Taller: Aversión al Riesgo

Natalia da Silva

2024-02-14

Taller

1. Planteo de objetivos del taller y de la clase teórico-práctica;
2. Lista de ejercicios a proponer para la clase. Discusión sobre la forma de abordar el tema y exponerlo frente a los estudiantes
3. Análisis de las principales dificultades potenciales y el planteo y fundamentación de la solución propuesta.

UC Matemática financiera (curso actual)

- Interés y Descuento.
- Rentas.
- Inversiones
- Bonos
- Nociones de Cálculo Actuarial.
- Análisis de casos de la realidad cotidiana.

Propuesta

Incorporar incertidumbre (*riesgo*) en la evaluación de inversiones.

Temas nuevos:

- Función de utilidad y decisiones en contexto de incertidumbre
- Ganancia esperada y utilidad esperada
- Aversión al riesgo, definición y medidas de aversión al riesgo
- Renta equivalente

Necesitaremos *Introducción a la Estadística* como previa.

Motivación

Evaluar inversiones con VPN

Una inversión se representa con un flujo futuro de pagos,

$$VPN = I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k (1+i)^{-k}$$

- Conviene invertir si $VPN > 0$
- Entre dos proyectos elegimos el que tiene mayor VPN
- ¿Cómo se modifica si no estamos seguros de los pagos?

Ejemplo (muy) sencillo

Heredo un *chiringuito* en una playa del Este por un verano para vender buñuelos de algas.

Estado	Ganancia (VPN)	Probabilidad
Buen clima	\$100	.5
Mal clima	\$36	.5

$$GE = E(VPN) = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 36 = 68$$

Notar: no hay inversión inicial, hay 1 sólo período.

Limitación de VPN

El criterio del VPN no considera el riesgo.

Consideremos un segundo proyecto: *vender el chiringuito por $68*

- Ambos proyectos tienen la misma GE
- ¿Somos indiferentes a que proyecto elegir ?

Lo que se observa es que hay **preferencia** por el proyecto de venta, ya que la ganancia es **libre de riesgo**. Misma ganancia esperada pero distinto riesgo.

Aversión al Riesgo

Definición y función de utilidad

Un agente (inversor) es **adverso al riesgo** cuando *prefiere* un ingreso con absoluta certeza en lugar de un ingreso riesgoso con igual valor esperado.

- Las preferencias de los agentes se miden con funciones de utilidad
- Los inversores buscan maximizar la *utilidad esperada*

Función de utilidad: $u(w)$ concepto clave en Teoría Económica para ordenar preferencias de agentes (consumidores, inversores, empresas) y modelar la toma de decisiones

Utilidad Esperada

En el ejemplo, supongamos que la utilidad se mide con la función: $u(w) = \sqrt{w}$

Estado	Ganancia (VPN)	Probabilidad
Buen clima	\$100	.5
Mal clima	\$36	.5

$$\begin{aligned} UE &= E[U(VPN)] \\ &= \tfrac{1}{2} \times u(100) + \tfrac{1}{2} \times u(36) \\ &= \tfrac{1}{2} \times 10 + \tfrac{1}{2} \times 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Sin embargo la utilidad de vender el chiringuito es $u(68) \approx 8.25$

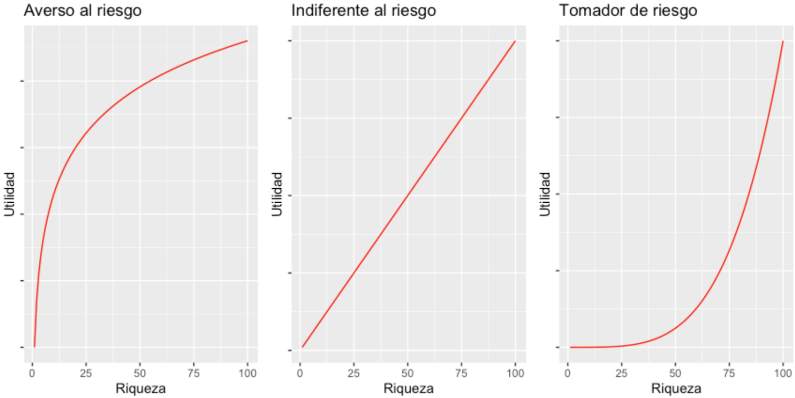
Funciones de Utilidad

Mide la utilidad obtenida por un agente/consumidor en función de la riqueza/consumo de bienes. Suponiendo agentes racionales:

1. Las funciones de utilidad, $u(w)$, son crecientes $u^{'}(w) > 0$ a mayor riqueza mayor utilidad.
2. La utilidad crece con la riqueza a tasa:

- Decreciente (adverso al riesgo), $u^{''}(w) < 0$
- Constate (indiferente al riesgo), $u^{''}(w) = 0$
- Creciente (tomador de riesgo), $u^{''}(w) > 0$

