

SEMINARIO DEL IESTA

Límites fluidos

Laura Aspirot

Departamento de Métodos Cuantitativos

Martes 17/9/2019



FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Esquema de la presentación

Introducción

Teorema de Kurtz

Modelos

- Redes par a par

- Modelo de fallas y reparaciones

- Redes radio cognitivas

Conclusiones y trabajo a futuro

ARTES Análisis de Redes, Tráficos y Estadísticas de Servicios

- Grupo interdisciplinario IIE-IMERL de FING
- Problemas ligados al diseño y a la gestión de redes de datos, ingeniería de redes de datos y probabilidad y estadística
- Monografía de la Licenciatura en Matemática y tesis de Maestría en Ingeniería Matemática (orientador: G. Perera)
- Doctorado en Matemática en curso, tesis Fluid Approximations for Stochastic Telecommunication Models (orientadores: G. Rubino y E. Mordecki)

Objeto de estudio

- Relación entre modelos estocásticos y determinísticos para algunos problemas motivados por redes de datos
- Modelos estocásticos complejos por dependencias internas en el sistema, por la cantidad de individuos, difíciles de estudiar analíticamente o incluso mediante simulaciones
- Aproximaciones a modelos determinísticos gobernados por ecuaciones diferenciales, el comportamiento del proceso estocástico original puede analizarse a partir de características del sistema determinístico

Ejemplos: $M/M/1$ [Rob03]

- Tasa de arribos λ y tasa de servicio μ
- Tiempo y condición inicial se aceleran por un factor N

$X(t)$ número de usuarios en el sistema en tiempo t

$$X(0) = Nx_0$$

$$\hat{X}^N(t) = X(Nt)/N \text{ proceso escalado}$$

- \hat{X}^N se aproxima, para N grande, por la solución de

$$x' = \lambda - \mu \text{ si } x > 0, \quad x' = 0 \text{ si } x = 0$$

Ejemplos: $M/M/\infty$ y $M/M/N/N$ [Rob03]

- Tasa de arribos λ y tasa de servicio μ
- El escalado es diferente a la $M/M/1$, el tiempo no se escala, solo la tasa de arribos se acelera en un factor N y la tasa total de servicio escala con el número de usuarios del sistema

$X(t)$ número de usuarios en el sistema en tiempo t

$\tilde{X}^N(t)$ tiene tasa de arribos λN

$X^N(t) = \tilde{X}^N(t)/N$ proceso escalado

- $X^N(t)$ se aproxima, para N grande, por la solución de

$$x' = \lambda - \mu x \quad (M/M/\infty)$$

$$x' = \lambda - \mu x, \text{ si } x < 1, \quad x' = 0 \text{ si } x = 1 \quad (M/M/N/N)$$

Límite fluido para $M/M/1$ y $M/M/\infty$

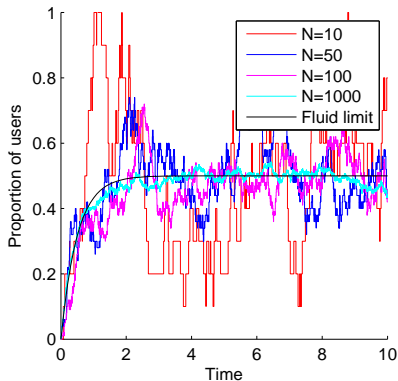
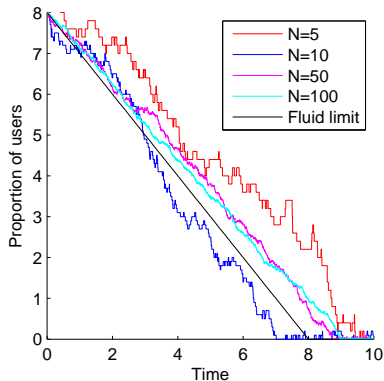


Figura: Izq: cola $M/M/1$. Proceso escalado $\hat{X}^N(t)$ para diferentes N y límite fluido ($\lambda = 1$, $\mu = 1$, $x_0 = 8$). Der: cola $M/M/\infty$. Proceso escalado $X^N(t)$ para diferentes N y límite fluido ($\lambda = 1$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$).

