

令和2年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題I-1の解答には裏面を用いててもよい.
- (3) 問題I-2は独立した2つの小問I-2A, I-2Bから, 問題I-3は独立した4つ的小問I-3A, I-3B, I-3C, I-3Dからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである.

I-1 (電磁気学) (100 点)

点電荷の運動により生じる電磁波の放射について考えよう。点電荷の電荷量を q , 時刻 t での点電荷の位置ベクトルを \vec{r} , 速度を \vec{v} , 加速度を \vec{a} とする。光速 c と真空の誘電率 ε_0 を用いて、観測点（位置ベクトル \vec{R} ）における時刻 t' での電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} は以下の表式で与えられる。

$$\vec{E} = \frac{q|\vec{R} - \vec{r}|}{4\pi\varepsilon_0 s^3} \left(1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\right) \left(\vec{\kappa} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{q|\vec{R} - \vec{r}|^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s^3} \vec{\kappa} \times \left[\left(\vec{\kappa} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{a}\right], \quad (\text{A})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}}{c}. \quad (\text{B})$$

ここで、 $t' = t + \frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c}$, $\vec{\kappa} = \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}$, $s = |\vec{R} - \vec{r}|(1 - \vec{\kappa} \cdot \frac{\vec{v}}{c})$ である。点電荷から十分遠方の観測点に対して、以下の小問 (1)-(3) に答えよ。なお、解答は SI 単位系で述べよ。

- (1) ポイントティングベクトルの主要項を求めよ。 \vec{E} および \vec{B} を用いない式とすること。なお、必要ならば、ベクトル \vec{A} , \vec{C} , \vec{D} に対して $\vec{A} \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{D})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{D}$ の関係式を用いよ。
- (2) $\vec{\kappa}$ と \vec{a} のなす角を θ とおき、速度の大きさが光速に比べて十分に小さい場合に点電荷から単位時間あたりに放出されるエネルギーの角度分布を求め、図示せよ。
- (3) 単位時間あたりに全方位に放出されるエネルギーは、

$$W = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (\text{C})$$

で表せることを示せ。

次に、質量 m , 電荷量 q の点電荷が一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ のもとにあるとする。ローレンツ力 $\vec{F}(t)$ のもとで運動しているこの点電荷は、電磁波を放射しており、それに伴う反作用として減衰力を受けている。点電荷の運動方程式は正の定数 β を用いて

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) + m\beta \frac{d^3 \vec{r}(t)}{dt^3} \quad (\text{D})$$

のように書けるとして、小問 (4)-(8) に答えよ。なお、解答は SI 単位系で述べよ。

- (4) 点電荷は xy 面内のみで運動するものとし、その座標を $(x, y, 0)$ とおく。複素変数 $V(t) = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$ に対する微分方程式を書き下せ。ここで、 i は虚数単位である。
- (5) $|qB\beta/m| \ll 1$ として小問 (4) の微分方程式を解くことにより、点電荷の運動エネルギーの時間変化率を求めよ。

- (6) この点電荷の軌跡がほぼ円軌道となる程度に減衰力が小さいとする。このとき、小問(3)の式(C)で与えられる W を V で表せ。
- (7) 小問(5), (6)の結果を比較することにより、式(D)の右辺第二項の定数 β を決定せよ。また、点電荷は電子（質量 m_e , 電荷量 e ）であるとして、 β の大きさを有効数字1桁で求めよ。ただし、 $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$, $\hbar c = 197 \text{ MeVfm}$, 微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$, 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ のうち必要なものを用いてよい。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。
- (8) 小問(7)の条件を満たし、およその円運動の周期が 10 GHz の場合に、 $V(t)$ の減衰時間を求めよ。

I-2A (統計力学) (50 点)

固体結晶中の3次元格子振動をモデル化し、比熱の温度依存性を求めるこことを考える。結晶を構成する原子の振動は互いに独立な調和振動子として扱えると仮定する。原子1個の質量を m 、個数を N 、調和振動子の角振動数を ω として以下の小間に答えよ。

- (1) 古典的に考える。 i 番目の振動子について、平衡位置のまわりの変位を \vec{r}_i 、運動量を \vec{p}_i とする。この系に対するハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} |\vec{r}_i|^2 \right)$$

で与えられる場合に、カノニカル分布を用いて比熱を計算せよ。必要であればガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いてよい。

- (2) 1自由度の調和振動子の固有エネルギーが

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と量子的に与えられる場合に、カノニカル分布を用いて比熱を計算せよ。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものとする。

- (3) 小問(2)の場合に、十分高温と十分低温での比熱の温度依存性の特徴を述べよ。

I-2B (量子力学) (50 点)

質量 m の粒子が 1 次元空間でエネルギー $E(> 0)$ を持つて高さ $V_0(> 0)$ のポテンシャル障壁に入射する場合を考える。ポテンシャル障壁は $0 \leq x \leq a$ にあって、

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

のように与えられているとし、粒子は x の負の領域から正の方向へ入射するとしよう。粒子の波動関数 $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar}\phi(x)$ がシュレディンガーハウス方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

に従うとして、以下の小間に答えよ。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものとする。

- (1) $x = 0$ および $x = a$ ではポテンシャル $V(x)$ は不連続に変化する。これらの点で関数 $\phi(x)$ の空間一階微分が連続であることを示せ。
- (2) 入射エネルギー E が障壁の高さ V_0 より小さい場合を考える。このとき粒子はある一定の確率で障壁を通過し、 $x > a$ の領域に到達する。定数 k と β をそれぞれ

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

として、透過率を a , k , β を用いて表せ。

- (3) 透過率が 0 に限りなく近づくのは、ポテンシャル障壁の厚さ a がどのような条件を満たす場合かを答えよ。

I-3A (解析力学) (25 点)

2次元平面内で質量 m の質点が中心力ポテンシャル V の中を運動している。

- (1) 質点の運動を記述するラグランジアン L を極座標表示 (r, θ) で表せ。
- (2) 小問 (1) の L から質点の運動方程式を求めよ。またその式が示す運動の特徴を簡潔に述べよ。

I-3B (電磁気学) (25 点)

真空中に半径 a の球面を置く。球の中も真空である。この球面に総量 Q の電荷を一様に帯電させ、球面の中心 O を通る軸のまわりに角速度 ω で回転させる。ただし、回転により電荷分布は変化しないものとする。なお、真空の透磁率を μ_0 とし、解答は SI 単位系を用いよ。

- (1) 図 1 のように、回転軸からの角度が θ から $\theta + d\theta$ までの範囲にある微小円環(斜線で示した部分)の電荷が回転することで、中心 O に生じる磁束密度 $d\vec{B}$ を求めよ。
- (2) 小問 (1) の結果から、球面が中心 O につくる磁束密度の大きさを求めよ。

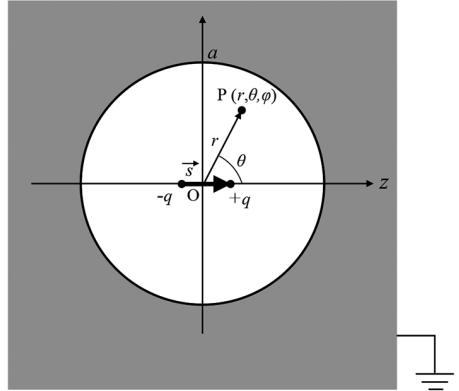


図 1

I-3C (物理数学) (25 点)

実数 $x(t)$ に対する 2 階常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

を考える。ただし、 $\beta > 0$, $\omega_0 > 0$, $\beta \neq \omega_0$ とする。

(1) 一般解を求めよ。

(2) $x(0) = 0$ として解を求め、 $t > 0$ に対する $x(t)$ の挙動の特徴を簡潔に述べよ。

I-3D (誤差統計) (25 点)

- (1) 測定値 u, v から、 $x = au - bv$ (a, b は定数) によって x を求める。測定値 u, v の分散が σ_u^2, σ_v^2 である場合に x の分散を記述せよ。
- (2) ^{137}Cs 線源から放射される 662 keV ガンマ線を計測した。計数率が少ないため宇宙線や環境放射能によるバックグラウンドを差し引く必要がある。計測器の前に線源を置いて 10 分間測定するとガンマ線は 4900 個であった。線源を取り除いた後、20 分間の計測ではガンマ線は 400 個計測された。この線源から放射されるガンマ線の毎分の計測数とその誤差を求めよ。

令和2年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題II-1, II-2の解答には裏面を用いててもよい.
- (3) 問題II-3は独立した2つの小問II-3A, II-3Bからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて9ページまである.

II-1 (力学) (100 点)

質量 M , 半径 R のビリヤード球 A の運動について考察する。球 A は剛体で内部は均質であるものとし, 重力加速度を g , 球と床との間の動摩擦係数を μ' (球の速さによらない定数) として以下の間に答えよ。ただし, 空気抵抗および転がり摩擦を考慮する必要はない。

- (1) 球 A の重心を通る軸に関する慣性モーメントは $\frac{2}{5}MR^2$ となることを示せ。
- (2) 球 A の側面を玉突き棒で床と平行に高さ R で突いたところ, 球 A は初速度 v_0 で無回転で動き始めた(図 1, 左向きを正とする)。その後球 A は床との摩擦により回転を速めながら並進速度を減速させ, 最終的にはすべりなく等速で転がる状態となる。最終速度 v_1 および突いた地点からすべりなく転がり始めるまでの移動距離 x_1 を求めよ。

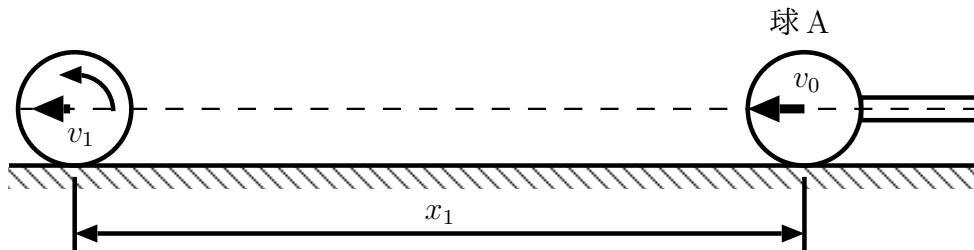


図 1

球 A が角速度 ω_1 ですべらずに転がりながら, 図 2 左(横から見た図)のような断面形状の高さ h ($< 2R$) の段差に頂点 P でぶつかるとき, 以下の間に答えよ。ただし, 球 A は図 2 右(上から見た図)のように段差の縁に対して正面からぶつかるものとする。また, ぶつかった瞬間に頂点 P ですべりは発生せず, 段差は頂点 P 以外では球 A とは接触しない断面形状を持つものとし, 段差の形状変形も考慮する必要はない。

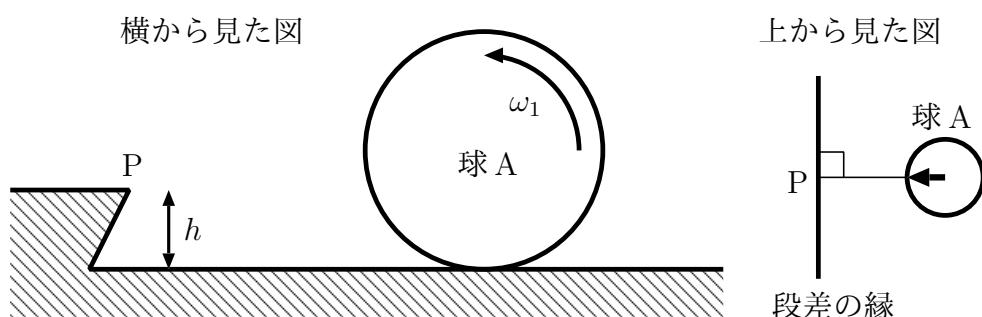


図 2

- (3) ぶつかる直前の球 A の頂点 P に対する全角運動量(球 A の重心まわりの回転による角運動量と頂点 P に対する球 A の重心が持つ角運動量の和)を求めよ。

- (4) ぶつかった直後の球 A の頂点 P まわりの角速度 ω を考えることにより、球 A への床からの垂直抗力が衝突の瞬間に変化しない段差の高さ h を決定せよ。

球 A と全く同じ形状・質量・性質を持つ球 B が、球 A より L だけ離れた場所で静止している状況を考える。小問(2)と同じ突き方で球 A を球 B の中心に向かって突いたとき、球 A は初速度 v_0 で無回転で動き始め(図3)、やがて球 B に衝突する。衝突時に球と球の間には摩擦は働くかず、球同士のはねかえり係数は 1 として、以下の間に答えよ。

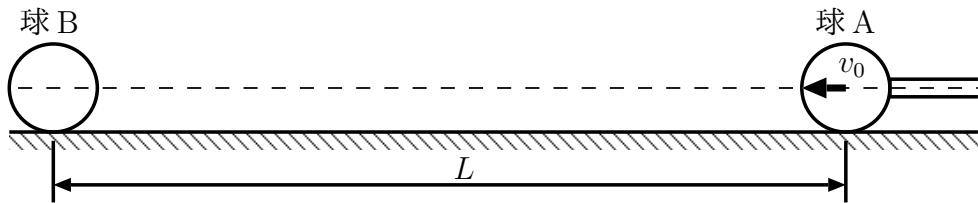


図3

- (5) 球 A がすべりなく転がり始め、小問(2)で求めた速度 v_1 で球 B に衝突する場合を考える。衝突後しばらくして、球 A,B がどちらもすべりなく転がる状態となるが、このときの球 A,B の最終速度の比を求めよ。
- (6) 球 A を強く強さを変えることで衝突後の球 A の最終速度をどのようにコントロールできるか。小問(5)で考慮しなかったすべりながら衝突する場合も検討し、球 A の最終速度を最大にする条件を含めて簡単に解説せよ。

以下、図4のように、真二つに割れた球 A が球面側を下にして置かれている状況を考える。

- (7) 静止状態での床面との接触点まわりの慣性モーメントが $\frac{13}{40}MR^2$ となることを示せ。

- (8) 釣り合い点付近での微小振動の周期を求めよ。

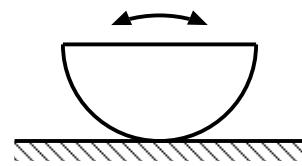


図4

II-2 (量子力学) (100 点)

質量 $m (> 0)$, 時間に依存する角振動数 $\omega (> 0)$ の一次元調和振動子を考える. 初期に基底状態にあった系が ω の時間依存性によって励起されることを, ハイゼンベルグ描像で考察する.

プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とする. 位置と運動量に対応する演算子 \hat{q} と \hat{p} が交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

を満たし, ハミルトニアン \hat{H} が

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$$

で与えられるとする. ここで, 角振動数 ω は小問(1)と(2)では定数とするが, 小問(3)以降では時間の関数とする. 以下では, 時間変数を t とし, X の t に関する微分を \dot{X} , X の複素共役を X^* , X のエルミート共役を X^\dagger と表記する.

(1) ω を定数とする. 演算子 \hat{a} を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) e^{i\omega t}$$

と定義する. \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係を求め, \hat{H} を演算子 $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ で表せ.

(2) 一般に, 演算子 $\hat{\mathcal{O}}(\hat{q}, \hat{p}, t)$ の時間微分 $\dot{\hat{\mathcal{O}}}$ は

$$\dot{\hat{\mathcal{O}}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathcal{O}}]$$

で与えられる. 小問(1)で定義した \hat{a} の時間微分 $\dot{\hat{a}}$ を計算せよ.

ここからは, 時間に依存する角振動数を $\omega(t)$ と表記する.

(3) 時間の関数 $u(t)$ が微分方程式

$$\ddot{u}(t) + \omega(t)^2 u(t) = 0 \quad (\text{E})$$

を任意の時刻で満たし,

$$u(t)\dot{u}^*(t) - u^*(t)\dot{u}(t) = \frac{i\hbar}{m} \quad (\text{F})$$

を時刻 $t = 0$ で満たすとする. この場合に, 式(F)が任意の t で満たされることを示せ.

(4) \hat{q} と \hat{p} を, 小問(3)で導入した $u(t)$ およびある演算子 \hat{b} とそのエルミート共役 \hat{b}^\dagger によって

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{b}u(t) + \hat{b}^\dagger u^*(t) \\ \hat{p} &= m \left[\hat{b}\dot{u}(t) + \hat{b}^\dagger \dot{u}^*(t) \right] \end{aligned}$$

と表す. このとき, $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$ と $\dot{\hat{b}}$ を計算せよ.

- (5) $t \rightarrow -\infty$ と $t \rightarrow \infty$ の極限で, 関数 $\omega(t)$ がそれぞれ定数 ω_- と ω_+ に収束すると仮定する. そして, 式(E)と式(F)を満たす $u(t)$ のうち, $t \rightarrow -\infty$ で $\mathcal{N}e^{-i\omega_- t}$ に漸近する解 $u_1(t)$ と, $t \rightarrow \infty$ で $\mathcal{M}e^{-i\omega_+ t}$ に漸近する解 $u_2(t)$ を用意する. すなわち, $u_1(t)$ と $u_2(t)$ は

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow \mathcal{N} e^{-i\omega_- t} & (t \rightarrow -\infty) \\ u_2(t) &\rightarrow \mathcal{M} e^{-i\omega_+ t} & (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たす. ここで, \mathcal{N} と \mathcal{M} は複素定数である. $|\mathcal{N}|$ と $|\mathcal{M}|$ を計算せよ.

- (6) 小問(5)で導入した $u_1(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で

$$u_1(t) \rightarrow \alpha \mathcal{M} e^{-i\omega_+ t} + \beta \mathcal{M}^* e^{i\omega_+ t} \quad (t \rightarrow \infty)$$

のように振る舞う. また, $u_2(t)$ は $t \rightarrow -\infty$ で

$$u_2(t) \rightarrow \gamma \mathcal{N} e^{-i\omega_- t} + \delta \mathcal{N}^* e^{i\omega_- t} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

のように振る舞う. ここで, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素定数である. このとき, 微分方程式(E)の解の一意性により, $\gamma = \alpha^*$ および $\delta = -\beta$ という関係式が成り立つ. $|\alpha|$ を β によって表せ.

- (7) 小問(6)で考察した $u_1(t)$ と $u_2(t)$ を使って, \hat{q} と \hat{p} を

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{b}_1 u_1(t) + \hat{b}_1^\dagger u_1^*(t) = \hat{b}_2 u_2(t) + \hat{b}_2^\dagger u_2^*(t) \\ \hat{p} &= m \left[\hat{b}_1 \dot{u}_1(t) + \hat{b}_1^\dagger \dot{u}_1^*(t) \right] = m \left[\hat{b}_2 \dot{u}_2(t) + \hat{b}_2^\dagger \dot{u}_2^*(t) \right] \end{aligned}$$

のように, それぞれ2通りに展開する. すると, 小問(6)の α と β を使って, \hat{b}_2 を \hat{b}_1 と \hat{b}_1^\dagger の線型結合として次のように表すことができる.

$$\hat{b}_2 = \alpha \hat{b}_1 + \beta^* \hat{b}_1^\dagger.$$

演算子 $\hat{N}_2 \equiv \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ の期待値を,

$$\hat{b}_1 |in\rangle = 0$$

で定義される状態 $|in\rangle$ に対して計算せよ.

II-3A (物理数学) (50 点)

実部が正である複素数 z に対し, ガンマ関数は次式のように定義される.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(1) 自然数 N に対し,

$$\Gamma(N+1) = N!$$

となることを示せ.

(2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

を計算せよ. ただし, 必要なら正の実数 a に対して, $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ が成り立つことを用いてよい.

(3) 大きな自然数 N に対し, N に比べ十分小さな Δ を用いて,

$$\log N! = N(\log N - 1) + \Delta$$

と表すことができることを示せ. またそのときに, Δ の最も主要な項を求めよ.

[ヒント] 実数 t に対しなめらかに変化する実数関数 $f(t)$ が, $t = t_0$ でただ 1 つの最大値 $f(t_0)$ を持ち, そこでの二階微分 $f''(t_0)(= d^2f/dt^2|_{t=t_0})$ が負であるとき, 十分大きな正の実数 m に対し,

$$\int_{-\infty}^\infty dt e^{mf(t)} \cong e^{mf(t_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{mf''(t_0)}}$$

と近似することができる.

(4) 正の実数 α に対し,

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt$$

をガンマ関数とリーマンゼータ関数を用いて表せ. ただし, リーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と与えられる.

(このページは白紙である)

II-3B (実験物理学) (50 点)

原子核の大きさは、 α 線（原子番号 $Z=2$, 質量数 $A=4$ ）を金薄膜に照射し、弾性散乱された α 線の散乱角と個数を計測することである。 α 線の運動エネルギーは 5 MeV とする。これを古典的なクーロン散乱で考える。図 1 のように α 線の入射軌道の延長と原子核の最短距離（一般に衝突係数という）を b とし、 α 線の実験室系での散乱角を θ 、 α 線の軌道と原子核の最短距離を D とする。金原子核 ($Z=79$, $A=197$) は α 線にくらべ十分重い。簡単のため、核子（陽子、中性子）の質量は共に $1.0 \text{ GeV}/c^2$ 、電子質量 $m_e = 0.50 \text{ MeV}/c^2$ 、電荷素量を e 、光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

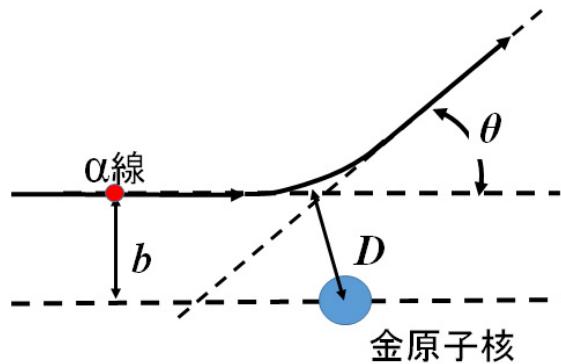


図 1

- (1) b により D は変化するが、 α 線が原子核に最も接近する距離 D_{\min} は α 線の最初の運動エネルギーと金原子核の静電位置エネルギーが等しくなる条件によって決まる。 D_{\min} の値を計算せよ。ただし古典電子半径 $e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$ である。
- (2) 次に単位時間、単位面積あたり n 個の α 線が金薄膜に入射したとき、 $b \sim b + db$ に入る単位時間あたりの個数 dn を求めよ。
- (3) 金薄膜に入射した α 線は問 (1) のような古典的なクーロン場による散乱モデルで記述され、 θ , D_{\min} と b の間には以下の関係が成り立つ。

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D_{\min}}$$

これを用いて $\theta \sim \theta + d\theta$ に入る粒子数 $dn(\theta)$ を計算し、さらに実際に測定可能な微分断面積 $d\sigma(\theta)/d\Omega$ を θ , D_{\min} を用いて表せ。 $d\Omega$ は立体角である。このように $d\sigma(\theta)/d\Omega$ の分布から D_{\min} が得られ、原子核のサイズの上限値が得られる。

- (4) 次に $\theta = 60$ 度方向へ散乱される α 線の計測実験を考える。単位面積、単位時間あたり N_a 個の α 線が金薄膜に入射する。金薄膜は単位面積で金原子数が N_b 個ある。この金薄膜内での α 線の散乱確率は小さく 2 回散乱されること

はない。図2のように金薄膜の上60度方向、距離 r の位置に粒子カウンタ(検出面積 S)を置き、その単位時間あたりの計測数は N_c であった。粒子カウンタの検出効率は100%である。距離 r は金薄膜の大きさより十分に大きい。この時の $d\sigma(\theta = 60^\circ)/d\Omega$ を求めよ。

(5) 小問(4)の実験値から D_{\min} を求めよ。

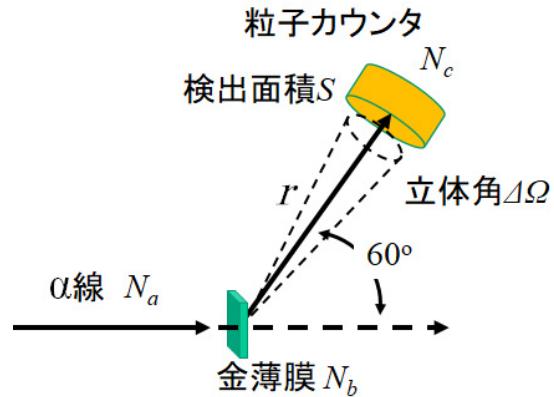


図2

令和2年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題 III-1, III-2, III-3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題 III-1 の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題 III-2 は独立した2つの小問 III-2A, III-2B から, 問題 III-3 は独立した2つの小問 III-3A, III-3B からなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて11ページまである.

III-1 (統計力学) (100 点)

電気双極子モーメントを持つ N 個の粒子が、体積 V の箱に閉じ込められている。粒子 i の電気双極子モーメント $\vec{\mu}_i$ は、その大きさ μ と角度座標 (θ_i, φ_i) を用いて、

$$\vec{\mu}_i = \mu(\cos \varphi_i \sin \theta_i, \sin \varphi_i \sin \theta_i, \cos \theta_i)$$

と書くことができる。

z 軸正の向きの外部電場 \vec{E} の下で、系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2 - E\mu \cos \theta_i \right\} + \sum_{1 \leq j < i \leq N} U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$$

と与えられる。ここで、 m は粒子の質量、 \vec{r}_i と \vec{p}_i はそれぞれ粒子 i の座標と運動量、 E は \vec{E} の大きさ、 $U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$ は粒子 i と粒子 j の間の相互作用を表す。ただし、簡単のため、慣性モーメントは 0 とし、回転運動エネルギーの寄与は無視した。以下、系は温度 T の平衡状態にあるとし、ボルツマン定数を k_B とする。

まず、相互作用 $U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$ が無視できる場合を考える。

- (1) 系の圧力 p_0 を書け。
- (2) 電気双極子モーメントと外部電場のなす角が、 θ と $\theta + d\theta$ の間にある確率を $2\pi f(\theta) \sin \theta d\theta$ とする。系が温度 T のカノニカル分布に従うとして、 $f(\theta)$ の表式を示せ。
- (3) 単位体積あたりの分極を $M = N\mu \langle \cos \theta \rangle / V$ とする。 $\langle \cos \theta \rangle$ は粒子 i に対する $\cos \theta_i$ の温度 T における期待値を表す。 M を求めよ。
- (4) 真空の誘電率を ε_0 として、系の誘電率 ε を $\varepsilon = \varepsilon_0 + M/E$ とする。外部電場が小さい極限での誘電率を求めよ。必要であれば、 $|x| \ll 1$ のとき $\coth x = 1/x + x/3 + \mathcal{O}(x^2)$ となることを用いてよい。

次に、外部電場を 0 とし、圧力 p に対する粒子間相互作用の寄与を考えたい。粒子 1 と粒子 2 の電気双極子モーメント間の相互作用 U は、

$$U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) = -\frac{c}{R^3} \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\}$$

と与えられる。ここで、相対位置ベクトルを $\vec{R} (= \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ とし、 $R = |\vec{R}|$ 、 $\hat{R} = \vec{R}/R$ とおいた。また、 $c = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ はクーロン定数である。

粒子 2 が粒子 1 に及ぼす力は $\vec{F} = -\partial U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) / \partial \vec{r}_1$ である。 \vec{F} は \vec{R} だけでなく $\vec{\mu}_1$ や $\vec{\mu}_2$ にも依存するため、そのままでは圧力を求めることが容易ではない。そこで、温度 T のカノニカル分布に基づいて、 $\vec{\mu}_1$ と $\vec{\mu}_2$ に対する統計平均を行い、粒子 1 と粒子 2 の間に働く平均的な力 $\langle \vec{F} \rangle$ を求めるこにする。

(5) 実効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\vec{R})$ を次の式を用いて定義する.

$$e^{-U_{\text{eff}}(\vec{R})/k_B T} = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 e^{-U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2)/k_B T}.$$

ここで、積分 $\int d\Omega_i$ は $i = 1, 2$ に対し、 $\vec{\mu}_i$ の立体角積分 $\int_0^\pi \sin \theta_i d\theta_i \int_0^{2\pi} d\varphi_i$ を表す。粒子1と粒子2の座標をそれぞれ \vec{r}_1, \vec{r}_2 に固定した条件下での、 $\vec{\mu}_1$ と $\vec{\mu}_2$ に関する確率 $P(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ を、 U_{eff} , U , $k_B T$ を用いて書け.

(6) 粒子2が粒子1に及ぼす平均的な力

$$\langle \vec{F} \rangle = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) P(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

が、 $\langle \vec{F} \rangle = -\partial U_{\text{eff}}(\vec{R})/\partial \vec{r}_1$ と与えられることを示せ.

以下では、温度が十分に高く、 $k_B T \gg c\mu^2/R^3$ が成り立っているとする.

(7) 平均的な力 $\langle \vec{F} \rangle$ の最も主要な項は、 $\langle \vec{F} \rangle = -AR^{-\alpha}\hat{R}$ のように、係数 A とべき指数 α を用いて書くことができる。 A と α を求めよ。ただし必要であれば、

$$(4\pi)^{-2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\} = 0,$$

$$(4\pi)^{-2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\}^2 = 2\mu^4/3$$

となることを用いてよい。

(8) 相互作用として、 $R > d$ では実効的ポテンシャル U_{eff} が働き、 $R \leq d$ では剛体球ポテンシャルが働いているとする。すなわち、全ポテンシャル U_{tot} を

$$U_{\text{tot}}(\vec{R}) = \begin{cases} \infty & (R \leq d) \\ U_{\text{eff}}(\vec{R}) & (R > d) \end{cases}$$

とする。ただし、 $d > 0$ である。粒子数密度が十分に小さいとき、圧力 p は

$$\frac{pV}{Nk_B T} = 1 - \frac{N}{2V} \int d\vec{R} \left[\exp \left\{ -(U_{\text{tot}}(\vec{R}) - U_{\text{tot}}(R = \infty))/k_B T \right\} - 1 \right]$$

と近似することができる。この式を用いて、圧力 p を求めよ。

III-2A (力学) (50 点)

平面内を運動する物体が、その進行方向に対して右 90 度向き $\vec{n}(|\vec{n}| = 1)$ に常に質量を放出しているとする。この物体の運動の様子を調べよう。時刻 t での物体の質量を $m(t)$ 、速度を $\vec{V}(t)$ とし、 $|\vec{V}(0)| = V_0$ とする。微小時間間隔 dt の間に放出される質量は $\alpha m(t) dt$ で、 α は一定で正とする。物体に対して放出される速さを u とする。物体の内部構造は考えない。

- (1) 時刻 $t + dt$ での物体の速度を $\vec{V}(t) + d\vec{V}$ とし、運動量保存の式を書け。
- (2) これより、 $m \frac{d\vec{V}}{dt} = \boxed{A}$ となる。 \boxed{A} にあてはまる式を示せ。ただし、この式に \vec{n} を残してよい。
- (3) 時刻 t での物体の速さを求めよ。
- (4) 運動の軌跡の時刻 t における曲率半径 $\rho(t)$ を求めよ。

III-2B (電磁気学) (50 点)

図1のように、接地された導体の内部にある球状の空洞（半径 a ）の中心に電気双極子を置いたとき、空洞の表面に誘起される電荷分布を考えよう。なお、空洞中は真空とし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。解答はSI単位系を用いよ。

- (1) はじめに導体のない場合を考えよう。電気双極子を原点Oに置いたとき、球座標を用いて位置 $P(r, \theta, \varphi)$ での軸対称な静電ポテンシャル $\phi_{\text{di}}(r, \theta)$ を求めよ。ここで、 r は原点からの距離、 θ は電気双極子ベクトルの方向を z 軸としたとき、 \vec{r} と z 軸のなす角度とする。電気双極子ベクトルは $\vec{p} = q\vec{s}$ とし、 \vec{s} は電荷 $-q$ と $+q$ を結ぶベクトル、 $s = |\vec{s}|$ 、 $p = |\vec{p}|$ である。また、 $r \gg s$ で、 s/r の1次項まで計算せよ。
- (2) 次に電気双極子を空洞の中心に置いた場合を考える。空洞の表面に誘起された電荷がつくる静電ポテンシャルは、適切な定数 A_0, B_0, A_1, B_1 を用いて次の形で表せる。

$$\phi_{\text{in}}(r, \theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta.$$

A_0, B_0, A_1, B_1 を決定し、位置 $P(r, \theta, \varphi)$ での静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ を求めよ。

- (3) 空洞の表面に誘起される電荷密度を求めよ。

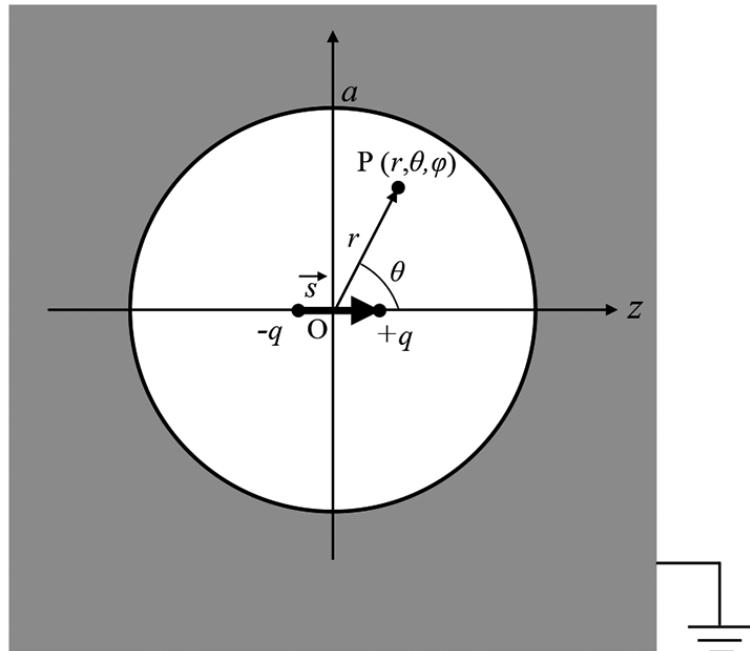


図1

III-3A (英語) (60 点)

The excerpt below has been adapted from Richard Feynman's 1965 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions [Q-a]-[Q-f] below in clear, easy-to-read English or symbols where appropriate. Advanced physics knowledge is not necessary to answer the questions.

(問題文は著作権に配慮して削除しています。)

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-a] Which of the following words or phrases can replace the underlined text without changing the meaning of the sentence? Write one of a1, a2, a3, or a4 in the answer space.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a1) surprisingly close | a2) completely erroneous |
| a3) absurdly intuitive | a4) extremely foolish |

[Q-b] Choose one of the following words to complete this sentence. Write one of b1, b2, b3, or b4 in the answer space.

- | | |
|-----------------------|---------------|
| b1) differentiable | b2) testable |
| b3) indistinguishable | b4) appealing |

[Q-c] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include punctuation as necessary.

[Q-d] Using several sentences and your own expressions explain why the author thinks it is useful to have many ways of approaching the same theory.

[Q-e] Fill in the correct article (“the”, “an”, or “a”) in the underlined spaces in the sentences. Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write “ ϕ ” in the answer space.

[Q-f] Which of the following best describes the *opposite* meaning of the underlined text? Write one of f1, f2, f3, or f4 in the answer space.

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| f1) emotional indifference | f2) mental challenge |
| f3) emotional thrill | f4) concrete boredom |

III-3B (英語) (40 点)

Read the passage carefully and answer questions [Q-1]-[Q-8] below in English. Advanced physics knowledge is not necessary to answer the questions.

A particle moving under the influence of a force results in a transfer of energy referred to as work. In simple cases work can be represented as the product of the force and the distance the particle travelled. Since a force only changes the kinetic energy of a particle moving parallel to it, the inner product of the force vector with the particle's displacement vector is used to represent the work done by the force when the particle moves in a straight line,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} .$$

For particles moving [1] curved paths in the presence of a force, the situation is more complicated. In this case the total amount of work done is derived by calculating the work done by the force over an [2] infinitely small segment of the particle's path. The sum of all such segments is the total work. Taking the limit as the length of the segments approaches zero yields the following expression,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

where C denotes the path of the particle. An example is shown in the figure below. Due to the inner product in the integral, motion that is [3a] ([3b]) to the direction of the force gives the greatest [3c] (negative) contribution to the integral. When W does not depend on which path C is taken, the force is said to be *conservative*.

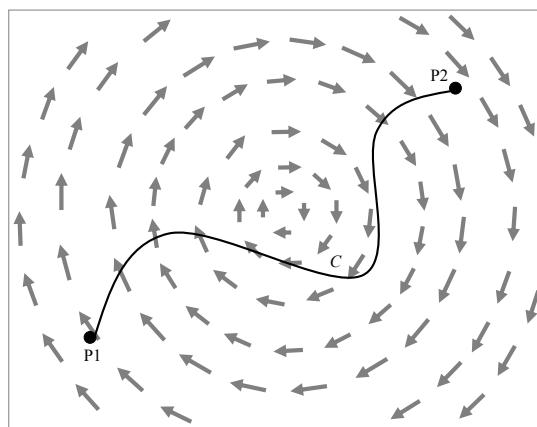


Figure 1. Example of a particle moving on a path C from point P1 to P2 under the influence of a force \vec{F} , whose direction is shown by the arrows.

Answer the following questions concerning the passage above.

- [Q-1] Which of the following words can be used in this position to form a suitable sentence? Write all answers that apply in the answer space.

- 1a) with 1b) on 1c) through
1d) along 1e) for 1f) under

- [Q-2] Write a single word that can replace the two underlined words without changing the meaning of the sentence.

- [Q-3] Which of the following sets of words can be used to replace [3a] through [3c] in order and form a correct sentence. Write all answers that apply in the answer space.

- 3-1) positive, antiparallel, parallel 3-2) congruent, parallel, positive
3-3) parallel, antiparallel, positive 3-4) antiparallel, parallel, positive

- [Q-4] Based on the definition in the text, is the force in Figure 1 *conservative*?

- [Q-5] Which of the following forces are *conservative* and which are not? The force of gravity, spring force, friction, the electric force.

- [Q-6] A particle moves on a lattice from point P1 to P2 under the influence of a force, \vec{F} , shown in Figure 2. Assuming that the transverse and longitudinal distance between the centers of any two arrows is one unit, order the three paths shown in order of least to most work done by the force.

- [Q-7] Imagine a quantity S defined as,

$$S = \left| \int_C \vec{F} \times d\vec{r} \right|.$$

What angles of \vec{F} and $d\vec{r}$ make the largest contributions to S at a given position?

- [Q-8] Using Figure 2 and the same assumptions as in [Q-6] which of paths C1 and C3 has the largest value of S as defined in [Q-7].

(次ページに続く)

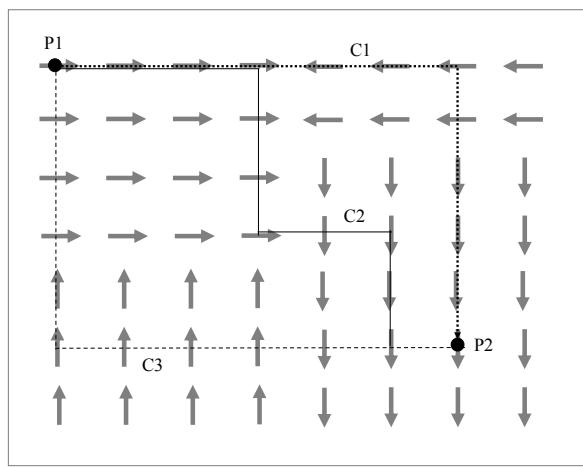


Figure 2. Two points, P_1 and P_2 , in a vector field \vec{F} . The magnitude of the field is the same everywhere, but its direction at each point is shown by the arrows.

(このページは白紙である)

平成31年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題I-1の解答には裏面を用いててもよい.
- (3) 問題I-2は独立した2つの小問I-2A, I-2Bから, 問題I-3は独立した4つの小問I-3A, I-3B, I-3C, I-3Dからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである.

I-1 (電磁気学) (100 点)

真空領域から、巨視的には電気的に中性なプラズマが存在する領域(電離層)へ伝播する電磁波を考える。2つの領域は $z = 0$ の平面で隔てられ、 $z < 0$ の領域は真空、 $z > 0$ の領域は空間的に一様なプラズマが分布しており、電離電子の数密度は n であるとする。簡単のため、プラズマの熱運動はないものとし、イオンの運動は無視する。なお、電子の変位は微小であるとする。電磁波はマックスウェル方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{B})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{C})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{D})$$

に従う。ここで、 \vec{E} , \vec{B} はそれぞれ電場、磁束密度、 \vec{J} は電流密度、 μ_0 , ε_0 はそれぞれ真空の透磁率、真空の誘電率である。

電離層中の電子は入射する電磁波の電場により加速される。このとき、電子の電荷を e 、質量を m 、速度を \vec{v} とすると、一つの電子の運動は、運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E}$$

に従うものとする(ここで、電磁波の磁場による力は無視できるとした)。なお、解答には SI 単位系を用いよ。

(1) 電離層中の電流密度 \vec{J} の時間微分 $\partial \vec{J} / \partial t$ は電場 \vec{E} を用いて、

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \boxed{\text{あ}} \vec{E}$$

と書ける。 $\boxed{\text{あ}}$ に入る適切な式を求めよ。

(2) 式 (A)~(D) のマックスウェル方程式から磁束密度 \vec{B} を消去することで、電場 \vec{E} についての波動方程式を求める

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \boxed{\text{い}} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

となる。このとき、 n , μ_0 , ε_0 , e , m のうち必要なものを用いて $\boxed{\text{い}}$ に入る適切な式を求めよ。

- (3) 電離層中 ($z > 0$) での平面波 (角振動数 ω , 電離層中の波数 k') の分散関係は, 光速 $c (= 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0})$ とプラズマ振動数 ω_p を用いて,

$$\omega^2 = c^2 k'^2 + \omega_p^2$$

と与えられる. このとき, ω_p を $n, \mu_0, \epsilon_0, e, m$ のうち必要なものを用いて表せ.

以下では, 真空中 ($z < 0$) を $+z$ 方向に進む入射波の電場を $\vec{E}_i = \text{Re}[E_0 e^{i(kz - \omega t)}] \vec{e}_x$ とする. ただし, E_0 は定数であり, \vec{e}_x は x 方向の単位ベクトルである.

- (4) $\omega > \omega_p$ のとき, 電離層中の電場は波数 k' の平面波である. $z = 0$ での接続条件から, 反射波と透過波の電場 (それぞれ \vec{E}_r, \vec{E}_t とする) を求めよ.
- (5) 小問 (4) において, 電離層中の透過波のポインティングベクトル \vec{S} の時間平均 $\langle \vec{S} \rangle$ の向きと大きさを, $z = +0$ において求めよ.
- (6) $\omega < \omega_p$ のとき, $z = +0$ でのポインティングベクトルの時間平均を求めよ.

I-2A (力学) (50 点)

質量 M_s の太陽の周りを質量 M_p ($\ll M_s$) の惑星が公転している。ケプラーの法則から、万有引力の法則

$$F = -G \frac{M_s M_p}{r^2}$$

を導いてみよう。

太陽は不動であると近似し、公転面内で太陽を原点とする極座標 (r, θ) を用いると、惑星にはたらく加速度は、一般にその運動状態から、

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

となる。ケプラーの第2法則によれば惑星の面積速度（惑星と太陽を結ぶ直線が単位時間に掃く面積 = $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ）は一定である。したがって、 $a_\theta = 0$ であり、惑星にはたらく力の θ 成分はゼロである。惑星にはたらく力は r 方向のみと考えられる。ケプラーの第1法則によれば、この惑星の公転軌道は橢円である。その面積は、橢円の長半径 a 、離心率 ε を使って、 $\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ と表せる。

(1) 惑星の公転周期 T と橢円の面積から面積速度を求め、 $\frac{d\theta}{dt}$ を T を含んだ式で表せ。

(2) r の時間に関する1階微分と2階微分は、

$$\frac{dr}{dt} = \boxed{A} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \boxed{B} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

と表せる。 \boxed{A} , \boxed{B} に入る適切な式を T を含んだ形で求めよ。

(3) 橢円の r と θ の関係 $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ を用いると、 $a_r = \frac{k_{sp}}{r^2}$ となる。 k_{sp} を a, T を用いて表せ。

以上を踏まえて、ニュートンが行ったであろうアプローチを考えてみよう。惑星は太陽によって $F_p = a_r M_p = \frac{k_{sp} M_p}{r^2}$ の大きさの力で引かれている。ケプラーの第3法則によれば、 k_{sp} は惑星によらず一定である。一方、太陽と惑星の役割を入れかえても同様に力の表式が成り立つと仮定すると、太陽が惑星から受ける力 F_s は、 $F_s = \frac{k_{ps} M_s}{r^2}$ であり、 k_{ps} は太陽の性質によらないと推論される。 \boxed{C} このように考えると、 $k_{sp} = -GM_s$, $k_{ps} = -GM_p$ となることを示すことができ、万有引力の法則が導かれる。

(4) \boxed{C} にあてはまる適切な説明を簡潔に書け。

I-2B (量子力学) (50 点)

質量 m , 角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。この系のエネルギー固有状態は、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす生成演算子 \hat{a}^\dagger と消滅演算子 \hat{a} により、
 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) と表すことができる。ここで、 $|0\rangle$ は基底状態を表す。なお、以下で、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。

- (1) 位置演算子が $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ と書けることを用いて、 $\langle n' | \hat{x} | n \rangle$, $\langle n' | \hat{x}^2 | n \rangle$ をクロネッカーのデルタを使って表せ。
- (2) 調和振動子が以下の4つのポテンシャル $V_1(x) = Ax$, $V_2(x) = Bx^2$, $V_3(x) = Cx^3$, $V_4(x) = Dx^4$ のそれぞれにより摂動を受けたとする。これらのうち、 $|n\rangle$ の固有エネルギー E_n に対して1次の摂動による変化が生じるもののはどれかを答えよ。また、その理由を、ハミルトニアンの対称性の観点から簡単に説明せよ。さらに、1次の摂動によるエネルギー変化が生じるものについて、その大きさを \hbar, m, ω, n および A, B, C, D のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) 調和振動子に $V_1(x) + V_2(x)$ の摂動が加わったときのエネルギー固有値の厳密解を求めよ。

I-3A (力学) (25 点)

一様な重力加速度 g が鉛直下向きにはたらいている環境下で、初期質量 M_0 のロケットを初速 0 で鉛直上向きに打ち上げる。燃料は、ロケットに対して一定の速さ u で後方に噴出される。ロケットの質量は燃料の噴出とともに減少する。打ち上げ時刻を $t = 0$ とし、時刻 t でのロケットの質量が $M(t)$ と与えられているとする。ロケットの運動方程式を導出し、ロケットの速度 $v(t)$ を求めよ。ただし、鉛直上向きを正とせよ。

I-3B (誤差統計) (25 点)

確率変数 k の確率分布が、 $P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ (ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots$) に従うとき、これをパラメータ λ のポアソン分布と言う。

(1) パラメータ λ のポアソン分布の平均と分散を求めよ。

(2) ある物体から放出される粒子を検出する測定を考える。検出される粒子の数はポアソン分布に従うとする。検出される粒子の数の標準偏差が平均値の 1% 以下になるようにしたい。どれだけの粒子数を検出する必要があるか。

I-3C (量子力学) (25 点)

ハミルトニアンが

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \lambda|x_1 - x_2|$$

で与えられる, 1次元方向に束縛されたスピン $1/2$ の2つの同種粒子からなる量子力学系を考える. ここで, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ は2つの粒子の位置座標, m は粒子の質量, \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの, λ は正の定数である. 重心系での基底状態と第一励起状態における全スピンの大きさをそれぞれ答え, その理由を簡潔に述べよ.

I-3D (物理数学) (25 点)

ベクトル量 $\vec{r} = (x, y, z)$ が, ガウス分布 $f(\vec{r}) = A \exp(-\beta|\vec{r}|^2)$ に従い分布しているとする. $f(\vec{r})$ が規格化条件

$$\int d^3\vec{r} f(\vec{r}) = 1$$

を満たすように係数 A を決定せよ. ここで, 積分公式

$$\int_0^\infty s^2 e^{-as^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

を用いてよい. また, $|\vec{r}|$ の二乗平均 $\langle |\vec{r}|^2 \rangle$ を求めよ.

平成31年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題II-1, II-2の解答には裏面を用いててもよい.
- (3) 問題II-3は独立した2つの小問II-3A, II-3Bからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである.

