QUESTÃO	A	B	C	D	E	QUESTÃO	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○	16	○	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○	17	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	●	18	○	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○	19	○	○	○	○	○
5	○	●	○	○	○	20	○	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○	21	○	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○	22	○	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○	23	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○	24	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○	25	○	○	○	○	○
11	○	○	○	○	○	26	○	○	○	○	○
12	○	○	○	○	○	27	○	○	○	○	○
13	○	○	○	○	○	28	○	○	○	○	○
14	○	○	○	○	○	29	○	○	○	○	○
15	○	○	○	○	○	30	○	○	○	○	○

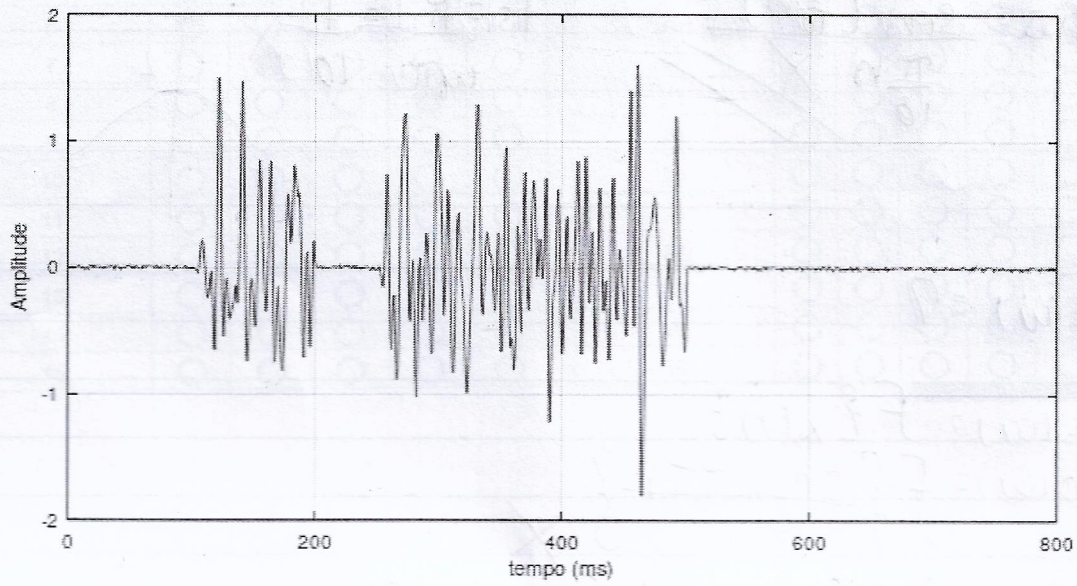
Para preenchimento do professor

Questão	Valor	Obtido
QO1	1	—
QO2	1	—
QO3	1	—
QO4	1	—
QO5	1	1
QO6	1	1
QO7	1	1
QO8	1	—
Total	**8,0**	3

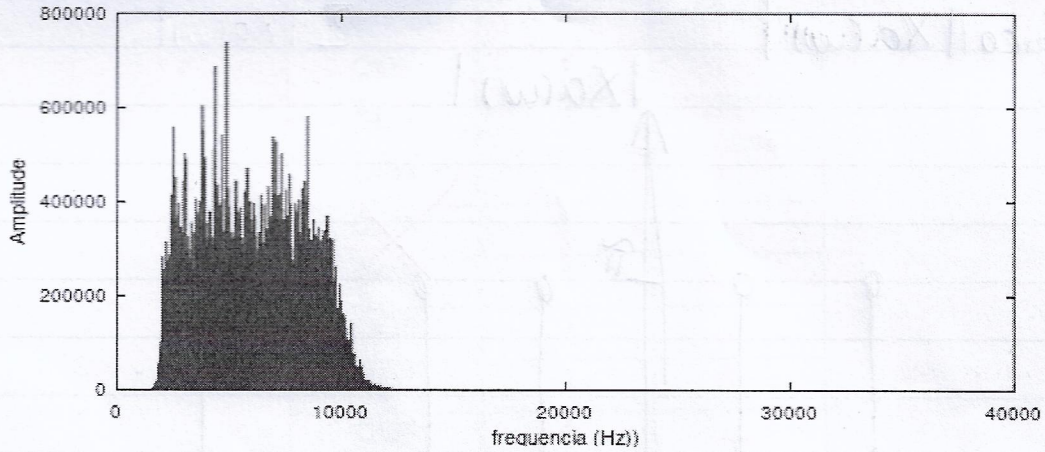
Não se esqueça de preencher as respostas das questões objetivas no campo acima e de transcrever suas soluções discursivas para os correspondentes campos de resposta (páginas a seguir). Sob nenhuma hipótese rascunhos serão considerados para correção.

