МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для выполнения лабораторных работ по дисциплинам

Моделирование
и
Системный анализ и машинное моделирование

Для студентов специальностей I-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» и I-40 01 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»

Лабораторная работа 1.

1.Формирование равномерно распределенных случайных величин

1.1. Псевдослучайные числа

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учёт стохастических воздействий. Для их формирования обычно используют последовательности случайных чисел с заданными вероятностными характеристиками. Количество случайных чисел, требуемых для получения статистически устойчивых оценок параметров процессов функционирования системы S при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых параметров, необходимой точности и достоверности результатов моделирования.

Для метода статистического моделирования на ЭВМ характерно то, что большое число операций, соответственно и большая доля машинного времени расходуется на действия со случайными числами. Кроме того, результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирование последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможности практического использования машинного моделирования систем.

Алгоритмический способ получения последовательностей случайных чисел в настоящее время считается наиболее эффективным. Он основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. Каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей программы по мере возникновения необходимости.

При моделировании систем на ЭВМ программная имитация случайных воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) последовательностей случайных чисел и к их последующему функциональному преобразованию. В качестве базового может быть принят любой удобный процесс. Как показывает практика, оптимальным базовым процессом является последовательность чисел $\{X\}= x_1,x_2,\dots,x_n$, представляющих собой реализацию равномерно распределенной на интервале (0,1) случайной величины ξ, или - в статистических терминах - повторную выборку из равномерно распределенной на (0,1) генеральной совокупности значений величины ξ.

Теоретически непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале (a,b), если ее функции плотности $f_\xi(x)$ и функция распределения $F_\xi(x)$ соответственно имеют вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & a < x < b, \\ 0, & x < a, x > b; \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Определим числовые характеристики случайной величины ξ, принимающей значения x - математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение соответственно:

$$M[\xi] = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{a+b}{2};$$

$$D[\xi] = \int_a^b (x - M[\xi])^2 f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}.$$

При моделировании систем на ЭВМ приходится иметь дело со случайными числами интервала (0,1), когда границы интервала a=0 и b=1. Поэтому рассмотрим частный случай равномерного распределения, когда функция плотности и функция распределения соответственно имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0, x > 1; \end{cases}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Такое распределение имеет математическое ожидание $M[\xi] = \dfrac{1}{2}$ и дисперсию $D[\xi] = \dfrac{1}{12}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Прежде чем перейти к описанию конкретных алгоритмов получения на ЭВМ последовательностей псевдослучайных чисел, сформулируем набор требований, которым должен удовлетворять идеальный генератор. Полученные с помощью такого генератора псевдослучайные последовательности чисел должны состоять из квазиравномерно распределенных чисел, содержать статистически независимые числа, быть воспроизводимыми, иметь неповторяющиеся числа, получаться с минимальными затратами машинного времени, занимать минимальный объем машинной памяти.

1.2. Алгоритмические процедуры формирования случайных равномерно-распределенных чисел

Наибольшее применение в практике моделирования на ЭВМ для генерации последовательностей псевдослучайных чисел находят алгоритмы вида:

$$x_{i+1}=\Phi(x_i), \qquad (1)$$

представляющие собой рекуррентные соотношения первого порядка, для которых начальное число x_0 и постоянные параметры заданы .

Широкое применение при моделировании систем на ЭВМ получил мультипликативный метод генерации псевдослучайных последовательностей, для которого функция (1) имеет вид:

$$X_{i+1}=(\lambda X_i+\mu)\bmod M, \qquad (2)$$

где X, λ, μ, M - неотрицательные числа..

Если задано начальное значение X_0, множитель λ и аддитивная константа μ, то (2) однозначно определяет последовательность целых чисел $\{X_i\}$, составленную из остатков от деления на M членов последовательности $(\lambda X_i+\mu)$. Таким образом, для любого $i \geq 1$ справедливо неравенство $X_i<M$. По целым числам последовательности $\{X_i\}$ можно построить последовательность $\{x_i\}=\left\{\frac{X_i}{M}\right\}$ рациональных чисел из единичного интервала (0,1).

Мы рассмотрим вычислительный алгоритм Д.Лемера, представляющий собой частный случай соотношения (2) при μ=0 и основанный на применении рекуррентного соотношения:

$$R_n = aR_{n-1}(\bmod m), (n>1), \qquad (3)$$

где a и m - положительные целые числа $(m>a)$;

R_0 - начальное число (n=1).

Согласно этому соотношению коэффициент a умножается на число R_{n-1}, после чего произведение aR_{n-1} берется по модулю m, т.е aR_{n-1} делится на m и остаток от деления принимается в качестве числа R_n. Запишем алгоритм в виде пошаговой процедуры.

Ш а г 1. Коэффициент a умножается на число R_{n-1} ;

Ш а г 2. Результат умножения aR_{n-1} делится на m : $aR_{n-1} = qm + R_n$, где qm - целая часть (q = 0,1,2,...), R_n - остаток от деления $0 < R_n < m$.

Ш а г 3. Остаток от деления R_n делится на m, чтобы получить искомое случайное число между нулем и единицей:

$$x_n = \frac{R_n}{m}.$$

З а м е ч а н и е. Для получения следующего числа в качестве R_{n-1} принимается остаток от деления R_n, полученный на втором шаге.

Дадим иллюстрацию работы алгоритма, полагая в качестве исходных данных a=3, m=5, R_0=1. Промежуточные и конечные результаты сведем в таблицу.

Таблица 1

n	R_{n-1}	aR_{n-1}	R_n	x_n
1	1	3	3	0.6
2	3	9	4	0.8
3	4	12	2	0.4
4	2	6	1	0.2
5	1	3	3	0.6
…				

Качество случайных р.р. чисел x_n, зависит весьма существенно от выбора трёх “магических” чисел - a, m, R_0, где параметры a и R_0 влияют на статистические свойства получаемых чисел, а параметр m- на период их повторения. Следовательно, выбор этих параметров должен осуществляться таким образом, чтобы обеспечить требуемые *статистические* свойства и наибольший период повторения случайных р.р. чисел .

Значение переменной R_0, должно быть:

а) меньше $2^n - 1$;

б) достаточно большим, желательно простым числом;

в) содержать в двоичном представлении сравнительно большее число единиц.

Значение m выбирают близким к 2^n, значение a близким к 2^{n-1}.

В заключении отметим, что наилучшие из известных сегодня подпрограмм формирования случайных р.р. чисел разработаны на основе алгоритма, предложенного Д.Лемером.

1.3. Оценки для математического ожидания и дисперсии.

Пусть имеется случайная величина X с математическим ожиданием m и дисперсией D.

Произведено n опытов, давших результаты $x_1, x_2, \dots x_n$.

В качестве оценки для математического ожидания естественно предложить среднеарифметическое значений x_i

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (4)$$

Эта оценка является состоятельной (т.к. по теореме Чебышева частоты сходятся к математическому ожиданию при n → ∞) и несмещённой, т.к.

$$M[\tilde{m}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m \qquad (5)$$

Рассмотрим оценку дисперсии. Можно использовать в качестве оценки статистическую дисперсию:

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{m})^2. \qquad (6)$$

Можно показать, что D^* сходится по вероятности к D, т.е. оценка D^* состоятельна.