II-1 (統計力学) (100 点)

質量 m の二つの質点が束縛されている模型によって 2 原子分子を考える。この「分子」が体積 V の箱の中に N 個あるとする。質点間距離の特徴的な長さ a は分子間距離の典型的な長さ $(V/N)^{1/3}$ よりも十分小さいとし、分子間の相互作用は無視できるとする。ボルツマン定数を k_B とする。

- (1) 分子内の原子間相互作用として、質点間距離が常に一定値 a に保たれてい る模型を考える。古典統計力学の範囲で、温度 T の平衡状態における圧力 $P(T, V, N)$ および定積熱容量 $C_V(T, V, N)$ を書け。また、これらを導く基本的な考え方を簡潔に記せ。計算の詳細を説明する必要はない。
- (2) 次に、分子内の原子間相互作用が、自然長 a 、ばね定数 k のばねで記述され る模型を考える。すなわち、 \vec{r}_1 にある質点と \vec{r}_2 にある質点は

$$\frac{1}{2}k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a)^2$$

という相互作用エネルギーを持つ。 $ka^2 \gg k_B T$ のとき、古典統計力学の範囲で、温度 T の平衡状態における圧力 $P(T, V, N)$ および定積熱容量 $C_V(T, V, N)$ を求めよ。また、これらを導く考え方を簡潔に記せ。計算の詳細を説明する必要はない。

小問 (2) の設定に対して量子統計力学で考える。ただし、質点は同種粒子であるとし、ボース統計に従うものとする。プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とする。

- (3) 次元解析を用いて、以下の 3 つの温度 T_0, T_1, T_2 を求めよ。 T_0 は質点の質量 m と数密度 n によって決まる温度、 T_1 は質点の質量 m と自然長 a によって決まる温度、 T_2 は質点の質量 m とばね定数 k によって決まる温度である。ただし、 \hbar や k_B を使ってよい。
- (4) 温度領域 $T \ll T_0$ で観測される顕著な現象の名称を記せ。
- (5) $T_0 \ll T_1 \ll T_2$ とする。3 つの温度領域 (i) $T_0 \ll T \ll T_1$, (ii) $T_1 \ll T \ll T_2$, (iii) $T \gg T_2$ においてそれぞれ定積熱容量を書け。また、これらを導く基本的な考え方を簡潔に記せ。
- (6) 一気圧常温 (300 K 程度) の 2 原子分子気体の定積熱容量はおよそ $\frac{5Nk_B}{2}$ であ る。この事実と整合するためには、ばねの角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ はある値 ω_c よりも十分大きくなければならない。その角振動数の値 ω_c を見積もれ。た だし、 $\hbar = 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$, $k_B = 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ としてよい。

(このページは白紙である)

II-2 (量子力学) (100 点)

図1のように平面上に乘る半径 R の円 C の上に束縛された質量 m , 電荷 e ($e > 0$ とする) の荷電粒子の運動を量子力学的に考察する。この平面に垂直な方向に円 C の中心を貫くように細長いソレノイドが設置されており、円 C の内部を図の上向きに貫く磁束 Φ を自由にコントロールできるようになっている。ただし、磁場はソレノイドの内部のみに生じ、円 C 上では無視できるものとする。以下では、この荷電粒子の定常状態を表す波動関数を $\psi(\sigma)$ で表し、周期境界条件 $\psi(\sigma + 2\pi R) = \psi(\sigma)$ に従う一次元量子力学系として取り扱う。ここで、 $\sigma = R\theta$ は C 上の座標である。なお、必要であればプランク定数を 2π で割ったものとして、 \hbar を用いよ。

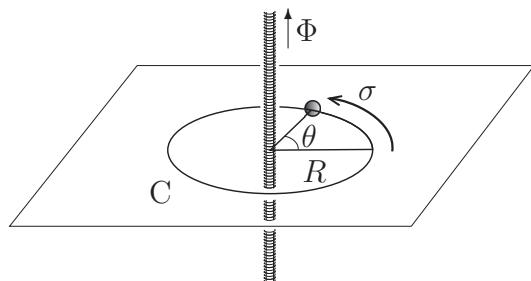


図 1

- (1) $\Phi = 0$ のとき、荷電粒子の波動関数 $\psi(\sigma)$ が従うシュレディンガ一方程式を、エネルギー固有値を E として書き下せ。また、取り得るすべてのエネルギー固有値と固有状態の波動関数を求めよ。
- (2) $\Phi \neq 0$ のとき、ベクトルポテンシャルの σ 方向成分 A_σ の値は、 C 上で一定値を取るように選ぶことができる。このときの A_σ を Φ と R を用いて表せ。
- (3) A_σ が一般の値の場合のハミルトニアンは、 $A_\sigma = 0$ の場合のハミルトニアンに含まれる σ 方向の運動量 p_σ を $p_\sigma - eA_\sigma$ で置き換えた形になる。このことを用いて、 A_σ が C 上で一定値である場合に、取り得るエネルギー固有値を A_σ を用いて書け。
- (4) 磁束 Φ がある値の整数倍のとき、エネルギースペクトルは $\Phi = 0$ の場合と同じになる。 $\Phi > 0$ の範囲で、エネルギースペクトルが $\Phi = 0$ と同じになる最小の Φ の値を求めよ。以下、この値を Φ_0 とおく。
- (5) 磁束 Φ を $\Phi = 0$ からゆっくりと $\Phi = \Phi_0$ へ変化させる。このとき、縦軸をエネルギー、横軸を Φ として、エネルギー固有値の変化を図示せよ。ただし、エネルギー準位は低いものから順に 3 番目までを描け。また、図中で 2 つ以上の準位のエネルギーが縮退する部分がある場合には、その部分を丸で囲んで示せ。(4 つ目のエネルギー準位が 3 つ目のエネルギー準位と縮退する点がある場合には、その点も丸で囲むこと。)

次に、この系にポテンシャル

$$V(\sigma) = \lambda \cos\left(\frac{2\sigma}{R}\right)$$

(λ は正の定数)が加わった場合に、エネルギースペクトルがどのように変化するのかを、以下のマシュー関数の性質を用いて考察する。

ν 次のマシュー関数 $me_\nu(\xi, q)$ は、 q を固定して ξ の関数とみなしたときにマシューの微分方程式

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \varphi(\xi) + (a - 2q \cos(2\xi)) \varphi(\xi) = 0 \quad (\text{A})$$

の解であり、

$$me_\nu(\xi + \pi, q) = e^{i\nu\pi} me_\nu(\xi, q), \quad me_\nu(\xi, 0) = e^{i\nu\xi}$$

を満たす。ここで、 $\nu = \nu(a, q)$ は実定数 a, q で定まる特性指数と呼ばれる定数である。また、 ν が整数でない場合には、 $me_\nu(\xi, q)$ と $me_{-\nu}(\xi, q)$ が微分方程式 (A) の 2 つの独立解を与える。

- (6) この系のシュレディンガー方程式は、 $\xi = \sigma/R$, $\psi(\sigma) = e^{ik\xi} \varphi(\xi)$ と置き、定数 k を適切に選べば、マシューの微分方程式 (A) に帰着される。そのときの k, a, q を Φ, Φ_0, λ とエネルギー固有値 E のうち必要なものを用いて表せ。
- (7) k, a, q が小問 (6) で求めたものであるとき、 $\psi(\sigma) = e^{ik\xi} me_\nu(\xi, q)$ はシュレディンガー方程式の解である。さらに、この $\psi(\sigma)$ が周期境界条件を満たすとき、 ν の取り得る値を求めよ。
- (8) 図 2 は、 $0 < q \ll 1$ とみなせるある q の値を固定したときの a と ν の関係を表したグラフである。特に、 $\nu = 1.0$ を与える a は、 $a = 1.0$ の付近に 2 つあり、 a がその間の値を取るときには ν は実数にならない。このことは $0 < q \ll 1$ のときには常に成立つ。このグラフの形から、 λ が十分小さな正の値をとるときに、小問 (5) で求めた図がどのように変わるのが推定し、図示せよ。なお、小問 (5) と同様に、図中で 2 つ以上の準位のエネルギーが縮退する部分がある場合には、その部分を丸で囲んで示せ。

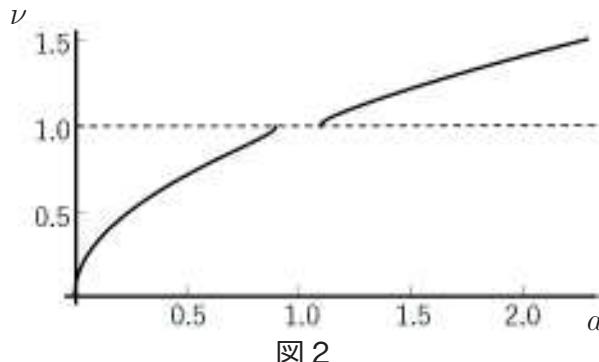


図 2

II-3A (物理数学) (50 点)

1 次元区間 $[0, L]$ で定義された温度場 $T(x, t)$ が拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{B})$$

に従うとし、境界条件

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{C})$$

を満たすとする。

- (1) 1 次元区間 $[0, L]$ において有界で連続な任意の関数 $T(x, t)$ に対して、適切な実関数の組 $\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

と表すことができる。 $T(x, t)$ が式 (B) と境界条件 (C) を満たす温度場のとき、実関数の組 $\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を適切に選ぶことにより、 $a_n(t)$ の従う微分方程式が a_m ($m \neq n$) を含まないようになることができる。そのような関数の組 $\phi_n(x)$ の具体例を書け。また、そのときの $a_n(t)$ に対する微分方程式を解いて、 $a_n(t)$ を $a_n(0)$ を用いて表せ。

- (2) $T_n(t)$ を

$$T_n(t) = \int_0^L dx \phi_n(x) T(x, t)$$

で定義する。 $a_n(0) \neq 0$ の場合、 $T_n(t)/a_n(0)$ を求めよ。ただし、結果は積分を含まない表現とせよ。

- (3) 時刻 $t = 0$ における温度場が

$$T(x, 0) = A \left[1 - \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^3 \right]$$

で与えられるとする。 A は定数である。任意の t において、 $\int_0^L dx T(x, t)$ を求めよ。

II-3B (実験) (50 点)

荷電粒子の運動量を測定する方法について考える。図1のように、 $0 \leq y \leq L$ の領域Dに、磁束密度の大きさが B で時間的に一定かつ空間的に一様な磁場が、 xy 平面に垂直に手前から奥への向きに印加されているとする。正の電荷 e を持つ粒子が $y < 0$ の領域から $y = 0$ の面に垂直に入射し、領域 D で磁場の影響を受けて運動する場合を考える。ここで、粒子は磁場以外の影響は受けないものとする。また、相対論的な効果を考慮する必要はない。

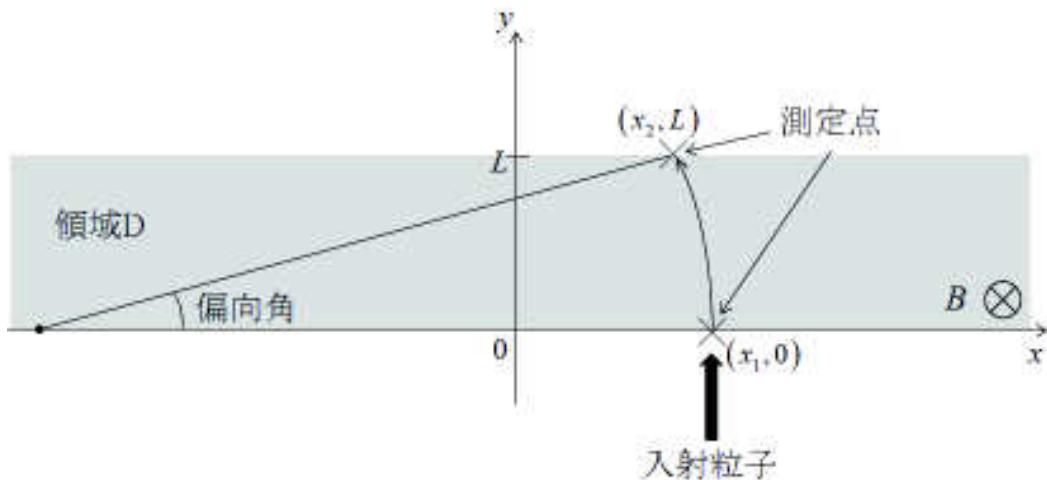


図 1

- (1) 領域 D 内で入射粒子の軌跡は円の一部である円弧を描く。円の半径を ρ として、粒子の運動量の大きさを p を用いて表せ。
- (2) $y = 0$ および $y = L$ において、粒子の x 方向の通過位置を測定したとする。 $y = 0, L$ での測定値をそれぞれ x_1, x_2 として、円の半径を求めよ。ただし運動量の大きさが十分大きい場合を考えるため、図1に示す偏向角は十分小さいとしてよい。
- (3) 小問(2)で述べた位置の測定値から得られる粒子の運動量の大きさを p とする。測定値 x_1, x_2 の各々には、標準偏差 σ_x の独立な測定誤差があるとする。誤差伝播を考慮して、 p の相対誤差 σ_p/p を求めよ。ただし、 x_1, x_2 の測定値以外に誤差の起源はなく、得られた相対誤差が十分に小さい場合を考えるものとする。

平成31年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題III-1, III-2, III-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題III-1の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題III-2は独立した2つの小問III-2A, III-2Bから, 問題III-3は独立した2つの小問III-3A, III-3Bからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて9ページまである.

III-1 (力学) (100 点)

自然長 a , バネ定数 k のバネにつながれた複数の質点の運動を考察する。

最初に 3 個の質点の運動を考える。質点は、図 1 のように x 軸方向にのみ動くものとし、両端のバネの端は固定されている。また、固定端間の距離は $L = 4a$ である。質点の位置を左から $a + x_1$, $2a + x_2$, $3a + x_3$ とおく。ここで、 x_1 , x_2 , x_3 はそれぞれの質点の平衡点からの変位を表す。中央の質点の質量を M とし、他の質点の質量は等しく m とする。以下、 $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ とする。

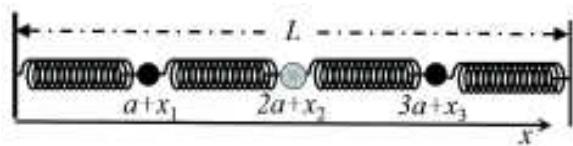


図 1

- (1) 質量 m の 2 つの質点の位置を固定し、それぞれ $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ とおく。中央の質点の時刻 t における変位 $x_2(t)$ を求めよ。ただし、 $t = 0$ における初期条件を $x_2 = X$, $dx_2/dt = V$ とせよ。

以下では、小問 (1) で固定した 2 つの質点を自由に動けるようにし、質点系の連成振動の規準振動を求めよう。規準振動には 3 つのモードがあり、その規準角振動数の大きさを小さい方から順に ω_s , ω_c , ω_l とする。

- (2) 質点の変位 $x_j(t)(j = 1, 2, 3)$ に対する運動方程式を書け。また、 $x_j(t) = A_j \cos \omega t$ において、 ω_s^2 , ω_c^2 , ω_l^2 を ω_0 と質量比 $\beta = m/M$ を用いて表せ。ただし、 A_j は実の定数である。
- (3) それぞれの規準振動に対して、 $\beta = 1$ の場合に A_2 と A_3 を A_1 を用いて表せ。
- (4) 中央の質点の質量 M を変化させる。このとき、 ω_s^2/ω_0^2 , ω_c^2/ω_0^2 , ω_l^2/ω_0^2 の変化を図に表せ。ただし、横軸には β を用いて、 $0 \leq \beta \leq 2$ の範囲で描き、 $\beta = 0$ と $\beta = 1$ での値が分かるようにすること。

次に、十分に多数の質点を前問と同一のバネで一直線状につなげる。これらの質点のうち1つの質点の質量を M とし、その他の質点の質量を m とする。簡単のため、図2のように質量が M である質点を0番とする順序を導入する。 n 番目の質点に対する平衡点を $x = na$ とし、その点からの変位を x_n とする。

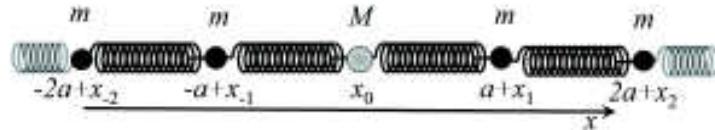


図2

この質量 M の質点を強制的に角振動数 ω で振動させる。

- (5) n 番目の質点の変位を $x_n = \text{Re}[B_n e^{i\omega t}]$ とおく。ただし、 $B_n = B_0 b^n$ とし、 B_0 と b は複素定数である。この変位を質量 m の質点の運動方程式に代入し、 b を ω と ω_0 を用いて表せ。また、 $|b| \neq 1$ となる条件を求めよ。

$|b| = 1$ の場合は進行波に、 $|b| < 1$ の場合は局在波となる。

質量 M の質点の運動を拘束するのをやめて、他の質点と同様に自由に運動させる。 $M < m$ の場合に空間的に局在した規準振動が存在する。以下、この規準振動を求めよう。ただし、小問(5)と同様に n 番目の質点の変位は $x_n = \text{Re}[B_n e^{i\omega t}]$ とおく。

- (6) 質量 M の質点に対して、その両側に続く質点の変位 x_n が $|n|$ を大きくするとそれぞれ減衰するように、小問(5)で得た b の値から適切なものを選ぶ。質量 M の質点の両隣にある質点の変位 x_{-1} と x_1 を、選んだ b と x_0 を用いて表せ。

ここで得た変位を質量 M の質点の運動方程式に代入し、さらに b を消去することで、規準角振動数 ω を求めよ。ただし、 ω_0 と質量比 $\beta = m/M$ を用いて ω を表せ。また、 $m \rightarrow \infty$ の極限における ω の漸近値を求めよ。

小問(6)で求めた規準振動は、質量 M の質点の振幅が最大で、裾が指数関数的に減衰振動する局在した定在波である。

III-2A (電磁気学) (50 点)

真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ。なお、解答にはSI単位系を用いよ。

- (1) 総電荷が e に等しく、内部が一様に帯電した半径 a の球があるとする。球の中心を原点として、原点からの距離 r を用いて、この球がつくる電場を表せ。
- (2) 小問(1)の球がもつ静電エネルギー U_0 を求めよ。

π 中間子には、中性のものと、素電荷 e を持つものがあり、荷電 π 中間子は中性 π 中間子よりわずかにエネルギーが高い(すなわち、質量がわずかに大きい)。このエネルギー差を静電エネルギーの差で説明できるとする。ここで、以下の2つのモデルを比較する。

モデルI： π 中間子は半径 a の球である。荷電 π 中間子は内部が一様に帯電しているのに対し、中性 π 中間子はまったく帯電していない。

モデルII： π 中間子は、いずれも同じ距離 b 離れた2つの点電荷の対からなる。荷電 π 中間子は電荷 $\frac{1}{3}e$ と $\frac{2}{3}e$ を持つ点電荷対からなる。一方、中性 π 中間子は、電荷 $\frac{1}{3}e$ と $-\frac{1}{3}e$ を持つ点電荷対からなる状態Aと、電荷 $\frac{2}{3}e$ と $-\frac{2}{3}e$ を持つ点電荷対からなる状態Bの重ね合わせで表される。中性 π 中間子の静電エネルギーは、各状態A, Bの静電エネルギーの相加平均で与えられる。なお、仮想的に b を無限大とした場合、荷電および中性 π 中間子の静電エネルギーに差はないものとする。

- (3) 荷電 π 中間子と中性 π 中間子の静電エネルギーの差がモデルIとモデルIIで等しいとしたとき、比 a/b の値を求めよ。

III-2B (統計力学) (50 点)

N 個の要素が直線状に連なった鎖状分子がある。各要素 i はそれぞれ独立に $\sigma_i = +1$ または -1 のいずれかの状態を取ることができ、長さ $l + \sigma_i a$ 、エネルギー $\epsilon + \sigma_i \Delta$ をもつものとする。ただし、 l, a, ϵ, Δ は定数である。この鎖状分子を一定の外力 f で引っ張るときの全系のエネルギーは

$$E(\{\sigma_i\}) = \sum_{i=1}^N (\epsilon + \sigma_i \Delta) - fL \quad (\text{A})$$

で与えられる。ただし、

$$L = \sum_{i=1}^N (l + \sigma_i a)$$

は鎖状分子全体の長さである。以下の設問において、 \bar{A} は物理量 A の温度 T のカノニカル分布での期待値を表す。ボルツマン定数は k_B とする。

- (1) 温度 T におけるカノニカル分布で $\sigma_i = 1$ である確率を求めよ。
- (2) σ_i の期待値 $\bar{\sigma}_i$ とゆらぎの大きさ $\overline{(\sigma_i - \bar{\sigma}_i)^2}$ を計算せよ。
- (3) 温度一定で外力を f から $f + \delta f$ に変化させると、分子の長さの期待値は \bar{L} から $\bar{L} + \delta \bar{L}$ に変化した。このとき、 δf が小さければ、近似的に

$$\delta \bar{L} \simeq k \delta f \quad (\text{B})$$

と表される。この係数 k を求めよ。

- (4) 式 (A) を一般化して、全系のエネルギーが

$$E(\{\sigma_i\}) = E_0(\{\sigma_i\}) - fL$$

の形に与えられるとき、式 (B) で定義される k を分子の長さのゆらぎ $(L - \bar{L})^2$ を用いて表せ。なお、 $E_0(\{\sigma_i\})$ は f に依存しないものとする。

III-3A (英語) (60 点)

The excerpt below has been adapted from David Lee's 1996 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions [Q-a]-[Q-j] below in clear, easy-to-read English or symbols where appropriate. The questions can be answered without advanced physics knowledge.

The major breakthrough in our understanding [REDACTED]

[REDACTED] (a) the revolution a superconductivity
in field of vast [REDACTED] (b) congregate [REDACTED]

[REDACTED] (c) macroscopic [REDACTED] (d1) BCS theory

[REDACTED] (d2) metal [REDACTED]
(d3) electrons [REDACTED] (d4) metal [REDACTED] (d5) pairs. [REDACTED]
[REDACTED] (d6)
single ground state [REDACTED] (d7) order parameter [REDACTED]
(d8) Pauli principle [REDACTED]

[REDACTED] (e) discrete
diatomic molecules. [REDACTED]

[REDACTED] (f) marching in lock step, [REDACTED]

[REDACTED] (g).

Why do electrons form pairs? (h) [REDACTED]

even a (i) one. [REDACTED]

[REDACTED] (j).

Answer the following questions concerning the passage above.

III-3B (英語) (40 点)

Read the passage carefully and answer questions [Q-1]-[Q-6] below. The questions can be answered without advanced physics knowledge.

Operational amplifiers, often called op-amps, are active linear circuit elements with a variety of applications in experimental physics. Real op-amps have a large internal input resistance, R_{int} , and a single output voltage, V_o . The output is the product of a large number, which is called the gain G , and the voltage difference between its two inputs, V_+ and V_- . An example circuit diagram showing an op-amp's internal structure is shown in Figure 1.

The behavior of an ideal op-amp can be summarized with the following two golden rules. First, no current flows into its inputs. Second, when connected in a feedback loop, such as the one connecting C_d and the terminal producing V_o in Figure 2, the op-amp will produce whatever output reduces the voltage difference between its input terminals to zero.

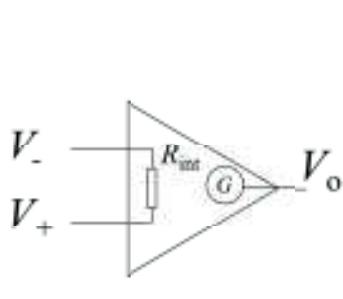


Figure 1. Op-amp circuit diagram.

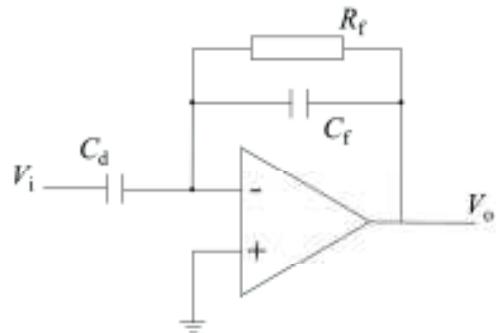


Figure 2. Charge sensitive amplifier.

The circuit in Figure 2 is an example of a charge sensitive amplifier. Such amplifiers are used to amplify the signal from a particle detector. Charge collected in the detector accumulates in the op-amp's feedback capacitor, C_f , inducing a voltage which in turn causes the op-amp's output voltage, V_o , to increase sharply. Its amplitude will be proportional to the integrated charge deposited in the detector provided the circuit's time constant, $R_f C_f$, is sufficiently longer than the duration of the input pulse. The output will decay exponentially, eventually returning to its nominal value if the amplifier receives no other input.

Answer the following questions concerning the passage above.

- [Q-1] Write an expression for the output voltage V_o of the op-amp in Figure 1 in terms of its input voltages, V_+ and V_- , and gain G .
- [Q-2] Write an appropriate value for an ideal op-amp's internal input resistance, R_{int} .
- [Q-3] Op-amps are powered externally via two additional source inputs, V_{s+} and V_{s-} , which are drawn as vertical lines connected to opposite sides of the op-amp symbol between its input and output ends. Draw an example of an op-amp symbol showing all of its inputs and outputs but without its internal structure. The positive source, V_{s+} , should appear on the bottom of the op-amp symbol.
- [Q-4] Make a rough sketch of the output voltage as a function of time for a charge sensitive amplifier that has received an input signal that is much shorter than its time constant.
- [Q-5] As in [Q-4] make a rough sketch of the output for two short input signals with the same integrated charge but separated by a time interval about as long as the time constant of the amplifier.
- [Q-6] A voltage sensitive amplifier can be made by replacing the coupling capacitor, C_d , and feedback system in Figure 2 with two resistors, R_A and R_B , respectively. Draw an example of such an amplifier.

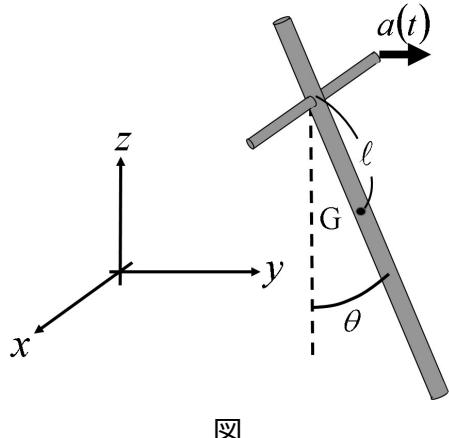
平成30年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 問題I-3は独立した2つの小問、I-3A, I-3Bからなる。解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (3) 各解答用紙は横長に使用して、表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (4) 解答用紙は3問（計4枚）すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (5) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである。

I-1 (力学) (100 点)

図のように、質量 M の棒が、その重心 G から距離 ℓ の位置で、 x 軸に平行な回転軸に垂直に取りつけられている。棒の回転軸まわりの慣性モーメントは I で、棒は回転軸のまわりに yz 平面内を滑らかに回転するものとする。 z 軸は鉛直方向を向き、 z の値が減少する方向に重力加速度 g で重力がはたらいているものとする。図に示したように、鉛直下向きから測った棒の傾きの角度を θ とする。



図

- (1) 回転軸の位置が不動であるとして、棒にはたらく回転軸まわりのトルクを θ の関数として求めよ。
- (2) 前問と同様、回転軸の位置が不動であるとして、 θ の微小振動を考える。微小振動の角振動数 ω_0 を求めよ。

以下では、回転軸の位置が y 方向に加速度 $a(t)$ で運動する場合を考える。

- (3) このとき、 θ の運動を表す運動方程式を書き下せ。

[ヒント] θ は回転軸の運動とともに並進する非慣性座標系における角度座標であることに注意せよ。

以下の問には、 M, ℓ, g, I を用いずに、小問 (2) で定義した ω_0 を用いて答えよ。

- (4) 回転軸の運動の加速度が

$$a(t) = \epsilon g \sin(\Omega t) \quad (\text{A})$$

となるように、 y 方向に振動させる。 θ の振幅が小さいとして、 θ に関して線形化し、 $\Omega \neq \omega_0$ の場合に、角振動数 Ω で周期振動する θ の特解を求めよ。

- (5) 小問 (4)において、 $\epsilon \ll 1$ であっても、 Ω が ω_0 に十分近い場合、線形近似が破綻する。その場合についても適用できる近似解を得るために、振動の非線形性を取り入れることを考える。運動方程式において θ の 3 次の非線形項までを取り入れる近似をする。ただし、 ϵ が乗じられた項に関しては θ の高次の補正をすべて無視するものとする。このとき、 θ_1 、および、 θ_3 を定数として、近似解が

$$\theta = \theta_1 \sin(\Omega t) + \theta_3 \sin(3\Omega t) \quad (\text{B})$$

という高次の高調波を無視する形で与えられるとして、 θ_1 を決定する代数方程式を導け。ただし、 $|\theta_3|$ は、たしかに、 $O(|\theta_1|^3)$ であると仮定してよいものとする。

(このページは白紙である)

I-2 (電磁気学) (100 点)

図に示すように, $z = 0$ に水平 (xy 平面内) に置かれた半径 a の円形回路 C に時間変化する電流 $I(t)$ を流す (ここで, z 軸を中心軸とする円柱座標系の $+φ$ 方向を正の向きとする). また, $z = z_0$ ($z_0 > 0$) に円形回路と同じ半径 a の金属で作られた円環を水平に置く. 円環の中心は z 軸に一致している. ただし, 重力加速度は $-z$ 方向に g で与えられるものとする. なお, 解答は SI 単位系で述べよ.

- (1) 円形回路 C の磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を, μ_0 , a , I を用いて表せ. ただし, μ_0 は真空中での透磁率である.
- (2) この円電流により発生する, 位置 \vec{r} でのベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ は, 磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を用いて

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A})$$

と書ける. $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ を計算することで得られる磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を, 磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を用いて表せ. ここで,

$$\nabla \times (f \vec{A}) = f (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f), \quad (\text{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{C})$$

(\vec{A} , \vec{B} , \vec{C} はベクトル, f はスカラー) 等を用いても良い.

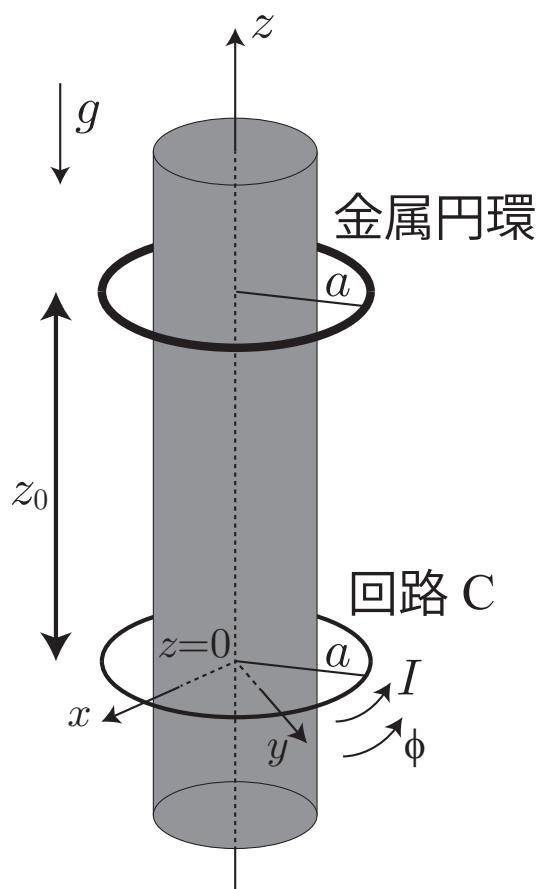
以降の小問では, $z_0 \gg a$ であるとし, $\rho^2 + z_0^2 \approx z_0^2$ (ただし, ρ は z 軸からの距離であり, $0 \leq \rho \leq a$) のように主要項のみを残す近似をして良い.

- (3) 円環の抵抗を R とする時, 円環に流れる電流 I^{ring} を求めよ. また, $dI/dt > 0$ の時の I^{ring} の向きを答えよ. ただし, 円環は固定されているとし, 電流 I^{ring} による誘導磁場は考慮しない.

以下では円環の運動に着目する. 円環は z 方向のみに滑らかに動くものとする.

- (4) 円環の質量を m , z 方向の速度を v_z として, この円環の重心の運動方程式を示せ. ただし, a , I , R , g を含む形で表せ. また, 円環が動くことに伴う誘導電流は無視できるほど小さいとする.
- (5) 円形回路 C に流れる電流を $dI^2/dt = C_0$ (C_0 は正の定数) となるように時間変化させると, 円環にかかる力と重力がつり合った. この時の高さ z_0 を求めよ.

- (6) $t = 0$ で、小問 (5) で求めたつり合いの位置 $z = z_0$ で円環が静止していたとする。この時に、極めて短時間で不連続に回路 C における電流を $dI^2/dt = C_0 + C_1\delta(t)$ ($\delta(t)$ はデルタ関数、 C_1 は正の定数) のように変化させる。この直後 ($t = t_1$ 、ただし、 t_1 は十分小さい) の円環の速度 $v_z(t = t_1)$ を求めよ。



図

I-3A (物理数学) (50 点)

たかだか有限個の不連続点を持つ絶対積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ は

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad (\text{A})$$

で与えられる。一方、フーリエ逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{+ikx} \quad (\text{B})$$

で与えられる。以下の問い合わせよ。

(1) 以下の積分を $\tilde{f}(k)$ を用いた一重積分の形で求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2. \quad (\text{C})$$

[ヒント] 以下に示すフーリエ変換を用いたデルタ関数の表示を用いてもよい

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}. \quad (\text{D})$$

(2) T を正の実数として、以下のように定義される関数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq T) \\ 0 & (|x| > T) \end{cases} \quad (\text{E})$$

をフーリエ変換せよ。

(3) 以下の積分を求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin^2 k}{k^2}. \quad (\text{F})$$

[ヒント] 前問の結果を用いて求めることもできる。

I-3B (統計熱力学) (50 点)

三次元空間で、化学ポテンシャル 0 のボース・アインシュタイン分布をしている光子気体を考える。高温では、純粋な光子気体から電子陽電子対の生成



が可能になる。これらが温度 T の熱平衡状態にある理想気体とみなせるとして以下の間に答えよ。ただし、電子の運動量の大きさを p 、電子の質量を m 、光速を c 、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とせよ。また、電子のエネルギーは $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ で与えられる。

- (1) 温度 T 、化学ポテンシャル μ_- を持つ自由電子の数密度は、

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\boxed{\alpha}} \quad (\text{B})$$

と書ける。 $\boxed{\alpha}$ に入る表式を運動量の大きさ p の関数で表せ。

- (2) 上記の熱平衡状態にある電子および陽電子気体のそれぞれの化学ポテンシャルを求めよ。

ここで、温度が十分高く、 $k_B T \gg mc^2$ を満たすとして、以下の間に答えよ。

- (3) 上記の熱平衡状態にある電子の数密度が温度 T の何乗に比例するかを答えよ。
- (4) 上記の熱平衡状態にある気体の全エネルギー密度を求めよ。ここで、
 $\int_0^\infty x^3(e^x + 1)^{-1}dx = 7\pi^4/120$, $\int_0^\infty x^3(e^x - 1)^{-1}dx = \pi^4/15$ を用いてよい。

平成30年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

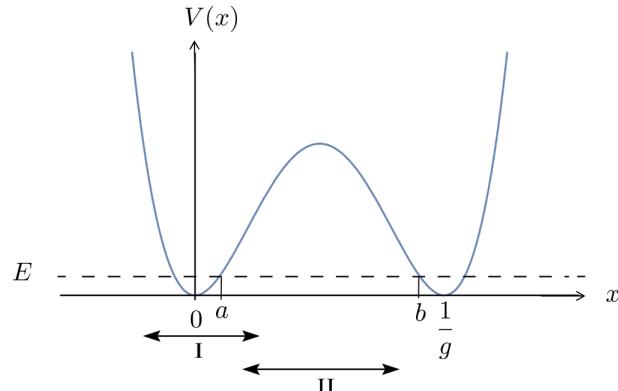
- (1) 問題II-1, II-2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 問題II-3は独立した2つの小問、II-3A, II-3Bからなる。解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (3) 各解答用紙は横長に使用して、表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (4) 解答用紙は3問（計4枚）すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (5) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである。

II-1 (量子力学) (100 点)

次の形のハミルトニアン H で与えられる 1 次元ポテンシャル問題を考える:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x), \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2(1 - gx)^2. \quad (\text{A})$$

ここで, x は位置を表す座標, p は x に共役な運動量, m は質量, g は非負の実数とする. $g = 0$ のとき, 系は $x = 0$ の周りで角振動数 ω で振動する調和振動子となり, 基底エネルギー E は, $E = \hbar\omega/2$ となる. ただし, \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである. 一方, $g \neq 0$ の場合には, $V(x)$ は図に示す 2 重井戸ポテンシャルとなり, 基底エネルギーは, トンネル効果による非摂動論的補正により, $E = \hbar\omega(\nu + 1/2)$ と変更される. 以下では $g \neq 0$ とし, ν を求める. ここで, 基底エネルギーは 2 重井戸ポテンシャルの障壁の高さより十分小さいとし, その g に対する摂動論的補正は考えないことにとする.



図

- (1) 図の $|x| \ll 1/g$ が成り立つ領域 I では, $V(x)$ は放物線 $V_0(x) = m\omega^2x^2/2$ で近似できる. $E = \hbar\omega(\nu + 1/2)$ として, 領域 I におけるシュレディンガー方程式 $H\psi(x) = E\psi(x)$ の解を求めよ. ここで, ν が整数でないとき, 解はエルミート多項式では書けないことに注意して, 解を求める際には, 以下の性質をもつ特殊関数 $D_\lambda(z)$ を用いよ. $D_\lambda(z)$ は以下の微分方程式

$$\frac{d^2D_\lambda(z)}{dz^2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_\lambda(z) = 0 \quad (\text{B})$$

を満たし, λ が非負の整数でなく, $z \gg 1$ の場合には

$$D_\lambda(z) \approx z^\lambda e^{-z^2/4},$$

$$D_\lambda(-z) \approx (-z)^\lambda e^{-z^2/4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)} e^{z^2/4} z^{-\lambda-1} \quad (\text{C})$$

の漸近形をもつ. ただし, $\Gamma(z)$ はガンマ関数である. ここで, 解は $x \rightarrow -\infty$ でゼロに収束するとし, 規格化定数が必要な場合は A とおくこと.

図のトンネル障壁内の領域 II における基底状態の波動関数は WKB 近似で求めることができ、 $k(x) = \sqrt{2m(V(x) - E)}$ として、

$$\psi(x) \approx \frac{C_1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x dy k(y)\right) + \frac{C_2}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^x dy k(y)\right) \quad (\text{D})$$

の形で与えられる。ここで、 a は図に示す $V(a) = E$ を満たす点であり、 $b = g^{-1} - a$ として、基底状態が $\psi(x) = \psi(g^{-1} - x)$ を満たすことから、 C_1/C_2 は

$$\frac{C_1}{C_2} = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^b dy k(y)\right) \quad (\text{E})$$

となる。基底エネルギーがトンネル障壁の高さより十分小さいとき、 $a \ll 1/g$ が成り立つことに注意して、以下の間に答えよ。

(2) x が領域 II にあり、 $a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ を満たすとき、式 (D) の $\psi(x)$ は

$$\psi(x) \approx B_1 x^{\gamma_1} \exp\left(\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) + B_2 x^{\gamma_2} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \quad (\text{F})$$

の漸近形をもつ。 B_i および γ_i を C_i ($i = 1, 2$) および E を用いて表せ。ここで、 $a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ のときに成り立つ近似式

$$\int_a^x dy k(y) \approx \int_a^x dy \left(m\omega y - \frac{E}{\omega y}\right) \quad (\text{G})$$

および $a \approx \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ を使ってよい。

(3) 領域 I と領域 II は $a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ において重なりをもつ。重なり合った領域で、小問 (1) で求めた領域 I の解の漸近形と小問 (2) で求めた領域 II の漸近形を比較して、 C_1/C_2 を ν の関数として表せ。

(4) 小問 (3) の解に式 (E) の C_1/C_2 を代入すると、 ν の満たす式が得られる。基底エネルギーがトンネル障壁の高さより十分小さいとき、 ν はゼロに近くなる。このとき $g^2\hbar/(m\omega) \ll 1$ となることに注意し、 ν を求めよ。ここで、 ν がゼロに近いとき、 $\Gamma(-\nu) \approx -1/\nu$ が成り立ち、また $g^2\hbar/(m\omega)$ が十分小さいとき

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^b dy k(y)\right) \approx \exp\left(-\frac{m\omega}{6g^2\hbar}\right) \exp\left(\frac{2E}{\hbar\omega}\right) \left(\frac{g^2\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{E}{\hbar\omega}} \left(\frac{2E}{\hbar\omega}\right)^{-\frac{E}{\hbar\omega}} \quad (\text{H})$$

と近似できることを使ってよい。

II-2 (統計力学) (100 点)

一次元イジング模型は以下のハミルトニアンによって記述される:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - H \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (\text{A})$$

ここで J は交換相互作用の結合定数であり, H は磁場である. σ_i は i 番目のサイトにおけるスピンの状態を表すスピン変数であり, $\sigma_i = \pm 1$ のいずれかの値をとる. 分配関数は全てのスピン変数について和をとることにより

$$Z = \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}_{i=1}^N} \exp(-\beta \mathcal{H}) \quad (\text{B})$$

と表される. ただし, $\sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}_{i=1}^N}$ は各サイトにおけるスピン変数 σ_i ($1 \leq i \leq N$) について和をとることを意味する. また, ボルツマン定数を k_B とし, $\beta = 1/(k_B T)$ とする. 以下では $J > 0$ を考え, 温度 T および $H \geq 0$ を変化させるとする.

分配関数を求める際に一部のスピン変数についての和を先に計算し, その影響をパラメータの変化で表現することで, 相転移の臨界的な振る舞いを知ることができる. ここでは一次元イジング模型に対してこの方法を適用する. 以下では $j = \beta J$, $h = \beta H$ とし, 無次元化したハミルトニアン $\tilde{\mathcal{H}}_N(j, h) = \beta \mathcal{H}$ を考える:

$$\tilde{\mathcal{H}}_N(j, h) = -j \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i + \sigma_{i+1}). \quad (\text{C})$$

- (1) まず簡単のため, 3つのスピンからなる系を考える. 3つのスピン変数のうち σ_2 についてのみ和をとることにより

$$\sum_{\sigma_2=\pm 1} \exp \left\{ j(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3) + \frac{h}{2} (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3) \right\} = A \exp \left\{ j'(\sigma_1 \sigma_3) + \frac{h'}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right\} \quad (\text{D})$$

という等式が得られる. この等式に $(\sigma_1, \sigma_3) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ をそれぞれ代入し, $e^{4j'}$, $e^{4h'}$ を j, h の関数で表せ. この問題において, A は求めなくてよい.

- (2) 前問の結果を用いて, $x' \equiv e^{-4j'}$, $y' \equiv e^{-2h'}$ を $x \equiv e^{-4j}$, $y \equiv e^{-2h}$ によって表せ.

次に周期境界条件 $\sigma_{i+N} = \sigma_i$ を課す. $N = 2^n$ とし, 整数 n は十分に大きいものとする. 分配関数 $Z_N = \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}_{i=1}^N} \exp \left[-\tilde{\mathcal{H}}_N(j, h) \right]$ において偶数番号のサイトのスピン変数についてのみ和をとることによって,

$$Z_N = A^{N/2} \cdot Z_{\frac{N}{2}}' = A^{N/2} \sum_{\{\sigma_k=\pm 1\}_{k=1}^{N/2}} \exp \left[-\tilde{\mathcal{H}}_{\frac{N}{2}}(j', h') \right] \quad (\text{E})$$

と書ける。この操作により一次元イジング模型のパラメータ j, h が j', h' に変化したとみなすことができる。

- (3) この操作によってパラメータが変化しない点を固定点と呼ぶ。また、相転移が起こる臨界点は固定点であると考えられる。ここでは j, h の代わりに x, y をパラメータとし、一次元イジング模型における固定点を求めよう。固定点の一つは $(x, y) = (0, 1)$ であり、物理的には磁場をゼロにしてから低温極限を取った状態に対応する。その他の固定点を求め、それぞれの固定点に対応する温度を述べよ。
- (4) $(x, y) = (0, 1)$ の固定点近傍におけるパラメータの変化について考えよう。パラメータ (x, y) が

- (a) $x = \epsilon, y = 1$
- (b) $x = 0, y = 1 - \epsilon$

で与えられるそれぞれの場合に、この操作によりパラメータ (x, y) が固定点から離れていくか、あるいは近づいていくか、それぞれ述べよ。ただし、 $0 < \epsilon \ll 1$ とする。

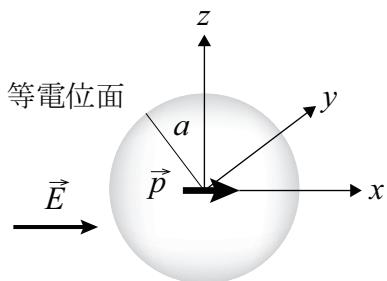
II-3A (力学) (50 点)

重力ポテンシャルの下での質点の運動について考える。質点の質量を m , 万有引力定数を G , 重心の質量を M として以下の問いに答えよ。ただし, 重心は十分重く動かないとする。また, 重力ポテンシャルは無限遠点で 0 とする。

- (1) ポテンシャル中心から質点までの位置ベクトルを \vec{r} , その大きさを $r (= |\vec{r}|)$ として系のラグランジアンを書け。
- (2) 速度の絶対値の二乗 $|\dot{\vec{r}}|^2$ を二次元の極座標で表せ。また, 小問(1)のラグランジアンから質点の運動方程式を導き, 角運動量の大きさ ℓ が保存することを示せ。
- (3) 系のエネルギー E と角運動量の大きさ ℓ は保存量であるのでこれを定数とみなし, 動径方向の運動エネルギー $mr^2/2$ を r の関数として表せ。運動方程式が解を持つのは $mr^2/2 \geq 0$ の場合であるが, このうち特に質点がポテンシャルに拘束されて橈円軌道を描く場合, 長軸および短軸の両端では動径方向の運動エネルギー $mr^2/2$ がゼロになることに注意して, 橈円軌道を描くための系のエネルギー範囲を求めよ。ただし ℓ は与えられているものとせよ。

II-3B (電磁気学) (50 点)

図のような直角座標系において、 x 軸に平行な一様な外部電場 \vec{E} の中に新たに電気双極子モーメント \vec{p} を原点に置くことを考える。なお、双極子は外部電場と同じ向きに配置したとする。以下では真空中で考え、その誘電率を ϵ_0 とする。解答はSI単位系を用いて答えよ。



図

- (1) 図に示すように、双極子まわりには球状の等電位面がある。その球面の半径 a を $p = |\vec{p}|$ および $E = |\vec{E}|$ を用いて求めよ。
- (2) さらに帯電していない半径 a の導体球殼を置くことを考える。球殼の厚みは十分に薄いものとし、球殼の中心は双極子の位置と同じとする。そのとき、導体球殼の外側表面に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ (θ は x 軸からの角度)。

平成30年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題III-1の解答は解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 問題III-2は独立した2つの小問、III-2A, III-2Bからなる。解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (3) 英語の問題である問題III-3は小問III-3A, III-3Bからなる。解答は解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (4) 各解答用紙は横長に使用して、表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (5) 解答用紙は3問（計4枚）すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (6) 問題冊子は表紙を含めて9ページまである。

III-1 (複合問題：電磁気学，力学，前期量子論) (100点)

一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ 中における電子(電荷 $-e$, 質量 m)の運動(サイクロトロン運動)を考える。ただし、電子は磁場に垂直に運動しているとし、座標系は直角座標とする。なお、解答はSI単位系で述べよ。

- (1) 電子は磁力線の周りを角振動数 ω_c で旋回運動する。 ω_c を求めよ。

次に、一様磁場のない状態で、陽子(電荷 $+e$)の周りを電子が遠心力とクーロン力がつりあつた状態で公転運動している状況を考える。これは水素原子の古典模型(いわゆる長岡模型)である。ただし、陽子は電子より十分重いので、静止していると近似して良い。

- (2) 公転運動の半径が r の円軌道のとき公転運動の角振動数 ω_0 を求めよ。ただし、真空中の誘電率は ϵ_0 とする。

- (3) 電子の軌道は電子の運動量の大きさ mv で決まる物質波の波長 $\lambda = h/(mv)$ より短い軌道を取ることができない。つまり最小の軌道長 $2\pi r$ は λ に等しい。これから最小の軌道半径 r_B (ボーア半径)を求めよ。ただし、 h はプランク定数である。

さて、上記の水素原子の古典模型に一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ をかけたときの磁場に垂直な面(xy 面)における電子の運動を考えよう。

- (4) 電子の運動方程式を、直角座標を用いて書き下せ。

- (5) 磁場が弱いとき($\omega_0 \gg \omega_c$ のとき)，基本的に電子は陽子の周りを公転運動する。公転運動の角振動数 ω は、ローレンツ力により磁場がないときの値 ω_0 からわずかにずれ、 $\omega = \omega_0 \pm \delta\omega$ となる。このときの $\delta\omega$ を求めよ。ただし、簡単のため、電子の軌道半径 r は一定として計算せよ。(この角振動数のずれが、ゼーマン効果における振動数のずれに対応する。このモデルはゼーマン効果の最も簡単な古典モデルである。)

(このページは白紙である)

III-2A (量子力学) (50 点)

固定された剛体球ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases} \quad (\text{A})$$

による質量 μ の粒子の散乱を考える。散乱状態を定常状態として扱う。ここで、動径座標を $r = |\vec{r}|$ 、光速を c 、プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とする。

(1) エネルギー E で時刻 t の波動関数を

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (\text{B})$$

と表したとき、シュレディンガーア方程式から $\varphi(\vec{r})$ の満たす式を書き下せ。

(2) s -波（軌道角運動量量子数 $\ell = 0$ ）の解を

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\chi_0(r)}{r} \quad (\text{C})$$

とおいて求めよ。ただし、規格化定数は問わない。

(3) s -波の全散乱断面積を求めよ。また、エネルギー E を固定して半径 a を変えたとき、 s -波の全散乱断面積の最大と最小の値を導け。ここで、 z 軸の負の方向から波数 $k = \sqrt{2\mu E / \hbar^2}$ の平面波が入射している場合、 z 軸を軸とする極座標を (r, θ, ϕ) として、無限遠方での境界条件は

$$\varphi(\vec{r}) = e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (\text{D})$$

という形をとり、全散乱断面積は、

$$\sigma_{\text{tot}} = \int |f(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{E})$$

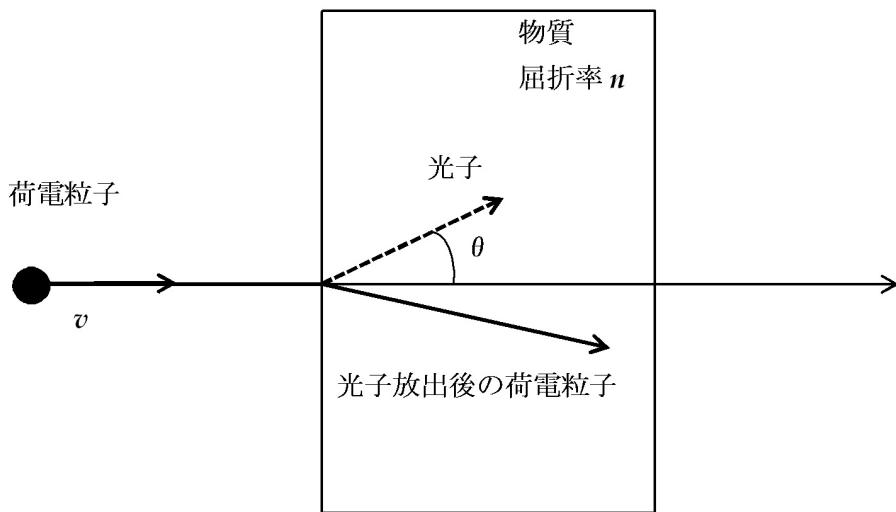
であることを用いてよい。また、平面波の球面波展開

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (\text{F})$$

を用いてよい。ここで、 $P_{\ell}(x)$ はルジャンドル多項式、 $j_{\ell}(x)$ は球ベッセル関数で、 $j_0(kr) = \sin(kr)/kr$ である。

III-2B (実験) (50 点)

物質中を荷電粒子が通過する際に光子を放出する現象（チェレンコフ放射）について考える。図に示すように、真空中を運動する荷電粒子が、屈折率 $n(n > 1)$ を持つ物質に入射した直後に起こるチェレンコフ放射について考える。荷電粒子の速さ v は光速 c に近いものとし、特殊相対論的効果を考慮に入れて以下の問い合わせよ。



図

- (1) 物質入射前の荷電粒子について、その運動量の大きさ p を、荷電粒子のエネルギー E および速さ v で表せ。
- (2) 放出された光子について、そのエネルギーを E_γ とすると、運動量の大きさはいくらか。
- (3) 荷電粒子あるいは荷電粒子と光子の系について、物質への入射前後でエネルギーおよび運動量が保存するとして、入射方向に対して物質内で光子が放出された角度 θ の余弦を E および E_γ を用いて表せ。荷電粒子については物質中の速さの変化は無視できるとする。
- (4) 小問 (3) の条件が成り立つとして、光子が放出されるための v の条件を求めよ。

III-3A (英語) (50 点)

以下は 1968 年 8 月に TIME 誌に掲載されたドイツの化学者・物理学者 Otto Hahn 氏に関する記事である。よく読んで後の質問に答えよ。文中のアスタリスク (*) のついた単語の意味は末尾に注釈として書いてある。

The nuclear age dawned in the wrong place, at the wrong time. In 1938, outside Berlin's Kaiser Wilhelm Institute for Chemistry, Nazis paraded in the streets. Inside, German Chemist Otto Hahn patiently probed the secrets of the atom. He repeated an experiment that had been tried by half a dozen researchers, including Enrico Fermi in Rome and Irene Joliot-Curie in Paris.

With his primitive equipment, he repeatedly bombarded the element uranium with neutrons in an effort to create new man-made radioactive isotopes*. According to the theories of the time, the neutrons should have combined with the nucleus of the uranium atoms to produce heavier, unstable isotopes. Yet he kept finding lighter atoms of barium. Gradually, the inexplicable presence of the barium, which is only about half the weight of uranium, persuaded Hahn that he had done what had always been considered impossible: he had split the atom.

Hahn's innate* caution stopped him from making so bold a claim in public. "As nuclear chemists," Hahn and his young collaborator, Fritz Strassmann, wrote later, "we cannot bring ourselves to take this step, so contradictory to all the experience of nuclear physics." But Hahn's former coworker, Physicist Lise Meitner, had no such hesitation. Hearing of the experiment (A) in exile in Sweden, she not only proclaimed that Hahn and Strassmann had achieved nuclear fission, but also calculated that each atom of uranium had released 20 million times as much energy as a comparable amount of TNT*.

Fission's frightening potential quickly became apparent to scientists everywhere. But Hitler considered the new theoretical physics too contaminated by Jews like Lise to be worthy of much support. Although not a Jew himself, Hahn was no friend of the regime. Throughout World War II, he was left undisturbed at his work, exploring radioactive isotopes. In the U.S., where scientists assumed that the Germans were following up his atom-splitting success, the race was on to achieve fission on a more Promethean* scale. In 1945, after Germany's defeat, the results were displayed at Hiroshima.

