

# Taller: Aversión al Riesgo

Natalia da Silva

2024-02-14

# Taller

1. Planteo de objetivos del taller y de la clase teórico-práctica;
2. Lista de ejercicios a proponer para la clase. Discusión sobre la forma de abordar el tema y exponerlo frente a los estudiantes
3. Análisis de las principales dificultades potenciales y el planteo y fundamentación de la solución propuesta.

# UC Matemática financiera (curso actual)

- ▶ Interés y Descuento.
- ▶ Rentas.
- ▶ Inversiones
- ▶ Bonos
- ▶ Nociones de Cálculo Actuarial.
- ▶ Análisis de casos de la realidad cotidiana.

# Propuesta

Incorporar incertidumbre (*riesgo*) en la evaluación de inversiones.

## Temas nuevos:

- ▶ Función de utilidad y decisiones en contexto de incertidumbre
- ▶ Ganancia esperada y utilidad esperada
- ▶ Aversión al riesgo, definición y medidas de aversión al riesgo
- ▶ Renta equivalente

Necesitaremos *Introducción a la Estadística* como previa.

# Motivación

## Evaluar inversiones con VPN

Una inversión se representa con un flujo futuro de pagos,

$$VPN = I_0 + \sum_{k=1}^n I_k(1+i)^{-k}$$

- ▶ Conviene invertir si  $VPN > 0$
- ▶ Entre dos proyectos elegimos el que tiene mayor VPN
- ▶ ¿Cómo se modifica si no estamos seguros de los pagos?

## Ejemplo (muy) sencillo

Heredo un *chiringuito* en una playa del Este por un verano para vender buñuelos de algas.

Estado	Ganancia (VPN)	Probabilidad
Buen clima	\$100	.5
Mal clima	\$36	.5

$$GE = E(VPN) = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 36 = 68$$

Notar: no hay inversión inicial, hay 1 sólo período.

## Limitación de VPN

El criterio del VPN no considera el riesgo.

Consideremos un segundo proyecto: *vender el chiringuito por \$68*

- ▶ Ambos proyectos tienen la misma  $GE$
- ▶ ¿Somos indiferentes a que proyecto elegir ?

Lo que se observa es que hay **preferencia** por el proyecto de venta, ya que la ganancia es **libre de riesgo**. Misma ganancia esperada pero distinto riesgo.



# Aversión al Riesgo

## Definición y función de utilidad

Un agente (inversor) es **adverso al riesgo** cuando *prefiere* un ingreso con absoluta certeza en lugar de un ingreso riesgoso con igual valor esperado.

- ▶ Las preferencias de los agentes se miden con funciones de utilidad
- ▶ Los inversores buscan maximizar la *utilidad esperada*

Función de utilidad:  $u(w)$  concepto clave en Teoría Económica para ordenar preferencias de agentes (consumidores, inversores, empresas) y modelar la toma de decisiones

## Utilidad Esperada

En el ejemplo, supongamos que la utilidad se mide con la función:

$$u(w) = \sqrt{w}$$

Estado	Ganancia (VPN)	Probabilidad
Buen clima	\$100	.5
Mal clima	\$36	.5

$$\begin{aligned} UE &= E[U(VPN)] \\ &= \frac{1}{2} \times u(100) + \frac{1}{2} \times u(36) \\ &= \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

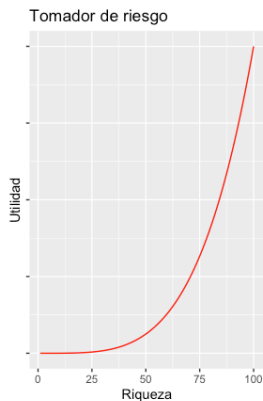
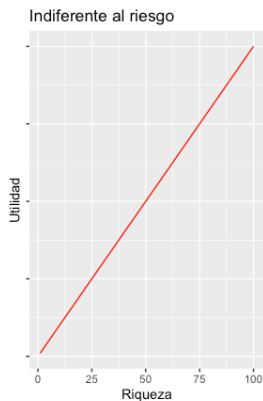
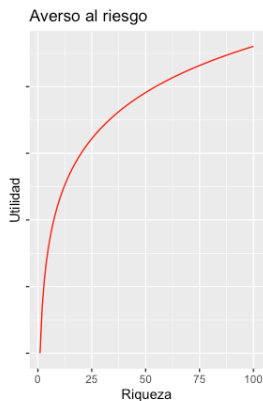
Sin embargo la utilidad de vender el chiringuito es  $u(68) \approx 8.25$

# Funciones de Utilidad

Mide la utilidad obtenida por un agente/consumidor en función de la riqueza/consumo de bienes. Suponiendo agentes racionales:

1. Las funciones de utilidad,  $u(w)$ , son crecientes  $u'(w) > 0$  a mayor riqueza mayor utilidad.
2. La utilidad crece con la riqueza a tasa:
  - ▶ Decreciente (adverso al riesgo),  $u''(w) > 0$
  - ▶ Constante (indiferente al riesgo),  $u''(w) = 0$
  - ▶ Creciente (tomador de riesgo),  $u''(w) < 0$

# Funciones de Utilidad



# Medidas de aversión al riesgo

- ▶ La aversión al riesgo depende de la curvatura de la función de utilidad
- ▶ Se usan dos medidas: el grado de aversión absoluta al riesgo (A) y el grado de aversión relativa al riesgo (R)

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

$$R(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}w$$

## Ganancia segura equivalente

¿Cuál es la ganancia libre de riesgo que tiene igual utilidad esperada que el ingreso riesgoso?

