선형 변환

practice_선형대수 · 2024. 10. 4. 11:30

Q. 선형대수에서 선형 변환(Linear Transformation)의 개념과 성질에 대해 설명해 주세요.

A.

•선형 변환은 이와 같이, 주어진 벡터를 다양하게 변형시키는 것이다

•모든 선형 변환은 행렬로 나타낼 수 있다

•일반적인 예시는 다음과 같다 (다른 선형 변환도 있음)

•길이 늘이기 / 줄이기

•회전시키기

•반전시키기

•또한 이러한 선형 변환 (행렬)등을 곱해서 하나로 합칠 수 있다

** 아래그림)

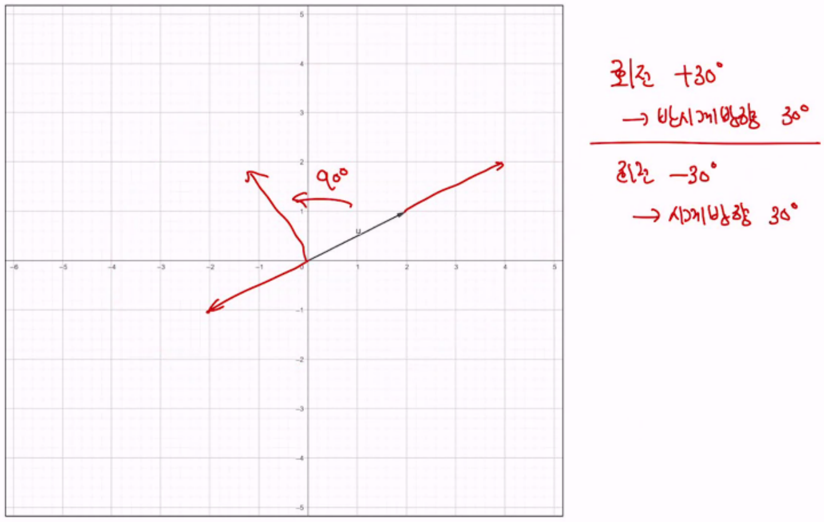
•어떠한 2차원 벡터가 있다고 하자.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

•우리는 이 벡터를 (2차원 안에서) 다양한 방법으로 변환시킬 수 있다.

•단순히 생각해봤을때, 이 벡터를 반전시킬수도 있고, 임의의 각도로 회전시킬수도 있다

•비슷하게, 길이를 늘릴 수도 있고, 줄일 수도 있다



목표: 다양한 변형을 행렬로 표현해보자 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

아무것도 안하는거 : 단위행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

길이를 절반으로 줄이는 변형

$$0.5\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.5\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

길이절반 변환 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

벡터에 C를 곱하는 변환
ㄴ 임의의 상수

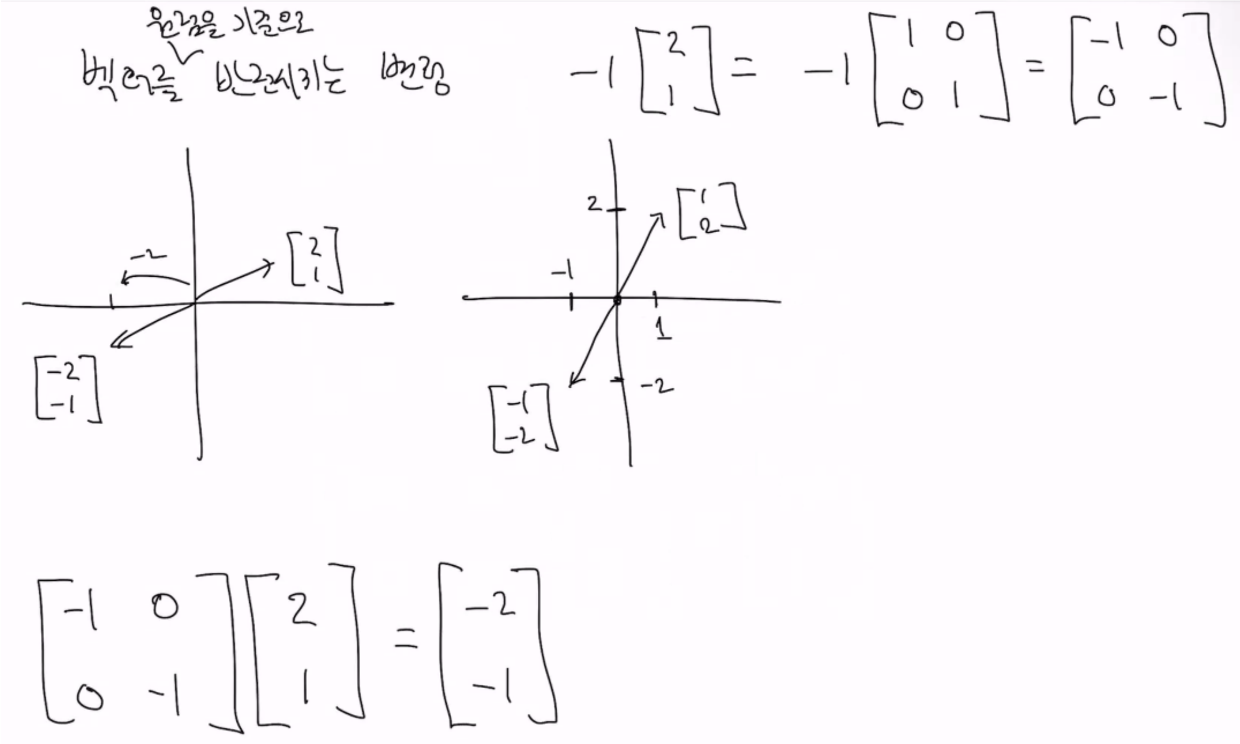
$$C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$C=0.5$ $\quad 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$C=0.1$ $\quad \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

