

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA
Engenharia Eletrônica

**Aplicação do Método de Regularização
Analítica a uma Antena Esférica-Circular
Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg**

Autor: Nauam Victor Reis de Oliveira
Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph
Rondineau

Brasília, DF
2021



Nauam Victor Reis de Oliveira

**Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma
Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente
de Lüneburg**

Monografia submetida ao curso de graduação
em Engenharia Eletrônica da Universidade
de Brasília, como requisito parcial para ob-
tenção do Título de Bacharel em Engenharia
Eletrônica.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau

Brasília, DF

2021

Nauam Victor Reis de Oliveira

Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg/ Nauam Victor Reis de Oliveira. – Brasília, DF, 2021-

87 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA , 2021.

1. Aplicação da MAR. 2. Funções de Green. I. Prof. Dr. Sébastien Roland Marie Joseph Rondineau. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg

CDU

Nauam Victor Reis de Oliveira

Aplicação do Método de Regularização Analítica a uma Antena Esférica-Circular Impressa Acoplada a uma Lente de Lüneburg

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 16 de Maio de 2021:

**Prof. Dr. Sébastien Roland Marie
Joseph Rondineau**
Orientador

**Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de
Amorim**
Convidado 1

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli
Convidado 2

Brasília, DF
2021

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha esposa Alexia Costa, que me dá suporte diariamente.

Ao meus amigos Daniele Dias, Elpídio Araújo e Gabriel Carvalho que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

A minha avó Leobina Reis e meus irmãos Barbara Reis e Narciso Júnior que sempre serão meu marco zero.

Agradeço ao meu orientador Sébastien Rondineau por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa.

Resumo

Uma das muitas preocupações no desenvolvimento de antenas está em reduzir ao máximo o consumo a energia gasta e uma das várias técnicas é criar um sinal direcionado, um sinal que ilumine apenas as áreas desejadas. Assim, a eficiência da radiação é aumentada. Este problema poder ser resolvido usando as lentes de Lüneburg com vários irradiadores. Foi desenvolvido uma expressão geral usando a função diádica de Green em coordenadas esféricas. Isso criou um conjunto acoplado de equações de séries duplas, que descreve a relações entre o campo criado por qualquer fonte primária e a estrutura esférica de espalhamento que é composta de N-camadas, cada camada tem sua própria constante dielétrica, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ . As equações de séries duplas são equações de primeiro tipo, onde infelizmente, uma inversão direta geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência, então foi utilizado o método de regularização analítica (MAR) que tem como proposito transformar o problema do primeiro tipo em um problema do tipo Fredholm do segundo tipo, tornando o problema estável para a inversão e que converge. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , e quanto maior a ordem de truncamento, mais próxima a precisão está da precisão da máquina.

Palavras-chave: Método de Regularização Analítica. Funções Diádicas de Green. Lente de Lüneburg. Antena Esférica Circular.

Abstract

One of the many concerns in the development of antennas is to reduce energy consumption to a minimum and one of several techniques is to create a targeted signal, a signal that illuminates only the desired areas. Thus, the efficiency of radiation is increased. This problem can be solved using the Lüneburg lenses with several radiators. A general expression was developed using dyadic Green's function in spherical coordinates. This created a coupled set of dual series equations, which describes the relationships between the field created by any primary source and the spherical scattering structure that is composed of N -layers, each layer has its own dielectric, radius and a disk of spherical half-angle metal θ . the dual series equations are first type equations, where unfortunately, a direct inversion is generally not possible. Even if a numerical inversion was possible, nothing could guarantee its convergence. Then the Method of Analytical Regularization (MAR) was used, whose purpose is to transform the problem of the first type into a problem of the Fredholm type, making the problem stable for inversion and converging. The implementation of these equations requires truncation for a n order, and the higher the truncation order, the closer the precision is to the precision of the machine.

Key-words: Method of Analytical Regularization. Dyadic Green's Functions. Luneburg lens. Spherical Circular Antenna.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Lente de Lüneburg ideal.	19
Figura 2 – Diagrama de radiação de uma lente esférica de Lüneburg excitada por um dipolo Hertziano. (a) 4λ de diâmetros. (b) 10λ de diâmetro (GREENWOOD; JIN, 1999).	20
Figura 3 – LLD - Lente de Lüneburg Discreta.	20
Figura 4 – Duas regiões dielétricas distintas, separadas por uma superfície S' com parte composta por um PEC (<i>Perfect Electric Conductor</i> - Condutor Elétrico Perfeito) e um PMC (<i>Perfect Magnetic Conductor</i> - Condutor Magnético Perfeito).	25
Figura 5 – Definição dos parâmetros geométricos da estrutura.	35
Figura 6 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes frequências normalizadas, $\kappa_0 r_1$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$	49
Figura 7 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 50$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$	50
Figura 8 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg composta de 7 camadas em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$	50
Figura 9 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg em função da ordem de truncamento para diferentes discretização da lente, N . Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$ e $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$	51
Figura 10 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes frequências normalizadas, $\kappa_0 r_1$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$	69
Figura 11 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 50$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$	69
Figura 12 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg composta de 7 camadas em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$	70

Figura 13 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg em função da ordem de truncamento para diferentes discretização da lente, N . Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$ e $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$	70
Figura 14 – Diagrama de radiação para análise das propriedades de radiação de antena (BALANIS, 2016).	77
Figura 15 – Diagrama de potência normalizado (dB) (BALANIS, 2016).	77

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

4G	Quarta Geração de Redes Móveis
5G	Quinta Geração de Redes Móveis
6G	Sexta Geração de Redes Móveis
dB	Decibel
Eq	Equação
Eqs	Equações
GB/s	Gigabytes por Segundo
HFSS	Software de Simulação Eletromagnética.
IoT	Internet das Coisas (Internet of Things)
LLD	Lente de Lünenburg Discreta
MAR	Método de Regularização Analítica (Method of Analytical Regularization)
MATLAB	MATrix LABoratory - Software Interativo de Alta Performance Voltado para o Cálculo Numérico.
PEC	Condutor Elétrico Perfeito (Perfect Electric Conductor)
PMC	Condutor Magnético Perfeito (Perfect Magnetic Conductor)
TB/s	Terabytes por Segundo

Lista de símbolos

ϕ	Componente Azimutal
θ	Componente Polar
r	Componente Radial
δ	Delta de Kronecker
ρ	Densidade da Carga Elétrica
$\bar{\mathbf{J}}^e$	Diádico Densidade da Corrente Elétrica
$\bar{\mathbf{J}}^m$	Diádico Densidade da Corrente Magnética
$\bar{\mathbf{E}}$	Diádico Intensidade do Campo Elétrico
$\bar{\mathbf{H}}$	Diádico Intensidade do Campo Magnético
ω	Frequência Angular
ψ	Função de Onda Escala
$\bar{\mathbf{N}}$	Função de Onda Vetorial Elétrica
$\bar{\mathbf{M}}$	Função de Onda Vetorial Magnética
$\bar{\mathbf{G}}_{es}$	Função Diádico de Green de Espalhamento do Campo Elétrico
$\bar{\mathbf{G}}_{ms}$	Função Diádico de Green de Espalhamento do Campo Magnético
$\bar{\mathbf{G}}_e$	Função Diádico de Green do Campo Elétrico
$\bar{\mathbf{G}}_m$	Função Diádico de Green do Campo Magnético
$\bar{\mathbf{G}}_{e0}$	Função Diádico de Green no Espaço Livre do Campo Elétrico
$\bar{\mathbf{G}}_{m0}$	Função Diádico de Green no Espaço Livre do Campo Magnético
z_n^1	Função Esférica de Bessel do Primeiro Tipo e de Ordem n
z_n^2	Função Esférica de Bessel do Segundo Tipo e de Ordem n
z_n^3	Função Esférica de Hankel do Primeiro Tipo e de Ordem n
z_n^4	Função Esférica de Hankel do Segundo Tipo e de Ordem n

k_n^1	Derivada da Função Esférica de Bessel do Primeiro Tipo e de Ordem n
k_n^2	Derivada da Função Esférica de Bessel do Segundo Tipo e de Ordem n
k_n^3	Derivada da Função Esférica de Hankel do Primeiro Tipo e de Ordem n
k_n^4	Derivada da Função Esférica de Hankel do Segundo Tipo e de Ordem n
η	Impedância Característica
κ	Numero de Onda Modal
ϵ	Permeabilidade
μ	Permeabilidade
P_n^m	Polinômio de Legendre Associado de Grau n e de Ordem m
P_n	Polinômio de Legendre de Grau n
	Vetor Densidade da Carga Elétrica
\mathbf{J}^e	Vetor Densidade da Corrente Elétrica
\mathbf{J}^m	Vetor Densidade da Corrente Magnética
\mathbf{E}	Vetor Intensidade do Campo Elétrico
\mathbf{H}	Vetor Intensidade do Campo Magnético
\mathbf{r}'	Vetor Posição da Fonte
\mathbf{r}	Vetor Posição do Observador

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Contextualização	16
1.2	Justificativa	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Objetivo Geral	17
1.3.2	Objetivo Específico	17
1.4	Estrutura do Monografia	18
2	LENTE LÜNEBURG	19
3	EXPRESSÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN	21
3.1	Determinação das equações de Maxwell	21
3.2	Determinação das equações de onda	22
3.3	Determinação das funções diádicas de Green	22
3.3.1	Fonte Elétrica	23
3.3.2	Fonte Magnética	23
3.4	Determinação das equações estratificadas	23
3.5	Resolvendo o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo	24
3.5.1	Fonte Elétrica	25
3.5.2	Fonte Magnética	26
3.6	Resolvendo a equação escalar de Helmholtz	27
3.7	Resolvendo a equação vetorial de Helmholtz	30
3.8	Resolvendo a equação de onda associada ao campo eletromagnético	31
4	DIFRAÇÃO POR UMA ESTRUTURA ESFÉRICA ESTRATIFICADA EM FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN	32
4.1	Função diádica de Green no espaço livre	32
4.2	Função diádica de Green de espalhamento	35
4.3	Determinação dos coeficientes de ondas esféricas	36
4.3.1	Fontes elétricas	36
4.3.2	Fontes magnética	37
5	ANTENA ALIMENTADA POR CABO COAXIAL CENTRADA	38
5.1	Determinação das Características da Antena	39
5.1.1	Diagrama de radiação de campo distante	39

5.1.2	Densidade e intensidade de radiação	40
5.1.3	Potência de radiação	41
5.1.4	Diagrama de diretividade	41
5.2	Determinação das equações de séries duplas	41
5.3	Método de Regularização Analítica	43
5.3.1	Considerações iniciais	44
5.3.2	Comportamento assintóticos	45
5.3.3	Regularização analítica	45
5.4	Resultado numérico	49
5.5	Validação	49
5.6	Conclusão	49
6	ANTENA ALIMENTADA POR FENDA CENTRADA	52
6.1	Determinação das Características da Antena	53
6.1.1	Diagrama de radiação de campo distante	53
6.1.2	Densidade e intensidade de radiação	54
6.1.3	Potência de radiação	56
6.1.4	Diagrama de diretividade	57
6.2	Determinação das equações de séries duplas	57
6.3	Método de Regularização Analítica	61
6.3.1	Considerações iniciais	61
6.3.2	Comportamento assintóticos	62
6.3.3	Regularização analítica	63
6.4	Resultado numérico	68
6.5	Validação	68
6.6	Conclusão	68
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	71
8	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICES	75
	APÊNDICE A – PARÂMETROS DE ANTENAS	76
A.1	Antena	76
A.1.1	Diagrama de Radiação	76
A.1.2	Diagrama de Diretividade	76

	APÊNDICE B – DEFINIÇÃO DOS VETORES E MATRIZES	78
B.1	Vetores referente ao método de regularização do analítica	78
B.2	Matrizes referente as equações de séries duplas	78
B.3	Fonte Elétrica	79
B.3.1	Vetores referente as estrutura geométrica	79
B.3.2	Matrizes referente as estrutura geométrica	79
B.4	Fonte Magnética	79
B.4.1	Vetores referente as estrutura geométrica	79
B.4.2	Matrizes referente as estrutura geométrica	80
	APÊNDICE C – MATRIZES DE REGULARIZAÇÃO	81
C.1	Fonte Elétrica	81
C.1.1	Matriz $\overline{C}_{bn}^z \cdot \overline{C}_{bn}^{k-1}$	81
C.2	Fonte Magnética	82
C.2.1	Matriz $\overline{C}_{an}^z \cdot \overline{C}_{an}^{k-1}$	82
C.2.2	Matriz $\overline{C}_{bn}^k \cdot \overline{C}_{bn}^{z-1}$	82
C.3	Relações de recorrência	83
C.4	Expansões assintóticas para grandes ordens	84
C.5	Comportamento assintótico das matrizes	84
C.5.1	Fonte Elétrica	84
C.5.1.1	Matriz $\overline{C}_{bn}^z \cdot \overline{C}_{bn}^{k-1}$	84
C.5.2	Fonte Magnética	85
C.5.2.1	Matriz $\overline{C}_{an}^z \cdot \overline{C}_{an}^{k-1}$	85
C.5.2.2	Matriz $\overline{C}_{bn}^k \cdot \overline{C}_{bn}^{z-1}$	86
C.6	Comportamento assintótico em relação aos raios	86
C.6.1	Fonte Elétrica	87
C.6.2	Fonte Magnética	87

1 Introdução

1.1 Contextualização

Para o mundo moderno, a comunicação se tornou um bem de consumo essencial. Com o advento da Internet das Coisas (IoT - Internet of Things), o *streaming*, a realidade virtual e outras tecnologias que requerem uma transmissão de dados muito alta, onde isso só tende a aumentar, é necessário uma infraestrutura muito boa para atender a essa demanda. A geração de redes sem fio já está se preparando para esse crescimento, o 5G por exemplo é um novo conjunto de tecnologias sem fio que promete conexões de dados incrivelmente rápidas, podendo obter velocidades de download de mais de 1 GB/s, o que é 20 a 30 vezes mais rápido do que o 4G, já o 6G pode oferecer velocidades de incriveis 1 TB/s.

Uma pilar muito importante nessa infraestrutura é o gasto com energia, então para reduzir ao máximo o consumo, várias técnicas estão sendo desenvolvidas e aplicadas e uma dessa técnicas é a criação de um sinal direcionado, um sinal que ilumine apenas as áreas desejadas. Assim, a eficiência da radiação é aumentada. Vários tipos de antenas atendem a esses requisitos. Um deles são os arranjos de antenas, mas seu ganho diminui durante o direcionamento do feixe, que também requer um sistema de controle complexo que é a maior parte do custo de tal antena. Outro tipo são as antenas parabólicas ou de lente. No caso de uma antena refletora, a varredura é realizada girando todo o sistema de antena mecanicamente, o que aumenta a complexidade, custo, peso e tamanho do sistema, ou por deslocamento elétrico ou mecânico do irradiador, mas em uma faixa relativamente estreita de ângulos (KOROTKOV; SHABUNIN; CHECHETKIN, 2017).

As lentes de Lüneburg com vários irradiadores é uma boa alternativa para a criação de sinais direcionados. As lentes de Lüneburg são usadas para construir sistemas de antenas de varredura e multifeixe. Devido ao seu design, essa lente permite a varredura em uma ampla gama de ângulos sem distorção do padrão de radiação. Além da focalização, as lentes de Lüneburg são usados para colimação de luz de diodos de laser.

1.2 Justificativa

Uma das muitas preocupações no desenvolvimento de antenas está em reduzir ao máximo o consumo a energia gasta e uma das várias técnicas é criar um sinal direcionado, ou seja, iluminar apenas o sinal na área desejada. Portanto, a eficiência da radiação é melhorada. O uso de lentes Lüneburg com vários radiadores pode resolver esse problema.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O presente trabalho visa desenvolver uma análise matemática e numérica precisa de uma antena esférica-circular impressa acoplada a uma lente de Lüneburg alimentada por uma sonda coaxial e/ou fenda simulada.

1.3.2 Objetivo Específico

Para o desenvolvimento geral da proposta, foram listados alguns objetivos específicos:

1. Estudar a lente de Lüneburg.
2. Desenvolver:
 - a) Equações Maxwell em forma diádica;
 - b) Equações de onda em forma diádica;
 - c) Teorema vetorial-diádica de Green do segundo tipo;
 - d) Equação escalar e vetorial de Helmholtz;
 - e) Função diádica de Green no espaço livre;
 - f) Função diádica de Green da estrutura de espalhamento;
 - g) Equações de séries duplas.
3. Aplicar o MAR:
 - a) Trocar de variáveis;
 - b) Definir o controle do comportamento da singularidade;
 - c) Analisar o comportamento assintótico;
 - d) Realizar a regularização.
4. Simular:
 - a) Escrever o algoritmo no *software* MATLAB;
 - b) Verificar a convergência numérica da solução;
 - c) Plotar a radiação de campo distante;
 - d) Comparar os resultados com o *software* Ansys HFSS.
5. Realizar os procedimentos 2-4 para fonte magnética.

1.4 Estrutura do Monografia

A lente de Lüneburg tem como uma das suas características a focalização, como mostrado no capítulo 2. Assim, parece necessário adquirir um ferramenta que permite a análise de lentes esféricas bem como das fontes associadas a elas.

Para este propósito, capítulo 3 e 4, a técnica selecionada é baseada na proposta do Chen-To Tai (TAI, 1994) para uma esfera metálica ou dielétrica e meios estratificados e também baseado no trabalho do Le-Wei Li, Pang-Shyan Kooi, Mook-Seng Leong e Tat-Soon Yee, (Le-Wei Li et al., 1994), onde é tratando em particular a difusão por uma estrutura dielétrica esférica multicamadas. Partindo desses estudos, é desenvolvido uma expressão geral usando a função diádica de Green em coordenadas esféricas. Isso cria um conjunto acoplado de equações de séries duplas, que descreve a relações entre o campo criado por qualquer fonte primária e a estrutura esférica de espalhamento que é composta de N-camadas, cada camada tem sua própria constante dielétrica, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ .

A análise das características da antena, capítulo 5, é baseado nos coeficientes, que contêm todas as informações que descrevem a fonte, esses coeficientes estão inseridas no conjunto acoplado de equações de séries duplas.

As equações de séries duplas são equações de primeiro tipo, onde há um vetor de incógnitas e um vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência, capítulo 6. Então para extrair os coeficientes é necessário seguir o método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization). O propósito dessa regularização é transformar o problema do primeiro tipo em um problema do tipo Fredholm do segundo tipo. Isso nos garantirá que existe uma e apenas uma solução. A implementação dessas equações requer um truncamento e quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso estará o resultado.

2 Lente Lüneburg

A lente Lüneburg, inventada por R.K. Lüneburg em 1944, é uma lente com índice de gradiente esfericamente simétrico. A lente de Lüneburg é comumente descrita por uma imagem de raio óptico geométrico, que indica que as ondas esféricas emitidas por uma fonte pontual colocada na borda da lente são convertidas em ondas planas locais, tornando a radiação do sistema altamente diretiva. O feixe de transmissão pode ser direcionado movendo a alimentação da antena, Figura 1.