$w_q$  es el valor de ganancia/riqueza que verifica:

$$u(w_q) = E[u(w)]$$

► En el ejemplo:  $u(w_q) = E[u(w)] = 8$

$\sqrt{w_q} = 8$  entonces  $w_q = 64$

► Soy *indiferente* entre vender a 64 o obtener una ganancia esperada de 68 ya que tienen la misma utilidad esperada.

# Evaluación de inversiones bajo incertidumbre



# Microeconomía y Finanzas

Hay dos elementos fundamentales que distinguen la teoría microeconómica clásica de la Teoría de Finanzas: el elemento tiempo y el elemento incertidumbre

En lo anterior para introducir incertidumbre simplificamos el elemento tiempo. ¿Cómo es posible trabajar con ambos a la vez?

1. Diseñar escenarios con varios períodos y varios estados de la naturaleza.
  - ▶ El cálculo de probabilidades es más complejo
  - ▶ Usualmente se utilizan métodos de simulación
2. Asumir distribuciones de probabilidad para los componentes del VPN.

## VPN aleatorio

$$VPN = I_0 + \sum_{k=1}^n I_k (1+i)^{-k}$$

Si los pagos son normales, independientes e idénticamente distribuidos,  $I_k \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , entonces el VPN es una combinación lineal de normales independientes:

$$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$$

## Elección de inversiones bajo normalidad

- ▶ Normalidad de VPN:  $VPN = w \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ▶ Utilidad con aversión constante al riesgo:  $u(w) = -\exp^{-Aw}$

En estas condiciones podemos obtener la utilidad esperada de una inversión:

$$UE = E[-e^{-Aw}] = -e^{-A(\mu - A\sigma^2/2)}$$

## Comparar inversiones bajo incertidumbre

La **ganancia segura equivalente** se obtiene haciendo como

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

- ▶ Podemos comparar proyectos en condiciones de incertidumbre en base a  $w_q$ .
- ▶ Seleccionamos el proyecto con mayor  $w_q$ .
- ▶ En este caso la ecuación muestra el compromiso entre ganancia esperada y riesgo, inversores adversos al riesgo exigen mayores ganancias para compensar el riesgo.

# Ejercicios

## Ejercicio 1

Las siguientes son funciones de utilidad, identifique en cada caso a que tipo de preferencias frente al riesgo se corresponden, aversión al riesgo, tomador de riesgo o indiferente al riesgo

1.  $u(w) = -\exp^{-w}$
2.  $u(w) = a + bw$  con  $a$  y  $b$  constantes,  $b > 0$
3.  $u(w) = \log(w)$
4.  $u(w) = e^w$
5.  $u(w) = w^g$  con  $0 < g < 1$
6.  $u(w) = w^g$  con  $g > 1$
7.  $u(w) = a + bw + cw^2$  con  $b > 0$  y  $c > 0$

# Ejercicio 1

Hay que calcular en cada caso la derivada segunda y usar la definición de aversión al riesgo.

Posible problema que no recuerden como derivar y recordar la definición de aversión al riesgo.

## Ejercicio 2

Para las funciones de utilidad del Ejercicio 1 (sólo para 1, 3 y 7):

1. Calcule la medida de aversión al riesgo absoluto
2. Discuta la relación entre aversión al riesgo y la riqueza



## Ejercicio 2

Usar la definición de aversión al riesgo

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Analizar el resultado en función de  $w$ , ya hicieron las derivadas en la parte anterior.

Ver que les quede coherente con Ej. 1

## Ejercicio 3

Tenemos que decidir entre dos inversiones:

Inversión A que tiene tres posibles ganancias, que son de 6000, 4000 o 1000 con probabilidades de 0.3, 0.4 y 0.3, respectivamente.

Con la inversión B se puede perder 10.000 o ganar 20.000 o 7.000, con probabilidades respectivas de 0.5, 0.4 y 0.1.

Usamos la siguiente función de utilidad

$$u(w) = \log(w)$$

## Ejercicio 3

1. Obtenga la ganancia esperada de cada inversión.
2. Obtenga la utilidad esperada de cada inversión.
3. Decida que negocio es conveniente comparando las ganancias seguras de cada uno.

## Ejercicio 3

El foco es saber como calcular la ganancia esperada, utilidad esperada y ganancia segura. Posible problema no recordar como se calcula la esperanza.

Decidir en base a la ganancia segura.

