

Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

Contents

Preface	1
3 Universals and Limits	1
3.1 Universal arrows	2
3.2 The Yoneda Lemma	5
3.3 Coproducts and Colimits	9
3.4 Products and Limits	17

Preface

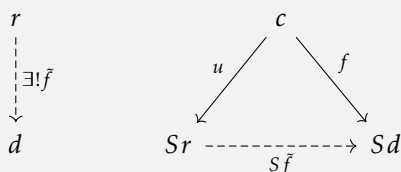
これは, @naughiez による, MacLane's Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです.

第3章 Universals and Limits

§ 3.1 Universal arrows

DEFINITION 3.1.1

$S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を functor とし, $c \in \mathcal{C}$ を object とする. $\langle r \in \mathcal{D}, u: c \rightarrow Sr \rangle$ が **universal arrow from c to S** であるとは, 任意の $\langle d \in \mathcal{D}, f: c \rightarrow Sd \rangle$ に対し, 唯一つの射 $\tilde{f}: r \rightarrow d$ が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$ とできることをいう.



$$c \xrightarrow{u} Sr: \text{universal arrow} \\ \iff c \xrightarrow{u} Sr: \text{initial object in } (c \downarrow S)$$

である. 特に, universal arrow は *unique up to isomorphism* (if exists).

以下, 特に断らない限り, $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ は forgetful functor とする.

EXAMPLE 3.1.1 i) k を field, X を set とする. $X \hookrightarrow U \text{span}_k X$ は universal arrow from X to $U: \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Set}$.

ii) G を graph とすると, $P: G \rightarrow U\mathcal{C}_G$ は universal arrow from G to $U: \mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$.

iii) X を set, $\langle X \rangle$ を X から生成された free group とする. $X \hookrightarrow U\langle X \rangle$ は universal arrow from X to $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$.

iv) \mathbf{Dom}_m を次のように定める:

- obj.: objects of \mathbf{Dom} , i. e., integral domains;
- arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して (実際, ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから, 自明なものしかない), $U: \mathbf{Fld} \rightarrow \mathbf{Dom}_m$

が定まる. $D \in \mathbf{Dom}_m$ に対して $\text{Frac } D$ をその field of fractions とすれば, $D \hookrightarrow U \text{Frac } D$ は universal arrow from D to U .

REMARK 3.1.1 \mathbf{Dom}_m を \mathbf{Dom} に置き換えてはいけない! 実際, F を field とし, ring homomorphism $f: D \rightarrow F$ を $\tilde{f}: \text{Frac } D \rightarrow F$ に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない. そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \implies f(r) \in F \setminus \{0\}$$

i. e., f は monomorphism でなければならない.

v) **Met** を次のように定める:

- obj.: metric spaces;
- arr.: maps preserving metric.

$\mathbf{CMet} \subset \mathbf{Met}$ を, full subcategory whose objects are complete とする. X を metric space, \bar{X} をその completion とすると, $X \rightarrow \bar{X}$ は universal arrow from X to $U: \mathbf{CMet} \rightarrow \mathbf{Met}$.

DEFINITION 3.1.2

$H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ を functor とする. $\langle r \in \mathcal{D}, e \in Hr \rangle$ が **universal element of H** とは, 任意の $\langle d \in \mathcal{D}, x \in Hd \rangle$ に対して, 唯一つの射 $f: r \rightarrow d$ が存在して, $(Hf)e = x$ とできることをいう.

REMARK 3.1.2 特殊な状況では, universal arrow と universal element は同じものである.

- $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ が functor で, $\langle r, e \rangle$ が universal element であるとは, $e \in Hr$ を射 $* \xrightarrow{e} Hr$ in \mathbf{Ens} と見たときに, $\langle r, e \rangle$ が universal arrow from $*$ to H であること.

$$\begin{array}{ccc} r & & * \\ \downarrow \exists! f & \swarrow e & \searrow x \\ d & Hr & Hd \\ & \xrightarrow{Hf} & \end{array}$$

- 逆に, \mathcal{C} を small category とし, $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を functor, $c \in \mathcal{C}$ とすると, $\langle r, u \rangle$ が universal arrow from c to S であるとは, これが $H = \mathcal{C}(c, S \cdot)$ の universal element であること.

EXAMPLE 3.1.2 i) S を set, $E \subset S \times S$ を S の equivalence relation, $\pi: S \twoheadrightarrow S/E$ とする. $\langle S/E, \pi \rangle$ は universal element of $H: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, where

- obj.: $HX := \{f: S \rightarrow X: sEs' \implies fs = fs'\};$
- arr.: $Hg: HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY$ ($g: X \rightarrow Y$).

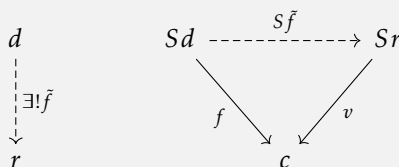
ii) G を group, $N \triangleleft G$, $\pi: G \twoheadrightarrow G/N$ とする. $\langle G/N, \pi \rangle$ は universal element of $H: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, where

- obj.: $HG' := \{f: G \rightarrow G': \text{group hom. s. t. } \ker f \subset N\};$

- $\text{arr.}: Hg: HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG'' (g: G' \rightarrow G'')$.
- iii) V_1, V_2 を vector spaces / k , $H: \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Set}$ を次で定まる functor とする :
- $\text{obj.}: HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f: V_1 \times V_2 \rightarrow W : \text{bilinear}\};$
 - $\text{arr.}: Hg: HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW' (g: W \rightarrow W')$.
- $\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes \rangle$ は, universal element of H . ($\otimes: V_1 \times V_2 \ni (x, y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$.)
- \mathbf{Vect}_k ではなく, \mathbf{Mod}_R でもよい.

