

圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

2	表現	1
2.2	多元環と線形圏の加群圏	2

第2章 表現

§ 2.2 多元環と線形圏の加群圏

\mathbb{k} を可換体（可換環でもよい）とする．また，左加群の圏を $\text{Mod}(X)$ ，右加群の圏を $\text{Mod}(X^{\text{op}})$ で表す．

PROBLEM 2.2.6

A を多元環， M を左 A 加群とする． I を集合とし， M の部分加群族 $(M_i)_{i \in I}$ を考える．
このとき，部分空間 $\bigcap_{i \in I} M_i$ と $\sum_{i \in I} M_i$ はともに M の部分加群となる．

Proof. 交叉が部分加群：

元 $m \in \bigcap_{i \in I} M_i$ と $a \in A$ を任意に取る．このときすべての $i \in I$ について $m \in M_i$ で， M_i は M の部分加群だから $am \in M_i$ ．よって $am \in \bigcap_{i \in I} M_i$ が分かる．

和が部分加群：

$\sum_{i \in I} M_i$ の元

$$\sum_{i \in I} m_i \quad (m_i \in M_i, i \in I)$$

を任意に取ると，有限個の $i \in I$ を除いて $m_i = 0$ だから， $am_i \neq 0$ なる $i \in I$ も有限個である．ただし $a \in A$ ．よって和 $\sum_{i \in I} am_i \in M$ が定義でき，各 M_i が部分加群だから $am_i \in M_i$ であり， $\sum_{i \in I} am_i \in \sum_{i \in I} M_i$ となる．

□

PROBLEM 2.2.8

A を多元環とし， M を左 A 加群とする．部分集合 $S \subset M$ について， S を含む最小の部分加群を $\langle S \rangle$ と書き， S で生成された M の部分加群と呼ぶ．このとき次を示せ．

i) 部分集合 $S \subset M$ に対して， $\langle S \rangle = \sum_{m \in S} Am$ ．

ii) 次は同値：

- a) M は A 上有限生成である；
- b) 有限個の M の元 $m_1, \dots, m_n \in M$ が存在して $M = Am_1 + \dots + Am_n$ と書ける；
- c) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射準同型 $A^{\text{un}} \rightarrow M$ が存在する．

iii) A が \mathbb{k} 上有限次元 (有限生成) ならば, M が A 上有限生成であることと, \mathbb{k} 上有限次元であることは同値である.

Proof. (i)

まず, 任意の $m \in S$ に対して $m = 1m \in Am$ であるから, $\langle S \rangle \subset \sum_{m \in S} Am$ が成り立つ.

逆に, S を含む任意の部分加群 $L \subset M$ を取ると, 各 $m \in S$ に対して $m \in L$ だから $Am \subset L$. よって $\sum_{m \in S} Am \subset L$ となり, $\sum_{m \in S} Am \subset \langle S \rangle$ が従う.

(ii)

(a) \iff (b)

(i) より明らか.

(b) \implies (c)

有限個の M の元 $m_1, \dots, m_n \in M$ によって $M = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i$ と書けたとする. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $A_i := A$ とおき, $A^{\sqcup n} = \coprod_{1 \leq i \leq n} A_i$ とする.

このとき, 全射準同型 $\phi: A^{\sqcup n} \rightarrow M$ が

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} a_i m_i \quad (a_i \in A_i, i \in I)$$

によって定義できる.

(c) \implies (b)

ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と全射準同型 $\phi: A^{\sqcup n} \rightarrow M$ が存在したとする. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $A_i := A$ とおき, $A^{\sqcup n} = \coprod_{1 \leq i \leq n} A_i$ とする.

このとき, 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $m_i := \phi(1_i)$ とおけば

$$M = \phi(A^{\sqcup n}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \phi(A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i.$$

ただし, $1_i \in A_i$ は A_i の単位元を表す.

(iii) M を \mathbb{k} 上有限生成だとすると, 多元環 \mathbb{k} について (ii) を用いて,

$$M = \mathbb{k}m_1 + \dots + \mathbb{k}m_n$$

なる元 $m_1, \dots, m_n \in M$ が存在し, $M = \mathbb{k}m_1 + \dots + \mathbb{k}m_n \subset Am_1 + \dots + Am_n \subset M$ より $M = Am_1 + \dots + Am_n$ を得る. よって M は A 上有限生成.

