Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume11, No. 1(2022), hal 139-148

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE

Hastina Kurnia Sari

INTISARI

Persamaan diferensial parsial (PDP) dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Salah satu penyelesaian PDP secara analitik adalah dengan menggunakan transformasi Laplace. Metode ini banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah syarat awal dan syarat batas. Dalam artikel ini dicari penyelesaian PDP dengan menggunakan transformasi Laplace. Penyelesaian PDP menggunakan transformasi Laplace dilakukan dengan cara mentransformasikan persamaan tersebut dan mensubstitusikan nilai awal yang diberikan sehingga diperoleh dalam bentuk persamaan diferensial biasa (PDB). Selanjutnya dengan menyelesaikan solusi umum dari PDB tersebut substitusikan syarat batas yang telah ditransformasikan. Kemudian ditransformasikan kembali sehingga diperoleh penyelesaian persamaan diferensial parsial.

Kata kunci : *Nilai Awal, Syarat Batas, Persamaan Diferensial Biasa*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hal itu karena banyak permasalahan kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial, diantaranya dalam bidang kesehatan yaitu pemodelan penyakit, dan bidang teknik yaitu pemodelan gelombang air laut. Persamaan diferensial secara umum dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya memuat turunan yang terdiri dari satu variabel sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat dua atau lebih variabel bebas.

Dalam proses pemodelan matematika banyak ditemukan kasus dalam bentuk persamaan diferensial parsial, diantaranya persamaan panas, persamaan gelombang, dan persamaan telegraf. Masalah persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa metode seperti metode separasi variabel, metode d'Alembert, dan Metode Transformasi Laplace. Metode Transformasi Laplace merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Transformasi Laplace banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah syarat awal dan syarat batas. Syarat awal merupakan kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu, sedangkan syarat batas adalah syarat-syarat tertentu atau kondisi-kondisi tertentu yang terlibat dalam persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial parsial [1].

Dalam artikel ini persamaan diferensial parsial diselesaikan menggunakan transformasi Laplace. Dalam pembahasan ini dibatasi pada penyelesaian persamaan diferensial parsial non-homogen orde 1 dan orde 2 menggunakan transformasi Laplace. Persamaan diferensial parsial diberikan dengan koefisien konstan. Penyelesaian persamaan diferensial parsial (PDP) tersebut dilakukan dengan penerapan transformasi laplace pada PDP yang diberikan. Setelah itu substitusikan nilai awal yang diberikan sehingga terbentuk persamaan diferensial biasa. Dari persamaan diferensial biasa dicari penyelesaian umum persamaan diferensialnya. Setelah terbentuk maka syarat batas disubstitusikan. Selanjutnya dilakukan penerapan *invers* transformasi Laplace. Penelitian berakhir jika solusi persamaan diferensial parsial terbentuk.

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua jenis berdasarkan jumlah variabel yang dilibatkan yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial [2]. Persamaan diferensial biasa hanya memuat satu variabel. Sedangkan pada persamaan diferensial parsial memuat dua atau lebih variabel bebas. Adapun contoh persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut.

1. Contoh persamaan diferensial biasa
   $\frac{dy}{dx} = 4x$
2. Contoh persamaan diferensial parsial
   $a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$ (Persamaan difusi atau induksi panas)

TRANSFORMASI LAPLACE

Salah satu jenis transformasi integral yang dapat menyelesaikan berbagai persamaan diferensial biasa linear adalah transformasi Laplace

Definisi 1 [3] (Spiegel, 1999) *Misalkan* $f(t)$ *suatu fungsi* t *untuk* $t > 0$. *Transformasi Laplace dari* $f(t)$ *yang dinyatakan oleh* $\mathcal{L}\{f(t)\}$ *didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

dengan parameter s *adalah riil atau kompleks*.

Transformasi Laplace dari $F(t)$ dikatakan ada apabila integral pada Persamaan (1) konvergen untuk beberapa harga s. Apabila tidak demikian, maka transformasi Laplace-nya tidak ada.