One of many German scientists interned by the Allies, Hahn heard the news of the atomic bomb in England. Normally a man of dry, underplayed wit, he became so depressed by the appalling application of fission that his colleagues feared that he might commit suicide. (B) Once back in Germany, Hahn struggled to rebuild the shattered remains of his old institute as president of its successor, the Max

Planck Society*. He also became an outspoken foe of atomic weapons. In 1957, joining the 17 other prominent West German scientists in the Göttingen Manifesto, he vowed never to take part in nuclear research for military purposes.

In postwar Germany, Hahn became the most revered elder statesman of what had once been Europe's proudest scientific establishment. He collected many awards, including a Nobel Prize in chemistry for his discovery of fission. But he always accepted such honors with characteristic C. Visiting an atomic reactor or nuclear power station, he would shrug modestly: "It has all been the work of others." In a soon-to-be-published 300-page memoir, he brushed off his historic work in fewer than five pages. Last week, at the age of 89, the father of fission died peacefully in his beloved Göttingen.

注釈： isotope: 同位体, innate: 生まれつきの, TNT: トリニトロトルエン, Promethean: ギリシャ神話のプロメテウスのような(スケールが大きく恐ろしいことを意味する), Max Planck Society: マックスプランク学術振興協会.

- (1) Hahn 氏の行った実験とその結果, それがどのような当時の常識を覆したかを日本語で簡潔に説明せよ.
- (2) 下線 A, in exile とはどういうことか説明せよ.
- (3) ドイツが fission の研究を追求しなかった理由と, アメリカが追及した理由をそれぞれ文中から読み取れる範囲で日本語で書け.
- (4) 下線 B の部分を和訳せよ.
- (5) Cに入る最も適切な単語を以下から一つ選べ.
 - (a) politeness (b) sincerity (c) fervor (d) humility

III-3B (英語) (50点)

以下は日本学術会議が1980年に採択した科学者憲章に基づいた文章である。下線部A, B, Cを英訳せよ。

科学は、合理と実証をむねとして、真理を追究し、また、その成果を応用することによって、人間の生活を豊かにする。(A) 科学における真理の探求とその成果の応用は、人間の最も高度に発達した知的活動に属する。(B) これに携わる科学者は、真実を尊重し、独断を排し、真理に対する純粋にして厳正な精神を堅持するよう努めなければならない。科学の健全な発達を図り、有益な応用を推進することは、社会の要請であるとともに、科学者の果たすべき任務である。科学者は、その任務を遂行するため、つぎの5項目を遵守する。

- 自己の研究の意義と目的を自覚し、人類の福祉と世界の平和に貢献する。
- 学問の自由を擁護し、研究における創意を尊重する。
- (C) 諸科学の調和ある発展を重んじ、科学の精神と知識の普及を図る。
- 科学の無視と乱用を警戒し、それらの危険を排除するよう努力する。
- 科学の国際性を重んじ、世界の科学者との交流に努める。

(このページは白紙である)

平成29年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

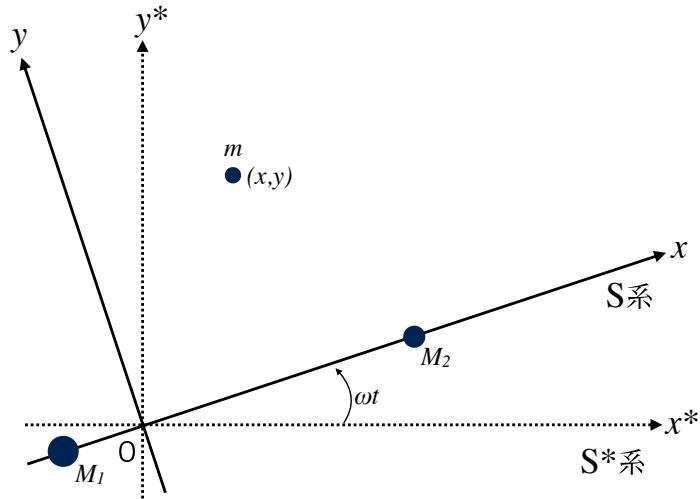
- (1) この問題冊子は、問題I-1, I-2, I-3の3問からなり、表紙を含めて7ページまである。
- (2) 各問の解答はそれぞれ、所定の解答用紙に記入せよ。各解答用紙の上部の欄に受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の表、裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない。
- (3) 問題I-1, I-2については、解答用紙の裏面を用いてもよい。
- (4) 問題I-3は独立した3つの小問A, B, Cからなる。それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け。
- (5) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。

I-1 (力学) (100 点)

質量がそれぞれ M_1 と M_2 である天体 1 と天体 2 が、共通重心の周りを円運動している。簡単のため、以下では運動は x - y 平面のみとする。天体 1 と天体 2 の距離を a とすると、これら 2 天体は重心を原点とする x^* - y^* 平面上にある慣性系 (S^* 系) において、回転角速度 $\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$ で原点のまわりを回る。一方で、 x - y 平面上でこれら 2 天体を x 軸上に常に保ちながら角速度 ω で回転する回転座標系 (S 系) を仮定すると、 S^* 系における成分 (x^*, y^*) は S 系での成分 (x, y) を用いて以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A})$$

また、 $\mu_1 \equiv M_1/(M_1 + M_2)$ および $\mu_2 \equiv M_2/(M_1 + M_2)$ を用いると、 S 系における天体 1 と天体 2 の座標はそれぞれ $(-\mu_2 a, 0)$, $(\mu_1 a, 0)$ と書ける。



- (1) 質量 M_1, M_2 に対して質量 m が無視できるほど小さい天体 3 を考える。 S 系からみたときの天体 3 に対するラグランジアンを書け。式を見やすくするために $r_1 \equiv \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}$ および $r_2 \equiv \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2}$ を用いてもよい（以下同様）。
- (2) 天体 3 の S 系における運動方程式を x, y 成分それぞれについて書き下せ。
- (3) S 系からみて、天体 3 の加速度と速度がともに 0 になる平衡点（ラグランジュ点）が 5 つ存在することが知られている。そのうち、 x 軸上に無い点が 2 つあり、 $y > 0$ のものを L_4 点、 $y < 0$ のものを L_5 点と呼ぶ。それらの座標を求めよ。

- (4) これより平衡点における天体3の線形安定性を考える。平衡点 (x_e, y_e) から
の微小変位を ξ, η とすると、微小変位についての運動方程式は2次の項を
無視して

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + a\xi + b\eta = 0 \quad (\text{B})$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + b\xi + c\eta = 0 \quad (\text{C})$$

と書ける。ただし a, b, c は適当な定数である。解の形を $\xi = Ae^{\lambda t}, \eta = Be^{\lambda t}$
とおいたとき、 $A = B = 0$ 以外の解が存在するための条件を示せ。

- (5) L_4 点において

$$a = -\frac{3}{4}\omega^2, \quad b = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu_1)\omega^2, \quad c = -\frac{9}{4}\omega^2 \quad (\text{D})$$

である。天体3の L_4 点周りの微小運動が不安定とならないための条件を
示せ。

- (6) 微小変位についての運動方程式 (B), (C) を仮に

$$\ddot{\xi} + a\xi + b\eta = 0 \quad (\text{E})$$

$$\ddot{\eta} + b\xi + c\eta = 0 \quad (\text{F})$$

に変更すると（ただし a, b, c の値は式 (D) のままする），平衡点周り微小
運動は常に不安定となることを示せ。

- (7) L_4 点における重力ポテンシャルは上に凸となっており、重力のみが働く場
合には L_4 点周りの微小運動は常に不安定である。問 (5) で L_4 点が不安定
とならない場合があった理由を簡潔に述べよ。

I-2 (量子力学) (100 点)

引力ポテンシャル $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ を及ぼしあった質量 m の 2 粒子からなる量子系の束縛状態を考える。 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は 2 粒子の座標である。重心座標 $\mathbf{r}_G = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ と 相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \equiv (x, y)$ とに分けて考え、以下、重心は止まっているものとし、 $|\mathbf{r}| = r$ と書く。

先ず、2 次元で、ポテンシャルが円筒対称な場合

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r > a), \\ -V_0 & (r < a), \end{cases} \quad (\text{A})$$

$(V_0 > 0)$ を考える。

(1) 2 次元ラプラシアン ∇^2 を円筒座標 (r, θ) で表わせ。ただし、結果のみでも良い。また、 $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$ である。

(2) 定常状態の波動関数 ψ を、角運動量の z 成分 L_z の固有値 $\hbar n$ に対する固有関数 $\Phi_n(\theta)$ で

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n R_n \Phi_n(\theta) \quad (\text{B})$$

のように展開した時の係数 R_n は動径 r の関数である。 $R_n(r)$ が満たす微分方程式を書け。ただし、エネルギー固有値は E と表記せよ。

(3) 引力の強さは無次元パラメタ

$$\lambda = \frac{m V_0 a^2}{4 \hbar^2} \quad (\text{C})$$

で表現できる。引力が弱く、 λ が十分に小さい時の基底状態のエネルギー固有値 E を λ と V_0 を用いて表わせ。

ただし、2 つの微分方程式

$$\frac{d^2 X_{\pm}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dX_{\pm}}{dz} \pm X_{\pm} = 0 \quad (\text{D})$$

の物理的に許される解の $z \rightarrow 0$ における漸近的ふるまいがそれぞれ、

$$X_+(z) \simeq 1 - z^2/4, \quad X_-(z) \simeq \ln(c/z) \quad (\text{E})$$

(c は正の定数) であることを用いてよい。

次に, x 座標上の引力ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & (x < 0), \\ 0 & (0 < x < b), \\ V_2 & (x > b), \end{cases} \quad (\text{F})$$

の下にある 1 次元系を考える. ただし, $V_1 \geq V_2 > 0$ であるとする.

- (4) $V_1 = V_2$ の場合には, 円筒対称な 2 次元ポテンシャル (A) の場合と同様, 束縛状態は必ず存在することを示せ.
- (5) $V_1 > V_2$ である場合には, 束縛状態が一つも存在しない状況が生まれる. そのための条件を, mV_2b^2/\hbar^2 と比 V_2/V_1 を用いて表わせ.

I-3A (物理数学) (30 点)

$g = g(x, t)$ に関する拡散型偏微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, 0 \leq t) \quad (\text{A})$$

を, $g(x, t=0) = \delta(x)$ なる条件のもとに解け. 必要なら, 積分公式

$$\int_0^\infty \exp(-a\lambda^2) \cos(b\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad (\text{B})$$

を使ってもよい.

I-3B (統計力学) (40 点)

二つの縮退していないエネルギー準位 0, Δ をもつ独立な粒子 N 個からなる系が, 温度 T で熱平衡にある.

- (1) この系の分配関数 $Z(T)$ を書き下せ. ただし, ボルツマン定数は k とする.
- (2) $Z(T)$ を用いて, この系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(T)$ を求めよ.
- (3) $F(T)$ を用いて, この系のエントロピー $S(T)$ を求めよ.
- (4) $T \rightarrow \infty$ での S の値を求めよ. また, その物理的意味について式を含めて簡潔に説明せよ.
- (5) エントロピーは T , F と内部エネルギー U だけを使って表現できる. その表式を書き下せ.
- (6) $U(T)$ を求めよ.

I-3C (力学) (30 点)

半径 R の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ の中に質量 m の質点が置かれている。ここで鉛直方向上向きに z 座標をとる。質点には鉛直方向下向きに重力（加速度 g ）が働いており、質点は球面から離れずに滑らかに運動するとする。この時、次の問いに答えよ。

- (1) 質点を、球面の南極 $(x, y, z) = (0, 0, -R)$ 付近で、 $y = 0$ を保ちながら微小振動をさせた時の振動の周期 T を求めよ。
- (2) 質点が高さ $z = -z_0$ ($z_0 > 0$) の水平面上で円運動する場合の速度 v_0 を求めよ。
- (3) $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ に置かれた質点に y 方向の速度 v_1 を与えたとする。その後、質点は球面上を運動し、その高さ z も時間変動する。高さの最小値 z_1 を求めよ。

平成 29 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) この問題冊子は、問題 II-1, II-2, II-3 の 3 問からなり、表紙を含めて 7 ページまである。
- (2) 各問の解答はそれぞれ、所定の解答用紙に記入せよ。各解答用紙の上部の欄に受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の表、裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない。
- (3) 問題 II-1, II-2 については、解答用紙の裏面を用いててもよい。
- (4) 問題 II-3 は独立した 4 つの小問 A, B, C, D からなる。それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け。
- (5) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。

II-1 (電磁気) (100 点)

真空中の Maxwell 方程式は、電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} 、電荷密度 ρ 、電流密度 \mathbf{j} 、真空の誘電率 ϵ_0 および真空の透磁率 μ_0 を用いて以下のように表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (\text{C})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{D})$$

- (1) 物質中において、分極電荷密度を ρ_d とし、分極電荷密度は分極ベクトル \mathbf{P} によって $\rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ と表すことができるものとする。ここで分極電流密度 \mathbf{j}_d は以下のように表される。

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (\text{E})$$

この式から分極電荷密度と分極電流密度において電荷保存則が成り立っていることを示せ。

- (2) ここで、分極電荷密度以外の電荷密度を ρ_e 、これによる電流密度を \mathbf{j}_e とする。また、磁化ベクトルを \mathbf{M} とし、磁化電流密度を \mathbf{j}_m とすると $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ と表すことができる。電束密度を \mathbf{D} 、磁場を \mathbf{H} と表すことにし、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 、および $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ が成立しているものとしたときに、 ρ_e および \mathbf{j}_e を用いて、(A)–(D) に相当するこの物質中の Maxwell 方程式を導け。

ここで、電荷 e を持つイオンと電荷 $-e$ の電子が、それぞれ単位体積あたり N 個存在している有限の領域を考える。この領域に、角振動数 ω 、振幅 \mathbf{E}_0 の電磁波が作用した場合を考える。なお、これ以降、電子の速さは光の速さ c に比べて充分小さいものとし、イオンの運動およびイオンによる電磁波の散乱は無視できるものとする。また、電子間の距離は十分大きく、それらの相互作用は考えなくて良い。

- (3) 電子の運動方程式は、質量を m 、その変位を \mathbf{x} として以下のように与えられるものとする。このとき、電流密度 \mathbf{j} を求めよ。ただし、電子の全体としての並進運動は考えず、振動している成分だけを考えればよい。

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_0 \sin(\omega t) \quad (\text{F})$$

- (4) ここで、このような真空中の有限領域における電子とイオンの集団を、角振動数 ω に依存した誘電率 $\epsilon(\omega)$ および透磁率 $\mu(\omega)$ の媒質として考えることができるものとする。このとき、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ および $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が成り立っているものとして、この媒質の誘電率 ϵ を求めよ。

- (5) 次に, 電子に変位 x に比例する弾性的な束縛力 $-m\omega_0^2x$ が加わった場合の電子の運動方程式を書け.
- (6) 問(5)の場合の媒質の屈折率 n を求めよ. また, n^2 の ω 依存性の概形を図示せよ. ただし, $\omega \neq \omega_0$ であるとする. なお, n は $\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ で与えられるものとする.

II-2 (統計熱力学) (100 点)

分子の占有体積 b による斥力と、分子数 N に比例し体積 V に反比例する平均場的な引力が作用する分子をファンデルワールス分子と呼ぶことにしよう。温度 T の熱浴に接した体積 V の箱の中に N 個のファンデルワールス分子がある系について、以下の間に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k とせよ。

- (1) (a) この系のポテンシャルエネルギーを $-a\frac{N^2}{V}$ で近似し、ハミルトニアンが

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - a\frac{N^2}{V} \quad (\text{A})$$

で与えられるとする。ここで \mathbf{p}_i は i 番目の分子の運動量、 m は個々の分子の質量であり、 a は正の定数とする。さらに、分子はそれぞれの占有体積を除いた有効体積 $V_f = V - Nb$ 中で熱運動をしていると考える。この系の分配関数を求めよ。

- (b) 問 (1)(a) の結果からファンデルワールスの状態方程式を求めよ。ただし、圧力を P とする。
- (2) ファンデルワールスの状態方程式はある温度 T_c （臨界温度）以下では、分子系が自発的に縮小することを許してしまう。したがって、 $T < T_c$ ではある範囲の V に対してこの状態方程式が熱平衡状態を記述していない。この点を修正して、 $T < T_c$ における熱平衡状態の等温状態曲線を描け。ただし、横軸を体積、縦軸を圧力にとること。
- (3) $T = T_c$ のときに圧縮率が無限大となる点を臨界点と呼ぶ。臨界点における圧力 P_c 、温度 T_c 、体積 V_c を求めよ。
- (4) 臨界温度以上では系は一様な流体状態であり、臨界温度以下では気体と液体は圧力、温度が等しく、体積が異なる状態として区別が可能である。臨界温度よりやや低い温度で、気体と液体が共存し得る最大の体積 V_g と最小の体積 V_ℓ が

$$\frac{V_g - V_\ell}{V_c} \simeq \text{const.} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta \quad (\text{B})$$

を満たす。この臨界指数 β を求めよ。

(このページは白紙である)

II-3A (物理数学) (25 点)

- (1) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ で $f(x) = x^2$ と表される周期 2 の周期関数をフーリエ級数展開せよ.
- (2) 問(1)の結果を用いて、以下の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{A})$$

II-3B (力学) (25 点)

複数の質点がばねでつながった系の振動について考える。その最も簡単な例は、質量 m の質点 1 と質点 2 が弾性定数 K のばねによって図 1 のように壁につながれ、質点間は弾性定数が G ($G \neq K$) のばねでつながっている系である。ただし、二つの壁の間の距離は三つのばねの自然長の和に等しいものとする。この系に縦振動(質点の x 方向の振動)モードは二つあり、その各々における質点の振動の様子は図 2 のように描写される。図 2 の矢印は質点 j の変位ベクトル x_j ($j = 1, 2$) を表わす。

これを参考に、図 3 のように、図 1 の弾性定数 G のばねが質量 $2m$ の質点 3 を伴った二本の弾性定数 G のばねに置き換えられた系を考える。ただし、この場合においても壁の間の距離は四つのばねの自然長の和に等しいものとする。図 3 の系の各縦振動モードの固有振動数を求めよ。また、各モードにおける各質点の変位ベクトル x_j ($j = 1, 2, 3$) の様子を図 2 の例にならって図示せよ。ただし、結果は $G \gg K$ の近似の下で導出すればよいものとする。

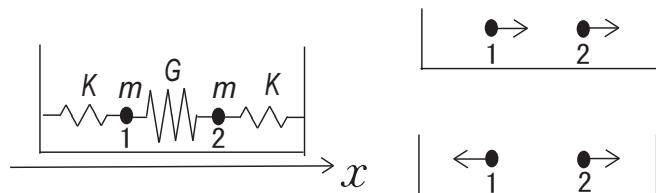


図 1

図 2

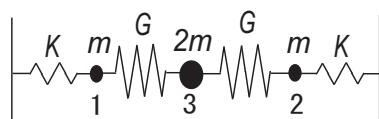


図 3

II-3C (量子力学) (25 点)

大きさ $1/2$ の 2 個のスピン \hat{s}_1, \hat{s}_2 からなる系のハミルトニアンが、式 (B) で与えられている。相互作用の強さとして $J > 0$ とし、 $0 \leq x \leq 1$ とする。

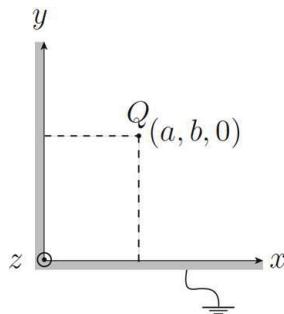
$$\mathcal{H} = (1-x)J\hat{s}_1^z\hat{s}_2^z + xJ\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \quad (\text{B})$$

ここで、 \hat{s}_1^z, \hat{s}_2^z はスピンの z 成分を表す。

- (1) $x = 0$ の場合について、エネルギー（固有値）と縮退度を求めよ。ただし、 \hat{s}_1^z と \hat{s}_2^z はそれぞれ固有値 $\pm 1/2$ を取りうることに注意せよ。
- (2) $x = 1$ の場合について、エネルギー（固有値）と縮退度を求めよ。ただし、大きさ S のスピンに対して \hat{S}^2 の固有値が $S(S+1)$ であることに注意せよ。また関係式 $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ を使ってよい。
- (3) x が 0 から 1 まで変化したとき、エネルギー準位がどのように変わるかを、横軸を x 、縦軸をエネルギーとして縮退度も含めて概略を図示せよ。

II-3D (電磁気学) (25 点)

図のような座標系 (x, y, z) において、接地した 2 枚の半無限導体を直交させたもの (zx 面 ($x > 0$) と yz 面 ($y > 0$)) を考える。ここで、点電荷 Q を位置 $(a, b, 0)$ に置いた場合の電位を求めたい。なお、図において矢印の方向をそれぞれ x と y の正方向とする。



- (1) 導体によって区切られ、点電荷 Q がある領域、すなわち $x > 0$ かつ $y > 0$ における電位を求めよ。
- (2) 問 (1) で求めた電位が導体のある位置 (zx 面 ($x > 0$) および yz 面 ($y > 0$)) で 0 になっていることを示せ。

平成 29 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) この問題冊子は、問題 III-1, III-2, III-3 の 3 問からなり、表紙を含めて 9 ページまである。
- (2) 各問の解答はそれぞれ、所定の解答用紙に記入せよ。各解答用紙の上部の欄に受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の表、裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない。
- (3) 問題 III-1 については、解答用紙の裏面を用いてもよい。
- (4) 問題 III-2 は独立した 3 つの小問 A, B, C からなる。それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け。
- (5) 問題 III-3 は 2 つの小問 A, B からなる英語の問題である。それぞれの解答を解答用紙の指定された欄に書け。
- (6) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。

III-1 (量子力学) (100 点)

一次元量子系の粒子 (質量 m) が調和振動子のポテンシャル $V_0(x)$

$$V_0(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad (\text{A})$$

に束縛されているとする。このとき次の問い合わせよ。

- (1) 生成消滅演算子 a^\dagger, a を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p \quad (\text{B})$$

のように座標 x と運動量 $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の線形結合として定義すると基底状態は $a|0\rangle = 0$ で定義される。これをを利用して、束縛状態のエネルギー固有値が n を 0 以上の整数として $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ で与えられることを導け。また、対応する (規格化された) エネルギー固有状態 $|n\rangle$ を基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 a^\dagger を作用させて構成せよ。

さて、一次元量子系のポテンシャルが

$$V(x, t) = \frac{m}{2}\omega^2(x - \eta(t))^2 \quad (\text{C})$$

のように時間に依存して変化する場合における量子系の時間発展を調べたい。 $t < 0$ においては、パラメーター $\eta(t)$ は時間に依存しない定数 η_0 であり、量子系はポテンシャルが

$$V_1(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x - \eta_0)^2 \quad (\text{D})$$

で与えられるハミルトニアンの基底状態にあるものと仮定する。時刻 $t = 0$ 以降 $\eta(t)$ は時間に依存して変化する。このとき以下の問い合わせよ。

- (2) 上記のように量子系が時間発展する場合に、座標 x と運動量 p の時刻 t における期待値 $\bar{x}(t)$ と $\bar{p}(t)$ の時間発展を定める微分方程式を求めよ。

- (3) 関数 $\eta(t)$ が、次のような時刻 t の一次関数 (T を正の定数として)

$$\eta(t) = \eta_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (0 < t < T) \quad (\text{E})$$

で与えられる場合を考える。また $t = T$ 以降は $\eta(t) = 0$ のままで変化しないとする。従って $t > T$ ではポテンシャルが $V_0(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ で与えられる調和振動子となる。このとき、任意の時刻 $t(> 0)$ における期待値 $\bar{x}(t)$ と $\bar{p}(t)$ を決定せよ。

- (4) 特に問(3)において、 T が非常に大きい場合(時間変化が非常に遅い場合)を考える。この場合に時刻 $t > T$ において、問題(1)で定義したエネルギー固有状態 $|n\rangle$ が観測される確率 P_n を求めよ。
- (5) 特に問(3)において、 T が非常に小さい場合(時間変化が瞬時の場合)を考える。この場合に時刻 $t > T$ において、問題(1)で定義したエネルギー固有状態 $|n\rangle$ が観測される確率 P_n を求めよ。
- (6) $\eta(t)$ が $\eta(0) = \eta_0$ を満たす一般の関数であるときに、 x と p の期待値からのずれを表す $(x - \bar{x}(t))^2$ と $(p - \bar{p}(t))^2$ の期待値を計算し、不確定性原理との関係を述べよ。

III-2A (計測と統計) (40 点)

実数データ $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ の各々が、同一の分布から独立に取り出されたとして以下の問い合わせよ。

(1) データ x_i が区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ の一様分布に従う場合、

- (a) $N = 2$ のサンプル平均 $\bar{x} \equiv (x_1 + x_2)/2$ の従う分布を求め、図示せよ。
 (ヒント) 次式を計算すればよい。

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{12} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx_1 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx_2 \delta \left(\bar{x} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

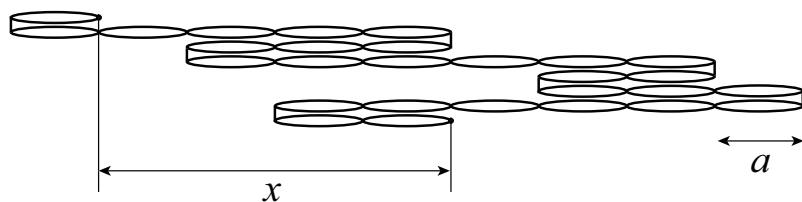
- (b) N が大きい極限で、サンプル平均 $\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ の従う分布
 関数は、平均 \boxed{A} 、分散 \boxed{B} の \boxed{C} 分布である。これら
 A, B, C を記せ。また、解答の背景にある定理は何かを述べよ。

(2) データ x_i が平均 0、分散 1 の正規分布に従う場合、

- (a) $N = 2$ のサンプル平均 $\bar{x} \equiv (x_1 + x_2)/2$ の従う分布を求め、図示せよ。
 (b) $N = 2$ のサンプル平均を不偏分散 $s^2 = (x_1 - x_2)^2/2$ の平方根を使って
 定義される量 $t \equiv \frac{\bar{x}}{s/\sqrt{2}} = \frac{x_1 + x_2}{|x_1 - x_2|}$ の従う分布を求め、図示せよ。

III-2B (統計力学) (30 点)

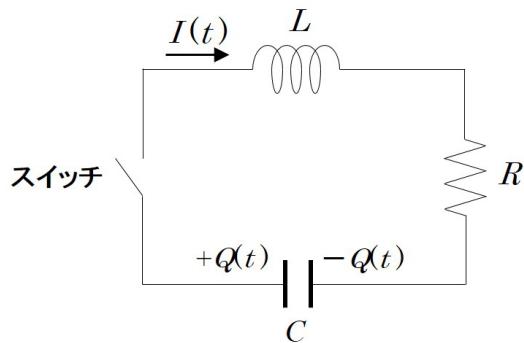
図のように、 N 個の要素からなる鎖が一次元上に置かれている。要素の長さは a で、折れ曲がりの角度は 0° または 180° であるとする。また、要素の質量は m とする。



- (1) 鎖の両端が置かれた位置の間の距離 x が与えられたときの、系のエントロピーを求めよ。
- (2) この鎖が温度 T の熱浴に接して平衡状態にあるとき、両端に加わる力 f を $\frac{x}{Na}$ の関数として求めよ。ただし、 N が大きいとき、 $\log N! \simeq N \log N - N$ を使ってよい。
- (3) $\left| \frac{x}{Na} \right|$ が十分小さいときの力 f を求めよ。この力は温度、要素の質量にどう依存するかを述べよ。

III-2C (線形回路) (30 点)

図のように、インダクタンス L のコイル、抵抗 R 、容量 C のコンデンサ、スイッチからなる回路がある。コンデンサに電荷 Q_0 が帯電した状態で、 $t = 0$ にスイッチを入れる。以下では、 $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ の場合を考える。



- (1) コイル、抵抗、コンデンサの電位差の和が 0 になることを用いて、コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ に対する微分方程式を立てよ。
- (2) 問(1)で立てた方程式に、 $Q(t) = Ae^{\lambda t}$ を代入し、 λ を求めよ。ただし、 A は定数とする。
- (3) コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ 、および回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。ただし、 $Q(t = 0) = Q_0$ 、 $I(t = 0) = 0$ 、 $I(t)$ は図の矢印の向きを正とする。

III-3A (Expanding Universe) (60 points)

The excerpt below is taken from Saul Perlmutter's 2011 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions [Q-a]–[Q-k] below in English. Write your answers in clear, easy-to-read text.

Apparently we have a Universe that is dominated by some new ingredient, some previously unknown “Dark Energy” that makes the Universe expand faster and faster. It is so rare that you come across something that is not part of our current physics model! This is one of the best [Q-a] outcomes that you could ever get in a project like this. I feel very lucky to be able to work on this at all, because here was a project where any result you could discover would be exciting: We might have found that the Universe was infinite, or that it was finite and going to come to an end. [Q-b] Been have results of either great these would. Instead we found an answer that was even better than “great”, in that it was a surprise. [Q-c]This is not something that you can even wish for in science.

This outcome is a perfect example of how science can so often be [Q-k] two-headed. On the one hand, it was only possible to discover what came as a surprise to all of us because our field, physics, had already made such great progress in understanding the Universe. [Q-d] Less than a century ago we had no idea that there was more to the Universe than our own Milky Way. [Q-e] (e1) immense size of (e2) Universe, (e3) fact that it is expanding, (e4) fact that it is populated with such (e5) things as (e6) exploding stars — all this and more had to be discovered before we could do (e7) work that led us to [Q-f] contemplate (e8) unknown form of energy that accounts for more than two-thirds of everything there is.

It’s amazing how much we figured out, but on the other hand it’s amazing how big a mystery has opened up as a result, and how much we still have left to discover. One of the real pleasures of doing science — which will continue to be true, I believe, [Q-g] on any given day for the next few centuries — is that we have so much knowledge to build upon, yet there is still so much for us to discover.

These two aspects of science remind us that science is a method, not a finished product. [Q-h] Or know it where will we lead don’t what new, seemingly [Q-i] will magical us give the future in powers it. We never know whether what we find will turn out to be useful, but we do know that in the past, [Q-j] we made a major step forward in our understanding of how the world works, we’ve ultimately been able to solve more problems, including very practical problems. I think that’s the only way we can proceed as basic scientists: We try to see what we can understand, and we hope it opens more possibilities for what we can do in the world.

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-a] Which of the following words could replace the underlined text and not alter the meaning of the sentence?

- | | |
|------------------|---------------|
| a1) explanations | a2) results |
| a3) fallouts | a4) reactions |

[Q-b] The original sentence in this position has been scrambled. Reconstruct it using only the underlined words. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.

[Q-c] Which of the following best describes what the author thinks is something one cannot even wish for in science?

- | | |
|---|-----------------------------------|
| c1) to discover that the Universe is infinite | c2) to work on something exciting |
| c3) to achieve a great result | c4) to obtain a surprising result |

[Q-d] Write a complete sentence with about 20 words that describes the **role** of the underlined sentence in this paragraph using only one of the following words: motivation, example, conclusion, unification.

[Q-e] Fill in each of the blanks (e1)–(e8) with the correct article (“the”, “an”, or “a”). Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write “ϕ” in the answer space.

[Q-f] Which of the following best describes the meaning of the underlined word?

- | | |
|---------------------------|------------------------|
| f1) think seriously about | f2) disregard entirely |
| f3) observe | f4) make a guess about |

[Q-g] Based on the underlined text, how frequently does the author expect to enjoy science?

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| g1) every single day | g2) as much as possible |
| g3) with great frequency | g4) often, but not always |

[Q-h] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.

[Q-i] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.

[Q-j] From the following list of words choose the best one to replace [Q-j] in this sentence.

- | | |
|------------|--------------|
| j1) if | j2) wherever |
| j3) always | j4) whenever |

[Q-k] Using about 50 or 60 words and your own expressions explain what is meant when the author describes science as being “two-headed”.

III-3B (Thermodynamic Square) (40 points)

Read the following passage and answer questions [Q-1]–[Q-6] as well as questions [Q-A]–[Q-C] below in English. Write your answers in clear, easy-to-read text.

In 1929, Professor Max Born delivered a lecture on Maxwell's relations in which he used a diagram like the one in Figure 1. This “thermodynamic square” contains a great deal of information:

- (1) The four fundamental thermodynamic potentials U , F , G , and H are exhibited at the edges of the square and are flanked* at the corners by [Q-1] the thermodynamic parameters upon which they depend:

$$U = U(S, V), \quad (1a)$$

$$F = [Q-2], \quad (1b)$$

$$G = G(T, P), \quad (1c)$$

$$H = H(S, P). \quad (1d)$$

- (2) The two arrows provide plus and minus signs for the differential form of the first law of thermodynamics. If an arrow points away from a thermodynamic parameter, the differential of that parameter has a positive sign. On the other hand, [Q-3]. This convention gives

$$dU = TdS - PdV, \quad (2a)$$

$$dF = -SdT - PdV, \quad (2b)$$

$$dG = [Q-4], \quad (2c)$$

$$dH = TdS + VdP. \quad (2d)$$

- (3) The Maxwell relations can be obtained. They depend only upon the parameters at the corners of the square, and the orientation of the arrows. Figure 2 depicts two situations which lead to [Q-5] the Maxwell relations,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S, \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (3b)$$

- (4) It can be extended to magnetic systems. In order to express the thermodynamic relations for magnetic materials, P and V are replaced by the applied magnetic field H_a and the magnetization M . However, in the thermodynamic square a minus sign is needed for M for the following reason: Application of P results in the reduction of V , while [Q-6].

*flank (*v.t.*): to place something on each side of

Adopted from: Ronald Forrest Fox, J. Chem. Edu. **53** (1976) 441-442.

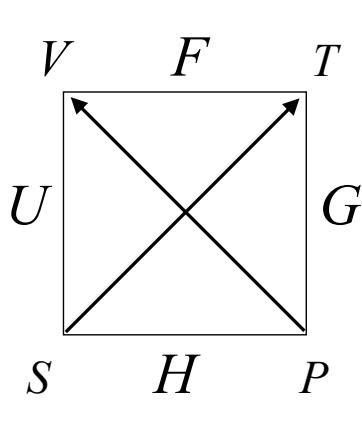


Figure 1. Thermodynamic square.

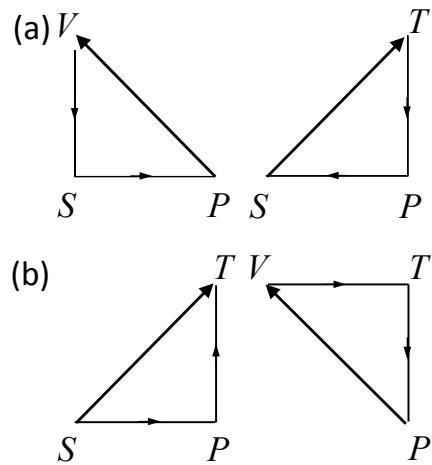


Figure 2. Maxwell relation diagrams.

[1] Answer the following questions concerning the passage above.

- [Q-1]** Among the thermodynamic parameters, T and P represent temperature and pressure, respectively. What do V and S represent, respectively?
- [Q-2]** Fill in the brackets with a suitable expression.
- [Q-3]** Fill in the brackets to complete the sentence.
- [Q-4]** Fill in the brackets with a suitable expression.
- [Q-5]** Write down the other two Maxwell relations (in any order).
- [Q-6]** Complete the sentence by providing an appropriate phrase in the brackets.

[2] Answer the following questions concerning a magnetic system.

- [Q-A]** Draw a thermodynamic square for a magnetic system.
- [Q-B]** For a magnetic system, write down the relation corresponding to Equation (2b).
- [Q-C]** Write down the Maxwell relation for the partial derivative of magnetization with respect to temperature at constant magnetic field.

平成 28 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1 , I-2 , I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いててもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

I-1 (力学) (100 点)

図 1 のように、地面に固定された水平な面 F の上に、半径 R 、長さ L のパイプ A が 1 本置かれている。このパイプ A の壁の厚さは無視できるものとし、質量分布はパイプ A の表面全面にわたって均等で、パイプ A 全体の質量が M であるものとする。このパイプ A の内面には、パイプ A の中心軸 O と平行に長さ L の棒 B が 1 本固定されている。棒 B の太さは無視できるものとし、質量分布は棒 B の長さ方向にわたって均等で、棒 B 全体の質量はパイプ A の質量 M の α 倍であるものとする。また、重力加速度は図 1 の下向きに g で与えられるものとする。このパイプ A と棒 B からなる複合体 AB の運動について考察してみよう。以下の各問への解答に際してはその導出過程も含めて記述すること。

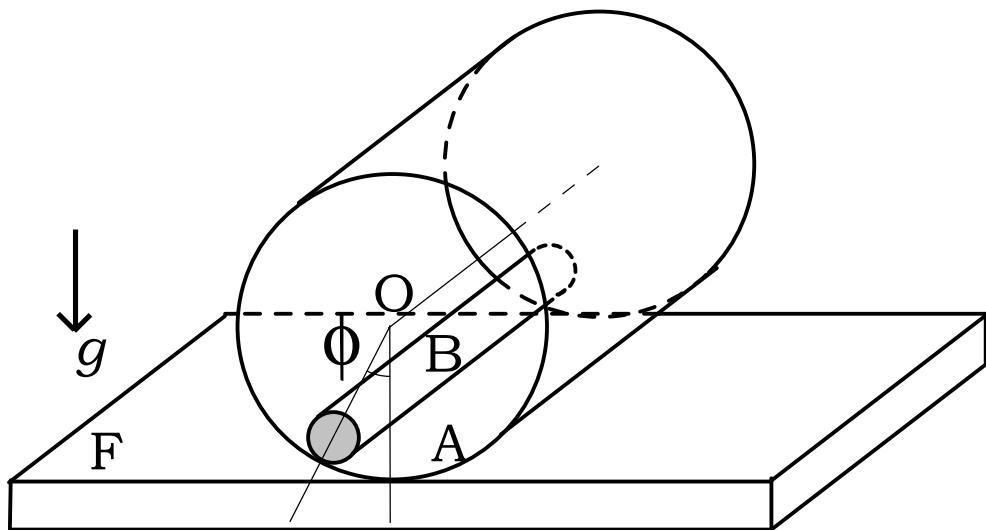


図 1

- (1) 複合体 AB の重心を通り中心軸 O に平行な慣性中心軸を C とする。パイプ A の中心軸 O 周りのパイプ A の回転角度を ϕ 、その時間微分を $\dot{\phi}$ として、複合体 AB の慣性中心軸 C まわりの回転の運動エネルギーを求めよ。ただし角度 ϕ は複合体 AB の平衡位置を基準として定義するものとする。
- (2) 複合体 AB の全運動エネルギーを求めよ。
- (3) 複合体 AB の運動エネルギーと重力ポテンシャルからなるラグランジアンを角度 ϕ を一般化座標として求めよ。

ここで、複合体 AB が面 F の上で滑ることなく回転して運動する場合を考える。このような場合を完全に粗い面と呼び、ころがりに起因してエネルギーの散逸が発生しないことを意味している。

- (4) 問(3)のラグランジアンを基にして、 ϕ についてのラグランジュの運動方程式を求めよ。
- (5) 複合体 AB が平衡位置の近傍に留まるとき、 ϕ が十分小さいと近似することにより、複合体 AB が平衡位置の近傍で周期運動することを示し、その角振動数 ω を求めよ。

次に、時刻 $t = 0$ のときに複合体 AB がその平衡位置 $\phi = 0$ にあるが静止しておらず、パイプ A の中心軸 O が自身と直交する水平軸の向き（図 1 の右向き）に速度 V で動いている場合を考える。

- (6) 複合体 AB は、初速 V が小さいときは $t = 0$ のときの位置のまわりで振動し続けるが、ある初速 V_0 を越えると一方向に回転し続ける状態に移り変わることを示し、 V_0 を求めよ。
- (7) 複合体 AB は、初速 V が V_0 より大きいときは一方向に回転し続ける。その運動の特徴を、 $\dot{\phi}$ を ϕ の関数としてグラフにすることで示せ。

I-2 (電磁気学) (100 点)

電気を流す導体が運動したときに誘起される電場，磁場，電流について考察してみよう。真空中で電場 E ，磁場 B の満たすマクスウェル方程式は， ε_0 ， μ_0 をそれぞれ真空の誘電率と透磁率， ρ を電荷密度， j を電流密度として，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{A})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{C})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{D})$$

で与えられるものとする。以下の設問に答えよ。ただし解答に際しては、その導出過程も示すこと。

まず、導体の運動により誘起される電場と磁場について考察する。半径 a の円板状で十分に広くて薄い金属極板を持った平行板コンデンサーが、一定の直流電圧 V の電池に接続されている（図1）。極板の厚みは十分に薄く無視できる。またコンデンサー内に発生する電場はコンデンサー外部には漏れないものとする。電池をつないだまま、コンデンサーの極板間の距離を $d + h \sin \omega t$ ($d > h$) で振動させた。このとき金属極板の振動により、コンデンサー内部に交流磁場が発生する。発生した交流磁場により誘起される電場の効果は無視できる程度に、極板の振動はゆっくりしているものとし、コンデンサー内の電場は一様であると近似できるとする。

- (1) 式(A)で与えられるガウスの法則を、金属極板にあてはめることにより、時刻 t でのコンデンサーの容量を求めよ。
- (2) コンデンサーの中心軸からの距離 r の点における、時刻 t での交流磁場の方向と大きさを求めよ。
- (3) 真空中の単位体積あたりの電磁場のエネルギーは、 $\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2$ と書ける。マクスウェル方程式により、電流が存在しないとき、閉じた空間の電磁場のエネルギーの時間変化は、その空間の表面を通過するベクトル S を使って表すことができることを示し、 S を \mathbf{E} と \mathbf{B} を用いて表せ。なお、必要なら任意のベクトル \mathbf{A} と \mathbf{C} について成り立つ関係式、 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C})$ を用いよ。
- (4) 極板間に発生する電磁場のエネルギーの流れの向きを図で示し、その大きさを求めよ。

- (5) 電磁場のエネルギーの流れにより，時刻 $t=0$ から $t = \frac{\pi}{2\omega}$ の間に，極板間の空間から外に流れ出た電磁場のエネルギーを求めよ．さらにこのエネルギーと，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの， $t=0$ から $t = \frac{\pi}{2\omega}$ の間の変化との大小関係を議論せよ．

次に，磁場中を運動する導体に誘起される電場と電流を考察する．半径 A ，電気伝導度 σ の金属円柱が，中心軸に垂直な方向の一様で一定の磁場 B の中に，一定の角速度 Ω で中心軸のまわりを回転している(図2)．磁場方向を x 軸，中心軸方向を z 軸，回転方向を z 軸正方向から見て反時計回りとする．なお，円柱は十分に長く端の効果は考えなくてもよいものとし，磁場のないときには中心軸まわりに摩擦なく自由に回転できるものとする．また金属の透磁率は μ_0 とせよ．なお，金属円柱は帯電していないものとする．

- (6) 一定の磁場中で，導体が運動すると導体内部に電場が発生する．電場の方向と大きさを中心軸からの距離 r と x 軸から測った角度 θ の関数として表せ．なお，誘起される電流により生ずる磁場の影響と渦電流の効果は無視してよい．
- (7) 問(6)のとき，円柱の中心軸に垂直な断面における電流密度を r, θ の関数として求め，この断面における等電流面を図示せよ．
- (8) 一定の角速度 Ω で回転させるために必要な，円柱の単位長さあたりの仕事率を求めよ．

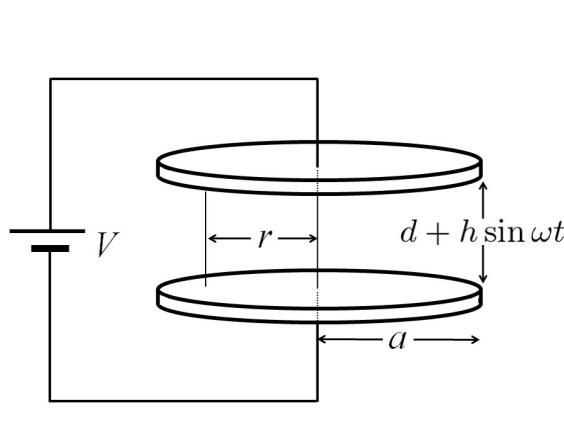


図 1

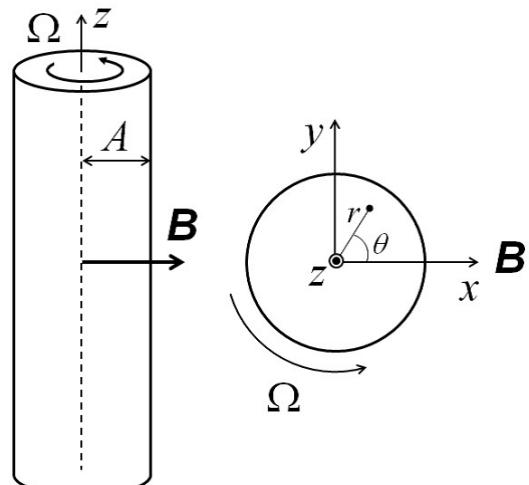


図 2

I-3 (統計力学) (100 点)

古典的な気体粒子が格子上にのみ存在できるとする格子気体を考えよう。いま体積 V の領域に M 個の格子点を置き、各格子点は体積 $v_0 = V/M$ を占めるとする。 $N(< M)$ 個の気体粒子が温度 T の熱平衡状態にあるとし、以下、化学ポテンシャル μ が与えられたグランドカノニカル分布を考える。ただし、古典系の場合は、運動エネルギーの部分の計算は位置座標に関する計算とは独立に実行できるので、ここでは位置座標に関する部分のみを考える。ボルツマン定数を k_B として以下の間に答えよ。

- (1) まず粒子が相互作用しない場合を考えよう。このときハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = -\mu \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (\text{A})$$

と与えられる。ただし、 ρ_i は、各格子点上に気体粒子がある場合は 1、ない場合は 0 をとるものとする。この系の大分配関数

$$\Xi_0 = \sum_{\{\rho_i=0,1\}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_0}{k_B T}\right) \quad (\text{B})$$

を T, μ, M の関数として求めよ。

- (2) グランドポテンシャルを $J = -k_B T \ln \Xi_0$ と定義すると、ヘルムホルツの自由エネルギー F との間に $J = F - \mu N$ の関係がある。内部エネルギー U 、エントロピー S 、圧力 P に対して $dU = TdS - PdV + \mu dN$ が成り立つことを用いて dJ を求めよ。またこの結果を利用して、 μ を与えたときの平均粒子数 N を計算し、 μ を格子点あたりの平均粒子数 $n = N/M$ の関数として求めよ。
- (3) 体積が $V = v_0 M$ を通じて M で決まることに注意して、問(2)の結果を参照しながら、圧力 P を n の関数として求めよ。また気体が十分希薄である場合、すなわち $n \ll 1$ のとき、理想気体の状態方程式が得られることを示せ。

次に粒子間に相互作用のある場合を考える。2つの気体粒子が互いに隣接しているときだけ引力が働き $-\epsilon (< 0)$ のエネルギーを持つとすると、ハミルトニアンは以下のようになる：

$$\mathcal{H} = -\epsilon \sum_{(i,j)} \rho_i \rho_j - \mu \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (\text{C})$$

ただし、 (i, j) は全ての互いに隣接する格子点の対について和をとることを表す。また、ある格子点に隣接している格子点の数(配位数)を z とする。

- (4) 平均場近似を用いて \mathcal{H} を変形しよう。まず、 ρ_i を平均値 $\langle \rho_i \rangle$ とその周りのゆらぎ $\delta\rho_i$ に分けて $\rho_i = \langle \rho_i \rangle + \delta\rho_i$ と表したうえで式(C)に代入し、ゆらぎの相関の項 $\delta\rho_i\delta\rho_j$ を無視する。最後に、ゆらぎ $\delta\rho_i$ を ρ_i と $\langle \rho_i \rangle$ を用いて消去すると、平均場近似で得られるハミルトニアン \mathcal{H}^* の主要部分は式(A)で μ を有効化学ポテンシャル μ^* におきかえたものになる。平均値 $\langle \rho_i \rangle$ は格子点 i によらず $\langle \rho_i \rangle = \langle \rho \rangle$ であるとして \mathcal{H}^* を求め、有効化学ポテンシャル μ^* を $z, \epsilon, \langle \rho \rangle, \mu$ を用いて表せ。

- (5) \mathcal{H}^* に対応する大分配関数

$$\Xi^* = \sum_{\{\rho_i=0,1\}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}^*}{k_B T}\right) \quad (\text{D})$$

とグランドポテンシャル J^* を求めよ。

- (6) 問(1)-(3)で得られた理想気体の結果を参考しながら格子点あたりの粒子数 $n = N/M$ を計算し、これが $\langle \rho \rangle$ に等しいことから、 n を μ の関数として定める自己整合方程式を求めよ。またこの方程式を解くことにより、 μ を n の関数として求めよ。
- (7) 圧力 P を n の関数として定めよ。さらに気体が希薄である場合には、この結果が、 n の2次までの近似でファンデルワールスの状態方程式

$$P = \frac{N_A k_B T}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (\text{E})$$

に帰着することを示し、 a と b を ϵ, v_0, z, N_A を用いて表せ。ただし、 N_A はアボガドロ数で、 V_m は気体1モル当たりの体積である。また、必要ならば $|x| \ll 1$ の時に成り立つ展開 $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots, x/(1-x) = x + x^2 + \dots$ を用いてよい。

平成 28 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1 , II-2 , II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いててもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

II-1 (力学) (100 点)

2 次元平面に束縛された、中心力場中の質点の運動について考える。中心力ポテンシャル Φ は、中心からの距離 r のべき関数として $\Phi(r) = -C/r^\alpha$ のように表せるとする ($C > 0$ とする)。質点の質量を 1 として、以下の各問に答えよ。

- (1) 質点の運動を表すラグランジアンを、極座標表示における一般化座標 (r, ϕ) を用いて書き下し、 (r, ϕ) が満たす運動方程式を導出せよ。
- (2) 保存量があることを用いて、 r の運動方程式が $\ddot{r} + dV_{\text{eff}}(r)/dr = 0$ と表せることを示し、関数 $V_{\text{eff}}(r)$ を保存量とポテンシャル $\Phi(r)$ で書き表せ。ただし、 $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(r) = 0$ とする。
- (3) 質点の運動が半径 r_0 、角速度 Ω_0 の等速円運動で表される場合を考える。この時、 Ω_0 を C, α, r_0 を用いて表せ。また、この円運動が安定に存在するために、 α が満たす条件を求めよ（ここでは、 r 方向の微小摂動に対して、変位が微小に留まる場合を安定、時間とともに増大する場合を不安定という）

以下では、 α は前問で求めた条件を満たすとし、半径 r_0 、角速度 Ω_0 の円運動まわりの摂動について考える。

- (4) 円運動からの微小変位を次のように表す：

$$r = r_0(1 + \epsilon x), \quad \phi = \Omega_0 t + \epsilon y \quad (\text{A})$$

ここで、 ϵ は振幅の大きさを表す無次元の微小量である ($\epsilon \ll 1$)。 (A) 式を問 (1) で求めた運動方程式に代入し、 ϵ の 1 次のオーダーで成り立つ式を書き下すと、以下のような摂動方程式が得られる：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B})$$

