圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

第 2 章 表現

§ 2.3 多元環と線形圏のより細かい対応

$\Bbbk$ を可換体（可換環でもよい）とする．また，左加群の圏を $\mathsf{Mod}(X)$，右加群の圏を $\mathsf{Mod}(X^{\mathrm{op}})$ で表し，小線形圏全体のなす線形圏を $\mathsf{Cat}(\Bbbk)$ と表す．

Problem 2.3.2

A を多元環，$e \in A$ を冪等元とする．このとき次を示せ．

i）$1 - e \in A$ も冪等元である．
ii）e が A の中に左逆元または右逆元を持てば，$e = 1$ である．
iii）部分集合 $S \subset A$ が $eS \subset S$ を満たせば，$eS = \{a \in S \mid a = ea\}$ となる．

Proof. (i) e が冪等元だから，$(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$ となる．
(ii) $e' \in A$ を e の左逆元とすると，$e = e(ee') = ee' = 1$．e が右逆元を持つ場合も同様に確かめられる．
(iii) $S = \emptyset$ のときは明らか．$S \neq \emptyset$ とする．$S' := \{a \in S \mid a = ea\}$ とおく．
まず S の任意の元 $a \in S$ について，$ea = (e^2)a = e(ea)$ だから，$eS \subset S'$ が分かる．
逆に，元 $a \in S$ が $a = ea$ を満たすとき，$ea \in eS$ より，$a \in eS$ となる．よって $S' \subset eS$． □

Problem 2.3.5

A を多元環，$e \in A$ をその冪等元とする．右 A 加群 M について，写像 $\phi : \mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$ と $\psi : Me \to \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ を

$$\phi : f \mapsto f(e)e,$$
$$\psi : me \mapsto (x \mapsto mex)$$

によって定める．
このとき次を示せ．

i）写像 ϕ と ψ は互いに逆な線形写像である．特に，ベクトル空間としての同型

$$\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong Me$$

を得る．

ii）$M = A$ のとき，上の同型 $\mathrm{Hom}_A(eA, A) \cong Ae$ は左 A 加群としての同型となる．

iii）$M = eA$ のとき，上の同型 $\mathrm{End}_A(eA) \cong eAe$ は多元環としての同型となる．

Proof. (i) 写像 ϕ と ψ がともに線形写像であることはよい．

ψ が ϕ の左逆写像であること：

$f \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ を任意に取ると，$\psi(f(e)e)$ は写像 $x \mapsto f(e)ex$ である．特に

$$\psi(\phi(f))(ea) = f(e)e(ea) = f(e^3a) = f(ea) \quad (a \in A)$$

であるから，$\psi(\phi(f)) = f$ となる．よって $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(eA,M)}$.

ψ が ϕ の右逆写像であること：

任意の $m \in M$ に対して

$$\phi(\psi(me)) = ((me)e)e = me^3 = me$$

が成り立つから，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{Me}$.

(ii) ϕ が A 準同型であることを示せばよい．

元 $a \in A$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(eA, A)$ を任意に取ると

$$\phi(af) = (af)(e)e = a(f(e))e = a(f(e)e) = a\phi(f)$$

だから，ϕ は A 準同型である．

(iii) ϕ が多元環準同型であることを示せばよい．

元 $f, g \in \mathrm{End}_A(eA)$ を任意に取ると，

$$\phi(fg) = (fg)(e)e = f(e)g(e)e = f(e)eg(e)e = \phi(f)\phi(g)$$

だから，ϕ は多元環準同型である．□

PROBLEM 2.3.9

圏 $\Bbbk$-$\mathrm{Cat_f}$ を，有限対象の小線形圏からなる $\Bbbk$-Cat の充満部分圏とする．

また，圏 $\Bbbk$-$\mathrm{Alg_{coi}}$ を

- 対象：$(\Bbbk\text{-}\mathrm{Alg_{coi}})_0 = \{(A, E) \mid A$ は多元環，$E \subset A$ は A の直交冪等元の完全系$\}$,
- 射：$\Bbbk\text{-}\mathrm{Alg_{coi}}((A, E), (A', E')) = \{f : A \to A' \mid f$ は多元環準同型で $f(E) \subset E'\}$,
- 射の合成：通常の写像の合成,
- 恒等射：$\mathrm{id}_{(A,E)} = \mathrm{id}_A$