Límites fluidos

- Partimos de cadenas de Markov en tiempo continuo
- Buscamos aproximaciones asintóticas en algún parámetro del sistema, muchas veces relacionado con el tamaño
- Analizamos en estas aproximaciones

Límite de trayectorias en tiempo finito

Distribución asintótica en tiempo finito

Puntos fijos del límite y convergencia en estado estacionario

Distribución asintótica en estado estacionario

Esquema de la presentación

Introducción

Teorema de Kurtz

Modelos

- Redes par a par

- Modelo de fallas y reparaciones

- Redes radio cognitivas

Conclusiones y trabajo a futuro

Teorema de Kurtz

Teorema (Theorem 2.1, p. 456, [EK86])

Sea \tilde{Z}^N proceso de Markov en \mathbb{Z}^d con tasas de k a $k + l$

$$\tilde{q}_{k,k+l}^N = N\beta_l \left(\frac{k}{N} \right), \quad k, l \in \mathbb{Z}^d,$$

$F(z) = \sum_l l\beta_l(z)$ Lipschitz y acotada en compactos,

$$z(t) = z_0 + \int_0^t F(z(s))ds$$

Entonces para cada $T \geq 0$, $Z^N(t) = \tilde{Z}^N(t)/N$ cumple que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |Z^N(t) - z(t)| = 0 \text{ c.s.}$$

Más resultados

- Distribución asintótica [EK86]

$\sum_I |I|^2 \beta_I(z)$ acotada en compactos, dF continuo

Entonces $\sqrt{N}(Z^N - z) \Rightarrow_N V$, siendo V un proceso Gaussiano con matriz de covarianza explícita

- Convergencia para F discontinua [Bor11]

Ecuaciones en el sentido de Filippov

Interpretación probabilística

Generalización del Teorema de Kurtz

- Convergencia en estado estacionario a punto fijo [BLB08]

Convergencia si hay punto fijo único y es un atractor global

Convergencia al conjunto de puntos fijos y ciclos límite

Esquema de la presentación

Introducción

Teorema de Kurtz

Modelos

- Redes par a par

- Modelo de fallas y reparaciones

- Redes radio cognitivas

Conclusiones y trabajo a futuro

Aplicaciones a redes par a par [AMR11]

- [YdV04] establece un modelo de cadenas de Markov para BitTorrent, [QS04] establece un modelo definido por ecuaciones diferenciales, nos planteamos deducir el modelo fluido para BitTorrent a partir de un modelo markoviano
- BitTorrent

La idea principal de BitTorrent es dividir un archivo en varios archivos más pequeños, de modo que un par que quiere bajarlo se conecta a varios pares a la vez y baja diferentes partes

Se distinguen dos clases de pares: *leechers* y *seeds*

Los leechers bajan partes del archivo de otros pares y suben lo que ya tienen para otros leechers

Los seeds ya tienen la totalidad del archivo y solamente suben partes para los leechers que se conectan a ellos

Modelo estocástico

- Con abandonos y restricción de subida y bajada

$X(t)$: número de leechers

$Y(t)$: número de seeds

λ : tasa de arribos (Poisson)

