Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

Contents

Preface

これは，@naughiez による，MacLane’s Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです．

第 3 章 Universals and Limits

§ 3.1 Universal arrows

Definition 3.1.1

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ を object とする．$\langle r \in \mathscr{D}, u\colon c \to Sr\rangle$ が ***universal arrow from** c **to** S* であるとは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f\colon c \to Sd\rangle$ に対し，唯一つの射 $\tilde{f}\colon r \to d$ が存在して，$f = S\tilde{f} \circ u$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Sr \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"'] & & Sd \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{universal arrow} \\ \iff \quad & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{initial object in } (c \downarrow S) \end{aligned}$$

である．特に，universal arrow は *unique up to isomorphism* (if exists).

以下，特に断らない限り，$U\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ は forgetful functor とする．

Example 3.1.1 i）k を field，X を set とする．$X \hookrightarrow U\operatorname{span}_k X$ は universal arrow from X to $U\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$.

ii）G を graph とすると，$P\colon G \to U\mathscr{C}_G$ は universal arrow from G to $U\colon \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$.

iii）X を set，$\langle X\rangle$ を X から生成された free group とする．$X \hookrightarrow U\langle X\rangle$ は universal arrow from X to $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.

iv）$\mathbf{Dom}_m$ を次のように定める：

- obj.: objects of $\mathbf{Dom}$, *i. e.*, integral domains;
- arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して（実際，ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから，自明なものしかない），$U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$

が定まる．$D \in \mathbf{Dom}_m$ に対して $\mathrm{Frac}\, D$ をその field of fractions とすれば，$D \hookrightarrow U\,\mathrm{Frac}\, D$ は universal arrow from D to U.

Remark 3.1.1 $\mathbf{Dom}_m$ を $\mathbf{Dom}$ に置き換えてはいけない！実際, F を field とし, ring homomorphism $f\colon D \to F$ を $\tilde{f}\colon \mathrm{Frac}\, D \to F$ に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない．そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \Longrightarrow f(r) \in F \setminus \{0\}$$

i. e., f は monomorphism でなければならない．

v）$\mathbf{Met}$ を次のように定める：
- obj.: metric spaces;
- arr.: maps preserving metric.

$\mathbf{CMet} \subset \mathbf{Met}$ を，full subcategory whose objects are complete とする．X を metric space，$\overline{X}$ をその completion とすると，$X \to \overline{X}$ は universal arrow from X to $U\colon \mathbf{CMet} \to \mathbf{Met}$.

Definition 3.1.2

$H\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．$\langle r \in \mathscr{D}, e \in Hr\rangle$ が ***universal element of*** H とは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, x \in Hd\rangle$ に対して，唯一つの射 $f\colon r \to d$ が存在して，$(Hf)e = x$ とできることをいう．

Remark 3.1.2 特殊な状況では，universal arrow と universal element は同じものである．

- $H\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ が functor で，$\langle r, e\rangle$ が universal element であるとは，$e \in Hr$ を射 $* \xrightarrow{e} Hr$ in $\mathbf{Ens}$ と見たときに，$\langle r, e\rangle$ が universal arrow from $*$ to H であること．

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "x"] & \\ Hr \arrow[rr, dashed, "Hf"'] & & Hd \end{tikzcd}$$

- 逆に，$\mathscr{C}$ を small category とし，$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor，$c \in \mathscr{C}$ とすると，$\langle r, u\rangle$ が universal arrow from c to S であるとは，これが $H = \mathscr{C}(c, S\,\cdot)$ の universal element であること．

Example 3.1.2 i）S を set，$E \subset S \times S$ を S の equivalence relation，$\pi\colon S \twoheadrightarrow S/E$ とする．$\langle S/E, \pi\rangle$ は universal element of $H\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, where
- obj.: $HX := \{f\colon S \to X : sEs' \Longrightarrow fs = fs'\}$;
- arr.: $Hg\colon HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY$ ($g\colon X \to Y$).

ii）G を group，$N \triangleleft G$，$\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ とする．$\langle G/N, \pi\rangle$ は universal element of $H\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, where
- obj.: $HG' := \{f\colon G \to G' : \text{group hom. s. t. } \ker f \subset N\}$;

- arr.: $Hg\colon HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG''$ $(g\colon G' \to G'')$.

iii）V_1, V_2 を vector spaces / k，$H\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を次で定まる functor とする：

- obj.: $HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f\colon V_1 \times V_2 \to W : \text{bilinear}\}$;
- arr.: $Hg\colon HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW'$ $(g\colon W \to W')$.

$\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes\rangle$ は，universal element of H. ($\otimes\colon V_1 \times V_2 \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$.)

$\mathbf{Vect}_k$ ではなく，$\mathbf{Mod}_R$ でもよい．

DEFINITION 3.1.3

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ とする．$\langle r \in \mathscr{D}, v\colon Sr \to c\rangle$ が ***universal arrow from*** S ***to*** c であるとは，これが $(S \downarrow c)$ の terminal object であることをいう．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sd \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & Sr \arrow[dl, "v"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

EXAMPLE 3.1.3 i）$\mathscr{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}, \mathbf{Vect}_k$, *etc.* (categories where the direct product $\times$ of two objects are defined) とする．

$a, b \in \mathscr{C}$ を任意に取り，$p\colon a \times b \to a$, $q\colon a \times b \to b$ を canonical projections とする．$\langle p, q\rangle$ は universal arrow to $\langle a, b\rangle$ from $\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, where

- obj.: $\Delta c := \langle c, c\rangle$;
- arr.: $\Delta f := \langle f, f\rangle$.

