PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN

DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE : UN MARCO CONCEPTUAL

(Utilidad Esperada, Valor de la Información y el Enfoque Bayesiano)

Eduardo Walker Hitschfeld*

Trabajo Docente Nº 190-01

* Ingeniero Comercial, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Ph. D. Graduate School of Business, University of California at Berkeley, especializado en Finanzas.
Profesor Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Santiago, Enero 1991
(R03/2007)

COMENTARIO INICIAL

Las teorías van cambiando a través del tiempo. Con frecuencia en pocos años lo aprendido queda obsoleto.

¿Qué podemos enseñar nosotros, los profesores, si muchas teorías pasan de moda en poco tiempo?

Una posible respuesta es que debemos enseñar al alumno a ***pensar*** *y a* ***aprender****. Esto se logra aumentando la capacidad de abstracción del alumno. Una de las herramientas disponibles para fomentar lo anterior son las matemáticas y por eso se hace uso de ellas en este texto. En la medida que el lenguaje de las matemáticas sirva el propósito de aumentar la capacidad de abstracción, entender y utilizar dicho lenguaje constituye un fin en sí mismo además de servir para presentar teorías en forma esquemática y precisa.*

A mi juicio, debemos enseñar al alumno a utilizar herramientas "primitivas", aquéllas con las cuales se ***construyen*** *las teorías. Más que conocer una teoría particular y sus predicciones, es importante saber qué supuestos, herramientas y razonamientos fueron utilizados para construirlas. Esto permitirá al alumno adaptarse y utilizar los avances del conocimiento en su vida profesional.*

Este es el espíritu que motiva este apunte.

AGRADECIMIENTOS

Es mi deber agradecer a las diversas personas e instituciones gracias a cuya ayuda pude completar este trabajo.

En particular, agradezco a la Escuela de Administración de la Pontificia Universidad Católica de Chile los recursos destinados a este trabajo.

Deseo agradecer también a Bernardita Karadima S. su eficiente ayuda en el proceso de presentación e impresión de este documento.

Por último, pero no por eso menos importante, agradezco a Eduardo Pérez G. la compilación, creación y resolución de ejercicios para este trabajo, además de la revisión bibliográfica, la lectura crítica y los comentarios a diversas versiones preliminares del mismo.

CONTENIDO

TÍTULOS **PAGINA**

I INTRODUCCIÓN

Este es un trabajo docente que revisa algunos conceptos importantes de las Teorías de Finanzas y de Toma de Decisiones. La discusión que sigue pretende situar este trabajo en un contexto más general, además de precisar su contenido.

La teoría económica estudia cómo los agentes económicos asignan sus recursos escasos entre las alternativas disponibles. Esta asignación de recursos puede estudiarse desde una perspectiva atemporal o intertemporal, bajo certidumbre o incertidumbre. En todos los casos, lo que se busca es modelar el comportamiento de un individuo o un grupo de ellos, con el objeto de entender mejor algunos aspectos del mundo real.

La teoría microeconómica tradicional modela el comportamiento individual o grupal, bajo condiciones de certidumbre. Así, por ejemplo, se estudia la forma en que el consumidor o productor asigna sus recursos entre los distintos bienes o insumos disponibles, suponiendo que la decisión busca maximizar alguna función objetivo. También se estudian las decisiones de consumo presente versus consumo futuro, al igual que las decisiones de producir para hoy o para alguna fecha futura, todo lo anterior bajo condiciones de certidumbre.

Sin embargo, para explicar el comportamiento de los individuos bajo condiciones de incertidumbre, vale decir, cuando no se conocen a priori las consecuencias de las decisiones, la teoría microeconómica tradicional ha demostrado ser insuficiente. Por este motivo, gran parte de la teoría microeconómica ha sido reformulada para incorporar explícitamente la incertidumbre y de aquí han surgido nuevas áreas, tales como las Teorías de Finanzas y de Decisiones.

La Teoría de Finanzas busca, entre otras cosas, modelar las decisiones de asignación intertemporal de la riqueza bajo incertidumbre (decisiones de compra de instrumentos financieros y decisiones de inversión), llegando a establecer proposiciones generales en torno al comportamiento de los **mercados** de capitales. En este caso, el elemento "tiempo" es vital dada la naturaleza del problema y también porque las consecuencias de las decisiones son inciertas al momento de tomarlas.

Por su parte, la Teoría de Decisiones se preocupa de analizar y racionalizar en términos generales el **proceso** decisional que sigue un **individuo**, considerando explícitamente la naturaleza incierta de las consecuencias de sus decisiones, abarcando tanto el ámbito positivo (descriptivo) como el normativo (prescriptivo). Aquí, la información tiene un rol fundamental.

Lo anterior permite apreciar que las Teorías de Finanzas y de Toma de Decisiones tienen muchos elementos en común.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar una serie de conceptos que son la base misma de las Teorías de Finanzas y de Toma de Decisiones. Se analizan los principales elementos que intervienen en un proceso de decisión para plantear un modelo decisional. Junto con lo anterior, el trabajo entrega algunas de las principales herramientas con que se construye la Teoría de Finanzas.

Se espera que todo lo anterior otorgue al lector una mejor comprensión, aunque incompleta, de la forma en que actúan los agentes económicos y los mercados de capitales.

Parte importante de este trabajo se dedica a aclarar el rol de la información en el proceso de toma de decisiones. Se postula que en esencia la información es un **bien** final para el inversionista o un **insumo** para el proceso productivo, puesto que al disminuir el nivel de incertidumbre, puede aumentar el bienestar de un individuo o bien aumentar el valor económico de una empresa. En la medida en que pueda considerarse la información como un bien o un insumo[1], ésta queda sujeta a un **análisis costo-beneficio** como cualquier otro bien o insumo. Por lo tanto, al menos desde un punto de vista conceptual, es útil determinar el valor de la información para los agentes privados. Determinar si la información tiene valor **social** es un tópico que escapa al propósito de este trabajo.

Entender la forma en que se valora la información usando "árboles de decisión" permitirá entender el concepto detrás de la "Programación Dinámica", en la que los problemas se resuelven "de atrás para adelante", viendo primero las consecuencias de las decisiones bajo distintos escenarios, para luego determinar el curso óptimo de acción dependiendo de la información que se vaya generando en el proceso.

Aunque "en la práctica" es improbable que llegue a usarse el enfoque que aquí se presenta para cuantificar el valor de la información en una situación concreta, es importante conocer el proceso lógico que se sigue para obtenerlo, puesto que puede ayudar a la persona a desarrollar una capacidad analítica que mejore su habilidad para tomar decisiones informadas.

Antes de leer este apunte, es recomendable que el lector tenga una idea formada sobre los siguientes conceptos:

- Probabilidad
- Valor esperado

---

1 Sin embargo, la información es un bien muy especial, porque su consumo por parte de un individuo no implica menor consumo del mismo bien por parte de otro (esto es lo que se llama un "bien público").

- Teorema de Bayes

Estos tópicos se explican brevemente en el Anexo.

Luego de haber leído este apunte, se espera que el lector tenga claros los siguientes conceptos:

- Un sistema de información como un conjunto de "señales" que acotan el espacio de los posibles "estados de la naturaleza"
  - Sistemas de información
  - Estructuras de información "sin ruido"
  - Estructuras de información "ruidosas"
- Utilidad esperada de la riqueza y sus conceptos relacionados:
  - Aversión, neutralidad o preferencia al riesgo
  - Equivalente cierto
  - Consecuencias de la aversión al riesgo en la toma de decisiones y en los precios de mercado
- Valor esperado de la información perfecta y valor esperado de la información muestral en un proceso de decisión perfectamente especificado
  - Arboles de decisión
- Relaciones entre los puntos anteriores

II ELEMENTOS DE UN PROCESO DE DECISIÓN: UN EJEMPLO

Para aclarar los conceptos que aquí se emplean, es conveniente comenzar con un ejemplo sencillo. En él se ilustran algunos de los conceptos que se formalizan posteriormente.

Ejemplo: El problema del paraguas

II.1 La decisión óptima sin información adicional

"Hace poco, Sue Z.Q. despertó luego de un reparador sueño de ocho horas. Ya se ha vestido, ha tomado desayuno y se apronta a dejar su casa para ir a la universidad a una clase que comienza a las 8:30. Es invierno y los días han estado lluviosos, pero en este momento no está lloviendo. Así Sue Z.Q. enfrenta la primera disyuntiva del día: "¿Llevaré o no llevaré paraguas?" Sue Z.Q. es una persona muy activa, por lo que preferiría no acarrear un paraguas si no llueve (porque se le puede perder, es incómodo andar con él en el bus, etc.), pero si no lo lleva y llueve, Sue Z.Q. puede mojarse y eso es algo que le disgusta mucho. Tanto es así, que evitarse el desagrado de mojarse más que compensa la incomodidad de andar con un paraguas. Sue Z.Q. mira por la ventana y no ve indicio alguno que le permita predecir con seguridad si va a llover o no. Sin embargo, debe tomar una decisión...¡ y pronto ! En caso contrario, Sue Z.Q. llegará tarde a clases. Para ella, esto es inaceptable".

Sue Z.Q. conceptualiza el problema de la siguiente forma:

a) **Alternativas de Decisión:**

$\mathbf{d_1}$: llevar paraguas
$\mathbf{d_2}$: no llevar paraguas

b) **Estados de la naturaleza:**

$\mathbf{s_1}$: llueve más tarde
$\mathbf{s_2}$: no llueve más tarde

c) **Consecuencias de la decisión asociadas a cada estado:**

Pueden representarse las consecuencias de las posibles decisiones mediante una matriz (llamada matriz de pagos) donde las columnas corresponden a las alternativas de decisión y las filas, a los estados de la naturaleza:

$$\mathbf{C\,(\,s\,,\,d\,)}$$

	d_1	d_2
s_1	C_{11}	C_{12}
s_2	C_{21}	C_{22}

Aquí por definición C_{ik} corresponde a $C\ (s_i\ ,\ d_k)$, que se interpreta como la consecuencia de haber tomado la decisión d_k cuando finalmente ocurre el estado s_i.

En el contexto del ejemplo, la consecuencias son:

C (s_1; d_1): sufrir la incomodidad del paraguas y no mojarse
C (s_2; d_1): sufrir la incomodidad **evitable** de llevar el paraguas
C (s_1; d_2): evitar la incomodidad del paraguas y mojarse
C (s_2; d_2): evitar la incomodidad del paraguas y **no** mojarse

Continuando con el problema de Sue, a estas alturas ella debe hacer dos cosas: primero debe **cuantificar** en base a algún patrón de medida las consecuencias de cada una de las decisiones en los distintos estados de la naturaleza. Segundo, debe **ponderar** las posibles consecuencias asociadas a cada decisión para determinar (a priori; esto es, antes de saber si llovió o no) cuál es la decisión más conveniente.

Suponga que Sue Z.Q. tiene una **función de utilidad** bien definida, que le permite asociar un número de **"útiles"** a cada consecuencia. En este sentido, la función de utilidad permite cuantificar las consecuencias potenciales de la decisión. Así Sue Z.Q. ha determinado lo siguiente:

U (C_{11}) : 50 útiles
U (C_{21}) : 40 útiles
U (C_{12}) : -10 útiles
U (C_{22}) : 100 útiles

Vale decir, si por ejemplo Sue Z.Q. decide no llevar el paraguas y ex-post llueve, ella experimentará un "bienestar" de -10 útiles (**U (C_{12}) :** -10 útiles).

d) **Criterio de decisión**

Lo que falta para tener una especificación completa del problema bajo estudio es un criterio de decisión. En otras palabras, lo que aún resta por hacer es **ponderar** cada uno de los posibles resultados asociados a cada decisión para determinar cuál es la decisión óptima.

Como ponderadores de los posibles resultados, se utilizan las **probabilidades subjetivas** que Sue Z.Q. asigna a los estados de la naturaleza, vale decir, se utilizará el "**grado de creencia**" que Sue tiene en relación a la posibilidad de que llueva o no llueva. Una probabilidad subjetiva es un grado de creencia normalizado con respecto a la ocurrencia de un evento. Se tiene certeza con respecto a la ocurrencia de un evento si el grado de creencia es **1** y se tiene certeza de que **no** ocurrirá un evento si el grado de creencia es **0**. Si no se está seguro de lo uno o lo otro, el grado de creencia debe estar entre **0** y **1**. Lo importante aquí es que la suma de las probabilidades subjetivas asociadas a los distintos estados de la naturaleza debe ser igual a **1**, por definición. Vale decir, si se le asigna una probabilidad de 0,8 al evento "lloverá", entonces por definición se le asigna una probabilidad de 0,2 al evento "no lloverá".

Para resolver el problema del paraguas, se supone que Sue Z.Q. tomará la decisión que "maximice su **utilidad esperada**" (o el valor esperado de su utilidad, que es lo mismo). En nuestro ejemplo, la utilidad esperada asociada con una decisión de llevar el paraguas es el promedio ponderado de los útiles asociados a esa decisión bajo lluvia y ausencia de ella, donde los ponderadores son las probabilidades subjetivas que Sue asigna a cada evento. Si Sue Z.Q. adopta la decisión que "**maximiza su utilidad esperada"** entonces se dice que ella exhibe un "comportamiento racional".

Suponga que Sue Z.Q. cree que hay un 80% de posibilidades de que llueva. Esto puede formalizarse de la siguiente manera:

$$\pi(\mathbf{s_1}) = 0{,}8\ \mathbf{;}\ \pi(\mathbf{s_2}) = 0{,}2$$

donde $\pi(s_i)$ representa la probabilidad subjetiva asociada con el estado de la naturaleza s_i.

En seguida se calcula la "utilidad esperada" asociada a cada una de las decisiones:

<u>Utilidad Esperada de la decisión $\mathbf{d_1}$</u>:

$$EU(s\,;d_1) = \pi(\mathbf{s_1}) \times \mathbf{U(C_{11})} + \pi(\mathbf{s_2}) \times \mathbf{U(C_{21})}$$

$$= 0{,}8 \times 50 + 0{,}2 \times 40 = 48 \text{ útiles}$$

<u>Utilidad Esperada de la decisión $\mathbf{d_2}$</u>:

$$EU(s\,;d_2) = \pi(\mathbf{s_1}) \times \mathbf{U(C_{12})} + \pi(\mathbf{s_2}) \times \mathbf{U(C_{22})}$$

$$= \quad 0{,}8 \quad x \ (-10) \quad + \quad 0{,}2 \quad x \quad 100 = 12 \text{ útiles}$$

De este modo, se concluye que la mejor decisión para Sue Z.Q. es llevar un paraguas, puesto que la utilidad esperada asociada con esa decisión es superior a la utilidad esperada derivada de no llevar el paraguas ($EU(s ; d_1)$ es mayor que $EU(s ; d_2)$).

Es interesante notar que si las probabilidades hubieran sido al revés, vale decir un 80% de posibilidades de que **no** llueva, la decisión óptima habría sido **no** llevar el paraguas (con una utilidad esperada de 78 útiles. Se recomienda al lector verificar esta cifra). Esto ilustra la importancia de las probabilidades subjetivas en una decisión.

El ejemplo anterior ha servido para ilustrar los elementos que intervienen en un proceso de decisión. Esto es lo que Lev [3] ha denominado un Proceso de Decisión Perfectamente Especificado (PDPE), el que consiste en:

1) Un conjunto de decisiones factibles (D)
2) Un conjunto exhaustivo de estados de la naturaleza (S)
3) Una función de utilidad (U)
4) Probabilidades Subjetivas (π)

El PDPE, compuesto por (D,S,U,π), es el escenario ideal para explorar el valor atribuíble a nueva información. Para estos efectos, se prosigue con el ejemplo.

II. 2 La decisión óptima con información adicional

Suponga que Sue aún no sale de su casa pero tiene claro que, como están las cosas, le conviene llevar el paraguas. No obstante, Sue sabe que en pocos minutos más un noticiario radial dará a conocer el pronóstico del tiempo. Por lo tanto, Sue enfrenta ahora otra disyuntiva: "¿Espero las noticias o me voy con el paraguas?" En este sentido, Sue enfrenta la decisión de "comprar" información adicional, en el sentido que debe **esperar** el noticiario y esto tiene un costo. El pronóstico del tiempo puede decir tanto "lloverá hoy" como "no lloverá hoy", pero este pronóstico algunas veces se equivoca.

En cosa de segundos, Sue hace el siguiente análisis:

"Si me voy en este instante, me iré con una utilidad esperada de 48 útiles. Si espero el noticiario, hay dos posibilidades: Puedo recibir la "señal" (o mensaje) "lloverá hoy" con una probabilidad de 0,82 o bien recibir la señal "no lloverá hoy" con probabilidad de 0,18. Si en el noticiario escucho "lloverá hoy", revisaré 'hacia arriba' mis probabilidades de lluvia, quedando ésta en 95%. Si escucho "no lloverá hoy" revisaré 'hacia abajo' mis probabilidades de lluvia, quedando ésta en 10%".

Sue enfrenta las siguientes decisiones factibles. Cronológicamente, primero enfrenta:

$\mathbf{d_c}$: "compro" información
$\mathbf{d_{nc}}$: no "compro" información

Si compra información, debe esperar la señal (mensaje) del noticiario antes de tomar la decisión de llevar o no llevar el paraguas:

$\mathbf{y_1}$: lloverá hoy
$\mathbf{y_2}$: no lloverá hoy.

Si recibe las señales $\mathbf{y_1}$ o $\mathbf{y_2}$, o si decide no esperar el noticiario, en cada uno de los tres casos Sue puede decidir llevar o no llevar el paraguas. Es importante recordar que ya se sabe cuál es la decisión óptima en caso de no comprar información adicional (llevar el paraguas). Sue ahora tiene que ver la conveniencia de "comprar o no comprar" información. Debe tomar su utilidad esperada derivada de la decisión óptima sin información (48 útiles) y compararla con la utilidad esperada con información adicional. Para ello, Sue debe buscar cuál **sería** la decisión óptima **si recibiera** la señal $\mathbf{y_1}$ y cuál sería la decisión óptima si recibiera la señal $\mathbf{y_2}$. Debe notarse que todo este análisis se hace **antes** de conocer la señal del noticiario. También es importante notar que si, independientemente de lo que diga el noticiario, Sue llevará consigo su paraguas de todos modos, entonces no valdría la pena esperar el noticiario (no sería conveniente "comprar" más información puesto que no afecta la decisión).

El razonamiento de Sue también permite conocer sus "**probabilidades revisadas**". Esto es, se conoce la probabilidad que Sue asigna al evento "lluvia" ($\mathbf{s_1}$) **dado que** el noticiario dice "lloverá hoy" ($\mathbf{y_1}$). Formalmente, se tiene:

$$\pi\,(\mathbf{s_1} \mid \mathbf{y_1}) = 0{,}95 \ ; \ \pi\,(\mathbf{s_2} \mid \mathbf{y_1}) = 0{,}05$$

$$\pi\,(\mathbf{s_1} \mid \mathbf{y_2}) = 0{,}10 \ ; \ \pi\,(\mathbf{s_2} \mid \mathbf{y_2}) = 0{,}90$$

Asimismo, (antes de escuchar el noticiario) Sue Z.Q. asigna probabilidades a recibir las señales $\mathbf{y_1}$ e y_2 ("lloverá hoy" y "no lloverá hoy", respectivamente). Estas son $p(\mathbf{y_1})=0{,}82$ y $p(\mathbf{y_2})=0{,}18$ (ver razonamiento de Sue).

Las probabilidades revisadas permiten calcular nuevas utilidades esperadas, dada cada señal. Las probabilidades asociadas a las señales permiten resumir en un solo número la utilidad esperada dado el nuevo **sistema de información**.

A continuación se siguen los pasos de Sue Z.Q. para determinar la conveniencia de esperar el noticiario:

a) Determinar la utilidad esperada, dada la señal $\mathbf{y_1}$, asociada a cada decisión, utilizando las probabilidades revisadas ($\pi\ (\mathbf{s_i} \mid \mathbf{y_1})$).
b) Determinar la utilidad esperada, dada la señal y_2, asociada a cada decisión, utilizando las probabilidades revisadas ($\pi\ (\mathbf{s_i} \mid \mathbf{y_2})$).
c) Determinar la decisión óptima asociada a cada señal (por ejemplo, si el noticiario dice "lloverá hoy" entonces la decisión óptima puede resultar ser "llevar paraguas" y si el noticiario dice "no lloverá hoy" entonces la decisión óptima puede ser "no llevar paraguas").
d) Determinar la utilidad esperada asociada a este sistema de información, tomando como dato los "útiles" obtenidos de las decisiones óptimas en (c) y luego ponderarlos por las probabilidades de ocurrencia de las señales. Esto da otro resultado en útiles que se compara con la utilidad esperada sin información adicional. Si la utilidad esperada con información resulta ser mayor que la utilidad esperada sin información, entonces conviene esperar el noticiario.

Ahora se determina si conviene a Sue esperar el noticiario.

