Filtros e Análise Espectral

(Continuação)

Filtros Digitais

- Nosso interesse:

(1)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI de}\\ \text{Tempo Discreto}\end{array}} \longrightarrow y[n]$$

(2)

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI de}\\ \text{Tempo Contínuo}\\ h_c(t)\ ;\ H_c(j\omega)\end{array}} \longrightarrow y_c(t)$$

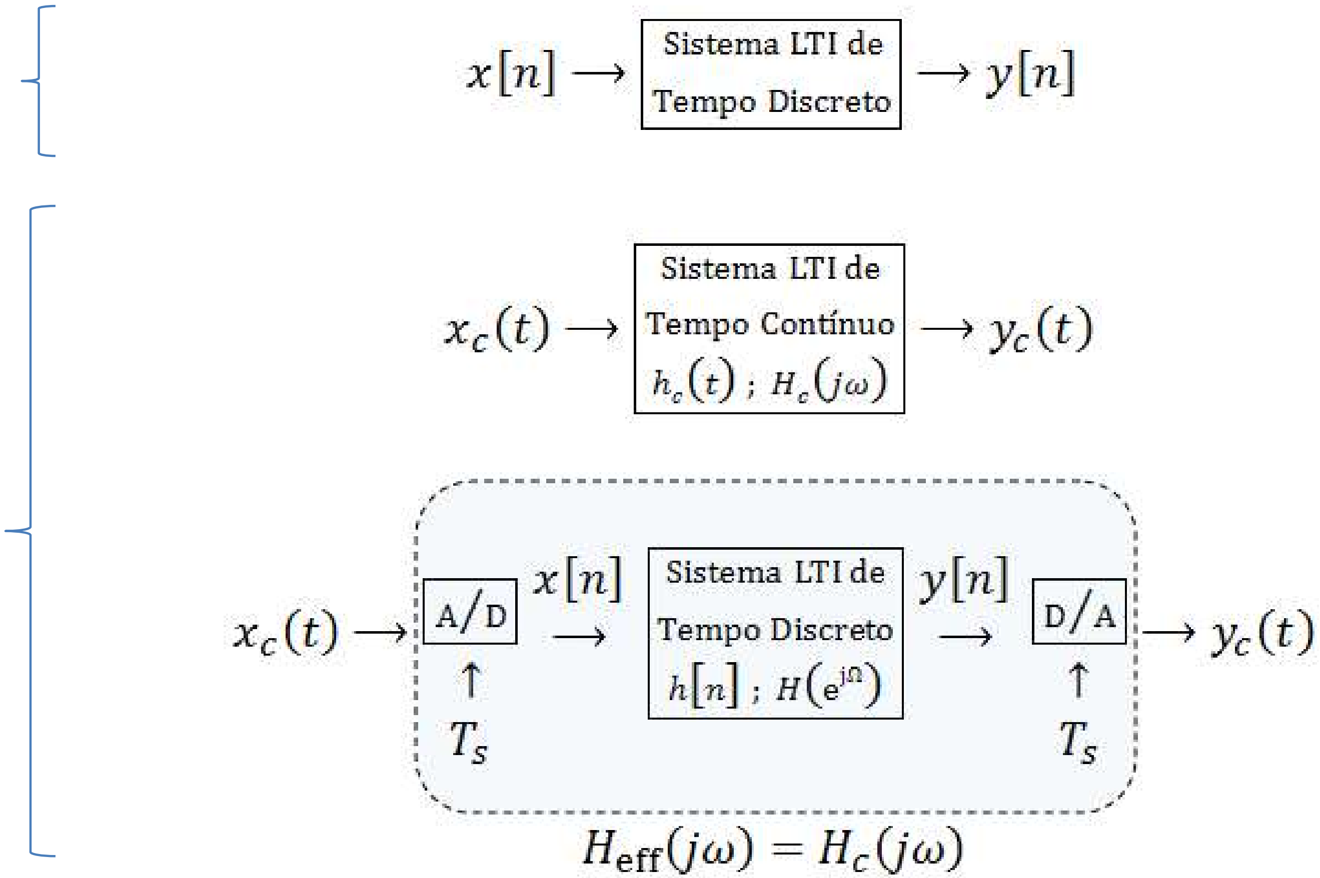
$$x_c(t) \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ T_s}}{\boxed{\text{A/D}}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI de}\\ \text{Tempo Discreto}\\ h[n]\ ;\ H(e^{j\Omega})\end{array}} \xrightarrow{y[n]} \underset{\substack{\uparrow\\ T_s}}{\boxed{\text{D/A}}} \longrightarrow y_c(t)$$

Filtros Digitais

- Nosso interesse:

(1)

(2)



Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Filtros FIR – resposta em fase linear
  - Atraso de grupo constante para todas as (faixas de) frequências

- Em geral, característica desejável em filtros

- Existem maneiras de se projetar filtros FIR com resposta em fase linear

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Dado um filtro LTI com resposta em frequência dada por

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\Omega\alpha} \qquad (|\Omega| < \pi)$$

- Sua resposta em amplitude é

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = 1$$

- Sua resposta em fase será linear:

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\Omega\alpha$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Para um valor de α real (não inteiro) qualquer, sua resposta ao impulso será:

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

- E sua resposta a uma entrada x[n] será:

$$y[n] = x[n] * \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k] * \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi(n-k-\alpha))}{\pi(n-k-\alpha)}\right]$$

- Sequências *sinc* ponderadas pelas amostras da entrada

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Se $\alpha = n_0$ é inteiro, então a resposta ao impulso é

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

- Ou seja, o sistema desloca a entrada em n_0 amostras (independente da entrada), possuindo resposta em fase linear

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Forma geral da resposta em frequência de filtros com fase linear generalizada

