

QUESTÃO	A	B	C	D	E
1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
13	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
14	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
15	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
QUESTÃO	A	B	C	D	E
16	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
18	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
19	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
20	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
24	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
25	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
26	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
27	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
28	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
29	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
30	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Para preenchimento do professor

Questão	Valor	Obtido
QO1	1	✓
QO2	1	✓
QO3	1	✓
QO4	1	✓
Total	4,0	4

Não se esqueça de transcrever sua solução discursiva para o correspondente campo de resposta (próxima página). Sob nenhuma hipótese rascunhos serão considerados para correção.

Folha de Resposta da Questão Discursiva – QD

1	Item (a):
2	$\sum z^{-l_k} \leq 1 \rightarrow 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1,125 \checkmark$
3	Não é univocamente decodificável
4	Item (b):
5	$a_1(0,4) \quad a_1(0,4) \quad a_2(0,6) \quad 0$
6	$a_2(0,28) \quad a_3(0,32) \quad a_1(0,4) \quad 1 \checkmark$
7	$a_3(0,22)$ $a_2(0,28) \quad 1$
8	$a_4(0,1) \quad 1$
9	
10	$a_1 \mapsto 1 \quad L = \sum_{k=1}^N l_k p_k$
11	$a_2 \mapsto 01$
12	$a_3 \mapsto 000 \quad L = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,28 + 3 \cdot 0,22 + 3 \cdot 0,1$
13	$a_4 \mapsto 001 \quad L = 192 \text{ bits Símbolos}$
14	
15	$H = \sum p_k \log_2 p_k \rightarrow 0,4 \log_2(0,4) + 0,28 \log_2(0,28) + 0,22 \log_2(0,22) + 0,1 \log_2(0,1)$
16	
17	$H \approx 1,855 \text{ bits} \quad \checkmark$
18	
19	$m = \frac{1,855}{1,92} \approx 0,966$
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Texto para as questões objetivas 1 a 4

Considere um canal de comunicação binário simétrico (BSC), com probabilidade de erro de bit (isto é, de o bit enviado ser “trocado” ao longo do canal e, portanto, ser recebido incorretamente – evento também chamado de *crossover*) dada por p_e . O esquema deste BSC é ilustrado na figura abaixo:

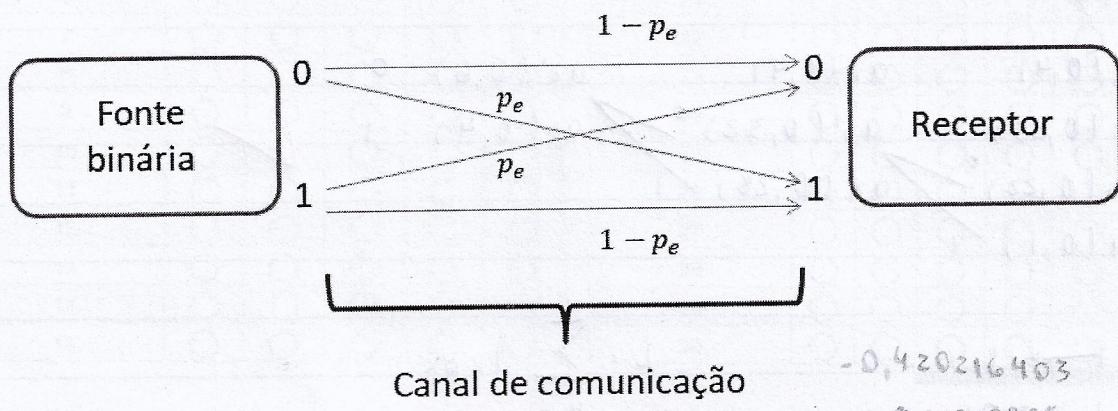


Figura 2. Canal Binário Simétrico (BSC).

Seja X a variável aleatória representando o bit emitido na fonte e Y a variável aleatória representando o bit observado no receptor. Desta maneira temos que $P(Y = 0|X = 1) = P(Y = 1|X = 0) = p_e$ e $P(Y = 0|X = 0) = P(Y = 1|X = 1) = 1 - p_e$.

Considerando o BSC acima descrito, responda às questões objetivas 1, 2, 3 e 4, a seguir.

