BAB VI
PEUBAH ACAK DAN DISTRIBUSI PELUANG
(DISKRIT DAN KONTINU)

Capaian Pembelajaran

- Mahasiswa dapat mencari dan menganalisis distribusi Binomial dan Poisson baik secara manual maupun komputer.
- Mahasiswa mampu memahami beberapa sifat distribusi peluang kontinu, yaitu distribusi normal melalui pengamatan terhadap distribusi normal.

6.1 Peubah Acak

Peubah acak adalah sebuah fungsi dari ruang sampel ke himpunan riil. Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital sedangkan nilai dari suatu peubah acak dilambangkan dengan huruf kecil yang bersesuaian dengan huruf untuk notasi peubah acak. Jika X adalah sebuah peubah acak maka nilai dari peubah acaknya adalah x.

Ruang sampel diperoleh dari sebuah kejadian. Kejadian merupakan bagian dari suatu peristiwa. Sedangkan peristiwa muncul saat ada suatu tindakan. Misalkan tindakan yang dilakukan adalah satu koin mata uang yang seimbang dilantunkan. Kejadian yang mungkin adalah muncul sisi angka di bagian atas dan muncul sisi gambar di bagian atas. Ruang sampel untuk kejadian ini terdiri dari dua, yaitu sisi angka (A) dan sisi gambar (G).

Misalkan peubah acak dari tindakan di atas adalah banyaknya sisi A yang muncul saat sebuah koin seimbang yang dilantunkan. Tindakan ini menghasilkan ruang sampel S = {A, G} sehingga X(A) = 1 dan X(G) = 0.

6.2 Distribusi Peluang Seragam

Misalkan X merupakan peubah acak yang berdistribusi seragam diskrit maka fungsi peluang peubah acak X adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{n}, x = 1, 2, \ldots, n$$

dengan X adalah bilangan yang muncul atau terambil secara acak dari n bilangan.

Contoh:

Misalkan tiga koin dilempar secara bersamaan, tentukan berapa peluang muncul ketiganya sisi gambar (G)?
Penyelesaian:
$n(S) = \{AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG\} = 2^3 = 8$.

A : Kejadian muncul ketiganya sisi gambar (GGG), sehingga $n(A) = 1$

$P(A) = n(A)/n(S) = 1/8$.

6.3 Distribusi Bernoulli

Misalkan pelemparan sekeping mata uang tidak setimbang dimana $P(A) = p$, $0 \leq p \leq 1$, dengan $X = 1$ jika muncul sisi angka (A) dan $X = 0$ jika muncul sisi gambar (G). Fungsi peluang untuk peubah acak X adalah sebagai berikut:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x};\ x = 0, 1$$

Contoh:

Misalkan serangkaian percobaan Bernoulli dimana tiga item dipilih secara acak dari proses produksi, telah dimonitor dan diklasifikasikan sebagai cacat (C) atau tidak cacat (T). Item yang cacat dianggap sukses Banyaknya sukses adalah peubah acak X dengan asumsi nilai integral dari 0 sampai 3. Delapan hasil yang mungkin dan nilai X yang bersesuaian adalah

Keluaran	TTT	TCT	TTC	CTT	TCC	CTC	CCT	CCC
x	0	1	1	1	2	2	2	3

Jika item dipilih secara bebas dan kita asumsikan bahwa proses produksi 25% cacat, maka diperoleh

$$P(TCT) = P(T)P(C)P(T) = (3/4)(1/4)(3/4) = 9/64$$

6.4 Distribusi Binomial

Distribusi peluang Binomial adalah peluang kejadian saling bebas dimana terdapat peluang sukses dan peluang gagal. Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya sukses pada n kali percobaan Bernoulli yang diberikan dengan $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} & untuk \quad x = 0,1,2,.... \\ \\ 0 & untuk \quad x \ lainnya \end{cases}$$

Parameter dari distribusi binomial adalah n dan p, dimana n adalah suatu bilangan positif dan $0 \le p \le 1$.

