圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

2	表現																		•	1
	2.2	多元環と線形圏の加群圏						 		 										2



第2章表現

§ 2.2 多元環と線形圏の加群圏

№ を可換体(可換環でもよい)とする.

PROBLEM 2.2.6

A を多元環,M を左 A 加群とする。I を集合とし,M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える。 このとき,部分空間 $\bigcap_{i\in I}M_i$ と $\sum_{i\in I}M_i$ はともに M の部分加群となる。

Proof. 交叉が部分加群:

元 $m \in \bigcap_{i \in I} M_i$ と $a \in A$ を任意に取る.このときすべての $i \in I$ について $m \in M_i$ で, M_i は M の部分加群 だから $am \in M_i$.よって $am \in \bigcap_{i \in I} M_i$ が分かる.

和が部分加群:

 $\sum_{i \in I} M_i$ の元

$$\sum_{i \in I} m_i \quad (m_i \in M_i, i \in I)$$

を任意に取ると,有限個の $i \in I$ を除いて $m_i = 0$ だから, $am_i \neq 0$ なる $i \in I$ も有限個である.ただし $a \in A$. よって和 $\sum_{i \in I} am_i \in M$ が定義でき,各 M_i が部分加群だから $am_i \in M_i$ であり, $\sum_{i \in I} am_i \in \sum_{i \in I} M_i$ となる.

PROBLEM 2.2.8

A を多元環とし,M を左 A 加群とする.部分集合 $S \subset M$ について,S を含む最小の部分加群を $\langle S \rangle$ と書き,S で生成された M の部分加群と呼ぶ.このとき次を示せ.

- i) 部分集合 $S \subset M$ に対して、 $\langle S \rangle = \sum_{m \in S} Am$.
- ii) 次は同値:
 - a) M は A 上有限生成である;
 - b) 有限個の M の元 $m_1, ..., m_n \in M$ が存在して $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける;
 - c) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射準同型 $A^{\oplus n} \to M$ が存在する.

iii) A が \mathbb{k} 上有限次元(有限生成)ならば,M が A 上有限生成であることと, \mathbb{k} 上有限次元であることは同値である.

Proof. (i)

まず、任意の $m \in S$ に対して $m = 1m \in Am$ であるから、 $\langle S \rangle \subset \sum_{m \in S} Am$ が成り立つ.

逆に、S を含む任意の部分加群 $L \subset M$ を取ると、各 $m \in S$ に対して $m \in L$ だから $Am \subset L$. よって $\sum_{m \in S} Am \subset L$ となり、 $\sum_{m \in S} Am \subset \langle S \rangle$ が従う.

(ii)

- $(a) \iff (b)$
- (i) より明らか.
- $(b) \Longrightarrow (c)$

有限個のMの元 $m_1,...,m_n \in M$ によって $M = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i$ と書けたとする。各 $1 \leq i \leq n$ に対して $A_i \coloneqq A$ とおき, $A^{\oplus n} = \coprod_{1 \leq i \leq n} A_i$ とする。

このとき、全射準同型 $\phi: A^{\oplus n} \to M$ が

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} a_i m_i \quad (a_i \in A_i, i \in I)$$

によって定義できる.

 $(c) \Longrightarrow (b)$

ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と全射準同型 $\phi: A^{\oplus n} \to M$ が存在したとする. 各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $A_i := A$ とおき, $A^{\oplus n} = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ とする.

このとき、各 $1 \le i \le n$ に対して $m_i := \phi(1_i)$ とおけば

$$M = \phi\left(A^{\oplus n}\right) = \sum_{1 \le i \le n} \phi\left(A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} Am_i.$$

ただし、 $1_i \in A_i$ は A_i の単位元を表す.

(iii) *M* を **k** 上有限生成だとすると, 多元環 **k** について (ii) を用いて,

$$M = \mathbb{k}m_1 + \cdots + \mathbb{k}m_n$$

なる元 $m_1, ..., m_n \in M$ が存在し, $M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n \subset Am_1 + \cdots + Am_n \subset M$ より $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ を得る.よって M は A 上有限生成.

