

# Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

## Contents

<b>Preface</b>	<b>1</b>
<b>3 Universals and Limits</b>	<b>1</b>
3.1 Universal arrows . . . . .	2

## Preface

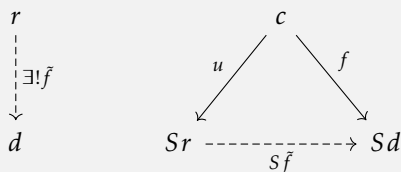
これは, @naughiez による, MacLane's Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです.

## 第3章 Universals and Limits

### § 3.1 Universal arrows

#### DEFINITION 3.1.1

$S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  を functor とし,  $c \in \mathcal{C}$  を object とする.  $\langle r \in \mathcal{D}, u: c \rightarrow Sr \rangle$  が **universal arrow from  $c$  to  $S$**  であるとは, 任意の  $\langle d \in \mathcal{D}, f: c \rightarrow Sd \rangle$  に対し, 唯一つの射  $\tilde{f}: r \rightarrow d$  が存在して,  $f = S\tilde{f} \circ u$  とできることをいう.



$$\begin{aligned} c &\xrightarrow{u} Sr: \text{universal arrow} \\ \iff c &\xrightarrow{u} Sr: \text{initial object in } (c \downarrow S) \end{aligned}$$

である. 特に, universal arrow は *unique up to isomorphism* (if exists).

以下, 特に断らない限り,  $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  は forgetful functor とする.

**EXAMPLE 3.1.1** i)  $k$  を field,  $X$  を set とする.  $X \hookrightarrow U\text{span}_k X$  は universal arrow from  $X$  to  $U: \text{Vect}_k \rightarrow \text{Set}$ .

ii)  $G$  を graph とすると,  $P: G \rightarrow U\mathcal{C}_G$  は universal arrow from  $G$  to  $U: \mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$ .

iii)  $X$  を set,  $\langle X \rangle$  を  $X$  から生成された free group とする.  $X \hookrightarrow U\langle X \rangle$  は universal arrow from  $X$  to  $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

iv)  $\mathbf{Dom}_m$  を次のように定める:

- obj.: objects of  $\mathbf{Dom}$ , i. e., integral domains;
- arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して (実際, ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから, 自明なものしかない),  $U: \mathbf{Fld} \rightarrow \mathbf{Dom}_m$

が定まる.  $D \in \mathbf{Dom}_m$  に対して  $\text{Frac } D$  をその field of fractions とすれば,  $D \hookrightarrow U \text{Frac } D$  は universal arrow from  $D$  to  $U$ .

**REMARK 3.1.1**  $\mathbf{Dom}_m$  を  $\mathbf{Dom}$  に置き換えてはいけない! 実際,  $F$  を field とし, ring homomorphism  $f: D \rightarrow F$  を  $\tilde{f}: \text{Frac } D \rightarrow F$  に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない. そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \implies f(r) \in F \setminus \{0\}$$

i. e.,  $f$  は monomorphism でなければならない.

v) **Met** を次のように定める:

- obj.: metric spaces;
- arr.: maps preserving metric.

$\mathbf{CMet} \subset \mathbf{Met}$  を, full subcategory whose objects are complete とする.  $X$  を metric space,  $\bar{X}$  をその completion とすると,  $X \rightarrow \bar{X}$  は universal arrow from  $X$  to  $U: \mathbf{CMet} \rightarrow \mathbf{Met}$ .

### DEFINITION 3.1.2

$H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$  を functor とする.  $\langle r \in \mathcal{D}, e \in Hr \rangle$  が **universal element of  $H$**  とは, 任意の  $\langle d \in \mathcal{D}, x \in Hd \rangle$  に対して, 唯一つの射  $f: r \rightarrow d$  が存在して,  $(Hf)e = x$  とできることをいう.

**REMARK 3.1.2** 特殊な状況では, universal arrow と universal element は同じものである.

- $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$  が functor で,  $\langle r, e \rangle$  が universal element であるとは,  $e \in Hr$  を射  $* \xrightarrow{e} Hr$  in  $\mathbf{Ens}$  と見たときに,  $\langle r, e \rangle$  が universal arrow from  $*$  to  $H$  であること.

$$\begin{array}{ccc} r & & * \\ \downarrow \exists! f & \swarrow e & \searrow x \\ d & Hr & Hd \\ & \xrightarrow{Hf} & \end{array}$$

- 逆に,  $\mathcal{C}$  を small category とし,  $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  を functor,  $c \in \mathcal{C}$  とすると,  $\langle r, u \rangle$  が universal arrow from  $c$  to  $S$  であるとは, これが  $H = \mathcal{C}(c, S \cdot)$  の universal element であること.