Contoh 1 hitunglah transformasi Laplace dari fungsi $f(t) = e^{at}$

Dengan menggunakan definisi diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

Tabel 1 [4] Rumus-rumus Dasar Transformasi Laplace

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s) = \mathcal{L}(f)}$
a	$\frac{a}{s}$
$t^n, \quad n = 0,1,2,\ldots.$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Sifat-sifat Transformasi Laplace

Berdasarkan definisinya, transformasi Laplace dapat diperoleh dengan menggunakan integral langsung. Tetapi, transformasi Laplace dapat dengan lebih mudah diperoleh dengan cara yang lebih sederhana yaitu dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace yang dibandingkan dengan integral langsung.

1. Sifat Linear

   Teorema 1 [3] *Jika* c_1 *dan* c_2 *adalah sebarang konstanta sedangkan* $F_1(t)$ *dan* $F_2(t)$ *adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplace-nya masing-masing* $F_1(t)$ *dan* $F_2(t)$*, maka*

   $$\mathcal{L}\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s)+c_2f_2(s) \tag{2}$$

2. Transformasi Laplace dari Turunan-turunan

   Teorema 2 [3] *Jika* $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$*, maka*

   $$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - f(0)$$

3. Transformasi Laplace dari Integral-integral

   Teorema 3 [3] Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka

   $$\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}$$

Invers Transformasi Laplace

Definisi 2 [3] *Jika transformasi* $F(t)$ *adalah* $f(s)$*,yaitu* $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$*,maka* $F(t)$ *disebut suatu invers transformasi Laplace dari* $f(s)$ *dan ditulis.*

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

dengan $\mathcal{L}^{-1}$ *disebut operator invers transformasi Laplace.*

Tabel 2 [4] Rumus-rumus Dasar Invers Transformasi Laplace

$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}'\{F(s)\}}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\sin bt$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{at}\sin bt$

$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos bt$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh at$

Contoh 2 Selesaikan invers transformasi Laplace jika diberikan $F(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{4}{s+3}$.

Penyelesaian : $f(t) = 3\mathcal{L}'\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - 4\mathcal{L}'\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$

$= 3e^{2t} - 4e^{-3t}$

MASALAH SYARAT AWAL DAN SYARAT BATAS

Untuk mendapatkan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial biasa linear, diperlukan adanya syarat awal dan syarat batas. Kondisi awal dari penyelesaian suatu persamaan diferensial disebut nilai awal dan untuk penyelesaiannya harus ditentukan penyelesaian khusus yang memenuhi syarat awal yang diberikan [5].

Nilai awal adalah kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu (t_0). Persamaan Laplace merupakan persamaan yang tidak memiliki nilai awal, hal ini karena persamaan Laplace tidak bergantung pada waktu. Sebagai contoh masalah nilai awal tersebut adalah persamaan panas dengan nilai awal $u(x,t_0) = u(x,0) = f(x)$. Nilai awal $u(x,t_0) = f(x)$ menyatakan bahwa suhu pada posisi x saat waktu $t_0 = 0$ adalah $f(x)$ [1].

Syarat Batas adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain terkait dengan ruang [1]. Sebagai ilustrasi, diberikan suatu persamaan panas dengan syarat batas $u(x,t) = 0$ dan $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$. Syarat batas menunjukkan bahwa suhu pada posisi x saat waktu t dipertahankan sebesar nol derajat, sedangkan $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$ menunjukkan bahwa perubahan suhu terhadap posisi x saat waktu t dipertahankan nol derajat.

