正規形漸化式の解法についての理論的背景

なっふぃ

@naughiez

Contents

第 1 章 正規形漸化式の解空間について

以下，ベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．

§ 1.1 母関数

Definition 1.1.1

V をベクトル空間とするとき，V 値の形式的 Laurent 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ を数列 $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ の**母関数**（*generating function*）と呼ぶ．母関数全体のなすベクトル空間を

$$V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

と表す．
二変数以上の級数も同様に定義される：

$$V\left[\!\left[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} w^m z^n \;\middle|\; a_{m,n} \in V \right\},$$

$$V\left[\!\left[w^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{k,\ell,m,n\in\mathbb{Z}} a_{k,\ell,m,n} w^k x^\ell y^m z^n \;\middle|\; a_{k,\ell,m,n} \in V \right\},$$

etc.

Laurent 級数のなすベクトル空間 $V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ は，ベクトル空間としては数列のなす空間

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}, V) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in V\}$$

と同型になる．単なる数列との違いは，複素関数に由来する諸々の操作を持つところである．

Definition 1.1.2

母関数 $a(z) = \sum a_n z^n \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ の**留数**（*residue*）を

$$\mathrm{Res}_z\, a(z) := a_{-1}$$

で定義する．

Definition 1.1.3

ベクトル空間 U, V, W について，U, V の間のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : U \otimes V \to W$（すなわち，$U \times V \to W$ の双線型写像）があるとき，母関数の積を自然に定義できる．具体的には，U 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in U\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と V 値母関数 $b(z) = \sum_m b_m z^m \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ に対して，

$$a(z)b(z) := \sum_{d\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} \langle a_n, b_m\rangle \right) z^d \in W\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$$

で定義する．ただし，すべての z^d の係数 $\sum\langle a_n, b_m\rangle$ が有限和であるような $a(z), b(z)$ の組に限る．無限和のときは定義しない．
このような（積を定義できる）母関数 $a(z), b(z)$ に対して，その積の留数を

$$\langle a(z), b(z)\rangle := \mathrm{Res}_z\, a(z)b(z) \in W$$

と書く．

この定義は，$\mathbb{C}$ 値関数の内積

$$\langle \varphi(x), \psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* \psi(x) \mathrm{d}x$$

に由来する．

Example 1.1.1 i）ベクトル空間 V には，複素数体との自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \otimes \mathbb{C} \to V$（単なるスカラー倍の構造射）がある．これによって，V 値母関数 $a(z) \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と $\mathbb{C}$ 値 Laurent 多項式 $b(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ との積を定義できる：

$$a(z)b(z) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} b_m \cdot a_n \right) z^d \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket.$$

これは任意の $a(z) \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ および $b(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ に対して定義できることに注意．

ii）二変数の Laurent 級数は Laurent 級数値の母関数とみなすことができる：$V\llbracket w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket = V\llbracket w^{\pm 1}\rrbracket\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$．さらに，$V = \mathbb{C}$ のとき，異なる変数の母関数のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}\llbracket x^{\pm 1}\rrbracket \otimes \mathbb{C}\llbracket y^{\pm 1}\rrbracket \to$

$\mathbb{C}[\![x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]\!]$ を自然に

$$\left\langle \sum_m a_m x^m, \sum_n b_n y^n \right\rangle := \sum_{m,n} (a_m b_n)\, x^m y^n$$

で定義できる．これによって，$\mathbb{C}[\![x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]\!]$ と $\mathbb{C}[\![y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]\!]$ の積を考えることができる．積は三変数 x, y, z の母関数となる．

もっとも重要な Laurent 級数の一つは Dirac のデルタ関数である．

Definition 1.1.4

二変数の $\mathbb{C}$ 値母関数

$$\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} w^{n-1} \in \mathbb{C}[\![w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]\!]$$

を**デルタ関数**（*delta function*）と呼ぶ．この式は

$$\delta(z,w) = \sum_n z^n w^{-n-1} = \sum_n z^{n-1} w^{-n} = \sum_n z^{-n-1} w^n = \sum_{m+n=-1} z^m w^n$$

のように様々な形で表すことができる．
誤解の恐れのない場合は $\delta(z-w) = \delta(z,w)$ のようにも書く．

Proposition 1.1.1

デルタ関数について，次の性質が成り立つ．

i）任意の V 値母関数 $a(z) \in V[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して $a(z)\delta(z-w) = a(w)\delta(z-w)$.
ii）任意の V 値母関数 $a(z) \in V[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して $\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = a(w)$.