DEFINITION 3.1.3

$S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を functor とし, $c \in \mathcal{C}$ とする. $\langle r \in \mathcal{D}, v: Sr \rightarrow c \rangle$ が **universal arrow from S to c** であるとは, これが $(S \downarrow c)$ の terminal object であることをいう.

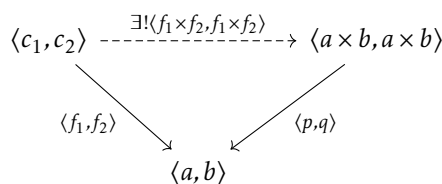


EXAMPLE 3.1.3 i) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}, \mathbf{Vect}_k$, etc. (categories where the direct product \times of two objects are defined) とする.

$a, b \in \mathcal{C}$ を任意に取り, $p: a \times b \rightarrow a, q: a \times b \rightarrow b$ を canonical projections とする. $\langle p, q \rangle$ は universal arrow to $\langle a, b \rangle$ from $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, where

- $\text{obj.}: \Delta c := \langle c, c \rangle;$
- $\text{arr.}: \Delta f := \langle f, f \rangle.$

この Δ を **diagonal functor** いう.

**Exercises**

- (2) The universal element of $\mathbb{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ (power set) is $\langle \{0, 1\}, 1 \in \{0, 1\} \rangle$
- (3) $G \in \mathbf{Grp}$ (or $\in \mathbf{Ab}$), $X \in \mathbf{Set}$ とする. The universal arrow from G, G, X, X , respectively, to the following forgetful functors are:
- $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp} \Rightarrow \langle G/[G, G], \pi: G \twoheadrightarrow G/[G, G] \rangle$ (commutator group and abelianization),
 - $U: \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab} \Rightarrow \langle R[G], \iota: G \hookrightarrow R[G] \rangle$ (group ring),
 - $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set} \Rightarrow \langle (X, 2^X), \text{id}_X: X \rightarrow X \rangle$ (discrete topology),
 - $U: \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set} \Rightarrow \langle X \sqcup \{X\}, \iota: X \hookrightarrow X \sqcup \{X\} \rangle$ (one-point compactification).

§ 3.2 The Yoneda Lemma

PROPOSITION 3.2.1

$S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を functor とし, $c \in \mathcal{C}$ とする. $\langle r, u \rangle$ が universal arrow from c to S ならば,

$$\mathcal{D}(r, d) \cong \mathcal{C}(c, Sd) \text{ naturally in } d \text{ via } \tilde{f} \mapsto S\tilde{f} \circ u.$$

逆に, $\mathcal{D}(r, d) \cong \mathcal{C}(c, Sd)$ naturally in d ならば, 唯一つの $u: c \rightarrow Sr$ が存在して, $\langle r, u \rangle$ は universal arrow from c to S である.

Proof. (\Rightarrow) $\langle r, u \rangle$ を universal arrow from c to S とする. このとき, (by definition of universal arrows) $\mathcal{D}(r, d) \cong \mathcal{C}(c, Sd)$ である. これが natural in d であることを見るために, $g: d \rightarrow d'$ とすると, $S(g: \tilde{f}) \circ u = Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)$ となる, i. e., naturality in d を示せた.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} & r & \\ \tilde{f} \swarrow & & \searrow \tilde{f}' \\ d & \xrightarrow{g} & d' \end{array} & & \begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & u \swarrow & \downarrow f & \searrow f' & \\ Sr & \xrightarrow{S\tilde{f}} & Sd & \xrightarrow{Sg} & Sd' \\ & \searrow S\tilde{f}' & & & \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r, d) & \xrightarrow{\varphi_d} & \mathcal{C}(c, Sd) \\ \downarrow \mathcal{D}(r, g) & & \downarrow \mathcal{C}(c, Sg) \\ \mathcal{D}(r, d') & \xrightarrow{\varphi_{d'}} & \mathcal{C}(c, Sd') \end{array} & & \begin{array}{ccc} \tilde{f} & \xrightarrow{\quad} & S\tilde{f} \circ u \\ \downarrow & & \downarrow \\ g \circ \tilde{f} & \xrightarrow{\quad} & S(g \circ \tilde{f}) \circ u = Sg \circ (S\tilde{f} \circ u) \end{array}
 \end{array}$$

(\Leftarrow) $\mathcal{D}(r, d) \cong \mathcal{C}(c, Sd)$ naturally in d とする. このとき φ_d の自然性より, $u := \varphi_r 1_r$ とおけば, 任意の $\langle d \in \mathcal{D}, f: c \rightarrow Sd \rangle$ に対して唯一つの $\tilde{f}: r \rightarrow d$ が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$ となる. 実際, $\tilde{f} := S\varphi_d^{-1} f$ とおけばよい. このような \tilde{f} の一意性は, φ_d が bijective であることから従う.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r, r) & \xrightarrow{\varphi_r} & \mathcal{C}(c, Sr) \\ \downarrow \mathcal{D}(r, \tilde{f}) & & \downarrow \mathcal{C}(c, S\tilde{f}) \\ \mathcal{D}(r, d) & \xrightarrow{\varphi_d} & \mathcal{C}(c, Sd) \end{array} & & \begin{array}{ccc} 1_r & \xrightarrow{\quad} & u := \varphi_r 1_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{f} & \xrightarrow{\quad} & \varphi_d \tilde{f} = S\tilde{f} \circ u \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} r & & c \\ \downarrow \exists! \varphi_d^{-1} f & & \swarrow u \quad \searrow f \\ d & & \begin{array}{ccc} Sr & \xrightarrow{S\varphi_d^{-1} f} & Sd \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

□

DEFINITION 3.2.1

\mathcal{D} を category whose hom-sets are small とし, $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ を functor とする. $\langle r \in \mathcal{D}, \psi: \mathcal{D}(r, \cdot) \cong K \rangle$ を **representation of K** といい, r を **representing object** という. A representation が存在するとき, K は representable であるという.