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = A\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega\alpha + j\beta} \qquad (|\Omega| < \pi)$$

- Em que $A(e^{j\Omega})$ é uma função real em Ω, e α e β são constantes reais

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Exemplo
  - Filtros passa-baixa ideal

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega\alpha} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c \leq |\Omega| < \pi \end{cases}$$

- Para $|\Omega| < \pi$, têm-se $A(e^{j\Omega}) = u(\Omega/\Omega_c)$ e $\beta = 0$

- Porém, são filtros IIR

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Caso geral de filtros com fase linear generalizada:
  - Resposta em amplitude

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|A\left(e^{j\Omega}\right)\right|$$

  - Resposta em fase

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\Omega\alpha + \beta$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Caso geral de filtros com fase linear generalizada:
  - Resposta em amplitude

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|A\left(e^{j\Omega}\right)\right|$$

  - Resposta em fase

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\Omega\alpha + \beta$$

Função Linear Generalizada

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Para um filtro FIR causal
  - $h[n] = 0$ para $n < 0$ e $n > M$, M inteiro

- Ou seja, $h[n]$ tem comprimento $M+1$ (FIR)

- Para que sua resposta em fase seja linear, uma dessas condições deve ser satisfeita (com $2\alpha = M$):
  - 1) $h[2\alpha - n] = h[n]$
  - 2) $h[2\alpha - n] = -h[n]$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- No primeiro caso

$$h[M-n] = h[n] \qquad (0 \leq n \leq M)$$

- Deve-se ter

$$H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = A_P(\mathrm{e}^{j\Omega})\mathrm{e}^{-j\Omega M/2} \qquad (|\Omega| < \pi)$$

- Sendo $A_P(e^{j\Omega})$ uma função real, par e periódica com respeito a Ω.

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- No segundo caso

$$h[M-n] = -h[n] \quad (0 \le n \le M)$$

- Deve-se ter

$$H(e^{j\Omega}) = jA_I(e^{j\Omega})e^{-j\Omega M/2} = A_I(e^{j\Omega})e^{-j\Omega M/2 + j\pi/2} \qquad (|\Omega| < \pi)$$

- Sendo $A_I(e^{j\Omega})$ uma função real, ímpar e periódica com respeito a Ω.

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tradicionalmente, filtros FIR com resposta em fase linear são classificados em 4 tipos:

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tradicionalmente, filtros FIR com resposta em fase linear são classificados em 4 tipos:
  - Tipo I
  - Tipo II
  - Tipo III
  - Tipo IV

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo I
  - M par e h[n] simétrico (M/2 inteiro)

$$h[M-n] = h[n] \qquad (0 \leq n \leq M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \mathrm{e}^{-j\Omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos(\Omega k)$$

$$a[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[M/2-k] & 1 \leq k \leq M/2 \end{cases}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo I
  - M par e h[n] simétrico (M/2 inteiro)

$$h[M-n] = h[n] \qquad (0 \le n \le M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \mathrm{e}^{-j\Omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos(\Omega k)$$

$$a[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[M/2-k] & 1 \le k \le M/2 \end{cases}$$

$$\boxed{H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = A_P(\mathrm{e}^{j\Omega})\mathrm{e}^{-j\Omega M/2}}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo II
  - M ímpar e h[n] simétrico ((M+1)/2 inteiro)

$$h[M-n] = h[n] \qquad (0 \leq n \leq M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\Omega M/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k]\cos\left(\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$b[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[(M+1)/2-k] & 1 \leq k \leq (M+1)/2 \end{cases}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo II
  - M ímpar e h[n] simétrico ((M+1)/2 inteiro)

$$h[M-n] = h[n] \qquad (0 \le n \le M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \mathrm{e}^{-j\Omega M/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k] \cos\left(\Omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$b[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[(M+1)/2 - k] & 1 \le k \le (M+1)/2 \end{cases}$$

$$\boxed{H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = A_P(\mathrm{e}^{j\Omega})\mathrm{e}^{-j\Omega M/2}}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo III
  - M par e h[n] antissimétrico (M/2 inteiro)

$$h[M-n] = -h[n] \qquad (0 \le n \le M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = je^{-j\Omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} c[k] \text{sen}\,(\Omega k)$$

$$c[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[M/2-k] & 1 \le k \le M/2 \end{cases}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo III
  - M par e h[n] antissimétrico (M/2 inteiro)

$$h[M-n] = -h[n] \qquad (0 \leq n \leq M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H(e^{j\Omega}) = je^{-j\Omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} c[k] \text{sen}\,(\Omega k)$$

$$c[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[M/2-k] & 1 \leq k \leq M/2 \end{cases}$$

$$\boxed{H(e^{j\Omega}) = jA_I(e^{j\Omega})e^{-j\Omega M/2}}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo IV
  - M ímpar e h[n] antissimétrico ((M+1)/2 inteiro)

$$h[M-n] = -h[n] \qquad (0 \le n \le M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = je^{-j\Omega M/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k]\,\mathrm{sen}\left(\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$d[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[(M+1)/2-k] & 1 \le k \le (M+1)/2 \end{cases}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Tipo IV
  - M ímpar e h[n] antissimétrico ((M+1)/2 inteiro)

$$h[M-n] = -h[n] \qquad (0 \le n \le M)$$

- Sua resposta em frequência pode ser escrita na forma

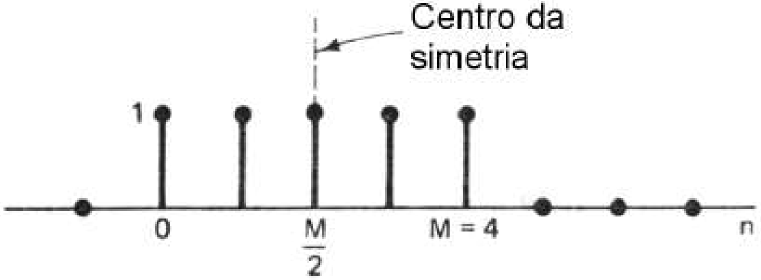
$$H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \mathrm{j}\mathrm{e}^{-j\Omega M/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \,\mathrm{sen}\left(\Omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$$