この命題は，通常のデルタ関数の性質 $\int a(z)\delta(z-w)\,\mathrm{d}z = a(w)$ 等を母関数の言葉で書き直したものになっている．

Proof. いずれも簡単な計算で示すことができる．ここでは後者のみ確かめる．
V 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n$ に対して，

$$\begin{aligned} a(z)\delta(z-w) &= \left(\sum_m a_m z^m\right)\left(\sum_n z^{-n-1} w^n\right) \\ &= \sum_d \left(\sum_n a_{n+d+1} w^n\right) z^d \end{aligned}$$

となるから，留数を取ると

$$\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = \sum_n a_n w^n = a(w)$$

が分かる. □

§ 1.2 シフト演算子

数列の漸化式は，$p : (a_n) \mapsto (a_{n+1})$ というシフト演算子を用いて書くことができる．ここでは，シフト演算子の母関数表示とその性質について見ていく．

Definition 1.2.1

V をベクトル空間とする．$pa(z) = z^{-1}a(z)$ で定まる線形演算子 $p : V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を $V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ 上の**シフト演算子**（*shifting operator*）と呼ぶ．

微分演算子とのアナロジーを踏まえると，$[p, q] = 1$ を満たす演算子 q を考えたい．これを見つけるために，量子力学の手続きを踏襲する．

Proposition 1.2.1

$V = \mathbb{C}$ とする．
0 を除く任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して，λ を固有値とする p の固有ベクトルが（スカラー倍を除いて）一意に存在する．この固有ベクトルのうち z^0 の係数が 1 であるものを $|\lambda\rangle$ と書く．

Proof. $a(z) = \sum_n a_n z^n \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ が固有値 λ に属する p の固有ベクトルであるとすると，

$$0 = (p - \lambda)a(z) = \sum_n a_{n+1} z^n - \lambda \sum_n a_n z^n = \sum_n (a_{n+1} - \lambda a_n) z^n$$

より $a_{n+1} = \lambda a_n$ が従う．よって，$a(z) = a_0 \sum_n \lambda^n z^n$ となる． □

量子力学と同じように，任意の母関数は $|\lambda\rangle$ によってスペクトル分解（固有値分解）をすることができる．

まず $|\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\rrbracket$ と見做し，$|\mu\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}\rrbracket$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}
\langle |\mu\rangle, |\lambda\rangle \rangle &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \mu^m z^m\right)\left(\sum_n \lambda^n z^n\right) \\
&= \sum_{m+n=-1} \mu^m \lambda^n \\
&= \delta(\lambda - \mu) \in \mathbb{C}\llbracket \lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}\rrbracket
\end{aligned}$$

となる．したがって $\langle\lambda| := |\lambda\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\rrbracket$ をブラベクトルと見做すことができる．

そこで一般の母関数 $|a(z)\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ に対して波動関数 $\psi(\lambda) = \langle \lambda \mid a(z)\rangle$ を定義し，$|a(z)\rangle = \int \psi(\lambda)|\lambda\rangle \mathrm{d}\lambda$ のように書けることを確認する．

THEOREM 1.2.2

母関数 $a(z) \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ に対して，その波動関数を

$$\psi(\lambda) := \mathrm{Res}_z \left(\langle\lambda|a(z)\rangle\right) \in \mathbb{C}\llbracket \lambda^{\pm 1} \rrbracket$$

で定義する．このとき

$$a(z) = \mathrm{Res}_\lambda \left(\psi(\lambda)|\lambda\rangle\right)$$

が成り立つ．

Proof. 直接計算して示す．

$a(z) = \sum_n a_n z^n$ のとき，波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \lambda^m z^m\right)\left(\sum_n a_n z^n\right) \\ &= \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\end{aligned}$$

となり，それと $|\lambda\rangle$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\lambda \left(\psi(\lambda)|\lambda\rangle\right) &= \mathrm{Res}_\lambda \left(\sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\right)\left(\sum_\ell \lambda^\ell z^\ell\right) \\ &= \sum_{m+\ell=-1} a_{-m-1} z^\ell \\ &= a(z)\end{aligned}$$

が従う． □

スペクトル分解を用いて，λ に関する平行移動の生成子 q を求めよう．

$\Delta\lambda$ を微小な変化量として，$(\Delta\lambda)^2$ 以降を無視する．$T(\Delta\lambda) : \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \to \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ を

$$T(\Delta\lambda)a(z) := \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)|\lambda + \Delta\lambda\rangle$$

で定める．もし $a(z) = |\mu\rangle$ であれば，波動関数が $\psi(\lambda) = \langle\lambda \mid \mu\rangle = \delta(\lambda-\mu)$ であるから，

$$T(\Delta\lambda)|\mu\rangle = \mathrm{Res}_\lambda\, \delta(\lambda-\mu)|\lambda+\Delta\lambda\rangle = |\mu+\Delta\lambda\rangle$$

となる．一般の母関数 $a(z)$ について，

$$\mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)|\lambda+\Delta\lambda\rangle = \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\left(|\lambda\rangle + \Delta\lambda \frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\right)$$