この Δ を ***diagonal functor*** という．

$$\begin{tikzcd} \langle c_1, c_2\rangle \arrow[rr, dashed, "\exists! \langle f_1 \times f_2, f_1 \times f_2\rangle"] \arrow[dr, "\langle f_1, f_2\rangle"'] & & \langle a \times b, a \times b\rangle \arrow[dl, "\langle p, q\rangle"] \\ & \langle a, b\rangle & \end{tikzcd}$$

Exercises

(2) The universal element of $\mathfrak{P}\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ (power set) is $\langle \{0,1\}, 1 \in \{0,1\}\rangle$

(3) $G \in \mathbf{Grp}$ (or $\in \mathbf{Ab}$)，$X \in \mathbf{Set}$ とする．The universal arrow from G, G, X, X, respectively, to the following forgetful functors are:

- $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp} \Longrightarrow \langle G/[G,G], \pi\colon G \twoheadrightarrow G/[G,G]\rangle$ (commutator group and abelianization),
- $U\colon \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \Longrightarrow \langle R[G], \iota\colon G \hookrightarrow R[G]\rangle$ (group ring),
- $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle (X, 2^X), \mathrm{id}_X\colon X \to X\rangle$ (discrete topology),
- $U\colon \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle X \sqcup \{X\}, \iota\colon X \hookrightarrow X \sqcup \{X\}\rangle$ (one-point compactification).

§ 3.2 The Yoneda Lemma

Proposition 3.2.1

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ とする．$\langle r, u\rangle$ が universal arrow from c to S ならば，

$$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd) \quad \text{naturally in } d \text{ via } \tilde{f} \mapsto S\tilde{f} \circ u.$$

逆に，$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd)$ naturally in d ならば，唯一つの $u\colon c \to Sr$ が存在して，$\langle r, u\rangle$ は universal arrow from c to S である．

Proof. ($\Longrightarrow$) $\langle r, u\rangle$ を universal arrow from c to S とする．このとき，（by definition of universal arrows）$\mathscr{D}(r,d) \cong \mathscr{C}(c, Sd)$ である．これが natural in d であることを見るために，$g\colon d \to d'$ とすると，$S(g\colon \tilde{f}) \circ u = Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)$ となる，*i. e.*, naturality in d を示せた．

$$\begin{tikzcd}
 & r \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}'"] & \\
d \arrow[rr, "g"'] & & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f'"] & \\
Sr \arrow[r, dashed, "S\tilde{f}"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "S\tilde{f}'"'] & Sd \arrow[r, "Sg"'] & Sd'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\varphi_d"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,g)"'] & \mathscr{C}(c,Sd) \arrow[d, "\mathscr{C}(c,Sg)"] \\
\mathscr{D}(r,d') \arrow[r, "\varphi_{d'}"'] & \mathscr{C}(c,Sd')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{f} \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & S\tilde{f} \circ u \arrow[d, mapsto] \\
g \circ \tilde{f} \arrow[r, mapsto] & S(g \circ \tilde{f}) \circ u \arrow[r, equal] & Sg \circ (S\tilde{f} \circ u)
\end{tikzcd}$$

($\Longleftarrow$) $\mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathscr{C}(c,Sd)$ naturally in d とする．このとき φ_d の自然性より，$u \coloneqq \varphi_r 1_r$ とおけば，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f\colon c \to Sd\rangle$ に対して唯一つの $\tilde{f}\colon r \to d$ が存在して，$f = S\tilde{f} \circ u$ となる．実際，$\tilde{f} \coloneqq S\varphi_d^{-1} f$ とおけばよい．このような $\tilde{f}$ の一意性は，φ_d が bijective であることから従う．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(r,r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,\tilde{f})"'] & \mathscr{C}(c,Sr) \arrow[d, "\mathscr{C}(c,S\tilde{f})"] \\
\mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\varphi_d"'] & \mathscr{C}(c,Sd)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_r \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & u \coloneqq \varphi_r 1_r \arrow[d, mapsto] \\
\tilde{f} \arrow[r, mapsto] & \varphi_d \tilde{f} \arrow[r, equal] & S\tilde{f} \circ u
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi_d^{-1} f"] \\
d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Sr \arrow[rr, dashed, "S\varphi_d^{-1} f"'] & & Sd
\end{tikzcd}$$

□

Definition 3.2.1

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．$\langle r \in \mathscr{D}, \psi\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \cong K\rangle$ を ***representation of*** K といい，r を ***representing object*** という．A representation が存在するとき，K は representable であるという．

Proposition 3.2.1 より，$\mathscr{C}(c, S\cdot)$ は $\langle r, \varphi\rangle$ によって represents され，従って representable である．

Proposition 3.2.2

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．もし $\langle r \in d, u\colon * \to Kr\rangle$ が universal arrow from $*$ to K ならば，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(u*)$$

によって定まる ψ は representation of K である．
逆に，K の各 representation は，唯一つの universal arrow from $* \to K$ からこのようにして得られる．