行列 M, N を角速度 Ω_0 と α を用いて表わせ。

- (5) 前問で得られた摂動方程式 (B) において、振動解 $(x, y) = (A, B)e^{i\omega t}$ を仮定する。 $\omega \neq 0$ の場合に、振動数 ω と角速度 Ω_0 の間に成り立つ関係を導け。
- (6) 摂動方程式 (B) の右辺に、 $(f_x, f_y) = -k(x, y)$ という力がつけ加わったとする。これは質点つきのバネ（バネ定数 k ）を半径 $r = r_0$ にとりつけて等速回転させた場合に対応する。振動解 $(x, y) = (A, B)e^{i\omega t}$ を仮定して、振動数 ω を求めると、バネ定数 k が正でも ω が純虚数になり、解が指数関数的に増大する場合がある（つまり不安定）。解が指数関数的に増大する条件を、バネ定数に対する条件として Ω_0 を用いて表せ。

(このページは白紙である)

II-2 (量子力学) (100 点)

一次元(座標 x)量子系の一粒子問題(質量 m)において、図1のようなポテンシャル $V(x)$ に束縛された状態を考える。

$$V(x) = -U \quad b \leq |x| \leq a + b \quad (\text{A})$$

$$V(x) = 0 \quad |x| < b, |x| > a + b \quad (\text{B})$$

ただし、 $U > 0, a > 0, b \geq 0$ とする。束縛エネルギー $E (< 0)$ の状態の波動関数(実関数とする)は以下のシュレディンガー方程式を満たす。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + V(x) \phi(x) = E \phi(x) \quad (\text{C})$$

パリティ変換 $x \rightarrow -x$ に対する $V(x)$ の対称性より、束縛状態は $\phi(x) = \phi(-x)$ の正パリティ状態もしくは $\phi(x) = -\phi(-x)$ の負パリティ状態である。以下では、 a と U を一定に保ったまま、 b を変えたときに束縛状態がどのように変化するか考える。

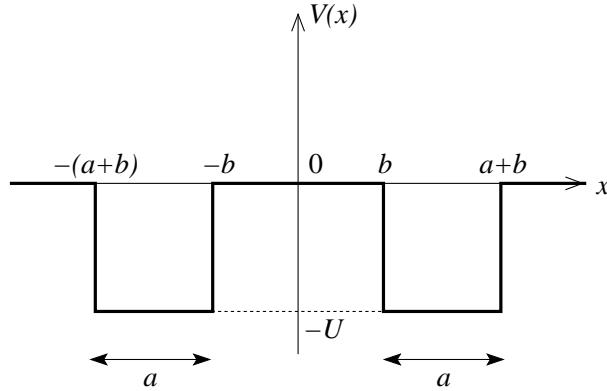


図1

(1) $b = 0$ の場合を考える。このときのポテンシャルを $V^{(0)}(x)$ と表すと、 $V^{(0)}(x)$ は幅 $2a$ 、深さ U の井戸型ポテンシャルである。 $\gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ 、 $\beta = \sqrt{\frac{2m(E+U)}{\hbar^2}}$ として、正および負パリティ状態のそれについて、 γ を β と a で表せ。

(2) $b > 0$ で b が十分小さいとき、 $b = 0$ の場合の束縛エネルギー $E^{(0)}$ からのエネルギー変化を摂動論で評価する。

(a) $b = 0$ の場合の波動関数を $\phi^{(0)}(x)$ と表す。 $x = 0$ および $x = a$ での $\phi^{(0)}(x)$ の値を、それぞれ、 $\phi_0 \equiv \phi^{(0)}(0)$ および $\phi_a \equiv \phi^{(0)}(a)$ とおいたとき、正および負パリティ状態のそれについて、 ϕ_0 を ϕ_a 、 β 、 a を用いて表し、 $|\phi_0|$ と $|\phi_a|$ の大小関係を示せ。

- (b) b を0からわずかに増加させた場合のエネルギー変化 $\Delta E = E - E^{(0)}$ を考える。 b の値は十分小さく、ポテンシャルの微小変化 $\Delta V(x) = V(x) - V^{(0)}(x)$ を摂動項とみなす。エネルギーの一次の補正項を b の一次までの近似で求めたとき、正および負パリティ状態のそれぞれについての ΔE を ϕ_0 , ϕ_a , U , b を用いて示せ。また、 ΔE と0との大小関係を示せ。ただし、 ϕ_0 および ϕ_a は、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \{\phi^{(0)}(x)\}^2 dx = 1$ を満たすように規格化された波動関数に対して定義されているものとする。
- (3) a , U を適当にとり、 $b = 0$ の場合に $2n+1$ 個(n は0か正の整数)の束縛状態が存在する状況を考える。エネルギーの低い方から正パリティ、負パリティの束縛状態が交互に存在している。 a , U を一定に保ったまま、パラメータ b を変えたとき、 b をある値 b_c より大きくとると負パリティの束縛状態が1つ増える。これは、 $b > b_c$ では $2n+2$ 個の束縛状態が存在し、 b を b_c に近づけると下から $2n+2$ 番目の状態のエネルギー E はゼロに近づくことに対応する。ここで、 b_c は小さくなく摂動論は成り立たないものとする。以下では、この $2n+2$ 番目の状態の波動関数 $\phi_{2n+2}(x)$ の振る舞いを考察し、 b_c の値を求める。
- (a) $b > b_c$ において、領域 $x \geq a + b$ における波動関数の関数形 $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(a+b)$ を $\gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ を用いて表せ。また、その結果から、 $b \rightarrow b_c$ の極限($E \rightarrow 0$)における $x \geq a+b$ での $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(a+b)$ を示せ。
 - (b) $b \rightarrow b_c$ の極限($E \rightarrow 0$)において、領域 $-b \leq x \leq b$ における波動関数の関数形 $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(b)$ を $E = 0$ のシュレディンガー方程式を解くことにより求めよ。ただし、 $\phi_{2n+2}(x)$ は負パリティ状態であることに注意すること。
 - (c) $b > b_c$ のとき、 $\phi_{2n+2}(x)$ は領域 $b < x < a + b$ に何個のゼロ点($\phi_{2n+2}(x) = 0$ となる点)をもつか。(ヒント: $\phi_{2n+2}(x)$ は、 $|x|$ が有限の領域に $2n+1$ 個のゼロ点をもつ。)
 - (d) $b \rightarrow b_c$ の極限($E \rightarrow 0$)での波動関数 $\phi_{2n+2}(x)$ を、 $n = 1$ の場合について、 x の関数として図示せよ。ただし、波動関数は $\phi_{2n+2}(a+b) = 1$ と規格化すること。
 - (e) $\beta_0 = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}}$ とし、 b_c を β_0 , a を用いて表せ。

II-3 (物理数学) (100 点)

1 次元のランダムウォークを考える。原点を出発点とするランダムウォークの n ステップ後の位置 S_n は確率変数で、以下のように与えられる。

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{A})$$

ここで、確率変数 X_i は、等確率で 1 か -1 をとる。ただし、 S_0 は確率 1 で 0 をとるとする。また、 $X_i (i = 1, \dots, n)$ は独立で、 X_i に対する平均を $\langle \cdot \rangle$ と表すとき、 $\langle X_i X_j \rangle = \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle (i \neq j)$ を満たすものとする。

- (1) ランダムウォーク S_n の平均 $\langle S_n \rangle$ と分散 $\langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

S_n の個々の事象は、 i ステップ後の位置の値を s_i とおくとき、 (s_1, s_2, \dots, s_n) と表すことができる。これを S_n の経路と呼ぶ。図 1 に $n = 10000$ のときに得られた経路を示した。この経路では、 $i > 2k$ の全てで s_i は正の値をとる。常識では s_i の半分程度が正の値をとる確率が高いと思われるが、実際はそうではない。以下では、 $s_i > 0$ の割合が大きい経路は高い確率で実現されることを確かめる。

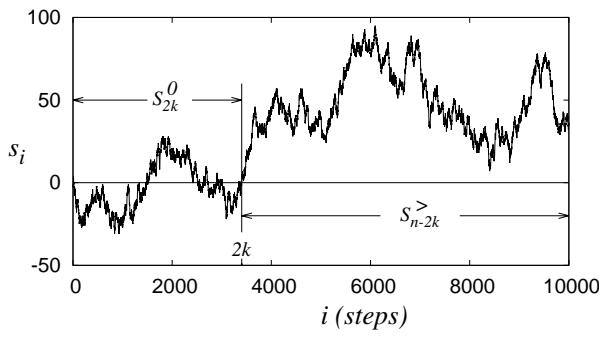


図 1

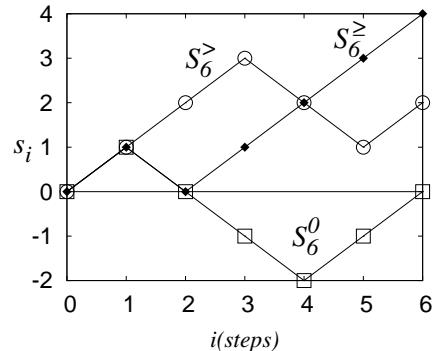


図 2

図 1 の経路は、 $2k$ ステップ目に原点に戻る経路と原点を出た後 $n - 2k$ ステップの間 $s_i > 0$ となる経路に分けられる。ここで、原点を出た後 $2k$ ステップ目に原点に戻る経路の集合を事象 S_{2k}^0 、原点を出た後 k ステップの間 $s_i > 0$ となる経路の集合を事象 $S_k^>$ とそれぞれ呼ぶ。

- (2) 事象 S_{2m}^0 が実現される確率 $P(S_{2m}^0) = u_{2m}$ を求めよ。スターリングの公式 $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ を用いて $m \gg 1$ の場合に、 u_{2m} の漸近形を求めよ。
以下では、 $P(S_0^0) = u_0 = 1$ とする。

原点を出た後 k ステップの間 $s_i \geq 0$ である経路の集合を事象 S_k^{\geq} と呼ぶ. 図 2 に事象 $S_6^{\geq}(\blacklozenge)$, $S_6^{\geq}(\circ)$ と $S_6^0(\square)$ に属する経路の例を示した.

事象 S_{2m}^{\geq} と事象 S_{2m}^0 に属する経路は 1 対 1 対応させることができるので, それぞれの事象に属する経路の総数は等しい. 従って, 実現確率は等しく $P(S_{2m}^{\geq}) = P(S_{2m}^0)$ である. この確率は u_{2m} である. 以下, この関係を既知として用いよ.

- (3) 事象 S_{2m}^{\geq} と事象 S_{2m-1}^{\geq} に属する経路の総数が等しいことを示せ. また, $P(S_{2m}^{\geq})$, $P(S_{2m-1}^{\geq})$ と $P(S_{2m}^{\geq})$ の関係を求めよ. 奇数回のステップでは原点に戻れないことに注意せよ.

図 1 の経路が属する, 原点を出た後 $2k$ ステップ目に原点に戻り, その後の引き続く $2m-2k$ ステップの間は正となる事象 $S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^{\geq}$ が実現される確率 $P(S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^{\geq})$ を求めよう.

- (4) 事象 S_{2k}^0 と事象 S_{2m-2k}^{\geq} は独立なので, 事象 $S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^{\geq}$ の実現確率は以下の関係を満たす.

$$P(S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^{\geq}) = P(S_{2k}^0)P(S_{2m-2k}^{\geq})$$

この実現確率を $\alpha_{2k,2m}$ とおく. このとき, $\alpha_{2k,2m}$ を適切な j に対する u_{2j} を用いて表せ. スターリングの公式を用いて, $m, k, m-k \gg 1$ の場合に $\alpha_{2k,2m}$ の漸近形を求めよ. ただし, $x = k/m$ の関数として表せ.

ランダムウォーク S_{2m} の中で, 原点より上にあるステップ数が $2k(k \geq 0)$ である事象を $Q_{2k,2m}$ と表す. ただし, $s_{2i} = 0$ のとき, s_{2i} の符号は s_{2i-1} と同じみなす. 事象 $Q_{2k,2m}$ が実現される確率を $\beta_{2k,2m}$ とおくと,

$$P(Q_{2k,2m}) = \beta_{2k,2m} = 2\alpha_{2k,2m} \quad (\text{B})$$

であることを示そう.

- (5) 原点を出た後 $2i$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を f_{2i} とおく. このとき, u_{2m} を f_{2i} と $u_{2j}(1 \leq i \leq m, 0 \leq j < m)$ を用いて表せ.
- (6) $Q_{2k,2m}$ の経路の中で初期の $2r$ ステップ目に初めて原点に到達するものは, $0 < i < 2r$ の全てで $s_i > 0$ となる場合と $s_i < 0$ となる場合の 2 通りある. その後, それぞれ $Q_{2k-2r,2m-2r}$ と $Q_{2k,2m-2r}$ に属する経路が後に続くことになる. この関係を用いて, $\beta_{2k,2m}$ を f_{2a} と $\beta_{2b,2c}(a < m, c < m, b \leq k)$ を用いて表わせ.
- (7) 式 (B) が成り立つことを示し, $\beta_{2k,2m}$ を適切な j に対する u_{2j} を用いて表せ. ただし, $b \leq k$, $c < m$ の場合にも式 (B) が成り立つとして $\beta_{2b,2c}$ に代入せよ.

平成 28 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-5 まで 5 間ある。この中から 3 間選択せよ。4 間以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 間すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 17 ページまである。
-

III-1 量子力学（電磁場による荷電粒子の閉じ込め）

III-2 電磁気学（輻射）

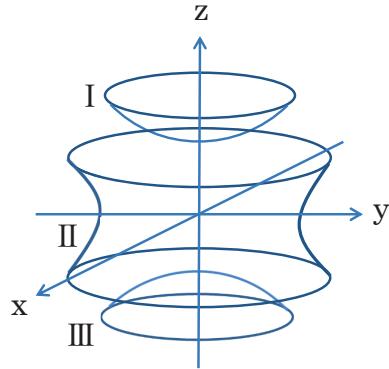
III-3 統計力学（Bose-Einstein 凝縮）

III-4 実験（放射化分析）

III-5 天文学

III-1 (量子力学：電磁場による荷電粒子の閉じ込め) (100 点)

下図の I, II, III は軸対称な電極であり、系全体には z 方向に大きさ $B(>0)$ の一様な磁場がかけられている。この装置の原点付近の空間に質量 m , 電荷 $q(>0)$ の非相対論的な粒子をトラップすることを考える。原点付近のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは、それぞれ、 $\phi = -\frac{1}{2}\kappa(x^2+y^2-2z^2)$ および $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ で与えられると仮定して、以下の間に答えよ。重力は無視してよい。



まず、古典論的に運動を解析する。

- (1) (a) 粒子の位置座標 x, y, z に対する運動方程式を書け。
 (b) $\zeta = x + iy$ を用いて、 x 方向と y 方向の運動方程式を 1 つにまとめると、 $m\ddot{\zeta} = -iqB\dot{\zeta} + q\kappa\zeta$ となる。これは 2 階の定数係数線形微分方程式なので、一般解は積分定数 C_1, C_2 を用いて

$$\zeta = C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (\text{A})$$

と書ける。ここで、 $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_c + \Delta, \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_c - \Delta$ と書いたときの ω_c と Δ を m, q, B, κ で表わせ。

- (c) 粒子を原点付近に閉じ込めるためには、 κ はどのような条件を満たせばよいか。以下、 κ はその条件を満たしていると仮定する。また、以下では $\Delta > 0$ と仮定する。
- (2) 一般に、ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ から、正準運動量と速度の関係が求められる。このことを利用して以下の間に答えよ。

- (a) x, y の正準共役量 p_x, p_y を \dot{x}, \dot{y}, x, y で表わせ。
 (b) 上で求めた p_x と p_y に関する 2 式を、 $\eta = p_x + ip_y$ と ζ を用いて 1 つの式にまとめよ。(答えは m と ω_c を使って表わせ。)

その結果に式 (A) を代入すると、次式がえられる。

$$\eta = -im\Delta(C_1 e^{-i\omega_1 t} - C_2 e^{-i\omega_2 t}) \quad (\text{B})$$

つぎに、量子論を考える。

- (3) ハミルトニアンを xy 方向 (z 軸に垂直な方向) の運動に関する部分 H_{xy} と z 方向の運動に関する部分 H_z の和の形に書け。

H_{xy} を対角化するために、ハイゼンベルク描像における x, y, p_x, p_y の時間発展を考える。今の場合、ハミルトニアンが位置と運動量の2次式であるため、位置と運動量に対するハイゼンベルク方程式は、古典的な正準方程式と同じ形となる。このことから直ちに、上の式(A)と式(B)が x, y, p_x, p_y の時間発展を与えていていることがわかる。ただし、今のは C_1, C_2 は演算子である。

- (4) まず、 H_{xy} と C_1 および C_2 の交換関係を求める。式(A)の ζ がハイゼンベルク方程式を満たすことから、 $[H_{xy}, C_1], [H_{xy}, C_2]$ はそれぞれ C_1, C_2 の定数倍であることがわかる。それらの定数を ω_1, ω_2 で表わせ。導出も示せ。

- (5) つぎに、 $C_1, C_1^\dagger, C_2, C_2^\dagger$ の間の交換関係を求める。

- (a) 式(A)と式(B)より、 C_1, C_2 を ζ, η の線形結合で表わせ。
- (b) 上の結果と正準交換関係から、 $C_1, C_1^\dagger, C_2, C_2^\dagger$ の間の交換子が計算できる。その結果、交換子のうち、 $[C_1, C_1^\dagger] = \frac{\hbar}{m\Delta}$ と $[C_2, C_2^\dagger] = -\frac{\hbar}{m\Delta}$ 以外はすべてゼロであることがわかる。例として、 $[C_1, C_1^\dagger]$ の計算過程を示せ。
- (c) 上のこととは、適当な正の定数 κ_1, κ_2 を用いて、 $C_1 = \kappa_1 a, C_2 = \kappa_2 b^\dagger$ おくと、 $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は2組の生成消滅演算子となることを意味している。 κ_1, κ_2 を求めよ。ただし、 $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は、 $[a, a^\dagger] = 1, [b, b^\dagger] = 1$ 、他の交換子 = 0 を満たすものとする。

- (6) 以上の結果から、 H_{xy} が対角化できる。

- (a) 問(5)(c)と問(4)の結果を利用すると、 $[H_{xy}, a] = -\hbar\omega_1 a, [H_{xy}, b] = \hbar\omega_2 b$ であることがわかる。そのような H_{xy} は定数項をのぞき、 $H_{xy} = ra^\dagger a + sb^\dagger b$ の形にきまる。係数 r, s を ω_1, ω_2 で表わせ。
- (b) H_{xy} の固有値を求めよ。エネルギー固有値に最小値は存在するか。
- (c) $a|0\rangle = 0, b|0\rangle = 0$ で定義される状態 $|0\rangle$ と a^\dagger, b^\dagger を用いて、各エネルギー固有値に対する規格化された固有状態を書け。

III-2 (電磁気学 : 輻射) (100 点)

マクスウェル方程式より、加速度運動をする荷電粒子から電磁波が放射されることが示される。非相対論的な速さ u ($\ll c$) (c は光速) で運動する電子の加速度ベクトルを \dot{u} とする。図 1 のように、 \dot{u} から角度 θ をなす方向の単位ベクトルを n としたとき、電子から n 方向に距離 R だけ離れた観測位置における電磁波の電場は、近似的に

$$\mathbf{E} = \left[\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}) \right] \quad (\text{A})$$

と表せることが知られている。ここで e (> 0) は素電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率である。[] 記号は、電子の位置から観測位置まで光速 c で情報が伝達することを反映した「遅延時間」での値を表す。解答では、電子の位置の変動による遅延時間の違いは無視し、[] 記号は省略せよ。また、以下の問の全てについて、必要なら光速 c 、真空の誘電率 ϵ_0 、素電荷 e 、電子質量 m を解答に含めよ。

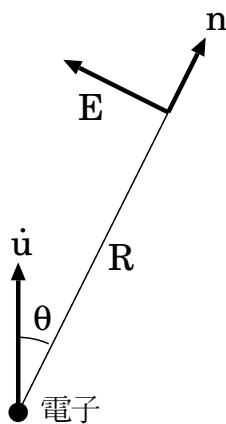


図 1

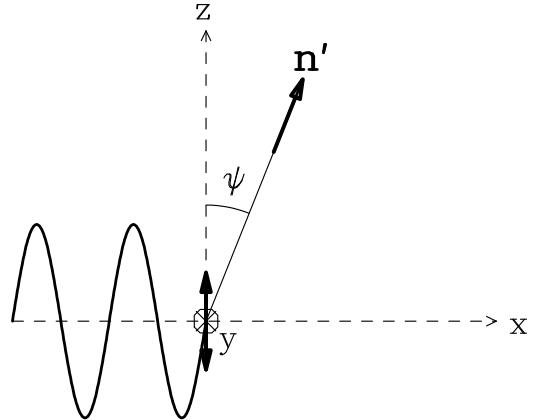


図 2

- (1) 観測位置における電磁波の磁場 B を、 E と n を用いて表せ。
- (2) ポインティングベクトル $S = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ が単位時間・単位面積あたりのエネルギー流束(フラックス)であることに留意し、 n 方向に観測される単位立体角あたりの放射強度 $dP/d\Omega$ ($\text{J s}^{-1} \text{ str}^{-1}$) を \dot{u}, θ を用いて表せ。さらに全方向で積分した放射強度 $P(\text{J s}^{-1})$ を求めよ。
- (3) 図 2 のように、 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ の位置にある自由電子に、原点における電場が $\mathbf{E} = (0, 0, E_0 \sin(\omega t))$ で表される角振動数 ω の直線偏光した電磁波が、 x 軸正方向へ向かって入射する場合(z 軸方向への直線偏光)を考えよう。電子が加速度運動を行なう結果、入射方向とは異なる方向にも電磁波が放射される(トムソン散乱)。微分散乱断面積 $d\sigma_T/d\Omega$ は、時間平均した単位立体角あたりの散乱光の放射強度を、時間平均した入射光のフラックスで割った

値として定義される。 $x - z$ 平面内にあり、 z 軸から角度 ψ をなす方向の単位ベクトルを n' とする。問(2)の結果を使い、 n' 方向への散乱光の、1 周期で時間平均した単位立体角あたりの放射強度を、 ψ と E_0 を用いて表せ。次に、それを 1 周期で時間平均した入射フラックスと比較することで、微分散乱断面積 $d\sigma_T/d\Omega$ を ψ の関数として求めよ。ただし、電磁波の磁場によるローレンツ力と、放射による電子のエネルギー損失は無視する。

- (4) 同様に、原点における電場が $E = (0, E_0 \sin(\omega t), 0)$ で表される直線偏光した電磁波が、 x 軸正方向へ向かって入射する場合 (y 軸方向への直線偏光) を考える。問(3)で定義した n' 方向の微分散乱断面積を求めよ。
- (5) 同様に、 z 軸方向と y 軸方向に直線偏光した同じ強度の電磁波が、時間的に等確率でランダムに入れ替わりながら x 軸正方向へ向かって入射する場合について、 n' 方向の微分散乱断面積を求めよ。測定する時間は電磁波の入れ替わりの時間間隔より十分長いとし、時間平均を考えること（このときの入射光は完全無偏光とみなせる。）また、 $\psi = 0$ および $\psi = \pi/2$ の時に、散乱光が直線偏光しているかどうかを述べよ。
- (6) 直線偏光フィルターとは、フィルターの特定な軸（偏光軸）に平行な偏光成分のみを透過させる光学素子である。図3のように、完全無偏光の電磁波を等方的に放射する中心光源を、 x 軸方向に長い直方体の形をした一様密度のトムソン散乱体が囲っている系を考える。 z 軸方向遠方より、この系全体から放射される電磁波を直線偏光フィルターを通して見た場合、強度が最大になるのはフィルターの偏光軸がどの軸に平行なときか。理由とともに述べよ。ただし、散乱は最大1回のみ起こるとし、吸収は無視せよ。

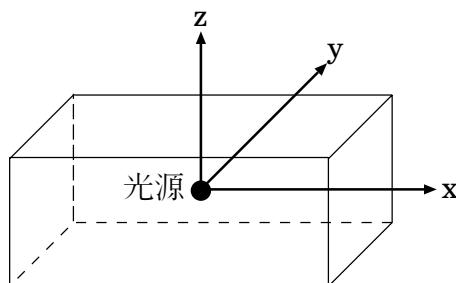


図 3

- (7) 大きさ B の一様磁場の中に、非相対論的速度 v をもつ電子群が入射する場合を考える。その結果、磁場に巻き付いて電子はらせん運動を行なう。速度と磁場のなす角が完全にランダムとして平均した場合、電子 1 個あたりから放射される放射強度 (J s^{-1}) を B, v を用いて表せ。

III-3 (統計力学 : Bose-Einstein 凝縮) (100 点)

ボース統計に従う原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) は、原子間相互作用の弱い極限で実現される凝縮であり、1995 年にルビジウムやナトリウムを用いた BEC 生成が相次いで報告された。こうした実験では、調和ポテンシャルに閉じ込められた状態で BEC が実現するため、一様系の BEC とは異なる性質を示す。以下では、原子同士の相互作用は無視し、グランドカノニカル分布の取り扱いでポテンシャルに閉じ込められたボース粒子の BEC について調べる。以下、必要に応じてプランク定数 \hbar 、ボルツマン定数 k_B を用いて各設問に答えよ。

各ボース粒子が感じるポテンシャルは、以下の調和振動子型ポテンシャルで表せる。

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2) \quad (\text{A})$$

ここで m は粒子の質量であり、 ω_a ($a = x, y, z$) は調和振動子ポテンシャルの形を決める角振動数である。このポテンシャル中の粒子のエネルギー準位 ε は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon(n_x, n_y, n_z) &= \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z ; \\ &\quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

温度 T 、化学ポテンシャル μ が与えられたとき、系に存在する平均粒子数は、ボース分布関数 $f(\varepsilon) = 1/\{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1\}$ ($\beta = (k_B T)^{-1}$) を用いて、

$$\mathcal{N}(T, \mu) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} f(\varepsilon(n_x, n_y, n_z)) \quad (\text{C})$$

で与えられる。

- (1) ボース分布関数を $f(\varepsilon) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu-\varepsilon)}$ と書き直した上で、式 (C) の (n_x, n_y, n_z) に関する幾何級数和を実行すると、

$$\mathcal{N}(T, \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)} h(\ell\beta\hbar\omega_x) h(\ell\beta\hbar\omega_y) h(\ell\beta\hbar\omega_z) \quad (\text{D})$$

という表式が得られる。ここで角振動数の算術平均を $\omega_m \equiv (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ とした。式 (D) に現れる関数 $h(x)$ を求めよ。

以下では、全粒子数 N が与えられている場合を考え、 N は十分大きな数であるとする。BECの発現をあらわに見るため、式(C)の和を基底状態 $(n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 0)$ の占有数 N_0 とそれ以外の状態和 \sum' で表される粒子数 N' とに分離して、

$$N = \mathcal{N}(T, \mu) = f(\varepsilon(0, 0, 0)) + \sum'_{n_x, n_y, n_z} f(\varepsilon(n_x, n_y, n_z)) \equiv N_0(T, \mu) + N'(T, \mu) \quad (\text{E})$$

と表す。ここで $N'(T, \mu)$ は励起状態にある粒子数であり、以下のように表せる：

$$\mathcal{N}'(T, \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)} \{ h(\ell\beta\hbar\omega_x) h(\ell\beta\hbar\omega_y) h(\ell\beta\hbar\omega_z) - 1 \} \quad (\text{F})$$

ある温度 T での化学ポテンシャル μ は、 $\mathcal{N}(T, \mu) = N$ を満たすように定まることに注意して、十分大きな粒子数 N のもとで N_0 と N' を求めると図1のようなふるまいが得られる。

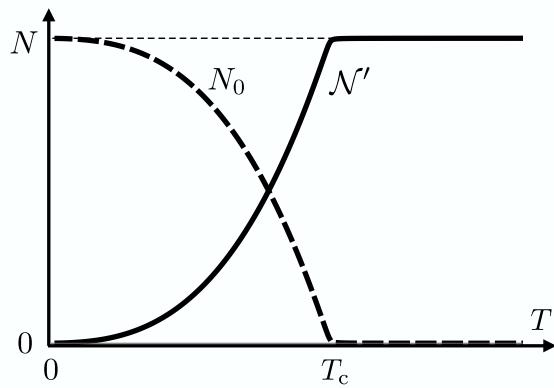


図 1

- (2) 高温から温度を下げていくと、ほぼゼロであった基底状態の占有数が急に巨視的な値になる（つまり $N_0 \gg 1$ ）。このように N_0 が十分大きくなるとき、化学ポテンシャルはある上限値 μ_c に近づくと期待される。式(E)から N_0 の表式を具体的に書き下し、その式をもとに上限値 μ_c を求めよ。

式(F)より、励起状態の粒子数 N' は化学ポテンシャルの増加関数であり、与えた温度のもとで 上限値 μ_c に近づけると N' は最大となる。従って、前問の結果と図1のふるまいから、この最大値が系の全粒子数 N と等しくなるときに BEC が発現するとみなし、そのときの温度を転移温度 T_c と定めることができる：

$$N = \mathcal{N}'(T_c, \mu_c) \quad (\text{G})$$

以下、このような T_c について考えよう。

（次ページに続く）

- (3) $\beta\hbar\omega_a \ll 1$ ($a = x, y, z$) であるような状況を考える。式 (F) の $\{\cdots\}$ 内を $\beta\hbar\omega_a$ について最初の 2 項まで展開することにより、

$$\mathcal{N}'(T, \mu) = X \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{z}^{\ell} \left\{ \frac{1}{\ell^3} + Y \frac{1}{\ell^2} \right\} \quad (\text{H})$$

という表式を得る。ただし $\tilde{z} \equiv e^{\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)}$ である。式 (H) に現れる係数 X および Y を、温度 T 、角振動数の算術平均 $\omega_m \equiv (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ 、幾何平均 $\Omega \equiv (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ を用いて表せ。(ヒント: $x \ll 1$ のとき, $h(x) \simeq \{x(1 - x/2)\}^{-1}$ と近似できることを用いよ。)

- (4) 式 (H) の $\{\cdots\}$ 内の第 1 項のみを残す最低次の近似で式 (G) を解くことにより、転移温度 $T_c^{(0)}$ を求めよ(最終的な結果はツェータ関数 $\zeta(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1/\ell^s$ を用いて表せ)。また、転移温度以下における基底状態の占有数の比率 N_0/N を温度 $T/T_c^{(0)}$ の関数として表せ。
- (5) 前問で無視した式 (H) の第 2 項の影響を考えよう。転移温度は $T_c^{(0)} \rightarrow T_c = T_c^{(0)} + \Delta T_c$ のようにずれることが期待されるが、 $\beta\hbar\omega_a \ll 1$ ($a = x, y, z$) の状況では係数 Y は微小量となり、転移温度のずれ ΔT_c は十分小さいとして扱える。式 (H) を用いて式 (G) を微小量の 1 次まで展開することで転移温度のずれを求め、比 $\Delta T_c/T_c^{(0)}$ を全粒子数 N と 振動数 ω_m, Ω を用いて表せ。(結果はツェータ関数を用いて表すこと。)
- (6) 角振動数が $\omega_x = \omega_y = \omega_z/8$ の関係を満たし、かつ $\Omega = 10^3 [\text{s}^{-1}]$ と与えられたとする。転移温度のずれ $\Delta T_c/T_c^{(0)}$ を 1% におさえるために必要な粒子数 N とその時の転移温度 T_c はいくらか、それぞれ有効数字 1 桁で求めよ。ただし、 $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} [\text{eV}\cdot\text{s}]$, $k_B = 8.62 \times 10^{-5} [\text{eV}\cdot\text{K}^{-1}]$ とし、以下の数表を参考にせよ。

	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
$\{\zeta(s)\}^{1/3}$	1.18	1.06	1.03
$\{\zeta(s)\}^{2/3}$	1.39	1.13	1.05
$\zeta(s)$	1.64	1.20	1.08

(このページは白紙である)

III-4 (実験：放射化分析) (100 点)

安定な原子核 B からなる原子を一定量含む薄い試料に、中性子 n の粒子線を一定時間照射し、次式のように、原子核 C の励起状態 C^* を生成する。



この励起状態は、(B) のように、非常に短い時間で全て基底状態 $C_{g.s.}$ に遷移した後、さらに原子核 D に崩壊する際 100% の確率で γ 線を放出するものとする。



この γ 線の放出数を計測し、試料中の原子核 B の個数を調べることを考える。

- (1) 試料中に原子核 B からなる原子が m モル存在するとして、中性子の照射により毎秒生成される C^* の個数 A_{C^*} を F, σ, m, N_A を用いて表せ。ただし、 F は中性子の毎秒 1 cm^2 当たりの入射数、 σ は反応断面積とよばれる量であり、 $\sigma \equiv [\text{単位時間} \cdot \text{標的核 } 1\text{ 個あたりの反応数}] / [\text{単位時間} \cdot \text{単位面積あたりの入射中性子数}]$ により定義され、単位は cm^2 である。 N_A はアボガドロ数、試料の中性子線に垂直な断面の面積は 1 cm^2 とする。また、原子核 C^* に変換される B の個数は、試料中の B の個数に対して無視できるものとする。
- (2) 前問で示されたように、基底状態 $C_{g.s.}$ は中性子照射により生成され続けるが、その一方、崩壊 (B) で示されているように D に崩壊していく。この崩壊定数（放射性原子核 1 個が単位時間に崩壊する確率）を λ とし、試料中の状態 $C_{g.s.}$ の個数 $N_{C_{g.s.}}$ を中性子の照射を開始してからの時間 t の関数として考えるととき、成り立つ微分方程式を示せ。
- (3) その解を求めよ。ただし、照射開始の $t = 0$ において $N_{C_{g.s.}} = 0$ とする。
- (4) 原子核 B が $m = 1.0 \times 10^{-6}$ モル含まれていると推定される試料に対して、照射終了直後から 1 時間の γ 線測定によって m を 1.0% 以下の精度で求めた。 $F = 1.0 \times 10^7 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 1.0 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$, $\lambda = \frac{1.0}{3600} / \text{秒}$ であるとき、何時間以上の照射が必要であるかを有効数字 2 衔で求めよ。ここで、放出される γ 線は全て検出されるものとし、さらに、 m の精度は γ 線計測に起因し、その計数はポアソン分布に従うものとする。計算の際、 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 、自然対数の底 e の値を 2.72 とし、図 1 を利用してよい。

崩壊 (B) において原子核 $C_{g.s.}$ が D に崩壊する際、実際には前問まで考慮しなかった β 線も放出される。次に、この β 線のエネルギーを測定するための検出器について定性的に考察してみる。

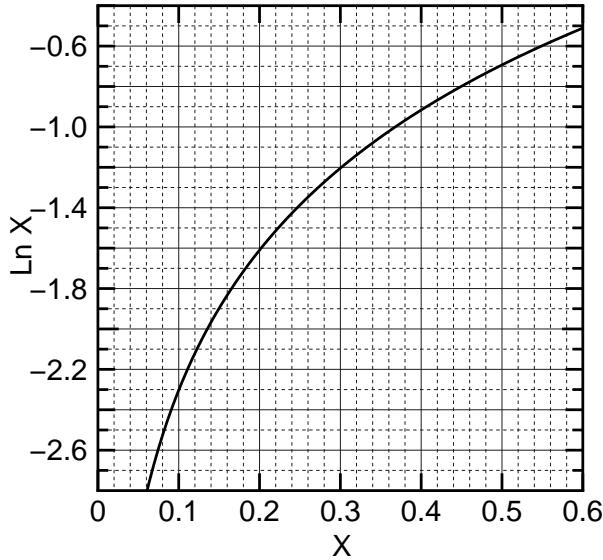


図 1

(a) と (b) の二種類のシンチレータ（注 1）を β 線検出器の候補とし、これらに、放出される β 線と同程度のエネルギーで、且つエネルギーの揃った（単色）電子線を入射させるシミュレーションを行ったところ、おおよそ図 2 のような結果となつた。

シミュレーションでは、空気中において、座標 $(x[\text{cm}], y[\text{cm}], z[\text{cm}]) = (0, 0, 0)$ に直径 4 cm の円柱状シンチレータ材（図 2 各図中央の□枠）及び座標 $(0, 0, -2)$ には点状電子線源（黒点）が配置され、各シンチレータの厚さ（ z 方向の長さ）は入射電子がほとんど透過しないように予め決められていた。そして、線源から細く絞られた数百個の単色電子がシンチレータへ垂直に入射させられた。

図 2 には、線源から射出された電子一つ一つに対して、入射電子と入射後の電子の飛跡 ((a-1) と (b-1)) 及び電子の入射後に制動放射（注 2）で発生した光子の飛跡 ((a-2) と (b-2)) が $x-z$ 面に射影されて描かれており、電子や光子が、シンチレータ内で吸収されたり、外に流出している様子が表されている。ただし、各シンチレータにおいて、一つの電子が射出される毎に、これらは一連の事象として生じるが、それぞれの成分の寄与を明確にするために分けて描かれている。

- (5) 入射電子のエネルギーをできるだけ損なわずに測定するという観点から考えたとき、どちらのシンチレータが検出器として適当であるかを、シミュレーションの結果を踏まえ、「後方散乱」（注 3）と「制動放射」の用語を用いて論ぜよ。
- (6) 図 2 の (a-2) と (b-2) の結果から、制動放射によるエネルギーの流出を抑えるために、シンチレータに対して施せる改良点を一つ挙げよ。

（次ページに続く）

(注1)「シンチレータ」：放射線のエネルギーがシンチレータ内で失なわれると、そのエネルギーに応じた強度の蛍光が放出される物質。その失われ方は放射線の種類に依存する。この蛍光はシンチレータに接続された光検出器により電気信号に変換され、エネルギーが測定される。

(注2)「制動放射」：入射電子がシンチレータ材の原子核や電子のクーロン場で加速を受け、電磁波を放射する現象。その結果として、電子は入射エネルギーの一部を失う。

(注3)「後方散乱」：固体に入射した電子の一部が、内部で散乱され再び入射面から外へ放出される現象。後方散乱の度合いは散乱体の原子番号とともに増加する。

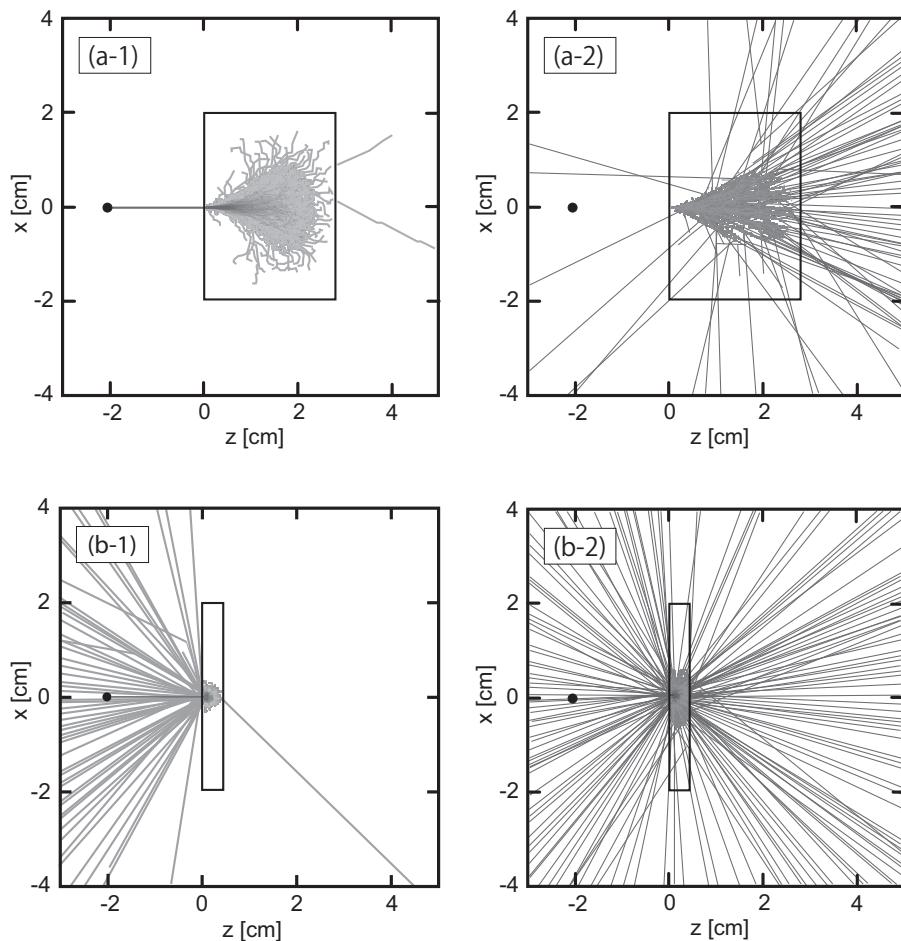


図2

(このページは白紙である)

III-5 (天文学) (100 点)

熱的プラズマから観測される輻射を考えよう。周波数 ν における単位面積・単位時間・単位周波数・単位立体角あたりの輻射強度を $I_\nu(\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1})$ で表す。空間座標 s に沿った輻射輸送の式は、散乱過程を無視すれば

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (\text{A})$$

と書ける。ここで $\alpha_\nu(\text{m}^{-1})$ は吸収係数、 $j_\nu(\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1})$ は単位体積・単位時間・単位周波数・単位立体角あたりの放射エネルギーである。以下の問題すべてにおいて、プラズマは温度 T の熱平衡状態にあり、キルヒホップの法則

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (\text{B})$$

が成り立っているとする。ここで $B_\nu(T)$ はプランク関数であり、 h はプランク定数、 c は光速、 k_B はボルツマン定数である。以降、簡単のため $B_\nu(T)$ を B_ν と示すこととする。

- (1) 热的プラズマの表面で I_ν が方向によらず一定の場合、プラズマ表面から放射される単位面積・単位時間・単位周波数あたりのフラックス $F_\nu(\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1})$ を I_ν を用いて表せ。ただし、プラズマ外部から内部へ向かう輻射場はゼロとせよ。

図 1 のように、水素のみからなり陽子イオン数密度 n 、温度 T 、半径 R の一様な完全電離プラズマ球を考える。素過程として、熱制動放射（自由自由放射）およびその逆過程（自由自由吸収）のみを考慮する。この放射は等方的であり、その単位体積・単位周波数あたりの放射率 $\epsilon_\nu(\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1})$ は

$$\epsilon_\nu = An^2 T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (\text{C})$$

と近似的に表すことができるとして、以下の問(2)-(6)に答えよ。ただし、式(C)の A は定数である。

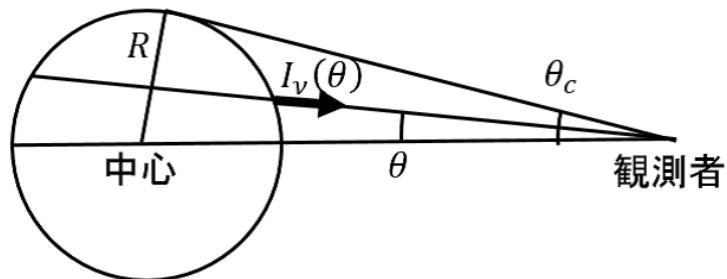


図 1

- (2) ϵ_ν が n^2 に比例する理由を、簡単に説明せよ.
- (3) 周波数で積分した全放射率 $\epsilon(\equiv \int \epsilon_\nu d\nu)$ の温度依存性を求めよ.
- (4) 自由自由吸収係数 $\alpha_\nu^{\text{ff}}(\text{m}^{-1})$ を求め、 $h\nu \ll k_B T$ および $h\nu \gg k_B T$ の場合の周波数依存性を示せ.

プラズマが放射を行う典型的な周波数において $\alpha_\nu R \gg 1$ の場合は光学的に厚い状況であると呼ばれ、このときプラズマ球表面において $I_\nu = B_\nu$ となる。一方、 $\alpha_\nu R \ll 1$ の場合は光学的に薄い状況であると呼ばれ、このとき光線の経路に沿った系のサイズを L とすればプラズマ球表面においてその光線方向について $I_\nu = j_\nu L$ となる。プラズマ球外部における吸収・放射は完全に無視できるとして以下の問(5)と(6)に答えよ。その答えは、 R , B_ν , ϵ_ν のうち必要なものを用いて表せ。

- (5) 図 1 のプラズマが光学的に厚い場合に、単位周波数あたりの光度 $L_\nu(\text{J s}^{-1} \text{Hz}^{-1})$ を計算せよ。このプラズマ球の中心と観測者を結ぶ直線と視線方向（光線方向）とのなす角度を θ とする。このプラズマ球を遠方から観測した時の見込み角度が θ_c であるとして、観測される I_ν の強度分布を θ の関数 $I_\nu(\theta)$ として概略を図示せよ（厳密な関数形を求める必要はない）。この際、 $\theta = 0$ における I_ν の値も記述すること。
- (6) このプラズマが光学的に薄い場合に L_ν を求め、さらに観測される I_ν の強度分布の概略を θ の関数として図示せよ。厳密な関数形を求める必要はないが、 $\theta = 0$ における I_ν の値を記述すること。プラズマの見込み角度は θ_c であるとする。

(次ページに続く)

次に、温度勾配のあるガス内の輻射輸送について考察しよう。局所的には熱平衡になっているとする。**図2**のように、 z 軸方向のみに物理量が変化し、 z 軸と垂直な方向には無限に広がったプラズマを考える。温度は z のみの関数 $T(z)$ となる。 z 軸と光線とのなす角度を θ とすれば、任意の方向(θ)に向かう光線の任意の場所(z)における輻射強度は z と θ のみの関数 $I_\nu(\theta, z)$ と表すことができるが、以下ではこれを単純に I_ν と表す。散乱は無視できるとする。

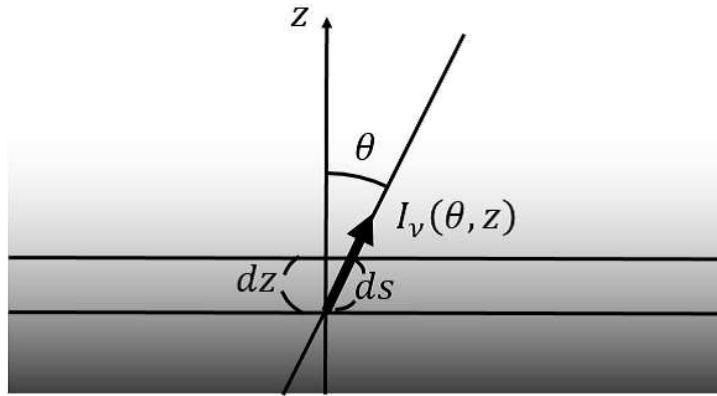


図2

- (7) z 方向についての輻射輸送の方程式 $(\partial I_\nu / \partial z)$ を I_ν , α_ν , B_ν , θ を用いて表せ。
- (8) 以下、 I_ν の z 方向の変化が十分に小さく、 $B_\nu \gg (1/\alpha_\nu)(\partial I_\nu / \partial z)$ が成り立っているとする。問(7)の結果を I_ν について解き、ゼロ次解が $I_\nu^0(\theta, z) = B_\nu$ となることを示せ。さらに、この方程式の解 $I_\nu(\theta, z)$ を $\partial B_\nu / \partial z$ の1次の項まで求めよ。
- (9) 任意の位置 z での z 軸正方向への正味のフラックス $F(z) = \int F_\nu d\nu$ ($\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$) は、問(8)の結果を用いて

$$F(z) = -\kappa \frac{dT}{dz} \quad (\text{D})$$

と表すことができる。この拡散係数 κ を、ロスランドの平均吸収係数 $\alpha_R(\text{m}^{-1})$

$$\alpha_R \equiv \frac{\int_0^\infty \partial B_\nu / \partial T d\nu}{\int_0^\infty (1/\alpha_\nu) \partial B_\nu / \partial T d\nu} \quad (\text{E})$$

を用いて表せ。 $\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi$ (σ はシュテファン・ボルツマン係数) の関係を用いてよい。

(このページは白紙である)

平成 28 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1, IV-2 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は 2 間すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 5 ページまである。

IV-1

以下の英文は、Walter Lewin 著 “For the Love of Physics” からの抜粋である（一部略）。これを読んで以下の間に答えよ。

In 1600,

(a) a result of his experiments:

(b) Not only was

(c) in other ways

(d) Their work is made even

(注)

Gilbert：ギルバート（人名），physician：医者，geographic：地理学上の，magnetite：磁鉄鉱，wander：あちこちさまよう，viable：ものになる，Curie temperature：キュリー温度，ferromagnetic：強磁性の，involved：込み入った，dynamo effect：ダイナモ効果，astrophysicist：天体物理学者，thorny：めんどうな，geological：地質学上の，millennia：millennium（千年）の複数形，stroll：ぶらつき

- (a) 下線部(a)の“*a terrella*”とはどういうものかを説明し，どういう実験結果を示したかを本文に即して簡潔に日本語で答えよ.
- (b) 下線部(b)を和訳せよ.
- (c) 下線部(c)に関連して，筆者は，どういう理由で地球は単なる棒磁石とは違っていると言っているのか，本文に即して，日本語で説明せよ.
- (d) 下線部(d)を和訳せよ.

IV-2

以下の文章は，小林誠，益川敏英両氏のノーベル賞の受賞理由を述べた文章をもとに作成されたものである。下線部 (a)–(d) を英訳せよ。

(a) 小林・益川の論文は 1972 年 9 月 1 日に投稿された。その当時，3 つのクオーケのみが知られていた。彼らの理論は 6 個のクオーケを含むものであり，その当時特に注目はされなかった。4 番目のクオーケの存在に関しては，1970 年に Sheldon Glashow , Jean Iliopoulos , Luciano Maiani によって提案された有力な証拠があった。(b) 弱い相互作用に関するその当時存在した理論には一つ問題があったのだ。実験では観測されていない，ストレンジネスを変える中性カレントの存在を導いてしまうものだったのである。(c) 3 人の著者は，チャーム・クオーケと呼ばれることになった 4 番目のクオーケ， c ，を導入することを提案した。このクオーケの導入により，2 つの全ファミリーが得られ，ストレンジネスを変える中性カレントが確かに抑制されるのである。1974 年に，新しいとても重い粒子， J/Ψ 粒子が，実際に Samuel Ting らと Burton Richter らによって発見された。その粒子は $c\bar{c}$ 状態であることが，比較的すぐに理解された。(d) 数年後にはチャーム量子数をもった粒子も発見された。新しい重いレプトンのいくつかの兆候が，1975 年に見え始め，1977 年にはその発見が確立された。このことは，レプトンの 3 番目のファミリーの存在を示すものであった。この段階になって，小林・益川の論文は注目され始めた。

(ヒント)

小林・益川：Kobayashi-Maskawa，論文を投稿する：submit a paper，

弱い相互作用：weak interaction，チャーム・クオーケ：charm quark，

ファミリー：family，レプトン：lepton

(このページは白紙である)

平成 27 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いててもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである.

I-1 (物理数学) (100 点)

次式で定義される x, x' と t の関数 $G(x, x', t)$ を考える.

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4t}} \quad (\text{A})$$

(1) 以下の積分を計算して求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{B})$$

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) dx' \quad (\text{C})$$

の積分を計算して求めよ.

(3) $x \neq x'$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, x', t) \quad (\text{D})$$

を求めよ.

(4) $t > 0$ のとき, 以下で定義される $H(x, x', t)$ を求めよ.

$$H(x, x', t) = \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 G(x, x', t)}{\partial x^2} \quad (\text{E})$$

(5) 連続で有界な任意の関数 $g_0(x)$ に対して

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x') G(x, x', t) dx' \quad (\text{F})$$

で, 新しい関数 $v(x, t)$ を定義する. このとき $t > 0$ で

$$w(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{G})$$

で定義される $w(x, t)$ を求めよ.

(6) $t > 0$ のとき, 以下の極限を求めよ.

$$\lim_{t \rightarrow +0} v(x, t) \quad (\text{H})$$

(7) $v(x, t)$ は, ある偏微分方程式の, ある初期条件のもとでの解になっているが, その偏微分方程式と初期条件を書け.

