目次

1．実験目的　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　 p.2

2．方法・原理 p.2~p.6

3．実験装置・器具・手順 p.7

4．実験結果 p.7~p.10

5．課題・考察 p.10~p.14

6．結論 p.14

7．参考文献 p.14

1．実験目的

本実験では物体の回しにくさを表す慣性モーメントを実験的に求め、求めた値が理論値との差が小さく、実験的に証明されるものであることを確かめることが実験目的となる。

2．方法・原理

2.1　慣性モーメントの導出

　半径ｒ、厚さLで、密度の物体を質点の集まりでできていると考え、その物体の中の小さな一部分が持つ微小な慣性モーメントIを考える。それを全て足し合わせると物体の慣性モーメントとなるため慣性モーメントIは

と表すことができる。ここでを具体的に説明する。はその部分が位置する中心からの距離rとその部分の微小な質量を用いて

と表せる。また

と表現できる。より、最終的に慣性モーメントIは

と表すことができる。

2.2　慣性モーメントの和と差の定理

　慣性モーメントがである二つの物体がある時、二つの物体の重心を通り、面に垂直な軸に関する慣性モーメントは

と表現できる。

2.3 平行軸の定理

原点から重心が距離h離れている、物体を原点を中心として回した時の慣性モーメントを考える。その物体の重心を通り面に垂直な軸に関する慣性モーメントを、物体の質量をMとすると

の関係式が成り立つ。これを平行軸の定理という。

2.4　直交軸の定理

　空間において、重心が原点にあり平面に平行な板を考える。軸、軸、軸に関する慣性モーメントをそれぞれとすると

の関係式が成り立つ。これを直交軸の定理と呼ぶ。

2.5 慣性モーメントと周期Ｔの関係

　一自由度系の振動をする物体の時刻における角度と物体の慣性モーメント関係は、慣性モーメントを、ばね定数をとすると

となる。この微分方程式においてとすると(8)式は

となる。よって

となり、またこの物体の固有振動数が(10)で求められることがわかる。

ここでより周期Ｔと慣性モーメントの関係式は

となる。（kはばね定数）

2.6　エネルギー保存則

図2に示すような実験装置で、回転軸巻き付けられた糸がおもりにつるされている。おもりを落下させると、回転軸、および回転体は回転運動を開始する。この実験装置全体のエネルギーを考えた時に、エネルギー保存則から時刻tにおける物体の高さH、回転体の角速度ω、回転軸、および回転体の慣性モーメントをI、抵抗によって散逸したエネルギーをE、重力加速度をg、回転軸の半径をｒとすると、式(12)のような関係式が成り立つ。

m、H、rは既知であるため、ωとEを測定すれば、式(12)から回転軸を含んだ回転体の慣性モーメントIを求めることができる。

テキスト が含まれている画像

高い精度で生成された説明

図1　実験装置

2.7　角速度ωの測定

　おもりがHだけ落下し、糸から回転軸から離れると、回転体の回転数は減少し、最終的に０になる。糸が回転軸から離れて回転体が静止するまでの時間をT、またその間に回転体が回転した数をNとする。

　糸が回転軸から離れた後には、図2に示すように、軸受から回転軸に摩擦力が作用する。ここでMは回転軸を含んだ回転体の質量、は回転軸と軸受との間の摩擦係数である。

以上より回転体の運動方程式は、

と表される。よって式(13)から、回転角速度は次式のように表される。

ここでは回転軸軸受間の相対速度によらずが一定と仮定し、すなわちは一定となる。ここでとすると、式(11)は

となり、式(15)を積分すると、

となる。ここでωはおもりがHだけ落下し、糸が軸から離れる瞬間の角速度を示す。また糸が軸から離れる瞬間を時間の原点とする。

　式(16)から、回転体の角速度()と時間の関係は、傾き-α、切片ωとする1次関数となる。糸が回転軸から離れた後回転体が静止する前の回転数をN、この間の時間をTとすると、平均回転数はとなり、平均角速度は

また、糸が回転軸から離れた瞬間の角速度ωと、平均角速度の間には

の関係が成立する。よって、式(14)、(15)から糸が回転軸から離れた瞬間の回転体のか角速度ωが求められる。

2.8　損失エネルギーEの測定

　回転体が回転している間、軸受の摩擦力および空気抵抗が作用する。糸が自由な回転をしている場合に、一回転につき失われるエネルギーをeとする。糸が回転軸か離れる瞬間に回転体の持っている運動エネルギーは、回転体が静止するまでの間に抵抗力によってすべて失われる。すなわち