Proof. ($\Longrightarrow$) $\langle r, u\rangle$ を universal arrow from $*$ to K とすると，**Proposition 3.2.1** より，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd \quad \text{naturally in } d$$

なる自然変換 $\psi\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \cong K$ が存在する．この対応は，

$$\tilde{f} \mapsto K\tilde{f} \circ u \mapsto (K\tilde{f} \circ u)(*) = K(\tilde{f})(u*)$$

で与えられる．
($\Longleftarrow$) 逆に，$\langle r, \psi\rangle$ を representation of K とする．

$$\varphi_d\colon \mathscr{D}(r,d) \overset{\psi_d}{\cong} Kd \cong \mathbf{Set}(*, Kd) \quad \text{naturally in } d$$

によって natural isomorphism $\varphi\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \cong \mathbf{Set}(*, K\cdot)$ を定義すれば，再び **Proposition 3.2.1** より，唯一つの $u\colon * \to Kr$ が存在して，$\langle r, u\rangle$ は universal arrow from $*$ to K となる．このとき K は，

$$\psi_d\colon \mathscr{D}(r,d) \overset{\varphi_d}{\cong} \mathbf{Set}(*, Kd) \cong Kd$$

によって represents される． □

Lemma 3.2.1 **（米田の補題（*Yoneda Lemma*））**

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．このとき，

$$\exists y\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot), K) \cong Kr, \quad \alpha \mapsto \alpha_r 1_r.$$

Proof. $y\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \ni \alpha \mapsto \alpha_r 1_r \in Kr$ の逆射を求めればよい．今 $e \in Kr$ が任意に与えられたとする．The natural transformation $\alpha\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \dot{\to} K$ を次のように定める：

$$\alpha_d\colon \mathscr{D}(r,d) \to Kd, \quad \tilde{f} \mapsto K(\tilde{f})(e).$$

このとき $\alpha_r 1_r = K(1_r)(e) = e$ であり，さらに

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"] \\ d' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{D}(r,d) \arrow[r, "\alpha_d"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,g)"'] & Kd \arrow[d, "Kg"] \\ \mathscr{D}(r,d') \arrow[r, "\alpha_{d'}"'] & Kd' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{f} \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & K(\tilde{f})(e) \arrow[d, mapsto] \\ g\circ\tilde{f} \arrow[r, mapsto] & K(g\circ\tilde{f})(e) \arrow[r, equal] & K(g)(K(\tilde{f})(e)) \end{tikzcd}$$

となる．よって，$\alpha \in \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$ で，$y\alpha = e$，*i. e.*, y is bijective.（α の一意性は **Proposition 3.2.2** から分かる．） □

Corollary 3.2.3

$\mathscr{D}$ を category whose hom-sets are small とし，$r,s \in \mathscr{D}$ とする．このとき，任意の natural transformation $\alpha\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \dot{\to} \mathscr{D}(s,\cdot)$ に対して，唯一つの射 $h\colon s \to r$ が存在して，$\alpha = \mathscr{D}(h,\cdot)$ となる，*i. e.*,

$$\alpha_d = \mathscr{D}(h,d)\colon \mathscr{D}(r,d) \to \mathscr{D}(s,d), \quad f \mapsto f\circ h.$$

Proof. **Lemma 3.2.1** とその証明を functor $K = \mathscr{D}(s,\cdot)$ に適用すれば，α に対して唯一つの $h \in \mathscr{D}(s,r)$ が存在して，

$$\alpha_d\colon \mathscr{D}(r,d) \to \mathscr{D}(s,d), \quad f \mapsto \mathscr{D}(s,f)h = f\circ h$$

とできる． □

Lemma 3.2.1 の全単射 $y\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \cong Kr$ は，実は natural transformation である．それを述べるために，まず $\mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$ と Kr が，K と r に関する functors と見なせることを確認する．

- Kr: evaluation functor $E\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$, where
  - obj.: $E\langle K,r\rangle = Kr$;
  - arr.: $E\langle \alpha\colon K \dot{\to} K', f\colon r \to r'\rangle = K'f \circ \alpha_r = \alpha_{r'} \circ Kf\colon Kr \to K'r'$
- $\mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$: functor $N\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$, where
  - obj.: $N\langle K,r\rangle := \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K)$;
  - arr.: $K\langle \alpha\colon K \dot{\to} K', f\colon r \to r'\rangle\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \to \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r',\cdot),K')$, $\beta \mapsto \alpha\beta\mathscr{D}(f,\cdot)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "\mathscr{D}(r',\cdot)"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{D}(r,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathscr{D}(f,\cdot)"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "\mathscr{D}(r,\cdot)"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "K'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

LEMMA 3.2.2

LEMMA 3.2.1 における全単射

$$y = y_{\langle K,r\rangle}\colon \mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \cong Kr$$

は，natural isomorphism $N \overset{y_{\langle K,r\rangle}}{\cong} E$ を定める．すなわち，y は natural in K and r である．

