Desde el enfoque estático al enfoque dinámico en el análisis de las curvas de rendimiento en la deuda soberana. Caso de estudio: Uruguay

ANDRÉS SOSA

Seminario SIESTA

Departamento de Métodos Cuantitativos
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Universidad de la República

8 DE OCTUBRE DE 2019

Deuda Soberana

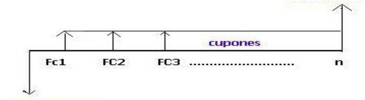
Los países al elaborar sus presupuestos nacionales, establecen tanto los **ingresos** como los **egresos** esperados en cierto período de tiempo. Es muy frecuente que se **produzcan desajustes**. los cuales existe una gran cantidad de medidas para solucionarlos. Nos interesa el endeudamiento público.

Definición

La deuda soberana es el conjunto de la deuda pública que mantiene un país con respecto a sus acreedores.

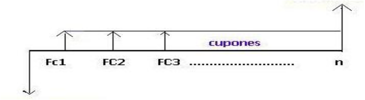
OPCIONES DE FINANCIAMIENTO: El estado tiene una variedad de activos financieros disponibles para el financiamiento destacándose la emisión del activo que se denomina **bono soberano.**

Un **bono soberano** es un activo financiero que usan los gobiernos en los mercados internacionales. Es en esencia un título que indica el monto que se ha prestado (V.N.), la tasa de interés que presenta (C) y sus períodos de cobro $(t_1, \ldots, t_n)$.



$$p(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{V.N.}{(1+r)^n}$$

Un **bono soberano** es un activo financiero que usan los gobiernos en los mercados internacionales. Es en esencia un título que indica el monto que se ha prestado (V.N.), la tasa de interés que presenta (C) y sus períodos de cobro $(t_1, \ldots, t_n)$.



$$p(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{V.N.}{(1+r)^n}$$

Definición

*La **curva de rendimiento** de la deuda soberana es la función que relaciona la tasa de rendimiento de los activos financieros con respecto a su vencimiento en cierto momento del tiempo y cierta moneda de emisión.*

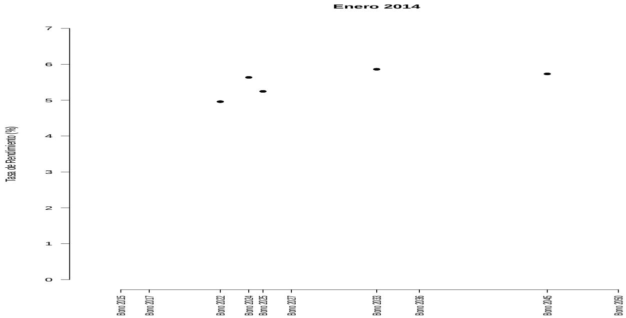
Utilidades de las curvas de rendimiento.

- MACROECONÓMICOS: Extraer información sobre las expectativas.
- FINANCIEROS: Estudios de sensibilidad dentro de portafolios de inversión.

Estimación de las curvas de rendimiento

Principales problemas en la estimación de curvas de rendimiento:

- existen una cantidad finita de activos soberanos;
- en cada tiempo, los activos transados pueden ser diferentes.



Bonos globales en dólares transados el segundo miércoles de cada mes (2014-2016).

Estimación de las curvas de rendimiento

La profundización en los modelos teóricos y los métodos de estimación se transformó en un área de desarrollo matemático.

La perspectiva más utilizada en los mercados financieros es la **estimación estática**, en el sentido que utiliza los precios de activos soberanos en un cierto instante de tiempo.

