

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA
Engenharia Eletrônica

**Aplicação do Método de Regularização
Analítica a uma Antena Esférica-Circular
Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg**

Autor: Nauam Victor Reis de Oliveira
Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph
Rondineau

Brasília, DF
2022



Nauam Victor Reis de Oliveira

Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau

Brasília, DF

2022

Nauam Victor Reis de Oliveira

Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg/ Nauam Victor Reis de Oliveira. – Brasília, DF, 2022-

83 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA , 2022.

1. Aplicação da MAR. 2. Funções de Green. I. Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg

CDU

Nauam Victor Reis de Oliveira

Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 03 de Maio de 2022:

**Prof. Dr. Sébastien Roland Marie
Joseph Rondineau**
Orientador

**Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de
Amorim**
Convidado 1

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli
Convidado 2

Brasília, DF
2022

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha esposa Alexia Costa, que me dá suporte diariamente.

Ao meus amigos Daniele Dias e Elpídio Araújo que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

A minha avó Leobina Reis e meus irmãos Barbara Reis e Narciso Júnior que sempre serão meu marco zero.

Agradeço ao meu orientador Sébastien Rondineau por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa.

Resumo

Uma das muitas preocupações no desenvolvimento de antenas está em reduzir ao máximo o consumo a energia gasta e uma das várias técnicas é criar um sinal direcionado, um sinal que ilumine apenas as áreas desejadas. Assim, a eficiência da radiação é aumentada. Este problema poder ser resolvido usando as lentes de Lüneburg com vários irradiadores. Foi desenvolvido uma expressão geral usando a função diádica de Green em coordenadas esféricas. Isso criou um conjunto acoplado de equações de séries duplas, que descreve a relações entre o campo criado por qualquer fonte primária e a estrutura esférica de espalhamento que é composta de N-camadas, cada camada tem sua própria constante dielétrica, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ . As equações de séries duplas são equações de primeiro tipo, onde infelizmente, uma inversão direta geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência, então foi utilizado o método de regularização analítica (MAR) que tem como proposito transformar o problema do primeiro tipo em um problema do tipo Fredholm do segundo tipo, tornando o problema estável para a inversão e que converge. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , e quanto maior a ordem de truncamento, mais próxima a precisão está da precisão da máquina.

Palavras-chave: Método de Regularização Analítica. Funções Diádicas de Green. Lente de Lüneburg. Antena Esférica Circular.

Abstract

One of the many concerns in the development of antennas is to reduce energy consumption to a minimum and one of several techniques is to create a targeted signal, a signal that illuminates only the desired areas. Thus, the efficiency of radiation is increased. This problem can be solved using the Lüneburg lenses with several radiators. A general expression was developed using dyadic Green's function in spherical coordinates. This created a coupled set of dual series equations, which describes the relationships between the field created by any primary source and the spherical scattering structure that is composed of N -layers, each layer has its own dielectric, radius and a disk of spherical half-angle metal θ . the dual series equations are first type equations, where unfortunately, a direct inversion is generally not possible. Even if a numerical inversion was possible, nothing could guarantee its convergence. Then the Method of Analytical Regularization (MAR) was used, whose purpose is to transform the problem of the first type into a problem of the Fredholm type, making the problem stable for inversion and converging. The implementation of these equations requires truncation for a n order, and the higher the truncation order, the closer the precision is to the precision of the machine.

Key-words: Method of Analytical Regularization. Dyadic Green's Functions. Luneburg lens. Spherical Circular Antenna.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Lente de Lüneburg ideal.	19
Figura 2 – Diagrama de radiação de uma lente esférica de Lüneburg excitada por um dipolo Hertziano. (a) 4λ de diâmetros. (b) 10λ de diâmetro (GREENWOOD; JIN, 1999).	20
Figura 3 – LLD - Lente de Lüneburg Discreta.	20
Figura 4 – Duas regiões dielétricas distintas, separadas por uma superfície S' com parte composta por um PEC (<i>Perfect Electric Conductor</i> - Condutor Elétrico Perfeito).	25
Figura 5 – Definição dos parâmetros geométricos da estrutura.	37
Figura 6 – Diagrama de radiação de campo distante associado dipolo elétrico elementar.	48
Figura 7 – Lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo elétrico.	49
Figura 8 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 1 camada associado dipolo elétrico.	49
Figura 9 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 2 camada associado dipolo elétrico.	50
Figura 10 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 3 camada associado dipolo elétrico.	50
Figura 11 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 20 camada associado dipolo elétrico.	50
Figura 12 – Antena acoplada a lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo elétrico.	51
Figura 13 – Análise baseada na frequência normalizada, $\kappa_0 r_1$ e no número de camadas, N	52
Figura 14 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 0$ e $\kappa_0 r_1 = 11.05$	52
Figura 15 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 1$ e $\kappa_0 r_1 = 10.65$	52
Figura 16 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 2$ e $\kappa_0 r_1 = 10.70$	53
Figura 17 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 3$ e $\kappa_0 r_1 = 10.85$	53
Figura 18 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 20$ e $\kappa_0 r_1 = 11.00$	53
Figura 19 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento.	54
Figura 20 – Comportamento assintótico da singularidade.	55

Figura 21 – Diagrama de radiação de campo distante associado dipolo magnético elementar.	68
Figura 22 – Lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo magnético. .	68
Figura 23 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 1 camada associado dipolo magnético.	69
Figura 24 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 2 camada associado dipolo magnético.	69
Figura 25 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 3 camada associado dipolo magnético.	69
Figura 26 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 20 camada associado dipolo magnético.	70
Figura 27 – Antena acoplada a lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo magnético.	70
Figura 28 – Diagrama de radiação para análise das propriedades de radiação de antena (BALANIS, 2016).	76
Figura 29 – Diagrama de potência normalizado (dB) (BALANIS, 2016).	76

Lista de abreviaturas e siglas

4G	Quarta Geração de Redes Móveis
5G	Quinta Geração de Redes Móveis
6G	Sexta Geração de Redes Móveis
dB	Decibel
Eq.	Equação
Eqs.	Equações
GB/s	Gigabytes por Segundo
HFSS	Software de Simulação Eletromagnética.
IoT	Internet das Coisas (Internet of Things)
LLD	Lente de Lünenburg Discreta
MAR	Método de Regularização Analítica (Method of Analytical Regularization)
MATLAB	MATrix LABoratory - Software Interativo de Alta Performance Voltado para o Cálculo Numérico.
PEC	Condutor Elétrico Perfeito (Perfect Electric Conductor)
TB/s	Terabytes por Segundo

Lista de símbolos

ϕ	Componente Azimutal
θ	Componente Polar
r	Componente Radial
δ	Delta de Kronecker
ρ	Densidade da Carga Elétrica
\mathbf{W}_{rad}	Densidade de Radiação
k_n^1	Derivada da Função Esférica de Bessel do Primeiro Tipo e de Ordem n
k_n^2	Derivada da Função Esférica de Bessel do Segundo Tipo e de Ordem n
k_n^3	Derivada da Função Esférica de Hankel do Primeiro Tipo e de Ordem n
k_n^4	Derivada da Função Esférica de Hankel do Segundo Tipo e de Ordem n
$\bar{\rho}^e$	Diádico Densidade da Carga Elétrica
$\bar{\mathbf{J}}^e$	Diádico Densidade da Corrente Elétrica
$\bar{\mathbf{J}}^m$	Diádico Densidade da Corrente Magnética
$\bar{\mathbf{E}}$	Diádico Intensidade do Campo Elétrico
$\bar{\mathbf{H}}$	Diádico Intensidade do Campo Magnético
d_θ	Diagrama de Radiação de Campo Distante
\mathbf{D}	Diretividade
e_r	Erro Relativo
ω	Frequência Angular
ψ	Função de Onda Escala
\mathbf{N}	Função de Onda Vetorial Elétrica
\mathbf{M}	Função de Onda Vetorial Magnética

$\overline{\mathbf{G}}^{\text{es}}$	Função Diádico de Green de Espalhamento do Campo Elétrico
$\overline{\mathbf{G}}^{\text{es}}$	Função Diádico de Green de Espalhamento do Campo Magnético
$\overline{\mathbf{G}}^{\text{e}}$	Função Diádico de Green do Campo Elétrico
$\overline{\mathbf{G}}^{\text{m}}$	Função Diádico de Green do Campo Magnético
$\overline{\mathbf{G}}^{\text{e0}}$	Função Diádico de Green no Espaço Livre do Campo Elétrico
$\overline{\mathbf{G}}^{\text{m0}}$	Função Diádico de Green no Espaço Livre do Campo Magnético
z_n^1	Função Esférica de Bessel do Primeiro Tipo e de Ordem n
z_n^2	Função Esférica de Bessel do Segundo Tipo e de Ordem n
z_n^3	Função Esférica de Hankel do Primeiro Tipo e de Ordem n
z_n^4	Função Esférica de Hankel do Segundo Tipo e de Ordem n
\mathcal{O}	Grande O ou <i>Big O</i>
η	Impedância Característica
\mathbf{U}	Intensidade de Radiação
$\overline{\mathbf{C}}$	Matriz da Estrutura Geométrica
$\overline{\mathcal{G}}$	Matriz de Singularidade
$\overline{\Omega}$	Matriz Constante
$\overline{\mathcal{S}}_{un}(\theta)$	Matriz Infinita da Parte Metálica
$\overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\theta)$	Matriz Infinita da Parte Metálica
κ	Numero de Onda Modal
ϵ	Permeabilidade
μ	Permeabilidade
P_n^m	Polinômio de Legendre Associado de Grau n e de Ordem m
P_n	Polinômio de Legendre de Grau n
P_{rad}	Potência de radiação
$\overline{\mathbf{I}}$	Unidade Diádica
$\check{\mathbf{C}}$	Vetor da Estrutura Geométrica

ρ^e	Vetor Densidade da Carga Elétrica
\mathbf{J}^e	Vetor Densidade da Corrente Elétrica
\mathbf{J}^m	Vetor Densidade da Corrente Magnética
\mathbf{E}	Vetor Intensidade do Campo Elétrico
\mathbf{H}	Vetor Intensidade do Campo Magnético
\mathbf{r}	Vetor Posição do Observador

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Contextualização	16
1.2	Justificativa	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Objetivo Geral	17
1.3.2	Objetivo Específico	17
1.4	Estrutura do Monografia	18
2	LENTE LÜNEBURG	19
3	EXPRESSÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN	21
3.1	Determinação das equações de Maxwell	21
3.2	Determinação das equações de onda	22
3.3	Determinação das funções diádicas de Green	22
3.4	Determinação das equações estratificadas	23
3.5	Resolvendo o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo	24
3.6	Resolvendo a equação escalar de Helmholtz	27
3.7	Resolvendo a equação vetorial de Helmholtz	29
3.8	Resolvendo a equação de onda associada ao campo eletromagnético	30
3.9	Determinação das Características da Antena	30
3.9.1	Diagrama de radiação de campo distante	30
3.10	Determinação das Características da Antena	32
3.10.1	Densidade e intensidade de radiação	32
3.10.2	Potência de radiação	33
3.10.3	Diagrama de diretividade	33
4	DIFRAÇÃO POR UMA ESTRUTURA ESFÉRICA ESTRATIFICADA EM FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN	34
4.1	Função diádica de Green no espaço livre	34
4.2	Função diádica de Green de espalhamento	36
4.3	Determinação dos coeficientes de ondas esféricas	38
4.3.1	Fontes elétricas	38
4.3.2	Fontes magnética	39
5	ANTENA ALIMENTADA POR CABO COAXIAL CENTRADA	40

5.1	Determinação das equações de séries duplas	41
5.2	Método de Regularização Analítica	43
5.2.1	Considerações iniciais	44
5.2.2	Comportamento assintóticos	44
5.2.3	Regularização analítica	45
5.3	Resultados e Discussões	48
5.3.1	Dipolo elétrico elementar	48
5.3.2	Lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo elétrico	49
5.3.3	Antena acoplada a Lente de Lüneburg associada a um dipolo elétrico	51
5.3.3.1	Resultado numérico	54
6	ANTENA ALIMENTADA POR FENDA CENTRADA	56
6.1	Determinação das equações de séries duplas	57
6.2	Método de Regularização Analítica	60
6.2.1	Considerações iniciais	61
6.2.2	Comportamento assintóticos	62
6.2.3	Regularização analítica	63
6.3	Resultados e Discussões	67
6.3.1	Dipolo magnético elementar	67
6.3.2	Lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo magnético	68
6.3.3	Antena acoplada a Lente de Lüneburg associada a um dipolo magnético	70
7	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICES	74
	APÊNDICE A – PARÂMETROS DE ANTENAS	75
A.1	Antena	75
A.1.1	Diagrama de Radiação	75
A.1.2	Diagrama de Diretividade	75
	APÊNDICE B – DEFINIÇÃO DOS VETORES E MATRIZES	77
B.1	Vetores referente ao método de regularização do analítica	77
B.2	Matrizes referente as equações de séries duplas	77
B.2.1	Vetores referente as estrutura geométrica	78
B.2.2	Matrizes referente as estrutura geométrica	78
	APÊNDICE C – MATRIZES DE REGULARIZAÇÃO	79

C.1	Matriz $\overline{C}_{an}^k \cdot \overline{C}_{an}^{z^{-1}}$	79
C.2	Matriz $\overline{C}_{bn}^z \cdot \overline{C}_{bn}^{k^{-1}}$	79
C.3	Relações de recorrência	80
C.4	Expansões assintóticas para grandes ordens	81
C.5	Comportamento assintótico da matriz $\overline{C}_{an}^k \cdot \overline{C}_{an}^{z^{-1}}$	81
C.6	Comportamento assintótico da matriz $\overline{C}_{bn}^z \cdot \overline{C}_{bn}^{k^{-1}}$	82
C.7	Comportamento assintótico em relação aos raios	83

1 Introdução

1.1 Contextualização

Para o mundo moderno, a comunicação se tornou um bem de consumo essencial. Com o advento da Internet das Coisas (IoT - Internet of Things), o *streaming*, a realidade virtual e outras tecnologias que requerem uma transmissão de dados muito alta, onde isso só tende a aumentar, é necessário uma infraestrutura muito boa para atender a essa demanda. A geração de redes sem fio já está se preparando para esse crescimento, o 5G por exemplo é um novo conjunto de tecnologias sem fio que promete conexões de dados incrivelmente rápidas, podendo obter velocidades de download de mais de 1 GB/s, o que é 20 a 30 vezes mais rápido do que o 4G, já o 6G pode oferecer velocidades de incriveis 1 TB/s.

Uma pilar muito importante nessa infraestrutura é o gasto com energia, então para reduzir ao máximo o consumo, várias técnicas estão sendo desenvolvidas e aplicadas e uma dessa técnicas é a criação de um sinal direcionado, um sinal que ilumine apenas as áreas desejadas. Assim, a eficiência da radiação é aumentada. Vários tipos de antenas atendem a esses requisitos. Um deles são os arranjos de antenas, mas seu ganho diminui durante o direcionamento do feixe, que também requer um sistema de controle complexo que é a maior parte do custo de tal antena. Outro tipo são as antenas parabólicas ou de lente. No caso de uma antena refletora, a varredura é realizada girando todo o sistema de antena mecanicamente, o que aumenta a complexidade, custo, peso e tamanho do sistema, ou por deslocamento elétrico ou mecânico do irradiador, mas em uma faixa relativamente estreita de ângulos (KOROTKOV; SHABUNIN; CHECHETKIN, 2017).

As lentes de Lüneburg com vários irradiadores é uma boa alternativa para a criação de sinais direcionados. As lentes de Lüneburg são usadas para construir sistemas de antenas de varredura e multifeixe. Devido ao seu design, essa lente permite a varredura em uma ampla gama de ângulos sem distorção do padrão de radiação. Além da focalização, as lentes de Lüneburg são usados para colimação de luz de diodos de laser.

1.2 Justificativa

Uma das muitas preocupações no desenvolvimento de antenas está em reduzir ao máximo o consumo a energia gasta e uma das várias técnicas é criar um sinal direcionado, ou seja, iluminar apenas o sinal na área desejada. Portanto, a eficiência da radiação é melhorada. O uso de lentes Lüneburg com vários radiadores pode resolver esse problema.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O presente trabalho visa desenvolver uma análise matemática e numérica precisa de uma antena esférica-circular impressa acoplada a uma lente de Lüneburg alimentada por uma sonda coaxial e/ou fenda simulada.

1.3.2 Objetivo Específico

Para o desenvolvimento geral da proposta, foram listados alguns objetivos específicos:

1. Estudar a lente de Lüneburg.
2. Desenvolver:
 - a) Equações Maxwell em forma diádica;
 - b) Equações de onda em forma diádica;
 - c) Teorema vetorial-diádica de Green do segundo tipo;
 - d) Equação escalar e vetorial de Helmholtz;
 - e) Função diádica de Green no espaço livre;
 - f) Função diádica de Green da estrutura de espalhamento;
 - g) Equações de séries duplas.
3. Aplicar o MAR:
 - a) Trocar de variáveis;
 - b) Definir o controle do comportamento da singularidade;
 - c) Analisar o comportamento assintótico;
 - d) Realizar a regularização.
4. Simular:
 - a) Escrever o algoritmo no *software* MATLAB;
 - b) Verificar a convergência numérica da solução;
 - c) Plotar a radiação de campo distante;
 - d) Comparar os resultados com o *software* Ansys HFSS.
5. Realizar os procedimentos 2-4 para fonte magnética.

1.4 Estrutura do Monografia

A lente de Lüneburg tem como uma das suas características a focalização, como mostrado no capítulo 2. Assim, parece necessário adquirir um ferramenta que permite a análise de lentes esféricas bem como das fontes associadas a elas.

Para este propósito, nos capítulo 3 e 4, a técnica selecionada será baseada na proposta do Chen-To Tai (TAI, 1994) para uma esfera metálica ou dielétrica e meios estratificados e também baseado no trabalho do Le-Wei Li, Pang-Shyan Kooi, Mook-Seng Leong e Tat-Soon Yee, (Le-Wei Li et al., 1994), onde é tratando em particular a difusão por uma estrutura dielétrica esférica multicamadas. Partindo desses estudos, é desenvolvido uma expressão geral usando a função diádica de Green em coordenadas esféricas para fonte elétrica e magnética. Isso cria um conjunto acoplado de equações de séries duplas, que descreve a relações entre o campo criado por qualquer fonte primária e a estrutura esférica de espalhamento que é composta de N-camadas, cada camada tem sua própria constante dielétrica, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ .

A análise das características da antena, capítulo 5 e 6, é baseado nos coeficientes, que contêm todas as informações que descrevem a fonte, esses coeficientes estão inseridas no conjunto acoplado de equações de séries duplas.

As equações de séries duplas são equações de primeiro tipo, onde há um vetor de incógnitas e um vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência. Então para extrair os coeficientes é necessário seguir o método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization). O propósito dessa regularização é transformar o problema do primeiro tipo em um problema do tipo Fredholm do segundo tipo. Isso nos garantirá que existe uma e apenas uma solução. A implementação dessas equações requer um truncamento e quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso estará o resultado.

O capítulo 5 será responsável pelo desenvolvimento da antena alimentada por um cabo coaxial centrado e o capítulo 6 será responsável pelo desenvolvimento da antena alimentada por uma fenda.

2 Lente Lüneburg

A lente Lüneburg, inventada por R.K. Lüneburg em 1944, é uma lente com índice de gradiente esfericamente simétrico. A lente de Lüneburg é comumente descrita por uma imagem de raio óptico geométrico, que indica que as ondas esféricas emitidas por uma fonte pontual colocada na borda da lente são convertidas em ondas planas locais, tornando a radiação do sistema altamente diretiva. O feixe de transmissão pode ser direcionado movendo a alimentação da antena, Figura 1.

