正規形漸化式の解法についての理論的背景

なっふぃ

@naughiez

Contents

第 1 章　予備知識

以下，ベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．

ここでは，以下の理論に必要な代数系について述べる．代数系についての知識がある読者は，読み飛ばしても構わない．

§ 1.1 代数

Definition 1.1.1

A をベクトル空間とする．A が積 $A \times A \to A$ によって可環環になり[*1]，それが $\mathbb{C}$ 上双線型であるとき（積が線型写像 $A \otimes A \to A$ を定めるとき），A を $\mathbb{C}$ 上の**代数**（*algebra*）と呼ぶ．

代数の間の線型写像 $A \to B$ は，それが同時に環準同型でもあるとき，**代数準同型**（*algebra homomorphism*）と呼ばれる．とくに誤解の恐れのない場合は単に準同型と言う．

Definition 1.1.2

A を代数，V をベクトル空間とする．

V 上に A によるスカラー倍 $A \otimes V \to V$ が定まっていて，ベクトル空間と同様の公理

i）$a(bv) = (ab)v$（$a, b \in A$，$v \in V$），

ii）$1v = v$（$v \in V$）

を満たすとき，V を A **加群**（*A-module*）と言う．

A 加群の間の A **準同型**（*A-homomorphism*）とは，A によるスカラー倍を保つような線型写像のことである．V から W への A 準同型全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ と書く．これも再び A 加群となる．

[*1] 一般には可環である必要はないが，§1.2 以降で現れる代数はすべて可環である．

REMARK 1.1.1　代数準同型 $f: A \to B$ があるとき，スカラー倍 $A \otimes B \to B$ が

$$a \cdot b := f(a)b \quad (a \in A, b \in B)$$

で定義できる．これにより，B は自然に A 加群の構造を持つ．

DEFINITION 1.1.3

代数 A について，A の可逆元全体のなす集合を

$$A^\times := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

と書き，A の**単元群**（*unit group*）と言う．それに伴い，可逆元のことを**単元**（*unit*）とも呼ぶ．
単元群 $A^\times$ は群となる．

§ 1.2 Lie 代数とその表現

DEFINITION 1.2.1

ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上に**ブラケット**（*bracket*）と呼ばれる二項演算 $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が定義されていて，次の性質を満たすとき，$\mathfrak{g}$ を **Lie 代数**（*Lie algebra*）と言う：

i）歪対称性 $[x,x] = 0$（$x \in \mathfrak{g}$），
ii）Jacobi 恒等式 $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$（$x, y, z \in \mathfrak{g}$）．

Lie 代数の間の線型写像 $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ がブラケットを保つ，すなわち $[f(x), f(y)] = f([x,y])$ が成り立つとき，これを **Lie 代数準同型**（*Lie algebra homomorphism*），あるいは単に準同型と呼ぶ．

REMARK 1.2.1　歪対称性は，任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x,y] = -[y,x]$ が成り立つことと同値である．また，歪対称性を仮定したとき，Jacobi 恒等式は

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \quad (x, y, z \in \mathfrak{g})$$

と書くこともできる．

EXAMPLE 1.2.1　i）（非可換）代数 A は，ブラケットを $[a,b] := ab - ba$ で定義するとき，Lie 代数となる．
ii）とくに，ベクトル空間 V 上の線型作用素のなす代数 $\mathrm{End}\, V$ は Lie 代数となる．これが（代数ではなく）Lie 代数であることを強調するため，$\mathrm{End}\, V$ の代わりに $\mathfrak{gl}\, V$ と表す．
iii）Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，準同型 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が $\mathrm{ad}(x): y \mapsto [x,y]$ によって定義できる．ad がたしかに準同型であることは，**REMARK 1.2.1** から従う．

Definition 1.2.2

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V について，Lie 代数準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,V$ を $\mathfrak{g}$ の**表現**（*representation*）と呼ぶ．単に V を $\mathfrak{g}$ の表現と呼ぶことも多い．また，表現を $\mathfrak{g}$ **加群**（$\mathfrak{g}$-*module*）とも呼ぶ．
表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,V$ があるとき，$x \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ に対して $\rho(x)v \in V$ という元が定まる．ρ を明示する必要のない場合は，これを

$$\rho(x)v = x \cdot v = xv$$

のようにも表す．さらに，V の（空でない）部分集合 $S \subset V$ に対して，$x \in \mathfrak{g}$ による**軌道**（*orbit*）を

$$\rho(x)S = xS \coloneqq \{\rho(x)s \mid s \in S\}$$

と，$\mathfrak{g}$ 全体による軌道を

$$\rho(\mathfrak{g})S = \mathfrak{g}S \coloneqq \bigcup_{x\in\mathfrak{g}} \rho(x)S$$

と表す．

Remark 1.2.2　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,V$ があるとき，線型写像 $\mu : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ が $\mu(x \otimes v) \coloneqq \rho(x)v$ で定まる．逆に線型写像 $\mu : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ が $\mu([x, y] \otimes v) = \mu(x, \mu(y, v)) - \mu(y, \mu(x, v))$ を満たすとき，$\mathfrak{g}$ の表現 ρ を $\rho(x) : v \mapsto \mu(x, v)$ と定義できる．

Example 1.2.2　i）$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を用いて $\mathfrak{g}$ をそれ自身の表現と見做すことができる．これを**随伴表現**（*adjoint representation*）と言う．

Definition 1.2.3

$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,V$，$\rho' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,V'$ をともに Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．線型写像 $f : V \to V'$ が $\mathfrak{g}$ の作用を保つ，つまり $f(\rho(x)v) = \rho'(x)f(v)$ を満たすとき，f を表現の**準同型**（*homomorphism*）と言う．
表現 V の部分空間 $W \subset V$ は，$\mathfrak{g}$ の作用で閉じているとき，V の**部分表現**（*subrepresentation*）あるいは**部分 $\mathfrak{g}$ 加群**（$\mathfrak{g}$-*submodule*）と呼ばれる．
部分表現による商空間 V/W への $\mathfrak{g}$ の作用が，自然に

$$\overline{\rho}(x)(v + W) \coloneqq \rho(x)v + W \quad (x \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

で定義できる．この表現 $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ を V の W による**商表現**（*quotient representation*）あるいは**商加群**（*quotient* $\mathfrak{g}$-*module*）と呼ぶ．このとき自然な射影 $V \twoheadrightarrow V/W$ は表現の準同型となる．