PROPOSITION 3.2.1 より, $\mathcal{C}(c, S \cdot)$ は $\langle r, \varphi \rangle$ によって represents され, 従って representable である.

PROPOSITION 3.2.2

\mathcal{D} を category whose hom-sets are small とし, $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ を functor とする. もし $\langle r \in \mathcal{D}, u: * \rightarrow Kr \rangle$ が universal arrow from $*$ to K ならば,

$$\psi_d: \mathcal{D}(r, d) \rightarrow Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(u*)$$

によって定まる ψ は representation of K である.

逆に, K の各 representation は, 唯一つの universal arrow from $*$ to K からこのようにして得られる.

Proof. (\implies) $\langle r, u \rangle$ を universal arrow from $*$ to K とすると, **PROPOSITION 3.2.1** より,

$$\psi_d: \mathcal{D}(r, d) \xrightarrow{\varphi_d} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd \quad \text{naturally in } d$$

なる自然変換 $\psi: \mathcal{D}(r, \cdot) \cong K$ が存在する. この対応は,

$$\tilde{f} \mapsto K\tilde{f} \circ u \mapsto (K\tilde{f} \circ u)(*) = K(\tilde{f})(u*)$$

で与えられる.

(\impliedby) 逆に, $\langle r, \psi \rangle$ を representation of K とする.

$$\varphi_d: \mathcal{D}(r, d) \xrightarrow{\psi_d} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd \quad \text{naturally in } d$$

によって natural isomorphism $\varphi: \mathcal{D}(r, \cdot) \cong \mathbf{Set}(*, K \cdot)$ を定義すれば, 再び **PROPOSITION 3.2.1** より, 唯一つの $u: * \rightarrow Kr$ が存在して, $\langle r, u \rangle$ は universal arrow from $*$ to K となる. このとき K は,

$$\psi_d: \mathcal{D}(r, d) \xrightarrow{\varphi_d} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd$$

によって represents される. □

LEMMA 3.2.1 (米田の補題 (Yoneda Lemma))

\mathcal{D} を category whose hom-sets are small とし, $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ を functor とする. このとき,

$$\exists \gamma: \mathbf{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \cong Kr, \quad \alpha \mapsto \alpha_r 1_r.$$

Proof. $y: \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \ni \alpha \mapsto \alpha_r 1_r \in Kr$ の逆射を求めればよい. 今 $e \in Kr$ が任意に与えられたとする. The natural transformation $\alpha: \mathcal{D}(r, \cdot) \rightarrow K$ を次のように定める:

$$\alpha_d: \mathcal{D}(r, d) \rightarrow Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(e).$$

このとき $\alpha_r 1_r = K(1_r)(e) = e$ であり, さらに

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\alpha_d} & Kd \\ \downarrow g & & \downarrow Kg \\ \mathcal{D}(r, d) & \xrightarrow{\alpha_d} & Kd \\ \downarrow \mathcal{D}(r, g) & & \downarrow K(g) \\ \mathcal{D}(r, d') & \xrightarrow{\alpha_{d'}} & Kd' \\ \downarrow g \circ \tilde{f} & & \downarrow K(g \circ \tilde{f}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{f} & \xrightarrow{\quad} & K(\tilde{f})(e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g \circ \tilde{f} & \xrightarrow{\quad} & K(g \circ \tilde{f})(e) = K(g)(K(\tilde{f})(e)) \end{array}$$

となる. よって, $\alpha \in \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K)$ で, $y\alpha = e$, i. e., y is bijective. (α の一意性は **PROPOSITION 3.2.2** から分かる.) \square

COROLLARY 3.2.3

\mathcal{D} を category whose hom-sets are small とし, $r, s \in \mathcal{D}$ とする. このとき, 任意の natural transformation $\alpha: \mathcal{D}(r, \cdot) \rightarrow \mathcal{D}(s, \cdot)$ に対して, 唯一つの射 $h: s \rightarrow r$ が存在して, $\alpha = \mathcal{D}(h, \cdot)$ となる, i. e.,

$$\alpha_d = \mathcal{D}(h, d): \mathcal{D}(r, d) \rightarrow \mathcal{D}(s, d), \quad f \mapsto f \circ h.$$

Proof. **LEMMA 3.2.1** とその証明を functor $K = \mathcal{D}(s, \cdot)$ に適用すれば, α に対して唯一つの $h \in \mathcal{D}(s, r)$ が存在して,

$$\alpha_d: \mathcal{D}(r, d) \rightarrow \mathcal{D}(s, d), \quad f \mapsto \mathcal{D}(s, f)h = f \circ h$$

とできる. \square

LEMMA 3.2.1 の全単射 $y: \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \cong Kr$ は, 実は natural transformation である. それを述べるために, まず $\text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K)$ と Kr が, K と r に関する functors と見なせることを確認する.