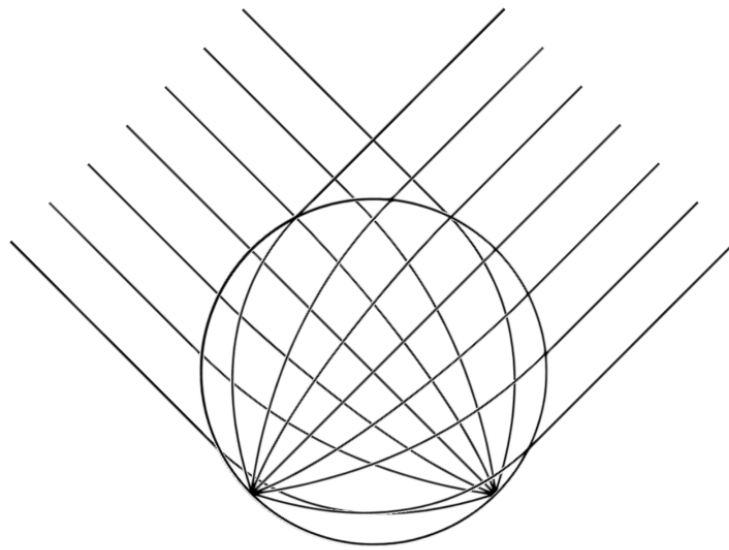


Figura 1 – Lente de Lüneburg ideal.

Idealmente, a constante dielétrica, ϵ , do material que compõe a lente, decai de 2 em seu centro para 1 em sua superfície de forma constante (LUNEBURG; WOLF; HERZBERGER, 1964, Eq. 29.53), mas nesse trabalho utilizaremos a equação para um decaimento discreto:

$$\epsilon_i = 2 - \left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2, \quad (2.1)$$

onde r_1 é o maior raio da lente. Como o índice de refração na superfície é o mesmo do meio circundante, nenhuma reflexão ocorre na superfície, em outras palavras, a superfície da lente tem sua impedância casada com o meio que a envolve.

Na lente de Lüneburg, o diagrama de radiação é diretiva e se torna mais diretiva conforme o tamanho da lente aumenta (GREENWOOD; JIN, 1999), na Figura 2 há o diagrama de radiação referente a duas lentes de Lüneburg, uma com 4λ de diâmetro e outra com 10λ de diâmetros, elas são excitadas por um dipolo Hertziano. Observe que a radiação dos campos são simétricos, então metade de cada campo é mostrada no mesmo

gráfico polar. O nível do lóbulo lateral está abaixo do -15 dB. Os parâmetros de antenas estão descritos no Apêndice A.

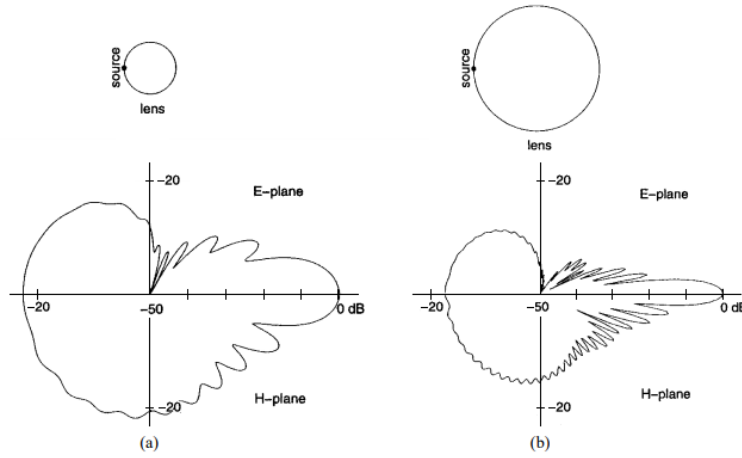


Figura 2 – Diagrama de radiação de uma lente esférica de Lüneburg excitada por um dipolo Hertziano. (a) 4λ de diâmetros. (b) 10λ de diâmetro (GREENWOOD; JIN, 1999).

Uma técnicas de construção de uma lente de Lüneburg é fazer a estrutura em camadas concêntricas discretas, Figura 3, onde i é a camada e N é a quantidade de camadas, cada uma com um índice de refração diferente, como descrito na Eq. 2.1. Essas camadas formam um perfil de índice de refração escalonado que difere ligeiramente da solução de Lüneburg.

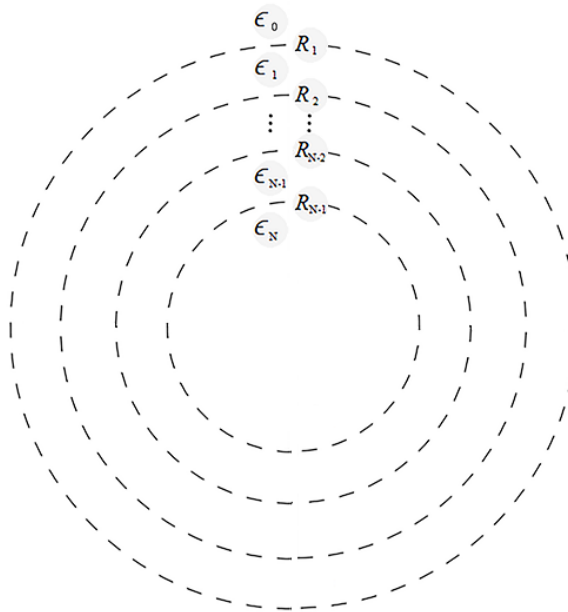


Figura 3 – LLD - Lente de Lüneburg Discreta.

3 Expressão do Campo Eletromagnético em Funções Diádicas de Green

As estruturas examinadas possuem geometria esférica. Portanto, a análise será expressa em um sistema de coordenadas esféricas. Como resultado, este tipo de expressão permite demonstrar a existência de modos naturais completamente separados uns dos outros. A técnica aqui selecionada é baseada na proposta do Chen-To Tai ([TAI, 1994](#)) no âmbito do estudo da influência da presença de uma esfera metálica ou dielétrica e meios estratificados. Posteriormente, Le-Wei Li, Pang-Shyan Kooi, Mook-Seng Leong e Tat-Soon Yee publicou um trabalho ([Le-Wei Li et al., 1994](#)) tratando em particular da difusão por uma estrutura dielétrica esférica multicamadas.

3.1 Determinação das equações de Maxwell

As equações de Maxwell fasorial ([TAI, 1994](#)) descrevem como as fontes, vetor densidade da corrente elétrica, $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$ e densidade da carga elétrica, $\rho^e(\mathbf{r})$, agem sobre o vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e o vetor intensidade do campo magnético, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.1b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho^e(\mathbf{r}), \quad (3.1c)$$

$$\mu\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1d)$$

onde i é a unidade imaginária e ω é a frequência angular. A permissividade, ϵ , e a permeabilidade, μ , que são grandezas escalares, pois o meio é homogêneo e isotrópico.

Para elevar as equações de Maxwell em forma diádica em um sistema de 3-dimensões, consideraremos três conjuntos de campos de oscilação harmônica gerados por três distribuições de corrente infinitesimais com isso temos:

$$\nabla \times \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{H}_j(\mathbf{r}), \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_j^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\mathbf{E}_j(\mathbf{r}), \quad (3.2b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \rho_j^e(\mathbf{r}), \quad (3.2c)$$

$$\mu\nabla \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.2d)$$

e adicionando um vetor unitário \mathbf{e}_j e somando os 3 conjuntos de equações em relação a j ,

temos a seguinte relação:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad (3.3a)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad (3.3b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\rho}^e(\mathbf{r}), \quad (3.3c)$$

$$\mu\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.3d)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j(\mathbf{r})e_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij}(\mathbf{r})e_i e_j.$$

3.2 Determinação das equações de onda

As Eqs. 3.1a e 3.1b são equações diferenciais acopladas de primeira ordem, onde o vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, e o vetor intensidade do campo magnético, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, são desconhecidos. O desacoplamento dos vetores de intensidade dos campos, nos custa um aumento da ordem das equações diferenciais para a segunda ordem, também conhecida como equações de onda.

Para desacoplar os vetores de intensidade dos campos, temos que rotacionar as Eqs. 3.1a e 3.1b:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.4a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.4b)$$

inserindo as Eqs. 3.1b e 3.1a nas Eqs. 3.4a e 3.4b, respectivamente, assim temos as equações de onda:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{J}^e(\mathbf{r}), \quad (3.5a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^e(\mathbf{r}), \quad (3.5b)$$

e na forma diádica, as equações de onda são:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}), \quad (3.6a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}), \quad (3.6b)$$

onde o numero de onda é denotado por $\kappa = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

3.3 Determinação das funções diádicas de Green

A função diádica de Green é uma técnica introduzida principalmente para formular vários problemas eletromagnéticos pontuais de uma maneira sistemática, sendo tratado

como um problema geral. Para isso, será introduzido as funções diádicas de Green elétrica, $\overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, e magnética, $\overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.7a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.7b)$$

onde:

$$\overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad (3.8a)$$

$$\overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\omega\mu\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad (3.8b)$$

$$\overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = i\omega\mu\overline{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}). \quad (3.8c)$$

3.4 Determinação das equações estratificadas

Até agora, desenvolvemos as equações considerando que o vetor posição em um ponto do campo sendo o mesmo que o vetor posição da fonte, no entanto, também devemos desenvolver as equações para vetores posição em um ponto do campo diferente da fonte e para regiões com constantes dielétricas diferentes. Para isso, introduziremos algumas notações, então as equações de Maxwell e as equações de onda serão reescritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = i\omega\mu_f\mathbf{H}_f(\mathbf{r}), \quad (3.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s - i\omega\epsilon_f\mathbf{E}_f(\mathbf{r}), \quad (3.9b)$$

$$\epsilon_f\nabla \cdot \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \rho_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9c)$$

$$\mu_f\nabla \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.9d)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = i\omega\mu_f\mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9e)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9f)$$

as equações de Maxwell e as equações de onda em forma de funções diádicas de Green, serão reescritas como:

$$\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{sf}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_{sf}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.10a)$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{sf}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_f^s + \kappa_f^2\overline{\mathbf{G}}_{sf}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.10b)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \overline{\mathbf{G}}_{sf}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_f^s, \quad (3.10c)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \overline{\mathbf{G}}_{sf}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_f^s, \quad (3.10d)$$

onde δ é denominado delta de Kronecker, as camadas são definidas pelo índice $f = (0, 1, \dots, N)$, a camada onde se encontra a fonte é definida pelo índice $s \in f$, as interfaces são definidas por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ com $i = (1, \dots, N)$ e a interface onde se encontra a fonte é definida pelo índice $\odot \in i$.

3.5 Resolvendo o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo

O Teorema de Green foi descrito por George Green ([GREEN, 2008](#)), usando uma variação do teorema da divergência¹ e originalmente publicado como livro em Nottingham, 1828. O teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo é a soma entre dois teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo. Para o primeiro teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo, temos que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_1 &= \bar{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}}_1 &= (\nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \bar{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}),\end{aligned}$$

então:

$$\int_V [(\nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \bar{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\bar{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}, \quad (3.11)$$

e para o segundo teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo, temos que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_2 &= \nabla \times \bar{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}}_2 &= (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - (\nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}),\end{aligned}$$

então:

$$\int_V [(\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - (\nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\nabla \times \bar{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}. \quad (3.12)$$

Portanto, o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo é a soma dos dois teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo:

$$\int_V [(\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\bar{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q} + \nabla \times \bar{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}. \quad (3.13)$$

Usaremos o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo para resolver o vetor intensidade do campo elétrico $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$ em função de uma fonte elétrica, $\mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}')$. A figura 4 descreve um meio estratificado.

Para determinar $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, aplicaremos $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_f(\mathbf{r}')$ na Eq. 3.13, onde será necessário fazer algumas manipulações, incluindo algumas identidades diádicas² e uma convolução do vetor intensidade do campo elétrico posicionado na fonte, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r}')$, com

¹ Teorema da divergência: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\bar{\mathbf{S}}$

$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{B}} = (\bar{\mathbf{B}})^T \cdot \mathbf{A}$

² Identidades diádicas:

$\mathbf{A} \times \bar{\mathbf{B}} = -[(\bar{\mathbf{B}})^T \times \mathbf{A}]^T$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \bar{\mathbf{C}}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}}$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \bar{\mathbf{C}}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \bar{\mathbf{C}} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \bar{\mathbf{C}})$

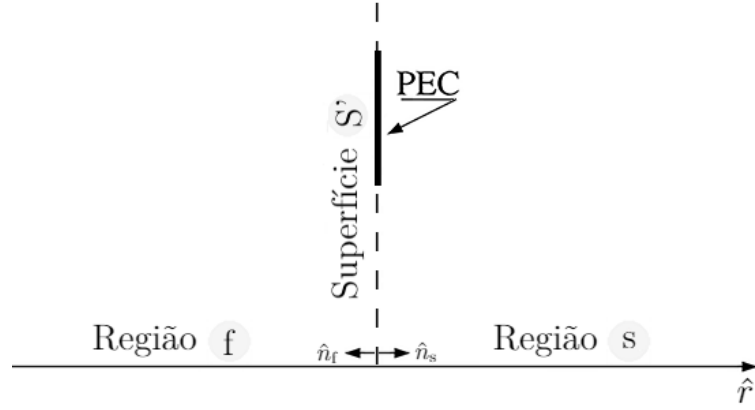


Figura 4 – Duas regiões dielétricas distintas, separadas por uma superfície S' com parte composta por um PEC (*Perfect Electric Conductor* - Condutor Elétrico Perfeito).

a função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, resultando no vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \int_{V'} \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (3.14)$$

assim encontramos a seguinte função:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.15)$$

e para uma nova manipulação, aplicaremos $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')$, assim temos:

$$\begin{aligned} i\omega\mu_s \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') dV' = \dots \\ \dots \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')] dS'. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para achar a função que satisfaça uma equação diferencial no interior de uma região conhecida é necessário saber as condições de contorno, para uma interface entre dois meios dielétricos os campos elétricos e magnéticos tangenciais são contínuos:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_s(\mathbf{r})], & 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_s(\mathbf{r})], \\ 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], & 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{G}}_{ff}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \\ 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r})}{\mu_f} - \frac{\nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r})}{\mu_s} \right], & 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r})}{\epsilon_f} - \frac{\nabla \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r})}{\epsilon_s} \right], \\ 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mu_f} - \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mu_s} \right], & 0 &= \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{ff}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\epsilon_f} - \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\epsilon_s} \right]. \end{aligned}$$

Podemos aplicar essas condições de contorno na Eq. 3.15, junto com as identidades diádicas e assim obtemos:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{\mu_f}{\mu_s} \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.17)$$

agora inserimos a Eq. 3.17 na Eq. 3.16:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = i\omega\mu_f \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') dV', \quad (3.18)$$

o vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green elétrica, $\overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, com uma fonte elétrica, $\mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}')$.

Para determinar o vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, em função de uma fonte magnética, $\mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}')$, aplicaremos $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{G}}_{ff}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_f(\mathbf{r}')$ na Eq. 3.13, e uma convolução do vetor intensidade do campo magnético posicionado na fonte, $\mathbf{H}_f(\mathbf{r}')$, com a função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, resultando no vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \int_{V'} \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (3.19)$$

utilizando as equações de Maxwell Eq. 3.9b, podemos reescrever como:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_f} \int_{V'} \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (3.20)$$

assim encontramos a seguinte função:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_f} \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\overline{\mathbf{G}}_{ff}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}') + \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{ff}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.21)$$

e para uma nova manipulação, aplicaremos $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_s(\mathbf{r}')$, assim temos:

$$\begin{aligned} \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla \times \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') dV' = \dots \\ \dots \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}')] dS'. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Podemos aplicar essas condições de contorno na Eq. 3.21, junto com as identidades diádicas e assim obtemos:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_s} \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.23)$$

agora inserimos a Eq. 3.23 na Eq. 3.22:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_s} \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla \times \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') dV', \quad (3.24)$$

definimos $\nabla \times \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') = i\omega\epsilon_s \mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}')$

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = - \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}') dV', \quad (3.25)$$

o vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green magnética, $\overline{\mathbf{G}}_{fs}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, com uma fonte magnética, $\mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}')$.

3.6 Resolvendo a equação escalar de Helmholtz

A equação de onda escalar de Helmholtz é escrita como:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (3.26)$$

onde ψ é a função de onda escalar e k é o número de onda modal.

Toda a análise será expressa em um sistema de coordenadas esféricas, então a resolução dessa equação também será expressar no sistema de coordenadas esféricas. Portanto a equação de onda escalar de Helmholtz com o Laplaciano em coordenadas esféricas, fica:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.27)$$

A resolução dessa equação é feita separando as variáveis. Para fazer isso, a função de onda é decomposta em um produto de funções com uma única variável:

$$\psi(k, \mathbf{r}) = \psi(kr, \theta, \phi) = R(kr)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (3.28)$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi[$. Substituindo a função de onda decomposta na Eq. 3.27, temos que:

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0, \quad (3.29)$$

multiplicando por r^2 e dividindo por $R\Theta\Phi$ a Eq. 3.29:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 = 0. \quad (3.30)$$

Agora que cada função é independente, três equações diferenciais surgem. A primeira função independente que será analisada é a função $\Phi(\phi)$ onde m é uma constante complexa:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad (3.31)$$

a solução dessa equação diferencial é uma combinação linear de exponenciais complexas $e^{\pm im\phi}$:

$$\Phi(\phi) = a_m^e(\phi) \cos(m\phi) + a_m^o(\phi) \sin(m\phi) = \sum_{\beta=e,o} a_m^\beta(\phi) f_m^\beta(\phi), \quad (3.32)$$

como $\Phi(\phi)$ deve ser uma função periódica cujo período se divide igualmente em 2π (COURANT, 1989, Ch. V, §8), m é necessariamente um número inteiro e $f_m^\beta(\phi)$ é:

$$f_m^\beta(\phi) = \begin{cases} \cos(m\phi), & \text{se } \beta = e \quad (\text{ímpar}) \quad m \in \mathbb{N} \\ \sin(m\phi), & \text{se } \beta = o \quad (\text{par}) \quad m \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \quad (3.33)$$

A segunda função independente que será analisada é a função $\Theta(\theta)$, onde l é uma constante complexa:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l, \quad (3.34)$$

para essa análise, será adotado o seguinte passo:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d}{d \cos \theta} = -\sin \theta \frac{d}{d \cos \theta}, \quad (3.35)$$

onde essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d \cos \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{d \cos \theta} \right) + \left(l - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (3.36)$$

e a solução dessa equação diferencial é baseada na solução da equação diferencial de Legendre, com $l = n(n+1)$ e n sendo necessariamente um número natural, $n \in \mathbb{N}$ (COURANT, 1989, Ch. VII, §5) (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 8.1.1), onde possui duas soluções linearmente independentes, o polinômio de Legendre associado de primeiro e segundo tipo;

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} P_n^m(z), & \text{se } |1-z| < 2 \\ Q_n^m(z), & \text{se } |z| > 1 \end{cases}, \quad (3.37)$$

a única solução que satisfaz a equação diferencial onde $z = \cos \theta$ é a solução do polinômio de Legendre associado de primeiro tipo:

$$\Theta(\theta) = \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(\theta) P_n^m(\cos \theta). \quad (3.38)$$

E a terceira e última função independente que será analisada é a função $R(r)$:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) + k^2 r^2 = 0, \quad (3.39)$$

onde essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d(kr)} \left((kr)^2 \frac{dR}{d(kr)} \right) + \left((kr)^2 - n(n+1) \right) R = 0, \quad (3.40)$$

e a solução dessa equação diferencial (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 10.1.1) é:

$$R(kr) = \sum_{\alpha=1}^4 a_n^{\alpha}(kr) z_n^{\alpha}(kr), \quad (3.41)$$

onde:

- z_n^1 é a funções esféricas de Bessel do primeiro tipo e de ordem n ,
- z_n^2 é a funções esféricas de Bessel do segundo tipo e de ordem n ,
- z_n^3 é a funções esféricas de Hankel do primeiro tipo e de ordem n ,

- z_n^4 é a funções esféricas de Hankel do segundo tipo e de ordem n ,

essas soluções pode ser reescrita como uma combinação linear da funções esféricas de Bessel e Hankel do primeiro tipo.