길이를 10분의 1로
줄이는 변환

** 아래그림)



$$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$$

- 이는 다른 2차원 벡터들에도 모두 동일하게 적용된다

- 만약 벡터를 원점기준으로 반전시키고 싶다면, 단위 행렬에 -1을 곱하면 된다

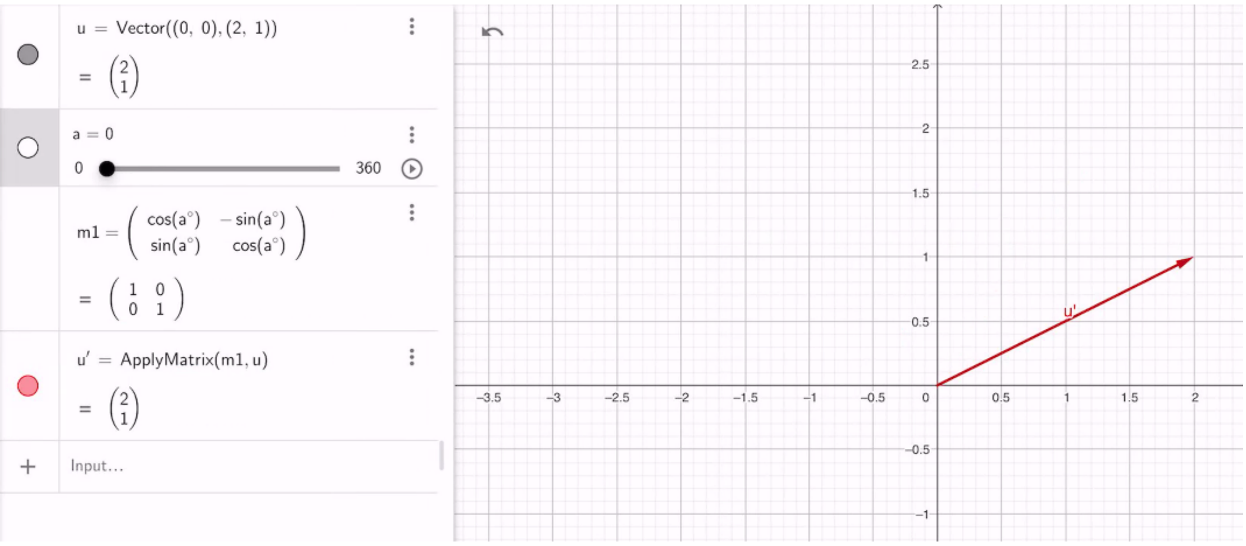
2차원 벡터의 길이 변형을 행렬로 표현할 수 있다

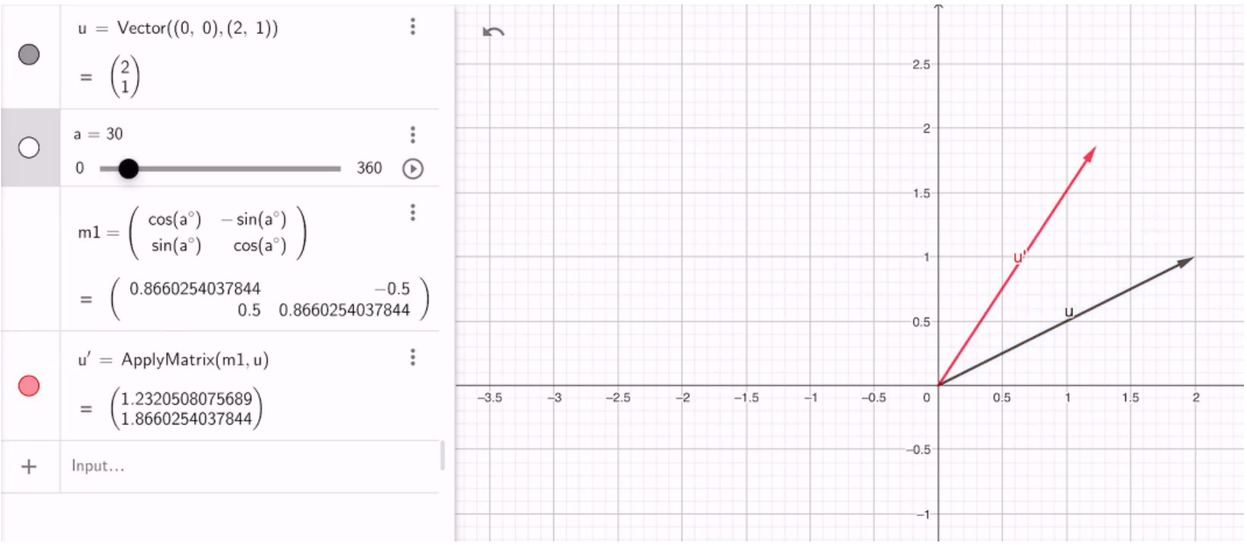
- 비슷하게 2차원 벡터를 회전시키는 것도 행렬로 표현할 수 있을까?