であるから，

$$qa(z) := \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}$$

と置くとき $T(\Delta\lambda) = 1 + \Delta\lambda \cdot q$ が成り立つ．

この q 演算子をさらに計算しよう．$|\lambda\rangle = \sum_n \lambda^n z^n$ であったから，λ で微分すると

$$\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda} = \sum_n n\lambda^{n-1} z^n.$$

一方で **Theorem 1.2.6** の証明より $\psi(\lambda) = \sum_n a_{-n-1}\lambda^n$ が分かるから，結局

$$\begin{aligned} qa(z) &= \mathrm{Res}_\lambda \left(\sum_m a_{-m-1}\lambda^m\right)\left(\sum_n n\lambda^{n-1}z^n\right) \\ &= \sum_n n a_{n-1} z^n \end{aligned}$$

が導かれた．これによって，正準関係 $[p,q] = 1$ を確認できる：

$$\begin{aligned} [p, 1 + \Delta\lambda \cdot q]a(z) &= pT(\Delta\lambda)a(z) - T(\Delta\lambda)pa(z) \\ &= \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\left((\lambda + \Delta\lambda)|\lambda + \Delta\lambda\rangle\right) - \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\left(\lambda|\lambda + \Delta\lambda\rangle\right) \\ &= \Delta\lambda \cdot \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)|\lambda\rangle \\ &= \Delta\lambda \cdot a(z). \end{aligned}$$

以上の議論をより厳密にするために，いくつかの準備が必要になる．

Definition 1.2.2

A がベクトル空間かつ環であり，環としての積が線型写像 $A \otimes A \to A$ を定めるとき，A を（$\mathbb{C}$ 上の）**代数**（*algebra*）と言う．A **加群**（*A-module*）とは，ベクトル空間 V 上にスカラー倍 $A \otimes V \to V$ が定義され，結合律 $(ab)v = a(bv)$ および単位律 $1 \cdot v = v$ が成り立っているものを言う．
A 加群の間の準同型 $f : V \to W$ は，任意のスカラー $a \in A$ とベクトル $v \in V$ に対して $f(av) = af(v)$ が成り立つとき，A **準同型**（*A-homomorphism*）と呼ばれる．

Lemma 1.2.1

A を代数，V を A 加群とする．A 準同型 $f : A[\![z^{\pm 1}]\!] \to V[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して，新しい A 準同型 $\hat{f} : A[\![z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]\!] \to V[\![z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]\!]$ を

$$\hat{f}\left(\sum_m a_m(z)\lambda^m\right) := \sum_m f(a_m(z))\lambda^m \quad \left(a_m(z) \in A[\![z^{\pm 1}]\!]\right)$$

で定義する．さらに，

$$f(a(z)) = \sum_n f_n(a(z))\, z^n$$

と書いたとき，$f_n(\sum a_k z^k) = \sum_m a_m f_{m,n}$（$f_{m,n} \in V$）の形をしていると仮定する．このとき

$$f(a(z)) = \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\hat{f}|\lambda\rangle$$

が成り立つ．ただし，$\psi(\lambda) = \mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)$.

Proof. $f_n(z^m) = \sum_k \delta_{k,m} f_{k,n} = f_{m,n}$ であるから，

$$\hat{f}|\lambda\rangle = \hat{f}\left(\sum_m z^m \lambda^m\right) = \sum_m f(z^m)\lambda^m = \sum_m \sum_n f_{m,n} z^n \lambda^m$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)\hat{f}|\lambda\rangle &= \mathrm{Res}_\lambda \left(\sum_\ell a_{-\ell-1}\lambda^\ell\right)\left(\sum_m \sum_n f_{m,n} z^n \lambda^m\right) \\ &= \sum_{m,n} a_m f_{m,n} z^n \\ &= f(a(z))\end{aligned}$$

と計算できる． □

Lemma 1.2.2

逆に，与えられた母関数 $g(\lambda) = \sum_{m,n} g_{m,n} \lambda^m z^n \in V\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\right]\!\right]$ について，線型写像

$$\hat{g}_n\left(\sum_m a_m z^m\right) := \sum_m a_m g_{m,n} \quad (a_m \in A)$$

が有限和として定まると仮定する．このとき，線型写像 $\hat{g} : A\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \to V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を

$$\hat{g}(a(z)) := \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda) g(\lambda)$$

で定義すると，$\hat{g}|\lambda\rangle = g(\lambda)$ が成立する．

Proof. **Lemma 1.2.1** の証明とほぼ同様の計算により従う． □

次に，無限小変位を扱うために冪級数環を導入しよう．

Definition 1.2.3

V をベクトル空間とする．$V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ の部分空間として，

$$V[\![z]\!] := \left\{ \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

を考える．この空間の各ベクトルを形式的冪級数と呼ぶ．
さらに V が代数のとき，$V[\![z]\!]$ にも自然に代数の構造が入る．これを（形式的）冪級数環と呼ぶ.