Com isso a função escalar de onda de Helmholtz é uma serie e assume a seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1,3} \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \psi_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (3.42)$$

onde:

$$\psi_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = z_n^{\alpha}(kr) P_n^m(\cos\theta) f_m^{\beta}(\phi), \quad (3.43)$$

e as constantes podem ser reescritas como:

$$a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = a_n^{\alpha}(kr) a_{mn}(\theta) a_m^{\beta}(\phi). \quad (3.44)$$

3.7 Resolvendo a equação vetorial de Helmholtz

Resolvida a equação de onda escalar, resta estender a solução para o problema vetorial. A equação de onda vetorial de Helmholtz é escrita como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} = 0, \quad (3.45)$$

onde as soluções dessa equação diferencial são $\bar{\mathbf{L}}$, $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{N}}$ que são vetores esféricos harmônicos, são ortogonais entre si e estão relacionadas a função de onda escalar de Helmholtz. A relação entre elas são:

$$\bar{\mathbf{L}} = \nabla \psi, \quad (3.46a)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{\mathbf{N}} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}), \quad (3.46b)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}), \quad (3.46c)$$

por tanto, as funções são descritas como:

$$\bar{\mathbf{L}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{z_n^{\alpha}(kr)}{r} \left[\sigma^{\beta} t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\phi} - t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi) \hat{\theta} \right] + \frac{dz_n^{\alpha}(kr)}{dr} t_{mn}^0(\theta) f_m^{\beta}(\phi) \hat{r}, \quad (3.47a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = z_n^{\alpha}(kr) \left[\sigma^{\beta} t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\theta} + t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi) \hat{\phi} \right], \quad (3.47b)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = k_n^{\alpha}(kr) \left[\sigma^{\beta} t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\phi} - t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi) \hat{\theta} \right] + \frac{z_n^{\alpha}(kr)}{kr} t_{mn}^3(\theta) f_m^{\beta}(\phi) \hat{r}, \quad (3.47c)$$

onde:

$$\begin{aligned}
t_{mn}^0(\theta) &= P_n^m(\cos\theta), & t_{mn}^1(\theta) &= \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta), \\
t_{mn}^2(\theta) &= -\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}, & t_{mn}^3(\theta) &= n(n+1)P_n^m(\cos\theta), \\
k_n^\alpha(kr) &= \frac{1}{kr} \frac{d[rz_n^\alpha(kr)]}{dr}, & \sigma^\beta &= \begin{cases} -1, & \text{se } \beta = e \\ +1, & \text{se } \beta = o \end{cases}.
\end{aligned}$$

3.8 Resolvendo a equação de onda associada ao campo eletromagnético

Devido à geometria, é natural expandir a forma geral do campo eletromagnético em vetores esféricos harmônicos:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\bar{\beta}}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) b_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = -i \frac{E_0}{\eta_f} \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\bar{\beta}}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) b_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}). \quad (3.48b)$$

Em alguns momentos deste trabalho precisaremos simplificar a notação, então a relação de equivalência entre as notações são:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha, \beta, m, n} &\equiv \sum_{\alpha=1,3} \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty}, & \sum_{\alpha, n} &\equiv \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty}, & \sum_{\beta, m, n} &\equiv \sum_{\alpha=1,3} \sum_{n=0}^{\infty}, \\
\bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta fi} &\equiv \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}_i), & \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f'} &\equiv \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}'), & \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f} &\equiv \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \\
\bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta fi} &\equiv \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}_i), & \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f'} &\equiv \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}'), & \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f} &\equiv \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \\
z_n^{\alpha fi} &\equiv z_n^\alpha(\mathbf{k}_f r_i), & z_n^{\alpha f'} &\equiv z_n^\alpha(\mathbf{k}_f r'), & z_n^{\alpha f} &\equiv z_n^\alpha(\mathbf{k}_f r), \\
k_n^{\alpha fi} &\equiv k_n^\alpha(\mathbf{k}_f r_i), & k_n^{\alpha f'} &\equiv k_n^\alpha(\mathbf{k}_f r'), & k_n^{\alpha f} &\equiv k_n^\alpha(\mathbf{k}_f r).
\end{aligned}$$

3.9 Determinação das Características da Antena

Todo o estudo desenvolvido aqui é baseado em coeficientes de ondas esféricas. Esses coeficientes contêm todas as informações que descrevem a fonte. Assim, as grandezas físicas que caracterizam essa fonte devem ser extraídas desses coeficientes. Para o campo de antenas, é costume focar mais particularmente nos diagrama de radiação de campo distante, potência irradiada e diretividade.

3.9.1 Diagrama de radiação de campo distante

O vetor intensidade do campo elétrico fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\beta, m, n} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta 0} a_{mn}^{3\beta 0} + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} 0} b_{mn}^{3\beta 0}, \quad (3.49)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta 0} = z_n^{30} \left[\sigma^\beta t_{mn}^1(\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{\theta} + t_{mn}^2(\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{\phi} \right], \quad (3.50a)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta 0} = k_n^{30} \left[\sigma^\beta t_{mn}^1(\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{\phi} - t_{mn}^2(\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{\theta} \right] + \frac{z_n^{30}}{\kappa_0 r} t_{mn}^3(\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{r}. \quad (3.50b)$$

Por tanto, podemos escrever o vetor intensidade do campo elétrico fora da lente em termo de componentes:

$$\mathbf{E}_{0r}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\beta, m, n} \frac{z_n^{30}}{\kappa_0 r} t_{mn}^3(\theta) b_{mn}^{3\beta 0} f_m^\beta(\phi), \quad (3.51a)$$

$$\mathbf{E}_{0\theta}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\beta, m, n} \left[\sigma^\beta z_n^{30} t_{mn}^1(\theta) a_{mn}^{3\beta 0} - k_n^{30} t_{mn}^2(\theta) b_{mn}^{3\beta 0} \right] f_m^\beta(\phi), \quad (3.51b)$$

$$\mathbf{E}_{0\phi}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\beta, m, n} \left[z_n^{30} t_{mn}^2(\theta) a_{mn}^{3\beta 0} + \sigma^\beta k_n^{30} t_{mn}^1(\theta) b_{mn}^{3\beta 0} \right] f_m^\beta(\phi). \quad (3.51c)$$

As expansões assintóticas da função de Hankel do primeiro tipo e a derivada da função de Hankel do primeiro tipo para grandes argumentos, $r \rightarrow \infty$, ([ABRAMOWITZ, 1965](#), Eqs. 9.2.3) são:

$$z_n^3(\kappa_0 r) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty),$$

$$k_n^3(\kappa_0 r) \sim (-i)^n \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty),$$

e com isso podemos escrever o vetor intensidade do campo elétrico para o campo distante como:

$$\mathbf{E}_{0r}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{E}_{0\theta}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} d_\theta(\theta, \phi) + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty), \quad (3.52b)$$

$$\mathbf{E}_{0\phi}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} d_\phi(\theta, \phi) + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty), \quad (3.52c)$$

onde o diagrama de radiação de campo distante é:

$$d_\theta(\theta, \phi) = \sum_{\beta, m, n} (-i)^{n+1} \left[\sigma^\beta t_{mn}^1(\theta) a_{mn}^{3\beta 0} - i t_{mn}^2(\theta) b_{mn}^{3\beta 0} \right] f_m^\beta(\phi), \quad (3.53a)$$

$$d_\phi(\theta, \phi) = \sum_{\beta, m, n} (-i)^{n+1} \left[t_{mn}^2(\theta) a_{mn}^{3\beta 0} + i \sigma^\beta t_{mn}^1(\theta) b_{mn}^{3\beta 0} \right] f_m^\beta(\phi). \quad (3.53b)$$

Normalmente, o diagrama de radiação de campo distante, é visualizado a partir da componente principal ($CP_\phi(\theta)$) e da componente cruzada ($CC_\phi(\theta)$), dados pelos planos $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$, respectivamente.

3.10 Determinação das Características da Antena

Todo o estudo desenvolvido aqui é baseado em coeficientes de ondas esféricas. Esses coeficientes contêm todas as informações que descrevem a fonte. Assim, as grandezas físicas que caracterizam essa fonte devem ser extraídas desses coeficientes. Para o campo de antenas, é costume focar mais particularmente nos diagrama de radiação de campo distante, potência irradiada e diretividade.

3.10.1 Densidade e intensidade de radiação

A densidade média de potência ou densidade de radiação (BALANIS, 2016, Eqs. 2-8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})]. \quad (3.54)$$

Sabemos que os campos elétrico e magnético fora da lente é descrito como:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\beta, m, n} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta 0} a_{mn}^{3\beta 0} + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} 0} b_{mn}^{3\beta 0}, \quad (3.55a)$$

$$\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}) = -i \frac{E_0^*}{\eta_0} \sum_{\beta, m, n} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{*3\beta 0} a_{mn}^{3\beta 0} + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{*3\bar{\beta} 0} b_{mn}^{3\beta 0}, \quad (3.55b)$$

As relações ortogonais e ortonormais entre as duas funções de onda vetorial esférica com expansão assintótica $r \rightarrow \infty$, são:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta 0} \times \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{*3\beta 0} &= \frac{-i}{\kappa_0^2 r^2} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \\ \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta 0} \times \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{*3\bar{\beta} 0} &= \frac{\sigma^{\beta}}{\kappa_0^2 r^2} \left[t_{mn}^1(\theta) t_{mn}^{*2}(\theta) |f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + t_{mn}^2(\theta) t_{mn}^{*1}(\theta) |f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \\ \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} 0} \times \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{*3\beta 0} &= \frac{\sigma^{\bar{\beta}}}{\kappa_0^2 r^2} \left[t_{mn}^1(\theta) t_{mn}^{*2}(\theta) |f_m^{\beta}(\phi)|^2 + t_{mn}^2(\theta) t_{mn}^{*1}(\theta) |f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \\ \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} 0} \times \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{*3\bar{\beta} 0} &= \frac{-i}{\kappa_0^2 r^2} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Aplicando essas relações na densidade de radiação, Eq. 3.54, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{rad} &= \frac{-|E_0|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2 r^2} \sum_{\beta, m, n} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right] \hat{r} + \dots \\ &\quad \dots \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde aplicamos as identidades do complexo conjugado ³.

³ Identidades complexo conjugado:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ z^* &= a - ib \\ (z + w)^* &= z^* + w^* \\ (z - w)^* &= z^* - w^* \\ (zw)^* &= z^* w^* \\ \left(\frac{z}{w}\right)^* &= \frac{z^*}{w^*}, \text{ para } w \neq 0 \\ zz^* &= |z|^2 \end{aligned}$$

A intensidade de radiação (BALANIS, 2016, Eqs. 2-12) pode ser escrito como:

$$\mathbf{U} = r^2 \mathbf{W}_{rad}, \quad (3.57)$$

então inserimos a Eq. 3.56 na Eq. 3.57, para obtermos a intensidade de radiação:

$$\mathbf{U} = \frac{-|E_0|^2}{2\eta_0\kappa_0^2} \sum_{\beta,m,n} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right] \hat{r} + \dots \quad (3.58)$$

$$\dots \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty).$$

3.10.2 Potência de radiação

A potência radiada (BALANIS, 2016, Eqs. 2-9) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \hat{r} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{U} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (3.59)$$

aplicando a Eq. 3.58 na Eq. 3.59, temos que a potência radiada é:

$$P_{rad} = \frac{-|E_0|^2}{2\eta_0\kappa_0^2} \sum_{\beta,m,n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right], \quad (3.60)$$

A integral do polinômio associado de Legendre, (ABRAMOWITZ, 1965, Eqs. 8.14.14) é definido como:

$$\int_0^{\pi} |t_{mn}^1(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = m \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$\int_0^{\pi} |t_{mn}^2(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \left(2 \frac{n(n+1)}{2n+1} - m \right) \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

e

$$\int_0^{2\pi} |f_m^{\beta}(\phi)|^2 d\phi = \pi,$$

então podemos reescrever a potência radiada como:

$$P_{rad} = -|E_0|^2 \frac{\pi}{\eta_0\kappa_0^2} \sum_{\beta,m,n} \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right], \quad (3.61)$$

3.10.3 Diagrama de diretividade

A diretividade (BALANIS, 2016, Eqs. 2-16) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{4\pi U}{P_{rad}}, \quad (3.62)$$

aplicando a intensidade de radiação e a potência de radiação, Eqs. 3.58 e 3.61, respectivamente, na Eq. 3.62 temos que:

$$\mathbf{D} = 2 \frac{\sum_{\beta,m,n} \left[|t_{mn}^1(\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi)|^2 + |t_{mn}^2(\theta) f_m^{\beta}(\phi)|^2 \right] \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right]}{\sum_{\beta,m,n} \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[|a_{mn}^{3\beta 0}|^2 + |b_{mn}^{3\bar{\beta} 0}|^2 \right]} \hat{r}, \quad (3.63)$$

4 Difração por uma Estrutura Esférica Estratificada em Funções Diádicas de Green

4.1 Função diádica de Green no espaço livre

A partir das funções de onda vetorial esférica, podemos construir a função diádica de Green no espaço livre, essa função descreve a contribuição da fonte em um meio sem dispersão. Um dos métodos para a construção da função diádica é o método $\bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que por sua vez, usa o método de Ohm-Rayleigh (TAI, 1994). Onde a função $\bar{\mathbf{G}}_{\text{ss}}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfaça a Eq. 3.10d.

De acordo com o método de Ohm-Rayleigh, primeiro buscamos uma expansão da autofunção para a função de origem usando as funções de onda vetorial esférica:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_0^\infty \sum_{\beta, m, n} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k}_s, \quad (4.1)$$

neste processo surge duas funções desconhecidas a $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$ e a $\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$ e para solucionar elas, vamos definir as relações ortogonais e ortonormais entre as duas funções de onda vetorial esférica em um domínio de integração que envolve todo o espaço

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= 0, \\ \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= 0, \\ \int_V \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \delta(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f) \delta_{\beta'}^\beta \delta_{m'}^m \delta_{n'}^n, \\ \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \delta(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f) \delta_{\beta'}^\beta \delta_{m'}^m \delta_{n'}^n. \end{aligned}$$

Para solucionar a funções desconhecidas $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$, multiplicaremos por $\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ a Eq. 4.1 modificada e integramos em todo volume:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV &= \dots \\ \dots \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \int_0^\infty \sum_{\beta, m, n} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) \mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k}_f dV. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A integral do lado esquerdo da Eq. 4.2 pode ser resolvido aplicando a identidade diádica¹, depois aplicando teorema diádico de Gauss² para converter uma integral de

¹ Identidade diádica: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \bar{\mathbf{B}}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})$

² Teorema diádico de Gauss: $\int_V \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} dV = \oint_S \bar{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{S}$

volume em uma integral de superfície e essa integral de superfície desaparece, pois \mathbf{r}' está localizada dentro do volume:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left[\nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \right] \cdot \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \nabla \cdot \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \right\} dV = \dots \\ & \dots \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') - \oint_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] dS = \dots \\ & \dots \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Já a integral do lado direito da Eq. 4.2 pode ser resolvido aplicando as relações ortogonais, ortonormais e a função Delta de Dirac³ e com isso, toda a Eq. 4.2 pode ser reescrita como:

$$\nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.4)$$

isolando a função desconhecida $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s)$, temos:

$$\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^2}{2\pi^2} \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.5)$$

aplicando a Eq. 3.46c na Eq. 4.5:

$$\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^3}{2\pi^2} \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.6)$$

onde:

$$C_{mn} = (2 - \delta_0^m) \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}. \quad (4.7)$$

Similarmente, para solucionar a funções desconhecidas $\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$, multiplicaremos por $\mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ a Eq. 4.1 modificada e repetimos os passos anteriores

$$\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^3}{2\pi^2} \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'). \quad (4.8)$$

Então a função de origem fica:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk_s. \quad (4.9)$$

Agora assumimos que a expansão da autofunção $\bar{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser representado por uma integral semelhante em termos da função de origem,

$$\bar{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[a \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + b \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk_s. \quad (4.10)$$

³ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

Para solucionar as funções desconhecidas a e b , substituímos as Eqs. 4.9 e 4.10 na Eq. 3.10d e usando as relações das funções de onda vetorial, sabemos que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) = k_s^2 \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ e $\nabla \times \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) = k_s^2 \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$, então temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[\left[(k_s^2 - \kappa_s^2)a - 1 \right] \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \dots \right. \\ \left. \dots \left[(k_s^2 - \kappa_s^2)b - 1 \right] \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A solução da função desconhecida a é:

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[\left[(k_s^2 - \kappa_s^2)a - 1 \right] \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} (k_s^2 - \kappa_s^2)a - 1 &= 0, \\ a &= \frac{1}{(k_s^2 - \kappa_s^2)}, \end{aligned}$$

similarmente a solução da função desconhecida b é:

$$b = \frac{1}{(k_s^2 - \kappa_s^2)}.$$

Portanto, a expansão da autofunção $\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \dots \\ \dots \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty \frac{k_s^3}{(k_s^2 - \kappa_s^2)} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk_s. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aplicando a integral de Bessel sobre o intervalo $(0, \infty)$ (OLVER, 2010, Eq. 10.22.69), temos:

$$\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_s^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \begin{cases} \mathbf{N}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{3\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r > r' \\ \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{3\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r < r' \end{cases} \quad (4.14)$$

A função é descontínua em $r = r'$ e utilizando a Eq. de Maxwell na forma diádica, Eq. 3.10b, a função $\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser definida como:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{\kappa_s^2} \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \dots \\ \dots \frac{i\kappa_s}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \begin{cases} \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_{mn}^{3\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r > r' \\ \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_{mn}^{1\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{3\bar{\beta}}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r < r' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2 Função diádica de Green de espalhamento

Partindo da função diádica de Green no espaço livre, Eq. 4.15, podemos construir, por meio do método de sobreposição, os vários tipos de funções diádicas de Green associadas a uma esfera.

As estruturas esféricas de espalhamento, Figura 5, é composta de N-camadas, cada camada tem permissividade, permeabilidade, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ .

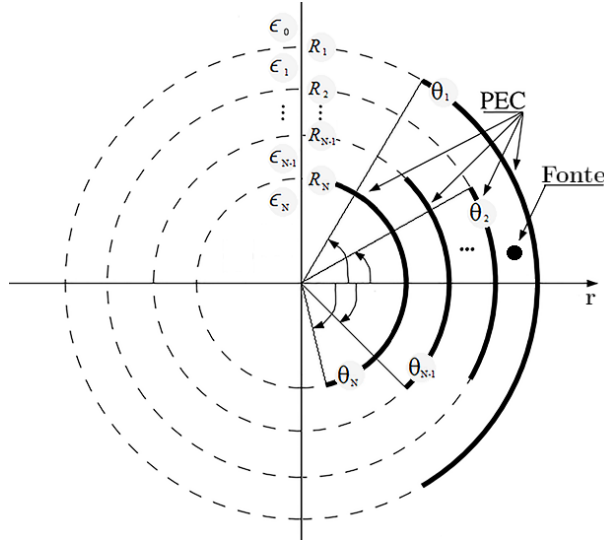


Figura 5 – Definição dos parâmetros geométricos da estrutura.

A função diádica de Green de espalhamento $\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, descreve a reflexão e a transmissão múltiplas das ondas nas interfaces. Já a função de Green, $\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, dada por (ALI; HABASHY; KONG, 1992), descreve uma sobreposição da função diádica de Green no espaço livre com a de espalhamento:

$$\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_{\text{ss}}^{\text{e0}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta_{\text{s}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (4.16)$$

A função diádica de Green de espalhamento é semelhante função diádica de Green no espaço livre com adição dos coeficientes de espalhamento:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_{\text{f}}}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \Big\{ & \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} \right] + \dots \\ & \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} \right] + \dots \\ & \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} \right] + \dots \\ & \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\tilde{\delta} = (1 - \delta)$, sendo δ o delta de Kronecker.

4.3 Determinação dos coeficientes de ondas esféricas

4.3.1 Fontes elétricas

A função diádica de Green elétrica é:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_{\text{f}}}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \left\{ \begin{aligned} &\overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

No capítulo anterior, demonstramos o vetor intensidade do campo elétrico, Eq. 3.18, que é descrito como a convolução da função diádica de Green elétrica com uma fonte elétrica, $\mathbf{J}^{\text{e}}(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_{\text{f}} \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.19)$$

com isso, podemos reescrever o vetor intensidade do campo elétrico como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_{V'} \left\{ \begin{aligned} &\overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \end{aligned} \right\} \cdot \dots \\ \dots \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde a impedância característica do meio é $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Também no capítulo anterior, demonstramos a forma geral do campo eletromagnético, Eq. 3.48a, descrita como:

$$\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\alpha, \beta, m, n} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} a_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} b_{mn}^{\alpha\beta\text{f}}, \quad (4.21)$$

e os coeficientes $a_{mn}^{\alpha\beta\text{f}}$ e $b_{mn}^{\alpha\beta\text{f}}$ podem ser encontrados partindo da Eq. 4.20:

$$a_{mn}^{1\beta\text{f}} = -\frac{\eta_{\text{f}} \kappa_{\text{f}}^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.22a)$$

$$b_{mn}^{1\beta\text{f}} = -\frac{\eta_{\text{f}} \kappa_{\text{f}}^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.22b)$$

$$a_{mn}^{3\beta\text{f}} = -\frac{\eta_{\text{f}} \kappa_{\text{f}}^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.22c)$$

$$b_{mn}^{3\beta\text{f}} = -\frac{\eta_{\text{f}} \kappa_{\text{f}}^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.22d)$$

4.3.2 Fontes magnética

A função diádica de Green magnética é:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \left\{ \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f} \left[a_{mn1}^{1\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\bar{\beta} f} \left[b_{mn1}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f} \left[a_{mn1}^{3\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\bar{\beta} f} \left[b_{mn1}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

No capítulo anterior, demonstramos o vetor intensidade do campo elétrico, Eq. 3.25, que é descrito como a convolução da função diádica de Green magnética com uma fonte magnética, $\mathbf{J}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = - \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.24)$$

Com isso, podemos reescrever o vetor intensidade do campo elétrico como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_{V'} \left\{ \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f} \left[a_{mn1}^{1\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\bar{\beta} f} \left[b_{mn1}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f} \left[a_{mn1}^{3\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\beta f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\bar{\beta} f} \left[b_{mn1}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\} \cdot \dots \\ \dots \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Também no capítulo anterior, demonstramos a forma geral do campo eletromagnético, Eq. 3.48a, descrita como:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f} a_{mn}^{\alpha\beta f} + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\bar{\beta} f} b_{mn}^{\alpha\beta f}, \quad (4.26)$$

e os coeficientes $a_{mn}^{\alpha\beta f}$ e $b_{mn}^{\alpha\beta f}$ podem ser encontrados partindo da Eq. 4.25:

$$b_{mn}^{1\beta f} = -i \frac{\kappa_f^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.27a)$$

$$a_{mn}^{1\beta f} = -i \frac{\kappa_f^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.27b)$$

$$b_{mn}^{3\beta f} = -i \frac{\kappa_f^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{M}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.27c)$$

$$a_{mn}^{3\beta f} = -i \frac{\kappa_f^2}{4\pi E_0} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\bar{\beta} f} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{3\bar{\beta} f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{1\bar{\beta} f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.27d)$$

5 Antena Alimentada por Cabo Coaxial Centrada

A alimentação escolhida é uma sonda coaxial centrada, isto é, $\theta_{\odot} = 0$, cuja corrente é orientada ao longo do raio e com amplitude fixa, I_0 :

$$\mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') = I_0 \delta(\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}') \hat{r}, \quad (5.1)$$

injetando a Eq. 5.1 nas Eqs. 4.22a-4.22d, aparecerá algumas relações da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{r} = 0, \quad (5.2a)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{r} = \frac{z_n^{\alpha f'}}{\kappa_f r'} n(n+1) P_n^m(\cos \theta') f_m^{\beta}(\phi'), \quad (5.2b)$$

então aplicamos a função Delta de Dirac¹ junto da injeção da Eq. 5.1 nas Eqs. 4.22a-4.22d, temos que:

$$a_{mn}^{1\beta f} = 0, \quad (5.3a)$$

$$b_{mn}^{1\beta f} = n(n+1)C_{mn} \left[b_{mn1}^{1\beta f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\beta f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + z_n^{3f\odot} \delta_s^f \delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \right] P_n^m(\cos \theta_{\odot}) \bar{f}_m^{\beta}(\phi_{\odot}), \quad (5.3b)$$

$$a_{mn}^{3\beta f} = 0, \quad (5.3c)$$

$$b_{mn}^{3\beta f} = n(n+1)C_{mn} \left[b_{mn1}^{3\beta f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\beta f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + z_n^{1f\odot} \delta_s^f \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \right] P_n^m(\cos \theta_{\odot}) \bar{f}_m^{\beta}(\phi_{\odot}), \quad (5.3d)$$

onde:

$$E_0 = -\frac{I_0 \eta_f \kappa_f}{4\pi r_{\odot}}.$$

Por ser uma alimentação centrada os coeficientes só não são nulos para $m = 0$ e $\beta = o$, (HANSEN, 1988, Eq. A1.36):

$$P_n^m(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ 0, & \text{se } m \neq 0 \end{cases}, \quad (5.4a)$$

$$f_m^{\beta}(\phi) \Big|_{m=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta = e \\ 0, & \text{se } \beta = o \end{cases}, \quad (5.4b)$$

e por fim podemos escrever os coeficientes como sendo:

$$a_{mn}^{\alpha\beta f} = 0, \quad (5.5a)$$

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = b_{mn}^{\alpha\beta f} \left(\delta_1^{\alpha} \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^{\alpha} \tilde{\delta}_N^f \right) \delta_o^{\beta} \delta_0^m + (2n+1) z_n^{\bar{\alpha}f\odot} \delta_s^f \left(\delta_1^{\alpha} \delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} + \delta_3^{\alpha} \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \right), \quad (5.5b)$$

¹ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

onde:

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = (2n+1) \left(b_{mn1}^{\alpha\beta f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s + b_{mn3}^{\alpha\beta f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \right).$$

Portanto, a forma geral do campo eletromagnético de uma antena alimentada por cabo coaxial centrada é:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\alpha,n} \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha ef} \left[b_{0n}^{\alpha of} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f \right) + (2n+1) z_n^{\overline{\alpha} f \odot} \delta_s^f \left(\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right) \right], \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = -i \frac{E_0}{\eta_f} \sum_{\alpha,n} \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha ef} \left[b_{0n}^{\alpha of} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f \right) + (2n+1) z_n^{\overline{\alpha} f \odot} \delta_s^f \left(\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right) \right]. \quad (5.6b)$$

5.1 Determinação das equações de séries duplas

Como os discos de metal ou condutor elétrico perfeito (PEC - *Perfect Electrical Conductor*) cobrem apenas parte das interfaces da esfera dielétrica, o campo eletromagnético deve verificar as condições duais nessas superfícies. A condição de contorno para uma interface onde a sua superfície é um PEC o campo elétrico tangencial é nulo:

$$\hat{r} \times \mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \theta_i$$

$$\sum_{\alpha,n} \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha e(i-1)i} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{\overline{\alpha}(i-1)\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \theta_i \quad (5.7a)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo magnético tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{H}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_i) \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha e(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \\ \dots \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha eii}}{\eta_i} \left[b_{0n}^{\alpha oi} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + (2n+1) z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (5.7b)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo elétrico tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i) \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha e(i-1)i} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \\ \dots \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha eii} \left[b_{0n}^{\alpha oi} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + (2n+1) z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (5.7c)$$

Sabemos que:

$$\hat{r} \times \bar{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha \text{efi}} = P_n^1(\cos \theta) k_n^{\alpha \text{fi}} \hat{\phi}, \quad (5.8a)$$

$$\hat{r} \times \bar{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha \text{efi}} = P_n^1(\cos \theta) z_n^{\alpha \text{fi}} \hat{\theta}, \quad (5.8b)$$

onde:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= P_n^0(\cos \theta), \\ P_n^1(\cos \theta) &= \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned}$$

injetamos as relações das Eqs. 5.8a-5.8b nas Eqs. 5.7a-5.7c.

Para o campo elétrico tangencial nulo ($0 \leq \theta < \theta_i$), temos que:

$$\sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) k_n^{\alpha(i-1)i} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = 0, \quad (5.9a)$$

para o campo magnético tangencial contínuo ($\theta_i \leq \theta < \pi$), temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) \left\{ \frac{z_n^{\alpha(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \right. \\ \left. \dots \frac{z_n^{\alpha ii}}{\eta_i} \left[b_{0n}^{\alpha oi} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + (2n+1) k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.9b)$$

e para o campo elétrico tangencial contínuo ($0 \leq \theta \leq \Pi$), temos que:

$$\begin{aligned} k_n^{\alpha(i-1)i} \left[b_{0n}^{\alpha o(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + (2n+1) z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = \dots \\ \dots k_n^{\alpha ii} \left[b_{0n}^{\alpha oi} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + (2n+1) z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right], \end{aligned} \quad (5.9c)$$

o campo elétrico tangencial pode ser descrito como contínuo independente do tipo de interface, por isso que a Eq. 5.9c é válida para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Por ser multicamadas, podemos transformar as Eqs. 5.9a-5.9c em matrizes, facilitando a manipulação das mesmas. Os vetores e as matrizes estão descritos no Apêndice B, onde a função $\check{f}_n = (2n+1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1o} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.10a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1o} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] = \mathbf{0}, \quad \Theta < \theta \leq \Pi \quad (5.10b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1o} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}. \quad (5.10c)$$

Isolando \mathbf{B}_{mn}^{1o} da Eq. 5.10c:

$$\mathbf{B}_{0n}^{1o} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right],$$

e substituindo nas Eqs. 5.10a - 5.10b, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^k] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.11a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^z] = \mathbf{0}, \quad \Theta < \theta \leq \Pi \quad (5.11b)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ são as responsáveis pela descrição da estrutura geométrica:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}}] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}, \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= [\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F}] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F}] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}. \end{aligned}$$

5.2 Método de Regularização Analítica

O método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization) (Nosich, 1999), parte das equações de séries duplas, Eqs. 5.11a - 5.11b que são, em termos de operadores, equações do primeiro tipo, $\bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{U}$, onde \mathbf{X} representa o vetor de incógnitas e \mathbf{U} o vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta de $\bar{\mathbf{L}}$ geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência. Assim, $\bar{\mathbf{L}}$ é dividido em duas partes, $\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}_a - \bar{\mathbf{L}}_b$, sendo $\bar{\mathbf{L}}_a^{-1}$ um operador conhecido. Desta forma, o problema do primeiro tipo é convertido em um problema do segundo tipo $\mathbf{X} - \bar{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, onde $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{L}}_b$ e $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \mathbf{U}$. Além disso, forçando $\bar{\mathbf{L}}_a$ a ter a singularidade do operador $\bar{\mathbf{L}}$, a equação passa a ser do tipo Fredholm do segundo tipo, onde $\bar{\mathcal{G}}$ é compacto, ou seja, $\|\bar{\mathcal{G}}\| < \infty$. Além disso, esses teoremas garantem uma convergência numérica da solução. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n - \bar{\mathcal{G}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n$, onde o operador de matriz $\bar{\mathcal{G}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (5.12)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathcal{G}}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$, consequentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso é o resultado.

5.2.1 Considerações iniciais

Para seguir com a técnica de regularização é necessário fazer algumas trocas de variáveis (Rondineau et al., 2004), diferente do capítulo anterior, as mudanças nas variáveis não são triviais. Assim, parece necessário realizar alguns trabalhos sobre as matrizes $\overline{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ que descreve da estrutura geométrica. Só então o esquema de regularização pode ser aplicado:

$$\left. \begin{aligned} f_n^k \overline{\Omega}_b \cdot (\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} \\ f_n^k \overline{\Omega}_b \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta < \Theta,$$

$$\left. \begin{aligned} f_n^z \mathbf{X}_{bn} &= \overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3o} \\ f_n^z \mathbf{Y}_{bn}^z &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^z, \end{aligned} \right\} \Theta < \theta \leq \Pi,$$

onde $\overline{\mathbf{I}}$ representa operador identidade.

Para controlar a singularidades, as grandezas introduzidas nas trocas de variáveis devem ser verificadas:

$$\frac{f_n^z}{f_n^k} (\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn})^{-1} \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} = \overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1},$$

$$\overline{\mathcal{G}}_{bn} = \overline{\mathbf{I}} - \frac{f_n^z}{f_n^k} \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1},$$

onde $\overline{\Omega}_b$ é uma matriz constante:

$$\overline{\Omega}_b^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^k}{f_n^z} \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1},$$

o comportamento assintótico de $\overline{\mathcal{G}}_{bn}$ tem que ser:

$$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, (\overline{\mathcal{G}}_{bn})_{ij} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty).$$

5.2.2 Comportamento assintóticos

A primeira observação vem do fato de que as matrizes envolvidas são triangulares inferiores. Seja $\overline{\mathbf{O}}$ uma matriz inferior de dimensão $N \times N$ definida da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} o_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 & \dots & 0 \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{N1} & o_{N2} & o_{N3} & \dots & o_{NN} \end{bmatrix},$$

onde o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$|\overline{\mathbf{O}}| = \prod_{i=1}^N o_{ii}, \quad (5.13)$$

então $\overline{\mathbf{O}}$ é invertível e seu inverso é a matriz $\overline{\mathbf{P}}$ que também é uma matriz triangular inferior invertível:

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

A determinação da $\overline{\mathbf{P}}$ analiticamente é feita de forma recursiva e crescente para cada elemento da matriz:

$$p_{ij} = \frac{1}{o_{ii}} \left(\delta_j^i - \sum_{k=j}^{i-1} o_{ik} \cdot p_{kj} \right), \quad (5.14)$$

com essa técnica de inversão, mais as operações de multiplicação, adição e subtração de matrizes, nos podemos obter a expressão do comportamento assintótico da matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$, o comportamento assintótico dessa matriz é detalhada no Apêndice C, com isso temos que:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{r_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] \cdot \delta_{i,j}, \quad (5.15)$$

o comportamento assintótico de $\frac{f_n^k}{f_n^z}$ tem que ser:

$$\frac{f_n^k}{f_n^z} = O(n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

5.2.3 Regularização analítica

Depois de estudar o comportamento assintótico dessa matriz, o método de regularização pode ser aplicada e considerando as propriedades do polinômio de Legendre associado², temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \overline{\mathbf{P}}_n(\cos \theta) \cdot \overline{\Omega}_b \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] = \overline{\mathbf{P}}_0(\cos \theta) \cdot \mathbf{C}_0, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.16a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^z \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] = \mathbf{0}, \quad \Theta < \theta \leq \Pi \quad (5.16b)$$

onde \mathbf{C}_0 é a constante gerada pela integração de $\frac{d}{d\theta} \overline{\mathbf{P}}_n(\cos \theta)$.

A representação integral do polinômio de Legendre associado é dada pela formula de Mehler–Dirichlet (OLVER, 2010, Eq. 14.12.1):

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2} (\sin \theta)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - m)} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}+m}} d\phi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad \Re m < \frac{1}{2}$$

² Propriedades do polinômio de Legendre associado: $\overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} \overline{\mathbf{P}}_n(\cos \theta)$
 $\overline{\mathbf{P}}_0(\cos \theta) = \overline{\mathbf{I}}$

e utilizando a fórmula de conexão (OLVER, 2010, Eq. 14.9.3):

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = c_{mn} P_n^m(\cos \theta),$$

chegamos na seguinte relação:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (5.17)$$

onde:

$$c_{mn} = (-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}, \quad d_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\sin \theta)^m \Gamma(\frac{1}{2}+m)}.$$

A segunda igualdade é obtida através das mudanças de variáveis, ϕ em $\pi - \phi$ e θ em $\pi - \theta$:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (5.18)$$

Utilizando o método de integração por partes, nos obtemos:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (5.19a)$$

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (5.19b)$$

onde:

$$e_{mn} = d_m \frac{(2m-1)}{(2n+1)}.$$

A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $0 \leq \theta < \Theta$ com $m = 0$ é:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (5.20a)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(2n+1)} \int_0^\theta \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\phi, \quad (5.20b)$$

e para o intervalo $\Theta < \theta \leq \Pi$ com $m = 1$ é:

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} n(n+1) \int_\theta^\pi \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (5.20c)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_\theta^\pi \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (5.20d)$$

Escolheremos a formula de Mehler-Dirichlet que satisfaça a condição do comportamento assintótico de $\frac{f_n^k}{f_n^z} = O(n)$ ($n \rightarrow \infty$) e associaremos com as Eqs. 5.16a-5.16b, obtendo:

$$\int_0^\theta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \overline{\Omega}_b \cdot \left[(\bar{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] + \overline{\cos} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_0 \right\} \frac{d\phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (5.21a)$$

$$\int_\theta^\pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^z \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] \right\} \frac{\sin \phi d\phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (5.21b)$$

onde:

$$\begin{aligned} f_n^k &= 1, \\ f_n^z &= \frac{(2n+1)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Essas integrais são homogêneas do tipo Abel com um núcleo de quadrados somados. Então, suas funções integrantes desaparecem em todo o intervalo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \left[(\bar{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] = \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_0, \quad 0 \leq \theta < \Theta, \quad (5.22a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] = 0, \quad \Theta < \theta \leq \Pi. \quad (5.22b)$$

e portanto, podemos reescrever como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{bn} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] + \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_0, & 0 \leq \theta < \Theta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z, & \Theta < \theta \leq \Pi. \end{cases} \quad (5.23)$$

Essa equação nada mais é do que a expressão de Fourier do campo eletromagnético. Para obter os coeficientes de Fourier, essa equação deve ser projetada na função $\cos \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$, com $u \geq 0$ e as integramos de 0 a π :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\theta \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_\theta^\pi \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z - \int_0^\theta \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde a integral é:

$$\mathcal{Q}_{un}(\theta) = \int_0^\theta \cos \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u-n)\theta}{(u-n)} + \frac{\sin(u+n+1)\theta}{(u+n+1)} \right], \quad (5.25)$$

reescrevendo as equações com os novos termos, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z] + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z - \dots \\ &\dots \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A constante \mathbf{C}_0 é obtida graça à projeção em $u = 0$:

$$\bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z], \quad (5.27)$$

e para projeção em $u \geq 1$, temos o problema do primeiro tipo convertido em um problema do segundo tipo:

$$\mathbf{X}_u = \mathbf{Y}_u^z + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{S}}_{un}(\theta) \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z], \quad (5.28)$$

onde \mathbf{X}_u e \mathbf{Y}_u^z são:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn}, \\ \mathbf{Y}_u^z &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z, \end{aligned}$$

e a matriz infinita da parte metálica é:

$$\bar{\mathcal{S}}_{un}(\theta) = \begin{cases} \bar{\mathbf{0}} & , \theta = 0 \\ \frac{2}{\pi} [\bar{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) - \bar{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta)] & , 0 < \theta \leq \Pi \end{cases}.$$

5.3 Resultados e Discussões

5.3.1 Dipolo elétrico elementar

O dipolo elétrico elementar através de um fio elétrico de comprimento l desprezível é descrito pelo Balanis no livro *Antenna Theory* (BALANIS, 2016). Os diagramas de radiação de campo distante associado a este dipolo são obtidos pelas Eqs. 3.53a e 3.53b para $\kappa_0 r_1 = 10$, Figura 6, e correspondem exatamente ao que é apresentado em qualquer literatura clássica.