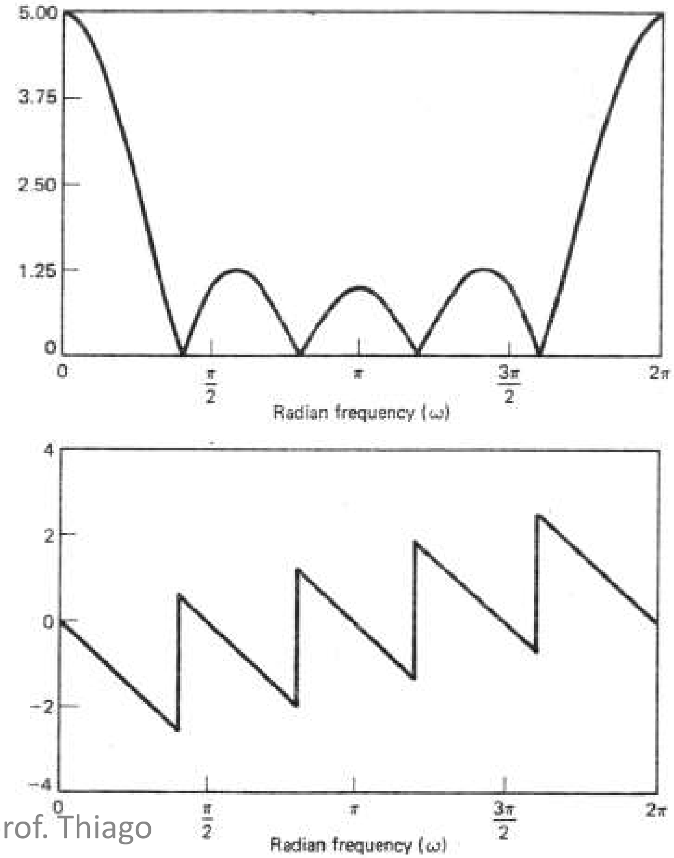
$$d[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[(M+1)/2 - k] & 1 \le k \le (M+1)/2 \end{cases}$$

$$\boxed{H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \mathrm{j}A_I(\mathrm{e}^{j\Omega})\mathrm{e}^{-j\Omega M/2}}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

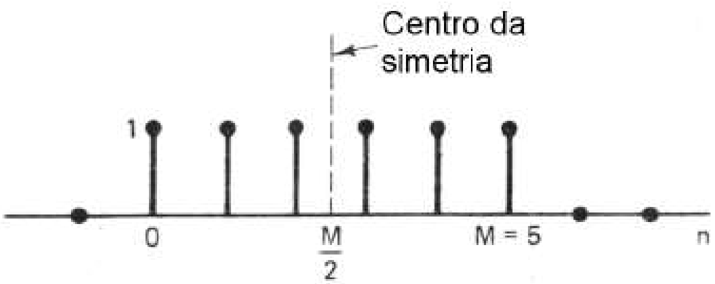
- Exemplo:
- Tipo I; M=4; h = [1 1 1 1 1]

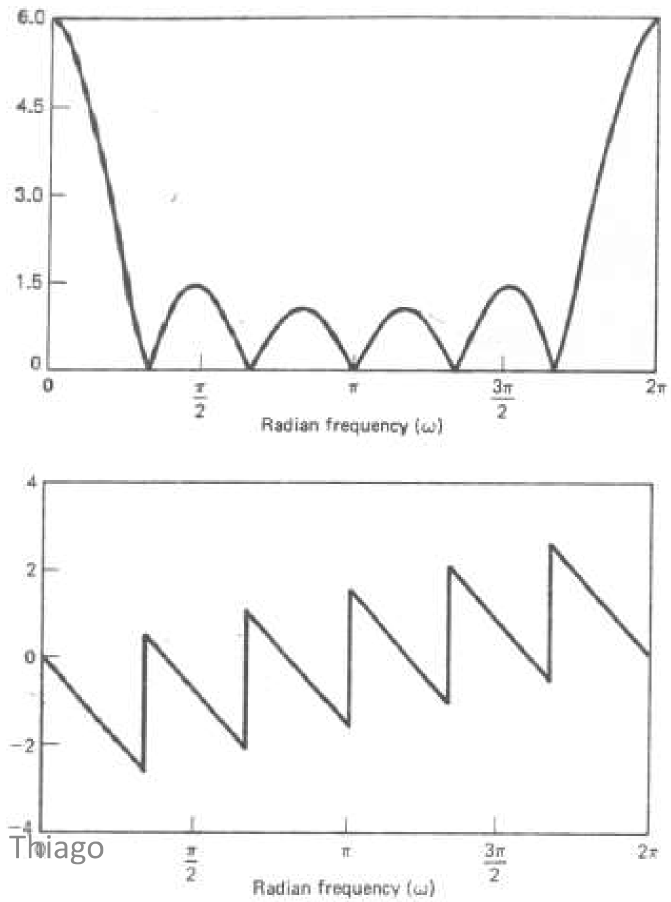




Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

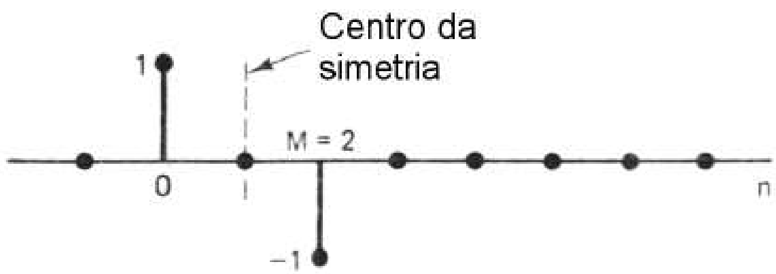
- Exemplo:
- Tipo II; M=5; h = [1 1 1 1 1 1]