μ : tasa de subida de cada par

c : tasa de bajada de cada par

θ : tasa de abandono de los leechers

γ : tasa de abandono de los seeds

$\eta \in [0, 1]$: factor de eficiencia

$\min\{cX(t), \mu(\eta X(t) + Y(t))\}$: tasa leecher \rightarrow seed

- Sin abandonos ni restricción de subida y bajada

$\theta = 0$: tasa de abandono de los leechers

$\mu = c$: tasa de subida y bajada de cada par

Transiciones

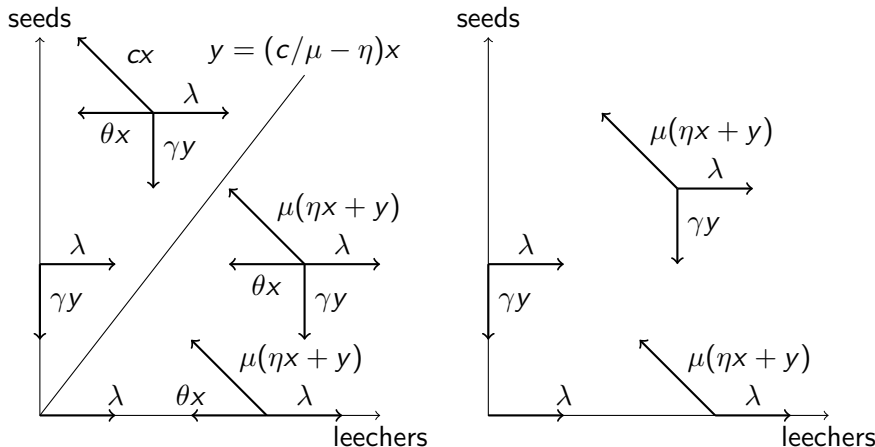


Figura: Transición. Izq: con abandonos y restricciones en subida y bajada. Der: sin abandonos y sin restricciones de subida y bajada.

Modelo escalado

- λN tasa de arribos, $\tilde{X}^N(t)$, $\tilde{Y}^N(t)$ número de leechers y seeds
- Límite fluido para $(X^N(t), Y^N(t)) = (\tilde{X}^N(t), \tilde{Y}^N(t))/N$

$$\begin{cases} x' = \lambda - \min(cx, \mu(\eta x + y)) - \theta x \\ y' = \min(cx, \mu(\eta x + y)) - \gamma y \end{cases}$$

Límite fluido con abandonos y restricciones

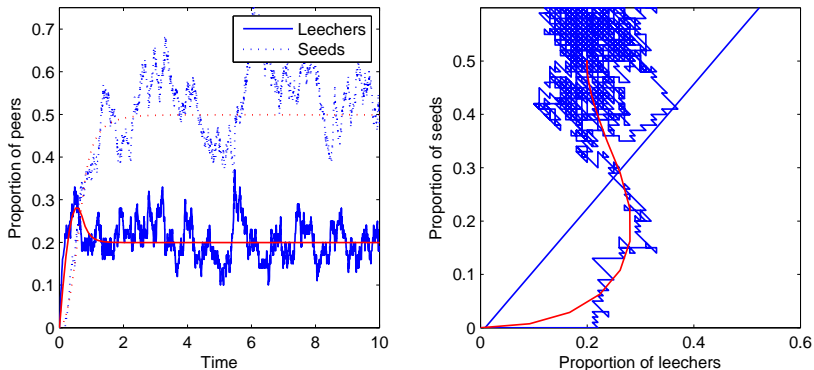


Figura: Izq: número de leechers y seeds y límite. Der: evolución en el plano

Límite fluido sin abandonos y restricciones

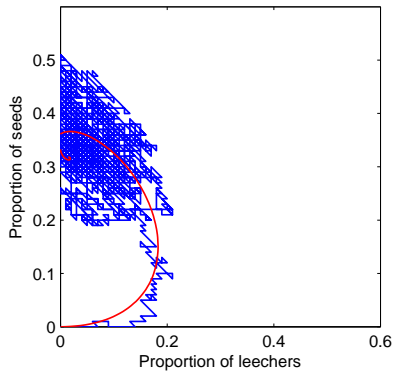
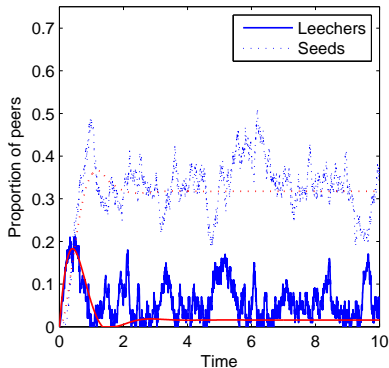


Figura: Izq: número de leechers y seeds y límite. Der: evolución el plano

Fallas y reparaciones [AMR13]

- N unidades, con fallas independientes
- distribución del tiempo de falla tipo fase
- Reparador con distribución del tiempo de reparación tipo fase
- Objetivo: descripción asintótica del sistema para $N \rightarrow \infty$

Definición de distribución tipo fase

- La variables S es tipo fase si es el tiempo de absorción de CMTC con un estado absorbente

- Notación: S tiene distribución tipo fase (k, p, A) si

la cadena tiene $k + 1$ estados y $k + 1$ es el estados absorbente

la distribución inicial de la cadena es $(p, 0) = (p_1, p_2, \dots, p_k, 0)$

el generador infinitesimal es $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, con A matriz