逆に M が A 上有限生成ならば有限個の元 $m_1, \dots, m_n \in M$ を用いて $M = Am_1 + \dots + Am_n$ と書ける. 同様に A が \mathbb{k} 上有限生成だから, 有限個の元 $a_1, \dots, a_\ell \in A$ によって $A = \mathbb{k}a_1 + \dots + \mathbb{k}a_\ell$ と書ける.

すると

$$M = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \mathbb{k}a_j m_i$$

となるから, M は \mathbb{k} 上有限生成である. □

PROBLEM 2.2.12

A を多元環とする．圏 $\text{Mod}(A)$ の射が，写像の意味で単射であることと，圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ．また，写像の意味で全射であることと，圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ．

Proof. 圏 $\text{Mod}(A)$ における射 $f : M \rightarrow N$ を任意に取る．

単射ならばモノ射：

射 f を単射とし，ある射 $g, h : L \rightarrow M$ について $f \circ g = f \circ h$ が成り立ったとする．

このとき任意の $m \in L$ に対して $f(g(m)) = f(h(m))$ であり， f が単射だから $g(m) = h(m)$ ．よって $g = h$ となり， f はモノ射．

モノ射ならば単射：

M の部分空間 $\text{Ker } f \subset M$ は部分加群であり，二つの射

$$\begin{aligned} \text{ker } f : \text{Ker } f &\rightarrow M, & m &\mapsto m, \\ 0 : \text{Ker } f &\rightarrow M, & m &\mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $f \circ \text{ker } f = 0 = f \circ 0$ であり， f がモノ射だから $\text{ker } f = 0$ を得る．よって $\text{Ker } f = 0$ となり， f は単射．

全射ならばエピ射：

射 f を全射とし，ある射 $g, h : N \rightarrow L$ について $g \circ f = h \circ f$ が成り立ったとする．

このとき f が全射だから任意の $n \in N$ に対して $n = f(m)$ なる $m \in M$ が存在し， $g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n)$ ．よって $g = h$ となり， f はエピ射．

エピ射ならば全射：

N の部分空間 $\text{Im } f \subset N$ は部分加群であり，商加群 $\text{Coker } f = N / \text{Im } f$ を考えると，二つの射

$$\begin{aligned} \text{coker } f : N &\rightarrow \text{Coker } f, & n &\mapsto n + \text{Im } f, \\ 0 : N &\rightarrow \text{Coker } f, & n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $\text{coker } f \circ f = 0 = 0 \circ f$ であり， f がエピ射だから $\text{coker } f = 0$ を得る．よって $N = \text{Im } f$ となり， f は全射． \square

PROBLEM 2.2.13

A を多元環とする．圏 $\text{Mod}(A)$ において，直積と直和がそれぞれ積と余積になることを示せ．

Proof. I を小集合， $(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とする．

直積が積：

$M := \prod_{i \in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : M \rightarrow M_i$ を標準射影とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\rho_i : N \rightarrow M_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，準同型 $f : N \rightarrow M$ が

$$f(n) := (\rho_i(n))_{i \in I} \quad (n \in N)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow \rho_i \quad \swarrow \pi_i & \\ & M_i & \end{array}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g: N \rightarrow M$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(n)) = \rho_i(n) = \pi_i(f(n)) \quad (n \in N, i \in I)$$

より， $g(n)$ の第 i 成分と $f(n)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり， $g(n) = f(n)$ が言える．よって $g = f$ ．

直和が余積：

$M := \coprod_{i \in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i: M_i \rightarrow M$ を標準入射とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\tau_i: M_i \rightarrow N)_{i \in I}$ が与えられたとき，準同型 $f: M \rightarrow N$ が

$$f(m) := \sum_{i \in I} \tau_i(m_i) \quad (m \in M_i)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \tau_i \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g: M \rightarrow N$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(m)) = \tau_i(m) = f(\sigma_i(m)) \quad (m \in M_i, i \in I)$$

より，任意の $m \in M$ に対して $g(m) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(m_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(m_i)) = f(m)$ となる．よって $g = f$ ． \square

PROBLEM 2.2.15

A を多元環， $M \in \text{Mod}(A)_0$ とする．このとき次が同値であることを示せ．

- i) 圏 $\text{Mod}(A)$ において， $M \cong M_1 \sqcup M_2$ (外部直和) ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ ．
- ii) M の部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ に対して， $M = M_1 \oplus M_2$ (内部直和) ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ ．

Proof. (i) \implies (ii)

$M = M_1 \oplus M_2$ なる部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ が存在すれば，内部直和の定義より， $M \cong M_1 \sqcup M_2$ となる．よって $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ ．

(ii) \implies (i)