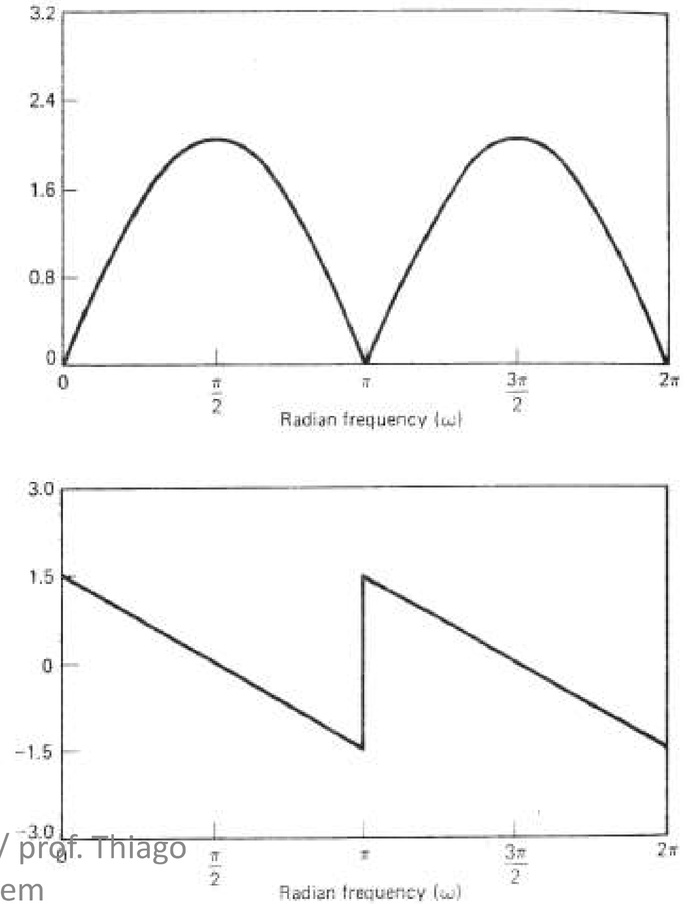




Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

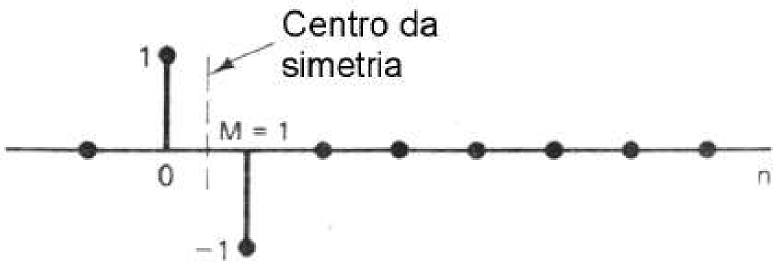
- Exemplo:
- Tipo III; M=2; h = [1 0 -1]

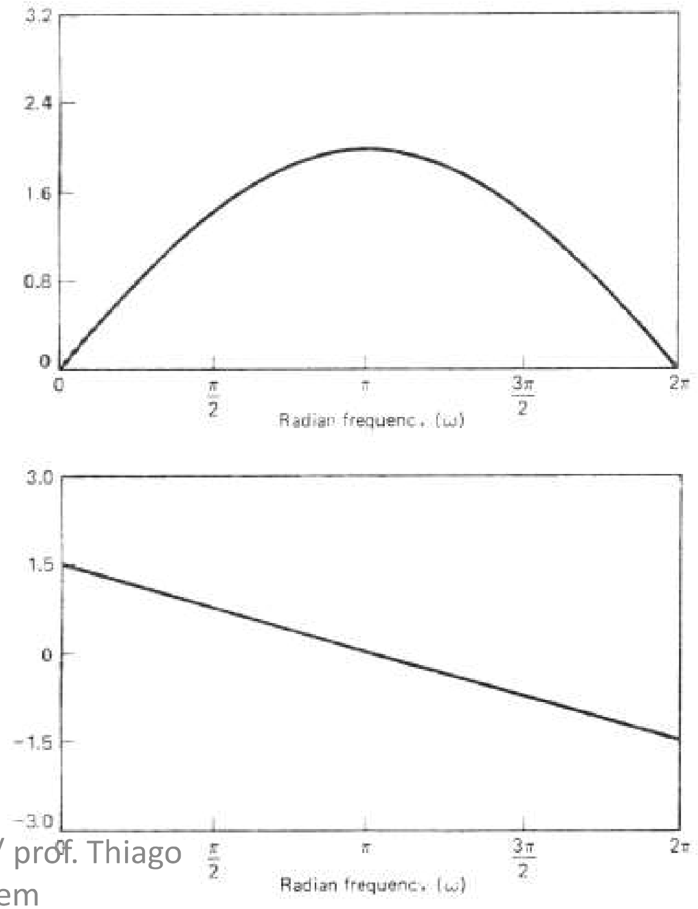




Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Exemplo:
- Tipo IV; M=1; h = [1 -1]





Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento
  - Projeta-se o filtro digital desejado a partir da expressão do filtro LTI passa-baixas ideal

Filtro passa-baixa: $h_{LP}[n] = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(Bn)w[n]$

  - Resposta simétrica
    - Tomando-se *w*[*n*] também simétrica, mantém-se a linearidade da resposta em fase do filtro

  - Pode-se projetar um filtro com frequências de corte (largura de banda) e frequência central desejadas

