圏と表現論 演習問題

@naughie

Contents

第 1 章 圏

§ 1.1 モノイドと圏

Problem 1.1.2

$(G, \mu, 1)$ がモノイドならば $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1)$ もモノイドとなることを示せ．ただし，

$$\mu^{\mathrm{op}}(x, y) := \mu(y, x) \quad (x, y \in G).$$

Proof. 結合律の公理は各 $x, y, z \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{op}}(\mu^{\mathrm{op}}(x, y), z) &= \mu^{\mathrm{op}}(\mu(y, x), z) \\ &= \mu(z, \mu(y, x)) \\ &= \mu(\mu(z, y), x) \\ &= \mu^{\mathrm{op}}(x, \mu^{\mathrm{op}}(y, z)) \end{aligned}$$

と確認できる．単位元は明らか． □

Problem 1.1.5

$(G, \mu, 1, \iota)$ が群ならば $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1, \iota)$ も群となることを示せ．

Proof. **Problem 1.1.2** より $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1)$ はモノイドである．ι がこの反転モノイド G^{op} の逆元を与えることを言えばよく，それは任意の $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{op}}(x, \iota(x)) &= \mu(\iota(x), x) = 1, \\ \mu^{\mathrm{op}}(\iota(x), x) &= \mu(x, \iota(x)) = 1 \end{aligned}$$

となることから分かる． □

Problem 1.1.11

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, \mathrm{id})$ が圏ならば $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathrm{cod}, \mathrm{dom}, \circ^{\mathrm{op}}, \mathrm{id})$ も圏となることを示せ．ただし，圏 $\mathcal{C}$ 内で合成可能な射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$f \circ^{\mathrm{op}} g \coloneqq g \circ f.$$

Proof. 結合律：圏 $\mathcal{C}$ の射

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

に対して

$$\begin{aligned}(f \circ^{\mathrm{op}} g) \circ^{\mathrm{op}} h &= h \circ (g \circ f) \\ &= (h \circ g) \circ f \\ &= f \circ^{\mathrm{op}} (g \circ^{\mathrm{op}} h).\end{aligned}$$

単位律：圏 $\mathcal{C}$ の射 $f \in \mathcal{C}(x, y)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_x \circ^{\mathrm{op}} f &= f \circ \mathrm{id}_x = f, \\ f \circ^{\mathrm{op}} \mathrm{id}_y &= \mathrm{id}_y \circ f = f.\end{aligned}$$

□

Problem 1.1.24

小集合の圏 Set において，集合の直積が積で非交和が余積となることを示せ．

Proof. I を小集合，$(X_i)_{i \in I}$ を小集合の族とする．

直積が積：

$X \coloneqq \prod_{i \in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : X \to X_i$ を標準射影とする．

小集合 Y と写像の族 $(\rho_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，写像 $f : Y \to X$ が

$$f(y) \coloneqq (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある写像 $g : Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より，$g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(y) = f(y)$ が言える．よって $g = f$.

非交和が余積：

$X := \coprod_{i \in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : X_i \to X$ を標準入射とする．

小集合 Y と写像の族 $(\tau_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ が与えられたとき，写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x) := \tau_i(x) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある写像 $g : X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より，任意の $x \in X$ に対して $g(x) = f(x)$ となる．よって $g = f$. □

§ 1.2 モノイド準同型と函手

Problem 1.2.5

$\mathcal{C}$ を局所小圏とし，$x \in \mathcal{C}_0$ とする．このとき次を示せ．

i）函手 $\mathcal{C}(x, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ が

- 対象：$y \mapsto \mathcal{C}(x, y)$,
- 射：$f \mapsto \mathcal{C}(x, f)$，ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g,$$

によって定義できる．

ii）函手 $\mathcal{C}(-, x) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が

- 対象：$y \mapsto \mathcal{C}(y, x)$,
- 射：$f \mapsto \mathcal{C}(f, x)$，ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(f, x) : \mathcal{C}(z, x) \to \mathcal{C}(y, x), \quad g \mapsto g \circ f,$$

