# Notes of Categories for the Working Mathematicians

## Naughie

## **Contents**

Preface			1
3	Uni	iversals and Limits	1
	3.1	Universal arrows	2
	3.2	The Yoneda Lemma	5

Contents

## Preface

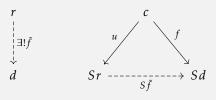
これは、@naughiez による、MacLane's Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです。

## 第3章 Universals and Limits

## § 3.1 Universal arrows

#### **DEFINITION 3.1.1**

 $S: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$  を functor とし, $c \in \mathscr{C}$  を object とする。 $\langle r \in \mathcal{D}, u \colon c \to Sr \rangle$  が universal arrow from c to S であるとは,任意の $\langle d \in \mathcal{D}, f \colon c \to Sd \rangle$  に対し,唯一つの射  $\tilde{f} \colon r \to d$  が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$  とできることをいう.



 $c \xrightarrow{u} Sr$ : universal arrow  $\iff c \xrightarrow{u} Sr$ : initial object in  $(c \downarrow S)$ 

である. 特に, universal arrow は unique up to isomorphism (if exists).

以下, 特に断らない限り,  $U: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  は forgetful functor とする.

**EXAMPLE 3.1.1** i) k を field, X を set とする.  $X \hookrightarrow U\operatorname{span}_k X$  は universal arrow from X to  $U \colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ .

- ii) G を graph とすると、 $P: G \to U\mathscr{C}_G$  は universal arrow from G to  $U: \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$ .
- iii) X を set,  $\langle X \rangle$  を X から生成された free group とする.  $X \hookrightarrow U\langle X \rangle$  は universal arrow from X to U:  $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ .
- iv)  $\mathbf{Dom}_m$  を次のように定める:
  - obj.: objects of **Dom**, *i. e.*, integral domains;
  - arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して(実際, ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから,自明なものしかない ),U: Fld  $\rightarrow$  Dom $_m$ 

が定まる.  $D \in \mathbf{Dom}_m$  に対して Frac D をその field of fractions とすれば,  $D \hookrightarrow U$  Frac D は universal arrow from D to U.

**REMARK 3.1.1 Dom**<sub>m</sub> を **Dom** に置き換えてはいけない!実際, F を field とし, ring homomorphism  $f: D \to F$  を  $\tilde{f}$ : Frac  $D \to F$  に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない. そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \Longrightarrow f(r) \in F \setminus \{0\}$$

- v) Met を次のように定める:
  - · obj.: metric spaces;
  - arr.: maps preserving metric.

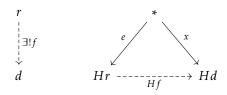
**CMet**  $\subset$  **Met**  $\overleftarrow{e}$ , full subcategory whose objects are complete とする. X  $\overleftarrow{e}$  metric space,  $\overline{X}$   $\overleftarrow{e}$   $\overleftarrow{e}$  completion とすると,  $X \to \overline{X}$  は universal arrow from X to U: **CMet**  $\to$  **Met**.

### **DEFINITION 3.1.2**

 $H: \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$  を functor とする.  $\langle r \in \mathcal{D}, e \in Hr \rangle$  が universal element of H とは、任意の  $\langle d \in \mathcal{D}, x \in Hd \rangle$  に対して、唯一つの射  $f: r \to d$  が存在して、(Hf)e = x とできることをいう.

**REMARK 3.1.2** 特殊な状況では、universal arrow と universal element は同じものである.

•  $H: \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$  が functor で、 $\langle r, e \rangle$  が universal element であるとは、 $e \in Hr$  を射  $* \xrightarrow{e} Hr$  in  $\mathbf{Ens}$  と見たときに、 $\langle r, e \rangle$  が universal arrow from \* to H であること.