(En adelante se cambiará ligeramente la notación, donde en lugar de utilizar U[C(s,d)] se utilizará U(s,d)).

a) <u>Dada la señal $\mathbf{y_1}$</u>

<u>Utilidad esperada de la decisión $\mathbf{d_1}$</u>:

$$E[U(s\ ;\mathbf{d_1}) \mid \mathbf{y_1}] = \pi\ (\mathbf{s_1} \mid \mathbf{y_1}) \times U(\mathbf{s_1}; \mathbf{d_1}) + \pi\ (\mathbf{s_2} \mid \mathbf{y_1}) \times U(\mathbf{s_2}; \mathbf{d_1})$$

$$= 0{,}95 \times 50 + 0{,}05 \times 40$$

$$= 49{,}5 \text{ útiles}$$

Utilidad esperada de la decisión $\mathbf{d_2}$:

$$E[U(s\,;\mathbf{d_2}) \mid \mathbf{y_1}] = \pi\,(\mathbf{s_1}|\,\mathbf{y_1}) \text{ x } U(\mathbf{s_1};\mathbf{d_2}) + \pi\,(\mathbf{s_2}|\,\mathbf{y_1}) \text{ x } U(\mathbf{s_2}\,;\mathbf{d_2})$$

$$= 0{,}95 \quad \text{x} \quad (-10) \quad + \quad 0{,}05 \quad \text{x} \quad 100$$

$$= -4{,}5 \text{ útiles}$$

b) Dada la señal $\mathbf{y_2}$

Utilidad esperada de la decisión $\mathbf{d_1}$:

$$E[U(s\,;\mathbf{d_1}) \mid \mathbf{y_2}] = \pi\,(\mathbf{s_1}|\,\mathbf{y_2}) \text{ x } U(\mathbf{s_1};\mathbf{d_1}) + \pi\,(\mathbf{s_2}|\,\mathbf{y_2}) \text{ x } U(\mathbf{s_2}\,;\mathbf{d_1})$$

$$= 0{,}10 \quad \text{x} \quad 50 \quad + \quad 0{,}90 \quad \text{x} \quad 40$$

$$= 41 \text{ útiles}$$

Utilidad esperada de la decisión $\mathbf{d_2}$:

$$E[U(s\,;\mathbf{d_2}) \mid \mathbf{y_2}] = \pi\,(\mathbf{s_1}|\,\mathbf{y_2}) \text{ x } U(\mathbf{s_1};\mathbf{d_2}) + \pi\,(\mathbf{s_2}|\,\mathbf{y_2}) \text{ x } U(\mathbf{s_2}\,;\mathbf{d_2})$$

$$= 0{,}10 \quad \text{x} \quad (-10) \quad + \quad 0{,}90 \quad \text{x} \quad 100$$

$$= 89 \text{ útiles}$$

c) Determinación de la decisión óptima, dada la señal

Aquí simplemente se elige la decisión que maximice la utilidad esperada, dada la señal.

De (a) se desprende que la decisión óptima asociada con la señal y_1 es d_1 (llevar paraguas si el noticiario dice "lloverá hoy"), puesto que esta decisión reporta 49,5 útiles y la otra reportaría sólo -4,5 útiles. Asimismo, de (b) se desprende que la decisión óptima dada y_2 es d_2.

De esta forma se ha encontrado una "función de decisión" que depende del mensaje recibido:

$$D(y) = \begin{cases} d_1 \ \text{si } y = y_1 & \qquad (49{,}5 \text{ útiles}) \\ d_2 \ \text{si } y = y_2 & \qquad (89 \text{ útiles}) \end{cases}$$

d) Utilidad esperada asociada al sistema de información

Ahora debe calcularse la utilidad esperada con el sistema de información. Si el sistema de información da la señal $\mathbf{y_1}$, Sue tendrá una utilidad esperada de 49,5 útiles. Si el sistema de información da la señal $\mathbf{y_2}$, Sue tendrá una utilidad esperada de 89 útiles. Dado que se conocen las probabilidades asociadas a cada señal, se puede calcular la utilidad esperada con sistema de información:

$$E^{Y}U(s;d) = p(y_1) \text{ x } \max_{\{d_i\}} E[U(s;d) \mid y_1] + p(y_2) \text{ x } \max_{\{d_i\}} E[U(s;d) \mid y_2]$$

$$= 0{,}82 \text{ x } 49{,}5 \qquad 0{,}18\text{x} \quad 89$$

$$E^{Y}U(s;d) = 56{,}61 \text{ útiles}$$

II.3 Conclusión

Se ha visto que por el solo hecho de que Sue tenga la opción de esperar y escuchar el pronóstico del tiempo, su utilidad (esperada) aumenta de 48 a 56,61 útiles. Lo que sucede es que, si Sue decide esperar el noticiario, ella tiene **una segunda instancia** para revisar su decisión. En este preciso sentido puede afirmarse que la información es un bien. Si en lugar de información se le regalara a Sue un billete de $5.000, su utilidad también habría aumentado. En teoría económica puede definirse un bien como "algo" cuyo consumo aumente el bienestar del individuo. Se ha visto que el sistema de información aumentó la utilidad de Sue, por lo que puede ser considerado como un bien. El valor de la información (o del sistema de información, más precisamente) es 8,61 útiles para Sue.

Resumiendo, se ha encontrado que el óptimo para Sue es primero esperar el noticiario para escuchar el pronóstico del tiempo. Si el pronóstico dice "lloverá hoy", ella llevará su paraguas. Si el pronóstico del tiempo dice "no lloverá hoy", ella saldrá de su casa sin el paraguas.

Lo anterior parece ser un tanto rebuscado para analizar una decisión tan sencilla. Sin embargo, este mismo esquema de análisis sirve para analizar decisiones más complejas. Asimismo, el ejemplo anterior ha permitido ilustrar conceptos claves en la toma de decisiones:

a) Conjunto de decisiones factibles: éstas son variables que están bajo el control del que toma la decisión;

b) Posibles estados de la naturaleza: los resultados de las decisiones están más allá del control del individuo. Cada decisión tendrá una consecuencia distinta dependiendo del estado de la naturaleza que en definitiva ocurra (depende de la "decisión que tome la 'Naturaleza' "). Una decisión puede ser caracterizada por un conjunto de posibles consecuencias asociadas a diversos escenarios futuros. Los estados de la naturaleza o escenarios futuros **relevantes** serán distintos y dependerán de la decisión bajo estudio.

c) Una función que permita evaluar los resultados (función de utilidad, $, etc.)

d) Un conjunto de probabilidades subjetivas asociadas a cada estado.

Por último, el ejemplo anterior también ha servido para ilustrar el rol de la información en un **PDPE**. En estos casos, una señal proveniente de un sistema de información simplemente ayuda a revisar las probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza, permitiendo revisar una decisión tomada sin información. El sistema de información como un todo provee una instancia intermedia, en la cual se puede verificar la optimalidad de la decisión que se tomaría sin información adicional.

<u>Ejercicio Propuesto</u>

Ahora Sue Z.Q. se encuentra en otro dilema, prestar o no US$ 100 a su amigo Mac. Este generalmente devuelve lo que le prestan más los respectivos intereses, aunque en realidad Sue cree que hay un 10% de posibilidades de que no le devuelva el préstamo. Sue cobra US$ 20 en intereses a Mac, pero si decide no prestarle los US$ 100 entonces los coloca en el banco con lo cual gana US$ 7. (Suponga que US$ 1 equivale a 1 útil).

(a) Determine:

- las alternativas de decisión (d_j)
- los estados de la naturaleza (s_i)
- las consecuencias de la decisión en US$ ($C(s_i ;d_j)$)
- las probabilidades subjetivas asignadas a los estados ($\pi (s_i)$)

(b) ¿Cuál es la mejor decisión para Sue?
(R: Prestar; $EU(s;d_1) =$ US$ 8)

Existe la posibilidad de contratar a un especialista en créditos que ayudaría a Sue en su decisión de prestar o no los US$ 100 a Mac. Hay una probabilidad del 71,5% de que el especialista diga "Mac pagará " y un 28,5% que diga " Mac no pagará ". Este analista a veces se equivoca. Si dice que " Mac pagará " entonces la probabilidad de que Mac efectivamente pague es 94,4%, pero si dice que " Mac no pagará " entonces la probabilidad de que no pague es 21,1%.

(c) Determine:

- las señales posibles (y_k)
- las probabilidades revisadas (π (s_i| y_k))
- las probabilidades asignadas a las señales ($p(y_k)$)

(d) ¿Cuál es la utilidad esperada con el sistema de información proporcionado por el analista? (R: $E^Y U$=US$ 11,49)

(e) ¿Cuánto es el máximo que Sue estaría dispuesta a pagar al analista por esta información? (R: US$ 3,49)

III ESTRUCTURAS DE INFORMACIÓN, SEÑALES Y EL PROCESO DE REVISIÓN DE PROBABILIDADES

En este punto se pone énfasis en uno de los elementos que intervienen en un Proceso de Decisión Perfectamente Especificado (PDPE): las probabilidades subjetivas y la forma en que la nueva información se utiliza para revisar dichas probabilidades.

Para estos efectos, se define el concepto de "estructura de información" y se estudia la forma en que un "agente racional" revisa sus probabilidades. Se supone que dicho proceso de revisión de probabilidades se realiza según el Teorema de Bayes.

Para entender lo que se pretende hacer, es útil tener presente el siguiente cronograma para un PDPE:

	$t=0$	$t=0^+$	$t=1$
Sin Info. Adicional	Se toma la decisión		Ocurre el estado y se ve consecuencia de la decisión
Con Info. Adicional	Se espera la señal del Sist. de Información	Se recibe señal; se revisan probs. y se toma decisión	Ocurre el estado y se ve consecuencia de la decisión

Un cronograma como el anterior persigue ilustrar en términos gráficos distintos instantes del tiempo y los respectivos sucesos relevantes asociados a cada instante. El instante $t=0$ representa el momento actual, $t=0^+$ representa un instante posterior al actual "muy cercano" a $t=0$ y $t=1$ es el instante final, cuando en definitiva se conoce la consecuencia de una decisión tomada con anterioridad.

A continuación la discusión se centra en el instante $t=0^+$ dentro del proceso de toma de decisiones con información adicional, especialmente en lo que se refiere al proceso de revisión de probabilidades.

III. 1 Estados de la Naturaleza y Probabilidades "A-Priori"

En el contexto de un PDPE, es necesario modelar la forma en que los agentes económicos revisan sus creencias ante nueva información. Antes de entrar de plano en este tema, primero se revisarán las definiciones básicas de "estados de la naturaleza", "señales", "probabilidades a-priori" y "probabilidades revisadas" (o a-posteriori).

Es útil comenzar con algunos ejemplos que permiten ilustrar el significado de un "estado de la naturaleza".

En el ejemplo de Sue Z.Q. y el paraguas, los estados de la naturaleza relevantes son "llueve" y "no llueve".

En el caso de una compañía dedicada a la extracción de petróleo, si la decisión consiste en perforar o no un pozo, lo importante es saber cuál será el resultado de dicha perforación. Así, puede pensarse que los estados de la naturaleza relevantes son: "hay gas natural"; "hay gas natural y petróleo"; "sólo hay petróleo"; y "no hay petróleo ni gas natural".

En el caso de un ejecutivo de cuentas de un banco, que está estudiando la posibilidad de otorgar un crédito a un cliente, los estados de la naturaleza relevantes son "el deudor paga" y "el deudor no paga".

Los tres ejemplos anteriores tienen en común un elemento de **incertidumbre**, puesto que no se sabe lo que va a ocurrir como consecuencia de la decisión.

Los estados de la naturaleza son un medio utilizado para modelar la incertidumbre. Corresponden a una **descripción del entorno relevante para la decisión** en un momento dado. Por definición, los estados de la naturaleza son excluyentes: ocurre uno u otro pero no varios de ellos simultáneamente. Se denominan estados de la **naturaleza** para recalcar que son conjuntos de variables **incontrolables** por el agente que toma la decisión. En este sentido, los estados de la naturaleza son definidos con objetividad interpersonal, vale decir, la verificación de la ocurrencia del estado puede ser llevada a cabo por cualquiera. Lo anterior es necesario para asegurar la consistencia lógica del proceso decisional que aquí se plantea. Muchas veces la incertidumbre se resuelve por el sólo hecho de dejar pasar el tiempo (se espera que ocurra el estado), pero no siempre es posible esperar para tomar una decisión y, por lo tanto, las decisiones deben tomarse sólo en base a la información disponible en el momento. En el ejemplo del crédito bancario, si se decide dar el crédito, el tiempo dirá si el cliente efectivamente pagó, pero la decisión debe tomarse antes de conocerse este hecho.

Asociada a cada estado hay una probabilidad subjetiva. En otras palabras, el agente económico que toma una decisión asigna una probabilidad de ocurrencia a un estado de la naturaleza determinado. Estas probabilidades subjetivas se van formando en base a información acumulada a través del tiempo (experiencia, estudios, etc.). En el ejemplo del petróleo, un experto de la compañía petrolera puede llegar a formarse una idea bastante acabada en relación a las posibilidades de encontrar petróleo, incluso sin contar con información adicional, dada su experiencia, las características del suelo, la zona geográfica, etc. En el ejemplo del banco, el ejecutivo de cuentas puede llegar a tener una clara opinión en relación a las posibilidades de que un cliente tipo pague sus deudas, dadas sus experiencias anteriores.

Que las probabilidades sean subjetivas significa que, por ejemplo, puede ocurrir que dos personas distintas tengan creencias diferentes en relación a la ocurrencia de un mismo estado o evento.

En este trabajo, se utiliza el concepto de probabilidad subjetiva en un sentido amplio y no se distingue entre los diversos procesos que pueden dar origen a una probabilidad. En la literatura, sin embargo, comúnmente se asocia la probabilidad subjetiva a una probabilidad "personal" para distinguirla de las probabilidades "objetivas".[2]

Habitualmente, una probabilidad personal se interpreta como un grado de creencia o "fuerza de convicción" que se tiene con respecto a la ocurrencia de algún evento futuro. Sin embargo, el concepto de probabilidad también tiene dos interpretaciones adicionales. Una de ellas ve a la probabilidad como un concepto de frecuencia relativa, que se obtiene a partir de un conjunto finito de observaciones históricas. Así, las observaciones se dividen entre "favorables" y "resto", y la probabilidad se calcula como la razón de casos favorables sobre casos totales. Aquí se supone que no ocurrirán cambios sustanciales en el entorno que afecten el valor de la probabilidad. La otra interpretación, considera a la probabilidad como un concepto lógico. Un ejemplo sería la probabilidad de extraer una bola blanca de una urna en que hay dos bolas blancas y cinco negras. Aquí la lógica indica que la probabilidad es 2/7. Para poder concebir la probabilidad como concepto lógico, es necesario tener un conocimiento completo de las circunstancias que rodean al evento, lo que por lo general es muy difícil de lograr, especialmente en el contexto de un proceso decisional.

La interpretación "frecuentista" y la interpretación "lógica" del concepto de probabilidad son denominadas "objetivas".

Es necesario destacar que, para efectos del presente trabajo, el origen de la probabilidad "subjetiva" no es importante, pudiendo interpretarse ésta como un concepto netamente personal, como un concepto objetivo, o como cualquier combinación entre los anteriores.

En definitiva, lo que aquí importa es que se tiene un conjunto de n posibles estados de la naturaleza **S** y una probabilidad asociada a cada estado $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{s})$, tal que

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \dots , \mathbf{s_n} \}$$

---

[2] Véase, por ejemplo, Dillon [4].

$$\pi = \{ \pi (s_1), \pi (s_2), \dots , \pi (s_n)\} \qquad \pi (s) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi (s_i) = 1$$

El que las probabilidades subjetivas sumen **1** significa que los estados de la naturaleza son una descripción **exhaustiva** del entorno relevante a **una "fecha futura" dada**. Uno (y sólo uno) de los n estados deberá ocurrir, necesariamente.

Por otro lado, esta "fecha futura" depende del problema bajo estudio. En el ejemplo del banco, dicha fecha es el momento del pago. En el ejemplo del petróleo, la fecha futura es inmediatamente después de efectuada la perforación, puesto que entonces se sabe con certeza qué había bajo la tierra.

Dado lo anterior, puede definirse lo que se entiende por una "señal". Una señal $\mathbf{y_k}$ (mensaje o noticia) es una función del conjunto de estados de la naturaleza que pueden ocurrir en el futuro. Permite mejorar la capacidad de "predecir" lo que sucederá, disminuyendo así el grado de incertidumbre con respecto al futuro.

Utilizando la nomenclatura desarrollada aquí, una señal podría decir en forma anticipada qué estado de la naturaleza ocurrirá en el futuro. Esta sería información perfecta, ya que antes de que ocurra el estado, la señal dirá qué es lo que va a ocurrir. Alternativamente, una señal ($\mathbf{y_k}$, por ejemplo) podría decir que, con probabilidad **1**, ocurrirá un subconjunto del total de estados posibles.

En el ejemplo del banco, la señal podría ser "el cliente pagará". Esta señal puede ser perfecta o imperfecta. Será perfecta si siempre que se obtenga la señal "el cliente pagará", ello efectivamente ocurra. Será una señal imperfecta si algunas veces entrega información equivocada, que diga por ejemplo "el cliente pagará" y que ex-post éste no pague.

III. 2 Sistema de Información

La definición de Sistema de Información (S.I.) que aquí se utiliza corresponde simplemente a un "conjunto de señales". Para una mejor comprensión del concepto, primero se ven algunos ejemplos.

Si una compañía dedicada a la explotación de petróleo piensa que hay petróleo en un lugar geográfico determinado, puede trasladar sus equipos y técnicos a dicho lugar para comenzar inmediatamente la perforación. Alternativamente, la empresa podría comprar un "sistema de información": podría contratar los servicios de un especialista para hacer un sondeo previo en varios lugares antes de comenzar la perforación. El sistema de información estaría compuesto por un conjunto de señales del tipo: "se encontrará gas natural" (que, según la notación desarrollada aquí, podría llamarse y_1); "se encontrará gas natural y petróleo" (y_2); "se encontrará sólo petróleo" (y_3); "no se encontrará petróleo ni gas natural" (y_4). Es importante notar un hecho obvio: la compañía petrolera contrata al experto **antes** de conocer el resultado del sondeo.

Un segundo ejemplo es el del crédito bancario. Si un cliente llega donde el ejecutivo de cuentas de su banco a pedir un préstamo, el ejecutivo de cuentas podría aprobar o rechazar el crédito de inmediato. Alternativamente, podría utilizar los servicios de una empresa dedicada a investigar la historia crediticia de deudores potenciales y solicitar un informe comercial. En este caso, el sistema de información utilizado por el ejecutivo de cuentas podría estar compuesto por dos señales: "la historia crediticia es buena" (y_1) o bien "la historia crediticia es mala" (y_2). Nuevamente, al solicitar el informe comercial, el banco no sabe si el deudor potencial es un "buen" o "mal" deudor.

Se dice entonces que un **Sistema de Información** (**Y**) es sencillamente un conjunto de señales:

$$\mathbf{Y = \{ y_1, y_2, \ldots , y_m \}.}$$

Es importante no confundir un sistema de información con una señal. Ex-post, del sistema de información "sale **una** señal" (el resultado de un estudio, por ejemplo).

Una señal (mensaje o noticia) puede ser "buena" o "mala". Esto podría llevar a pensar que ex-post sería factible experimentar una pérdida de bienestar al recibir la señal y que, por lo tanto, el individuo preferiría **no** tener información adicional aunque ésta fuera gratis. Sin embargo, hay una contradicción lógica cuando se compara la utilidad de un individuo antes y después de recibir una señal, puesto que luego de recibir información adicional útil se sabe que las creencias anteriores no eran correctas (es como si alguien dijera: "déjenme en mi error, soy más feliz así. No me digan que estoy haciendo un pésimo negocio"). Por lo tanto, comparar la utilidad esperada de un individuo antes de la señal con la utilidad del mismo individuo después de la señal es parecido a hacer comparaciones interpersonales de utilidad, y esto es algo que la teoría microeconómica rechaza de plano.[3]

[3] Esto es, afirmaciones del tipo "yo soy más feliz que tú" o "conviene regalarle una manzana a Juan y no a Pepe, porque Juan será más feliz que Pepe" no son aceptables, puesto que no se ha definido (ni se necesita hacerlo) una unidad de medida objetiva para "la felicidad" que permita la comparación interpersonal. Los "útiles" tan sólo son constructos utilizados para **representar** un comportamiento "racional".

Todo el análisis del valor de la información que se efectúa al final de este trabajo se hace ex-ante, antes de conocerse la señal. Lo que se valora es el conjunto de señales y no una señal en particular.

III.3 Estructuras de Información

A continuación se define:

- Sistema de Información Perfecto
- Sistema de Información Imperfecto (o Muestral), que a su vez se descompone entre
  - sin "ruido"
  - "ruidoso"

Sistema de Información Perfecto

Un SI perfecto es uno en que hay tantas señales como estados y asociado a cada estado hay una y sólo una señal. Vale decir, dado que en el futuro ocurrirá el estado $\mathbf{s_i}$, por ejemplo, siempre se recibirá la señal $\mathbf{y_i}$ (dado que va a llover ($\mathbf{s_i}$), entonces el pronóstico del tiempo dirá que va a llover ($\mathbf{y_i}$)). En este caso, la señal $\mathbf{y_i}$ **anticipa** la ocurrencia del estado $\mathbf{s_i}$. En términos probabilísticos, se dice que **la probabilidad de $\mathbf{y_i}$ dado $\mathbf{s_i}$ es igual a 1 ($\mathbf{p(y_i|s_i) = 1}$).**

Al conjunto de probabilidades $\mathbf{p(y_k|s_i)}$ se le denomina **Estructura de Información.**[4] A continuación se presenta un ejemplo de una estructura de información perfecta, que supone dos estados y dos señales:

Estructura de Información Perfecta

$\mathbf{p(y_k|s_i)}$

	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$
$\mathbf{s_1}$	1	0
$\mathbf{s_2}$	0	1

Cada número de la tabla se lee como la probabilidad de recibir la señal, dado que ocurrirá el estado. Por ejemplo, la probabilidad de recibir la señal y_2 dado que el estado de la naturaleza será s_1 es 0. Del mismo modo, la probabilidad de recibir la señal

[4] La nomenclatura no es única.

y_2 dado que el estado será s_2 es 1. En la tabla puede apreciarse que hay sólo una señal asociada a cada estado.

Recapitulando, se ha definido un sistema de información como un conjunto de señales. Dicho sistema de información tiene asociada una estructura de información. Si la estructura de información relaciona cada estado a una y sólo una señal, entonces se trata de una estructura de información perfecta y por lo tanto, de un sistema de información perfecto que anticipa el estado de la naturaleza que ocurrirá en el futuro.

Sistema de Información Imperfecto (o Muestral)

Un sistema de información imperfecto se caracteriza porque hay más de un estado asociado a una o más señales o bien porque hay posibilidades de que la señal entregue información "equivocada".