Texto para as questões objetivas 1 e 2

A seguir, tem-se a forma de onda de um trecho de sinal de áudio:



Sabe-se que este sinal é limitado em frequência, com seu espectro limitado à frequência máxima de 10 kHz, conforme mostrado na figura a seguir:



Com base nessas informações, responda às questões objetivas 1 e 2.

$f_{max} = 10 \cdot 10^3$ Hz

$T_S = 20 \cdot 10^{-6}$

Questão Objetiva n. 1 – QO1 (valor: 1,0 ponto)
Este sinal de áudio é submetido a uma placa digitalizadora, que opera com período de amostragem de 20 µs. Nesta situação, considere as asserções a seguir:

I. Nestas condições, ocorrerá o fenômeno do aliasing após o processo de amostragem.

II. O gráfico de $|X_a(\omega)|$, o espectro de amplitude obtido após a amostragem, será periódico (na variável ω), repetindo sua forma a cada 100π.10³ rad/s.

III. A taxa de amostragem utilizada poderia ser um pouco menor do que a dessa placa digitalizadora, sendo ainda possível a recuperação do sinal, sem distorções, a partir de suas amostras.

$\omega_S > 2B$

ω_S fre m

$20 \cdot 10^3$

É correto somente o que se afirma em:

~~A) I~~ ~~B) II~~ C) III

D) II e III ~~E) I, II e III~~

$\omega_S =$

$500\ 000\ 000 > 20000$

Questão Objetiva n. 2 – QO2 (valor: 1,0 ponto)
Suponha, agora, que este sinal de áudio seja novamente submetido à placa digitalizadora, configurando, desta vez, o período de amostragem para 50 µs. Nesta situação, considere as asserções a seguir:

I. Nestas condições, não ocorrerá o fenômeno do aliasing após o processo de amostragem.

II. O gráfico de $|X_a(\omega)|$, o espectro de amplitude obtido após a amostragem, será periódico (na variável ω), repetindo sua forma a cada 40π.10³ rad/s.

III. A taxa de amostragem utilizada poderia ser um pouco menor do que a dessa placa digitalizadora, sendo ainda possível a recuperação do sinal, sem distorções, a partir de suas amostras.

É correto somente o que se afirma em:

A) I ~~B) II~~ ~~C) III~~

D) I e II E) I, II e III

$T_S = 50 \cdot 10^{-6}$

$200\ 000\ 000 > 20000$

$f_{max} = 10 \cdot 10^3$

$T_S = 20 \cdot 10^{-6}$

$2B \rightarrow 2 \cdot 10 \cdot 10^3 \rightarrow 20 \cdot 10^3$

20000

$\omega_S = \frac{f_{max}}{T_S} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2}{20 \cdot 10^{-6}} = 500 \cdot 10^6$ 500 000 000

$T_S = \frac{2\pi}{\omega_S}$

$\omega_S = \frac{10 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-6}} = 200\ 000\ 000$

$f_{max} = 500$

$\omega_s = 5 \cdot (2\,500) = 5.000$

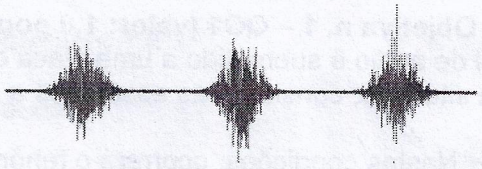
$T_s = 10\,bits$

12 Mbits

$\hookrightarrow 12 \cdot 10^6$

Questão Objetiva n. 3 – QO3 (valor: 1,0 ponto)

A figura à direita mostra um trecho de um sinal biomédico, obtido em experimento envolvendo consecutivos estímulos mioelétricos. Sabe-se que o espectro de sinais desta natureza limita-se à frequência máxima de 500 Hz. Assim, este sinal é submetido a uma placa conversora analógico-digital para ser analisado em software.