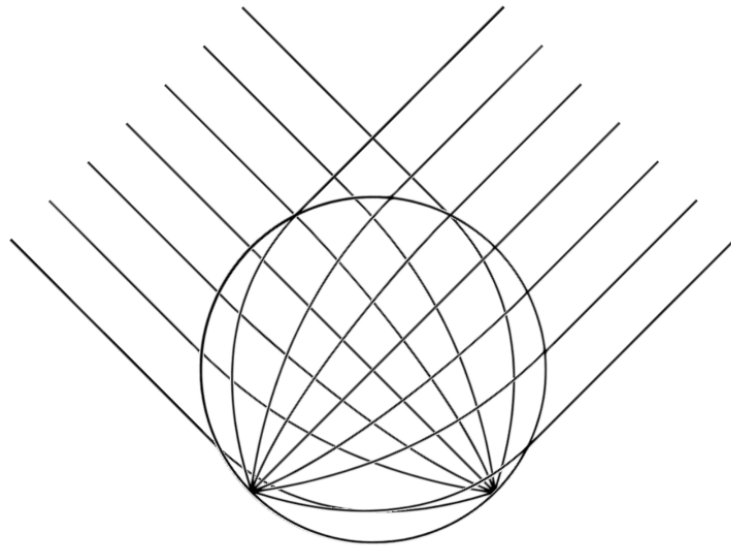


Figura 1 – Lente de Lüneburg ideal.

Idealmente, a constante dielétrica, ϵ , do material que compõe a lente, decai de 2 em seu centro para 1 em sua superfície de forma constante (LUNEBURG; WOLF; HERZBERGER, 1964, Eq. 29.53), mas nesse trabalho utilizaremos a equação para um decaimento discreto:

$$\epsilon_i = 2 - \left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2, \quad (2.1)$$

onde r_1 é o maior raio da lente. Como o índice de refração na superfície é o mesmo do meio circundante, nenhuma reflexão ocorre na superfície, em outras palavras, a superfície da lente tem sua impedância casada com o meio que a envolve.

Na lente de Lüneburg, o diagrama de radiação é diretiva e se torna mais diretiva conforme o tamanho da lente aumenta (GREENWOOD; JIN, 1999), na Figura 2 há o diagrama de radiação referente a duas lentes de Lüneburg, uma com 4λ de diâmetro e outra com 10λ de diâmetros, elas são excitadas por um dipolo Hertziano. Observe que a radiação dos campos são simétricos, então metade de cada campo é mostrada no mesmo

gráfico polar. O nível do lóbulo lateral está abaixo do -15 dB. Os parâmetros de antenas estão descritos no Apêndice A.

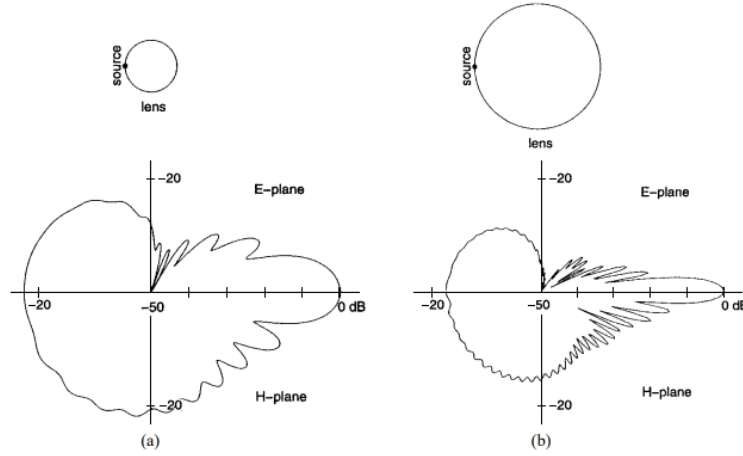


Figura 2 – Diagrama de radiação de uma lente esférica de Lüneburg excitada por um dipolo Hertziano. (a) 4λ de diâmetros. (b) 10λ de diâmetro (GREENWOOD; JIN, 1999).

Uma técnicas de construção de uma lente de Lüneburg é fazer a estrutura em camadas concêntricas discretas, Figura 3, onde i é a camada e N é a quantidade de camadas, cada uma com um índice de refração diferente, como descrito na Eq. 2.1. Essas camadas formam um perfil de índice de refração escalonado que difere ligeiramente da solução de Lüneburg.

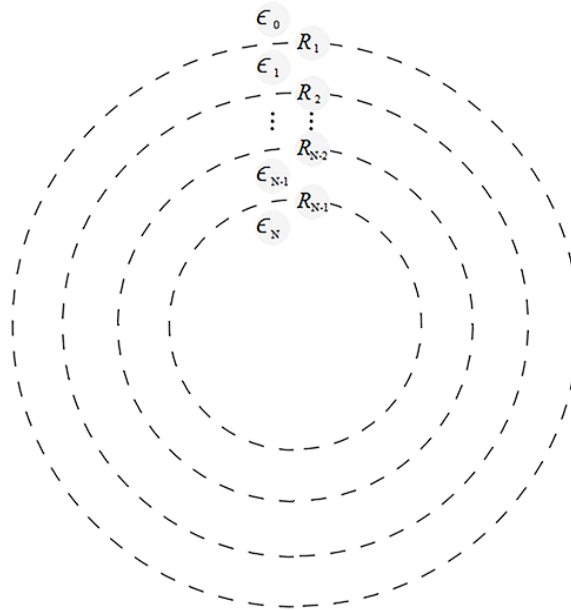


Figura 3 – LLD - Lente de Lüneburg Discreta.

3 Expressão do Campo Eletromagnético em Funções Diádicas de Green

As estruturas examinadas possuem geometria esférica. Portanto, a análise será expressa em um sistema de coordenadas esféricas. Como resultado, este tipo de expressão permite demonstrar a existência de modos naturais completamente separados uns dos outros. A técnica aqui selecionada é baseada na proposta do Chen-To Tai (TAI, 1994) no âmbito do estudo da influência da presença de uma esfera metálica ou dielétrica e meios estratificados. Posteriormente, Le-Wei Li, Pang-Shyan Kooi, Mook-Seng Leong e Tat-Soon Yee publicou um trabalho (Le-Wei Li et al., 1994) tratando em particular da difusão por uma estrutura dielétrica esférica multicamadas.

3.1 Determinação das equações de Maxwell

As equações de Maxwell fasorial (TAI, 1994) descrevem como as fontes, vetor densidade da corrente elétrica, $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$, vetor densidade da corrente magnética, $\mathbf{J}^m(\mathbf{r})$, densidade da carga elétrica, $\rho^e(\mathbf{r})$ e a densidade da carga magnética, $\rho^m(\mathbf{r})$, agem sobre o vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e o vetor intensidade do campo magnético, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) + i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.1b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho^e(\mathbf{r}), \quad (3.1c)$$

$$\mu\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \rho^m(\mathbf{r}), \quad (3.1d)$$

onde i é a unidade imaginária e ω é a frequência angular. A permissividade, ϵ , e a permeabilidade, μ , que são grandezas escalares, pois o meio é homogêneo e isotrópico.

Para elevar as equações de Maxwell em forma diádica em um sistema de 3-dimensões, consideraremos três conjuntos de campos de oscilação harmônica gerados por três distribuições de corrente infinitesimais com isso temos:

$$\nabla \times \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}_j^m(\mathbf{r}) + i\omega\mu\mathbf{H}_j(\mathbf{r}), \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_j^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\mathbf{E}_j(\mathbf{r}), \quad (3.2b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \rho_j^e(\mathbf{r}), \quad (3.2c)$$

$$\mu\nabla \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) = \rho_j^m(\mathbf{r}), \quad (3.2d)$$

e adicionando um vetor unitário e_j e somando os 3 conjuntos de equações em relação a j , temos a seguinte relação:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\bar{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}) + i\omega\mu\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad (3.3a)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad (3.3b)$$

$$\epsilon\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \rho^e(\mathbf{r}), \quad (3.3c)$$

$$\mu\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \rho^m(\mathbf{r}), \quad (3.3d)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j(\mathbf{r})e_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij}(\mathbf{r})e_i e_j.$$

3.2 Determinação das equações de onda

As Eqs. 3.1a e 3.1b são equações diferenciais acopladas de primeira ordem, onde o vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, e o vetor intensidade do campo magnético, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, são desconhecidos. O desacoplamento dos vetores de intensidade dos campos, nos custa um aumento da ordem das equações diferenciais para a segunda ordem, também conhecida como equações de onda.

Para desacoplar os vetores de intensidade dos campos, temos que rotacionar as Eqs. 3.1a e 3.1b:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}^m(\mathbf{r}) + i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.4a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^e(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.4b)$$

inseri as Eqs. 3.1b e 3.1a nas Eqs. 3.4a e 3.4b, respectivamente, assim temos as equações de onda:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{J}^m(\mathbf{r}), \quad (3.5a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^e(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon\mathbf{J}^m(\mathbf{r}), \quad (3.5b)$$

e na forma diádica, as equações de onda são:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) - \nabla \times \bar{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}), \quad (3.6a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \bar{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon\bar{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}), \quad (3.6b)$$

onde o numero de onda é denotado por $\kappa = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

3.3 Determinação das funções diádicas de Green

A função diádica de Green é uma técnica introduzida principalmente para formular vários problemas eletromagnéticos pontuais de uma maneira sistemática, sendo tratado

como um problema geral. Para isso, será introduzido as funções diádicas de Green elétrica, $\overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, e magnética, $\overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.7a)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa^2) \overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.7b)$$

3.3.1 Fonte Elétrica

Quando $\overline{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) \neq 0$ e $\overline{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}) = 0$, temos que:

$$\overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad (3.8a)$$

$$\overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\omega\mu\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad (3.8b)$$

$$\overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = i\omega\mu\overline{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}). \quad (3.8c)$$

3.3.2 Fonte Magnética

Quando $\overline{\mathbf{J}}^e(\mathbf{r}) = 0$ e $\overline{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}) \neq 0$, temos que:

$$\overline{\mathbf{G}}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad (3.8d)$$

$$\overline{\mathbf{G}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -i\omega\epsilon\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad (3.8e)$$

$$\overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = i\omega\epsilon\overline{\mathbf{J}}^m(\mathbf{r}). \quad (3.8f)$$

3.4 Determinação das equações estratificadas

Até agora, desenvolvemos as equações considerando que o vetor posição em um ponto do campo sendo o mesmo que o vetor posição da fonte, no entanto, também devemos desenvolver as equações para vetores posição em um ponto do campo diferente da fonte e para regiões com constantes dielétricas diferentes. Para isso, introduziremos algumas notações, então as equações de Maxwell e as equações de onda serão reescritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}_f^m(\mathbf{r})\delta_f^s + i\omega\mu_f\mathbf{H}_f(\mathbf{r}), \quad (3.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s - i\omega\epsilon_f\mathbf{E}_f(\mathbf{r}), \quad (3.9b)$$

$$\epsilon_f \nabla \cdot \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \rho_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9c)$$

$$\mu_f \nabla \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \rho_f^m(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9d)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = i\omega\mu_f\mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s - \nabla \times \mathbf{J}_f^m(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9e)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_f^2) \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}_f^e(\mathbf{r})\delta_f^s + i\omega\epsilon_f\mathbf{J}_f^m(\mathbf{r})\delta_f^s, \quad (3.9f)$$

as equações de Maxwell e as equações de onda em forma de funções diádicas de Green, serão reescritas como:

$$\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.10a)$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\text{f}}^{\text{s}} + \kappa_{\text{f}}^2 \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.10b)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_{\text{f}}^2) \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\text{f}}^{\text{s}}, \quad (3.10c)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - \kappa_{\text{f}}^2) \overline{\mathbf{G}}_{\text{sf}}^{\text{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\text{f}}^{\text{s}}, \quad (3.10d)$$

onde δ é denominado delta de Kronecker, as camadas são definidas pelo índice $\text{f} = (0, 1, \dots, N)$, a camada onde se encontra a fonte é definida pelo índice $\text{s} \in \text{f}$, as interfaces são definidas por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{i}}$ com $\text{i} = (1, \dots, N)$ e a interface onde se encontra a fonte é definida pelo índice $\odot \in \text{i}$.

3.5 Resolvendo o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo

O Teorema de Green foi descrito por George Green ([GREEN, 2008](#)), usando uma variação do teorema da divergência¹ e originalmente publicado como livro em Nottingham, 1828. O teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo é a soma entre dois teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo. Para o primeiro teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo, temos que:

$$\overline{\mathbf{F}}_1 = \overline{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q}, \quad (3.11a)$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{F}}_1 = (\nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \overline{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}), \quad (3.11b)$$

então:

$$\int_V [(\nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \overline{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\overline{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\overline{\mathbf{S}}, \quad (3.11c)$$

e para o segundo teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo, temos que:

$$\overline{\mathbf{F}}_2 = \nabla \times \overline{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}, \quad (3.11d)$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{F}}_2 = (\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - (\nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}), \quad (3.11e)$$

então:

$$\int_V [(\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - (\nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\nabla \times \overline{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}) \cdot d\overline{\mathbf{S}}. \quad (3.11f)$$

Portanto, o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo é a soma dos dois teorema vetorial-diádico de Green do primeiro tipo:

$$\int_V [(\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{Q} - \overline{\mathbf{P}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] dV = \oint_S (\overline{\mathbf{P}} \times \nabla \times \mathbf{Q} + \nabla \times \overline{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}) \cdot d\overline{\mathbf{S}}. \quad (3.12)$$

¹ Teorema da divergência: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\overline{\mathbf{S}}$

Usaremos o teorema vetorial-diádico de Green do segundo tipo para resolver o vetor intensidade do campo elétrico $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, a figura 4 descreve um meio estratificado.

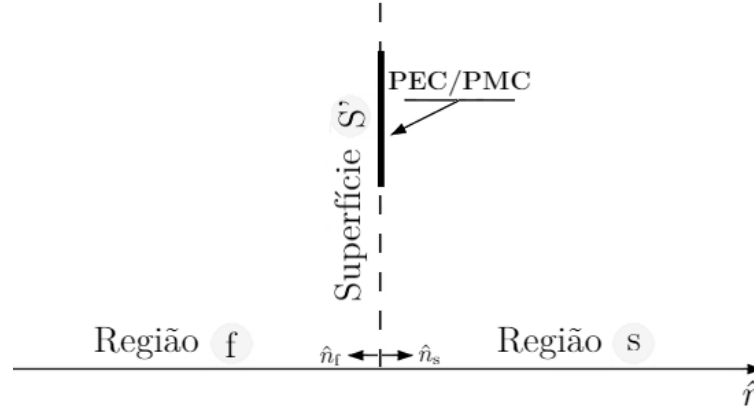


Figura 4 – Duas regiões dielétricas distintas, separadas por uma superfície S' com parte composta por um PEC (*Perfect Electric Conductor* - Condutor Elétrico Perfeito) e um PMC (*Perfect Magnetic Conductor* - Condutor Magnético Perfeito).

3.5.1 Fonte Elétrica

Para determinar $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, aplicaremos $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_f(\mathbf{r}')$ na Eq. 3.12, onde será necessário fazer algumas manipulações, incluindo algumas identidades diádicas² e uma convolução do vetor intensidade do campo elétrico posicionado na fonte, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r}')$, com a função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, resultando no vetor intensidade do campo elétrico, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \int_{V'} \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (3.13)$$

assim encontramos a seguinte função:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}') \right] dS', \quad (3.14)$$

e para uma nova manipulação, aplicaremos $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')$, assim temos:

$$i\omega\mu_s \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dV' = \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') \right] dS'. \quad (3.15)$$

Para achar a função que satisfaça uma equação diferencial no interior de uma região conhecida é necessário saber as condições de contorno, para uma interface entre

² Identidades diádicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{B}} &= (\bar{\mathbf{B}})^T \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{B}} &= -[(\bar{\mathbf{B}})^T \times \mathbf{A}]^T \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \bar{\mathbf{C}}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \bar{\mathbf{C}}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \bar{\mathbf{C}} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \bar{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

dois meios dielétricos os campos elétricos e magnéticos tangenciais são contínuos:

$$\hat{r} \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \hat{r} \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \quad (3.16a)$$

$$\hat{r} \times \frac{\nabla \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r})}{\mu_f} = \hat{r} \times \frac{\nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r})}{\mu_s}, \quad (3.16b)$$

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{r} \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.16c)$$

$$\hat{r} \times \frac{\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mu_f} = \hat{r} \times \frac{\nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mu_s}, \quad (3.16d)$$

e para uma interface onde a sua superfície é um PEC, os campos elétricos tangenciais são nulos:

$$\hat{r} \times \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.17a)$$

$$\hat{r} \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.17b)$$

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad (3.17c)$$

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}. \quad (3.17d)$$

Podemos aplicar essas condições de contorno na Eq. 3.14, junto com as identidades diádicas e assim obtemos:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \frac{\mu_f}{\mu_s} \int_{S'} \hat{r} \cdot [\overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') + \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.18)$$

agora inserimos a Eq. 3.18 na Eq. 3.15:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = i\omega\mu_f \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{fs}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}') dV', \quad (3.19)$$

o vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green com uma fonte elétrica, $\mathbf{J}_s^e(\mathbf{r}')$.

3.5.2 Fonte Magnética

Para determinar $\mathbf{H}_f(\mathbf{r})$, aplicaremos $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_f(\mathbf{r}')$ na Eq. 3.12, onde será necessário fazer algumas manipulações, incluindo algumas identidades diádicas³ e uma convolução do vetor intensidade do campo magnético posicionado na fonte, $\mathbf{H}_f(\mathbf{r}')$, com a função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, resultando no vetor intensidade do campo magnético, $\mathbf{H}_f(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \int_{V'} \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (3.20)$$

assim encontramos a seguinte função:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \int_{S'} \hat{r} \cdot [\overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}') + \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{ff}^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.21)$$

³ Identidades diádicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{B}} &= (\overline{\mathbf{B}})^T \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \times \overline{\mathbf{B}} &= -[(\overline{\mathbf{B}})^T \times \mathbf{A}]^T \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \overline{\mathbf{C}}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{C}} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \overline{\mathbf{C}}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \overline{\mathbf{C}} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \overline{\mathbf{C}} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \overline{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

e para uma nova manipulação, aplicaremos $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}')$, assim temos:

$$i\omega\epsilon_{\text{s}} \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{m}}(\mathbf{r}') dV' = \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}')] dS'. \quad (3.22)$$

Para achar a função que satisfaça uma equação diferencial no interior de uma região conhecida é necessário saber as condições de contorno, para uma interface entre dois meios dielétricos os campos elétricos e magnéticos tangenciais são contínuos:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}), \quad (3.23a)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \frac{\nabla \times \mathbf{H}_{\text{f}}(\mathbf{r})}{\epsilon_{\text{f}}} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\nabla \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r})}{\epsilon_{\text{s}}}, \quad (3.23b)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{ff}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.23c)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{ff}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\epsilon_{\text{f}}} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\epsilon_{\text{s}}}, \quad (3.23d)$$

e para uma interface onde a sua superfície é um PMC, os campos magnéticos tangenciais são nulos:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.24a)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.24b)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{ff}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad (3.24c)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}. \quad (3.24d)$$

Podemos aplicar essas condições de contorno na Eq. 3.21, junto com as identidades diádicas e assim obtemos:

$$\mathbf{H}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_{\text{f}}}{\epsilon_{\text{s}}} \int_{S'} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}') + \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}_{\text{s}}(\mathbf{r}')] dS', \quad (3.25)$$

agora inserimos a Eq. 3.25 na Eq. 3.22:

$$\mathbf{H}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon_{\text{f}} \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (3.26)$$

podemos reescrever em função do vetor intensidade do campo elétrico:

$$\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = - \int_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (3.27)$$

o vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green magnética com uma fonte magnética, $\mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{m}}(\mathbf{r}')$.