Los siguientes son ejemplos de estructuras de información imperfectas:

Estructura de Información "Sin Ruido"

$p(y_k|s_i)$

	y_1	y_2	y_3
s_1	1	0	0
s_2	0	1	0
s_3	0	1	0
s_4	0	0	1

Estructura de Información "Ruidosa"

$[p(y_k|s_i)]$

	y_1	y_2
s_1	0,2	0,8
s_2	0,6	0,4

En el primer ejemplo de estructura de información imperfecta, puede notarse que la señal y_2 está asociada tanto al estado s_2 como al estado s_3. Esto quiere decir que, dado que ocurrirá el estado 2, previamente se recibirá la señal 2, pero también se recibiría la señal 2 si en el futuro ocurre el estado 3. Nótese que esto no sucede en el caso de un sistema de información perfecto. Ahora se tiene un sistema de información imperfecto porque éste no siempre revela en forma anticipada el estado que va a ocurrir. Vale decir, en caso de recibir la señal 2 aún hay incertidumbre, puesto que pueden ocurrir tanto el estado 2 como el 3. Sin embargo, es un sistema de información "sin ruido", puesto que si se recibe la señal 1 se sabe a-priori que no ocurrirán los estados 2 y 3 ó 4 con probabilidad 1 y si se recibe la señal 2, se sabe que sólo pueden ocurrir los estados 2 ó 3, descartándose los estados 1 y 4 con probabilidad 1. En resumen, **en un sistema de información sin ruido, dado el estado hay sólo una señal asociada**.

Puede notarse que un sistema de información perfecto es un caso particular y extremo de un sistema de información sin ruido, puesto que en este caso también se da que, dado el estado, hay sólo una señal asociada, pero en este último caso además ocurre que, **dada la señal**, hay un solo estado asociado.

El segundo ejemplo es una estructura de información imperfecta y "ruidosa". Que sea ruidosa puede notarse en que, dado que ocurrirá el estado 1, no se sabe con certeza cuál señal será recibida, puesto que hay una probabilidad de 20% de recibir la señal 1 y un 80% de probabilidad de recibir la señal 2. Vale decir, puede recibirse cualquiera de las dos señales, dado que ocurrirá un estado determinado.

Un último punto que es necesario destacar en relación a las estructuras de información, es que éstas no dependen de las creencias individuales (de las probabilidades subjetivas a-priori). Desde un punto de vista teórico, las estructuras de información (probabilidades de las señales dado el estado) son algo "objetivo" que viene dado por la confiabilidad que históricamente ha demostrado el sistema de información. Estas probabilidades no dependen de juicios individuales. Considérese nuevamente el ejemplo del banco, donde llega un cliente a pedir un préstamo. El ejecutivo de cuentas consulta su sistema de información que tiene la siguiente estructura:

$[p(y_k|s_i)]$

		es un **buen** cliente **(y_1)**	es un **mal** cliente **(y_2)**
el cliente **paga**	**(s_1)**	0,8	0,2
el cliente **no paga**	**(s_2)**	0,4	0,6

Lo anterior se interpreta de la siguiente forma: en oportunidades anteriores, cuando el ejecutivo de cuentas ha consultado el sistema de información, un 80% de los clientes que han pagado han sido catalogados como "buenos" y un 20% como "malos". Del mismo modo, un 40% de los clientes que **no** pagan han sido catalogados como "buenos" y un 60% como "malos". Así se ilustra que la estructura de información depende de la "calidad" del sistema de información y no de las creencias a-priori del que toma la decisión. La calidad del sistema de información viene dada por su porcentaje histórico de aciertos y fallos.

III.4 Probabilidades Revisadas

Aquí corresponde "juntar" las probabilidades a priori con las estructuras de información para obtener probabilidades revisadas o "a posteriori".

En este mundo ideal, donde se supone que los agentes actúan "racionalmente", el proceso de revisión de probabilidades se efectúa mediante el Teorema de Bayes. Lo que se busca es una expresión para las nuevas creencias una vez recibida la señal del sistema de información. Vale decir, supuestamente se conoce $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{s_i})$ y $\mathbf{p}(\mathbf{y_k} \mid \mathbf{s_i})$, ahora se busca $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{s_i} \mid \mathbf{y_k})$, la probabilidad subjetiva revisada de que ocurra el estado "$\mathbf{s_i}$", **dado que se recibió la señal** "$\mathbf{y_k}$".

El Teorema de Bayes establece que, dados dos eventos A y B, la probabilidad de que ocurra A dado que ya se sabe que ocurrió B viene dada por la expresión (véase el Anexo):

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}$$

Utilizando la nomenclacutra desarrollada aquí se tiene:

$$\pi(s_i|y_k) = \frac{\pi(s_i)\, p\,(y_k|s_i)}{p(y_k)}$$

La expresión $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{s_i})\ \mathbf{p}(\mathbf{y_k} \mid \mathbf{s_i})$ corresponde a la probabilidad que asigna un individuo a que ocurran $\mathbf{s_i}$ e $\mathbf{y_k}$ conjuntamente: si el individuo, a-priori, pensaba que es muy probable que ocurra el estado $\mathbf{s_i}$ y si al mismo tiempo hay una alta probabilidad de recibir la señal $\mathbf{y_k}$ cuando en definitiva ocurrirá el estado $\mathbf{s_i}$, entonces la probabilidad revisada para $\mathbf{s_i}$ también será alta.

¿Por qué se divide por p($\mathbf{y_k}$)? La idea es que, dada la señal proveniente del sistema de información, el nuevo "universo de posibles estados de la naturaleza" queda "acotado" por la señal $\mathbf{y_k}$. En otras palabras, puede que con la señal $\mathbf{y_k}$ se descarten algunos estados de la naturaleza (por lo que ahora el número de posibles estados de la naturaleza es menor) y cualquier estado que en definitiva ocurra debe ser consistente con la señal $\mathbf{y_k}$. Esto significa que si no se dividiera por p($\mathbf{y_k}$), las probabilidades revisadas ($\boldsymbol{\pi}$ ($\mathbf{s_i|y_k}$)) no sumarían uno.

¿De qué depende la probabilidad de recibir una señal? Depende de las probabilidades a-priori (subjetivas) y de la estructura de información. Nótese que la probabilidad de recibir una señal es una cuestión subjetiva, ya que depende de las probabilidades a priori. A modo de ejemplo:

a) Suponga una estructura de información perfecta. En este caso la señal **1**, por ejemplo, **anticipa** la ocurrencia del estado **1**. Entonces, si en el futuro ocurrirá el estado 1 es seguro que con anterioridad se recibirá la señal 1. ¿Qué probabilidad subjetiva se le asigna a recibir la señal **1**? Es igual a la probabilidad que se le asigna al estado 1.

b) Suponga una estructura de información imperfecta pero sin ruido. Suponga que si en el futuro ocurren el estado 1 o el 2 entonces con anterioridad a la ocurrencia de cualquiera de esos estados se recibiría la señal $\mathbf{y_1}$ en forma segura (con probabilidad **1**). ¿Cuál es la probabilidad subjetiva de recibir la señal $\mathbf{y_1}$? Claramente ésta es igual a la probabilidad de que ocurra el estado 1 **ó** el 2, vale decir es igual a la suma de las probabilidades subjetivas asociadas a los estados 1 y 2.

c) Suponga una estructura de información imperfecta y ruidosa. Suponga que hay dos estados de la naturaleza. El primero con una probabilidad a priori de 0,8 y el segundo con una probabilidad de 0,2. Suponga que la señal $\mathbf{y_1}$ se recibe con un 40% de probabilidad si en el futuro ocurre el estado 1 y con un 60% de probabilidad si en el futuro ocurre el estado 2. ¿Cuál es la probabilidad de recibir la señal $\mathbf{y_1}$? La probabilidad de que conjuntamente ocurra el estado 1 y se reciba la señal 1 es 0,8**x**0,4=0,32 (probabilidad del estado **x** probabilidad de señal dado el estado) y la probabilidad de que conjuntamente ocurran el estado 2 y la señal 1 es 0,2**x**0,6=0,12. Por lo tanto, la probabilidad asignada subjetivamente a la ocurrencia la señal $\mathbf{y_1}$ es 0,32+0,12=0,44. Si el sistema de información estuviera compuesto por sólo dos señales, entonces la probabilidad de recibir la segunda señal es de 1-0,44=0,56.

Dado el análisis anterior, puede establecerse que la probabilidad de recibir una señal determinada es el promedio ponderado de las probabilidades de las señales dados los estados, donde los ponderadores son la probabilidades a-priori:

$$p(y_k) = \sum_{j=1}^{n} \pi\,(s_j)\; p(y_k \mid s_j)$$

De este modo, puede reformularse el Teorema de Bayes:

$$\pi\,(s_i \mid y_k) = \frac{\pi(s_i p(y_k|s_i)}{\sum_j \pi(s_j)p(y_k|s_j)}$$

Aquí puede notarse que si se trata de un sistema de información sin ruido, entonces $\mathbf{p(y_k \mid s_j)}$ toma el valor **1** ó **0**. Para ilustrar la consecuencia de esto sobre las probabilidades revisadas, suponga tres estados y dos señales. Suponga que la primera señal está asociada a los estados 1 y 2 mientras que la segunda señal está asociada al tercer estado.

¿Cuál es la probabilidad revisada del estado 1 dada la señal 1?

Primero se responde la pregunta en forma intuitiva. Dada la señal 1, ocurrirán los estados 1 ó 2, por lo tanto la probabilidad de recibir la señal 1 es $\boldsymbol{\pi_1} + \boldsymbol{\pi_2}$ (nótese que aquí ha habido cambio de notación, donde en lugar de utilizar la complicada expresión $\boldsymbol{\pi}$ $(\mathbf{s_1})$ se usa $\boldsymbol{\pi_1}$). Entonces, dada la señal $\mathbf{y_1}$ se acota el universo de los posibles estados de la naturaleza al estado 1 y el 2. Dado esto, ¿qué probabilidad se le asigna al estado 1? o bien ¿cómo se reparte la probabilidad total $\pi_1 + \pi_2$ entre los estados 1 y 2? La respuesta es: proporcionalmente. Así, la probabilidad revisada del estado 1 dada la señal 1 es $\frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2}$ y por diferencia se obtiene la probabilidad del estado 2 dada la señal 1: $\frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}$.

Ahora puede responderse la pregunta con las fórmulas recientemente desarrolladas:

$$p(y_1) = \pi_1 \text{ x } 1 + \pi_2 \text{ x } 1 + \pi_3 \text{ x } 0 = \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi\,(s_1 \mid y_1) = \frac{\pi_1\, p(y_1 \mid s_1)}{p(y_1)} = \frac{\pi_1 x1}{\pi_1 x1 + \pi_2 x1 + \pi_3 x0} = \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2}$$

$$\pi\,(s_2 \mid y_1) = \frac{\pi_2\, p(y_1 \mid s_2)}{p(y_1)} = \frac{\pi_1 x1}{\pi_1 x1 + \pi_2 x1 + \pi_3 x0} = \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}$$

$$\pi\,(s_3 \mid y_1) = \frac{\pi_3\, p(y_1 \mid s_3)}{p(y_1)} = \frac{\pi_3 x0}{\pi_1 x1 + \pi_2 x1 + \pi_3 x0} = 0$$

Ejemplos Numéricos de Cálculo de Probabilidades Revisadas

Ejemplo 1-Estructura de Información Perfecta

Suponga la siguiente estructura de información:

	y_1	y_2
s_1	1	0
s_2	0	1

Suponga además π_1=0,2 y π_2=0,8. Para encontrar las probabilidades, primero se añade un fila y una columna a la matriz anterior:

	y_1	y_2	π
s_1	1	0	0,2
s_2	0	1	0,8
p(y)	?	?	1

Se sabe que $p(y_1) = 0{,}2xp(y_1|s_1) + 0{,}8xp(y_1|s_2) = 0{,}2x1 + 0{,}8x0=0{,}2$. $p(y_2)$ puede obtenerse como $1\text{-}p(y_1)$ o bien utilizarse el método anterior. Aquí se constata que la probabilidad de recibir una señal es igual a la probabilidad de que ocurra el estado de la naturaleza asociado a la señal con información perfecta. A continuación se verifica que, dada la señal, habrá certeza en relación a qué estado de la naturaleza ocurrirá.

Dado esto, pueden obtenerse las probabilidades revisadas como $\dfrac{\pi_i x p(y|S_i)}{p(y)}$. Para estos efectos, conviene añadir dos columnas a la matriz anterior:

	y_1	y_2	π	$\pi(s\|y_1)$	$\pi(s\|y_2)$
s_1	1	0	0,2	**a**	**b**
s_2	0	1	0,8	**c**	**d**
p(**y**)	0,2	0,8	1	1	1

Donde

$$\mathbf{a} = \frac{\pi_1 p(y_1|s_1)}{p(y_1)} = \frac{0.1x1}{0.2} = 1 \qquad \mathbf{b} = \frac{\pi_1 p(y_2|s_1)}{p(y_2)} = \frac{0.2x0}{0.8} = 0$$

c = $\frac{\pi_2 p(y_1|s_2)}{p(y_1)} = \frac{0.8x0}{0.2} = 0$ **d** = $\frac{\pi_2 p(y_2|s_2)}{p(y_2)} = \frac{0.8x1}{0.8} = 1$

Ejemplo 2-Estructura de Información Imperfecta y Sin Ruido

Suponga la siguiente estructura de información:

	y_1	y_2
s_1	1	0
s_2	0	1
s_3	0	1

Suponga que las probabilidades a priori son iguales para cada estado. Así se obtiene:

	y_1	y_2	π	$\pi(s\|y_1)$	$\pi(s\|y_2)$
s_1	1	0	1/3	**a**	**b**
s_2	0	1	1/3	**c**	**d**
s_3	0	1	1/3	**e**	**f**
p(**y**)	1/3	2/3	1	1	1

Utilizando la metodología anterior, tenemos

a = $\frac{\pi_1 p(y_1|s_1)}{p(y_1)} = \frac{(1/3)x1}{1/3} = 1$ **b** = $\frac{\pi_1 p(y_2|s_1)}{p(y_2)} = \frac{(1/3)x0}{2/3} = 0$

c = $\frac{\pi_2 p(y_1|s_2)}{p(y_1)} = \frac{(1/3)x0}{1/3} = 0$ **d** = $\frac{\pi_2 p(y_2|s_2)}{p(y_2)} = \frac{(1/3)x1}{2/3} = 0.5$

e = $\frac{\pi_3 p(y_1|s_3)}{p(y_1)} = \frac{(1/3)x0}{1/3} = 0$ **f** = $\frac{\pi_3 p(y_2|s_3)}{p(y_2)} = \frac{(1/3)x1}{2/3} = 0.5$

Nótese que 0,5 = $\frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_3} = \frac{\pi_3}{\pi_2 + \pi_3}$

<u>Ejemplo 3-Estructura de Información Imperfecta y Ruidosa</u>

Suponga la siguiente estructura de información:

	y_1	y_2
s_1	0,2	0,8
s_2	0,6	0,4

Suponga además que π_1=0,2 y π_2=0,8. Entonces

	y_1	y_2	π	$\pi(s\|y_1)$	$\pi(s\|y_2)$
s_1	0,2	0,8	0,2	**a**	**b**
s_2	0,6	0,4	0,8	**c**	**d**
p(**y**)	0,52	0,48	1	1	1

$$\mathbf{a} = \frac{\pi_1 p(y_1|s_1)}{p(y_1)} = \frac{0.2\text{x}0.2}{0.52} = 0.08 \qquad \mathbf{b} = \frac{\pi_1 p(y_2|s_1)}{p(y_2)} = \frac{0.2\text{x}0.8}{0.48} = 0.33$$

$$\mathbf{c} = \frac{\pi_2 p(y_1|s_2)}{p(y_1)} = \frac{0.8\text{x}0.6}{0.52} = 0.92 \qquad \mathbf{d} = \frac{\pi_2 p(y_2|s_2)}{p(y_2)} = \frac{0.8\text{x}0.4}{0.48} = 0.67$$

<u>Ejercicios Propuestos</u>

1. Complete el cuadro (use 4 decimales).¿ Qué tipo de estructura de información es ésta?

	$p(y\|s_i)$ y_1	y_2	y_3	$\pi(s_i)$	$\pi(s\|y_1)$	$\pi(s\|y_2)$	$\pi(s\|y_3)$
s_1		0,3		0,2			
s_2	0,75			0,4			
s_3	0,3		0,3	0,15	0,1084		
s_4		0,6					0,1695
p(y)		0,29					

2. Tostadito Filter quiere ir mañana a la playa. Últimamente el tiempo ha estado muy variable, algunos días lluviosos, otros nublados y el resto con mucho calor. Tostadito se prepara a ver el noticiario para escuchar el pronóstico del tiempo. Willy Rain (el hombre del tiempo) sólo es capaz de decir si lloverá o no. De acuerdo a los pronósticos anteriores en los días en que hubo "sol" un 25% de las veces había pronosticado "lloverá"; en los días que resultaron ser "nublados" pronosticó "no lloverá" un 15%; y los días que resultaron con "lluvia" había pronosticado "lloverá" un 40% de las veces. Tostadito cree que hay un 40% de posibilidades de que mañana esté nublado y piensa que existe la misma probabilidad de que el día sea soleado o lluvioso.

(a) ¿Cuáles son las probabilidades de que Willy pronostique "no lloverá" o "lloverá"? (R: $p(y_1)$=46,5%; $p(y_2)$=53,5%)

(b) ¿Cuáles son las probabilidades revisadas π $(s|y_1)$ y π $(s|y_2)$? (R: dado y_1: 0,484; 0,129; 0,387. Dado y_2: 0,140; 0,636; 0,224, respectivamente.)

Tostadito recibió una llamada desde la playa de su hermanita Ray (Filter) para que se fuera inmediatamente. El último bus parte en 30 minutos más y el noticiario lo dan dentro de dos horas. Si se va más tarde tendría que irse en taxi.

Si el día está soleado tendrá un bienestar de 50 útiles, si está nublado sólo de 25 útiles (ya que no se podrá quemar, pero irá a un asado), y de -25 útiles si le toca lluvia (no tendrá ni playa ni asado). Tostadito puede quedarse en su casa, lo cual le produce un bienestar de 10 útiles.

(c) Sin información adicional (el pronóstico de Willy), ¿qué decisión le conviene tomar? (R: Ir (d_1) ; $EU(s;d_1)$=17,5 útiles)

(d) Con información adicional ,¿cuánto bienestar estaría dispuesto a sacrificar por esperar las noticias e irse en taxi? (medido en útiles). (R: Independientemente de lo que diga el pronóstico tomará la decisión de ir a la playa).

IV UTILIDAD ESPERADA Y ACTITUDES FRENTE AL RIESGO

Al igual que en la teoría microeconómica clásica, las Teorías de Finanzas y de Toma de Decisiones **modelan** el comportamiento de los individuos en base a supuestos que simplifican el análisis. Aquí se supone que los individuos actúan **como si** tuvieran una función de utilidad y tomaran sus decisiones (actuaran) intentando maximizar dicha función de utilidad.

Hay dos elementos fundamentales que distinguen la teoría microeconómica clásica de la Teoría de Finanzas: el elemento **tiempo** y el elemento **incertidumbre**.

Aquí el elemento **tiempo** será simplificado, suponiendo que existen sólo dos instantes (modelo de dos períodos), o bien se supondrá que para modelar los procesos de toma de decisiones de los individuos en un contexto intertemporal **basta** con explicar el comportamiento para dos instantes sucesivos en el tiempo. Por lo tanto, es fundamental entender que hay un rezago entre el instante en que se toma la decisión y el instante en que se conocen las consecuencias de la decisión. En contraste, nótese que en la teoría microeconómica tradicional, las consecuencias de la decisión (qué y cuánto consumir de un determinado bien, por ejemplo) se conocen de inmediato (aumenta la utilidad del consumo).

El elemento **incertidumbre** se relaciona estrechamente con lo anterior. Aquí se modelan sólo las situaciones en que las consecuencias de la decisión son inciertas o probabilísticas. Debido a esto, las creencias individuales son fundamentales para determinar el curso óptimo de acción y, por lo tanto, la información juega un rol crucial al permitir revisar las creencias.

La función de utilidad que se utiliza en las teorías para las cuales se establecen las bases en este trabajo por lo general tiene sólo un argumento: la **riqueza** (medida en valores monetarios o en términos de algún bien numerario, como el trigo o una canasta de bienes). Sólo si es que existe un mercado de capitales el concepto de riqueza queda bien definido. La riqueza representa la **máxima capacidad de consumo de un individuo en un instante determinado del tiempo**. Se reconoce que, en último término, lo importante es el consumo final de bienes y servicios, lo que es consistente con la teoría microeconómica tradicional. Sin embargo, es condición suficiente para construir una **función de utilidad que dependa sólo de la riqueza** que los precios relativos de los bienes no cambien a través del tiempo, o bien que sean conocidos ex-ante en toda su trayectoria futura. Bajo los supuestos anteriores, lo único importante es la riqueza futura y su distribución de probabilidad, puesto que, dada la riqueza, el individuo sabrá exactamente cómo repartirla entre los distintos bienes y servicios (utilidad marginal por peso gastado es la misma para todos los bienes).

Para modelar el comportamiento bajo incertidumbre, se supone que el individuo maximiza el valor esperado de la utilidad de la riqueza (o, lo que es lo mismo, maximiza la utilidad esperada de la riqueza). El "valor esperado" depende de las probabilidades subjetivas (lo que fue explicado en las secciones anteriores). La función de utilidad, propiamente tal, depende de las preferencias individuales. A continuación se desarrolla este último punto, pero antes de hacerlo, es necesario advertir que todo el análisis que sigue es introductorio.[5]

IV.1 La Función de Utilidad de la Riqueza

Suponga un modelo de dos períodos: en el primer período se toma la decisión (se invierte la riqueza que no ha sido consumida) y en el segundo período se conoce la consecuencia de la decisión (se obtiene una riqueza terminal, que es probabilística).

Simbólicamente se tiene:

$$\text{Función de Utilidad: } U = U(w)$$

donde el argumento **w** es la riqueza terminal. Nótese que si **w** tiene una distribución de probabilidad (si la riqueza terminal es incierta) entonces el nivel de utilidad terminal es incierto (también tiene una distribución de probabilidad). La unidad de medida son los "útiles", un constructo que mide "bienestar".

A modo de ejemplo, suponga que $U(w) = w^{1/2}$. Entonces, si la riqueza terminal pudiera tomar sólo dos valores \$100 o \$400 (sin saber con certeza cuál va a ocurrir), entonces la utilidad terminal del individuo será $(\$100)^{1/2} = 10$ útiles o $(\$400)^{1/2} = 20$ útiles, sin conocerse a-priori cuál de los dos valores se obtendrá en definitiva.