$k \times k$ y

$$a = (a_1, \dots, a_k) = -A\mathbb{1}$$

donde $\mathbb{1}$ es el vector de unos

Ejemplos de distribución tipo fase

- Exponencial

$$k = 1, p = 1, \hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} -\lambda & \lambda \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Erlang o hipoexponencial (exponenciales en serie)

$$k = 2, p = (1, 0), \hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Hiperexponencial (exponenciales en paralelo)

$$k = 2, p = (p_1, p_2), \hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Modelo

- Modelo markoviano

Tiempo de falla: N variables tipo fase independientes (m, q, B)

$\tilde{X}_i^N(t)$: número de unidades funcionando en fase i ,

$$\tilde{X}^N = (\tilde{X}_1^N, \dots, \tilde{X}_m^N)$$

Tiempo de reparación: distribución tipo fase (k, p, \tilde{A})

$\tilde{Z}_i^N(t)$: número de unidades en el reparador en fase i (1 o 0),

$$\tilde{Z}^N = (\tilde{Z}_1^N, \dots, \tilde{Z}_k^N)$$

$\tilde{Y}^N(t)$: número de unidades esperando a ser reparadas

$$\mathbf{1}^T \tilde{X}^N + \tilde{Y}^N + \mathbf{1}^T \tilde{Z}^N = N$$

Modelo escalado

- Asintótica ($N \rightarrow \infty$)

B fijo: número medio de fallas por unida de tiempo $\approx \beta N$

$\tilde{A} = NA$: tiempo medio de reparación $\approx \alpha/N$

Proceso escalado

$$X^N = \frac{1}{N} \tilde{X}^N, \quad Y^N = \frac{1}{N} \tilde{Y}^N, \quad Z^N = \frac{1}{N} \tilde{Z}^N$$

$$X^N + Y^N + Z^N = 1$$

Límite fluido

La proporción de unidades en cada fase y rotas converge en probabilidad, uniformemente en $[0, T]$, a un proceso determinístico (x, y) , con $y = 1 - \mathbb{1}^T x$, dado por

$$x' = B^T x + \mu q$$

donde $1/\mu$ es valor esperado de una distribución tipo fase (k, p, A) . La dinámica cambia cuando $\mathbb{1}^T x = 1$ y el campo de vectores

$B^T x + \mu q$ apunta hacia afuera de la región $\mathbb{1}^T x < 1$, y está dada por

$$x' = (B^T + qb^T) x$$

Tiempo de vida y de reparación Erlang

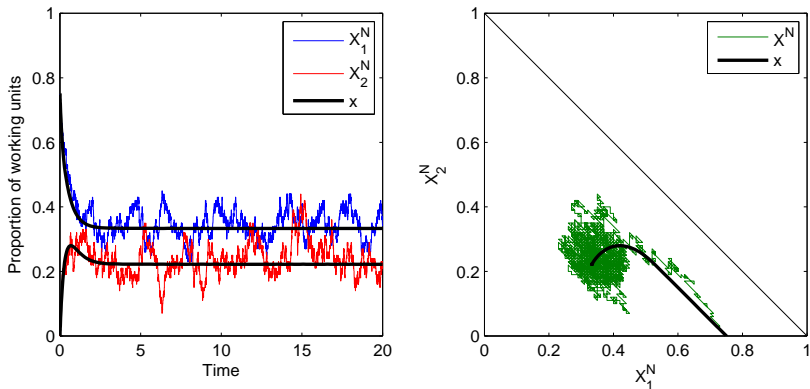


Figura: Proporción de unidades en cada fase antes de la falla

Tiempo de vida y de reparación Erlang

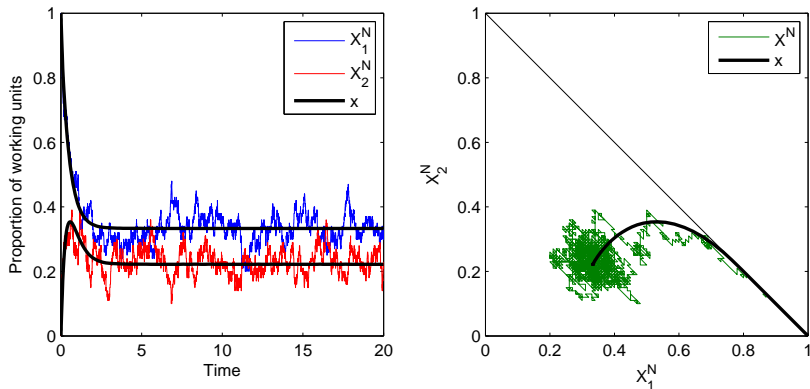


Figura: Proporción de unidades en cada fase antes de la falla, límite en la frontera