冪級数環における次の補題は基本的である．

Lemma 1.2.3

A を代数として，任意の冪級数 $a(z)=\sum_n a_n z^n \in A[\![z]\!]$ を取る．もし定数項 $a_0=a(0)$ が A の可逆元，すなわち $a_0^{-1}\in A$ が存在すれば，$a(z)^{-1}\in A[\![z]\!]$ も存在する．具体的には，$a(z)^{-1}=\sum_n b_n z^n$ と置くとき

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_n &= -b_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

によって帰納的に求まる．

Proof. $\sum_n b_n z^n$ を上で定義したとき，$(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)=1$ を示せば良い． □

いよいよ平行移動の生成子 q を定義していく．

Definition 1.2.4

スペクトルの平行移動演算子 $T(\mathrm{d}\lambda):\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]\to(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を，次のように定義する．まず $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)^n\in\mathbb{C}[\![\lambda,\mathrm{d}\lambda]\!]$ を，$n\geqslant 0$ のときは二項定理で，$n<0$ のときは **Lemma 1.2.3** で展開したものとして，

$$g(\lambda,\mathrm{d}\lambda) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda+\mathrm{d}\lambda)^n z^n \in \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]$$

を考える．このままだと **Lemma 1.2.2** を適用できないため，$O(\mathrm{d}\lambda^2)$ を無視して

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle \coloneqq |\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda^n + n\lambda^{n-1}\mathrm{d}\lambda) z^n \in (\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\right]\!\right]$$

とする．正確には，商写像

$$\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right] \twoheadrightarrow \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right] / \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\right]\!\right]\mathrm{d}\lambda^2 \cong (\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\right]\!\right]$$

による $g(\lambda,\mathrm{d}\lambda)$ の像を考えている．こうして，線型演算子

$$T(\mathrm{d}\lambda)a(z) \coloneqq \mathrm{Res}_\lambda\, \psi(\lambda)|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle \quad (\psi(\lambda) \coloneqq \mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z))$$

で定まる．

<u>**Remark 1.2.1**</u>　$\mathfrak{g}\coloneqq\mathfrak{gl}\,\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ と置く．ベクトル空間としての $\mathfrak{g}[\mathrm{d}\lambda]=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda^n$ には

$$[a\,\mathrm{d}\lambda^m, b\,\mathrm{d}\lambda^n] \coloneqq [a,b]\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad (a,b\in\mathfrak{g})$$

によって自然に Lie 代数の構造が入る．これを Lie 代数のイデアル $\mathfrak{g}[\mathrm{d}\lambda]\,\mathrm{d}\lambda^2$ で割ると，Lie 代数 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ を得る．

Lie 代数 $\mathfrak{g}[\mathrm{d}\lambda]$ は $\mathbb{C}[\mathrm{d}\lambda]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ 上に自然に作用する：

$$(a\,\mathrm{d}\lambda^m)\cdot b\,\mathrm{d}\lambda^n := (a\cdot b)\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad \left(a\in\mathfrak{g}, b\in\mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\right).$$

ここから，$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ の $(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ への作用が誘導される．

Definition 1.2.5

母関数 $\hat{q}|\lambda\rangle\in\mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\rrbracket$ を

$$\hat{q}|\lambda\rangle := \sum_n n\lambda^{n-1}z^n$$

として，**Lemma 1.2.2** によって線型演算子 $q:\mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\to\mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を定義する：

$$qa(z) := \mathrm{Res}_\lambda\,\psi(\lambda)\hat{q}|\lambda\rangle \quad (\psi(\lambda) := \mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)).$$

q 演算子の具体形は，上で計算した通り $q\sum_n a_n z^n = \sum_n na_{n-1}z^n$ で与えられる．

次の命題は直ちに従う：

Proposition 1.2.3

$V=(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と置き，$\mathfrak{gl}\,V$ の元として $T(\mathrm{d}\lambda)=1+q\,\mathrm{d}\lambda$ が成り立つ．

Proof. $T(\mathrm{d}\lambda)$ と q の定義より明らか． □

さて，最後に交換子 $[p,q]$ を計算しよう．

Proposition 1.2.4

$V=\mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と置く．

シフト演算子 p は，V 上の演算子とも $V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ 上の演算子とも見做すことができる．そのとき，V から $V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ への線型写像として

$$pT(\mathrm{d}\lambda)-T(\mathrm{d}\lambda)p=\mathrm{d}\lambda.$$

ただし，$\mathrm{d}\lambda$ は $V\ni a(z)\mapsto a(z)\,\mathrm{d}\lambda\in V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ で定義される．