<u>Supuesto 1</u>: La utilidad crece con la riqueza

Este es el supuesto fundamental para modelar el comportamiento de los agentes económicos: ellos prefieren más riqueza que menos riqueza. Esto significa que,

---

5 Para un tratamiento formal de las condiciones que deben cumplirse para que el comportamiento de un individuo pueda modelarse como si éste maximizara una función de utilidad esperada, ver Copeland y Weston [2], pp.64-72.

enfrentados a dos alternativas, donde la primera de ellas siempre ofrecerá un pago mayor que la segunda, entonces los agentes económicos siempre elegirán la primera.

Matemáticamente, este supuesto significa que

$$\frac{dU(w)}{dw} > 0.$$

Es importante tener en cuenta que el supuesto anterior no tiene carácter normativo. Aquí no se postula que un individuo debería preferir más a menos riqueza; sólo es un supuesto que ayuda a modelar el comportamiento de los individuos. Sin embargo, hasta un filántropo podría estar de acuerdo con el supuesto anterior, puesto que, suponiendo todo lo demás constante, al elegir los "proyectos" que más aumentan su riqueza, más podría repartir entre sus beneficiarios.

Supuesto 2: La utilidad crece con la riqueza a tasas:

- Decrecientes (aversión al riesgo)
- Constantes (neutralidad frente al riesgo)
- Crecientes (preferencia al riesgo)

Dependiendo de cuál de las tres alternativas anteriores sea escogida, habrá un comportamiento implicado distinto por parte del agente. Lo que aquí se afirma es que la "curvatura" supuesta para la función de utilidad no es materia de indiferencia para el teórico, puesto que la actitud frente al riesgo implicada es diferente en cada caso. El por qué sucede lo anterior se explica en las próximas secciones, pero por el momento vale la pena destacar que en la Teoría de Finanzas es poco habitual que se suponga que la utilidad crece con la riqueza a tasas crecientes (preferencia al riesgo), ya que son pocas las situaciones que pueden ser modeladas bajo este supuesto y en general la evidencia empírica muestra que los otros dos supuestos son más adecuados (en particular, el supuesto de aversión al riesgo).

A continuación se dan algunos ejemplos de funciones de utilidad aceptables:

Crecientes a tasas decrecientes (aversión al riesgo)

1) $U(w) = \sqrt{w}$
2) $U(w) = \ln(w)$ o $\log_{10}(w)$
3) $U(w) = -e^{-w}$
4) $U(w) = w^{g}$ $\quad 0 < g < 1$

5) Cualquier transformación lineal creciente de las funciones anteriores del tipo a + b U(w); a, b constantes, b > 0.

<u>Crecientes a tasas constantes (utilidad lineal; Neutralidad frente al riesgo)</u>

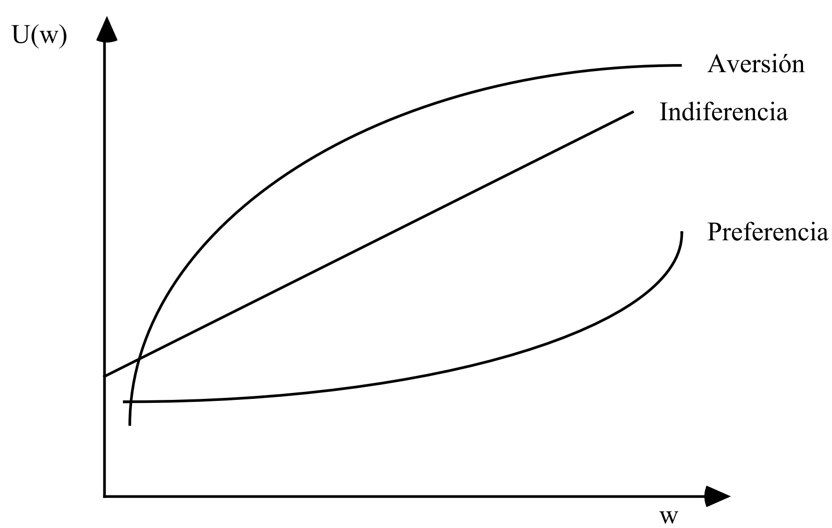
1) $U(w) = w$
2) $U(w) = a + bw$ a, b constantes, $b > 0$.

<u>Crecientes a tasas crecientes (preferencia por riesgo)</u>

1) $U(w) = e^{w}$
2) $U(w) = w^{g}$ $g > 1$
3) Cualquier transformación lineal creciente de las funciones anteriores del tipo a + b U(w); a, b constantes, b > 0.

El Gráfico 1 ilustra los tres tipos de funciones de utilidad descritas.

<u>GRÁFICO 1</u>



IV.2 Utilidad Esperada

En el punto anterior se ha definido la función de utilidad de la riqueza terminal. Es importante destacar que la riqueza terminal puede no ser conocida ex-ante. Por ejemplo, si se invierte en un proyecto de exploración petrolera, no se sabe si al final se encontrará petróleo. Si se encuentra petróleo, la riqueza terminal será alta, en caso contrario, será baja.

Por lo tanto, en general puede modelarse la riqueza terminal como una variable aleatoria (una variable que tomará un valor desconocido que tiene una distribución subjetiva de probabilidad) o una 'función' cuyo valor depende del estado de la naturaleza que ocurrirá en el futuro:

$$\mathbf{w = w(s)}.$$

Por ejemplo, los estados de la naturaleza podrían ser "prosperidad" o "depresión", con distintos niveles de riqueza asociados a cada estado.

Ya que la utilidad es una función de la riqueza y la riqueza es una función del estado de la naturaleza, entonces la utilidad que en definitiva tendrá el individuo también es una función del estado de la naturaleza que ocurra. Por lo tanto, la utilidad "a secas" no sirve para tomar decisiones bajo incertidumbre, ya que a priori no se sabe qué valor tomará ésta. Debido a lo anterior, se recurre a la **utilidad esperada**: la utilidad que se obtiene **en promedio** (ponderado). Para obtener dicho promedio ponderado de utilidad, se utilizan las probabilidades subjetivas (ya sean éstas a priori o revisadas según el Teorema de Bayes). Es un promedio ponderado porque los ponderadores suman **1**.

Ejemplo

Un individuo cuya función de utilidad es $U(w) = \sqrt{w}$, tiene dos alternativas excluyentes de inversión. La primera es invertir toda su riqueza ($10.000) en Bonos del Gobierno con una rentabilidad de 10,25%. Alternativamente, podría invertir toda su riqueza en un proyecto riesgoso. En este caso, su riqueza podría tomar uno de los tres siguientes valores, dependiendo del 'estado de la naturaleza' que ocurra:

	w(s)		
	s_1	s_2	s_3
Proyecto	8.100	11.025	16.900
Bono Gobierno	11.025	11.025	11.025
Probabilidad	0,20	0,50	0,30

Suponiendo que el individuo maximiza su utilidad esperada, ¿qué proyecto elegiría?

Utilidad esperada del proyecto

Debe recordarse que la utilidad esperada es el promedio ponderado de utilidad en los distintos estados, donde para calcular dicho promedio se utilizan las probabilidades subjetivas. Así

$EU(w) = 0{,}2x(\sqrt{8.100}) + 0{,}5x(\sqrt{11.025}) + 0{,}3x(\sqrt{16.900}) = 109{,}5$ útiles

Utilidad esperada de invertir en los bonos

$$EU(w) = 0{,}2x(\sqrt{11.025}) + 0{,}5x(\sqrt{11.025}) + 0{,}3x(\sqrt{11.025})$$

$$= (0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3)x(\sqrt{11.025}) = \sqrt{11.025} = 105{,}0 \text{ útiles}$$

Entonces, si el individuo fuera consistente con el principio de maximizar su utilidad esperada, debería elegir invertir en el proyecto y **no** en los bonos de gobierno.

En el ejemplo puede apreciarse cómo la riqueza futura cambia dependiendo del estado de la naturaleza que ocurra. Sin embargo, en el ejemplo también queda claro que la utilidad esperada además depende de la decisión que en definitiva se tome. Por lo tanto, puede plantearse que la riqueza terminal no sólo depende del estado de la naturaleza que ocurra, sino también de la decisión que se tome:

$$w = w(s; d).$$

La utilidad esperada además depende de la función de utilidad y de las probabilidades subjetivas:

$$EU[\, w(s;d)\,] \equiv \Sigma_i\, \pi_i\, U[\, w(s_i; d)\,] \quad (\, i=1, \dots , n\,)$$

Por último, entre las decisiones factibles, el individuo escoge aquélla que maximice su utilidad esperada:

$$\mathbf{d^*} = \underset{\{d\}}{\operatorname{argmax}}\{EU[w(s;d)]\} \equiv \underset{\{d\}}{\operatorname{argmax}}\{\Sigma_i\, \pi_i\, U[\, w(s_i; d)]\}$$

Lo anterior se lee: "entre todas las decisiones factibles {d}, el individuo escogerá el argumento que maximice la función de utilidad esperada (la decisión d^*)". Intuitivamente, el individuo haría el ejercicio de calcular su utilidad esperada para cada posible decisión y luego escogería la decisión que maximice la utilidad esperada.

Aquí es importante destacar lo que podría denominarse "la propiedad ausente de las funciones de utilidad": **excepto para el caso de utilidad creciente a tasas constantes (neutralidad frente al riesgo)**, en general **no se cumple** que $U(A)+U(B)=U(A+B)$, donde A y B representan valores monetarios. Esto es fácilmente verificable utilizando cualquiera de las funciones de utilidad específicas presentadas arriba. Por ejemplo, si la riqueza de un individuo es igual a $1.000 y está evaluando la posibilidad de invertir en un proyecto que entregue un flujo de caja que puede tomar los valores \$100 o -\$50, ambos con una probabilidad de 0,5 , entonces **no** puede evaluarse la conveniencia del proyecto calculando la utilidad esperada como 0,5xU(\$100)+0,5xU(\$-50) y ver si esta última cantidad es mayor que cero. El cálculo que debe hacerse es 0,5xU(\$1.000+\$100)+0,5xU(\$1.000-\$50) para comparar este valor con U(\$1.000). Esto sucede por que el valor en útiles de recibir un peso adicional **no es independiente del nivel de riqueza que tenga el individuo**, excepto en el caso de neutralidad frente al riesgo. El corolario de lo anterior es que la utilidad esperada debe calcularse utilizando la riqueza final **total**.

IV.3 Aversión, Indiferencia (Neutralidad) y Preferencia por Riesgo

IV.3.1 Aversión al Riesgo

Una persona tiene aversión al riesgo si es que, "suponiendo todo lo demás constante", prefiere "algo seguro" que "algo incierto". En este caso particular, este "algo" es riqueza.[6]

Más precisamente, una persona que tiene aversión al riesgo prefiere, por ejemplo, US\$100.000 seguros a un "juego" que **en promedio** brinda US\$100.000. Por ejemplo

$$\text{US\$100.000 seguros son preferidos al "juego"} \begin{cases} \text{US\$ 50.000 con prob. 0,5} \\ \\ \text{US\$150.000 con prob. 0,5} \end{cases}$$

Es importante notar que la riqueza esperada asociada al juego (Ew= 0,5xUS\$50.000 + 0,5xUS\$150.000) es US\$100.000. Vale decir, si ud. tiene aversión al riesgo y puede elegir entre US\$100.000 seguros a ser recibidos dentro de un período y cualquier proyecto que da una riqueza esperada de US\$100.000 pero con flujos futuros de caja inciertos, ud. escogería el primero (suponiendo que ambas alternativas requieren las mismas inversiones).

---

6 ¿Qué prefire ud.: una nota final 5,0 segura en un ramo o un juego que consiste en una nota 3,0 con probabilidad 0,5 y una nota 7,0 con probabilidad 0,5?

Otro ejemplo es el siguiente:

$$\text{US\$ 0 seguros son preferidos al " juego"} \begin{cases} \text{US\$50.000 con prob. 0,5} \\ \\ \text{US\$50.000 con prob. 0,5} \end{cases}$$

Lo anterior quiere decir que ud. preferiría **no** participar en un juego que en promedio deja su riqueza esperada inalterada pero que abre la posibilidad de perder dinero. Esto es absolutamente consistente con el sentido común.

¿Cómo se expresa lo anterior en términos de la notación desarrollada aquí? A continuación se presenta un nuevo ejemplo:

	Riqueza Total Final	
	s_1	s_2
Alternativa 1	8.100	16.900
Alternativa 2	13.820	13.820
Probabilidad	0,35	0,65

La tabla anterior presenta dos alternativas de inversión y sus pagos asociados a cada estado. La alternativa 1 paga US$8.100 si ocurre el estado 1 y US$16.900 si ocurre el estado 2. En el caso de invertirse en la alternativa 2, la riqueza siempre será la misma. Este número fue escogido de tal forma que corresponde exactamente a la riqueza esperada asociada a la alternativa 1:

$$Ew(\text{alt.}1) = 0{,}35 \text{ x US\$}8.100 + 0{,}65 \text{ x US\$}16.900 = \text{US\$}13.820$$

Dado lo anterior, por definición de aversión al riesgo debe darse que una persona que tenga la opción de elegir la alternativa 2 jamás elija la alternativa 1. Para que se pueda modelar el comportamiento a través de la maximización de la utilidad esperada, y dado que se supone que la persona maximiza su utilidad esperada, del análisis debería obtenerse que la utilidad esperada asociada con la alternativa 2 es superior a la utilidad esperada asociada con la alternativa 1:

Alternativa 1: $EU(w) = 0{,}35xU(8.100) + 0{,}65xU(16.900)$

Alternativa 2: $EU(w) = 0{,}35xU(13.820) + 0{,}65xU(13.820) = U(13.820)$

Así, para una persona que tenga aversión al riesgo debe darse:

$$U(13.820) > 0,35xU(8.100) + 0,65xU(16.900)$$

Dado que US$13.820 es la riqueza esperada asociada con la alternativa 1, entonces puede escribirse:

$$U(E(w)) > \pi_1 \text{ x } U(8.100) + (1-\pi_1) \text{ x } U(16.900) \equiv EU(w)$$ [7]

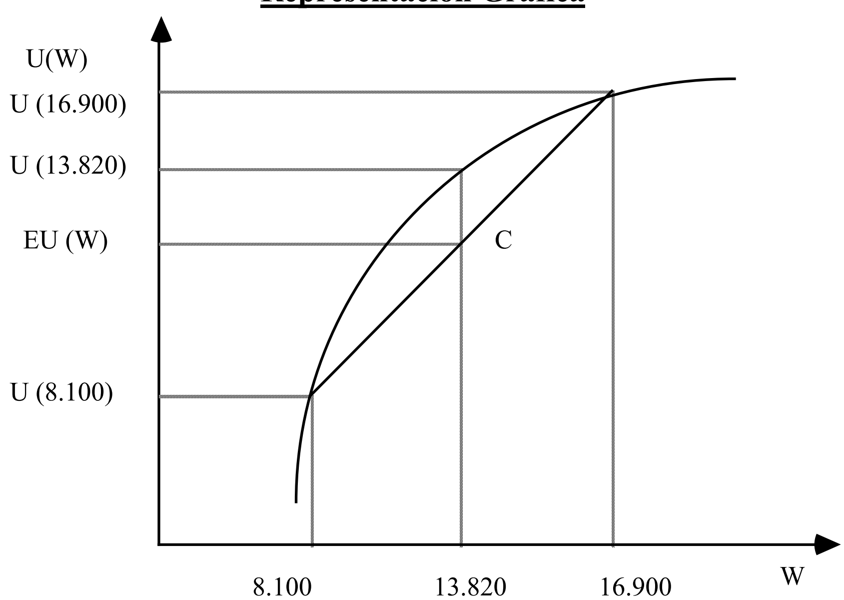
=> $U(E(w)) > EU(w)$

Lo anterior significa que **para una persona que tenga aversión al riesgo, la utilidad de la riqueza esperada es superior a la utilidad esperada de la riqueza (o el valor esperado de la utilidad de la riqueza).**

Este concepto se reafirma en el gráfico 2.

GRÁFICO 2

Aversión al Riesgo:
Representación Gráfica



Para entender el gráfico anterior conviene seguir los siguientes pasos (este análisis es válido cuando la riqueza terminal puede tomar **sólo dos** valores):

---

7 Esta es precisamente la definición de concavidad. Sea $0< a <1$. Sea F(x) una función y x_1, x_2 dos puntos para los cuales F está definida. Se dice que la función F es cóncava si $F(a\, x_1 + (1-a)x_2) > aF(x_1) + (1-a)F(x_2)$.

a) Graficar la función de utilidad con U(w) en el eje "y" y w en el eje "x".
b) En el eje de la riqueza terminal, ubicar los posibles valores que puede tomar la riqueza terminal (8.100 y 16.900). Ubicar además la riqueza esperada (13.820) que debe caer entre los dos valores anteriores.
c) En el eje de la utilidad, ubicar la utilidad asociada a los valores extremos que puede tomar la riqueza (U(8.100) y U(16.900)). Luego de esto, ubicar los puntos correspondientes a los pares ordenados (8.100,U(8.100)) y (16.900,U(16.900)) y hacer un trazo que una los dos puntos anteriores.
d) Proyectar un trazo paralelo al eje "y" que parta del punto Ew en el eje "x" (13.820) hasta que corte el trazo dibujado en el punto (c). Ubique el punto de corte (denominado C en el gráfico).
e) Una vez ubicado el punto de corte en (d), hacer otro trazo, esta vez paralelo al eje "x", que parta del punto anterior y que corte el eje "y". El punto de corte en el eje "y" corresponde a la utilidad esperada de la riqueza.

El objetivo de los pasos (a) hasta (e) anteriores es simplemente ayudar a ubicar dentro del gráfico dónde se encuentra el punto de la utilidad esperada. En estricto rigor, para demostrar lo anterior, debería hacerse lo siguiente:

Ejercicio Propuesto

Encontrar la recta que pasa por los puntos (8.100,U(8.100)) y (16.900,U(16.900)). Llámela Y = a + bw. Demostrar que cuando w toma el valor "Ew" entonces Y = EU(w). Vale decir, demostrar que la recta Y = a + bw pasa por el punto (Ew,EU(w)).

(**Indicación:** La recta debe pasar por los puntos (8.100,U(8.100)) y (16.900,U(16.900)), por lo tanto también debe pasar por cualquier punto que sea un **promedio ponderado** de los dos puntos extremos).

En el Gráfico 2 puede apreciarse que la función de utilidad evaluada en la riqueza esperada (US$13.820) se ubica más arriba que la utilidad esperada. Esto es consecuencia directa de la aversión al riesgo, puesto que con aversión al riesgo se prefiere una cantidad segura a una incierta con el mismo valor esperado. También puede apreciarse que en este caso la función de utilidad es creciente y cóncava (desde el origen), o lo que es lo mismo, que

$$\frac{dU(w)}{dw} > 0 \text{ pero } \frac{d^2U(w)}{dw^2} < 0,$$

vale decir la utilidad crece a tasas decrecientes.

Ejercicio

El señor R. Cuarto tiene aversión al riesgo, lo que se refleja en su función de utilidad, $U(\mathbf{w})=\mathbf{w}^{(1/4)}$. Su riqueza total consiste en solo un proyecto, el proyecto Alfa. Este puede entregar \$6.250.000 (con probabilidad 0,4) o \$2.560.000 al final del período.

a) Encuentre la riqueza esperada del señor Cuarto.
b) Encuentre su utilidad esperada.
c) Encuentre el **mínimo monto** (en \$) **seguro** que el señor Cuarto estaría dispuesto a recibir a cambio del proyecto Alfa a fines del período (llámelo $\mathbf{w}^*$).
d) Ilustre en un solo gráfico lo siguiente: (1) la utilidad esperada; (2) la riqueza esperada; (3) $\mathbf{w}^*$; (4) la utilidad de la riqueza esperada.

El señor Less Averse tiene dinero en el banco. Al final de este período recibirá \$3.800.000 con absoluta certeza. Su función de utilidad es $U(\mathbf{w})=\sqrt{\mathbf{w}}$.

e) Suponiendo que la tasa de interés es cero, que no existe inflación y que el señor Cuarto convence al señor Averse sobre las probabilidades asociadas al proyecto, ¿existe alguna posibilidad de intercambio, tal que ambos se vean beneficiados (ex-ante)?

Solución

a) La riqueza final puede tomar sólo dos valores: \$6.250.000 y \$2.560.000. La probabilidad asociada al primer valor es 0,4; por lo tanto, la probabilidad asociada al segundo valor es 0,6. Así Ew=0,4x\$6.250.000+0,6x\$2.560.000 => Ew = \$4.036.000.-

b) La utilidad esperada es un promedio ponderado de las utilidades, donde los ponderadores son las probabilidades de ocurrencia:

$$\Rightarrow EU(w) = 0{,}4 \times U(6.250.000) + 0{,}6 \times U(2.560.000)$$
$$= 0{,}4 \times (6.250.000)^{1/4} + 0{,}6 \times (2.560.000)^{1/4} = 44 \text{ útiles}$$

c) Tal como están las cosas, el señor R. Cuarto tiene una utilidad de 44 útiles. Este número sirve para ser comparado con la utilidad (esperada o "a secas") derivada de cualquier otra alternativa de inversión. Entonces, el señor Cuarto debería estar indiferente entre el proyecto Alfa y **cualquier otro "proyecto" que le reporte el mismo nivel de utilidad**. Entre estos otros proyectos se encuentra el que implica dinero seguro (w^*). Entonces, para que su utilidad permanezca igual se requiere:

$$U(w^*) = 44 \text{ útiles} = EU(w_{alfa})$$

En el ejemplo, $U(w) = (w)^{1/4} \Rightarrow w^*=(44)^4=\$3.748.096$.