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Filtro passa-baixa: $h_{LP}[n] = \frac{1}{n\pi}\text{sen}(Bn)w[n]$

$$\frac{B}{\pi} = \frac{f_c}{f_s/_2} = \frac{2f_c}{f_s} \Rightarrow B = 2\pi\frac{f_c}{f_s}$$

Portanto: $B = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 2\pi\frac{\omega_c}{\omega_s}$

f_c (ou ω_c): freq. corte em Hertz (ou em rad/s)

f_s (ou ω_s): freq. amostragem em Hertz (ou em rad/s)

$w[n]$: janela escolhida

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Se $h[n]$ é projetado para ter $2N+1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{LP}[n-N]$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Se $h[n]$ é projetado para ter $2N + 1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{LP}[n - N]$$

Assim, tem-se o filtro digital passa-baixa, com resposta ao impulso $h[n]$, causal e com resposta em fase linear.

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Se $h[n]$ é projetado para ter $2N+1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{LP}[n-N]$$

Assim, tem-se o filtro digital passa-baixa, com resposta ao impulso $h[n]$, causal e com resposta em fase linear.

Qual o tipo deste filtro?

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Se $h[n]$ é projetado para ter $2N + 1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{LP}[n - N]$$

Assim, tem-se o filtro digital passa-baixa, com resposta ao impulso $h[n]$, causal e com resposta em fase linear.

Qual o tipo deste filtro?

$h[n]$ com simetria par e quantidade ímpar de coeficientes: **tipo I.**

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-baixa)

Logo, sua resposta em frequência pode ser escrita como:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\Omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} a[k]\cos\left(\Omega k\right)$$

$$a[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 2h[M/2 - k] & 1 \leq k \leq M/2 \end{cases}$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-faixa)

Filtro passa-faixa: $h_{BP}[n] = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(Bn)\cos\,(\Omega_0 n)w[n]$

$$B = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}$$

Ω_2 e Ω_1: frequências de corte superior e inferior do filtro, em rad.

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-faixa)

Filtro passa-faixa: $h_{BP}[n] = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(Bn)\cos(\Omega_0 n)w[n]$

$$B = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}$$

Ω_2 e Ω_1: frequências de corte superior e inferior do filtro, em rad.

$$\left(\Omega_1 = 2\pi\frac{f_{c_1}}{f_s} = 2\pi\frac{\omega_{c_1}}{\omega_s} \ \text{ e } \ \Omega_2 = 2\pi\frac{f_{c_2}}{f_s} = 2\pi\frac{\omega_{c_2}}{\omega_s}\right)$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-faixa)

Filtro passa-faixa: $h_{BP}[n] = \dfrac{1}{n\pi}\mathrm{sen}(Bn)\cos(\Omega_0 n)w[n]$

$\Delta\Omega = 2B$: largura de banda do filtro, em rad.

$$\left(\Delta\Omega = 2\pi\frac{\Delta f}{f_s} = 2\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_s}\right)$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-faixa)

Filtro passa-faixa: $h_{BP}[n] = \frac{1}{n\pi}\text{sen}(Bn)\cos(\Omega_0 n)w[n]$

$\Delta\Omega = 2B$: largura de banda do filtro, em rad.

$$\left(\Delta\Omega = 2\pi\frac{\Delta f}{f_s} = 2\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_s}\right)$$

Ω_0: frequência central do filtro, em rad.

$$\left(\Omega_0 = 2\pi\frac{f_0}{f_s} = 2\pi\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-faixa)

Filtro passa-faixa: $h_{BP}[n] = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(Bn)\cos(\Omega_0 n)w[n]$

Se $h[n]$ é projetado para ter $2N+1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{BP}[n-N]$$

Assim, tem-se o filtro digital passa-faixa, com resposta ao impulso $h[n]$, causal e com resposta em fase linear.

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-alta)

Filtro passa-alta: $$h_{HP}[n] = \frac{(-1)^n}{n\pi} \mathrm{sen}\big((\pi - B)n\big) w[n]$$

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-alta)

Filtro passa-alta: $h_{HP}[n] = \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}\big((\pi - B)n\big) w[n]$

$$\frac{B}{\pi} = \frac{f_c}{f_s/_2} = \frac{2f_c}{f_s} \Rightarrow B = 2\pi \frac{f_c}{f_s}$$

Portanto: $B = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{\omega_c}{\omega_s}$

f_c (ou ω_c): freq. corte (do filtro passa-alta desejado) em Hertz (ou em rad/s)

f_s (ou ω_s): freq. amostragem em Hertz (ou em rad/s)

$w[n]$: janela escolhida

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-alta)

Filtro passa-alta: $h_{HP}[n] = \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}((\pi - B)n) w[n]$

$$\frac{B}{\pi} = \frac{f_c}{f_s/_2} = \frac{2f_c}{f_s} \Rightarrow B = 2\pi \frac{f_c}{f_s}$$

Por quê?