Los métodos utilizados en las **dos bolsas de valores en Uruguay** son:

- Métodos de estimación mediante splines
- Métodos de estimación mediante funciones

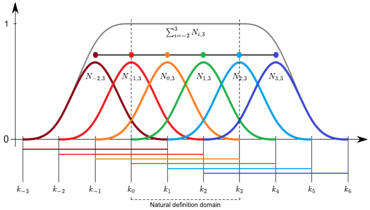
Métodos de estimación mediante splines

En el método **B-splines cúbicos**, se consideran $q+1$ puntos diferentes $t_0 < t_1 < \cdots < t_q$ en el intervalo $[t_0, t_q]$ y se define una base de polinomios de grado tres ψ_k mediante

$$\psi_k(T) = \sum_{j=k}^{k+4} \Big(\prod_{i=k, i\neq j} \frac{1}{t_i - t_j} \Big) (T - t_j)_+^3, \qquad k = -3, -2, \ldots, q-1.$$

[-] Cada elemento ψ_k es un polinomio cúbico positivo en el intervalo $[t_k, t_{k+4}]$ y cero fuera de él.

[-] En cada valor de T del dominio $[t_0, t_q]$ existen solamente cuatro polinomios que son diferentes de cero.



La curva de rendimiento se obtiene mediante una combinación lineal de los polinomios de la base, es decir la función

$$f(T) = \sum_{k=-3}^{q-1} a_i \, \psi_k(T).$$

Métodos de estimación mediante funciones

En estos métodos de estimación existe una función paramétrica que tiene como variable el vencimiento.

El **modelo de Nelson-Siegel** asumen expícitamente la forma de la función de la tasa de interés forward instantánea para tiempo t, dada mediante

$$f(T) = \alpha + \beta e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \gamma \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}};$$

donde los parámetros α, β, γ y τ_1 son coeficientes que cumplen $\tau_1 > 0$.

Métodos de estimación mediante funciones

En estos métodos de estimación existe una función paramétrica que tiene como variable el vencimiento.

El **modelo de Nelson-Siegel** asumen expícitamente la forma de la función de la tasa de interés forward instantánea para tiempo t, dada mediante

$$f(T) = \alpha + \beta e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \gamma \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}};$$

donde los parámetros α, β, γ y τ_1 son coeficientes que cumplen $\tau_1 > 0$.

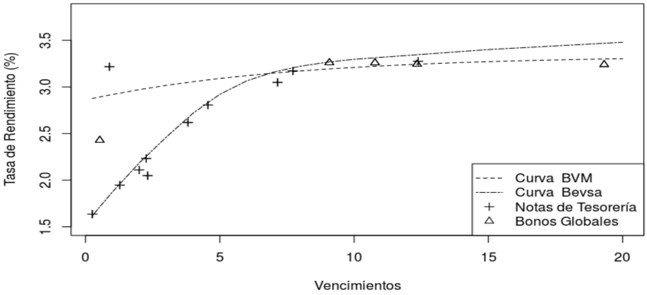
La extensión más popular es el **modelo de Svensson**, en el cual permite otro punto de inflexión adicional bajo el costo de agregar dos parámetros más al modelo. Es decir,

$$f(T) = \alpha + \beta e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \gamma \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \delta \frac{T}{\tau_2} e^{-\frac{T}{\tau_2}};$$

donde los parámetros α, β, γ, δ, τ_1 y τ_2 son coeficientes que cumplen $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$.

Publicación de curvas de rendimiento en el Mercado uruguayo

Situación empírica (09 de marzo de 2018): curvas de rendimiento publicadas por Bevsa y por BVM y las tasas de rendimiento inducidas por el *Vector de precios* publicado por el Banco Central del Uruguay en *unidades indexadas*.