Если подставить (6) в (4) и преобразовать сумму, то получим

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n} D,$$

т.е. эта оценка не является несмещённой. Смещение можно ликвидировать, если умножить D^* на $\frac{n}{n-1}$. Получим

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{m})^2 \qquad (7)$$

При $n \to \infty$ $\tilde{D} \to D^*$ и т.к. D^* состоятельна, то и $\tilde{D}$ состоятельна ($\frac{n}{n-1}$ - поправка Бесселя, при $n > 50$ между D^* и $\tilde{D}$ практически нет разницы).

На практике вместо формулы [3] можно использовать равносильную ей, выразив дисперсию через 2-й центральный момент

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \tilde{m}^2\right] \qquad (8)$$

При работе с имитационной моделью для получения экспресс-оценки математического ожидания и дисперсии можно использовать следующие соотношения:

$$\tilde{m}_n = \tilde{m}_{n-1}\frac{n-1}{n} + \frac{x_n}{n} \qquad \text{и} \qquad \tilde{D}_n = \tilde{D}_{n-1}\frac{n-2}{n-1} + \frac{1}{n}(x_n - m_{n-1})^2 \cdot$$

С их помощью можно осуществлять экспресс-анализ значений математического ожидания и дисперсии в ходе моделирования без сохранения x_i в массиве.

1.4. Проверка качества последовательностей РРСЧ

Эффективность статистического моделирования систем на ЭВМ и достоверность получаемых результатов существенным образом зависят от качества исходных (базовых) последовательностей псевдослучайных чисел, которые являются основой для получения стохастических воздействий на элементы моделируемой системы. Поэтому, прежде чем приступать к реализации моделирующих алгоритмов на ЭВМ, необходимо убедиться в том, что исходная последовательность псевдослучайных чисел удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям, так как в противном случае даже при наличии абсолютно правильного алгоритма моделирования процесса функционирования моделируемой системы по результатам моделирования нельзя будет достоверно судить о характеристиках системы. Поэтому все применяемые генераторы случайных чисел должны перед моделированием системы пройти тщательное предварительное тестирование, которое представляет собой комплекс проверок по различным статистическим критериям, включая в качестве основных проверки (тесты) на *равномерность, стохастичность* и *независимость*. Кроме того, очень важными показателями качества базовой последовательности являются *длина периода* и *длина отрезка апериодичности.* Рассмотрим возможные методы проведения таких проверок, наиболее часто используемые в практике статистического моделирования.

1) Проверка равномерности.

Проверка равномерности последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел $\{x_г\}$ может быть выполнена по гистограмме или с использованием косвенных признаков.

а) Проверка по гистограмме (рис.1.1).

Построение гистограммы распределения состоит в последовательном выполнении следующих этапов.

1. Находится минимальное x_{min} и максимальное x_{max} значения в массиве реализаций.

2. Определяется диапазон варьирования

$r_{вар}=x_{max}-x_{min}$.

3. Определяется длина интервала

$\Delta = \frac{r_{вар}}{k}$, где k - число интервалов в пределах диапазона варьирования $(k = 5-25)$.

4. Определяются граничные значения для каждого i-го интервала $(i=\overline{1,k})$.

5. Фиксируется количество попаданий m_i в каждый i-й интервал $(i=\overline{1,k})$.

6. Вычисляются ординаты гистограммы распределения (частоты попадания чисел в интервалы)

$$c_i = \frac{m_i}{n}, \quad (i=\overline{1,k}),$$

где n - число выполненных испытаний (объем массива реализаций).

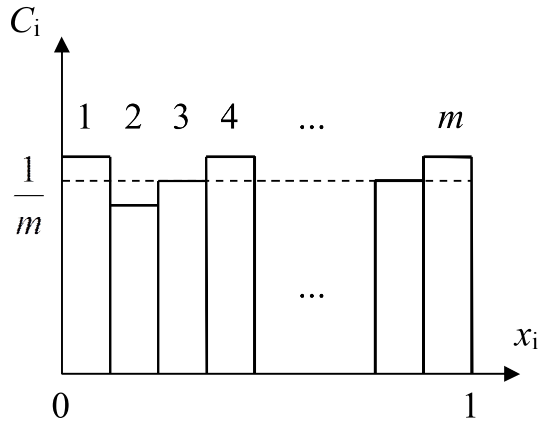


Рис.1.1. Проверка равномерности по гистограмме

Очевидно, что при равномерности последовательности чисел, частоты должны быть близкими при достаточно больших N к теоретической вероятности попадания в подинтервалы, равной 1/m.

Оценка степени приближения, т. е. равномерности последовательности $\{x_г\}$, может быть проведена с использованием критериев согласия. На практике обычно принимается $m = 20 \div 50$, $N = (10^2 \div 10^3)m$.

б) Проверка по косвенным признакам.

Суть проверки равномерности по косвенным признакам сводится к следующему. Вся последовательность $\{x_г\}$ разбивается на пары чисел:

$(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2i-1}, x_{2i}), \dots, (x_{N-1}, x_N)$.

Затем подсчитывают число пар K, для которых выполняется условие:

$$x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 < 1.$$

Геометрически это означает, что точка с координатами (x_{2i-1}, x_{2i}) расположена внутри четверти круга радиуса R=1, вписанного в единичный квадрат (рис. 1.2).

В общем случае точка (x_{2i-1}, x_{2i}) всегда попадет внутрь единичного квадрата. Тогда теоретическая вероятность попадания этой точки в четверть круга равна отношению площади четверти круга к площади единичного квадрата:

$$P = S_{1/4\ круга}/S_{квадрата} = (\pi R^2/4)/(1 \cdot 1) = \pi/4.$$

Если числа последовательности $\{x_г\}$ равномерны, то в силу закона больших чисел теории вероятностей при больших N относительная частота попадания точки в единичный квадрат, равная отношению числа K пар (x_{2i-1}, x_{2i}), для которых проверочное условие выполнилось к общему числу N/2 пар последовательности должна сходиться к P:

$$\frac{2K}{N} \to \frac{\pi}{4}.$$

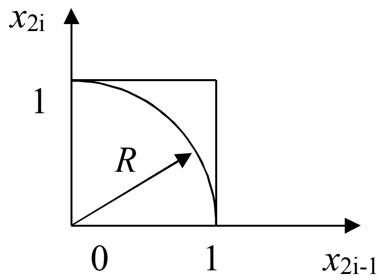


Рис. 1.2. Проверка равномерности по косвенным признакам

2) Определение длины периода и длины отрезка апериодичности

При статистическом моделировании с использованием программных генераторов псевдослучайных квазиравномерных последовательностей важными характеристиками качества генератора является *длина периода P* и *длина отрезка апериодичности L.* Длина отрезка апериодичности L псевдослучайной последовательности $\{x_{\text{г}}\}$, заданной уравнением

$$X_{i+1} = (A X_i + C) \bmod M\ , \quad x_i = X_i/M,$$

есть наибольшее целое число, такое, что при $0 \le k < i \le L$ событие $P(x_{\text{i}} = x_{\text{k}})$ не имеет места. Это означает, что все числа x_i в пределах отрезка апериодичности не повторяются.