En términos más generales

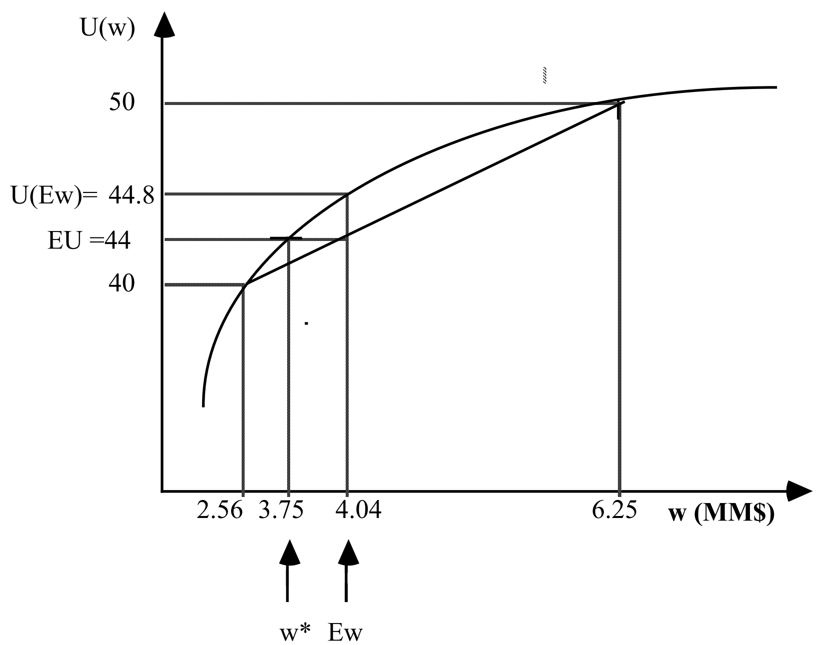
$$w^* = U^{-1}[EU(w)]$$

donde U^{-1} es la función de utilidad inversa. Si $U(w)=w^{1/4}$, entonces

$$U^{-1}(\text{útiles})=(\text{útiles})^4 .$$

w^* es una cantidad cierta que deja al individuo con el mismo nivel de utilidad asociado a su riqueza (incierta) actual y se denomina el "**equivalente cierto**". Representa el mínimo que un inversionista estaría dispuesto a recibir a cambio de su riqueza incierta actual. Para un inversionista que tenga aversión al riesgo **w^* es necesariamente menor que Ew**. Intuitivamente esto significa que el inversionista que teme al riesgo estaría dispuesto a sacrificar una parte de su riqueza con tal de asegurarse un riqueza final menos incierta, pero *sólo si el nivel de riqueza queda asegurado (sin incertidumbre) en Ew* el monto específico que se estará dispuesto a pagar por eliminar el riesgo será la diferencia entre la riqueza esperada y el equivalente cierto.[8] Esta es la explicación más fundamental de porqué existe la industria del seguro: la aversión al riesgo.

(Continuando con el ejemplo).



[8] En general se estará dispuesto a pagar por el seguro una cantidad tal (X) que iguale el bienestar esperado con y sin él: $EU(w_C\text{-}X) = EU(w_S)$, donde w_C y w_S representan la riqueza aleatoria con y sin seguro, respectivamente. Si el seguro elimina la incertidumbre $EU(w_C\text{-}X) = U(w_C\text{-}X)$, implicando que $X = w_C\text{-}U^{-1}(EU(w_S))$.

d) Se pide ilustrar en un solo gráfico lo siguiente: (1) la utilidad esperada; (2) la riqueza esperada; (3) el equivalente cierto, **w^***; (4) la utilidad de la riqueza esperada.

e) Se propone al lector hacerlo. (Indicación: intercambie las riquezas de los inversionistas y vea qué sucede; concluya que el intercambio puede beneficiar a ambos; también piense en el mercado de capitales donde se intercambian distintos tipos de proyectos).

Resumiendo, si w representa la riqueza terminal incierta, **todas las afirmaciones siguientes son equivalentes**:

a) U es creciente con la riqueza y $EU(w) < U(Ew)$

b) Le gusta la riqueza pero tiene aversión al riesgo

c) $\frac{dU(w)}{dw} > 0$ pero $\frac{d^2U(w)}{dw^2} < 0$ (utilidad marginal de la riqueza decreciente)

d) Su función de utilidad es creciente y cóncava

e) El equivalente cierto (w^*) es menor que la riqueza esperada

Consecuencias y limitaciones de la aversión al riesgo como supuesto de comportamiento

En la Teoría de Finanzas se recurre con frecuencia al supuesto de aversión al riesgo. Esto es así por el gran poder explicativo que tienen las teorías que utilizan este supuesto para modelar el comportamiento de los agentes económicos.

La aversión al riesgo puede modelarse de dos formas equivalentes: la utilidad de un monto cierto es mayor que la utilidad esperada de un monto incierto con valor esperado igual al monto cierto (punto de vista de los "útiles"). También puede verse desde el punto de vista de la riqueza: el equivalente cierto es menor que la riqueza esperada.

El sólo hecho de que la función de utilidad sea cóncava (utilidad marginal decreciente) implica que un individuo "**valora más un peso adicional cuando es 'pobre' que cuando es 'rico'** ". En otras palabras, la utilidad marginal se interpreta como el valor en útiles asignado a un peso adicional. Al ser ésta decreciente, se concluye que un peso adicional reporta más útiles cuando el nivel de riqueza es bajo que cuando el nivel de riqueza es relativamente mayor. Esta es la esencia del concepto de aversión al riesgo.

Si los mercados estuvieran compuestos en su mayoría por agentes que tienen aversión al riesgo, se observaría (entre otras cosas) lo siguiente:

- Los activos financieros más "riesgosos" tendrían una rentabilidad mayor que los menos "riesgosos". En el contexto de este trabajo, puede interpretarse el riesgo como la probabilidad de que la riqueza del individuo tome valores extremos (varianza de la riqueza). Los activos más riesgosos deberían rendir más que los menos riesgosos porque los inversionistas estarían dispuestos a comprar activos más riesgosos **sólo** en la medida que dicho riesgo sea recompensado. Esto explica por qué en promedio las acciones rinden más que los instrumentos financieros (bonos) emitidos por el gobierno.

- La gente estaría dispuesta a pagar por deshacerse de sus riesgos. Esto implica que vender el servicio de asegurar los riesgos individuales puede ser un negocio rentable. En efecto, se vio que un inversionista estaría dispuesto a sacrificar parte de su riqueza esperada con tal de eliminar el riesgo presente en su riqueza. Por otro lado, las compañías de seguros, al trabajar con "grandes números", hacen que los valores esperados se den ex-post en forma casi exacta. Esto sugiere que hay posibilidades de intercambio tales que todo el mundo se vea beneficiado.

- Nadie jugaría en los casinos, puesto que al hacerlo el individuo entrega dinero seguro a cambio de un juego probabilístico. Más aún, la cantidad que debe invertirse para jugar es en general superior a la ganancia esperada del juego.

La limitación principal del análisis anterior puede ser ilustrada con un ejemplo: suponga la existencia de un juego que consiste en perder US$11 con probabilidad de 99,999% y ganar US$1.000.000 con probabilidad 0,001% (una lotería). En este caso, la riqueza esperada asociada a este juego es US$-1 (aprox.). ¿Estaría ud. dispuesto a **pagar** con tal de deshacerse de este "riesgo"? En estricto rigor, una persona que tenga aversión al riesgo **sí** estaría dispuesta a hacerlo. Sin embargo, el sentido común dice que la cantidad que puede ganarse es tan grande que no vale la pena (y al contrario, haría caer el bienestar) deshacerse de este juego. Esto sugiere que hay algo más que no está siendo considerado en el análisis anterior: puede haber una preferencia marcada por distribuciones de probabilidad asimétricas, "cargadas hacia la izquierda" pero con "largas colas derechas", vale decir, que tengan probabilidades, aunque bajas, de ganancias extremadamente positivas.

IV.3.2 Indiferencia o Neutralidad Frente al Riesgo

Un individuo indiferente frente al riesgo se preocupa sólo de los valores esperados. Así, por ejemplo, si puede elegir entre muchos proyectos que demandan la misma inversión inicial, elegirá siempre aquél que involucre la máxima riqueza esperada. Los indiferentes frente al riesgo no se preocupan de la variabilidad de su riqueza. Por ejemplo:

$$\text{US\$100.000 seguros son indiferentes al "juego"} \begin{cases} \text{US\$ 50.000 con prob. 0,5} \\ \\ \text{US\$150.000 con prob. 0,5} \end{cases}$$

Cuando todos los inversionistas de la economía son indiferentes frente al riesgo, tiene mucho sentido hablar de "**la**" tasa de interés. Esto es así porque, en caso de existir expectativas homogéneas (todos tienen las mismas probabilidades subjetivas asociadas a todos los estados), todos los individuos querrían invertir en los mismos proyectos: aquéllos que impliquen la máxima riqueza esperada. Dicho de otra forma, en un mundo indiferente al riesgo con expectativas homogéneas, cualquier activo que tenga una rentabilidad "baja" no será demandado. Esto hará que dicho activo se encuentre en exceso de oferta, lo que hará bajar su precio hasta que ofrezca exactamente la misma rentabilidad que todos los otros activos. En resumen, en un mundo neutral frente al riesgo, **todos los activos rendirían lo mismo** (la riqueza crecería a la misma tasa esperada en caso de ser invertida en cualquier activo).

El supuesto de neutralidad frente al riesgo puede ser útil para modelar determinadas situaciones en que quiera analizarse problemas en los que las consideraciones de riesgo son secundarias. Para todos los efectos prácticos, bajo la premisa de neutralidad frente al riesgo, puede suponerse que todos los individuos tienen la función de utilidad:

$$U(w) = w.$$

En este caso se cumple lo siguiente:

a) U crece con la riqueza y EU(w) = U(Ew)

b) Le gusta la riqueza pero es indiferente ante el riesgo

c) $\dfrac{dU(w)}{dw} > 0$ pero $\dfrac{d^2U(w)}{dw^2} = 0$ ó (utilidad marginal de la riqueza constante)

d) Su función de utilidad es creciente y lineal

e) El equivalente cierto (w^*) es igual a la riqueza esperada

(Ejercicio propuesto: haga un gráfico con los elementos anteriores)

IV.3.3 Preferencia por Riesgo

Este es un caso que se estudia sólo para efectos de completar el análisis, puesto que no es de gran utilidad teórica o práctica.

En este caso, el individuo estaría dispuesto a **pagar** por asumir riesgo. Estaría dispuesto a sacrificar riqueza esperada con tal de asumir más riesgo. Este individuo invertiría su riqueza en los activos más riesgosos incluso si ofrecen un crecimiento esperado menor de la riqueza invertida en ellos (menor rentabilidad).

Aquí se cumple lo siguiente:

a) U crece con la riqueza y EU(w) > U(Ew)
b) Le gusta la riqueza y prefiere el riesgo
c) $\frac{dU(w)}{dw} > 0$ y $\frac{d^2U(w)}{dw^2} =$ (utilidad marginal de la riqueza creciente)
d) Su función de utilidad es creciente y convexa
e) e) El equivalente cierto (w^*) es mayor que la riqueza esperada

(Ejercicio propuesto: haga un gráfico con los elementos anteriores)

Ejercicios propuestos

1- Aversiño tiene una riqueza inicial de US$ 100.000 y su función de utilidad es U(w)=ln(w), donde w es la riqueza total final.

(a) La riqueza final de Aversiño consiste en los US$100.000 iniciales más un "juego" que puede tener los siguientes resultados: ganar US$30.000 con probabilidad 40% o perder US$ 20.000. A este señor se le ofrece un seguro que lo protege contra la posibilidad de perder los US$20.000 (el seguro paga sólo en ese caso), el que cuesta US$ 3.000. ¿Lo compra?
(R: No compra el seguro, sólo está dispuesto a pagar US$ 2.853)

(b) Aversiño no contrató el seguro y la suerte no lo acompañó. Perdió US$ 20.000 y así su riqueza quedó en US$ 80.000. Si es sometido nuevamente al mismo juego y también se le ofrece el seguro, ¿lo compraría esta vez? (R: Sí, ya que ahora valora perder US$ 1 mucho más que antes. El está dispuesto a pagar US$ 3.538 por el seguro)

2- Suponga que usted es un inversionista con una función de utilidad $U(w)=w^{1/2}$. Este es un mundo de sólo dos períodos y su riqueza a fines del período 1 es incierta, pudiendo tomar dos posibles valores: US$ 10.000 en el estado 1 y US$ 3.600 en el estado 2 . La probabilidad de que ocurra el estado 1 es 25%.

(a) Encuentre la riqueza esperada.(R: US$ 5.200)

(b) Encuentre su utilidad esperada.(R: 70 útiles)
(c) Determine el monto máximo que usted estaría dispuesto a pagar a una compañía de seguros de manera de tener una riqueza cierta en el futuro que le permita alcanzar su actual utilidad esperada. Grafique.(R: US$ 300)
(d) ¿Cuál debería ser la probabilidad de recibir US$ 3.600 que justifique pagar una prima de US$ 400?(R: 50%)
(e) Suponga que la probabilidad de que ocurra el estado 1 cambia a 0,5 para cualquier tipo de proyecto. Se le ofrece otro proyecto también de flujos inciertos. Se esperan flujos de US$ 8.100 en períodos buenos y US$ 2.500 en períodos malos. ¿Cambiaría el proyecto antiguo por este nuevo? Grafique.
(R: No)
(f) ¿Cuál sería el mínimo monto en períodos malos que soportaría el proyecto 2 para que se estuviera indiferente entre elegir éste o el primer proyecto? (Suponga una probabilidad igual a 0,5 para ambos estados) (R: US$ 4.900)

3- Un inversionista que tiene aversión al riesgo vive en un mundo de dos períodos (t=0 y t=1). Este inversionista tiene dos (y sólo dos) alternativas para invertir toda su riqueza:

	Estados de la Naturaleza:	
	s_1	s_2
Alternativa A	W_1	W_2
Alternativa B	W_1 - 200	W_2 + 300
Probabilidad	0,6	0,4

W_i representa la riqueza terminal (en t=1) asociada a la alternativa escogida en el estado s_i (i= 1, 2) y $W_2 > W_1$.

Se pide: Utilizando un análisis gráfico, demuestre que el equivalente cierto y la utilidad esperada asociados a la 'Alternativa A' serán siempre superiores al equivalente cierto y la utilidad esperada asociados a la 'Alternativa B' (identifique cada punto relevante en su gráfico).

4- (Adaptado de Copeland y Weston [2]) El señor Alado tiene una riqueza que consiste en un avión avaluado en US$100.000 y depósitos por US$ 30.000. La tasa de interés única es del 10%. El señor Alado ha visto con preocupación la alta frecuencia con que se accidentan aviones semejantes al suyo (un Chesna 757). El es una persona que viaja mucho (y usa paracaídas), por lo que está considerando la posibilidad de asegurar su avión. El señor Alado determinó que las pérdidas potenciales que podría sufrir durante el año son:

Valor pérdidas ($)	Probabilidad (%)
US$ 0	97,0
US$ 20.000	2,5
US$ 100. 000	0,5

Si lo asegura por US$ 100.000 la prima sería de US$ 750 y si lo asegura por la mitad la prima baja a US$ 400.

Durante el año de vigencia del seguro su riqueza variará sólo por los intereses ganados y las posibles pérdidas de su Chesna.

La función de utilidad de Alado es $U(W) = \ln(W)$, donde W representa la riqueza al final del año que cubre el seguro. Suponga que la prima se paga al comienzo del año y las pérdidas ocurren al final del año. (Use seis decimales).

(a) ¿Qué decisión toma el señor Alado? ¿asegura el avión? ¿por qué monto?
(R: Asegura el avión por US$ 50.000; U(W) = 11,792423 útiles)

(b) ¿A cuánto debería descender la prima del seguro por US$ 100.000 para que Alado la acepte? (R: US$ 685)

(c) Si los depósitos fueran por US$ 50.000 en vez de US$ 30.000, ¿cambia la decisión de Alado? (R: No cambia la decisión)

(d) ¿Qué valor debería tomar la prima del seguro para que Alado decidiera no asegurar su avión? (R: Seguro por US$ 50.000, prima = US$ 1.043; seguro por US$ 100.000 , prima = US$ 1.328)

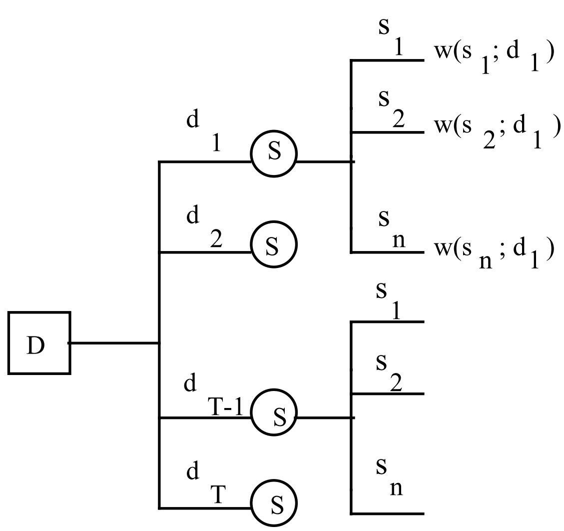
V VALOR DE LA INFORMACIÓN Y ARBOLES DE DECISIÓN

Los capítulos anteriores se han referido separadamente a diversos elementos que intervienen en un proceso decisional. Hasta el momento se han definido, entre otros, los conceptos de estructura de la información, probabilidades a priori y revisadas y función de utilidad de la riqueza. A continuación se presenta una metodología de análisis para un proceso decisional (que en ningún caso es original del autor[9]), donde se juntan todos los elementos anteriores. Este esquema se utiliza para un problema específico, que consiste en obtener una expresión para el valor de la información. Para efectos de mantener un orden lógico que facilite una mejor comprensión, los árboles de decisión probarán ser de gran utilidad.

V.1 La Decisión Optima sin Información Adicional

La Figura 1 ilustra un proceso de decisión sin información adicional. El dibujo que aparece en esa figura se llama "Árbol de Decisión". El árbol de decisión representa una secuencia cronológica de eventos.

FIGURA 1



El cuadrado con una "D" inserta en él simboliza que en ese punto es necesario tomar una decisión, escogiendo una dentro del conjunto de decisiones factibles $D = \{d_1, \dots, d_T\}$. Luego de tomarse la decisión, puede darse cualquiera de los estados de la

---

[9] Ver Demski [3] y Chernoff [1].

naturaleza S = {s_1, … , s_n}. Los círculos a partir de los cuales nacen las "ramas" de los estados se utilizan para simbolizar que en ese momento "los dados están echados", queriendo decir esto que el resultado de la decisión está fuera del control del individuo (nótese que no se han dibujado todas las ramas por falta de espacio). Al final de cada rama del árbol de decisión, hay una cantidad de riqueza asociada que depende de la decisión que se haya tomado y el estado de la naturaleza que en definitiva ocurra [w(s,d)].

Conforme a lo establecido con anterioridad, el individuo debería evaluar la riqueza resultante de cada combinación decisión-estado en su función de utilidad, para luego calcular la utilidad esperada asociada a cada decisión en base a sus probabilidades subjetivas a-priori. Si el individuo es neutral frente al riesgo, puede simplificarse el problema trabajando con riqueza esperada. Entonces, a cada círculo (que aparece justo después de cada decisión) podrá asignársele un valor en útiles (o pesos), que corresponde a la utilidad esperada derivada de cada decisión. Mirando los círculos y los valores en útiles asociados, se escoge la decisión que maximice la utilidad esperada.

Nótese que el análisis se hace "de atrás para adelante". En definitiva el ejercicio que se hace es el de "tantear terreno", viendo qué sucedería en situaciones hipotéticas (por ejemplo, Sue Z.Q. se pregunta **qué sucedería si** decide no llevar paraguas y llueve - se mojaría, claro).

A continuación se desarrolla un ejemplo numérico.

Ejercicio 5.1-Seguro Automotriz

En este momento ud. está evaluando la posibilidad de tomar un seguro contra accidentes automovilísticos. Su función de utilidad es U(**w**) = ln(**w**), donde **w** representa la riqueza que ud. tendrá al cabo de un año. Su riqueza **actual** consiste en:

Un Automóvil	$1.000.000
Efectivo	$ 500.000
Total	$1.500.000

Sin embargo, el valor que tendrá el automóvil dentro de un año dependerá de si ud. choca o no. Existe un 10% de probabilidad de chocar. No obstante, si es que ud. choca, el accidente puede ser **grave** o **leve**. Si el accidente es **grave**, ud. espera salvar su vida pero no el auto, es decir hay pérdida total (el valor final del auto es $0). Si el accidente es **leve**, el valor final del auto es de $700.000. Dado que ud. choca, la probabilidad de que el choque sea **leve** es de 70%. Por último, si ud. no choca, el valor final de su auto no cambiará (será de $1.000.000).

El seguro que ud. estudia debe pagarse hoy al contado y cubrirá el 100% de los daños. Por ejemplo, si ud. sufre un choque leve, el seguro le pagará $300.000 (=$1.000.000-$700.000). Por otro lado, ud. ha decidido que el efectivo que quede después de haber comprado el seguro (si es que decide comprarlo) lo depositará en un banco a la tasa de interés anual efectiva de 10%.

a) Sea **S** el costo pagado hoy por el seguro. Haga un árbol de decisión que le permita analizar la conveniencia de contratar el seguro (aquí no se le pide llegar a una solución al problema. Sólo se le pide plantearlo).

b) ¿Cuánto es el **máximo** que ud. estaría dispuesto a pagar por el seguro ($\mathbf{S}^*$)?

c) Suponga que la compañía de seguros es indiferente frente al riesgo y está de acuerdo con sus estimaciones de las probabilidades. ¿Cuánto es el **mínimo** que ella estaría dispuesta a cobrar por el seguro, si es que el pago se recibe por adelantado?

Solución

a) Árbol de Decisión

Es conveniente partir por identificar las decisiones factibles:

d_1: compra seguro
d_2: no compra seguro

Asimismo, los posibles estados de la naturaleza (variables que están fuera del control del individuo) son:

s_1: no choca (π_1=0,9)
s_2: choca (π_2=0,1)
s_{21}: grave (dado choque, π_{21}=0,3)
s_{22}: leve (dado choque, π_{22}=0,7)

Ahora debe determinarse la riqueza final, dada la decisión y el estado.

No compra seguro: Si no choca su riqueza final consistirá en el valor del automóvil más lo que ha obtenido por el depósito bancario: $1.000.000+$500.000x(1,1) = $1.550.000.