によって定義できる．

iii）函手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ に対して，函手 $F^{\mathrm{op}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ が

- 対象：$y\mapsto F(y)$,
- 射：$f\mapsto F(f)$

によって定義できる．

Proof. (i) $\mathcal{C}(x,-):\mathcal{C}\to\mathsf{Set}$ がクイバー射で各対象 $y\in\mathcal{C}_0$ に対して $\mathcal{C}(x,\mathrm{id}_y)=\mathrm{id}_{\mathcal{C}(x,y)}$ であることは明らか．

圏 $\mathcal{C}$ の射

$$y\xrightarrow{f}z\xrightarrow{g}w$$

を考える．射 $\mathcal{C}(x,g\circ f):\mathcal{C}(x,y)\to\mathcal{C}(x,w)$ は $h\mapsto(g\circ f)\circ h$ で与えられる．

他方の射 $\mathcal{C}(x,g)\circ\mathcal{C}(x,f):\mathcal{C}(x,y)\to\mathcal{C}(x,w)$ は $h\mapsto f\circ h\mapsto g\circ(f\circ h)$ で与えられる．

圏 $\mathcal{C}$ における結合律 $(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)$ より，この二つの射は一致する：

$$\mathcal{C}(x,g\circ f)=\mathcal{C}(x,g)\circ\mathcal{C}(x,f).$$

以上より，クイバー射 $\mathcal{C}(x,-)$ は函手となる．

(ii) $\mathcal{C}(-,x)=\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x,-)$ である．

(iii) 射 $f\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(y,z)$ に対して $F^{\mathrm{op}}(f)\in\mathcal{D}^{\mathrm{op}}(F^{\mathrm{op}}(y),F^{\mathrm{op}}(z))$ となることはすぐに分かる．また，圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の各対象 $y\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_0$ について $F^{\mathrm{op}}(\mathrm{id}_y)=\mathrm{id}_{F^{\mathrm{op}}(y)}$ も明らか．結合律は,

$$\begin{aligned}F^{\mathrm{op}}(g\circ^{\mathrm{op}}f)&=F(g\circ^{\mathrm{op}}f)\\&=F(f\circ g)\\&=F(f)\circ F(g)\\&=F^{\mathrm{op}}(g)\circ^{\mathrm{op}}F^{\mathrm{op}}(f)\end{aligned}$$

と確かめられる． □

§ 1.3 自然変換

Problem 1.3.3

$\mathcal{C}$ を局所小圏とし，$f:x\to y$ を圏 $\mathcal{C}$ の射とする．このとき次を示せ．

i）射の族

$$\mathcal{C}(f,-):=(\mathcal{C}(f,z):\mathcal{C}(y,z)\to\mathcal{C}(x,z))_{z\in\mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(f,-):\mathcal{C}(y,-)\to\mathcal{C}(x,-)$ を定める．ただし，$\mathcal{C}(x,-)$ や $\mathcal{C}(y,-)$ は **Problem 1.2.5** (i) の共変表現函手である．

ii）射の族

$$\mathcal{C}(-,f) := (\mathcal{C}(z,f) : \mathcal{C}(z,x) \to \mathcal{C}(z,y))_{z\in\mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(-,f) : \mathcal{C}(-,x) \to \mathcal{C}(-,y)$ を定める．ただし，$\mathcal{C}(-,x)$ や $\mathcal{C}(-,y)$ は **Problem 1.2.5** (ii) の反変表現函手である．

Proof. (i) 圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $g : z \to w$ を取る．このとき図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(y,z) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,z)"] \arrow[d, "\mathcal{C}(y,g)"'] & \mathcal{C}(x,z) \arrow[d, "\mathcal{C}(x,g)"] \\ \mathcal{C}(y,w) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,w)"'] & \mathcal{C}(x,w) \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．