3.6 Resolvendo a equação escalar de Helmholtz

A equação de onda escalar de Helmholtz é escrita como:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (3.28)$$

onde ψ é a função de onda escalar e k é o numero de onda modal.

Toda a análise será expressa em um sistema de coordenadas esféricas, então a resolução dessa equação também será expressar no sistema de coordenadas esféricas. Portanto a equação de onda escalar de Helmholtz com o Laplaciano em coordenadas esféricas, fica:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.29)$$

A resolução dessa equação é feita separando as variáveis. Para fazer isso, a função de onda é decomposta em um produto de funções com uma única variável:

$$\psi(k, \mathbf{r}) = \psi(kr, \theta, \phi) = R(kr) \Theta(\theta) \Phi(\phi), \quad (3.30)$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi[$. Substituindo na Eq. 3.29, temos que:

$$\frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R \Theta \Phi = 0, \quad (3.31)$$

multiplicando por r^2 e dividindo por $R \Theta \Phi$ a Eq. 3.31:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 = 0. \quad (3.32)$$

Agora que cada função é independente, três equações diferenciais surgem. A primeira função independente que será analisada é a função $\Phi(\phi)$ onde m é uma constante complexa:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad (3.33)$$

a solução dessa equação diferencial é uma combinação linear de exponenciais complexas $e^{\pm im\phi}$:

$$\Phi(\phi) = a_m^e(\phi) \cos(m\phi) + a_m^o(\phi) \sin(m\phi) = \sum_{\beta=e,o} a_m^\beta(\phi) f_m^\beta(\phi), \quad (3.34)$$

como $\Phi(\phi)$ deve ser uma função periódica cujo período se divide igualmente em 2π (COURANT, 1989, Ch. V, §8), m é necessariamente um número inteiro e $f_m^\beta(\phi)$ é:

$$f_m^\beta(\phi) = \begin{cases} \cos(m\phi), & \text{se } \beta = e \quad (\text{ímpar}) \quad m \in \mathbb{N} \\ \sin(m\phi), & \text{se } \beta = o \quad (\text{par}) \quad m \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \quad (3.35)$$

A segunda função independente que será analisada é a função $\Theta(\theta)$, onde l é uma constante complexa:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l, \quad (3.36)$$

para essa análise, será adotado o seguinte passo:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d}{d \cos \theta} = -\sin \theta \frac{d}{d \cos \theta}, \quad (3.37)$$

onde essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d \cos \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{d \cos \theta} \right) + \left(l - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (3.38)$$

e a solução dessa equação diferencial é baseada na solução da equação diferencial de Legendre, com $l = n(n+1)$ e n sendo necessariamente um número natural, $n \in \mathbb{N}$ (COURANT, 1989, Ch. VII, §5) (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 8.1.1), onde possui duas soluções linearmente independentes, o polinômio de Legendre associado de primeiro e segundo tipo;

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} P_n^m(z), & \text{se } |1 - z| < 2 \\ Q_n^m(z), & \text{se } |z| > 1 \end{cases}, \quad (3.39)$$

a única solução que satisfaz a equação diferencial onde $z = \cos \theta$ é a solução do polinômio de Legendre associado de primeiro tipo:

$$\Theta(\theta) = a_{mn}(\theta) P_n^m(\cos \theta). \quad (3.40)$$

E a terceira e última função independente que será analisada é a função $R(r)$:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) + k^2 r^2 = 0, \quad (3.41)$$

onde essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d(kr)} \left((kr)^2 \frac{dR}{d(kr)} \right) + ((kr)^2 - n(n+1)) R = 0, \quad (3.42)$$

e a solução dessa equação diferencial (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 10.1.1) é:

$$R(kr) = \sum_{\alpha=1}^4 a_n^\alpha(kr) z_n^\alpha(kr), \quad (3.43)$$

onde:

- z_n^1 é a funções esféricas de Bessel do primeiro tipo e de ordem n ,
- z_n^2 é a funções esféricas de Bessel do segundo tipo e de ordem n ,
- z_n^3 é a funções esféricas de Hankel do primeiro tipo e de ordem n ,
- z_n^4 é a funções esféricas de Hankel do segundo tipo e de ordem n ,

essas soluções pode ser reescrita como uma combinação linear da funções esféricas de Bessel e Hankel do primeiro tipo.

Com isso a função escalar de onda de Helmholtz é uma serie e assume a seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1,3} \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \psi_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (3.44)$$

onde:

$$\psi_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = z_n^\alpha(kr) P_n^m(\cos\theta) f_m^\beta(\phi), \quad (3.45)$$

e as constantes podem ser reescritas como:

$$a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = a_n^\alpha(kr) a_{mn}(\theta) a_m^\beta(\phi). \quad (3.46)$$

3.7 Resolvendo a equação vetorial de Helmholtz

Resolvida a equação de onda escalar, resta estender a solução para o problema vetorial. A equação de onda vetorial de Helmholtz é escrita como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} = 0, \quad (3.47)$$

onde as soluções dessa equação diferencial são $\bar{\mathbf{L}}$, $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{N}}$ que são vetores esféricos harmônicos, são ortogonais entre si e estão relacionadas a função de onda escalar de Helmholtz. A relação entre elas são:

$$\bar{\mathbf{L}} = \nabla \psi, \quad (3.48a)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{\mathbf{N}} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}), \quad (3.48b)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}), \quad (3.48c)$$

por tanto, as funções são descritas como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{z_n^\alpha(kr)}{r} & \left[\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} f_m^\beta(\phi) \hat{\theta} + \frac{\sigma^\beta m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\phi} \right] + \dots \\ & \dots \frac{dz_n^\alpha(kr)}{dr} P_n^m(\cos\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{r}, \end{aligned} \quad (3.49a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = z_n^\alpha(kr) \left[\frac{\sigma^\beta m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\theta} - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} f_m^\beta(\phi) \hat{\phi} \right], \quad (3.49b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = k_n^\alpha(kr) & \left[\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} f_m^\beta(\phi) \hat{\theta} + \frac{\sigma^\beta m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) f_m^{\bar{\beta}}(\phi) \hat{\phi} \right] + \dots \\ & \dots \frac{n(n+1)}{kr} z_n^\alpha(kr) P_n^m(\cos\theta) f_m^\beta(\phi) \hat{r}, \end{aligned} \quad (3.49c)$$

onde:

$$\sigma^\beta = \begin{cases} -1, & \text{se } \beta = e \\ +1, & \text{se } \beta = o \end{cases},$$

$$k_n^\alpha(kr) = \frac{1}{kr} \frac{d[r z_n^\alpha(kr)]}{dr}.$$

3.8 Resolvendo a equação de onda associada ao campo eletromagnético

Devido à geometria, é natural expandir a forma geral do campo eletromagnético em vetores esféricos harmônicos:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha,\beta,m,n} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) b_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \quad (3.50a)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\eta_f} \sum_{\alpha,\beta,m,n} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) a_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) b_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}). \quad (3.50b)$$

Em alguns momentos deste trabalho precisaremos simplificar a notação, então a relação de equivalência entre as notações são:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta,m,n} &\equiv \sum_{\alpha=1,3} \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty}, & \sum_{\alpha,n} &\equiv \sum_{\beta=e,o} \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^{\infty}, & \sum_{\beta,m,n} &\equiv \sum_{\alpha=1,3} \sum_{n=0}^{\infty}, \\ \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta fi} &\equiv \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}_i), & \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f'} &\equiv \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}'), & \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f} &\equiv \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \\ \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta fi} &\equiv \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}_i), & \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f'} &\equiv \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}'), & \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f} &\equiv \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}), \\ z_n^{\alpha fi} &\equiv z_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r_i), & z_n^{\alpha f'} &\equiv z_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r'), & z_n^{\alpha f} &\equiv z_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r), \\ k_n^{\alpha fi} &\equiv k_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r_i), & k_n^{\alpha f'} &\equiv k_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r'), & k_n^{\alpha f} &\equiv k_n^{\alpha}(\mathbf{k}_f r). \end{aligned}$$

4 Difração por uma Estrutura Esférica Estratificada em Funções Diádicas de Green

4.1 Função diádica de Green no espaço livre

A partir das funções de onda vetorial esférica, podemos construir a função diádica de Green no espaço livre, essa função descreve a contribuição da fonte em um meio sem dispersão. Um dos métodos para a construção da função diádica é o método $\bar{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que por sua vez, usa o método de Ohm-Rayleigh (TAI, 1994). Onde a função $\bar{\mathbf{G}}_{\text{ss}}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfaça a Eq. 3.10d.

De acordo com o método de Ohm-Rayleigh, primeiro buscamos uma expansão da autofunção para a função de origem usando as funções de onda vetorial esférica:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_0^\infty \sum_{\beta, m, n} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k}_s, \quad (4.1)$$

neste processo surge duas funções desconhecidas a $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$ e a $\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$ e para solucionar elas, vamos definir as relações ortogonais e ortonormais entre as duas funções de onda vetorial esférica em um domínio de integração que envolve todo o espaço

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= 0, \\ \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= 0, \\ \int_V \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \delta(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f) \delta_{\beta'}^\beta \delta_{m'}^m \delta_{n'}^n, \\ \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_{m'n'}^{1\beta'}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) dV &= (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \delta(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f) \delta_{\beta'}^\beta \delta_{m'}^m \delta_{n'}^n. \end{aligned}$$

Para solucionar a funções desconhecidas $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$, multiplicaremos por $\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ a Eq. 4.1 modificada e integramos em todo volume:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV &= \dots \\ \dots \int_V \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \cdot \int_0^\infty \sum_{\beta, m, n} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}) \mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k}_f dV. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A integral do lado esquerdo da Eq. 4.2 pode ser resolvido aplicando a identidade diádica¹, depois aplicando teorema diádico de Gauss² para converter uma integral de

¹ Identidade diádica: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \bar{\mathbf{B}}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})$

² Teorema diádico de Gauss: $\int_V \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} dV = \oint_S \bar{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{S}$

volume em uma integral de superfície e essa integral de superfície desaparece, pois \mathbf{r}' está localizada dentro do volume:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left[\nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \right] \cdot \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \nabla \cdot \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \right\} dV = \dots \\ & \dots \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') - \oint_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] dS = \dots \\ & \dots \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Já a integral do lado direito da Eq. 4.2 pode ser resolvido aplicando as relações ortogonais, ortonormais e a função Delta de Dirac³ e com isso, toda a Eq. 4.2 pode ser reescrita como:

$$\nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = (1 + \delta_0^m) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\pi^2}{k_s^2} \mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.4)$$

isolando a função desconhecida $\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s)$, temos:

$$\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^2}{2\pi^2} \nabla' \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.5)$$

aplicando a Eq. 3.48c na Eq. 4.5:

$$\mathbf{A}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^3}{2\pi^2} \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'), \quad (4.6)$$

onde:

$$C_{mn} = (2 - \delta_0^m) \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}. \quad (4.7)$$

Similarmente, para solucionar a funções desconhecidas $\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}')$, multiplicaremos por $\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ a Eq. 4.1 modificada, repetimos os passos anteriores

$$\mathbf{B}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') = C_{mn} \frac{k_s^3}{2\pi^2} \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}'). \quad (4.8)$$

Então a função de origem é:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk_s. \quad (4.9)$$

Agora assumimos que a expansão da autofunção $\bar{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser representado por uma integral semelhante em termos da função de origem

$$\bar{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty k_s^3 \left[a \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + b \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] dk_s. \quad (4.10)$$

³ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

Para solucionar as funções desconhecidas a e b , substituímos as Eqs. 4.9 e 4.10 na Eq. 3.10d e usando as relações das funções de onda vetorial, sabemos que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) = \mathbf{k}_s^2 \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$ e $\nabla \times \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) = \mathbf{k}_s^2 \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r})$, então temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty \mathbf{k}_s^3 \left[\left[(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2) a - 1 \right] \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \dots \right. \\ \left. \dots \left[(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2) b - 1 \right] \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A solução da função desconhecida a é:

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty \mathbf{k}_s^3 \left[\left[(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2) a - 1 \right] \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k} = 0, \quad (4.12)$$

$$(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2) a - 1 = 0, \quad (4.13)$$

$$a = \frac{1}{(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2)}, \quad (4.14)$$

similarmente a solução da função desconhecida b é:

$$b = \frac{1}{(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2)}. \quad (4.15)$$

Portanto, a expansão da autofunção $\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é:

$$\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_0^\infty \frac{\mathbf{k}_s^3}{(\mathbf{k}_s^2 - \kappa_s^2)} \left[\mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{k}_s. \quad (4.16)$$

Aplicando a integral de Bessel sobre o intervalo $(0, \infty)$ (OLVER, 2010, Eq. 10.22.69), temos:

$$\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_s^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \begin{cases} \mathbf{N}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r > r' \\ \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r < r' \end{cases} \quad (4.17)$$

A função é descontínua em $r = r'$ e utilizando a Eq. de Maxwell na forma diádica, Eq. 3.10b, a função $\overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser definida como:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{ss}^{\mathbf{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\kappa_s^2} \overline{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \dots \\ \dots \frac{i\kappa_s}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \begin{cases} \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r > r' \\ \mathbf{M}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_{mn}^{1\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{mn}^{3\beta}(\kappa_s, \mathbf{r}'), & \text{se } r < r' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.2 Função diádica de Green de espalhamento

Partindo da função diádica de Green no espaço livre, Eq. 4.18, podemos construir, por meio do método de sobreposição, os vários tipos de funções diádicas de Green associadas a uma esfera.

As estruturas esféricas de espalhamento, Figura 5, é composta de N-camadas, cada camada tem permissividade, permeabilidade, raio e um disco de metal esférico de meio ângulo θ .

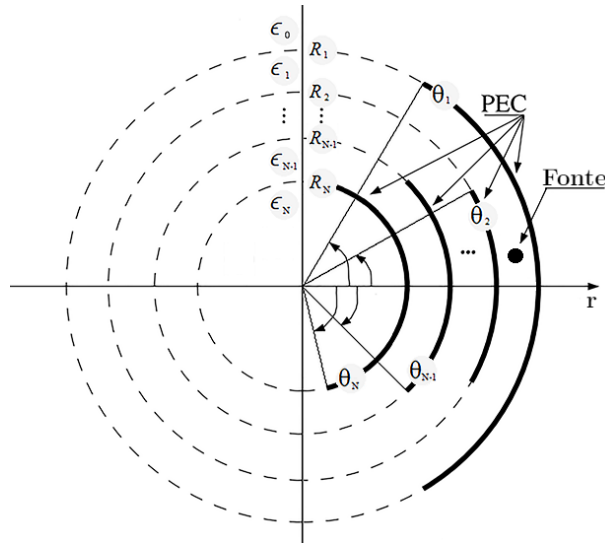


Figura 5 – Definição dos parâmetros geométricos da estrutura.

A função diádica de Green de espalhamento $\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, descreve a reflexão e a transmissão múltiplas das ondas nas interfaces. Já a função de Green, $\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, é dada por (ALI; HABASHY; KONG, 1992):

$$\overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_{\text{ss}}^{\text{e0}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta_{\text{s}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (4.19)$$

A função diádica de Green de espalhamento é semelhante função diádica de Green no espaço livre com adição dos coeficientes de espalhamento:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{es}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_{\text{f}}}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \left\{ \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_N^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} \right] + \dots \right. \\ \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_N^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} \right] + \dots \\ \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_N^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_N^{\text{s}} \tilde{\delta}_N^{\text{f}} \right] + \dots \\ \left. \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_N^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_N^{\text{s}} \tilde{\delta}_N^{\text{f}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\tilde{\delta} = (1 - \delta)$, sendo δ o delta de Kronecker.

4.3 Determinação dos coeficientes de ondas esféricas

4.3.1 Fontes elétricas

A função diádica de Green é:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_{\text{f}}}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \left\{ \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

O vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green com uma fonte elétrica, $\mathbf{J}^{\text{e}}(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_{\text{f}} \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\text{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.22)$$

Com isso, podemos reescrever o vetor intensidade do campo elétrico como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_{V'} \left\{ \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\} \cdot \dots \\ \dots \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV'. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde a impedância característica do meio é $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Os coeficientes da forma geral do campo eletromagnético é:

$$\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha, \beta, m, n} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} a_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} b_{mn}^{\alpha\beta\text{f}} \quad (4.24)$$

e podem ser encontrados partindo da Eq. 4.23:

$$a_{mn}^{1\beta\text{f}} = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + a_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.25\text{a})$$

$$b_{mn}^{1\beta\text{f}} = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + b_{mn3}^{1\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_0^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.25\text{b})$$

$$a_{mn}^{3\beta\text{f}} = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + a_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.25\text{c})$$

$$b_{mn}^{3\beta\text{f}} = -\eta_{\text{f}} \frac{\kappa_{\text{f}}^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_0^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + b_{mn3}^{3\beta\text{f}} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta\text{f}'} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{s}} \tilde{\delta}_{\text{N}}^{\text{f}} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta\text{f}'} \delta_{\text{s}}^{\text{f}} \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_{\text{s}}^{\text{e}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.25\text{d})$$

4.3.2 Fontes magnética

A função diádica de Green é:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \left\{ \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f} \left[a_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f} \left[b_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f} \left[a_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f} \left[b_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

O vetor intensidade do campo elétrico posicionado na camada f, $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$, é a convolução da função diádica de Green com uma fonte magnética, $\mathbf{J}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = - \int_{V'} \overline{\mathbf{G}}_{\text{fs}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.27)$$

Com isso, podemos reescrever o vetor intensidade do campo elétrico como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} \sum_{\beta, m, n} C_{mn} \int_{V'} \left\{ \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f} \left[a_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \right. \\ \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f} \left[b_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] + \dots \\ \dots \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f} \left[a_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] + \dots \\ \left. \dots \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f} \left[b_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \right\} \cdot \dots \\ \dots \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Os coeficientes da forma geral do campo eletromagnético é:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha, \beta, m, n} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{\alpha\beta f} a_{mn}^{\alpha\beta f} + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{\alpha\beta f} b_{mn}^{\alpha\beta f} \quad (4.29)$$

e podem ser encontrados partindo da Eq. 4.28:

$$b_{mn}^{1\beta f} = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + a_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.30a)$$

$$a_{mn}^{1\beta f} = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_0^f + b_{mn3}^{1\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_0^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r'-r|}^{r'-r} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.30b)$$

$$b_{mn}^{3\beta f} = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[a_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + a_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{M}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV', \quad (4.30c)$$

$$a_{mn}^{3\beta f} = - \frac{i\kappa_f^2}{4\pi} C_{mn} \int_{V'} \left[b_{mn1}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \tilde{\delta}_0^s \tilde{\delta}_N^f + b_{mn3}^{3\beta f} \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{3\beta f'} \tilde{\delta}_N^s \tilde{\delta}_N^f + \overline{\mathbf{N}}_{mn}^{1\beta f'} \delta_s^f \delta_{|r-r'|}^{r-r'} \right] \cdot \mathbf{J}_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.30d)$$

5 Antena Alimentada por Cabo Coaxial Centrada

A alimentação escolhida é uma sonda coaxial centrada, isto é, $\theta_{\odot} = 0$, cuja corrente é orientada ao longo do raio e com amplitude fixa, I_0 :

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}') = I_0 \delta(\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}') \hat{r}, \quad (5.1)$$