- Kr : evaluation functor $E: \mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$, where
 - obj.: $E\langle K, r \rangle = Kr$;
 - arr.: $E\langle \alpha: K \rightarrow K', f: r \rightarrow r' \rangle = K'f \circ \alpha_r = \alpha_{r'} \circ Kf: Kr \rightarrow K'r'$
- $\text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K)$: functor $N: \mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$, where
 - obj.: $N\langle K, r \rangle := \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K)$;
 - arr.: $K\langle \alpha: K \rightarrow K', f: r \rightarrow r' \rangle: \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \rightarrow \text{Nat}(\mathcal{D}(r', \cdot), K'), \beta \mapsto \alpha\beta\mathcal{D}(f, \cdot)$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r', \cdot) & & \mathbf{Set} \\ \downarrow \mathcal{D}(f, \cdot) & & \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Set} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(r, \cdot) & & \mathbf{Set} \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r, \cdot) & & \mathbf{Set} \\ \downarrow \beta & & \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Set} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & & \mathbf{Set} \end{array} & \begin{array}{ccc} K & & \mathbf{Set} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Set} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K' & & \mathbf{Set} \end{array} \end{array}$$

LEMMA 3.2.2**LEMMA 3.2.1** における全単射

$$y = y_{\langle K, r \rangle}: \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \cong Kr$$

は, natural isomorphism $N \xrightarrow{y_{\langle K, r \rangle}} E$ を定める. すなわち, y は natural in K and r である.

Proof. E と N の構成から, 任意の $\langle K, r \rangle, \langle K', r' \rangle \in \mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ と $\langle \alpha, f \rangle: \langle K, r \rangle \rightarrow \langle K', r' \rangle$ に対して, $\mathcal{D}(f, r')1_{r'} = f = \mathcal{D}(r, f)1_r$ に注意すれば, 以下の可換図式から従う:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) & \xrightarrow{y_{\langle K, r \rangle}} & Kr \\
 \downarrow N\langle \alpha, f \rangle & & \downarrow E\langle \alpha, f \rangle \\
 \text{Nat}(\mathcal{D}(r', \cdot), K') & \xrightarrow{y_{\langle K', r' \rangle}} & K'r'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \beta & \xrightarrow{\quad} & \beta_r 1_r \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha \beta \mathcal{D}(f, \cdot) & \xrightarrow{\quad} & \alpha_{r'} \beta_{r'} \mathcal{D}(f, r')(1_{r'}) = (\alpha_{r'} \circ Kf)(\beta_r 1_r)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(r, r) & \xrightarrow{\beta_r} & Kr \\
 \downarrow \mathcal{D}(r, f) & & \downarrow Kf \\
 \mathcal{D}(r, r') & \xrightarrow{\beta_{r'}} & K'r'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1_r & \xrightarrow{\quad} & \beta_r 1_r \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f & \xrightarrow{\quad} & \beta_{r'} f = K(f)(\beta_r 1_r)
 \end{array}$$

□

The functor $Y: \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$, defined as

- $\text{obj.}: Yr := \mathcal{D}(r, \cdot),$
- $\text{arr.}: Yf := \mathcal{D}(f, \cdot): \mathcal{D}(r, \cdot) \rightarrow \mathcal{D}(s, \cdot) (f: s \rightarrow r),$

を **Yoneda functor** という. これは full and faithful である. 実際, full であることも, faithful であることも, **COROLLARY 3.2.3** から従う.

Yoneda functor の双対 $Y': \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ は, 次で定まる:

- $\text{obj.}: Y'r := \mathcal{D}(\cdot, r);$
- $\text{arr.}: Y'f := \mathcal{D}(\cdot, f): \mathcal{D}(\cdot, s) \rightarrow \mathcal{D}(\cdot, r) (f: s \rightarrow r).$

これは faithful である. 実際, $f, f': s \rightarrow r$ が $Y'f = Y'f'$ とすると,

$$f = (Y'f)_s 1_s = (Y'f')_s 1_s = f'.$$

逆に, これらの functor Y, Y' が定義できるのなら, \mathcal{D} は category whose hom-sets are small でなければならない. なぜなら, このとき任意の $r, s \in \mathcal{D}$ に対して, $\mathcal{D}(r, s) = (Yr)s = (Y's)r \in \mathbf{Set}$ は small だからである. より大きい \mathcal{D} に対しても, **Set** を **Ens** に置き換えたものが同様に成立する.

§ 3.3 Coproducts and Colimits

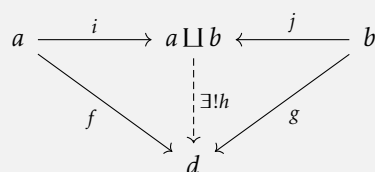
Coproducts

DEFINITION 3.3.1

\mathcal{C} を category とし, $a, b \in \mathcal{C}$ とする. $\langle c \in \mathcal{C}, \langle i, j \rangle: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, c \rangle \rangle$ が **coproduct of a and b** であるとは, $\langle c, i, j \rangle$ が universal arrow from $\langle a, b \rangle$ to the diagonal functor Δ であることをいう. このとき,

$$c = a \sqcup b = a \oplus b$$

などと書く. i, j を **injections** という.



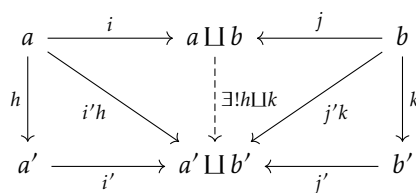
a, b の coproduct について, 以下の全単射がある:

$$\mathcal{C}(a, d) \times \mathcal{C}(b, d) \cong \mathcal{C}(a \sqcup b, d), \quad \langle f, g \rangle \mapsto h, \quad \text{naturally in } d,$$

with inverse $h \mapsto \langle hi, hj \rangle$.

REMARK 3.3.1 \mathcal{C} を category every two of whose objects have the coproduct とすると, bifunctor $\sqcup: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を定める:

- obj.: $\langle a, b \rangle \mapsto a \sqcup b$;
- arr.: $\langle h, k \rangle \mapsto h \sqcup k$, defined by the following diagram:



EXAMPLE 3.3.1 i) **Set**: disjoint union $a \hookrightarrow a \sqcup b \hookleftarrow b$.

ii) **Top**: disjoint union $a \hookrightarrow a \sqcup b \hookleftarrow b$.

iii) **Top_{*}**: wedge product $\langle a, *_a \rangle \hookrightarrow a \sqcup b / \langle *_a = *_b \rangle \hookleftarrow \langle b, *_b \rangle$.

iv) **Ab_RMod**: direct sum $a \hookrightarrow a \oplus b \hookleftarrow b$.

v) **Grp**: free group $a \hookrightarrow \langle a, b \rangle \hookleftarrow b$.

vi) **CRng**: tensor product $a \hookrightarrow a \otimes b \hookleftarrow b$.

vii) P (preordered set): least upper bound $a \leq a \cup b \geq b$.