- 逆に、  $\mathscr{C}$  を small category とし、  $S: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$  を functor、  $c \in \mathscr{C}$  とすると、  $\langle r, u \rangle$  が universal arrow from c to S であるとは、これが  $H = \mathscr{C}(c, S \cdot)$  の universal element であること。
- **EXAMPLE 3.1.2** i) S  $\varepsilon$  set,  $E \subset S \times S$   $\varepsilon$  S  $\mathscr O$  equivalence relation,  $\pi: S \twoheadrightarrow S/E$  とする.  $\langle S/E, \pi \rangle$  は universal element of H: **Set**  $\to$  **Set**, where
  - obj.:  $HX := \{f: S \to X: sEs' \Longrightarrow fs = fs'\};$
  - arr.:  $Hg: HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY (g: X \to Y)$ .
  - ii) G を group,  $N \triangleleft G$ ,  $\pi \colon G \twoheadrightarrow G/N$  とする.  $\langle G/N, \pi \rangle$  は universal element of  $H \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ , where
    - obj.:  $HG' := \{f : G \rightarrow G' : \text{ group hom. s. t. ker } f \subset N\};$

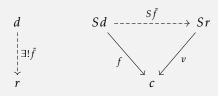
- arr.:  $Hg: HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG''$  ( $g: G' \to G''$ ).
- iii)  $V_1, V_2$  を vector spaces /k,  $H: \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$  を次で定まる functor とする:
  - obj.:  $HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f : V_1 \times V_2 \rightarrow W : \mathbf{bilinear}\};$
  - arr.:  $Hg: HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW'(g: W \to W')$ .

 $\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes \rangle$   $\forall x$ , universal element of H. ( $\otimes: V_1 \times V_2 \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$ .)

 $Vect_k$  ではなく、 $Mod_R$  でもよい.

### **DEFINITION 3.1.3**

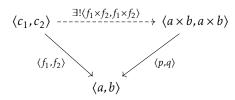
 $S: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  を functor とし, $c \in \mathcal{C}$  とする. $\langle r \in \mathcal{D}, v : Sr \to c \rangle$  が universal arrow from S to c であるとは,これが  $(S \downarrow c)$  の terminal object であることをいう.



 $a,b\in \mathscr{C}$  を任意に取り、 $p\colon a\times b\to a, q\colon a\times b\to b$  を canonical projections とする.  $\langle p,q\rangle$  は universal arrow to  $\langle a,b\rangle$  from  $\Delta\colon \mathscr{C}\to\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ , where

- obj.:  $\Delta c := \langle c, c \rangle$ ;
- arr.:  $\Delta f := \langle f, f \rangle$ .

この $\Delta$  を diagonal functor という.



## **Exercises**

- (2) The universal element of  $\mathfrak{P} \colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$  (power set) is  $\langle \{0,1\}, 1 \in \{0,1\} \rangle$
- - $U: \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp} \Longrightarrow \langle G/[G,G], \pi \colon G \twoheadrightarrow G/[G,G] \rangle$  (commutator group and abelianization),
  - $U: \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \Longrightarrow \langle R[G], \iota: G \hookrightarrow R[G] \rangle$  (group ring),
  - $U: \mathbf{Top} \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle (X, 2^X), \mathrm{id}_X : X \to X \rangle$  (discrete topology),
  - $U : \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle X \mid [\{X\}, \iota : X \hookrightarrow X \mid [\{X\}\}] \rangle$  (one-point compactification).

## § 3.2 The Yoneda Lemma

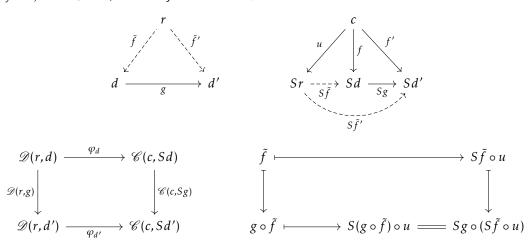
### **PROPOSITION 3.2.1**

 $S: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  を functor とし, $c \in \mathcal{C}$  とする. $\langle r, u \rangle$  が universal arrow from c to S ならば,

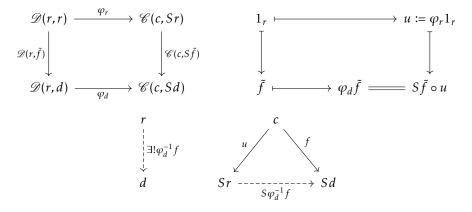
$$\mathcal{D}(r,d) \cong \mathcal{C}(c,Sd)$$
 naturally in  $d$  via  $\tilde{f} \mapsto S\tilde{f} \circ u$ .

逆に、 $\mathcal{D}(r,d) \cong \mathcal{C}(c,Sd)$  naturally in d ならば、唯一つの  $u: c \to Sr$  が存在して、 $\langle r,u \rangle$  は universal arrow from c to S である.

