# Notes of Categories for the Working Mathematicians

Naughie

## Contents

# Preface

これは，@naughiez による，MacLane’s Categories for the Working Mathematicians の個人的なメモです．

# 第 3 章 Universals and Limits

## § 3.1 Universal arrows

**Definition 3.1.1**

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ を object とする．$\langle r \in \mathscr{D}, u\colon c \to Sr\rangle$ が ***universal arrow from*** $c$ ***to*** $S$ であるとは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, f\colon c \to Sd\rangle$ に対し，唯一つの射 $\tilde{f}\colon r \to d$ が存在して，$f = S\tilde{f} \circ u$ とできることをいう．

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Sr \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"'] & & Sd \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{universal arrow} \\ \iff \quad & c \xrightarrow{u} Sr\colon \text{initial object in } (c \downarrow S) \end{aligned}$$

である．特に，universal arrow は *unique up to isomorphism* (if exists).

以下，特に断らない限り，$U\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ は forgetful functor とする．

**Example 3.1.1** i) $k$ を field，$X$ を set とする．$X \hookrightarrow U\,\mathrm{span}_k X$ は universal arrow from $X$ to $U\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$.

ii) $G$ を graph とすると，$P\colon G \to U\mathscr{C}_G$ は universal arrow from $G$ to $U\colon \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$.

iii) $X$ を set，$\langle X\rangle$ を $X$ から生成された free group とする．$X \hookrightarrow U\langle X\rangle$ は universal arrow from $X$ to $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.

iv) $\mathbf{Dom}_m$ を次のように定める：

- obj.: objects of **Dom**, *i. e.* , integral domains;
- arr.: monomorphic ring homomorphisms between integral domains.

Fields 間の ring homomorphisms はすべて monomorphisms であることに注意して（実際，ring homomorphism の kernel は (two sided) ideal であるから，自明なものしかない），$U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$

が定まる．$D \in \mathbf{Dom}_m$ に対して $\mathrm{Frac}\, D$ をその field of fractions とすれば，$D \hookrightarrow U \,\mathrm{Frac}\, D$ は universal arrow from $D$ to $U$.

**Remark 3.1.1** $\mathbf{Dom}_m$ を $\mathbf{Dom}$ に置き換えてはいけない！実際, $F$ を field とし, ring homomorphism $f\colon D \to F$ を $\tilde{f}\colon \mathrm{Frac}\, D \to F$ に拡張するには,

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

でなければならない．そのためには,

$$r \in D \setminus \{0\} \Longrightarrow f(r) \in F \setminus \{0\}$$

*i. e.* , $f$ は monomorphism でなければならない.

v) $\mathbf{Met}$ を次のように定める：
- obj.: metric spaces;
- arr.: maps preserving metric.

$\mathbf{CMet} \subset \mathbf{Met}$ を，full subcategory whose objects are complete とする．$X$ を metric space，$\overline{X}$ をその completion とすると，$X \to \overline{X}$ は universal arrow from $X$ to $U\colon \mathbf{CMet} \to \mathbf{Met}$.

**Definition 3.1.2**

$H\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ を functor とする．$\langle r \in \mathscr{D}, e \in Hr\rangle$ が ***universal element of*** $H$ とは，任意の $\langle d \in \mathscr{D}, x \in Hd\rangle$ に対して，唯一つの射 $f\colon r \to d$ が存在して，$(Hf)e = x$ とできることをいう.

**Remark 3.1.2** 特殊な状況では，universal arrow と universal element は同じものである.

- $H\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ が functor で，$\langle r, e\rangle$ が universal element であるとは，$e \in Hr$ を射 $* \xrightarrow{e} Hr$ in $\mathbf{Ens}$ と見たときに，$\langle r, e\rangle$ が universal arrow from $*$ to $H$ であること.

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "x"] & \\ Hr \arrow[rr, dashed, "Hf"'] & & Hd \end{tikzcd}$$

- 逆に，$\mathscr{C}$ を small category とし，$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor，$c \in \mathscr{C}$ とすると，$\langle r, u\rangle$ が universal arrow from $c$ to $S$ であるとは，これが $H = \mathscr{C}(c, S\,\cdot)$ の universal element であること.