Proof. **Lemma 1.2.1** の定義通りに計算すると，

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle &= \hat{p}|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle = (\lambda+\mathrm{d}\lambda)|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle \\ &= (\lambda+\mathrm{d}\lambda)\left(|\lambda\rangle + \frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\right) = \lambda|\lambda\rangle + \left(|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda, \\ \hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\hat{p}|\lambda\rangle &= \hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\lambda|\lambda\rangle = \lambda|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

が従う．よって，**Lemma 1.2.2** より $pT(\mathrm{d}\lambda)a(z) - T(\mathrm{d}\lambda)pa(z) = \mathrm{Res}_\lambda\,\psi(\lambda)|\lambda\rangle\,\mathrm{d}\lambda = a(z)\,\mathrm{d}\lambda$. □

Proposition 1.2.5

$\mathfrak{gl}\,\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ の元として，$[p,q]=1$.

Proof. $V = \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ と置く．

Proposition 1.2.4 で $V \to V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ の写像として

$$[p, T(\mathrm{d}\lambda)] = \mathrm{d}\lambda$$

を証明したから，とくに $\mathfrak{gl}(V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として

$$[p, 1 + q\,\mathrm{d}\lambda] = \mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ．よって一般に，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元 $f + g\,\mathrm{d}\lambda$ が $\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $f + g\,\mathrm{d}\lambda = 0$ ならば，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元としても $f + g\,\mathrm{d}\lambda = 0$ となることを示せば十分である．$\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $=0$ のとき，任意のベクトル $v, w \in V$ に対して

$$(f + g\,\mathrm{d}\lambda)(v + w\,\mathrm{d}\lambda) = f(v) + (f(w) + g(v))\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

が成り立つ．つまり任意の $v \in V$ に対して $f(v) = 0$ であるから，$f = 0 \in \mathfrak{gl}\,V$．すると $g(v) = 0$ も従い，やはり $g = 0 \in \mathfrak{gl}\,V$ が言える． □

以上の命題を再度述べ直すと，次の定理を得る．

Theorem 1.2.6

$\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ 上の線型演算子 q を

$$qa(z) := z\frac{\partial}{\partial z}(za(z)) = \sum_n n a_{n-1} z^n$$

で定義すると，交換子が $[p,q]=1$ を満たす．

なお，今までの計算を経由せず天下り式に示すこともできる：

Proof. $pa(z) = z^{-1}a(z)$ であったから，

$$\begin{aligned} pq &= z^{-1} \cdot z\frac{\partial}{\partial z}z = \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + z\frac{\partial}{\partial z}, \\ qp &= z\frac{\partial}{\partial z}z \cdot z^{-1} = z\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

□

§ 1.3 一般固有空間と Heisenberg 代数

ここでは，p 演算子の一般固有空間について調べる．

Definition 1.3.1

V をベクトル空間として，その上の線型演算子 $f : V \to V$ を取る．$\lambda \in \mathbb{C}$ を f の固有値とするとき，固有値 λ に属する**一般固有ベクトル**（*generalized eigenvector*）とは，ベクトル $0 \neq v \in V$ であって，ある整数 $n \geqslant 1$ について $(f-\lambda)^n v = 0$ となるものを言う．$n = 1$ のときは固有ベクトルに他ならない．固有値 λ の一般固有ベクトルのなす部分空間を

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \geqslant 1\ (f-\lambda)^n v = 0\}$$

と書き，固有値 λ に属する**一般固有空間**（*generalized eigenspace*）と呼ぶ．

V が有限次元であれば，一般固有空間分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ がよく知られているが，今考えたいのは無限次元の空間 $V = \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ である．無限次元の場合，一般固有空間分解は成り立たないが線型独立性なら証明することができる．

Proposition 1.3.1

$\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ を線型演算子 $f \in \operatorname{End} V$ の相異なる固有値（のうち一部）とすると，$V_{\lambda_0} \cap \cdots \cap V_{\lambda_k} = 0$ が成り立つ．

Proof. V が有限次元のときの証明は省略する．V を無限次元とする．

簡単のため，$\lambda_0 = 0$ の場合で示そう．$v \in \bigcap V_{\lambda_i}$ とすると，適当な $N_0, \ldots, N_k \geqslant 1$ を用いて $(f-\lambda_i)^{N_i} v = 0$ とできる．そこで

$$V' := \operatorname{span}\{f^{n_0}(f-\lambda_1)^{n_1} \cdots (f-\lambda_k)^{n_k} v \mid 0 \leqslant n_i < N_i\} \subset V$$

という部分空間を考えると，V' は有限次元であり，さらに $f(V') \subset V'$ が成り立つ（$f^N(f-\lambda)^m v = (f-\lambda)^m f^N v = 0 \in V'$ 等に注意）．よって f を V' 上の演算子 $\in \operatorname{End} V'$ と見做すことができ，$v \in V'$ は $f \in \operatorname{End} V'$ の固有値 λ_i に属する一般固有ベクトルとなる．有限次元の場合には $\bigcap V'_{\lambda_i} = 0$ であったから，$v = 0$ が従う．