Definition 1.2.4

$\mathfrak{g}$ をそれ自身の随伴表現と見たとき，部分表現を**イデアル**（*ideal*），商表現を**商 Lie 代数**（*quotient Lie algebra*）と呼ぶ．

Proposition 1.2.1

表現の準同型 $f : V \to W$ に対して，次が成り立つ：

i）f の**核**（*kernel*）$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$ は V の部分表現である；
ii）f の**像**（*image*）$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$ は W の部分表現である；
iii）表現としての準同型定理 $V/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$．

Proof. 証明はベクトル空間のときと同じであるから省略する． □

Proposition 1.2.2

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{g}$ の表現 V の部分表現 $W \subset V$ について，$\mathfrak{a}W \subset W$ が成り立つならば（$\mathfrak{g}$ の）商表現 V/W は商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の表現となる．

Proof. $\mathfrak{a}W \subset W$ より，線型写像 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \otimes V/W \to V/W$ が well-defined に定まる． □

Definition 1.2.5

$\mathfrak{g}$ の 0 でない表現 $V \neq 0$ が $0, V \subset V$ 以外に部分表現を持たないとき，V を**既約**（*irreducible*）表現あるいは**単純**（*simple*）$\mathfrak{g}$ 加群である言う．

Proposition 1.2.3（Schur の補題）

表現の 0 でない準同型 $f : V \to W$ について，次が成り立つ：

i）V が既約ならば f はつねに単射；
ii）W が既約ならば f はつねに全射；
iii）V と W がともに既約ならば f はつねに全単射．

Proof. V が既約であれば，V の部分表現 $\mathrm{Ker}\, f$ は 0 または V でなければならないが，$f \neq 0$ という仮定により $\mathrm{Ker}\, f = 0$ が分かる．他の主張も同様に示せる． □

§ 1.3 Laurent 多項式環と冪級数環

Definition 1.3.1

V をベクトル空間とする．z を変数とする V 係数の（形式的）**Laurent 多項式環**（*Laurent polynomial ring*）[*2] を

$$V\left[z^{\pm 1}\right] := \left\{ \sum_{n=p}^{d} a_n z^n \;\middle|\; p, d \in \mathbb{Z}, a_n \in V \right\}$$

で定義する．また Laurent 多項式 $a(z) = \sum_{n=p}^{d} a_n z^n V[z^{\pm 1}]$ に対して，

$$\begin{aligned} \deg a(z) &:= \max\{0\} \cup \{p \leqslant n \leqslant d \mid a_n \neq 0\}, \\ \operatorname{ord} a(z) &:= -\min\{0\} \cup \{p \leqslant n \leqslant d \mid a_n \neq 0\} \end{aligned}$$

をそれぞれ $a(z)$ の**次数**（*degree*），**位数**（*order*）と言う．
$V = A$ が代数のとき，Laurent 多項式環上に積

$$\left(\sum_{m=p}^{d} a_m z^m\right)\left(\sum_{n=p'}^{d'} b_n z^n\right) := \sum_{\ell=p+p'}^{d+d'} \left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n\right) z^\ell$$

が定義できる．これにより $A[z^{\pm 1}]$ は代数となる．

Proposition 1.3.1

ベクトル空間として，

$$V \otimes \mathbb{C}\left[z^{\pm 1}\right] \cong V\left[z^{\pm 1}\right]$$

という自然な同型が成立する．この同型は具体的には，$v \otimes \sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で与えられる．

Proof. 写像 $(v, \sum_n a_n z^n) \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ は双線型であるから，線型写像 $V \otimes \mathbb{C}\left[z^{\pm 1}\right] \to V\left[z^{\pm 1}\right]$ が存在する．逆写像は

$$\sum_{n=p}^{d} a_n z^n \mapsto \sum_{n=p}^{d} (a_n \otimes z^n)$$

とすれば良い．ただし，右辺の z^n は $z^n \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ と見做している． □

[*2] V が環でなければ $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ も環にはならないが，呼称の単純化のために多項式環と呼ぶことにする．

Definition 1.3.2

V をベクトル空間とする．z を変数とする V 係数の（形式的）**冪級数環**（*power series ring*）を

$$V[\![z]\!] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

で定義する．

$V = A$ が代数のとき，冪級数環上に積

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) := \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n\right) z^{\ell}$$

が定義できる．これにより $A[\![z]\!]$ は代数となる．

Proposition 1.3.2

A を代数として，任意の冪級数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in A[\![z]\!]$ を取る．もし定数項 $a_0 = a(0)$ が A の単元であれば，$a(z)^{-1} \in A[\![z]\!]$ も存在する．具体的には，$a(z)^{-1} = \sum_n b_n z^n$ と置くとき

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_n &= -b_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

によって帰納的に求まる．

とくに，$A[\![z]\!]$ の単元群が

$$A[\![z]\!]^{\times} = A^{\times} + A[\![z]\!] z$$

と求まる．

Proof. $\sum_n b_n z^n$ を上で定義したとき，$(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$ を示せば良い． □

Example 1.3.1 i）$a \in A^{\times}$ が単元のとき，任意の $n \geqslant 0$ に対して

$$(a+z)^{-n} = a^{-n} - n a^{-n-1} z + O(z^2)$$

が成り立つ．

PROPOSITION 1.3.3

線型写像 $f : U \otimes V \to W$ があるとき，線型写像 $\tilde{f} : U[\![z]\!] \otimes V[\![z]\!] \to W[\![z]\!]$ が

$$\tilde{f}\left(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n\right) := \sum_d \left(\sum_{m+n=d} f(a_m \otimes b_n)\right) z^d$$

で定義できる．

Proof. 写像 $(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n) \mapsto \sum f(a_m \otimes b_n) z^d$ が双線型であるから良い． □

COROLLARY 1.3.4

$\mathfrak{g}$ が Lie 代数のとき，ブラケット $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を冪級数環上へ拡大することで，冪級数環 $\mathfrak{g}[\![z]\!]$ もまた Lie 代数となる．

Proof. 歪対称性は明らか．Jacobi 恒等式も定義通り愚直に計算すれば従う． □

COROLLARY 1.3.5

V が Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現のとき，$\mathfrak{g}$ の作用 $\mathfrak{g} \otimes V \to V$ を冪級数環へ拡大することで，$V[\![z]\!]$ が $\mathfrak{g}[\![z]\!]$ の表現となる．