Por ser uma alimentação centrada, temos que (HANSEN, 1988, Eq. A1.36):

$$P_n^m(\cos\theta) \Big|_{\theta=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ 0, & \text{se } m \neq 0 \end{cases}. \quad (5.2)$$

então a equação só não é nula para $m = 0$, com isso, temos que:

$$f_m^{\beta}(\phi) \Big|_{m=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta = e \\ 0, & \text{se } \beta = o \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{r} = 0, \quad (5.4a)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{r} = \frac{n(n+1)}{\kappa_f r'} z_n'^{\alpha f} \delta_e^{\beta}. \quad (5.4b)$$

Aplicando as Eqs. 5.4a-5.4b e a função Delta de Dirac¹ nas Eqs. 4.25a-4.25d , temos:

$$a_{mn}^{\alpha\beta f} = 0, \quad (5.5a)$$

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = -E_0(2n+1) \left[b_{mn}^{\alpha\beta f} (\tilde{\delta}_0^f \delta_1^{\alpha} + \tilde{\delta}_N^f \delta_3^{\alpha}) + z_n^{\overline{\alpha s \odot}} \delta_s^f (\delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \delta_1^{\alpha} + \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \delta_3^{\alpha}) \right] \delta_e^{\beta} \delta_m^0, \quad (5.5b)$$

onde:

$$E_0 = \frac{I_0 \eta_f \kappa_f}{4\pi r_{\odot}}$$

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = b_{mn1}^{\alpha\beta f} z_n^{1f\odot} \tilde{\delta}_0^s + b_{mn3}^{\alpha\beta f} z_n^{3f\odot} \tilde{\delta}_N^s$$

Portanto, a forma geral do campo eletromagnético de uma antena alimentada por cabo coaxial centrada é:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = -E_0 \sum_{\alpha,n} (2n+1) \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha ef} \left[b_{0n}^{\alpha ef} (\tilde{\delta}_0^f \delta_1^{\alpha} + \tilde{\delta}_N^f \delta_3^{\alpha}) + z_n^{\overline{\alpha s \odot}} \delta_s^f (\delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \delta_1^{\alpha} + \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \delta_3^{\alpha}) \right], \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \frac{i}{\eta_f} E_0 \sum_{\alpha,n} (2n+1) \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha ef} \left[b_{0n}^{\alpha ef} (\tilde{\delta}_0^f \delta_1^{\alpha} + \tilde{\delta}_N^f \delta_3^{\alpha}) + z_n^{\overline{\alpha s \odot}} \delta_s^f (\delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \delta_1^{\alpha} + \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \delta_3^{\alpha}) \right]. \quad (5.6b)$$

¹ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

5.1 Determinação das Características da Antena

Todo o estudo desenvolvido aqui é baseado em coeficientes de ondas esféricas. Esses coeficientes contêm todas as informações que descrevem a fonte. Assim, as grandezas físicas que caracterizam essa fonte devem ser extraídas desses coeficientes. Para o campo de antenas, é costume focar mais particularmente nos diagrama de radiação de campo distante, potência irradiada e diretividade.

5.1.1 Diagrama de radiação de campo distante

O vetor intensidade do campo elétrico fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \bar{\mathbf{N}}_{0n}^{3e0} b_{0n}^{3e0}, \quad (5.7)$$

também podemos escrever em termo de componentes:

$$\mathbf{E}_{0\hat{r}}(\mathbf{r}) = -\frac{E_0}{\kappa_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) z_n^{30} P_n(\cos\theta) b_{0n}^{3e0}, \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{E}_{0\hat{\theta}}(\mathbf{r}) = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) k_n^{30} P_n^1(\cos\theta) b_{0n}^{3e0}, \quad (5.8b)$$

$$\mathbf{E}_{0\hat{\phi}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.8c)$$

As expansões assintóticas da função de Hankel do primeiro tipo e a derivada da função de Hankel do primeiro tipo para grandes argumentos, $r \rightarrow \infty$, ([ABRAMOWITZ, 1965](#), Eqs. 9.2.3) são:

$$z_n^3(\kappa_0 r) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty),$$

$$k_n^3(\kappa_0 r) \sim (-i)^n \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty),$$

e com isso podemos escrever o vetor intensidade do campo elétrico para o campo distante como:

$$\mathbf{E}_{0\hat{r}}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{E}_{0\hat{\theta}}(\mathbf{r}) = -E_0 \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} d_{\theta}(\theta, \phi) + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (5.9b)$$

$$\mathbf{E}_{0\hat{\phi}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.9c)$$

onde o diagrama de radiação de campo distante é:

$$d_{\theta}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) P_n^1(\cos\theta) b_{0n}^{3e0}. \quad (5.10)$$

Normalmente, o diagrama de radiação de campo distante, é visualizado a partir da componente principal, $\phi = 0$, e da componente cruzada, $\phi = \pi/2$.

5.1.2 Densidade e intensidade de radiação

A densidade média de potência ou densidade de radiação (BALANIS, 2016, Eqs. 2-8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})]. \quad (5.11)$$

Sabemos que os campos elétrico e magnético fora da lente é descrito como: ²

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{3e0} b_{0n}^{3e0}, \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}) = \frac{i^*}{\eta_0} E_0^* \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{*3e0} b_{0n}^{*3e0}. \quad (5.12b)$$

Com os campos elétrico e magnético conhecidos, podemos reescrever a densidade de radiação como:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{i}{2\eta_0} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 [\overline{\mathbf{N}}_{0n}^{3e0} \times \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{*3e0}] |b_{0n}^{3e0}|^2, \quad (5.13)$$

também sabemos os vetores esféricos harmônicos, portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{rad} = \frac{i}{2\eta_0} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 & \left[z_n^3(\kappa_0 r) k_n^{*3}(\kappa_0 r) |P_n^1(\cos \theta)|^2 \hat{r} - \dots \right. \\ & \left. \dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} |z_n^3(\kappa_0 r)|^2 P_n^1(\cos \theta) P_n^*(\cos \theta) \hat{\theta} \right] |b_{0n}^{3e0}|^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A intensidade de radiação (BALANIS, 2016, Eqs. 2-12) pode ser escrito como:

$$\mathbf{U} = r^2 \mathbf{W}_{rad}. \quad (5.15)$$

Aplicando as expansões assintóticas da função de Hankel do primeiro tipo e a derivada da função de Hankel do primeiro tipo para grandes argumentos, $r \rightarrow \infty$, podemos escrever a intensidade de radiação para o campo distante como:

$$\mathbf{U} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} |(2n+1) P_n^1(\cos \theta) b_{0n}^{3e0}|^2 \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty), \quad (5.16)$$

² Identidade complexo conjugado:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ z^* &= a - ib \\ (z+w)^* &= z^* + w^* \\ (z-w)^* &= z^* - w^* \\ (zw)^* &= z^* w^* \\ \left(\frac{z}{w}\right)^* &= \frac{z^*}{w^*}, \text{ para } w \neq 0 \\ zz^* &= |z|^2 \end{aligned}$$

5.1.3 Potência de radiação

A potência radiada (BALANIS, 2016, Eqs. 2-9) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{r}} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (5.17)$$

aplicando a intensidade de radiação, Eq. 5.16, na Eq. 5.17 temos que:

$$P_{rad} = \frac{\pi}{\eta_0 \kappa_0^2} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 \int_0^{\pi} |P_n^1(\cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta |b_{0n}^{3e0}|^2, \quad (5.18)$$

A integral do polinômio associado de Legendre, (ABRAMOWITZ, 1965, Eqs. 8.14.13) é definido como:

$$\int_0^{\pi} |P_n^m(\cos \theta)|^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (5.19)$$

aplicando a integral do polinômio associado de Legendre, Eq. 5.19, na Eq. 5.18, temos que:

$$P_{rad} = \frac{2\pi}{\eta_0 \kappa_0^2} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) |b_{0n}^{3e0}|^2. \quad (5.20)$$

5.1.4 Diagrama de diretividade

A diretividade (BALANIS, 2016, Eqs. 2-16) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{4\pi U}{P_{rad}}, \quad (5.21)$$

aplicando a intensidade de radiação e a potência de radiação, Eqs. 5.16 e 5.20, respectivamente, na Eq. 5.21 temos que:

$$\mathbf{D} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |(2n+1) P_n^1(\cos \theta) b_{0n}^{3e0}|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) |b_{0n}^{3e0}|^2}. \quad (5.22)$$

5.2 Determinação das equações de séries duplas

Como os discos de metal ou condutor elétrico perfeito (PEC - *Perfect Electrical Conductor*) cobrem apenas parte das interfaces da esfera dielétrica, o campo eletromagnético deve verificar as condições duais nessas superfícies. A condição de contorno para uma interface onde a sua superfície é um PEC o campo elétrico tangencial desaparece:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{N}}_{0n}^{1e(i-1)i} \left(b_{0n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{N}}_{0n}^{3e(i-1)i} b_{0n}^{3e(i-1)} \right] = \mathbf{0}, \quad (5.23)$$

$$0 \leq \theta_i < \Theta$$

Podemos reescrever os coeficientes em funções das variáveis:

$$\begin{aligned}\hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{0n}^{\alpha \text{efi}} &= P_n^1(\cos\theta_i) k_n^{\alpha \text{fi}} \hat{\phi}, \\ \hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{0n}^{\alpha \text{efi}} &= P_n^1(\cos\theta_i) z_n^{\alpha \text{fi}} \hat{\theta}\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}P_n(\cos\theta) &= P_n^0(\cos\theta), \\ P_n^1(\cos\theta) &= \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}.\end{aligned}$$

Portanto, para uma interface onde a sua superfície é um PEC temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[P_n^1(\cos\theta_i) k_n^{1(i-1)i} \left(b_{0n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + P_n^1(\cos\theta_i) k_n^{3(i-1)i} b_{0n}^{3e(i-1)} \right] &= \mathbf{0}, \\ 0 \leq \theta_i < \Theta &\end{aligned}\tag{5.24a}$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo elétrico tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i) \right] = 0, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) P_n^1(\cos\theta_i) \left\{ \left[k_n^{1(i-1)i} \left(b_{0n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + k_n^{3(i-1)i} b_{0n}^{3e(i-1)} \right] - \dots \right. \\ \left. \dots \left[k_n^{1ii} b_{0n}^{1ei} + k_n^{3ii} \left(b_{0n}^{3ei} \tilde{\delta}_N^i + z_n^{1s\odot} \delta_s^i \right) \right] \right\} &= \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi,\end{aligned}\tag{5.24b}$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo magnético tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{H}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_i) \right] = 0, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) P_n^1(\cos\theta_i) \left\{ \left[\frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(b_{0n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} b_{0n}^{3e(i-1)} \right] - \dots \right. \\ \left. \dots \left[\frac{z_n^{1ii}}{\eta_i} b_{0n}^{1ei} + \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \left(b_{0n}^{3ei} \tilde{\delta}_N^i + z_n^{1s\odot} \delta_s^i \right) \right] \right\} &= \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi,\end{aligned}\tag{5.24c}$$

Por ser multicamadas, podemos transformar as Eqs. 5.24a-5.24c em matrizes, facilitando a manipulação das mesmas. Os vetores e as matrizes estão descritos no Apêndice B:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} + \overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1e} + \overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \Theta \tag{5.25a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] = \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi \quad (5.25b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{1e} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] = \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi \quad (5.25c)$$

Isolando $\mathbf{B}_{0n}^{1\beta}$ da Eq. 5.25b:

$$\mathbf{B}_{0n}^{1e} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] \quad (5.26)$$

e substituindo nas Eqs. 5.25a - 5.25c, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.27a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^z \right] = \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi \quad (5.27b)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ são as responsáveis pela descrição da estrutura geométrica.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \end{aligned}$$

5.3 Método de Regularização Analítica

O método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization) (Nosich, 1999), parte das equações de séries duplas, Eqs. 5.27b - 5.27c que são, em termos de operadores, equações do primeiro tipo, $\bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{U}$, onde \mathbf{X} representa o vetor de incógnitas e \mathbf{U} o vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta de $\bar{\mathbf{L}}$ geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência. Assim, $\bar{\mathbf{L}}$ é dividido em duas partes, $\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}_a - \bar{\mathbf{L}}_b$, sendo $\bar{\mathbf{L}}_a^{-1}$ um operador conhecido. Desta forma, o problema do primeiro tipo é convertido em um problema do segundo tipo $\mathbf{X} - \bar{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, onde $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{L}}_b$ e $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \mathbf{U}$. Além disso, forçando $\bar{\mathbf{L}}_a$ a ter a singularidade do operador $\bar{\mathbf{L}}$, a equação passa a ser do tipo Fredholm do segundo tipo, onde $\bar{\mathcal{G}}$ é compacto, ou seja, $\|\bar{\mathcal{G}}\| < \infty$. Além disso,

esses teoremas garantem uma convergência numérica da solução. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n - \bar{\mathcal{G}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n$, onde o operador de matriz $\bar{\mathcal{G}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (5.28)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathcal{G}}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$, conseqüentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso é o resultado.

5.3.1 Considerações iniciais

Para seguir com a técnica de regularização é necessário fazer algumas trocas de variáveis (Rondineau et al., 2004), diferente do capítulo anterior, as mudanças nas variáveis não são triviais. Assim, parece necessário realizar alguns trabalhos sobre as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ que descreve da estrutura geométrica. Só então o esquema de regularização pode ser aplicado:

$$\left. \begin{aligned} f_n^k \bar{\Omega}_b \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} \\ f_n^k \bar{\Omega}_b \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta < \Theta,$$

$$\left. \begin{aligned} f_n^z \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{0n}^{3e} \\ f_n^z \mathbf{Y}_{bn} &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^z, \end{aligned} \right\} \Theta \leq \theta < \Pi,$$

onde $\bar{\mathbf{I}}$ representa operador identidade.

Para controlar a singularidades, as grandezas introduzidas nas trocas de variáveis devem ser verificadas:

$$\frac{f_n^z}{f_n^k} (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn})^{-1} \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{bn} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{f_n^z}{f_n^k} \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}$$

onde $\bar{\Omega}_b$ são matrizes constantes:

$$\bar{\Omega}_b^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^k}{f_n^z} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$$

o comportamento assintótico de $\bar{\mathcal{G}}_{bn}$ e $\frac{f_n^k}{f_n^z}$ são:

$$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, (\bar{\mathcal{G}}_{bn})_{ij} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{f_n^k}{f_n^z} = O(n) (n \rightarrow \infty).$$

5.3.2 Comportamento assintóticos

A primeira observação vem do fato de que as matrizes envolvidas são triangulares inferiores. Seja $\overline{\mathbf{O}}$ uma matriz inferior de dimensão $N \times N$ definida da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} o_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 & \dots & 0 \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{N1} & o_{N2} & o_{N3} & \dots & o_{NN} \end{bmatrix},$$

onde o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$|\overline{\mathbf{O}}| = \prod_{i=1}^N o_{ii}, \quad (5.29)$$

então $\overline{\mathbf{O}}$ é invertível e seu inverso é a matriz $\overline{\mathbf{P}}$ que também é uma matriz triangular inferior invertível:

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

A determinação da $\overline{\mathbf{P}}$ analiticamente é feita de forma recursiva e crescente para cada elemento da matriz:

$$p_{ij} = \frac{1}{o_{ii}} \left(\delta_j^i - \sum_{k=j}^{i-1} o_{ik} \cdot p_{kj} \right). \quad (5.30)$$

com essa técnica de inversão, mais as operações de multiplicação, adição e subtração de matrizes, nos podemos obter a expressão do comportamento assintótico da matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$, o comportamento assintótico dessa matriz é detalhada no Apêndice C, com isso temos que:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{r_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (5.31)$$

5.3.3 Regularização analítica

Depois de estudar o comportamento assintótico dessa matriz, o método de regularização pode ser aplicada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^k(2n+1) \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \overline{\Omega}_b \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^z(2n+1) \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z] = \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi \quad (5.33)$$

considerando que as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{P}}_n(\cos\theta)}{d\theta} &= \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \\ \bar{\mathbf{P}}_0(\cos\theta) &= \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\Omega}_b \cdot \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) &= \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \bar{\Omega}_b\end{aligned}$$

podemos aplica-las na equação 5.32

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^k(2n+1)\bar{\mathbf{P}}_n(\cos\theta) \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] = \bar{\mathbf{P}}_0(\cos\theta) \cdot \mathbf{C}_0, \quad 0 \leq \theta < \Theta \quad (5.34)$$

onde \mathbf{C}_0 é a constante gerada pela integração de $\frac{d}{d\theta}\bar{\mathbf{P}}_n(\cos\theta)$.

A representação integral do polinômio de Legendre associado é dada pela formula de Mehler–Dirichlet (OLVER, 2010, Eq. 14.12.1):

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2} (\sin\theta)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - m)} \int_0^\theta \frac{\cos[(n + \frac{1}{2})\phi]}{(\cos\phi - \cos\theta)^{\frac{1}{2}+m}} d\phi, \quad 0 < \theta < \Theta, \quad \text{Re}(m) < \frac{1}{2}$$

e utilizando a fórmula de conexão (OLVER, 2010, Eq. 14.9.3):

$$P_n^{-m}(\cos\theta) = c_{mn} P_n^m(\cos\theta),$$

chegamos na seguinte relação:

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\cos[(n + \frac{1}{2})\phi]}{(\cos\phi - \cos\theta)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, \quad 0 < \theta < \Theta, \quad \text{Re}(m) > -\frac{1}{2}, \quad (5.35a)$$

onde:

$$c_{mn} = (-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}, \quad d_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\sin\theta)^m \Gamma(\frac{1}{2} + m)}.$$

A segunda igualdade é obtida através das mudanças de variáveis, ϕ em $\pi - \phi$ e θ em $\pi - \theta$:

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\phi]}{(\cos\theta - \cos\phi)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi, \quad \Theta < \theta < \pi, \quad \text{Re}(m) > -\frac{1}{2}, \quad (5.35b)$$

Utilizando o método de integração por partes, nos obtemos:

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\phi] \sin\phi}{(\cos\phi - \cos\theta)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, \quad 0 < \theta < \Theta, \quad \text{Re}(m) > -\frac{1}{2}, \quad (5.35c)$$

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\cos[(n + \frac{1}{2})\phi] \sin\phi}{(\cos\theta - \cos\phi)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi, \quad \Theta < \theta < \pi, \quad \text{Re}(m) > -\frac{1}{2}, \quad (5.35d)$$

onde:

$$e_{mn} = d_m \frac{(2m-1)}{(2n+1)}$$

A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $0 \leq \theta < \Theta$ com $m = 0$ é:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi,$$

e associando com a Eq. 5.34, obtemos:

$$\int_0^\theta \frac{1}{(\overline{\cos} \phi - \overline{\cos} \theta)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \left[(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] - \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_0 \right\} d\phi = \mathbf{0}. \quad (5.36a)$$

A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $\Theta \leq \theta < \Pi$ com $m = 1$ é:

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(\sin \theta)} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_\theta^\pi \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi.$$

e associando com a Eq. 5.33, obtemos:

$$\int_\theta^\pi \frac{\overline{\sin} \phi}{(\overline{\cos} \theta - \overline{\cos} \phi)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \left[\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z \right] d\phi = \mathbf{0}, \quad (5.36b)$$

onde:

$$\begin{aligned} f_n^k &= \frac{1}{2n+1}, \\ f_n^z &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Essas integrais são homogêneas do tipo Abel com um núcleo de quadrados somados. Então, suas funções integrantes desaparecem em todo o intervalo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \left[(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] = \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_0, \quad 0 \leq \theta < \Theta, \quad (5.37a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \left[\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z \right] = \mathbf{0}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi. \quad (5.37b)$$

e portanto, podemos reescrever como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{bn} = \begin{cases} \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \left[\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k \right], & 0 \leq \theta < \Theta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z, & \Theta \leq \theta < \Pi \end{cases} \quad (5.38)$$

Essa equação nada mais é do que a expressão de Fourier do campo eletromagnético. Para obter os coeficientes de Fourier, essa equação deve ser projetada na função $\cos\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right]$, com $u \geq 0$ e as integramos de 0 a π :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \int_0^{\theta} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \cdot \mathbf{C}_0 + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k\right] + \dots \\ &\dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta}^{\pi} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde a integral é:

$$\mathcal{Q}_{un}(\theta) = \int_0^{\theta} \cos\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u-n)\theta}{(u-n)} + \frac{\sin(u+n+1)\theta}{(u+n+1)} \right], \quad (5.40)$$

reescrevendo as equações com os novos termos, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} = \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z \quad (5.41)$$

A constante \mathbf{C}_0 é obtida graça à projeção em $u = 0$:

$$\mathbf{C}_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z\right] \quad (5.42)$$

onde \mathbf{X}_u e \mathbf{Y}_u^z são:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} \\ \mathbf{Y}_u^z &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z \end{aligned}$$

e a matriz infinita da parte metálica é:

$$\overline{\mathcal{S}}_{un}(\theta) = \frac{2}{\pi} \left[\overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) - \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \right].$$

Substituindo-as na Eq. 5.41, temos o problema do primeiro tipo convertido em um problema do segundo tipo:

$$\mathbf{X}_u = \mathbf{Y}_u^z + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{S}}_{un}(\theta) \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z\right] \quad (5.43)$$

5.4 Resultado numérico

A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n + \bar{\mathbf{U}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n$, onde o operador de matriz $\bar{\mathbf{U}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (5.44)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathbf{U}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{U}}$, consequentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais próxima a precisão está da precisão da máquina.

