Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

Contents

Preface

これは，@naughiez による，MacLane’s Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです．

第 3 章 Universals and Limits

§ 3.1 Universal arrows

Definition 3.1.1

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ を object とする．$\langle r \in \mathscr{D}, u\colon c \to Sr\rangle$ が ***universal arrow from*** c ***to*** S であるとは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f\colon c \to Sd\rangle$ に対し，唯一つの射 $\tilde{f}\colon r \to d$ が存在して，$f = S\tilde{f} \circ u$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Sr \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"'] & & Sd \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{universal arrow} \\ \iff \quad & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{initial object in } (c \downarrow S) \end{aligned}$$

である．特に，universal arrow は *unique up to isomorphism* (if exists).

以下，特に断らない限り，$U\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ は forgetful functor とする．

Example 3.1.1 i) k を field，X を set とする．$X \hookrightarrow U\mathrm{span}_k X$ は universal arrow from X to $U\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$.

ii) G を graph とすると，$P\colon G \to U\mathscr{C}_G$ は universal arrow from G to $U\colon \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$.

iii) X を set，$\langle X\rangle$ を X から生成された free group とする．$X \hookrightarrow U\langle X\rangle$ は universal arrow from X to $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.

iv) $\mathbf{Dom}_m$ を次のように定める：

- obj.: objects of **Dom**, *i. e.* , integral domains;
- arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して（実際，ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから，自明なものしかない），$U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$

が定まる．$D \in \mathbf{Dom}_m$ に対して $\operatorname{Frac} D$ をその field of fractions とすれば，$D \hookrightarrow U \operatorname{Frac} D$ は universal arrow from D to U.

REMARK 3.1.1 $\mathbf{Dom}_m$ を $\mathbf{Dom}$ に置き換えてはいけない！実際, F を field とし, ring homomorphism $f: D \to F$ を $\tilde{f}: \operatorname{Frac} D \to F$ に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない．そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \Longrightarrow f(r) \in F \setminus \{0\}$$

i. e. , f は monomorphism でなければならない.

v）**Met** を次のように定める：
- obj.: metric spaces;
- arr.: maps preserving metric.

CMet $\subset$ **Met** を，full subcategory whose objects are complete とする．X を metric space，$\overline{X}$ をその completion とすると，$X \to \overline{X}$ は universal arrow from X to U: **CMet** $\to$ **Met**.

DEFINITION 3.1.2

$H: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．$\langle r \in \mathscr{D}, e \in Hr \rangle$ が ***universal element of*** H とは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, x \in Hd \rangle$ に対して，唯一つの射 $f: r \to d$ が存在して，$(Hf)e = x$ とできることをいう.

REMARK 3.1.2 特殊な状況では，universal arrow と universal element は同じものである.

- $H: \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ が functor で，$\langle r, e \rangle$ が universal element であるとは，$e \in Hr$ を射 $* \xrightarrow{e} Hr$ in **Ens** と見たときに，$\langle r, e \rangle$ が universal arrow from $*$ to H であること.

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists ! f"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "x"] & \\ Hr \arrow[rr, dashed, "Hf"'] & & Hd \end{tikzcd}$$

- 逆に，$\mathscr{C}$ を small category とし，$S: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor，$c \in \mathscr{C}$ とすると，$\langle r, u \rangle$ が universal arrow from c to S であるとは，これが $H = \mathscr{C}(c, S\,\cdot)$ の universal element であること.

EXAMPLE 3.1.2 i）S を set，$E \subset S \times S$ を S の equivalence relation，$\pi: S \twoheadrightarrow S/E$ とする．$\langle S/E, \pi \rangle$ は universal element of H: **Set** $\to$ **Set**, where
- obj.: $HX := \{f: S \to X : sEs' \Longrightarrow fs = fs'\}$;
- arr.: $Hg: HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY$ ($g: X \to Y$).

ii）G を group，$N \triangleleft G$，$\pi: G \twoheadrightarrow G/N$ とする．$\langle G/N, \pi \rangle$ は universal element of H: **Grp** $\to$ **Set**, where
- obj.: $HG' := \{f: G \to G' : \text{group hom. s. t. } \ker f \subset N\}$;

- arr.: $Hg\colon HG' \ni f \mapsto g\circ f \in HG''$ ($g\colon G' \to G''$).

iii) V_1, V_2 を vector spaces / k, $H\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を次で定まる functor とする：

- obj.: $HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f\colon V_1 \times V_2 \to W : \text{bilinear}\}$;
- arr.: $Hg\colon HW \ni f \mapsto g\circ f \in HW'$ ($g\colon W \to W'$).