Funciones de Utilidad



Medidas de aversión al riesgo

- La aversión al riesgo depende de la curvatura de la función de utilidad
- Se usan dos medidas: el grado de aversión absoluta al riesgo (A) y el grado de aversión relativa al riesgo (R)

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

$$R(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}w$$

Ganancia segura equivalente

¿Cuál es la ganancia libre de riesgo que tiene igual utilidad esperada que el ingreso riesgoso?

w_q es el valor de ganancia/riqueza que verifica:

$$u(w_q) = E[u(w)]$$

- En el ejemplo: $u(w_q) = E[u(w)] = 8$

$\sqrt(w_q) = 8$ entonces $w_q = 64$

- Soy *indiferente* entre vender a 64 o obtener una ganancia esperada de 68 ya que tienen la misma utilidad esperada.

Evaluación de inversiones bajo incertidumbre

Microeconomía y Finanzas

Hay dos elementos fundamentales que distinguen la teoría microeconómica clásica de la Teoría de Finanzas: el elemento tiempo y el elemento incertidumbre

En lo anterior para introducir incertidumbre simplificamos el elemento tiempo. ¿Cómo es posible trabajar con ambos a la vez?

1. Diseñar escenarios con varios períodos y varios estados de la naturaleza.
   - El cálculo de probabilidades es más complejo
   - Usualmente se utilizan métodos de simulación
2. Asumir distribuciones de probabilidad para los componentes del VPN.

VPN aleatorio

$$VPN = I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k (1+i)^{-k}$$

Si los pagos son normales, independientes e idénticamente distribuidos, $I_k \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, entonces el VPN es una combinación lineal de normales independientes:

$$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Elección de inversiones bajo normalidad

- Normalidad de VPN: $VPN = w \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Utilidad con aversión constante al riesgo: $u(w) = -\exp^{-Aw}$

En estas condiciones podemos obtener la utilidad esperada de una inversión:

$$UE = E[-e^{-Aw}] = -e^{-A(\mu - A\sigma^2/2)}$$

Comparar inversiones bajo incertidumbre

La **ganancia segura equivalente** se obtiene haciendo como

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

- Podemos comparar proyectos en condiciones de incertidumbre en base a w_q.
- Seleccionamos el proyecto con mayor w_q.
- En este caso la ecuación muestra el compromiso entre ganancia esperada y riesgo, inversores adversos al riesgo exigen mayores ganancias para compensar el riesgo.

Ejercicios

Ejercicio 1

Las siguientes son funciones de utilidad, identifique en cada caso a que tipo de preferencias frente al riesgo se corresponden, aversión al riesgo, tomador de riesgo o indiferente al riesgo

1. $u(w) = -exp^{-w}$
2. $u(w) = a + bw$ con a y b constantes, $b > 0$
3. $u(w) = log(w)$
4. $u(w) = e^{w}$
5. $u(w) = w^{g}$ con $0 < g < 1$
6. $u(w) = w^{g}$ con $g > 1$
7. $u(w) = a + bw + cw^{2}$ con $b > 0$ y \$c>0

Ejercicio 1

Hay que calcular en cada caso la derivada segunda y usar la definición de aversión al riesgo.

Posible problema que no recuerden como derivar y recordar la definición de aversión al riesgo.

Ejercicio 2

Para las funciones de utilidad del Ejercicio 1 (sólo para 1, 3 y 7):

1. Calcule la medida de aversión al riesgo absoluto
2. Discuta la relación entre aversión al riesgo y la riqueza

Ejercicio 2

Usar la definición de aversión al riesgo

$$A(w) = -\frac{u^{''}(w)}{u^{'}(w)}$$

Analizar el resultado en función de w, ya hicieron las derivadas en la parte anterior.

Ver que les quede coherente con Ej. 1

Ejercicio 3

Tenemos que decidir entre dos inversiones:

Inversión A que tiene tres posibles ganancias, que son de 6000, 4000 o 1000 con probabilidades de 0.3, 0.4 y 0.3, respectivamente.

Con la inversión B se puede perder 10.000 o ganar 20.000 o 7.000, con probabilidades respectivas de 0.5, 0.4 y 0.1.

Usamos la siguiente función de utilidad

$u(w) = log(w)$

Ejercicio 3

1. Obtenga la ganancia esperada de cada inversión.
2. Obtenga la utilidad esperada de cada inversión.
3. Decida que negocio es conveniente comparando las ganancias seguras de cada uno.

Ejercicio 3

El foco es saber como calcular la ganancia esperada, utilidad esperada y ganancia segura. Posible problema no recordar como se calcula la esperanza.

Decidir en base a la ganancia segura.

Ejercicio 4

$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$ y utilidad con aversión constante tal que $u(w) = -e^{-Aw}$

1. Obtener la ganancia segura equivalente para 2 valores de A
2. Discutir la relación entre aversión al riesgo y ganancia segura equivalente

Ejercicio 4

Básicamente es usar la fórmula presentada en clase para este caso

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

para dos valore distintos de A y ver la relación entre A y w_q

Problema que no recuerden que vimos esto en clase.