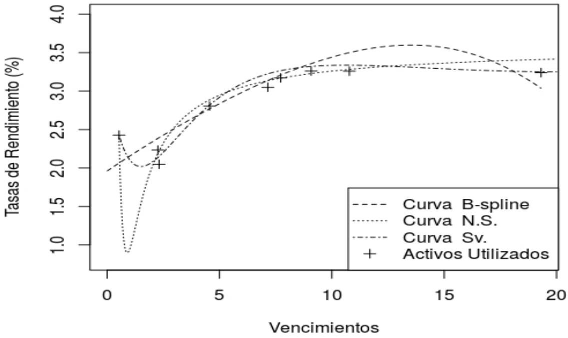


Activos en circulación: 5 bonos globales (2018, 2027, 2028, 2030 y 2037); 2 bonos locales (2018, 2020), 10 notas de tesorería (entre 2018 y 2030) y 2 notas del BCU (2019, 2020).

Activos transados en el mercado: cuatro bonos globales (2018, 2027, 2028 y 2037) y una nota de tesorería (serie 19).

Estimaciones de los modelos en diferentes situaciones

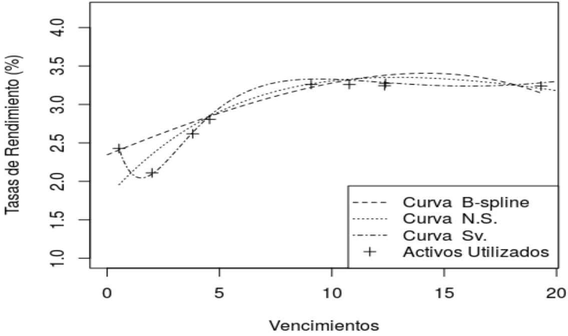
Diferentes estimaciones de las curvas de rendimiento:



Insumos: Solamente los bonos soberanos transados en el mercado.

Estimaciones de los modelos en diferentes situaciones

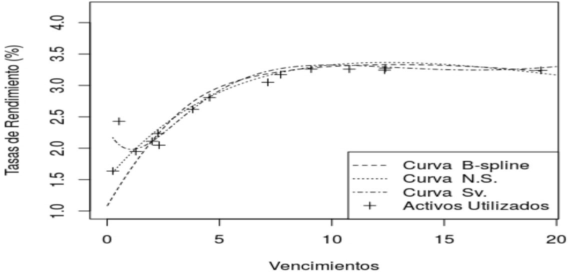
Diferentes estimaciones de las curvas de rendimiento:



Insumos: A los bonos negociados se agrega el bono global 2030 y cuatro notas de tesorería que si bien no son las de mayor circulante son las que generan una buena distribución en los vencimientos de los activos utilizados.

Estimaciones de los modelos en diferentes situaciones

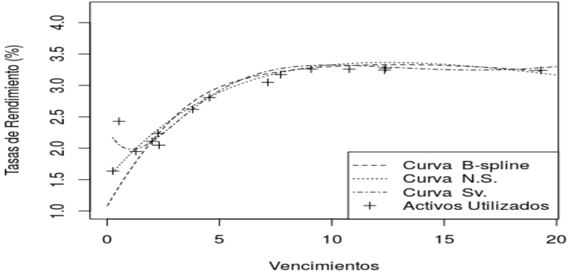
Diferentes estimaciones de las curvas de rendimiento:



Insumos: Se utilizan todos las tasas de rendimiento inducidas por el vector de precios del BCU.

Estimaciones de los modelos en diferentes situaciones

Diferentes estimaciones de las curvas de rendimiento:



Insumos: Se utilizan todos las tasas de rendimiento inducidas por el vector de precios del BCU.

- Ninguna de las tres estimaciones presentan tasas de rendimiento **similares** a las publicadas en todos los vencimientos.
- Las estimaciones mediante el método estático **dependen fuertemente de los activos utilizados** sin importar el modelo que se aplique.

Cambio de Paradigma

En el mercado de Uruguay, los precios de bonos soberanos transados en cierto momento del tiempo pueden **resultar escasos** para la estabilidad de los modelos.

En la literatura existe una gran preocupación en la investigación de modelos y métodos de estimación de curvas de rendimiento **en mercados íliquidos**.