$\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes\rangle$ は，universal element of H. ($\otimes\colon V_1 \times V_2 \ni (x,y) \mapsto x\otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$.)

$\mathbf{Vect}_k$ ではなく，$\mathbf{Mod}_R$ でもよい．

Definition 3.1.3

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ とする．$\langle r \in \mathscr{D}, v\colon Sr \to c\rangle$ が ***universal arrow from*** S ***to*** c であるとは，これが $(S \downarrow c)$ の terminal object であることをいう．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{f}"] \\ r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sd \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & Sr \arrow[dl, "v"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Example 3.1.3 i) $\mathscr{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}, \mathbf{Vect}_k$, *etc.* (categories where the direct product $\times$ of two objects are defined) とする．

$a, b \in \mathscr{C}$ を任意に取り，$p\colon a\times b \to a$, $q\colon a \times b \to b$ を canonical projections とする．$\langle p, q\rangle$ は universal arrow to $\langle a, b\rangle$ from $\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}\times\mathscr{C}$, where

- obj.: $\Delta c := \langle c, c\rangle$;
- arr.: $\Delta f := \langle f, f\rangle$.

この Δ を ***diagonal functor*** という．

$$\begin{tikzcd} \langle c_1, c_2\rangle \arrow[rr, dashed, "\exists!\langle f_1\times f_2, f_1\times f_2\rangle"] \arrow[dr, "\langle f_1, f_2\rangle"'] & & \langle a\times b, a\times b\rangle \arrow[dl, "\langle p, q\rangle"] \\ & \langle a, b\rangle & \end{tikzcd}$$

Exercises

(2) The universal element of $\mathfrak{P}\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ (power set) is $\langle \{0,1\}, 1 \in \{0,1\}\rangle$

(3) $G \in \mathbf{Grp}$ (or $\in \mathbf{Ab}$), $X \in \mathbf{Set}$ とする．The universal arrow from G, G, X, X, respectively, to the following forgetful functors are:

- $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp} \Longrightarrow \langle G/[G,G], \pi\colon G \twoheadrightarrow G/[G,G]\rangle$ (commutator group and abelianization),
- $U\colon \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \Longrightarrow \langle R[G], \iota\colon G \hookrightarrow R[G]\rangle$ (group ring),
- $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle (X, 2^X), \mathrm{id}_X\colon X \to X\rangle$ (discrete topology),
- $U\colon \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle X \coprod \{X\}, \iota\colon X \hookrightarrow X\coprod\{X\}\rangle$ (one-point compactification).

§ 3.2 The Yoneda Lemma

Proposition 3.2.1

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ とする．$\langle r, u\rangle$ が universal arrow from c to S ならば，

$$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd) \quad \text{naturally in } d \text{ via } \tilde{f} \mapsto S\tilde{f} \circ u.$$

逆に，$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd)$ naturally in d ならば，唯一つの $u\colon c \to Sr$ が存在して，$\langle r, u\rangle$ は universal arrow from c to S である．

Proof. ($\Longrightarrow$) $\langle r, u\rangle$ を universal arrow from c to S とする．このとき，（by definition of universal arrows）$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd)$ である．これが natural in d であることを見るために，$g\colon d \to d'$ とすると，$S(g\colon \tilde{f}) \circ u = Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)$ となる，*i. e.* , naturality in d を示せた．

$$\begin{tikzcd}
 & r \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}'"] & \\
d \arrow[rr, "g"'] & & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f'"] & \\
Sr \arrow[r, dashed, "S\tilde{f}"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "S\tilde{f}'"'] & Sd \arrow[r, "Sg"'] & Sd'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\varphi_d"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,g)"'] & \mathscr{C}(c,Sd) \arrow[d, "\mathscr{C}(c,Sg)"] \\
\mathscr{D}(r,d') \arrow[r, "\varphi_{d'}"'] & \mathscr{C}(c,Sd')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{f} \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & S\tilde{f} \circ u \arrow[d, mapsto] \\
g \circ \tilde{f} \arrow[r, mapsto] & S(g \circ \tilde{f}) \circ u \arrow[r, equal] & Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)
\end{tikzcd}$$