Proof. E と N の構成から，任意の $\langle K,r\rangle,\langle K',r'\rangle \in \mathbf{Set}^{\mathscr{D}}\times\mathscr{D}$ と $\langle \alpha,f\rangle\colon \langle K,r\rangle \to \langle K',r'\rangle$ に対して，$\mathscr{D}(f,r')1_{r'} = f = \mathscr{D}(r,f)1_r$ に注意すれば，以下の可換図式から従う：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r,\cdot),K) \arrow[r, "y_{\langle K,r\rangle}"] \arrow[d, "N\langle\alpha,f\rangle"'] & Kr \arrow[d, "E\langle\alpha,f\rangle"] \\
\mathrm{Nat}(\mathscr{D}(r',\cdot),K') \arrow[r, "y_{\langle K',r'\rangle}"'] & K'r'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\beta \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \beta_r 1_r \arrow[d, mapsto] \\
\alpha\beta\mathscr{D}(f,\cdot) \arrow[r, mapsto] & \alpha_{r'}\beta_{r'}\mathscr{D}(f,r')(1_{r'}) \arrow[r, equal] & (\alpha_{r'}\circ Kf)(\beta_r 1_r)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(r,r) \arrow[r, "\beta_r"] \arrow[d, "\mathscr{D}(r,f)"'] & Kr \arrow[d, "Kf"] \\
\mathscr{D}(r,r') \arrow[r, "\beta_{r'}"'] & Kr'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_r \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \beta_r 1_r \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & \beta_{r'}f \arrow[r, equal] & K(f)(\beta_r 1_r)
\end{tikzcd}$$

□

The functor $Y\colon \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, defined as

- obj.: $Yr := \mathscr{D}(r,\cdot)$,
- arr.: $Yf := \mathscr{D}(f,\cdot)\colon \mathscr{D}(r,\cdot) \xrightarrow{\cdot} \mathscr{D}(s,\cdot)$ ($f\colon s \to r$),

を ***Yoneda functor*** という．これは full and faithful である．実際，full であることも，faithful であることも，**COROLLARY 3.2.3** から従う．

Yoneda functor の双対 $Y'\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{D}^{\mathrm{op}}}$ は，次で定まる：

- obj.: $Y'r := \mathscr{D}(\cdot,r)$;
- arr.: $Y'f := \mathscr{D}(\cdot,f)\colon \mathscr{D}(\cdot,s) \xrightarrow{\cdot} \mathscr{D}(\cdot,r)$ ($f\colon s \to r$).

これは faithful である．実際，$f,f'\colon s \rightrightarrows r$ が $Y'f = Y'f'$ とすると，

$$f = (Y'f)_s 1_s = (Y'f')_s 1_s = f'.$$

逆に，これらの functor Y,Y' が定義できるのなら，$\mathscr{D}$ は category whose hom-sets are small でなければならない．なぜなら，このとき任意の $r,s \in \mathscr{D}$ に対して，$\mathscr{D}(r,s) = (Yr)s = (Y's)r \in \mathbf{Set}$ は small だからである．より大きい $\mathscr{D}$ に対しても，**Set** を **Ens** に置き換えたものが同様に成立する．

§ 3.3 Coproducts and Colimits

Coproducts

Definition 3.3.1

$\mathscr{C}$ を category とし，$a,b \in \mathscr{C}$ とする．$\langle c \in \mathscr{C}, \langle i,j\rangle \colon \langle a,b\rangle \to \langle c,c\rangle\rangle$ が ***coproduct of** a **and** b* であるとは，$\langle c,i,j\rangle$ が universal arrow from $\langle a,b\rangle$ to the diagonal functor Δ であることをいう．このとき，

$$c = a \amalg b = a \oplus b$$

などと書く．i,j を ***injections*** という．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

a,b の coproduct について，以下の全単射がある：

$$\mathscr{C}(a,d) \times \mathscr{C}(b,d) \cong \mathscr{C}(a \amalg b, d), \quad \langle f,g\rangle \mapsto h, \quad \text{naturally in } d,$$

with inverse $h \mapsto \langle hi, hj\rangle$.

Remark 3.3.1 $\mathscr{C}$ を category every two of whose objects have the coproduct とすると，bifunctor $\amalg \colon \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ を定める：

- obj.: $\langle a,b\rangle \mapsto a \amalg b$;
- arr.: $\langle h,k\rangle \mapsto h \amalg k$, defined by the following diagram:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "i'h"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "\exists! h \amalg k"] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dl, "j'k"] \\ a' \arrow[r, "i'"'] & a' \amalg b' & b' \arrow[l, "j'"] \end{tikzcd}$$

Example 3.3.1 i) **Set**: disjoint union $a \hookrightarrow a \amalg b \hookleftarrow b$.

ii) **Top**: disjoint union $a \hookrightarrow a \amalg b \hookleftarrow b$.

iii) $\mathbf{Top}_*$: wedge product $\langle a, *_a\rangle \hookrightarrow a \amalg b / \langle *_a = *_b\rangle \hookleftarrow \langle b, *_b\rangle$.

iv) **Ab**, ${}_R\mathbf{Mod}$: direct sum $a \hookrightarrow a \oplus b \hookleftarrow b$.

v) **Grp**: free group $a \hookrightarrow \langle a,b\rangle \hookleftarrow b$.

vi) **CRng**: tensor product $a \hookrightarrow a \otimes b \hookleftarrow b$.

vii) P (preordered set): least upper bound $a \leqslant a \cup b \geqslant b$.