Considerando que a digitalização tenha sido realizada a 5 vezes a taxa de Nyquist, com 10 bits por amostra, e que o tamanho do arquivo armazenado digitalmente seja de 12 Mbits, então, a duração do sinal, em segundos, é igual a:

A) 180 **B)** 240 **C)** 300

D) 480 **E)** 600

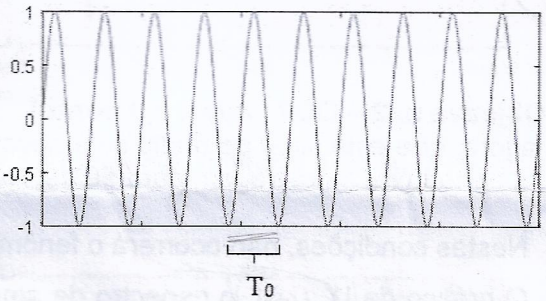
12 Mbits

$12 \cdot 10^6$

Texto e figuras para as questões objetivas 4 e 5

Apresenta-se, à direita, o gráfico de um sinal, $x(t)$, analógico senoidal (intervalo correspondente a 10 períodos, de valor T_0, da senoide).

A seguir, mostram-se os gráficos para quatro situações em que este sinal é idealmente amostrado, isto é, multiplicando-se $x(t)$ por um trem de impulsos $p(t)$.



Em cada situação utiliza-se um período de amostragem distinto, conforme ilustrado (intervalo entre os impulsos de $p(t)$ multiplicados por $x(t)$ em cada situação):

freq. varrer rad.

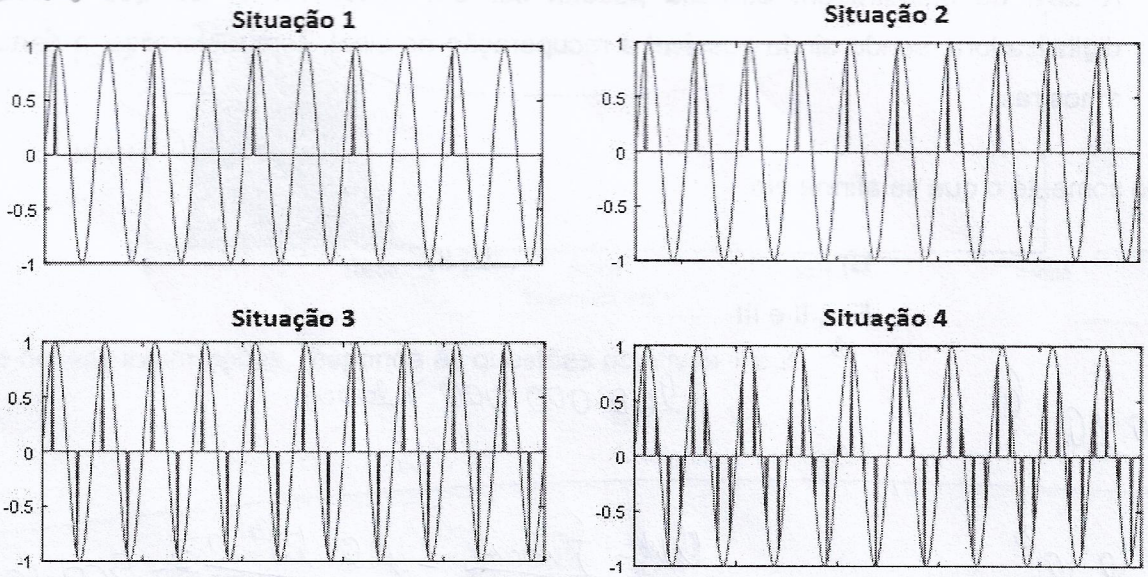
$f_s = 2T_0$

π

$f_s = T_0$

Nyquist

2



Considerando-se as quatro situações mostradas, responda às questões objetivas 4 e 5.