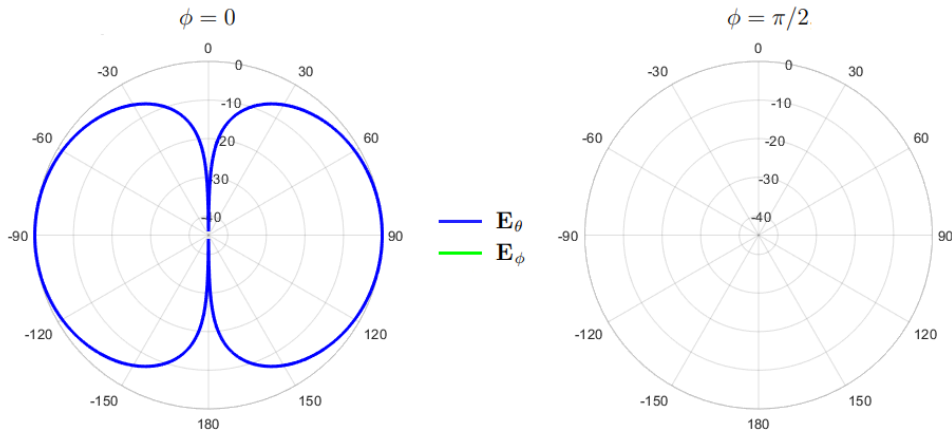


Figura 6 – Diagrama de radiação de campo distante associado dipolo elétrico elementar.

Aqui verificaremos que as expressão do campo eletromagnético em funções diádicas de Green para uma fonte elétrica no espaço livre está funcionando perfeitamente.

5.3.2 Lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo elétrico

A lente de Lüneburg discreta atua como uma bomba ao focalizar a energia, o poder de focalização da lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo elétrico, Figura 7, depende do número de camadas como descrito pelo Sébastien Rondineau em sua tese de doutorado (RONDINEAU, 2002).

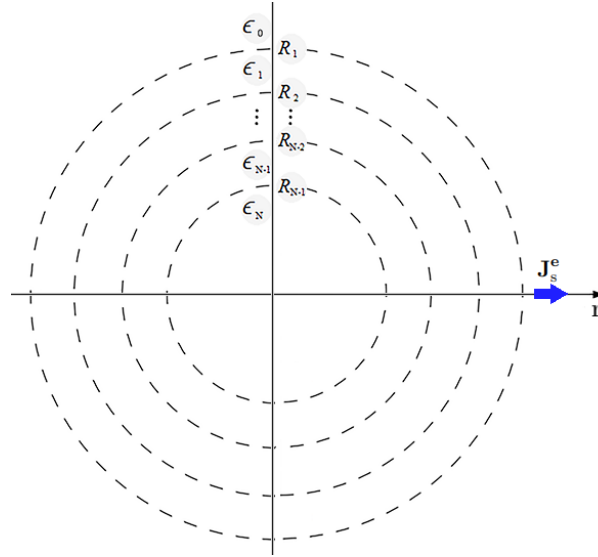


Figura 7 – Lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo elétrico.

Observando as Figuras 8-11, podemos notar que quanto mais camadas houver, menos radiação da metade traseira do espaço é afetada pela presença da lente e que acima de três camadas, o diagrama de radiação não muda muito.

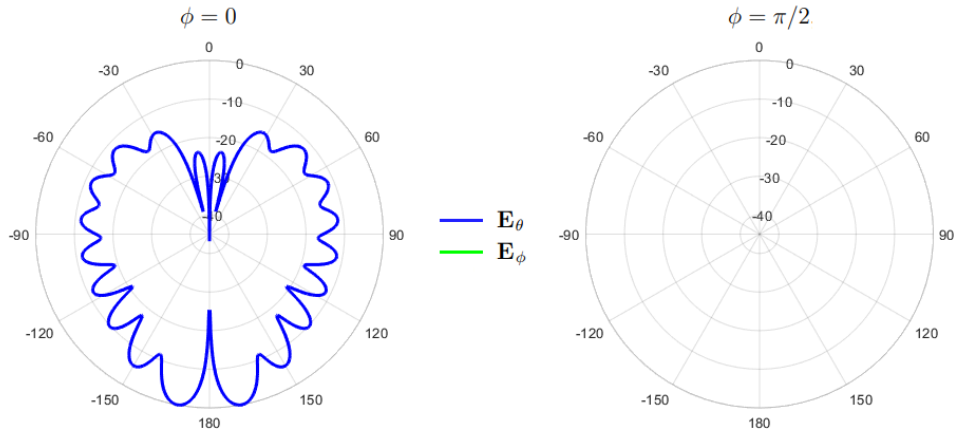


Figura 8 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 1 camada associado dipolo elétrico.

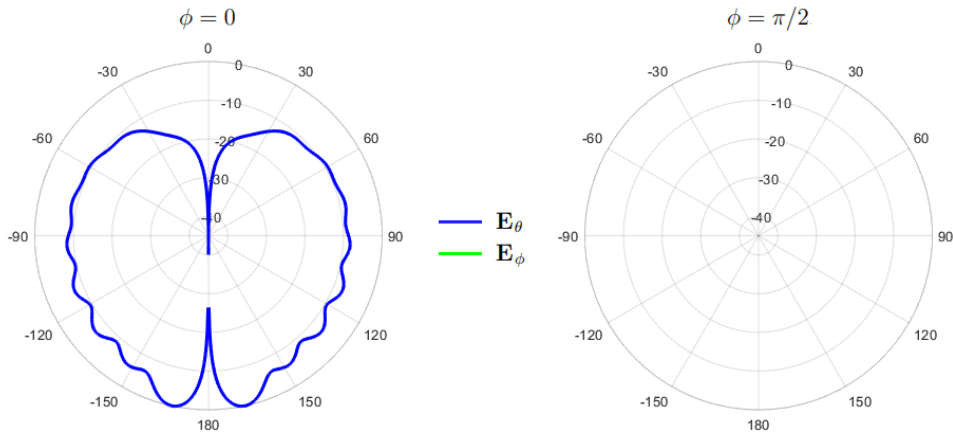


Figura 9 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 2 camada associado dipolo elétrico.

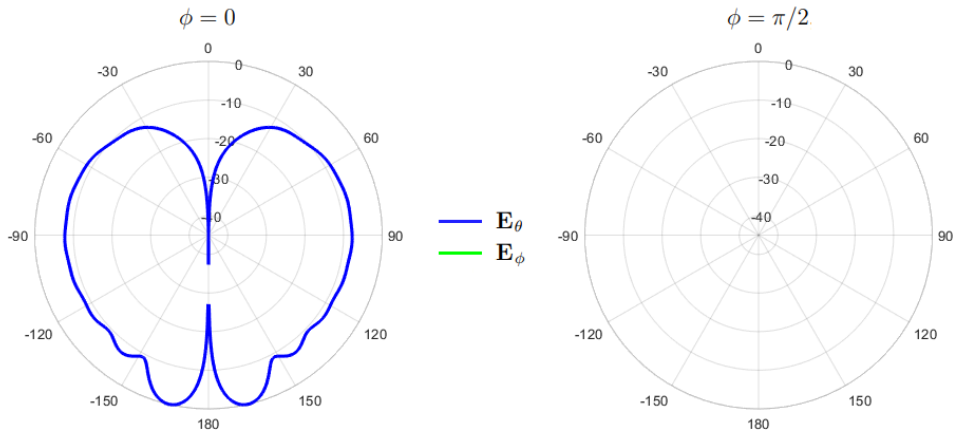


Figura 10 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 3 camada associado dipolo elétrico.

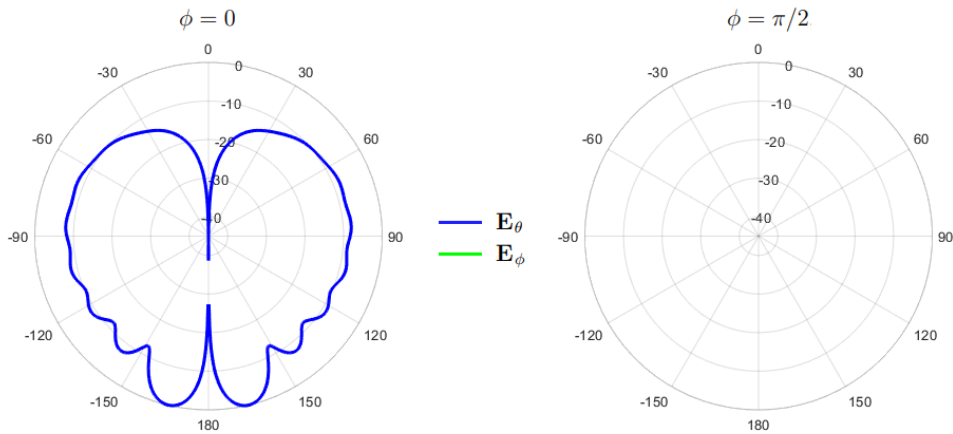


Figura 11 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 20 camada associado dipolo elétrico.

Aqui verificaremos que os cálculos feitos para difração por uma estrutura esférica estratificada em funções diádicas de Green está funcionando perfeitamente.

5.3.3 Antena acoplada a Lente de Lüneburg associada a um dipolo elétrico

Acoplamos uma antena esférica-circular impressa alimentada por um dipolo elétrico em uma a Lente de Lüneburg, Figura 12.

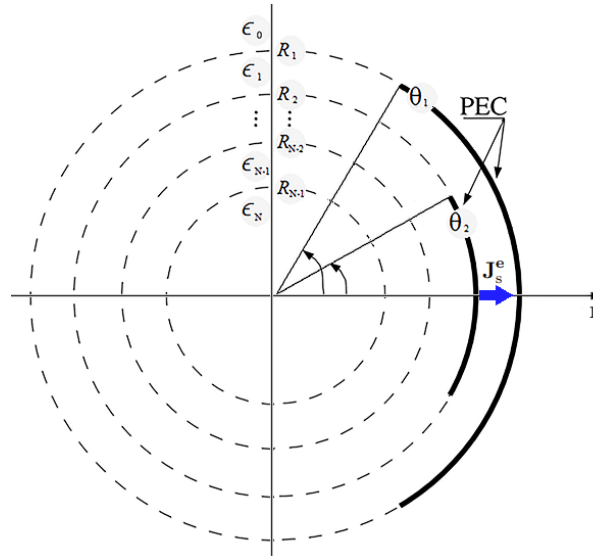


Figura 12 – Antena acoplada a lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo elétrico.

Na construção de uma antena, há vários parâmetros que podemos setar. Para que tenhamos o máximo de potência irradiada é necessário fazer otimizações, as otimizações são análises que combinam vários parâmetros, gerando assim uma antena muito eficiente.

Geramos uma análise baseada na frequência normalizada, $\kappa_0 r_1$ e no número de camadas, N , como mostrado na Figura 13, para uma com as seguintes configurações:

$$\theta_1 = 36.0^\circ, \quad \theta_2 = 18.0^\circ, \quad \frac{r_1}{r_2} = 97\%, \quad \epsilon_{0,1} = \mu_{0,1} = 1.0.$$

Com essa análise, foi gerada 5 antenas, Figuras 14-18, cada uma com um quantidade de camadas distintas e uma frequência normalização, essa frequência normalização foi definida baseada na análise de maior potência irradiada.

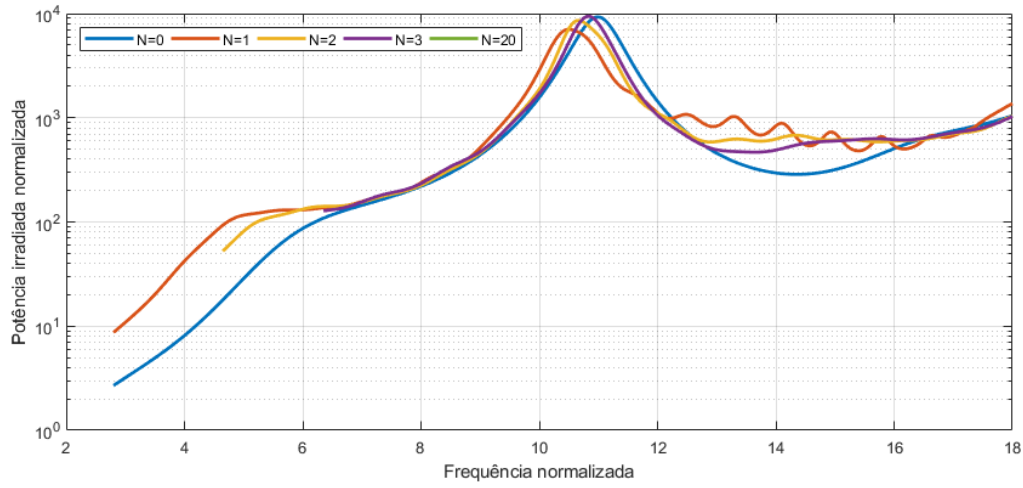


Figura 13 – Análise baseada na frequência normalizada, $\kappa_0 r_1$ e no número de camadas, N .

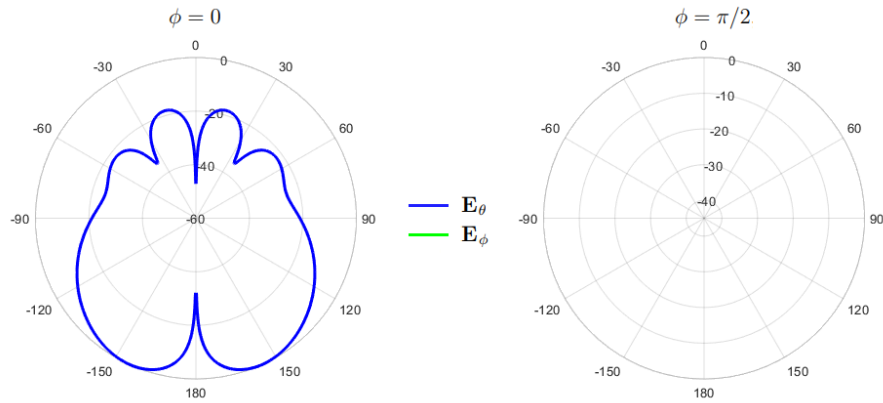


Figura 14 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 0$ e $\kappa_0 r_1 = 11.05$.

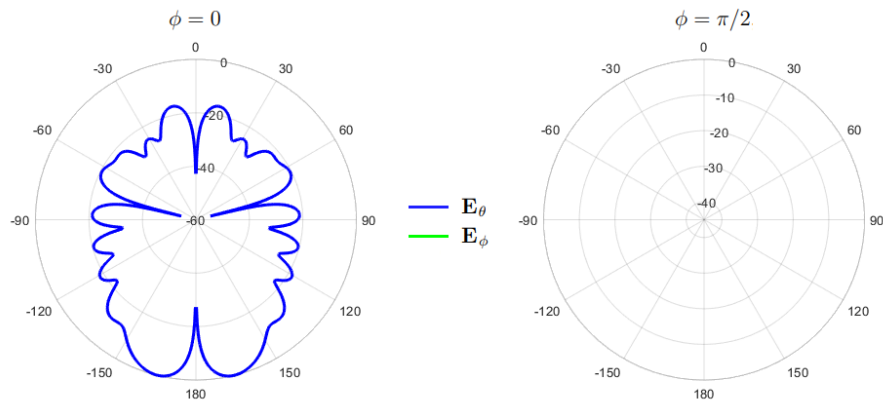


Figura 15 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 1$ e $\kappa_0 r_1 = 10.65$.

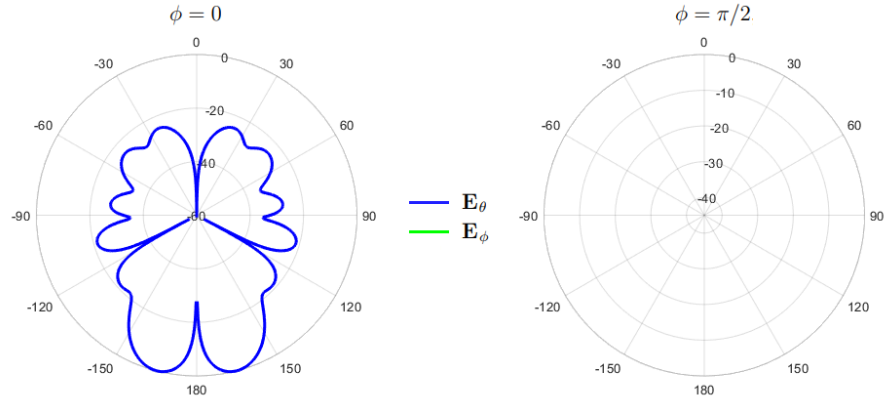


Figura 16 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 2$ e $\kappa_0 r_1 = 10.70$.

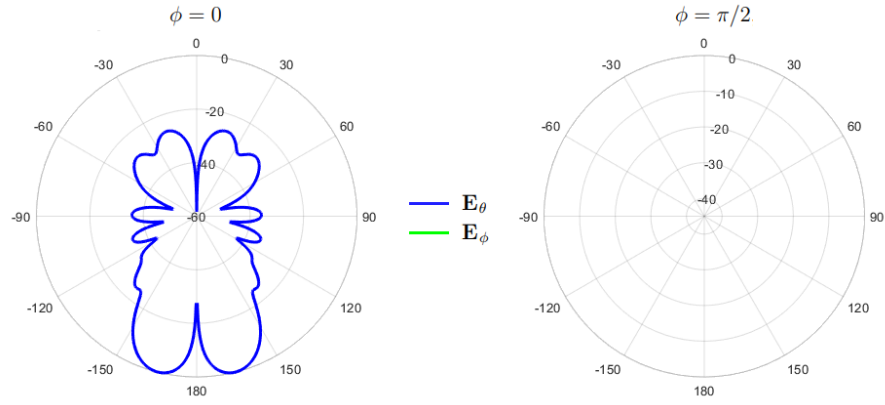


Figura 17 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 3$ e $\kappa_0 r_1 = 10.85$.