Desde nuestra visión el problema de estimación de curvas de rendimiento en el Uruguay es posible abordarlo desde **el punto de vista dinámico**.

La propuesta es utilizar modelos generados mediante **procesos estocásticos**, que permita enfocar el problema desde una persepectiva “dinámica" en el tiempo.

Herramientas matemáticas para modelar la incertidumbre

Paseo al Azar Simple Simétrico: el proceso $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ en el cual las variables aleatorias X_i son independientes igualmente distribuidas, de distribución

$$X_i = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Definición

Un proceso estocástico W_t es un movimiento browniano si satisface

- *el proceso comienza en cero (i.e. $W_0 = 0$);*
- *las trayectorias son continuas;*
- *para $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2, \leq t_2$ se cumple que $W_{t_1} - W_{s_1}$ y $W_{t_2} - W_{s_2}$ son variables independientes;*
- *para $0 \leq s \leq t$, se cumple que $W_t - W_s$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

Herramientas matemáticas para modelar la incertidumbre

Paseo al Azar Simple Simétrico: el proceso $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ en el cual las variables aleatorias X_i son independientes igualmente distribuidas, de distribución

$$X_i = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Definición

Un proceso estocástico W_t es un movimiento browniano si satisface

- *el proceso comienza en cero (i.e. $W_0 = 0$);*
- *las trayectorias son continuas;*
- *para $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2, \leq t_2$ se cumple que $W_{t_1} - W_{s_1}$ y $W_{t_2} - W_{s_2}$ son variables independientes;*
- *para $0 \leq s \leq t$, se cumple que $W_t - W_s$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

Este proceso, es la herramienta fundamental para la modelación de los activos sujetos a incertidumbre y forma parte de la rama de la matemática denominada **cálculo estocástico**.

Constituye una teoría coherente de integración (generaliza la integración de Lebesgue-Stieljes) que permite definir de manera rigurosa integrales con respecto a otros procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales estocásticas.

Hipótesis matemáticas para la construcción de los modelos

Para garantizar la existencia del mercado de bonos se asumen las hipótesis:

- Se cumple $p(t,t) = 1$ para todo t.
- El precio $p(t,T)$ es diferenciable con respecto a T.

El precio del bono $p(t,T)$ **es un objeto estocástico de dos variables** t y T.

Hipótesis matemáticas para la construcción de los modelos

Para garantizar la existencia del mercado de bonos se asumen las hipótesis:

- Se cumple $p(t, t) = 1$ para todo t.
- El precio $p(t, T)$ es diferenciable con respecto a T.

El precio del bono $p(t, T)$ **es un objeto estocástico de dos variables** t y T.

Tasa de interés forward instantánea en t para T

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log p(t, T)}{\partial T}$$

Tasa de interés spot instantánea en t

$$r(t) = f(t, t).$$

Hipótesis matemáticas para la construcción de los modelos

Para garantizar la existencia del mercado de bonos se asumen las hipótesis:

- Se cumple $p(t,t) = 1$ para todo t.
- El precio $p(t,T)$ es diferenciable con respecto a T.

El precio del bono $p(t,T)$ **es un objeto estocástico de dos variables** t y T.

Tasa de interés forward instantánea en t para T

$$f(t,T) = -\frac{\partial \log p(t,T)}{\partial T}$$

Tasa de interés spot instantánea en t

$$r(t) = f(t,t).$$

En los modelos de tasa de interés spot instantánea, se establece a r_t como la solución de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t.$$

Tasa de interés spot instantánea

Al desarrollar los modelos, se obtiene una ecuación diferencial en derivadas parciales. La fórmula de Feynman-Kac permite establecer la valuación como la esperanza condicional de un proceso bajo una medida de probabilidad denominada **de riesgo neutral Q**.

$$p(t,T) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s\,ds} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Tasa de interés spot instantánea

