広義積分 留数定理 ベータ関数

夏果しぃ

広義積分 $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ の値を求めよ.

1 留数定理を用いた解法

積分の範囲を拡張し

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x^4+1}dx$$

また $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^4+1}$ と置き複素数 z に拡張し $f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^4+1}$ とする. またこの時の I の範囲 C は

$$C = \lim_{R\to\infty} I_R \cup C_R$$
$$I_R = \{-R < x < R\}\ ,\ C_R = \{z = Re^{j\theta} | 0 \le \theta \le \pi\}$$

であり、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int_{C_\infty} f(z)dz \\ &= I + \int_{C_\infty} f(z)dz. \end{aligned} \tag{1}$$

$\int_C f(z)dz$ について考える.

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

と置き、ここで

$$\begin{aligned} z_n^4 &= -1 = e^{j(2n+1)\pi} && (n = 0,1,2,3) \\ z_n &= e^{j\frac{(2n+1)}{4}\pi} && (n = 0,1,2,3) \end{aligned}$$

である. 但し虚数単位 $j = \sqrt{-1}$ である. 留数を計算する.

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{1+z^4}$$

このまま極限操作を行うと不定形になるのでロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{8z_0^3} = \frac{1}{8}e^{-j\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{8}z_2 \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}(-1-j)\end{aligned}$$

であるとわかる. 同様にして

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{8z_1^3} = \frac{1}{8}e^{-j\frac{9}{4}\pi} = \frac{1}{8}z_3 = \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-j)$$

である. これらより

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= j2\pi\left[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1)\right] \\ &= j2\pi\left[-1-j+1-j\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

次に $\int_{C_\infty} f(z)dz$ について考える.

$$C_R = \{z = Re^{j\theta} | 0 \le \theta \le \pi\}\ ,\ \frac{dz}{d\theta} = jRe^{j\theta}$$

と置換し

$$\begin{aligned}\int_{C_\infty} f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi f(e^{j\theta})jRe^{j\theta}d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{j}{2R^3}\int_0^\pi \frac{e^{j\theta}}{e^{j4\theta}+\frac{1}{R^4}} = 0.\end{aligned}$$

以上より式 (**??**) から

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

となる.

2 因数分解と部分分数分解を用いた解法

分母を因数分解する.

$$\begin{aligned}x^4+1 &= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\end{aligned}$$

以上より

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

となる. 部分分数分解を行うために

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{a_1x+a_0}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{a_3x+a_2}{x^2+\sqrt{2}x+1} \tag{2}$$

と置く. 恒等式

$$\begin{aligned}1 =& (a_1x+a_0)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (a_3x+a_2)(x^2-\sqrt{2}x+1) \\ =& x^3(a_1+a_3) + x^2(-\sqrt{2}a_1+a_0+\sqrt{2}a_3+a_2) \\ &+ x(a_1-\sqrt{2}a_0+a_3+\sqrt{2}a_2) + (a_0+a_2)\end{aligned}$$

に対して両辺で同じ次数で等しくなるため

$$\begin{aligned}a_1+a_3 &= 0 \\ -\sqrt{2}a_1+a_0+\sqrt{2}a_3+a_2 &= 0 \\ a_1-\sqrt{2}a_0+a_3+\sqrt{2}a_2 &= 0 \\ a_0+a_2 &= 1.\end{aligned}$$

となる. この連立一次方程式を解き $a_0=\frac{1}{2}, a_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}, a_2=\frac{1}{2}, a_3=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
式 (**??**) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1}=&\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\ =&\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right.\\ &\left.+\frac{2}{1+(\sqrt{2}x-1)^2}+\frac{2}{1+(\sqrt{2}x+1)^2}\right)\end{aligned}$$

となる. 積分すると

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{4}\int_0^\infty\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right.\\ &\left.+\frac{2}{1+(\sqrt{2}-1)^2}+\frac{2}{1+(\sqrt{2}+1)^2}\right)dx\\ =&\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)\right.\\ &\left.+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)\right]_0^\infty\\ =&\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right.\\ &\left.+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)\right]_0^\infty\\ =&\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right.\\ &\left.-\lim_{x\to0}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}-0\right).\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)&=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &=\log 1=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)&=\log\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\\ &=\log 1=0\end{aligned}$$

より $I=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

3 ベータ関数を用いた解法

I に関して

$$x^4=y\ ,\ dx=\frac{1}{4y^{\frac{3}{4}}}dy\ ,\ 0\le y\le\infty$$

と置換し

$$I=\int_0^\infty\frac{1}{1+y}\frac{dy}{4y^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{y^{-\frac{3}{4}}}{1+y}dy$$

となる. ここでベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ とガンマ関数 $\Gamma(s)$ の関係式

$$\mathrm{B}(l,m)=\int_0^\infty\frac{y^{l-1}}{(1+y)^{l+m}}dy=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

を準備する.I は

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)}\\ &=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}).\end{aligned}$$

となる. 相反公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ を用いて

$$I=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

となる.