Infinite Coproducts

X を set とする. $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^X$ を **diagonal functor**, where

- $\text{obj.}: \Delta c := \langle c_x = c \rangle_{x \in X}$,
- $\text{arr.}: \Delta f := \langle f_x = f \rangle_{x \in X}$,

とする.

DEFINITION 3.3.2

\mathcal{C} を category, X を set とし, $a = \langle a_x \rangle_{x \in X} \in \mathcal{C}^X$ とする. $\langle c \in \mathcal{C}, i_x: a_x \rightarrow c, x \in X \rangle$ が **coproduct of a** であるとは, $\langle c, i_x, x \in X \rangle$ が **universal arrow from a to Δ** であることをいう. このとき,

$$\begin{aligned} c &= \coprod_{x \in X} a_x = \coprod a_x = \coprod a \\ &= \bigoplus_{x \in X} a_x = \bigoplus a_x = \bigoplus a \end{aligned}$$

などと書く.

$$\begin{array}{ccc} a_x & \xrightarrow{i_x} & \coprod_{x'} a_{x'} \\ & \searrow f_x & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & d \end{array}$$

$a = \langle a_x \rangle \in \mathcal{C}^X$ の coproduct について, 以下の全単射がある:

$$\coprod_{x \in X} \mathcal{C}(a_x, d) \cong \mathcal{C}\left(\coprod_{x \in X} a_x, d\right), \quad \langle f_x \rangle \mapsto \tilde{f}, \quad \text{naturally in } d,$$

with inverse $f \mapsto \langle f i_x \rangle$.

REMARK 3.3.2 \mathcal{C} を category every X -fold family of whose objects have the coproduct とすると, X -fold functor $\coprod: \mathcal{C}^X \rightarrow \mathcal{C}$ を定める:

- $\text{obj.}: \langle a_x \rangle \mapsto \coprod a_x$;
- $\text{arr.}: \langle h_x \rangle \mapsto \coprod h_x$, defined by the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} a_x & \xrightarrow{i_x} & \coprod a_{x'} \\ \downarrow h_x & \searrow j_x h_x & \downarrow \exists! \coprod h_{x'} \\ b_x & \xrightarrow{j_x} & \coprod b_{x'} \end{array}$$

Copowers

$b = \langle b_x = a \rangle_{x \in X} \in \mathcal{C}^X$ の coproduct を **copower of a** といひ, $X \cdot a := \coprod_x a$ と書く. このとき,

$$\mathcal{C}(a, d)^X \cong \mathcal{C}(X \cdot a, d), \quad \text{naturally in } d.$$

EXAMPLE 3.3.2 i) **Set**: $a = Y$ の copower は, $X \cdot Y = X \times Y$.

Cokernels

DEFINITION 3.3.3

\mathcal{C} を category that has the null object z とし, $f: a \rightarrow b$ とする. $\langle e \in \mathcal{C}, u: b \rightarrow e \rangle$ が **cokernel of f** であるとは, $uf = 0$ であつて, 任意の射 $h: b \rightarrow c$ with $hf = 0$ に対して, 唯一つの射 $\tilde{h}: e \rightarrow c$ が存在して, $h = \tilde{h} \circ u$ とできることをいう.

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{u} & e \\ & & \searrow h & & \downarrow \exists! \tilde{h} \\ & & & & c \end{array}$$

The cokernel $\langle r, u \rangle$ of f とは, universal element of the functor $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, where

$$Hc := \{h: b \rightarrow c: hf = 0\},$$

に他ならない.

EXAMPLE 3.3.3 i) $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$, etc., とする. \mathcal{C} における cokernel of $f: a \rightarrow b$ は, 通常の意味での cokernel である. すなわち, $\langle \text{coker } f := b/\text{im } f, \pi: b \twoheadrightarrow \text{coker } f \rangle$ のこと.

Coequalizers

DEFINITION 3.3.4

\mathcal{C} を category とし, $f, g: a \rightrightarrows b$ を \mathcal{C} の射とする. $\langle e \in \mathcal{C}, u: b \rightarrow e \rangle$ が **coequalizer of $\langle f, g \rangle$** であるとは, $uf = ug$ であつて, 任意の射 $h: b \rightarrow c$ with $hf = hg$ に対して, 唯一つの射 $\tilde{h}: e \rightarrow c$ が存在して, $h = \tilde{h}u$ とできることをいう.

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightleftharpoons[g]{f} & b & \xrightarrow{u} & e \\ & & \searrow h & & \downarrow \exists! \tilde{h} \\ & & & & c \end{array}$$

REMARK 3.3.3 The coequalizer を universal arrow と考えることもできる. \Downarrow を, category $\cdot \rightrightarrows \cdot$ that has only two objects とする. このとき, \mathcal{C}^{\Downarrow} は, category consisting of

- **obj.:** 射 $\langle f, g \rangle: a \rightrightarrows b$;
- **arr.:** 射 $\langle f, g \rangle: a \rightrightarrows b$ と $\langle f', g' \rangle: a' \rightrightarrows b'$ に対して, $\langle h: a \rightarrow a', k: b \rightarrow b' \rangle$ s.t. $kf = f'h$ and $kg = g'h$.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightleftharpoons[f]{g} & b \\
 h \downarrow & & \downarrow k \\
 a' & \xrightleftharpoons[f']{g'} & b'
 \end{array}$$

$\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\Downarrow}$ を diagonal functor, defined as:

- **obj.:** $\Delta c := \langle 1_c, 1_c \rangle$,
- **arr.:** $\Delta r := \langle r, r \rangle: \langle 1_c, 1_c \rangle \rightarrow \langle 1_{c'}, 1_{c'} \rangle$ ($r: c \rightarrow c'$),

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightleftharpoons[1_c]{1_c} & c \\
 r \downarrow & & \downarrow r \\
 c' & \xrightleftharpoons[1_{c'}]{1_{c'}} & c'
 \end{array}$$

とする.