Al desarrollar los modelos, se obtiene una ecuación diferencial en derivadas parciales. La fórmula de Feynman-Kac permite establecer la valuación como la esperanza condicional de un proceso bajo una medida de probabilidad denominada **de riesgo neutral Q**.

$$p(t, T) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T \; r_s \, ds} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

La **selección** de las funciones $\mu(t, r_t)$ y $\sigma(t, r_t)$ se focaliza en encontrar modelos que:

- sean flexibles y permitan diferentes rangos de curvas;
- el comportamiento dinámico sea consistente con la evolución histórica de las tasas de rendimiento;
- presenten fórmula cerrada de precios de bonos cupón cero;
- admitan pertinentes técnicas de estimación;
- permitan utilizar gran cantidad de datos.

Modelo afines en N-factores

Se considera un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{Q})$. En los modelos afines de N-factores, la tasa de interés spot instantánea r_t es una **función afín** de un vector de variables no observables $y_t = (y_t^1, y_t^2, \ldots, y_t^N)$, es decir

$$r_t = y_t^1 + y_t^2 + \cdots + y_t^N;$$

en el cual el vector y_t sigue un **proceso afín** que se representa

$$dy_t = a\,(b - y_t)\,dt \;+\; \Sigma\,\sqrt{S(t)}\,dW_t;$$

donde

- $\{W_t,\ t \geq 0\}$ es un N-dimensional movimiento browniano independiente bajo la medida de riesgo neutral $\mathbf{Q}$;
- a y Σ son matrices de dimensión $N \times N$;
- b es un vector de dimensión N;
- $S(t)$ es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$ en la cual cada entrada de la diagonal cumple $S(t)_{ii} = \alpha_i + \beta_i^{'} y_t$.

Modelo espacio estado

Se utiliza **la familia de modelos gaussianos** dentro de la clase de modelos afines. En esta familia, el precio y la tasa de rendimiento de los bonos cupón cero es

$$P(\tau) = e^{-A(\tau)-\sum_{i=1}^{i=N} B_i(\tau)y_i}; \qquad z(\tau) = A(\tau) + \sum_{i=1}^{i=N} B_i(\tau)y_i;$$

donde

$$B_i(\tau) = \frac{1}{a_i}(1 - e^{-a_i\tau}); \qquad A(\tau) = -\sum_{i=1}^{i=N} \left(b_i - \frac{\sigma_i^2}{2a_i}\right)(B_i(\tau) - \tau) + \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4a_i}.$$

Modelo espacio estado

Se utiliza **la familia de modelos gaussianos** dentro de la clase de modelos afines. En esta familia, el precio y la tasa de rendimiento de los bonos cupón cero es

$$P(\tau) = e^{-A(\tau)-\sum_{i=1}^{i=N} B_i(\tau)y_i}; \qquad z(\tau) = A(\tau) + \sum_{i=1}^{i=N} B_i(\tau)y_i;$$

donde

$$B_i(\tau) = \frac{1}{a_i}(1 - e^{-a_i\tau}); \qquad A(\tau) = -\sum_{i=1}^{i=N}\left(b_i - \frac{\sigma_i^2}{2a_i}\right)(B_i(\tau) - \tau) + \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4a_i}.$$

El modelo es posible expresarlo en su forma **espacio estado**. Las ecuaciones, en su manera matricial, se resumen en

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \phi y_{t-1} + \mu_t; && \text{(ecuación de transición)} \\ z_t &= A_t + B_t y_t + \nu_t; && \text{(ecuación de medida)} \end{aligned}$$

donde $y_t \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\mu_t \in \mathbb{R}^N$, $z_t \in \mathbb{R}^n$, $\nu_t \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathbb{M}^{NxN}$ y $B_t \in \mathbb{M}^{nxN}$.

Método de estimación: filtro de Kalman

El Filtro de Kalman permite estimar las variables no observables y los parámetros asociados a un sistema lineal en el cual sólo se conoce su salida.