Portanto: $B = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{\omega_c}{\omega_s}$

f_c (ou ω_c): freq. corte (do filtro passa-alta desejado) em Hertz (ou em rad/s)

f_s (ou ω_s): freq. amostragem em Hertz (ou em rad/s)

$w[n]$: janela escolhida

Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Lembrando: Método do Janelamento (passa-alta)

Filtro passa-alta: $h_{HP}[n] = \frac{(-1)^n}{n\pi} \text{sen}\big((\pi - B)n\big)w[n]$

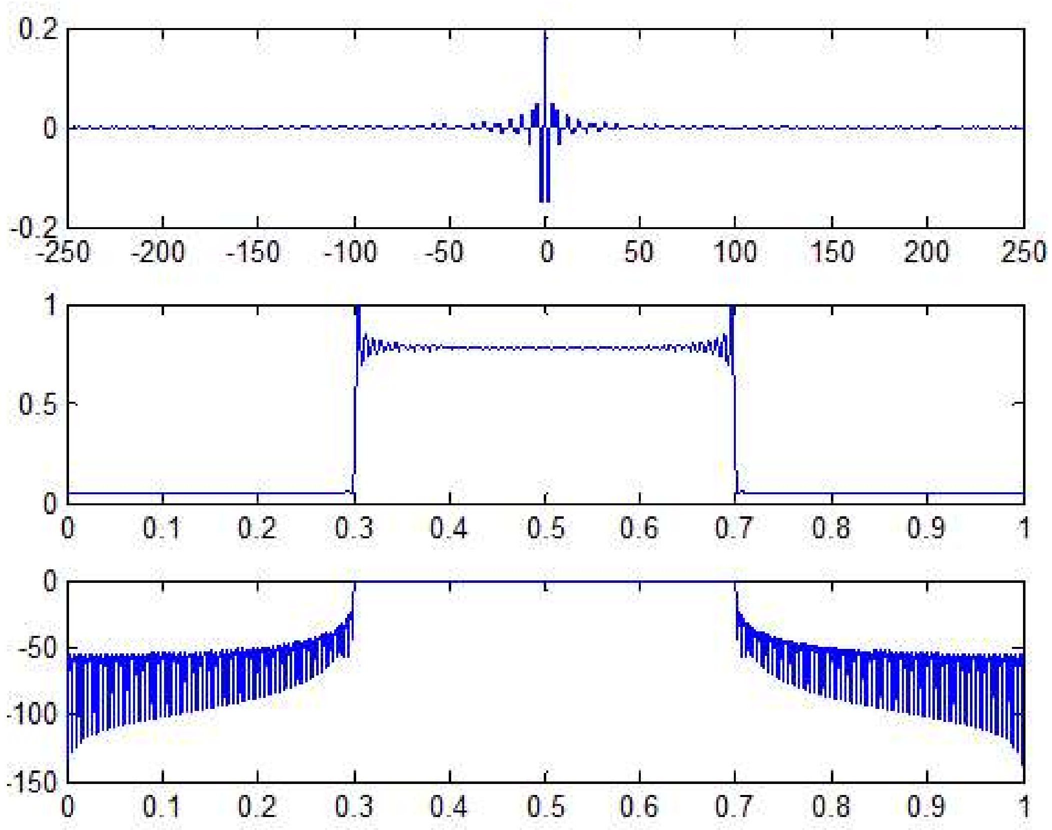
Se $h[n]$ é projetado para ter $2N + 1$ coeficientes (portanto, $w[n]$ definida para $-N \leq n \leq N$), então:

$$h[n] = h_{HP}[n - N]$$

Assim, tem-se o filtro digital passa-alta, com resposta ao impulso $h[n]$, causal e com resposta em fase linear.

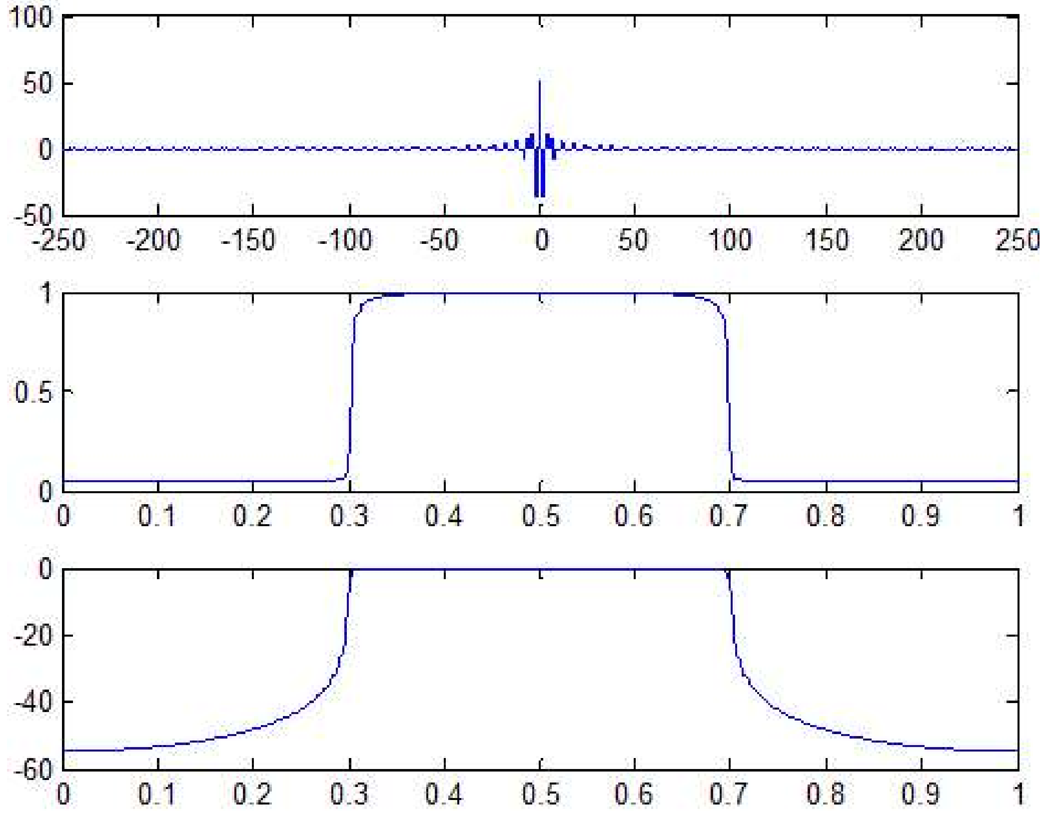
Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela retangular
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