このとき, 射 $h: b \rightarrow c$ with $hf = hg$, where $f, g: a \rightrightarrows b$, とは, \mathcal{C}^{\Downarrow} の射 $\langle hf, h \rangle: \langle f, g \rangle \rightarrow \langle 1_c, 1_c \rangle$ のことである.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightleftharpoons[f]{g} & b \\
 hf \downarrow & & \downarrow h \\
 c & \xrightleftharpoons[1_c]{1_c} & c
 \end{array}$$

従って, $\langle e, u \rangle$ が coequalizer of $\langle f, g \rangle$ であるとは, universal arrow from $\langle f, g \rangle$ to Δ に他ならない.

$$\begin{array}{ccc}
 e & & \langle f, g \rangle \\
 \downarrow \exists! \tilde{h} & \swarrow \langle uf, u \rangle & \searrow \langle hf, h \rangle \\
 c & \langle 1_e, 1_e \rangle \dashrightarrow \langle 1_c, 1_c \rangle & \\
 & \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle &
 \end{array}$$

任意の平行射の族 $\langle f_x: a \rightarrow b \rangle_{x \in X}$ についても同様に定義できる. すなわち, $\langle e, u \rangle$ が coequalizer of $\langle f_x \rangle$ であるとは, $uf_x = uf_y$ ($\forall x, y \in X$) であって, 任意の射 $h: b \rightarrow c$ with $hf_x = hf_y$ ($\forall x, y \in X$) に対して, 唯一つの射 $\tilde{h}: e \rightarrow c$ が存在して, $h = \tilde{h}u$ とできることをいう.

EXAMPLE 3.3.4 i) $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, \mathbf{RMod}$, etc., とする. $f, g: a \rightrightarrows b$ の coequalizer は, $f - g$ の cokernel $b \twoheadrightarrow \text{coker}(f - g)$ である.

ii) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Top}$, etc., とする. $f, g: a \rightrightarrows b$ の coequalizer は, $\langle b/R, \pi: b \twoheadrightarrow b/R \rangle$, where

$$R := \{ \langle fx, gx \rangle : x \in a \} \subset b \times b,$$

である.

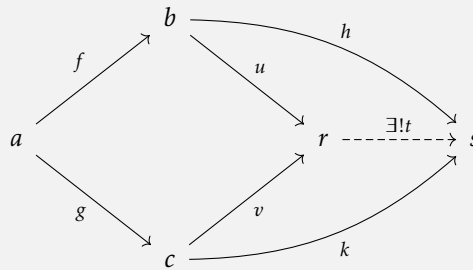
Pushouts

DEFINITION 3.3.5

\mathcal{C} を category とし, $f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ とする. $\langle r \in \mathcal{C}, u: b \rightarrow r, v: c \rightarrow r \rangle$ が pushout of $\langle f, g \rangle$ であるとは, $uf = vg$ であつて, 任意の $\langle s \in \mathcal{C}, h: b \rightarrow s, k: c \rightarrow s \rangle$ with $hf = kg$ に対して, 唯一つの射 $t: r \rightarrow s$ が存在して, $h = tu$ かつ $k = tv$ とできることをいう.

$$r = b \amalg_a c = b \amalg_{\langle f, g \rangle} c$$

などと表す.



REMARK 3.3.4 The pushout of $\langle f, g \rangle$ を universal arrow として捉える. $\mathcal{C}^{\leftarrow \rightarrow}$ は, category consisting of

- obj.: $\langle h, k \rangle: \langle a, a \rangle \rightarrow \langle b, c \rangle$,
- arr.: $\langle h, k \rangle \rightarrow \langle h', k' \rangle$, s.t.

$$\begin{array}{ccccc} b & \xleftarrow{h} & a & \xrightarrow{k} & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b' & \xleftarrow{h'} & a' & \xrightarrow{k'} & c' \end{array}$$

である. $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\leftarrow \rightarrow}$ を, diagonal functor, where

- obj.: $\Delta r := \langle 1_r, 1_r \rangle$,
- arr.: $\Delta h := \langle h, h, h \rangle: \langle 1_r, 1_r \rangle \rightarrow \langle 1_s, 1_s \rangle, (h: r \rightarrow s)$,

とする. このとき, $\langle h, k \rangle: \langle b, c \rangle \rightarrow \langle s, s \rangle$ with $hf = kg$ とは, 射 $\langle hf, h, k \rangle: \langle f, g \rangle \rightarrow \Delta s$ のことである.

$$\begin{array}{ccccc} b & \xleftarrow{f} & a & \xrightarrow{g} & c \\ \downarrow h & & \downarrow hf & & \downarrow k \\ s & \xleftarrow{1_s} & s & \xrightarrow{1_s} & s \end{array}$$

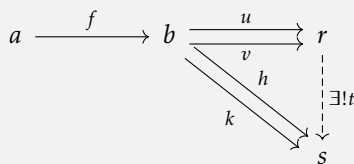
従って, pushout $\langle r, u, v \rangle$ of $\langle f, g \rangle$ とは, universal arrow from $\langle f, g \rangle$ to Δ のことである.