**EXAMPLE 3.1.2** i)  $S$  を set,  $E \subset S \times S$  を  $S$  の equivalence relation,  $\pi: S \twoheadrightarrow S/E$  とする.  $\langle S/E, \pi \rangle$  は universal element of  $H: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ , where

- obj.:  $HX := \{f: S \rightarrow X: sEs' \implies fs = fs'\};$
- arr.:  $Hg: HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY$  ( $g: X \rightarrow Y$ ).

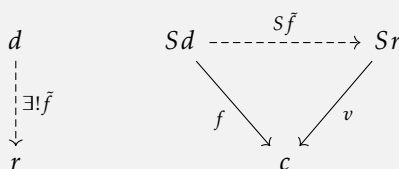
ii)  $G$  を group,  $N \triangleleft G$ ,  $\pi: G \twoheadrightarrow G/N$  とする.  $\langle G/N, \pi \rangle$  は universal element of  $H: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , where

- obj.:  $HG' := \{f: G \rightarrow G': \text{group hom. s. t. } \ker f \subset N\};$

- $\text{arr.}: Hg: HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG'' (g: G' \rightarrow G'')$ .
- iii)  $V_1, V_2$  を vector spaces /  $k$ ,  $H: \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Set}$  を次で定まる functor とする :
- $\text{obj.}: HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f: V_1 \times V_2 \rightarrow W : \text{bilinear}\};$
  - $\text{arr.}: Hg: HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW' (g: W \rightarrow W')$ .
- $\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes \rangle$  は, universal element of  $H$ . ( $\otimes: V_1 \times V_2 \ni (x, y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$ .)
- $\mathbf{Vect}_k$  ではなく,  $\mathbf{Mod}_R$  でもよい.

**DEFINITION 3.1.3**

$S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  を functor とし,  $c \in \mathcal{C}$  とする.  $\langle r \in \mathcal{D}, v: Sr \rightarrow c \rangle$  が **universal arrow from  $S$  to  $c$**  であるとは, これが  $(S \downarrow c)$  の terminal object であることをいう.

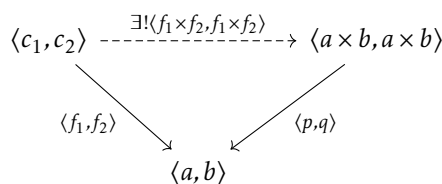


**EXAMPLE 3.1.3** i)  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}, \mathbf{Vect}_k$ , etc. (categories where the direct product  $\times$  of two objects are defined) とする.

$a, b \in \mathcal{C}$  を任意に取り,  $p: a \times b \rightarrow a, q: a \times b \rightarrow b$  を canonical projections とする.  $\langle p, q \rangle$  は universal arrow to  $\langle a, b \rangle$  from  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , where

- $\text{obj.}: \Delta c := \langle c, c \rangle;$
- $\text{arr.}: \Delta f := \langle f, f \rangle.$

この  $\Delta$  を **diagonal functor** いう.

**Exercises**

- (2) The universal element of  $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  (power set) is  $\langle \{0, 1\}, 1 \in \{0, 1\} \rangle$
- (3)  $G \in \mathbf{Grp}$  (or  $\in \mathbf{Ab}$ ),  $X \in \mathbf{Set}$  とする. The universal arrow from  $G, G, X, X$ , respectively, to the following forgetful functors are:
- $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp} \Rightarrow \langle G/[G, G], \pi: G \twoheadrightarrow G/[G, G] \rangle$  (commutator group and abelianization),
  - $U: \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab} \Rightarrow \langle R[G], \iota: G \hookrightarrow R[G] \rangle$  (group ring),
  - $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set} \Rightarrow \langle (X, 2^X), \text{id}_X: X \rightarrow X \rangle$  (discrete topology),
  - $U: \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set} \Rightarrow \langle X \coprod \{X\}, \iota: X \hookrightarrow X \coprod \{X\} \rangle$  (one-point compactification).