□

続いて，$[p,q]=1$ という正準関係を満たす演算子の一般固有空間を求めるために，Heisenberg 代数を導入する．

Definition 1.3.2

3 個のベクトル $p,q,1$ を生成系とする自由ベクトル空間

$$\mathfrak{h}=\mathbb{C}p\oplus\mathbb{C}q\oplus\mathbb{C}1$$

に交換関係

$$[p,q]=1,\quad [1,H]=0$$

を定義すると，$\mathfrak{h}$ は Lie 代数となる．これを **Heisenberg 代数**（*Heisenberg algebra*）と呼ぶ.

Definition 1.3.3

Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}$ の**表現**（*representation*）とは，ベクトル空間 V と Lie 代数順同型 $\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}\,V$ と組のことを言う．ただし $\mathfrak{gl}\,V$ は，ベクトル空間 $\mathrm{End}\,V$ を $[f,g]:=fg-gf$ という交換子によって Lie 代数の構造を入れたものを表し，Lie 代数順同型とは $\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]$ を満たす線型写像のことを意味する．ρ を明示せずに単に V を表現と呼ぶことも多い.
$\mathfrak{h}$ の表現のことを $\mathfrak{h}$ **加群**（$\mathfrak{h}$*-module*）とも呼ぶ.
$\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}\,V$ が $\mathfrak{h}$ の表現のとき，各 $h\in\mathfrak{h}$ と $v\in V$ に対して $\rho(h)(v)\in V$ というベクトルが定まる．とくに誤解の恐れのない場合，ρ を省略して

$$\rho(h)(v)=h(v)=h\cdot v=hv$$

のようにも表す.

Definition 1.3.4

$\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}\,V$ を表現とする．ベクトル $v\in V$ が，ある複素数 $\lambda\in\mathbb{C}$ を用いて $\rho(1)v=\lambda v$ を満たすとき，v を**ウェイトベクトル**（*weight vector*）と言い，λ を v の**ウェイト**（*weight*）と呼ぶ.
ウェイトベクトル v であって，さらに $v\neq 0$ かつ $\rho(p)v=0$ を満たすとき，v を**最高ウェイトベクトル**（*highest weight vector*）と呼ぶ.

Example 1.3.1 i）$\mathbb{C}$ 値母関数のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!]$ に対して，

$$\rho(p)=z^{-1},\quad \rho(q)=z\frac{\partial}{\partial z}z,\quad \rho(1)=\mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!])$ が定まる．このとき任意の母関数はウェイト 1 のウェイトベクトルである.

ii）0 でない複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を固定して

$$\rho_\lambda(p) = z^{-1} - \lambda, \quad \rho_\lambda(q) = \rho(q), \quad \rho_\lambda(1) = \rho(1)$$

と定義すると，ρ_λ もまた $\mathfrak{h}$ 加群を定める．この場合も任意の母関数がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$|\lambda\rangle$ は最高ウェイトベクトルである．

iii）一変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ に対して，

$$\rho(p) = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho(q) = z, \quad \rho(1) = \mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[z])$ が定まる．同様に任意の多項式がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$1 \in \mathbb{C}[z]$ が最高ウェイトベクトルである．

iv）より一般に，あるベクトル空間 V の線型作用素 $P, Q, I \in \mathrm{End}\,V$ であって $[P,Q] = I, [I,P] = 0 = [I,Q]$ を満たすものがあれば，

$$\rho(p) = P, \quad \rho(q) = Q, \quad \rho(1) = I$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,V$ が定まる．

以下では数列の正規形漸化式の解空間が，$\mathfrak{h}$ 表現 $\mathbb{C}[z]$ を用いて書けることを示す．

Definition 1.3.5

$\mathfrak{h}$ 加群 V の部分空間 $U \subset V$ が，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して $h(U) \subset U$ を満たすとき，すなわち V と同じ作用によって U もまた $\mathfrak{h}$ の表現となるとき，U を V の**部分表現**（*subrepresentation*）または**部分 $\mathfrak{h}$ 加群**（$\mathfrak{h}$-*submodule*）であると言う．部分表現のうち，V 自身と $0 \subset V$ の二つを**自明な**（*trivial*）部分表現と呼ぶ．
0 でない $\mathfrak{h}$ 加群 V が**既約**（*irreducible*）または**単純**（*simple*）であるとは，非自明な部分表現を持たないことを言う．

既約表現に関する重要な性質を述べる前に，便利な公式を証明しておこう．

Lemma 1.3.1

$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,V$ を $\mathfrak{h}$ の表現とする，$v \in V$ が複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ をウェイトとする最高ウェイトベクトルのとき，

$$\rho(1)\rho(q)^n v = \lambda\rho(q)^n v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}),$$
$$\rho(p)\rho(q)^n v = n\lambda\rho(q)^{n-1} v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1})$$