Infinite Coproducts

X を set とする．$\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^X$ を ***diagonal functor*** , where

- obj.: $\Delta c := \langle c_x = c \rangle_{x \in X}$,
- arr.: $\Delta f := \langle f_x = f \rangle_{x \in X}$,

とする．

Definition 3.3.2

$\mathscr{C}$ を category，X を set とし，$a = \langle a_x \rangle_{x \in X} \in \mathscr{C}^X$ とする．$\langle c \in \mathscr{C}, i_x\colon a_x \to c, x \in X \rangle$ が ***coproduct of*** a であるとは，$\langle c, i_x, x \in X \rangle$ が universal arrow from a to Δ であることをいう．このとき，

$$\begin{aligned} c &= \coprod_{x \in X} a_x = \coprod a_x = \coprod a \\ &= \bigoplus_{x \in X} a_x = \bigoplus a_x = \bigoplus a \end{aligned}$$

などと書く．

$$\begin{tikzcd} a_x \arrow[r, "i_x"] \arrow[dr, "f_x"'] & \coprod_{x'} a_{x'} \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & d \end{tikzcd}$$

$a = \langle a_x \rangle \in \mathscr{C}^X$ の coproduct について，以下の全単射がある：

$$\prod_{x \in X} \mathscr{C}(a_x, d) \cong \mathscr{C}\left(\coprod_{x \in X} a_x, d \right), \quad \langle f_x \rangle \mapsto \tilde{f}, \quad \text{naturally in } d,$$

with inverse $f \mapsto \langle f\, i_x \rangle$.

Remark 3.3.2 $\mathscr{C}$ を category every X-fold family of whose objects have the coproduct とすると，X-fold functor $\coprod\colon \mathscr{C}^X \to \mathscr{C}$ を定める：

- obj.: $\langle a_x \rangle \mapsto \coprod a_x$;
- arr.: $\langle h_x \rangle \mapsto \coprod h_x$, defined by the following diagram:

$$\begin{tikzcd} a_x \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, "j_x h_x"] & \coprod a_{x'} \arrow[d, dashed, "\exists ! \coprod h_{x'}"] \\ b_x \arrow[r, "j_x"'] & \coprod b_{x'} \end{tikzcd}$$

Copowers

$b = \langle b_x = a \rangle_{x \in X} \in \mathscr{C}^X$ の coproduct を ***copower of*** a といい，$X \cdot a := \coprod_x a$ と書く．このとき，

$$\mathscr{C}(a,d)^X \cong \mathscr{C}(X \cdot a, d), \quad \text{naturally in } d.$$

EXAMPLE 3.3.2 i) **Set**: $a = Y$ の copower は，$X \cdot Y = X \times Y$.

Cokernels

DEFINITION 3.3.3

$\mathscr{C}$ を category that has the null object z とし，$f \colon a \to b$ とする．$\langle e \in \mathscr{C}, u \colon b \to e \rangle$ が ***cokernel of*** f であるとは，$uf = 0$ であって，任意の射 $h \colon b \to c$ with $hf = 0$ に対して，唯一つの射 $\tilde{h} \colon e \to c$ が存在して，$h = \tilde{h} \circ u$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{h}"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

The cokernel $\langle r, u \rangle$ of f とは，universal element of the functor $H \colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$, where

$$Hc := \{h \colon b \to c : hf = 0\},$$

に他ならない．

EXAMPLE 3.3.3 i) $\mathscr{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$, *etc.*, とする．$\mathscr{C}$ における cokernel of $f \colon a \to b$ は，通常の意味での cokernel である．すなわち，$\langle \operatorname{coker} f := b/\operatorname{im} f, \pi \colon b \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f \rangle$ のこと．

Coequalizers

DEFINITION 3.3.4

$\mathscr{C}$ を category とし，$f, g \colon a \rightrightarrows b$ を $\mathscr{C}$ の射とする．$\langle e \in \mathscr{C}, u \colon b \to e \rangle$ が ***coequalizer of*** $\langle f, g \rangle$ であるとは，$uf = ug$ であって，任意の射 $h \colon b \to c$ with $hf = hg$ に対して，唯一つの射 $\tilde{h} \colon e \to c$ が存在して，$h = \tilde{h}u$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{h}"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

REMARK 3.3.3 The coequalizer を universal arrow と考えることもできる．$\downdownarrows$ を，category $\cdot \rightrightarrows \cdot$ that has only two objects とする．このとき，$\mathscr{C}^{\downdownarrows}$ は，category consisting of

- obj.: 射 $\langle f, g\rangle \colon a \rightrightarrows b$;
- arr.: 射 $\langle f, g\rangle \colon a \rightrightarrows b$ と $\langle f', g'\rangle \colon a' \rightrightarrows b'$ に対して，$\langle h \colon a \to a', k \colon b \to b'\rangle$ s.t. $kf = f'h$ and $kg = g'h$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "k"] \\ a' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & b' \end{tikzcd}$$

$\Delta \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\downdownarrows}$ を diagonal functor, defined as:

- obj.: $\Delta c \coloneqq \langle 1_c, 1_c\rangle$,
- arr.: $\Delta r \coloneqq \langle r, r\rangle \colon \langle 1_c, 1_c\rangle \to \langle 1_{c'}, 1_{c'}\rangle$ ($r \colon c \to c'$),