Questão Objetiva n. 1 – QO1 (valor: 1 ponto)

Nessas condições, em que $P(X = 0) = 0,65$ e $p_e = 0,1$, a entropia $H(Y)$ no receptor é igual a:

- A) 0,934 bits.
- B) 0,958 bits.
- C) 0,841 bits.
- D) 0,715 bits.
- E) 1,028 bits.

$$P(Y=0) = \underbrace{P(Y=0|X=0)}_{1-p_e} \cdot \underbrace{P(X=0)}_{0,65} + \underbrace{P(Y=0|X=1)}_{p_e} \cdot \underbrace{P(X=1)}_{0,35}$$

$$P(Y=0) = 0,4272 + 0,485$$

$$P(Y=0) = 0,912$$

Questão Objetiva n. 2 – QO2 (valor: 1 ponto)

Considere que, no receptor, tenha sido observado que $Y = 1$. Nesta situação, ainda considerando $p_e = 0,1$ e $P(X = 0) = 0,65$, é correto afirmar que a probabilidade de, na fonte, ter sido enviado $X = 1$ é igual (com dois dígitos após a vírgula) a:

- A) 0,35.
- B) 0,50.
- C) 0,17.
- D) 0,83.
- E) 0,90.

$$P(X=1|Y=1) =$$

$$\frac{P(Y=1|X=1) \cdot P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{0,9 \cdot 0,35}{0,38}$$

Questão Objetiva n. 3 – QO3 (valor: 1 ponto)

Considere, agora, a situação em que se queira enviar, pelo BSC, uma sequência de 10 bits. Supondo-se, ainda, que $p_e = 0,1$, então, é correto afirmar que a probabilidade de, no receptor, haver menos de 3 erros de bit na sequência recebida – isto é, a probabilidade de haver não mais do que 2 bits “trocados” na transmissão da sequência pelo canal – é igual a:

- A) 0,9298.
- B) 0,3917.
- C) 0,1937.
- D) 0,111.
- E) 0,8.

Questão Objetiva n. 4 – QO4 (valor: 1 ponto)

A respeito do BSC e da entropia no receptor, avalie as afirmações a seguir.

- I. Considerando que as probabilidades de a fonte emitir 0s e 1s sejam, respectivamente $P(X = 0) = 0,65$ e $P(X = 1) = 0,35$, então a entropia $H(Y)$ no receptor (incerteza relativa a Y , o bit a ser observado no receptor) será máxima caso $p_e = 0,5$. ✓
- II. Caso a taxa de erros de bit seja $p_e = 0,1$, então a entropia $H(Y)$ no receptor será máxima se as taxas de 0s e de 1s emitidos pela fonte forem iguais, isto é, se $P(X = 0) = P(X = 1) = 0,5$. ✓
- III. Considerando, por exemplo, que $P(X = 0) = 0,65$ e $P(X = 1) = 0,35$, então, ao ter-se o conhecimento de qual foi o bit emitido pela fonte ($X = 0$ ou $X = 1$), a incerteza acerca do bit Y a ser observado no receptor diminui, isto é, $H(Y|X) < H(Y)$, desde que $p_e \neq 0,5$. ✓

É correto somente o que se afirma em:

- A) I.
- B) I e II.
- C) II e III.
- D) I e III.
- E) I, II e III.

Questão Discursiva – QD (valor: 1 ponto)

Considere que uma fonte emita símbolos de um alfabeto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, de 4 símbolos distintos, com correspondentes probabilidades dadas por

$$P(a_1) = 0,4; \quad P(a_2) = 0,28; \quad P(a_3) = 0,22; \quad P(a_4) = 0,1.$$

Supondo que a fonte seja sem memória (isto é, os símbolos emitidos são independentes, de modo que o símbolo emitido num dado instante não dependa dos símbolos emitidos anteriormente), responda aos itens a seguir:

- a) (0,25 ponto) Suponha que determinado código binário atribua palavras código com os seguintes comprimentos para cada símbolo: 1 bit para a_1 ; 2 bits para a_2 ; 2 bits para a_3 ; e 3 bits para a_4 . É possível que esse código seja univocamente decodificável? Justifique.
- b) (0,75 ponto) Obtenha o correspondente código de Huffman para esta fonte de símbolos. Qual o comprimento médio das palavras código e a eficiência para o código obtido? Apresente, na folha de respostas, seu desenvolvimento completo, de forma clara, sucinta e organizada.

