione di trasferimento:

$$-30 - \frac{400z}{(1 + 2z)^2} + \frac{1120z}{3 \times (1 + 2z)} - \frac{7290z}{7 \times (2 + 3z)} + \frac{20000z}{21 \times (1 + 5z)}$$

$$C_0 + C_{22}\left(\frac{z}{\left(\frac{1}{2} + z\right)^2}\right) + C_{21}\left(\frac{z}{\frac{1}{2} + z}\right) + C_1\left(\frac{z}{\frac{2}{3} + z}\right) + C_3\left(\frac{z}{\frac{1}{5} + z}\right)$$

Il termine C_0 è un termine costante ed è detto termine impulsivo, non genera nessun modo naturale all'interno del sistema, ma è legato al monomio z, informazione che servirà per calcolare i termini C_{ij}con la formula di Heaviside:

$$C_1 = \lim_{z \to -\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} + z\right) \left(\frac{G[z]}{z}\right)[[1, 1]]$$

$$-\frac{2430}{7}$$

$$C_3 = \lim_{z \to -\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} + z\right) \left(\frac{G[z]}{z}\right)[[1, 1]]$$

$$\frac{4000}{21}$$

$$C_{22} = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + z\right)^2 \left(\frac{G[z]}{z}\right)[[1, 1]]$$

$$-100$$

$$C_{21} = \frac{1}{1\,!} \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \partial_z \left(\left(\frac{1}{2} + z\right)^2 \left(\frac{G[z]}{z}\right)\right)[[1, 1]]$$

$$\frac{560}{3}$$

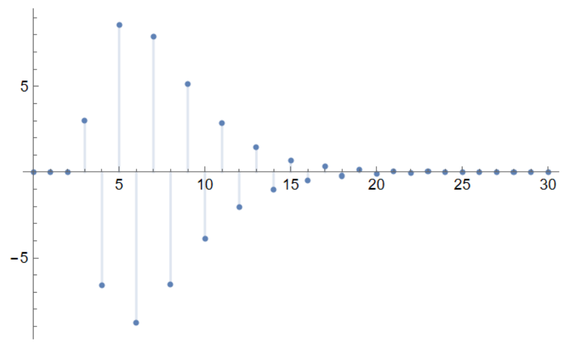
$$C_0 = \lim_{z \to 0} z \left(\frac{G[z]}{z}\right)[[1, 1]]$$

$$-30$$

Una volta calcolati tutti i coefficienti ottengo:

$$g(k) = -30\delta(k) - 400k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} 1(k) + \frac{2240}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k) - \frac{7290}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^k + \frac{4000}{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

Dove $\delta(k)$ come detto in precedenza indica il termine impulsivo, che si valuta solo per k = 0 e per k > 0 non viene più considerato. Volendo graficare la risposta all'impulso:



Analizzando il grafico si nota che la risposta all'impulso nei primi 3 istanti (k=0, k=1, k=2) di tempo vale 0, questo è dovuto alla differenza tra i poli della funzione di trasferimento (4) e gli zeri della funzione di trasferimento (1) (4 – 1 = 3). La risposta all'impulso convergerà a zero, visto che tutte le basi delle successioni potenza sono tutte in modulo inferiori ad 1, e questo si può dimostrare anche applicando il teorema del valore finale per la z-trasformata, essendo rispettate tutte le condizioni, alla risposta all'impulso:

$$\lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) G[z]\,[[1, 1]]$$

$$0$$

6) Calcolo della risposta al gradino ed il suo grafico:

Definisco la risposta al gradino come l'antiZ-trasformata del prodotto tra la funzione di trasferimento del sistema e la z-trasformata del gradino che è pari ad $U(z) = \frac{z}{z-1}$, $Y_f(z) = G(z)U(z)$; una volta definito questo prodotto come:

$$\frac{60\,z\,(-1+3\,z)}{(-1+z)\,(1+2\,z)^2\,(2+13\,z+15\,z^2)}$$

passo alla scomposizione in fratti semplici in maniera simbolica secondo la Z-trasformata, dove si aggiunge un fratto semplice, la cui antiZ-trasformata è il gradino:

$$D_1\left(\frac{z}{z-1}\right) + D_{22}\left(\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right) + D_{21}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right) + D_3\left(\frac{z}{z+\frac{2}{3}}\right) + D_4\left(\frac{z}{z+\frac{1}{5}}\right)$$