Aplikasi Transformasi Laplace

Diberikan persamaan diferensial dengan koefisien konstan

$$a_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a_2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_3\frac{\partial U}{\partial t} + a_4\frac{\partial U}{\partial x} + a_5 U = Q(x) \tag{3}$$

Berdasarkan sifat linear Transformasi Laplace pada Persamaan (2), Persamaan (3) menjadi

$$\mathcal{L}\left\{a_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{a_2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{a_3\frac{\partial U}{\partial t}\right\} + \mathcal{L}\left\{a_4\frac{\partial U}{\partial x}\right\} + \mathcal{L}\{a_5 U\} = \mathcal{L}\{Q(x)\}$$

Selanjutnya dicari Transformasi Laplace dari setiap suku Persamaan (3) diperoleh

(i) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$

$$= \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}u(x,t)|_0^P - \int_0^P(-s)e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\}$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}u(x,t)|_0^P + s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\}$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-sP}\,u(x,P) - e^{-s0}\,u(x,0) + s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\}$$

$$= \lim_{P\to\infty} e^{-sP}\,u(x,P) - \lim_{P\to\infty} e^{-s0}\,u(x,0) + \lim_{P\to\infty} s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt$$

$$= 0 - u(x,0) + s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt$$

$$= s\int_0^P e^{-st}\, u(x,t)\, dt - u(x,0)$$
$$= s\, u(x,s) - u(x,0) = su - U(x,0)$$

dimana $u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$

Dari uraian di atas, maka Transformasi Laplace dari turunan pertama sebuah fungsi adalah

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\, u(x,s) - u(x,0)$$

(ii) Untuk transformasi $\frac{\partial u}{\partial x}$ digunakan aturan Leibnitz, sehingga diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}\, dt$$
$$= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\, u\, dt$$
$$= \frac{d\, u(x,s)}{dx}$$
$$= \frac{du}{dx}$$

Sehingga $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{du}{dx}$

(iii) Misalkan $V = \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}$ maka sebagaimana (i) diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\}$$
$$= s\mathcal{L}\{v\} - V(x,0)$$
$$= s\{s\,\mathcal{L}\{u\} - U(x,0)\} - U_t(x,0)$$
$$= s^2u - sU(x,0) - U_t(x,0)$$

Sehingga $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2u - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$

(iv) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2u}{dx^2}$

PENERAPAN TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Contoh 1 Carilah solusi dari persamaan berikut menggunakan metode transformasi Laplace

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial t} + U \tag{4}$$

dimana nilai awal $U(x,0) = 6e^{-3x}$ yang terbatas $x > 0, t > 0$

Penyelesaian:

Dengan menerapkan transformasi Laplace pada Persamaan (4) serta mensubstitusikan nilai awal $U(x,0) = 6e^{-3x}$ diperoleh

$$\frac{du}{dx} = 2\,\{su - U(x,0)\} + u$$
$$\frac{du}{dx} = 2\,\{su - 6e^{-3x}\} + u$$

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \tag{5}$$

Untuk memecahkan Persamaan (5) kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi $e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}$. Dengan demikian Persamaan (5) dapat dituliskan

$$e^{-(2s+1)x}\left(\frac{du}{dx}-(2s+1)u\right)=e^{-(2s+1)x}\left(-12e^{-3x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(ue^{-(2s+1)x}\right)=-12e^{(-4-2s)x} \quad (6)$$

Selanjutnya dari Persamaan (6) dicari u maka

$$ue^{-(2s+1)x}=\int -12e^{(-4-2s)x}\,dx$$
$$ue^{-(2s+1)x}=\int -12e^{-(2s+4)x}\,dx$$

Misalkan :

$$a=-(2s+4)x$$
$$dx=\frac{da}{-(2s+4)}$$

Sehingga

$$ue^{-(2s+1)x}=\int -12e^{a}\frac{da}{-(2s+4)}$$
$$ue^{-(2s+1)x}=\frac{-12}{-(2s+4)}\int e^{a}\,da$$
$$ue^{-(2s+1)x}=\frac{6}{s+2}e^{a}+c$$

Substitusikan nilai a sehingga

$$ue^{-(2s+1)x}=\frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x}+c$$
$$u=\frac{6}{s+2}e^{-3x}+ce^{(2s+1)x}$$

Karena $U(x,t)$ haruslah terbatas untuk $x\to\infty$, dan harus diperoleh bahwa $u(x,s)$ juga terbatas $x\to\infty$. Maka harus dipilih $c=0$. Sehingga diperoleh

$$u=\frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

Selanjutnya terapkan invers transformasi Laplace untuk memperoleh penyelesaian persamaan diferensial parsial.

$$\mathcal{L}^{-1}\{u\}=\ 6e^{-2t-3x}$$

Jadi penyelesaian umum dari PDP orde 1 tersebut adalah $U(x,t)=6e^{-2t-3x}$.