(このページは白紙である)

I-2 (力学) (100 点)

重心を上下に移動させることでブランコを漕ぐ運動を簡単なモデルで考えてみよう。図1のように、Oを支点として、質量 m のおもり（質点）がついた棒振り子の平面上の運動を考える（棒の質量は無視できるとする）。おもりの位置 P を極座標 (r, θ) で表す。おもりは棒の上を移動し、それを $r = l(t)$ と表す。初期条件は、 $t = 0$ で、おもりは $\theta = \theta_0$ の位置で静止していたものとする。重力加速度を $g (> 0)$ とする。

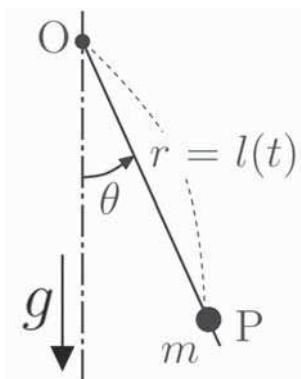


図1

- (1) 支点 O を基準とし、おもりの持つ全エネルギー E を $m, g, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ を使って表せ。

拘束条件は $r = l(t)$ なので、ラグランジュの未定乗数法を使って拘束条件下でのラグランジアン L は、 λ を未定乗数とし、

$$L = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\} + mgr \cos \theta - \lambda\{r - l(t)\}$$

と表せる。 λ は独立変数とみなせ、 λ に関するラグランジュ方程式を計算すると、 $r - l(t) = 0$ となり、たしかに拘束条件が出てくる。

- (2) r に関するラグランジュ方程式を導け。

- (3) θ に関するラグランジュ方程式を導け。

問(2)のラグランジュ方程式から、 λ はおもりに対する拘束力であることがわかる。

(4) おもりのエネルギー E の時間変化を ,

$$\frac{dE}{dt} = A\lambda$$

と表すとき , A を r , \dot{r} , \ddot{r} を使って表せ .

次に , $l(t)$ が

$$l(t) = l_0 + \epsilon \cos(2\omega_0 t + \gamma)$$

と周期的に変化する場合を考える (ただし l_0 , γ , ϵ は正の定数 , $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$ とする) . さらにおもりの移動量は l_0 に比べて十分小さく , $0 < \epsilon \ll l_0$ とする . また振り子のふれも微小で $\sin \theta \sim \theta \sim \theta_0 \cos \omega_0 t$ と近似できる間の運動を考え , 振り子の周期の変化も無視できるとする . 振り子の 1 周期を $T = 2\pi/\omega_0$ として , 物理量 X に対する平均を $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ と定義する .

(5) $\left\langle \frac{dl}{dt} \frac{d^2l}{dt^2} \right\rangle$ を計算して求めよ .

(6) エネルギー E の時間変化の平均 $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ を ,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = mg\epsilon\omega_0\theta_0^2 B$$

と表すとき , B を γ を使って表せ . 計算の途中で , $\left\langle \frac{dl}{dt} \right\rangle = 0$ という関係式を使ってもよい .

(7) この運動で , $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ を最大にするための γ の値を求め , そのときの θ と l の時間変化の関係について説明せよ .

I-3 (電磁気学) (100 点)

物質中の電子の古典的な運動を考えよう。電子の有効質量を m_e 、電荷を $-e$ ($e > 0$) とする。静電場 (電場強度 \mathbf{E}) と静磁場 (磁束密度 \mathbf{B}) のもとで電子の(平均)速度を \mathbf{v}_e としたとき、電子の運動方程式は、

$$m_e \left(\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{\mathbf{v}_e}{\tau_e} \right) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B})$$

で与えられる。ここで τ_e は衝突(摩擦)による緩和時間である。

- (1) 静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、静電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ がはたらくとして、定常状態 ($d\mathbf{v}_e/dt = \mathbf{0}$) にある電子の速度 $\mathbf{v}_e = (v_{ex}, v_{ey}, 0)$ を求めよ。(ここでは簡単のため電子の z 方向の運動は考えないとしている。)
- (2) 定常状態の電子は問(1)で求めた速度にあるとし、電流密度 \mathbf{j} は電子の数密度 n を用いて $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_e$ と表される。電流密度 \mathbf{j} の x, y 成分は、電気伝導度テンソル σ を用いて以下のようにあらわされる。

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

電気伝導度テンソル σ の全成分を、 e, n, B 及び、電子の易動度 $\mu_e = e\tau_e/m_e$ を用いて表せ。

図1のように x 方向に長い棒状の試料を考える。試料の x 軸両端につけた電極により電場を与え、電流が x 方向に流れているものとする。静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を印加した直後、 $-x$ 方向の電子の流れはローレンツ力のため $-y$ 方向に曲げられるが、外部に流れ出ない(絶縁されている)条件の下では $-y$ 軸方向の壁に電子がたまり電場を発生するようになり、問(1)で考えた定常状態をとるようになる。そこでは発生した電場によりローレンツ力の影響は打ち消され、電子の $-y$ 方向の移動はない。

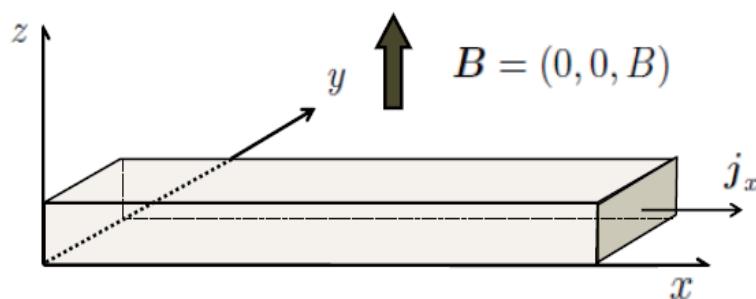


図 1

- (3) 定常状態では、 $j_y = 0$ から E_x と E_y の関係を知ることができる。この関係を用い、

$$R_H = \frac{E_y}{B j_x}$$

と定義されるホール係数 R_H 、および、有効抵抗率 $R_{xx} \equiv E_x/j_x$ を求めよ。

次に電子と正孔(電荷 e 、有効質量 m_h)の二種類のキャリアーが存在する物質を考える。正孔の(平均)速度を \mathbf{v}_h としたとき運動方程式は

$$m_h \left(\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} + \frac{\mathbf{v}_h}{\tau_h} \right) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B})$$

で与えられる。また、電子と正孔の数密度をそれぞれ n と p とし、電子、正孔の易動度をそれぞれ $\mu_e = e\tau_e/m_e$ 、 $\mu_h = e\tau_h/m_h$ とする。

- (4) 静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、静電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ がはたらくとして、定常状態にある電子、正孔の速度を \mathbf{v}_e と \mathbf{v}_h とする。(簡単のため電子、正孔の z 方向の運動は考えないとしている。) 二種類のキャリアーがある場合の電流密度は $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_e + ep\mathbf{v}_h$ と表されるとしたとき、電気伝導度テンソル σ の全成分を求めよ。

この物質を図 1 のように配置し、電場を x 方向に、静磁場 \mathbf{B} を z 方向にかけ充分の時間が経過し、電子、正孔ともに定常状態にあるという状況を考える。ここでも $j_y = 0$ より E_x と E_y の関係を知ることができる。

- (5) ホール係数の $B \rightarrow 0$ の低磁場極限における表式を求めよ。
- (6) ホール係数の $B \rightarrow \infty$ の高磁場極限における表式を求めよ。この表式からホール係数の符号は何を意味しているといえるか。

平成 27 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いててもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである.

II-1 (力学) (100 点)

- (1) x の関数 $y(x)$ に対して $y' = \frac{dy}{dx}$ と書く事にする. y と y' の関数 $L(y, y')$ に対して積分

$$T = \int_a^b L(y, y') dx \quad (\text{A})$$

を考える. T の y について変分がゼロになるような y の従う微分方程式を書け. ただし $\delta y(a) = 0, \delta y(b) = 0$ とする.

- (2) $y(x)$ が問 (1) で求めた微分方程式の解であるとき

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \right) \quad (\text{B})$$

を求めよ.

図 1 のような地球の表面上の点 $P(x = 0, y = 0)$ から, 点 $Q(x = a, y = 0)$ まで, 地下のトンネルを通って, 列車で移動できる様にする事を考える. 質量 m の列車は重力のみで加速と減速を受け抵抗ゼロで走れるとする. また, 地球の表面は平面とし, 重力ポテンシャルエネルギーは $g > 0$ を一定として, mgy で書けるとする. 点 P から最も早く点 Q に到着するには, いかなる経路 $y(x)$ のトンネルを掘れば良いかを, 以下のようにして求めよう.

- (3) 点 P から速度ゼロで出発して点 (x, y) に到着した時の列車の速さ V を求めよ.

- (4) $y(x)$ に沿って列車が進んだとき点 Q に達するまでの時間 T は, 式 (A) の形に書ける. $y = y(x)$ に沿った長さ ds が $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ と書ける事に注意して $L(y, y')$ の具体的な表式を書け.

- (5) 問 (2) の結果を積分して y' を y で表せ.

- (6) $y' = -1/\tan \theta$ で新しい変数 θ を定義する. このとき θ の関数として $y(\theta)$ を求めよ.

- (7) x も θ の関数 $x(\theta)$ と考えると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} \frac{1}{y'} \quad (\text{C})$$

となる. $x(\theta)$ は, この微分方程式を解く事により求める事ができる. $x = 0$ と $x = a$ で $y = 0$ となる条件から $x(\theta)$ を求めよ.

- (8) トンネルで一番深い点の x 座標と y 座標を求めよ.

(9) 最短の時間 T を求めよ.

(10) $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $a = 1.0 \times 10^6 \text{ m}$ とした時, 上で求めた最短の時間 T は, 何秒かを有効数字 2 術で答えよ.

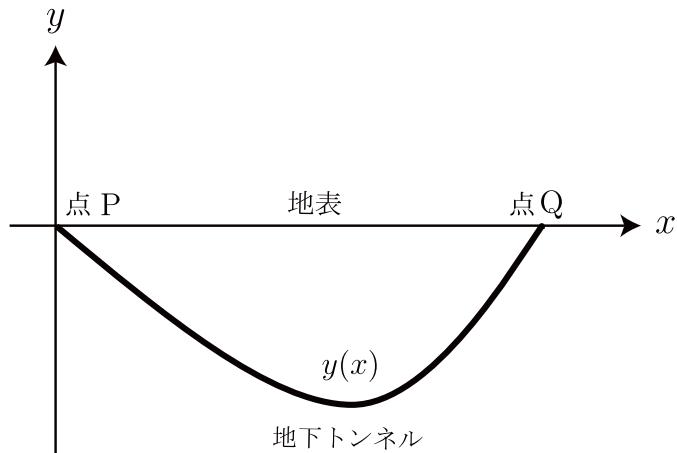


図 1

II-2 (量子力学) (100 点)

我々が観測する状態がハミルトニアンの固有状態と一致するとは限らない。例えば観測されるニュートリノの弱い相互作用の固有状態は、ニュートリノ一粒子状態のハミルトニアンの固有状態とは一致しない。このような場合に起こる量子振動現象を以下の二つの調和振動子からなる系の量子力学で考えてみよう。以下では、自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる。

以下の交換関係を満たす二組の生成消滅演算子 $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ で表される調和振動子を考える。

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (\text{A})$$

ここで、 $i, j = 1, 2$, δ_{ij} はクロネッカーデルタである。系の真空 $|0\rangle$ は、

$$\hat{a}_1|0\rangle = 0, \hat{a}_2|0\rangle = 0 \quad (\text{B})$$

で定義される。二つの調和振動子が相互作用している場合として、以下のハミルトニアンを考えよう。第2項を通じて二つの調和振動子は相互作用している。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega_A \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_B (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \omega_C \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &= (\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger) \begin{pmatrix} \omega_A & \omega_B \\ \omega_B & \omega_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C})$$

ただし、 $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ は実数とする。

(1) 新しく消滅演算子を、

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= \hat{a}_1 \cos \theta + \hat{a}_2 \sin \theta, \\ \hat{b}_2 &= -\hat{a}_1 \sin \theta + \hat{a}_2 \cos \theta \end{aligned}$$

のように定義する。このとき実パラメーター θ を適当に選ぶことで、ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \sum_{i=1,2} \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = (\hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger) \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}$$

の形に書ける。このとき、 $\omega_1, \omega_2, \tan 2\theta$ を $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ を用いて表せ。ただし、 $\omega_1 \leq \omega_2$ とする。

(2) 時刻 $t = 0$ で与えられる初期状態が $|\alpha\rangle = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$ であるとき、時刻 t での状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ とし、時刻 t で $|\beta\rangle = \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ にある確率 $P(\alpha \rightarrow \beta)(t) = |\langle \beta | \psi(t) \rangle|^2$ を、 $\omega_1, \omega_2, \theta$ を用いて表せ。

- (3) 前問では時刻 $t = 0$ に発生した状態 $|\alpha\rangle$ を時刻 t に状態 $|\beta\rangle$ として観測する確率を計算したが、実際に観測される確率は、以下の時間間隔 $[t - \Delta T/2, t + \Delta T/2]$ に対する時間平均

$$\overline{P}(\alpha \rightarrow \beta)(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T/2}^{t+\Delta T/2} dt' P(\alpha \rightarrow \beta)(t') \quad (\text{D})$$

であるとする。ただし、 $t > \Delta T$ とする。このとき $\overline{P}(\alpha \rightarrow \beta)(t)$ の表式を求めよ。

- (4) 問(3)で求めた $\overline{P}(\alpha \rightarrow \beta)(t)$ を $\omega_2 > \omega_1$ のときに ΔT の関数として図示し、これの $\Delta T = 0$ での値、及び $\Delta T \gg 1/(\omega_2 - \omega_1)$ での極限値を図に明記せよ。

II-3 (統計力学) (100 点)

物質中の電子(質量 m)の状態を考えよう。電子スピンは、 z 軸を量子化軸とし $s_z = \pm 1/2$ の 2 方向しか取れない状態にある。この電子の集まり(“電子系”とよぶ)をスピンを持つ自由粒子の系と考える。以下では電子の電荷の効果は無視する。この電子系は N 個の電子からなり、体積 V の容器に入っているとする。電子の 1 粒子状態は運動量空間に一様な密度 $V/(2\pi\hbar)^3$ で分布している。スピン自由度も考慮すると、密度は $2V/(2\pi\hbar)^3$ となる。絶対零度では、電子は 3 次元運動量空間において原点を中心に描いた半径 p_F の球の内部の状態を満たし、 p_F の大きさは内部の状態数が全電子数 N に等しいという条件から求めることができる。 p_F をフェルミ運動量、 $\epsilon_F = p_F^2/(2m)$ をフェルミエネルギーとよぶ。

- (1) フェルミ運動量 p_F とフェルミエネルギー ϵ_F を N , V , m , \hbar を用いて求めよ。また $D(\epsilon_F) = dN/d\epsilon_F$ で定義される状態密度 $D(\epsilon_F)$ を求めよ。
- (2) 絶対零度における電子系の全運動エネルギー U_0 は N , ϵ_F を用いて

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = a_0 N \epsilon_F$$

と表される。 a_0 の値を求めよ。

- (3) フェルミ気体とみなせる電子系の圧力は $P = -(dU_0/dV)$ で定義されるとし、電子系の PV を U_0 を用いて表せ。ただし、全粒子数 N は一定とする。

次に、フェルミ縮退をしている N 電子系の絶対零度における磁化 M を以下の手順で求めよう。電子スピン $s_z = \pm 1/2$ は磁気モーメント $\mp \mu_B$ を持ち、外部磁場 $B (> 0)$ の下でのゼーマンエネルギーは $\pm \mu_B B$ である。磁場 B における $s_z = 1/2$ の電子、 $s_z = -1/2$ の電子の数をそれぞれ、 $N^+ = N(1-\alpha)/2$, $N^- = N(1+\alpha)/2$ とする ($\alpha > 0$)。

- (4) 有限磁場での $s_z = 1/2$ の電子系が持つ運動エネルギー E^+ を、磁場 $B = 0$ のときのフェルミエネルギー ϵ_F 、および N , α を用いて表せ。同様に、 $s_z = -1/2$ の電子系が持つ運動エネルギー E^- を求めよ。
- (5) 電子系の全ゼーマンエネルギー E_Z を N , B , μ_B , α を用いて表せ。
- (6) 電子系の全エネルギーを $E_{\text{tot}} = E^+ + E^- + E_Z$ とする。 $\mu_B B \ll \epsilon_F$ のとき E_{tot} は $\alpha \ll 1$ で最小値をとる。 E_{tot} を最小にする α を求め、これに対応する電子系の磁化 M を ϵ_F , N , B , μ_B を用いて表せ。

さらに, この N 電子系の電子間に次のような相互作用が働くとする. すなわちスピンが平行な電子間の相互作用エネルギーを $-J(J \geq 0)$ とし, スpinが反平行な電子間には相互作用は働くないとする.

- (7) $N \gg 1$ の条件下で, $s_z = 1/2$ の電子間に働く全相互作用エネルギーはどのように表されるか. J, N, α を用いて表示せよ.
- (8) 電子系の全エネルギー E_{tot} に, スpin間に働く相互作用も考慮した全エネルギーを \tilde{E}_{tot} とする. $\mu_B B \ll \epsilon_F, NJ \ll \epsilon_F$ のとき \tilde{E}_{tot} は $\alpha \ll 1$ で最小値をとる. \tilde{E}_{tot} を最小にする α を求め, 対応する磁化 M を $\epsilon_F, N, B, \mu_B, J$ を用いて表せ.

平成 27 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-5 まで 5 間ある。この中から 3 間選択せよ。4 間以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 間すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 11 ページまである。
-

III-1 電磁気学：電磁波

III-2 量子力学：水素原子

III-3 統計力学：1 次相転移

III-4 実験：放射線測定

III-5 天文学：球対称ガス雲

III-1 (電磁気学 : 電磁波) (100 点)

Maxwell 方程式は電磁場の基本方程式であり，すべての電磁気的現象は下に示す4つの方程式によって記述される．

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

E と D (H と B) は，それぞれ電場強度と電束密度 (磁場強度と磁束密度) であり，誘電率 ϵ (透磁率 μ) により $D = \epsilon E$ ($B = \mu H$) として関連付けられる．また， j と ρ は空間的に分布する電流密度と電荷密度である．

図1に示すように誘電率と透磁率がそれぞれ $(\epsilon_1, \mu_1), (\epsilon_2, \mu_2)$ である誘電体1と誘電体2が境界面 ($z = 0$)において接触している場合を考える．ただし， $\epsilon_1 < \epsilon_2$ であり，誘電体はどちらも帯電していないものとする．図1は zx 平面を示した図であり， y 軸は紙面に対して上向きに定義されている．

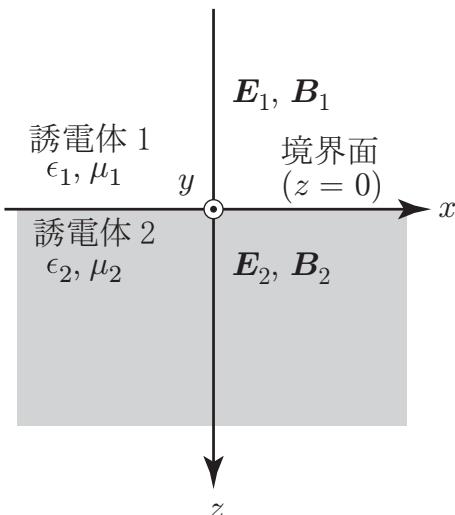


図1

(1) 誘電体1の内部における電磁場の強度

$$\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}), \mathbf{B}_1 = (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$$

と誘電体2の内部における電磁場の強度

$$\mathbf{E}_2 = (E_{2x}, E_{2y}, E_{2z}), \mathbf{B}_2 = (B_{2x}, B_{2y}, B_{2z})$$

とが境界面上において満たすべき境界条件を，Maxwell 方程式に基づいて導け．

- (2) $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ であり, かつ, $j(\mathbf{r}, t) = 0$ である領域において, 電場強度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ が満たすべき波動方程式を Maxwell 方程式に基づいて導け.

この誘電体の境界面に対し, 図 2 に示すように, 誘電体 1 の側から電磁波 A が $y = 0$ の面内を角度 ϕ ($0 < \phi < \pi/2$) で入射して, 境界面上で反射波 A' と屈折波 A'' が発生する状況を考える. 入射波の電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

で与えられるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, \mathbf{I} は電場の振幅を与える定ベクトルである.

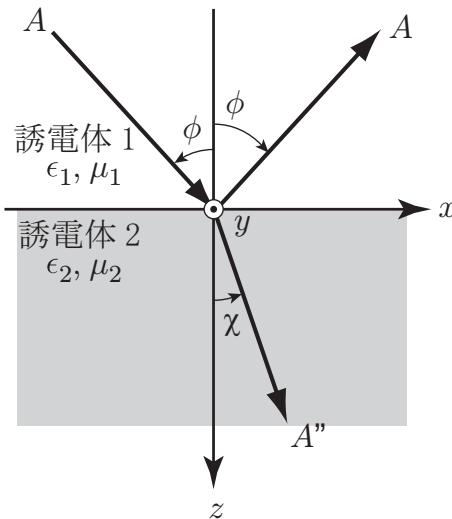


図 2

- (3) 入射波の位相速度 v の絶対値を ϵ_1 と μ_1 を用いて表せ. また, この位相速度 v と電場の振幅ベクトル \mathbf{I} が成す角を求めよ.

- (4) 入射波の磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を求めよ.

反射波 A' と屈折波 A'' の電場をそれぞれ,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}, \quad \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)}$$

とおくことにする.

- (5) 問(1)で得た境界条件は, 境界面上の任意の点において常に満たされていなければならない. この事実に基づいて, 反射角 ϕ' と屈折角 χ を $\phi, \epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ のうち必要なものを用いて表せ.

III-2 (量子力学：水素原子) (100 点)

水素原子の原子核に対する電子の相対運動は次のハミルトニアンで記述される。

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}$$

ただし, μ は換算質量, e は素電荷, \mathbf{p} は相対運動量, \mathbf{r} は相対位置を表す。以下ではスピンと相対論的効果は無視する。

エネルギー準位と定常状態の波動関数を, デカルト座標 (x, y, z) と次の関係で与えられる放物座標 (v, w, φ) を用いて求めることを考えよう。

$$x = \sqrt{vw} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{vw} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(v - w)$$

各座標の取り得る値の範囲は, それぞれ $0 \leq v < +\infty$, $0 \leq w < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ である。また, ラプラシアン ∇^2 は次式で与えられる。

$$\nabla^2 = \frac{4}{v+w} \left(\frac{\partial}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} w \frac{\partial}{\partial w} \right) + \frac{1}{vw} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

- (1) エネルギー固有値 E の定常状態の波動関数 $\psi(v, w, \varphi)$ に対するシュレーディンガー方程式を書け。

$\psi(v, w, \varphi) = f_1(v)f_2(w)e^{im\varphi}$ において v, w について問(1)のシュレーディンガー方程式を変数分離する。 $\beta_1 + \beta_2 = 1$ を満たす新たな定数 β_1, β_2 を導入すると, $f_1(v), f_2(w)$ に対する方程式は以下のようになる。

$$\frac{d}{dv} \left(v \frac{df_1}{dv} \right) + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2} v - \frac{m^2}{4v} + \frac{\mu e^2}{\hbar^2} \beta_1 \right) f_1 = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{d}{dw} \left(w \frac{df_2}{dw} \right) + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2} w - \frac{m^2}{4w} + \frac{\mu e^2}{\hbar^2} \beta_2 \right) f_2 = 0 \quad (\text{B})$$

- (2) 上で導入した m は整数でなければならない。その理由を述べよ。

- (3) 以下では $E < 0$ の解について考える。方程式 (A) において

$$E = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 N^2}, \quad v = \frac{N\hbar^2}{\mu e^2} s, \quad f_1(v) = g(s)$$

とおき, $g(s)$ に対する方程式を求めよ。

- (4) 問(3)で導入した $g(s)$ について, $s \rightarrow +\infty$, $s \rightarrow +0$ でそれぞれ漸近的に $g(s) \sim e^{-as}$, $g(s) \sim s^b$ と仮定する. $g(s)$ が $s \rightarrow +0$ で有限かつ $s \rightarrow +\infty$ でゼロになるように定数 a , b を求めよ.
- (5) 問(4)で求めた a , b を用いて, $g(s) = s^b e^{-as} h(s)$ とおき, $h(s)$ に対する方程式を求めよ.
- (6) 合流型超幾何関数 $F(\alpha, \gamma; z)$ は以下で与えられる.

$$F(\alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

ただし $(x)_n$ は $n \geq 1$ に対し $(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$, $(x)_0 = 1$ を表す.

$F(\alpha, \gamma; z)$ は $u(z)$ に関する微分方程式

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0$$

の $z = 0$ で正則な解であり, α が 0 以下の整数の場合は多項式となるが, それ以外の場合は $z \rightarrow +\infty$ で漸近的に

$$F(\alpha, \gamma; z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-\gamma} e^z$$

のように振る舞う. このことを用いて $h(s)$ として許される解を求めよ. また, このとき導入される非負の整数の量子数を n_1 とおき, これを N , β_1 , m を用いて書き下せ.

- (7) $f_2(w)$ についても新たに非負の整数の量子数 n_2 を導入しその解を求める. 方程式(B)に対して問(3)–(6)の手続きを考えると, 問(6)の量子数 n_1 を n_2 で置き換えた解が $f_2(w)$ の解として得られる. 結局, エネルギー準位 E と波動関数 $\psi(v, w, \varphi)$ は量子数 (n_1, n_2, m) で完全に指定される. E をこれらの量子数で表せ.

III-3 (統計力学 : 1 次相転移) (100 点)

磁気モーメントを持つ N 個の粒子の間に距離によらない相互作用が働く次のような系を用いて、磁性体の相転移について考える。すなわち、粒子 i ($i = 1, \dots, N$) の磁気モーメントを μ_i とするとき、すべての粒子対 (i, j) が相互作用エネルギー $-\frac{J}{N} \mu_i \cdot \mu_j$ ($J > 0$) をもつとする。したがって、ハミルトニアンは

$$H(\{\mu_i\}) = -\frac{J}{N} \sum_{(i,j)} \mu_i \cdot \mu_j = -\frac{J}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_i \cdot \mu_j \quad (\text{A})$$

で与えられる。ただし、磁気モーメント μ_i は、図 1 に示すような互いに 120° の角度をなす 3 つの向きのいずれかを取るベクトルとし、その大きさは $\mu = |\mu_i|$ とする。また、図 1 のように磁気モーメントの向きにしたがって粒子の状態 1, 2, 3 を定める。状態 1 の向きは x 軸の正の向きである。

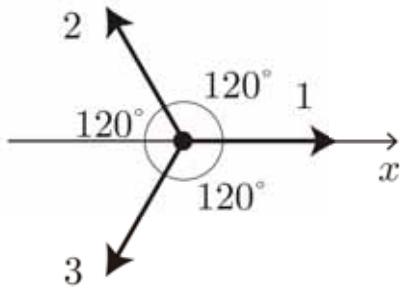


図 1

- (1) 状態 1, 2, 3 を取る粒子数をそれぞれ N_1, N_2, N_3 (したがって $N_1 + N_2 + N_3 = N$) とするとき、全磁化 $\sum_{i=1}^N \mu_i$ の x 成分 M を (N_1, N_2, N_3) を用いて表す式を求めよ。また、同様にハミルトニアン (A) を (N_1, N_2, N_3) を用いて表すと、

$$H(N_1, N_2, N_3) = \frac{J\mu^2}{4N} [2N - (N_1 - N_2)^2 - (N_2 - N_3)^2 - (N_3 - N_1)^2] \quad (\text{B})$$

となることを示せ。

- (2) (N_1, N_2, N_3) に対応する系全体の状態 $\{\mu_i\}$ の数を $\nu(N_1, N_2, N_3)$ とすると、エントロピーは $S(N_1, N_2, N_3) = k_B \log \nu(N_1, N_2, N_3)$ で与えられる。ただし、 k_B はボルツマン定数である。 N が大きいときのスターリングの公式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いて、 $N_1 \gg 1, N_2 \gg 1, N_3 \gg 1$ における $S(N_1, N_2, N_3)$ の漸近形を求めよ。

この系の温度 T における分配関数 $Z_N(T) = \sum_{\{\mu_i\}} \exp \left[-\frac{H(\{\mu_i\})}{k_B T} \right]$ は,

$$F(T; N_1, N_2, N_3) = H(N_1, N_2, N_3) - TS(N_1, N_2, N_3) \quad (\text{C})$$

とおくと, N の分割 (N_1, N_2, N_3) についての和

$$Z_N(T) = \sum_{(N_1, N_2, N_3)} \exp \left[-\frac{F(T; N_1, N_2, N_3)}{k_B T} \right] \quad (\text{D})$$

で表される. また, 式 (D) が成り立つとき, 系の自由エネルギー $F(T)$ は $N \rightarrow \infty$ で漸近的に $F(T; N_1, N_2, N_3)$ の最小値と一致する. すなわち,

$$F(T) = \min_{(N_1, N_2, N_3)} F(T; N_1, N_2, N_3) \quad (\text{E})$$

が成り立つ. このことを用いて系の熱力学的性質を議論しよう.

- (3) $N_2 = N_3$ を仮定すると, $F(T; N_1, N_2, N_3)$ を (N_1, N_2, N_3) の代わりに磁化 M を用いて表すことができる. この関数 $F(T; M)$ を求めよ.
- (4) $N_2 = N_3$ の条件の下で, $F(T; M)$ の極値を与える磁化 M が満たすべき式を求めよ.
- (5) 高温から温度を下げていくと, ある温度 T_c で磁化 M が 0 から $M_s (\neq 0)$ へ不連続に変化する1次相転移が起きた. T_c と M_s が満たすべき式を $F(T; M)$ を用いて表せ.
- (6) $M_s = N\mu/2$ が問 (5) の条件を満たすことを示し, 転移温度 T_c を求めよ.

III-4 (実験：放射線測定) (100 点)

放射線測定について考えよう。線源から出るエネルギー E_0 (ただし E_0 は 1MeV 領域) の 線 (光子) のエネルギーを測定する。図 1 (a) に示す実験装置、シンチレータと光電子増倍管を使用し、図 1 (b) のエネルギースペクトルを測定した。エネルギースペクトルに見られるエネルギー値 E_1 , E_2 は $E_1 \simeq E_0$, $E_1 > E_2$ の関係がある。

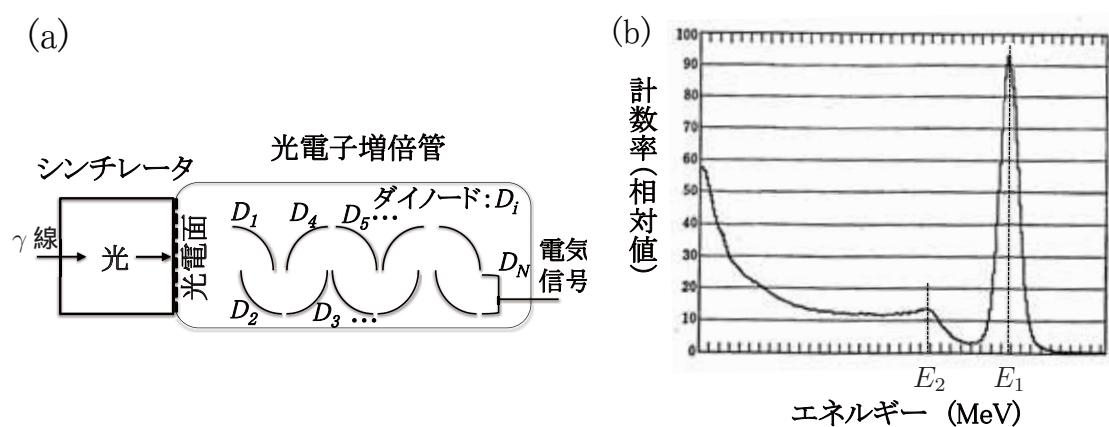


図 1

- (1) 実験で使用したシンチレータは、(i) プラスチックシンチレータ、(ii) NaI(Tl) シンチレータのどちらか。そのシンチレータを選んだ理由も説明せよ。

図 1 (a) に光電子増倍管の模式図を示す。光電子増倍管は光を電気信号に変え、さらに増幅する装置で、微弱なシンチレーション光の測定に使用する。光電子増倍管には N 個のダイノード ($D_1 \sim D_N$) があり、光電面と第 1 ダイノード (D_1) , 第 i ダイノード (D_i) と第 $(i+1)$ ダイノード (D_{i+1}) の間 (ただし $i = 1 \sim N-1$) にはそれぞれ V/N の電圧がかかっている。各ダイノードにおける電子数の増幅率を $\alpha V/N$ とする。

- (2) 光電子増倍管の動作原理を、光電面、ダイノードという言葉を使って説明せよ。
- (3) 光電子増倍管の増幅率を求めよ。
- (4) 光電子増倍管からの信号を処理するために、高周波信号のみを通す回路 (ハイパスフィルター) を抵抗とコンデンサーのみで作りたい。どのような回路を作ればよいか。入力電圧を v_i , 出力電圧を v_o , グラウンドは GND , 抵抗 R , コンデンサー C , として回路図を書け。

図1 (b) の 線のエネルギースペクトルには二つの特徴がある. 一つはエネルギー E_1 のピーク構造, もう一つはエネルギー E_2 以下の連続分布構造である.

- (5) このエネルギー E_1 のピーク構造をつくる 線と物質との反応について説明せよ.

エネルギー E_2 以下はコンプトン散乱によるものが支配的である. 以下, コンプトン散乱について考え, そのおこる回数は1回と仮定する. 電子はその束縛エネルギーを無視して自由粒子として考える. 図2のように, 入射 線(光子)の4元運動量を (E_0, \mathbf{p}_0c) , 検出器中の電子の4元運動量を $(m_e c^2, \mathbf{0})$ として, 電子は最初止まっているとする. m_e は電子の質量, c は光速である. 散乱後の, 線の4元運動量を $(E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma c)$, 電子の4元運動量を $(E_e, \mathbf{p}_e c)$ とする. 入射 線と散乱 線とのなす角(散乱角)は θ とする.

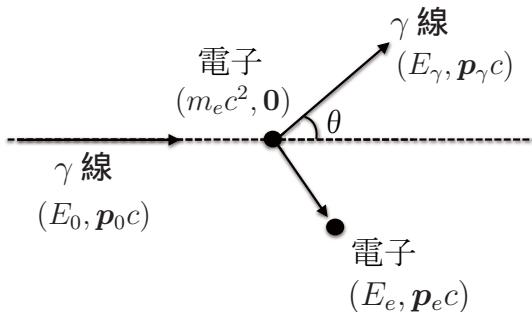


図2

- (6) エネルギー運動量保存則を使って E_γ を計算せよ. 答えは E_0 , m_e , c を用いて表せ.
- (7) 線が後方散乱した場合, 測定装置で観測されるエネルギーが最大となり, 図1 (b) の E_2 となる. この E_2 を求めよ. 答えは E_0 , m_e , c を用いて表せ.
- (8) 束縛されていない自由電子においては, 問(5)の反応はおこらないことを示せ.

III-5 (天文学：球対称ガス雲) (100 点)

星間ガスから星への進化の初期段階にある半径 R , 質量 M のガス雲が , 自己重力で自由落下して収縮する場合を考える . なお , 以下の設問において必要であれば末尾に掲載する数値を用いよ .

(1) 球対称の運動方程式

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

より , 平均密度が $10^{-19} \text{ kg m}^{-3}$ のガス雲について , 自由落下時間のオーダーを計算すると $\sim 10^A$ 年となる . ベキ指数 A を求めよ . ただし , ρ は密度 , v は速度 , $M(r)$ は半径 r 内の質量 , G は万有引力定数である .

こうして収縮したガス雲は圧力が高まり圧力勾配が利くようになる . 球対称なガス雲の力学的平衡状態について考えてみよう . ガスは理想気体でポリトロピック状態方程式 $p = K\rho^{1+1/n}$ を満たすものとする . ここで p は圧力 , K は定数 , n はポリトロピック指数である .

(2) このガス球の静水圧平衡の式を書け .

(3) 問 (2) の式と次の質量保存の式

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

から $M(r)$ を消去し , ポリトロピック状態方程式を用いると

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) K \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = B$$

となる . B を求めよ .

(4) ここで $r = \alpha\xi$ とし , $\rho = \rho_c \theta^n$ と変数変換すると

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G \alpha^2} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = C$$

となる . ただし , α は定数 , ρ_c は中心密度である . C を求めよ .

左辺の係数が 1 となるように α を定めれば , Lane と Emden が導いた方程式が得られる . 以下の問では左辺の係数を 1 として答えよ .

- (5) Lane-Emden 方程式は，中心 $\xi = 0$ における境界条件 $\theta(0) = 1$ と， $\theta'(0) = 0$ のもとで解くことができる．この境界条件の物理的意味を簡単に述べよ．また， $n = 1$ に対する解析解 $\theta(\xi)$ を求めよ（ヒント：変数変換 $\theta = \chi/\xi$ を用いよ）．
- (6) 問 (5) の解ではガス球の表面 ξ_1 では $\theta(\xi_1) = 0$ となる． ξ_1 を求めよ．
- (7) 太陽質量 M_{\odot} と太陽半径 R_{\odot} をもつ $n = 1$ のガス球の中心密度，中心温度を有効数字 1 衔の数値で計算せよ．ただしガスは電離水素からなるとせよ．

$G \simeq 7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ，電離水素ガスの平均分子量 $\mu \simeq 0.5$ ，原子質量単位 $m_u \simeq 2 \times 10^{-27}\text{kg}$ ，ボルツマン定数 $k_B \simeq 1 \times 10^{-23}\text{J K}^{-1}$ ，太陽質量 $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ，太陽半径 $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^8\text{m}$ ，1 年 $\simeq 3 \times 10^7$ 秒．

平成 27 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1, IV-2 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いててもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 2 間すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 5 ページまである.

IV-1

以下の英文は Daniel Kleppner 著 “Master Michelson’s measurement” からの抜粋である。読んで以下の問(1)～(3)に答えよ。

Albert A. Michelson,

著作権保護のためここは
空欄にしてあります。

(a)

(注)

Foucault: フーコー (フランスの物理学者), revolving: 回転する

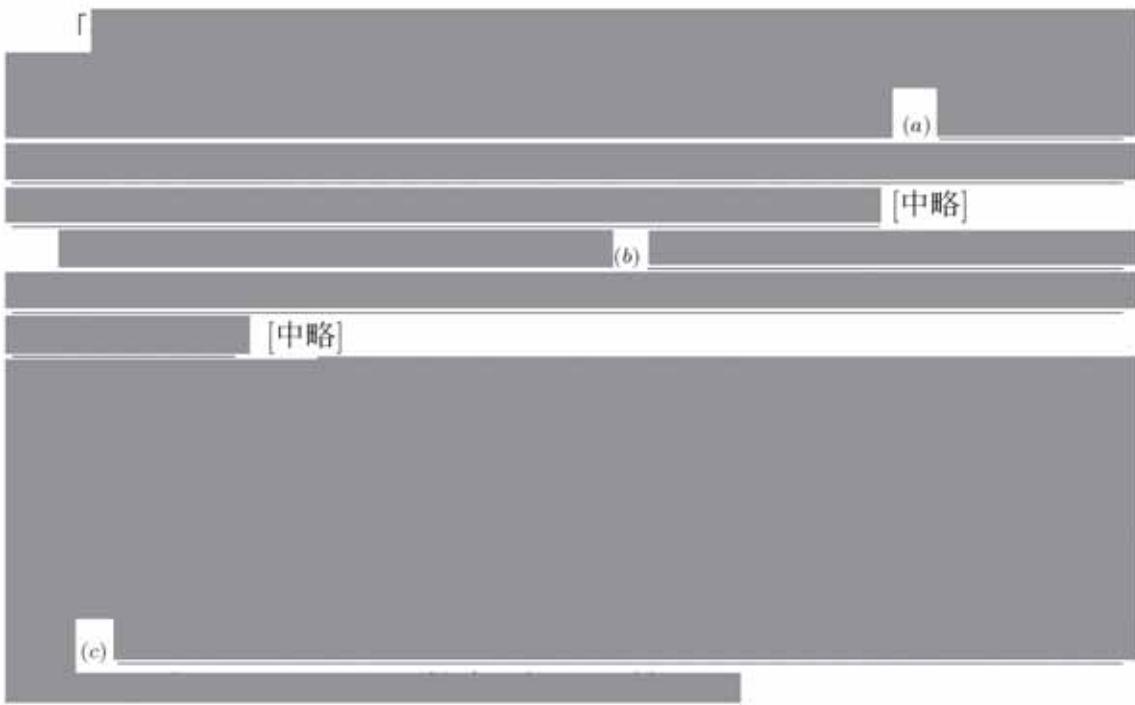
get sidetracked: 横道にそれる, sojourn: 滞在, interferometer: 干渉計

ether: エーテル

- (1) Foucault の光速測定の方法について, 100 字程度の日本語で説明せよ.
- (2) Michelson が行った改良とその結果について, 200 字程度の日本語で説明せよ.
- (3) 下線部 (a) を和訳せよ.

IV-2

以下は朝永振一郎著「光子の裁判-ある日の夢-」からの抜粋である。ここで被告とは光子のことである。読んで以下の問(1)~(3)に答えよ。



(注)

被告: defendant

- (1) 下線部 (a) を英訳せよ。
- (2) 下線部 (b) を英訳せよ。
- (3) 下線部 (c) を英訳せよ。

(このページは白紙である)

京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

平成26 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。また、当日、試験時間内に3つの修正・加筆を行いました。修正点は下記問題に赤字にて説明してあります。

平成 25 年度専攻教育委員会

平成 26 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いてもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 6 ページまである.

I-1 (力学) (100 点)

経路に沿った座標 s が、その地点での接線の水平に対する傾斜角 θ を用いた関数で表される形状のなめらかな床を考える。この床の上にある、質量 m の質点について、座標 s に沿った運動を考えよう。図 1 のように、質点が時刻 $t = 0$ に $s = 0$ の地点から初速度 v_0 で床の上を動き始めるとする。 s, θ は図 1 の矢印の方向を正とし、重力加速度は g とする。

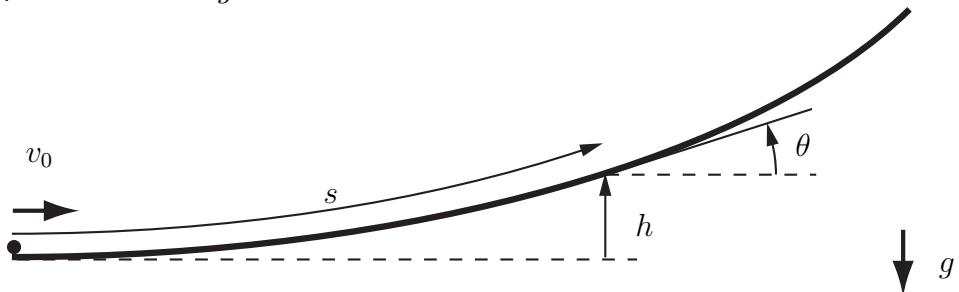


図 1

まず、床の形状が、 $s = -a \sin \theta$ ($0 \leq s \leq a, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$, a は正の定数) で表される場合を考える。なお、 $\theta \leq 0$ なので、図 1 とは異なり、床の形状は右下がりとなることに注意せよ。

- (1) $s = 0$ の地点を基準とする、質点の位置エネルギーを θ の関数として求めよ。
ヒント：高さを h とすると $dh/ds = \sin \theta$ となることに注意。
- (2) 経路に沿った質点の速度を v ($\equiv ds/dt$) として、 v^2 を θ の関数として求めよ。
- (3) 経路の曲率半径 ρ を θ の関数として求めよ。
- (4) この質点に対する床の垂直抗力 N を θ の関数として求めよ。また、この質点が床から離れる地点の座標 s を a, g, v_0 を用いて表せ。

次に、床の形状が $s = a \sin \theta$ ($-a \leq s \leq a, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, a は正の定数) で表される場合について考える。

- (5) この質点が床の範囲 ($-a \leq s \leq a$) の外に出ないための v_0 の条件を求めよ。また、この条件下で質点が経路に沿った座標 s で単振動することを示し、その角振動数 ω_0 を求めよ。
- (6) この質点に対し、経路に沿った速度 v に比例する抵抗力 $-2m\beta v$ ($\beta > 0$) が働くとする。この質点が床の範囲の外に出ない条件のもとで、質点が $s < 0$ の領域へ行かないための β の最小値 β_0 を求めよ。

- (7) 問(6)で求めた $\beta = \beta_0$ の抵抗が働くとき、この質点が床の範囲の外に出ないための v_0 の条件を a, g を用いて表せ。
- (8) この質点に対して、問(6)で求めた $\beta = \beta_0$ の抵抗と、経路に沿った外力 $f = mg \cos(\Omega t)$ が働くとする。十分に時間が経過した後に単振動をしている質点の座標 s を、 a, Ω と $r (\equiv \Omega/\omega_0)$ を用いて、 t の関数として表せ。ただし、 ω_0 は問(5)で求めた ω_0 である。また、その単振動の振幅の絶対値と、位相の遅れを、それぞれ r を横軸として図示せよ。なお、十分な時間が経過するまでの間に、質点は床の範囲の外には出でないものとする。

I-2 (電磁気学) (100 点)

導体球近傍に置かれた点電荷がつくる静電ポテンシャルについて、鏡像法を用いて考える。以下では、真空中で考え、その誘電率を ϵ_0 とする。

図 1 のように半径 R の導体球の中心を原点 O とし、電荷量 q ($q > 0$) の点電荷 A を $(x, y, z) = (0, 0, d)$ ($d > R$) に置いた。なお、解答に際しては、必要に応じて球座標

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

を用いよ。

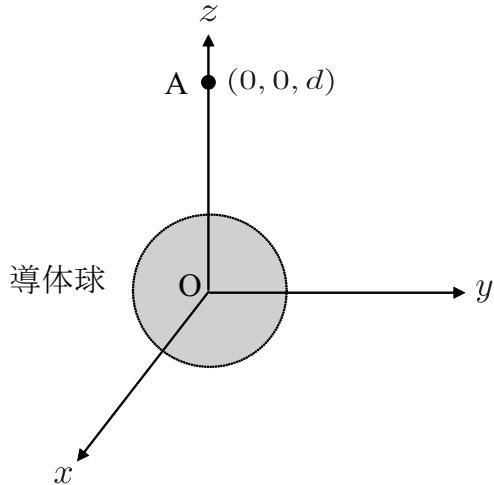


図 1

- (1) まず、導体球が接地された場合について考える。導体球の表面で静電ポテンシャルは一定である。導体球に誘起された電荷の代わりに、電荷量 q_B の仮想の点電荷 B を $(0, 0, d_B)$ に置いて考えることとする。点電荷 A, B が導体球の外側の任意の点につくる静電ポテンシャル ϕ を、 q_B と d_B を含む式で表せ。この結果から、 q_B と d_B を R, d, q を用いて表せ。
- (2) 次に、導体球が接地されておらず、電荷を持たない場合について考える。このとき問(1)で求めた仮想の点電荷 B に加えて、仮想の点電荷 C を置いて考えればよい。この仮想点電荷 C の位置 $(0, 0, d_C)$ 、およびその電荷量 q_C を求めよ。また、このとき導体球が点電荷 A に及ぼす力の向きと大きさを求めよ。

- (3) 次に、導体球が接地されておらず、かつ電荷量 Q ($Q > 0$) を持つ場合について考える。点電荷 A には、問(2)で求めた力に加えて導体球に与えられた電荷 Q による力が働く。点電荷 A の位置を z 軸方向に動かしたところ両者の力が釣り合った。このとき Q/q を d と R を用いて表せ。また、 $Q \gg q$ のとき、

$$d \simeq R \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{Q}} \right)$$

と書けることを示せ。

次に、導体球を接地して、点電荷 A に加えて、電荷量 $-q$ の点電荷 D を $(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に置いた。以下では、 q/d^2 を一定としたまま、 $d, q \rightarrow \infty$ の極限について考える。

- (4) 鏡像法を用いて、点電荷 A, D が導体球の外側につくる静電ポテンシャル ϕ を上の極限で求めよ。
- (5) 導体球がない場合は、点電荷 A, D が原点付近につくる電場は一様となる。その大きさ E_0 を求めよ。
- (6) 問(4)で求めた静電ポテンシャル ϕ から、導体球面に誘起される電荷分布 σ を求めよ。解答は、 E_0 を用いて示せ。

I-3 (物理数学) (100 点)

以下の各間に答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ .

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

$$(b) \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

$$(c) \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1-x} dx$$

ただし PV は主値を表し, $-1 < \alpha < 0$ とする.

(2) 複素数 z に関する次の複素関数 $f(z)$ を考える. (x は z と独立な実変数である.)

$$f(z) = \exp \left\{ \frac{x}{2}(z - z^{-1}) \right\} \quad (\text{A})$$

(a) $f(z)$ を $z = 0$ の周りでローラン展開することで,

$$f(z) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \{z^n + (-z)^{-n}\} \quad (\text{B})$$

と変形できること, かつ, 式 (B) 中の $J_n(x)$ が

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (\text{C})$$

と書けることを示せ.

(b) 式 (A) と式 (B) を用いて, $J_n(x)$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開した表式を求めよ.

(c) 前問 (b) で求めた展開式 $J_n(x)$ が次の方程式の解になっていることを示せ.

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_n(x) + x \frac{d}{dx} J_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \quad (\text{D})$$

(このページは白紙である)

平成 26 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いててもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである.

II-1 (力学) (100 点)

3 次元空間 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ にある静止質量 m_0 の質点の相対論的ラグランジアンは,

$$L = -m_0 c \sqrt{c^2 - v^2} - U(\mathbf{r}) \quad (\text{A})$$

と書ける. ここで, c は光速, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $v \equiv |\mathbf{v}|$, $U(\mathbf{r})$ はポテンシャルである.

(1) オイラー・ラグランジュ方程式をたて, 相対論的運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = \mathbf{F} \equiv -\nabla U \quad (\text{B})$$

を導け. ただし, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ である.

以下, 静止質量 m_0 , 電荷 $-e$ (< 0) の相対論的電子のラグランジアンが,

$$L = -m_0 c \sqrt{c^2 - v^2} - \frac{k}{2} r^2 - e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (\text{C})$$

(k は正の定数, $r \equiv |\mathbf{r}|$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ はベクトルポテンシャル) で与えられる場合, どのような振動が生じるかを, 以下のように調べてみよう. ただし, 電子からの電磁波放射は無視できるとする.

(2) 式 (C) から, 相対論的電子の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = -k \mathbf{r} - e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{D})$$

を導け. ここで, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ は磁束密度である.

(3) $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, $k = 0$ のとき, γ が一定となることを式を用いて示し, その物理的理由を述べよ.

以下, 一様な定磁場を考え, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ($B > 0$) とおく.

(4) $k = 0$ の条件下で運動方程式を解き, 電子の運動を求めよ.

(5) $k > 0$ のときは, 一般に γ は一定とならないが, 近似的に γ がほぼ一定として運動方程式を解き, 電子の x - y 面上の運動に, 二つの異なる振動数をもつモードが生じること, およびその振動数の絶対値の差は, B に比例することを示せ.