A 加群 M_1, M_2 が存在して $M \cong M_1 \sqcup M_2$ となったとする．この同型を $\phi: M_1 \sqcup M_2 \rightarrow M$ とおけば， $\phi(M_1)$ と $\phi(M_2)$ はともに M の部分加群で， $M = \phi(M_1) \oplus \phi(M_2)$ となる．実際， $M = \phi(M_1 \sqcup M_2) = \phi(M_1) + \phi(M_2)$ で， $\phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \phi(M_1 \cap M_2) = 0$ である．

よって $\phi(M_1) = 0$ または $\phi(M_2) = 0$ となるが, ϕ は単射だから $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

□

PROBLEM 2.2.19

\mathcal{C} を線形圏とする. 圏 $\text{Mod}(\mathcal{C})$ の射が, 写像の族の意味で単射であることと, 圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ. また, 写像の族の意味で全射であることと, 圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ.

Proof. 圏 $\text{Mod}(\mathcal{C})$ における射 $\alpha : M \rightarrow N$ を任意に取る. **PROBLEM 2.2.12** で $A = \mathbb{k}$ としたものを断り無く使う.

単射ならばモノ射 :

射 $\beta, \gamma : L \rightarrow M$ が存在して $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ となったとする.

このとき各 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して $\alpha_x \circ \beta_x = \alpha_x \circ \gamma_x$ が成り立つ. α は単射だから α_x も単射, 従ってモノ射となり, $\beta_x = \gamma_x$ を得る. よって $\beta = \gamma$ となり, α はモノ射.

モノ射ならば単射 :

部分空間族 $(\text{Ker}(\alpha_x) \subset M(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ によって定義される M の部分加群を $\text{Ker } \alpha$ と表す. $\text{Ker } \alpha = 0$ を言えばよい.

包含射 $\text{Ker } \alpha \rightarrow M$ を $\sigma = (\sigma_x : \text{Ker } \alpha_x \rightarrow M(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ とする. このとき $\alpha \circ \sigma = 0 = \alpha \circ 0$ であり, α はモノ射だから $\sigma = 0$. よって $\text{Ker } \alpha = 0$ となり, 各 α_x は単射である.

全射ならばエピ射 :

射 $\beta, \gamma : N \rightarrow L$ が存在して $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$ となったとする.

このとき各 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して $\beta_x \circ \alpha_x = \gamma_x \circ \alpha_x$ が成り立つ. α は全射だから α_x も全射, 従ってエピ射となり, $\beta_x = \gamma_x$ を得る. よって $\beta = \gamma$ となり, α はエピ射.

エピ射ならば全射 :

商空間族 $(N(x) \rightarrow \text{Coker}(\alpha_x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ によって定義される N の商加群を $\text{Coker } \alpha$ と表す. $\text{Coker } \alpha = 0$ を言えばよい.

射影射 $N \rightarrow \text{Coker } \alpha$ を $\pi = (\pi_x : N(x) \rightarrow \text{Coker } \alpha_x)_{x \in \mathcal{C}_0}$ とする. このとき $\pi \circ \alpha = 0 = 0 \circ \alpha$ であり, α はエピ射だから $\pi = 0$. よって $\text{Coker } \alpha = 0$ となり, 各 α_y は全射である. □

PROBLEM 2.2.23

\mathcal{C} を線形圏とし, $M \in \text{Mod}(\mathcal{C})_0$ とする. I を集合とし, M の部分加群族 $(M_i)_{i \in I}$ を考える.

このとき, 部分空間の族 $\bigcap_{i \in I} M_i := (\bigcap_{i \in I} M_i(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ と $\sum_{i \in I} M_i := (\sum_{i \in I} M_i(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ はそれぞれ M の部分加群を定めることを示せ.

Proof. 圏 \mathcal{C} の任意の射 $f : x \rightarrow y$ について

$$M(f) \left(\bigcap_{i \in I} M_i(x) \right) \subset \bigcap_{i \in I} M_i(y),$$
$$M(f) \left(\sum_{i \in I} M_i(x) \right) \subset \sum_{i \in I} M_i(y)$$

がそれぞれ成り立つことを示せばよい.

交叉が部分加群 :

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\bigcap_{i \in I} M_i(x)) \subset \bigcap_{i \in I} M(f)(M_i(x)) \subset \bigcap_{i \in I} M_i(y)$ が言える.

和が部分加群 :

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\sum_{i \in I} M_i(x)) = \sum_{i \in I} M(f)(M_i(x)) \subset \sum_{i \in I} M_i(y)$ が言える. \square