Erlang con tres fases y reparación exponencial

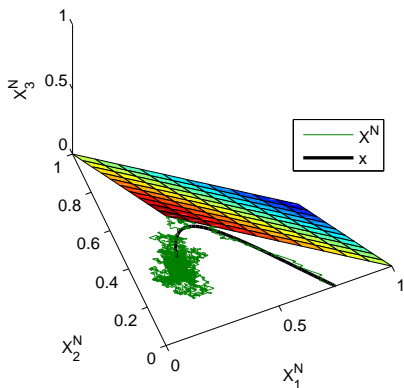
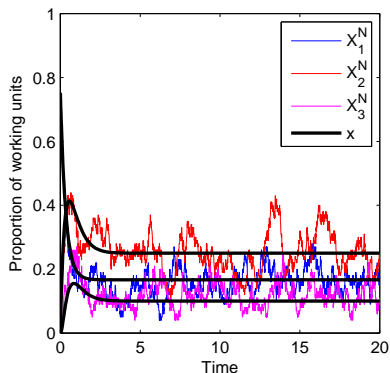


Figura: Erlang con tres fases y reparación exponencial, el punto fijo es interior

Erlang con tres fases y reparación exponencial

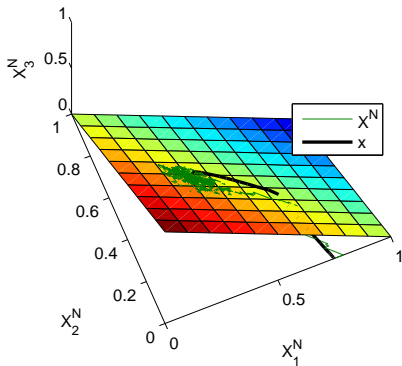
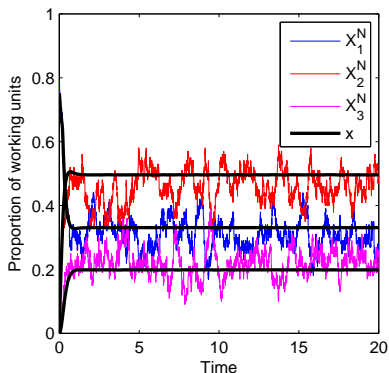


Figura: Erlang con tres fases y reparación exponencial, el punto fijo está en el plano $\mathbb{1}^T x = 1$

Redes radio cognitivas [RAB15]

- Antecedentes

 - Desarrollo de las tecnologías inalámbricas

 - Escasez de espectro

 - Subutilización de frecuencias licenciadas

- Propuestas

 - Redes radio cognitivas (J. Mitola, KTH, 1999)

 - Uso no licenciado de bandas de TV (FCC, 2004)

- Problemas

 - Tecnológicos (sensado del espectro, protocolos, hardware)

 - Desempeño (calidad de servicio)

 - Económicos (tarificación)

Modelo

(X_1, X_2) CMTC:

- $X_1(t), X_2(t)$: UPs, USs en tiempo t
- C : número total de canales
- E : espacio de estados

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x_1 \leq C, 0 \leq x_2 \leq C, x_1 + x_2 \leq C\}$$

- λ_1, λ_2 : tasas de arribos de UPs y USs (procesos de Poisson independientes),
- μ_1, μ_2 : tasas de servicio de UPs y USs (exponenciales independientes)
- $a: E \rightarrow \mathbb{R}$: control de acceso para SUs, $a(x_1, x_2)$ es la probabilidad de acceso de un US en el estado (x_1, x_2)