Proof. (⇒)  $\langle r,u \rangle$  を universal arrow from c to S とする. このとき、(by definition of universal arrows)  $\mathcal{D}(r,d) \cong \mathcal{C}(c,Sd)$  である. これが natural in d であることを見るために、 $g:d \to d'$  とすると、 $S(g:\tilde{f}) \circ u = Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)$  となる、i.e., naturality in d を示せた.



( $\iff$ )  $\mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathscr{C}(c,Sd)$  naturally in d とする.このとき  $\varphi_d$  の自然性より, $u \coloneqq \varphi_r 1_r$  とおけば,任意の  $\langle d \in \mathscr{D}, f \colon c \to Sd \rangle$  に対して唯一つの  $\tilde{f} \colon r \to d$  が存在して, $f = S\tilde{f} \circ u$  となる.実際, $\tilde{f} \coloneqq S\varphi_d^{-1}f$  とおけば よい.このような  $\tilde{f}$  の一意性は, $\varphi_d$  が bijective であることから従う.



**DEFINITION 3.2.1** 

 $\mathscr{D}$  を category whose hom-sets are small とし,  $K: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$  を functor とする.  $\langle r \in \mathscr{D}, \psi : \mathscr{D}(r, \cdot) \cong K \rangle$  を *representation of* K といい, r を *representing object* という. A representation が存在するとき, K は representable であるという.

**PROPOSITION 3.2.1** より、 $\mathscr{C}(c,S)$  は  $\langle r,\varphi \rangle$  によって represents され、従って representable である.

#### **PROPOSITION 3.2.2**

 $\mathscr{D}$  を category whose hom-sets are small とし,  $K: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$  を functor とする. もし  $\langle r \in d, u: * \to Kr \rangle$  が universal arrow from \* to K ならば,

$$\psi_d : \mathcal{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(u*)$$

によって定まる  $\psi$  は representation of K である.

逆に, K の各 representation は, 唯一つの universal arrow from \*  $\rightarrow K$  からこのようにして得られる.

*Proof.* (⇒)  $\langle r, u \rangle$  & universal arrow from \* to  $K \geq f$  ≥ f ≥ **PROPOSITION 3.2.1**  $\sharp$  f ),

$$\psi_d \colon \mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*,Kd) \cong Kd$$
 naturally in  $d$ 

なる自然変換  $\psi$ :  $\mathcal{D}(r,\cdot) \cong K$  が存在する. この対応は,

$$\tilde{f} \mapsto K\tilde{f} \circ u \mapsto (K\tilde{f} \circ u)(*) = K(\tilde{f})(u*)$$

で与えられる.

(**二**) 逆に、 $\langle r, \psi \rangle$  を representation of K とする.

$$\varphi_d : \mathcal{D}(r,d) \stackrel{\psi_d}{\cong} Kd \cong \mathbf{Set}(*,Kd)$$
 naturally in  $d$ 

によって natural isomorphism  $\varphi: \mathscr{D}(r,\cdot) \cong \mathbf{Set}(*,K\cdot)$  を定義すれば,再び **PROPOSITION 3.2.1** より,唯一 つの  $u:* \to Kr$  が存在して, $\langle r,u \rangle$  は universal arrow from \* to K となる.このとき K は,

$$\psi_d \colon \mathscr{D}(r,d) \stackrel{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*,Kd) \cong Kd$$

によって represents される.

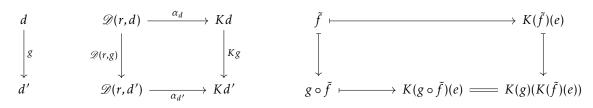
### LEMMA 3.2.1 (米田の補題 (Yoneda Lemma))

$$\exists y \colon \operatorname{Nat}(\mathcal{D}(r,\cdot),K) \cong Kr, \quad \alpha \mapsto \alpha_r 1_r.$$

*Proof.*  $y: \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \ni \alpha \mapsto \alpha_r 1_r \in Kr$  の逆射を求めればよい。今  $e \in Kr$  が任意に与えられたとする。 The natural transformation  $\alpha: \mathscr{D}(r,\cdot) \to K$  を次のように定める:

$$\alpha_d : \mathcal{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(e).$$

このとき  $\alpha_r 1_r = K(1_r)(e) = e$  であり、さらに



となる. よって、 $\alpha \in \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$ で、 $y\alpha = e$ , i. e., y is bijective.  $(\alpha \ \mathcal{O}$  一意性は **PROPOSITION 3.2.2** から分かる.)