Si ud. choca y el accidente es grave, su automóvil valdrá $0 pero tendrá el dinero del depósito: $500.000x(1,1)=$550.000

Si ud. choca y el accidente es leve, su automóvil valdrá $700.000, más el depósito: $1.250.000

Compra seguro: Si no choca, su riqueza final consistirá en el valor del automóvil más lo que haya logrado depositar en el banco después de pagar el seguro:

$$\$1.000.000 + (\$500.000-S)x(1,1)= \$1.550.000 - 1,1\ S$$

donde S es el monto pagado por el seguro. Note que \$500.000-S es el monto que se deposita en el banco.

Si ud. choca, el seguro pagará cualquier monto que sea necesario con tal de que

Valor Auto Chocado + Valor Cubierto por Seguro = \$1.000.000

Puesto de otra forma

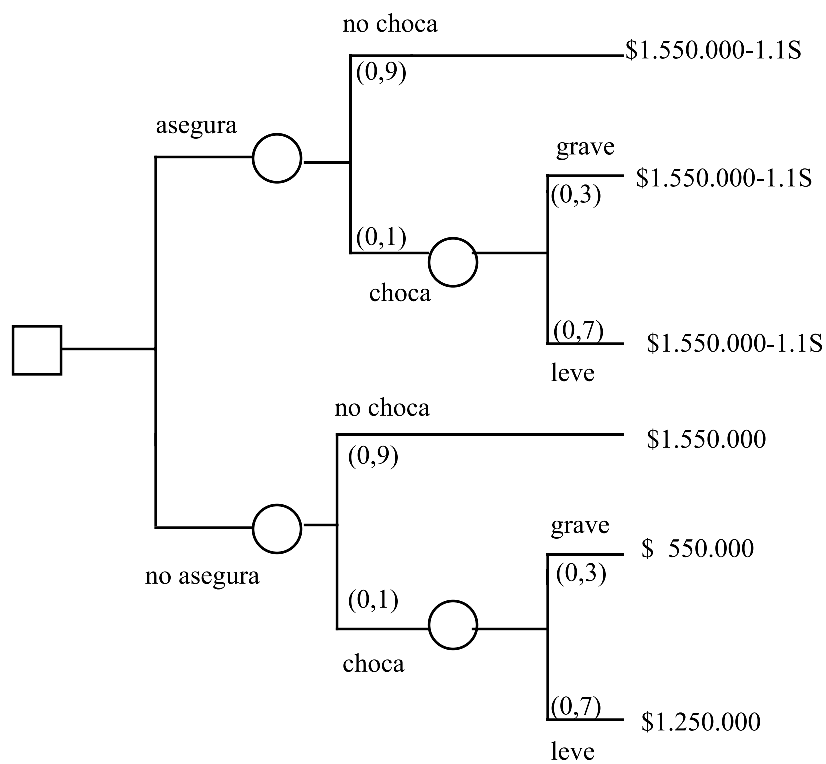
Valor Cubierto por Seguro = \$1.000.000 - Valor Auto Chocado

Por lo tanto, su riqueza final será la misma independientemente de que ud. choque o no y también será independientemente de la gravedad del choque: \$1.550.000-1,1 S.

El árbol de decisión se ve como sigue:

FIGURA 2

Ejemplo: Seguro Automotriz



Se ha optado por utilizar estados de la naturaleza sucesivos para ilustrar cuán general puede llegar a ser este tipo de análisis. Sin embargo, el mismo análisis podría hacerse con tres estados: no choca; choque grave y choque leve. En este último caso el árbol de decisión tendría tres ramas luego de cada decisión.

Los números entre paréntesis son las probabilidades de ocurrencia de cada estado.

b) Máximo dispuesto a pagar por el seguro

El máximo que ud. estaría dispuesto a pagar por el seguro es una cantidad S^* tal, que la utilidad esperada con seguro es igual a la utilidad esperada sin seguro.

Utilidad esperada con seguro:

$$EU(w(s,d_1)) = 0{,}9x\ \ln(1.550.000-1{,}1S) + 0{,}1x\ \ln(1.550.000-1{,}1S)$$

$$= \ln(1.550.000-1{,}1S) = U(w(s,d_1))$$

Utilidad esperada sin seguro:

$$EU(w(s,d_2)) = 0{,}9 \text{ x } \ln(1.550.000) +$$

$$0{,}1x[\ 0{,}3x\ln(550.000)+0{,}7x\ln(\$1.250.000)\ ]= 14{,}208 \text{ útiles}$$

Igualando las cantidades anteriores se soluciona el problema. El máximo dispuesto a pagar, es S^* tal que $\ln(1.550.000-1{,}1S^*) = 14{,}208$ útiles. Aplicando antilogaritmo a ambos lados, se obtiene

$$1.550.000-1{,}1S^* = 1.480.107$$

$$S^* = \frac{69.893}{1.1} = \$63.539$$

c) Mínimo dispuesto a cobrar por parte de la compañía de seguros

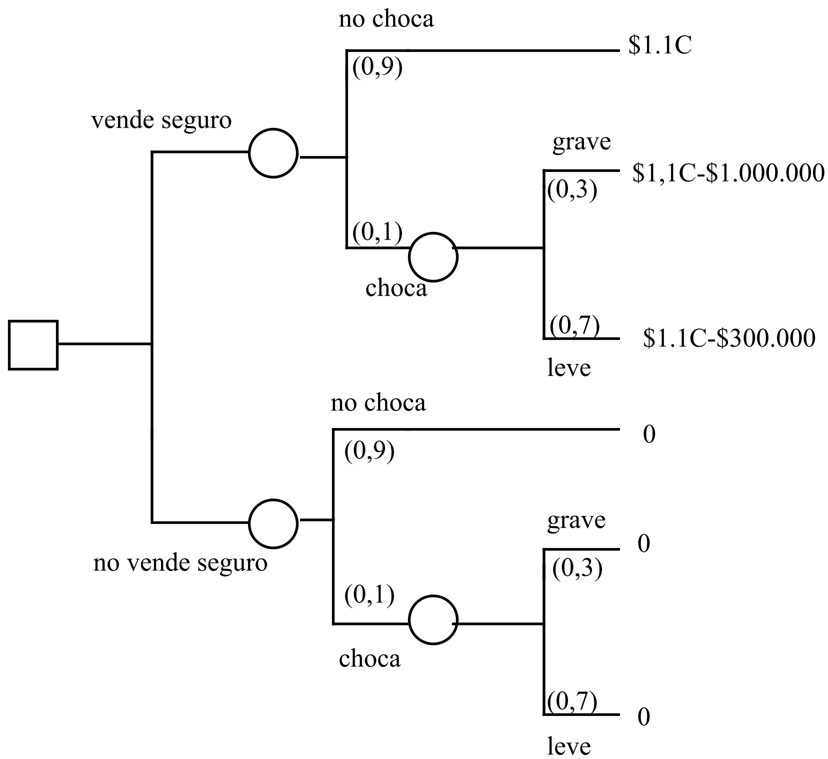
Se supone que la compañía de seguros es neutral frente al riesgo, por lo tanto, puede suponerse que la función de utilidad de la compañía de seguros es $U(w)=w$.

Sea C el pago que la compañía de seguros recibe al contado. Se supone que el monto C se mete al banco por un año. Al final del año tendrá 1,1C. Si el asegurado sufre un choque grave, tendrá que cubrir el valor del automóvil ($1.000.000). Si el asegurado sufre un choque leve, tendrá que cubrir daños por $300.000.

El árbol de decisión para la compañía de seguros es el siguiente

FIGURA 3

Ejemplo: Compañía de Seguros



Para estar indiferente entre prestar o no prestar el servicio de asegurar los riesgos, ambas decisiones deben brindar el mismo nivel de utilidad (riqueza esperada, en este caso):

Riqueza esperada de vender seguro

$$Ew(s;d_1) = 0{,}9x(1{,}1C) + 0{,}1x[\ 0{,}3x(1{,}1C\text{-}1.000.000) + 0{,}7x(1{,}1C\text{-}300.000)\ ]$$

$$= 1{,}1C\text{-}51.000$$

Riqueza esperada de no vender seguro

$$Ew(s;d_2) = 0.$$

Por lo tanto, para que haya indiferencia 0 = 1,1C-$51.000. Esto significa que

$$C = \frac{\$51.000}{1.1} = \underline{\$46.364}$$

Comentario: Puede notarse que el máximo que usted estaría dispuesto a pagar por el seguro es **superior** al mínimo que la compañía de seguros estaría dispuesta a cobrar. Esto implica que existen posibilidades de "intercambio" que beneficiarían tanto al asegurador como al asegurado. Si la prima fuera de \$50.000, por ejemplo, aumentaría su bienestar y el de la compañía de seguros.

En términos generales, se reitera que la decisión óptima es aquélla que maximice la utilidad esperada del individuo. Matemáticamente, este principio se escribe

(1) $\mathbf{d}^* \,\varepsilon\, \{ d_1, \ldots , d_T \}$

(2) $EU[\, w(s ; d_k) \,] = \{ \Sigma_i\, \pi_i\, U[\, w(s_i ; d_k) \,] \}$

(3) $\mathbf{d}^* = \underset{\{d_k\}}{\operatorname{argmax}} \{ EU[\, w(s ; d_k) \,] \}$

Lo anterior significa que (1) puede elegirse sólo una decisión factible; (2) la utilidad esperada es el promedio ponderado de la utilidad asociada a los distintos valores que puede tomar la riqueza; y (3) la decisión óptima es aquélla que maximiza la utilidad esperada. La máxima utilidad esperada que puede alcanzarse es entonces $EU[\, w(s ; \mathbf{d}^*)] \equiv \Sigma_i\, \pi_i\, U[\, w(s_i ; \mathbf{d}^*) \,]$.

V.2 La Decisión Optima con Información Adicional

Antes de discutir las características de la decisión óptima cuando se cuenta con información adicional, es conveniente recordar lo siguiente:

	$t=0$	$t=0^+$	$t=1$
Con Info. Adicional	Se espera la señal del Sist. de Información	Se recibe señal; se revisan probs. y se toma decisión	Ocurre el estado y se ve consecuencia de la decisión

En el cronograma se aprecia el proceso que debe seguirse en el caso de "comprar" un sistema de información. Lo importante de recordar es que la información adicional provee una instancia intermedia ($t=0^+$) en la que puede revisarse la decisión. En este sentido ya no puede hablarse de "la" decisión óptima sino de un conjunto de decisiones óptimas que dependerán de la señal recibida.

El proceso de decisión puede verse ilustrado por un árbol de decisión, en la Figura 4. El árbol de decisión representa lo que sucede en forma cronológica. En este caso, el individuo que toma la decisión tiene un sistema de información compuesto por cinco señales. Luego de recibir cualquiera de las señales debe tomar una decisión. Las consecuencias de la decisión dependerán del estado de la naturaleza que ocurra y, al igual que antes, para cada combinación decisión-estado hay un nivel de riqueza asociado.

Debe destacarse que los niveles de riqueza terminal son los mismos con o sin información adicional. Lo único que hace la información adicional en un Proceso de Decisión Perfectamente Especificado es ayudar a revisar las probabilidades. (Las probabilidades subjetivas relevantes dejan de ser π_i, pasando a ser $\pi(s_i \mid y_k)$, cuando se recibe la señal y_k).

Lo que distingue a un proceso de decisión con información adicional de uno sin ella, es que para cada posible señal y_k, debe tomarse la decisión que maximice la utilidad esperada:

$$E\{ U \mid y_k \} \equiv \max_{\{d\}} \Sigma_i \, \pi(s_i|y_k) \, U[w(s_i;d)] \quad (i=1, \dots, n)$$

Se reitera que este es un proceso que mira situaciones hipotéticas. El que toma la decisión se pregunta **cuál sería** la decisión óptima **si** el sistema de información diera una determinada señal.

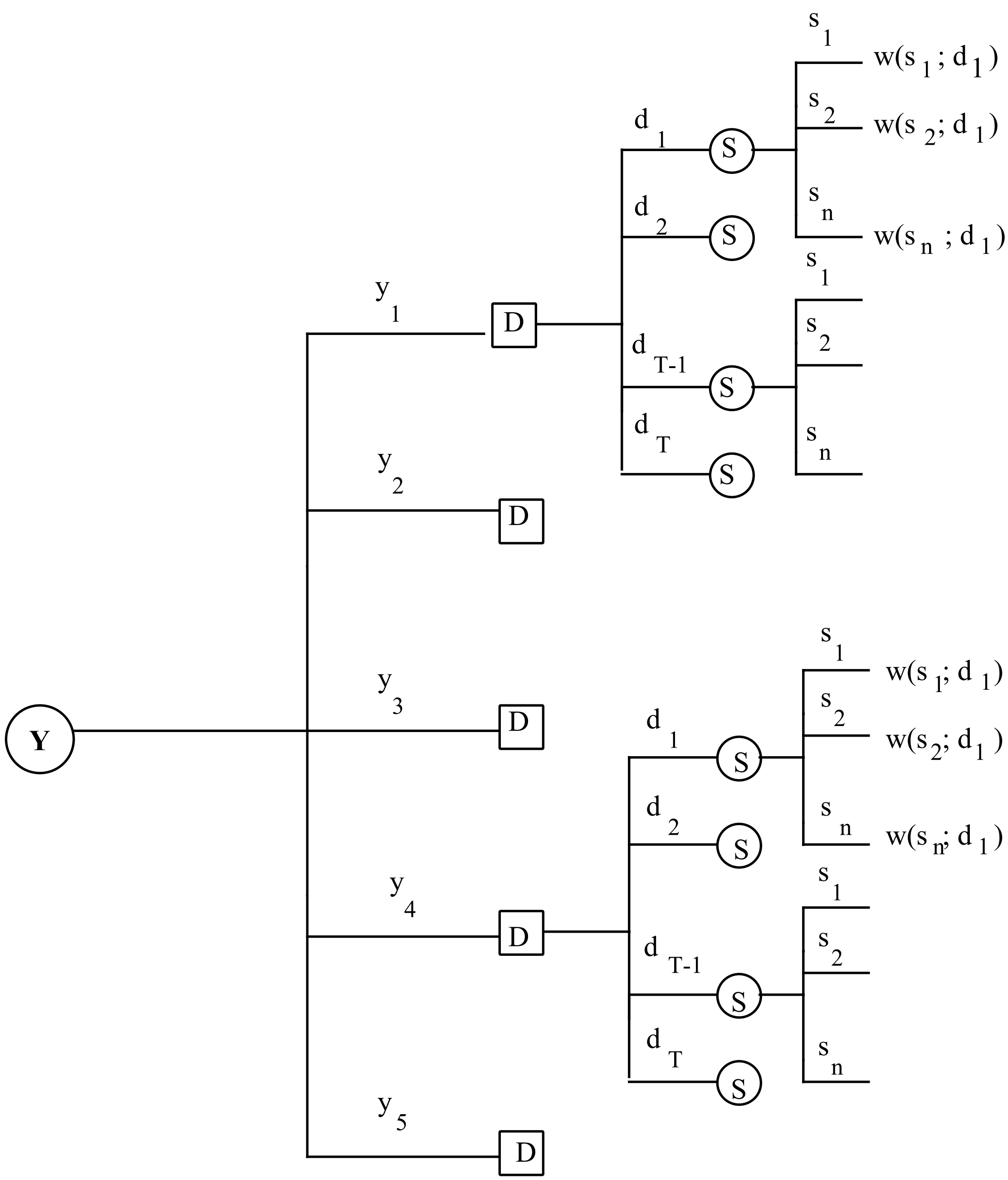
La utilidad esperada con el sistema de información **Y** será entonces un promedio ponderado de las utilidades esperadas máximas, dada cada señal, puesto que a priori no se sabe cuál de ellas será recibida:

$$E^Y U \equiv \Sigma_k \, \underbrace{p(y_k)}_{\substack{\text{probabilidad} \\ \text{de recibir señal}}} \, \underbrace{\max_{\{d\}} \{\Sigma_i \, \pi(s_i \mid y_k) \, U[w(s_i;d)]\}}_{\substack{\text{máxima utilidad} \\ \text{esperada, dada la} \\ \text{señal}}} \quad (i=1, \dots, n;\ k=1, \dots, m)$$

Vale decir, la utilidad esperada con información adicional es el promedio ponderado **de las utilidades máximas** derivadas de tomar las decisiones óptimas, dada cada señal.

FIGURA 4

Proceso de Decisión con Información Adicional



V.2.1 Valor de la información perfecta

Puede recordarse que un sistema de información perfecto es uno en que el estado de la naturaleza se revela en forma anticipada. Esto permite tomar la mejor de las decisiones dependiendo de qué estado de la naturaleza ocurrirá en el futuro. Dada la señal (que en este caso es lo mismo que decir: dado que ocurrirá un estado) se toma aquella decisión que maximice la utilidad esperada. Para calcular esta última, ahora se utilizan las probabilidades revisadas.

En el caso de un sistema de información perfecto, las probabilidades revisadas son iguales a **1** ó **0**. Así por ejemplo, la señal y_i estaría asociada sólo al estado s_i y por ende, $\pi(s_i|y_i)=1$. En este caso la utilidad esperada es simplemente $U(w(s_i;d))$. Por lo tanto, dada una señal que anticipe la ocurrencia del estado s_i, se toma la decisión que maximice $w(s_i;d)$, que es exactamente lo mismo que maximizar $U(w(s_i;d))$. Esto puede hacerse sólo porque **anticipadamente** se sabe que ocurrirá el estado s_i.

La máxima utilidad de un individuo puede ser alcanzada cuando éste posee información perfecta y sin costo. Con información perfecta, la expresión para la utilidad esperada pasa a ser:

$$E^Y U \equiv \Sigma_i \pi_i \max_{\{d\}} U[w(s_i;d)] \quad (i=1, \dots , n)$$

Esto sucede porque, dado que el estado de la naturaleza se conoce con anterioridad a su ocurrencia, el individuo tomará **la** decisión óptima asociada a cada estado:

$$\max_{\{d\}} U[\, w(s_i;d) \,]$$

(asegurarse en caso de choque y no asegurarse en caso contrario, por ejemplo).

Luego, el individuo calcula la utilidad esperada multiplicando por las probabilidades de recibir las señales, pero cuando hay información perfecta, la probabilidad de recibir la señal es igual a la probabilidad de ocurrencia del estado asociada a la señal. Así se obtiene la expresión anterior para $E^Y U$.

La información tendrá valor si la utilidad esperada asociada al sistema de información es superior a la utilidad esperada sin información (si $E^Y U > EU$). Dicho de otro modo, si

$$\Sigma_i \pi_i \max_{\{d\}} U[\, w(s_i;d) \,] > \max_{\{d\}} \Sigma_i \pi_i U[\, w(s_i;d) \,]$$

la información perfecta tiene valor. De la ecuación anterior se desprende que la información perfecta **no tendrá valor sólo si no es capaz de alterar la decisión**. Vale decir, si independientemente de cuál estado de la naturaleza sea revelado con anticipación el agente siempre toma la misma decisión, entonces la información perfecta no tendrá valor. Lo anterior se demuestra utilizando el argumento "una suma de máximos es siempre mayor o igual al máximo de una suma" (ver ecuación anterior), por lo tanto el mínimo valor que puede tener la información perfecta es **cero**. La demostración de lo anterior se deja para la próxima sección.

En la literatura suele suponerse neutralidad frente al riesgo. En este caso, se habla del **Valor Esperado de la Información Perfecta**[10]

$$\textbf{VEIP} = \Sigma_i \pi_i \max_{\{d\}} [\, w(s_i;d)\,] - \max_{\{d\}} \Sigma_i \pi_i [\, w(s_i;d)\,]$$

o bien

$$\textbf{VEIP} = E\,\{ \max_{\{d\}} [\, w(s_i;d)\,] \} - \max_{\{d\}} E\,\{ [\, w(s_i;d)\,] \}$$

$$= \begin{array}{c}\text{Riqueza Esperada con}\\ \text{Información Perfecta}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Riqueza Esperada sin}\\ \text{Información Perfecta}\end{array}$$

Para ilustrar los conceptos aquí presentados, a continuación se presenta un ejercicio simple.

Ejercicio 5.2

En un mundo neutral frente al riesgo, todos tienen una función de utilidad U(w)=w, donde w representa la riqueza terminal de fines del período. La Jó, habitante de este mundo, ha decidido ahorrar parte de su riqueza ($100.000) y está viendo cómo invertirla. Sus únicas alternativas son invertir su riqueza por un año en instrumentos financieros (bonos) estatales a una tasa de 5% anual, o bien invertir en acciones de la empresa generadora de electricidad Hidroelec S.A. Los resultados de la inversión en Hidroelec son inciertos y dependen del clima que reine durante el año. Así, si el año es seco, se perderá parte de la inversión (-10%) y si el clima es lluvioso, se ganará una rentabilidad atractiva (30%).

[10] Véase Foster [6], capítulo 1.

En base a la información anterior, puede construirse el siguiente cuadro:

Decisión / Estado:	Año Seco	Año Lluvioso
Inversión en Hidroelec	$ 90.000	$130.000
Inversión en bonos	$105.000	$105.000

La Jó asigna una probabilidad de 30% a que éste sea un año seco.

a) ¿ Cuál es la decisión óptima de La Jó sin información adicional?

b) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

(Ejercicio propuesto: construya los árboles de decisión)

Solución

a) La Jó es neutral frente al riesgo, por lo que toma la decisión que maximice la riqueza esperada:

Hidroelec: EU(w) = Ew = 0,3x$90.000 + 0,7x$130.000 = $118.000
Bonos: EU(w) = Ew = $ 105.000

Por lo tanto la decisión óptima es invertir en Hidroelec.

b) Valor esperado de la información perfecta (VEIP). En este caso, el estado de la naturaleza se revela en forma anticipada. Si el sistema de información dice "habrá un año seco", es 100% seguro de que ello ocurrirá.

Sistema de información dice "Año Seco"

Hidroelec: EU(w) = Ew = 1x$90.000 + 0x$130.000 = $90.000
Bonos: EU(w) = Ew = $ 105.000

En este caso el óptimo es invertir en bonos.

Sistema de información dice "Año Lluvioso"

Hidroelec: EU(w) = Ew = 0x$90.000 + 1x$130.000 = $130.000
Bonos: EU(w) = Ew = $ 105.000

En este caso el óptimo es invertir en acciones de Hidroelec.

Así se forma una **estrategia** óptima: si el sistema de información perfecto dice "año seco" se invierte en bonos; si el sistema de información dice "año lluvioso", se compran las acciones de Hidroelec.