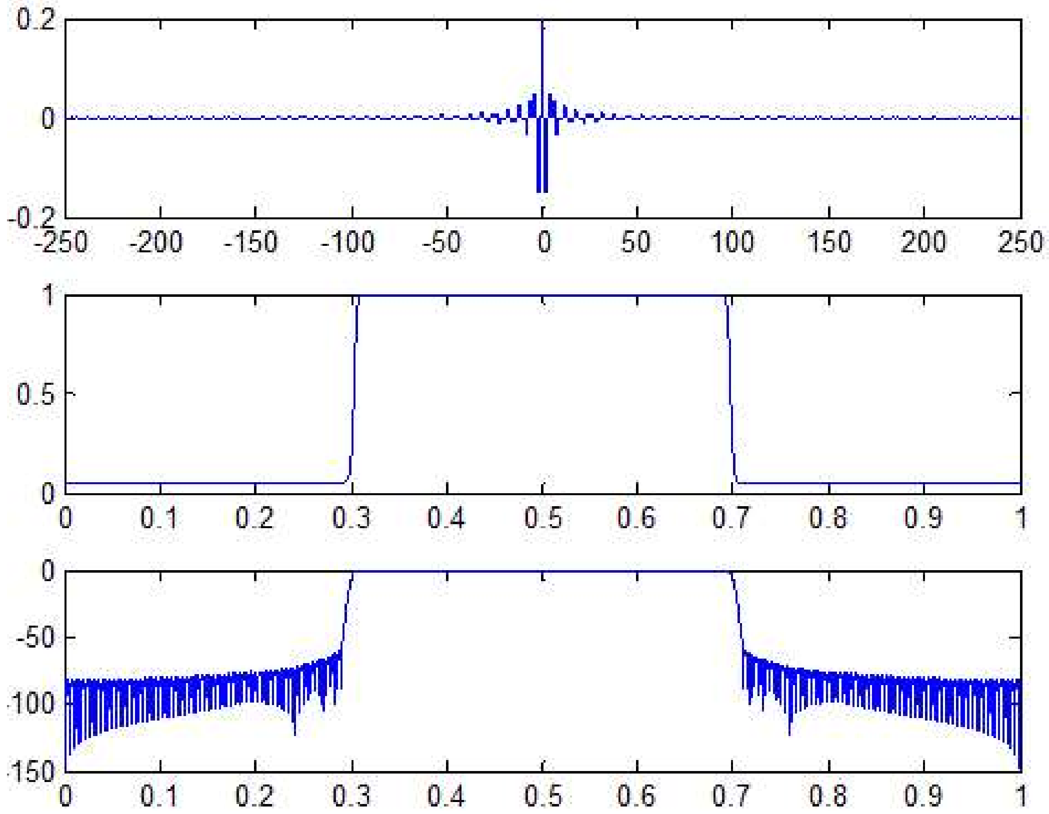
Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela triangular
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



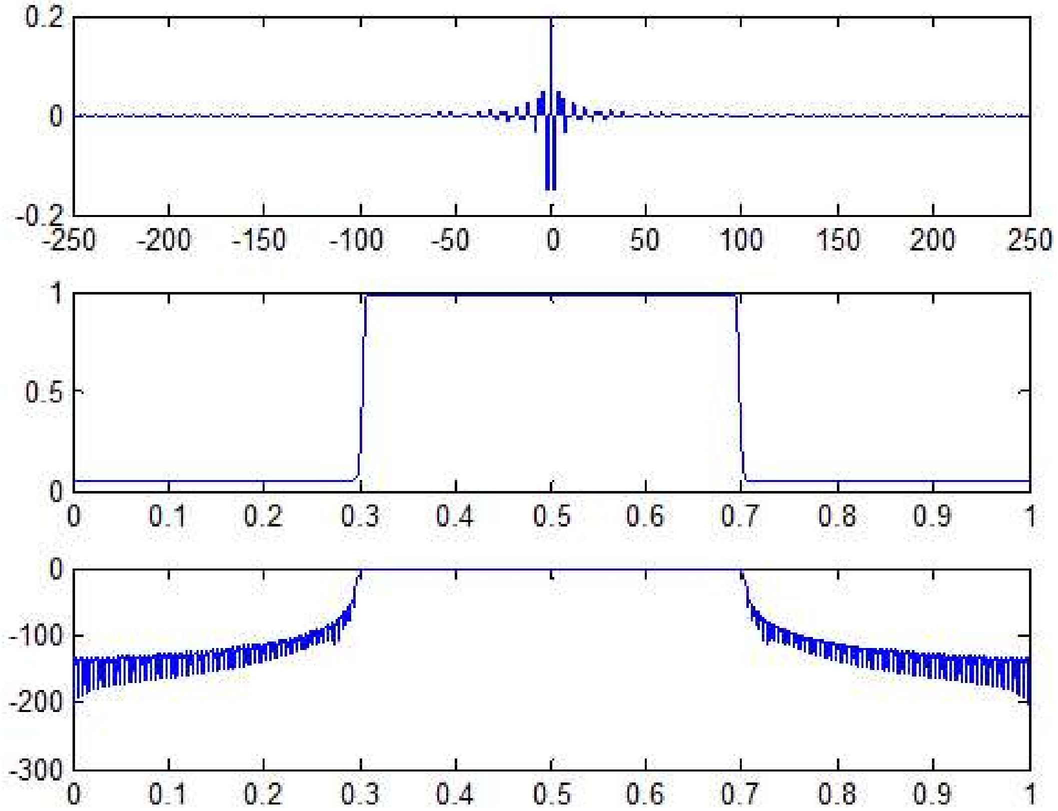
Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela gaussiana (α = 2,5)
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