Una volta calcolati tutti i coefficienti D_{ij} secondo la formula di Heaviside:

$$D_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)$$

$$\frac{4}{9}$$

$$D_3 = \lim_{z\to -\frac{2}{3}}\left(\left(z+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$-\frac{972}{7}$$

$$D_4 = \lim_{z\to -\frac{1}{5}}\left(\left(z+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$\frac{2000}{63}$$

$$D_{22} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}}\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$-\frac{100}{3}$$

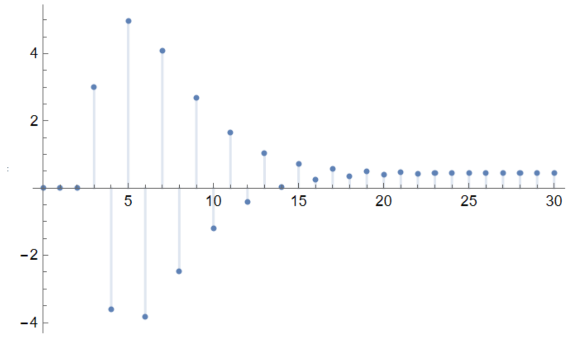
$$D_{21} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\partial_z\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$\frac{320}{3}$$

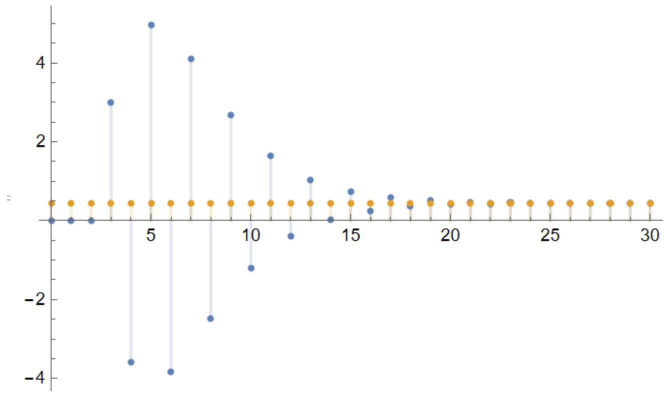
Calcolando tutte le antiZ-trasformate posso scrivere la risposta al gradino nel dominio del tempo:

$$y(k) = \frac{4}{9}1(k) - \frac{100}{3}\binom{k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}1(k) + \frac{320}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}1(k) - \frac{972}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}1(k) + \frac{2000}{63}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}1(k)$$

E volendola graficare:



Inoltre, possiamo dare una rappresentazione rispetto il suo valore di regime, che è il primo addendo della risposta al gradino, notando come andando avanti nel tempo, la risposta si assesti proprio a questo valore:



7) Calcolo della risposta alla rampa:

Per lo studio della risposta alla rampa definisco un ingresso u(k) = k come una normalissima retta che passa dal primo e dal terzo quadrante (bisettrice primo terzo quadrante) ed eseguendone la z-trasformata $U\ (z) = \frac{z}{(-1+z)^2}$, definisco la risposta alla rampa come l'antiZ-trasformata del prodotto tra la funzione di trasferimento e la U(z) appena considerata: $y_f(z) = G[z]U[z]$ e dunque portandola nel dominio del tempo $y_{rampa}(k) = \zeta^{-1}(y_f(z))$.

Scrivendo la risposta alla rampa nel dominio z:

$$\frac{60\, z\ (-1+3\, z)}{(-1+z)^2\ (1+2\, z)^2\ \left(2+13\, z+15\, z^2\right)}$$

E scomponendola in maniera simbolica in fratti semplici:

$$D_{12}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) + D_{11}\left(\frac{z}{z-1}\right) + D_{22}\left(\frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2}\right) + D_{21}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right) + D_3\left(\frac{z}{z+\frac{2}{3}}\right) + D_4\left(\frac{z}{z+\frac{1}{5}}\right)$$

Calcolando i coefficienti D_{ij} usando la formula di Heaviside e le antiZ-trasformate ottengo la risposta alla rampa:

$$D_{12} = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 \left(\frac{y_f[z]}{z}\right)$$

$$\frac{4}{9}$$

$$D_{11} = \lim_{z\to 1} \partial_z \left((z-1)^2 \left(\frac{y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$-\frac{76}{135}$$

$$D_{22} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$200/9$$

$$D_{21} = (1/1!) \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \partial_z \left((z+1/2)^2 (y_f[z]/z)\right)$$

$$-\frac{1520}{27}$$

$$D_3 = \lim_{z\to -\frac{2}{3}} \left(\left(z+\frac{2}{3}\right) \left(\frac{y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$\frac{2916}{35}$$

$$D_4 = \lim_{z\to -\frac{1}{5}} \left(\left(z+\frac{1}{5}\right) \left(\frac{y_f[z]}{z}\right)\right)$$

$$-\frac{5000}{189}$$

$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = k\,1(k) \rightarrow Che\ rappresenta\ proprio\ l'antitrasformataZ\ della\ rampa$$