### **COROLLARY 3.2.3**

 $\mathscr{D}$  を category whose hom-sets are small とし、 $r,s\in \mathscr{D}$  とする。このとき、任意の natural transformation  $\alpha\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \overset{.}{\to} \mathscr{D}(s,\cdot)$  に対して、唯一つの射  $h\colon s\to r$  が存在して、 $\alpha=\mathscr{D}(h,\cdot)$  となる、i. e.,

$$\alpha_d = \mathcal{D}(h,d) \colon \mathcal{D}(r,d) \to \mathcal{D}(s,d), \quad f \mapsto f \circ h.$$

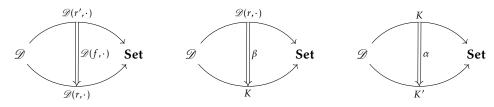
*Proof.* **LEMMA 3.2.1** とその証明を functor  $K=\mathcal{D}(s,\cdot)$  に適用すれば、 $\alpha$  に対して唯一つの  $h\in\mathcal{D}(s,r)$  が存在して、

$$\alpha_d : \mathcal{D}(r,d) \to \mathcal{D}(s,d), \quad f \mapsto \mathcal{D}(s,f)h = f \circ h$$

とできる.

**LEMMA 3.2.1** の全単射 y: Nat( $\mathcal{D}(r,\cdot)$ ,K)  $\cong Kr$  は、実は natural transformation である。それを述べるために、まず Nat( $\mathcal{D}(r,\cdot)$ ,K) と Kr が、K と r に関する functors と見なせることを確認する.

- Kr: evaluation functor  $E: \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ , where
  - obj.:  $E\langle K, r \rangle = Kr$ ;
  - arr.:  $E\langle \alpha : K \xrightarrow{\cdot} K', f : r \rightarrow r' \rangle = K'f \circ \alpha_r = \alpha_{r'} \circ Kf : Kr \rightarrow K'r'$
- Nat( $\mathcal{D}(r,\cdot)$ , K): functor  $N: \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ , where
  - obj.:  $N\langle K, r \rangle := \text{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K);$
  - arr.:  $K\langle \alpha \colon K \xrightarrow{\cdot} K', f \colon r \to r' \rangle$ :  $\operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r, \cdot), K) \to \operatorname{Nat}(\mathscr{D}(r', \cdot), K'), \ \beta \mapsto \alpha \beta \mathscr{D}(f, \cdot).$



## **LEMMA 3.2.2**

## **LEMMA 3.2.1** における全単射

$$y = y_{\langle K, r \rangle} \colon \operatorname{Nat}(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \cong Kr$$

は、natural isomorphism  $N \stackrel{\mathcal{V}(K,r)}{\cong} E$  を定める。すなわち、v は natural in K and r である。

 $f = \mathcal{D}(r, f)1_r$  に注意すれば、以下の可換図式から従う:

The functor  $Y: \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ , defined as

- obj.:  $Yr := \mathcal{D}(r, \cdot)$ ,
- arr.:  $Y f := \mathcal{D}(f, \cdot) : \mathcal{D}(r, \cdot) \xrightarrow{\cdot} \mathcal{D}(s, \cdot) (f : s \rightarrow r),$

を **Yoneda functor** という. これは full and faithful である. 実際, full であることも, faithful であること も, COROLLARY 3.2.3 から従う.

Yoneda functor の双対  $Y': \mathcal{D} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$  は、次で定まる:

- obj.:  $Y'r := \mathcal{D}(\cdot, r)$ ;
- arr.:  $Y'f := \mathcal{D}(\cdot, f) : \mathcal{D}(\cdot, s) \xrightarrow{\cdot} \mathcal{D}(\cdot, r) (f : s \rightarrow r)$ .

これは faithful である. 実際,  $f, f': s \rightarrow r$  が Y'f = Y'f' とすると,

$$f = (Y'f)_s 1_s = (Y'f')_s 1_s = f'.$$

逆に、これらの functor Y, Y' が定義できるのなら、 $\mathcal{D}$  は category whose hom-sets are small でなければな らない. なぜなら, このとき任意の  $r,s \in \mathcal{D}$  に対して,  $\mathcal{D}(r,s) = (Yr)s = (Y's)r \in \mathbf{Set}$  は small だからである. より大きい ② に対しても、Set を Ens に置き換えたものが同様に成立する.