逆に M が A 上有限生成ならば有限個の元 $m_1,\ldots,m_n\in M$ を用いて $M=Am_1+\cdots+Am_n$ と書ける.同様に A が \mathbbm{k} 上有限生成だから,有限個の元 $a_1,\ldots,a_\ell\in A$ によって $A=\mathbbm{k}a_1+\cdots+\mathbbm{k}a_\ell$ と書ける. すると

$$M = \sum_{1 \le i \le n} Am_i = \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le \ell} \mathbb{k} a_j m_i$$

となるから、M は k 上有限生成である.

PROBLEM 2.2.12

A を多元環とする。圏 $\mathsf{Mod}(A)$ の射が、写像の意味で単射であることと、圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ、また、写像の意味で全射であることと、圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ、

Proof. 圏 Mod(A) における射 $f: M \to N$ を任意に取る.

単射ならばモノ射:

射 f を単射とし、ある射 $g,h:L \to M$ について $f \circ g = f \circ h$ が成り立ったとする.

このとき任意の $m \in L$ に対して f(g(m)) = f(h(m)) であり、f が単射だから g(m) = h(m)). よって g = h となり、f はモノ射.

モノ射ならば単射:

M の部分空間 $\operatorname{Ker} f \subset M$ は部分加群であり、二つの射

$$\ker f: \operatorname{Ker} f \to M, \qquad m \mapsto m,$$

$$0: \operatorname{Ker} f \to M, \qquad m \mapsto 0$$

が存在する. 今 $f \circ \ker f = 0 = f \circ 0$ であり、f がモノ射だから $\ker f = 0$ を得る. よって $\ker f = 0$ となり、f は単射.

全射ならばエピ射:

射 f を全射とし、ある射 $g,h: N \to L$ について $g \circ f = h \circ f$ が成り立ったとする.

このとき f が全射だから任意の $n \in N$ に対して n = f(m) なる $m \in M$ が存在し, g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n). よって g = h となり, f はエピ射.

エピ射ならば全射:

N の部分空間 $\operatorname{Im} f \subset N$ は部分加群であり、商加群 $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$ を考えると、二つの射

$$\begin{aligned} \operatorname{coker} f: N \to \operatorname{Coker} f, & n \mapsto n + \operatorname{Im} f, \\ 0: N \to \operatorname{Coker} f, & n \mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する. 今 $\operatorname{coker} f \circ f = 0 = 0 \circ f$ であり、f がエピ射だから $\operatorname{coker} f = 0$ を得る. よって $N = \operatorname{Im} f$ となり、f は全射.

PROBLEM 2.2.13

A を多元環とする. 圏 Mod(A) において、直積と直和がそれぞれ積と余積になることを示せ.

Proof. I を小集合, $(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とする.

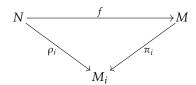
直積が積:

 $M \coloneqq \prod_{i \in I} M_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\pi_i : M \to M_i$ を標準射影とする.

A 加群 N と準同型の族 $(\rho_i:N\to M_i)_{i\in I}$ が与えられたとき、準同型 $f:N\to M$ が

$$f(n) := (\rho_i(n))_{i \in I} \quad (n \in N)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある準同型 $g: N \to M$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$\pi_i(g(n)) = \rho_i(n) = \pi_i(f(n)) \quad (n \in N, i \in I)$$

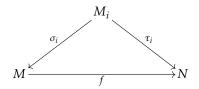
より、g(n) の第 i 成分と f(n) の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり、g(n) = f(n) が言える. よって g = f. 直和が余積:

 $M \coloneqq \coprod_{i \in I} M_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\sigma_i : M_i \to M$ を標準入射とする.

A 加群 N と準同型の族 $(\tau_i:M_i\to N)_{i\in I}$ が与えられたとき、準同型 $f:M\to N$ が

$$f(m) \coloneqq \sum_{i \in I} \tau_i(m_i) \quad (m \in M_i)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある準同型 $g: M \to N$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$g(\sigma_i(m)) = \tau_i(m) = f(\sigma_i(m)) \quad (m \in M_i, i \in I)$$

より、任意の $m \in M$ に対して $g(m) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(m_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(m_i)) = f(m)$ となる。よってg = f.

PROBLEM 2.2.15

PROBLEM 2.2.19

PROBLEM 2.2.23