が成立する。よって、1回転あたりに失われるエネルギーは

と表される。

おもりをつった状態で1回転あたりに失われるエネルギーをe’としたときに、eとe’がほぼ等しいと仮定する。初期状態において糸が回転軸にN’回巻き付けられていたとすると、おもりがHだけ落下する間に失われたエネルギーEは、近似的に

と表すことができる。

　本実験では2つの実験を行う。2つの実験の慣性モーメントの測定方法を以下に示す。

【実験D-1】

図1のように一体となった2枚の板Ａと棒Ｃに下側から2枚の板Ｂをあて、A-B間に三角板を挟んで2本のワイヤにつるす。その際、2本のワイヤの間隔の中央に枠Ａ、Ｂ、Ｃ自体の重心および全物体の重心が来るようにする。

この三角板を振動させ、N=60 回振動に要する時間を測定から周期Ｔを求める。また台秤で三角板の質量M、および枠の質量mを測定し、式(22)にM,mとa,b,h,T,重力加速度gを代入して三角板の重心を通り板に垂直な軸に関する慣性モーメントIを算出する。

または枠のみの慣性モーメントであり、を枠のみで回転振動させたときの周期とし、枠のみで同様の実験を行い、式(23)に各値を代入してを求める。

テキスト, 写真 が含まれている画像

高い精度で生成された説明

図2 【実験D-1】測定装置概要

【実験D-2】回転体の慣性モーメント

図１のようなおもりを巻き付けた実験装置を用いて慣性モーメントを求める。おもりが落下し始めてから高さHだけ落下するまでに回転した数N‘と時間、糸が回転軸から離れて回転体が静止するまでに回転した数Nと時間を測定する。測定した回転数N、N’、、より、おもりが落下し始めてからHだけ落下するまでの角速度、糸が回転軸から離れて回転体が静止するまでの角速度を求める。式(12)、(21)を用いて

式(24)を得る。算出した角速度を用い、おもりが落下するまでの慣性モーメント、糸が回転軸から離れて回転体が静止するまでの慣性モーメントを高さHを変えて求め、eの値、Iの値がどう変化するか比較する。

3．実験装置・器具・手順

・実験手順

【D-1】

※図2を用いて説明する。

1．台秤で三角板の重さM、枠の重さｍを測定した。

2．測定装置のワイヤの長さh、a、bを測定した。測定後、三角板を板に挟み、ワイヤにつるした。

3．三角板を70度ほど水平に回転させ、三角板を振動させた。振動回数N＝60に要する時間を記録した。

4．3の測定を5回行い、記録した。測定が終わったら三角板を枠から外した。

5．３～４を枠なしの状態で行った。

【D-2】

1．おもりの重さをはかり、おもりが高さH＝900mmのところに来るように、おもりを回転軸に巻き付け、回転しないように手で押さえた

2．手を離すと同時に2つのストップウォッチを押し、測定を開始した。

3．おもりが地面に到達したところで片方のストップウォッチを止めた。

4．回転体が完全に静止した時にもう片方のストップウォッチを止め、記録した。

5．1~4を3回繰り返し、高さHを600、300に変えてそれぞれ測定した。

4．実験結果

【D-1】

測定結果をまとめた表1~3を以下に示す。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 表1　N=60の振動回数時の測定結果 | | | |
| N=60の振動回数（枠と三角板の場合） | | N=60 の振動回数（枠のみの場合） | |
| 測定回数 | 時間[s] | 測定回数 | 時間[s] |
| 1回目 | 81.97 | 1回目 | 93.97 |
| 2回目 | 82.25 | 2回目 | 94.15 |
| 3回目 | 79.69 | 3回目 | 94.34 |
| 4回目 | 88.04 | 4回目 | 94.73 |
| 5回目 | 81.99 | 5回目 | 95.45 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 表2　枠と三角板の計測結果 | | | |
| 名称 | 記号 | 単位 | 値 |
| ワイヤ間の長さ | 2a | mm | 126.4 |
| 枠の長さ | 2b | mm | 286 |
| 高さ | H | mm | 901.0 |
| 周期の平均 | T | S | 1.380 |
| 三角板の重さ | M | kg | 2.1 |
| 枠の重さ | M | kg | 0.3 |
| 三角板の辺の長さ① | P | mm | 242.5 |
| 三角板の辺の長さ② | Q | mm | 231.1 |
| 三角板の辺の長さ③ | S | mm | 216.95 |
| 慣性モーメント | I’ |  | 1.139.E-02 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 表3　枠のみの計測結果 | | | |
| 名称 | 記号 | 単位 | 値 |
| ワイヤ間の長さ | 2a | Mm | 126.4 |
| 枠の長さ | 2b | Mm | 286 |
| 高さ | h | Mm | 901.0 |
| 周期の平均 | T | S | 1.575 |
| 慣性モーメント | Io |  | 1.856.E-03 |