Очевидно, что использование при моделировании систем последовательности чисел $\{x_{\text{г}}\}$, длина которой больше отрезка апериодичности L, может привести к повторению испытаний в тех же условиях, что и раньше, т. е. увеличение числа реализаций не дает новых статистических результатов.

Способ экспериментального определения длины периода P и длины отрезка апериодичности L сводится к следующему.

1)Запускается программа генерации последовательности чисел $\{x_{\text{г}}\}$ с начальным значением x_0 на V значений, фиксируется x_{v} (обычно полагают $V = (1 \div 5)10^6$);

2) Запуск программы генерации с x_0 и фиксируется i_1 и i_2, такие, что в первый и во второй раз выполняется условие $x_{\text{i1}}=x_{\text{v}}$ и $x_{\text{i2}}=x_{\text{v}}$. Вычисляется длина периода последовательности $P=i_2-i_1$.

3) Запускается программа генерации с начальными значениями x_0 и x_{p} и фиксируется минимальный номер i_3, для которого справедливо $x_{\text{i3}}=x_{\text{i3+p}}$. Вычисляется длина отрезка апериодичности $L=i_3+p$.

Теоретически при использовании мультипликативного метода длина периода не может быть больше чем 2^{n}, где n − разрядность ЭВМ. Для увеличения длины периода прибегают к специальным приемам.

Задание к лабораторной работе 1.

1. *Построить (написать программу) генератор последовательности равномерно распределенных случайных чисел на основе алгоритма Лемера. Предусмотреть при этом возможность ввода параметров a, R_0, m с клавиатуры.*

2. *Для полученной выборки чисел построить гистограмму (20 интервалов), рассчитать значения оценок для математического ожидания* $\tilde{m}$, *дисперсии* ($\tilde{D}$) *и среднего квадратичного отклонении* ($\tilde{\sigma}$).

3. *Оценить равномерность последовательности по косвенным признакам.*

4. *Найти длину периода и участка апериодичности. Варьируя значениями параметров a, R_0, m, добиться длины периода не менее 50000 чисел.*

Лабораторная работа 2

2. Формирование случайных чисел с заданным распределением

Случайные числа с заданным распределением, как правило, формируются в результате преобразования случайных р.р. чисел *R* из диапазона от 0 до 1. В настоящее время известно много процедур, позволяющих имитировать непрерывные и дискретные вероятностные распределения – метод обратных функций, метод исключения, метод композиции и т.д. Рассмотрим использование этих методов на практике.

2.1 Имитация равномерного распределения

Равномерное распределение непрерывной случайной величины *X* описывается плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } X \in [a,b], \\ 0, & \text{при } X \notin [a,b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X* определяется соотношениями

$$m_x = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Получим машинный алгоритм для имитации равномерного распределения, используя метод обратных функций:

1) $f(x) \to F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}, \quad (x \in [a,b]);$

2) $\dfrac{X-a}{b-a} = R;$

3) $X = a + (b-a)R. \qquad (9)$

Формула (9) представляет собой искомый машинный алгоритм.

2.2 Имитация гауссовского распределения

Гауссовское распределение является одним из наиболее распространенных непрерывных распределений. Гауссовская аппроксимация реального распределения используется обычно в следующих случаях:

1) когда реальное распределение обусловлено теми факторами, которые определяются центральной предельной теоремой теории вероятности;

2) когда реальное распределение известно, однако допускается его гауссовская аппроксимация с целью упрощения решаемой задачи;

3) когда реальное распределение неизвестно, однако нет каких-либо оснований отвергать его гауссовскую аппроксимацию.

Гауссовское распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x{}^2}},$$

где m_x и σ_x - соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение гаусовского распределения.

Машинный алгоритм для имитации гауссовского распределения можно получить, базируясь на центральной предельной теореме. Эта теорема утверждает, что сумма независимых, случайных величин с произвольными распределениями имеет асимптотически гауссовское распределение. Сходимость к гауссовскому распределению осуществляется наиболее быстро, если суммируются величины с одинаковым распределением. В этом случае даже небольшое число слагаемых приводит к гауссовскому распределению.

В основе машинного алгоритма для имитации гауссовского распределения лежит суммирование случайных р.р. чисел R.

$$x = m_x + \sigma_x \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} R_i - \frac{n}{2} \right).$$

С возрастанием n, т.е. числа суммируемых случайных р.р. чисел R, повышается точность имитации гауссовского распределения. Обычно n выбирают в пределах от 6 до 12. При этом достаточная для многих приложений точность обеспечивается при использовании всего шести случайных р.р. чисел R. Для случая, когда $n = 6$,

$$x = m_x + \sigma_x \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{6} R_i - 3\right). \qquad (10)$$

Формула (10) представляет собой искомый машинный алгоритм, который наиболее часто используется на практике. С помощью этого алгоритма имитируется гауссовская случайная величина x с заданным статистическими параметрами m_x и σ_x.

2.3 Имитация экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

Где λ - параметр экспоненциального распределения.

Математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсия случайной величины X определяются соотношениями

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}, \quad D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Получим машинный алгоритм для имитации экспоненциального распределения, используя метод обратной функции:

$$1)\, f(x) \to F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, (x \ge 0);$$

$$2)\, 1 - e^{-\lambda x} = R;$$

$$3)\, X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

или

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln R. \qquad (11)$$

Формула (11) представляет собой искомый машинный алгоритм, где R -р.р. число.

2.4 Имитация гамма-распределения

Гамма-распределение непрерывной случайной величины x описывается плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\eta}}{(\eta - 1)!} x^{\eta - 1} e^{-\lambda x}, x > 0; \\ 0, \qquad\qquad\qquad x < 0, \end{cases}$$

где η и λ - параметры гамма-распределения (η>0, λ>0)).

При η, принимающем целочисленные значения, гамма-распределение называется распределением Эрланга.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины x определяются соотношениями

$$m_x = \frac{\eta}{\lambda}, \text{ и } D_x = \frac{\eta}{\lambda^2}.$$

Гамма-распределение сводится к экспоненциальному распределению, если положить η =1. Случайная величина X может быть представлена в виде суммы независимых случайных величин x_i, имеющих экспоненциальное распределение:

$$X = \sum_{i=1}^{\eta} X_i .$$

Получим машинный алгоритм для имитации гамма-распределения:

$$X = \sum_{i=1}^{\eta} (-\frac{1}{\lambda} \ln R_i) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\eta} \ln R_i$$

или

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(\prod_{i=1}^{\eta} R_i), \qquad (12)$$

Где $R_1, R_2, ..., R_n$ случайные р. р. числа.

2.5 Имитация треугольного распределения

Треугольное распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностями распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & \text{при } x \in [a,b]; \\ 0 & \text{при } x \notin [a,b]. \end{cases} \qquad (13)$$

или

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(b-x)}{(b-a)^2}, & \text{при } x\in[a,b];\\ 0 & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases} \qquad (14)$$

Для имитации треугольного распределения может быть использован метод исключения, предложенный И.Нейманом.