Utilidad Esperada con Información Perfecta

La Jó asigna una probabilidad de 30% a que sea un año seco. Por lo tanto, La Jó asigna una probabilidad de 30% a recibir la señal "año seco" e invertir en bonos. La utilidad esperada con información perfecta es:

$E^Y U = E^Y w = 0{,}3x\$105.000 + 0{,}7x\$130.000 = \$122.500$

Valor Esperado de la Información Perfecta

$VEIP = E^Y w - Ew = \$122.500 - \$118.000 = \$4.500$, y éste es el máximo que La Jó estaría dispuesta a pagar por el sistema de información.

(Se recomienda al lector rehacer el ejercicio anterior utilizando un árbol de decisión.)

El ejemplo anterior ha servido para mostrar qué se entiende por valor de la información. En términos de útiles, el valor de la información es la diferencia entre la utilidad esperada con información (perfecta o adicional) y la utilidad esperada sin información. En térmicos de dinero, el valor de la información (perfecta) es el máximo monto que el individuo estaría dispuesto a pagar por el sistema de información (perfecto) con tal de que su nivel de utilidad esperado sea el mismo con y sin información. Cuando existe aversión al riesgo, el máximo que se estaría dispuesto a pagar por información depende de las preferencias individuales, pero cuando todos los individuos son neutrales frente al riesgo, el valor de la información es el mismo para todos aquellos que tengan las mismas creencias.

V.2.2 Valor de la información "muestral"

Se habla de información muestral cuando el sistema de información no revela el estado de la naturaleza que ocurrirá en forma anticipada. La idea detrás de esto es que se revisan las probabilidades en base a información obtenida de una muestra (y no de un "censo") lo que hace que el sistema de información sea imperfecto.

Los principios utilizados para cuantificar el valor de la información muestral (o imperfecta) son iguales a los principios utilizados para calcular el valor de la información perfecta. Al igual que en el caso anterior, en términos de útiles, el valor de la información es la diferencia entre la utilidad esperada con información y la utilidad esperada sin información. En términos de dinero, el valor de la información (imperfecta) es el máximo monto que el individuo estaría dispuesto a pagar por el sistema de información (imperfecto) con tal de que su nivel de utilidad esperado sea el mismo con y sin información.

En la literatura suele llamarse **Valor Esperado de la Información Muestral** al máximo que un individuo **neutral frente al riesgo** estaría dispuesto a pagar por información imperfecta:

$$\textbf{VEIM} = \Sigma_k\, p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i\, \pi\, (s_i|\, y_k)\, w(s_i;\, d)\, \} - \max_{\{d\}} \{\, \Sigma_i\, \pi_i\, w(s_i;\, d)\, \}$$

$$= \begin{array}{c}\text{Riqueza Esperada con}\\ \text{Información Adicional}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Riqueza Esperada sin}\\ \text{Información Adicional}\end{array}$$

De lo anterior **es posible demostrar** que, cuando la información está disponible sin costo

VEIP ≥ VEIM ≥ 0.

<u>Demostración</u>:

Dado que

$$\textbf{VEIP} \equiv \Sigma_i\, \pi_i \max_{\{d\}} \{\, w(s_i;d)\, \} - \max_{\{d\}} \{\, \Sigma_i\, \pi_i\, w(s_i;d)\, \}$$

$$\textbf{VEIM} \equiv \Sigma_k p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i\, \pi(s_i|\, y_k)\, w(s_i;d)\, \} - \max_{\{d\}} \{\, \Sigma_i\, \pi_i\, w(s_i;d)\, \}$$

entonces **basta con demostrar que**

$$\Sigma_i\, \pi_i \max_{\{d\}} \{\, w(s_i;d)\, \} \geq \Sigma_k p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i\, \pi(s_i|\, y_k)\, w(s_i;d)\, \} \geq \max_{\{d\}} \{\, \Sigma_i\, \pi_i\, w(s_i;d)\}$$

Utilidad Esperada Con Info. Perfecta	Utilidad Esperada Con Info. Muestral	Utilidad Esperada Sin Información Adicional

La demostración se hace en dos partes:

A) Demostrar que $\Sigma_k p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i;d)\} \geq \max_{\{d\}} \{\Sigma_i \pi_i\, w(s_i;d)\}$

Utilidad Esperada Con Info. Muestral	Utilidad Esperada Sin Información Adicional

B) Demostrar que $\Sigma_i \pi_i \max_{\{d\}} \{w(s_i;d)\} \geq \Sigma_k p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i;d)\}$

Utilidad Esperada Con Info. Perfecta	Utilidad Esperada Con Info. Muestral

Los dos puntos claves para entender esta demostración son:

1) Según el "Teorema de la Probabilidad Total" (ver Anexo)

$$\pi_i \equiv \Sigma_k\, p(y_k)\, \pi(s_i| y_k) = \Sigma_k\, p(y_k,s_i)$$

2) En el caso de información muestral, la decisión óptima depende de la señal recibida ($d^*= d^*(y_k)$) y en el caso de información perfecta, la decisión óptima depende del estado de la naturaleza que sea revelado con anterioridad ($d^*=d^*(s_i)$) .

A) Dado que $d^*(y_k)$ es por definición la decisión óptima (que maximiza la utilidad esperada) dada la señal y_k, entonces tiene que cumplirse, por definición

$$\max_{\{d\}} \{\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i;d)\} \equiv \Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i; d^*(y_k))$$

vale decir, la máxima riqueza esperada se obtiene al tomar la decisión óptima, por definición. Aquí es importante notar que la utilidad esperada, dada la señal y_k, es máxima, lo que significa que para cualquier decisión $\underline{d}$ que no dependa de la señal (tal como la que debería tomarse si no hay información adicional) se cumple

$$\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i; d^*(y_k)) \geq \Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i; d) \quad \forall\, d$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $p(y_k)$ y sumando para todas las señales (para todo k), se obtiene que la máxima utilidad esperada con información muestral es

$$\Sigma_k\, p(y_k)\, \{\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i; d^*(y_k))\} \geq \Sigma_k\, p(y_k)\, \{\Sigma_i \pi(s_i| y_k)\, w(s_i; d)\} \quad \forall\, d$$

Este simple argumento demuestra que la utilidad con información adicional es al menos igual que la utilidad sin información adicional.

Ahora se ve que sólo en el caso en que la información adicional **no afecte** la decisión, la utilidad esperada con información adicional es igual a la utilidad esperada sin información adicional.

Intercambiando el orden de las sumatorias para el lado izquierdo de la desigualdad anterior, se obtiene

$$\Sigma_i \{ \Sigma_k \, p(y_k)\pi(s_i| \, y_k) \, w(\, s_i; \, d^*(y_k)) \}$$

Entonces, sólo si la decisión óptima d^* no depende de la señal (vale decir, si siempre se tomará la misma decisión, independientemente de qué información se reciba) puede escribirse:

$$\Sigma_i \, w(\, s; \, d^*) \{ \Sigma_k \, p(y_k)\pi(s_i| \, y_k) \}$$

lo que a su vez se reduce a (ver punto clave (1))

$$\Sigma_i \, w(\, s_i; \, d^*) \, \pi_i$$

que corresponde exactamente a la máxima utilidad esperada **sin** información adicional •

B) Ahora se demuestra que

$$\underbrace{\Sigma_i \, \pi_i \max_{\{d\}} \{ w(s_i;d) \}}_{\text{Utilidad Esperada Con Info. Perfecta}} \geq \underbrace{\Sigma_k p(y_k) \max_{\{d\}} \{\Sigma_i \, \pi(s_i| \, y_k) \, w(s_i;d) \}}_{\text{Utilidad Esperada Con Info. Muestral}}$$

Utilizando las definiciones

$$d^*(s_i) = \operatorname*{argmax}_{\{d\}} \{ w(s_i; \, d) \} \quad \text{y} \quad d^*(y_k) = \operatorname*{argmax}_{\{d\}} \{\Sigma_i \, \pi(s_i| \, y_k) \, w(s_i; \, d) \}$$

puede reescribirse la desigualdad anterior como

$$\Sigma_i \, \pi_i w(s_i; \, d^*(s_i)) \geq \Sigma_k \, p(y_k) \{ \Sigma_i \, \pi(s_i| \, y_k) \, w(s_i; \, d^*(y_k)) \}$$

y **esto es lo que debe demostrarse**.

La demostración se basa en la idea intuitiva que

$$w(s_i; d^*(s_i)) \geq w(s_i; d(y_k)) \qquad \forall\ d(y_k)$$

En palabras lo anterior significa que con información perfecta siempre se elige la decisión que maximice la riqueza terminal, y dado que **con menos información** en el mejor de los casos se toma la decisión que ex-post brinda la mayor riqueza, entonces se cumple la desigualdad anterior. Multiplicando ambos lados por $p(y_k)\pi(s_i| y_k)$ y sumando sobre k , se obtiene

$$\Sigma_k\, p(y_k)\, \pi(s_i| y_k)w(s_i; d^*(s_i)) \geq \Sigma_k\, p(y_k)\, \pi(s_i| y_k)w(s_i; d(y_k))$$

Dado que $w(s; d^*(s))$ no depende de y_k, lo anterior se reduce a

$$\pi_i\, w(s_i; d^*(s_i)) \geq \Sigma_k\, p(y_k)\, \pi(s_i| y_k)w(s_i; d(y_k))$$

Sumando sobre s_i se completa la demostración •

Ejercicio 5.3

Continuación Ejercicio 5.2

Suponga que La Jó tiene la posibilidad de pedir un informe (gratuito) sobre el clima que se espera para este año al Servicio de Meteorología (SM). Históricamente el SM ha predicho correctamente un 60% de los años secos y un 80% de los años lluviosos.

c) ¿Cuáles son las probabilidades revisadas?
d) ¿Cuál es la decisión óptima para cada señal?
e) ¿Cuál es el valor esperado de la información muestral?

(Propuesto: haga los árboles de decisión)

Solución

c) El enunciado da la estructura de información: P(diga año seco| año seco) = 0,6; P(diga año lluvioso| año lluvioso) = 0,8. El Capítulo III explica detalladamente cómo obtener las probabilidades revisadas.

	Dice Seco	Dice Lluv.	π	$\pi(s\|y_1)$	$\pi(s\|y_2)$
seco	0,6	0,4	0,3	**a**	**b**
lluv.	0,2	0,8	0,7	**c**	**d**
p(**y**)	0,32	0,68	1	1	1

$$\mathbf{a} = \frac{\pi_1 p(y_1|s_1)}{p(y_1} = \frac{0.3x0.6}{0.32} = 0.5625 \qquad \mathbf{b} = \frac{\pi_1 p(y_2|s_1)}{p(y_2)} = \frac{0.3x0.4}{0.68} = 0.1765$$

$$\mathbf{c} = \frac{\pi_2 p(y_1|s_2)}{p(y_1)} = \frac{0.7x0.2}{0.32} = 0.4375 \qquad \mathbf{d} = \frac{\pi_2 p(y_2|s_2)}{p(y_2)} = \frac{0.7x0.8}{0.68} = 0.8235$$

d) **Decisiones óptimas**

Dada señal "año seco"

E(U| año seco; Hidroelec) = 0,5625x \$90.000+ 0,4375x\$130.000 = \$107.500

E(U| año seco; bonos) = \$105.000

La decisión óptima, dado que la señal es "año seco", es invertir en Hidroelec.

Dada señal "año lluvioso"

E(U| año lluvioso; Hidroelec) = 0,1765x \$90.000+ 0,8235x\$130.000
= \$122.940

E(U| año lluvioso; bonos) = \$105.000

La decisión óptima, dado que la señal es "año lluvioso" es invertir en Hidroelec.

e) Puede notarse que independientemente de qué señal ocurra, La Jó tomará siempre la decisión de invertir en Hidroelec. Por lo tanto, el valor esperado de la información muestral es **cero**. Lo anterior se verifica aplicando las definiciones:

VEIM $= E^{Y}U - EU$

$E^{Y}U$ = 0.32x\$107.500 + 0.68x\$122.940 = \$117.999,20 (difiere de \$118.000 por problemas de aproximación)

EU = \$118.000 (ver parte (a)). Por lo tanto, el máximo que una persona neutral frente al riesgo con las probabilidades subjetivas de La Jó estaría dispuesta a pagar por el sistema de información es **cero** : VEIM = 0.

Ejercicio 5.4

Continuación del Ejercicio 5.1-Seguro Automotriz

Este ejercicio toma como base el ejemplo del seguro automotriz presentado en la sección V.1 .

Suponga que ud. es amigo de un adivino, el señor Embhru Jado (primo del conocido Enho Jado). Antes de decidir si tomar o no el seguro, ud. tiene la posibilidad de consultarlo. Embhru es muy especial, puesto que **siempre** se equivoca. Por ejemplo, si le dice que ud. chocará, es seguro que ud. no lo hará y vice-versa. Sin embargo, la modestia de Embhru le impide hacer predicciones más precisas, por lo que no se atreve a decir si el choque será grave o leve, en caso de predecir un choque.

d) Encuentre una expresión para el máximo que ud. estaría dispuesto a pagar **hoy** por esta información (**M**), si el costo del seguro es de $60.000.
   Dato: Su utilidad esperada sin información adicional, suponiendo que ud. hubiera decidido contratar este seguro, es EU(**w**)= 14,2103 útiles.

e) Dada la situación descrita en (d), ¿estaría ud. dispuesto a pagar **más** por información perfecta con respecto a la gravedad del choque? (Sí o no y porqué)

Solución

d) Máximo dispuesto a pagar por información perfecta (M)

En las páginas previas se encontró que el máximo que ud. estaría dispuesto a pagar por el seguro es $63.539. La compañía de seguros está cobrando $60.000 por el seguro, por lo que la **decisión óptima sin información adicional** (antes de consultar al adivino) **es comprar el seguro**. La utilidad esperada (que es igual a la utilidad "a secas" puesto que el seguro elimina la incertidumbre) en este caso es

$$EU(w) = \ln(1.550.000-1.1S) = \ln(1.550.000-66.000) = 14{,}2103 \text{ útiles}$$

El sistema de información que ud. va a consultar cuesta $M, debe pagarse por adelantado y consiste en dos señales:

y_1: el adivino dice que ud. chocará (significa que es seguro que **no** chocará)
y_2: el adivino dice que ud. no chocará (significa que es seguro que **sí** chocará)

Los estados de la naturaleza son

s_1: ud. no choca
s_2: ud. choca

Así se obtiene:

$p(y_1) \ = \pi_1 = \ 0{,}9$
$p(y_2) \ = \pi_2 = \ 0{,}1$
$P(s_1|y_1) = \ 1$
$P(s_2|y_2) = \ 1$

Decisión Optima dado y_1:

Dado que el adivino dice que ud. chocará, es seguro que ud. no lo hará. Dado esto, su utilidad esperada será $E(U|y_1)$ = ln(1.550.000-1.1(S+M)) donde S=0 (no se asegura) o S=$60.000, por lo tanto el óptimo es **no asegurarse**. Así la utilidad esperada pasa a ser $E(U|y1)$ = ln(1.550.000-1,1M)

Decisión Optima dado y_2:

Aquí se debe evaluar la utilidad esperada con las probabilidades revisadas derivada de la decisión de asegurarse y de la decisión de no asegurarse. Recuerde que dado y_2, es seguro que ud. chocará, pero no sabe si será leve (prob.=0,3) o grave (prob.=0,7).

Sin seguro: $E(U|y_2)$ = 0,3 ln(550.000-1,1M) + 0,7 ln(1.250.000-1,1M)

Con seguro: $E(U|y_2)$ = ln(1.550.000-1,1(S+M)) = ln(1.484.000-1,1M)

Claramente, dada la señal y2 conviene asegurarse.

Resumiendo, la **estrategia** óptima es no asegurarse si se recibe la señal y_1 y asegurarse si se recibe la señal y_2. Ahora se calcula la utilidad esperada bajo información perfecta de costo **M**.

Utilidad Esperada con Sistema de Información Perfecto

$$E^{Y}U = p(y_1)\max_{\{d\}}E(U|y_1) + p(y_2)\max_{\{d\}}E(U|y_2)$$

$$E^{Y}U = 0{,}9 \ln(1.550.000-1{,}1M) + 0{,}1 \ln(1.484.000-1.1M)$$

El máximo que se estaría dispuesto a pagar es una cantidad que produzca indiferencia entre comprar y no comprar la información:

EU(sin información) = $E^{Y}U$.

Así puede obtenerse M:

$$14{,}2103 = 0{,}9 \ln(1.550.000-1{,}1M) + 0{,}1 \ln(1.484.000-1{,}1M)$$

Por "tanteo" se obtiene M=$53.812 y éste es el valor que **ud.** le asigna a la información perfecta.

e) Máximo dispuesto a pagar por información adicional

Dado lo anterior, ¿estaría ud. dispuesto a pagar aún más por conocer la gravedad del choque? La respuesta es simplemente **no**, porque no haría cambiar su decisión.

Ejercicios Propuestos

1- Un inversionista posee una riqueza inicial de US$ 1.000 y debe decidir en qué acción colocar su dinero. El ha hecho una selección de lo que piensa son las mejores alternativas de inversión, éstas son: la empresa eléctrica "Corriente S.A.", la petrolera "Petróleus S.A." y la forestal "Papelón S.A.".

Las condiciones climáticas afectan fuertemente la rentabilidad de las acciones Corriente. Si hay sequía la rentabilidad anual será sólo de un 5%, si el año es de lluvias normales ésta será de un 7,5% y si es extremadamente lluvioso llega a un 9%. La probabilidad de sequía es 5% y la de tener un año muy lluvioso es 15%.

A su vez, Petróleus se ve fuertemente afectada por los cambios en el precio del petróleo internacional. Si éste sube a más de US$ 25 por barril la rentabilidad sería de un 10%, si está entre US$ 18 y US$ 25 la rentabilidad baja a un 7% y si el precio está bajo los US$ 18 alcanza a un 6%. La probabilidad de que el precio del barril sobrepase US$ 25 es de un 3% y de que sea menor a los US$ 18 es 8%.

En el rubro forestal se pueden dar varias posibilidades, tanto en el nivel de precios como en la calidad de la madera. Habrán precios buenos o malos y la calidad de la madera puede ser buena, regular o mala. Si el precio internacional es bueno las rentabilidades posibles son: 20% para madera buena, 10% para madera regular y un 5% para madera mala. Si el precio internacional es malo las rentabilidades serán de: 10% para madera buena, 5% para madera regular y -2% para madera mala. La probabilidad de obtener madera buena es de un 20% y de que salga mala de un 10%. Hay un 30% de posibilidades de obtener un buen precio para la madera este año.

(a) Determine qué acción le conviene comprar a este inversionista si tiene una función de utilidad $U(w) = w^{1/4}$, donde w representa la riqueza al final del año. (R: Invertir en acciones Corriente S.A., obtiene una utilidad esperada de 5,7273 útiles).

(b) ¿Qué rentabilidad cierta anual debería ofrecer un banco a este inversionista para que no compre acciones sino que coloque los US$ 1.000 en el banco? (R: 7,6%)

(c) ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar otro inversionista por información perfecta respecto a si el precio de la madera será bueno o malo? Suponga que está de acuerdo con las probabilidades y rentabilidades estimadas anteriormente y que la función de utilidad del nuevo inversionista es U(w)=w. Suponga que cuenta con la misma riqueza inicial de US$ 1.000. (R: US$ 11,7/1,076 = US$ 10,87).

Hay un tercer inversionista que analiza la posibilidad de invertir en acciones Corriente o en bonos que rinden una tasa anual del 8%. La función de utilidad es U(w)=ln(w), donde w es la riqueza final. (Suponga que también tiene una riqueza inicial de US$ 1.000.)

(d) ¿Qué decisión le conviene tomar? (R: Bonos).

(e) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por información perfecta para conocer las condiciones del tiempo durante el próximo año este tercer inversionista?
(R: US$ 1,3834).

(f) La oficina meteorológica de la ciudad puede entregar datos respecto a cómo será el clima durante el próximo año. Históricamente los años de sequía habían sido pronosticados correctamente un 80% de las veces, los años con lluvia normal un 90% y los muy lluviosos un 95% de las veces. Además se sabe que un 5% de los años secos se pronosticaron como muy lluviosos; un 8% de los años con lluvia normal se pronosticaron como muy lluviosos. Por último, un 3% de las veces se pronosticó sequía y resultaron ser años lluviosos. Si la oficina meteorológica cobra US$ 1 por esta información, ¿le conviene comprarla? (R: No, ya que $E^{Y}U = 6{,}9818$ útiles < EU = 6,9837 útiles).

2- La funeraria "El Occiso Vive Ltda." se encuentra en la siguiente disyuntiva: seguir fabricando ataúdes o cambiar de giro y construir y administrar asilos para ancianos. Sus ganancias se ven fuertemente influenciadas por la tasa de mortalidad anual. Cada ataúd le reporta una utilidad de $ 10 y al año vende en promedio 100 ataúdes, pero por cada uno que no pueda vender hay una pérdida unitaria de $ 10. La probabilidad de que los venda todos es 90% y de que venda 90 es 10% (éstas son las ventas más probables). El negocio del asilo le permite obtener una utilidad neta anual de $ 880. La directora del cementerio, doña "Peladita", tiene sus estadísticas respecto del pronóstico de la mortalidad histórica. Estos resultan ser bastante confiables ya que el 95% de las veces le ha predicho correctamente que la tasa será alta y un 80% que será baja.

El dueño de la funeraria no sabe si dedicarse a los muertos o a los vivos.

(a) Se le pide a usted hacer un análisis cuidadoso para aconsejarle si cambiar o no de giro y ver cuánto estaría dispuesto a pagar por información perfecta y por la muestral. El dueño es indiferente al riesgo.
(R: Seguir con el negocio de la funeraria; VEIP = $ 8 ; VEIM = $ 1).

(b) ¿Qué pasaría si el asilo entregara una utilidad de $ 850?
(R: El sistema de información no tendría valor).

(Para hacer el ejercicio siguiente se requiere un conocimiento básico de la distribución normal estándar).