## Ejercicio 4

$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$  y utilidad con aversión constante tal que  
 $u(w) = -e^{-Aw}$

1. Obtener la ganancia segura equivalente para 2 valores de A
2. Discutir la relación entre aversión al riesgo y ganancia segura equivalente

## Ejercicio 4

Básicamente es usar la fórmula presentada en clase para este caso

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

para dos valores distintos de A y ver la relación entre A y  $w_q$

Problema que no recuerden que vimos esto en clase.

## Ejercicio 5

$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$  y utilidad con aversión constante tal que  $u(w) = -e^{-Aw}$ , considerar dos inversiones Inversión 1:  $\mu_1 = 3000$   $\sigma^2 = 500$  Inversión 2:  $\mu_2 = 3500$   $\sigma^2 = 1600$   $A = 1$

1. Determinar que negocio es más conveniente
2. ¿Cuanto tendría que ser la ganancia esperada de 2 para ser conveniente ?
3. ¿Cómo cambia lo anterior si  $A = 10$ ?

## Ejercicio 5

Similar a lo anterior pero ahora hay que usar  $w_q$  para comparar inversiones y ver el efecto de cambios en la aversión al riesgo.



# Repositorio con Material

[https://github.com/natydasilva/Mat\\_financiera](https://github.com/natydasilva/Mat_financiera)

## Ejercicio 1, solución

Para cada función deberán calcular la derivada segunda y en base a ello definir la preferencia del agente

1.  $u(w) = -\exp^{-w}$

$$u''(w) = -e^{-w} < 0$$

*Averso al riesgo*

2.  $u(w) = a + bw$  con  $a$  y  $b$  constantes,  $b > 0$

$$u''(w) = 0$$

*Indiferente al riesgo*

3.  $u(w) = \log(w)$

$$u''(w) = \frac{-1}{w^2} < 0$$

*Averso al riesgo*

## Ejercicio 1, solución

4.  $u(w) = e^w$

$$u''(w) = e^w > 0$$

*Tomador de riesgo*

5.  $u(w) = w^g$  con  $0 < g < 1$

$$u''(w) = g(g-1)w^{(g-2)} < 0$$

*Averso al riesgo*

## Ejercicio 1, solución

6.  $u(w) = w^g$  con  $g > 1$

$$u''(w) = g(g-1)w^{(g-2)} > 0$$

*Tomador de riesgo*

7.  $u(w) = a + bw + cw^2$  con  $b > 0$  y  $c > 0$

$$u''(w) = 2c > 0$$

*Tomador de riesgo*

## Ejercicio 2, Solución

Calcule la medida de aversión al riesgo absoluto

$$1. A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = A$$

$$2. A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{1}{w}$$

$$3. A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{-2c}{b+2cw}$$

## Ejercicio 2, Solución

Discuta la relación entre aversión al riesgo y la riqueza

1. Exhibe una aversión al riesgo constante para todos los rangos de riqueza.
2. La aversión al riesgo disminuye a medida que aumenta la riqueza.
3. La aversión al riesgo aumenta a medida que aumenta la riqueza.

## Ejercicio 3, Solución

1. Obtenga la ganancia esperada de cada inversión

$$E(w_A) = 6000 * 0.3 + 4000 * 0.4 + 1000 * 0.3 = 3700$$

$$E(w_B) = -10000 * 0.5 + 20000 * 0.4 + 7000 * 0.1 = 3700$$

## Ejercicio 3, Solución

2. Obtenga la utilidad esperada de cada inversión

$$\begin{aligned} E(u(w_A)) &= \\ \log(6000) * 0.3 + \log(4000) * 0.4 + \log(1000) * 0.3 &= 5.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(u(w_B)) &= \\ -\log(10000) * 0.5 + \log(20000) * 0.4 + \log(7000) * 0.1 &= 0.241 \end{aligned}$$

3. Decida que negocio es conveniente comparando las ganancias seguras de cada uno. Invierte en A

►  $w_{qA} = e^{(5.92)} = 372$

►  $w_{qB} = e^{(0.241)} = 1.29$



## Ejercicio 4, Solución

1. Obtener la ganancia segura equivalente para 2 valores de A

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

- ▶ Si  $A = 1$  entonces  $w_q = \mu - \sigma^2$
- ▶ Si  $A = 4$  entonces  $w_q = \mu - 2\sigma^2$

## Ejercicio 5, Solución

1. Determinar que negocio es más conveniente

$$w_{q1} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3000 - 250 = 2750$$

$$w_{q2} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3500 - 800 = 2700$$

## Ejercicio 5, Solución

2. ¿Cuanto tendría que ser la ganancia esperada de la inversión 2 para ser conveniente?

Debería ser al menos 3550 para que  $w_{q2} > 2750$

## Ejercicio 5, Solución

3. ¿Cómo cambia lo anterior si  $A = 10$ ?

$$w_{q1} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3000 - 10 * 250 = 500$$

$$w_{q2} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3500 - 10 * 800 = -4500$$

La ganancia esperada de la inversión 2 debería ser al menos 9500 para que  $w_{q2} > 500$