- 당연히 가능하다
- 어떠한 2차원 벡터를 (시계 반대 방향으로) θ 만큼 회전시키는 행렬은
- $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

- 만약 30도 회전시키고 싶다면
- $\begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$

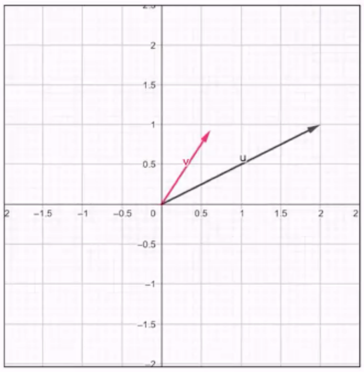
- $\begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.232 \\ 1.866 \end{bmatrix}$





•https://www.geogebra.org/calculator/cwehrna7

- 길이를 반으로 줄이는 행렬 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$
- 30도 회전시키는 행렬 $\begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$



- $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.433 & -0.25 \\ 0.25 & 0.433 \end{bmatrix}$

길이 반 + 30도 회전

- $\begin{bmatrix} 0.433 & -0.25 \\ 0.25 & 0.433 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.933 \end{bmatrix}$
- 이와 같이, 변형 행렬들을 곱해서 하나로 만들 수 있다

•선형 변환은 이와 같이, 주어진 벡터를 다양하게 변형시키는 것이다

•모든 선형 변환은 행렬로 나타낼 수 있다

•일반적인 예시는 다음과 같다 (다른 선형 변환도 있음)

•길이 늘이기 / 줄이기

•회전시키기

•반전시키기

•또한 이러한 선형 변환 (행렬)등을 곱해서 하나로 합칠 수 있다

공감 구독하기

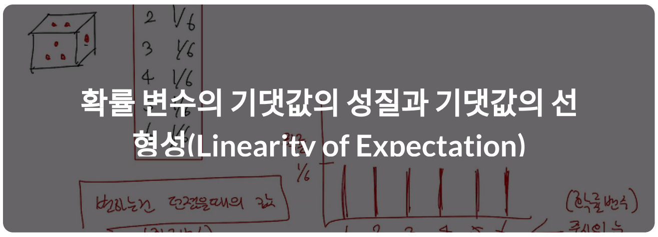
'practice_선형대수' 카테고리의 다른 글

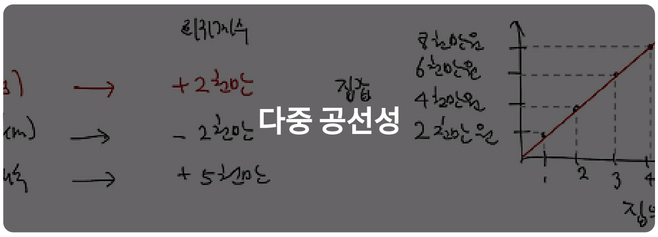
[중앙값(Median)과 평균(Mean)의 차이점과 각각의 장점 (0)] 2024.10.04
[확률 변수의 기댓값의 성질과 기댓값의 선형성(Linearity of Expectation) (0)] 2024.10.04
[다중 공선성 (0)] 2024.10.04
[행렬의 랭크(Rank)의 정의와 중요성 (1)] 2024.10.03
[확률론에서 베이즈 정리(Bayes' Theorem)의 기본 개념과 활용 (0)] 2024.10.01

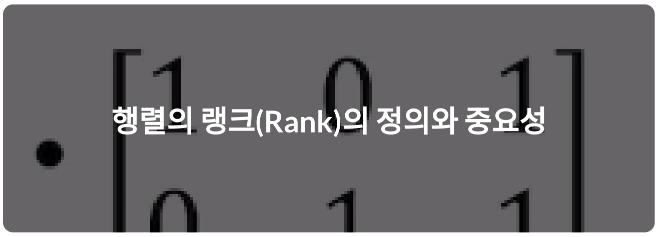
관련글

관련글 더보기

중앙값(Median)과 평균(Mean)의 차이점과 각각의 장점







자연어(NLP)

네이쳐2024 님의 블로그입니다.

구독하기+

댓글 0

이름

비밀번호

내용을 입력하세요.

등록