Машинный алгоритм для имитации треугольного распределения с плотностью (13):

1. Формируются пара случайных р. р. чисел R_1 и R_2.

2. Проверяется условие $R_1 < R_2$. Если условие выполняется, то искомое число

$$x=a+(b-a)R_1.$$

В противном случае, пара чисел R_1 и R_2 отбрасывается и осуществляется переход к шагу 1.

Машинный алгоритм для имитации треугольного распределения с плотностью (15).

1. Формируются два случайных р. р. числа R_1 и R_2 .

2. Проверяется условие R_2 < 1-R_1. Если условие выполняется, то находится искомое число $x=a+(b-a)R_1$.

В противном случае пара чисел R_1 и R_2 отбрасывается и осуществляется переход к шагу 1.

Приведенные алгоритмы имеют существенный недостаток: часть пар чисел R_1 и R_2 , приходится отбрасывать. Принимая во внимание независимость случайных р. р. чисел R_1 и R_2, можно предложить более экономичные алгоритмы, основанные на использовании следующих формул:

$$x=a+(b-a)\max(R_1,R_2), \qquad (15)$$

$$x=a+(b-a)\min(R_1,R_2), \qquad (16)$$

где

max(R_1, R_2) - взятие максимального числа из совокупности двух случайных р. р. чисел R_1 и R_2;

min(R_1, R_2) - взятие минимального числа на совокупности двух случайных р. р. чисел R_1 и R_2.

Формулы (15) и (16) представляют собой машинные алгоритмы для имитации треугольного распределения с плотностями соответственно (13) и (14).

1.3.7 Имитация распределения Симпсона

Распределение Симпсона непрерывной случайной величины X

описывается плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & \text{при } x\in[a,\dfrac{a+b}{2}];\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \text{при } x\in[\dfrac{a+b}{2},b];\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases}$$

Распределение Симпсона имеет случайная величина X, которая представляет собой следующую сумму:

$$X = y+z\,, \qquad (17)$$

где y и z - независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $[\frac{a}{2},\frac{b}{2}]$. Следовательно, распределение Симпсона можно рассматривать как композицию двух одинаковых законов равномерного распределения.

Машинный алгоритм для имитации распределения Симпсона базируется на применении формулы (18). Согласно этой формуле необходимо получить два случайных числа y и z, распределенные равномерно на интервале $[\frac{a}{2},\frac{b}{2}]$, и просуммировать их. Найденное таким образом число X будет иметь распределение Симпсона.

Задание к лабораторной работе 2.

1. *Построить (написать программу) для генерации последовательностей случайных чисел с описанными выше распределениями. Предусмотреть возможность ввода параметров распределений с клавиатуры.*
2. *Для полученных выборок чисел построить гистограммы (20 интервалов), рассчитать значения оценок для математического ожидания $\tilde{m}$, дисперсии ($\tilde{D}$) и среднего квадратичного отклонения ($\tilde{\sigma}$).*

Лабораторная работа 3

3. Построение и исследование аналитической модели дискретно - стохастической системы массового обслуживания

3.1 Системы массового обслуживания. Потоки событий

При моделировании реальные системы могут быть представлены как системы массового обслуживания (СМО), если при их функционировании можно выделить два процесса – поступление заявок на обслуживание и обслуживание заявок. Таким образом могут быть представлены различные по своей физической природе процессы – экономические, технические, производственные и т.д.

Для описания работы СМО используется понятие поток событий – последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени. В СМО будем выделять два потока:

- входной поток: множество моментов времени поступления в систему заявок;
- поток обслуживаний: множество моментов времени окончания обработки системой заявок в предположении, что обслуживание осуществляется непрерывно.

Элементарная СМО общего вида представлена на рис. 1.

Рис. 1. СМО общего вида
И – источник заявок;
Н – накопитель (очередь);
К – канал обслуживания.

СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые мы будем называть *каналами* обслуживания. В зависимости от количества каналов СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

СМО бывают двух типов.

1. *СМО с отказами.* В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему не обслуженной.

2. *СМО с ожиданием.* Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов. Число мест в очереди m может быть как ограниченным, так и неограниченным. При $m = 0$ СМО с очередью превращается в СМО с отказами. Очередь может иметь ограничения не только по количеству стоящих в ней заявок (длине очереди), но и по времени ожидания (такие СМО называются «системами с нетерпеливыми клиентами»).

Для краткой характеристики СМО Д. Кендалл ввел символику (нотацию):

$$A/B/S/m\ ,$$

где S – число обслуживающих приборов;

m – количество мест ожидания (если не указано, то считается, что m=0, т.е. это система с отказами); при неограниченной очереди в качестве m ставят символ ∞.

А и В характеризуют соответственно поток требований и поток обслуживания, задавая функцию распределения интервалов между заявками во входном потоке и функцию распределения времен обслуживания.

А и В могут принимать следующие значения:

D – детерминированное распределение;

М – показательное;

E_r – распределение Эрланга порядка r;

H_r - гиперпоказательное;

G – распределение общего вида, т.е. любое другое, отличное от вышеперечисленных.

При этом подразумевается, что потоки являются рекуррентными, т.е. интервалы между событиями независимы и имеют одинаковое распределение.

Иногда в обозначение добавляют еще один символ /k – количество источников заявок.

Характеристики СМО существенно зависят от вида и параметров входного потока и потока обслуживаний.

Поток событий называется *однородным*, если он характеризуется только моментами наступления событий и задается последовательностью $\{t_n\}$, где $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \ldots\}$ – моменты наступления событий.

Соответственно, поток событий является *неоднородным*, если он задается последовательностью $\{t_n, f_n\}$, где t_n – моменты наступления событий, а f_n – набор признаков событий (приоритеты, принадлежность тому или иному источнику, тип канала для его обслуживания и т. д.)

Поток *регулярный*, если события поступают через равные промежутки времени. Соответственно, поток *нерегулярный*, если интервалы между событиями представляют собой случайные величины.

Поток является *стационарным*, если вероятность наступления заданного числа событий в течение интервала времени фиксированной длины зависит только от продолжительности интервала и не зависит от его расположения на временной оси. Иначе говоря, вероятностные характеристики и интенсивность такого потока со временем не изменяются.

Поток является *ординарным*, если вероятность появления двух или более событий в течение элементарного интервала времени $\Delta t \to 0$ есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале. Другими словами, два и более событий в таком потоке произойти одновременно не могут.

Поток называется потоком *без последействия*, если для любых неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Иногда это свойство формулируют следующим образом: распределение времени до ближайшего события не зависит от времени наблюдения, т.е. от того, сколько времени прошло после последнего события. Отсутствие последействия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

Если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины, поток называется *рекуррентным* (поток Пальма, поток с ограниченным последействием).

При моделировании систем, в которых случайные события, приводящие к изменению состояний, могут происходить только в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину, кратную значению тактового интервала T (*дискретно - стохастические модели*), для описания интервалов времени между событиями используют регулярный просеянный поток. Его можно получить, удаляя в регулярном потоке события с вероятностью π и оставляя с вероятностью $1-\pi$. Просеянный поток иногда называют дискретным пуассоновским, так как его свойства аналогичны для моментов времени, кратных периоду T, свойствам простейшего потока. К просеянному регулярному потоку приводит, например регулярный поток данных, передаваемый по каналам связи с контролем наличия сбоев в передаваемом коде и исправлением путем повторной передачи.