Contoh 2 Selesaikan persamaan berikut menggunakan metode transformasi Laplace

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (7)$$

dengan syarat batas $U(0,t)=0$, dan $U(1,t)=0$, dan syarat awal $U(x,0)=3\sin 2\pi x$ dimana $0<x>1, t>0$

Penyelesian :

Dengan menerapkan transformasi Laplace dari Persamaan (7) serta mensubstitusikan nilai awal $U(x,0)=3\sin 2\pi x$ diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$
$$su(x,s)-U(x,0)=\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}-su=-3\sin 2\pi x \quad (8)$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (8) digunakan metode koefisien tak tentu

PD homogen : $(a^2-s)=0$

Akar-akar karakteristik :

$$a^2 - s = 0$$
$$a_{1,2} = \pm\sqrt{s}$$

Jadi solusi homogennya adalah $U_h = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x}$

Selanjutnya, dicari solusi partikularnya

Misalkan

$U_p = A\cos 2\pi x + B\sin 2\pi x$

$U_p{}' = -2\pi\, A\sin 2\pi x + 2\pi\, B\cos 2\pi x$

$U_p{}'' = -4\pi^2\, A\cos 2\pi x - 4\pi^2\, B\sin 2\pi x$

Kemudian substitusikan $U_p{}''$ dan U_p ke Persamaan (8) diperoleh penyelesaian partikularnya adalah

$$U_p = \frac{3}{4\pi^2 + s}\sin 2\pi x$$

Solusi umum PD adalah

$$u = U_h + U_p$$
$$u = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{3}{4\pi^2 + s}\sin 2\pi x \tag{9}$$

dengan menerapkan transformasi Laplace dari syarat-syarat batas yang mengandung t maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \text{ dan } \mathcal{L}\{U(1,t)\} = u(1,s) = 0$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas pertama yaitu $[u(0,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (9) diperoleh

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{10}$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas kedua yaitu $[u(1,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (9) diperoleh

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \tag{11}$$

Dari Persamaan (10) dan (11) diperoleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ dengan demikian Persamaan (9) menjadi

$$u = \frac{3}{4\pi^2+s}\sin 2\pi x \tag{12}$$

Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial parsial maka Persamaan (12) diinverskan dengan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{u\} = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$$

Jadi penyelesaian umum dari PDP non-homogen orde 2 tersebut adalah $U(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$.

Contoh 3 Selesaikan persamaan berikut dengan metode transformasi Laplace

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U \tag{13}$$

dengan syarat batas $U(0,t) = 0$, $U(5,t) = 0$, dan syarat awal $U(x,0) = 10\sin 4\pi x$

Penyelesaian :

Dengan menerapkan transformasi Laplace dari Persamaan (13) dan dengan mensubstitusikan syarat awal $U(x,0) = 10\sin 4\pi x$ diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U$$
$$su(x,s) - U(x,0) = 2\frac{d^2 u}{dx^2}$$
$$2\frac{d^2 u}{dx^2} - su = -10\sin 4\pi x \tag{14}$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (14) digunakan metode koefisien tak tentu. Akan dicari penyelesaian homogennya. Adapun akar-akar karakteristik

$$2a^2 - s = 0$$
$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{s}{2}}$$

Solusi PD homogennya adalah $U_h = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}$