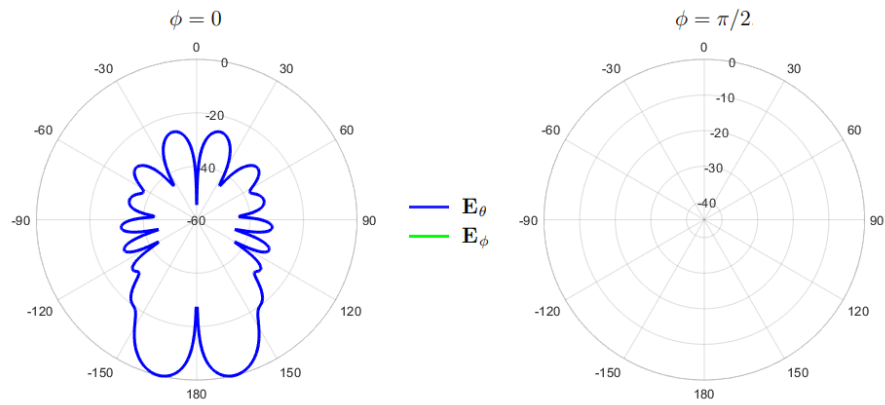


Figura 18 – Diagrama de radiação de campo distante de uma antena acoplada a Lente de Lüneburg com $N = 20$ e $\kappa_0 r_1 = 11.00$.

5.3.3.1 Resultado numérico

A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1},$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathbf{U}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{U}}$, consequentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais próxima a precisão está da precisão da máquina.

Para as 5 antenas geradas anteriormente, o erro relativo associado ao truncamento decai lentamente para zero, como podemos ver na Figura 19:

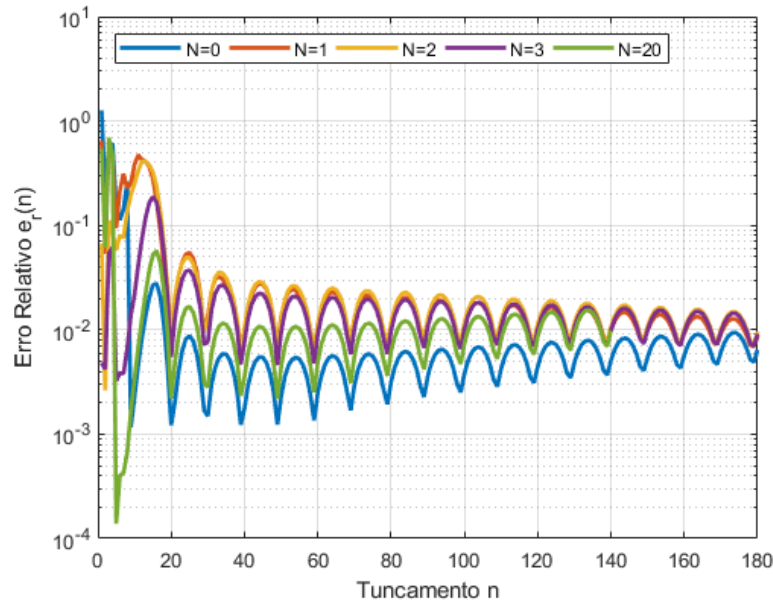


Figura 19 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento.

Também podemos verificar que o comportamento assintótico da singularidade, $\bar{\mathcal{G}}_{bn}$, está como esperado, $(\bar{\mathcal{G}}_{bn})_{ij} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ($n \rightarrow \infty$), como podemos ver na Figura 20.

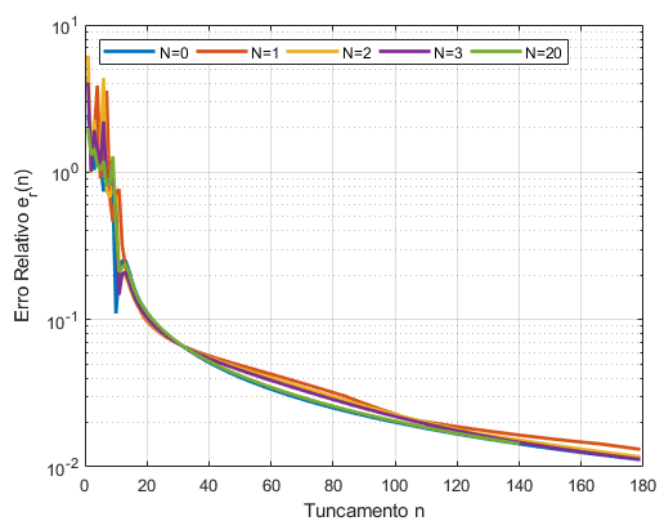


Figura 20 – Comportamento assintótico da singularidade.

6 Antena Alimentada por Fenda Centrada

A alimentação escolhida é uma fenda centrada, isto é, $\theta_\odot = 0$, cuja tensão é orientada ao longo do raio e com amplitude fixa, V_0 :

$$\mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}') = V_0 \delta(\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}') \hat{\theta}, \quad (6.1)$$

injetando a Eq. 6.1 nas Eqs. 4.27a-4.27d, aparecerá algumas relações da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{\theta} = \sigma^\beta \frac{m}{\sin \theta'} z_n^{\alpha f'} P_n^m(\cos \theta') f_m^\beta(\phi'), \quad (6.2a)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{\theta} = k_n^{\alpha f'} \frac{dP_n^m(\cos \theta')}{d\theta'} f_m^\beta(\phi'), \quad (6.2b)$$

então aplicamos a função Delta de Dirac¹ junto da injeção da Eq. 6.1 nas Eqs. 4.27a-4.27d, temos que:

$$b_{mn}^{1\beta f} = C_{mn} \left[a_{mn1}^{1\bar{\beta}f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\bar{\beta}f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_s^f \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} \right] \frac{\sigma^{\bar{\beta}} m}{\sin \theta_\odot} P_n^m(\cos \theta_\odot) f_m^\beta(\phi_\odot), \quad (6.3a)$$

$$a_{mn}^{1\beta f} = C_{mn} \left[a_{mn1}^{1\bar{\beta}f} k_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\bar{\beta}f} k_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + k_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_s^f \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} \right] \frac{dP_n^m(\cos \theta_\odot)}{d\theta_\odot} f_m^\beta(\phi_\odot), \quad (6.3b)$$

$$b_{mn}^{3\beta f} = C_{mn} \left[a_{mn1}^{3\bar{\beta}f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\bar{\beta}f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_s^f \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right] \frac{\sigma^{\bar{\beta}} m}{\sin \theta_\odot} P_n^m(\cos \theta_\odot) f_m^\beta(\phi_\odot), \quad (6.3c)$$

$$a_{mn}^{3\beta f} = C_{mn} \left[b_{mn1}^{3\bar{\beta}f} k_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\bar{\beta}f} k_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + k_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_s^f \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right] \frac{dP_n^m(\cos \theta_\odot)}{d\theta_\odot} f_m^\beta(\phi_\odot), \quad (6.3d)$$

onde:

$$E_0 = -i \frac{V_0 \kappa_f^2}{4\pi}.$$

Por ser uma alimentação centrada os coeficientes só não são nulos para $m = 1$ e $\beta = e$, (HANSEN, 1988, Eq. A1.36):

$$\frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = \begin{cases} \pm \frac{n(n+1)}{2}, & \text{se } m = \pm 1 \\ 0, & \text{se } m \neq \pm 1 \end{cases}, \quad (6.4a)$$

$$\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, & \text{se } m = 1 \\ 0, & \text{se } m \neq 1 \end{cases}, \quad (6.4b)$$

$$f_m^\beta(\phi) \Big|_{\phi=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta = e \\ 0, & \text{se } \beta = o \end{cases}, \quad (6.4c)$$

e por fim podemos escrever os coeficientes como sendo:

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = b_{mn}^{\alpha\beta f} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f \right) \delta_e^\beta \delta_1^m + z_n^{\bar{\alpha}f\odot} \tilde{\delta}_s^f \left(\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right), \quad (6.5a)$$

$$a_{mn}^{\alpha\beta f} = a_{mn}^{\alpha\beta f} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f \right) \delta_e^\beta \delta_1^m + k_n^{\bar{\alpha}f\odot} \tilde{\delta}_s^f \left(\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot} \right), \quad (6.5b)$$

¹ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

onde:

$$\begin{aligned} b_{mn}^{\alpha\beta f} &= \left[a_{mn1}^{\alpha\beta f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s + a_{mn3}^{\alpha\beta f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \right], \\ a_{mn}^{\alpha\beta f} &= \left[b_{mn1}^{\alpha\beta f} k_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s + b_{mn3}^{\alpha\beta f} k_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a forma geral do campo eletromagnético de uma antena alimentada por fenda centrada é:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{\alpha,n} \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha ef} &\left[a_{1n}^{\alpha ef} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{\overline{\alpha s\odot}} \delta_s^f (\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot}) \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha of} \left[b_{1n}^{\alpha of} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{\overline{\alpha s\odot}} \delta_s^f (\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot}) \right], \end{aligned} \quad (6.6a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = -i \frac{E_0}{\eta_f} \sum_{\alpha,n} \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha ef} &\left[a_{1n}^{\alpha ef} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{\overline{\alpha s\odot}} \delta_s^f (\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot}) \right] + \dots \\ &\dots \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha of} \left[b_{1n}^{\alpha of} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^f + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^f) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{\overline{\alpha s\odot}} \delta_s^f (\delta_1^\alpha \delta_{|r_\odot-r|}^{r_\odot-r} + \delta_3^\alpha \delta_{|r-r_\odot|}^{r-r_\odot}) \right]. \end{aligned} \quad (6.6b)$$

6.1 Determinação das equações de séries duplas

Como os discos de metal ou condutor elétrico perfeito (PEC - *Perfect Electrical Conductor*) cobrem apenas parte das interfaces da esfera dielétrica, o campo eletromagnético deve verificar as condições duais nessas superfícies. A condição de contorno para uma interface onde a sua superfície é um PEC o campo elétrico tangencial é nulo:

$$\hat{r} \times \mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \theta_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} \hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha e(i-1)i} &\left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)i} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] + \dots \\ \dots \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha o(i-1)i} &\left[b_{1n}^{\alpha o(i-1)i} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \theta_i \end{aligned} \quad (6.7a)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo magnético tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times [\mathbf{H}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_i)] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha e(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} &\left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)i} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] + \dots \\ \dots \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha o(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} &\left[b_{1n}^{\alpha o(i-1)i} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \\ \dots \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha eii}}{\eta_i} &\left[a_{1n}^{\alpha eii} (\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] - \dots \\ \dots \frac{\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha oii}}{\eta_i} &\left[b_{1n}^{\alpha oii} (\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (6.7b)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo elétrico tangencial é contínuo:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times [\mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i)] &= \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi \\ \sum_{\alpha,n} \hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha e(i-1)i} &\left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] + \dots \\ \dots \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha o(i-1)i} &\left[b_{1n}^{\alpha o(i-1)} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \\ \dots \hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha ei} &\left[a_{1n}^{\alpha ei} (\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] - \dots \\ \dots \hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha oi} &\left[b_{1n}^{\alpha oi} (\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] = \mathbf{0}, \quad \theta_i < \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (6.7c)$$

Sabemos que:

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha \beta fi} = z_n^{\alpha fi} \left[\sigma^\beta \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} f_1^\beta(\phi) \hat{\phi} + \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} f_1^\beta(\phi) \hat{\theta} \right], \quad (6.8a)$$

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha \beta fi} = k_n^{\alpha fi} \left[\sigma^\beta \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} f_1^\beta(\phi) \hat{\theta} + \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} f_1^\beta(\phi) \hat{\phi} \right], \quad (6.8b)$$

injetando as relações das Eqs. 6.8a-6.8b nas Eqs. 6.7a-6.7b podemos escrever um sistema de EDOs generalizado:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\theta} F_a(\theta) + \frac{1}{\sin \theta} F_b(\theta) \right] \hat{\theta} &= \mathbf{0}, \\ \left[\frac{1}{\sin \theta} F_a(\theta) + \frac{d}{d\theta} F_b(\theta) \right] \hat{\phi} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde a solução particular é uma combinação linear da tangente e da cotangente:

$$\begin{aligned} F_a(\theta) &= \begin{cases} c_1 \tan(\frac{\theta}{2}), & \text{para } 0 \leq \theta < \theta_i \\ c_2 \cot(\frac{\theta}{2}), & \text{para } \theta_i < \theta \leq \pi \end{cases}, \\ F_b(\theta) &= \begin{cases} c_1 \tan(\frac{\theta}{2}), & \text{para } 0 \leq \theta < \theta_i \\ -c_2 \cot(\frac{\theta}{2}), & \text{para } \theta_i < \theta \leq \pi \end{cases}, \end{aligned}$$

Para o campo elétrico tangencial nulo ($0 \leq \theta < \theta_i$), temos que:

$$\sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) z_n^{\alpha(i-1)i} \left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = c_1 \tan(\frac{\theta}{2}), \quad (6.9a)$$

$$\sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) k_n^{\alpha(i-1)i} \left[b_{1n}^{\alpha o(i-1)} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = c_1 \tan(\frac{\theta}{2}), \quad (6.9b)$$

para o campo magnético tangencial contínuo ($\theta_i < \theta \leq \pi$), temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) &\left\{ \frac{k_n^{\alpha(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)} (\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \right. \\ &\left. \dots \frac{k_n^{\alpha ii}}{\eta_i} \left[a_{1n}^{\alpha ei} (\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] \right\} = c_2 \cot(\frac{\theta}{2}), \end{aligned} \quad (6.9c)$$

$$\sum_{\alpha,n} P_n^1(\cos \theta) \left\{ \frac{z_n^{\alpha(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left[b_{1n}^{\alpha e(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] - \dots \right. \\ \left. \dots \frac{z_n^{\alpha ii}}{\eta_i} \left[b_{1n}^{\alpha ei} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right] \right\} = -c_2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (6.9d)$$

e para o campo elétrico tangencial contínuo ($0 \leq \theta \leq \pi$), injetando as relações das Eqs. 6.8a-6.8b nas Eq. 6.7c podemos escrever da seguinte forma:

$$z_n^{\alpha(i-1)i} \left[a_{1n}^{\alpha e(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = \dots \\ \dots z_n^{\alpha ii} \left[a_{1n}^{\alpha ei} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} k_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right], \quad (6.9e)$$

$$k_n^{\alpha(i-1)i} \left[b_{1n}^{\alpha e(i-1)} \left(\delta_1^\alpha \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + \delta_3^\alpha \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \delta_1^\alpha \right] = \dots \\ \dots k_n^{\alpha ii} \left[b_{1n}^{\alpha ei} \left(\delta_1^\alpha + \delta_3^\alpha \tilde{\delta}_N^i \right) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} z_n^{1s\odot} \delta_s^i \delta_3^\alpha \right], \quad (6.9f)$$

o campo elétrico tangencial pode ser descrito como contínuo independente do tipo de interface, por isso que as Eqs. 6.9e-6.9f são validas para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Por ser multicamadas, podemos transformar as Eqs. 6.7a-6.9f em matrizes, facilitando a manipulação das mesmas. Os vetores e as matrizes estão descritos no Apêndice B, onde a função $\check{f}_n = \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3D} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (6.10a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (6.10b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} \right] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \quad (6.10c)$$

$$\Theta < \theta \leq \Pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] = -\overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \quad (6.10d)$$

$$\Theta < \theta \leq \Pi$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} = \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s}, \quad (6.10e)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}. \quad (6.10f)$$

Isolando \mathbf{A}_{1n}^{1e} da Eq. 6.10e:

$$\mathbf{A}_{1n}^{1e} = \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} \right],$$

e injetando nas Eqs. 6.10a e 6.10c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{an}^z] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, 0 \leq \theta < \Theta \quad (6.11a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{an}^k] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \Theta < \theta \leq \Pi \quad (6.11b)$$

Isolando \mathbf{B}_{1n}^{1e} da Eq. 6.10f:

$$\mathbf{B}_{1n}^{1e} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot [\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s}]$$

e injetando nas Eqs. 6.10b e 6.10d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^k] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, 0 \leq \theta < \Theta \quad (6.11c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^z] = -\overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \Theta < \theta \leq \Pi \quad (6.11d)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ são as responsáveis pela descrição da estrutura geométrica são:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3D} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}}] \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s}, \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}}] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}, \\ \check{\mathbf{C}}_{an}^k &= [\bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F}] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F}] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s}, \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= [\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F}] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - [\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F}] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}. \end{aligned}$$

6.2 Método de Regularização Analítica

O método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization) (Nosich, 1999), parte das equações de séries duplas, Eqs. 6.11a - 6.11d que são, em termos de operadores, equações do primeiro tipo, $\bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{U}$, onde \mathbf{X} representa o vetor de incógnitas e \mathbf{U} o vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta de $\bar{\mathbf{L}}$ geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência. Assim, $\bar{\mathbf{L}}$ é dividido em duas partes, $\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}_a - \bar{\mathbf{L}}_b$, sendo $\bar{\mathbf{L}}_a^{-1}$ um operador conhecido. Desta forma, o problema do primeiro tipo é convertido em um problema do segundo tipo $\mathbf{X} - \bar{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, onde $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{L}}_b$ e $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \mathbf{U}$.

Além disso, forçando $\bar{\mathbf{L}}_a$ a ter a singularidade do operador $\bar{\mathbf{L}}$, a equação passa a ser do tipo Fredholm do segundo tipo, onde $\bar{\mathcal{G}}$ é compacto, ou seja, $\|\bar{\mathcal{G}}\| < \infty$. Além disso, esses teoremas garantem uma convergência numérica da solução. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n - \bar{\mathcal{G}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n$, onde o operador de matriz $\bar{\mathcal{G}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (6.12)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathcal{G}}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$, consequentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso é o resultado.

6.2.1 Considerações iniciais

Para seguir com a técnica de regularização é necessário fazer algumas trocas de variáveis (Rondineau et al., 2004), diferente do capítulo anterior, as mudanças nas variáveis não são triviais. Assim, parece necessário realizar alguns trabalhos sobre as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ que descreve da estrutura geométrica. Só então o esquema de regularização pode ser aplicado:

$$\left. \begin{aligned} f_n^z \bar{\Omega}_a \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} &= \bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} \\ f_n^z \bar{\Omega}_a \cdot \mathbf{Y}_{an}^z &= \check{\mathbf{C}}_{an}^z \\ f_n^k \bar{\Omega}_b \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} \\ f_n^k \bar{\Omega}_b \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta < \Theta,$$

$$\left. \begin{aligned} f_n^k \mathbf{X}_{an} &= \bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} \\ f_n^k \mathbf{Y}_{an}^k &= \check{\mathbf{C}}_{an}^k \\ f_n^z \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3e} \\ f_n^z \mathbf{Y}_{bn}^z &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^z \end{aligned} \right\} \Theta < \theta \leq \Pi,$$

onde $\bar{\mathbf{I}}$ representa operador identidade.