QUESTÃO	A	B	C	D	E	QUESTÃO	A	B	C	D	E
1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	16	<input type="radio"/>				
2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	17	<input type="radio"/>				
3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	18	<input type="radio"/>				
4	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	19	<input type="radio"/>				
5	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	20	<input type="radio"/>				
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	21	<input type="radio"/>				
7	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	22	<input type="radio"/>				
8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	23	<input type="radio"/>				
9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	24	<input type="radio"/>				
10	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	25	<input type="radio"/>				
11	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	26	<input type="radio"/>				
12	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	27	<input type="radio"/>				
13	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	28	<input type="radio"/>				
14	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	29	<input type="radio"/>				
15	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	30	<input type="radio"/>				

Para preenchimento do professor

Questão	Valor	Obtido
Q01	1	1
Q02	1	1
Q03	1	1
Q04	1	1
Q05	1	1
Total	5,0	5

Não se esqueça de transcrever sua solução discursiva para o correspondente campo de resposta (próxima página). Sob nenhuma hipótese rascunhos serão considerados para correção.

Texto para as 4 primeiras questões

Considere o jogo em que uma bolinha é colocada em um de três copos idênticos, escolhido ao acaso, de modo que não se possa enxergar dentro de qual copo a bolinha está (figura abaixo).

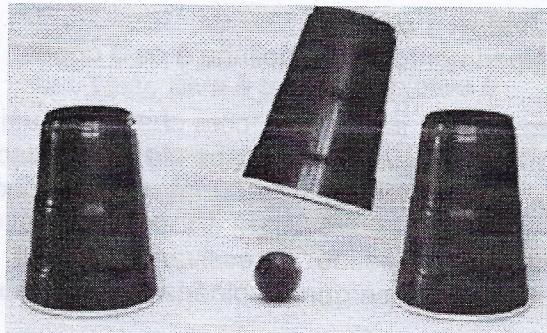


Figura 1: Cadê a bolinha?

Suponha que, a princípio, não saibamos em que copo a bolinha foi colocada. Assim, podemos descrever o problema em termos de um experimento aleatório com três resultados possíveis. Isto é, podemos definir uma variável aleatória, X , a qual pode assumir três valores, $X = 1, 2$, ou 3 , a depender do copo em que a bolinha será encontrada (enumerando os copos de 1 a 3, da esquerda para a direita, por exemplo). Ou seja, o resultado $\{X = k\}$, $k = 1, 2, 3$, corresponde ao evento aleatório {"A bolinha está no k -ésimo copo"}. Considerando que os resultados deste experimento aleatório são equiprováveis, responda, a seguir, às quatro primeiras questões.

Questão Objetiva n. 1 – QO1 (valor: 1 ponto)

Considere que retiramos o primeiro copo, constatando que a bolinha não estava sob ele. A quantidade de informação, em bits, que o conhecimento deste resultado nos fornece é igual a:

- A) 1,0. B) 0,585. C) 1,585. D) 0,333. E) 0,667.

Questão Objetiva n. 2 – QO2 (valor: 1 ponto)

Considerando a situação em que já retiramos o primeiro copo e que ainda não encontramos a bolinha, avalie as asserções a seguir:

- I. Nesta situação, a probabilidade de encontrar a bolinha no segundo copo é igual a 1/3, visto que temos um total de 3 copos no experimento.
- II. Nesta situação, a quantidade de informação associada ao evento {"retirar o segundo copo e encontrar a bolinha"} é igual a 1 bit.
- III. Nesta situação, qualquer que seja o resultado ao retirar qualquer um dos dois copos restantes, a quantidade de informação associada ao resultado observado será a mesma.

É correto somente o que se afirma em:

- A) I. B) I e II. C) II e III. D) I e III. E) I, II e III.

Questão Objetiva n. 3 – QO3 (valor: 1 ponto)

Considere, agora, o seguinte experimento com a bolinha e os 3 copos:

A bolinha é colocada em um dos copos ao acaso – com chances iguais de a bolinha estar em cada um deles – e você tenta determinar em qual dos 3 copos ela foi colocada fazendo perguntas binárias (com respostas “sim” ou “não”), quantas forem necessárias, até que encontre a bolinha.

Suponha que este experimento seja repetido sucessivamente. Isto é, várias vezes a bolinha é escondida em um dos copos e você faz perguntas binárias até que determine em que copo ela foi colocada.