(このページは白紙である)

II-2 (量子力学) (100 点)

ハミルトニアンが $H = H_0 + \tilde{H}(t)$ のように、時間に依存する小さな部分 $\tilde{H}(t)$ を持つ量子力学系を考えよう。

- (1) この系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を、 H_0 の完全系 $|n\rangle$ ($H_0|n\rangle = E_n|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots$) を使って、

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (\text{A})$$

と表すとき、 $a_n(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

- (2) 初期 $t = -\infty$ にこの系が H_0 の固有状態 $|M\rangle$ にあったとして、 $t = \infty$ で、この系が状態 $|N\rangle$ ($N \neq M$) にある確率 P_{MN} を \tilde{H} についての摂動論の（自明でない）最低次で表せ。

次に、座標 x で表される 1 次元空間にある質量 m の粒子のハミルトニアンが、

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \quad (\text{B})$$

（ \hat{x}, \hat{p} はそれぞれ、この粒子の座標演算子と運動量演算子、 ω は正の定数）と、時間に依存する

$$\tilde{H}(t) = q \hat{x} e^{-(t/\tau)^2} \quad (\text{C})$$

（ q, τ は正の定数）からなるときを考えよう。

- (3) ハミルトニアン H_0 の基底状態と第 1 励起状態について、それぞれの規格化された波動関数を $A = m\omega/\hbar$ と x のみを使って表せ。またそれらのエネルギー固有値を \hbar と ω を使って表せ。

ヒント：これらの状態の波動関数は、ガウス関数 $e^{-\beta x^2}$ (β はある正の定数) と座標 x の多項式の積で表される。また、以下の数学公式を参考にしてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha \text{ は正の定数}) \quad (\text{D})$$

- (4) この粒子が当初 ($t = -\infty$)、 H_0 の基底状態にある。問 (2) の結果から、摂動論の最低次では、 $t = \infty$ で H_0 のどの固有状態への遷移確率がゼロではないかを理由とともに述べよ。また、それらの状態への遷移確率を $\hbar, m, \omega, q, \tau$ のみを使って表せ。

(このページは白紙である)

II-3 (統計力学) (100 点)

一様な磁場 H がかけられている 3 次元理想フェルミ気体を考える。各フェルミ粒子は質量 m , スピン $1/2$ を有し, スピンと磁場の間にはゼーマン相互作用が働いている。フェルミ粒子は電荷を持たず, 磁場によるローレンツ力は働くないとする。また, 系の体積は V とする。この系の熱力学ポテンシャル Ω は次式で与えられる。

$$\Omega = k_B T \sum_{\mathbf{k}, s} \ln[1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}s})] \quad (\text{A})$$

$$f(\varepsilon_{\mathbf{k}s}) = \frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}s} - \mu}{k_B T}) + 1} \quad (\text{B})$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}s} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} - sg\mu_B H \quad (\text{C})$$

ここで k_B はボルツマン定数, \hbar はプランク定数, T は温度, μ は化学ポテンシャル, $\varepsilon_{\mathbf{k}s}$ は運動量 $\hbar\mathbf{k}$ とスピンの磁場方向成分 s をもつ 1 個のフェルミ粒子のエネルギーで, 式 (C) 右辺第 1 項は運動エネルギー, 第 2 項はゼーマンエネルギーである。 g は g -因子, μ_B はボア磁子でそれぞれ定数である。 s は $1/2$, または $-1/2$ の値をとる。また, 式 (B) で定義される $f(\varepsilon_{\mathbf{k}s})$ はエネルギー $\varepsilon_{\mathbf{k}s}$ を持つフェルミ粒子のフェルミ分布関数である。以下では μ が温度に依存しない正の一定値の場合を考える。

- (1) スピン s を持ち, エネルギーが $\varepsilon_{\mathbf{k}s} = \varepsilon$ であるような 1 粒子状態の状態密度 $D_s(\varepsilon)$ を ε と s の関数として求めよ。結果は, $\varepsilon, s, m, \hbar, g, \mu_B, H, V$ のうち, 必要なものを用いて表せ。ただし, $D_s(\varepsilon)$ は, スpin s を持ち, エネルギーが 0 から ε の間にある 全ての 1 粒子状態の数を $N_s(\varepsilon)$ として, $D_s(\varepsilon) = dN_s(\varepsilon)/d\varepsilon$ で定義される。
- (2) 式 (A) からこの系のエントロピー S の表式を導出し, 結果をフェルミ分布関数 $f(\varepsilon_{\mathbf{k}s})$ と k_B のみを用いて表せ。
- (3) エントロピー S 一定のもとでの温度 T の磁場 H による微分,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_S$$

を定磁場比熱 C_H , 温度 T , および

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

を用いて表せ。

訂正 1

ただし, M は磁化で,

$$M = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial H} \right)_T$$

で与えられる. また, 定磁場比熱 C_H は

$$C_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H$$

で与えられる.

- (4) 以下では $\frac{1}{2}g\mu_B H < \mu$ であるとする. 低温領域 $k_B T \ll \mu \pm \frac{1}{2}g\mu_B H$ の場合を考える. C_H を温度 T について, 0 ではない最低次数まで展開して求めよ. 結果は $k_B, T, m, \hbar, \mu, g, \mu_B, H, V$ のうち, 必要なものを用いて表せ. ただし, 必要であれば以下の関係式を用いてよい. $F(\varepsilon)$ を ε の関数, a を $a + \mu > 0$ を満たす定数として, フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ に対して, $k_B T \ll \mu + a$ で次式が成立する.

$$\int_{-a}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) = F(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d^2 F(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4) \quad (\text{D})$$

- (5) 問(4)と同じ条件下で $(\partial M / \partial T)_H$ を温度 T について, 0 ではない最低次数まで展開して求めよ. 結果は $k_B, T, m, \hbar, \mu, g, \mu_B, H, V$ のうち, 必要なものを用いて表せ.

- (6) 断熱消磁法 (断熱的に印加磁場を減少させることによって温度を低下させる方法) を用いて, この系の温度を低下させることを考える. 磁場 $H = H_0$ のとき, 系の温度が $T = T_0$ であったとする. また, $k_B T_0 \ll \mu$, および $g\mu_B H_0 \ll \mu$ であるとする. この状態から断熱的に磁場を減少させることによって, この系が到達できる最低温度を求めよ. 結果は $H_0, T_0, k_B, m, \hbar, \mu, g, \mu_B, V$ のうち, 必要なものを用いて表せ.

また, この結果を用いて, この系を, 上記の範囲の磁場で絶対零度 $T = 0$ に到達させることができかどうか, 理由とともに答えよ.

平成 26 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-5 まで 5 間ある。この中から 3 間選択せよ。4 間以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 間すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 13 ページまである。
-

III-1 電磁気学（円筒コンデンサ）

III-2 量子力学（磁束と粒子）

III-3 統計力学（おもりと理想気体）

III-4 実験（相対論的粒子の測定）

III-5 天文学

III-1 (電磁気学: 円筒コンデンサ) (100 点)

図1のような半径 a, b ($a < b$) の2つの中空円筒導体で構成される同軸円筒コンデンサを考え、軸と平行に x 軸をとる。極板の厚さと抵抗は無視できるほど小さく、また、円筒の長さはこれらの半径に比べて十分に長く、両端部での電場の乱れは無視できるものとする。両極板間は空気で満たされており、空気の誘電率、透磁率はそれぞれ真空中と同じ値 ϵ_0, μ_0 であるものとする。

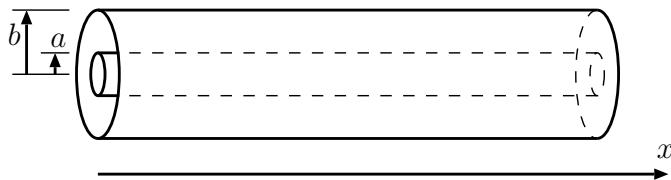


図1

- (1) この円筒コンデンサの x 方向の単位長さあたりの静電容量 C 、および x 方向の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ。
- (2) 外周電極に対し、内周電極に電位差 V ($V > 0$) を与えたとき、極板間の電場強度の最大値 E_{\max} を V, a, b で表せ。また、特定の外周電極半径 b に対し E_{\max} を最も低く抑えるには内周電極半径 a をいくらにすればよいか。
- (3) 密度 ρ 、誘電率 ϵ の非導電性誘電体液体に、図2のようにコンデンサの一端を液面に対して垂直に差し込んだ状態で、電極間に電位差 V を与える。この状態での外部の液面高さに対する極板間の液面の高さを、鉛直上向きを正として求めよ。重力加速度を g とし、液面の形状は水平を保ったまま高さのみ変わるものとしてよい。

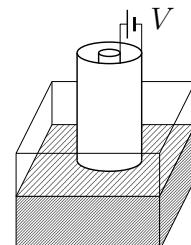


図2

- (4) 図3のように外周電極を接地した状態で、内周電極の一端で極板間の電位差を急に変化させたとき、厚さ dx 間での電流と電位の変化を dI, dV として、それらの伝達過程を考え、問(1)の結果と合わせることで電位差の変化が x 方向に光速で伝わることを示せ。

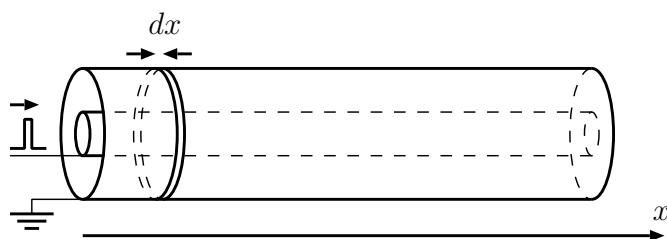


図3

このコンデンサを幅 Δx で分割して考えると、各部分での静電容量と自己インダクタンスを $\Delta C(\equiv C\Delta x)$, $\Delta L(\equiv L\Delta x)$ として、等価回路は図4 のように表すことができる。

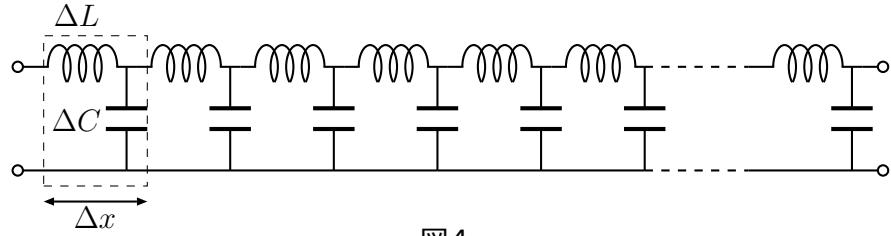


図4

- (5) この回路が無限に続くものとして、左端に角振動数 ω の交流電圧を与えたときの全インピーダンス Z を求めよ。
ヒント：図4 の破線枠内の回路を減らしても Z は変化しない。
- (6) この等価回路では、ある一定の角振動数 ω_0 より角振動数が大きい交流は右へ伝わるほど減衰する。この角振動数 ω_0 を求めよ。
- (7) $\Delta x \rightarrow 0$ の極限での Z, ω_0 の値を求め、この円筒コンデンサを電気信号の伝達媒体として用いるときの特徴を述べよ。

III-2 (量子力学：磁束と粒子) (100 点)

質量 m , 電荷 e を持つ粒子が円周の長さが L の円上を 1 次元運動を行うものとし, 粒子の円周上での位置を 1 次元座標 x で表す (図 1). 粒子にはポテンシャル $V(x)$ が作用しているとする. この円の内部を大きさ Φ の磁束が貫いている場合を考える. このとき, 磁束は円の中心を通る細い管 (円が存在する平面に垂直な方向に伸びている) の中に閉じ込められており, 円周上での磁束密度は 0 であるとする. この粒子の量子力学的な定常運動を記述するシュレーディンガー方程式は,

$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{A})$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - e \frac{\Phi}{L} \right)^2 + V(x) \quad (\text{B})$$

で与えられる. ただし, Φ/L は円周上におけるベクトルポテンシャルの周方向成分である. また, 以下では, $\psi(L) = \psi(0)$ という境界条件が成り立つとする.

- (1) 変換 $\tilde{\psi}(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$ で位相 $\theta(x)$ を適当に選ぶことによって, 変換後の波動関数 $\tilde{\psi}(x)$ は,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \tilde{\psi}(x) = E\tilde{\psi}(x) \quad (\text{C})$$

を満たすようにできる. このときの $\theta(x)$ を求めよ. ただし, $\theta(0) = 0$ とする.

- (2) 問 (1) のとき, $\tilde{\psi}(x)$ の満たすべき境界条件は,

$$\tilde{\psi}(L) = e^{i\chi}\tilde{\psi}(0) \quad (\text{D})$$

となる. χ を求めよ.

- (3) 波動関数 $\psi(x)$ の導関数が $x = L$ で連続であるという条件を, 式 (D) を用いて, $\tilde{\psi}(x)$ についての条件に書き換えよ.

- (4) $V(x) = 0$ のとき, エネルギー固有値 E を求めよ.

以下では, $V(x)$ が次式で与えられる場合を考える (図 2).

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq x < a \text{ のとき} \\ 0, & a \leq x < a + b = L \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{E})$$

ただし, $V_0 > 0$ である.

訂正 2

【誤】条件を

【正】条件 $\left(\frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=L} \right) = \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=0} \right)$ を

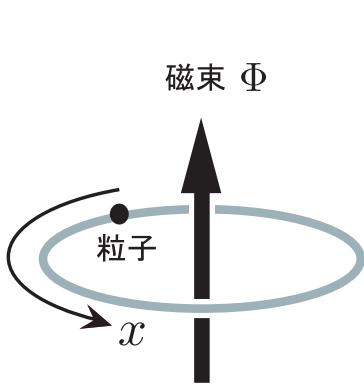
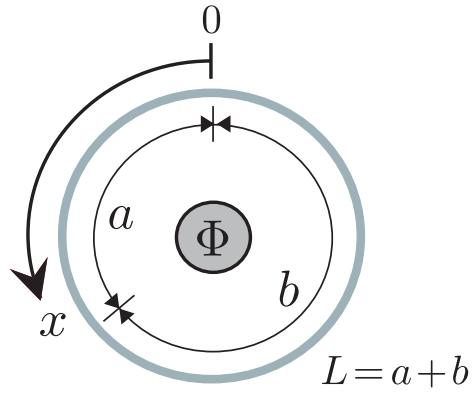


図 1



真上から見た図

図 2

(5) この系のエネルギー固有値を決める式は次のようになる.

$$\cos(ka) \cosh(\lambda b) + \frac{\lambda^2 - k^2}{2k\lambda} \sin(ka) \sinh(\lambda b) = f(\Phi) \quad (\text{F})$$

ただし,

$$k = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (\text{G})$$

である. $f(\Phi)$ を求めよ. また, $f(0) = 1$ となることを示せ.

以下では, $c_0 \equiv aV_0 (> 0)$ を一定に保ちながら, $V_0 \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow L$ の極限をとった場合を考える. この場合, $V(x)$ は $x = 0$ で $-\infty$ であるデルタ関数型ポテンシャルになる.

(6) 磁束がないとき ($\Phi = 0$), $E < 0$ の解の個数を, その理由とともに答えよ. その際, 以下の事実を用いてよい.

実数パラメータ ξ , 実数変数 y に依存した関数 $F_\xi(y)$ が次式で与えられるとする.

$$F_\xi(y) = \cosh y - \xi \frac{\sinh y}{y} \quad (\text{H})$$

$\xi \leq 3$ のとき, $F_\xi(y)$ は $y \geq 0$ の領域で y についての単調増加関数である.

$\xi > 3$ のとき, $y > 0$ の領域で $F_\xi(y)$ は極小値を 1 つ持ち, それ以外に極値はない.

(7) $\beta \equiv mc_0L/\hbar^2$ とおく. 磁束 Φ および β の値がある範囲にあるとき, $E < 0$ の解が存在しなくなる. このような Φ と β の範囲を求めよ. ただし, Φ の範囲は β を用いて表せ.

III-3 (統計力学 : おもりと理想気体) (100 点)

図 1 のような、ピストンを備えた底面積 A の容器に N 個の单原子分子からなる理想気体が封入されている。ピストンは鉛直方向にのみ、摩擦なく移動することができ、その上にはおもりが乗せられている。底面からのピストン下部の高さを X とすると、系の全エネルギー E は、

$$E = E_K + MgX, \quad E_K = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad (\text{A})$$

と与えられる。ここで、 E_K は気体分子の運動エネルギーである。また、 p_i は i 番めの分子の運動量、 m は单原子分子の質量、 $M(\gg m)$ はおもりとピストンを合わせた質量、 g は重力加速度の大きさを表す。分子が重力から受ける位置エネルギー、ピストンの運動エネルギー、外気の圧力の寄与は無視し、また、ピストン位置の各点で容器の中の気体は平衡に達していると仮定する。以下では、 N は極めて大きいと仮定し、1 に対して、 $1/N$ のオーダーの寄与は無視してよい。

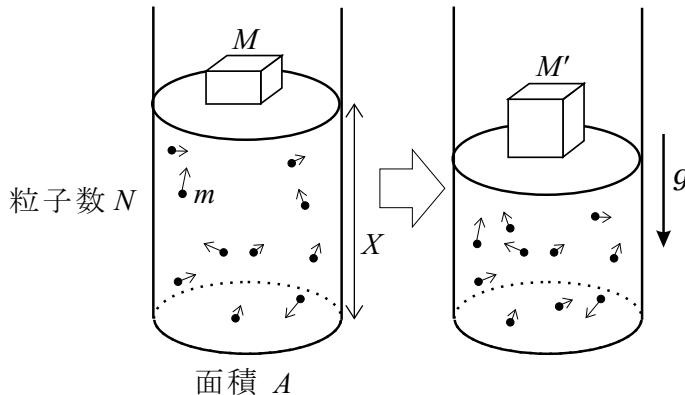


図 1

まず、容器は熱を通さないものとし、おもりを含めた全体を一つの孤立系と考える。

- (1) ピストンの下部が高さ X の位置に静止しているとする。気体分子の運動エネルギーが、 E_K から $E_K + \Delta$ の範囲にある状態の数 $\Omega(E_K)\Delta$ を求めよ。ただし、 Δ は E_K と独立で、 $E_K \gg \Delta$ としてよい。プランク定数は h とせよ。また、 n 次元空間において半径 r の球の体積 V_n 、表面積 A_n は、それぞれ、

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} r^n, \quad A_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} \quad (\text{B})$$

で与えられる。ここで、 $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ はガンマ関数であり、実数 z に対し、 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を満たす。

- (2) ミクロカノニカル集団の考え方では、理想気体の運動エネルギーが E_K から $E_K + \Delta$ の範囲にあるときのエントロピー S は、問(1)で求めた状態の数 $\Omega(E_K)\Delta$ を用いて、 $S = k_B \ln(\Omega(E_K)\Delta)$ と与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数である。平衡状態では、ピストン下部の高さ X の最も確からしい値 X^* は、 S を最大化するように決まる。すなわち、

$$\left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_{X=X^*} = 0 \quad (\text{C})$$

が成り立つ。このことから、 E, M, m, g, N, A, h のうち必要なものを用いて、 X^* を表せ。

以下では、気体分子は容器の壁を通じて外部の熱浴と熱のやりとりをし、系は温度 T の熱平衡状態にあるものとする。

- (3) ピストン下部の高さが X にあるときの、容器内の気体分子の分配関数 $Z(X)$ を求めよ。ただし、必要ならば、公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} dx = \sqrt{\pi a}$ (a は正の実数) を用いてよい。
- (4) ピストン位置に関する自由度を考える。問(3)で求めた分配関数を用いて、

$$Y = \lambda^{-1} \int_0^{\infty} e^{-MgX/(k_B T)} Z(X) dX \quad (\text{D})$$

という状態和を定義する。 λ は長さの次元を持つ物理量で、ここでは定数とみなしてよい。式(D)の積分を実行し、状態和 Y を求めよ。

- (5) 問(4)で求めた状態和 Y を用いると、 X の関数である任意の物理量 $f(X)$ の期待値は、

$$\langle f \rangle = \frac{\int_0^{\infty} f(X) e^{-MgX/(k_B T)} Z(X) dX}{Y \lambda} \quad (\text{E})$$

と計算することができる。ピストン下部の高さ X の期待値 $\langle X \rangle$ を求めよ。

- (6) 热力学ポテンシャル G を次のように定義する。

$$G = -k_B T \ln Y \quad (\text{F})$$

ピストンの上に十分にゆっくりとおもりを増やしていく、全てのおもりとピストンとを合わせた質量が M' ($> M$) となった。おもりを増加する前後の G の値を、それぞれ $G_M, G_{M'}$ とし、その差 $\Delta G = G_{M'} - G_M$ を求めよ。

- (7) 問(6)のおもりを増加する過程において、ピストン内の理想気体がした仕事 W と、理想気体と外部の熱浴との熱の出入り Q を求めよ。ただし、仕事は気体が外部になす向きを正、熱は外部の熱浴から理想気体への流れを正とする。

III-4 (実験：相対論的粒子の測定) (100 点)

高エネルギーまで加速した電子と陽電子を衝突させ、中性の B^0 粒子とその反粒子 \bar{B}^0 を同時生成した後、それぞれが荷電粒子 (π 粒子と K 粒子) に崩壊する過程について考察する ($B^0 \rightarrow K^+ \pi^-$, $\bar{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+$)。以下、粒子の運動は相対論的に取り扱うことにする。相対論的粒子のエネルギー E , 運動量 P , 静止質量 m の間には以下の関係がある。

$$E = \gamma mc^2, P = \gamma mv = \gamma\beta mc, E^2 - P^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (\text{A})$$

ここで、 $\beta \equiv v/c$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $c = 3.0 \times 10^8$ m/s は光速, v は粒子の速度である。

まず、生成された荷電粒子の磁場中の軌跡を測定して粒子の運動量を求め、速度の差から、粒子の種類を識別する方法について考えよう。なお、以下では、荷電粒子の生成時刻は、電子と陽電子の衝突と同時にとする。また、荷電粒子からの電磁波放射は無視できる。

- (1) 電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C をもつ相対論的粒子は、一様な磁場（磁束密度 B ）に対して、それに垂直な平面内で曲率半径 R の円軌道上を、角速度

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma m}$$

で運動することが知られている。 R , e , B を使って、粒子の運動量 P を表せ。

- (2) $B = 0.50$ T の一様な磁場に垂直な面内を、 $+e$ の電荷を持つ粒子 (π^+ または K^+) と、 $-e$ の電荷を持つ粒子 (π^- または K^-) が走り、それぞれの軌道の曲率半径が、10 m, 14 m と測定された（図 1）。このとき、各粒子の運動量を求めよ。なお結果は、単位 GeV/c (1 GeV = 10^9 電子ボルト) を使い、有効数字 2 衔で表せ。

- (3) これらの荷電粒子の軌道上に粒子通過時刻測定器を設置し（図 1），数多くの電子・陽電子衝突を起こして、粒子が生成されてから測定器を通過するまでの飛行時間を測定する。ある運動量 P を持ち、その飛行距離が L である粒子は、その質量に固有の飛行時間をもつ。そのため、飛行時間の分布には、 π 粒子と K 粒子、各々に対応する二つのピークが生じる（図 2）。このピークの時間差 Δt を、飛行距離 L , 運動量 P , 二粒子の質量 m_1 , m_2 を用いて表せ。ここで、 $P \gg m_1 c$, $P \gg m_2 c$ の近似がなりたつものとする。

- (4) 図 1 の正電荷の粒子について考える。この粒子の飛行距離 L は 3.0 m, 円軌道の曲率半径 R は 10 m と測定された。これが π^+ 粒子である場合の飛行時間と、 K^+ 粒子である場合の飛行時間の差 Δt を、問(3) の答えを用いて計算し、ナノ秒 ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$) 単位で求めよ。有効数字は 1 衔とする。なお、 K^+ 粒子の質量は $0.50 \text{ GeV}/c^2$, π^+ 粒子の質量は $0.14 \text{ GeV}/c^2$ とする。

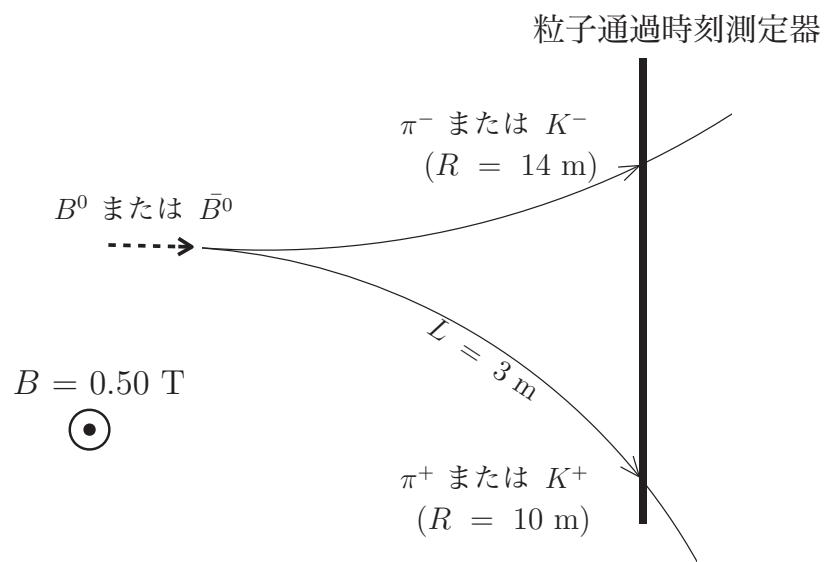


図1

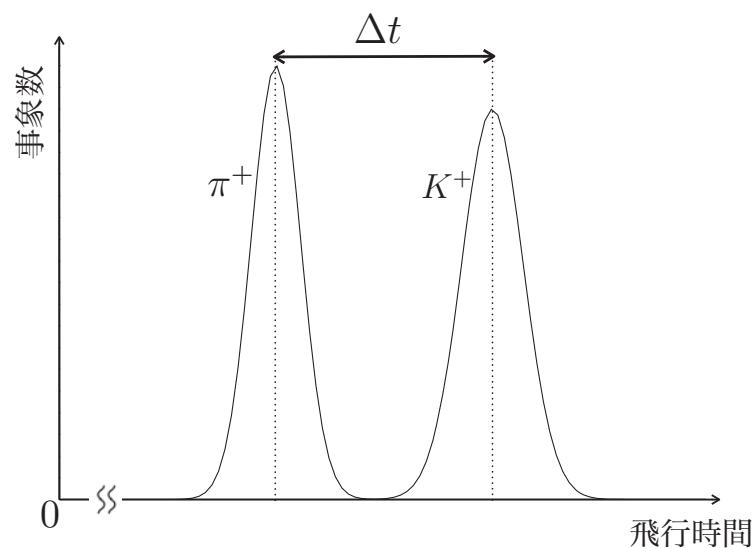


図2

(次ページに続く)

粒子の運動量 P , 飛行時間 t , 飛行距離 L が測定できれば, その質量は一意に求められる. しかし, 測定には必ず誤差が伴うため, 求まる質量は本来の値のまわりに分布する. この分布の広がりについて考える.

- (5) 式(A)を用いて, 粒子質量の二乗(m^2)を, P , t , L で表せ.
- (6) 誤差の伝播を考慮して, 質量の二乗の誤差 $\delta(m^2)$ を, E , m , 各測定値の相対誤差 $\delta P/P$, $\delta t/t$, $\delta L/L$ を使って表せ. なお, δP , δt , δL の間に相関はないとする.
- (7) K^+ 粒子の運動量, 飛行距離, 飛行時間がそれぞれ $P = 1.0 \text{ GeV}/c$, $L = 3.0 \text{ m}$, $t = 10 \text{ ns}$ であり, 測定誤差が $\delta P = 10 \text{ MeV}/c$, $\delta L = 100 \mu\text{m}$, $\delta t = 0.1 \text{ ns}$ とする. 質量の決定に最も大きな誤差を与える測定値は何か, 理由とともに答えよ.

次に, B^0 粒子の寿命を実験から測定する方法について考えよう. しかし, B^0 粒子の寿命は, 時間測定精度の 0.1 ns よりはるかに短いため, 直接, 寿命を測定することは難しい. それでも, 以下に示すように, 極めて精度の高い距離の測定から寿命を測定することができる.

図3に示すように, エネルギーの異なる電子と陽電子を衝突させると, 生成された粒子の重心は, 高速で移動する. たとえば, エネルギー 8.0 GeV の電子と, エネルギー 3.5 GeV の陽電子を正面衝突させると, 質量 $10.6 \text{ GeV}/c^2$ の共鳴状態が生成され, 直後に, B^0 粒子とその反粒子 \bar{B}^0 へ二体崩壊する. なお, B^0 粒子と \bar{B}^0 粒子の質量は等しく, また, B^0 粒子と \bar{B}^0 粒子の質量の和と, 生成された共鳴状態の質量の差は極めて小さく, 無視できるとする.

- (8) 生成された共鳴状態がもつ運動量の大きさを求めよ. なお結果は, 単位 GeV/c を使い, 有効数字2桁で求めよ.
- (9) B^0 粒子が, 生成されてから崩壊するまでに走る平均距離を測定すると $190 \mu\text{m}$ であった. B^0 粒子の崩壊寿命は何 ns か, 有効数字2桁で求めよ.

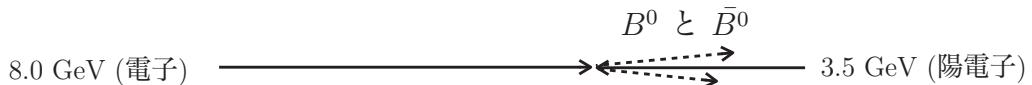


図3

(このページは白紙である)

III-5 (天文学) (100 点)

地球と太陽の平均的な距離（1天文単位）は約 1.5×10^8 km である。地球の公転軌道を円とする。

- (1) 金星の太陽面通過を地上の離れた 2 点 (A 地点と B 地点) で同時に観測することにより、太陽までの距離を求める方法を考える。図 1 は金星の太陽面通過時の配置を、太陽や地球の大きさを誇張して描いたものである。これを参考にして、地球と太陽の中心間距離 d を $\alpha, \beta, \theta_{\max}, h$ で表せ。ただし、 α と β はそれぞれ、A 地点および B 地点からみた太陽中心と金星中心の方向がなす角度、 θ_{\max} は地球からみて太陽と金星が最も離れたときのなす角度、 h は地球の中心と太陽の中心を結ぶ線に垂直な平面に投影した A 地点と B 地点の距離である。金星の公転軌道は円（半径 D ）とし、太陽と地球の半径は天体間の距離よりも十分小さいとしてよい。なお、太陽中心および金星中心からみた A 地点と B 地点の方向がなす角度をそれぞれ γ と δ とする（図 1 下の模式図参照）

訂正 3

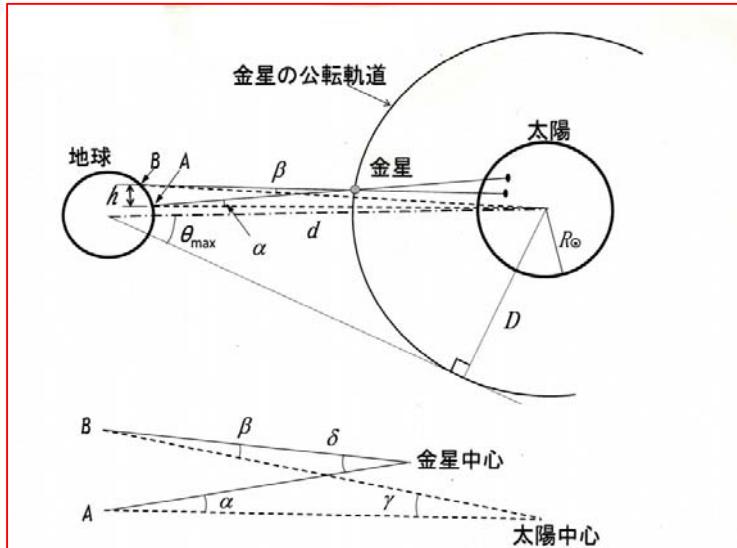


図 1

- (2) 太陽半径を R_\odot 、地球の公転角速度を ω [rad s⁻¹] として、太陽の質量 M_\odot と表面の重力加速度 a を求める式を示せ。またそれらの値を有効数字 1 術で計算せよ。万有引力定数は $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻²、太陽は視直径 9.0×10^{-3} rad で、密度分布は球対称とし、1年 $\simeq 3.2 \times 10^7$ s とする。

以下の問い合わせについては、計算結果の値はファクター 2 の精度（真値の 1/2 から 2 倍の範囲）で求めればよい。

- (3) 太陽は 1 秒間に総量約 10^9 kg の質量を太陽風として放出している。太陽風を駆動するために必要な仕事率を式で表し、その値を計算せよ。ただし太陽風は無限遠で速度が 0 になるとする。

- (3) 太陽は1秒間に総量約 10^9 kg の質量を太陽風として放出している。太陽風を駆動するために必要な仕事率を式で表し、その値を計算せよ。ただし太陽風は無限遠で速度が0になるとする。
- (4) 単位波長幅における太陽放射のエネルギーfluxは、波長400 nmと600 nmでほぼ同じである。図2は単位面積から放射される黒体放射のエネルギースペクトルであり、各曲線の上の数字は温度[K]を示す。太陽からの放射は黒体放射とし、図2から太陽のエネルギースペクトルに最も近い曲線の温度を読みとることにより、太陽全体が1秒間に放射するエネルギーを求めよ。ステファン・ボルツマン定数を $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ とする。

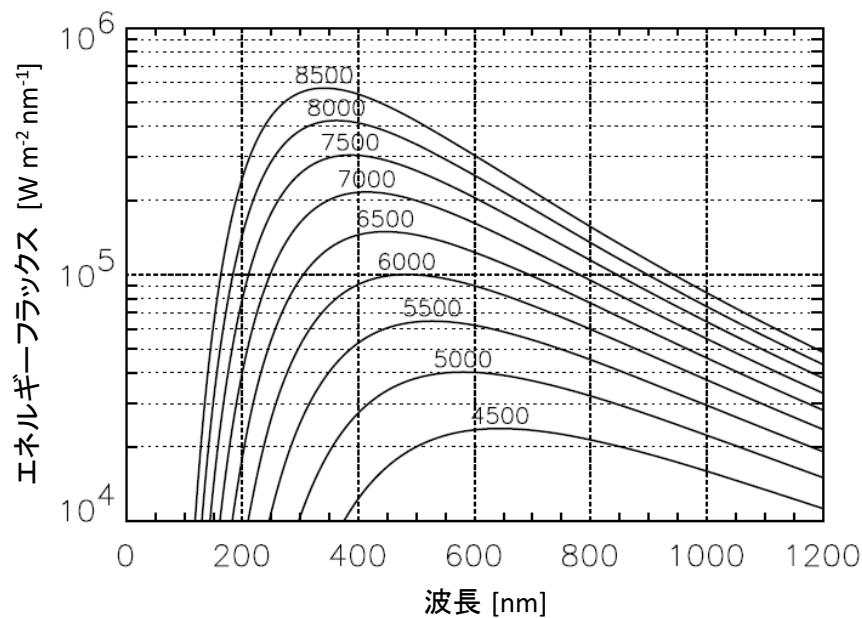


図2

- (5) 問(4)で求めた、太陽全体が1秒間に放射するエネルギーを質量に換算し、太陽風による質量放出率の何倍であるか答えよ。
- (6) 地球の公転運動により、星Xは周囲にみえる多数の星々に対してみかけの位置が1年を通じて楕円の軌跡を描いて変化し、その長半径(年周視差)は0.1秒角($\simeq 5 \times 10^{-7} \text{ rad}$)である。また、この星の波長400 nmと600 nmのエネルギーfluxは、それぞれ太陽の 4×10^{-12} 倍と 6×10^{-12} 倍であった。図2の曲線の中から星Xのエネルギースペクトルに最も近い曲線を選び、それを用いて星Xの半径が太陽のおよそ何倍であるかを求めよ。ただし、星Xは一様な表面から黒体放射をする球と考え、星Xと地球の間に光の吸収はないものとする。

平成 26 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1, IV-2 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いててもよい.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 2 間すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 4 ページまである.

IV-1

以下の英文は Austin Chambers 著 “Modern Vacuum Physics” からの抜粋である
(一部略)。読んで以下の問い合わせに答えよ。

(a) _____

(b) _____

(c) _____

(註)

rarefied : 希薄な (形容詞), Aristotle : アリストテレス, medieval times : 中世
horror vacui : ラテン語で「何もない空間 (真空) に対する恐怖」

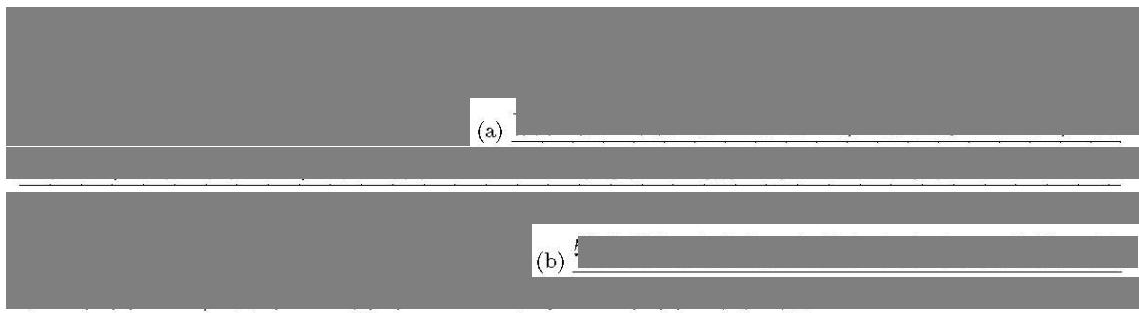
Torricelli : トリチエリ, barometer : 気圧計

Puy-de-Dome volcano : ピュイドーム火山, Auvergne : オーベルニュ地方

- (1) 下線部 (a) を和訳せよ.
- (2) 下線部 (b) に関連して, ガリレオの時代に自然科学の探求の方法が大きく変わった. どのように変わったのかを日本語で述べよ.
- (3) 下線部 (c) に関連して, “a critical experiment” とは何を指すのか, また critical である理由を, 本文に即して日本語で述べよ.

IV-2

以下は朝永振一郎著「量子力学」の冒頭の段落である（一部略）。以下の問い合わせに答えよ。



- (1) 下線部 (a) を英訳せよ。
- (2) 下線部 (b) を英訳せよ。

(このページは白紙である)

京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

平成25 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。

また、当日、試験時間内に以下の修正・加筆を行いました。

•I-1 2ページ 問題文(3)

(誤)「どうなるか答えよ」

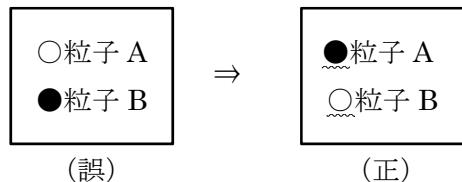
(正)「どうなるか答えよ。理由も述べよ。」

•III-2 4ページ

(誤)電気素量を e、

(正)電子の電荷を e、

•III-4 14 ページ 図 3 の中



平成 24 年度専攻教育委員会

平成 25 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1,I-2,I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いても良い.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである.

I-1 (力学) (100 点)

質量 M , 半径 a の一様な球の運動について考えよう。以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度を g とする。

- (1) この球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。
- (2) この球を図1のように水平に対して角度 α を持つ真っ直ぐな固定された斜面の下に置き、球がすべらないように回転させながら、斜面に沿って紙面に平行に初速 v_0 を与える。球が斜面をすべらずに上っていくときに、止まるまでにかかる時間 t と重心が上る高さ H を求めよ。

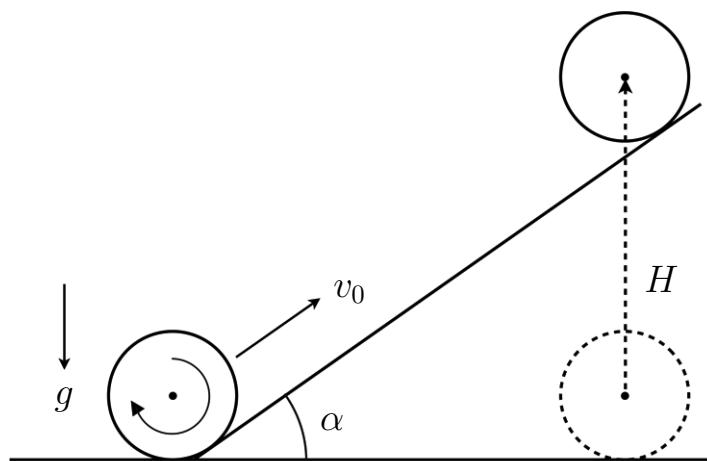


図1

- (3) 問(2)と同じ初期条件のもとで、斜面に摩擦がないとすると、球が上る高さはすべらない場合と比べてどうなるか答えよ。

(次ページに続く)

この球を半径 R の円筒状のパイプの中に置く。図2はパイプの断面で、パイプの軸は紙面に垂直である。球はすべることなく回転し、紙面に垂直な方向には運動しないものとする。ここで、パイプの中心と球の中心を結ぶ直線と鉛直下向き方向のなす角度を θ とする。

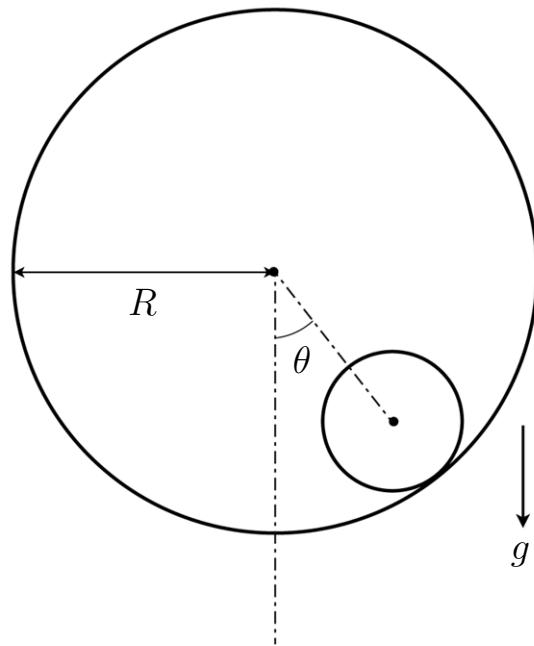


図2

- (4) 球をパイプの底に置き ($\theta=0$)，パイプの接線に沿って水平方向に初速 v_0 を与える。球がパイプの頂上まで上るのに必要な v_0 を求めよ。
- (5) 球をパイプの底からわずかにパイプに沿って移動させ，離した後の運動についてラグランジアンを示し，運動方程式を解いて，球の行う運動について説明せよ。

I-2 (物理数学) (100 点)

以下の各問い合わせよ .

(1) 微分方程式

$$\frac{df}{dt} + f = e^t$$

の一般解 $f(t)$ を求めよ .

(2) 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

の一般解 $f(x, y)$ を求めよ .

(3) $-\pi \leq x < \pi$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は ,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}$$

で与えられる . $f(x) = \cosh(\alpha x)$ ($-\pi \leq x < \pi$, α は定数) のフーリエ級数展開を考えることにより ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha \sinh(\pi\alpha)}$$

を示せ . ただし , 関数の滑らかな点において , 関数の値が , そのフーリエ級数の収束値に一致することは仮定してよい .

(4) $m > 0$ のとき , 3 次元フーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2\pi i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

を求めよ .

(次ページに続く)

(5) 積分

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}$$

を求めよ。例えば、以下の図1のような複素平面上の閉曲線 C での複素積分

$$\int_C dz \frac{e^{iz}}{z}$$

を考え、適当な極限をとることにより答えを得ることもできる。

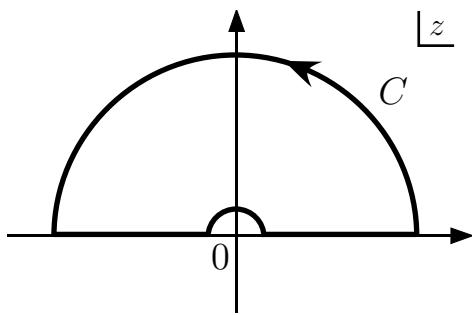


図 1

(6) $\alpha > \beta > 0$ の場合に、

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(\alpha + \beta \cos \theta)^2}$$

を求めよ。

(7) 次のような行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

N を自然数とするとき、行列 A の N 乗 A^N を求めよ。

I-3 (量子力学) (100 点)

次のハミルトニアンで記述される質量 m_A および m_B の 2 粒子からなる量子系を考える。

$$H = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m_A} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m_B} + V(|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|) \quad (\text{A})$$

ただし、 \mathbf{p}_A および \mathbf{p}_B は各粒子の運動量演算子である。また、2 粒子の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ と書き、ポテンシャル V は 2 粒子の相対距離 $r = |\mathbf{r}|$ ($\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$) のみに依存している。以下では、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と座標をとる。また、 $i = 1, 2, 3$ を x, y, z の代わりの添え字として使う場合もある。すなわち、 $r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$ 。同様に、相対の運動量演算子 \mathbf{p} を $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$ とも書く。以下、角運動量など他のベクトル量も同様の記法をとる。

ハミルトニアン H は次のように、重心と相対部分に分けることができる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + H_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{B})$$

ここに、 $M = m_A + m_B$ は全質量、 \mathbf{R} は重心の座標である。換算質量を μ で表す。

- (1) 換算質量 μ を m_A および m_B で表すとともに、相対部分のハミルトニアン $H_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を μ を用いて書き下せ。定常状態の全系の波動関数は $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r})$ と変数分離型に表すことができる。重心の静止系を取り、全系のエネルギーが E であるときの波動関数 $\varphi(\mathbf{r})$ が従うシュレーディンガー方程式を書け。ただし、いずれの場合も途中経過は書かなくてもよい。

以下の問いはすべて相対運動についてのものである。相対の軌道角運動量演算子を $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (L_x, L_y, L_z)$ と表す。その i -成分は、 $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ と書ける。ここに、 ϵ_{ijk} はレビ・チビタの 3 階完全反対称テンソルである。すなわち、 i, j, k が $\{1, 2, 3\}$ の偶置換の場合 $\epsilon_{ijk} = 1$ 、奇置換の場合 $\epsilon_{ijk} = -1$ 、それ以外の場合 $\epsilon_{ijk} = 0$ である。また、AINSHUTAIN の規約に従い同じ添え字については和をとる。今の場合、以下のように j, k について 1 から 3 まで和をとっている。

$$\epsilon_{ijk} r_j p_k \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} r_j p_k$$

- (2) 以下の交換関係を計算せよ。ただし、 $i, j = 1, 2, 3$ とし、(a), (b) の解は ϵ_{ijk} を用いて表せ。

$$(a) [L_i, r_j] \quad (b) [L_i, p_j] \quad (c) [L_z, L_x + iL_y]$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示すとともに、その物理的意味を述べよ。

$$[L_i, H_{\text{rel}}] = 0$$

(次ページに続く)

- (4) 波動関数が $\varphi(r) = R(r) \cdot (x + iy)/r$ と書いているとする。この状態は L_z および L^2 の固有状態である。 $L_z \varphi(r)$ および $(L_x + iL_y) \varphi(r)$ を計算せよ。また、これらの結果をもとにして、 L_z および L^2 の固有値をそれぞれ $m\hbar$, $l(l+1)\hbar^2$ と表すとき、 m , l の値を求めよ。なお、このとき、 $l\hbar$ を角運動量の大きさと呼ぶ。

$V(r)$ が次のクーロンポテンシャルの場合を考えよう。

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad (\kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}) \quad (C)$$

ここに、 Z は自然数、 e は素電荷 ($e > 0$)、 ε_0 は真空の誘電率である。

- (5) ポテンシャルが式 (C) で与えられるとき、定常状態の動径波動関数を $R(r) = u(r)/r$ と表す。ここで、長さの次元を持つ量 a を

$$a = \frac{\hbar^2}{\kappa\mu}$$

と定義する。角運動量の大きさが $l\hbar$ の場合に、 u が従う方程式を新しい変数 $\xi = r/a$ を用いて表せ。またこのとき、エネルギー固有値 E と κ/a の比は l に依存するが、系によらない無次元量となることを示せ。ただし、相対運動量 p の 2 乗は角運動量 L を用いて、以下のように表すことができる。

$$\mathbf{p}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}$$

- (6) 水素原子の場合 a はボーア半径 ($\simeq 0.53 \times 10^{-10}$ m) である。そこで一般に、任意の μ , κ に対して a を系の半径と呼ぶことにする。次の a), b), c) の 2 粒子系がクーロン力のみで結合しているとみなせる場合、その基底状態の半径が最も小さい系はどの系か、理由とともに答えよ。また、その大きさを有効数字 1 衔で求めよ。ただし、ここでのミュー粒子、ケイ中間子は電荷 $-e$ を持つとする。また、陽電子は電子と質量が同じで、正電荷 e を持つ粒子である。

a) 陽子 – ミュー粒子 b) 陽子 – ケイ中間子 c) 電子 – 陽電子

ただし、電子、陽子、ミュー粒子およびケイ中間子の質量の比は以下の通りであるとする。 $m_e : m_P : m_\mu : m_K = 1 : 2000 : 200 : 1000$.

平成 25 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1,II-2,II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いても良い。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 8 ページまである。

II-1 (電磁気) (100 点)

電気双極子と磁気双極子について考えよう.

- (1) $(x, y, z) = (0, 0, d/2)$ に正の電荷 $q (> 0)$, $(x, y, z) = (0, 0, -d/2)$ に負の電荷 $-q$ が置かれているとき, 任意の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ における静電ポテンシャル ϕ を求めよ. ただし, 真空の誘電率を ϵ_0 とする.
- (2) 問 (1)において $qd = p$ を一定に保ちつつ $d \rightarrow 0$ とすると電気双極子となる. このとき双極子モーメント $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ を用いて, 任意の点 \mathbf{r} における静電ポテンシャル ϕ を表せ. また, 電気双極子によってできる電場は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} \right)$$

となることを示せ.

- (3) 一様な静電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_0)$ の中に置かれた導体球の表面に誘起される電荷が作る電場は, 導体球の外では電気双極子が作る電場と等価になることを示せ. ただし, 導体球の全電荷は 0 である. なお, このとき静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式の解として得られ, 軸対称のとき, $z = r \cos \theta$ とする球座標 (r, θ, φ) を用いると一般解は,

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

と与えられる. ここで $P_l(\cos \theta)$ はルジャンドルの多項式であり,

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

となる. また, 導体球面上ではポテンシャル=一定 ($= 0$ とおいてよい), 遠方では一様な静電場という境界条件が成り立つことに注意せよ.