で定義する．

このとき，以下で定義される函手 $\mathsf{Cat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ と $\mathsf{Mat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ が互いに擬逆であり，特に圏同値 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \simeq \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ が成り立つことを示せ．

函手 $\mathsf{Cat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ を

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の対象 $(A, E) \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0$ に対して圏 $\mathcal{C}_{A,E} = \mathsf{Cat}(A, E) \in \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ は
  - 対象：$(\mathcal{C}_{A,E})_0 := E$,
  - 射：$\mathcal{C}_{A,E}(x, y) := yAx$,
  - 射の合成：多元環 A における積，
  - 恒等射：$\mathrm{id}_x := x \cdot 1 \cdot x = x$,
- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の射 $f : (A, E) \to (A', E')$ に対して函手 $F_f = \mathsf{Cat}(f) : \mathcal{C}_{A,E} \to \mathcal{C}_{A',E'}$ は
  - 対象：$x \mapsto f(x)$,
  - 射：$a \in A$ のとき $yax \mapsto f(yax) = f(y)f(a)f(x)$

で定義し，函手 $\mathsf{Mat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ を

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の対象 $\mathcal{C} \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対して $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の対象 $(A_{\mathcal{C}}, E_{\mathcal{C}}) = \mathsf{Mat}(\mathcal{C}) \in \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ は

$$A_{\mathcal{C}} := \coprod_{x,y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(x, y), \quad E_{\mathcal{C}} := \left\{ e_x := \left(\mathrm{id}_x\, \delta_{(y,z),(x,x)}\right)_{y,z \in \mathcal{C}_0} \;\middle|\; x \in \mathcal{C}_0 \right\},$$

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して多元環準同型 $f_F : A_{\mathcal{C}} \to A_{\mathcal{C}'}$ は

$$f_F\left((a_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0}\right) := \left(F(a_{y,x})\right)_{y,x \in \mathcal{C}_0} \quad (a_{y,x} \in \mathcal{C}(x, y), x, y \in \mathcal{C}_0)$$

で定義する．ただし線形圏 $\mathcal{C} \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対し，$A_{\mathcal{C}} = \coprod_{x,y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(x, y)$ は $\Bbbk$ 加群としての外部直和であり，積を

$$(a_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0} \cdot (b_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0} := \left(\sum_{z \in \mathcal{C}_0} a_{y,z} \circ b_{z,x} \right)_{y,x \in \mathcal{C}_0} \qquad (a_{y,x}, b_{y,x} \in \mathcal{C}(x, y), x, y \in \mathcal{C}_0)$$

と定める．単位元は $\sum_{x \in \mathcal{C}_0} \mathrm{id}_x$ である．

Proof. Mat が Cat の左擬逆であること：

各 $(A, E) \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0$ に対し

$$A = \bigoplus_{x,y \in E} yAx$$

が成り立つことに注意する．実際，相異なる $(y, x) \neq (y', x') \in E \times E$ に対して元 $yax = y'a'x' \in yAx \cap y'Ax'$ を任意に取ると，$x \neq x'$ ならば $yax = (yax)x = (y'a'x)'x = 0$ となり，$y \neq y'$ ならば $yax = y(yax) = y(y'a'x') = 0$

となるから，いずれの場合でも $yAx\cap y'Ax'=0$ が分かる．また，任意の元 $a\in A$ は

$$a=\left(\sum_{y\in E}y\right)a\left(\sum_{x\in E}x\right)=\sum_{x,y\in E}yax$$

と書けるから，$A=\sum_{x,y\in E}yAx$ となる．以上より $A=\bigoplus_{x,y\in E}yAx$.