任意の射 $h \in \mathcal{C}(y,z)$ に対して

$$\begin{tikzcd} h \arrow[rr, mapsto, "\mathcal{C}(f,z)"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(y,g)"'] & & h\circ f \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(x,g)"] \\ g\circ h \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}(f,w)"'] & (g\circ h)\circ f \arrow[r, equal] & g\circ(h\circ f) \end{tikzcd}$$

となるから，$\mathcal{C}(f,-) : \mathcal{C}(y,-) \to \mathcal{C}(x,-)$ は自然変換である．

(ii) $\mathcal{C}(-,f) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(f,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x,-) \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(y,-)$ である． □

Problem 1.3.4

$\mathcal{C}$ を圏，I を集合とし $(x_i)_{i\in I}$ を圏 $\mathcal{C}$ の対象の族とする．このとき次の自然同型が得られることを示せ：

$$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I} := ((\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(-,\prod_{i\in I} x_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I}\mathcal{C}(-,x_i),$$
$$(\mathcal{C}(\sigma_i,-))_{i\in I} := ((\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I} x_i,-\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,-).$$

ただし，各 $\pi_j : \prod_{i\in I} x_i \to x_j$ と $\sigma_j : x_j \to \coprod_{i\in I}$ はそれぞれ積の射影族と余積の入射族であり，また各対象 $z \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I} : \mathcal{C}\left(z,\prod_{i\in I} x_i\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(z,x_i), \qquad f \mapsto (\pi_i\circ f)_{i\in I},$$
$$(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I} : \mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I} x_i, z\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,z), \qquad f \mapsto (f\circ\sigma_i)_{i\in I}$$

と定義する．

Proof. 積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって，$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\in\mathcal{C}(y,z)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(z,\prod_{i\in I}x_i) \arrow[r, "(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,\prod_{i\in I}x_i)"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(z,x_i) \arrow[d, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(f,x_i)"] \\
\mathcal{C}(y,\prod_{i\in I}x_i) \arrow[r, "(\mathcal{C}(y,\pi_i))_{i\in I}"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(y,x_i)
\end{tikzcd}$$

を考えると，各射 $g\in\mathcal{C}(z,\prod_{i\in I}x_i)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(f,\prod_{i\in I}x_i)"'] & & (\pi_i\circ g)_{i\in I} \arrow[d, mapsto, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(f,x_i)"] \\
g\circ f \arrow[r, mapsto, "(\mathcal{C}(y,\pi_i))_{i\in I}"'] & (\pi_i\circ(g\circ f))_{i\in I} \arrow[r, dash] & ((\pi_i\circ g)\circ f)_{i\in I}
\end{tikzcd}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型．

余積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって，$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\in\mathcal{C}(y,z)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,y) \arrow[r, "(\mathcal{C}(\sigma_i,y))_{i\in I}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,f)"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,y) \arrow[d, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,f)"] \\
\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,z) \arrow[r, "(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I}"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,z)
\end{tikzcd}$$

を考えると，各射 $g\in\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,y)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "(\mathcal{C}(\sigma_i,y))_{i\in I}"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,f)"'] & & (g\circ\sigma_i)_{i\in I} \arrow[d, mapsto, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,f)"] \\
f\circ g \arrow[r, mapsto, "(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I}"'] & ((f\circ g)\circ\sigma_i)_{i\in I} \arrow[r, dash] & (f\circ(g\circ\sigma_i))_{i\in I}
\end{tikzcd}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型． □