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "r"'] \\ c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "1_c"] \arrow[r, shift right, "1_c"'] \arrow[d, "r"'] & c \arrow[d, "r"] \\ c' \arrow[r, shift left, "1_{c'}"] \arrow[r, shift right, "1_{c'}"'] & c' \end{tikzcd}$$

とする．

このとき，射 $h \colon b \to c$ with $hf = hg$, where $f, g \colon a \rightrightarrows b$, とは，$\mathscr{C}^{\downdownarrows}$ の射 $\langle hf, h\rangle \colon \langle f, g\rangle \to \langle 1_c, 1_c\rangle$ のことである．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "hf"'] & b \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, shift left, "1_c"] \arrow[r, shift right, "1_c"'] & c \end{tikzcd}$$

従って，$\langle e, u\rangle$ が coequalizer of $\langle f, g\rangle$ であるとは，universal arrow from $\langle f, g\rangle$ to Δ に他ならない．

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{h}"] \\ c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \langle f, g\rangle \arrow[dl, "\langle uf, u\rangle"'] \arrow[dr, "\langle hf, h\rangle"] & \\ \langle 1_e, 1_e\rangle \arrow[rr, dashed, "\langle \tilde{h}, \tilde{h}\rangle"'] & & \langle 1_c, 1_c\rangle \end{tikzcd}$$

任意の平行射の族 $\langle f_x \colon a \to b\rangle_{x\in X}$ についても同様に定義できる．すなわち，$\langle e, u\rangle$ が coequalizer of $\langle f_x\rangle$ であるとは，$uf_x = uf_y$ $(\forall x, y \in X)$ であって，任意の射 $h \colon b \to c$ with $hf_x = hf_y$ $(\forall x, y \in X)$ に対して，唯一つの射 $\tilde{h} \colon e \to c$ が存在して，$h = \tilde{h}u$ とできることをいう．

EXAMPLE 3.3.4 i) $\mathscr{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$, *etc.*, とする．$f, g \colon a \rightrightarrows b$ の coequalizer は，$f - g$ の cokernel $b \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(f - g)$ である．

ii) $\mathscr{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Top}$, *etc.*, とする．$f, g \colon a \rightrightarrows b$ の coequalizer は，$\langle b/R, \pi \colon b \twoheadrightarrow b/R\rangle$, where

$$R \coloneqq \{\langle fx, gx\rangle : x \in a\} \subset b \times b,$$

である．

Pushouts

Definition 3.3.5

$\mathscr{C}$ を category とし，$f: a \to b, g: a \to c$ とする．$\langle r \in \mathscr{C}, u: b \to r, v: c \to r\rangle$ が pushout of $\langle f, g\rangle$ であるとは，$uf = vg$ であって，任意の $\langle s \in \mathscr{C}, h: b \to s, k: c \to s\rangle$ with $hf = kg$ に対して，唯一つの射 $t: r \to s$ が存在して，$h = tu$ かつ $k = tv$ とできることをいう．

$$r = b \amalg_a c = b \amalg_{\langle f, g\rangle} c$$

などと表す．

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & r \arrow[r, dashed, "\exists! t"] & s \\
& c \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, bend right, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remark 3.3.4 The pushout of $\langle f, g\rangle$ を universal arrow として捉える．$\mathscr{C}^{\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot}$ は，category consisting of

- obj.: $\langle h, k\rangle: \langle a, a\rangle \to \langle b, c\rangle$,
- arr.: $\langle h, k\rangle \to \langle h', k'\rangle$, s.t.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d] & a \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "k"] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
b' & a' \arrow[l, "h'"] \arrow[r, "k'"'] & c'
\end{tikzcd}$$

である．$\Delta: \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot}$ を，diagonal functor, where

- obj.: $\Delta r := \langle 1_r, 1_r\rangle$,
- arr.: $\Delta h := \langle h, h, h\rangle: \langle 1_r, 1_r\rangle \to \langle 1_s, 1_s\rangle, (h: r \to s)$,

とする．このとき，$\langle h, k\rangle: \langle b, c\rangle \to \langle s, s\rangle$ with $hf = kg$ とは，射 $\langle hf, h, k\rangle: \langle f, g\rangle \to \Delta s$ のことである．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "h"'] & a \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hf"] & c \arrow[d, "k"] \\
s & s \arrow[l, "1_s"] \arrow[r, "1_s"'] & s
\end{tikzcd}$$

従って，pushout $\langle r,u,v\rangle$ of $\langle f,g\rangle$ とは，universal arrow from $\langle f,g\rangle$ to Δ のことである．

Example 3.3.5 i）$\mathscr{C}$ = **Set**, **Top**, **Grp**, **Ab**, **Rng**, ${}_R$**Mod**, *etc.*, とする．$\langle f,g\rangle\colon \langle a,a\rangle \to \langle b,c\rangle$ の pushout は，$b \sqcup c$ において，$fx \in b$ と $gx \in c$ を同一視したものである．（演習問題 (2) 参照．）

Cokernel Pair

Definition 3.3.6

$\mathscr{C}$ を category，$f\colon a \to b$ とする．The ***cokernel pair of*** f とは，pushout of $\langle f,f\rangle$ のことである，*i. e.*,$r \in \mathscr{C}$ と $u,v\colon b \rightrightarrows r$ with $uf = vf$ であって，任意の射 $h,k\colon b \rightrightarrows s$ with $hf = kf$ に対して，唯一つの射 $t\colon r \to s$ が存在して，$tu = h$ かつ $tv = k$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dr, shift left, "h"] \arrow[dr, shift right, "k"'] & r \arrow[d, dashed, "\exists! t"] \\ & & s \end{tikzcd}$$