Untuk variable X yang mengikuti distribusi binomial berlaku rumus umum:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu = E(X) = np \\ &\sigma^2 = E\{X - E(X)\}^2 = E(X - np)^2 = npq \\ &\sigma = \sqrt{npq} \end{aligned}}$$

6.5 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi peluang peubah acak X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu tertentu. Distribusi Poisson dapat dikembangkan dengan 2 cara, dan keduanya menunjukkan keadaan–keadaan dimana dapat diharapkan untuk menggambarkan hasil dari suatu percobaan random. Pengembangan pertama meliputi definisi dari sebuah proses Poisson.

$$p_r(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

dimana,

λ = rata – rata distribusi

x = 0, 1, 2, 3, … (menuju tak hingga)

e = konstanta 2,71828

Pengembangan kedua meliputi distribusi Poisson menjadi sebuah bentuk terbatas dari distribusi Binomial.

Rumus untuk menyelesaikan distribusi Poisson adalah sebagai berikut:

6.6 Distribusi Peluang Normal

6.3.1 Dasar Teori

Distribusi normal dipengaruhi oleh nilai μ dan σ. Bila x adalah peubah acak normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2, maka fungsi kepadatan peluang:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

A. Sifat-sifat Distribusi Normal

1. Mempunyai dua parameter yaitu rata-rata μ dan standar deviasi σ
2. Titik tertinggi kurva berada pada rata-rata
3. Lebar kurva ditentukan oleh σ , makin kecil σ bentuk kurva makin runcing
4. Bentuk kurva simetris (mean, median dan modus sama)
5. Total luas daerah dibawah kurva adalah satu.

6.7 Distribusi Normal Baku (Standar)

Distribusi Normal Baku adalah distribusi yang memiliki $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, dimana

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

z = banyaknya penyimpangan baku

x = nilai peubah acak

μ = rata-rata distribusi normal

σ = standar deviasi distribusi normal

6.8 Latihan Penggunaan R untuk Distribusi Peluang Diskret

A. Distribusi Binomial

Dengan menggunakan perintah runif() untuk mensimulasikan peubah acak Binomial dengan i = 25 dan p = 0.4. Ini artinya jumlahkan sebanyak 25 peubah acak Binomial independen yang masing-masing memiliki peluang sukses sebesar 0.4

```
random.binomial <- function(n, size, p) {
## Simulates 'n' binomial random variables, each of which is
the sum
## of 'size' Bernoulli trials, each of which has probability of
success
## 'p'.
     return(replicate(n, sum(runif(size) < p)))
}
set.seed(100)
x <- random.binomial(100, 25, .4)
x
```

```
mean(x)
var(x)S
> set.seed(100)
> x <- random.binomial(100, 25, .4)
> x
[1]  10   8    11   9    12   11   7    11   9    13   10   12
     1    7    14   13   8    12   13   12   11   5    7    9
     14
[26]      11   7    11   10   7    12   14   10   7    8    8
     10   8    6    9    12 10      10   9    6    12   9    16
     12   10
[51]      7    14   10    9   7    10   7    6    12   9    12
     15   9    9    15   10   8    8    14   9    10   8    12
     14   13
[76]      15   10   10    8   10   10 13     10   10   9    8
     8    7    11   8    17   15 11      9    9    10    9   6
     12   10
> mean(x)
[1] 10.05
> var(x)
[1] 7.119
```

Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya sukses pada n kali percobaan Bernoulli yang diberikan dengan p(X=x), maka peluang p(X=x) dapat dihitung dengan menggunakan fungsi dbinom().

```
## Syntax: dbinom(x, size, prob)
## Here, 'size' and 'prob' are the binomial parameters 'n' and
'p',
## while 'x' denotes the number of "successes."
## The output from this function is the value of P(X = x).
dbinom(x = 4, size = 6, prob = 0.5)
sum(dbinom(0:6, 6, .5))
> dbinom(x = 4, size = 6, prob = 0.5)
[1] 0.2344
> sum(dbinom(0:6, 6, .5))
[1] 1
```