3- Un estudio hidrológico determinó que las lluvias anuales en Copiapó tienen una distribución normal con media (μ) de 87 mm. y una desviación estándar (s) de 12 mm. Los agricultores de la zona clasifican al año como normal si llueve por lo menos la media menos s. Un año con lluvia normal les produce una utilidad de US$ 5.000 por hectárea y con lluvia inferior a lo normal una utilidad de sólo US$ 2.000 por hectárea. (Suponga indiferencia frente al riesgo).

(a) ¿Cuál es la utilidad esperada para los agricultores de Copiapó? (R: US$ 4.524)

A los agricultores se les presenta otra alternativa de siembra este año. La nueva variedad requiere de muy poca agua para su subsistencia por lo que es totalmente seguro que no tendrá problemas por el nivel de agua caída en la zona. La hectárea deja una utilidad de US$ 4.300 al año.

(b) ¿Cuánto estarían dispuesto a pagar por información perfecta acerca de la lluvia para el próximo año? (R: US$ 365)
(c) Los campesinos de la zona hacen sus pronósticos de lluvia todos los años. Un 15% de las veces no aciertan al pronosticar un año normal y un 6% se equivocan respecto de un año bajo lo normal. ¿Cuánto estarían dispuestos a pagar por la información que entregarán para el próximo año? (R: US$ 255)

(Indicación: Se requiere usar las tablas de la distribución normal)

4- El conocido hombre de negocios Mac Pródigo debe encontrar a su tacaño primo Mac Mísero para proponerle un estupendo negocio. Para esto le pide a su sobrino Mac Donaldo que realice el viaje, ofreciéndole US$ 6.000 si encuentra a Mac Mísero y logra concretar el negocio. Mac Donaldo deberá pagarse el viaje que cuesta US$ 450, pero sabe que hay una posibilidad del 60% de que Mísero salga de la ciudad y no lo encuentre (es un hombre muy ocupado y escurridizo). Si lo encuentra, estima que tiene una probabilidad del 30% para convencerlo a concretar el negocio con Pródigo.

(a) Dibuje un árbol de decisión para Mac Donaldo y diga si le conviene viajar.(Suponga que la función de utilidad de Mac Donaldo es U(W) = W)
(b) Lo único que quiere saber Donaldo es si Mísero estará o no. Donaldo está dispuesto a pagar por esta información, ¿cuánto cree usted que es lo máximo que estaría dispuesto a pagar?
(c) Mac Donaldo está pensando en llamar a la secretaria de Mísero y preguntarle si acaso estará o no. La llamada cuesta US$ 100. Donaldo estima que si la secretaria dice que Mísero estará hay una posibilidad del 70% de que así suceda y si dice que no estará la posibilidad de que así resulte es de 80%. Además cree que la secretaria dirá que no encontrará a Donaldo con una probabilidad del 60%. ¿Le conviene llamar? (R: No; VEIM = US$ 54)
(d) Conteste las preguntas (a) y (b) suponiendo que Mac Donaldo tiene una función de utilidad de U(W) = ln(W) y además posee una riqueza inicial de US$ 1.000. (R: (a) No viaja, EU=6,9078; (b) VEIP=US$ 49,76)

5- INVER LTDA. es indiferente al riesgo y dispone hoy de un excedente de caja que asciende a $ 500.000. INVER está estudiando dos alternativas para el uso de estos fondos:

<u>ALTERNATIVA "RACUMIN"</u>
Invertir en un bono de RACUMIN S.A. (su precio actual es de $ 500.000). Este tiene una vida de un año, al cabo del cual promete devolver el capital invertido más un 37,5% de interés total. Sin embargo, dada la situación actual de la empresa, se estima que existe un

20% de probabilidad de que RACUMIN quiebre, en cuyo caso no se recibiría pago alguno.

ALTERNATIVA "TESORERÍA"
Invertir en un bono de la Tesorería General de la República (su precio actual es de \$500.000). Este promete pagar un 10% de interés (probabilidad de quiebra = 0) en cada uno de los años de vida restantes del bono. Dado que INVER contempla una inversión por un año solamente, ésta tendría que vender el bono a su valor de mercado luego de recibir los intereses, al cabo del primer año.
Se estima que hay un 90% de probabilidad de que el precio de mercado sea de \$ 500.000, pero hay un 5% de probabilidad de que éste sea mayor en \$ 20.000 y la misma probabilidad de que sea menor en \$ 20.000.

Preguntas:

(a) ¿Cuál es el retorno (interés) esperado del bono RACUMIN ?(R: 10%)
(b) ¿Cuál es el precio esperado del bono de Tesorería al final del primer año (excluyendo los intereses)? (R: \$ 500.000)
(c) Explique qué alternativa recomendaría ud. a INVER.(R: Indiferente)
(d) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta con respecto a los bonos de Tesorería? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar hoy por ella?
(R: $VEIP_{tesorería}$=\$ 1.000; hoy pagaría \$ 909,1)
(e) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta con respecto a los bonos de RACUMIN solamente?
(R: $VEIP_{racumín}$= \$ 110.000; equivale hoy día a \$ 100.000)
(f) Suponiendo información perfecta con respecto a los bonos RACUMIN, ¿cuánto más estaría dispuesto a pagar dentro de un año por información perfecta en relación a los bonos de Tesorería?(R: \$ 0)

Suponga que ud., como asesor de INVER, puede contratar una empresa consultora que clasifica los bonos como riesgosos (R) y no riesgosos (NR). La historia muestra que un 65% de los bonos emitidos por empresas como RACUMIN son clasificados en la segunda categoría. La empresa consultora predice "no pago" cuando el bono es de la categoría R y predice "pago" con la otra clasificación. Ambas predicciones son correctas el 80% de las veces.

(g) ¿Cuánto es el máximo que estaría dispuesto a pagar hoy por la asesoría de la empresa consultora?(R: \$ 0)

6- Swiza es un mundo donde todos los inversionistas son neutrales frente al riesgo (es un país neutral), donde hay sólo dos períodos (t=0 y t=1) y tres estados de la naturaleza para t=1. Los swizos (habitantes de Swiza) pueden invertir sólo en acciones. La siguiente es la matriz de pagos para dos de dichas acciones:

Pagos en t=1

	Estado 1	Estado 2	Estado 3
Acción 1	0	33	66
Acción 2	66	33	0

En este mundo, a todos los activos se les exige una rentabilidad esperada del 10%.

(a) Suponiendo expectativas homogéneas y que la probabilidad de ocurrencia de todos los estados es la misma, ¿a qué precios deberían venderse las acciones (en t=0)? (R: P_1=\$33; P_2=\$33)

Ehl Swizo, un habitante de Swiza, ha logrado establecer un sistema de información en base a información absolutamente desconocida por el mercado (privada), que entregará una señal en breves instantes más ($t=0^+$), con la siguiente estructura de información:

	Señal 1	Señal 2
Estado 1	0	1
Estado 2	1	0
Estado 3	1	0

Las probabilidades a priori de Ehl son iguales a las del mercado.

(b) Si Ehl (privadamente) recibe la señal 1, ¿qué estrategia de inversión le brindaría una rentabilidad esperada "sobrenormal"? ¿y si recibe la señal 2?.
(R: Si recibe la señal 1 le conviene la acción 1 con una rentabilidad del 65% y si recibe la señal 2 entonces le conviene la acción 2 con una rentabilidad del 120%)

(c) Suponga ahora que el mercado como un todo tiene el sistema de información que antes tenía sólo Ehl, y suponga que el mercado reacciona en forma eficiente ante nueva información. ¿Cuáles serían los nuevos precios de equilibrio para las acciones 1 y 2, dadas las señales 1 ó 2 (en $t=0^+$)?
(R: Dada la señal 1 P_1=\$45 y P_2=\$15; dada la señal 2 P_1=\$0 y P_2=\$60)

(d) Dado que estamos en t=0 y que se cumplen los supuestos de (c), ¿cúal es el valor de este sistema de información para un inversionista cualquiera?.
(R: \$ 0)

VI COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En los capítulos precedentes se han elaborado y explicado conceptos que constituyen la base para comprender y aplicar las teorías financieras y de toma de decisiones. Dado que el objetivo de toda teoría y los modelos asociados a éstas es permitir una mejor comprensión de una parte específica del entorno que nos rodea, entender los conceptos presentados en este trabajo constituye un primer paso en esa dirección: permiten entender mejor el entorno económico.

Como un tronco común que une y ordena todos los conceptos anteriores, se ha presentado un marco conceptual (modelo de comportamiento y enfoque para resolver problemas) para un proceso decisional simplificado con información adicional. Es importante terminar este trabajo destacando las virtudes y limitaciones tanto teóricas como prácticas de este enfoque.

VI.1 Fortalezas

Desde un punto de vista teórico, la mayor virtud que tiene modelar un proceso decisional como un sistema compuesto por un conjunto de decisiones factibles, un conjunto de estados de la naturaleza, creencias asociadas a los estados y una función objetivo que se pretende maximizar, es la **generalidad** del enfoque. **En principio**, cualquier problema decisional puede plantearse en estos términos y puede ser resuelto con la ayuda de árboles de decisión. También está claro que todos los elementos que intervienen en un proceso de decisión perfectamente especificado intervienen en cualquier decisión, aunque con frecuencia sea difícil distinguir unos de otros con claridad (separar las creencias del grado de aversión al riesgo, por ejemplo). Los valores, juicios y creencias de una persona son relevantes en los problemas de decisión, por lo que se hace necesario considerarlos lo más explícitamente posible al resolver dichos problemas. También es lógico suponer que se toman decisiones con el fin de alcanzar algún (os) objetivo (s) determinado (s), que en análisis se resume en la maximización de **una** función de utilidad esperada.

Al intentar usar en la práctica un análisis de decisión como el aquí planteado, surgen una serie de limitaciones que serán mencionandas más adelante, pero lo importante es que, aunque el proceso de decisión no pueda ser especificado completamente, este esquema de análisis facilita la estructuración de los problemas en forma lógica y coherente. Esto permite formarse una impresión acerca de la importancia relativa de cada uno de los elementos que intervienen en la decisión.

Desde el punto de vista de la teoría de decisiones, por lo tanto, el modelo decisional presentado aquí parece ser un punto de partida adecuado.

La Teoría de Finanzas, por su parte, normalmente inicia su análisis suponiendo que los individuos se comportan en forma "racional" y, en este contexto, "racionalidad" se entiende como un comportamiento individual que **tiende** a maximizar una función objetivo determinada. Usualmente, dicha función objetivo es la utilidad esperada. La gran virtud teórica de utilizar la maximización de utilidad esperada como supuesto de comportamiento, es que se combinan las actitudes frente al riesgo con las creencias de las personas para resumir en un solo número los resultados de las decisiones. Las creencias a su vez se modelan con el rigor propio de la teoría de probabilidades "objetivas", lo que permite utilizar todas las técnicas estadísticas disponibles para modelar el comportamiento. Partiendo de la premisa anterior, la Teoría de Finanzas ha logrado desarrollar explicaciones para el comportamiento **de los mercados** bajo incertidumbre, las que, ya sea con o sin la evidencia suficiente, son generalmente aceptadas. Desde este punto de vista, la importancia del esquema planteado en este trabajo radica en su capacidad de explicar el comportamiento "agregado" o "promedio" en los mercados y no en su capacidad de explicar el comportamiento separado de cada uno de los agentes que participan en los mercados.

El modelo decisional descrito fue utilizado para obtener una expresión para el valor de la información. Desde un punto de vista teórico, es interesante demostrar cómo la información puede llegar a tener un valor cuantificable en alguna unidad monetaria. En un proceso de toma de decisiones con información adicional, se desarrolla una **estrategia**: se tienen preparadas con anticipación las decisiones más convenientes **en función** de la información que se reciba. Aquí hay un punto que es importante de destacar. En general, el valor de la información no será independiente de **quién** diseñe la estrategia en base a dicha información. En efecto, los "buenos" administradores serán capaces de diseñar "mejores" estrategias basadas en la nueva información que van recibiendo a través del tiempo. En el otro extremo, un administrador incapaz de diseñar una estrategia rentable en base a la información no le asignará valor alguno a ésta. Estos ejemplos permiten apreciar con qué facilidad se confunden el valor de la información con la capacidad gerencial. Puede incluso concluirse que ambos conceptos representan lo mismo.

El modelo decisional presentado aquí puede ser utilizado para valorizar estrategias dinámicas de decisión, en las que se van eligiendo las mejores decisiones entre el conjunto de decisiones factibles en función de los eventos relevantes que ocurren a través del tiempo (o, lo que es lo mismo, en función de la información que se recibe a través del tiempo). Por lo tanto, teóricamente es posible utilizar el esquema de análisis presentado aquí para cuantificar el valor de la gerencia de una empresa.

VI.2 Limitaciones

Una de las principales limitaciones teóricas del análisis presentado en los capítulos anteriores puede ser ilustrada mediante un ejemplo:

Suponga que usted tiene la alternativa de recibir como regalo 10 kilos de frambuesas o, alternativamente, 10 kilos de manzanas. Suponga además que usted detesta las frambuesas, pues le producen una alergia insoportable, y le fascinan las manzanas. Frente a estas alternativas, ¿cuál escogería usted?

La respuesta parece obvia pero... ¡depende!

En efecto, suponga que el precio del kilo de manzanas es $70 y el precio del kilo de frambuesas es $1.000 y que existe la posibilidad de transar en el mercado de la fruta. Con esta información es claro que sería conveniente aceptar las frambuesas y venderlas, puesto que así se maximiza la cantidad de manzanas que pueden comprarse.

Del ejemplo se desprende que una de las limitaciones del análisis presentado con anterioridad es que **considera al individuo aislado de los mercados**. Se evalúan los resultados de las decisiones en la función de utilidad del individuo (al igual que cuando se juzga la conveniencia de aceptar las manzanas o las frambuesas). Un individuo con una gran aversión al riesgo podría aceptar un proyecto **a pesar** de ser éste muy riesgoso, puesto que si existen mercados de capitales puede compartir los riesgos con otros inversionistas e incluso eliminarlos. Si existen mercados de capitales lo suficientemente "completos", la regla de decisión basada en la maximización de la utilidad esperada se transforma en, simplemente, maximización de la riqueza presente. Si siempre se toman las decisiones que maximizan la riqueza presente, el inversionista se asegura de que logrará el máximo de recursos disponibles para ser destinados a los fines que se estimen convenientes.

Otra limitación del proceso de decisión descrito viene dada por su capacidad para describir el comportamiento **individual** frente a problemas de decisión. El comportamiento espontáneo de las personas puede no satisfacer los postulados de racionalidad utilizados por el modelo. En parte esto puede deberse a que la formalización de hasta los problemas más simples puede resultar extremadamente compleja.

Por su parte, la utilidad práctica del modelo como herramienta decisional es limitada. Es efectivo que el modelo permite ordenar las ideas y sistematizar un proceso decisional, pero si se desea llevarlo a la práctica en su totalidad, como modelo específico para resolver problemas, surgen los siguientes inconvenientes:

- No se sabe cómo "calibrar" las probabilidades subjetivas sin incurrir en sesgos que invaliden el procedimiento. Tampoco es obvio que éstas cumplirán con los postulados de racionalidad.
- No está claro cómo obtener las funciones de utilidad individuales. Incluso si se pudiera, tampoco hay garantía alguna de que éstas sean estables a través del tiempo.
- La naturaleza de las decisiones puede ser tan compleja que haga prácticamente imposible reducirlas al esquema de análisis presentado.
- Determinar los estados de la naturaleza relevantes es, en general, difícil. Asociar una consecuencia a cada estado puede serlo aún más.

VI.3 Conclusiones

En base a la discusión anterior, puede concluirse que el modelo es de utilidad práctica limitada por las dificultades que acarrea reducir la realidad para adaptarla al modelo. Sin embargo, sí es útil para plantear y analizar problemas en forma ordenada y coherente, especialmente si el análisis que se pretende hacer es de tipo cualitativo.

Las mayores virtudes del modelo se encuentran en el plano teórico, porque la generalidad el enfoque se presta para modelar un sinnúmero de situaciones. El tipo de comportamiento descrito por el modelo ha sido la base del desarrollo de la Teoría de Finanzas, la que ha tenido un grado no despreciable de éxito en su propósito de describir el comportamiento de los mercados de capitales.

VII BIBLIOGRAFÍA

[1] Chernoff, Herman and Lincoln Moses. *Elementary Decision Theory* . John Wiley & Sons, Inc. New York (1970).

[2] Copeland, Thomas E. y J. Fred Weston. *Financial Theory and Corporate Policy* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1980).

[3] Demski, J.S. *Information Analysis* . Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Massachusetts (1972).

[4] Dillon, John. "An Expository Review of Bernoullian Decision Theory". *Review of Marketing and Agricultural Economics*, Vol. 39, Nº1, March, 1971. Division of Marketing and Agricultural Economics. New South Wales Department of Agriculture.

[5] Dreze, Jacques. "Axiomatic Theories of Choice, Cardinal Utility and Subjective Probability: a Review". Reimpreso en *Uncertainty in Economics*, editado por Peter Diamond y Michael Rothschild; Academic Press, Inc. New York (1978).

[6] Foster, George. *Financial Statement Analysis.* Prentice Hall (1980)

[7] Lev, Baruch. *Financial Statement Analysis.: A New Approach.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974)

[8] Meyer, Paul. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.* Fondo Educativo Interamericano (1973)

[9] Walker H., Eduardo. "Introducción a la Hipótesis de Mercados Eficientes". *Trabajo Docente* 190-02, Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile.

ANEXO

NOCIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD, VALOR ESPERADO Y EL TEOREMA DE BAYES.

(a) Definiciones básicas.

(i) Espacio muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento *E*. Usualmente se designa a este conjunto como *S*.

(ii) Suceso o Evento: es un conjunto de resultados posibles respecto de un espacio muestral *S* asociado con un experimento *E*.. Es un subconjunto de *S* .

(iii) Dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos. Se expresa esto escribiéndolo como A Ω B = Ø , o bien A,B = Ø.

(b) Frecuencia relativa.

Se repite n veces un experimento *E* y sean A y B dos sucesos asociados con *E*. Sean n_a y n_b el número respectivo de veces que el suceso A y el suceso B ocurrieron en las n repeticiones.

Definición: $f_a = n_a/n$ se llama la frecuencia relativa del suceso A en las n repeticiones de *E*.. La frecuencia relativa f_a tiene las siguientes propiedades que son fácilmente verificables:

(1) $0 \leq f_a \leq 1$.

(2) $f_a = 1$ sí y sólo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.

(3) $f_a = 0$ sí y sólo si A nunca ocurre en las n repeticiones.

(4) Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente y si f_{AUB} es la frecuencia relativa asociada al suceso AUB, entonces $f_{AUB} = f_a + f_b$.

(5) f_a basada en las repeticiones del experimento *E* y considerada como una función de n "converge" (cuando n_> ∞) en cierto sentido probabilístico a p(A).

(c) Nociones básicas de probabilidad.

Definición: Sea E un experimento y S un espacio muestral asociado con E. Con cada suceso A asociamos un número real, designado por p(A) y es llamado la probabilidad de que A satisface las siguientes propiedades:

(1) $0 \leq p(A) \leq 1$.
(2) $p(S) = 1$.
(3) Si A y B son sucesos que se excluyen mutuamente, $p(AUB) = p(A) + p(B)$.
(4) Si $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(An) + ...$$

Teoremas:

(1) Si Ø es el conjunto vacío entonces

$$p(Ø) = 0.$$

(2) Si A^c es el conjunto complementario de A entonces

$$p(A) = 1 - p(A^c).$$

(3) Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces

$$p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A,B)$$

(4) Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera entonces

$$p(AUBUC) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A,B) - p(A,C) - p(B,C) + p(A,B,C)$$

(5) Si A es un subconjunto de B entonces

$$p(A) \leq p(B)$$

(6) Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes entonces

$$p(A|B) = 0$$

(7) Si A y B son dos sucesos independientes entonces

$$p(A|B) = p(A)$$

(d) Teorema de Bayes.

Antes de explicar el teorema de Bayes es necesario definir y explicar la probabilidad condicional y el teorema de la multiplicación.

Si $p(B|A)$ es la probabilidad condicional del suceso B dado que A ha ocurrido entonces

$$p(B|A) = \frac{p(A,B)}{p(A)}, \qquad \text{dado que } p(A) > 0.$$

Teorema de la multiplicación:

$$p(A_1,A_2, \ldots , A_n) = p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1,A_2) \ldots p(A_n|A_1,A_2, \ldots A_{n-1})$$

Definición: Decimos que los sucesos $B_1, B_2, \ldots , B_k$ representan una partición del espacio muestral S si:

(a) $(B_i , B_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$

(b) $\bigcup_{i=1}^{K} B_i = S$

(c) $p(B_i) > 0$ para todo i.

Es decir, cuando se efectúa el experimento E, ocurre uno y sólo uno de los sucesos B_i.

Sea A algún suceso con respecto a S y sea $B_1, B_2, \ldots B_k$ una partición de S, luego A se puede escribir como:

$$A = (A,B_1) \cup (A,B_2) \cup \ldots (A,B_k)$$

Todos los sucesos A,B_i son mutuamente excluyentes, luego podemos obtener $p(A)$ como:

$$p(A) = p(A,B_1) + p(A,B_2) + \ldots p(A,B_k)$$

Además, se sabe que $p(A,B_i) = p(A|B_i)p(B_i) = p(B_i|A)p(A)$, lo que si se reemplaza en la ecuación anterior se obtiene el teorema de la probabilidad total:

$$p(A) = p(A|B_1)p(B_1) + p(A|B_2)p(B_2) + ...\ p(A|B_k)p(B_k)$$

luego

$$p(A) = \sum_{j=1}^{k} p(A|B_j)p(B_j) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{p(B_i|A)}$$

Despejando $p(B_i|A)$ resulta:

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} p(A|B_j)p(B_j)}, \qquad i=1,2,...,k.$$

Esta ecuación se conoce como el Teorema de Bayes.

(e) Valor Esperado.

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$. Sea $p(X_i) = P(X=X_i)$, i=1,2,...n. El valor esperado de X (esperanza matemática de X), denotada por E(X), se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i p(X_i)$$

Ejemplo: Calcular el valor esperado del número de puntos al lanzar un dado una vez.

Sea X el número de puntos que salen.

Luego,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i p(X_i),$$

donde $X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=4, X_5=5, X_6=6$ y $p(X_i) = \frac{1}{6}$.

Finalmente

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5\ .$$