

圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

1	圏	1
1.1	モノイドと圏	2
1.2	モノイド準同型と函手	4
1.3	自然変換	5
1.4	圏の同型と同値	8
1.5	多元環と線型圏	9
1.6	多元環の準同型と線形函手	12

第1章 圏

§ 1.1 モノイドと圏

PROBLEM 1.1.2

$(G, \mu, 1)$ がモノイドならば $(G, \mu^{\text{op}}, 1)$ もモノイドとなることを示せ。ただし,

$$\mu^{\text{op}}(x, y) := \mu(y, x) \quad (x, y \in G).$$

Proof. 結合律の公理は各 $x, y, z \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\text{op}}(\mu^{\text{op}}(x, y), z) &= \mu^{\text{op}}(\mu(y, x), z) \\ &= \mu(z, \mu(y, x)) \\ &= \mu(\mu(z, y), x) \\ &= \mu^{\text{op}}(x, \mu^{\text{op}}(y, z)) \end{aligned}$$

と確認できる。単位元は明らか。 □

PROBLEM 1.1.5

$(G, \mu, 1, \iota)$ が群ならば $(G, \mu^{\text{op}}, 1, \iota)$ も群となることを示せ。

Proof. **PROBLEM 1.1.2** より $(G, \mu^{\text{op}}, 1)$ はモノイドである。 ι がこの反転モノイド G^{op} の逆元を与えることを言えばよく、それは任意の $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\text{op}}(x, \iota(x)) &= \mu(\iota(x), x) = 1, \\ \mu^{\text{op}}(\iota(x), x) &= \mu(x, \iota(x)) = 1 \end{aligned}$$

となることから分かる。 □

PROBLEM 1.1.11

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \text{dom}, \text{cod}, \circ, \text{id})$ が圏ならば $\mathcal{C}^{\text{op}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \text{cod}, \text{dom}, \circ^{\text{op}}, \text{id})$ も圏となることを示せ。ただし，圏 \mathcal{C} 内で合成可能な射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$f \circ^{\text{op}} g := g \circ f.$$

Proof. 結合律：圏 \mathcal{C} の射

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

に対して

$$\begin{aligned} (f \circ^{\text{op}} g) \circ^{\text{op}} h &= h \circ (g \circ f) \\ &= (h \circ g) \circ f \\ &= f \circ^{\text{op}} (g \circ^{\text{op}} h). \end{aligned}$$

単位律：圏 \mathcal{C} の射 $f \in \mathcal{C}(x, y)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{id}_x \circ^{\text{op}} f &= f \circ \text{id}_x = f, \\ f \circ^{\text{op}} \text{id}_y &= \text{id}_y \circ f = f. \end{aligned}$$

□

PROBLEM 1.1.24

小集合の圏 Set において，集合の直積が積で非交和が余積となることを示せ。

Proof. I を小集合， $(X_i)_{i \in I}$ を小集合の族とする。

直積が積：

$X := \prod_{i \in I} X_i$ とおく。各 $i \in I$ について $\pi_i : X \rightarrow X_i$ を標準射影とする。

小集合 Y と写像の族 $(\rho_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，写像 $f : Y \rightarrow X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \rho_i & \swarrow \pi_i \\ & X_i & \end{array}$$

は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある写像 $g: Y \rightarrow X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より, $g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり, $g(y) = f(y)$ が言える. よって $g = f$.

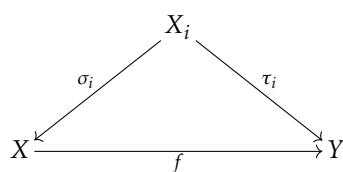
非交和が余積:

$X := \bigsqcup_{i \in I} X_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\sigma_i: X_i \rightarrow X$ を標準入射とする.

小集合 Y と写像の族 $(\tau_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ が与えられたとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が

$$f(x) := \tau_i(x) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある写像 $g: X \rightarrow Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より, 任意の $x \in X$ に対して $g(x) = f(x)$ となる. よって $g = f$. □

§ 1.2 モノイド準同型と関手

PROBLEM 1.2.5

\mathcal{C} を局所小圏とし, $x \in \mathcal{C}_0$ とする. このとき次を示せ.

i) 関手 $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が

- ・ 対象: $y \mapsto \mathcal{C}(x, y)$,
- ・ 射: $f \mapsto \mathcal{C}(x, f)$, ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(x, f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g,$$

によって定義できる.

ii) 関手 $\mathcal{C}(-, x): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が

- ・ 対象: $y \mapsto \mathcal{C}(y, x)$,
- ・ 射: $f \mapsto \mathcal{C}(f, x)$, ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(f, x): \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(y, x), \quad g \mapsto g \circ f,$$

によって定義できる.

iii) 函手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 函手 $F^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ が

- ・ 対象: $y \mapsto F(y)$,
- ・ 射: $f \mapsto F(f)$

によって定義できる.