Ejemplos de control de acceso

- Libre:

$$a(x_1, x_2) = 1, x_1 + x_2 < C; a(x_1, x_2) = 0, x_1 + x_2 = C$$

- Determinístico $0 < \delta < C$:

$$a(x_1, x_2) = 1, x_1 + x_2 < \delta; a(x_1, x_2) = 0, x_1 + x_2 \geq \delta$$

- Probabilístico:

$$a(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1 + x_2}{C}$$

Espacio de estados y transiciones

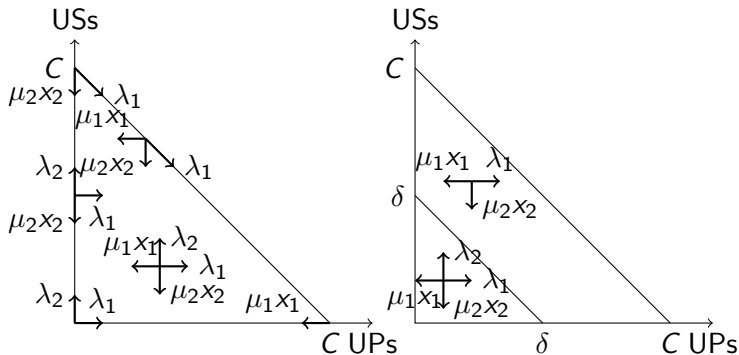


Figura: Izquierda: transiciones para el modelo libre. Derecha: transiciones para control de admisión determinístico.

Escalado

Cuadro: Parámetros de (X_1, X_2) y de $(\tilde{X}_1^N, \tilde{X}_2^N)$.

(X_1, X_2)	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	C	a
$(\tilde{X}_1^N, \tilde{X}_2^N)$	$\lambda_1 N$	$\lambda_2 N$	μ_1	μ_2	CN	\tilde{a}^N

Caso subcrítico (libre)

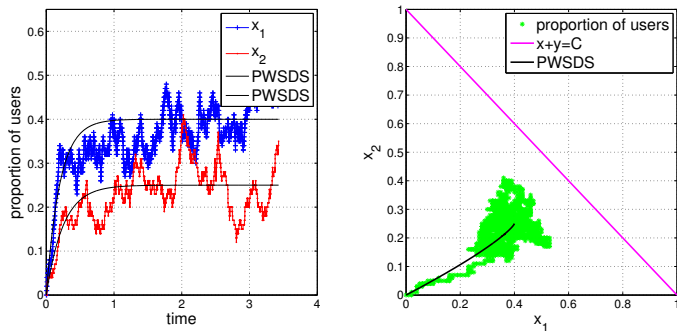


Figura: $N = 100$, $C = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 4$. Punto fijo $(x_1^*, x_2^*) = (\lambda_1/\mu_1, \lambda_2/\mu_2) = (2/5, 1/4)$.

Caso crítico (libre)

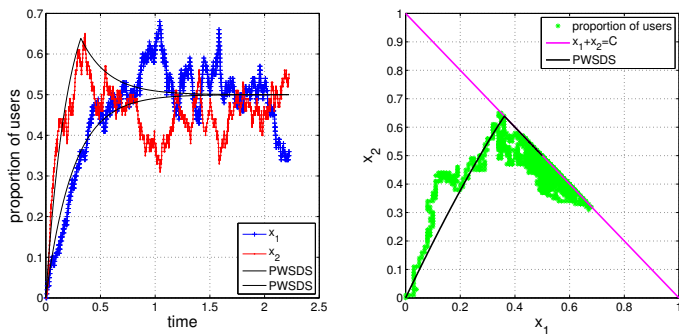


Figura: $N = 100$, $C = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$. Punto fijo $(x_1^*, x_2^*) = (\lambda_1/\mu_1, C - \lambda_1/\mu_1) = (1/2, 1/2)$.

Control de acceso probabilístico

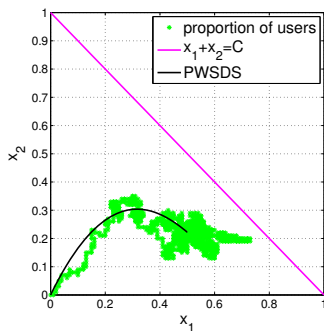
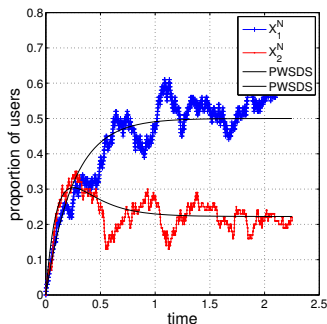


Figura: $N = 100$, $C = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$. Punto fijo $(x_1^*, x_2^*) = \left(\theta_1, \theta_2 \left(\frac{C - \theta_1}{C + \theta_2} \right) \right) = (1/2, 2/9)$ ($\theta_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\theta_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$).