表2、3の慣性モーメントI’、より、三角板の慣性モーメントIは

となる。

【D-2】

測定結果を表4にまとめる。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表4　回転体の計測結果 | | | | | | |
|  | 時間T１[s] | 角速度ω１[rad/s] | 時間T２[s] | 角速度ω２[rad/s] | 回転数N' | 回転数N |
| 高さH=900[mm] | 7.6 | 14.81 | 35.0 | 14.44 | 9 | 31.5 |
|  | 7.2 | 20.88 | 34.4 | 14.89 | 12 | 32.3 |
|  | 7.3 | 20.54 | 35.0 | 13.77 | 12 | 30.3 |
| 高さH=600[mm] | 5.7 | 19.69 | 31.2 | 10.38 | 9 | 21.0 |
|  | 5.8 | 19.35 | 31.0 | 10.87 | 9 | 21.8 |
|  | 5.9 | 17.08 | 30.9 | 11.06 | 8 | 22.0 |
| 高さH=300[mm] | 3.7 | 13.64 | 23.7 | 7.55 | 4 | 12.0 |
|  | 3.9 | 13.04 | 24.2 | 8.03 | 4 | 13.0 |
|  | 4.0 | 9.35 | 25.5 | 7.60 | 3 | 13.0 |

おもりの重さm=0.21kg、重力加速度g=9.81、回転軸の半径r=12.5mmとし、各値を式(20)、(8)を用いて、慣性モーメントIと損失エネルギーeを求める。また求めたIとeを表5にまとめる。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 表5　慣性モーメントIと損失エネルギーeの算出結果 | | | | |
|  | 慣性モーメントI1 | 慣性モーメントI2 | 損失エネルギーe1 | 損失エネルギーe2 |
| 高さH=900[mm] | 1.312.E-02 | 1.380.E-02 | 4.569.E-02 | 4.570.E-02 |
|  | 6.175.E-03 | 1.216.E-02 | 4.174.E-02 | 4.182.E-02 |
|  | 6.268.E-03 | 1.399.E-02 | 4.372.E-02 | 4.381.E-02 |
| 高さH=600[mm] | 4.442.E-03 | 1.604.E-02 | 4.099.E-02 | 4.114.E-02 |
|  | 4.649.E-03 | 1.478.E-02 | 4.000.E-02 | 4.013.E-02 |
|  | 6.193.E-03 | 1.479.E-02 | 4.104.E-02 | 4.114.E-02 |
| 高さH=300[mm] | 4.955.E-03 | 1.624.E-02 | 3.844.E-02 | 3.857.E-02 |
|  | 5.532.E-03 | 1.465.E-02 | 3.619.E-02 | 3.629.E-02 |
|  | 1.147.E-02 | 1.736.E-02 | 3.854.E-02 | 3.857.E-02 |

5．課題・考察

【D-1】

5.1　三角板の慣性モーメントの理論値

表2のM、p、q、ｓより慣性モーメントの理論値を計算する。慣性モーメントの理論値は

で求まる。M、p、q、sを代入し、を求めると

となる。

5.2　測定値と理論値の誤差の算出

実験で得られた慣性モーメントIと理論値の誤差を求める。誤差は

より求まる。を式(22)に代入することにより、誤差は

となる。よって誤差は2.6%であるとわかった。

測定値と理論値に誤差が生じたのは、長さa、b、h、振動回数N=60にかかる時間の計測を人間が行ったため、完璧に正確な値ではないからであると考えられる。

【D-2】

5.3　回転体の慣性モーメントの理論値

テキスト, ホワイトボード が含まれている画像

非常に高い精度で生成された説明

図3　回転体・回転軸の寸法

図3の寸法、式(4)、(5)より回転体の慣性モーメントIの理論値を求めると

となる。

5.4　測定した回転体の慣性モーメントの平均値と理論値との誤差

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 表6 慣性モーメントの平均値と誤差 | | |
|  | 慣性モーメントI1 | 慣性モーメントI2 |
| H=900 | 8.520.E-03 | 1.332.E-02 |
| H=600 | 5.095.E-03 | 1.520.E-02 |
| H=300 | 7.318.E-03 | 1.608.E-02 |
| 平均値 | 6.977.E-03 | 1.487.E-02 |
| 誤差 | 11.5% | 88.5% |