Método de estimación: filtro de Kalman

El Filtro de Kalman permite estimar las variables no observables y los parámetros asociados a un sistema lineal en el cual sólo se conoce su salida.

Es un **conjunto de ecuaciones iterativas** que implementan un sistema **predicción-actualización** para las estimaciones con el fin de utilizar la nueva información que ingresa al modelo.

$$
\begin{aligned}
y_{t|t-1} &= \alpha + \phi y_{t-1|t-1} \\
P_{t|t-1} &= \phi P_{t-1|t-1} \phi' + Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{t|t} &= y_{t|t-1} + K_t(z_t - A_t - B_t y_{t|t-1}) \\
P_{t|t} &= (Id - K_t B_t) P_{t|t-1} \\
K_t &= P_{t|t-1} B_t' (B_t P_{t|t-1} B_t' + R)^{-1}
\end{aligned}
$$

Es posible establecer la función de verosimilitud para ser optimizada con respecto a sus parámetros. Sin embargo, el problema es no lineal por lo cual es necesario aplicar la metodología denominada **Esperanza Maximización**.

Aplicación al caso de Uruguay: Datos en Unidades Indexadas

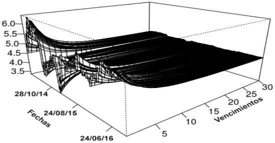
La información que se utiliza para estimar los parámetros de los modelos es la disponible en el mercado. Corresponden a los precios de los activos soberanos que se transan en el mercado secundario.

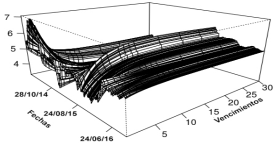
La base de datos en el mercado en unidades indexadas es de **carácter diario** y abarca el período de tiempo **desde el 2 de enero de 2014 al 31 agosto de 2016**.

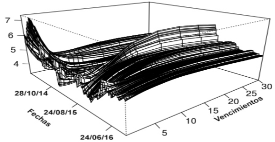
Activo Soberano	**Emisión**	**Vencimiento**	**Cupón**	**Amortizaciones**
Notas de tesorería Serie 14	10/06/10	10/06/20	4.000	Al vencimiento
Notas de tesorería Serie 16	27/01/11	27/01/19	3.250	Al vencimiento
Bono Global 2018	14/09/06	14/09/18	5.000	Al vencimiento
Bono Global 2027	03/04/07	05/03/27	4.250	(33.3%) 05/04/25 - 05/04/26 - 05/04/27
Bono Global 2028	15/12/11	15/12/28	4.375	(33.3%)15/12/25 - 15/12/27 - 15/12/28
Bono Global 2030	10/07/08	10/07/30	4.000	(33.3%) 10/07/28 - 10/07/29 - 10/07/30
Bono Global 2037	26/06/07	26/06/37	3.700	(33.3%) 26/06/35 - 26/06/36 - 26/06/37

Resultados

	Un Factor	Dos Factores	Tres Factores
a_1	0.683704	0.478106	0.548472
a_2	—	0.035019	0.243667
a_3	—	—	0.071716
b_1	0.045365	0.033008	0.039433
b_2	—	0.018637	0.007103
b_3	—	—	0.004344
σ_1	0.016890	0.015759	0.014621
σ_2	—	0.012805	0.015328
σ_3	—	—	0.009955
ϵ_1	0.006501	0.006441	0.000170
ϵ_2	0.002315	0.002132	0.000100
ϵ_3	0.002445	0.000343	0.000196
ϵ_4	0.002301	0.001550	0.000270
ϵ_5	0.001794	0.001551	0.000460
ϵ_6	0.000903	0.000668	0.000784
ϵ_7	0.003155	0.000697	0.000920
$\ln\ L$	8022.55	11077.84	11636.06
AIC	-16025.09	-22129.68	-23240.12
BIC	-15961.02	-22046.38	-23137.60







MUCHAS GRACIAS !!