Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

Contents

Preface			1
3	Uni	iversals and Limits	1
	3.1	Universal arrows	2
	3.2	The Yoneda Lemma	5

Contents

Preface

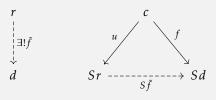
これは、@naughiez による、MacLane's Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです。

第3章 Universals and Limits

§ 3.1 Universal arrows

DEFINITION 3.1.1

 $S: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし, $c \in \mathscr{C}$ を object とする。 $\langle r \in \mathcal{D}, u \colon c \to Sr \rangle$ が universal arrow from c to S であるとは,任意の $\langle d \in \mathcal{D}, f \colon c \to Sd \rangle$ に対し,唯一つの射 $\tilde{f} \colon r \to d$ が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$ とできることをいう.



 $c \xrightarrow{u} Sr$: universal arrow $\iff c \xrightarrow{u} Sr$: initial object in $(c \downarrow S)$

である. 特に, universal arrow は unique up to isomorphism (if exists).

以下,特に断らない限り, $U: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は forgetful functor とする.

EXAMPLE 3.1.1 i) $k \notin \text{field}$, $X \notin \text{set } k \notin S$. $X \hookrightarrow U \operatorname{span}_k X$ is universal arrow from X to $U \colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$.

- ii) G を graph とすると、 $P: G \to U\mathscr{C}_G$ は universal arrow from G to $U: \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$.
- iii) X を set, $\langle X \rangle$ を X から生成された free group とする. $X \hookrightarrow U\langle X \rangle$ は universal arrow from X to U: $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.
- iv) \mathbf{Dom}_m を次のように定める:
 - obj.: objects of **Dom**, *i. e.* , integral domains;
 - arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して(実際, ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから,自明なものしかない),U: $\mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$

が定まる. $D \in \mathbf{Dom}_m$ に対して Frac D をその field of fractions とすれば, $D \hookrightarrow U$ Frac D は universal arrow from D to U.

REMARK 3.1.1 Dom_m を **Dom** に置き換えてはいけない!実際, F を field とし, ring homomorphism $f: D \to F$ を \tilde{f} : Frac $D \to F$ に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない. そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \Longrightarrow f(r) \in F \setminus \{0\}$$

i. e., f は monomorphism でなければならない.

- v) Met を次のように定める:
 - · obj.: metric spaces;
 - arr.: maps preserving metric.

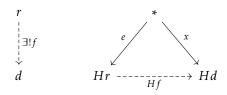
CMet \subset **Met** $\stackrel{\cdot}{\sim}$, full subcategory whose objects are complete とする. X $\stackrel{\cdot}{\sim}$ metric space, \overline{X} をその completion とすると, $X \to \overline{X}$ は universal arrow from X to U: **CMet** \rightarrow **Met**.

DEFINITION 3.1.2

 $H: \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする. $\langle r \in \mathcal{D}, e \in Hr \rangle$ が universal element of H とは、任意の $\langle d \in \mathcal{D}, x \in Hd \rangle$ に対して、唯一つの射 $f: r \to d$ が存在して、(Hf)e = x とできることをいう.

REMARK 3.1.2 特殊な状況では、universal arrow と universal element は同じものである.

• $H: \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ が functor で、 $\langle r, e \rangle$ が universal element であるとは、 $e \in Hr$ を射 $* \xrightarrow{e} Hr$ in \mathbf{Ens} と見たときに、 $\langle r, e \rangle$ が universal arrow from * to H であること.



- 逆に、 \mathscr{C} を small category とし、 $S: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor、 $c \in \mathscr{C}$ とすると、 $\langle r, u \rangle$ が universal arrow from c to S であるとは、これが $H = \mathscr{C}(c, S \cdot)$ の universal element であること。
- **EXAMPLE 3.1.2** i) S を set, $E \subset S \times S$ を S の equivalence relation, $\pi: S \twoheadrightarrow S/E$ とする. $\langle S/E, \pi \rangle$ は universal element of H: **Set** \to **Set**, where
 - obj.: $HX := \{f: S \to X: sEs' \Longrightarrow fs = fs'\};$
 - arr.: $Hg: HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY (g: X \to Y)$.
 - ii) G を group, $N \triangleleft G$, $\pi: G \twoheadrightarrow G/N$ とする. $\langle G/N, \pi \rangle$ は universal element of $H: \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, where
 - obj.: $HG' := \{f : G \rightarrow G' : \text{ group hom. s. t. ker } f \subset N\};$