§ 1.4 圏の同型と同値

PROBLEM 1.4.5

$F=(F_0,F_1):\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を圏の間の函手とするとき，次は同値であることを示せ：

i）函手 F は同型；

ii）写像 $F_0:\mathcal{C}_0\to\mathcal{D}_0$ と $F_1:\mathcal{C}_1\to\mathcal{D}_1$ はともに全単射.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 函手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が同型だから，函手 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が存在して $G\circ F=\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ および $F\circ G=\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ が成り立つ．このとき

$$G_0\circ F_0=(G\circ F)_0=(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_0=\mathrm{id}_{\mathcal{C}_0},\qquad F_0\circ G_0=(F\circ G)_0=(\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_0=\mathrm{id}_{\mathcal{D}_0},$$
$$G_1\circ F_1=(G\circ F)_1=(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_1=\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1},\qquad F_1\circ G_1=(F\circ G)_1=(\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_1=\mathrm{id}_{\mathcal{D}_1}$$

であるから，写像 $F_0:\mathcal{C}_0\to\mathcal{D}_0$ と $F_1:\mathcal{C}_1\to\mathcal{D}_1$ はともに全単射.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 写像 $F_0:\mathcal{C}_0\to\mathcal{D}_0$ と $F_1:\mathcal{C}_1\to\mathcal{D}_1$ がともに全単射ならば，写像 $G_0:\mathcal{D}_0\to\mathcal{C}_0$ と $G_1:\mathcal{D}_1\to\mathcal{C}_1$ が存在して

$$G_0\circ F_0=\mathrm{id}_{\mathcal{C}_0},\qquad F_0\circ G_0=\mathrm{id}_{\mathcal{D}_0},$$
$$G_1\circ F_1=\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1},\qquad F_1\circ G_1=\mathrm{id}_{\mathcal{D}_1}$$

が成り立つ.

このとき $G=(G_0,G_1):\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ は函手である．実際，各恒等射 $\mathrm{id}_x\in\mathcal{D}(x,x)$ に対して

$$\mathrm{id}_{G_0(x)}=(G_1\circ F_1)\left(\mathrm{id}_{G_0(x)}\right)=G_1\left(\mathrm{id}_{F_0(G_0(x))}\right)=G_1(\mathrm{id}_x)$$

となり，また圏 $\mathcal{D}$ の射

$$x\xrightarrow{f}y\xrightarrow{g}z$$

に対して

$$\begin{aligned}F_1\circ G_1(g\circ f)=g\circ f&=(F_1\circ G_1(g))\circ(F_1\circ G_1(f))\\&=F_1\left(G_1(g)\circ G_1(f)\right)\end{aligned}$$

より

$$G_1(g\circ f)=G_1(g)\circ G_1(f)$$

を得る.

この函手 G が F の逆となっていることは，写像 G_0 と G_1 の定義から分かる. □

§ 1.5 多元環と線型圏

$\Bbbk$ を体とする．（可換環でもよい．）

Problem 1.5.8

$\Bbbk$ 上ベクトル空間の圏 $\mathrm{Mod}(\Bbbk)$ において，ベクトル空間の直積が積で直和が余積となることを示せ．

Proof. I を小集合，$(X_i)_{i\in I}$ をベクトル空間の族とする．

直積が積：

$X := \prod_{i\in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : X \to X_i$ を標準射影とする．

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\rho_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，線形写像 $f : Y \to X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i\in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある線形写像 $g : Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より，$g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(y) = f(y)$ が言える．よって $g = f$．

直和が余積：

$X := \coprod_{i\in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : X_i \to X$ を標準入射とする．

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\tau_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ が与えられたとき，線形写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x) := \sum_{i\in I} \tau_i(x_i) \quad (x \in X_i)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある線形写像 $g : X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より，任意の $x \in X$ に対して $g(x) = \sum_{i\in I} g(\sigma_i(x_i)) = \sum_{i\in I} f(\sigma_i(x_i)) = f(x)$ となる．よって $g = f$．□