Proof. 計算は省略する． □

第 2 章　正規形漸化式の解空間について

§ 2.1 母関数

Definition 2.1.1

V をベクトル空間とするとき，V 値の形式的 Laurent 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ を数列 $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ の**母関数**（*generating function*）と呼ぶ．母関数全体のなすベクトル空間を

$$V[\![z^{\pm 1}]\!] := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

と表す．

二変数以上の級数も同様に定義される：

$$V[\![w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]\!] := \left\{ \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} w^m z^n \;\middle|\; a_{m,n} \in V \right\},$$

$$V[\![w^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]\!] := \left\{ \sum_{k,\ell,m,n\in\mathbb{Z}} a_{k,\ell,m,n} w^k x^\ell y^m z^n \;\middle|\; a_{k,\ell,m,n} \in V \right\},$$

etc.

Laurent 級数のなすベクトル空間 $V[\![z^{\pm 1}]\!]$ は，ベクトル空間としては数列のなす空間

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}, V) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in V\}$$

と同型になる．単なる数列との違いは，複素関数に由来する諸々の操作を持つところである．

Definition 2.1.2

母関数 $a(z) = \sum a_n z^n \in V[\![z^{\pm 1}]\!]$ の**留数**（*residue*）を

$$\mathrm{Res}_z\, a(z) := a_{-1}$$

で定義する．

DEFINITION 2.1.3

ベクトル空間 U,V,W について，U,V の間のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : U\otimes V \to W$（すなわち，$U\times V \to W$ の双線型写像）があるとき，母関数の積を自然に定義できる．具体的には，U 値母関数 $a(z)=\sum_n a_n z^n \in U[\![z^{\pm1}]\!]$ と V 値母関数 $b(z)=\sum_m b_m z^m \in V[\![z^{\pm1}]\!]$ に対して，

$$a(z)b(z) := \sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n+m=d}\langle a_n, b_m\rangle\right) z^d \in W[\![z^{\pm1}]\!]$$

で定義する．ただし，すべての z^d の係数 $\sum\langle a_n, b_m\rangle$ が有限和であるような $a(z),b(z)$ の組に限る．無限和のときは定義しない．

このような（積を定義できる）母関数 $a(z),b(z)$ に対して，その積の留数を

$$\langle a(z), b(z)\rangle := \mathrm{Res}_z\, a(z)b(z) \in W$$

と書く．

この定義は，$\mathbb{C}$ 値関数の内積

$$\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)^*\psi(x)\mathrm{d}x$$

に由来する．

<u>**EXAMPLE 2.1.1**</u> i）代数 A 上の加群 V には，自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\otimes A \to V$（単なるスカラー倍の構造射）がある．これによって，V 値母関数 $a(z)\in V[\![z^{\pm1}]\!]$ と A 値 Laurent 多項式 $b(z)\in A[z^{\pm1}]$ との積を定義できる：

$$a(z)b(z) = \sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n+m=d} b_m\cdot a_n\right) z^d \in V[\![z^{\pm1}]\!].$$

これは任意の $a(z)\in V[\![z^{\pm1}]\!]$ および $b(z)\in A[z^{\pm1}]$ に対して定義できることに注意.

ii）二変数の Laurent 級数は Laurent 級数値の母関数とみなすことができる：$V[\![w^{\pm1}, z^{\pm1}]\!] = V[\![w^{\pm1}]\!][\![z^{\pm1}]\!]$．さらに，$V = A$ が代数のとき，異なる変数の母関数のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : A[\![x^{\pm1}]\!]\otimes A[\![y^{\pm1}]\!] \to A[\![x^{\pm1}, y^{\pm1}]\!]$ を自然に

$$\left\langle \sum_m a_m x^m, \sum_n b_n y^n \right\rangle := \sum_{m,n}(a_m b_n)\, x^m y^n$$

で定義できる．これによって，$A[\![x^{\pm1}, z^{\pm1}]\!]$ と $A[\![y^{\pm1}, z^{\pm1}]\!]$ の積を考えることができる．積は三変数 x,y,z の母関数となる．

iii）V 値母関数のなすベクトル空間について，線型写像 $V\otimes\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!] \to V[\![z^{\pm1}]\!]$ が $v\otimes\sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で定まる．ここから $V[\![w^{\pm1}]\!]\otimes\mathbb{C}[\![w^{\pm1}, z^{\pm1}]\!] \to V[\![w^{\pm1}, z^{\pm1}]\!]$ が誘導される．

もっとも重要な Laurent 級数の一つは Dirac のデルタ関数である．

Definition 2.1.4

二変数の $\mathbb{C}$ 値母関数

$$\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n}w^{n-1} \in \mathbb{C}\left[\!\left[w^{\pm1}, z^{\pm1}\right]\!\right]$$

を**デルタ関数**（*delta function*）と呼ぶ．この式は

$$\delta(z,w) = \sum_n z^n w^{-n-1} = \sum_n z^{n-1}w^{-n} = \sum_n z^{-n-1}w^n = \sum_{m+n=-1} z^m w^n$$

のように様々な形で表すことができる．
誤解の恐れのない場合は $\delta(z-w) = \delta(z,w)$ のようにも書く．

Proposition 2.1.1

デルタ関数について，次の性質が成り立つ．

i）任意の V 値母関数 $a(z) \in V\left[\!\left[z^{\pm1}\right]\!\right]$ に対して $a(z)\delta(z-w) = a(w)\delta(z-w)$.
ii）任意の V 値母関数 $a(z) \in V\left[\!\left[z^{\pm1}\right]\!\right]$ に対して $\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = a(w)$.