Caso esse experimento continue sendo repetido indefinidamente, então, em média, a quantidade de perguntas necessárias para que você encontre a bolinha, em cada vez que ela é escondida em um dos copos, deverá se aproximar de:

- (A) 1,585 pergunta por jogo.
- (B) 1,667 pergunta por jogo.
- (C) 2,0 perguntas por jogo.
- (D) 2,333 perguntas por jogo.
- (E) 3,0 perguntas por jogo.

Questão Objetiva n. 4 – QO4 (valor: 1 ponto)

Finalmente, considerando a situação inicialmente descrita (bolinha colocada ao acaso em um dos 3 copos, com a variável aleatória X assumindo os valores 1, 2 ou 3, de modo equiprovável, com o resultado $\{X = k\}$ representando o evento {"a bolinha foi colocada no k -ésimo copo"}), avalie as asserções abaixo.

- I. Caso o experimento fosse realizado com 4 copos (em vez de 3), com resultados também equiprováveis, a incerteza acerca do resultado do experimento (isto é, sua entropia) seria maior. ✓
- II. Caso o experimento fosse enviesado (desequilibrado), de modo que, por exemplo, a bolinha fosse colocada no primeiro copo (o da esquerda), em média, metade das vezes (isto é, $P(X = 1) = 0,5$), a incerteza acerca do resultado do experimento diminuiria. ✓
- III. A incerteza acerca do resultado do experimento seria ainda menor, em comparação à situação da afirmação II (acima), caso a bolinha fosse colocada, em média, 90% das vezes no primeiro copo (o da esquerda). ✓

É correto somente o que se afirma em:

- A) I. ✓
- B) I e II. ✓
- C) II e III. ✓
- D) I e III. ✓
- E) I, II e III. ✓

Texto para a questão objetiva 5

Considere um canal de comunicação binário simétrico (BSC), com probabilidade de erro de bit (isto é, de o bit enviado ser “trocado” ao longo do canal e, portanto, ser recebido incorretamente – evento também chamado de *crossover*) dada por p_e . O esquema deste BSC é ilustrado na figura abaixo:

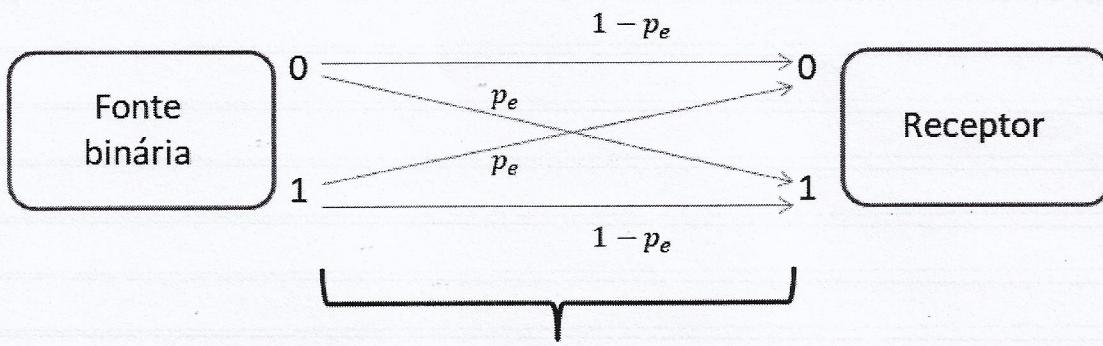


Figura 2. Canal Binário Simétrico (BSC).

Seja X a variável aleatória representando o bit emitido na fonte e Y a variável aleatória representando o bit observado no receptor. Desta maneira temos que $P(Y = 0|X = 1) = P(Y = 1|X = 0) = p_e$ e $P(Y = 0|X = 0) = P(Y = 1|X = 1) = 1 - p_e$.

Considerando o BSC acima descrito, responda à questão a seguir.

Questão Objetiva n. 5 – QO5 (valor: 1 ponto)

Considere que $p_e = 0,1$ e que, em média, 65% dos bits emitidos pela fonte sejam iguais a 0, isto é, $P(X = 0) = 0,65$. Nesta situação, a probabilidade de ser observado o bit 1 no receptor (isto é, $P(Y = 1)$) é igual a:

- A) 0,350.
- B) 0,380.
- C) 0,500.
- D) 0,450.
- E) 0,385.

$$P(Y=1) = P(Y=1|X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=1|X=1) \cdot P(X=1)$$

$$P(Y=1) = 0,065 + 0,315$$

$$P(Y=1) = 0,38$$

ÁREA LIVRE