Colimits

今までの議論を一般化する．$\mathscr{C},J$ を categories とする．$\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^J$ を，次のように定まる functor, called ***diagonal functor*** , とする：

- obj.: $\Delta c\colon J \to \mathscr{C}$, constant functor, *i. e.*, $(\Delta c)i = c$ and $(\Delta c)g = 1_c$ $(i,j \in \mathscr{C}, g\colon i \to j)$;
- arr.: $\Delta f\colon \Delta c \dot{\to} \Delta c'$, constant transformation, *i. e.*, $(\Delta f)i = f\colon c \to c'$ $(f\colon c \to c', i \in J)$.

このとき，natural transformation $\tau\colon F \dot{\to} \Delta c$ は，射の族 $\langle \tau_i\colon F_i \to c\rangle_{i\in J}$ であって，各 $g\colon i \to j$ に対して $\tau_i = \tau_j \circ Fg$ なるものである．

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ F_j \arrow[r, "\tau_j"'] & c \end{tikzcd}$$

これを，***cone from base*** F ***to the vertex*** c という．

Definition 3.3.7

$\mathscr{C},J$ を categories とし，$F\colon J\mathscr{C}$ を functor とする．A ***colimit of*** F (or, a ***direct limit*** , a ***inductive***

limit of F) とは，universal arrow $\langle r \in \mathscr{C}, \mu\colon F \dot{\to} \Delta r\rangle$ from F to Δ のことである．

$$r = \varinjlim F = \operatorname{colim} F$$

などと書く．μ を ***limiting cone*** , or ***universal cone*** from F という．

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\tau_i"] & & \\
{} & \varinjlim F \arrow[r, dashed, "\exists! t"] & c \\
F_j \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\tau_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

EXAMPLE 3.3.6 i）$J = \omega = \{0 \to 1 \to 2 \to \cdots\}, \mathscr{C} = \mathbf{Set}$ とする．A functor $F\colon \omega \to \mathbf{Set}$ とは，昇鎖

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

のことである．このとき，

$$\varinjlim F = U := \bigcup_n F_n$$

であり，inclusions $F_i \hookrightarrow U$ が limiting cone となる．$\mathscr{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, etc.$, でも同様.

Exercises

(2) $\mathscr{C}$ を category that has coproduct and coequalizer of every pair of two objects とし，$\langle f, g\rangle\colon \langle a, a\rangle \to \langle b, c\rangle$ とする．このとき，pushout of $\langle f, g\rangle$ は存在する．まず，coproduct の普遍性より，任意の $\langle h, k\rangle\colon \langle b, c\rangle \to \langle s, s\rangle$ に対して，唯一つの射 $q\colon b \sqcup c \to s$ が存在して，$qi = h$ かつ $qj = k$ となる．

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, shift left, "if"] \arrow[rr, shift right, "jg"'] \arrow[dr, "g"'] & & b \sqcup c \arrow[r, dashed, "\exists! q"] & s \\
 & c \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

The coequalizer of $\langle if, jg\rangle\colon a \rightrightarrows b \sqcup c$ が存在し，それを $p\colon b \sqcup c \to r$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "if"] \arrow[r, shift right, "jg"'] & b \sqcup c \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & r \arrow[d, dashed, "\exists! t"] \\
 & & s
\end{tikzcd}$$

すると，$\langle r, pi, pj\rangle$ が pushout of $\langle f, g\rangle$ になる．実際，$(pi)f = (pj)g$ は定義から明らかである．任意の射 $\langle h, k\rangle\colon \langle b, c\rangle \to \langle s, s\rangle$ with $hf = kg$ に対して，$qi = h$ かつ $qj = k$ なる唯一の射 $q\colon b \amalg c \to s$ を取れば，

$$q(if) = (qi)f = hf = kg = (qj)g = q(jg)$$

であるから，coequalizer の普遍性より $q = tp$ なる唯一の射 $t\colon r \to s$ が存在する．このとき，$t(pi) = qi = h$ かつ $t(pj) = qj = k$ となる．よって，$\langle r, pi, pj\rangle$ は pushout of $\langle f, g\rangle$ である．

(3) $\mathbf{Matr}_k$, category consisting of

- obj.: $n \in \boldsymbol{Z}_{\geqslant 0}$,
- arr.: $m \times n$ matrix $A\colon n \to m$,

を考え，A, B を $m \times n$ matrices とする．$T := A - B$ とおく．A, B の coequalizer は，$(m - \operatorname{rank} T) \times m$ matrix

$$P := (1_{m-\operatorname{rank} T}, 0_{\operatorname{rank} T})$$

である．（1_n と 0_n は，それぞれ $n \times n$ の単位行列と零行列を表す．）$A\colon n \to m$ を，linear map $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ と考えると分かりやすい．このとき，（linear maps として）$C\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^p$ に対して，

$$CA = CB \iff CT = 0 \iff \exists! \tilde{C}\colon \operatorname{coker} T \to \boldsymbol{R}^p \text{ s.t. } C = \tilde{C}P$$

