圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

1	巻		1
	1.1	モノイドと圏	2
	1.2	モノイド準同型と函手	4
	1.3	自然変換	5
	1.4	圏の同型と同値	8
	1.5	多元環と線型圏	9
	1.6	多元環の準同型と線形函手	12
2	表現		12
	2.2	多元環と線形圏の加群圏	13



第1章 圏

§ 1.1 モノイドと圏

PROBLEM 1.1.2

 $(G,\mu,1)$ がモノイドならば $(G,\mu^{op},1)$ もモノイドとなることを示せ. ただし,

$$\mu^{\mathsf{op}}(x,y) := \mu(y,x) \quad (x,y \in G).$$

Proof. 結合律の公理は各 $x,y,z \in G$ に対して

$$\begin{split} \mu^{\mathrm{op}}(\mu^{\mathrm{op}}(x,y),z) &= \mu^{\mathrm{op}}(\mu(y,x),z) \\ &= \mu(z,\mu(y,x)) \\ &= \mu(\mu(z,y),x) \\ &= \mu^{\mathrm{op}}(x,\mu^{\mathrm{op}}(y,z)) \end{split}$$

と確認できる. 単位元は明らか.

PROBLEM 1.1.5

 $(G, \mu, 1, \iota)$ が群ならば $(G, \mu^{op}, 1, \iota)$ も群となることを示せ.

Proof. **PROBLEM 1.1.2** より $(G,\mu^{\operatorname{op}},1)$ はモノイドである. ι がこの反転モノイド G^{op} の逆元を与えることを言えばよく,それは任意の $x\in G$ に対して

$$\mu^{\text{op}}(x, \iota(x)) = \mu(\iota(x), x) = 1,$$

 $\mu^{\text{op}}(\iota(x), x) = \mu(x, \iota(x)) = 1$

となることから分かる.

PROBLEM 1.1.11

 $\mathcal{C}=(\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_1,\mathsf{dom},\mathsf{cod},\circ,\mathsf{id})$ が圏ならば $\mathcal{C}^\mathsf{op}=(\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_1,\mathsf{cod},\mathsf{dom},\circ^\mathsf{op},\mathsf{id})$ も圏となることを示せ. ただし, 圏 \mathcal{C} 内で合成可能な射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$f \circ^{\mathsf{op}} g := g \circ f$$
.

Proof. 結合律:圏Cの射

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

に対して

$$(f \circ^{\text{op}} g) \circ^{\text{op}} h = h \circ (g \circ f)$$
$$= (h \circ g) \circ f$$
$$= f \circ^{\text{op}} (g \circ^{\text{op}} h).$$

単位律:圏 \mathcal{C} の射 $f \in \mathcal{C}(x,y)$ に対して

$$\begin{split} \mathrm{id}_x \circ^{\mathsf{op}} f &= f \circ \mathrm{id}_x = f, \\ f \circ^{\mathsf{op}} \mathrm{id}_v &= \mathrm{id}_v \circ f = f. \end{split}$$

PROBLEM 1.1.24

小集合の圏 Set において、集合の直積が積で非交和が余積となることを示せ.

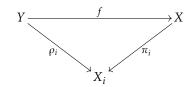
Proof. I を小集合, $(X_i)_{i \in I}$ を小集合の族とする.

直積が積:

 $X\coloneqq\prod_{i\in I}X_i$ とおく、各 $i\in I$ について $\pi_i:X\to X_i$ を標準射影とする、 小集合 Y と写像の族 $(\rho_i:Y\to X_i)_{i\in I}$ が与えられたとき,写像 $f:Y\to X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある写像 $g: Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

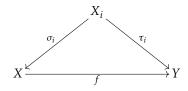
より、g(y) の第 i 成分と f(y) の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり、g(y) = f(y) が言える. よって g = f. 非交和が余積:

 $X\coloneqq \bigsqcup_{i\in I} X_i$ とおく. 各 $i\in I$ について $\sigma_i:X_i\to X$ を標準入射とする.

小集合 Y と写像の族 $(\tau_i: X_i \to Y)_{i \in I}$ が与えられたとき、写像 $f: X \to Y$ が

$$f(x) := \tau_i(x) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある写像 $g: X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より、任意の $x \in X$ に対してg(x) = f(x)となる. よってg = f.

§ 1.2 モノイド準同型と函手

PROBLEM 1.2.5

C を局所小圏とし、 $x \in C_0$ とする. このとき次を示せ.

- i) 函手 $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \to \mathsf{Set} \, \mathcal{N}$
 - · 対象: $y \mapsto \mathcal{C}(x,y)$,
 - ・射: $f \mapsto C(x,f)$, ただし射 $f \in C(y,z)$ に対して

$$C(x, f): C(x, y) \to C(x, z), \quad g \mapsto f \circ g,$$

によって定義できる.