$T_0 = \frac{\pi}{2}$

Questão Objetiva n. 4 – QO4 (valor: 1,0 ponto)
Supondo que o período da senoide $x(t)$, em segundos, é $T_0 = \pi/2$, então é coerente afirmar que, nas situações 1, 2, 3 e 4, respectivamente, as frequências de amostragem utilizadas, em rad/s, foram:

A) 4; 8; 16; e 32.
B) 2; 4; 8; e 16.
C) 0,25; 0,5; 1; e 2.
D) 1; 2; 4; e 8.
E) 0,5; 1; 2; e 4.

Questão Objetiva n. 5 – QO5 (valor: 1,0 ponto)
Em cada uma das situações, considere que o sinal seja reconstruído a partir de suas amostras utilizando um filtro passa-baixa ideal com frequência de corte ω_c ligeiramente superior à metade da correspondente frequência de amostragem ω_s escolhida. É coerente afirmar que os sinais reconstruídos (isto é, em tempo contínuo), nas situações 1, 2, 3 e 4, respectivamente, terão comportamento:

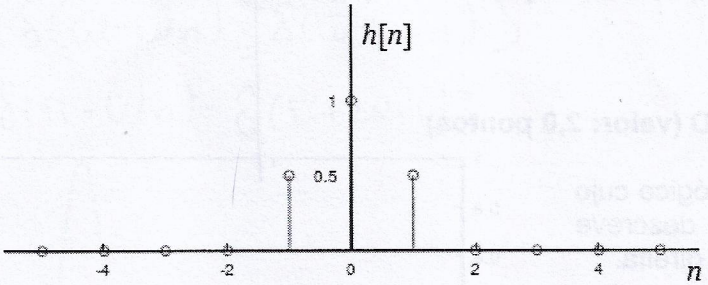
A) (1) constante; (2) senoidal (com aliasing); (3) senoidal (com aliasing); e (4) senoidal (sem aliasing).
B) (1) constante; (2) constante; (3) senoidal (sem aliasing); e (4) senoidal (sem aliasing).
C) (1) constante; (2) constante; (3) senoidal (com aliasing); e (4) senoidal (sem aliasing).
D) (1) constante; (2) senoidal (com aliasing); (3) senoidal (sem aliasing); e (4) senoidal (sem aliasing).
E) (1) senoidal (com aliasing); (2) senoidal (sem aliasing); (3) senoidal (sem aliasing); e (4) senoidal (sem aliasing).

Texto para as questões objetivas 6, 7 e 8

Considere que um filtro digital de resposta ao impulso finita (FIR) seja descrito pela seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Graficamente, tem-se:



Assim, responda às questões objetivas 6, 7 e 8.

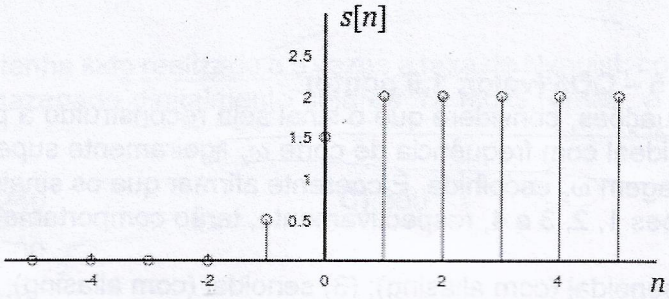
Questão Objetiva n. 6 – QO6 (valor: 1,0 ponto)
Trata-se de um filtro do tipo:

A) Passa-baixa.
B) Passa-faixa.
C) Passa-alta.
D) Rejeita-faixa.
E) Compensador de fase (passa-tudo).

Questão Objetiva n. 7 – QO7 (valor: 1,0 ponto)
Acerca desse filtro, avalie as seguintes afirmações:

I. Trata-se de um filtro estável.

II. A resposta ao degrau deste filtro, $s[n] = \mathcal{H}\{u[n]\}$, é corretamente descrita pelo seguinte gráfico (no intervalo $-5 \leq n \leq 5$):



III. Trata-se de um filtro causal.

É correto somente o que se afirma em:

A) I. **B)** I e II. **C)** I e III. **D)** II e III. **E)** I, II e III.