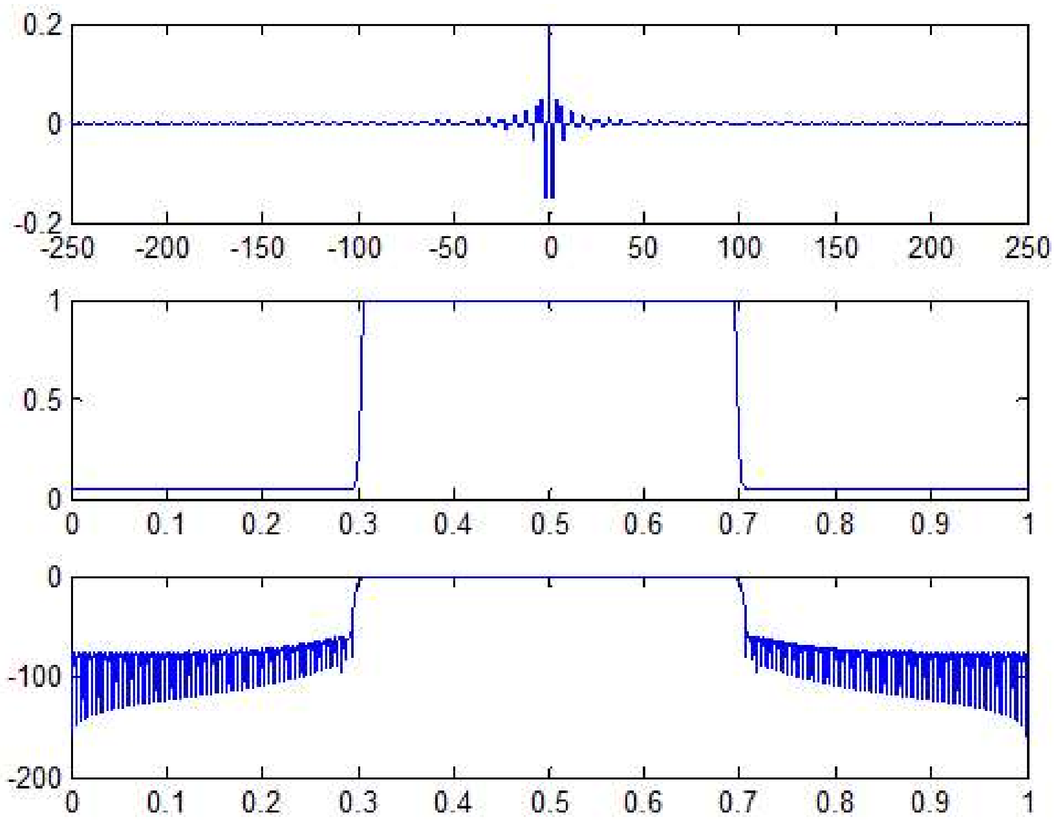
Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela de Hann
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



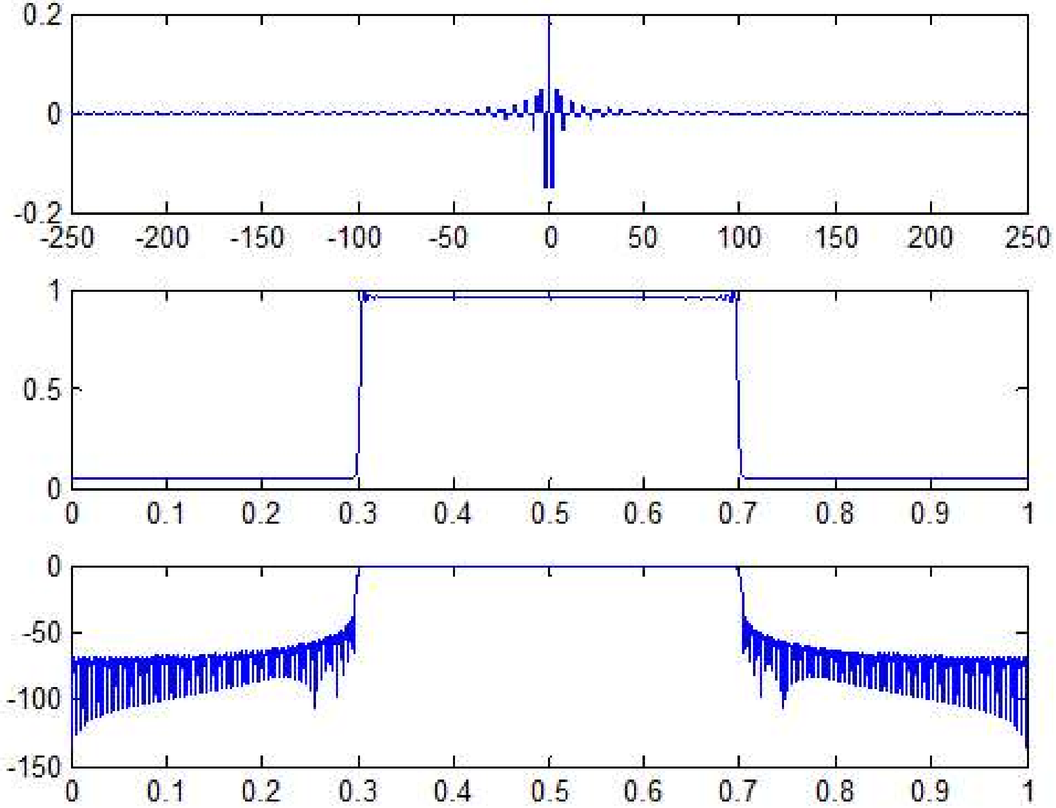
Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela de Hamming
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela de Kaiser (β = 3)
  - Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)



Filtros FIR – Resposta em Fase Linear

- Ex: Janela de Kaiser (β = 0,5)
  – Resposta ao impulso e em amplitude (escala linear e em dB)