EXAMPLE 3.3.5 i) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}, \text{ etc.}$, とする. $\langle f, g \rangle: \langle a, a \rangle \rightarrow \langle b, c \rangle$ の pushout は, $b \sqcup c$ において, $fx \in b$ と $gx \in c$ を同一視したものである. (演習問題 (2) 参照.)

Cokernel Pair

DEFINITION 3.3.6

\mathcal{C} を category, $f: a \rightarrow b$ とする. The **cokernel pair of f** とは, pushout of $\langle f, f \rangle$ のことである, i. e., $r \in \mathcal{C}$ と $u, v: b \rightrightarrows r$ with $uf = vf$ であって, 任意の射 $h, k: b \rightrightarrows s$ with $hf = kf$ に対して, 唯一つの射 $t: r \rightarrow s$ が存在して, $tu = h$ かつ $tv = k$ とできることをいう.

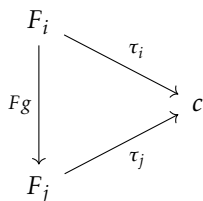


Colimits

今までの議論を一般化する. \mathcal{C}, J を categories とする. $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ を, 次のように定まる functor, called **diagonal functor**, とする:

- obj.: $\Delta c: J \rightarrow \mathcal{C}$, constant functor, i. e., $(\Delta c)i = c$ and $(\Delta c)g = 1_c$ ($i, j \in J, g: i \rightarrow j$);
- arr.: $\Delta f: \Delta c \rightarrow \Delta c'$, constant transformation, i. e., $(\Delta f)i = f: c \rightarrow c'$ ($f: c \rightarrow c', i \in J$).

このとき, natural transformation $\tau: F \rightarrow \Delta c$ は, 射の族 $\langle \tau_i: F_i \rightarrow c \rangle_{i \in J}$ であって, 各 $g: i \rightarrow j$ に対して $\tau_i = \tau_j \circ Fg$ なるものである.



これを, **cone from base F to the vertex c** という.

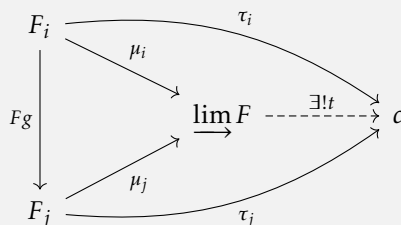
DEFINITION 3.3.7

\mathcal{C}, J を categories とし, $F: J\mathcal{C}$ を functor とする. A **colimit of F** (or, a **direct limit**, a **inductive**

limit of F) とは, universal arrow $\langle r \in \mathcal{C}, \mu: F \rightarrow \Delta r \rangle$ from F to Δ のことである.

$$r = \varinjlim F = \text{colim } F$$

などを書く. μ を **limiting cone**, or **universal cone** from F という.



EXAMPLE 3.3.6 i) $J = \omega = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots\}$, $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ とする. A functor $F: \omega \rightarrow \mathbf{Set}$ とは, 昇鎖

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$$

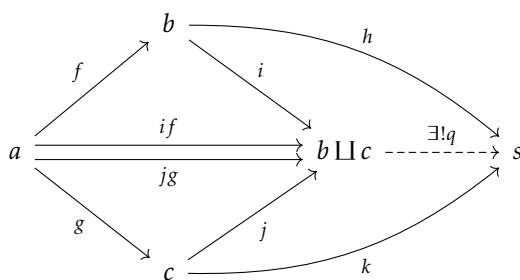
のことである. このとき,

$$\varinjlim F = U := \bigcup_n F_n$$

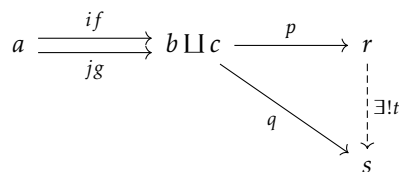
であり, inclusions $F_i \hookrightarrow U$ が limiting cone となる. $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \text{etc.}$, でも同様.

Exercises

(2) \mathcal{C} を category that has coproduct and coequalizer of every pair of two objects とし, $\langle f, g \rangle: \langle a, a \rangle \rightarrow \langle b, c \rangle$ とする. このとき, pushout of $\langle f, g \rangle$ は存在する. まず, coproduct の普遍性より, 任意の $\langle h, k \rangle: \langle b, c \rangle \rightarrow \langle s, s \rangle$ に対して, 唯一つの射 $q: b \sqcup c \rightarrow s$ が存在して, $qi = h$ かつ $qj = k$ となる.



The coequalizer of $\langle if, jg \rangle: a \rightrightarrows b \sqcup c$ が存在し, それを $p: b \sqcup c \rightarrow r$ とおく.



すると, $\langle r, pi, pj \rangle$ が pushout of $\langle f, g \rangle$ になる. 実際, $(pi)f = (pj)g$ は定義から明らかである. 任意の射 $\langle h, k \rangle: \langle b, c \rangle \rightarrow \langle s, s \rangle$ with $hf = kg$ に対して, $qi = h$ かつ $qj = k$ なる唯一の射 $q: b \amalg c \rightarrow s$ を取れば,

$$q(if) = (qi)f = hf = kg = (qj)g = q(jg)$$

であるから, coequalizer の普遍性より $q = tp$ なる唯一の射 $t: r \rightarrow s$ が存在する. このとき, $t(pi) = qi = h$ かつ $t(pj) = qj = k$ となる. よって, $\langle r, pi, pj \rangle$ は pushout of $\langle f, g \rangle$ である.