Proof. (i) $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ がクイバー射で各対象 $y \in \mathcal{C}_0$ に対して $\mathcal{C}(x, \text{id}_y) = \text{id}_{\mathcal{C}(x, y)}$ であることは明らか.
圏 \mathcal{C} の射

$$y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{g} w$$

を考える. 射 $\mathcal{C}(x, g \circ f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, w)$ は $h \mapsto (g \circ f) \circ h$ で与えられる.

他方の射 $\mathcal{C}(x, g) \circ \mathcal{C}(x, f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, w)$ は $h \mapsto f \circ h \mapsto g \circ (f \circ h)$ で与えられる.

圏 \mathcal{C} における結合律 $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ より, この二つの射は一致する:

$$\mathcal{C}(x, g \circ f) = \mathcal{C}(x, g) \circ \mathcal{C}(x, f).$$

以上より, クイバー射 $\mathcal{C}(x, -)$ は函手となる.

(ii) $\mathcal{C}(-, x) = \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -)$ である.

(iii) 射 $f \in \mathcal{C}^{\text{op}}(y, z)$ に対して $F^{\text{op}}(f) \in \mathcal{D}^{\text{op}}(F^{\text{op}}(y), F^{\text{op}}(z))$ となることはすぐに分かる. また, 圏 \mathcal{C}^{op} の各対象 $y \in \mathcal{C}_0^{\text{op}}$ について $F^{\text{op}}(\text{id}_y) = \text{id}_{F^{\text{op}}(y)}$ も明らか. 結合律は,

$$\begin{aligned} F^{\text{op}}(g \circ^{\text{op}} f) &= F(g \circ^{\text{op}} f) \\ &= F(f \circ g) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F^{\text{op}}(g) \circ^{\text{op}} F^{\text{op}}(f) \end{aligned}$$

と確かめられる. □

§ 1.3 自然変換

PROBLEM 1.3.3

\mathcal{C} を局所小圏とし, $f: x \rightarrow y$ を圏 \mathcal{C} の射とする. このとき次を示せ.

i) 射の族

$$\mathcal{C}(f, -) := (\mathcal{C}(f, z): \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z))_{z \in \mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(f, -): \mathcal{C}(y, -) \rightarrow \mathcal{C}(x, -)$ を定める. ただし, $\mathcal{C}(x, -)$ や $\mathcal{C}(y, -)$ は **PROBLEM 1.2.5** (i) の共変表現函手である.

ii) 射の族

$$\mathcal{C}(-, f) := (\mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(z, y))_{z \in \mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, x) \rightarrow \mathcal{C}(-, y)$ を定める。ただし, $\mathcal{C}(-, x)$ や $\mathcal{C}(-, y)$ は **PROBLEM 1.2.5** (ii) の反変表現関手である。

Proof. (i) 圏 \mathcal{C} の任意の射 $g : z \rightarrow w$ を取る。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(y, z) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, z)} & \mathcal{C}(x, z) \\ \mathcal{C}(y, g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(x, g) \\ \mathcal{C}(y, w) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, w)} & \mathcal{C}(x, w) \end{array}$$

が可換であることを示せばよい。

任意の射 $h \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, z)} & h \circ f \\ \mathcal{C}(y, g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(x, g) \\ g \circ h & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, w)} & (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \end{array}$$

となるから, $\mathcal{C}(f, -) : \mathcal{C}(y, -) \rightarrow \mathcal{C}(x, -)$ は自然変換である。

(ii) $\mathcal{C}(-, f) = \mathcal{C}^{\text{op}}(f, -) : \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}(y, -)$ である。 □