Elipses de confianza

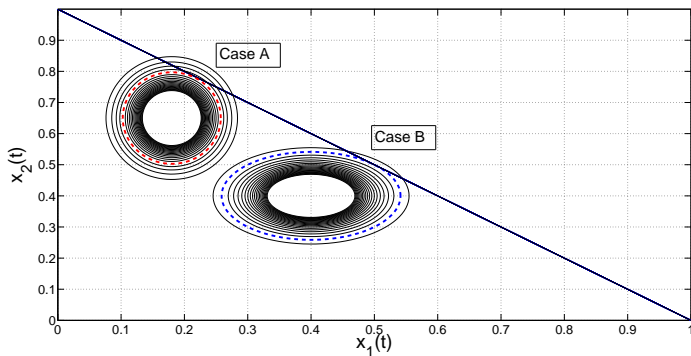


Figura: Elipses de confianza al 95 % para $(X_1^N(t), X_2^N(t))$,
($N = 100, 120, 140, 160, \dots, 500$). A: $C = 1$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 13$, $\mu_1 = 50$,
 $\mu_2 = 20$. B: $C = 1$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 12$, $\mu_1 = 25$, $\mu_2 = 30$.

Control de admisión, caso Gaussiano y caso no Gaussiano

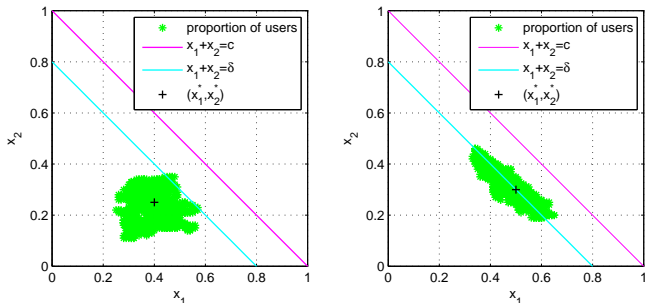


Figura: Izquierda: $N = 100$, $C = 1$, $\delta = 0,8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 4$. Punto fijo $(2/5, 1/4)$. Derecha: $N = 100$, $C = 1$, $\delta = 0,8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$. Punto fijo $(1/2, 3/10)$.

Estimación de densidades

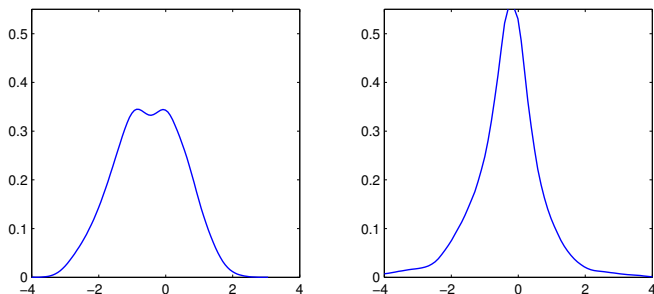


Figura: Izquierda: $N = 100$, $C = 1$, $\delta = 0,8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 5, \mu_2 = 4$, estimación de densidades para $X_1^N + X_2^N - 0,65$ normalizada. Derecha: $N = 100$, $C = 1$, $\delta = 0,8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$ and $\mu_2 = 5$, estimación de densidades para $X_1^N + X_2^N - 0,8$ normalizada.

Distribución asintótica no gaussiana

Consideramos el proceso X con $\mu_1 = \mu_2$, \tilde{X}^N como antes y

$$\tilde{Z}^N = \tilde{X}_1^N + \tilde{X}_2^N.$$

La distribución estacionaria de

$$\tilde{Z}^N - N\delta$$

converge a la distribución de Z dada por

$$P(Z = j) = \begin{cases} \rho \left(\frac{\rho_2}{\delta} \right)^j & \text{si } j < 0, \\ \rho \left(\frac{\rho_1}{\delta} \right)^j & \text{si } j \geq 0, \end{cases}$$

donde $\rho_1 = \frac{\nu_1}{\mu}$, $\rho_2 = \frac{\nu_2}{\mu}$, $\rho = \left(\frac{\rho_1}{\delta - \rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - \delta} \right)^{-1}$.