Problem 1.5.12

$\mathcal{C}$ を $\Bbbk$ 線形圏，$f : x \to y$ をその射とする．このとき次を示せ．

i）$a : u \to x$ と $b : v \to x$ がともに射 f の核ならば，$b = a \circ c$ なる射 $c : v \to u$ がただ一つ存在する．そこで f の核を $\mathrm{ker}\, f : \mathrm{Ker}\, f \to x$ と書くとき，$\mathrm{ker}\, f$ はモノ射である．

ii）$a : y \to u$ と $b : y \to v$ がともに射 f の余核ならば，$b = c \circ a$ なる射 $c : u \to v$ がただ一つ存在する．そこで f の余核を $\mathrm{coker}\, f : \mathrm{Coker}\, f \to x$ と書くとき，$\mathrm{coker}\, f$ はエピ射である．

Proof. (i)

核の一意性：

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "a"] & x \arrow[r, "f"] & y \\ v \arrow[u, dashed, "\exists! c"] \arrow[ur, "b"'] & & \end{tikzcd}$$

核 b の定義から $f \circ b = 0$ となる．よって核 a の普遍性より，ただ一つの射 $c : v \to u$ が存在して $b = a \circ c$ とできる．

核がモノ射であること：

圏 $\mathcal{C}$ の射 $g, h : z \to \mathrm{Ker}\, f$ が $\mathrm{ker}\, f \circ g = \mathrm{ker}\, f \circ h$ を満たすとする．このとき射の合成 $\circ : \mathcal{C}(\mathrm{Ker}\, f, x) \times \mathcal{C}(z, \mathrm{Ker}\, f) \to \mathcal{C}(z, x)$ の双線形性より，$\mathrm{ker}\, f \circ (g - h) = 0$ となる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\mathrm{ker}\, f"] & x \arrow[r, "f"] & y \\ z \arrow[u, dashed, "\exists! \phi"] \arrow[ur, "\mathrm{ker}\, f \circ (g-h)"'] & & \end{tikzcd}$$

すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\mathrm{ker}\, f \circ \phi = \mathrm{ker}\, f \circ (g - h)$ を満たすから，核の普遍性から $g - h = 0$ が従う．よって $g = h$．

(ii)

余核の一意性：

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & u \arrow[d, dashed, "\exists! c"] \\ & & v \end{tikzcd}$$

余核 b の定義から $b \circ f = 0$ となる．よって余核 a の普遍性より，ただ一つの射 $c : u \to v$ が存在して $b = c \circ a$ とできる．

余核がエピ射であること：

圏 $\mathcal{C}$ の射 $g, h : \mathrm{Coker}\, f \to z$ が $g \circ \mathrm{coker}\, f = h \circ \mathrm{coker}\, f$ を満たすとする．このとき射の合成 $\circ : \mathcal{C}(\mathrm{Coker}\, f, z) \times \mathcal{C}(y, \mathrm{Coker}\, f) \to \mathcal{C}(y, z)$ の双線形性より，$(g - h) \circ \mathrm{coker}\, f = 0$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] \arrow[dr, "(g-h)\circ \mathrm{coker}\, f"'] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists ! \phi"] \\
& & z
\end{tikzcd}
$$

すると射 $\phi = g-h$ と $\phi = 0$ はともに $\phi \circ \mathrm{coker}\, f = (g-h) \circ \mathrm{coker}\, f$ を満たすから，余核の普遍性から $g-h=0$ が従う．よって $g=h$. □

PROBLEM 1.5.18

$\Bbbk$ 線形圏 $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Bbbk)$ において，

$$
x = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \Bbbk, \quad x_i = \Bbbk \ (i \in \mathbb{N})
$$

とおき，標準直和 $(\overline{\sigma_j} : \mathcal{C}(x, x_j) \to \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i))_{j \in \mathbb{N}}$ の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x, x_j) \arrow[r, "\mathcal{C}(x, \sigma_j)"] \arrow[d, "\overline{\sigma_j}"'] & \mathcal{C}\left(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i\right) \\
\coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \arrow[ur, dashed, "\exists ! \phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