Вероятность того, что величина интервала между событиями в просеянном потоке окажется равным i тактам:

$$p_i = \pi^{i-1}(1-\pi).$$

Это выражение соответствует геометрическому распределению.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для интервала времени между событиями в таком потоке равны соответственно:

$$m = \frac{T}{1-\pi},$$

$$\sigma = m\sqrt{\pi} = \frac{T\sqrt{\pi}}{1-\pi}.$$

3.2 Марковский случайный процесс

Пусть имеется некоторая система, состояние которой может меняться с течением времени. Если состояние меняется случайным, непредсказуемым образом, будем говорить, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

можно перечислить (пронумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Случайный процесс называется процессом с дискретным временем, если переходы из состояния в состояние возможны только в строго определенные моменты времени. В промежутках между этими моментами система сохраняет свое состояние.

Случайный процесс называется процессом с непрерывным временем, если переход системы из состояния в состояние возможен в любой наперед неизвестный, случайный момент.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется *марковским процессом* (цепь Маркова) или процессом без последействия, если для каждого момента времени t_i вероятность любого последующего состояния системы зависит только от текущего состояния и не зависит от того, когда и каким путем система пришла в это состояние (т.е. от того, как развивался процесс в прошлом).

Иными словами, воздействие всей предыстории процесса на его будущее полностью сосредоточено в текущем значении процесса. Отсюда следует, что цепь Маркова должна обладать свойством отсутствия последствия. Это означает, что вероятность перехода в следующее состояние не должна зависеть от того, сколько времени процесс пребывал в текущем состоянии.

Можно доказать, что, если число состояний системы конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые не зависят от времени и начального состояния системы. Сумма предельных вероятностей всех состояний системы равна единице:

$$\sum_{i-1}^{n} P_i = 1.$$

Это так называемое нормировочное уравнение.

Таким образом, при $t \to \infty$ в системе устанавливается некоторый предельный *стационарный режим*, который состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени. Эта вероятность представляет собой не что иное, как относительное время пребывания системы в данном состоянии.

При моделировании систем процесс их функционирования удобно представлять в виде графа, вершинами которого являются состояния S_i, а направленные дуги описывают переходы между состояниями. Если процесс является марковским и известны вероятности переходов из состояния в состояние, то вероятности состояний P_i могут быть найдены исходя из того, что вероятность любого состояния S_i равна сумме произведений вероятностей состояний S_j, из которых есть переход в данное состояние на вероятности этих переходов p_{ji} , т.е

$$P_i = \sum_j P_J p_{ji} \ .$$

Рассмотрим на примере эту процедуру (рис 3.1.)

Система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, или S_3.

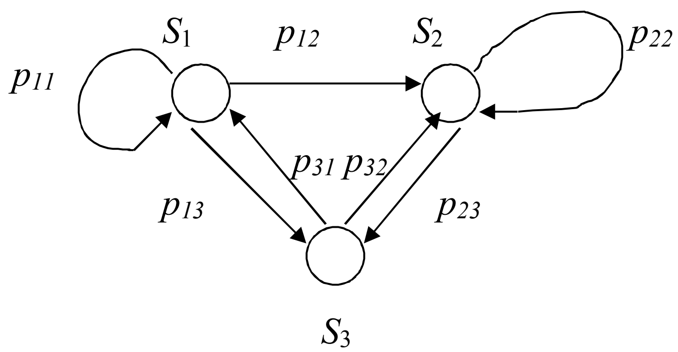


Рис. 3.1. Пример графа для случайного процесса

Запишем систему уравнений для определения вероятностей состояний:

$$P_1 = p_{11}P_1 + p_{31}P_3 \ ;$$
$$P_2 = p_{12}P_1 + p_{32}P_3 + p_{22}P_2 \ ;$$
$$P_3 = p_{13}P_1 + p_{23}P_2 \ .$$

Попытка непосредственно решить эту систему неизбежно приведет к тождеству. Но, тем не менее, решение существует и может быть получено, если воспользоваться нормировочным уравнением

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Если подставить его вместо одной из строк системы, то можно будет получить значения вероятностей состояний.

Допустим, вероятности переходов из состояния в состояние имеют следующие значения:

$$p_{11} = 0{,}25,\ p_{12} = 0{,}5,\ p_{13} = 0{,}25, p_{22} = 0{,}5, p_{23} = 0{,}5, p_{31} = 0{,}5,\ p_{32} = 0{,}5.$$

Тогда решение системы уравнений дает следующие результаты:

$$P_1 = 0{,}2, P_2 = 0{,}5, P_3 = 0{,}3.$$

3.3 Построение дискретно - стохастической модели

Рассмотрим пример построения и исследования дискретно - стохастической модели одноканальной СМО исследования вычислительного узла с использованием аппарата марковской дискретной цепи (рис. 3.2).

На вход системы через каждые два такта поступает очередная заявка. При полном заполнении очереди источник блокируется (новые заявки не генерируются до момента освобождения места в очереди). Интервалы времени обработки заявок в канале случайны и имеют геометрическое распределение с параметром π, т.е. с вероятностью $(1 - \pi)$ обработка макрокоманды в АЛУ по окончании очередного тактового интервала завершится, а с вероятностью π продлится еще на один интервал.

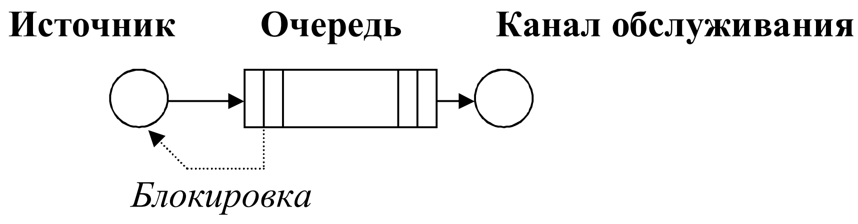


Рис. 3.2 Одноканальная СМО

Построим математическую модель и исследуем ее. Так как поток обслуживаний представляет собой просеянный регулярный поток, то процесс будет марковским, и можно определить финальные вероятности состояний этой системы.

Будем определять состояние системы трехкомпонентным вектором: t_1jt_2. Вообще удобно располагать компоненты вектора в коде состояния в том порядке, в котором в СМО расположены соответствующие элементы.

t_1 – число тактов, оставшихся до появления заявки на выходе источника ($t_1 = 0, 1, 2$). Значение 0 означает, что источник заблокирован.

j – количество заявок, находящихся в накопителе (длина очереди), $j = 0,1,2,...,n$.

t_2 определяет состояние канала обслуживания может принимать два значения: $t_2 = 0$ – канал свободен, $t_2 = 1$ – канал занят обслуживанием заявки.