PROBLEM 1.3.4

\mathcal{C} を圏, I を集合とし $(x_i)_{i \in I}$ を圏 \mathcal{C} の対象の族とする。このとき次の自然同型が得られることを示せ：

$$(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I} := ((\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I})_{z \in \mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(-, \prod_{i \in I} x_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(-, x_i),$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i, -))_{i \in I} := ((\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I})_{z \in \mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(\prod_{i \in I} x_i, -\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, -).$$

ただし, 各 $\pi_j : \prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_j$ と $\sigma_j : x_j \rightarrow \prod_{i \in I} x_i$ はそれぞれ積の射影族と余積の入射族であり, また各対象 $z \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I} : \mathcal{C}\left(z, \prod_{i \in I} x_i\right) &\rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(z, x_i), & f &\mapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I}, \\ (\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I} : \mathcal{C}\left(\prod_{i \in I} x_i, z\right) &\rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, z), & f &\mapsto (f \circ \sigma_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

と定義する。

Proof. 積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって， $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 \mathcal{C} の任意の射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(z, \prod_{i \in I} x_i) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(z, x_i) \\ \downarrow \mathcal{C}(f, \prod_{i \in I} x_i) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(f, x_i) \\ \mathcal{C}(y, \prod_{i \in I} x_i) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(y, \pi_i))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(y, x_i) \end{array}$$

を考えると，各射 $g \in \mathcal{C}(z, \prod_{i \in I} x_i)$ に対して

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}} & (\pi_i \circ g)_{i \in I} \\ \downarrow \mathcal{C}(f, \prod_{i \in I} x_i) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(f, x_i) \\ g \circ f & \xrightarrow{(\mathcal{C}(y, \pi_i))_{i \in I}} & (\pi_i \circ (g \circ f))_{i \in I} \quad \text{---} \quad ((\pi_i \circ g) \circ f)_{i \in I} \end{array}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$ は自然同型．

余積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって， $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 \mathcal{C} の任意の射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, y) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, y))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, y) \\ \downarrow \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, f) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, f) \\ \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, z) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, z) \end{array}$$

を考えると，各射 $g \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, y)$ に対して

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, y))_{i \in I}} & (g \circ \sigma_i)_{i \in I} \\ \downarrow \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, f) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, f) \\ f \circ g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I}} & ((f \circ g) \circ \sigma_i)_{i \in I} \quad \text{---} \quad (f \circ (g \circ \sigma_i))_{i \in I} \end{array}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$ は自然同型． □

§ 1.4 圏の同型と同値

PROBLEM 1.4.5

$F = (F_0, F_1) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を圏の間の関手とすると、次は同値であることを示せ：

- i) 関手 F は同型；
- ii) 写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ はともに全単射。

Proof. (i) \implies (ii) 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が同型だから、関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在して $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ および $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$ が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= (G \circ F)_0 = (\text{id}_{\mathcal{C}})_0 = \text{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= (F \circ G)_0 = (\text{id}_{\mathcal{D}})_0 = \text{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= (G \circ F)_1 = (\text{id}_{\mathcal{C}})_1 = \text{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= (F \circ G)_1 = (\text{id}_{\mathcal{D}})_1 = \text{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

であるから、写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ はともに全単射。

(ii) \implies (i) 写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ がともに全単射ならば、写像 $G_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ と $G_1 : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ が存在して

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= \text{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= \text{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= \text{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= \text{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

このとき $G = (G_0, G_1) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ は関手である。実際、各恒等射 $\text{id}_x \in \mathcal{D}(x, x)$ に対して

$$\text{id}_{G_0(x)} = (G_1 \circ F_1)(\text{id}_{G_0(x)}) = G_1(\text{id}_{F_0(G_0(x))}) = G_1(\text{id}_x)$$

となり、また圏 \mathcal{D} の射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$\begin{aligned} F_1 \circ G_1(g \circ f) &= g \circ f = (F_1 \circ G_1(g)) \circ (F_1 \circ G_1(f)) \\ &= F_1(G_1(g) \circ G_1(f)) \end{aligned}$$

より

$$G_1(g \circ f) = G_1(g) \circ G_1(f)$$

を得る。

この関手 G が F の逆となっていることは、写像 G_0 と G_1 の定義から分かる。

□

§ 1.5 多元環と線型圏

\mathbb{k} を体とする。(可換環でもよい.)

PROBLEM 1.5.8

\mathbb{k} 上ベクトル空間の圏 $\text{Mod}(\mathbb{k})$ において, ベクトル空間の直積が積で直和が余積となることを示せ.