**Example 3.1.2** i) $S$ を set，$E \subset S \times S$ を $S$ の equivalence relation，$\pi\colon S \twoheadrightarrow S/E$ とする．$\langle S/E, \pi\rangle$ は universal element of $H\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, where
- obj.: $HX := \{f\colon S \to X : sEs' \Longrightarrow fs = fs'\}$;
- arr.: $Hg\colon HX \ni f \mapsto g \circ f \in HY$ ($g\colon X \to Y$).

ii) $G$ を group，$N \triangleleft G$，$\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ とする．$\langle G/N, \pi\rangle$ は universal element of $H\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, where
- obj.: $HG' := \{f\colon G \to G' : \text{group hom. s. t. } \ker f \subset N\}$;

- arr.: $Hg\colon HG' \ni f \mapsto g \circ f \in HG''$ $(g\colon G' \to G'')$.

iii）$V_1, V_2$ を vector spaces / $k$，$H\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を次で定まる functor とする：

- obj.: $HW := \mathbf{Bilin}(V_1, V_2; W) := \{f\colon V_1 \times V_2 \to W : \text{bilinear}\}$;
- arr.: $Hg\colon HW \ni f \mapsto g \circ f \in HW'$ $(g\colon W \to W')$.

$\langle V_1 \otimes_k V_2, \otimes\rangle$ は，universal element of $H$. ($\otimes\colon V_1 \times V_2 \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in V_1 \otimes_k V_2$.)

$\mathbf{Vect}_k$ ではなく，$\mathbf{Mod}_R$ でもよい．

**Definition 3.1.3**

$S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ を functor とし，$c \in \mathscr{C}$ とする．$\langle r \in \mathscr{D}, v\colon Sr \to c\rangle$ が ***universal arrow from*** $S$ ***to*** $c$ であるとは，これが $(S \downarrow c)$ の terminal object であることをいう．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{f}"] \\ r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sd \arrow[rr, dashed, "S\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & Sr \arrow[dl, "v"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

**Example 3.1.3** i）$\mathscr{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}, \mathbf{Vect}_k$, *etc.* (categories where the direct product $\times$ of two objects are defined) とする．

$a, b \in \mathscr{C}$ を任意に取り，$p\colon a \times b \to a$, $q\colon a \times b \to b$ を canonical projections とする．$\langle p, q\rangle$ は universal arrow to $\langle a, b\rangle$ from $\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, where

- obj.: $\Delta c := \langle c, c\rangle$;
- arr.: $\Delta f := \langle f, f\rangle$.

この $\Delta$ を ***diagonal functor*** という．

$$\begin{tikzcd} \langle c_1, c_2\rangle \arrow[rr, dashed, "\exists!\langle f_1 \times f_2, f_1 \times f_2\rangle"] \arrow[dr, "\langle f_1, f_2\rangle"'] & & \langle a \times b, a \times b\rangle \arrow[dl, "\langle p, q\rangle"] \\ & \langle a, b\rangle & \end{tikzcd}$$

## Exercises

(2) The universal element of $\mathfrak{P}\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ (power set) is $\langle \{0,1\}, 1 \in \{0,1\}\rangle$

(3) $G \in \mathbf{Grp}$ (or $\in \mathbf{Ab}$)，$X \in \mathbf{Set}$ とする．The universal arrow from $G, G, X, X$, respectively, to the following forgetful functors are:

- $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp} \Longrightarrow \langle G/[G,G], \pi\colon G \twoheadrightarrow G/[G,G]\rangle$ (commutator group and abelianization),
- $U\colon \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \Longrightarrow \langle R[G], \iota\colon G \hookrightarrow R[G]\rangle$ (group ring),
- $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle (X, 2^X), \mathrm{id}_X\colon X \to X\rangle$ (discrete topology),
- $U\colon \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set} \Longrightarrow \langle X \coprod \{X\}, \iota\colon X \hookrightarrow X \coprod \{X\}\rangle$ (one-point compactification).