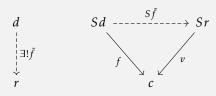
- arr.: $Hg: HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG''$ ($g: G' \to G''$).
- iii) V_1, V_2 を vector spaces /k, $H: \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を次で定まる functor とする:
 - obj.: $HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f : V_1 \times V_2 \rightarrow W : \mathbf{bilinear}\};$
 - arr.: $Hg: HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW'(g: W \to W')$.

 $\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes \rangle$ $\forall x$, universal element of H. ($\otimes: V_1 \times V_2 \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$.)

 $Vect_k$ ではなく、 Mod_R でもよい.

DEFINITION 3.1.3

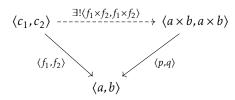
 $S: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を functor とし, $c \in \mathcal{C}$ とする. $\langle r \in \mathcal{D}, v : Sr \to c \rangle$ が universal arrow from S to c であるとは,これが $(S \downarrow c)$ の terminal object であることをいう.



 $a,b \in \mathscr{C}$ を任意に取り、 $p: a \times b \to a, q: a \times b \to b$ を canonical projections とする. $\langle p,q \rangle$ は universal arrow to $\langle a,b \rangle$ from $\Delta: \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, where

- obj.: $\Delta c := \langle c, c \rangle$;
- arr.: $\Delta f := \langle f, f \rangle$.

この Δ を diagonal functor という.



Exercises

- (2) The universal element of $\mathfrak{P} \colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ (power set) is $\langle \{0,1\}, 1 \in \{0,1\} \rangle$
- - $U: \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp} \Longrightarrow \langle G/[G,G], \pi \colon G \twoheadrightarrow G/[G,G] \rangle$ (commutator group and abelianization),
 - $U: \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \Longrightarrow \langle R[G], \iota: G \hookrightarrow R[G] \rangle$ (group ring),
 - $U: \mathbf{Top} \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle (X, 2^X), \mathrm{id}_X : X \to X \rangle$ (discrete topology),
 - $U : \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle X \mid [\{X\}, \iota : X \hookrightarrow X \mid [\{X\}\}] \rangle$ (one-point compactification).

§ 3.2 The Yoneda Lemma

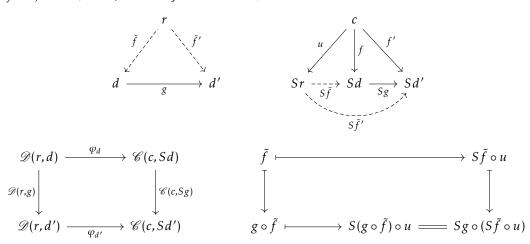
PROPOSITION 3.2.1

 $S: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を functor とし, $c \in \mathcal{C}$ とする. $\langle r, u \rangle$ が universal arrow from c to S ならば,

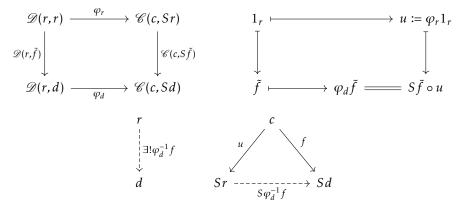
$$\mathcal{D}(r,d) \cong \mathcal{C}(c,Sd)$$
 naturally in d via $\tilde{f} \mapsto S\tilde{f} \circ u$.

逆に、 $\mathcal{D}(r,d) \cong \mathcal{C}(c,Sd)$ naturally in d ならば、唯一つの $u: c \to Sr$ が存在して、 $\langle r,u \rangle$ は universal arrow from c to S である.

Proof. (⇒) $\langle r,u\rangle$ を universal arrow from c to S とする. このとき、(by definition of universal arrows) $\mathcal{D}(r,d)\cong\mathcal{C}(c,Sd)$ である. これが natural in d であることを見るために、 $g:d\to d'$ とすると、 $S(g:\tilde{f})\circ u=Sg\circ(S\tilde{f}\circ u)$ となる、i.e.,naturality in d を示せた.