Questão Objetiva n. 8 – QO8 (valor: 1,0 ponto)
Considere que se aplique a este filtro uma entrada descrita pela seguinte expressão:

$\Omega = 0{,}4\pi$

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}.$$

Se $\Omega_0 = 0{,}4\pi$ rad, então, o ganho em amplitude correspondente a este sinal, quando aplicado como entrada ao filtro, será, aproximadamente:

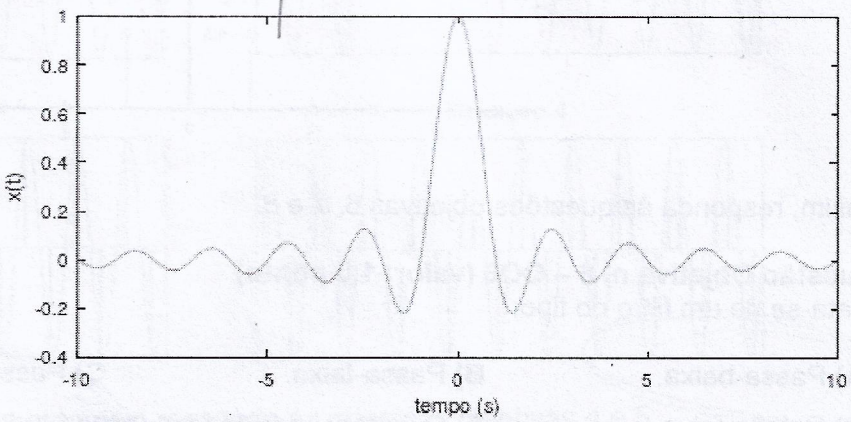
A) 2,00. **B)** 1,92. **C)** 1,31. **D)** 1,00. **E)** 0,69.

Questão Discursiva – QD (valor: 2,0 pontos)

Considere um sinal analógico cujo comportamento se descreve graficamente na figura à direita.

Este sinal pode ser representado pela seguinte expressão:

$$x(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$



Supondo que este sinal seja idealmente amostrado à frequência de amostragem $\omega_s = 10\pi$ rad/s, obtenha: a expressão para a correspondente sequência $x[n]$, obtida após a amostragem; a expressão para o espectro de frequências $X_a(\omega)$ do sinal amostrado; e esboce o gráfico do correspondente espectro de amplitude, $|X_a(\omega)|$.

$\omega_s = 10\pi$ rad/s

$x(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$

f_{max}

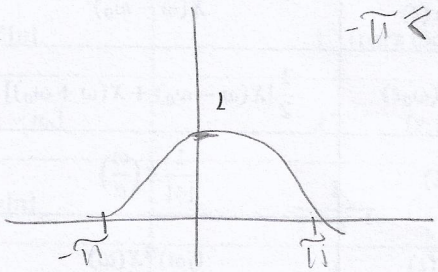
$-\pi \leq \omega_c \leq \pi$

f_{max} π

$x[n] = ?$

$X_a(\omega) = ?$

$|X_a(\omega)| =$ grafico



$T_s = \frac{f_{max}}{\omega_0} \rightarrow \frac{2\pi}{10\pi} \rightarrow \frac{1}{5}$ s

$x[n]$

$x[n] = x(nT_s)$

ÁREA DE RASCUNHO

$X_a = ?$

$x[n] = x(nT_s) \rightarrow x[n] = \frac{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\frac{\pi}{10}}$

$X_a(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

$X_a(\omega) = -j\omega[\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)]$

$X_a(\omega) = -j\pi[\delta(\pi - \omega_n) - \delta(\pi + \omega_n)]$

Transformada de Fourier (em tempo contínuo)

Propriedades (esquerda) e pares de transformadas (direita).