- ii) 函手 $\mathcal{C}(-,x):\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}\,\, \mathfrak{N}^{\mathsf{s}}$
 - · 対象: $y \mapsto C(y,x)$,
 - ・射: $f \mapsto C(f,x)$, ただし射 $f \in C(y,z)$ に対して

$$C(f,x):C(z,x)\to C(y,x),\quad g\mapsto g\circ f,$$

によって定義できる.

iii) 函手 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して、函手 $F^{op}: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ が

· 対象: $y \mapsto F(y)$,

·射: $f \mapsto F(f)$

によって定義できる.

Proof. (i) $C(x, -): C \to Set$ がクイバー射で各対象 $y \in C_0$ に対して $C(x, id_y) = id_{C(x,y)}$ であることは明らか. 圏 C の射

$$y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{g} w$$

を考える. 射 $C(x,g \circ f): C(x,y) \to C(x,w)$ は $h \mapsto (g \circ f) \circ h$ で与えられる.

他方の射 $C(x,g) \circ C(x,f) : C(x,y) \to C(x,w)$ は $h \mapsto f \circ h \mapsto g \circ (f \circ h)$ で与えられる.

圏 \mathcal{C} における結合律 $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ より、この二つの射は一致する:

$$\mathcal{C}(x,g\circ f)=\mathcal{C}(x,g)\circ\mathcal{C}(x,f).$$

以上より、クイバー射 C(x, -) は函手となる.

(ii) $C(-,x) = C^{op}(x,-)$ である.

(iii) 射 $f \in \mathcal{C}^{\text{op}}(y,z)$ に対して $F^{\text{op}}(f) \in \mathcal{D}^{\text{op}}(F^{\text{op}}(y),F^{\text{op}}(z))$ となることはすぐに分かる。また、圏 \mathcal{C}^{op} の各対象 $y \in \mathcal{C}^{\text{op}}_0$ について $F^{\text{op}}(\text{id}_v) = \text{id}_{F^{\text{op}}(v)}$ も明らか、結合律は、

$$F^{\mathsf{op}}(g \circ^{\mathsf{op}} f) = F(g \circ^{\mathsf{op}} f)$$

$$= F(f \circ g)$$

$$= F(f) \circ F(g)$$

$$= F^{\mathsf{op}}(g) \circ^{\mathsf{op}} F^{\mathsf{op}}(f)$$

と確かめられる.

§ 1.3 自然変換

PROBLEM 1.3.3

 \mathcal{C} を局所小圏とし、 $f: x \to y$ を圏 \mathcal{C} の射とする. このとき次を示せ.

i) 射の族

$$C(f, -) := (C(f, z) : C(y, z) \to C(x, z))_{z \in C_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(f,-)$: $\mathcal{C}(y,-) \to \mathcal{C}(x,-)$ を定める. ただし, $\mathcal{C}(x,-)$ や $\mathcal{C}(y,-)$ は **PROBLEM 1.2.5** (i) の共変表現函手である.

ii) 射の族

$$\mathcal{C}(-,f) := (\mathcal{C}(z,f) : \mathcal{C}(z,x) \to \mathcal{C}(z,y))_{z \in \mathcal{C}_0}$$

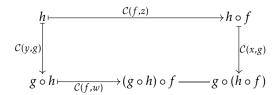
は自然変換 $\mathcal{C}(-, f)$: $\mathcal{C}(-, x) \to \mathcal{C}(-, y)$ を定める. ただし, $\mathcal{C}(-, x)$ や $\mathcal{C}(-, y)$ は **PROBLEM 1.2.5** (ii) の反変表現函手である.

Proof. (i) 圏 \mathcal{C} の任意の射 $g: z \to w$ を取る. このとき図式

$$\begin{array}{c|c}
C(y,z) & \xrightarrow{C(f,z)} & C(x,z) \\
C(y,g) & & \downarrow \\
C(y,w) & \xrightarrow{C(f,w)} & C(x,w)
\end{array}$$

が可換であることを示せばよい.

任意の射 $h \in C(y,z)$ に対して



となるから、 $C(f,-): C(y,-) \rightarrow C(x,-)$ は自然変換である.

(ii)
$$C(-, f) = C^{op}(f, -) : C^{op}(x, -) \to C^{op}(y, -)$$
 resp.