(3) \mathbf{Matr}_k , category consisting of

- obj.: $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$,
- arr.: $m \times n$ matrix $A: n \rightarrow m$,

を考え, A, B を $m \times n$ matrices とする. $T := A - B$ とおく. A, B の coequalizer は, $(m - \text{rank } T) \times m$ matrix

$$P := (1_{m - \text{rank } T}, 0_{\text{rank } T})$$

である. (1_n と 0_n は, それぞれ $n \times n$ の単位行列と零行列を表す.) $A: n \rightarrow m$ を, linear map $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ と考えると分かりやすい. このとき, (linear maps として) $C: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対して,

$$CA = CB \iff CT = 0 \iff \exists! \tilde{C}: \text{coker } T \rightarrow \mathbf{R}^p \text{ s.t. } C = \tilde{C}P$$

が成り立つ. $\text{coker } T = \mathbf{R}^m / \text{im } T \cong \mathbf{R}^{m - \text{rank } T}$ であるから, 最初の主張が確かめられる.

(5) X を set とし, $E \subset X \times X$ をその equivalence relation とする. X/E は, 以下の図式で定まる coequalizer である:

$$\begin{array}{ccccc} E & \hookrightarrow & X \times X & \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} & X & \xrightarrow{\pi} & X/E \\ & & & & \searrow f & & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & & & & & Y \end{array}$$

ここで, $\pi_i: X \times X \rightarrow X$ は i -th component への射影 ($i = 1, 2$), $\pi: X \rightarrow X/E$ は標準的全射である.

(6) $a, b \in \mathcal{C}$ の coproduct は, functor

$$\mathcal{C}(a, \cdot) \times \mathcal{C}(b, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad c \mapsto \mathcal{C}(a, c) \times \mathcal{C}(b, c)$$

が representable であるとき, かつそのときに限り存在する. 実際, この functor が representable であることは,

$$\langle r \in \mathcal{C}, \psi: \mathcal{C}(r, \cdot) \cong \mathcal{C}(a, \cdot) \times \mathcal{C}(b, \cdot) \rangle$$

が存在することであるから, $r = a \amalg b$ が存在すれば representable である.

逆に, このような $\langle r, \psi \rangle$ が存在すれば, r が coproduct of a and b together with injection $\psi_r 1_r = \langle i, j \rangle$ となる ($h := \psi^{-1}(f, g)$):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(r, r) & \xrightarrow{\psi_r} & \mathcal{C}(a, r) \times \mathcal{C}(b, r) \\ \mathcal{C}(r, h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(a, h) \times \mathcal{C}(b, h) \\ \mathcal{C}(r, d) & \xrightarrow{\psi_d} & \mathcal{C}(a, d) \times \mathcal{C}(b, d) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1_r & \xrightarrow{\quad} & \langle i, j \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ h & \xrightarrow{\quad} & \langle f, g \rangle = \langle hi, hj \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{i} & a \amalg b & \xleftarrow{j} & b \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! h & \swarrow g & \\
 & & d & &
 \end{array}$$

(7) A を abelian group,

$$J_A := \{H \leq A : \text{finitely generated}\}$$

とおくと, J_A は包含関係について前順序集合 (従って category) となる. $F: J_A \rightarrow \mathbf{Ab}$ を, 次で定義される functor とする:

- $FH := H \in \mathbf{Ab} \ (H \in J_A)$;
- $F\iota_{H,H'} = \iota_{H,H'}: FH \hookrightarrow FH' \ (\iota_{H,H'}: H \hookrightarrow H' \text{ in } J_A)$.

このとき, $A = \varinjlim F$ である. 実際, 任意の abelian group G と group homomorphisms $f_H: H \rightarrow G$ with $f_H = f_{H'} \iota_{H,H'} \ (\forall \iota_{H,H'}: H \hookrightarrow H' \text{ in } J_A)$ に対して,

$$\tilde{f}x := f_H x \quad \text{if } x \in H \subset A$$

と定めれば, これが $\tilde{f} \circ \iota_H = f_H \ (\forall \iota_H: H \in J_A \hookrightarrow A)$ なる唯一の group homomorphism である. ($A = \bigcup_{H \in J_A} H$ に注意せよ.)

これを一般化する. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}, \text{etc.}$, とする. J を family of objects of \mathcal{C} とし, 包含関係について前順序集合と見る. c を, $\bigcup_{d \in J} d$ から生成される free object (i. e., coproduct of J) を各 $\iota_{d,d'}: d \hookrightarrow d'$ で割ったものとする. 自然な包含写像 $\iota_d: d \hookrightarrow c$ を取る. 明らかに, すべての $\iota_{d,d'}: d \hookrightarrow d'$ に対して, $\iota_d = \iota_{d'} \circ \iota_{d,d'}$ が成り立つ. $e \in \mathcal{C}$ と $f_d: d \rightarrow e$ with $f_d = f_{d'} \circ \iota_{d,d'} \ (\forall \iota_{d,d'}: d \hookrightarrow d' \text{ in } J)$ を任意に取り,

$$\tilde{f}x := f_d x \quad \text{if } x \in d \subset c$$

と定める. これは well-defined である. 実際, $d \cap d' \neq \emptyset$ のとき $d \subset d'$ または $d' \subset d$ であるが, そのとき

$$f_d x = f_{d'}|_d x, \quad f_{d'} x = f_d|_{d'} x, \quad \text{resp.}$$

となる. これが, 唯一の $\tilde{f} \circ \iota_d = f_d \ (\forall d \in J)$ なる射であるのは明らか. よって, $c = \varinjlim F$, where

- $Fd = d \in \mathcal{C} \ (d \in J)$,
- $F\iota_{d,d'} = \iota_{d,d'}: Fd \hookrightarrow Fd' \ (\iota_{d,d'}: d \hookrightarrow d' \text{ in } J)$,

である.

§ 3.4 Products and Limits