$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1(k)$$

$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2}\right) = \binom{k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ 1(k)$$

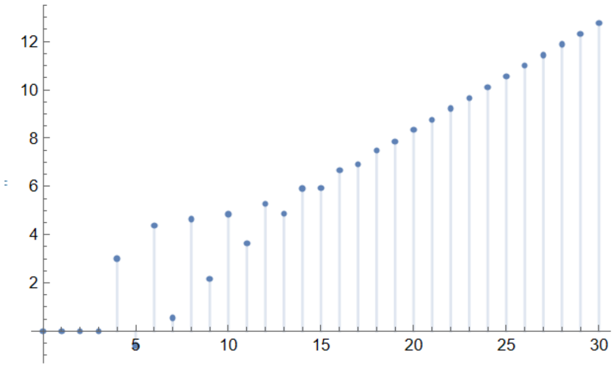
$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$

$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z+\frac{2}{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^k 1(k)$$

$$\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{5}}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^k 1(k)$$

$$y_{rampa}(k) = \frac{4}{9}k\,1(k) - \frac{76}{135}1(k) + \frac{200}{9}\binom{k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}1(k) - \frac{1520}{27}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}1(k) + \frac{2916}{35}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}1(k) - \frac{5000}{189}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}1(k)$$

Rappresentandola graficamente:



Posso notare come per k -> ∞ anche $y_{rampa}(k) \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} y_{rampa}[k]$$

$$\infty$$

8) un possibile modello i/u a partire dalla funzione di trasferimento ottenuta;

Definiamo la funzione di trasferimento come un rapporto $G(z) = \frac{y(z)}{u(z)}$, dove in questo caso con y(z) indichiamo una generica risposta definita con la funzione di trasferimento; moltiplico ambo i membri per la quantità u(z), trasformata zeta di un generico ingresso u(k), e per il denominatore della funzione di trasferimento, ed eseguendo le dovute semplificazioni mi ritrovo una identità algebrica:

$$-60u(z) + 180z(u(z)) = 60z^4 y_f(z) + 112z^3 y_f(z) + 75z^2 y_f(z) + 21z y_f(z) + 2y_f(z)$$

Applicando il teorema dello shifting sinistro (anticipo) di ordine n sulla Z-trasformata ottengo un'identità alle differenze, che sarà la rappresentazione I/U del sistema dinamico nel dominio del tempo k, da risolvere assegnando le condizioni iniziali che dipendono dal vettore stato iniziale assegnato:

$$60y(k+4) + 112y(k+3) + 75y(k+2) + 21y(k+1) + 2y(k) = 180u(k+1) - 60u(k)$$

Per calcolare la risposta libera a partire da questa rappresentazione I/U, una volta eseguite tutte le semplificazioni del caso attraverso Mathematica, come l'azzeramento di U [0] e la separazione dalla componente forzata, bisognerà assegnare le condizioni iniziali alla risposta libera ottenuta:

$$\frac{21\,z\,y[0] + 75\,z^2\,y[0] + 112\,z^3\,y[0] + 60\,z^4\,y[0] + 75\,z\,y[1] + 112\,z^2\,y[1] + 60\,z^3\,y[1] + 112\,z\,y[2] + 60\,z^2\,y[2] + 60\,z\,y[3]}{(1+2\,z)^2\,(2+13\,z+15\,z^2)}$$

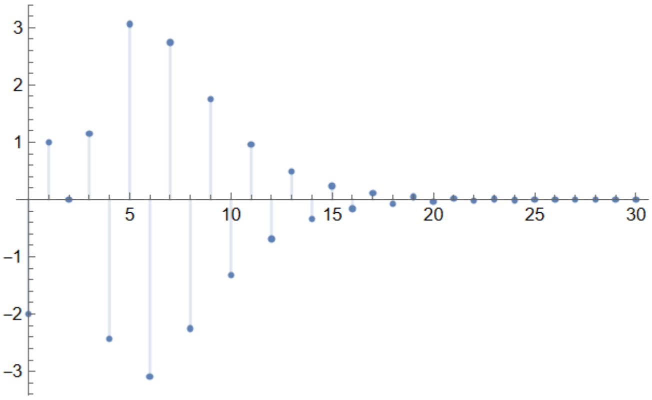
```
y[0] = (Cc.x0)[[1, 1]]
-2

y[1] = (Cc.A.x0)[[1, 1]]
1

y[2] = (Cc.A.A.x0)[[1, 1]]
0

y[3] = (Cc.A.A.A.x0)[[1, 1]]
23
--
20
```