が成り立つ．$\operatorname{coker} T = \boldsymbol{R}^m / \operatorname{im} T \cong \boldsymbol{R}^{m - \operatorname{rank} T}$ であるから，最初の主張が確かめられる．

(5) X を set とし，$E \subset X \times X$ をその equivalence relation とする．X/E は，以下の図式で定まる coequalizer である：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook] & X \times X \arrow[r, shift left, two heads, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, two heads, "\pi_2"'] & X \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X/E \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\
 & & & Y
\end{tikzcd}$$

ここで，$\pi_i\colon X \times X \twoheadrightarrow X$ は i-th component への射影（$i = 1, 2$），$\pi\colon X \twoheadrightarrow X/E$ は標準的全射である．

(6) $a, b \in \mathscr{C}$ の coproduct は，functor

$$\mathscr{C}(a, \cdot) \times \mathscr{C}(b, \cdot)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}, \quad c \mapsto \mathscr{C}(a, c) \times \mathscr{C}(b, c)$$

が representable であるとき，かつそのときに限り存在する．実際，この functor が representable であることは，

$$\langle r \in \mathscr{C}, \psi\colon \mathscr{C}(r, \cdot) \cong \mathscr{C}(a, \cdot) \times \mathscr{C}(b, \cdot)\rangle$$

が存在することであるから，$r = a \amalg b$ が存在すれば representable である．

逆に，このような $\langle r, \psi\rangle$ が存在すれば，r が coproduct of a and b together with injection $\psi_r 1_r = \langle i, j\rangle$ となる（$h := \psi^{-1}\langle f, g\rangle$）：

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(r, r) \arrow[r, "\psi_r"] \arrow[d, "\mathscr{C}(r,h)"'] & \mathscr{C}(a, r) \times \mathscr{C}(b, r) \arrow[d, "\mathscr{C}(a,h) \times \mathscr{C}(b,h)"] \\
\mathscr{C}(r, d) \arrow[r, "\psi_d"'] & \mathscr{C}(a, d) \times \mathscr{C}(b, d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_r \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \langle i, j\rangle \arrow[d, mapsto] \\
h \arrow[r, mapsto] & \langle f, g\rangle \arrow[r, equal] & \langle hi, hj\rangle
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & a \sqcup b \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

(7) A を abelian group,

$$J_A \coloneqq \{H \leqslant A : \text{finitely generated}\}$$

とおくと，J_A は包含関係について前順序集合（従って category）となる．$F\colon J_A \to \mathbf{Ab}$ を，次で定義される functor とする：

- $FH \coloneqq H \in \mathbf{Ab}$ $(H \in J_A)$;
- $F\iota_{H,H'} = \iota_{H,H'}\colon FH \hookrightarrow FH'$ $(\iota_{H,H'}\colon H \hookrightarrow H'$ in $J_A)$.

このとき，$A = \varinjlim F$ である．実際，任意の abelian group G と group homomorphisms $f_H\colon H \to G$ with $f_H = f_{H'}\iota_{H,H'}$ $(\forall \iota_{H,H'}\colon H \hookrightarrow H'$ in $J_A)$ に対して，

$$\tilde{f}x \coloneqq f_H x \quad \text{if } x \in H \subset A$$

と定めれば，これが $\tilde{f} \circ \iota_H = f_H$ $(\forall \iota_H\colon H \in J_A \hookrightarrow A)$ なる唯一の group homomorphism である．($A = \bigcup_{H \in J_A} J_A$ に注意せよ．)

これを一般化する．$\mathscr{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$, *etc.*, とする．$J$ を family of objects of $\mathscr{C}$ とし，包含関係について前順序集合と見る．c を，$\bigcup_{d \in J} d$ から生成される free object (*i. e.*, coproduct of J) を各 $\iota_{d,d'}\colon d \hookrightarrow d'$ で割ったのもとする．自然な包含写像 $\iota_d\colon d \hookrightarrow c$ を取る．明らかに，すべての $\iota_{d,d'}\colon d \hookrightarrow d'$ に対して，$\iota_d = \iota_{d'} \circ \iota_{d,d'}$ が成り立つ．$e \in \mathscr{C}$ と $f_d\colon d \to e$ with $f_d = f_{d'} \circ \iota_{d,d'}$ $(\forall \iota_{d,d'}\colon d \hookrightarrow d'$ in $J)$ を任意に取り，

$$\tilde{f}x \coloneqq f_d x \quad \text{if } x \in d \subset c$$

と定める．これは well-defined である．実際，$d \cap d' \neq \emptyset$ のとき $d \subset d'$ または $d' \subset d'$ であるが，そのとき

$$f_d x = f_{d'}|_d x, \quad f_{d'} x = f_d|_{d'} x, \quad \text{resp.}$$

となる．これが，唯一の $\tilde{f} \circ \iota_d = f_d$ $(\forall d \in J)$ なる射であるのは明らか．よって，$c = \varinjlim F$, where

- $Fd = d \in \mathscr{C}$ $(d \in J)$,
- $F\iota_{d,d'} = \iota_{d,d'}\colon Fd \hookrightarrow Fd'$ $(\iota_{d,d'}\colon d \hookrightarrow d'$ in $J)$,

である．

§ 3.4 Products and Limits