PROBLEM 1.3.4

 $\mathcal C$ を圏、I を集合とし $(x_i)_{i\in I}$ を圏 $\mathcal C$ の対象の族とする.このとき次の自然同型が得られることを示せ:

$$\begin{split} &(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}\coloneqq ((\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0}:\mathcal{C}\left(-,\prod_{i\in I}x_i\right)\overset{\sim}{\to}\prod_{i\in I}\mathcal{C}(-,x_i),\\ &(\mathcal{C}(\sigma_i,-))_{i\in I}\coloneqq ((\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0}:\mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I}x_i,-\right)\overset{\sim}{\to}\prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,-). \end{split}$$

ただし,各 $\pi_j:\prod_{i\in I}x_i\to x_j$ と $\sigma_j:x_j\to\coprod_{i\in I}$ はそれぞれ積の射影族と余積の入射族であり,また各 対象 $z\in\mathcal{C}_0$ に対して

$$(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}: \mathcal{C}\left(z,\prod_{i\in I}x_i\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(z,x_i), \qquad f\mapsto (\pi_i\circ f)_{i\in I},$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I}: \mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I}x_i,z\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,z), \qquad f\mapsto (f\circ\sigma_i)_{i\in I}$$

と定義する.

Proof. 積が直積に写ること:

各 $(C(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている(注意 1.1.26). よって, $(C(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい.

圏 C の任意の射 $f \in C(y,z)$ に対して、図式

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{C}\left(z, \prod_{i \in I} x_i\right) \xrightarrow{(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(z, x_i) \\ \\ \mathcal{C}(f, \prod_{i \in I} x_i) & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(f, x_i) \\ \\ \mathcal{C}\left(y, \prod_{i \in I} x_i\right) \xrightarrow{(\mathcal{C}(y, \pi_i))_{i \in I}} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(y, x_i) \end{array}$$

を考えると、各射 $g \in C(z, \prod_{i \in I} x_i)$ に対して

$$\begin{array}{c}
g \longmapsto (\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I} \\
\mathcal{C}(f,\prod_{i\in I}x_i) \downarrow \\
g \circ f \longmapsto (\mathcal{C}(y,\pi_i))_{i\in I} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I} \\
\downarrow \\
(\pi_i \circ (g \circ f))_{i\in I} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
((\pi_i \circ g) \circ f)_{i\in I} \\
\downarrow \\
((\pi_i \circ g) \circ f)_{i\in I}
\end{array}$$

となるから、上の図式は可換である。従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型

余積が直積に写ること:

各 $(C(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている(注意 1.1.26)。よって, $(C(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい.

圏 C の任意の射 $f \in C(y,z)$ に対して、図式

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{C}\left(\coprod_{i \in I} x_i, y\right) \xrightarrow{\left(\mathcal{C}(\sigma_i, y)\right)_{i \in I}} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, y) \\ \\ \mathcal{C}\left(\coprod_{i \in I} x_i, f\right) & & & & & \\ \mathcal{C}\left(\coprod_{i \in I} x_i, z\right) \xrightarrow{\left(\mathcal{C}(\sigma_i, z)\right)_{i \in I}} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, z) \end{array}$$

を考えると、各射 $g \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_i, y)$ に対して

$$\begin{array}{c}
g \longmapsto (\mathcal{C}(\sigma_{i}, y))_{i \in I} \longrightarrow (g \circ \sigma_{i})_{i \in I} \\
\mathcal{C}(\coprod_{i \in I} x_{i}, f) \downarrow & & & \downarrow \\
f \circ g \longmapsto_{(\mathcal{C}(\sigma_{i}, z))_{i \in I}} \longrightarrow ((f \circ g) \circ \sigma_{i})_{i \in I} \longrightarrow (f \circ (g \circ \sigma_{i}))_{i \in I}
\end{array}$$

となるから、上の図式は可換である. 従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型.

§ 1.4 圏の同型と同値

PROBLEM 1.4.5

 $F = (F_0, F_1): \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を圏の間の函手とするとき、次は同値であることを示せ:

- i) 函手 F は同型;
- ii) 写像 $F_0: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ はともに全単射.

Proof. (i) \Longrightarrow (ii) 函手 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が同型だから,函手 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ および $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ が成り立つ.このとき

$$G_0 \circ F_0 = (G \circ F)_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}, \qquad F_0 \circ G_0 = (F \circ G)_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_0},$$

$$G_1 \circ F_1 = (G \circ F)_1 = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}, \qquad F_1 \circ G_1 = (F \circ G)_1 = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_1}$$

であるから、写像 $F_0: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ はともに全単射.

(ii) \Longrightarrow (i) 写像 $F_0: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ がともに全単射ならば、写像 $G_0: \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}_0$ と $G_1: \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}_1$ が存在して

$$G_0 \circ F_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0},$$
 $F_0 \circ G_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_0},$ $G_1 \circ F_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1},$ $F_1 \circ G_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_1},$

が成り立つ.

このとき $G = (G_0, G_1): \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は函手である. 実際, 各恒等射 $\mathrm{id}_x \in \mathcal{D}(x,x)$ に対して

$$\operatorname{id}_{G_0(x)} = (G_1 \circ F_1) \left(\operatorname{id}_{G_0(x)}\right) = G_1 \left(\operatorname{id}_{F_0(G_0(x)}\right) = G_1 \left(\operatorname{id}_x\right)$$

となり、また圏Dの射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$F_1 \circ G_1(g \circ f) = g \circ f = (F_1 \circ G_1(g)) \circ (F_1 \circ G_1(f))$$

= $F_1 (G_1(g) \circ G_1(f))$

より

$$G_1(g \circ f) = G_1(g) \circ G_1(f)$$

を得る.

この函手 G が F の逆となっていることは、写像 G_0 と G_1 の定義から分かる.

§1.5 多元環と線型圏

■ な体とする. (可換環でもよい.)

PROBLEM 1.5.8

lk 上ベクトル空間の圏 Mod(lk) において、ベクトル空間の直積が積で直和が余積となることを示せ.

Proof. I を小集合, $(X_i)_{i \in I}$ をベクトル空間の族とする.

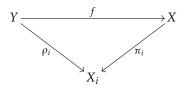
直積が積:

 $X \coloneqq \prod_{i \in I} X_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\pi_i : X \to X_i$ を標準射影とする.

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\rho_i: Y \to X_i)_{i \in I}$ が与えられたとき、線形写像 $f: Y \to X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある線形写像 $g: Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より、g(y) の第 i 成分と f(y) の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり、g(y) = f(y) が言える. よって g = f.

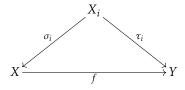
直和が余積:

 $X \coloneqq \coprod_{i \in I} X_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\sigma_i : X_i \to X$ を標準入射とする.

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\tau_i: X_i \to Y)_{i \in I}$ が与えられたとき、線形写像 $f: X \to Y$ が

$$f(x) := \sum_{i \in I} \tau_i(x_i) \quad (x \in X_i)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある線形写像 $g: X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば,等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より、任意の $x \in X$ に対して $g(x) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(x_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(x_i)) = f(x)$ となる. よって g = f.

PROBLEM 1.5.12

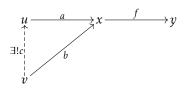
C を \mathbb{k} 線形圏, $f: x \to y$ をその射とする. このとき次を示せ.

- i) $a: u \to x \ b: v \to x$ がともに射 f の核ならば, $b = a \circ c$ なる射 $c: v \to u$ がただ一つ存在する.そこで f の核を $\ker f: \ker f \to x$ と書くとき, $\ker f$ はモノ射である.
- ii) $a: y \to u$ と $b: y \to v$ がともに射 f の余核ならば, $b = c \circ a$ なる射 $c: u \to v$ がただ一つ存在する.そこで f の余核を coker $f: Coker f \to x$ と書くとき,coker f はエピ射である.

Proof. (i)

核の一意性:

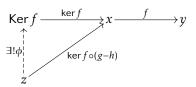
次の図式を考える:



核 b の定義から $f \circ b = 0$ となる. よって核 a の普遍性より,ただ一つの射 $c: v \to u$ が存在して $b = a \circ c$ とできる.

核がモノ射であること:

圏 \mathcal{C} の射 $g,h:z \to \operatorname{Ker} f$ が $\ker f \circ g = \ker f \circ h$ を満たすとする.このとき射の合成 $\circ: \mathcal{C}(\operatorname{Ker} f,x) \times \mathcal{C}(z,\operatorname{Ker} f) \to \mathcal{C}(z,x)$ の双線形性より, $\ker f \circ (g-h) = 0$ となる.

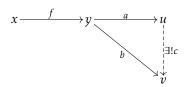


すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\ker f \circ \phi = \ker f \circ (g - h)$ を満たすから,核の普遍性から g - h = 0 が従う.よって g = h.

(ii)

余核の一意性:

次の図式を考える:



余核 b の定義から $b \circ f = 0$ となる. よって余核 a の普遍性より、ただ一つの射 $c: u \to v$ が存在して $b = c \circ a$ とできる.

余核がエピ射であること:

圏 \mathcal{C} の射 g,h: Coker $f \to z$ が $g \circ \operatorname{coker} f = h \circ \operatorname{coker} f$ を満たすとする. このとき射の合成 \circ : $\mathcal{C}(\operatorname{Coker} f,z) \times \mathcal{C}(y,\operatorname{Coker} f) \to \mathcal{C}(y,z)$ の双線形性より, $(g-h) \circ \operatorname{coker} f = 0$ となる.

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f$$

$$(g-h) \circ \operatorname{coker} f$$

$$\exists ! \phi$$

すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\phi \circ \operatorname{coker} f = (g - h) \circ \operatorname{coker} f$ を満たすから,余核の普遍性から g - h = 0 が従う.よって g = h.

PROBLEM 1.5.18

 \mathbb{k} 線形圏 $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(\mathbb{k})$ において,

$$x = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{k}, \quad x_i = \mathbb{k} \ (i \in \mathbb{N})$$

とおき、標準直和 $(\overline{\sigma_j}:\mathcal{C}(x,x_j) \to \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i))_{j\in\mathbb{N}}$ の普遍性

を考える. ただし, $j \in \mathbb{N}$ で, $\sigma_j : x_j \to \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i$ は標準入射である.

このとき、線形写像 $\phi: \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i) \to \mathcal{C}(x,\coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i)$ が同型でないことを示せ.

Proof. 線形写像 ϕ は具体的に,

$$\phi\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}f_i\right):x\to\coprod_{i\in\mathbb{N}}x_i,\quad y\mapsto\sum_{i\in I}f_i(y)\quad (f_i\in\mathcal{C}(x,x_i))$$

で与えられる.

線形写像 $\phi: \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \to \mathcal{C}(x, \coprod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ が全射でないことを示す.

恒等写像 $\mathrm{id}_x \in \mathcal{C}(x,\coprod_{i\in\mathbb{N}}x_i)$ を考え、ある線形写像 $f=\sum_{i\in\mathbb{N}}f_i\in\coprod_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{C}(x,x_i)$ によって $\mathrm{id}_x=\phi(f)$ が成り立ったとする $(f_i\in\mathcal{C}(x,x_i))$. このとき任意の $y_i\in x_i$ $(i\in\mathbb{N})$ について

$$y_i = id_x(\sigma_i(y_i)) = \phi(f)(\sigma_i(y_i)) = f_i(\sigma_i(y_i))$$

となるから、特に $f_i \neq 0$. これは $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$ に矛盾する.よって ϕ は全射でない.

Another proof. 線形写像 ϕ が単射でないことを示す.

線形写像 $f_0 \in \mathcal{C}(x,x_0)$ を

$$f_0\left(\sigma_i(1_i)\right) \coloneqq \begin{cases} 1_0 & (i=1), \\ 0 & (i\neq 1) \end{cases} \quad (i\in\mathbb{N})$$

となるように定義する. ただし, $1_i \in x_i$ は体 x_i の単位元.

このとき

$$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)): \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mapsto f_0(\sigma_0(y_0)) = 0 \quad (y_i \in x_i, i \in \mathbb{N})$$

となるから、 $\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) = 0$ である.

一方定義から $f_0 \neq 0$,従って $\overline{\sigma_0}(f_0) \neq 0$.よって ϕ は単射でない.

§ 1.6 多元環の準同型と線形函手

■ な体とする. (可換環でもよい.)

PROBLEM 1.6.4

C を \Bbbk 線形局所小圏とし, $x \in C_0$ とする.このとき,**PROBLEM 1.2.5** で定義される表現函手は線形 函手

$$C(x, -): C \to Mod(\mathbb{k}),$$

 $C(-, x): C^{op} \to Mod(\mathbb{k})$

となることを示せ.

Proof. 共変表現函手:

まず C(x, -) が函手 $C \to Mod(\mathbb{k})$ となることを示す.

各対象 $y \in C_0$ に対して、線形圏の定義より、C(x,y) はベクトル空間である。また各射 $f \in C(y,z)$ に対して、射の合成 $o: C(y,z) \times C(x,y) \to C(x,z)$ が双線形であることから

$$C(x, f) : C(x, y) \to C(x, z), \quad g \mapsto f \circ g$$

は線形写像である. よって C(x, -) は函手 $C \to Mod(\mathbb{k})$ となる.

次にこれが線形函手であることを示す.

射 $f,g \in C(y,z)$ とスカラー $\lambda \in \mathbb{R}$ を任意に取る. 再び射の合成 $\circ : C(y,z) \times C(x,y) \to C(x,z)$ が双線形であることから、

$$C(x, f + g) : h \mapsto (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$

$$C(x, \lambda f) : h \mapsto (\lambda f) \circ h = \lambda (f \circ h)$$

であり、 $\mathcal{C}(x,f+g)=\mathcal{C}(x,f)+\mathcal{C}(x,g)$ および $\mathcal{C}(x,\lambda f)=\lambda\mathcal{C}(x,f)$ が分かる. よって $\mathcal{C}(x,-)$ は線形函手.

反変表現函手:

$$C(-,x) = C^{op}(x,-)$$
 である.

第2章表現

§ 2.2 多元環と線形圏の加群圏

 \mathbb{R} を可換体(可換環でもよい)とする. また, 左加群の圏を $\operatorname{\mathsf{Mod}}(X)$, 右加群の圏を $\operatorname{\mathsf{Mod}}(X^{\operatorname{\mathsf{op}}})$ で表す.

PROBLEM 2.2.6

A を多元環,M を左 A 加群とする. I を集合とし,M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える. このとき,部分空間 $\bigcap_{i\in I} M_i$ と $\sum_{i\in I} M_i$ はともに M の部分加群となる.

Proof. 交叉が部分加群:

元 $m \in \bigcap_{i \in I} M_i$ と $a \in A$ を任意に取る.このときすべての $i \in I$ について $m \in M_i$ で, M_i は M の部分加群 だから $am \in M_i$.よって $am \in \bigcap_{i \in I} M_i$ が分かる.

和が部分加群:

 $\sum_{i \in I} M_i$ の元

$$\sum_{i \in I} m_i \quad (m_i \in M_i, i \in I)$$

を任意に取ると、有限個の $i \in I$ を除いて $m_i = 0$ だから、 $am_i \neq 0$ なる $i \in I$ も有限個である.ただし $a \in A$. よって和 $\sum_{i \in I} am_i \in M$ が定義でき、各 M_i が部分加群だから $am_i \in M_i$ であり、 $\sum_{i \in I} am_i \in \sum_{i \in I} M_i$ となる.

PROBLEM 2.2.8

A を多元環とし,M を左 A 加群とする.部分集合 $S \subset M$ について,S を含む最小の部分加群を $\langle S \rangle$ と書き,S で生成された M の部分加群と呼ぶ.このとき次を示せ.

- i) 部分集合 $S \subset M$ に対して、 $\langle S \rangle = \sum_{m \in S} Am$.
- ii) 次は同値:
 - a) M は A 上有限生成である;
 - b) 有限個の M の元 $m_1, ..., m_n \in M$ が存在して $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける;
 - c) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射準同型 $A^{\coprod n} \to M$ が存在する.

iii) A が \mathbb{k} 上有限次元(有限生成)ならば,M が A 上有限生成であることと, \mathbb{k} 上有限次元であることは同値である.

Proof. (i)

まず、任意の $m \in S$ に対して $m = 1m \in Am$ であるから、 $\langle S \rangle \subset \sum_{m \in S} Am$ が成り立つ.

逆に、S を含む任意の部分加群 $L \subset M$ を取ると、各 $m \in S$ に対して $m \in L$ だから $Am \subset L$. よって $\sum_{m \in S} Am \subset L$ となり、 $\sum_{m \in S} Am \subset \langle S \rangle$ が従う.

(ii)

- $(a) \iff (b)$
- (i) より明らか.
- $(b) \Longrightarrow (c)$

有限個のMの元 $m_1,...,m_n \in M$ によって $M = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i$ と書けたとする。各 $1 \leq i \leq n$ に対して $A_i \coloneqq A$ とおき, $A^{\sqcup n} = \prod_{1 \leq i \leq n} A_i$ とする。

このとき、全射準同型 $\phi: A^{\coprod n} \to M$ が

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i \mapsto \sum_{1 \le i \le n} a_i m_i \quad (a_i \in A_i, i \in I)$$

によって定義できる.

 $(c) \Longrightarrow (b)$

ある自然数 $n\in\mathbb{N}$ と全射準同型 $\phi:A^{\coprod n}\to M$ が存在したとする. 各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $A_i\coloneqq A$ とおき, $A^{\coprod n}=\coprod_{1\leqslant i\leqslant n}A_i$ とする.

このとき、各 $1 \le i \le n$ に対して $m_i := \phi(1_i)$ とおけば

$$M = \phi\left(A^{\sqcup n}\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \phi\left(A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} Am_i.$$

ただし、 $1_i \in A_i$ は A_i の単位元を表す.

(iii) *M* を **k** 上有限生成だとすると, 多元環 **k** について (ii) を用いて,

$$M = \mathbb{k} m_1 + \cdots + \mathbb{k} m_n$$

なる元 $m_1, ..., m_n \in M$ が存在し, $M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n \subset Am_1 + \cdots + Am_n \subset M$ より $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ を得る.よって M は A 上有限生成.

逆に M が A 上有限生成ならば有限個の元 $m_1, ..., m_n \in M$ を用いて $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける.同様に A が \mathbb{k} 上有限生成だから,有限個の元 $a_1, ..., a_\ell \in A$ によって $A = \mathbb{k} a_1 + \cdots + \mathbb{k} a_\ell$ と書ける.

すると

$$M = \sum_{1 \le i \le n} Am_i = \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le \ell} \mathbb{k} a_j m_i$$

となるから, *M* は k 上有限生成である.

PROBLEM 2.2.12

A を多元環とする。圏 $\mathsf{Mod}(A)$ の射が,写像の意味で単射であることと,圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ。また,写像の意味で全射であることと,圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ。

Proof. 圏 Mod(A) における射 $f: M \to N$ を任意に取る.

単射ならばモノ射:

射 f を単射とし、ある射 $g,h:L \to M$ について $f \circ g = f \circ h$ が成り立ったとする.

このとき任意の $m \in L$ に対して f(g(m)) = f(h(m)) であり、f が単射だから g(m) = h(m)). よって g = h となり、f はモノ射.

モノ射ならば単射:

M の部分空間 $\operatorname{Ker} f \subset M$ は部分加群であり、二つの射

$$\ker f: \operatorname{Ker} f \to M, \qquad m \mapsto m,$$

$$0: \operatorname{Ker} f \to M, \qquad m \mapsto 0$$

が存在する. 今 $f \circ \ker f = 0 = f \circ 0$ であり、f がモノ射だから $\ker f = 0$ を得る. よって $\ker f = 0$ となり、f は単射.

全射ならばエピ射:

射 f を全射とし、ある射 $g,h: N \to L$ について $g \circ f = h \circ f$ が成り立ったとする.

このとき f が全射だから任意の $n \in N$ に対して n = f(m) なる $m \in M$ が存在し, g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n). よって g = h となり, f はエピ射.

エピ射ならば全射:

N の部分空間 $\operatorname{Im} f \subset N$ は部分加群であり、商加群 $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$ を考えると、二つの射

が存在する. 今 $\operatorname{coker} f \circ f = 0 = 0 \circ f$ であり、f がエピ射だから $\operatorname{coker} f = 0$ を得る. よって $N = \operatorname{Im} f$ となり、f は全射.

PROBLEM 2.2.13

A を多元環とする. 圏 $\operatorname{Mod}(A)$ において、直積と直和がそれぞれ積と余積になることを示せ.

Proof. I を小集合, $(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とする.

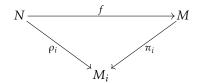
直積が積:

 $M \coloneqq \prod_{i \in I} M_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\pi_i : M \to M_i$ を標準射影とする.

A 加群 N と準同型の族 $(\rho_i: N \to M_i)_{i \in I}$ が与えられたとき、準同型 $f: N \to M$ が

$$f(n) := (\rho_i(n))_{i \in I} \quad (n \in N)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある準同型 $g: N \to M$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$\pi_i(g(n)) = \rho_i(n) = \pi_i(f(n)) \quad (n \in N, i \in I)$$

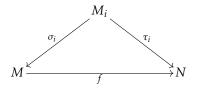
より、g(n) の第 i 成分と f(n) の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり、g(n) = f(n) が言える. よって g = f. 直和が余積:

 $M := \prod_{i \in I} M_i$ とおく. 各 $i \in I$ について $\sigma_i : M_i \to M$ を標準入射とする.

A 加群 N と準同型の族 $(\tau_i:M_i\to N)_{i\in I}$ が与えられたとき、準同型 $f:M\to N$ が

$$f(m) := \sum_{i \in I} \tau_i(m_i) \quad (m \in M_i)$$

によって定まる. このとき図式



は各 $i \in I$ について可換になる.

逆にある準同型 $g: M \to N$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば、等式

$$g(\sigma_i(m)) = \tau_i(m) = f(\sigma_i(m)) \quad (m \in M_i, i \in I)$$

より、任意の $m \in M$ に対して $g(m) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(m_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(m_i)) = f(m)$ となる。よってg = f.

PROBLEM 2.2.15

A を多元環, $M \in Mod(A)_0$ とする. このとき次が同値であることを示せ.

- i) 圏 Mod(A) において、 $M \cong M_1 \coprod M_2$ (外部直和) ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.
- ii) M の部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ に対して, $M = M_1 \oplus M_2$ (内部直和) ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

Proof. (i) \Longrightarrow (ii)

 $M=M_1\oplus M_2$ なる部分加群 $M_1,M_2\subset M$ が存在すれば、内部直和の定義より、 $M\cong M_1\sqcup M_2$ となる. よって $M_1=0$ または $M_2=0$.

 $(ii) \Longrightarrow (i)$

A 加群 M_1, M_2 が存在して $M \cong M_1 \coprod M_2$ となったとする.この同型を $\phi: M_1 \coprod M_2 \to M$ とおけば, $\phi(M_1)$ と $\phi(M_2)$ はともに M の部分加群で, $M = \phi(M_1) \oplus \phi(M_2)$ となる.実際, $M = \phi(M_1 \coprod M_2) = \phi(M_1) + \phi(M_2)$ で, $\phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \phi(M_1 \cap M_2) = 0$ である.

よって $\phi(M_1) = 0$ または $\phi(M_2) = 0$ となるが、 ϕ は単射だから $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

PROBLEM 2.2.19

 \mathcal{C} を線形圏とする。圏 $\operatorname{Mod}(\mathcal{C})$ の射が,写像の族の意味で単射であることと,圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ。また,写像の族の意味で全射であることと,圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ。

Proof. 圏 Mod(C) における射 $\alpha: M \to N$ を任意に取る. **PROBLEM 2.2.12** で $A = \mathbb{R}$ としたものを断り無く使う.

単射ならばモノ射:

射 β , γ : $L \rightarrow M$ が存在して $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ となったとする.

このとき各 $x \in C_0$ に対して $\alpha_x \circ \beta_x = \alpha_x \circ \gamma_x$ が成り立つ. α は単射だから α_x も単射,従ってモノ射となり, $\beta_x = \gamma_x$ を得る. よって $\beta = \gamma$ となり, α はモノ射.

モノ射ならば単射:

部分空間族 $(\operatorname{Ker}(\alpha_x) \subset M(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ によって定義される M の部分加群を $\operatorname{Ker}\alpha$ と表す. $\operatorname{Ker}\alpha = 0$ を言えばよい.

包含射 $\operatorname{Ker} \alpha \to M$ を $\operatorname{ker} \alpha = (\operatorname{ker} \alpha_x : \operatorname{Ker} \alpha_x \to M(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ とおく.このとき $\alpha \circ \operatorname{ker} \alpha = 0 = \alpha \circ 0$ であり, α はモノ射だから $\operatorname{ker} \alpha = 0$.よって $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ となり,各 α_x は単射である.

全射ならばエピ射:

射 β , γ : $N \to L$ が存在して $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$ となったとする.

このとき各 $x \in C_0$ に対して $\beta_x \circ \alpha_x = \gamma_x \circ \alpha_x$ が成り立つ. α は全射だから α_x も全射, 従ってエピ射となり, $\beta_x = \gamma_x$ を得る. よって $\beta = \gamma$ となり, α はエピ射.

エピ射ならば全射:

商空間族 $(N(x) \to \mathsf{Coker}(\alpha_x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ によって定義される N の商加群を $\mathsf{Coker}\,\alpha$ と表す. $\mathsf{Coker}\,\alpha = 0$ を言えばよい

射影射 $N \to \operatorname{Coker} \alpha$ を $\operatorname{coker} \alpha = (\operatorname{coker} \alpha_x : N(x) \to \operatorname{Coker} \alpha_x)_{x \in \mathcal{C}_0}$ とおく. このとき $(\operatorname{coker} \alpha) \circ \alpha = 0 = 0 \circ \alpha$ であり, α はエピ射だから $\operatorname{coker} \alpha = 0$. よって $\operatorname{Coker} \alpha = 0$ となり,各 α_v は全射である. \square

PROBLEM 2.2.23

C を線形圏とし, $M \in \operatorname{Mod}(\mathcal{C})_0$ とする.I を集合とし,M の部分加群族 $(M_i)_{i \in I}$ を考える. このとき,部分空間の族 $\bigcap_{i \in I} M_i \coloneqq (\bigcap_{i \in I} M_i(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ と $\sum_{i \in I} M_i \coloneqq (\sum_{i \in I} M_i(x))_{x \in \mathcal{C}_0}$ はそれぞれ M の部分加群を定めることを示せ. *Proof.* 圏 \mathcal{C} の任意の射 $f: x \rightarrow y$ について

$$M(f)\left(\bigcap_{i\in I}M_i(x)\right)\subset\bigcap_{i\in I}M_i(y),$$
 $M(f)\left(\sum_{i\in I}M_i(x)\right)\subset\sum_{i\in I}M_i(y)$

がそれぞれ成り立つことを示せばよい.

交叉が部分加群:

任意の $i \in I$ に対して、 M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\bigcap_{i \in I} M_i(x)) \subset \bigcap_{i \in I} M(f)(M_i(x)) \subset \bigcap_{i \in I} M_i(y)$ が言える.

和が部分加群:

任意の $i \in I$ に対して、 M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\sum_{i \in I} M_i(x)) = \sum_{i \in I} M(f)(M_i(x)) \subset \sum_{i \in I} M_i(y)$ が言える.