(\iff) $\mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathscr{C}(c,Sd)$ naturally in d とする.このとき φ_d の自然性より, $u \coloneqq \varphi_r 1_r$ とおけば,任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f \colon c \to Sd \rangle$ に対して唯一つの $\tilde{f} \colon r \to d$ が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$ となる.実際, $\tilde{f} \coloneqq S\varphi_d^{-1}f$ とおけば よい.このような \tilde{f} の一意性は, φ_d が bijective であることから従う.



DEFINITION 3.2.1

 \mathscr{D} を category whose hom-sets are small とし, $K: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする. $\langle r \in \mathscr{D}, \psi : \mathscr{D}(r, \cdot) \cong K \rangle$ を *representation of* K といい, r を *representing object* という. A representation が存在するとき, K は representable であるという.

PROPOSITION 3.2.1 より、 $\mathscr{C}(c,S)$ は $\langle r,\varphi \rangle$ によって represents され、従って representable である.

PROPOSITION 3.2.2

 \mathscr{D} を category whose hom-sets are small とし, $K: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする. もし $\langle r \in d, u: * \to Kr \rangle$ が universal arrow from * to K ならば,

$$\psi_d : \mathcal{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(u*)$$

によって定まる ψ は representation of K である.

逆に, K の各 representation は, 唯一つの universal arrow from * $\rightarrow K$ からこのようにして得られる.

Proof. (⇒) $\langle r, u \rangle$ & universal arrow from * to K とすると, **PROPOSITION 3.2.1** \sharp \mathfrak{h} ,

$$\psi_d \colon \mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*,Kd) \cong Kd$$
 naturally in d

なる自然変換 ψ : $\mathcal{D}(r,\cdot) \cong K$ が存在する. この対応は,

$$\tilde{f} \mapsto K\tilde{f} \circ u \mapsto (K\tilde{f} \circ u) = K(\tilde{f})(u*)$$

で与えられる.

(**二**) 逆に、 $\langle r, \psi \rangle$ を representation of K とする.

$$\varphi_d : \mathcal{D}(r,d) \stackrel{\psi_d}{\cong} Kd \cong \mathbf{Set}(*,Kd)$$
 naturally in d

によって natural isomorphism φ : $\mathscr{D}(r,\cdot) \cong \mathbf{Set}(*,K\cdot)$ を定義すれば,再び **PROPOSITION 3.2.1** より,唯一 つの $u:* \to Kr$ が存在して, $\langle r,u \rangle$ は universal arrow from * to K となる.このとき K は,

$$\psi_d \colon \mathscr{D}(r,d) \stackrel{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*,Kd) \cong Kd$$

によって represents される.

LEMMA 3.2.1 (Yoneda)

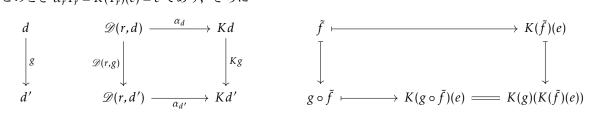
 \mathscr{D} ε category whose hom-sets are small $\xi \cup K: \mathscr{D} \to \mathbf{Set} \ \varepsilon$ functor $\xi \neq \delta$. $\zeta \in \mathcal{S}$

$$\exists y \colon \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \cong Kr, \quad \alpha \mapsto \alpha_r 1_r.$$

Proof. $y: \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \ni \alpha \mapsto \alpha_r 1_r \in Kr$ の逆射を求めればよい。今 $e \in Kr$ が任意に与えられたとする。 The natural transformation $\alpha: \mathscr{D}(r,\cdot) \to K$ を次のように定める:

$$\alpha_d \colon \mathscr{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(e).$$

このとき $\alpha_r 1_r = K(1_r)(e) = e$ であり、さらに



となる. よって、 $\alpha \in \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$ で、 $y\alpha = e$, $i.\ e.\ y$ is bijective. $(\alpha\ \mathcal{O}-$ 意性は **PROPOSITION 3.2.2** から分かる.)