Selanjutnya dicari penyelesaian partikularnya
Misalkan
$U_p = A\cos 4\pi x + B\sin 4\pi x$
$U_p{}' = -4\pi\, A\sin 4\pi x + 4\pi\, B\cos 4\pi x$
$U_p{}'' = -16\pi^2\, A\cos 4\pi x - 16\pi^2\, B\sin 4\pi x$
substitusikan $U_p{}''$ dan U_p ke Persamaan (14) diperoleh penyelesaian partikularnya adalah

$$U_p = \frac{10}{32\pi^2 + s}\sin 4\pi x$$

Jadi solusi umum PD tersebut adalah

$$u = U_h + U_p$$

$$u = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + \frac{10}{32\pi^2+s}\sin 4\pi x \quad (15)$$

dengan menerapkan transformasi Laplace dari syarat-syarat batas yang mengandung t maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \text{ dan } \mathcal{L}\{U(5,t)\} = u(5,s) = 0$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas pertama yaitu $[u(0,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (15) diperoleh

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (16)$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas kedua yaitu $[u(5,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (15) diperoleh

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{5s}{2}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{5s}{2}}} = 0 \quad (17)$$

Dari Persamaan (16) dan (17) diperoleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ dengan demikian Persamaan (15) menjadi

$$u = \frac{10}{32\pi^2+s}\sin 4\pi x \quad (18)$$

Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial parsial maka Persamaan (18) diinverskan dengan hasil invers transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{u\} = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$$

Jadi penyelesaian umum dari PDP non-homogen orde 2 tersebut adalah $U(x,t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$.

Contoh 4 Dengan menggunakan persamaan dan syarat batas yang sama dengan contoh.3 selesaikan jika diketahui syarat awal $U(x,0) = 10\sin 4\pi x - 5\sin 6\pi x$ menggunakan metode transformasi Laplace
Penyelesaian:
Dengan menerapkan transformasi Laplace pada Persamaan (13) dan dengan mesubstitusikan nilai awal $U(x,0) = 10\sin 4\pi x - 5\sin 6\pi x$ diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U$$

$$su(x,s) - U(x,0) = 2\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$su - 10\sin 4\pi x - 5\sin 6\pi x = 2\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$2\frac{d^2u}{dx^2} - su = -10\sin 4\pi x - 5\sin 6\pi x \quad (19)$$

Persamaan (19) tersebut merupakan bentuk PDB non homogen orde 2. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut digunakan metode koefisien tak tentu
Berdasarkan contoh 3 diperoleh PD homogennya adalah

$$U_h = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}$$

Selanjutnya dicari penyelesaian partikularnya
Misalkan
$U_p = A\cos 4\pi x + A\cos 6\pi x + B\sin 4\pi x + B\sin 6\pi x$
$U_p{}' = -4\pi\, A\sin 4\pi x - 6\pi\, A\sin 6\pi x + 4\pi\, B\cos 4\pi x + 6\pi\, B\cos 6\pi x$

$U_p{}'' = -16\pi^2\, A\cos 4\pi x - 36\pi^2\, A\cos 6\pi x - 16\pi^2\, B\sin 4\pi x - 36\pi^2\, B\sin 6\pi x$

Substitusikan U_p dan $U_p{}''$ ke Persamaan (19) diperoleh penyelesaian partikularnya adalah

$$U_p = \frac{10}{(32\pi^2 + s)}\sin 4\pi x - \frac{5}{(72\pi^2 + s)}\sin 6\pi x$$

Solusi umum PD adalah

$$u = U_h + U_p$$

$$u = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + \frac{10}{32\pi^2 + s}\sin 4\pi x - \frac{5}{(72\pi^2 + s)}\sin 6\pi x \qquad (20)$$

dengan menerapkan transformasi Laplace dari syarat-syarat batas yang mengandung t maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \text{ dan } \mathcal{L}\{U(5,t)\} = u(5,s) = 0$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas pertama yaitu $[u(0,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (20) diperoleh

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (21)$$

Dengan mensubstitusikan syarat batas kedua yaitu $[u(5,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (20) diperoleh

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{5s}{2}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{5s}{2}}} = 0 \qquad (22)$$

Dari Persamaan (21) dan (22) diperoleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ dengan demikian Persamaan (20) menjadi

$$u = \frac{10}{32\pi^2 + s}\sin 4\pi x - \frac{5}{(72\pi^2 + s)}\sin 6\pi x \qquad (23)$$

Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial parsial maka Persamaan (23) diinverskan dengan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{u\} = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t}\sin 6\pi x$$

Jadi penyelesaian umum dari PDP non-homogen orde 2 tersebut adalah $U(x,t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t}\sin 6\pi x$.