Distribución de Z

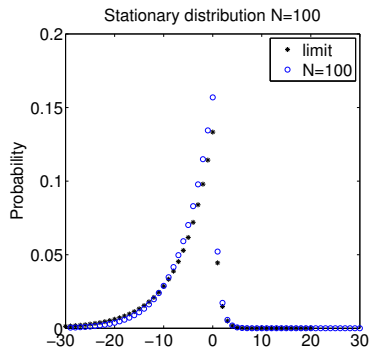
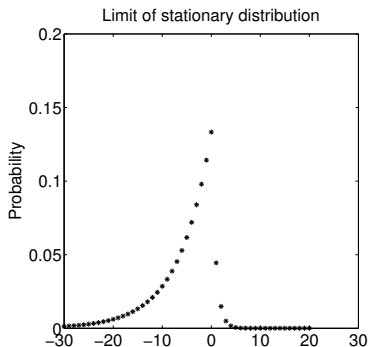


Figura: Límite ($N \rightarrow \infty$) de la distribución estacionaria y distribución estacionaria para $N = 100$. $C = 5$, $\delta = 3$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3,5$.

Esquema de la presentación

Introducción

Teorema de Kurtz

Modelos

- Redes par a par

- Modelo de fallas y reparaciones

- Redes radio cognitivas

Conclusiones y trabajo a futuro

Conclusiones

- Estudiamos tres modelos de límites fluidos motivados en problemas que aparecen en telecomunicaciones, que permiten ver el funcionamiento de la técnica de límites fluidos en diferentes aplicaciones
- Redes par a par (BitTorrent): límites fluidos, estacionariedad, convergencia en estado estacionario y aproximaciones Gaussianas
- Fallas y reparaciones: se introducen distribuciones tipo fase, presenta diferentes escalas de tiempo, límite determinístico diferenciable a tramos, distribución asintótica Gaussiana y no Gaussiana
- Redes cognitivas: límite determinístico diferenciable a tramos, distribución asintótica Gaussiana y no Gaussiana

Trabajo a futuro

- Distribución asintótica Gaussiana en estado estacionario
- Límites no Gaussianos en los casos generales
- Grandes desvíos y simulación de eventos raros
- Aproximaciones tipo campo medio y propagación del caos
- Límites fluidos con ecuaciones en derivadas parciales
- Límites fluidos estocásticos

Muchas gracias



L. Aspirot, E. Mordecki, and G. Rubino.

Fluid Limits Applied to Peer to Peer Network Analysis.

In Quantitative Evaluation of Systems (QEST), 2011 Eighth International Conference on, pages 13 –20, sept. 2011.



L. Aspirot, E. Mordecki, and G. Rubino.

Fluid Limit for the Machine Repairman Model with Phase-Type Distributions.

In Quantitative Evaluation of Systems - 10th International Conference, QEST 2013, Buenos Aires, Argentina, August 27-30, 2013. Proceedings, pages 139–154, 2013.



Michel Benaïm and Jean-Yves Le Boudec.

A class of mean field interaction models for computer and communication systems.

Perform. Eval., 65(11-12):823–838, 2008.



L. Bortolussi.

Hybrid Limits of Continuous Time Markov Chains.

In *Proceedings of Eighth International Conference on Quantitative Evaluation of Systems (QEST)*, 2011, pages 3–12, sept. 2011.



S. N. Ethier and T. G. Kurtz.

Markov processes: Characterization and convergence.

Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.



D. Qiu and R. Srikant.

Modeling and performance analysis of BitTorrent-like peer-to-peer networks.

In *SIGCOMM '04: Proceedings of the 2004 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*, pages 367–378, New York, NY, USA, 2004. ACM.



C. Rattaro, L. Aspirot, and P. Belzarena.

Analysis and characterization of dynamic spectrum sharing in Cognitive Radio Networks.

In *Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC), 2015 International*, pages 166–171, Aug 2015.



P. Robert.

Stochastic Networks and Queues.

Stochastic Modelling and Applied Probability Series.
Springer-Verlag, New York, 2003.



X. Yang and G. de Veciana.

Service Capacity of Peer to Peer Networks.

In *IEEE INFOCOM*, pages 1–11, 2004.