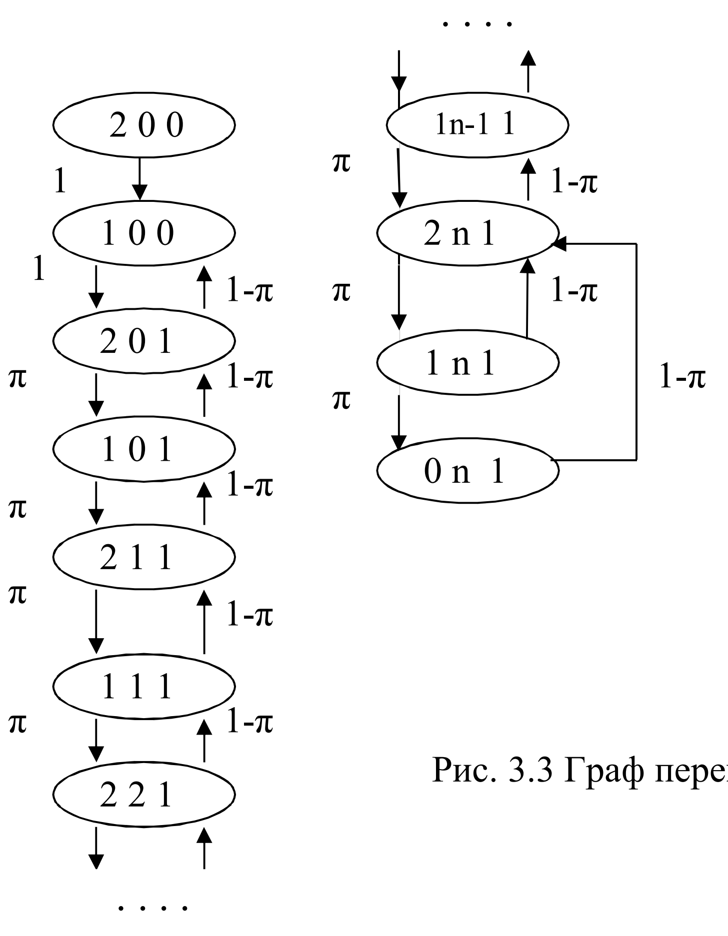


Рис. 3.3 Граф переходов

Построим граф (рис. 3.3) и систему уравнений для стационарных (финальных) вероятностей состояний P_{t1jt2}.

Состояние 200 является «невозвратным», то есть, покинув это состояние, система больше в него не вернется, поэтому $P_{200} = 0$.

1. $P_{100} = (1-\pi)P_{201} + P_{200}$.
2. $P_{201} = (1-\pi)P_{101} + P_{100}$.
3. $P_{2i1} = \pi P_{1i-11} + (1-\pi)P_{1i1}$, $(i = \overline{1, n-1})$.
4. $P_{1i1} = (1-\pi)P_{2i+11} + \pi P_{2i1}$, $(i = \overline{0, n-1})$.
5. $P_{2n1} = \pi P_{1n-11} + (1-\pi)P_{1n1} + (1-\pi)P_{0n1}$.
6. $P_{1n1} = \pi P_{2n1}$.
7. $P_{0n1} = \pi P_{1n1} + \pi P_{0n1}$.

Обозначим:

$$p = P_{100}, \qquad \omega = \frac{\pi}{1-\pi}.$$

Тогда из уравнений 1 и 2 получим

$$P_{201} = \frac{1}{1-\pi}p, \; P_{101} = \frac{\omega}{1-\pi}p.$$

Далее, проведя индукцию по i, будем иметь

$$P_{2i1} = \frac{\omega^{2i}}{1-\pi}p, \quad (i = \overline{0, n});$$

$$P_{1i1} = \frac{\omega^{2i+1}}{1-\pi}p, \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Из уравнений 6 и 7 системы определяем вероятности:

$$P_{1n1} = \omega^{2n+1}p;$$

$$P_{0n1} = \omega^{2n+2}p.$$

Уравнение 5 превращается в тождество. Используя уравнение нормировки,

$$\sum P_{t_1 j t_2} = 1 \quad ,$$

получим

$$p = \left[1 + \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{2\omega}\omega^{i} + \omega^{2n+1} + \omega^{2n+2}\right]^{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что сумма – это сумма геометрической прогрессии, получим

$$p = \frac{2(1-\pi)-1}{2(1-\pi)-\omega^{2n+2}}.$$

Используя полученное значение p (фактически это вероятность простоя АЛУ) и, рассчитав вероятности всех остальных состояний, можно найти другие характеристики системы.

В этом примере решение было получено в общем виде, т.е. вероятности представлены как функции от параметров СМО (в данном случае от n и π). Это удобно в том плане, что, если изменятся значения этих параметров, не надо будет заново строить граф и систему уравнений, достаточно подставить новые значения в выражение для p и затем рассчитать новые значения вероятностей состояний. Решение в таком виде не всегда можно получить. В частном случае достаточно построить аналитическую модель (систему алгебраических уравнений) и, решив её, например, с помощью MathCad, найти вероятности состояний.

Теперь можно перейти к вычислению значений показателей эффективности работы системы. Основные из них:

$P_{отк}$ – вероятность отказа (вероятность того, что заявка, сгенерированная источником, не будет в конечном итоге обслужена системой);

$P_{бл}$ – вероятность блокировки (вероятность застать источник или канал в состоянии блокировки);

$L_{оч}$ – средняя длина очереди;

L_c – среднее число заявок, находящихся в системе;

Q – относительная пропускная способность (вероятность того, что заявка, сгенерированная источником, будет в конечном итоге обслужена системой);

A – абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, т.е. интенсивность потока заявок на выходе системы);

$W_{оч}$ – среднее время пребывания заявки в очереди;

W_c – среднее время пребывания заявки в системе;

$K_{кан}$ – коэффициент загрузки канала (вероятность занятости канала).

Единственное состояние, когда источник заблокирован, это состояние $0n1$, значит $P_{бл}=P_{0n1}$.

Все заявки, сгенерированные источником, будут в конечном итоге обслужены, поэтому $P_{отк}=0$, $Q=1- P_{отк}=1$.

Некоторые из этих показателей фактически представляют собой средние значения случайных величин ($L_{оч}$, L_c, $W_{оч}$, W_c, A). Поэтому вспомним общее правило определения среднего значения случайной дискретной величины.

Если случайная дискретная величина X может принимать значения x_1, x_2 … x_n с вероятностями P_1, P_2,… P_n, то среднее значение этой величины равно

$$X_{ср}= \sum_{i=1}^{n} x_i P_i .$$

Воспользуемся этим соотношением для определения значения абсолютной пропускной способности A. Сразу заметим, что в качестве единицы времени мы выберем **такт**.