が成り立つ．

Proof. 上の等式は，$\rho(1)v = \lambda v$ と $[\rho(1), \rho(q)] = \rho([1,q]) = 0$ から従う．
下の等式を n に関する帰納法で示す．

v が最高ウェイトベクトルであるから，

$$\rho(p)\rho(q)v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))v = \lambda v$$

となり，$n = 1$ の場合が確かめられる．

n の場合を仮定すると，$n+1$ について

$$\rho(p)\rho(q)^{n+1}v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))\rho(q)^n v = \rho(q) \cdot n\lambda\rho(q)^{n-1}v + \lambda\rho(q)^n v = (n+1)\lambda\rho(q)^n v$$

となるから，任意の $n \geqslant 1$ で成り立つことが示された．□

THEOREM 1.3.2

V を $\mathfrak{h}$ の表現とする．$v \in V$ が最高ウェイトベクトルのとき，V の部分空間

$$V' := \mathrm{span}\{q^n v \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

は V の部分表現であり，さらに v のウェイトが 0 でないときは既約となる．

この表現を $U(\mathfrak{h})v = V'$ と書く．$U(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ の universal enveloping algebra のつもりであるが，ここではそれを定義せずに単なる記号として扱っている．

Proof. まず **LEMMA 1.3.1** より，V' が部分表現となることは分かる．

既約性を示すために，次の性質に注意する：

$$p^n q^n v \in \mathbb{C}v \setminus 0, \quad p^{n+1}q^n v = 0.$$

これらは **LEMMA 1.3.1** を繰り返し適用すると，$p^n q^n v = n!\lambda v$ となることから従う．ただし v のウェイトを λ と置いた．$0 \neq U \subset V'$ を任意の部分表現として，ベクトル $0 \neq u \in U$ を適当に取る．すると $u = \sum_{n=0}^{N} a_n q^n v$（$a_n \in \mathbb{C}$，$a_N \neq 0$）と書け，

$$p^N u = a_N p^N q^N v \in \mathbb{C}v \setminus 0$$

を満たす．また，U は部分表現であるから $p^N u \in U$ および $q^m p^N u \in U$（$m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$）となる．よって V' の任意のベクトルが U の元となるから，$U = V'$．したがって V' は既約表現である．□

COROLLARY 1.3.3

EXAMPLE 1.3.1 の表現 $\mathbb{C}[z]$ は既約．

Proof. $v = 1$ として **THEOREM 1.3.2** を適用すれば良い．□

Lemma 1.3.2（Schur の補題）

$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,V$，$\rho' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,V'$ をそれぞれ $\mathfrak{h}$ の 0 でない表現とする．$f : V \to V'$ を $\mathfrak{h}$ 準同型，すなわち線型写像 $V \to V'$ であって任意の $h \in \mathfrak{h}$ と $v \in V$ に対して $f(\rho(h)v) = \rho'(h)f(v)$ とする．このとき，ρ が既約表現で f が全射ならば f は全単射となる．

Proof.（線型写像としての）$\operatorname{Ker} f \subset V$ を考えると，これは V の部分表現になる．今，V は既約であるから $\operatorname{Ker} f = 0, V$ でなければならないが，$V' \neq 0$ かつ f が全射であるから $\operatorname{Ker} f = 0$．すなわち f は単射である． □

Corollary 1.3.4

V を $\mathfrak{h}$ の表現として，$v \in V$ がウェイト 1 の最高ウェイトベクトルであるとする．このとき，部分表現 $U(\mathfrak{h})v$ は $\mathbb{C}[z]$ と同型となる．つまり，全単射な $\mathfrak{h}$ 準同型 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ が存在する．さらに，この準同型は $f(z^n) = q^n v$ を満たすように取ることができる．
とくに，集合 $\{q^n v \mid n \geqslant 0\}$ は線型独立である．

Proof. 線型写像 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ を $f(z^n) = q^n v$ で定義すると，これは全射な $\mathfrak{h}$ 準同型となる．よって **Corollary 1.3.3** および **Lemma 1.3.2** から主張が従う． □

Corollary 1.3.5

$p = z^{-1}, q = z(\partial/\partial z)z \in \operatorname{End}\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ について，集合

$$B := \left\{ q^n|\lambda\rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ \lambda \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

は線型独立であり，各 $q^n|\lambda\rangle$ は $(p-\lambda)^{n+1}q^n|\lambda\rangle = 0$ を満たす．

Proof. **Example 1.3.1** の表現 $\rho_\lambda : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ を考えると，**Corollary 1.3.4** より集合

$$B_\lambda := \{q^n|\lambda\rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