(次ページに続く)

- (4) 閉電流が作る磁場は遠方では磁気双極子が作る磁場と等価になる。この証明を考えよう。ただし、ここでは簡単のために閉電流の流れる閉回路 C は平面上にあるとし、座標の原点 O は閉回路と同一平面内の閉回路の近傍にあるとする（図1参照）。閉回路 C を一定の電流 I が流れているときに、点 \mathbf{r} に作られるベクトルポテンシャルは

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

で与えられる。ここで μ_0 は真空の透磁率、 \mathbf{s} は閉回路 C 上の点を表す位置ベクトルである。

まず、遠方では $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{s}|$ となることを用いて、被積分関数を $\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|}$ の一次まで展開したときのベクトルポテンシャルを書き下せ。

次に、公式

$$\int_C (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{s} \times d\mathbf{s}) \times \mathbf{r}$$

および

$$\int_C (\mathbf{s} \times d\mathbf{s}) = 2\mathbf{n}S$$

を用いて、遠方でのベクトルポテンシャルを求めよ。ここで、 S は平面内に閉回路が囲む面積、 \mathbf{n} は平面に垂直な単位ベクトルである（図1参照）。

さらに、遠方での磁場 \mathbf{B} を求め、 $\mathbf{m} = \mu_0 S I \mathbf{n}$ を用いて表せ。これは、問(2)の電場と定数倍を除き同じ関数形になっており、磁気双極子の作る磁場と等価である。

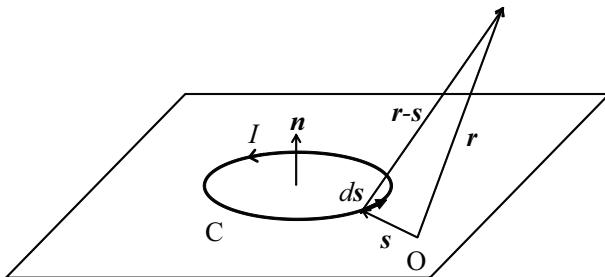


図1

- (5) 原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に正の電荷 $2q (> 0)$ 、 $(x, y, z) = (0, 0, d)$ に負の電荷 $-q$ 、 $(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に負の電荷 $-q$ が置かれているとき、遠方では四重極子電場となる。遠方でこれと定数倍を除き同じ関数形をもつ四重極子磁場を作る電流分布の一例を図に描いて示せ。

II-2 (統計力学) (100 点)

荷電粒子系は常磁性・強磁性・反磁性など、磁場に対して様々な応答を示す。ここでは体積 V の箱の中で、 z 軸の正方向を向いた一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ ($B > 0$) の静磁場中を運動する質量 m 、電荷 q ($q > 0$)、スピン $1/2$ 、粒子数 N の粒子系の統計力学を考えよう。以下、ボルツマン定数は $k_B = 1$ とおき、温度 T はエネルギー単位で与える。粒子数 N 、および箱の体積 V は十分大きく、表面効果は無視できるものとする。またこの問題では簡単のため、粒子はボルツマン統計に従うものとし、粒子間の相互作用は無視する。必要があれば次の関係式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a} dx = \sqrt{2\pi a} \quad (\text{ガウス積分})$$

$\log N! \simeq N \log N - N$ (スターリングの公式, $N \gg 1$)

$$|x| \ll 1 \text{ において } \log(1+x) \simeq x, \quad \cosh x \simeq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \sinh x \simeq x + \frac{x^3}{6}$$

まず磁場と粒子のスピンによる相互作用を考える。このとき、粒子のエネルギーは

$$\varepsilon(\mathbf{p}, s) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu s B \quad (\text{A})$$

と表せる。ここで μ は定数であり、 s は粒子のスpinが磁場と平行、反平行の場合に $s = \pm 1$ の値をとる。このとき分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \left[V \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{s=\pm 1} \exp(-\varepsilon(\mathbf{p}, s)/T) \right]^N \quad (\text{B})$$

と与えられる。

- (1) 式 (B) の積分・和を実行し、ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
スターリングの公式を用いること。
- (2) 内部エネルギー U を求めよ。
- (3) 磁場が弱い場合、自由エネルギーは次式のように B で展開できる。

$$F(B) = F_0 - \frac{1}{2} \chi B^2 + \mathcal{O}(B^4) \quad (\text{C})$$

ここで F_0 は磁場がないときの自由エネルギーである。係数 χ を求めよ。

(次ページに続く)

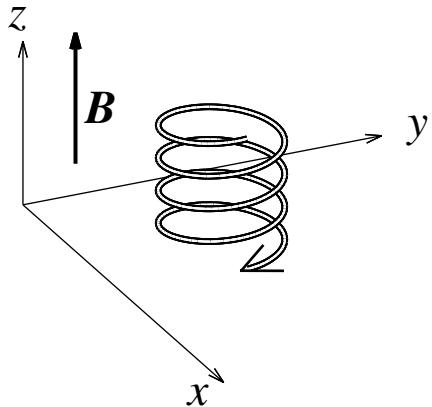


図 1

次に、磁場が軌道運動に与える影響を考えよう。このとき粒子は古典的には図 1 に示すように xy 方向には円運動を行い、 z 方向には自由運動を行う。量子力学的に考えると、この粒子のエネルギーは

$$\varepsilon(n, p_z) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (\text{D})$$

と表せる。ここで $n = 0, 1, \dots$ と $\omega = qB/m$ は、それぞれ xy 方向の量子化された円運動の量子数と角振動数である。粒子のスピンと磁場の相互作用はここでは無視する。振動子の単位面積あたりの縮退度を σ とすると、分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \left[2\sigma V \int \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\varepsilon(n, p_z)/T) \right]^N \quad (\text{E})$$

と与えられる。

- (4) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
- (5) 磁場に比べて温度が十分に低い場合 ($\xi \equiv \hbar\omega/2T \gg 1$) と十分に高い場合 ($\xi \ll 1$) における内部エネルギー U を求めよ。またなぜその形となるか、その物理的意味を 50 ~ 150 文字程度で簡潔に述べよ。
- (6) 詳しい計算により、振動子の縮退度は $\sigma = m\omega/2\pi\hbar = qB/2\pi\hbar$ となることが知られている。(磁場が弱い極限において自由粒子系と自由エネルギーが一致することからも同じ結果が得られる。)

問 (3) と同様に磁場が弱い場合に自由エネルギーを B で展開し、式 (C) における係数 χ を求めよ。ここで χ は負となるが、このような荷電粒子系の磁性を何と呼ぶか答えよ。

II-3 (量子力学) (100 点)

古典力学では、粒子のダイナミクスは系の局所的な性質で決まるが、量子力学のダイナミクスは干渉効果などに見られるように非局所的な側面を持つため、古典的には見られなかつたさまざまな現象が起こる。その一例として以下のような2次元の問題を考えよう。

まず、角振動数 ω で特徴づけられる2次元の調和振動子ポテンシャル

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (\text{A})$$

の中に置かれた1個の質量 m の量子力学的粒子を考える。この系のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) \\ [x, p_x] &= [y, p_y] = i\hbar \quad (\text{それ以外の交換子はゼロ}) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

で与えられる。

- (1) 2次元の極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) を用いると、波動関数 $\psi(r, \theta)$ に対するシュレーディンガーエルギー方程式は、 E をエネルギー固有値として、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \psi(r, \theta) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi(r, \theta) = E\psi(r, \theta) \quad (\text{C})$$

で与えられる。また、この系は xy -面内の回転対称性を持つので対応する角運動量 $L = xp_y - yp_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$ が保存しており、 L の固有状態波動関数 $e^{il\theta}$ を用いて $\psi(r, \theta) = \varphi(r)e^{il\theta}$ と変数分離できる。(ただし、波動関数の一価性から l は整数である。) このとき動径波動関数 $\varphi(r)$ の従う方程式を書け。

- (2) このハミルトニアン \mathcal{H}_1 は変数 (x, p_x) に依存する部分と (y, p_y) に依存する部分とが分離しているので、上の微分方程式を用いなくとも容易に解くことができる。生成消滅演算子を、 $q_x \equiv x, q_y \equiv y$ および対応する運動量を用いて、

$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j + \frac{i p_j}{m\omega} \right), \quad a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j - \frac{i p_j}{m\omega} \right) \quad (j = x, y) \quad (\text{D})$$

と定義することで \mathcal{H}_1 を a_j, a_j^\dagger を用いて表せ。また、上式を q_j, p_j について解くことにより、角運動量 $L = xp_y - yp_x$ を上の a_j, a_j^\dagger で表せ。(以下、必要な変数があれば適宜定義して使用してよい。また、生成消滅演算子の従う交換関係は $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}, [a_j, a_k] = 0, [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0$ である。)

(次ページに続く)

- (3) 一般に、生成消滅演算子 a_j^\dagger, a_j ($j = x, y$) から作られる個数演算子 $a_j^\dagger a_j$ の固有値はゼロ以上の整数 $0, 1, 2, \dots$ であるので、その固有状態は自動的にエネルギーの固有状態になっているが、角運動量 L の固有状態にはなっていない。 L も同時に固有状態になっているような表示をもとめるために、以下の変数変換

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E})$$

を行うと、 b_j, b_j^\dagger ($j = 1, 2$) も正しい生成消滅演算子の交換関係を満たすことがわかる。新しい生成消滅演算子から作られた個数演算子 $b_j^\dagger b_j$ ($j = 1, 2$) の固有値 n_1, n_2 を用いて \mathcal{H}_1, L の固有値を表す式を導け。また、その結果を用いてハミルトニアン \mathcal{H}_1 の固有値のうち低い方から 4 つについて、その値と取り得る L の値を求めよ。

次に、同種の 2 個の量子力学的粒子 A, B が、式 (A) の調和振動子ポテンシャル中で運動する状況を考えよう。2 個の粒子の座標を $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A)$, $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B)$ とした時、標準的な手順に従って重心座標 $\mathbf{R} = (X, Y) = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)/2$, 相対座標 $\mathbf{r} = (x, y) = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ を導入すると、2 粒子のハミルトニアン \mathcal{H}_2 は、各々が 2 次元調和振動子中の 1 粒子の問題と等価な重心運動部分 \mathcal{H}_{com} と相対運動部分 \mathcal{H}_{rel} との和 $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\text{com}} + \mathcal{H}_{\text{rel}}$ に分離する。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{com}} &= \frac{1}{4m} (P_X^2 + P_Y^2) + m\omega^2(X^2 + Y^2) \\ \mathcal{H}_{\text{rel}} &= \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2 + y^2) \quad (\mu \equiv \frac{m}{2}) \end{aligned} \quad (\text{F})$$

- (4) 粒子の統計性は 2 粒子を交換 ($\mathbf{r}_A \leftrightarrow \mathbf{r}_B$) した時の位相で決まるが、粒子の交換は相対座標で表現すると $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ であるので、この時に波動関数につく位相によってボゾンに許される波動関数か、フェルミオンに許される波動関数かがわかる。一方、重心部分は粒子の交換で不变なので、統計性の効果を考える際には忘れてしまって良い。相対運動部分 \mathcal{H}_{rel} に上の問 (1)–(3) の結果を用いることにより、ボゾン 2 個の系に許されるエネルギー準位、フェルミオン 2 個の系に許されるエネルギー準位について、それぞれ下から 2 個のエネルギーの値と縮退度を求めよ。ただし、それぞれ \mathcal{H}_{rel} に対応するエネルギーについてのみ求めればよい。 $(\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ は極座標では $\theta \mapsto \theta + \pi$ となることに注意せよ。)

(次ページに続く)

最後に、この2粒子A,Bそれぞれが、仮想的に無限に細い磁束(大きさ $\frac{\Theta}{\pi}\Phi_0$, $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ は電荷 e の粒子に対する磁束量子)を伴って運動しているような状況を考えよう。再び相対運動に移つて考えると、この状況は、式(F)の \mathcal{H}_{rel} に以下のベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(x, y) = (A_x, A_y) = \left(\frac{\Theta}{\pi}\right) \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{G})$$

で与えられるソレノイド磁場を加えることで実現できる。この \mathbf{A} の作る磁場は $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ではゼロなので、ローレンツ力は働くはず、古典的に考える限り粒子の運動に何の影響もたらさないはずである。

(5) 式(G)のベクトルポテンシャルに対し、相対運動のハミルトニアン \mathcal{H}_{rel} の運動エネルギー部分

$$\frac{1}{2\mu} \left\{ (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 \right\} \quad (\text{H})$$

の極座標表示($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)を求め、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\Theta}{\pi} \right)^2 \right\} \quad (\text{I})$$

となることを示せ(任意の関数 $f(\mathbf{r})$ に対し、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} f(\mathbf{r}))$ となることに注意せよ)。これと問(1), (4)の結果を用いて、ボゾン2粒子の系に許されるエネルギー準位が(i) $\Theta = 0$ の時と、(ii) $\Theta = \pi$ の時とでどう変わるか、問(4)で求めた磁束のない時のフェルミオンのエネルギー準位との関係に注意しながら論ぜよ。ただし、問(4)同様、相対運動のエネルギーについてのみ考察すれば良い。また必要ならば、問(1)–(3)の \mathcal{H}_1 の固有値は一般に、角運動量 L の量子数 l と適当に定義された整数 n ($n \geq 0$)を用いて、

$$E = (2n + |l| + 1)\hbar\omega \quad (\text{J})$$

と書けることや極座標について式(C)が成り立つことを用いてよい。

(このページは白紙である)

平成 25 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-6 まで 6 問ある. この中から 3 問選択せよ. 4 問以上選択した場合は全ての解答が無効になることがある.
- (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いても良い.
- (3) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (5) 問題冊子は表紙を含めて 19 ページまである.

III-1 力学(潮汐力による振動)

III-2 電磁気学(光の散乱)

III-3 統計力学(変分法による平均場近似)

III-4 実験(中性子散乱)

III-5 実験(電子回路)

III-6 天文学

III-1 (力学：潮汐力による振動) (100 点)

2つの質量 m の質点 1, 2 が、重さのない長さ $2l$ の棒で連結され、図のように平面内を運動している。原点には質量 M の地球があって静止し、その重力（重力定数を G とする）がこの質点系にはたらいている。

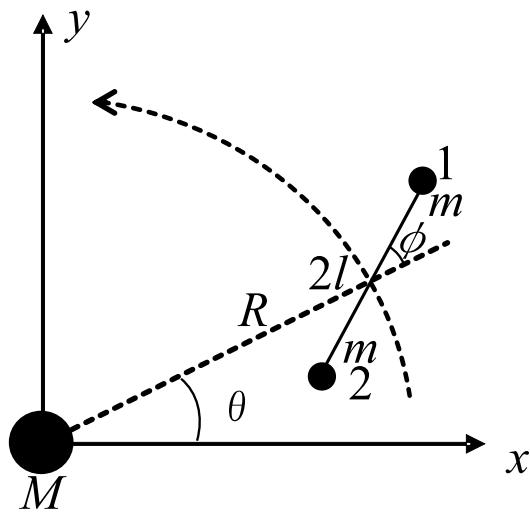


図 1

- (1) 図のように座標をとると、棒の中心の xy 座標は $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ で、質点 1 は棒の中心から $(l \cos(\theta + \phi), l \sin(\theta + \phi))$ 、質点 2 は棒の中心から $(-l \cos(\theta + \phi), -l \sin(\theta + \phi))$ の位置にある。
この質点系の運動エネルギーを座標 (R, θ, ϕ) とその時間微分で表せ。
- (2) 質点 1 と質点 2 の原点からの距離 r_1, r_2 を R, l, ϕ で表せ。次いで、(1) の結果も用いて、質点系のラグランジアンを求めよ。
- (3) まず、 $l = 0$ の極限を考える。 R に関するオイラー・ラグランジュ方程式を作れ。この質点系が地球を中心に一定の半径 $R = R_0$ の円軌道を描いている場合、その角速度 $\dot{\theta}$ は一定値 ω_0 となる。 ω_0 を求めよ。
- (4) 次に、 $l \ll R$ として、 $R = R_0$ (一定)、 $\dot{\theta} = \omega_0$ (一定) と近似できる場合を考える。角度 ϕ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を作れ。そして、これを $l \ll R_0$ の条件のもとで $|x| \ll 1$ に対する $(1 + x)^{-\alpha} \simeq 1 - \alpha x$ の近似式を使って展開せよ。
この時、 ϕ が小さいならば $\phi = 0$ のまわりで単振動することを示し、その角振動数を求めよ。これは、人工衛星の姿勢の潮汐力安定化とよばれる方法につながるものである。

(このページは白紙である)

III-2 (電磁気学：光の散乱) (100 点)

- (1) 角振動数 ω の電磁波（光）が、バネ定数 $m\omega_0^2$ (ω_0 は角振動数, m は電子の質量である) の弾性力で原子に束縛されている電子により散乱される場合を考える。電磁波は直線偏光しているものとし、その偏光方向を \mathbf{E}_0 として、電場ベクトルは、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{A})$$

で表されるとする。ここで、電気素量を e 、放射により失うエネルギーと関係する減衰力の係数を $m\rho (> 0)$ とする。古典的な電子の運動方程式、

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + m\rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} + m\omega_0^2 \mathbf{x} = e \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{B})$$

を考え、時刻 $t = 0$ で電磁波が入射してから、十分時間が経った定常状態における、振動双極子のモーメント $\mathbf{p}(t)$ を求めよ。(電子の振動を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \sin(\omega t + \delta)$ とした時、その振幅 \mathbf{x}_0 は、電磁波の波長 $\lambda = 2\pi c/\omega$ (c は光速) より十分小さいとする。)

- (2) モーメント $\mathbf{p}(t)$ の振動双極子からの放射を考える。散乱電磁波の進行方向の単位ベクトルを \mathbf{n} として、モーメント \mathbf{p} から位置 \mathbf{r} における、散乱電磁波のポインティングベクトル \mathbf{S} は、真空の誘電率を ϵ_0 として、

$$\mathbf{S} = \frac{\omega^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} |\mathbf{p} \times \mathbf{n}|^2 \mathbf{n} \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (\text{C})$$

と表せる。問(1)と同様に、直線偏光している角振動数 ω の電磁波（光）が、バネ定数 $m\omega_0^2$ の弾性力で原子に束縛されている電子により散乱される場合、位置 \mathbf{r} における微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\bar{S}r^2}{\bar{S}_i} \quad (\text{D})$$

を図 1 にもとづいて、入射電磁波の電場ベクトル $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ と、散乱電磁波の進行方向 \mathbf{n} のなす角 θ の関数として表せ。ただしここで、 \bar{S} と \bar{S}_i はそれぞれ散乱電磁波、入射電磁波のポインティングベクトルの大きさの時間平均を表し、

$$\bar{S}_i = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (\text{E})$$

である。

(次ページに続く)

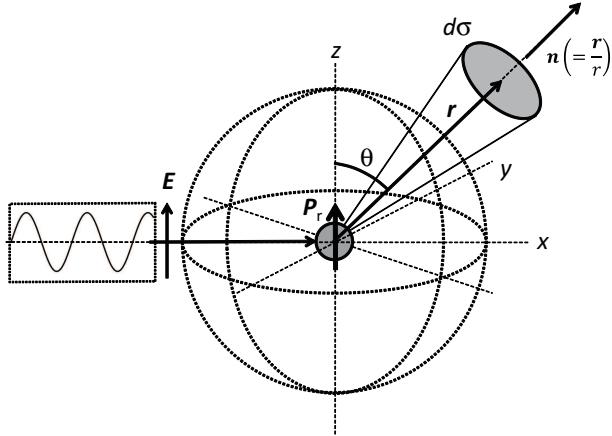


図 1

(3) $\rho \ll \omega_0, \omega$ の場合に、横軸に入射電磁波の角振動数 ω 、縦軸に問 (2) で得られた微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ を取って、 $\omega \sim \omega_0$ を中心とする領域でグラフを描け。また、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ の入射電磁波の角振動数 ω 依存性について、 $\omega \ll \omega_0$ の領域と、 $\omega \gg \omega_0$ の領域に分けて説明し、それぞれの領域で起こる実際の電磁波散乱の具体的な名称を記せ（例：コンプトン散乱）。さらにいずれか一方の領域で、上に述べた散乱現象を原因として観測される自然現象の例を挙げ、その現象を物理的に概説せよ。

(4) ここで太陽光線が大気中を通過する時、大気中の分子1つ1つにより散乱されて透過光が弱められるものとし、気体分子はそれぞれ1個の電子を角振動数 ω_0 で弾性的に束縛しているとする。この時、1個の分子により角振動数 ω の光が、散乱される全断面積は次式で与えられるとする。

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} a_0^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 \quad (\text{F})$$

ただし、

$$a_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

とする。一方、地上から高さ h の所では、単位体積当たり $N(h)$ 個の気体分子が存在し、次式を満たすように、地上から上昇するにつれて分子数が減少するものとする。

$$N(h) = N(0) \exp(-h/\mu) \quad (\text{G})$$

ただし、 μ は長さの次元を持つ定数である。このとき、地上から高さ h の場所で角振動数 ω 、強さ I の光は、 dh だけ降下した時の強度が dI だけ減少するとして、 dh と dI が満たす微分方程式を記せ。

（次ページに続く）

- (5) 地表での光の強度 $I(0)$ を、太陽からの入射光強度 $I(\infty)$ と μ , $N(0)$, $\sigma(\omega)$ の関数として求めよ。
- (6) 大気中の気体分子は、バネ定数 $m\omega_0^2$ の弾性力で電子を束縛しているものとする。また、この角振動数 ω_0 が波長 $\lambda_0 = 100 \text{ nm}$ の紫外線の角振動数に等しい ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$) とする。このとき、波長 $\lambda_B = 400 \text{ nm}$ (青) と、 $\lambda_R = 700 \text{ nm}$ (赤) の光が地表に到達する割合、 $I_B(0)/I_B(\infty)$ と $I_R(0)/I_R(\infty)$ を図2から読み取って、それぞれ2桁程度の値で答えよ。ただし、 $8\pi a_0^2/3 = 6.6 \times 10^{-29} \text{ m}^2$, $N(0) = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $\mu = 1.4 \times 10^4 \text{ m}$ とする。

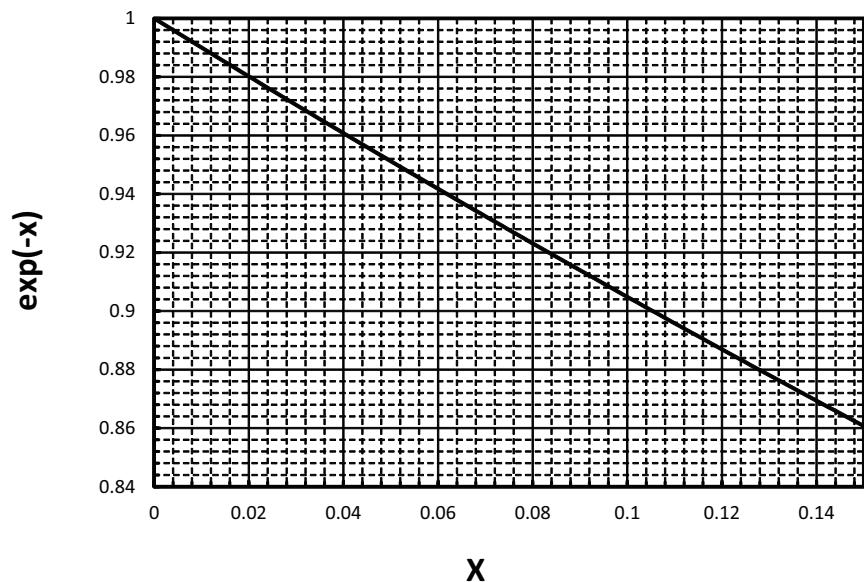


図2

(注) 現実の自然に起こる電磁波の散乱現象は、多数の原子・分子の集団としての様々な揺らぎを起源として起こっていることが、これまでアインシュタインやスマルコフスキーらによって議論されている。

(このページは白紙である)

III-3 (統計力学：変分法による平均場近似) (100 点)

古典統計力学においては、系のハミルトニアン \mathcal{H} が与えられると、ボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ ($\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, k_B はボルツマン定数) を用いて全ての可能な状態に関する和を取ることで原理的には物理量の期待値の計算ができるが、興味ある多自由度系の場合、この計算を厳密に実行できる場合は非常に限られている。このため、何らかの近似を行うことが多い。その一例として以下のようなハミルトニアンで記述される磁性体の問題を考えよう。

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}')} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') - \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{H}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (\text{A})$$

ここで、スピン $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ は長さ 1 の古典的なベクトルとして扱い、 \mathbf{r}, \mathbf{r}' はスピンの存在する格子点を表す。 $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ はスピンの間の交換相互作用の強さを表す正の結合定数で、 $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = J_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}$ を満たし、 $\mathbf{H}_{\mathbf{r}}$ は外部磁場である。また、因子 $1/2$ は、全格子点 \mathbf{r}, \mathbf{r}' についての和を取ると同じスピン対を二度数えてしまうことを補正するためについている。

- (1) まず、この問題で用いられる便利な不等式を証明しよう。実変数 y に対して成り立つ初等的な不等式 $e^{-y} \geq 1 - y$ を用いて、確率変数 X に対する任意の確率分布 $\rho(X)$ を用いた期待値 $\langle e^{-f(X)} \rangle_{\rho}$ について

$$\langle e^{-f(X)} \rangle_{\rho} \geq e^{-\langle f(X) \rangle_{\rho}} \quad (f \text{ は } X \text{ の実関数}) \quad (\text{B})$$

が成り立つことを示せ。ただし、確率分布 $\rho(X)$ は $\rho(X) \geq 0$ をみたし、これを用いた物理量 \mathcal{O} の期待値は

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \equiv \int dX \rho(X) \mathcal{O}(X), \quad \int dX \rho(X) = 1 \quad (\text{C})$$

と定義される。また必要であれば、式 (B) を計算する際、左辺を

$$e^{-\langle f(X) \rangle_{\rho}} \langle e^{-\{f(X) - \langle f(X) \rangle_{\rho}\}} \rangle_{\rho} \quad (\text{D})$$

と書き換え、期待値の評価に $e^{-F} \geq 1 - F$ を用いよ。

(次ページに続く)

系が温度 T で熱平衡にあるとき、その分配関数 $Z(T)$ はボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ を可能な微視的状態全てにわたって加算することで求められる。

$$Z(T) = \int dX \exp(-\beta\mathcal{H}(X)) \quad (\text{E})$$

今の場合、微視的状態は各格子点でスピンの向きを指定すれば決まるので、微視的状態和を計算するには、全格子点 \mathbf{r} についてスピンの向きに関する以下の積分を実行すれば良い。

$$\int dX \equiv \int \prod_{\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{4\pi} \equiv \prod_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{r}} \int_0^{\pi} d\theta_{\mathbf{r}} \sin \theta_{\mathbf{r}} \quad (\text{F})$$

- (2) ボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ を $\rho e^{-\beta\mathcal{H}-\ln\rho}$ と書き換えたうえで問(1)の不等式 (B) を用いることにより、任意の確率密度関数 ρ に対して不等式

$$Z(T) \geq \exp \left(-\beta \langle \mathcal{H} \rangle_{\rho} - \langle \ln \rho \rangle_{\rho} \right) \quad (\text{G})$$

が成り立つこと、またそこから自由エネルギー F に対する不等式

$$F \leq F_{\rho} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_{\rho} + k_B T \langle \ln \rho \rangle_{\rho} \quad (\text{H})$$

が導かれることが示せ。ただし、 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho}$ は式 (C) で定義されるものとする。

ここで得られた自由エネルギーに対する不等式 (H) は、真の自由エネルギー F が F_{ρ} の下限として与えられることを示しているので、これを統計力学における変分計算に用いることができる。試みに、試行確率分布 ρ として最も簡単な、全系の確率分布が各格子点 \mathbf{r} での確率分布 $\rho_{\mathbf{r}}$ の積の形で与えられるものを考えよう。

$$\rho = \prod_{\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{r}} \quad (\text{I})$$

ただし、各点での確率分布 $\rho_{\mathbf{r}}$ はその点にあるスピン $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ の関数であり、各格子点 \mathbf{r} 上で以下の規格化条件を満たす。

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{S}(\mathbf{r})) = 1 \quad (\text{J})$$

- (3) この確率分布 (I) に対し、各点での分布を $\rho_{\mathbf{r}} \mapsto \rho_{\mathbf{r}} + \delta\rho_{\mathbf{r}}$ のように微小変化させると、式 (C) で定義される、 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, $\ln \rho = \sum_{\mathbf{r}} \ln \rho_{\mathbf{r}}$ の期待値 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho}$, $\langle \ln \rho \rangle_{\rho}$ も変化する。その変分

$$\delta \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho}, \quad \delta \langle \ln \rho \rangle_{\rho} \quad (\text{K})$$

を式 (F) の積分 $\int d\mathbf{S}(\mathbf{r})/(4\pi)$ と $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, $\rho_{\mathbf{r}}$, $\delta\rho_{\mathbf{r}}$ などを用いて表せ。ただし、 $\delta\rho_{\mathbf{r}}$ は点 \mathbf{r} ごとに異なっていてよく、式 (J) の規格化条件は後で未定乗数法を使って取り入れるので、ここでは考慮しなくてよい。

(次ページに続く)

上で得られた結果を用いて、式 (H) の右辺で与えられる F_ρ の変分を計算しよう。 ρ が各点の ρ_r の積の形をしているので、 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_\rho = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho_r} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_{\rho_{r'}}$ などとなり、問 (3) の結果を用いることができる。また、規格化条件の式 (J) は未定乗数法を用いて考慮することにする。

- (4) 式 (I) の形をした分布の中で F_ρ を最小にする、変分法的に最適な解は ρ_r が各点 \mathbf{r} で、

$$-\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) + k_B T (1 + \ln \rho_r) = \alpha_r \quad (\text{L})$$

$$\text{ただし, } \mathbf{h}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}_r + \sum_{\mathbf{r}' (\neq r)} J_{r,r'} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_{\rho_{r'}} \quad (\text{M})$$

をみたす時に得られることを示せ。ここに α_r は式 (J) の規格化条件に対応する未定乗数である。また、式 (L) を解くことにより、規格化された最適な ρ_r を $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ や $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ などを用いて表し、 $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ がどのような役割を果たしているかに注意しながら、得られた ρ_r の物理的意味を議論せよ。

以上の結果を具体例に応用してみよう。簡単のため、以下の問題では格子として 3 次元の単純立方格子を考え、外部磁場がなく ($\mathbf{H}_r = 0$)、 $J_{r,r'}$ は隣接する格子点の間でのみ $J (> 0)$ 、他はゼロとしよう。この時、十分低温では \mathbf{r} によらない一様な自発磁化 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ が発生する強磁性状態になると期待される。

- (5) 式 (M) から、強磁性状態では $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ は場所 \mathbf{r} によらない値 \mathbf{h} を取ると考えられる。以下、簡単のため \mathbf{h} は z 軸の方向を向いており、 $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ であるとしよう。問 (4) で得られた確率分布に対し、式 (F) の角度積分を実行することによりスピンの期待値

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho = \int \prod_{\mathbf{r}'} \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r}')}{4\pi} \rho \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{4\pi} \rho_r(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (\text{N})$$

を $\xi = h/(k_B T)$ を用いて表せ。

- (6) 式 (M) と問 (5) で得られた $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ を連立して ξ について解くことにより h が求まり、そこから磁化 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ が決まる。式 (M) を満たすゼロでない h 、すなわち自発磁化が存在する温度の上限 T_c を求めよ。(式 (M) を ξ の方程式としてみたときに、その解が温度 T とともにどのように変化するかを考察してみよ。)

(このページは白紙である)

III-4 (実験：中性子散乱) (100 点)

図 1 に示すような z 軸方向に進む波数ベクトル k_1 質量 m の平面波で表される中性子線をナノサイズの粒子 (質量 M , ポテンシャル $V(\mathbf{r})$) に照射し, その散乱波から粒子のサイズを探る実験を考える.

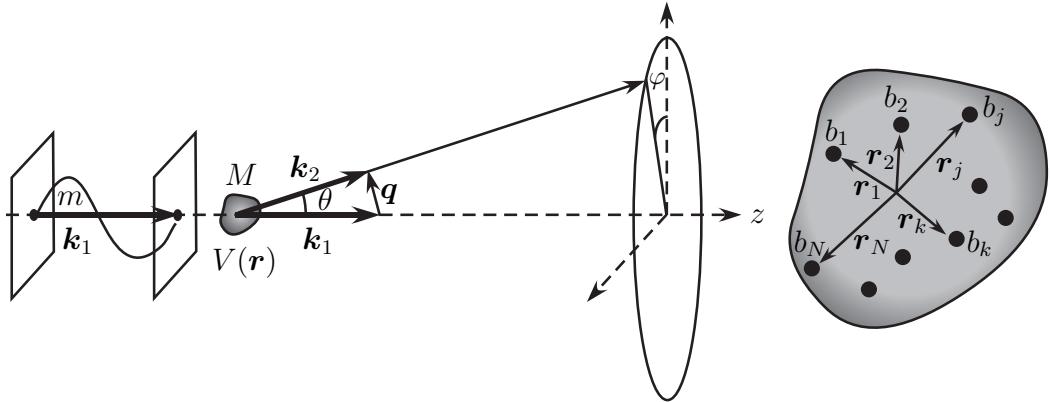


図 1

図 2

散乱波の波数ベクトルを図 1 に示す k_2 とし, 弹性散乱のみを考慮する ($|k_1| = |k_2|$) とき, 粒子のポテンシャルの有効範囲から十分離れた観測地点での散乱振幅は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A})$$

と与えられるとする. ここで, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ である.

- (1) 中性子は原子核によって散乱されるが, 原子核の大きさは散乱実験に用いる中性子の波長に比べて著しく小さい. したがって, 原子核の散乱能と位置ベクトルをそれぞれ b_j と \mathbf{r}_j とすると, この原子核の中性子線に対するポテンシャル $V_j(\mathbf{r})$ は

$$V_j(\mathbf{r}) = b_j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (\text{B})$$

と書ける. ここで, $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ であり, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である. 粒子は原子核の集合体であることを考慮して, 図 2 で示す N 個の原子核からなる粒子の散乱振幅 $f_m(\mathbf{q})$ は

$$f_m(\mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{j=1}^N b_j \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (\text{C})$$

と表わされる事を示せ. ただし, 原子核間の相互作用は考慮しなくてよい.

(次ページに続く)

実験で測定される散乱強度 $I(\mathbf{q})$ は、散乱振幅の 2 乗に比例するので

$$\begin{aligned} I(\mathbf{q}) &= c \left| \frac{2\pi\hbar^2}{m} f_m(\mathbf{q}) \right|^2 = c \left| \sum_{j=1}^N b_j \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 \\ &= c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{jk}) \quad (\text{ただし } \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \end{aligned} \quad (\text{D})$$

と表せる (c は実験条件に応じた比例定数)。

- (2) 測定する粒子が溶液中に存在するなどして空間に固定されていない場合、散乱は様々な方向を向いた多数の粒子からの重ね合わせとなり、このときの散乱強度は、図 1 における φ に対して等方的となる。つまり、それぞれの粒子において式 (D) における \mathbf{r}_{jk} は大きさを変えずに様々な方向を向いており、1 粒子あたりの平均散乱強度 $\bar{I}(q)$ (ただし $q = |\mathbf{q}|$) は $I(q)$ を q と \mathbf{r}_{jk} のなす極角 χ 、方位角 ω に対して以下の平均をとることで求めることができる。

$$\bar{I}(q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\pi d\chi \sin \chi \left\{ c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \exp(iqr_{jk} \cos \chi) \right\}$$

ここで、 $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ である。上式を計算し

$$\bar{I}(q) = c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \frac{\sin qr_{jk}}{qr_{jk}} \quad (\text{E})$$

と表されることを示せ。ただし、溶液中の粒子濃度は十分薄いとして粒子間干渉効果は無視できるとする。

次に、散乱強度 $\bar{I}(q)$ から粒子のサイズを見積もることを考える。

- (3) q が十分に小さい領域 ($qr_{jk} \ll 1$) の散乱強度 $\bar{I}(q)$ は、粒子のサイズを見積もる指標である慣性半径 R_g (式 (G) 参照) を用いて

$$\bar{I}(q) \simeq cb_t^2 \exp\left(-\frac{R_g^2}{3}q^2\right) \quad (\text{F})$$

と表されることを示せ。ここで、 b_t は全原子核の散乱能の和で $b_t = \sum_{j=1}^N b_j$ である。粒子サイズの指標となる慣性半径 R_g は粒子中の散乱能分布の 2 次モーメントであり、以下の式で与えられる。

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{b_t} \left(\sum_{j=1}^N b_j r_j^2 \right)} \quad (\text{G})$$

(次ページに続く)

ここで位置ベクトルの原点は，原子核散乱能分布の重心とし

$$\sum_{j=1}^N b_j \mathbf{r}_j = 0$$

が成立するとしてよい。また， $|x| \ll 1$ の時の以下の近似式を用いてよい。

$$\sin x \simeq x - x^3/3!, \quad 1 + x \simeq \exp x$$

- (4) 図3は，粒子Aと粒子Bからの散乱を横軸を q^2 ，縦軸を規格化散乱強度 $\bar{I}_N(q)$
($\bar{I}_N(q) = \bar{I}(q)/\bar{I}(0)$) の自然対数($\log \bar{I}_N(q)$)をとって表示している。この図
より式(F)を利用して，それぞれの粒子の慣性半径をナノメートルを単位と
して2桁で求めよ。
- (5) 測定条件(中性子ビーム強度，測定時間，試料中の粒子の数密度)が等しい場
合，粒子Aと粒子Bの原点散乱強度 $\bar{I}_A(0)$ と $\bar{I}_B(0)$ の比は

$$\bar{I}_A(0) : \bar{I}_B(0) = 4.0 : 25$$

であった。粒子の全散乱能 b_t と質量 M および粒子の体積 V と慣性半径 R_g
の間には，それぞれ近似的に以下の関係式

$$b_t \propto M, \quad V \propto R_g^3$$

が成立する。このとき，粒子Aと粒子Bの密度比を答えよ。

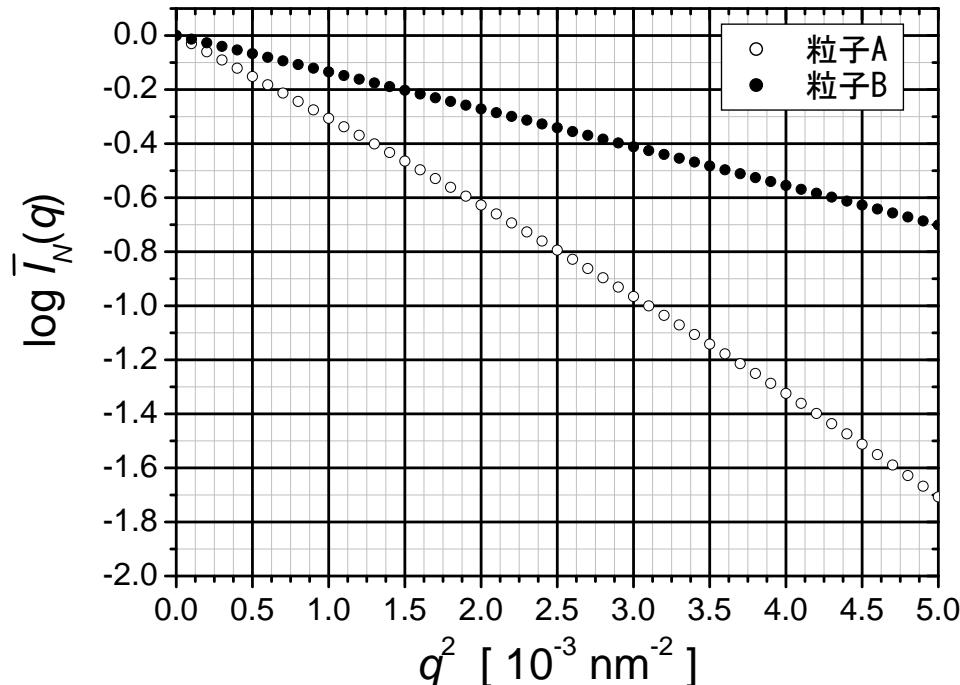


図3

(このページは白紙である)

III-5 (実験：電子回路) (100 点)

物理実験や観測実験には様々な電子機器が用いられている。その中には定電圧回路、電流-電圧変換回路、周波数-電圧変換回路、周波数フィルタ、センサー回路など様々な回路が組み込まれている。このような回路を構成する重要な素子がオペアンプ（演算増幅器）である。オペアンプは図1のような回路記号で表記される。端子は入力が2個（「+側」を非反転入力端子、「-側」を反転入力端子と呼ぶ）と出力が1個ある。ここでは電源端子は省略されている。オペアンプの特徴とそれを用いた回路に関する下記の問い合わせに答えよ。

- (1) 図2のような回路（反転増幅回路）によりオペアンプの特徴を考える。オペアンプの入出力間の電圧には差動利得を A とすると次のような関係がある。

$$V_{\text{OPout}} = A(V_+ - V_-)$$

ここで、 V_{OPout} はオペアンプの出力電圧であり、 V_+ , V_- はそれぞれ、非反転入力端子と反転入力端子の電圧である。オペアンプを理想オペアンプとし、入力インピーダンスは十分に大きく入力電流は無視でき、出力インピーダンスは十分小さいとする。抵抗 R_1 の左から右へ流れる電流を I_1 とし、 R_2 の右から左へ流れる電流を I_2 とする。反転増幅回路の出力 V_{out} と入力 V_{in} の関係を A , R_1 , R_2 のみを用いて表せ。

- (2) 問(1)の回路では常に出力を安定に保つような動作をしている。出力電圧が僅かに上がると、オペアンプの反転入力端子の電圧が上がるため、オペアンプの出力は下がり、打ち消される。逆に、僅かに下がると、上げる方向に動作する。これは出力が反転入力端子に抵抗を介して接続されることによる動作で「負帰還（ネガティブフィードバック）」と呼ばれている。オペアンプで負帰還がかかって正常動作をしている場合は、常に反転入力が非反転入力に一致するように出力電圧が決まる。この状態は反転入力端子と非反転入力端子が電流が流れないものあたかもつながっているようであるので、これを「仮想短絡（バーチャルショート）」と呼ぶ。オペアンプの差動利得 A が大きい場合の反転増幅回路の利得 $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$ は A に関係なく抵抗の比で決ること、またオペアンプの二つの入力電圧差は 0 となることを示せ。

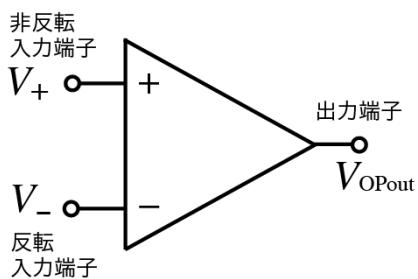


図1

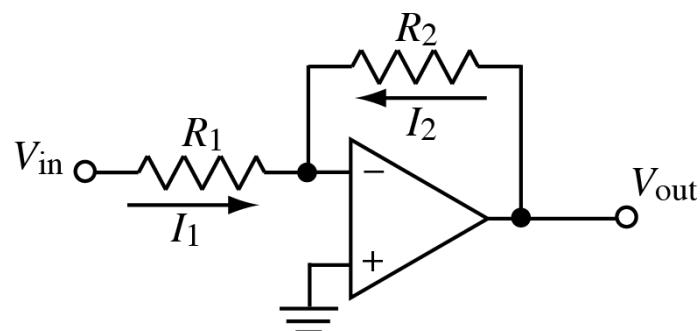


図2

(次ページに続く)

- (3) 2個の抵抗 R_1, R_2 を用いて、非反転増幅回路を示し、その出力 V_{out} と入力 V_{in} の関係を求めよ。また、反転増幅回路と同様に、差動利得 A が大きい場合の回路利得 $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$ は A に関係ないことを示せ。
- (4) 次に微分回路を考える。まず、オペアンプ素子を用いないで、抵抗 R とコンデンサー C だけを用いた微分回路を示すとともに、入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の関係式を示せ。
- (5) オペアンプ素子を用いた場合の微分回路を組む。回路図をオペアンプ素子と抵抗 R とコンデンサー C を用いて示すとともに、入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の関係式を示せ。
- (6) 問(4), (5)の回路の時定数を求めよ。ただし、 $R = 2\text{k}\Omega$, $C = 500\text{pF}$ とする。これらの回路に図3のような鋸波形の電圧が入力した場合、それぞれの出力電圧波形の概形を示せ。電圧値と時間の数値も示すこと。

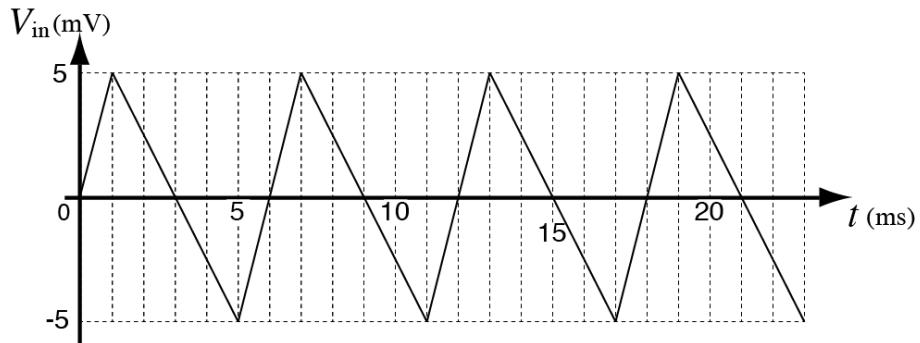


図 3

- (7) 回路製作の準備にあたって、次の問い合わせに答えよ。

- (a) 抵抗は一般にカラーコードによりその性能を表している。図4の抵抗はどのような仕様か答えよ。ただし、色と数字の組み合わせは、黒=0, 茶=1, 赤=2, 橙=3, 黄=4, 緑=5, 青=6, 紫=7, 灰=8, 白=9である。
- (b) オペアンプ素子と抵抗等などを用いて基板上に上述の回路を製作・試験する場合に必要な工具や機器を5つあげよ。

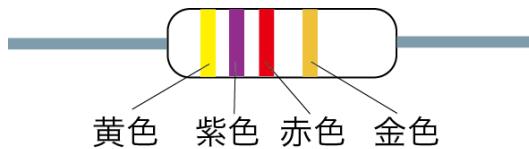


図 4

III-6 (天文学) (100 点)

大質量の星が形成されると、その大質量星は紫外線を放射し、周囲のガスを光電離する。電離水素領域（HII領域）の誕生である。電離水素領域は、X線から電波まで、さまざまな波長で観測されている。

まず、水素ガスだけで満たされた星間空間を考えよう。

- (1) あるO型星が単位周波数あたり光度 $L_\nu [\text{W Hz}^{-1}]$ を放射しているものとする。この放射のうち電離光子の数は $S_* = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{L_\nu}{h\nu} d\nu$ となる。この積分の端の周波数 ν_0 を有効数字3桁で答えよ。必要ならば、以下の数字を使って良い。光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 、プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ 、素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。
- (2) このO型星が1秒間に $S_* = 1 \times 10^{49}$ 個の電離光子を放射している場合を考える。水素の電離断面積は電離光子の周波数によらず一定で $\sigma = 6 \times 10^{-22} \text{ m}^2$ とする。星から距離 $r = 1 \times 10^{18} \text{ m}$ ($\simeq 30 \text{ pc}$) の場所で、水素の電離はどの程度のタイムスケールで起こるか、有効数字1桁で答えよ。なお、半径 r より内側で光子が電離に使われて減少することは無視して良いものとする。
- (3) 単位時間あたり $S_* [\text{s}^{-1}]$ の電離光子を放射している星から距離 $r [\text{m}]$ の場所で、中性水素原子、陽子、電子の数密度をそれぞれ、 $n_{\text{H}^0} [\text{m}^{-3}]$ 、 $n_p [\text{m}^{-3}]$ 、 $n_e [\text{m}^{-3}]$ とし、電離断面積を $\sigma [\text{m}^2]$ 、単位体積・単位時間あたりの再結合係数を $C [\text{m}^3 \text{ s}^{-1}]$ としたときに、電離平衡の式を書け。

星からの距離 $r = 1 \times 10^{18} \text{ m}$ の場所の水素の密度 n_{H} ($= n_{\text{H}^0} + n_p = n_{\text{H}^0} + n_e$) が $n_{\text{H}} = 1 \times 10^7 \text{ m}^{-3}$ で、星からの光子による電離と再結合の間で平衡が成り立っているとする。再結合係数を $C = 3 \times 10^{-19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ として、中性水素の割合 $x \equiv n_{\text{H}^0}/n_{\text{H}}$ がどれほどになるか、有効数字1桁で答えよ。

- (4) 水素原子の状態間のアインシュタインA係数 $A_{nn'}$ （自発放射での、状態 n から n' への遷移率）は、ほとんどが 10^8 から 10^4 s^{-1} 程度であり、状態 n から n' への輝線が放射される。これは再結合線と呼ばれ、例えば $n = 3$ から 2 へのバルマー線が、美しい天体写真に見られる電離水素領域の赤い輝きの原因となっている。問(2), (3)の結果も使って、水素原子は1個あたりの平均として、時間的にどのようなサイクルをたどるか記述せよ。

（次ページに続く）

次に、水素に加えて C, N, O などの重元素もわずかに存在する星間空間を考えよう。

- (5) 電離水素領域では、例えば 2 階に電離した酸素イオン O^{++} （または OIII とも表す）からの輝線が強く観測される。 O^{++} の基底状態は 3P であり、波長 500nm の放射エネルギーに相当する 1D の励起状態がある。ところが、これらの間の輝線は、AINSHUTAIN A 係数が 10^{-2} s^{-1} 程度と非常に小さい（禁制線とよばれる）。この理由を簡潔に述べよ。
- (6) 星間空間で禁制線が放射されるメカニズムを考えるのに、このイオンの基底状態 1 とその上の状態 2 だけに注目して良いものとする。すなわち、他の励起状態や、低階や高階のイオンを考慮しない。衝突による突き上げの遷移と、衝突による突き下げおよび自発放射の遷移とがつり合っているとしよう。すなわち、

$$n_e n_1 q_{12} = n_e n_2 q_{21} + n_2 A_{21}$$

ここで、 $n_e [\text{m}^{-3}]$ は電子の数密度、 $n_1 [\text{m}^{-3}]$ 、 $n_2 [\text{m}^{-3}]$ はそれぞれ状態 1 と 2 にあるイオンの数密度である。また、 $q_{12} [\text{m}^3 \text{ s}^{-1}]$ 、 $q_{21} [\text{m}^3 \text{ s}^{-1}]$ は衝突の係数で $10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ 程度の値を持ち、 $A_{21} [\text{s}^{-1}]$ はAINSHUTAIN A 係数である。水素がほとんど完全に電離した領域において、上記の式で、 n_e がきわめて小さい希薄な極限から、きわめて大きい極限までを考える。単位体積・単位時間あたりの放射光子数の、希薄な極限での値を、 n_e を使って表せ。

また、臨界密度 $n_{\text{ec}} \equiv \frac{A_{21}}{q_{21}}$ のときの値も同様に表せ。

さらに、このイオンの基底状態 1 にあるものの水素原子に対する個数比を $k \equiv n_1/n_H$ とし、問(3)のような電離水素領域でのこれらの値を k, n_e で表せ。なお、 $k \ll 1$ である。

- (7) AINSHUTAIN 係数 $A_{21} \simeq 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ 、衝突の係数 $q_{12} \simeq q_{21} \simeq 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ の場合に、臨界密度 n_{ec} のオーダーを求めよ。
- (8) 以上をふまえ、水素の状態間遷移と比べて、AINSHUTAIN A 係数がきわめて小さいにもかかわらず、また $k = 10^{-4}$ 程度しかないにもかかわらず、電離水素領域で重元素からの禁制線が強く観測される理由を述べよ。単位体積・単位時間あたりに放射される光子数のオーダーを、水素の再結合線と禁制線でごく簡単に見積もって比べてみよ。

平成 25 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間 30 分)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1,IV-2 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ. 裏面を用いても良い.
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は 2 問すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 4 ページまである.

IV-1

以下の英文は, Philip W. Anderson 著 “More and Different” からの抜粋である. 読んで以下の問いに答えよ.

(a) “promising” young scientist’s publication rate grew
the last decade of the century far too many, especially of the young people,

(b) By
Observation of the actual working of modern science



(註)

reams of : 大量の

tactical : 戦術の

jockey : 巧みに操縦する

prestige : 高い評判の

dubious : 怪しい

absorption : 夢中, 没頭

grant : 研究助成金

PRL : アメリカ物理学会が発行する論文誌「Physical Review Letters」の略記

fragmentation : 分裂

deterioration : 劣化

proliferate : 急速に増加させる

deconstructionist : 脱構築主義の

aberrant : 常軌を逸した

vision : 幻想

poltergeist : ポルターガイスト, 家の中で音を立てる幽霊

- (1) 下線部 (a)において, promising が二重引用符で囲まれている。その理由を述べよ。
- (2) 下線部 (b) を和訳せよ。ただし、この下線部は 1 文の英文であるが、適切に 2 文に分けて和訳せよ。
- (3) 一部の社会学者たちは、科学の真理は純粹に社会学的なものであり、自然によってではなく力関係により決まると主張している。この見方に対する著者の考え方を、100 字程度の日本語で述べよ。

IV-2

以下の文章は，南部陽一郎氏のノーベル賞受賞記念講演（Nobel Lecture）をもとに作成されたものである。全文章を英訳せよ。

自発的対称性の破れ (SSB) は，物理の基本法則における対称性が破れているように見える現象である。実のところ，我々の日常生活において SSB はたいへんありふれた現象である。例として，垂直に立っているまっすぐな弾性体の棒を考えよう。この棒はどの水平方向から見ても同じであり，回転対称性を持っている。しかし，この棒を押しつぶそうとして徐々に圧力をかけていくと，ある方向に曲がり対称性は失われる。全ての方向は同等なので，この曲がりは原理的にはどの方向にも起こり得る。

(ヒント)

自発的対称性の破れ：spontaneous symmetry breaking

弾性体の：elastic

棒：rod

～に圧力をかける：apply pressure to ～

押しつぶす：squeeze

曲がる：bend

(このページは白紙である)

京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻

平成 24 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。

また、当日、試験時間内に以下の修正・加筆を行いました。

I-1 問題文 (7) 「そのときの」 → 「そのとき ($h = h_0$ のとき) の」

I-2 2 行目 「印可」 → 「印加」

III-1 問題文 (4) 5 行目 「 $x_a x_a = \sum_a x_a x_a$ 」 → 「 $x_a x_a$ を $\sum_{a=1}^3 x_a x_a$ 」

III-2 問題文 (3) 3 行目 「導線の向き」 → 「導線中での」

III-5 4 行目に追加 「なお、ここでは光の吸収の効果は考えないものとする。」

平成 23 年度専攻教育委員会

平成 24 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1 , I-2 , I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いててもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

I-1 (力学) (100 点)

原点に向かう中心力 $F(r)$ (r は原点からの距離) による, 質量 m をもつ質点の平面上の運動を考えよう.