В течение произвольного такта на выходе системы может появиться 1 или 0 заявок. Таким образом, среднее число заявок за такт на выходе системы

$$A=1\cdot P(1)+0\cdot P(0)=1\cdot P(1).$$

Определим вероятность появления заявки в произвольном такте. Условиями для этого является наличие заявки в выходном канале к началу этого такта и окончание обработки заявки, находящейся в канале. Вероятность наличия заявки в выходном канале можно было бы получить, просуммировав вероятности всех состояний, отвечающих этому условию: $\sum P_{xx1}$. Однако для данного примера можно заметить, что единственным состоянием, когда в канале нет заявки, является состояние 010, вероятность которого равна

$$p=P_{100}.$$

Следовательно, вероятность наличия заявки в выходном канале равна $1-p$. Вероятность окончания обработки заявки $1-\pi$. Окончательно,

$$A=(1-p)(1-\pi).$$

Эту величину можно найти и другим способом. Т.к. в системе потерь заявок быть не может, следовательно, интенсивность выходного потока равна интенсивности входного потока. Источник вырабатывает 0,5 заявок за такт, если он не заблокирован, следовательно

$$A=0,5(1-P_{бл})=0,5(1-P_{0n1}).$$

Воспользовавшись тем же подходом в определении средних значений, получим:

средняя длина очереди $L_{оч}=\sum_{j} jP_{\mathrm{t1\,j\,t2}}$,

среднее число заявок в системе $L_c=\sum_{j} (j+1)P_{\mathrm{t1\,j\,t2}}$.

Определим значения временных характеристик работы этой СМО. Можно воспользоваться с этой целью формулами Литтла

$$L_c=\lambda W_c \text{ и } L_{оч}=\lambda W_{оч},$$

где λ - это интенсивность потока через систему или очередь. При этом следует заметить, что **формулы эти справедливы только в том случае, если интенсивность на выходе системы (или анализируемой части системы) равна входной интенсивности.**

В нашем примере это условие выполняется, поэтому

$W_c=L_c/A=L_c/(0,5(1-P_{бл}))$, $W_{оч}=L_{оч}/A=L_{оч}/(0,5(1-P_{бл}))$.

Теперь рассмотрим СМО, работа которой отличается от рассмотренной выше только тем, что очередная заявка, заставшая систему полностью заполненной, не блокируется, а получает отказ. Структура такой СМО представлена на рис.6.

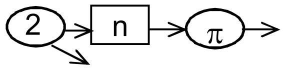


Рис. 3.4 СМО с отказами

Граф переходов для этой СМО будет отличаться от графа для рассмотренной выше системы только отсутствием вершины n01. Определим значения показателей эффективности работы.

Значение средней длины очереди $L_{оч}$, среднего числа заявок, находящихся в системе L_c и абсолютной пропускной способности A могут быть рассчитана как и в предыдущем случае.

Интенсивность входного потока $\lambda=0,5$ заявки за такт. Если мы рассчитали значение абсолютной пропускной способности A, то

$$Q= A/ \lambda \text{ и } P_{отк}=1- Q.$$

Временные характеристики

$$W_c= L_c/A, \quad W_{оч}= L_{оч}/A.$$

Мы в данном случае сначала получили значение A и, используя его, рассчитали величины других характеристик. $P_{отк}$ можно получить и иначе.

Итак, предполагаем, что на входе системы появилась очередная заявка. Определим, какова вероятность того, что эта заявка получит отказ.

Заявка получит отказ, если в тактовый момент ее появления

- система будет находиться в состоянии, когда очередь полностью заполнена (это в нашем случае состояние 1n1) ;

- не окончится обслуживание заявки в канале (вероятность этого π).

Разберемся с вероятностью состояния n11. Взять ее из решения системы уравнений, построенной по графу переходов нельзя, т.к. это означало бы, что СМО в рассматриваемый момент могла находиться в любом из возможных состояний, но раз сделано предположение о том, что **заявка появилась**, следовательно, возможны только состояния 1xx (состояния, в которых до появления очередной заявки оставался 1 такт) и в сумме вероятности этих состояний должны давать 1. Исходя из этого, вероятность состояния 1n1 необходимо нормализовать, разделив ее на сумму вероятностей всех состояний с 1 на первом месте в индексе. Окончательно получим

$$P_{отк}= \pi(P_{1n1}/\sum P_{1xx}).$$

Задание к лабораторной работе 3.

В сооответствии с заданным вариантом построить граф состояний Р-схемы .

Смысл кодировки состояний раскрыть (время до выдачи заявки, число заявок в накопителе и т.д.).

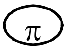
По графу построить аналитическую модель и, решив ее, определить вероятности состояний. Рассчитать теоретические значения показателей эффективности:

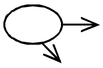
$P_{отк}$ – вероятность отказа; $P_{бл}$ – вероятность блокировки; $L_{оч}$ – средняя длина очереди; L_c – среднее число заявок, находящихся в системе; Q – относительная пропускная способность; A – абсолютная пропускная способность; $W_{оч}$ – среднее время пребывания заявки в очереди; W_c – среднее время пребывания заявки в системе, $K_{кан}$ – коэффициент загрузки канала (вероятность занятости канала).

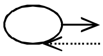
Варианты структур представлены ниже.
На схеме условно обозначены:

 Источник с фиксированным временем ожидания выдачи заявки

 Источник с вероятностью просеивания (не выдачи заявки) ρ

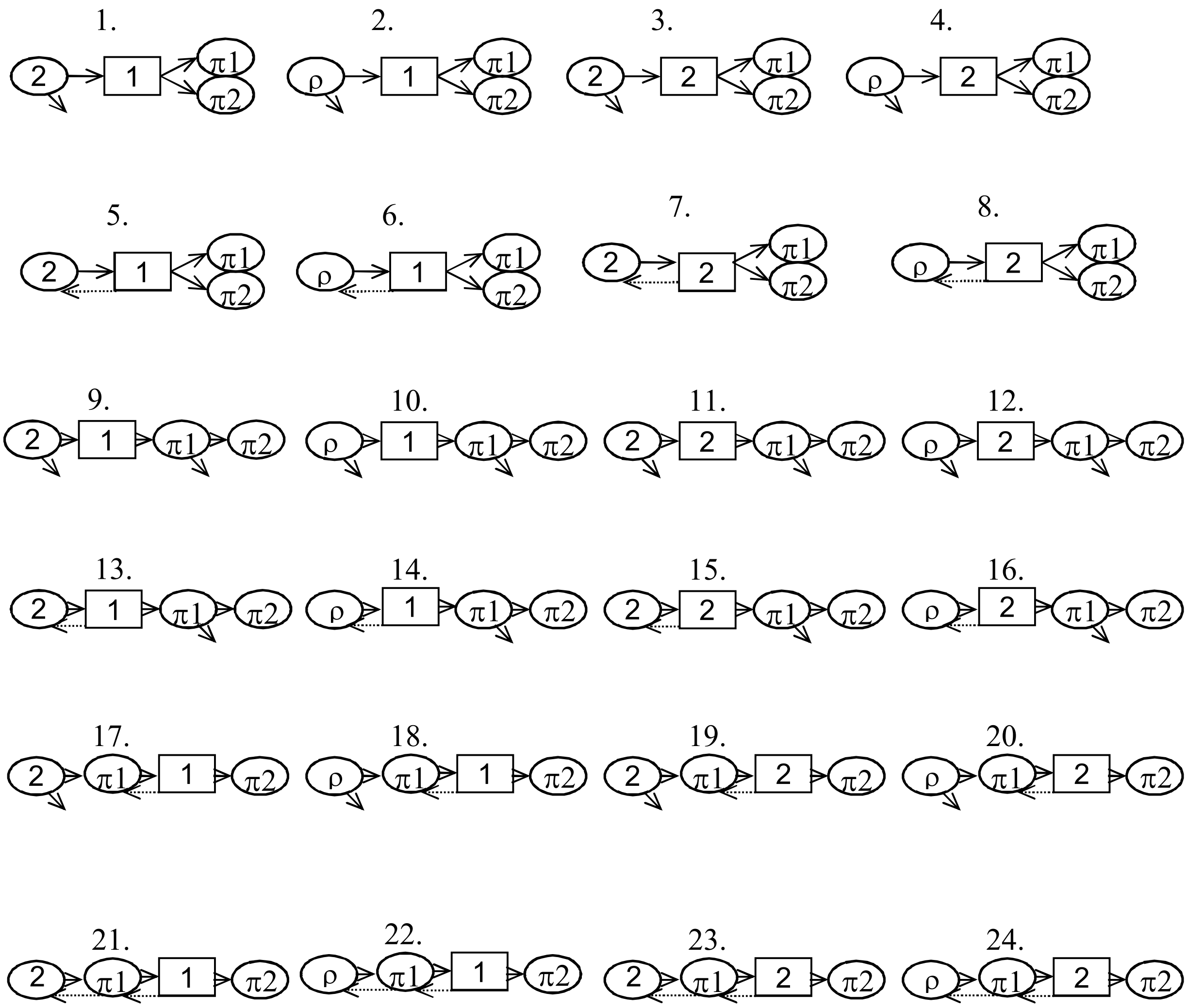
 Канал с вероятностью просеивания (не обслуживания заявки) π