Ejercicio 5

$VPN \sim N(\mu, \sigma^2)$ y utilidad con aversión constante tal que $u(w) = -e^{-Aw}$, considerar dos inversiones Inversión 1: $\mu_1 = 3000$ $\sigma^2 = 500$ Inversión 2: $\mu_2 = 3500$ $\sigma^2 = 1600$ A = 1

1. Determinar que negocio es más conveniente
2. ¿Cuanto tendría que ser la ganancia esperada de 2 para ser conveniente ?
3. ¿Cómo cambia lo anterior si $A = 10$?

Ejercicio 5

Similar a lo anterior pero ahora hay que usar w_q para comparar inversiones y ver el efecto de cambios en la aversión al riesgo.

Repositorio con Material

https://github.com/natydasilva/Mat_financiera

Ejercicio 1, solución

Para cada función deberán calcular la derivada segunda y en base a ello definir la preferencia del agente

1. $u(w) = -exp^{-w}$

$u^{''}(w) = -e^{-w} < 0$

Averso al riesgo

2. $u(w) = a + bw$ con a y b constantes, $b > 0$

$u^{''}(w) = 0$

Indiferente al riesgo

3. $u(w) = log(w)$

$u^{''}(w) = \frac{-1}{w^2} < 0$

Averso al riesgo

Ejercicio 1, solución

4. $u(w) = e^w$

$u^{''}(w) = e^w > 0$

Tomador de riesgo

5. $u(w) = w^g$ con $0 < g < 1$

$u^{''}(w) = g(g-1)w^{(g-2)} < 0$

Averso al riesgo

Ejercicio 1, solución

6. $u(w) = w^g$ con $g > 1$

$u^{''}(w) = g(g-1)w^{(g-2)} > 0$

Tomador de riesgo

7. $u(w) = a + bw + cw^2$ con $b > 0$ y $c > 0$

$u^{''}(w) = 2c > 0$

Tomador de riesgo

Ejercicio 2, Solución

Calcule la medida de aversión al riesgo absoluto

1. $A(w) = -\frac{u^{''}(w)}{u^{'}(w)} = A$
2. $A(w) = -\frac{u^{''}(w)}{u^{'}(w)} = \frac{1}{w}$
3. $A(w) = -\frac{u^{''}(w)}{u^{'}(w)} = \frac{-2c}{b+2cw}$

Ejercicio 2, Solución

Discuta la relación entre aversión al riesgo y la riqueza

1. Exhibe una aversión al riesgo constante para todos los rangos de riqueza.
2. La aversión al riesgo disminuye a medida que aumenta la riqueza.
3. La aversión al riesgo aumenta a medida que aumenta la riqueza.

Ejercicio 3, Solución

1. Obtenga la ganancia esperada de cada inversión

$$E(w_A) = 6000 * 0.3 + 4000 * 0.4 + 1000 * 0.3 = 3700$$

$$E(w_B) = -10000 * 0.5 + 20000 * 0.4 + 7000 * 0.1 = 3700$$

Ejercicio 3, Solución

2. Obtenga la utilidad esperada de cada inversión

$$E(u(w_A)) = \\ log(6000) * 0.3 + log(4000) * 0.4 + log(1000) * 0.3 = 5.92$$

$$E(u(w_B)) = \\ -log(10000) * 0.5 + log(20000) * 0.4 + log(7000) * 0.1 = 0.241$$

3. Decida que negocio es conveniente comparando las ganancias seguras de cada uno. Invierte en A

- $w_{qA} = e^{(5.92)} = 372$
- $w_{qB} = e^{(0.241)} = 1.29$

Ejercicio 4, Solución

1. Obtener la ganancia segura equivalente para 2 valores de A

$$w_q = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2$$

- Si $A = 1$ entonces $w_q = \mu - \sigma^2$
- Si $A = 4$ entonces $w_q = \mu - 2\sigma^2$

Ejercicio 5, Solución

1. Determinar que negocio es más conveniente

$$w_{q1} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3000 - 250 = 2750$$

$$w_{q2} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3500 - 800 = 2700$$

Ejercicio 5, Solución

2. ¿Cuanto tendría que ser la ganancia esperada de la inversión 2 para ser conveniente?

Debería ser al menos 3550 para que $w_{q2} > 2750$

Ejercicio 5, Solución

3. ¿Cómo cambia lo anterior si $A = 10$?

$$w_{q1} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3000 - 10 * 250 = 500$$

$$w_{q2} = \mu_1 - \frac{A}{2}\sigma_1^2 = 3500 - 10 * 800 = -4500$$

La ganancia esperada de la inversión 2 debería ser al menos 9500 para que $w_{q2} > 500$