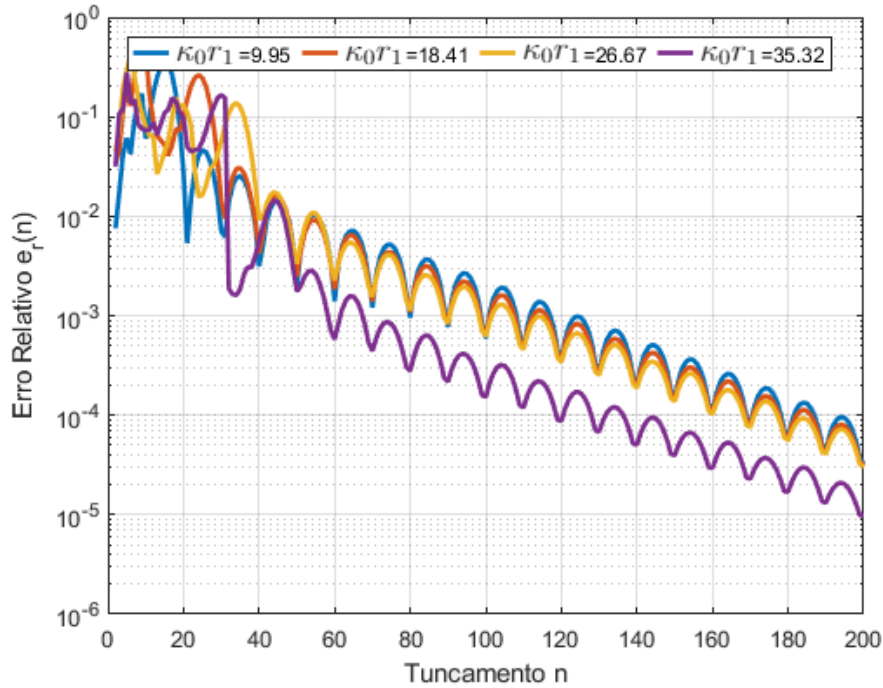


Figura 6 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes frequências normalizadas, $\kappa_0 r_1$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$.

5.5 Validação

5.6 Conclusão

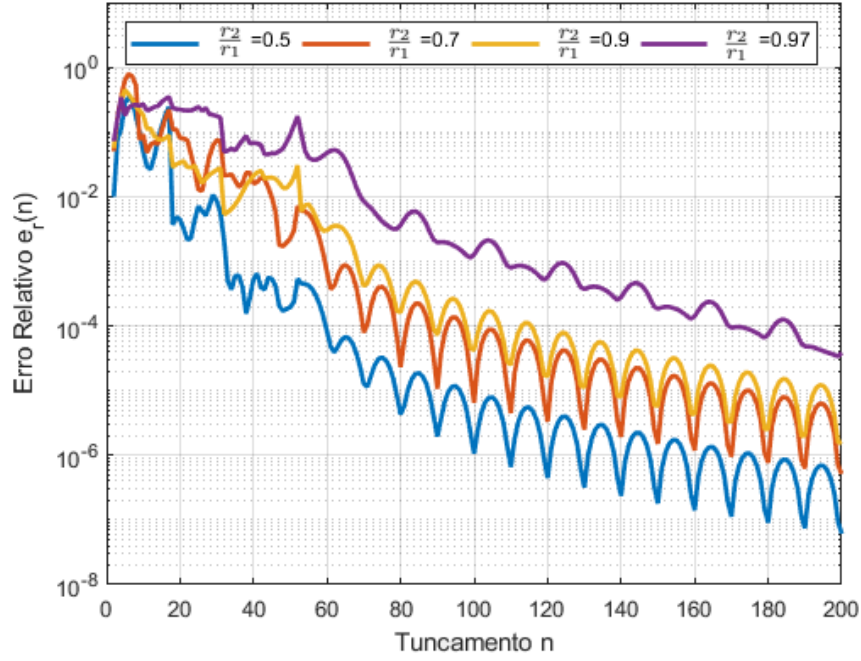


Figura 7 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 50$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$.

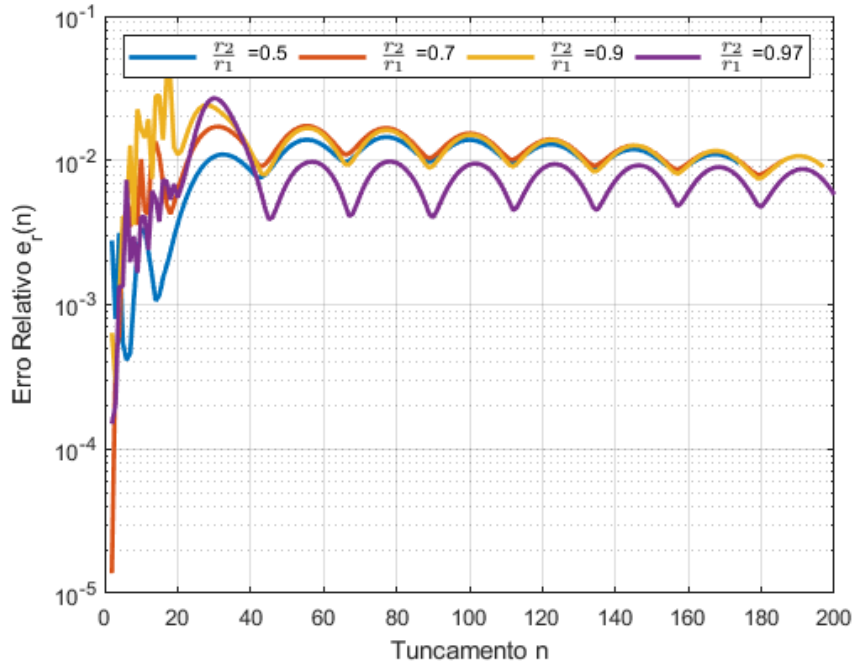


Figura 8 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Luneburg composta de 7 camadas em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$.

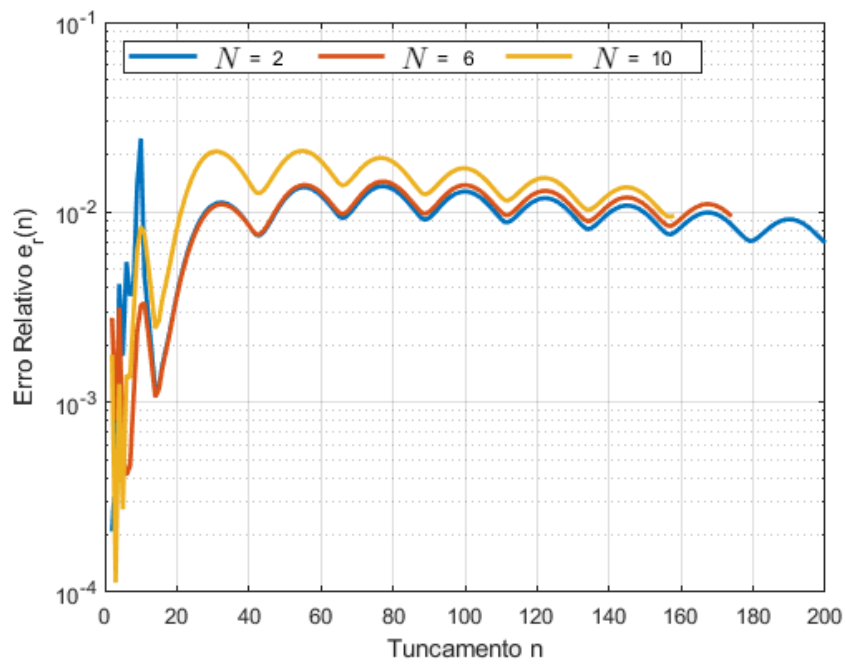


Figura 9 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg em função da ordem de truncamento para diferentes discretização da lente, N . Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$ e $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$.

6 Antena Alimentada por Fenda Centrada

A alimentação escolhida é uma sonda coaxial centrada, isto é, $\theta_{\odot} = 0$, $\phi_{\odot} = 0$, cuja corrente é orientada ao longo do raio e com amplitude fixa, I_0 :

$$\mathbf{J}^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}') = V_0 \delta(\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}') \hat{\theta}, \quad (6.1)$$

Por ser uma alimentação centrada, temos que (HANSEN, 1988, Eqs. A1.39 e A1.42):

$$\left. \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right|_{\theta=0} = \begin{cases} \pm \frac{n(n+1)}{2}, & \text{se } m = \pm 1 \\ 0, & \text{se } m \neq \pm 1 \end{cases}. \quad (6.2)$$

$$\left. \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, & \text{se } m = 1 \\ 0, & \text{se } m \neq 1 \end{cases}. \quad (6.3)$$

então a equação só não é nula para $m = 1$, com isso, temos que:

$$f_m^{\beta}(\phi) \Big|_{\phi=0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta = e \\ 0, & \text{se } \beta = o \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{\theta} = \frac{n(n+1)}{2} z_n^{\alpha f'} \delta_o^{\beta} \quad (6.5a)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha\beta f'} \cdot \hat{\theta} = \frac{n(n+1)}{2} k_n^{\alpha f'} \delta_e^{\beta} \quad (6.5b)$$

Aplicando as Eqs. 6.5a-6.5b e a função Delta de Dirac¹ nas Eqs. 4.30a-4.30d, temos:

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = -iE_0 \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[b_{mn}^{\alpha\beta f} (\tilde{\delta}_0^f \delta_1^{\alpha} + \tilde{\delta}_N^f \delta_3^{\alpha}) + z_n^{\overline{\alpha} f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \delta_1^{\alpha} + \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \delta_3^{\alpha} \right) \right] \delta_o^{\beta} \delta_m^1, \quad (6.6a)$$

$$a_{mn}^{\alpha\beta f} = -iE_0 \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[a_{mn}^{\alpha\beta f} (\tilde{\delta}_0^f \delta_1^{\alpha} + \tilde{\delta}_N^f \delta_3^{\alpha}) + k_n^{\overline{\alpha} f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_{\odot}-r|}^{r_{\odot}-r} \delta_1^{\alpha} + \delta_{|r-r_{\odot}|}^{r-r_{\odot}} \delta_3^{\alpha} \right) \right] \delta_e^{\beta} \delta_m^1. \quad (6.6b)$$

onde:

$$E_0 = \frac{V_0 \kappa_f^2}{4\pi}$$

$$b_{mn}^{\alpha\beta f} = a_{mn1}^{\alpha\beta f} z_n^{1f \odot} \tilde{\delta}_0^s + a_{mn3}^{\alpha\beta f} z_n^{3f \odot} \tilde{\delta}_N^s \quad (6.7a)$$

$$a_{mn}^{\alpha\beta f} = b_{mn1}^{\alpha\beta f} k_n^{1f \odot} \tilde{\delta}_0^s + b_{mn3}^{\alpha\beta f} k_n^{3f \odot} \tilde{\delta}_N^s \quad (6.7b)$$

¹ Função Delta de Dirac: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha$

Portanto, a forma geral do campo eletromagnético de uma antena alimentada por Fenda Centrada é:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{\alpha,n} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha ef} \left[a_{1n}^{\alpha ef} (\delta_0^f \delta_1^\alpha + \delta_N^f \delta_3^\alpha) + k_n^{\alpha f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_\odot - r|}^{r_\odot - r} \delta_1^\alpha + \delta_{|r - r_\odot|}^{r - r_\odot} \delta_3^\alpha \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha of} \left[b_{1n}^{\alpha of} (\delta_0^f \delta_1^\alpha + \delta_N^f \delta_3^\alpha) + z_n^{\alpha f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_\odot - r|}^{r_\odot - r} \delta_1^\alpha + \delta_{|r - r_\odot|}^{r - r_\odot} \delta_3^\alpha \right) \right] \right\}, \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\eta_f} E_0 \sum_{\alpha,n} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha ef} \left[a_{1n}^{\alpha ef} (\delta_0^f \delta_1^\alpha + \delta_N^f \delta_3^\alpha) + k_n^{\alpha f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_\odot - r|}^{r_\odot - r} \delta_1^\alpha + \delta_{|r - r_\odot|}^{r - r_\odot} \delta_3^\alpha \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha of} \left[b_{1n}^{\alpha of} (\delta_0^f \delta_1^\alpha + \delta_N^f \delta_3^\alpha) + z_n^{\alpha f \odot} \delta_s^f \left(\delta_{|r_\odot - r|}^{r_\odot - r} \delta_1^\alpha + \delta_{|r - r_\odot|}^{r - r_\odot} \delta_3^\alpha \right) \right] \right\}, \quad (6.8b)$$

6.1 Determinação das Características da Antena

Todo o estudo desenvolvido aqui é baseado em coeficientes de ondas esféricas. Esses coeficientes contêm todas as informações que descrevem a fonte. Assim, as grandezas físicas que caracterizam essa fonte devem ser extraídas desses coeficientes. Para o campo de antenas, é costume focar mais particularmente nos diagrama de radiação de campo distante, potência irradiada e diretividade.

6.1.1 Diagrama de radiação de campo distante

O vetor intensidade do campo elétrico fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[\overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} a_{1n}^{3e0} + \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} b_{1n}^{3o0} \right], \quad (6.9)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} = -z_n^{30} \left[\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(\phi) \hat{\theta} + \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \cos(\phi) \hat{\phi} \right], \quad (6.10)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} = k_n^{30} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \sin(\phi) \hat{\theta} + \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(\phi) \hat{\phi} \right] + \dots \\ \dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} z_n^{30} P_n^1(\cos\theta) \sin(\phi) \hat{r}, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ -z_n^{30} \left[\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(\phi) \hat{\theta} + \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \cos(\phi) \hat{\phi} \right] a_{1n}^{3e0} + \dots \right. \\ \dots k_n^{30} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \sin(\phi) \hat{\theta} + \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(\phi) \hat{\phi} \right] b_{1n}^{3o0} + \dots \\ \left. \dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} z_n^{30} P_n^1(\cos\theta) \sin(\phi) \hat{r} b_{1n}^{3o0} \right\}, \quad (6.12)$$

também podemos escrever em termo de componentes:

$$\mathbf{E}_{0r}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\kappa_0 r} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z_n^{30} P_n^1(\cos\theta) \sin(\phi) b_{1n}^{3o0}, \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{E}_{0\theta}(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ k_n^{30} \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} b_{1n}^{3o0} - z_n^{30} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} a_{1n}^{3e0} \right\} \sin(\phi), \quad (6.13b)$$

$$\mathbf{E}_{0\phi}(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ k_n^{30} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} b_{1n}^{3o0} - z_n^{30} \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} a_{1n}^{3e0} \right\} \cos(\phi), \quad (6.13c)$$

As expansões assintóticas da função de Hankel do primeiro tipo e a derivada da função de Hankel do primeiro tipo para grandes argumentos, $r \rightarrow \infty$, ([ABRAMOWITZ, 1965](#), Eqs. 9.2.3) são:

$$\begin{aligned} z_n^3(\kappa_0 r) &\sim (-i)^{n+1} \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-3/2})(r \rightarrow \infty), \\ k_n^3(\kappa_0 r) &\sim (-i)^n \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

e com isso podemos escrever o vetor intensidade do campo elétrico para o campo distante como:

$$\mathbf{E}_{0r}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{E}_{0\theta}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} d_\theta(\theta, \phi) + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (6.14b)$$

$$\mathbf{E}_{0\phi}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\kappa_0 r} d_\phi(\theta, \phi) + \mathcal{O}(r^{-2})(r \rightarrow \infty), \quad (6.14c)$$

onde o diagrama de radiação de campo distante é:

$$d_\theta(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} b_{1n}^{3o0} + i \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} a_{1n}^{3e0} \right\} \sin(\phi) \quad (6.15a)$$

$$d_\phi(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} b_{1n}^{3o0} + i \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} a_{1n}^{3e0} \right\} \cos(\phi) \quad (6.15b)$$

Normalmente, o diagrama de radiação de campo distante, é visualizado a partir da componente principal, $\phi = 0$, e da componente cruzada, $\phi = \pi/2$.