Propriedades			Pares de Transformadas		
	$x(t)$	$X(\omega)$		$x(t)$	$X(\omega)$
1	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$	1	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
2	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$	2	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
3	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$	3	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
4	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	4	$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
5	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$	5	$\mathrm{rect}(t)$	$2\mathrm{sinc}(\omega)$
6	$t^n x(t)$	$j^n\frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)$	6	$\mathrm{sinc}(t)$	$\pi\mathrm{rect}(\omega)$
7	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$	7	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
8	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$	8	$e^{-at}u(t)\quad(a>0)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
9	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	9	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right)$

Sinal *sinc*	Sinal *rect*	Teorema de Parseval
$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\mathrm{sen}(t)}{t}$	$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 & \text{se } \lvert t\rvert\le 1\\ 0 & \text{se } \lvert t\rvert>1\end{cases}$	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2d\omega$

Outras fórmulas:

$$\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \mathrm{sen}^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Amostragem Ideal:

$$x[n]=x(nT_s) \qquad x_a(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \qquad X_a(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

Expressão para $X(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}$ e para $x(t)=\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada Z

Propriedades (esquerda) e pares de transformadas (direita).

Propriedades			Pares de Transformadas (ROC)		
	$x[n]$	$X(z)$		$x[n]$	$X(z)$
1	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	1	$\delta[n]$	1 (para todo z)
2	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	2	$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0} $(z \neq 0)$
3	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	3	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ $(\lvert z\rvert > 1)$
4	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	4	$-u[-n+1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ $(\lvert z\rvert < 1)$
5	$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	5	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ $(\lvert z\rvert > \lvert a\rvert)$
6	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	6	$u[n]\cos[\Omega_0 n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos[\Omega_0]}{1-2z^{-1}\cos[\Omega_0]+z^{-2}}$ $(\lvert z\rvert > 1)$
7	$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	7	$u[n]\mathrm{sen}[\Omega_0 n]$	$\frac{z^{-1}\,\mathrm{sen}[\Omega_0]}{1-2z^{-1}\cos[\Omega_0]+z^{-2}}$ $(\lvert z\rvert > 1)$

Definição de $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
Relação com a DTFT:
$$X(e^{j\Omega}) = X(z)\lvert_{z=e^{j\Omega}} \quad \text{desde que} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert < \infty$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

Propriedades (esquerda) e pares de transformadas (direita).

Propriedades			Pares de Transformadas		
	$x[n]$	$X(e^{j\Omega})$		$x[n]$	$X(e^{j\Omega})$
1	$x[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$	1	$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
2	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(e^{j\Omega})+a_2X_2(e^{j\Omega})$	2	$1\ \forall n$	$2\pi\delta(\Omega)\quad \lvert\Omega\rvert\le\pi$
3	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$	3	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)\quad \lvert\Omega\rvert,\lvert\Omega_0\rvert\le\pi$
4	$x[-n]$	$X(e^{-j\Omega})$	4	$\cos[\Omega_0 n]$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$ $\lvert\Omega\rvert\ \lvert\Omega_0\rvert\le\pi$
5	$x_m[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{se } n=km\\ 0 & \text{se } n\ne km\end{cases}$	$X\left(e^{jm\Omega}\right)$	5	$\text{sen}[\Omega_0 n]$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$ $\lvert\Omega\rvert\ \lvert\Omega_0\rvert\le\pi$
6	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$	6	$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$
7	$nx[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(e^{j\Omega})$	7	$\frac{\text{sen}(Wn)}{\pi n}$ $0<W<\pi$	$X(e^{j\Omega})=\begin{cases}1 \text{ se } 0\le\lvert\Omega\rvert\le W\\ 0 \text{ se } W\le\lvert\Omega\rvert\le\pi\end{cases}$
8	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega})\otimes Y(e^{j\Omega})$	8	$x[n]=\begin{cases}1 \text{ se } \lvert n\rvert\le N\\ 0 \text{ se } \lvert n\rvert>N\end{cases}$	$\frac{\text{sen}\left(\Omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\text{sen}(\Omega/2)}$
9	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\Omega})$	9	$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta[n-Np]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$

Definição da Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Teorema de Parseval para DTFT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert X\left(e^{j\Omega}\right)\right\rvert^2 d\Omega$$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Teorema de Parseval para DFT

$$\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert X[k]\rvert^2$$

D8CDF4C1-6D61-4723-B8C4-8812DABF8E20 2212082020