この命題は，通常のデルタ関数の性質 $\int a(z)\delta(z-w)\,\mathrm{d}z = a(w)$ 等を母関数の言葉で書き直したものになっている．

Proof. いずれも簡単な計算で示すことができる．ここでは後者のみ確かめる．
V 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n$ に対して，

$$\begin{aligned} a(z)\delta(z-w) &= \left(\sum_m a_m z^m\right)\left(\sum_n z^{-n-1}w^n\right) \\ &= \sum_d \left(\sum_n a_{n+d+1}w^n\right) z^d \end{aligned}$$

となるから，留数を取ると

$$\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = \sum_n a_n w^n = a(w)$$

が分かる． □

§ 2.2 シフト演算子

数列の漸化式は，$p : (a_n) \mapsto (a_{n+1})$ というシフト演算子を用いて書くことができる．ここでは，シフト演算子の母関数表示とその性質について見ていく．

Definition 2.2.1

V をベクトル空間とする．$pa(z) = z^{-1}a(z)$ で定まる線形演算子 $p : V[\![z^{\pm 1}]\!] \to V[\![z^{\pm 1}]\!]$ を $V[\![z^{\pm 1}]\!]$ 上の**シフト演算子**（*shifting operator*）と呼ぶ．

微分演算子とのアナロジーを踏まえると，$[p, q] = 1$ を満たす演算子 q を考えたい．これを見つけるために，量子力学の手続きを踏襲する．

Proposition 2.2.1

$V = \mathbb{C}$ とする．
0 を除く任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して，λ を固有値とする p の固有ベクトルが（スカラー倍を除いて）一意に存在する．この固有ベクトルのうち z^0 の係数が 1 であるものを $|\lambda\rangle$ と書く．

Proof. $a(z) = \sum_n a_n z^n \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ が固有値 λ に属する p の固有ベクトルであるとすると，

$$0 = (p - \lambda)a(z) = \sum_n a_{n+1} z^n - \lambda \sum_n a_n z^n = \sum_n (a_{n+1} - \lambda a_n) z^n$$

より $a_{n+1} = \lambda a_n$ が従う．よって，$a(z) = a_0 \sum_n \lambda^n z^n$ となる． □

量子力学と同じように，任意の母関数は $|\lambda\rangle$ によってスペクトル分解（固有値分解）をすることができる．まず $|\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]\!]$ と見做し，$|\mu\rangle \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]\!]$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\big\langle |\mu\rangle, |\lambda\rangle \big\rangle &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \mu^m z^m \right) \left(\sum_n \lambda^n z^n \right) \\ &= \sum_{m+n=-1} \mu^m \lambda^n \\ &= \delta(\lambda - \mu) \in \mathbb{C}[\![\lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]\!]\end{aligned}$$

となる．したがって $\langle \lambda | := |\lambda\rangle \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]\!]$ をブラベクトルと見做すことができる．

そこで一般の母関数 $|a(z)\rangle \in \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して波動関数 $\psi(\lambda) = \langle \lambda \mid a(z) \rangle$ を定義し，$|a(z)\rangle = \int \psi(\lambda) |\lambda\rangle \, \mathrm{d}\lambda$ のように書けることを確認する．

Theorem 2.2.2

V をベクトル空間とする．
母関数 $a(z) \in V[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して，その波動関数を

$$\psi(\lambda) := \mathrm{Res}_z (\langle \lambda | a(z) \rangle) \in V[\![\lambda^{\pm 1}]\!]$$

で定義する．このとき

$$\psi(\lambda) = \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m,$$
$$a(z) = \mathrm{Res}_\lambda \left(\psi(\lambda) | \lambda \rangle \right)$$

が成り立つ．

Proof. 直接計算して示す．

$a(z) = \sum_n a_n z^n$ のとき，波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \lambda^m z^m \right) \left(\sum_n a_n z^n \right) \\ &= \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\end{aligned}$$

となり，それと $|\lambda\rangle$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\lambda \left(\psi(\lambda) | \lambda \rangle \right) &= \mathrm{Res}_\lambda \left(\sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m \right) \left(\sum_\ell \lambda^\ell z^\ell \right) \\ &= \sum_{m+\ell=-1} a_{-m-1} z^\ell \\ &= a(z)\end{aligned}$$

が従う． □

続いてスペクトル分解を用いて，λ に関する無限小平行移動 $T(\mathrm{d}\lambda)$ を求めよう．

Lemma 2.2.1

A を代数，V を A 加群とする．与えられた母関数 $g(\lambda) = \sum_{m,n} g_{m,n} \lambda^m z^n \in V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ について，A 準同型 $\hat{g} : A\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \to V\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ が

$$\hat{g}(a(z)) := \mathrm{Res}_\lambda\, g(\lambda)\, \mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

で定義できる．さらに，$a(z) = \sum_n a_n z^n$ としたとき

$$\hat{g}\left(\sum_n a_n z^n \right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n} \right) z^n$$

と書ける．

Proof. $g(\lambda)$ が $V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ の元であるから，各 n について $g_{m,n}$ は有限個を除いて 0 である．よって，$\sum_m a_m g_{m,n} (\in V)$ のような和が定義できる．そこで $(\mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)) g(\lambda)$ を計算すると，**Theorem 2.2.7** より

$\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) = \sum_\ell a_{-\ell-1}\lambda^\ell$ だから

$$\begin{aligned} g(\lambda)\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) &= \left(\sum_{m,n} g_{m,n}\lambda^m z^n\right)\left(\sum_\ell a_{-\ell-1}\lambda^\ell\right) \\ &= \sum_d \left(\sum_{m,n} a_{m-d-1}g_{m,n}z^n\right)\lambda^d \end{aligned}$$

となる．したがって $\hat{g}a(z)$ は well-defined であり，

$$\hat{g}\left(\sum_n a_n z^n\right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n}\right) z^n$$

が成り立つ． □

LEMMA 2.2.2

逆に，A 準同型 $f : A[\![z^{\pm1}]\!] \to V[\![z^{\pm1}]\!]$ に対して，新しい A 準同型 $\hat{f} : A[\![z^{\pm1}, \lambda^{\pm1}]\!] \to V[\![z^{\pm1}, \lambda^{\pm1}]\!]$ を

$$\hat{f}\left(\sum_m a_m(z)\lambda^m\right) := \sum_m f(a_m(z))\lambda^m \quad \left(a_m(z) \in A[\![z^{\pm1}]\!]\right)$$

で定義する．さらに，

$$f(a(z)) = \sum_n f_n(a(z))z^n$$

と書いたとき，$f_n(\sum a_k z^k) = \sum_m a_m f_{m,n}$（$f_{m,n} \in V$，各 n に対して $(f_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ は有限個を除いて 0）の形をしていると仮定する．このとき $\hat{f}(A[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]) \subset V[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ であり，

$$f(a(z)) = \mathrm{Res}_\lambda \hat{f}(|\lambda\rangle)\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)$$