6.1.2 Densidade e intensidade de radiação

A densidade média de potência ou densidade de radiação ([BALANIS, 2016](#), Eqs. 2-8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})]. \quad (6.16)$$

Sabemos que os campos elétrico e magnético fora da lente é descrito como: ²

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -iE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} a_{1n}^{3e0} + \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} b_{1n}^{3o0} \right\}, \quad (6.17a)$$

$$\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\eta_0} E_0^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{*3e0} a_{1n}^{*3e0} + \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{*3o0} b_{1n}^{*3o0} \right\}, \quad (6.17b)$$

Com os campos elétrico e magnético conhecidos, podemos reescrever a densidade de radiação como:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{i}{\eta_0} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)}{n(n+1)} \right]^2 \left[\overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{*3e0} |a_{1n}^{3e0}|^2 + \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{*3o0} |b_{1n}^{3o0}|^2 \right] \right] \quad (6.18)$$

onde também sabemos os vetores esféricos harmônicos, portanto:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{*3e0} &= z_n^{30} k_n^{*30} \left[\left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right|^2 \cos^2(\phi) + \left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right|^2 \sin^2(\phi) \right] \hat{r} + \dots \\ &\dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} |z_n^{30}|^2 \left[\frac{|P_n^1(\cos\theta)|^2}{\sin\theta} \sin(\phi) \cos(\phi) \hat{\phi} - \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} P_n^{*1}(\cos\theta) \cos^2(\phi) \hat{\theta} \right] \\ \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{*3o0} &= -k_n^{30} z_n^{*30} \left[\left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right|^2 \cos^2(\phi) + \left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right|^2 \sin^2(\phi) \right] \hat{r} + \dots \\ &\dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} |z_n^{30}|^2 \left[\frac{|P_n^1(\cos\theta)|^2}{\sin\theta} \sin(\phi) \cos(\phi) \hat{\phi} + P_n^1(\cos\theta) \frac{dP_n^{*1}(\cos\theta)}{d\theta} \sin^2(\phi) \hat{\theta} \right] \end{aligned}$$

Aplicando as expansões assintóticas da função de Hankel do primeiro tipo e a derivada da função de Hankel do primeiro tipo para grandes argumentos, $r \rightarrow \infty$, podemos escrever a intensidade de radiação para o campo distante como:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{3e0} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{*3e0} &= -\frac{i}{\kappa_0^2 r^2} \left[\left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right|^2 \cos^2(\phi) + \left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right|^2 \sin^2(\phi) \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \\ \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{3o0} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{*3o0} &= -\frac{i}{\kappa_0^2 r^2} \left[\left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right|^2 \cos^2(\phi) + \left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right|^2 \sin^2(\phi) \right] \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-5/2})(r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

portanto:

$$\mathbf{W}_{rad} = \frac{1}{2\eta_0} \frac{|E_0|^2}{\kappa_0^2 r^2} \sum_{\beta, n} \left| \frac{(2n+1)}{n(n+1)} c_{1n}^{3\beta 0} \right|^2 \left[\left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} f_1^\beta(\phi) \right|^2 + \left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} f_1^{\bar{\beta}}(\phi) \right|^2 \right] \hat{r}. \quad (6.19)$$

² Identidade complexo conjugado:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ z^* &= a - ib \\ (z+w)^* &= z^* + w^* \\ (z-w)^* &= z^* - w^* \\ (zw)^* &= z^* w^* \\ \left(\frac{z}{w}\right)^* &= \frac{z^*}{w^*}, \text{ para } w \neq 0 \\ zz^* &= |z|^2 \end{aligned}$$

onde:

$$c_{mn}^{\alpha\beta f} = \begin{cases} a_{mn}^{\alpha\beta f}, & \text{se } \beta = e \\ b_{mn}^{\alpha\beta f}, & \text{se } \beta = o \end{cases}. \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{rad} = \frac{i}{2\eta_0} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 & \left[z_n^3(\kappa_0 r) k_n^{*3}(\kappa_0 r) |P_n^1(\cos \theta)|^2 \hat{r} - \dots \right. \\ & \left. \dots \frac{n(n+1)}{\kappa_0 r} |z_n^3(\kappa_0 r)|^2 P_n^1(\cos \theta) P_n^*(\cos \theta) \hat{\theta} \right] |b_{0n}^{3e0}|^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

A intensidade de radiação (BALANIS, 2016, Eqs. 2-12) pode ser escrito como:

$$\mathbf{U} = r^2 \mathbf{W}_{rad}. \quad (6.22)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\eta_0 \kappa_0^2} |E_0|^2 \sum_{\beta, n} \left| \frac{(2n+1)}{n(n+1)} c_{1n}^{3\beta 0} \right|^2 \left[\left| \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} f_1^\beta(\phi) \right|^2 + \left| \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} f_1^{\bar{\beta}}(\phi) \right|^2 \right] \hat{r}. \quad (6.23)$$

6.1.3 Potência de radiação

A potência radiada (BALANIS, 2016, Eqs. 2-9) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \hat{r} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{U} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (6.24)$$

aplicando a intensidade de radiação, Eq. 6.23, na Eq. 6.24 temos que:

$$P_{rad} = \frac{1}{2\eta_0} \frac{|E_0|^2}{\kappa_0^2} \sum_{\beta, n} \left| \frac{(2n+1)}{n(n+1)} c_{1n}^{3\beta 0} \right|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left| \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} f_1^\beta(\phi) \right|^2 + \left| \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} f_1^{\bar{\beta}}(\phi) \right|^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi, \quad (6.25)$$

A integral dos polinômios associados de Legendre (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 8.14.14) e (HANSEN, 1988, Eqs. A1.28 e A1.29), são definidos como:

$$\int_0^\pi \left| \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right|^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}, \quad (6.26a)$$

$$\int_0^\pi \left| \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right|^2 \sin(\theta) d\theta = \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} - m \right] \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (6.26b)$$

e

$$\int_0^{2\pi} |f_1^\beta(\phi)|^2 d\phi = \pi \quad (6.26c)$$

aplicando a integral dos polinômios associados de Legendre, Eqs. 6.26a e 6.26b, na Eq. 6.25, temos que:

$$P_{rad} = \frac{\pi}{\eta_0 \kappa_0^2} |E_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[|a_{1n}^{3e0}|^2 + |b_{1n}^{3o0}|^2 \right], \quad (6.27)$$

6.1.4 Diagrama de diretividade

A diretividade (BALANIS, 2016, Eqs. 2-16) para fora da lente pode ser escrito da seguinte forma:

$$D = \frac{4\pi U}{P_{rad}}, \quad (6.28)$$

aplicando a intensidade de radiação e a potência de radiação, Eqs. 6.23 e 6.27, respectivamente, na Eq. 6.28 temos que:

$$D = \frac{2 \sum_{\beta,n} \left| \frac{(2n+1)}{n(n+1)} c_{1n}^{3\beta 0} \right|^2 \left[\left| \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} f_1^\beta(\phi) \right|^2 + \left| \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} f_1^\beta(\phi) \right|^2 \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[|a_{1n}^{3e0}|^2 + |b_{1n}^{3o0}|^2 \right]}. \quad (6.29)$$

6.2 Determinação das equações de séries duplas

Como os discos de metal ou condutor magnético perfeito (PMC - *Perfect Magnetic Conductor*) cobrem apenas parte das interfaces da esfera dielétrica, o campo eletromagnético deve verificar as condições duais nessas superfícies. A condição de contorno para uma interface onde a sua superfície é um PMC o campo magnético tangencial desaparece:

$$\hat{r} \times \mathbf{H}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left\{ \frac{\hat{r} \times \bar{\mathbf{N}}_{1n}^{1e(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(a_{1n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{\hat{r} \times \bar{\mathbf{N}}_{1n}^{3e(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} a_{1n}^{3e(i-1)} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{\hat{r} \times \bar{\mathbf{M}}_{1n}^{1o(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(b_{1n}^{1o(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{\hat{r} \times \bar{\mathbf{M}}_{1n}^{3o(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} b_{1n}^{3o(i-1)} \right\} = \mathbf{0}, \\ 0 \leq \theta_i < \Theta \end{aligned} \quad (6.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \frac{\bar{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha efi}}{\eta_f} &= \frac{k_n^{\alpha fi}}{\eta_f} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \cos \phi \hat{\phi} + \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin \phi \hat{\theta} \right], \\ \hat{r} \times \frac{\bar{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha ofi}}{\eta_f} &= \frac{z_n^{\alpha fi}}{\eta_f} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \sin \phi \hat{\theta} + \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos \phi \hat{\phi} \right], \end{aligned}$$

Então podemos reescrever como:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sin\theta} F_{an} + \frac{d}{d\theta} F_{bn} \right] \sin \phi \hat{\theta} &= \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta \\ \left[\frac{d}{d\theta} F_{an} + \frac{1}{\sin\theta} F_{bn} \right] \cos \phi \hat{\phi} &= \mathbf{0}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta \end{aligned}$$

onde:

$$F_{an} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[\frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(a_{1n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{k_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} a_{1n}^{3e(i-1)} \right]$$

$$F_{bn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[\frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(b_{1n}^{1o(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} b_{1n}^{3o(i-1)} \right]$$

Resolvendo o sistema de EDOs, Eqs 6.2 - 6.2, temos que:

$$F_{an} = \begin{cases} c_{01} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), & \text{para } 0 \leq \theta_i < \Theta \\ c_{02} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), & \text{para } \Theta \leq \theta_i < \Pi \end{cases},$$

$$F_{bn} = \begin{cases} c_{02} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), & \text{para } 0 \leq \theta_i < \Theta \\ c_{01} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), & \text{para } \Theta \leq \theta_i < \Pi \end{cases},$$

portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[\frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(a_{1n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{k_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} a_{1n}^{3e(i-1)} \right] = \dots$$

$$\dots c_{01} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.31a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[\frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(b_{1n}^{1o(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} b_{1n}^{3o(i-1)} \right] = \dots$$

$$\dots c_{02} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.31b)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo elétrico tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{E}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i) \right] = 0, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi$$

com:

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{M}}_{1n}^{\alpha\text{efi}} = z_n^{\alpha\text{fi}} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \cos\phi\hat{\theta} - \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin\phi\hat{\phi} \right]$$

$$\hat{r} \times \overline{\mathbf{N}}_{1n}^{\alpha\text{ofi}} = k_n^{\alpha\text{fi}} \left[\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \sin\phi\hat{\phi} - \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\phi\hat{\theta} \right],$$

onde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[z_n^{1(i-1)i} \left(a_{1n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + z_n^{3(i-1)i} a_{1n}^{3e(i-1)} - \dots \right. \quad (6.31c)$$

$$\left. \dots z_n^{1ii} a_{1n}^{1ei} - z_n^{3ii} \left(a_{1n}^{3ei} \tilde{\delta}_N^i + k_n^{1s\odot} \delta_s^i \right) \right] = c_{\pi 2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \Theta \leq \theta_i < \Pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \left[k_n^{1(i-1)i} \left(b_{1n}^{1o(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + k_n^{3(i-1)i} b_{1n}^{3o(i-1)} - \dots \right. \\ \left. \dots k_n^{1ii} b_{1n}^{1oi} - k_n^{3ii} \left(b_{1n}^{3oi} \tilde{\delta}_N^i + z_n^{1s\odot} \delta_s^i \right) \right] = c_{\pi 1} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.31d)$$

A condição de contorno para uma interface entre dois meios dielétricos, o campo magnético tangencial é contínuo:

$$\hat{r} \times \left[\mathbf{H}_{(i-1)}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_i) \right] = 0, \quad 0 \leq \theta_i < \Pi$$

$$\frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(a_{1n}^{1e(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + k_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{k_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} a_{1n}^{3e(i-1)} = \frac{k_n^{1ii}}{\eta_i} a_{1n}^{1ei} + \frac{k_n^{3ii}}{\eta_i} \left(a_{1n}^{3ei} \tilde{\delta}_N^i + k_n^{1i\odot} \delta_s^i \right), \quad (6.31e)$$

$$\frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \left(b_{1n}^{1o(i-1)} \tilde{\delta}_0^{(i-1)} + z_n^{3s\odot} \delta_s^{(i-1)} \right) + \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} b_{1n}^{3o(i-1)} = \frac{z_n^{1ii}}{\eta_i} b_{1n}^{1oi} + \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \left(b_{1n}^{3oi} \tilde{\delta}_N^i + z_n^{1i\odot} \delta_s^i \right). \quad (6.31f)$$

Por ser multicamadas, podemos transformar as Eqs. 6.31a-6.31f em matrizes, facilitando a manipulação das mesmas. Os vetores e as matrizes estão descritos no Apêndice B:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \mathbf{P}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3D} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \right] = \overline{\mathbf{tan}}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{01}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.32a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \mathbf{P}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\overline{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} + \overline{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1o} + \overline{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \right] = \overline{\mathbf{tan}}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{02}, \quad 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.32b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \mathbf{P}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} \right] = \overline{\mathbf{cot}}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2}, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.32c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \mathbf{P}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} - \overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1o} + \overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] = \overline{\mathbf{cot}}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}, \quad \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.32d)$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{1e} + \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} = \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \quad (6.32e)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{1o} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \quad (6.32f)$$

Isolando \mathbf{A}_{1n}^{1e} da Eq. 6.32e:

$$\mathbf{A}_{1n}^{1e} = \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \left[\bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} \right] \quad (6.33)$$

agora substitua nas Eqs. 6.32a e 6.32c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{an}^k \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{01}, 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.34a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} - \check{\mathbf{C}}_{an}^z \right] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2}, \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.34b)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ são as responsáveis pela descrição da estrutura geométrica.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \\ \check{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \\ \check{\mathbf{C}}_{an}^z &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \end{aligned}$$

Isolando \mathbf{B}_{1n}^{1o} da Eq. 6.35:

$$\mathbf{B}_{1n}^{1o} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} \right] \quad (6.35)$$

agora substitua nas Eqs. 6.32b e 6.32d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^z \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{02}, 0 \leq \theta_i < \Theta \quad (6.36a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \bar{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \left[\bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} - \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \right] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}, \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.36b)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ são as responsáveis pela descrição da estrutura geométrica.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \end{aligned}$$

6.3 Método de Regularização Analítica

O método de regularização analítica (MAR - Method of Analytical Regularization) (Nosich, 1999), parte das equações de séries duplas, Eqs. ?? - ?? que são, em termos de operadores, equações do primeiro tipo, $\bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{U}$, onde \mathbf{X} representa o vetor de incógnitas e \mathbf{U} o vetor de elementos conhecidos. Infelizmente, uma inversão direta de $\bar{\mathbf{L}}$ geralmente não é possível. Mesmo que uma inversão numérica fosse possível, nada poderia garantir sua convergência. Assim, $\bar{\mathbf{L}}$ é dividido em duas partes, $\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}_a - \bar{\mathbf{L}}_b$, sendo $\bar{\mathbf{L}}_a^{-1}$ um operador conhecido. Desta forma, o problema do primeiro tipo é convertido em um problema do segundo tipo $\mathbf{X} - \bar{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, onde $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{L}}_b$ e $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{L}}_a^{-1} \cdot \mathbf{U}$. Além disso, forçando $\bar{\mathbf{L}}_a$ a ter a singularidade do operador $\bar{\mathbf{L}}$, a equação passa a ser do tipo Fredholm do segundo tipo, onde $\bar{\mathcal{G}}$ é compacto, ou seja, $\|\bar{\mathcal{G}}\| < \infty$. Além disso, esses teoremas garantem uma convergência numérica da solução. A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n - \bar{\mathcal{G}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n$, onde o operador de matriz $\bar{\mathcal{G}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (6.37)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\bar{\mathcal{G}}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$, consequentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais preciso é o resultado.

6.3.1 Considerações iniciais

Para seguir com a técnica de regularização é necessário fazer algumas trocas de variáveis (Rondineau et al., 2004), diferente do capítulo anterior, as mudanças nas variáveis não são triviais. Assim, parece necessário realizar alguns trabalhos sobre as matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e os vetores $\check{\mathbf{C}}$ que descreve da estrutura geométrica. Só então o esquema de regularização pode ser aplicado:

$$\left. \begin{aligned} f_{an}^k \bar{\Omega}_a \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} &= \bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} \\ f_{an}^k \bar{\Omega}_a \cdot \mathbf{Y}_{an}^k &= \check{\mathbf{C}}_{an}^k \\ f_{bn}^z \bar{\Omega}_b \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} \\ f_{bn}^z \bar{\Omega}_b \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^z \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta < \Theta,$$

$$\left. \begin{aligned} f_{an}^z \mathbf{X}_{an} &= \bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \mathbf{A}_{1n}^{3e} \\ f_{an}^z \mathbf{Y}_{an}^z &= \check{\mathbf{C}}_{an}^z \\ f_{bn}^k \mathbf{X}_{bn} &= \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \mathbf{B}_{1n}^{3o} \\ f_{bn}^k \mathbf{Y}_{bn}^k &= \check{\mathbf{C}}_{bn}^k \end{aligned} \right\} \Theta \leq \theta < \Pi,$$

onde $\bar{\mathbf{I}}$ representa operador identidade.

Para controlar a singularidades, as grandezas introduzidas nas trocas de variáveis devem ser verificadas:

$$\frac{f_{an}^z}{f_{an}^k} (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an})^{-1} \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}}$$

$$\frac{f_{bn}^k}{f_{bn}^z} (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn})^{-1} \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{an} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{f_{an}^z}{f_{an}^k} \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{z^{-1}}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{bn} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{f_{bn}^k}{f_{bn}^z} \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{k^{-1}}$$

onde $\bar{\Omega}_{a,b}$ são matrizes constantes:

$$\bar{\Omega}_a^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{an}^k}{f_{an}^z} \bar{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \bar{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}}$$

$$\bar{\Omega}_b^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{bn}^z}{f_{bn}^k} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \bar{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}}$$

o comportamento assintótico de $\bar{\mathcal{G}}_{a,bn}$ é:

$$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, (\bar{\mathcal{G}}_{a,bn})_{ij} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty),$$

6.3.2 Comportamento assintóticos

A primeira observação vem do fato de que as matrizes envolvidas são triangulares inferiores. Seja $\bar{\mathbf{O}}$ uma matriz inferior de dimensão $N \times N$ definida da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} o_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 & \dots & 0 \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{N1} & o_{N2} & o_{N3} & \dots & o_{NN} \end{bmatrix},$$

onde o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$|\bar{\mathbf{O}}| = \prod_{i=1}^N o_{ii}, \quad (6.38)$$

então $\overline{\mathbf{O}}$ é invertível e seu inverso é a matriz $\overline{\mathbf{P}}$ que também é uma matriz triangular inferior invertível:

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

A determinação da $\overline{\mathbf{P}}$ analiticamente é feita de forma recursiva e crescente para cada elemento da matriz:

$$p_{ij} = \frac{1}{o_{ii}} \left(\delta_j^i - \sum_{k=j}^{i-1} o_{ik} \cdot p_{kj} \right). \quad (6.39)$$

com essa técnica de inversão, mais as operações de multiplicação, adição e subtração de matrizes, nos podemos obter as expressões do comportamento assintótico das matrizes $\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}$ e $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}$, o comportamento assintótico dessas matrizes são detalhada no Apêndice C, com isso temos que:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} + \eta_i \kappa_i \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (6.40)$$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (6.41)$$

o comportamento assintótico de $\frac{f_{a,bn}^k}{f_{a,bn}^z}$ é:

$$\frac{f_{a,bn}^k}{f_{a,bn}^z} = O(n) (n \rightarrow \infty).$$

6.3.3 Regularização analítica

Depois de estudar o comportamento assintótico dessa matriz, o método de regularização pode ser aplicada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{an}^k \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \overline{\Omega}_a \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{01}, 0 \leq \theta_1 < \Theta \quad (6.42)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{bn}^z \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) \cdot \overline{\Omega}_b \cdot \left[(\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^z \right] = \overline{\tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{02}, 0 \leq \theta_1 < \Theta \quad (6.43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{an}^z \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta) [\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z] = \overline{\cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2}, \Theta \leq \theta_1 < \Pi \quad (6.44)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{bn}^k \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \mathbf{P}_n^1(\cos \theta) \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] = \overline{\mathbf{cot}}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}, \Theta \leq \theta_i < \Pi \quad (6.45)$$

A representação integral do polinômio de Legendre associado é dada pela formula de Mehler–Dirichlet (OLVER, 2010, Eq. 14.12.1):

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2} (\sin \theta)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - m)} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2} + m}} d\phi, \\ 0 < \theta < \pi, \Re m < \frac{1}{2}$$

e utilizando a fórmula de conexão (OLVER, 2010, Eq. 14.9.3):