Para controlar a singularidades, as grandezas introduzidas nas trocas de variáveis devem ser verificadas:

$$\frac{f_n^k}{f_n^z} (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an})^{-1} \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}},$$

$$\frac{f_n^z}{f_n^k} (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn})^{-1} \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}},$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{an} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{f_n^k}{f_n^z} \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}},$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{bn} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{f_n^z}{f_n^k} \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}},$$

onde $\bar{\Omega}_{a,b}$ são matrizes constantes:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_a^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^z}{f_n^k} \bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}, \\ \bar{\Omega}_b^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^k}{f_n^z} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}},\end{aligned}$$

o comportamento assintótico de $\bar{\mathcal{G}}_{a,bn}$ é:

$$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, (\bar{\mathcal{G}}_{a,bn})_{ij} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty).$$

6.2.2 Comportamento assintóticos

A primeira observação vem do fato de que as matrizes envolvidas são triangulares inferiores. Seja $\bar{\mathbf{O}}$ uma matriz inferior de dimensão $N \times N$ definida da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} o_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 & \dots & 0 \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{N1} & o_{N2} & o_{N3} & \dots & o_{NN} \end{bmatrix},$$

onde o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$|\bar{\mathbf{O}}| = \prod_{i=1}^N o_{ii}, \quad (6.13)$$

então $\bar{\mathbf{O}}$ é invertível e seu inverso é a matriz $\bar{\mathbf{P}}$ que também é uma matriz triangular inferior invertível:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

A determinação da $\bar{\mathbf{P}}$ analiticamente é feita de forma recursiva e crescente para cada elemento da matriz:

$$p_{ij} = \frac{1}{o_{ii}} \left(\delta_j^i - \sum_{k=j}^{i-1} o_{ik} \cdot p_{kj} \right), \quad (6.14)$$

com essa técnica de inversão, mais as operações de multiplicação, adição e subtração de matrizes, nos podemos obter as expressões do comportamento assintótico das matrizes $\bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}}$ e $\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}}$, o comportamento assintótico dessas matrizes são detalhada no

Apêndice C, com isso temos que:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{1}{\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)}} + \frac{1}{\eta_i \kappa_i} \right] \cdot \delta_{i,j}, \quad (6.15a)$$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] \cdot \delta_{i,j}, \quad (6.15b)$$

o comportamento assintótico de $\frac{f_n^k}{f_n^z}$ tem que ser:

$$\frac{f_n^k}{f_n^z} = O(n) (n \rightarrow \infty).$$

6.2.3 Regularização analítica

Depois de estudar o comportamento assintótico dessa matriz, o método de regularização pode ser aplicada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^z \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \overline{\Omega}_a \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, 0 \leq \theta < \Theta, \quad (6.16a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \overline{\Omega}_b \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_1, 0 \leq \theta < \Theta, \quad (6.16b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \left[\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k \right] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \Theta < \theta \leq \Pi, \quad (6.16c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^z \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta) \cdot \left[\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z \right] = -\overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_2, \Theta < \theta \leq \Pi. \quad (6.16d)$$

A representação integral do polinômio de Legendre associado é dada pela formula de Mehler–Dirichlet (OLVER, 2010, Eq. 14.12.1):

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2} (\sin \theta)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - m)} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2} + m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m < \frac{1}{2},$$

e utilizando a fórmula de conexão (OLVER, 2010, Eq. 14.9.3):

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = c_{mn} P_n^m(\cos \theta),$$

chegamos na seguinte relação:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2} - m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.17)$$

onde:

$$c_{mn} = (-1)^m \frac{\Gamma(n - m + 1)}{\Gamma(n + m + 1)}, \quad d_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\sin \theta)^m \Gamma(\frac{1}{2} + m)}.$$

A segunda igualdade é obtida através das mudanças de variáveis, ϕ em $\pi - \phi$ e θ em $\pi - \theta$:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}. \quad (6.18)$$

Utilizando o método de integração por partes, nos obtemos:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.19a)$$

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.19b)$$

onde:

$$e_{mn} = d_m \frac{(2m-1)}{(2n+1)}.$$

Para $m \in \{0, 1\}$, temos que:

$$\begin{aligned} \tan^m \left(\frac{\theta}{2} \right) &= d_m \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, \\ &= e_{m0} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot^m \left(\frac{\theta}{2} \right) &= d_m \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, \\ &= e_{m0} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi. \end{aligned}$$

A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $0 \leq \theta < \pi$ com $m = 1$ é:

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} n(n+1) \int_0^{\theta} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20a)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20b)$$

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \phi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20c)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20d)$$

e para o intervalo $\Theta < \theta \leq \Pi$ com $m = 1$ é:

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} n(n+1) \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20e)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20f)$$

$$\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \quad (6.20g)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi. \quad (6.20h)$$

Escolheremos a formula de Mehler-Dirichlet que satisfaça a condição do comportamento assintótico de $\frac{f_n^k}{f_n^z} = O(n) (n \rightarrow \infty)$ e associaremos com as Eqs. 6.16a-6.16d, obtendo:

$$\int_0^{\theta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^z n(n+1) \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \overline{\Omega}_a \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z] + \overline{\cos} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_1 \right\} \frac{d\phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.21a)$$

$$\int_0^{\theta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \overline{\Omega}_b \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] + \overline{\sin} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_1 \right\} \frac{\sin \phi d\phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.21b)$$

$$\int_{\theta}^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^k \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot [\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k] + \overline{\cos} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2 \right\} \frac{\sin \phi d\phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.21c)$$

$$\int_{\theta}^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^z n(n+1) \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] - \overline{\sin} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2 \right\} \frac{d\phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.21d)$$

onde:

$$f_n^k = \frac{(2n+1)}{n(n+1)},$$

$$f_n^z = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Essas integrais são homogêneas do tipo Abel com um núcleo de quadrados somados. Então, suas funções integrantes desaparecem em todo o intervalo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z] = -\overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \overline{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{0} \leq \theta < \Theta, \quad (6.22a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] = -\overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{0} \leq \theta < \Theta, \quad (6.22b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k] = -\overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2, \quad \Theta < \theta \leq \Pi, \quad (6.22c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] = \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2, \quad \Theta < \theta \leq \Pi. \quad (6.22d)$$

e portanto, podemos reescrever como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{an} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z] - \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_1, & 0 \leq \theta < \Theta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{an}^k - \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2, & \Theta < \theta \leq \Pi, \end{cases} \quad (6.23a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{bn} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] - \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_1, & 0 \leq \theta < \Theta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z + \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_2, & \Theta < \theta \leq \Pi. \end{cases} \quad (6.23b)$$

Essa equação nada mais é do que a expressão de Fourier do campo eletromagnético. Para obter os coeficientes de Fourier, essas equações deve ser projetadas nas funções $\overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$ e $\overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$, com $u \geq 0$ e as integramos de 0 a π :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{an} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z] + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta}^{\pi} \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{an}^k - \int_0^{\theta} \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_1 - \dots \\ &\dots \int_{\theta}^{\pi} \overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \mathbf{C}_2 \end{aligned} \quad (6.24a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta}^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z - \int_0^{\theta} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_1 + \dots \\ &\dots \int_{\theta}^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \mathbf{C}_2, \end{aligned} \quad (6.24b)$$

onde as integrais são:

$$\mathcal{P}_{un}(\theta) = \int_0^{\theta} \cos \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u - n)\theta}{(u - n)} + \frac{\sin(u + n + 1)\theta}{(u + n + 1)} \right], \quad (6.25a)$$

$$\mathcal{Q}_{un}(\theta) = \int_0^{\theta} \sin \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u - n)\theta}{(u - n)} - \frac{\sin(u + n + 1)\theta}{(u + n + 1)} \right], \quad (6.25b)$$

reescrevendo as equações com os novos termos e em forma matricial, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{an} \\ \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z - \mathbf{Y}_{an}^k \\ \bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{an}^k \\ \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} & \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\pi) - \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \\ \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} & \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) - \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.26a)$$

As constantes \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 são obtida graça à projeção em $u = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{00}(\theta) \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} & \overline{\mathcal{P}}_{00}(\pi) - \overline{\mathcal{P}}_{00}(\theta) \\ \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\theta) \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} & \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\theta) - \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} &= \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{0n}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z - \mathbf{Y}_{an}^k \\ \bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

e para projeção em $u \geq 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{au} \\ \mathbf{X}_{bu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{au}^k \\ \mathbf{Y}_{bu}^z \end{bmatrix} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\theta) & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z - \mathbf{Y}_{an}^k \\ \overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z \end{bmatrix} - \dots \\ &\dots \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_a^{-1} & -\overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \\ \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} & \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde \mathbf{X}_{au} , \mathbf{X}_{bu} , \mathbf{Y}_{au}^k e \mathbf{Y}_{bu}^z são:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{au} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{an}, \\ \mathbf{Y}_{au}^k &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{an}^k, \\ \mathbf{X}_{bu} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn}, \\ \mathbf{Y}_{bu}^z &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z. \end{aligned}$$

Por tanto, temos o problema do primeiro tipo convertido em um problema do segundo tipo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{au} \\ \mathbf{X}_{bu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{au}^k \\ \mathbf{Y}_{bu}^z \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^z - \mathbf{Y}_{an}^k \\ \overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

onde a matriz infinita da parte metálica é:

$$\overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\mathbf{0}) = \overline{\mathbf{0}},$$

$$\overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\Pi) = \begin{cases} \overline{\mathbf{I}}, & u = n \\ \overline{\mathbf{0}}, & u \neq n \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\theta) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\theta) & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \end{bmatrix} - \dots \right. \\ &\dots \left. \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_a^{-1} & -\overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \\ \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} & \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{00}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_a^{-1} & \overline{\mathcal{P}}_{00}(\pi) - \overline{\mathcal{P}}_{00}(\theta) \\ \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\theta) \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} & \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\theta) - \overline{\mathcal{Q}}_{00}(\pi) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_{0n}(\theta) & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{0} < \theta < \Pi. \end{aligned}$$

6.3 Resultados e Discussões

6.3.1 Dipolo magnético elementar

O dipolo magnético elementar equivale a um laço, de raio desprezível, comparado ao comprimento de onda, em um fio elétrico extremamente fino atravessado por uma corrente elétrica. Os diagramas de radiação de campo distante associado a este dipolo são

obtidos pelas Eqs. 3.53a e 3.53b para $\kappa_0 r_1 = 10$, Figura 21, e correspondem exatamente ao que é apresentado em qualquer literatura clássica.

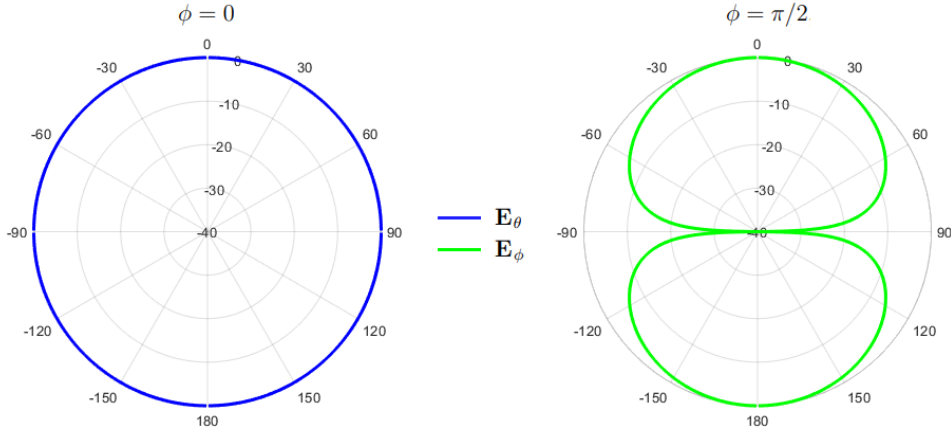


Figura 21 – Diagrama de radiação de campo distante associado dipolo magnético elementar.

6.3.2 Lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo magnético

Como já descrito no capítulo anterior, a lente de Lüneburg discreta atua como uma bomba ao focalizar a energia, o poder de focalização da lente de Lüneburg discreta associada a um dipolo magnético, Figura 22.

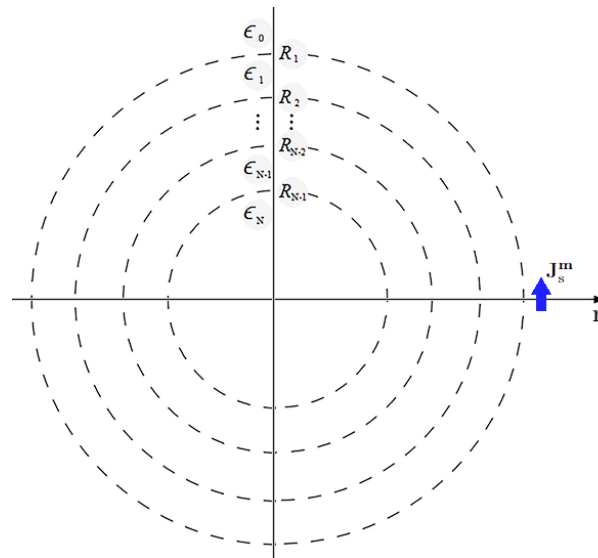


Figura 22 – Lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo magnético.

Observando as Figuras 23-26, podemos notar que quanto mais camadas houver, menos radiação da metade traseira do espaço é afetada pela presença da lente e que acima de três camadas, o diagrama de radiação não muda muito.

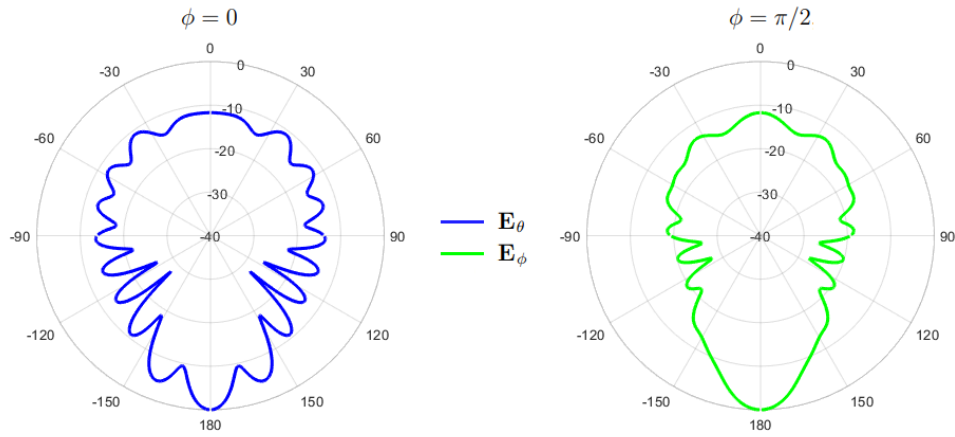


Figura 23 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 1 camada associado dipolo magnético.

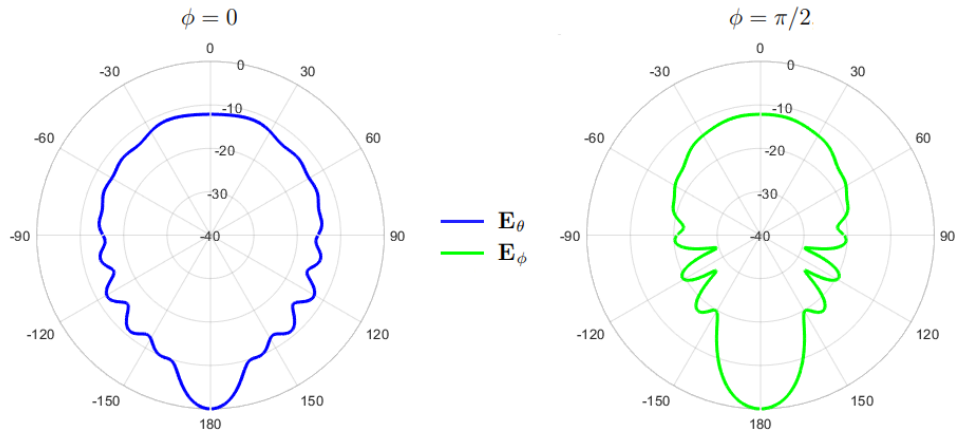


Figura 24 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 2 camada associado dipolo magnético.

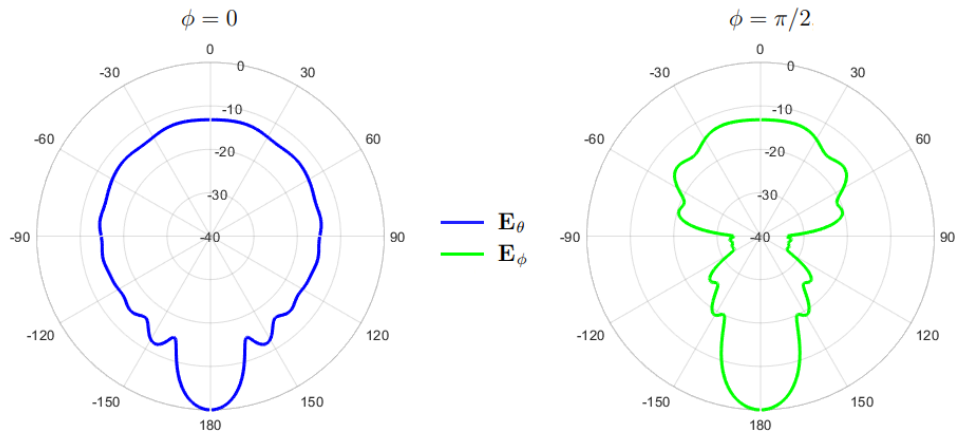


Figura 25 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 3 camada associado dipolo magnético.

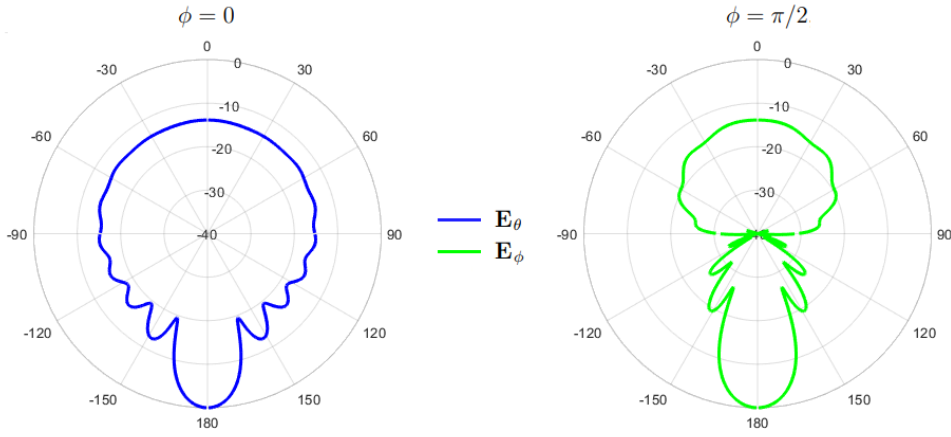


Figura 26 – Diagrama de radiação de campo distante de uma lente de Lüneburg discreta de 20 camada associado dipolo magnético.

Portanto, a lente de Lüneburg discreta pode focar qualquer onda eletromagnética. Melhorando o diagrama de radiação nos casos do dipolo elétrico radial e do dipolo magnético tangencial.

6.3.3 Antena acoplada a Lente de Lüneburg associada a um dipolo magnético

Acoplamos uma antena esférica-circular impressa alimentada por um dipolo magnético em uma a Lente de Lüneburg, Figura 27. Mas os resultados não foram satisfatórios, existe algum problema na matriz infinita da parte metálica, $\overline{\overline{\mathcal{S}}}_{un}(\theta)$.