Proof. I を小集合, $(X_i)_{i \in I}$ をベクトル空間の族とする.

直積が積:

$X := \prod_{i \in I} X_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\pi_i: X \rightarrow X_i$ を標準射影とする.

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\rho_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ が与えられたとき, 線形写像 $f: Y \rightarrow X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる. このとき図式

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \rho_i & \swarrow \pi_i \\ & X_i & \end{array}$$

は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある線形写像 $g: Y \rightarrow X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より, $g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり, $g(y) = f(y)$ が言える. よって $g = f$.

直和が余積:

$X := \coprod_{i \in I} X_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\sigma_i: X_i \rightarrow X$ を標準入射とする.

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\tau_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ が与えられたとき, 線形写像 $f: X \rightarrow Y$ が

$$f(x) := \sum_{i \in I} \tau_i(x_i) \quad (x \in X_i)$$

によって定まる. このとき図式

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \tau_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある線形写像 $g: X \rightarrow Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より, 任意の $x \in X$ に対して $g(x) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(x_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(x_i)) = f(x)$ となる. よって $g = f$. \square

PROBLEM 1.5.12

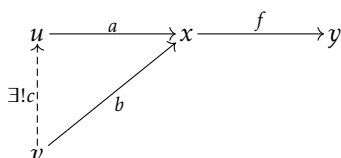
\mathcal{C} を \mathbb{K} 線形圏, $f: x \rightarrow y$ をその射とする. このとき次を示せ.

- i) $a: u \rightarrow x$ と $b: v \rightarrow x$ がともに射 f の核ならば, $b = a \circ c$ なる射 $c: v \rightarrow u$ がただ一つ存在する. そこで f の核を $\ker f: \text{Ker } f \rightarrow x$ と書くとき, $\ker f$ はモノ射である.
- ii) $a: y \rightarrow u$ と $b: y \rightarrow v$ がともに射 f の余核ならば, $b = c \circ a$ なる射 $c: u \rightarrow v$ がただ一つ存在する. そこで f の余核を $\text{coker } f: \text{Coker } f \rightarrow x$ と書くとき, $\text{coker } f$ はエピ射である.

Proof. (i)

核の一意性:

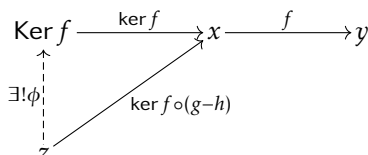
次の図式を考える:



核 b の定義から $f \circ b = 0$ となる. よって核 a の普遍性より, ただ一つの射 $c: v \rightarrow u$ が存在して $b = a \circ c$ とできる.

核がモノ射であること:

圏 \mathcal{C} の射 $g, h: z \rightarrow \text{Ker } f$ が $\ker f \circ g = \ker f \circ h$ を満たすとする. このとき射の合成 $\circ: \mathcal{C}(\text{Ker } f, x) \times \mathcal{C}(z, \text{Ker } f) \rightarrow \mathcal{C}(z, x)$ の双線形性より, $\ker f \circ (g - h) = 0$ となる.

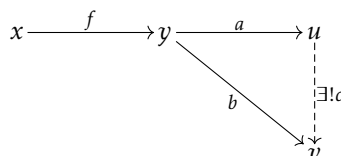


すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\ker f \circ \phi = \ker f \circ (g - h)$ を満たすから, 核の普遍性から $g - h = 0$ が従う. よって $g = h$.

(ii)

余核の一意性:

次の図式を考える:



余核 b の定義から $b \circ f = 0$ となる. よって余核 a の普遍性より, ただ一つの射 $c: u \rightarrow v$ が存在して $b = c \circ a$ とできる.