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = c_{mn} P_n^m(\cos \theta),$$

chegamos na seguinte relação:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2} - m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.46a)$$

onde:

$$c_{mn} = (-1)^m \frac{\Gamma(n - m + 1)}{\Gamma(n + m + 1)}, \quad d_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\sin \theta)^m \Gamma(\frac{1}{2} + m)}.$$

A segunda igualdade é obtida através das mudanças de variáveis, ϕ em $\pi - \phi$ e θ em $\pi - \theta$:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{d_m}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2} - m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.46b)$$

Utilizando o método de integração por partes, nos obtemos:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_0^\theta \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2} - m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.46c)$$

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{e_{mn}}{c_{mn}} \int_\theta^\pi \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{3}{2} - m}} d\phi, 0 < \theta < \pi, \Re m > -\frac{1}{2}, \quad (6.46d)$$

onde:

$$e_{mn} = d_m \frac{(2m-1)}{(2n+1)}$$

Para $m \in \{0, 1\}$, temos que:

$$\begin{aligned} \tan^m\left(\frac{\theta}{2}\right) &= d_m \int_0^\theta \frac{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2} - m}} d\phi \\ &= e_{m0} \int_0^\theta \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{3}{2} - m}} d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot^m \left(\frac{\theta}{2} \right) &= d_m \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}-m}} d\phi \\
&= e_{m0} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{3}{2}-m}} d\phi
\end{aligned}$$

Associando as Eqs. ?? - ?? com as formulas de Mehler-Dirichlet, obtemos que: A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $0 \leq \theta < \Theta$ com $m = 1$ é:

$$\begin{aligned}
P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} n(n+1) \int_0^{\theta} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \phi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}} d\phi \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \phi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}} d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_0^{\theta} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\phi
\end{aligned}$$

e associando com as Eqs. 6.42 e 6.43, obtemos:

$$\int_0^{\theta_i} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_{an}^k \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \bar{\Omega}_a \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k] + \overline{\sin} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{01} \right\} \frac{\overline{\sin} \phi d\phi}{(\overline{\cos} \phi - \overline{\cos} \theta)^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.47a)$$

$$\int_0^{\theta_i} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_{bn}^z (2n+1) \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot \bar{\Omega}_b \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] + \overline{\cos} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{02} \right\} \frac{d\phi}{(\overline{\cos} \phi - \overline{\cos} \theta)^{-\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.47b)$$

A formula de Mehler-Dirichlet para o intervalo $\Theta \leq \theta < \Pi$ com $m = 1$ é:

$$\begin{aligned}
P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} n(n+1) \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} d\phi, \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(\cos \theta - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}}} d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin \phi}{(\cos \theta - \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} d\phi
\end{aligned}$$

e associando com as Eqs. 6.44 e 6.45, obtemos:

$$\int_{\theta_i}^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_{an}^z (2n+1) \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot [\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z] + \overline{\sin} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2} \right\} \frac{d\phi}{(\overline{\cos} \theta - \overline{\cos} \phi)^{-\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.47c)$$

$$\int_{\theta_i}^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_{bn}^k \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] + \overline{\cos} \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1} \right\} \frac{\overline{\sin} \phi d\phi}{(\overline{\cos} \theta - \overline{\cos} \phi)^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{0}, \quad (6.47d)$$

onde:

$$\begin{aligned} f_{a,bn}^k &= 1, \\ f_{a,bn}^z &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Essas integrais são homogêneas do tipo Abel com um núcleo de quadrados somados. Então, suas funções integrantes desaparecem em todo o intervalo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{an}) \cdot \mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^k] = -\overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_{01}, \quad 0 \leq \theta < \Theta, \quad (6.48a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{G}}_{bn}) \cdot \mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] = -\overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_{02}, \quad 0 \leq \theta < \Theta, \quad (6.48b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\mathbf{X}_{an} - \mathbf{Y}_{an}^z] = -\overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi, \quad (6.48c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\mathbf{X}_{bn} - \mathbf{Y}_{bn}^k] = -\overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}, \quad \Theta \leq \theta < \Pi. \quad (6.48d)$$

e portanto, podemos reescrever como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{an} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^k] - \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_{01}, & 0 \leq \theta < \Theta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{an}^z - \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 2}, & \Theta \leq \theta < \Pi, \end{cases} \quad (6.49a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{X}_{bn} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] - \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \bar{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_{02}, & 0 \leq \theta < \Theta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\cos} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k - \overline{\cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}, & \Theta \leq \theta < \Pi. \end{cases} \quad (6.49b)$$

Essa equação nada mais é do que a expressão de Fourier do campo eletromagnético. Para obter os coeficientes de Fourier, essa equação deve ser projetada na função $\overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$ e $\overline{\cos} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$, com $u \geq 0$ e as integramos de 0 a π :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{an} = \dots \\ & \dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot [\bar{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^k] - \int_0^{\theta} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \bar{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_{01} + \dots \\ & \dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta}^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{an}^z - \int_{\theta}^{\pi} \overline{\sin} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cdot \overline{\sin} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \cdot \mathbf{C}_{\pi 2} \end{aligned} \quad (6.50a)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot \mathbf{X}_{bn} = \dots \\
& \dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k] - \int_0^{\theta} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \cdot \overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_{02} + \dots \quad (6.50b) \\
& \dots \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta}^{\pi} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k - \int_{\theta}^{\pi} \overline{\cos}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cdot \overline{\cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \cdot \mathbf{C}_{\pi 1}
\end{aligned}$$

onde a integral é:

$$\mathcal{P}_{un}(\theta) = \int_0^{\theta} \sin\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u-n)\theta}{(u-n)} - \frac{\sin(u+n+1)\theta}{(u+n+1)} \right], \quad (6.51)$$

$$\mathcal{Q}_{un}(\theta) = \int_0^{\theta} \cos\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u-n)\theta}{(u-n)} + \frac{\sin(u+n+1)\theta}{(u+n+1)} \right], \quad (6.52)$$

reescrevendo as equações com os novos termos, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{an} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\theta) \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^k - \mathbf{Y}_{an}^z] + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{an}^z - \dots \\
&\dots \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \cdot [\overline{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_{01} + \mathbf{C}_{\pi 2}] \quad (6.53a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z] + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^k - \dots \\
&\dots \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot [\overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_{02} + \mathbf{C}_{\pi 1}] \quad (6.53b)
\end{aligned}$$

As constantes \mathbf{C}_0 é obtida graça à projeção em $u = 0$:

$$[\overline{\Omega}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}_{01} + \mathbf{C}_{\pi 2}] = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{P}}_{0n}(\theta) \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^k - \mathbf{Y}_{an}^z] \quad (6.54a)$$

$$[\overline{\Omega}_b^{-1} \cdot \mathbf{C}_{02} + \mathbf{C}_{\pi 1}] = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \cdot [\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^z] \quad (6.54b)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{au} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{an} \\
\mathbf{Y}_{au}^z &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{an}^z \\
\mathbf{X}_{bu} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{X}_{bn} \\
\mathbf{Y}_{bu}^z &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}}_{un}(\pi) \cdot \mathbf{Y}_{bn}^z
\end{aligned}$$

e a matriz infinita da parte metálica é:

$$\overline{\mathcal{R}}_{un}(\theta) = \frac{2}{\pi} \left[\overline{\mathcal{P}}_{un}(\theta) - \overline{\mathcal{P}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{P}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{P}}_{0n}(\theta) \right].$$

$$\overline{\mathcal{S}}_{un}(\theta) = \frac{2}{\pi} \left[\overline{\mathcal{Q}}_{un}(\theta) - \overline{\mathcal{Q}}_{u0}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{00}^{-1}(\theta) \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{0n}(\theta) \right].$$

Substituindo-as na Eq. ??, temos o problema do primeiro tipo convertido em um problema do segundo tipo: para $u > 0$:

$$\mathbf{X}_{au} = \mathbf{Y}_{au}^z + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{R}}_{un}(\theta) \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{an} \cdot \mathbf{X}_{an} + \mathbf{Y}_{an}^k - \mathbf{Y}_{an}^z \right] \quad (6.55a)$$

$$\mathbf{X}_{bu} = \mathbf{Y}_{bu}^k + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{S}}_{un}(\theta) \cdot \left[\overline{\mathcal{G}}_{bn} \cdot \mathbf{X}_{bn} + \mathbf{Y}_{bn}^k - \mathbf{Y}_{bn}^k \right] \quad (6.55b)$$

6.4 Resultado numérico

A implementação dessas equações requer um truncamento para uma ordem n , $\mathbf{X}_n + \overline{\mathbf{U}}_n \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n$, onde o operador de matriz $\overline{\mathbf{U}}_n$ é tal que seu kernel (núcleo) contém todos os modos de ordem maiores do que n . Nessas condições, o erro relativo, $e_r(n)$, associado ao truncamento se comporta da seguinte forma:

$$e_r(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}\|_1}{\|\mathbf{X}_n\|_1}, \quad (6.56)$$

quando $n \rightarrow \infty$, o operador $\overline{\mathbf{U}}_n \rightarrow \overline{\mathbf{U}}$, conseqüentemente $e_r(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A convergência do ponto é, portanto, verificada. Quanto maior a ordem de truncamento, mais próxima a precisão está da precisão da máquina.

6.5 Validação

6.6 Conclusão

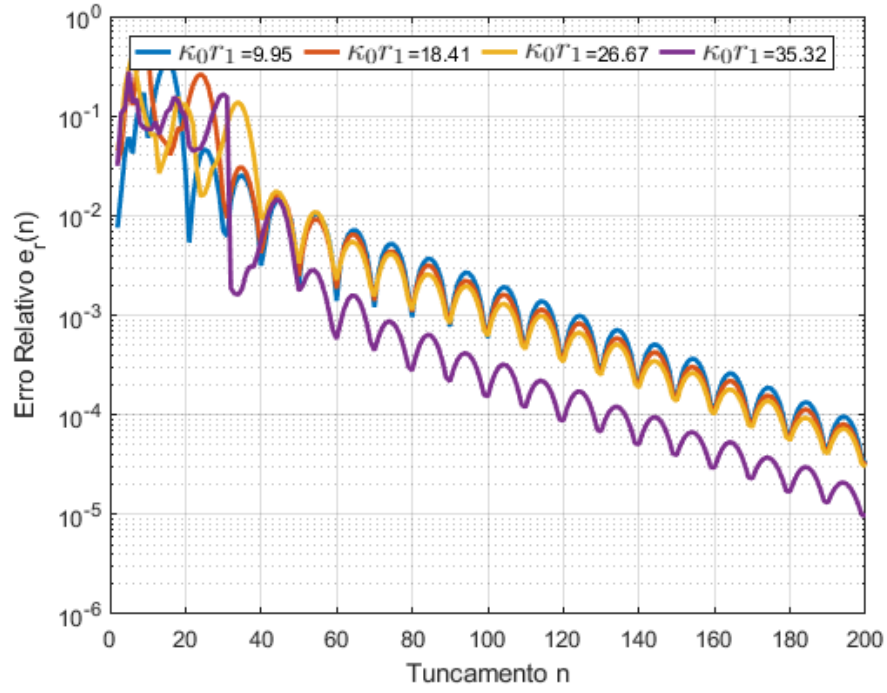


Figura 10 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes frequências normalizadas, $\kappa_0 r_1$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$.

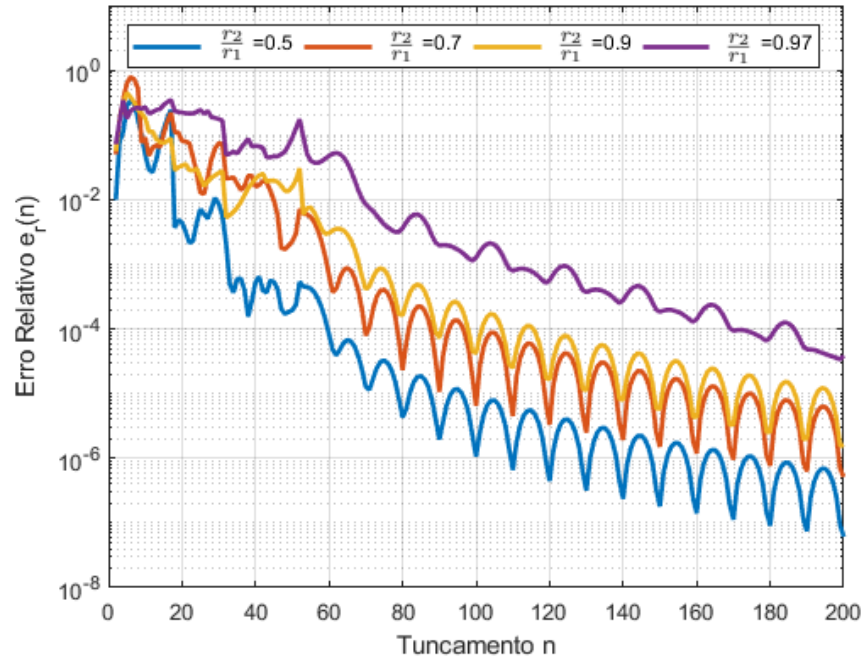


Figura 11 – Velocidade de convergência em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 18.0^\circ$, $\theta_2 = 180.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 50$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.00$, $\epsilon_2 = 1.30$.

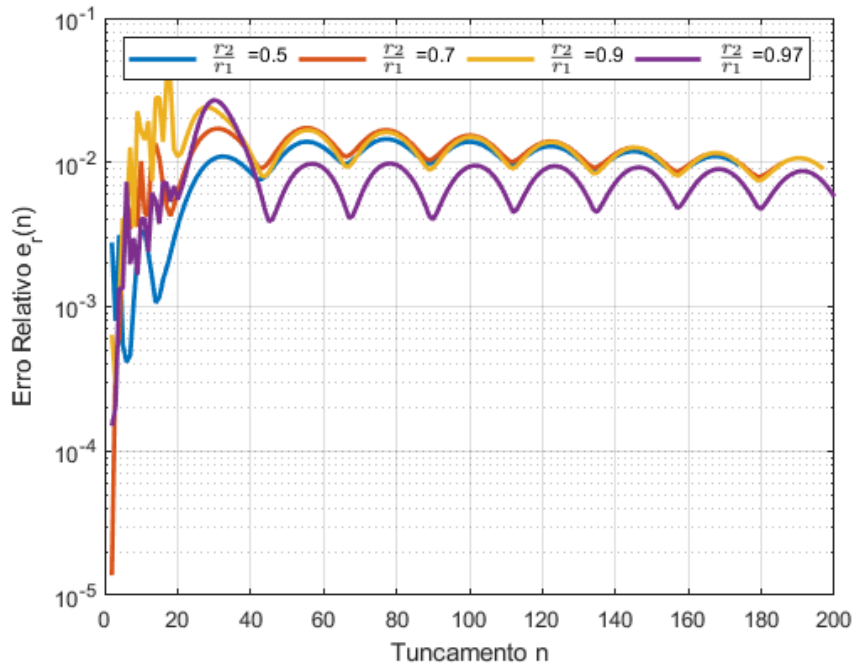


Figura 12 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg composta de 7 camadas em função da ordem de truncamento para diferentes razões, $\frac{r_2}{r_1}$. Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$.

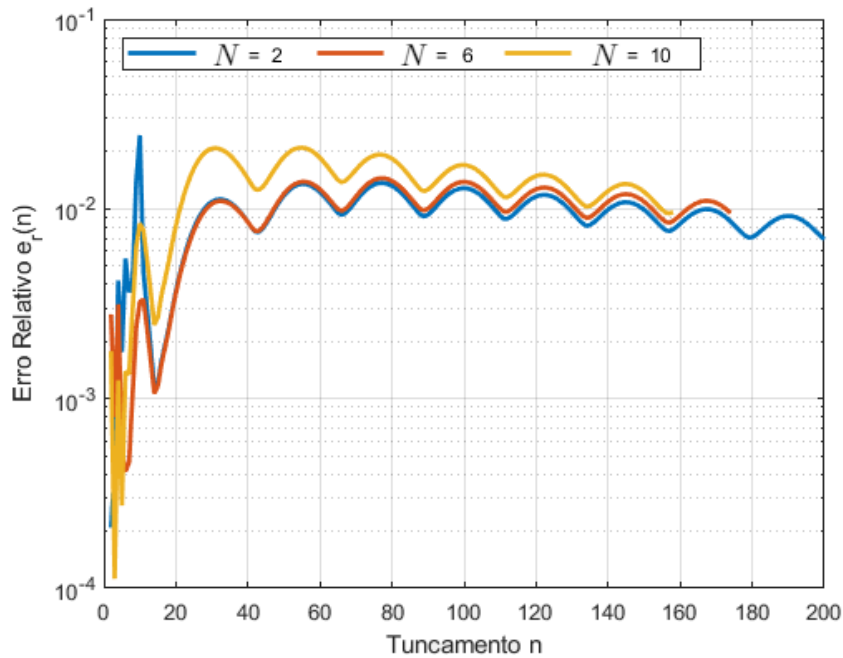


Figura 13 – Velocidade de convergência de uma antena impressa em uma lente discreta de Lüneburg em função da ordem de truncamento para diferentes discretização da lente, N . Os parâmetros usados são: $\theta_1 = 16.0^\circ$, $\theta_2 = 8.0^\circ$, $\kappa_0 r_1 = 20.94$ e $\frac{r_2}{r_1} = 0.97$.

7 Resultados e Discussões

A antena alimentada por cabo coaxial, teve sua convergência validada por meio do erro relativo, seus resultados estão de acordo com a literatura em que foi baseado e também está de acordo com o software comercial, ANSYS.

A antena alimentada por fenda, teve uma falha na convergência, isso significa que o operador compacto não foi controlado como deveria.

8 Conclusão

Referências

ABRAMOWITZ, M. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications, 1965. ISBN 9780486612720. Citado 6 vezes nas páginas 29, 39, 41, 54, 56 e 83.

ALI, S. M.; HABASHY, T. M.; KONG, J. A. Spectral-domain dyadic green's function in layered chiral media. *J. Opt. Soc. Am. A*, OSA, v. 9, n. 3, p. 413–423, Mar 1992. Disponível em: <<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-9-3-413>>. Citado na página 35.

BALANIS, C. *Antenna theory : analysis and design*. Hoboken, New Jersey: John Wiley, 2016. ISBN 9781118642061. Citado 8 vezes nas páginas 8, 40, 41, 54, 56, 57, 76 e 77.

COURANT, R. *Methods of mathematical physics*. New York: Wiley, 1989. ISBN 978-0-471-50447-4. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

GREEN, G. *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. 2008. Citado na página 24.

GREENWOOD, A.; JIN, J.-M. Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 47, n. 8, p. 1260–1266, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/8.791941>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 19 e 20.

HANSEN, J. E. *Spherical near-field antenna measurements*. London, U.K: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988. ISBN 978-0-86341-110-6. Citado 3 vezes nas páginas 38, 52 e 56.

KOROTKOV, A. N.; SHABUNIN, S. N.; CHECHETKIN, V. A. The cylindrical luneburg lens discretization influence on its radiation parameters. In: *2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*. IEEE, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/sibircon.2017.8109914>>. Citado na página 16.

Le-Wei Li et al. Electromagnetic dyadic green's function in spherically multilayered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 42, n. 12, p. 2302–2310, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.

LUNEBURG, R. K.; WOLF, E.; HERZBERGER, M. *Mathematical Theory of Optics*. University of California Press, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1525/9780520328266>>. Citado na página 19.