が成り立つ．

Proof. $a(\lambda) = \sum_{m,n} a_{m,n}\lambda^m z^n \in A[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ に対して

$$\hat{f}a(\lambda) = \sum_m f\left(\sum_n a_{m,n}z^n\right)\lambda^m = \sum_m \left(\sum_{\ell,n} a_{m,\ell}f_{\ell,n}z^n\right)\lambda^m$$

となり，これは $f_{m,n}$ に関する仮定により $V[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ の元である．

また，とくに $a_{m,n} = \delta_{m,n}$ と置くことで

$$\hat{f}|\lambda\rangle = \sum_m \sum_n f_{m,n}z^n\lambda^m$$

を得る．よって **LEMMA 2.2.1** より

$$f(a(z)) = \mathrm{Res}_\lambda \hat{f}|\lambda\rangle\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)$$

が従う． □

Remark 2.2.1 **Lemma 2.2.1** の写像 $\hat{g}$ に **Lemma 2.2.2** を適用することで，線型写像

$$\hat{\hat{g}} : A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$$

が得られる．これは $\hat{\hat{g}}|\lambda\rangle = g(\lambda)$ を満たし，その意味で “$g(\lambda)$ を $A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ 全体へ拡大したもの” と見做すことができる．そのため，記号を濫用して $\hat{\hat{g}} = g$ と書く．

Example 2.2.1 i）A を代数とするとき，シフト演算子 $p : A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ は $p_n(a(z)) = a_{n+1}$ であるから，$p_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ と書ける．$\hat{p}$ は

$$\hat{p}\left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m\right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

となる．たとえば

$$\hat{p}|\lambda\rangle = \sum_n z^n \lambda^{n+1} \quad (a_{m,n} = \delta_{m,n}),$$
$$\hat{p}\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda} = \sum_n (n+1) z^n \lambda^n \quad (a_{m,n} = n\delta_{m,n-1}).$$

Proposition 2.2.3

A を代数，V を A 加群とする．**Lemmas 2.2.1 and 2.2.2** によって構成される写像

$$\mathcal{F}_{A,V}^{-1} : \mathrm{Hom}_A\left(A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket, V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\right) \to \mathrm{Hom}_A\left(A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket, V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\right)$$
$$g \mapsto \hat{g}$$

は次の性質を満たす：

i）$\mathcal{F}_{A,V}^{-1}$ は A 準同型である．すなわち，$\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[af+bg] = a\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[f] + b\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[g]$ が成り立つ（$a,b \in A$）．
ii）A,B,C が代数で代数準同型 $A \to B \to C$ を持つとき（B が A 加群で C が B 加群であるとき），$\mathcal{F}_{B,C}^{-1}[f] \circ \mathcal{F}_{A,B}^{-1}[g] = \mathcal{F}_{A,C}^{-1}[f \circ g]$ が成り立つ．

Proof. 定義通り計算すれば従う． □

この命題により，$[\hat{f},\hat{g}] = \mathcal{F}_{A,A}^{-1}[[f,g]]$ が分かる．つまり $[f,g]$ が既知のときに，それを用いて $[\hat{f},\hat{g}]$ も計算することができる．

いよいよ平行移動の生成子 q を定義していく．

Definition 2.2.2

スペクトルの平行移動演算子 $T(\mathrm{d}\lambda) : \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}\lambda)\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を，次のように定義する．まず $(\lambda + \mathrm{d}\lambda)^n \in \mathbb{C}\llbracket \lambda, \mathrm{d}\lambda\rrbracket$ を，$n \geqslant 0$ のときは二項定理で，$n < 0$ のときは **Example 1.3.1** で展開したもの

として，

$$g(\lambda,\mathrm{d}\lambda) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda+\mathrm{d}\lambda)^n z^n \in \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]$$

を考える．このままだと **Lemma 2.2.1** を適用できないため，$O(\mathrm{d}\lambda^2)$ を無視して

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle \coloneqq |\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda^n + n\lambda^{n-1}\mathrm{d}\lambda)z^n \in (\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)[\lambda^{\pm 1}]\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$$

とする．正確には，商写像

$$\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right] \twoheadrightarrow \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]/\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\right]\!\right]\mathrm{d}\lambda^2 \cong (\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1},\lambda^{\pm 1}\right]\!\right]$$

による $g(\lambda,\mathrm{d}\lambda)$ の像を考えている．こうして，線型演算子 $T(\mathrm{d}\lambda) : \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \to (\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ が

$$T(\mathrm{d}\lambda)a(z) \coloneqq \mathrm{Res}_\lambda\,|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle\,\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)$$

で定まる．

Remark 2.2.2　$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}\,\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ と置く．ベクトル空間としての $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]$ には

$$[a\,\mathrm{d}\lambda^m, b\,\mathrm{d}\lambda^n] \coloneqq [a,b]\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad (a,b\in\mathfrak{g})$$

によって自然に Lie 代数の構造が入る（**Corollary 1.3.4**）．これを Lie 代数のイデアル $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]\,\mathrm{d}\lambda^2$ で割ると，Lie 代数 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ を得る．

Lie 代数 $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]$ は $\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]$ 上に自然に作用する（**Corollary 1.3.5**）：

$$(a\,\mathrm{d}\lambda^m)\cdot b\,\mathrm{d}\lambda^n \coloneqq (a\cdot b)\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad \left(a\in\mathfrak{g}, b\in\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]\right).$$

ここから，$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ の $(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \cong \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]/\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1},\mathrm{d}\lambda\right]\!\right]\mathrm{d}\lambda^2$ への作用が誘導される（**Proposition 1.2.2**）．

Remark 2.2.3　**Lemma 2.2.1** の記号に合わせると，$g_{m,n} = \delta_{m,n} + n\delta_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda \in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda$ である．それによって

$$T(\mathrm{d}\lambda)\sum_n a_n z^n = \sum_{m,n} a_m g_{m,n} z^n = \sum_n (a_n + n a_{n-1}\,\mathrm{d}\lambda)z^n$$

と計算できる．

逆に，$f_{m,n} = g_{m,n}$ として **Lemma 2.2.2** を用いれば，

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\sum_{m,n} a_{m,n} z^n\lambda^m = \sum_{\ell,m,n} a_{m,\ell}(\delta_{\ell,n} + n\delta_{\ell,n-1}\,\mathrm{d}\lambda)z^n\lambda^m = \sum_{m,n}(a_{m,n} + n a_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda)z^n\lambda^m$$