Assegnate le condizioni iniziali sopra riportate ottengo la risposta libera, e da questa, con il solito procedimento di scomposizione in fratti semplici per la Z-trasformata e le applicazioni delle dovute antiZ-trasformate, ottengo la risposta libera nel dominio k del tempo, che dovrà essere una combinazione lineare dei modi naturali del sistema:

$$\frac{102\,z - 38\,z^2 - 164\,z^3 - 120\,z^4}{(1 + 2\,z)^2\,\left(2 + 13\,z + 15\,z^2\right)}$$

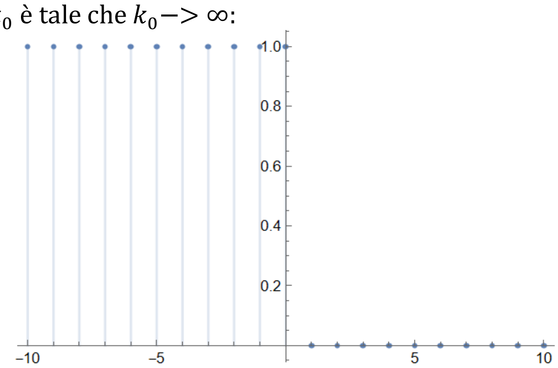
$$rispLibera[k] = -\frac{95}{3}\binom{k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} 1(k) + \frac{652}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} 1(k) - \frac{810}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k} 1(k) + \frac{2600}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k} 1(k)$$

Rappresentandola graficamente:



Inoltre, notiamo come si “conserva” sempre la convergenza a zero della risposta libera.

9) tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all’ingresso u(k) = 1(-k):
L’ingresso u(k) = 1(-k) è un gradino di ampiezza unitaria, applicato nel “passato remoto” e dunque l’istante di applicazione di questo gradino k_0 è tale che $k_0 -> \infty$:



All’istante k = 0 commuta e cambia valore a 0, ci saranno 2 casi da analizzare: la risposta del sistema per k < 0 e la risposta del sistema per k ≥ 0; servirà una funzione definita a tratti. Scrivo dunque la risposta al gradino unitario, applicato in un istante k_0 diverso da 0, riprendendo i coefficienti della scomposizione in fratti semplici dal calcolo della risposta al gradino precedente. Ma, essendo che per k>0, si ha un’assenza di ingresso, per valutare la risposta libera serviranno delle condizioni iniziali, analizzando tutto il sistema da un’ottica I/U; le condizioni iniziali saranno tutte uguali tra di loro e saranno pari proprio a C_4=G [1], perché dovranno essere costanti al valore di uscita per k<0 che è proprio C_4. Riprendendo la risposta libera, come equazione alle differenze, calcolata in precedenza nel modello I/U e assegnando le nuove condizioni iniziali:

$$\frac{21\,z\,y[0]+75\,z^2\,y[0]+112\,z^3\,y[0]+60\,z^4\,y[0]+75\,z\,y[1]+112\,z^2\,y[1]+60\,z^3\,y[1]+112\,z\,y[2]+60\,z^2\,y[2]+60\,z\,y[3]}{(1+2\,z)^2\,(2+13\,z+15\,z^2)}$$

```
y[0] = y[1] = y[2] = y[3] = 4/9
```

$\frac{4}{9}$

Otterrò una nuova risposta libera nel dominio di z:

$$\frac{\frac{1072\,z}{9}+\frac{988\,z^2}{9}+\frac{688\,z^3}{9}+\frac{80\,z^4}{3}}{(1+2\,z)^2\,(2+13\,z+15\,z^2)}$$

che attraverso il solito procedimento di scomposizione in fratti semplici e calcolo dei coefficienti con formula di Heaviside, otterrò la risposta libera come successione nel dominio del tempo k:

$$f(k)=-\frac{648}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^k 1(k)-\frac{80}{3}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}1(k)+\frac{160}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)+\frac{2500}{63}\left(-\frac{1}{5}\right)^k 1(k)$$

Per ottenere la risposta all'ingresso u(k) = 1(-k) dovrò shiftare di 3 unità di tempo verso sinistra (anticipo) la mia risposta libera, operazione necessaria per studiare il comportamento della risposta libera per k>0, definendo la funzione a tratti necessaria alla risoluzione:

$$y_{fin}[k\_] := \begin{cases} G[1][[1,1]] & k<0 \\ f[k+3] & k\geq 0 \end{cases}$$

Graficando la risposta: