圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

第 2 章 表現

§ 2.2 多元環と線形圏の加群圏

$\Bbbk$ を可換体（可換環でもよい）とする．また，左加群の圏を $\mathsf{Mod}(X)$，右加群の圏を $\mathsf{Mod}(X^{\mathrm{op}})$ で表す．

Problem 2.2.6

A を多元環，M を左 A 加群とする．I を集合とし，M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える．
このとき，部分空間 $\bigcap_{i\in I} M_i$ と $\sum_{i\in I} M_i$ はともに M の部分加群となる．

Proof. 交叉が部分加群：

元 $m \in \bigcap_{i\in I} M_i$ と $a \in A$ を任意に取る．このときすべての $i \in I$ について $m \in M_i$ で，M_i は M の部分加群だから $am \in M_i$．よって $am \in \bigcap_{i\in I} M_i$ が分かる．

和が部分加群：

$\sum_{i\in I} M_i$ の元

$$\sum_{i\in I} m_i \quad (m_i \in M_i, i \in I)$$

を任意に取ると，有限個の $i \in I$ を除いて $m_i = 0$ だから，$am_i \neq 0$ なる $i \in I$ も有限個である．ただし $a \in A$．よって和 $\sum_{i\in I} am_i \in M$ が定義でき，各 M_i が部分加群だから $am_i \in M_i$ であり，$\sum_{i\in I} am_i \in \sum_{i\in I} M_i$ となる．

□

Problem 2.2.8

A を多元環とし，M を左 A 加群とする．部分集合 $S \subset M$ について，S を含む最小の部分加群を $\langle S\rangle$ と書き，S で生成された M の部分加群と呼ぶ．このとき次を示せ．

i）部分集合 $S \subset M$ に対して，$\langle S\rangle = \sum_{m\in S} Am$.

ii）次は同値：

a) M は A 上有限生成である；

b) 有限個の M の元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ が存在して $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける；

c) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射準同型 $A^{\sqcup n} \to M$ が存在する．

iii）A が $\Bbbk$ 上有限次元（有限生成）ならば，M が A 上有限生成であることと，$\Bbbk$ 上有限次元であることは同値である．

Proof. (i)

まず，任意の $m \in S$ に対して $m = 1m \in Am$ であるから，$\langle S \rangle \subset \sum_{m\in S} Am$ が成り立つ．

逆に，S を含む任意の部分加群 $L \subset M$ を取ると，各 $m \in S$ に対して $m \in L$ だから $Am \subset L$．よって $\sum_{m\in S} Am \subset L$ となり，$\sum_{m\in S} Am \subset \langle S \rangle$ が従う．

(ii)

(a) $\Longleftrightarrow$ (b)

(i) より明らか．

(b) $\Longrightarrow$ (c)

有限個の M の元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ によって $M = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} Am_i$ と書けたとする．各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $A_i := A$ とおき，$A^{\sqcup n} = \coprod_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$ とする．

このとき，全射準同型 $\phi : A^{\sqcup n} \to M$ が

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \mapsto \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i m_i \quad (a_i \in A_i, i \in I)$$

によって定義できる．

(c) $\Longrightarrow$ (b)

ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と全射準同型 $\phi : A^{\sqcup n} \to M$ が存在したとする．各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $A_i := A$ とおき，$A^{\sqcup n} = \coprod_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$ とする．

このとき，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $m_i := \phi(1_i)$ とおけば

$$M = \phi\left(A^{\sqcup n}\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \phi(A_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} Am_i.$$

ただし，$1_i \in A_i$ は A_i の単位元を表す．

(iii) M を $\Bbbk$ 上有限生成だとすると，多元環 $\Bbbk$ について (ii) を用いて，

$$M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n$$

なる元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ が存在し，$M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n \subset Am_1 + \cdots + Am_n \subset M$ より $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ を得る．よって M は A 上有限生成．

逆に M が A 上有限生成ならば有限個の元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ を用いて $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける．同様に A が $\Bbbk$ 上有限生成だから，有限個の元 $a_1, \ldots, a_\ell \in A$ によって $A = \Bbbk a_1 + \cdots + \Bbbk a_\ell$ と書ける．

すると

$$M = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} Am_i = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant \ell} \Bbbk a_j m_i$$

となるから，M は $\Bbbk$ 上有限生成である． □

Problem 2.2.12

A を多元環とする．圏 $\mathrm{Mod}(A)$ の射が，写像の意味で単射であることと，圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ．また，写像の意味で全射であることと，圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ．

Proof. 圏 $\mathrm{Mod}(A)$ における射 $f : M \to N$ を任意に取る．

単射ならばモノ射：

射 f を単射とし，ある射 $g, h : L \to M$ について $f \circ g = f \circ h$ が成り立ったとする．

このとき任意の $m \in L$ に対して $f(g(m)) = f(h(m))$ であり，f が単射だから $g(m) = h(m)$)．よって $g = h$ となり，f はモノ射．

モノ射ならば単射：

M の部分空間 $\mathrm{Ker}\, f \subset M$ は部分加群であり，二つの射

$$\begin{aligned} \ker f &: \mathrm{Ker}\, f \to M, & m &\mapsto m, \\ 0 &: \mathrm{Ker}\, f \to M, & m &\mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $f \circ \ker f = 0 = f \circ 0$ であり，f がモノ射だから $\ker f = 0$ を得る．よって $\mathrm{Ker}\, f = 0$ となり，f は単射．

全射ならばエピ射：

射 f を全射とし，ある射 $g, h : N \to L$ について $g \circ f = h \circ f$ が成り立ったとする．

このとき f が全射だから任意の $n \in N$ に対して $n = f(m)$ なる $m \in M$ が存在し，$g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n)$．よって $g = h$ となり，f はエピ射．

エピ射ならば全射：

N の部分空間 $\mathrm{Im}\, f \subset N$ は部分加群であり，商加群 $\mathrm{Coker}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$ を考えると，二つの射

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}\, f &: N \to \mathrm{Coker}\, f, & n &\mapsto n + \mathrm{Im}\, f, \\ 0 &: N \to \mathrm{Coker}\, f, & n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $\mathrm{coker}\, f \circ f = 0 = 0 \circ f$ であり，f がエピ射だから $\mathrm{coker}\, f = 0$ を得る．よって $N = \mathrm{Im}\, f$ となり，f は全射． □

Problem 2.2.13

A を多元環とする．圏 $\mathrm{Mod}(A)$ において，直積と直和がそれぞれ積と余積になることを示せ．

Proof. I を小集合，$(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とする．

直積が積：

$M := \prod_{i \in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : M \to M_i$ を標準射影とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\rho_i : N \to M_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，準同型 $f : N \to M$ が

$$f(n) := (\rho_i(n))_{i \in I} \quad (n \in N)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & M \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g : N \to M$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(n)) = \rho_i(n) = \pi_i(f(n)) \quad (n \in N, i \in I)$$

より，$g(n)$ の第 i 成分と $f(n)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(n) = f(n)$ が言える．よって $g = f$．

直和が余積：

$M := \coprod_{i \in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : M_i \to M$ を標準入射とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\tau_i : M_i \to N)_{i \in I}$ が与えられたとき，準同型 $f : M \to N$ が

$$f(m) := \sum_{i \in I} \tau_i(m_i) \quad (m \in M_i)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g : M \to N$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(m)) = \tau_i(m) = f(\sigma_i(m)) \quad (m \in M_i, i \in I)$$

より，任意の $m \in M$ に対して $g(m) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(m_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(m_i)) = f(m)$ となる．よって $g = f$． □

PROBLEM 2.2.15

A を多元環，$M \in \mathsf{Mod}(A)_0$ とする．このとき次が同値であることを示せ．

i）圏 $\mathsf{Mod}(A)$ において，$M \cong M_1 \amalg M_2$（外部直和）ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

ii）M の部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ に対して，$M = M_1 \oplus M_2$（内部直和）ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii)

$M = M_1 \oplus M_2$ なる部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ が存在すれば，内部直和より，$M \cong M_1 \amalg M_2$ となる．よって $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

A 加群 M_1, M_2 が存在して $M = M_1 \amalg M_2$ となったとする．この同型を $\phi : M_1 \amalg M_2 \to M$ とおけば，$\phi(M_1)$ と $\phi(M_2)$ はともに M の部分加群で，$M = \phi(M_1) \oplus \phi(M_2)$ となる．実際，$M = \phi(M_1 \amalg M_2) = \phi(M_1) + \phi(M_2)$ で，$\phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \phi(M_1 \cap M_2) = 0$ である．

よって $\phi(M_1)=0$ または $\phi(M_2)=0$ となるが，ϕ は単射だから $M_1=0$ または $M_2=0$.

□

Problem 2.2.19

$\mathcal{C}$ を線形圏とする．圏 $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ の射が，写像の族の意味で単射であることと，圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ．また，写像の族の意味で全射であることと，圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ.

Proof. 圏 $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ における射 $\alpha : M \to N$ を任意に取る．**Problem 2.2.12** で $A=\Bbbk$ としたものを断り無く使う.

単射ならばモノ射：

射 $\beta,\gamma : L \to M$ が存在して $\alpha\circ\beta=\alpha\circ\gamma$ となったとする.

このとき各 $x\in\mathcal{C}_0$ に対して $\alpha_x\circ\beta_x=\alpha_x\circ\gamma_x$ が成り立つ．α は単射だから α_x も単射，従ってモノ射となり，$\beta_x=\gamma_x$ を得る．よって $\beta=\gamma$ となり，α はモノ射.

モノ射ならば単射：

部分空間族 $(\mathsf{Ker}(\alpha_x)\subset M(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ によって定義される M の部分加群を $\mathsf{Ker}\,\alpha$ と表す．$\mathsf{Ker}\,\alpha=0$ を言えばよい.

包含射 $\mathsf{Ker}\,\alpha\to M$ を $\sigma=(\sigma_x : \mathsf{Ker}\,\alpha_x\to M(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ とする．このとき $\alpha\circ\sigma=0=\alpha\circ 0$ であり，α はモノ射だから $\sigma=0$．よって $\mathsf{Ker}\,\alpha=0$ となり，各 α_x は単射である.

全射ならばエピ射：

射 $\beta,\gamma : N\to L$ が存在して $\beta\circ\alpha=\gamma\circ\alpha$ となったとする.

このとき各 $x\in\mathcal{C}_0$ に対して $\beta_x\circ\alpha_x=\gamma_x\circ\alpha_x$ が成り立つ．α は全射だから α_x も全射，従ってエピ射となり，$\beta_x=\gamma_x$ を得る．よって $\beta=\gamma$ となり，α はエピ射.

エピ射ならば全射：

商空間族 $(N(x)\to\mathsf{Coker}(\alpha_x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ によって定義される N の商加群を $\mathsf{Coker}\,\alpha$ と表す．$\mathsf{Coker}\,\alpha=0$ を言えばよい.

射影射 $N\to\mathsf{Coker}\,\alpha$ を $\pi=(\pi_x : N(x)\to\mathsf{Coker}\,\alpha_x)_{x\in\mathcal{C}_0}$ とする．このとき $\pi\circ\alpha=0=0\circ\alpha$ であり，α はエピ射だから $\pi=0$．よって $\mathsf{Coker}\,\alpha=0$ となり，各 α_y は全射である. □

Problem 2.2.23

$\mathcal{C}$ を線形圏とし，$M\in\mathsf{Mod}(\mathcal{C})_0$ とする．I を集合とし，M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える.

このとき，部分空間の族 $\bigcap_{i\in I}M_i := (\bigcap_{i\in I}M_i(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ と $\sum_{i\in I}M_i := (\sum_{i\in I}M_i(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ はそれぞれ M の部分加群を定めることを示せ.

Proof. 圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : x \to y$ について

$$M(f)\left(\bigcap_{i\in I} M_i(x)\right) \subset \bigcap_{i\in I} M_i(y),$$
$$M(f)\left(\sum_{i\in I} M_i(x)\right) \subset \sum_{i\in I} M_i(y)$$

がそれぞれ成り立つことを示せばよい.

交叉が部分加群：

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\bigcap_{i\in I} M_i(x)) \subset \bigcap_{i\in I} M(f)(M_i(x)) \subset \bigcap_{i\in I} M_i(y)$ が言える.

和が部分加群：

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\sum_{i\in I} M_i(x)) = \sum_{i\in I} M(f)(M_i(x)) \subset \sum_{i\in I} M_i(y)$ が言える. $\square$