を考える．ただし，$j \in \mathbb{N}$ で，$\sigma_j : x_j \to \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i$ は標準入射である．
このとき，線形写像 $\phi : \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \to \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ が同型でないことを示せ．

Proof. 線形写像 ϕ は具体的に，

$$
\phi\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i\right) : x \to \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i, \quad y \mapsto \sum_{i \in I} f_i(y) \quad (f_i \in \mathcal{C}(x, x_i))
$$

で与えられる．

線形写像 $\phi : \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \to \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ が全射でないことを示す．

恒等写像 $\mathrm{id}_x \in \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ を考え，ある線形写像 $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$ によって $\mathrm{id}_x = \phi(f)$ が成り立ったとする（$f_i \in \mathcal{C}(x, x_i)$）．このとき任意の $y_i \in x_i$ $(i \in \mathbb{N})$ について

$$
y_i = \mathrm{id}_x(\sigma_i(y_i)) = \phi(f)(\sigma_i(y_i)) = f_i(\sigma_i(y_i))
$$

となるから，特に $f_i \neq 0$．これは $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$ に矛盾する．よって ϕ は全射でない． □

Another proof. 線形写像 ϕ が単射でないことを示す．

線形写像 $f_0 \in \mathcal{C}(x, x_0)$ を

$$
f_0(\sigma_i(1_i)) := \begin{cases} 1_0 & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N})
$$

となるように定義する．ただし，$1_i \in x_i$ は体 x_i の単位元．

このとき

$$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) : \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i \mapsto f_0(\sigma_0(y_0)) = 0 \quad (y_i \in x_i, i \in \mathbb{N})$$

となるから，$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) = 0$ である．

一方定義から $f_0 \neq 0$，従って $\overline{\sigma_0}(f_0) \neq 0$．よって ϕ は単射でない． □

§ 1.6 多元環の準同型と線形函手

$\Bbbk$ を体とする．（可換環でもよい．）

PROBLEM 1.6.4

$\mathcal{C}$ を $\Bbbk$ 線形圏とし，$x \in \mathcal{C}_0$ とする．このとき，**PROBLEM 1.2.5** で定義される表現函手は線形函手

$$\mathcal{C}(x,-) : \mathcal{C} \to \mathsf{Mod}(\Bbbk),$$
$$\mathcal{C}(-,x) : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Mod}(\Bbbk)$$

となることを示せ．

Proof. 共変表現函手：

まず $\mathcal{C}(x,-)$ が函手 $\mathcal{C} \to \mathsf{Mod}(\Bbbk)$ となることを示す．

各対象 $y \in \mathcal{C}_0$ に対して，線形圏の定義より，$\mathcal{C}(x,y)$ はベクトル空間である．また各射 $f \in \mathcal{C}(y,z)$ に対して，射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$ が双線形であることから

$$\mathcal{C}(x,f) : \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z), \quad g \mapsto f \circ g$$

は線形写像である．よって $\mathcal{C}(x,-)$ は函手 $\mathcal{C} \to \mathsf{Mod}(\Bbbk)$ となる．

次にこれが線形函手であることを示す．

射 $f, g \in \mathcal{C}(y,z)$ とスカラー $\lambda \in \Bbbk$ を任意に取る．再び射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$ が双線形であることから，

$$\mathcal{C}(x, f+g) : h \mapsto (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$
$$\mathcal{C}(x, \lambda f) : h \mapsto (\lambda f) \circ h = \lambda (f \circ h)$$

であり，$\mathcal{C}(x, f+g) = \mathcal{C}(x,f) + \mathcal{C}(x,g)$ および $\mathcal{C}(x,\lambda f) = \lambda \mathcal{C}(x,f)$ が分かる．よって $\mathcal{C}(x,-)$ は線形函手．

反変表現函手：

$\mathcal{C}(-,x) = \mathcal{C}^{\mathsf{op}}(x,-)$ である． □