表6に測定した慣性モーメントの平均値と理論値との誤差を示す。このようになったのは、時間を人間がストップウォッチで測定したため正確でないからであると考えられる。またでとても誤差が大きくなったが、自分たちの測定でかかわるのは既知でない角速度であるから、時間の測定のほうが誤差が大きくなることが考えられる。

5.5　損失エネルギーを無視した場合の慣性モーメントI

　損失エネルギーを無視した場合の慣性モーメントIを表7に示す。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 表7　損失エネルギーを無視した場合の慣性モーメントI | | |
|  | 慣性モーメントI1 | 慣性モーメントI2 |
| 高さH=900[mm] | 1.686.E-02 | 1.774.E-02 |
|  | 8.473.E-03 | 1.668.E-02 |
|  | 8.755.E-03 | 1.954.E-02 |
| 高さH=600[mm] | 6.346.E-03 | 2.292.E-02 |
|  | 6.572.E-03 | 2.089.E-02 |
|  | 8.444.E-03 | 2.016.E-02 |
| 高さH=300[mm] | 6.607.E-03 | 2.166.E-02 |
|  | 7.234.E-03 | 1.915.E-02 |
|  | 1.411.E-02 | 2.136.E-02 |

5.6 が成立する場合について

が成立するには、おもりをつった状態とつっていない状態で1回転あたりに失われるエネルギーの差が小さいことが条件となる。つっている状態とつっていない状態とを、力学的エネルギーから考えると、糸による摩擦が作用するかどうかが考えられる。つまりおもりをつっている状態において、糸と軸受の間の動摩擦係数が小さいことが条件として考えられる。

5.7　平均値・標準偏差の計算

実験【D-2】平均値と標準偏差を表8に示す。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 表8　慣性モーメントIの平均値と標準偏差 | | |
|  | 慣性モーメントI1 | 慣性モーメントI2 |
| 平均値 | 6.977.E-03 | 1.487.E-02 |
| 標準偏差 | 2.937.E-03 | 1.445.E-03 |

5.8　調査課題

(1)慣性モーメントの測定方法、または推定方法

物体が固定軸○○’の周りに角速度ωで回転しているとする。軸からの距離にある小部分の重さ、角加速度を、接戦方向の加速度をとする。この小部分に働く力は

である。まただから

　による軸○○’の周りの力のモーメントは

回転体は、このような小部分が集まってできている。軸○○‘からの距離にある小部分の重さをとすると、これらの小部分に働く力による軸○○’のまわりの力のモーメントの総和は、外部から与えられたトルクTに等しいはずである。そしてどの小部分対しても角加速度はみんな等しいから

()内は各小部分の質量と軸の中心から距離の2乗をかけたものを全部集めたものである。これを1つの量と考えると便利であるので、これをIで表し慣性モーメントというのである。(1)

以上より、物体にかかるトルクTと角加速度が測定できれば慣性モーメントIを算出することができる。

(2)問題

　物体の重心を通り、紙面に垂直な軸周りの円板、小穴部分の慣性モーメントをとする。求めたい慣性モーメントをIとすると、慣性モーメントの和と差の定理より

となる。

(ⅰ)物体の重心を求める

物体の重心は

で求まる。

y軸を小穴の重心と重なるように設定し、y軸と直交するようにx軸を設定する。穴が空いていない場合の円板の重心をxy平面の原点(0,0)とすると、小穴の重心は(0,0.1)となる。穴が空いていない円板および小穴部分の質量M、ｍとし、物体の重心の座標をとする。重心は

となる。

（ⅱ）それぞれの重心を通り、紙面に垂直な軸周りの慣性モーメントを求める

平行軸の定理より、慣性モーメントは

よって求めたい物体の重心を通り、紙面に垂直な軸周りの慣性モーメントIは

6．結論

　実験【D-1】では、比較的理論値に近い値が出たため実験目的を達成できたように思える。しかし実験【D-2】の慣性モーメントの誤差が88.5%ととてつもなく大きな誤差を生んでしまった。今後実験や自分の研究を行っていくうえで、なぜ誤差が生じているのか、その誤差をできるだけ小さくするにはどうしたらよいのかを日々考えると思うので、今期の実験では誤差をなるべく小さくするようにはどのようにしたらいいのかを考えて、実験をしていきたいと思う。

7．参考文献

（1）金田数正、工業力学、株式会社　内田老鶴圃、1969年、ｐ206