Nosich, A. I. The method of analytical regularization in wave-scattering and eigenvalue problems: foundations and review of solutions. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 41, n. 3, p. 34–49, June 1999. ISSN 1558-4143. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 61.

OLVER, F. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge New York: Cambridge University Press NIST, 2010. ISBN 9780521192255. Citado 4 vezes nas páginas 34, 46, 64 e 84.

Rondineau, S. et al. Mar analysis of a spherical-circular printed antenna with finite ground excited by an axially symmetric probe. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 52, n. 5, p. 1270–1280, May 2004. ISSN 1558-2221. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 61.

TAI. *Dyadic green functions in electromagnetic theory*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1994. ISBN 0-7803-0449-7. Citado 3 vezes nas páginas 18, 21 e 32.

Apêndices

APÊNDICE A – PARÂMETROS DE ANTENAS

A.1 Antena

Antena um dispositivo geralmente metálico que transforma um sinal de tensão em ondas eletromagnéticas (antena transmissora) ou ondas eletromagnéticas em um sinal de tensão (antena receptora), elas são elementos muito importantes em sistemas de comunicação. Há diversos tipos tipo de antenas que varia desde da sua geometria, até o seu tipo de alimentação, o dimensionamento de uma antena depende das especificações de projeto ([BALANIS, 2016](#)).

A.1.1 Diagrama de Radiação

Um diagrama de radiação de uma antena é definido como sendo uma função matemática ou uma representação gráfica das propriedades de radiação da antena como uma função de coordenadas espaciais. Na maioria dos casos, o diagrama de radiação é determinado na região de campo distante e é representado como uma função das coordenadas direcionais. As propriedades de radiação incluem densidade de fluxo de energia, intensidade de radiação, intensidade de campo, diretividade, fase ou polarização. A Figura 14 mostra a representação do diagrama de radiação.

Normalmente o diagrama de potência são normalizados em relação ao seu valor máximo e são geralmente plotado em uma escala logarítmica ou decibéis (dB), Figura 15, porque acentua com mais detalhes aquelas partes do diagrama que têm valores muito baixos. O diagrama pode ser representado por 2 planos ortogonais, o E-plano que contém o vetor do campo elétrico e o H-plano que contém o vetor do campo magnético.

A.1.2 Diagrama de Diretividade

Diretividade pode ser definida como a capacidade de uma antena de transmitir ou receber sinais focando apenas em uma faixa estreita direcional. Antenas direcionais podem diminuir o efeito da interferência de outros sinais devido à faixa estreita de sinal. Além disso, elas têm uma maior eficiência em transmitir potência. A diretividade é definida matematicamente como a razão entre a intensidade de radiação e a intensidade de radiação média em todas as direções.

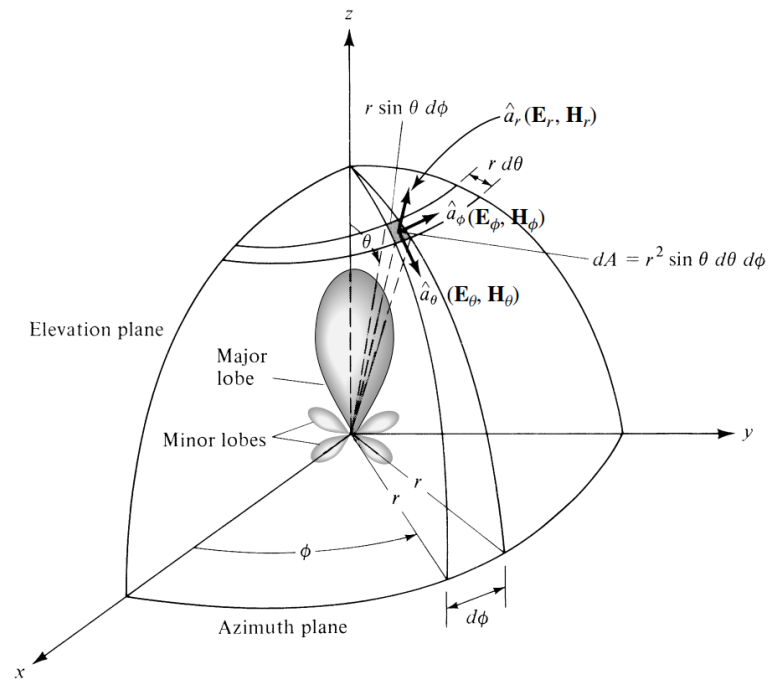


Figura 14 – Diagrama de radiação para análise das propriedades de radiação de antena (BALANIS, 2016).

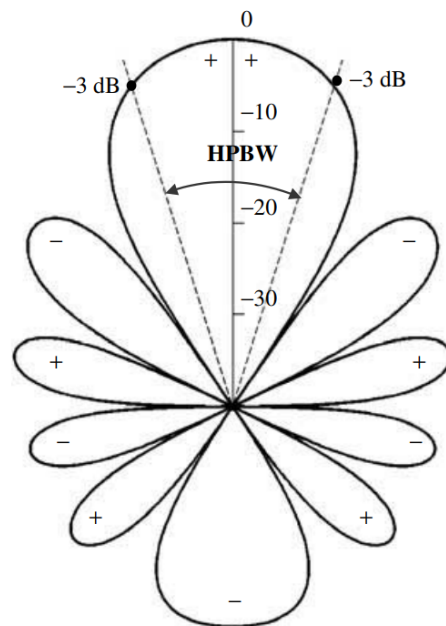


Figura 15 – Diagrama de potência normalizado (dB) (BALANIS, 2016).

APÊNDICE B – DEFINIÇÃO DOS VETORES E MATRIZES

$$\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T, \quad \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{\Pi} = \pi \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{\Theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N]^T.$$

B.1 Vetores referente ao método de regularização do analítica

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1\beta} &= [a_{mn}^{1\beta 1} \quad a_{mn}^{1\beta 2} \quad \dots \quad a_{mn}^{1\beta N}]^T, & \check{\mathbf{A}}_n^{1s} &= k_n^{1s\odot} [\delta_s^1 \quad \delta_s^2 \quad \dots \quad \delta_s^N]^T, \\ \mathbf{A}_{mn}^{3\beta} &= [a_{mn}^{3\beta 0} \quad a_{mn}^{3\beta 1} \quad \dots \quad a_{mn}^{3\beta(N-1)}]^T, & \check{\mathbf{A}}_n^{3s} &= k_n^{3s\odot} [\delta_s^0 \quad \delta_s^1 \quad \dots \quad \delta_s^{(N-1)}]^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{1\beta} &= [b_{mn}^{1\beta 1} \quad b_{mn}^{1\beta 2} \quad \dots \quad b_{mn}^{1\beta N}]^T, & \check{\mathbf{B}}_n^{1s} &= z_n^{1s\odot} [\delta_s^1 \quad \delta_s^2 \quad \dots \quad \delta_s^N]^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{3\beta} &= [b_{mn}^{3\beta 0} \quad b_{mn}^{3\beta 1} \quad \dots \quad b_{mn}^{3\beta(N-1)}]^T, & \check{\mathbf{B}}_n^{3s} &= z_n^{3s\odot} [\delta_s^0 \quad \delta_s^1 \quad \dots \quad \delta_s^{(N-1)}]^T, \end{aligned}$$

B.2 Matrizes referente as equações de séries duplas

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{P}}_n^1(\cos\theta))_{i,j} &= P_n^1(\cos\theta_i) \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\cos\theta})_{i,j} &= \cos\theta_i \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\tan(\frac{\theta}{2})})_{i,j} &= \tan(\frac{\theta_i}{2}) \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\sin\theta})_{i,j} &= \sin\theta_i \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\cot(\frac{\theta}{2})})_{i,j} &= \cot(\frac{\theta_i}{2}) \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1D})_{i,j} &= z_n^{1ii} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1E})_{i,j} &= z_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1F})_{i,j} &= z_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3D})_{i,j} &= z_n^{3(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3E})_{i,j} &= z_n^{3ii} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3F})_{i,j} &= z_n^{3ii} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1D})_{i,j} &= \frac{k_n^{1ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1E})_{i,j} &= \frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{1F})_{i,j} &= \frac{k_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3D})_{i,j} &= \frac{k_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3E})_{i,j} &= \frac{k_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{an}^{3F})_{i,j} &= \frac{k_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} = \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1D} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{1E}, \quad \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} = \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3D} - \overline{\mathbf{Z}}_{an}^{3E}, \quad \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1T} = \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1D} - \overline{\mathbf{K}}_{an}^{1E}, \quad \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3T} = \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3D} - \overline{\mathbf{K}}_{an}^{3E}.$$

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1D})_{i,j} &= k_n^{1ii} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1E})_{i,j} &= k_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{1F})_{i,j} &= k_n^{1(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3D})_{i,j} &= k_n^{3(i-1)i} \cdot \delta_{i,j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3E})_{i,j} &= k_n^{3ii} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\overline{\mathbf{K}}_{bn}^{3F})_{i,j} &= k_n^{3ii} \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1D})_{i,j} &= \frac{z_n^{1ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E})_{i,j} &= \frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{(i-1),j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F})_{i,j} &= \frac{z_n^{1(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, \\ (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D})_{i,j} &= \frac{z_n^{3(i-1)i}}{\eta_{(i-1)}} \cdot \delta_{i,j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3E})_{i,j} &= \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{(i+1),j}, & (\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F})_{i,j} &= \frac{z_n^{3ii}}{\eta_i} \cdot \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1D} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} = \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3E}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1D} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} = \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3E}.$$

B.3 Fonte Elétrica

B.3.1 Vetores referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} \end{aligned}$$

B.3.2 Matrizes referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \\ \check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \end{aligned}$$

B.4 Fonte Magnética

B.4.1 Vetores referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3D} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3D} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{an}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3T} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3T} \\ \bar{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3T} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3T} \end{aligned}$$

B.4.2 Matrizes referente as estrutura geométrica

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{C}}_{an}^k &= \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \\
\check{\mathbf{C}}_{bn}^z &= \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1E} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s} \\
\check{\mathbf{C}}_{an}^z &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{3F} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1F} - \bar{\mathbf{Z}}_{an}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{an}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{A}}_n^{3s} \\
\check{\mathbf{C}}_{bn}^k &= \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{3F} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{3F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{1s} - \left[\bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1F} - \bar{\mathbf{K}}_{bn}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1T^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{bn}^{1F} \right] \cdot \check{\mathbf{B}}_n^{3s}
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – MATRIZES DE REGULARIZAÇÃO

C.1 Fonte Elétrica

C.1.1 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$

$$\forall(i, j) \in \langle 1, N \rangle^2, \forall n \in \langle 1, \infty \rangle$$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}} \right]}$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}} \right]} - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}}$$

se $1 < (i = j) < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}} \right]} - \frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}} \frac{k_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}} \right]}$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = -\frac{1}{\eta_i} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}} \right]}$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = \frac{1}{\eta_{(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}} \frac{\left[1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} \right]}{\left[1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}} \right]}$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} = 0$$

C.2 Fonte Magnética

C.2.1 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}}$

$$\forall(i,j) \in \langle 1, N \rangle^2, \forall n \in \langle 1, \infty \rangle$$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} - \eta_i \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i+1)}}{z_n^{1ii}} \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}}}{1 - \frac{k_n^{1(i+1)}}{k_n^{1ii}} \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}} \right] - \eta_i \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}}$$

se $1 < (i = j) < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{k_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}} \right] - \eta_i \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i+1)}}{z_n^{1ii}} \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}}}{1 - \frac{k_n^{1(i+1)}}{k_n^{1ii}} \frac{k_n^{3ii}}{k_n^{3i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = -\eta_i \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{3ii}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}}}{1 - \frac{k_n^{3i(i+1)}}{k_n^{3ii}} \frac{k_n^{1ii}}{k_n^{1i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_1 \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{k_n^{1(i-1)i}} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)(i-1)}}} \right]$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

C.2.2 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}}$

$$\forall(i,j) \in \langle 1, N \rangle^2, \forall n \in \langle 1, \infty \rangle$$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} - \eta_i \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1(i+1)}}{k_n^{1ii}} \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}}}{1 - \frac{z_n^{1(i+1)}}{z_n^{1ii}} \frac{z_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}} \right] - \eta_i \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}}$$

se $1 < (i = j) < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_{(i-1)} \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)i}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)(i-1)}}{z_n^{3(i-1)i}}} \right] - \eta_i \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1ii}} \left[\frac{1 - \frac{z_n^{1i(i+1)}}{k_n^{1ii}} \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}}}{1 - \frac{z_n^{1i(i+1)}}{z_n^{1ii}} \frac{z_n^{3ii}}{z_n^{3i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = -\eta_i \frac{k_n^{1ii}}{z_n^{1i(i+1)}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{3ii}}{z_n^{3ii}} \frac{z_n^{1ii}}{k_n^{1ii}}}{1 - \frac{z_n^{3i(i+1)}}{z_n^{3ii}} \frac{z_n^{1ii}}{z_n^{1i(i+1)}}} \right]$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = \eta_1 \frac{k_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)(i-1)}} \left[\frac{1 - \frac{k_n^{1(i-1)i}}{z_n} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{k_n^{3(i-1)i}}}{1 - \frac{z_n^{1(i-1)i}}{z_n^{1(i-1)(i-1)}} \frac{z_n^{3(i-1)i}}{z_n^{3(i-1)(i-1)}}} \right]$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z^{-1}} \right)_{i,j} = 0$$

C.3 Relações de recorrência

Para poder aplicar a técnica de regularização, é necessário estudar o comportamento assintótico dessa matriz.

Na função de onda vetorial elétrica aparece uma derivada da função esférica de Bessel e Hankel

$$k_n^\alpha(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \frac{d[\zeta z_n^\alpha(\zeta)]}{d\zeta} = \frac{dz_n^\alpha(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta), \quad (\text{C.1})$$

e a solução (ABRAMOWITZ, 1965, Eq. 10.1.21-22) é

$$\frac{dz_n^\alpha(\zeta)}{d\zeta} = z_{n-1}^\alpha(\zeta) - \frac{n+1}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta) = -z_{n+1}^\alpha(\zeta) + \frac{n}{\zeta} z_n^\alpha(\zeta). \quad (\text{C.2})$$

Portanto, a derivada da função esférica de Bessel de primeiro tipo e a derivada da função esférica de Hankel de primeiro tipo pode ser escritas como:

$$k_n^1(\zeta) = z_{n-1}^1(\zeta) - \frac{n}{\zeta} z_n^1(\zeta), \quad (\text{C.3})$$

$$k_n^3(\zeta) = \frac{n+1}{\zeta} z_n^3(\zeta) - z_{n+1}^3(\zeta). \quad (\text{C.4})$$

C.4 Expansões assintóticas para grandes ordens

Para grandes ordens, $n \rightarrow \infty$, e com $\zeta \neq 0$ (OLVER, 2010, Eqs. 10.19(i) e 10.47(ii)) temos que:

$$z_n^1(\zeta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\zeta(n + \frac{1}{2})}} \left(\frac{e\zeta}{2n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad (C.5)$$

$$z_n^3(\zeta) \sim \frac{-i}{\sqrt{\zeta(n + \frac{1}{2})}} \left(\frac{e\zeta}{2n+1} \right)^{-n-\frac{1}{2}}, \quad (C.6)$$

e a função exponencial natural (OLVER, 2010, Eq. 4.4.17) tem expansões assintóticas para grandes ordens como:

$$e^x \sim \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n. \quad (C.7)$$

Relações entre as funções são:

$$\frac{z_n^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.8) \quad \frac{z_n^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.12)$$

$$\frac{z_{n-1}^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \frac{2n+1}{\zeta_1} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.9) \quad \frac{z_{n+1}^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim \frac{2n+3}{\zeta_2} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.13)$$

$$\frac{k_n^1(\zeta_1)}{z_n^1(\zeta_2)} \sim \frac{n+1}{\zeta_1} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^n, \quad (C.10) \quad \frac{k_n^3(\zeta_2)}{z_n^3(\zeta_1)} \sim -\frac{n+2}{\zeta_2} \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+1}, \quad (C.14)$$

$$\frac{k_n^1(\zeta_1)}{k_n^1(\zeta_2)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n-1}, \quad (C.11) \quad \frac{k_n^3(\zeta_2)}{k_n^3(\zeta_1)} \sim \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right]^{n+2}. \quad (C.15)$$

C.5 Comportamento assintótico das matrizes

C.5.1 Fonte Elétrica

C.5.1.1 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$

$\forall(i,j) \in \langle 1, N \rangle^2$, para $n \rightarrow \infty$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i} \right]^{2n+1} \right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i} \right]^{2n+1} \right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}} \right]^{2n+1} \right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}} \right]^{2n+1} \right]} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $1 < i = j < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i+1)}}{n} \frac{\kappa_i}{\eta_i} \frac{\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{n+1}}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i-1)}}{n} \frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} \frac{\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}\right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}\right)_{i,j} = 0$$

C.5.2 Fonte Magnética

C.5.2.1 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}$

$\forall (i, j) \in \langle 1, N \rangle^2$, para $n \rightarrow \infty$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} + \eta_i \kappa_i \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} + \eta_i \kappa_i \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $1 < i = j < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} + \eta_i \kappa_i \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i+1)}}{n} \eta_i \kappa_i \frac{\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{n+1}}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2R_{(i-1)}}{n} \eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} \frac{\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}\right)_{i,j} = 0$$

C.5.2.2 Matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}$

$\forall(i,j) \in \langle 1, N \rangle^2$, para $n \rightarrow \infty$

se $i = j = 1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j = N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $1 < i = j < N$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \frac{\left[1 + \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} \right] (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2n}{R_i} \frac{\eta_i}{\kappa_i} \frac{\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{n+1}}{\left[1 - \left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i = j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{z-1}\right)_{i,j} \sim \frac{2n}{R_i} \frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} \frac{\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n}{\left[1 - \left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^{2n+1}\right]} (n \rightarrow \infty)$$

se $i < j-1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} = 0$$

se $i > j+1$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}\right)_{i,j} = 0$$

C.6 Comportamento assintótico em relação aos raios

O raios das conchas concêntrica que constitui a lente discreta pode ser descrita como $R_{(i-1)} > R_i > R_{(i+1)}$, então partindo dessa relação, temos que para grandes ordens, $n \rightarrow \infty$:

$$\left[\frac{R_i}{R_{(i-1)}}\right]^n \sim 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\left[\frac{R_{(i+1)}}{R_i}\right]^n \sim 0 \quad (\text{C.17})$$

C.6.1 Fonte Elétrica

Então o comportamento assintótico da matriz $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1}$ pode ser resumida como:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\frac{\kappa_{(i-1)}}{\eta_{(i-1)}} + \frac{\kappa_i}{\eta_i} \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (\text{C.18})$$

C.6.2 Fonte Magnética

Então o comportamento assintótico das matrizes $\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1}$ e $\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1}$ podem ser resumidas como:

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{an}^z \cdot \overline{\mathbf{C}}_{an}^{k-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{R_i}{n} \left[\eta_{(i-1)} \kappa_{(i-1)} + \eta_i \kappa_i \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (\text{C.19})$$

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_{bn}^k \cdot \overline{\mathbf{C}}_{bn}^{z-1} \right)_{i,j} \sim -\frac{n}{R_i} \left[\frac{\eta_{(i-1)}}{\kappa_{(i-1)}} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (\text{C.20})$$