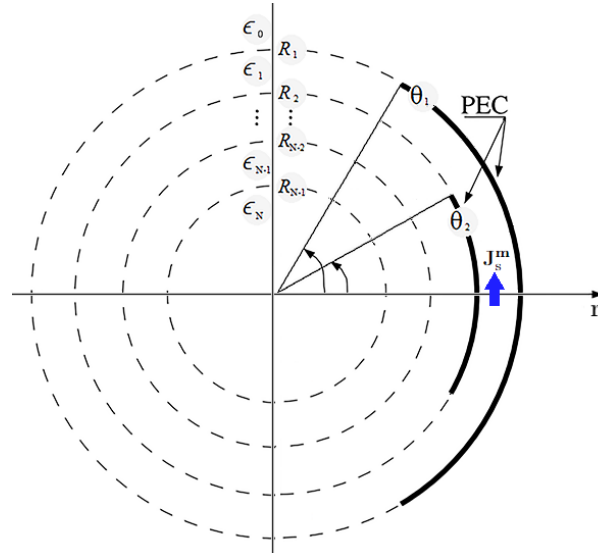


Figura 27 – Antena acoplada a lente de Lüneburg discreta de N camada associado dipolo magnético.

7 Conclusão

O proposito deste trabalho foi desenvolver uma análise matemática e numérica de uma antena esférica-circular impressa acoplada a uma lente de Lüneburg discreta alimentada por um cabo coaxial centrado ou fenda centrada. Utilizamos o MatLab para validar e simular toda a análise matemática e numérica desenvolvida aqui, o código pode ser clonado do repositório no GitHub ([OLIVEIRA, 2022](#)).

O desenvolvimento da análise matemática e numérica para a antena alimentada por um cabo coaxial centrado, foi validada utilizando o erro relativo, que demonstrou que o calculo converge para um único resultado, que por sua vez é validado por pelo software comercial HFSS. Para essa antena foi feita uma otimização baseada na frequência normalizada, $\kappa_0 r_1$ e no número de camadas, N , e isso nos possibilitou criar 5 antenas com número de camadas distintas e com a melhor potência irradiada para o intervalo da frequência normalizada.

Já para a antena alimentada por uma fenda centrada, não obtivemos sucesso, foi demonstrado que para a fonte no espaço livre ou acoplada a uma lente de Lüneburg discreta o calculo funciona, mas quando acoplamos a parte metálica o resultado é insatisfatório.

Embora ainda haja um certo número de coisas a fazer, uma vez desenvolvida essa técnica, que é rápida e permite controlar a precisão dos resultados, poderemos desenvolver e analisar varias configurações de antenas de acordo com a nossa necessidade.

Referências

ABRAMOWITZ, M. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications, 1965. ISBN 9780486612720. Citado 4 vezes nas páginas 28, 31, 33 e 80.

ALI, S. M.; HABASHY, T. M.; KONG, J. A. Spectral-domain dyadic green's function in layered chiral media. *J. Opt. Soc. Am. A*, OSA, v. 9, n. 3, p. 413–423, Mar 1992. Disponível em: <<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-9-3-413>>. Citado na página 37.

BALANIS, C. *Antenna theory : analysis and design*. Hoboken, New Jersey: John Wiley, 2016. ISBN 9781118642061. Citado 6 vezes nas páginas 8, 32, 33, 48, 75 e 76.

COURANT, R. *Methods of mathematical physics*. New York: Wiley, 1989. ISBN 978-0-471-50447-4. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

GREEN, G. *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. 2008. Citado na página 24.

GREENWOOD, A.; JIN, J.-M. Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 47, n. 8, p. 1260–1266, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/8.791941>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 19 e 20.

HANSEN, J. E. *Spherical near-field antenna measurements*. London, U.K: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988. ISBN 978-0-86341-110-6. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 56.

KOROTKOV, A. N.; SHABUNIN, S. N.; CHECHETKIN, V. A. The cylindrical luneburg lens discretization influence on its radiation parameters. In: *2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*. IEEE, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/sibircon.2017.8109914>>. Citado na página 16.

Le-Wei Li et al. Electromagnetic dyadic green's function in spherically multilayered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 42, n. 12, p. 2302–2310, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.

LUNEBURG, R. K.; WOLF, E.; HERZBERGER, M. *Mathematical Theory of Optics*. University of California Press, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1525/9780520328266>>. Citado na página 19.

Nosich, A. I. The method of analytical regularization in wave-scattering and eigenvalue problems: foundations and review of solutions. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 41, n. 3, p. 34–49, June 1999. ISSN 1558-4143. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 60.

OLIVEIRA, N. *Código da Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg*. 2022. Disponível em:

<<https://github.com/nauam/AntenaLenteLuneburg.git>>. Acesso em: 01 maio 2022. Citado na página 71.

OLVER, F. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge New York: Cambridge University Press NIST, 2010. ISBN 9780521192255. Citado 5 vezes nas páginas 36, 45, 46, 63 e 81.

RONDINEAU, S. *Modelisation de Lentilles Spheriques a Gradient D'indice Et Sources Conformes Associees*. 274 p. Dissertação (Mestrado) — Devant L'universite de Rennes 1, UMR CNRS 6164, Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes, Groupe Antennes et Hyperfréquences, Campus de Beaulieu, Rennes, France, 2002. Citado na página 49.

Rondineau, S. et al. Mar analysis of a spherical-circular printed antenna with finite ground excited by an axially symmetric probe. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 52, n. 5, p. 1270–1280, May 2004. ISSN 1558-2221. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 61.

TAI. *Dyadic green functions in electromagnetic theory*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1994. ISBN 0-7803-0449-7. Citado 3 vezes nas páginas 18, 21 e 34.

Apêndices

APÊNDICE A – PARÂMETROS DE ANTENAS

A.1 Antena

Antena um dispositivo geralmente metálico que transforma um sinal de tensão em ondas eletromagnéticas (antena transmissora) ou ondas eletromagnéticas em um sinal de tensão (antena receptora), elas são elementos muito importantes em sistemas de comunicação. Há diversos tipos tipo de antenas que varia desde da sua geometria, até o seu tipo de alimentação, o dimensionamento de uma antena depende das especificações de projeto (BALANIS, 2016).

A.1.1 Diagrama de Radiação

Um diagrama de radiação de uma antena é definido como sendo uma função matemática ou uma representação gráfica das propriedades de radiação da antena como uma função de coordenadas espaciais. Na maioria dos casos, o diagrama de radiação é determinado na região de campo distante e é representado como uma função das coordenadas direcionais. As propriedades de radiação incluem densidade de fluxo de energia, intensidade de radiação, intensidade de campo, diretividade, fase ou polarização. A Figura 28 mostra a representação do diagrama de radiação.

Normalmente o diagrama de potência são normalizados em relação ao seu valor máximo e são geralmente plotado em uma escala logarítmica ou decibéis (dB), Figura 29, porque acentua com mais detalhes aquelas partes do diagrama que têm valores muito baixos. O diagrama pode ser representado por 2 planos ortogonais, o E-plano que contém o vetor do campo elétrico e o H-plano que contém o vetor do campo magnético.

A.1.2 Diagrama de Diretividade

Diretividade pode ser definida como a capacidade de uma antena de transmitir ou receber sinais focando apenas em uma faixa estreita direcional. Antenas direcionais podem diminuir o efeito da interferência de outros sinais devido à faixa estreita de sinal. Além disso, elas têm uma maior eficiência em transmitir potência. A diretividade é definida matematicamente como a razão entre a intensidade de radiação e a intensidade de radiação média em todas as direções.

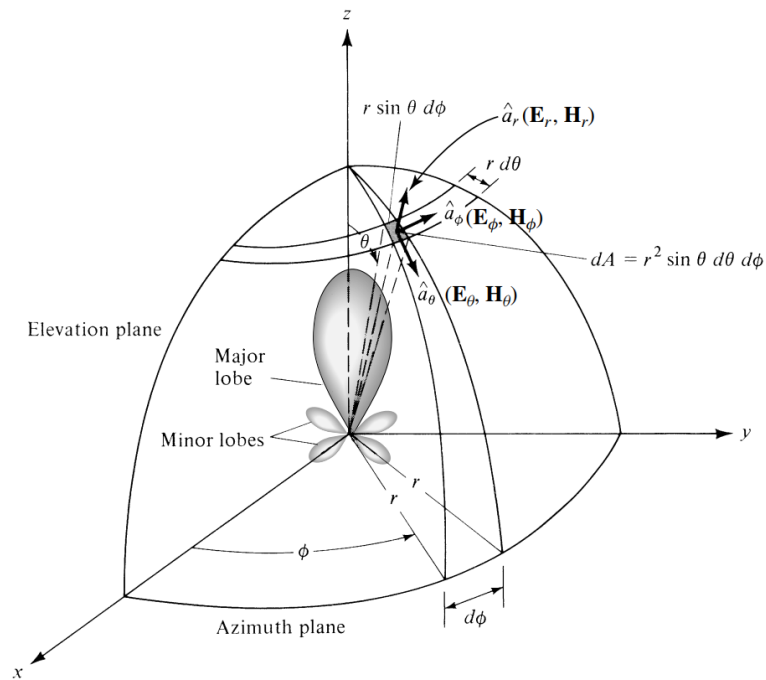


Figura 28 – Diagrama de radiação para análise das propriedades de radiação de antena (BALANIS, 2016).

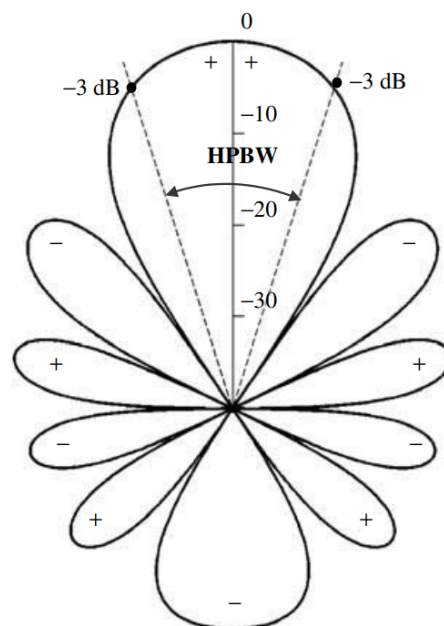


Figura 29 – Diagrama de potência normalizado (dB) (BALANIS, 2016).

APÊNDICE B – DEFINIÇÃO DOS VETORES E MATRIZES

$$\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T, \quad \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{\Pi} = \pi \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{\Theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N]^T.$$

B.1 Vetores referente ao método de regularização do analítica

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1\beta} &= [a_{mn}^{1\beta 1} \quad a_{mn}^{1\beta 2} \quad \dots \quad a_{mn}^{1\beta N}]^T, & \check{\mathbf{A}}_n^{1s} &= \check{f}_n k_n^{1s\odot} [\delta_s^1 \quad \delta_s^2 \quad \dots \quad \delta_s^N]^T, \\ \mathbf{A}_{mn}^{3\beta} &= [a_{mn}^{3\beta 0} \quad a_{mn}^{3\beta 1} \quad \dots \quad a_{mn}^{3\beta(N-1)}]^T, & \check{\mathbf{A}}_n^{3s} &= \check{f}_n k_n^{3s\odot} [\delta_s^0 \quad \delta_s^1 \quad \dots \quad \delta_s^{(N-1)}]^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{1\beta} &= [b_{mn}^{1\beta 1} \quad b_{mn}^{1\beta 2} \quad \dots \quad b_{mn}^{1\beta N}]^T, & \check{\mathbf{B}}_n^{1s} &= \check{f}_n z_n^{1s\odot} [\delta_s^1 \quad \delta_s^2 \quad \dots \quad \delta_s^N]^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{3\beta} &= [b_{mn}^{3\beta 0} \quad b_{mn}^{3\beta 1} \quad \dots \quad b_{mn}^{3\beta(N-1)}]^T, & \check{\mathbf{B}}_n^{3s} &= \check{f}_n z_n^{3s\odot} [\delta_s^0 \quad \delta_s^1 \quad \dots \quad \delta_s^{(N-1)}]^T. \end{aligned}$$

B.2 Matrizes referente as equações de séries duplas

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos \theta))_{i,j} &= P_n^1(\cos \theta_i) \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\cos \theta})_{i,j} &= \cos \theta_i \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\tan}(\frac{\theta}{2}))_{i,j} &= \tan(\frac{\theta_i}{2}) \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\sin \theta})_{i,j} &= \sin \theta_i \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\cot}(\frac{\theta}{2}))_{i,j} &= \cot(\frac{\theta_i}{2}) \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1D})_{i,j} &= z_n^{1ii} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1E})_{i,j} &= z_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1F})_{i,j} &= z_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3D})_{i,j} &= z_n^{3(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3E})_{i,j} &= z_n^{3ii} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3F})_{i,j} &= z_n^{3ii} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1D})_{i,j} &= \frac{k_n^{1ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1E})_{i,j} &= \frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1F})_{i,j} &= \frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3D})_{i,j} &= \frac{k_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3E})_{i,j} &= \frac{k_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3F})_{i,j} &= \frac{k_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} = \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1D} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1E}, \quad \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} = \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3D} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3E}, \quad \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1T} = \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1D} - \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1E}, \quad \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3T} = \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3D} - \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3E}.$$

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1D})_{i,j} &= k_n^{1ii} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1E})_{i,j} &= k_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1F})_{i,j} &= k_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3D})_{i,j} &= k_n^{3(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3E})_{i,j} &= k_n^{3ii} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3F})_{i,j} &= k_n^{3ii} \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1D})_{i,j} &= \frac{z_n^{1ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E})_{i,j} &= \frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F})_{i,j} &= \frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, \\
(\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D})_{i,j} &= \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3E})_{i,j} &= \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F})_{i,j} &= \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j},
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1D} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3E}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1D} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3E}.$$

B.2.1 Vetores referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3D} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T}, \\
\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}, \\
\bar{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T}, \\
\bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T}.
\end{aligned}$$

B.2.2 Matrizes referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s}, \\
\check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}, \\
\check{\mathbf{C}}_{an}^k &= \left[\bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s}, \\
\check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}.
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – MATRIZES DE REGULARIZAÇÃO

C.1 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}$

$$\forall(i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, \forall n \in \langle 1, \infty \rangle$$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} - \frac{1}{\eta_i} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}}}{1 - \frac{z_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}}} \right]$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}} \right] - \frac{1}{\eta_i} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}}$$

se $1 < (i = j) < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}} \right] - \frac{1}{\eta_i} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}}}{1 - \frac{z_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}}} \right]$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = -\frac{1}{\eta_i} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1i(i+1)}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}}}{1 - \frac{z_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}} \frac{z_n^{1ii}}{z_n^{1i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)(i-1)}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)i}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)i}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)(i-1)}}} \right]$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

C.2 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}$

$$\forall(i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, \forall n \in \langle 1, \infty \rangle$$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}}}{1 - \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}}} \right]$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}} \right] - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}}$$

se $1 < (i = j) < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}} \right] - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}}}{1 - \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}}} \right]$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = -\frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}}}{1 - \frac{k_n^{3i(i+1)}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}}} \right]$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = 0$$

C.3 Relações de recorrência

Para poder aplicar a técnica de regularização, é necessário estudar o comportamento assintótico dessa matriz. Na função de onda vetorial elétrica aparece uma derivada da função esférica de Bessel e Hankel

$$k_n^\alpha(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \frac{d[\zeta z_n^\alpha(\zeta)]}{d\zeta} = \frac{dz_n^\alpha(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta), \quad (\text{C.1})$$

e a solução ([ABRAMOWITZ, 1965](#), Eq. 10.1.21-22) é

$$\frac{dz_n^\alpha(\zeta)}{d\zeta} = z_{n-1}^\alpha(\zeta) - \frac{n+1}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta) = -z_{n+1}^\alpha(\zeta) + \frac{n}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta). \quad (\text{C.2})$$

Portanto, a derivada da função esférica de Bessel de primeiro tipo e a derivada da função esférica de Hankel de primeiro tipo pode ser escritas como:

$$k_n^1(\zeta) = z_{n-1}^1(\zeta) - \frac{n}{\zeta} z_n^1(\zeta), \quad (\text{C.3})$$

$$k_n^3(\zeta) = \frac{n+1}{\zeta} z_n^3(\zeta) - z_{n+1}^3(\zeta). \quad (\text{C.4})$$

C.4 Expansões assintóticas para grandes ordens

Para grandes ordens, $n \rightarrow \infty$, e com $\zeta \neq 0$ (OLVER, 2010, Eqs. 10.19(i) e 10.47(ii)) temos que:

$$z_n^1(\zeta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\zeta(n + \frac{1}{2})}} \left(\frac{e\zeta}{2n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad (C.5)$$

$$z_n^3(\zeta) \sim \frac{-i}{\sqrt{\zeta(n + \frac{1}{2})}} \left(\frac{e\zeta}{2n+1} \right)^{-n-\frac{1}{2}}, \quad (C.6)$$

e a função exponencial natural (OLVER, 2010, Eq. 4.4.17) tem expansões assintóticas para grandes ordens como:

$$e^x \sim \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n. \quad (C.7)$$

Relações entre as funções são:

$$\frac{z_n^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.8) \quad \frac{z_n^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.12)$$

$$\frac{z_{n-1}^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \frac{2n+1}{\zeta_1} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.9) \quad \frac{z_{n+1}^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim \frac{2n+3}{\zeta_2} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.13)$$

$$\frac{k_n^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \frac{n+1}{\zeta_1} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.10) \quad \frac{k_n^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim -\frac{n+2}{\zeta_2} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.14)$$

$$\frac{k_n^1(\zeta_1)}{k_n^1(\zeta_2)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n-1}, \quad (C.11) \quad \frac{k_n^3(\zeta_2)}{k_n^3(\zeta_1)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+2}. \quad (C.15)$$

C.5 Comportamento assintótico da matriz $\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1}$

$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2$, para $n \rightarrow \infty$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{1}{\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)}} + \frac{1}{\eta_i \kappa_i} \frac{1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i} \right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i} \right]^{2n+1}} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{1}{\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)}} \frac{1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}} \right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}} \right]^{2n+1}} + \frac{1}{\eta_i \kappa_i} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $1 < i = j < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{1}{\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)}} \frac{1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}} + \frac{1}{\eta_i \kappa_i} \frac{1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} \sim \frac{2n-1}{R_i \eta_i \kappa_i} \frac{\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}} (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} \sim \frac{2n}{R_i \eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)}} \frac{\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}} (n \rightarrow \infty)$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}\right)_{i,j} = 0$$

C.6 Comportamento assintótico da matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}$

$\forall(i,j) \in \langle 1, N \rangle^2$, para $n \rightarrow \infty$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $1 < i = j < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i+1)}}{n} \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{n+1}}{1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}} (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i-1)}}{n} \frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n}{1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}} (n \rightarrow \infty)$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}\right)_{i,j} = 0$$

$$\text{se } i > j+1 \\ (\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1})_{i,j} = 0$$

C.7 Comportamento assintótico em relação aos raios

O raios das conchas concêntrica que constitui a lente discreta pode ser descrita como $R_{(i-1)} > R_i > R_{(i+1)}$, então partindo dessa relação, temos que para grandes ordens, $n \rightarrow \infty$:

$$\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}} \right]^n \sim 0, \quad (\text{C.16})$$

$$\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i} \right]^n \sim 0. \quad (\text{C.17})$$

Então o comportamento assintótico das matrizes $\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1}$ e $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$ podem ser resumida como:

$$(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1})_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{1}{\eta_{(i-1)}\kappa_{(i-1)}} + \frac{1}{\eta_i\kappa_i} \right] \cdot \delta_{i,j}, \quad (\text{C.18})$$

$$(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1})_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] \cdot \delta_{i,j}. \quad (\text{C.19})$$