($\Longleftarrow$) $\mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathscr{C}(c, Sd)$ naturally in d とする．このとき φ_d の自然性より，$u := \varphi_r 1_r$ とおけば，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f\colon c \to Sd\rangle$ に対して唯一つの $\tilde{f}\colon r \to d$ が存在して，$f = S\tilde{f} \circ u$ となる．実際，$\tilde{f} := S\varphi_d^{-1} f$ とおけばよい．このような $\tilde{f}$ の一意性は，φ_d が bijective であることから従う．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(r,r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,\tilde{f})"'] & \mathscr{C}(c,Sr) \arrow[d, "\mathscr{C}(c,S\tilde{f})"] \\
\mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\varphi_d"'] & \mathscr{C}(c,Sd)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_r \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & u := \varphi_r 1_r \arrow[d, mapsto] \\
\tilde{f} \arrow[r, mapsto] & \varphi_d \tilde{f} \arrow[r, equal] & S\tilde{f} \circ u
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi_d^{-1} f"] \\
d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Sr \arrow[rr, dashed, "S\varphi_d^{-1} f"'] & & Sd
\end{tikzcd}$$

□

DEFINITION 3.2.1

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．$\langle r \in \mathscr{D}, \psi\colon \mathscr{D}(r, \cdot) \cong K\rangle$ を ***representation of*** K といい，r を ***representing object*** という．A representation が存在するとき，K は representable であるという．

PROPOSITION 3.2.1 より，$\mathscr{C}(c, S\cdot)$ は $\langle r, \varphi\rangle$ によって represents され，従って representable である．

PROPOSITION 3.2.2

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．もし $\langle r \in d, u\colon * \to Kr\rangle$ が universal arrow from $*$ to K ならば，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r, d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(u*)$$

によって定まる ψ は representation of K である．
逆に，K の各 representation は，唯一つの universal arrow from $* \to K$ からこのようにして得られる．

Proof. $(\Longrightarrow)$ $\langle r, u\rangle$ を universal arrow from $*$ to K とすると，**PROPOSITION 3.2.1** より，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r, d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd \quad \text{naturally in } d$$

なる自然変換 $\psi\colon \mathscr{D}(r, \cdot) \cong K$ が存在する．この対応は，

$$\tilde{f} \mapsto K\tilde{f} \circ u \mapsto (K\tilde{f} \circ u) = K(\tilde{f})(u*)$$

で与えられる．

$(\Longleftarrow)$ 逆に，$\langle r, \psi\rangle$ を representation of K とする．

$$\varphi_d\colon \mathscr{D}(r, d) \overset{\psi_d}{\cong} Kd \cong \mathbf{Set}(*, Kd) \quad \text{naturally in } d$$

によって natural isomorphism $\varphi\colon \mathscr{D}(r, \cdot) \cong \mathbf{Set}(*, K\cdot)$ を定義すれば，再び **PROPOSITION 3.2.1** より，唯一つの $u\colon * \to Kr$ が存在して，$\langle r, u\rangle$ は universal arrow from $*$ to K となる．このとき K は，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r, d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd$$

によって represents される． □

LEMMA 3.2.1 (Yoneda)

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．このとき，

$$\exists y\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r, \cdot), K) \cong Kr, \quad \alpha \mapsto \alpha_r 1_r.$$

Proof. $y\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \ni \alpha \mapsto \alpha_r 1_r \in Kr$ の逆射を求めればよい．今 $e \in Kr$ が任意に与えられたとする．The natural transformation $\alpha\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \dot{\to} K$ を次のように定める：

$$\alpha_d\colon \mathscr{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(e).$$

このとき $\alpha_r 1_r = K(1_r)(e) = e$ であり，さらに

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"] \\ d' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\alpha_d"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,g)"'] & Kd \arrow[d, "Kg"] \\ \mathscr{D}(r,d') \arrow[r, "\alpha_{d'}"'] & Kd' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{f} \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & K(\tilde{f})(e) \arrow[d, mapsto] \\ g\circ\tilde{f} \arrow[r, mapsto] & K(g\circ\tilde{f})(e) \arrow[r, equal] & K(g)(K(\tilde{f})(e)) \end{tikzcd}$$

となる．よって，$\alpha \in \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$ で，$y\alpha = e$，*i. e.* y is bijective.（α の一意性は **Proposition 3.2.2** から分かる．） □