を得る．たとえば $a_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ とすると，

$$\hat{g}\lambda|\lambda\rangle = \sum_n (\delta_{m,n+1} + n\delta_{m,n}\,\mathrm{d}\lambda)z^n\lambda^m = \lambda|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \quad (= \lambda|\lambda+\mathrm{d}\lambda\rangle).$$

DEFINITION 2.2.3

母関数 $\hat{q}|\lambda\rangle \in \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}]\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を

$$\hat{q}|\lambda\rangle := \sum_n n\lambda^{n-1} z^n$$

として，**LEMMA 2.2.1** によって線型演算子 $q : \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \to \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を定義する：

$$qa(z) := \mathrm{Res}_\lambda\, \hat{q}|\lambda\rangle \mathrm{Res}_z \langle\lambda|a(z).$$

q 演算子の具体形は，上で計算したように $q\sum_n a_n z^n = \sum_n n a_{n-1} z^n$ で与えられる．
次の命題は直ちに従う：

PROPOSITION 2.2.4

$V = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ と置き，$\mathfrak{gl}\,V$ の元として $T(\mathrm{d}\lambda) = 1 + q\,\mathrm{d}\lambda$ が成り立つ．

Proof. $\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle = |\lambda\rangle + \mathrm{d}\lambda \cdot \hat{q}|\lambda\rangle$ と **PROPOSITION 2.2.3** を使う． □

さて，最後に交換子 $[p, q]$ を計算しよう．

PROPOSITION 2.2.5

$V = \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ と置く．
シフト演算子 p は，V 上の演算子とも $V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ 上の演算子とも見做すことができる．すると，V から $V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ への線型写像として

$$pT(\mathrm{d}\lambda) - T(\mathrm{d}\lambda)p = \mathrm{d}\lambda.$$

ただし，$\mathrm{d}\lambda$ は $V \ni a(z) \mapsto a(z)\mathrm{d}\lambda \in V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ で定義される．

Proof. $\hat{p}\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)$ について，

$$\hat{p}\left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m\right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

であったから（**EXAMPLE 2.2.1**），$a_{m,n} = \delta_{m,n} + n\delta_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda$ とすれば

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle = \hat{p}|\lambda + \mathrm{d}\lambda\rangle &= \sum_{m,n} (\delta_{m,n+1} + (n+1)\delta_{m,n}\,\mathrm{d}\lambda) z^n \lambda^m \\ &= \lambda|\lambda\rangle + \left(|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

一方 **Remark 2.2.3** で確認したように

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\hat{p}|\lambda\rangle = \hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\lambda|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

となるから，結局 **Proposition 2.2.3** より

$$(pT(\mathrm{d}\lambda) - T(\mathrm{d}\lambda)p)\,a(z) = \mathrm{Res}_\lambda\,\mathrm{d}\lambda|\lambda\rangle\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) = a(z)\,\mathrm{d}\lambda.$$

□

Proposition 2.2.6

$\mathfrak{gl}\,\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ の元として，$[p,q]=1$.

Proof. $V=\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ と置く．

Proposition 2.2.5 で $V\to V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ の写像として

$$[p, T(\mathrm{d}\lambda)] = \mathrm{d}\lambda$$

を証明したから，とくに $\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として

$$[p, 1+q\,\mathrm{d}\lambda] = \mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ．よって一般に，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元 $f+g\,\mathrm{d}\lambda$ が $\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $f+g\,\mathrm{d}\lambda=0$ ならば，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元としても $f+g\,\mathrm{d}\lambda=0$ となることを示せば十分である．$\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $=0$ のとき，任意のベクトル $v,w\in V$ に対して

$$(f+g\,\mathrm{d}\lambda)(v+w\,\mathrm{d}\lambda) = f(v) + (f(w)+g(v))\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

が成り立つ．つまり任意の $v\in V$ に対して $f(v)=0$ であるから，$f=0\in\mathfrak{gl}\,V$．すると $g(v)=0$ も従い，やはり $g=0\in\mathfrak{gl}\,V$ が言える． □

以上の命題を再度述べ直すと，次の定理を得る．

Theorem 2.2.7

$\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ 上の線型演算子 q を

$$qa(z) \coloneqq z\frac{\partial}{\partial z}(za(z)) = \sum_n n a_{n-1} z^n$$

で定義すると，交換子が $[p,q]=1$ を満たす．

なお，今までの議論を経由せず天下り式に示すこともできる：

Proof. $pa(z) = z^{-1}a(z)$ であったから,

$$pq = z^{-1} \cdot z\frac{\partial}{\partial z}z = \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$qp = z\frac{\partial}{\partial z}z \cdot z^{-1} = z\frac{\partial}{\partial z}.$$

□

§ 2.3 一般固有空間と Heisenberg 代数

ここでは,p 演算子の一般固有空間について調べる.

Definition 2.3.1

V をベクトル空間として,その上の線型演算子 $f : V \to V$ を取る.$\lambda \in \mathbb{C}$ を f の固有値とするとき,固有値 λ に属する**一般固有ベクトル**(*generalized eigenvector*)とは,ベクトル $0 \neq v \in V$ であって,ある整数 $n \geqslant 1$ について $(f - \lambda)^n v = 0$ となるものを言う.$n = 1$ のときは固有ベクトルに他ならない.固有値 λ の一般固有ベクトルのなす部分空間を

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \geqslant 1\ (f - \lambda)^n v = 0\}$$

と書き,固有値 λ に属する**一般固有空間**(*generalized eigenspace*)と呼ぶ.

V が有限次元であれば,一般固有空間分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ がよく知られているが,今考えたいのは無限次元の空間 $V = \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ である.無限次元の場合,一般固有空間分解は成り立たないが線型独立性なら証明することができる.

Proposition 2.3.1

$\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ を線型演算子 $f \in \operatorname{End} V$ の相異なる固有値(のうち一部)とすると,$V_{\lambda_0} \cap \cdots \cap V_{\lambda_k} = 0$ が成り立つ.

Proof. V が有限次元のときの証明は省略する.V を無限次元とする.