Peluang kumulatif dari P(X <= x) dapat dihitung dengan menggunakan fungsi pbinom(), dimana sintaksnya sama seperti fungsi dbinom().

```
pbinom(4, 6, 0.5)
sum(dbinom(0:4, 6, 0.5))

> pbinom(4, 6, 0.5)
[1] 0.8906
> sum(dbinom(0:4, 6, 0.5))
[1] 0.8906
>

1 - pbinom(4, 6, .5) # P(X >= 5)
```

```
> 1 - pbinom(4, 6, .5) # P(X >= 5)
[1] 0.1094
>
```

```
qbinom(0.9, 6, 0.5)
pbinom(5, 6, 0.5)
pbinom(4, 6, 0.5)
```

```
> qbinom(0.9, 6, 0.5)
[1] 5
> pbinom(5, 6, 0.5)
[1] 0.9844
> pbinom(4, 6, 0.5)
[1] 0.8906
```

Nilai harapan dari peuabah acak Binomial $\mu = n * p$ dan variannya $\sigma = n * p * (1-p)$.

```
set.seed(123)
mean(rbinom(10, 6, 0.5))
mean(rbinom(100, 6, 0.5))
mean(rbinom(1000, 6, 0.5))
mean(rbinom(10000, 6, 0.5))

var(rbinom(10000, 6, 0.5))
```

```
> set.seed(123)
> mean(rbinom(10, 6, 0.5))
[1] 3.3
> mean(rbinom(100, 6, 0.5))
[1] 3.04
> mean(rbinom(1000, 6, 0.5))
[1] 2.981
> mean(rbinom(10000, 6, 0.5))
[1] 2.993
>
> var(rbinom(10000, 6, 0.5))
[1] 1.461
```

Contoh :
Dari 38 calon pegawai yang mendaftarkan diri pada suatu perusahaan, peluang seorang diterima adalah 0.25, maka hitung :

a. Peluang tepat 3 orang yang diterima

b. Peluang sebanyak–banyaknya 3 orang yang diterima

Penyelesaian:

a. Untuk mencari peluang tepat 3 orang yang diterima

```
dbinom(x = 3, size = 38, prob = 0.25)
> dbinom(x = 3, size = 38, prob = 0.25)
[1] 0.005586
```

Keterangan:
Peluang tepat 3 orang diterima sebagai pegawai disuatu perusahaan adalah 0,0056.

b. Untuk mencari peluang sebanyak–banyaknya 5 orang yang diterima

```
pbinom(5, 38, 0.25)
> pbinom(5, 38, 0.25)
[1]
```

Keterangan:
Peluang sebanyak–banyaknya 5 orang yang diterima sebagai pegawai di suatu perusahaan adalah 0,0604.
Bentuk grafik dari sebaran Binomial dapat dilihat dengan menjalankan fungsi berikut ini:

```
size <- 50
pi <- seq(0, size, by = 1)
prob <- 0.5

binom.fun <- function(x) dbinom(x, size, prob)
plot(pi, binom.fun(pi), main = "Sebaran Binomial",
sub = paste("n = ", size, ", p = ", prob, sep = ""), xlab =
expression(pi),
ylab = "Frequency", type = "h", lwd = 4)

# Add a line at the mean
pi_mean <- size * prob
lines(c(pi_mean, pi_mean), c(0, 0.5), lty = 3, col = 2)

# Add lines at the 0.025 and 0.975 quantiles
low <- qbinom(c(0.025), size, prob)
hi <- qbinom(c(0.975), size, prob)

lines(c(low, low), c(0, 0.5), lty = 4, col = 4)
lines(c(hi, hi), c(0, 0.5), lty = 4, col = 4)
```