Contoh 5 Selesaikan persamaan berikut menggunakan transformasi Laplace

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad (24)$$

dengan $Y(0,t) = 0$, $Y(2,t) = 0$, $Y(x,0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x$, $Y_t(x,0) = 0$

Penyelesaian:

Dengan menerapkan transformasi Laplace dari PDP yang diberikan maka Persamaan (24) menjadi

$$s^2 y - sY(x,0) - Y_t(x,0) = 9\frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (25)$$

substitusikan $Y(x,0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x$ dan $Y_t(x,0) = 0$ ke dalam Persamaan (25) diperoleh

$$9\frac{d^2 y}{dx^2} - s^2 y = -20s\sin 2\pi x + 10s\sin 5\pi x \qquad (26)$$

untuk menyelesaikan Persamaan (26) digunakan metode koefisien tak tentu diperoleh penyelesaian persamaan diferensialnya adalah

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{\frac{s}{3}x} + c_2 e^{-\frac{s}{3}x} + \frac{20s}{(36\pi^2 + s^2)}\sin 2\pi x - \frac{10s}{(225\pi^2 + s^2)}\sin 5\pi x \qquad (27)$$

dengan menerapkan transformasi Laplace dari syarat-syarat batas yang mengandung t maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{Y(0,t)\} = y(0,s) = 0 \text{ dan } \mathcal{L}\{Y(2,t)\} = y(2,s) = 0$$

dengan mensubstitusikan syarat batas pertama yaitu $[u(0,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (27) diperoleh

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (28)$$

dan dengan mensubstitusikan syarat batas kedua yaitu $[u(2,s) = 0]$ ke dalam Persamaan (27) diperoleh

$$c_1 e^{\frac{2s}{3}} + c_2 e^{-\frac{2s}{3}} = 0 \qquad (29)$$

untuk mencari c_1 dan c_2 eliminasi Persamaan (28) dan (29) diperoleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ dengan demikian Persamaan (27) menjadi

$$y = \frac{20s}{(36\pi^2 + s^2)} \sin 2\pi x - \frac{10s}{(225\pi^2 + s^2)} \sin 5\pi x \tag{30}$$

kemudian untuk memperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial parsial maka Persamaan (30) diinverskan dengan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20s}{(36\pi^2 + s^2)} \sin 2\pi x\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{(225\pi^2 + s^2)} \sin 5\pi x\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{y\} = 20 \sin 2\pi x \cos 36\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 225\pi t$$

Sehingga penyelesaian Persamaan (24) adalah $Y(x,t) = 20 \sin 2\pi x \cos 36\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 225\pi t$.

PENUTUP

Metode transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dalam bentuk $a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial U}{\partial t} + a_4 \frac{\partial U}{\partial x} + a_5 U = Q(x)$ dengan $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. Adapun hasil transformasinya adalah

(i) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\, u(x,s) - u(x,0)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{du}{dx}$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2 u - s\, u(x,0) - u_t(x,0)$

(iv) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Humi, Mayer dan William B. Miller. *Boundary Value Problem and Partial Differential Equation*. Boston: PWS-KENT Publishing Company. 1992.

[2]. Finizio. N and Lada. S. G. *An Introduction to Differential Equation with Diference Equation, FouritAnalysisi, and Partial Equation*. New York: Mc.Graw-Hill. 1982.

[3]. Spiegel, M.R. *Laplace Transforms.* Schaum's Outline Series. United States of America;1995

[4]. Varberg, D.; Purcell, E. J.; Rigdon, S. E., *Kalkulus*, Ed ke-9 Jilid 2, Erlangga, Jakarta. 2010.

[5]. Lestari, Dwi. *Diktat Persamaan Diferensial*. Universitas Yogyakarta. 2003

HASTINA KURNIA SARI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
h1011141006@student.untan.ac.id