簡単のため,$\lambda_0 = 0$ の場合で示そう.$v \in \bigcap V_{\lambda_i}$ とすると,適当な $N_0, \ldots, N_k \geqslant 1$ を用いて $(f - \lambda_i)^{N_i} v = 0$ とできる.そこで

$$V' := \operatorname{span}\{f^{n_0}(f - \lambda_1)^{n_1} \cdots (f - \lambda_k)^{n_k} v \mid 0 \leqslant n_i < N_i\} \subset V$$

という部分空間を考えると,V' は有限次元であり,さらに $f(V') \subset V'$ が成り立つ($f^N(f - \lambda)^m v = (f - \lambda)^m f^N v = 0 \in V'$ 等に注意).よって f を V' 上の演算子 $\in \operatorname{End} V'$ と見做すことができ,$v \in V'$ は $f \in \operatorname{End} V'$ の固有値 λ_i に属する一般固有ベクトルとなる.有限次元の場合には $\bigcap V'_{\lambda_i} = 0$ であったから,$v = 0$ が従う. □

続いて，$[p, q] = 1$ という正準関係を満たす演算子の一般固有空間を求めるために，Heisenberg 代数を導入する．

Definition 2.3.2

3 個のベクトル $p, q, 1$ を生成系とする自由ベクトル空間

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q \oplus \mathbb{C}1$$

に交換関係

$$[p, q] = 1, \quad [1, H] = 0$$

を定義すると，$\mathfrak{h}$ は Lie 代数となる．これを **Heisenberg 代数**（*Heisenberg algebra*）と呼ぶ．

Definition 2.3.3

$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\, V$ を表現とする．ベクトル $v \in V$ が，ある複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を用いて $\rho(1)v = \lambda v$ を満たすとき，v を**ウェイトベクトル**（*weight vector*）と言い，λ を v の**ウェイト**（*weight*）と呼ぶ．
ウェイトベクトル v であって，さらに $v \neq 0$ かつ $\rho(p)v = 0$ を満たすとき，v を**最高ウェイトベクトル**（*highest weight vector*）と呼ぶ．

Example 2.3.1 i）$\mathbb{C}$ 値母関数のなすベクトル空間 $\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ に対して，

$$\rho(p) = z^{-1}, \quad \rho(q) = z\frac{\partial}{\partial z}z, \quad \rho(1) = \mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right])$ が定まる．このとき任意の母関数はウェイト 1 のウェイトベクトルである．最高ウェイトベクトルは存在しない．

ii）0 でない複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ を固定して

$$\rho_{\lambda}(p) = z^{-1} - \lambda, \quad \rho_{\lambda}(q) = \rho(q), \quad \rho_{\lambda}(1) = \rho(1)$$

と定義すると，ρ_{λ} もまた $\mathfrak{h}$ 加群を定める．この場合も任意の母関数がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$|\lambda\rangle$ は最高ウェイトベクトルである．

iii）一変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ に対して，

$$\rho(p) = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho(q) = z, \quad \rho(1) = \mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[z])$ が定まる．同様に任意の多項式がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$1 \in \mathbb{C}[z]$ が最高ウェイトベクトルである．

iv）より一般に，あるベクトル空間 V の線型作用素 $P, Q, I \in \mathrm{End}\, V$ であって $[P, Q] = I, [I, P] = 0 = [I, Q]$ を満たすものがあれば，

$$\rho(p) = P, \quad \rho(q) = Q, \quad \rho(1) = I$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}\,V$ が定まる．

以下では数列の正規形漸化式の解空間が，$\mathfrak{h}$ 表現 $\mathbb{C}[z]$ を用いて書けることを示す．最初に便利な公式を証明しておこう．

LEMMA 2.3.1

$\rho:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}\,V$ を $\mathfrak{h}$ の表現とする，$v\in V$ が複素数 $\lambda\in\mathbb{C}$ をウェイトとする最高ウェイトベクトルのとき，

$$\rho(1)\rho(q)^n v=\lambda\rho(q)^n v\quad (n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}),$$
$$\rho(p)\rho(q)^n v=n\lambda\rho(q)^{n-1}v\quad (n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1})$$

が成り立つ．

Proof. 上の等式は，$\rho(1)v=\lambda v$ と $[\rho(1),\rho(q)]=\rho([1,q])=0$ から従う．

下の等式を n に関する帰納法で示す．

v が最高ウェイトベクトルであるから，

$$\rho(p)\rho(q)v=(\rho(q)\rho(p)+\rho(1))v=\lambda v$$

となり，$n=1$ の場合が確かめられる．

n の場合を仮定すると，$n+1$ について

$$\rho(p)\rho(q)^{n+1}v=(\rho(q)\rho(p)+\rho(1))\rho(q)^n v=\rho(q)\cdot n\lambda\rho(q)^{n-1}v+\lambda\rho(q)^n v=(n+1)\lambda\rho(q)^n v$$

となるから，任意の $n\geqslant 1$ で成り立つことが示された． □

THEOREM 2.3.2

V を $\mathfrak{h}$ の表現とする．$v\in V$ が最高ウェイトベクトルのとき，V の部分空間

$$V':=\mathrm{span}\{q^n v \mid n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

は V の部分表現であり，さらに v のウェイトが 0 でないときは既約となる．

この表現を $U(\mathfrak{h})v=V'$ と書く．$U(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ の universal enveloping algebra のつもりであるが，ここではそれを定義せずに単なる記号として扱っている．

Proof. まず **LEMMA 2.3.1** より，V' が部分表現となることは分かる．

既約性を示すために，次の性質に注意する：

$$p^n q^n v\in\mathbb{C}v\setminus 0,\quad p^{n+1}q^n v=0.$$

これらは **LEMMA 2.3.1** を繰り返し適用すると，$p^n q^n v=n!\lambda v$ となることから従う．ただし v のウェイトを λ と置いた．$0\neq U\subset V'$ を任意の部分表現として，ベクトル $0\neq u\in U$ を適当に取る．すると $u=\sum_{n=0}^{N}a_n q^n v$（$a_n\in\mathbb{C}$，$a_N\neq 0$）と書け，

$$p^N u=a_N p^N q^N v\in\mathbb{C}v\setminus 0$$

を満たす．また，U は部分表現であるから $p^N u \in U$ および $q^m p^N u \in U$（$m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$）となる．よって V' の任意のベクトルが U の元となるから，$U = V'$．したがって V' は既約表現である． □

Corollary 2.3.3

Example 2.3.1 の表現 $\mathbb{C}[z]$ は既約.