 Источник/канал с дисциплиной отбрасывания заявки

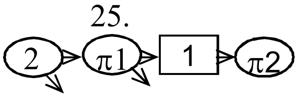
 Источник/канал с дисциплиной блокировки

 Накопитель на N заявок

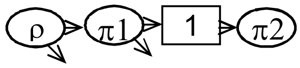
Варианты:



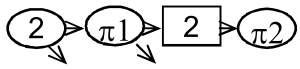
25.



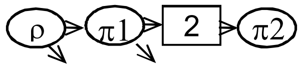
26.



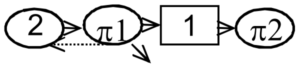
27.



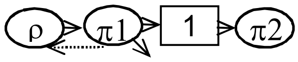
28.



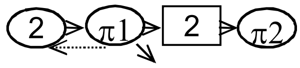
29.



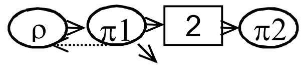
30.



31.



32.

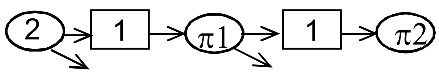


№	ρ	π1	π2
1	-	0,8	0,6
2	0,3	0,75	0,75
3	-	0,6	0,5
4	0,1	0,7	0,5
5	-	0,75	0,6
6	0,75	0,85	0,9
7	-	0,75	0,7
8	0,75	0,8	0,5
9	-	0,4	0,45
10	0,5	0,45	0,35
11	-	0,5	0,5
12	0,5	0,4	0,4
13	-	0,55	0,5
14	0,7	0,65	0,5
15	-	0,48	0,5
16	0,5	0,48	0,5
17	-	0,5	0,5
18	0,5	0,6	0,4
19	-	0,3	0,5
20	0,5	0,35	0,5
21	-	0,4	0,5
22	0,75	0,7	0,7
23	-	0,4	0,5
24	0,75	0,7	0,65
25	-	0,5	0,5
26	0,7	0,7	0,75
27	-	0,4	0,5
28	0,75	0,7	0,65

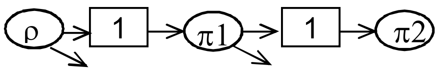
29	-	0,4	0,4
30	0,75	0,7	0,7
31	-	0,4	0,5
32	0,75	0,7	0,65

Дополнительные варианты:

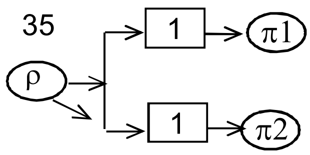
33



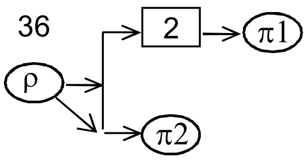
34



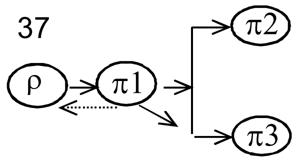
35



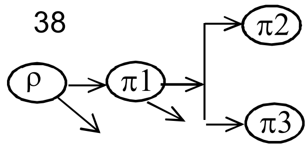
36



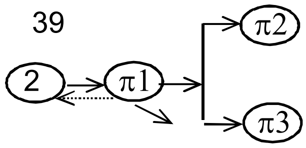
37



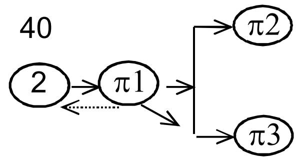
38



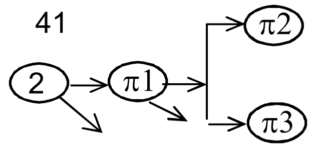
39



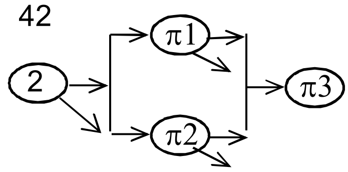
40



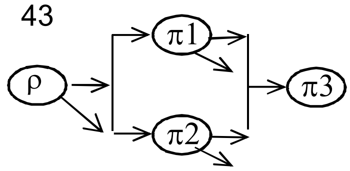
41



42



43



№	ρ	π1	π2	π 3
33	-	0,5	0,6	-
34	0,3	0,5	0,6	-
35	0,2	0,6	0,7	-
36	0,3	0,7	0,7	-
37	0,4	0,5	0,8	0,8
38	0,4	0, 5	0,8	0,7
39	0,1	0,5	0,5	0,4
40	-	0,5	0,8	0,7
41	-	0,5	0,8	0,7

42	-	0,7	0,8	0,5
43	0,3	0,7	0,65	0,5

Лабораторная работа 4

4. Построение и исследование аналитической модели дискретно - стохастической системы массового обслуживания

Для СМО, конфигурация которой задана в лабораторной работе 3 простроить имитационную модель и исследовать ее (разработать алгоритм и написать имитирующую программу, предусматривающую сбор и статистическую обработку данных для получения оценок заданных характеристик СМО). Распределение интервалов времени между заявками во входном потоке и интервалов времени обслуживания – геометрическое с соответствующим параметром (ρ, π1, π2). Если ρ не задано, то входной поток – регулярный (с указанным в обозначении источника числом тактов между заявками).

При имитации событий в модели (появление новой заявки, окончание обслуживания заявки в канале) следует исходить из следующего правила. Пусть надо реализовать случайное событие *A*, наступающее с вероятностью *p*. Будем считать, что событие наступило, если выполняется условие

$$\eta_i \le p,$$

где η_i - РРСЧ из интервала (0,1).

При построении имитационной модели необходимо предусмотреть возможность ввода значений ρ, π1, π2 с клавиатуры для тестирования правильности работы модели путем их варьирования.

Замечание: значения показателей эффективности при имитационном моделировании должны быть получены статистическим путем.