余核がエピ射であること:

圏 \mathcal{C} の射 $g, h: \text{Coker } f \rightarrow z$ が $g \circ \text{coker } f = h \circ \text{coker } f$ を満たすとする. このとき射の合成 $\circ: \mathcal{C}(\text{Coker } f, z) \times \mathcal{C}(y, \text{Coker } f) \rightarrow \mathcal{C}(y, z)$ の双線形性より, $(g - h) \circ \text{coker } f = 0$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\text{coker } f} & \text{Coker } f \\
 & & & \searrow (g-h) \circ \text{coker } f & \downarrow \exists! \phi \\
 & & & & z
 \end{array}$$

すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\phi \circ \text{coker } f = (g - h) \circ \text{coker } f$ を満たすから、余核の普遍性から $g - h = 0$ が従う。よって $g = h$. \square

PROBLEM 1.5.18

\mathbb{k} 線形圏 $\mathcal{C} = \text{Mod}(\mathbb{k})$ において,

$$x = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{k}, \quad x_i = \mathbb{k} \ (i \in \mathbb{N})$$

とおき, 標準直和 $(\sigma_j : \mathcal{C}(x, x_j) \rightarrow \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i))_{j \in \mathbb{N}}$ の普遍性

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(x, x_j) & \xrightarrow{\mathcal{C}(x, \sigma_j)} & \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i) \\
 \downarrow \sigma_j & \nearrow \exists! \phi & \\
 \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) & &
 \end{array}$$

を考える。ただし, $j \in \mathbb{N}$ で, $\sigma_j : x_j \rightarrow \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i$ は標準入射である。

このとき, 線形写像 $\phi : \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \rightarrow \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ が同型でないことを示せ。

Proof. 線形写像 ϕ は具体的に,

$$\phi \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \right) : x \rightarrow \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i, \quad y \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(y) \quad (f_i \in \mathcal{C}(x, x_i))$$

で与えられる。

線形写像 $\phi : \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \rightarrow \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ が全射でないことを示す。

恒等写像 $\text{id}_x \in \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ を考え, ある線形写像 $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$ によって $\text{id}_x = \phi(f)$ が成り立ったとする ($f_i \in \mathcal{C}(x, x_i)$)。このとき任意の $y_i \in x_i$ ($i \in \mathbb{N}$) について

$$y_i = \text{id}_x(\sigma_i(y_i)) = \phi(f)(\sigma_i(y_i)) = f_i(\sigma_i(y_i))$$

となるから, 特に $f_i \neq 0$ 。これは $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$ に矛盾する。よって ϕ は全射でない。 \square

Another proof. 線形写像 ϕ が単射でないことを示す。

線形写像 $f_0 \in \mathcal{C}(x, x_0)$ を

$$f_0(\sigma_i(1_i)) := \begin{cases} 1_0 & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N})$$

となるように定義する。ただし, $1_i \in x_i$ は体 x_i の単位元。

このとき

$$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) : \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mapsto f_0(\sigma_0(y_0)) = 0 \quad (y_i \in x_i, i \in \mathbb{N})$$

となるから, $\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) = 0$ である.

一方定義から $f_0 \neq 0$, 従って $\overline{\sigma_0}(f_0) \neq 0$. よって ϕ は単射でない. □

§ 1.6 多元環の準同型と線形関手

\mathbb{k} を体とする. (可換環でもよい.)

PROBLEM 1.6.4

\mathcal{C} を \mathbb{k} 線形圏とし, $x \in \mathcal{C}_0$ とする. このとき, **PROBLEM 1.2.5** で定義される表現関手は線形関手

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k}), \\ \mathcal{C}(-, x) : \mathcal{C}^{\text{op}} &\rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k}) \end{aligned}$$

となることを示せ.

Proof. 共変表現関手 :

まず $\mathcal{C}(x, -)$ が関手 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k})$ となることを示す.

各対象 $y \in \mathcal{C}_0$ に対して, 線形圏の定義より, $\mathcal{C}(x, y)$ はベクトル空間である. また各射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して, 射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$ が双線形であることから

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g$$

は線形写像である. よって $\mathcal{C}(x, -)$ は関手 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k})$ となる.

次にこれが線形関手であることを示す.

射 $f, g \in \mathcal{C}(y, z)$ とスカラー $\lambda \in \mathbb{k}$ を任意に取る. 再び射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$ が双線形であることから,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, f + g) : h &\mapsto (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \\ \mathcal{C}(x, \lambda f) : h &\mapsto (\lambda f) \circ h = \lambda(f \circ h) \end{aligned}$$

であり, $\mathcal{C}(x, f + g) = \mathcal{C}(x, f) + \mathcal{C}(x, g)$ および $\mathcal{C}(x, \lambda f) = \lambda \mathcal{C}(x, f)$ が分かる. よって $\mathcal{C}(x, -)$ は線形関手.

反変表現関手 :

$\mathcal{C}(-, x) = \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -)$ である. □