Proof. $v = 1$ として **Theorem 2.3.2** を適用すれば良い． □

Corollary 2.3.4

V を $\mathfrak{h}$ の表現として，$v \in V$ がウェイト 1 の最高ウェイトベクトルであるとする．このとき，部分表現 $U(\mathfrak{h})v$ は $\mathbb{C}[z]$ と同型となる．つまり，全単射な $\mathfrak{h}$ 準同型 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ が存在する．さらに，この準同型は $f(z^n) = q^n v$ を満たすように取ることができる．
とくに，集合 $\{q^n v \mid n \geqslant 0\}$ は線型独立である．

Proof. 線型写像 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ を $f(z^n) = q^n v$ で定義すると，これは全射な $\mathfrak{h}$ 準同型となる．よって **Corollary 2.3.3** および Schur の補題から主張が従う． □

Corollary 2.3.5

$p = z^{-1}, q = z(\partial/\partial z)z \in \operatorname{End}\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ について，集合

$$B := \left\{ q^n|\lambda\rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ \lambda \in \mathbb{C}^{\times} \right\}$$

は線型独立であり，各 $q^n|\lambda\rangle$ は $(p-\lambda)^{n+1} q^n|\lambda\rangle = 0$ を満たす.

Proof. **Example 2.3.1** の表現 $\rho_\lambda : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を考えると，**Corollary 2.3.4** より集合

$$B_\lambda := \{q^n|\lambda\rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

は線型独立となる．また，**Lemma 2.3.1** を繰り返し用いれば

$$(p-\lambda)^{n+1} q^n|\lambda\rangle = \rho_\lambda(p)^{n+1} \rho_\lambda(q)^n|\lambda\rangle = 0$$

も従う．

とくに $q^n|\lambda\rangle$ は p の固有値 λ の一般固有ベクトルであるから，**Proposition 2.3.1** より $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$ も線型独立となることが分かる． □

§ 2.4 正規形漸化式の解空間

ここまでで準備は終わり，いよいよ漸化式の解空間の記述が始まる．まずは正規形漸化式を定義しよう．

Definition 2.4.1

正規形（*normal*）の漸化式とは，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する

$$a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \quad (c_i \in \mathbb{C},\ c_0 \neq 0)$$

という形の漸化式のことである．

正規形漸化式は，$p = z^{-1} \in \operatorname{End}\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!]$ を用いて

$$p^d a(z) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i p^i a(z)$$

と母関数表示することができる．さらに**特性多項式**（*characteristic polynomial*）$\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ を $\chi(t) \coloneqq t^d - c_{d-1}t^{d-1} - \cdots - c_0$ で定義すると，

$$\chi(p)a(z) = 0$$

と書ける．この解空間を $S_\chi \coloneqq \{a(z) \in \mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!] \mid \chi(p)a(z) = 0\}$ と置き，S_χ の基底を求めることが目標である．

S_χ はベクトル空間であり，その次元はすぐに計算できる．

Proposition 2.4.1

$\dim S_\chi = \deg\chi$.

Proof. $d = \deg\chi$ として，線型写像 $f : S_\chi \to \mathbb{C}^d$ を

$$f\left(\sum_n a_n z^n\right) \coloneqq (a_0, \ldots, a_{d-1})$$

で定義する．このとき，任意の $a' = (a_0, \ldots, a_{d-1})$ に対して，$f(a(z)) = a'$ となる母関数 $a(z) \in S_\chi$ がただ一つ存在する．実際，a' を初期条件として漸化式によって $a_d, a_{d+1}, \ldots$ を一意に求めることができる．$n < 0$ に関しては，漸化式を

$$a_n = \frac{1}{c_0}(a_{n+d} - c_{d-1}a_{n+d-1} - \cdots - c_1 a_{n+1})$$

と変形して $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ を順番に求めれば良い．

したがって f は全単射であり，線型同型となる． □

特性多項式の相異なる根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$，それらの重複度をそれぞれ $M_1, \ldots, M_k \geqslant 1$ として，$\chi_i(t) \coloneqq (t - \lambda_i)^{M_i} \in \mathbb{C}[t]$ と置く．次は S_{χ_i} を計算したい．

PROPOSITION 2.4.2

$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を 0 でない複素数として，$\chi(t) = (t-\lambda)^N$ を考える．このとき，

$$S_\chi = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathbb{C} q^n |\lambda\rangle$$

が成り立つ．

Proof. **COROLLARY 2.3.5** より，集合

$$B_\lambda^N := \{q^n|\lambda\rangle \mid 0 \leqslant n < N\}$$

は線型独立であり，かつ $(p-\lambda)^{n+1} q^n|\lambda\rangle = 0$ を満たす．とくに $\chi(p) B_\lambda^N = 0$ であるから，$B_\lambda^N \subset S_\chi$ が分かる．一方で **PROPOSITION 2.4.1** を見ると $\dim S_\chi = N = \# B_\lambda^N$ となっているから，B_λ^N が S_χ の基底でなければならない．□

以上の命題を使って一般の解空間 S_χ が計算できる．

THEOREM 2.4.3

一般の特性多項式 χ に対して，

$$S_\chi = \bigoplus_{i=1}^{k} S_{\chi_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{n=0}^{M_i - 1} \mathbb{C} q^n |\lambda_i\rangle.$$

ただし，$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ は χ の相異なる根であり，λ_i の重複度を M_i，$\chi_i(t) := (t-\lambda_i)^{M_i}$ と置いた．

Proof. 特性多項式の定数項が $\chi(0) = -c_0 \neq 0$ であったから，$\lambda_i \neq 0$ となることに注意する．

まず各 i, j に対して $[p-\lambda_i, p-\lambda_j] = 0$ という交換関係が成り立つから，$\chi_i(p)a(z) = 0$ ならば $\chi(p)a(z) = 0$ が言える．すなわち $S_{\chi_i} \subset S_\chi$．さらに **COROLLARY 2.3.5** によって $\bigcup_i B_{\lambda_i}^{M_i}$ の線型独立性が分かるから，

$$S_\chi \supset \sum_i S_{\chi_i} = \bigoplus_i S_{\chi_i}$$

となる．最後に **PROPOSITION 2.4.1** で両辺の次元を比較すれば，等式が導かれる．□