そこで多元環準同型 $\alpha_{A,E}:A\to A_{\mathcal{C}_{A,E}}$ を内部直和と外部直和の間の自然な同型

$$A=\bigoplus_{x,y\in E}yAx\to\coprod_{x,y\in E}yAx$$

とすれば，準同型の族 $\alpha=(\alpha_{A,E})_{(A,E)\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0}$ は自然同型 $\alpha:\mathsf{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}}\to\mathsf{Mat}\circ\mathsf{Cat}$ を定める．

ただし，$\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の射 $f:(A,E)\to(A',E')$ と元 $a\in A$ に対して等式 $(y'f(a)x')_{y',x'\in E'}=(f(y)f(a)f(x))_{y,x\in E}$ が成り立つことは，内部直和 $A'=\bigoplus_{x',y'\in E'}y'A'x'$ における等式

$$\left(\sum_{y'\in E'}y'\right)f(a)\left(\sum_{x'\in E'}x'\right)=f(a)=\left(\sum_{y\in E}f(y)\right)f(a)\left(\sum_{x\in E}f(x)\right)$$

から従う．

$$\begin{tikzcd}
(A,E) \arrow[r, "\alpha_{A,E}"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(A,E))=\left(A_{\mathcal{C}_{A,E}},E_{\mathcal{C}_{A,E}}\right) \arrow[d, "\mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(f))"] \\
(A',E') \arrow[r, "\alpha_{A',E'}"'] & \mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(A',E'))=\left(A_{\mathcal{C}_{A',E'}},E_{\mathcal{C}_{A',E'}}\right)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, mapsto, "\alpha_{A,E}"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & & (yax)_{y,x\in E} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(f))"] \\
f(a) \arrow[r, mapsto, "\alpha_{A',E'}"'] & (y'f(a)x')_{y',x'\in E'} \arrow[r, no head] & (f(y)f(a)f(x))_{y,x\in E}
\end{tikzcd}$$

Mat が Cat の右擬逆であること：

各 $\mathcal{C}\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対して函手 $\beta_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}$ を

- 対象：$x\mapsto e_x$,
- 射：$f:x\to y$ のとき $f\mapsto e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_x$

で定義する．これらはそれぞれ全単射

$$\mathcal{C}_0\to\left(\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}\right)_0,\quad\mathcal{C}_1\to\left(\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}\right)_1$$

となっているから，問 1.4.5 より函手 $\beta_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}$ は同型.

残りは，函手の族 $\beta=(\beta_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0}$ が自然変換 $\beta:\mathsf{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}}\to\mathsf{Cat}\circ\mathsf{Mat}$ となることを示せばよい．

圏 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の対象 $\mathcal{C},\mathcal{C}'\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ と射 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ を任意に取る．

対象 $x\in\mathcal{C}$ については

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))(e_x)=f_F(e_x)&=f_F\left((\mathsf{id}_x\,\delta_{(y,z),(x,x)})_{y,z\in\mathcal{C}_0}\right)\\
&=\left(F(\mathsf{id}_x\,\delta_{(y,z),(x,x)})\right)_{y,z\in\mathcal{C}_0}\\
&=e_{F(x)}
\end{aligned}$$

であるから，$(\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\circ\beta_{\mathcal{C}})_0=(\beta_{\mathcal{C}'}\circ F)_0$．

　圏 $\mathcal{C}$ の射 $f:x\to y$ については

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\left(e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_x\right) &= f_F(e_y)f_F\left((f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}\right)f_F(e_x)\\
&= e_{F(y)}(F(f\delta_{(z,w),(y,x)}))_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_{F(x)}\\
&= e_{F(y)}(F(f)\delta_{(z',w'),(F(y),F(x))})_{z',w'\in\mathcal{C}'_0}e_{F(x)}
\end{aligned}
$$

であるから，$(\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\circ\beta_{\mathcal{C}})_1=(\beta_{\mathcal{C}'}\circ F)_1$．

　以上より，$\beta:\mathrm{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}}\to\mathsf{Cat}\circ\mathsf{Mat}$ は自然変換である．よって β は自然同型となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(\mathcal{C}))=\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}} \arrow[d, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\
\mathcal{C}' \arrow[r, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & \mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(\mathcal{C}'))=\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}'},E_{\mathcal{C}'}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & e_x \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\
F(x) \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & e_{F(x)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[dd, mapsto, "F"'] & e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_x \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\
& f_F(e_y)\left(F(f\delta_{(z,w),(y,x)})\right)_{z,w\in\mathcal{C}_0}f_F(e_x) \arrow[d, equal] \\
F(f) \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & e_{F(y)}\left(F(f)\delta_{(z',w'),(F(y),F(x))}\right)_{z',w'\in\mathcal{C}'_0}e_{F(x)}
\end{tikzcd}
$$

□