は線型独立となる．また，**Lemma 1.3.1** を繰り返し用いれば

$$(p-\lambda)^{n+1}q^n|\lambda\rangle = \rho_\lambda(p)^{n+1}\rho_\lambda(q)^n|\lambda\rangle = 0$$

も従う．

とくに $q^n|\lambda\rangle$ は p の固有値 λ の一般固有ベクトルであるから，**Proposition 1.3.1** より $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$ も線型独立となることが分かる． □

§ 1.4 正規形漸化式の解空間

ここまでで準備は終わり，いよいよ漸化式の解空間の記述が始まる．まずは正規形漸化式を定義しよう．

Definition 1.4.1

正規形（*normal*）の漸化式とは，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する

$$a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \quad (c_i \in \mathbb{C},\ c_0 \neq 0)$$

という形の漸化式のことである．

正規形漸化式は，$p = z^{-1} \in \operatorname{End}\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ を用いて

$$p^d a(z) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i p^i a(z)$$

と母関数表示することができる．さらに**特性多項式**（*characteristic polynomial*）$\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ を $\chi(t) := t^d - c_{d-1}t^{d-1} - \cdots - c_0$ で定義すると，

$$\chi(p)a(z) = 0$$

と書ける．この解空間を $S_\chi := \{a(z) \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!] \mid \chi(p)a(z) = 0\}$ と置き，S_χ の基底を求めることが目標である．

S_χ はベクトル空間であり，その次元はすぐに計算できる．

Proposition 1.4.1

$\dim S_\chi = \deg \chi$.

Proof. $d = \deg\chi$ として，線型写像 $f : S_\chi \to \mathbb{C}^d$ を

$$f\left(\sum_n a_n z^n\right) := (a_0, \ldots, a_{d-1})$$

で定義する．このとき，任意の $a' = (a_0, \ldots, a_{d-1})$ に対して，$f(a(z)) = a'$ となる母関数 $a(z) \in S_\chi$ がただ一つ存在する．実際，a' を初期条件として漸化式によって $a_d, a_{d+1}, \ldots$ を一意に求めることができる．$n < 0$ に関しては，漸化式を

$$a_n = \frac{1}{c_0}(a_{n+d} - c_{d-1}a_{n+d-1} - \cdots - c_1 a_{n+1})$$

と変形して $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ を順番に求めれば良い．

したがって f は全単射であり，線型同型となる． □

特性多項式の相異なる根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$，それらの重複度をそれぞれ $M_1, \ldots, M_k \geqslant 1$ として，$\chi_i(t) \coloneqq (t-\lambda_i)^{M_i} \in \mathbb{C}[t]$ と置く．次は S_{χ_i} を計算したい．

Proposition 1.4.2

$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を 0 でない複素数として，$\chi(t) = (t-\lambda)^N$ を考える．このとき，

$$S_\chi = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathbb{C} q^n |\lambda\rangle$$

が成り立つ．

Proof. **Corollary 1.3.5** より，集合

$$B_\lambda^N \coloneqq \{q^n|\lambda\rangle \mid 0 \leqslant n < N\}$$

は線型独立であり，かつ $(p-\lambda)^{n+1} q^n |\lambda\rangle = 0$ を満たす．とくに $\chi(p) B_\lambda^N = 0$ であるから，$B_\lambda^N \subset S_\chi$ が分かる．一方で **Proposition 1.4.1** を見ると $\dim S_\chi = N = \# B_\lambda^N$ となっているから，B_λ^N が S_χ の基底でなければならない．□

以上の命題を使って一般の解空間 S_χ が計算できる．

Theorem 1.4.3

一般の特性多項式 χ に対して，

$$S_\chi = \bigoplus_{i=1}^{k} S_{\chi_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{n=0}^{M_i-1} \mathbb{C} q^n |\lambda_i\rangle.$$

ただし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は χ の相異なる根であり，λ_i の重複度を M_i，$\chi_i(t) \coloneqq (t-\lambda_i)^{M_i}$ と置いた．

Proof. 特性多項式の定数項が $\chi(0) = -c_0 \neq 0$ であったから，$\lambda_i \neq 0$ となることに注意する．

まず各 i, j に対して $[p-\lambda_i, p-\lambda_j] = 0$ という交換関係が成り立つから，$\chi_i(p)a(z) = 0$ ならば $\chi(p)a(z) = 0$ が言える．すなわち $S_{\chi_i} \subset S_\chi$．さらに **Corollary 1.3.5** によって $\bigcup_i B_{\lambda_i}^{M_i}$ の線型独立性が分かるから，

$$S_\chi \supset \sum_i S_{\chi_i} = \bigoplus_i S_{\chi_i}$$

となる．最後に **Proposition 1.4.1** で両辺の次元を比較すれば，等式が導かれる．□