- (1) $U = - \int F(r)dr$ で定義されるポテンシャルエネルギーを導入する. 平面極座標 $(r \theta)$ を用いて系のラグランジアンを書き下し, 動径 (r) 方向の運動方程式を導け.
- (2) 角運動量 $h \equiv mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ.
- (3) 質点の軌道を表す方程式が, $u \equiv 1/r$ を用いて

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{h^2u^2} F(1/u) \quad (\text{A})$$

と書けることを示せ.

まず, 中心力が

$$F(r) = -\frac{km}{r^2} \quad (k \text{ は正の定数}) \quad (\text{B})$$

で与えられる場合を考える.

- (4) 軌道を表す式 $r = r(\theta)$ を求め, $u = 1/r \propto (1 + e \cos \theta)$ (e は 0 または正の実数) の形に書けることを示せ.
- (5) 軌道が橢円となるとき, e は橢円軌道の離心率を表す. 質点の全エネルギー E を, 角運動量 h , 定数 k, m および e を用いて表し, 軌道が橤円となるための E に対する条件を求めよ. また, 角運動量を与えたとき, 全エネルギーが最小となるのは円軌道のときであることを示せ.
- (6) 軌道が円軌道となるとき, その半径は, 有効ポテンシャル (重力ポテンシャルと遠心力によるポテンシャルの和) が極小となる半径であることを示し, その半径を h を用いて表せ.

次に, 中心力が

$$F(r) = -\frac{km}{r^2} - \frac{\epsilon m}{r^4} \quad (k \text{ および } \epsilon \text{ は正の定数}) \quad (\text{C})$$

で与えられる場合を考える.

- (7) 安定な円軌道が存在する (有効ポテンシャルが極小となる点が存在する) ためには, 角運動量は $h > h_0$ (h_0 はある定数) でなければならないことを示し, h_0 を求めよ. またそのとき ($h = h_0$ のとき) の円軌道半径を求めよ.

(次ページに続く)

- (8) 軌道が(7)で求めた半径よりずっと大きな長半径をもち，かつ ϵ が小さな正の値 ($0 < \epsilon \ll kr^2$) のときを考える。このとき，軌道は橢円軌道からわずかにずれる(図1参照)。軌道半径が最大となる角度は，1周期ごとにずれることを示し，そのずれの角度($\Delta\theta$)を求めよ。なお，単位はラジアンとする。また，軌道を橢円で近似したときの離心率は1より十分小さいとする。

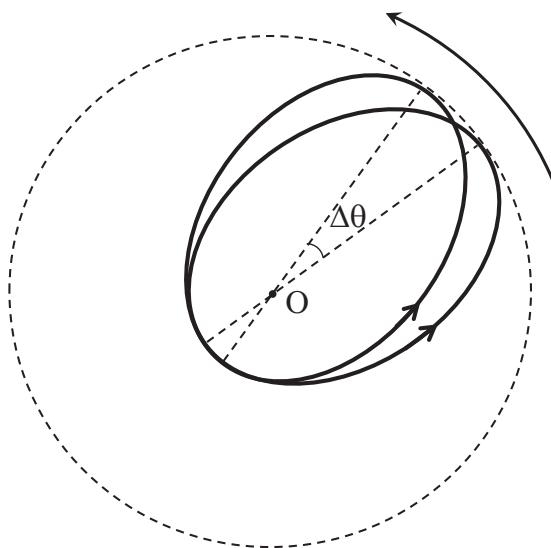


図 1

I-2(電磁気学)(100点)

図1のように真空中に置かれた円盤状の平板コンデンサーに電源を接続し、交流電圧 $|\vec{E}_0| h \cos(\omega t)$ を印加する。コンデンサーの極板間の間隔を h 、半径を a とし、極板の厚みは無視できる。コンデンサー内部には真空に対して十分に高い誘電率 ε と、真空と同じ透磁率 μ_0 を持つ誘電体が挿入されている。 $a \gg h$ であり、極板端の電場の不均一は無視できるとする。

角振動数 ω が低い場合、極板間の電場は近似的に $\vec{E}_1(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ と書ける。 $t = 0$ の電場の向きは図1のコンデンサー極板間の下から上の向きとする。

- (1) コンデンサー内部の半径 $r (\leq a)$ において、電場 $\vec{E}_1(t)$ によって極板間に誘起される磁束密度 $\vec{B}_1(r, t)$ の大きさを求めよ。また、解答用紙に図1のコンデンサーの部分を写して、 $\omega t = \pi/4$ のときの磁束密度の向きを図示せよ。
- (2) コンデンサー内部の半径 $r (\leq a)$ において、 $\vec{E}_1(t)$ と $\vec{B}_1(r, t)$ によって極板間に生ずるポインティング・ベクトル $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 \times \vec{B}_1$ の大きさを計算せよ。また、解答用紙に図1のコンデンサーの部分を写して、 $\omega t = \pi/4$ のときのポインティング・ベクトルの向きを図示せよ。
- (3) コンデンサー内部と外部を出入りする単位時間あたりの電磁場のエネルギーを求めよ。ただし、動径方向に外部からコンデンサー内部に入る向きをプラスとする。
- (4) 電源が供給する電力を計算し、(3)の解答と比較せよ。
- (5) コンデンサー全体の電場の時間平均エネルギーと磁場の時間平均エネルギーをそれぞれ求め、両者の比を計算せよ。

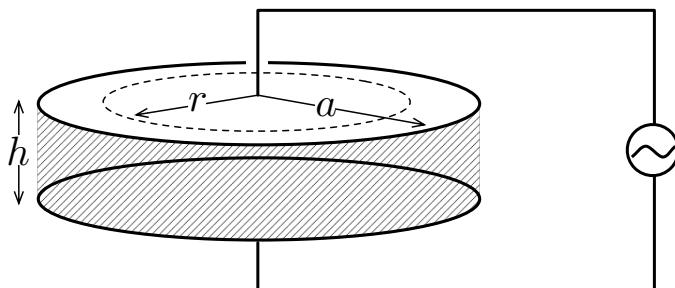


図1

角振動数 ω が高い場合は、磁束密度 $\vec{B}_1(r, t)$ が新たに電場 $\vec{E}_2(r, t)$ を誘起し、電場にも r 依存性が生ずる。

- (6) 図2はコンデンサーの断面図である。破線内部の磁束の変化に着目して $\vec{E}_2(r, t)$ の大きさを求めよ。ただし $\vec{E}_2(0, t) = \vec{0}$ とする。

(次ページに続く)

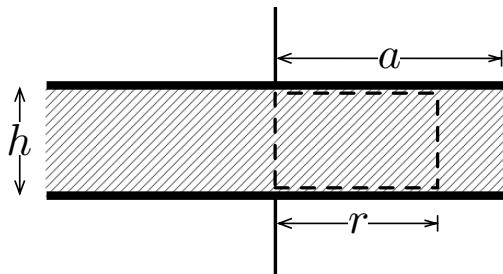


図 2

電場 $\vec{E}_2(r, t)$ はさらに新たな磁束密度 $\vec{B}_2(r, t)$ を誘起し、磁束密度 $\vec{B}_2(r, t)$ はさらに電場 $\vec{E}_3(r, t)$ を誘起する。これがくり返し起こり、その合計が観測される。その結果、コンデンサー内部 ($r \leq a$) で観測される電場および磁束密度は、それぞれベッセル関数 $J_0(kr)$ と $J_1(kr)$ に比例する。ここで $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}$ である。それらのベッセル関数を図 3 で示す。

ここで $ka = 3.832$ を満たす角振動数 $\omega = \omega_0$ を選び、コンデンサーの端 ($r = a$) での磁束密度が常に 0 になるようにした。その結果、回路を流れる電流は 0 になった。

- (7) $\omega = \omega_0$ での誘電体中の電磁波の波長 λ と a の関係を示せ。
- (8) コンデンサーの極板上の電荷分布とその時間変化について記述せよ。必要なら図を使ってもよい。

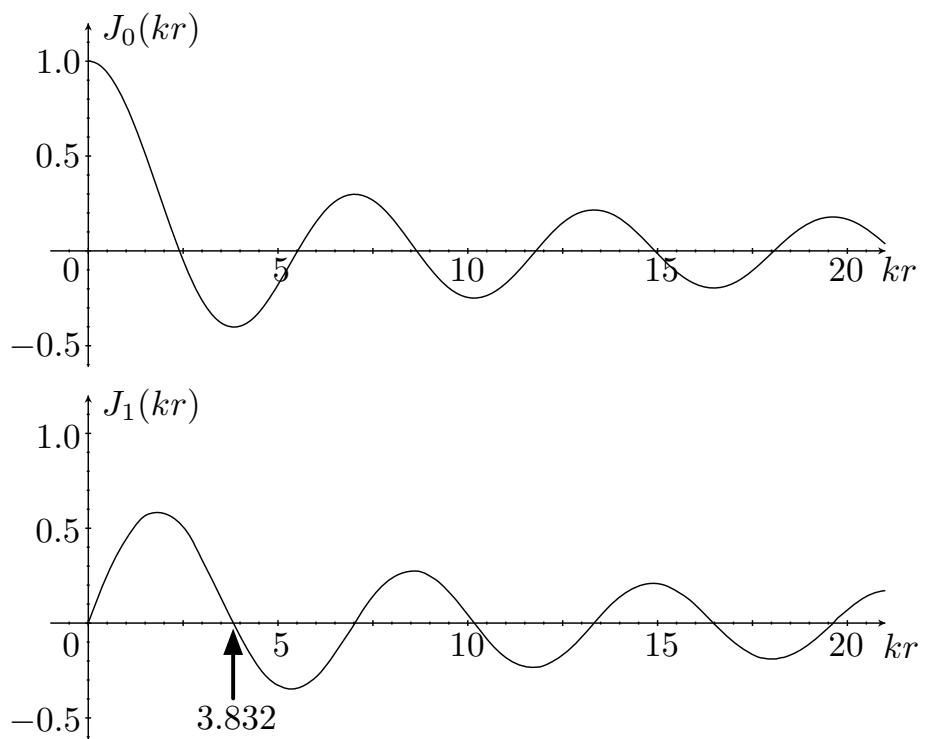


図 3

I-3 (物理数学) (100 点)

フーリエ像および たたみ込み積分を，それぞれ次のように定義する：

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{i\omega x}, \quad (\text{A})$$

$$f * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y) g(y). \quad (\text{B})$$

(1) たたみ込み積分のフーリエ像 $\widetilde{f * g}(\omega)$ を，合成される関数のフーリエ像 $\tilde{f}(\omega)$ および $\tilde{g}(\omega)$ を用いて表せ．

(2) 分散 σ^2 (σ は正の実数) をもつガウス分布関数

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C})$$

のフーリエ像 $\tilde{G}(\omega)$ を求めよ．ここでは，以下の関係式を用いてよい．

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a \text{ は正の実数}, c \text{ は任意の実数}) \quad (\text{D})$$

1 次元空間をブラウン運動で拡散する粒子（ブラウン粒子）について考える．時刻 t で位置 x にいた粒子が時刻 t' で位置 x' にいる確率を $p(x'|t'; x, t)$ で表すと， $t_2 > t_1 > t_0$ として

$$p(x_2|t_2; x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 p(x_2|t_2; x_1, t_1) p(x_1|t_1; x_0, t_0) \quad (\text{E})$$

が成り立つ．式 (C) のガウス分布に従って 1 単位時間につき分散 σ^2 で拡散するブラウン粒子を考えると， $p(x_1|1; x_0, 0) = G(x_1 - x_0)$ を満たす．

(3) 時刻 $t = 2$ でのブラウン粒子の位置の分布は

$$p(x_2|2; x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G(x_2 - x_1) G(x_1 - x_0) \quad (\text{F})$$

で与えられる． $x_0 = 0$ としてこの分布 $p_2(x_2) \equiv p(x_2|2; 0, 0)$ を計算せよ．

(4) (3) で求めた関数 $p_2(x) = p(x|2; 0, 0)$ のフーリエ像 $\tilde{p}_2(\omega)$ を計算し，(2) で求めたフーリエ像 $\tilde{G}(\omega)$ との関係を簡潔に述べよ．

(5) 時刻を， $t = 0, 1, 2, \dots, n$ と離散化して考え， $t = n$ でのブラウン粒子の位置分布 $p_n(x) \equiv p(x|n; 0, 0)$ のフーリエ像 $\tilde{p}_n(\omega)$ を求めよ．

(6) $\tilde{p}_n(\omega)$ を逆フーリエ変換し， $p_n(x)$ を求めよ．また，この場合，位置 x の平均と分散は時刻 t とともにどう変わるか，それぞれ述べよ．なお，逆フーリエ変換は次のように表される：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x}. \quad (\text{G})$$

（次ページに続く）

初期に位置 $x_0 = 0$ にあったブラウン粒子が拡散し、位置 x にある確率 $p(x)$ が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta^2}\right) \quad (\text{H})$$

になった場合を考える。この状況において、その粒子を観測したところ、 y の位置にあるという観測結果を得たとしよう。ここで、この観測には ϵ の測定誤差があり、粒子の真の位置が x の場合に y の位置に観測値を得る確率は

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}\right) \quad (\text{I})$$

で与えられるものとする。

この状況においては、粒子の位置が x 、観測値が y となる結合確率は

$$p(y, x) = p(y|x)p(x) \quad (\text{J})$$

で与えられ、観測値 y が得られた条件下での粒子の位置 x の分布 $q(x|y)$ は

$$q(x|y) = \frac{p(y, x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y, x')} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y|x')p(x')} \quad (\text{K})$$

によって与えられる。ここで、式 (K) の分母に現れる

$$r(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y|x')p(x') \quad (\text{L})$$

は、この場合に予想される観測値 y の分布関数である。

(7) 分布関数 $r(y)$ を計算し、観測値 y に関する平均と分散をそれぞれ求めよ。

(8) 観測後の $q(x|y)$ における x の期待値と分散をそれぞれ求めよ (x 依存性のみに注目すれば計算は簡単になる)。また、観測誤差がない場合 ($\epsilon = 0$) と観測しない場合 ($\epsilon = \infty$) の両極限について、平均と分散をそれぞれ求めよ。

平成 24 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1 , II-2 , II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いててもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

II-1 (解析力学) (100 点)

図 1 のように、地面に固定された物体 A の上部に、水平方向を軸に持つ半径 R の円筒面の下半分の形状を持つ溝が掘られている。その溝の中に半径 a 、長さ b の中空のパイプ B が 1 本置かれているときの、このパイプ B の運動について考察してみよう。このパイプ B の壁の厚さは無視できるものとし、質量分布はパイプ B の表面全面にわたって均等で、パイプ B 全体の質量が m であるものとする。また重力加速度は図 1 の下向き ($-z$ 方向) に g で与えられるものとする。

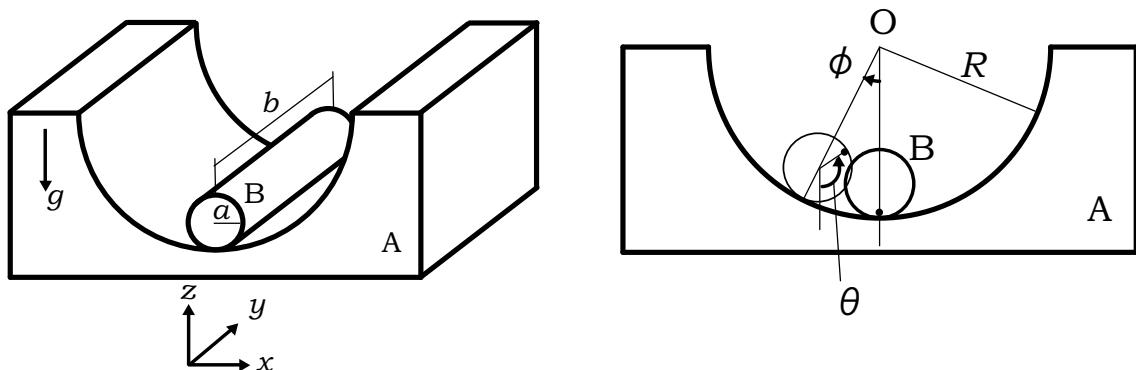


図 1

- (1) 図 1 に示した、溝の中心軸 O 周りのパイプ B の振れ角度 ϕ 、ならびにパイプ B の中心軸周りの回転角 θ を一般化座標としてとり、パイプ B の運動エネルギーと重力ポテンシャルからなるラグランジアンを導出せよ。ただし各角度はパイプ B の平衡位置を基準として定義するものとする。

ここで、パイプ B が物体 A の溝の中で滑ることなく回転して運動する場合を考える。(1) のラグランジアンを元にしてパイプ B の運動を解析したいのだが、パイプ B には重力以外の力が溝表面との間に働くため、その解法には注意しなければならない。溝表面からパイプ B に働く力は「パイプ B は物体 A の溝の中で滑ること無く回転して運動する」との拘束条件を満たすように働く拘束力であることに留意し、以下の解説を参考にして、この問題を解いてみよう。

通常のラグランジュ方程式は、ハミルトンの原理に基づき作用 I が極小値を取る条件より導出することができ、ラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i)$ と一般化座標 q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ならびにその時間微分 \dot{q}_i を用いて、

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt \\ &= 0\end{aligned}\tag{A}$$

とすることにより n 個の方程式が与えられる .

一般化座標 q_i の間の拘束条件 ℓ 個がその時間微分 \dot{q}_i を用いて ,

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i = 0$$

の形 ($k = 1, 2, \dots, \ell$) で与えられるとする . このとき , 各係数 a_{ki} にラグランジュの未定乗数 λ_k を乗じたものの和

$$\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k a_{ki}$$

を式 (A) の {} 内に加算した n 個の {} のうち , ℓ 個については {} 内を 0 とするように λ_k を決定できる . さらに , 残りの $n - \ell$ 個の {} に対応する δq_i は独立であると見なすことができるので , あわせて n 個の {} = 0 という形の拡張されたラグランジュ方程式を得ることができる . この方程式 n 個と拘束条件 ℓ 個を合わせて解くことにより , 解を得ることができる .

- (2) 一般化座標の時間微分 $\dot{\theta}, \dot{\phi}$ を用いて , パイプ B の運動を拘束する拘束条件を表せ .
- (3) 拘束条件ならびに未定乗数 λ を利用して , パイプ B の運動を記述する θ と ϕ の運動方程式を導出せよ .

以下の設問では , 振れ角度 ϕ が十分小さいとして近似するものとする .

- (4) パイプ B が周期運動をすることを示し , その角振動数 ω_0 を求めよ .
- (5) 溝表面からパイプ B に働く力のうち円周方向に働く拘束力 F の大きさを求めよ . また , F, ϕ ならびに θ の時間変化をグラフで示せ .
- (6) パイプ B が平衡位置で静止している状態から , 物体 A を 図 1 の x 軸方向に角振動数 ω で微小振動させたとき , パイプ B の運動状態はどうなるか , ϕ の時間変化をグラフにすることで示せ .
- (7) 半径 a , 長さ b , 質量 m だが中心軸上にすべての質量が均等に集中していると近似できる仮想的な円柱 C を考える . 円柱 C をパイプ B の代わりにおいていたときの角振動数と比較して , パイプ B の ω_0 はどう違うのか , その違いの生じた理由をエネルギーの観点から簡潔に説明せよ .

II-2(量子力学)(100点)

水素原子における2次のシュタルク効果と分極率を、変分法を用いて評価しよう。水素原子の原子核は電子に比べて十分重いため、ここでは、原子核の中心を原点とした電子の位置座標に関する波動関数を用いて考察する。以下では、 $\int_0^\infty r^n e^{-\gamma r} dr = n!/\gamma^{n+1}$ ($\gamma > 0$, n は正の整数) を用いてよい。

- (1) 水素原子の基底状態のエネルギーを変分法により求めよ。すなわち、試行関数を $\phi_0(r) = A \exp(-\lambda r/a)$ とおき、エネルギー

$$W = \frac{\langle \phi_0 | \mathcal{H}_0 | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} \quad (\text{A})$$

を最小化する λ を求め、そのときの W を計算せよ。ここで、 $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$ は水素原子のボア半径、 ε_0 は真空の誘電率、 m は電子の質量である。電子の電荷は $-e$ ($e > 0$) とする。 \mathcal{H}_0 は系のハミルトニアンであり、軌道角運動量演算子を \vec{L} とすると、

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (\text{B})$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right) \quad (\text{C})$$

で与えられる。

以下では、 W を最小化する λ を λ_0 、このときの W を W_0 とし、波動関数として

$$\phi_0(r) = A \exp(-\lambda_0 r/a) \quad (\text{D})$$

を用いる。この $\phi_0(r)$ に対し、最小エネルギー W_0 はハミルトニアン \mathcal{H}_0 の固有値になる。なお、設問(3)から(5)までの解答には、 λ_0 および W_0 を用いてよい。

- (2) 時間的に一定で空間的に一様な z 方向の弱い電場 $\vec{E} = (0, 0, E)$ (ただし $E > 0$) のもとに水素原子があるときの、摂動ハミルトニアン \mathcal{H}' を書け。ここで、電場が水素の原子核に与える影響は無視できるものとする。
- (3) 弱い電場のもとでの基底状態のエネルギーを変分法により求めたい。そこで、試行関数を

$$\phi = (1 + \rho z)\phi_0(r) \quad (\text{E})$$

とおき、 $\langle \phi | \phi \rangle$ と $\langle \phi | \mathcal{H}' | \phi \rangle$ を計算せよ。ここで、 ρ は実数の変分パラメータである。また、波動関数 $\phi_0(r)$ とハミルトニアンの対称性により、

$$\langle \phi_0 | \mathcal{H}' | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | z \mathcal{H}' z | \phi_0 \rangle = 0 \quad (\text{F})$$

となることに注意せよ。

(次ページに続く)

(4) 交換関係

$$[\mathcal{H}_0, z] = -\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{G})$$

を導け。これと、 $\mathcal{H}_0|\phi_0\rangle = W_0|\phi_0\rangle$ を利用して、

$$\langle \phi | \mathcal{H}_0 | \phi \rangle = W_0 \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \quad (\text{H})$$

となることを示せ。

(5) (a) (3) と (4) の結果を用い、

$$W' = \frac{\langle \phi | (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}') | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \quad (\text{I})$$

に対して $\frac{\partial W'}{\partial \rho} = 0$ となる ρ を求めよ。ただし、電場は弱く $|2eEa/(\lambda_0 W_0)| \ll 1$ が成り立つとしてよい。

- (b) このようにして得られる ρ のうち、 $\rho < 0$ の解が W' の最小値、すなわち電場のもとでの基底状態のエネルギー W'_0 を与える。 W'_0 を計算せよ。
- (6) 電場による基底状態のエネルギーの変化 $(W'_0 - W_0)$ には E の 1 次の項はなく、 E の 2 次の項が最低次となることが分かる。分極率 α が

$$W'_0 - W_0 = -\frac{\alpha}{2} E^2 \quad (\text{J})$$

で定義されることを用いて、水素原子の分極率をボーア半径 a を用いた式で表せ。

II-3 (統計力学) (100 点)

角振動数 ω を持つ調和振動子のエネルギー固有値は, $n = 0, 1, 2, \dots$ として

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A})$$

で与えられる. 以下, いろいろな角振動数を持ち, 互いにほとんど独立な N 個の調和振動子からなる系を考える. $\beta = 1/(k_B T)$ (T は温度, k_B はボルツマン定数) として以下の問い合わせに答えよ.

- (1) j 番目の調和振動子が角振動数 ω_j をもつとき, その調和振動子に対する分配関数 Z_j は

$$Z_j = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_j/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_j}} \quad (\text{B})$$

となることを示せ.

- (2) 系全体の分配関数は $Z = \prod_{j=1}^N Z_j$ で与えられる.

- (a) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ.
- (b) 微小角振動数変化を $d\omega$ としたとき, ω と $\omega + d\omega$ の間にある調和振動子の数は $\rho(\omega)d\omega$ で与えられるとする. このとき, 体積一定の熱容量(定積熱容量)は

$$C_V = k_B \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) \frac{(\beta\hbar\omega)^2 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \quad (\text{C})$$

となることを示せ.

- (3) N 個の調和振動子がすべて同一の角振動数 ω_E をもつ場合を考える. ω_E に対応する温度を $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ とする.

- (a) 低温 ($T \ll \Theta_E$) における定積熱容量の温度依存性を求めよ.
- (b) 高温 ($T \gg \Theta_E$) の極限では定積熱容量は定数となる. この極限から温度を減少させていくときの定積熱容量の温度依存性を求めよ.

- (4) すべての調和振動子はある角振動数 ω_D より低い角振動数をもち

$$\int_0^{\omega_D} d\omega \rho(\omega) = N \quad (\text{D})$$

を満たすとともに, $\rho(\omega)$ は ω^α (α は 0 以上の実数) に比例するとする.

- (a) $\rho(\omega) = A\omega^\alpha$ として係数 A を求めよ.

(次ページに続く)

- (b) ω_D に対応する温度を $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ とおく . このとき , 低温 ($T \ll \Theta_D$) における定積熱容量の温度依存性を T/Θ_D の関数として求めよ . 温度依存性の表式には , 次の公式を利用して , ガンマ関数 $\Gamma(s)$ とゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いてよい .

$$\int_0^\infty dx \frac{x^s e^x}{(e^x - 1)^2} = \Gamma(s+1)\zeta(s) \quad (\text{E})$$

ただし , $\operatorname{Re} s > 1$ である .

- (5) 周期的境界条件を持つ一辺の長さ L の立方体の中に , 角振動数 ω が波数ベクトル \vec{k} に依存する調和振動子が N 個存在する場合を考える . ここで , L は十分大きく \vec{k} は連続変数とみなせるとする . また , すべての調和振動子で角振動数と波数ベクトルの関係 (分散関係) は同じであり , かつ , (4) と同様にすべての調和振動子はある角振動数以下に分布している . a と b を正の定数として , 次の 2 種類の分散関係を考える . 1 つは

$$\omega = a |\vec{k}| \quad (\text{F})$$

で , 量子化された弾性波や反強磁性体のスピン波の長波長領域で見られる分散関係である . もう 1 つは

$$\omega = b |\vec{k}|^2 \quad (\text{G})$$

で , 強磁性体のスピン波の長波長領域で見られる分散関係である . 両者を比較して , $\rho(\omega)$ の ω 依存性の違い , および定積熱容量 C_V の低温での温度依存性の違いについてそれぞれ述べよ . ただし , 関数形だけを計算すればよく , それらに付随する係数を求める必要はない .

平成 24 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 17 ページまである。
-

III-1 物理数学

III-2 電磁気学（荷電粒子の運動）

III-3 量子力学（一次元調和振動子）

III-4 統計力学（イジング・スピン）

III-5 光学

III-6 天文学

III-7 実験（中性子集束）

III-1 (物理数学) (100 点)

以下の問題に答えよ。なお、解答の順番は変えてよい。

- (1) m を正の実数、 \vec{r} を大きさが $r(\neq 0)$ の 3 次元の実ベクトルとして、

$$V(\vec{r}) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{p}^2 + m^2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (\text{A})$$

という 3 次元積分を実行し、 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$ となることを示せ。

- (2) ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ は $\operatorname{Re} \nu > 0$ の領域では、

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \quad (\text{B})$$

という積分で定義され、 $\operatorname{Re} \nu \leq 0$ の領域については、

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (\text{C})$$

という関係式を用いてその定義域を拡張（解析接続）できる。

- (a) $\operatorname{Re} \nu > 0$ のとき $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$ を示し、正整数 n に対して $\Gamma(n)$ を計算せよ。
 (b) $\Gamma(\varepsilon)$, $\Gamma(-1 + \varepsilon)$ は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 ε のどのような関数で近似的に表されるか、それぞれ示せ。

- (3) リーマンのゼータ関数 $\zeta(\nu)$ は $\operatorname{Re} \nu > 1$ のとき $\zeta(\nu) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\nu}$ で定義され、

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\nu-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \frac{1}{1 - e^{-t}} \quad (\text{D})$$

という積分で表される。ここで、ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ の定義と性質については、(2) の問題文を参照し、解答の際には式 (B) および式 (C) を用いてよい。

- (a) $\operatorname{Re} \nu > 1$ のとき、式 (D) の右辺が $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\nu}$ に一致することを示せ。

- (b) $\frac{1}{1 - e^{-z}}$ を、原点 $z = 0$ のまわりでローラン展開すると

$$\frac{1}{1 - e^{-z}} = \sum_{n=-1}^\infty A_n z^n \quad (\text{E})$$

と表せる。 A_{-1} , A_0 , A_1 を求めよ。

- (c) $\zeta(\nu)$ は、 $\operatorname{Re} \nu > 1$ の領域で、以下のように表されることを示せ。

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \sum_{n=-1}^1 A_n t^n \right\} + \left(\frac{A_{-1}}{\nu - 1} + A_0 + A_1 \nu \right) \quad (\text{F})$$

（次ページに続く）

(d) 式 (F) は, 解析接続を用いた $\Gamma(\nu)$ および $\zeta(\nu)$ の定義域の拡張により, $\operatorname{Re} \nu > -2$ の領域でも成り立つ関係式である. $\nu = -1$ のとき, 式 (F) の右辺の第1項の(ガンマ関数の因子を除く)積分全体が有限になることを示し, $\zeta(-1)$ を計算せよ.

(4) パウリ行列 $\sigma_a (a = 1, 2, 3)$ は, 標準形では

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{G})$$

と表され, $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \varepsilon_{abc} \sigma_c$ を満たす. ここで, I は 2 行 2 列の単位行列であり, 解答の際には $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \sigma_c$ のように I を省略してもよい.

なお, くり返しの添字は $x_a x_a$ を $\sum_{a=1}^3 x_a x_a$ のように和をとるものとする.

(a) $\theta_a (a = 1, 2, 3)$ を実数パラメータとして, $(\theta_a \sigma_a)^2$ を計算せよ.

(b) $SU(2)$ の行列 U は, 3 つの実数パラメータ $\theta_a (a = 1, 2, 3)$ を用いて

$$U = e^{i \theta_a \sigma_a} \quad (\text{H})$$

と表せる. $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ を用いて, $e^{i \theta_a \sigma_a}$ を計算し,

$$U = w_4 + i \sigma_a w_a \quad (\text{I})$$

という形で表せ. 導出過程も書くこと. ここで $w_k (k = 1, 2, 3, 4)$ は実数である. なお, 計算の過程で $\theta \equiv (\theta_a \theta_a)^{1/2}$ や $\hat{\theta}_a \equiv \frac{\theta_a}{\theta}$ を用いてもよい.

(c) $SU(2)$ の行列 U の場合, 式 (I) の $w_k (k = 1, 2, 3, 4)$ は 独立なパラメータではない. これらが満たす条件を求めよ.

III-2(電磁気学；荷電粒子の運動)(100点)

断面積 S の無限に長い円柱の形をした導線中の電子の運動を考えよう。導線中には導線に平行な方向に一様な電場 E がかかっており、そのために、単位体積当たり n 個の電子(電荷 $-e$)が平均速度 v で運動している。ただし、導線中には電子の電荷密度($-ne$)と同じ大きさで、プラスの電荷密度(ne)をもつ金属イオンが存在し、全体として平均的な電荷密度は 0 に保たれているとする。また、以下では、単純化された古典的モデルを考える。このとき、以下の問い合わせよ。

- (1) 電場 E によってもたらされている電子の運動を、以下のような簡単化した過程として考察しよう。電子が電場 E によって加速され、一定時間 τ で金属イオンの熱運動などによって散乱されて速度が 0 になり、再び加速されてまた散乱されて速度 0 になる、ということが繰り返し起こる。その結果、得られる電子の平均速度 v を、電場 E 、一定時間 τ (衝突時間ともいう)、電子質量 m 、電気素量 e を用いて表せ。この簡単なモデルはオームの法則を表現できている。このモデルでの電気伝導度 σ を、 n, e, τ, m を用いて表せ。なお、個々の電子間の相互作用は無視してよい。
- (2) 導線の内外には磁場が発生する。導線の中心からの距離 r の場所における磁束密度を求めよ。ただし、導線中は電流密度は一様とし、透磁率を μ とする。また、導線の外の透磁率は真空中の透磁率 μ_0 とする。
- (3) 一般に多数の電子の一方向の運動は、発生した磁場によるローレンツ力のため、直線運動からずれる。この直線運動からのはずれは、どのような運動となるか、定性的に述べよ。さらに、導線中での、電子の運動の向き、発生した磁場の向き、ローレンツ力の向きを、それぞれの関係がわかるように図示せよ。
- (4) (3)において、発生した磁場のローレンツ力によって生じる速度を求め、直線運動からのはずれは十分小さいことを定量的に確かめよ。ただし、導線の太さは半径 $0.1[\text{mm}]$ 、電流は $1[\text{A}]$ 、電気伝導度 $\sigma = 10^7 [\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$ 、導線中の電子数密度は $10^{29} [\text{m}^{-3}]$ とし、電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$ 、電子質量 $m = 9.1 \times 10^{-31} [\text{kg}]$ 、真空中の透磁率 $\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6} [\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$ である。また、簡単のため、発生した磁場のローレンツ力を求める際には導線表面における磁束密度を用いよ。なお、電子の直線運動の平均速度は電流密度から求まることに注意せよ。

(次ページに続く)

- (5) 1 個の電荷 $q(> 0)$ の粒子 A が、導線の外で導線に平行に導線中の電子と同じ速度 v で運動しているとする。そのとき粒子 A はローレンツ力を受ける。次に、粒子 A と同じ速度で同じ方向に等速運動する座標系 K を考える。この座標系 K では、プラスの電荷をもつ金属イオンは電子と逆向きに運動しているので、元の電流と同じ向きに電流が流れ、磁場もできるが、粒子 A は静止しているので、ローレンツ力は発生しない。しかしながら、粒子 A の受ける力は、等速運動する座標系 K に移っても消えることはないはずである。この矛盾はどう説明すればよいか？ 数式を用いて説明せよ。ただし、電子の速度 v は光速に比べて十分小さいと仮定する。(ヒント：ローレンツ収縮によって電荷密度が変わることに注意せよ。)

III-3 (量子力学；1次元調和振動子) (100点)

質量 m の1粒子が、調和振動子ポテンシャル $m\omega^2x^2/2$ (ω は正の実数) 中で、 x 軸上を1次元運動する系を量子力学的に考察する。相対論的効果は無視できるものとする。

- (1) 座標変換

$$\eta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad (\text{A})$$

により無次元量 η および昇降演算子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\eta + \frac{d}{d\eta}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\eta - \frac{d}{d\eta}\right) \quad (\text{B})$$

を導入して、ハミルトニアンを書き変えよ。また、 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係を示せ。

- (2) 位置座標演算子 x および運動量演算子 p を昇降演算子を用いて表せ。
- (3) 規格化された調和振動子の基底状態を $|0\rangle$ とするとき、主量子数 ($\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値) が n の固有状態 $|n\rangle$ は $c_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ の形に書けることを示し、規格化定数 c_n を求めよ。
- (4) $|n\rangle$ を用いて、 x と p に対するそれぞれの分散 (演算子の2乗の期待値から演算子の期待値の2乗を引いたもの) を計算し、不確定性関係を導け。
- (5) 次に、昇降演算子 \hat{a} の固有値方程式

$$\hat{a}|\Phi\rangle = R|\Phi\rangle \quad (\text{C})$$

を考える。ここで固有値 R は簡単のため実数とする。状態 $|\Phi\rangle$ に対して x と p の分散を計算し、(4)の結果との関係を示せ。ここで $\langle\Phi|\hat{a}^\dagger = \langle\Phi|R$ を用いてもよい。

- (6) 式 (C) の固有値方程式に \hat{a} の具体的な表記を代入し、微分方程式を解くことによって $|\Phi\rangle$ の具体的な波動関数 $\langle x|\Phi\rangle$ の形を求めよ。
- (7) 次にハイゼンベルク表示を用い、 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の時間依存性を考察する。ハイゼンベルクの運動方程式からこれらの演算子の時間依存性を求めよ。
- (8) 上で得られた \hat{a} と \hat{a}^\dagger の時間依存性、および(2)で得られた位置座標演算子 x の \hat{a} と \hat{a}^\dagger による表記を用い、ハイゼンベルク表示の位置座標演算子 $x(t)$ の $|\Phi\rangle$ による期待値 $\langle\Phi|x(t)|\Phi\rangle$ を計算し、さらに $x(t)$ の $|\Phi\rangle$ による分散の時間依存性を議論せよ。

(このページは白紙である)

III-4(統計力学；イジング・ спин) (100点)

上下2方向しか向くことができないイジング・スピニを考えよう。簡単のためスピニ磁気モーメントを1として扱う。

スピニが外部磁場 H 中に置かれている。スピニは状態 $s = \pm 1$ に応じて、エネルギー $-sH$ をとるとする。

- (1) 温度 T のもとでのスピニの磁化 M およびエントロピー S を求めよ。
- (2) 外部磁場の絶対値 $|H|$ が小さい極限で、 M および S の H 依存性を、各々 H に関する3次項および2次項まで求めよ。
- (3) 有限温度において、 M および S が H に依存する様子を図示せよ。

次に、相互作用している2個のイジング・スピニ $\{s_1, s_2\}$ が外部磁場 H 中に置かれた状況を考える。この場合のエネルギーは

$$E = -Js_1s_2 - (s_1 + s_2)H$$

と表されるとする。相互作用パラメータ J が $J = 0, J = J_0, J = -J_0$ (J_0 は正の定数) をもつ3つの系を考えよう。

- (4) これら3つの系について、外部磁場がない場合($H = 0$)のエントロピーの値を示し、それらの大小関係を論じよ。
- (5) これら3つの系について、同じ温度、同じ磁場 $H(>0)$ のもとで生じる磁化 M の大小関係を、物理的考察により推定せよ。

次に、 $N(\gg 1)$ 個のスピニが互いに同じ強さ $J/N (> 0)$ で相互作用している平均場結合系を考えよう。各スピニが受けている平均場 H_{eff} は、系の全スピニの平均値を $m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j$ とおくと、

$$H_{\text{eff}} \approx Jm$$

と表すことができる。

- (6) 温度 T で、平均場 Jm の中での各スピニの磁化が、全スピニの平均値 m に等しいとおいたセルフ・コンシスティント(自己無撞着)方程式を書き下せ。
- (7) 系を高温から冷やしていくときに、自発磁化($m \neq 0$)が生じ始める臨界温度 T_c を求めよ。

(次ページに続く)

- (8) 臨界温度 T_c より高い温度での系全体の自発磁化 M およびエントロピー S の値を求めよ .
- (9) ϵ を正の微小量として , $T = T_c \times (1 - \epsilon)$ のように温度を T_c からわずかに減少させたとき , M および S が , それぞれ臨界温度からのずれ ϵ に応じてどのように変化するかについて , (2) の結果を用いて ϵ に関する最低次の項を示せ .

III-5 (光学) (100 点)

図 1 のように、屈折率 n_1 の気体中から屈折率 n_3 の半無限の誘電体平面基板に光が垂直入射したときの、界面での光の反射を考える。この場合、光の電場は角振動数 ω 、時刻 t 、位相 δ を用いて $E_0 \exp(i\omega t + i\delta)$ のように表すことができ、時間依存性 $\exp(i\omega t)$ を除いた部分を複素振幅という。以下では、入射光、反射光、透過光の電場の複素振幅をそれぞれ、 E_I 、 E_R 、 E_T と表す。なお、ここでは光の吸収の効果は考えないものとする。

- (1) 電場と磁場の接続条件から、エネルギー反射率は

$$R = \left| \frac{E_R}{E_I} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right|^2 \quad (\text{A})$$

となることを示せ。

- (2) 気体の屈折率は真空のそれと同じであるとみなすことができ、基板は石英であるときに、入射光の何パーセントが反射されるかを計算せよ。石英の屈折率は $n_3 = 1.5$ とすること。

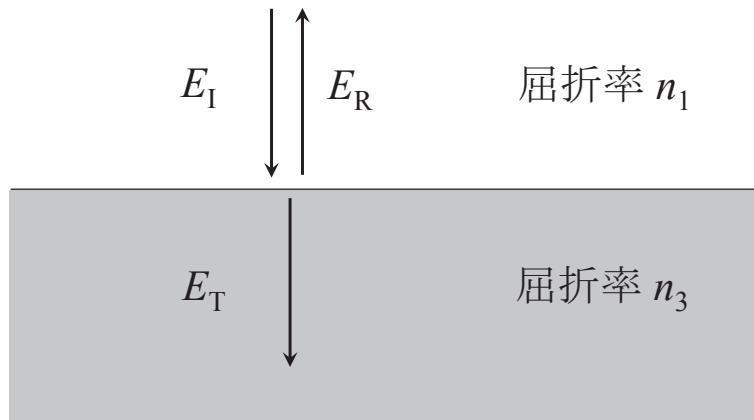


図 1

この石英基板の表面に屈折率 n_2 の誘電体薄膜を厚さ d だけ蒸着し、反射光の強度ができるだけ小さくしたい（このような膜を反射防止膜という）。その設計の指針を以下の手順により考察せよ。以下では、波長 λ_0 の単色光を垂直入射した場合、すなわち、図 2 に示す入射角 θ が $\theta = 0$ の場合を扱う。

- (3) 光が薄膜中を距離 d だけ進むときの位相差 β と λ_0 の関係を示せ。

（次ページに続く）

- (4) 図 2 に示すように、気体と誘電体薄膜、誘電体薄膜と石英基板との界面では光の反射が起きる。屈折率 n_i から屈折率 n_j の物質に光が垂直入射するときの反射係数 r_{ij} 、透過係数 t_{ij} を用いて、誘電体薄膜の表面で反射する光の電場の複素振幅は $r_{12}E_I$ と書ける。誘電体薄膜内を 1 往復して戻ってくる光の電場の複素振幅は $t_{12}r_{23}t_{21}e^{2i\beta}E_I$ となることに注意し、誘電体薄膜内を 2 往復して戻ってくる光の電場の複素振幅を表す式を求めよ。
- (5) 反射の回数が無限大までの反射光を考慮に入れて、エネルギー反射率 R を求めよ。ただし、 $r_{21} = -r_{12}$ と $r_{ij}^2 + t_{ij}t_{ji} = 1$ の関係を用いて、 r_{21} と t_{ij} を消去した式で表せ。
- (6) 誘電体薄膜の膜厚 d を適当な厚さに設定し、 R が最小となるようにしたい。そのような条件を満たす最小の厚さ d_0 を求めよ。物理的考察を用いて答えてよい。
- (7) 誘電体薄膜の膜厚が d_0 の 2 倍であるときの R の値を求めよ。ここで、反射係数と透過係数を屈折率を用いて表すと、それぞれ、 $r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)$ 、 $t_{ij} = 2n_i/(n_i + n_j)$ となることに注意せよ。
- (8) (6) の条件のもとで、 $R = 0$ となるような n_2 の値を求めよ。
- (9) 誘電体薄膜の膜厚と屈折率を、それぞれ、(6) と (8) で求めた値にし、波長 λ_0 の単色光の代わりに白色光を垂直入射させる場合を考える。 λ_0 を中心として、反射率が誘電体薄膜のない場合の半分以下となるような波長範囲を概算せよ。

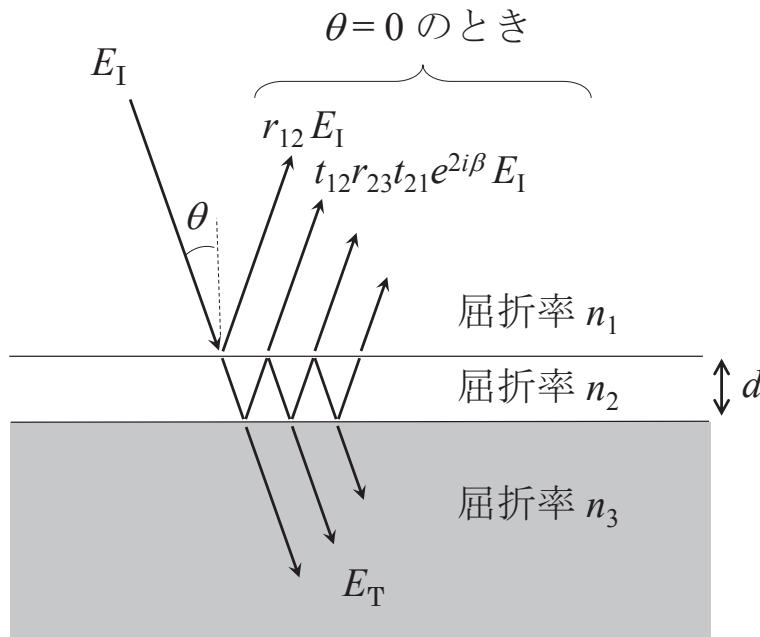


図 2

III-6 (天文学) (100 点)

星の線スペクトルについて考察してみよう。

振動数 ν [Hz] の電磁波の放射強度 (放射エネルギー流量) を I_ν [J·m⁻²·s⁻¹·Hz⁻¹] とおくと、放射の減少分と増加分を考慮して、1次元の放射輸送の式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \quad (\text{A})$$

と書ける。ここで s [m] は光の経路の長さ、 κ_ν [m²·kg⁻¹] は吸収係数、 ρ [kg·m⁻³] はガス密度、 j_ν [J·m⁻³·s⁻¹·Hz⁻¹] は放射エネルギー生成量である。添字の ν は振動数依存性を示す。

- (1) 無次元量の「光学的厚み」 τ_ν ($= \int \kappa_\nu \rho ds$) を導入し、 $I_\nu(\tau_\nu)$ を考察する。図1のように一様温度 T [K] で光学的厚み τ_ν のガス塊 (大気の一部) に $I_\nu(0)$ の光が入射する状況を考える。式(A)で $j_\nu = 0$ として、この方程式を解け。この解をもとに、光学的厚み τ_ν の物質を通過すると、入射した光の強度はどう変化するか答えよ。

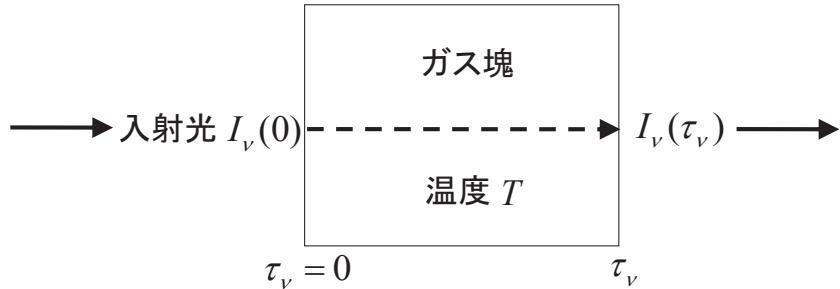


図 1

- (2) 局所熱力学的平衡が成り立っているとすると、 $j_\nu = \kappa_\nu \rho B_\nu(T)$ と表される。ここで $B_\nu(T)$ は黒体放射の強度分布を表すプランクの放射関数 ($\propto \nu^3 / (\exp(h\nu/k_B T) - 1)$)、 h はプランク定数、 k_B はボルツマン定数) である。図1のガス (大気) で、至る所で局所熱力学的平衡が成り立っているとして式(A)を解け。またこの解で、 $\tau_\nu \ll 1$ のとき、 $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)(1 - \tau_\nu) + \tau_\nu B_\nu(T)$ 、 $\tau_\nu \rightarrow \infty$ のとき、 $I_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T)$ となることを示せ。
- (3) 次に、表面温度 T_c の球 (光球) が、一様温度 T_s の大気で覆われている状況を考える。図2で、aとbの2つの光線のそれぞれにつき、(2)の結果を用いて、放射エネルギー強度 $I_\nu(\tau_\nu)$ を求めよ。ここで、光球表面で $I_\nu = B_\nu(T_c)$ としてよい。

(次ページに続く)

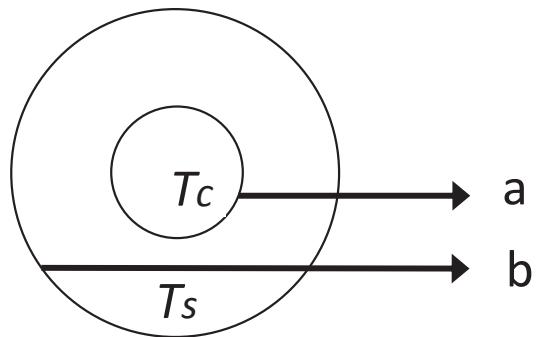


図 2

- (4) κ_ν は $\nu = \nu_0$ のみである値を持ち, それ以外では κ_ν は十分に小さいとする. このとき, 図 2 の a と b のそれぞれの場合で, 輝線を生じるための T_c と T_s に関する条件を記せ. なお, 輝線とは, ある振動数での放射強度がその前後の振動数での放射強度よりも大きいことをいう. $B_\nu(T)$ は $\nu = \nu_0$ 付近で振動数に対してゆっくりとしか変化しないとしてよい.

ある星のスペクトル中の水素のバルマー線 (実験室波長 656.3 [nm] で, 水素原子のエネルギー準位 $n = 2$ と $n = 3$ との間の遷移に対応する) が, 図 3 で示されている. このスペクトルは, 輝線成分と吸収線成分の 2 成分から構成されていると考えられる. 以下の問いに答えよ.

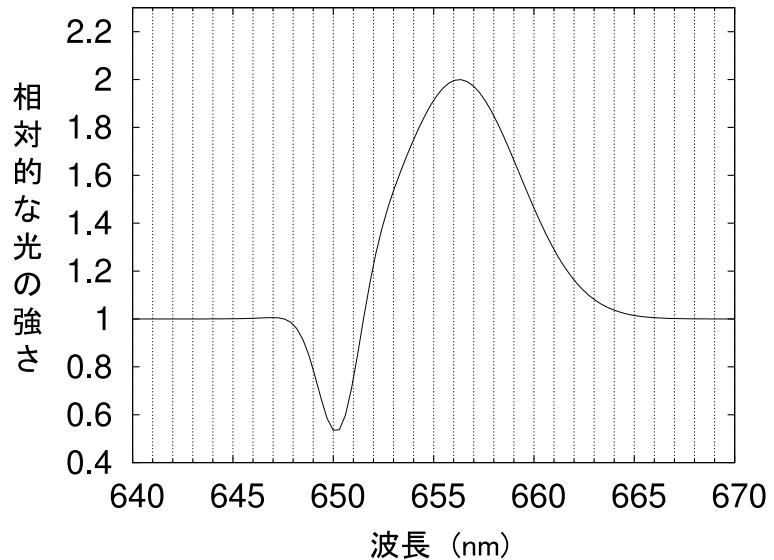


図 3

- (5) この天体で, 図 4 のように光球の周りに厚い大気が存在しているとする. $T_c < T_s$ のとき, 図 3 のスペクトルは説明できない. その理由を述べよ. また $T_c > T_s$ であるすると, 輝線成分はどこからきているか, 図 4 を写して該当する領域を図示せよ.

(次ページに続く)

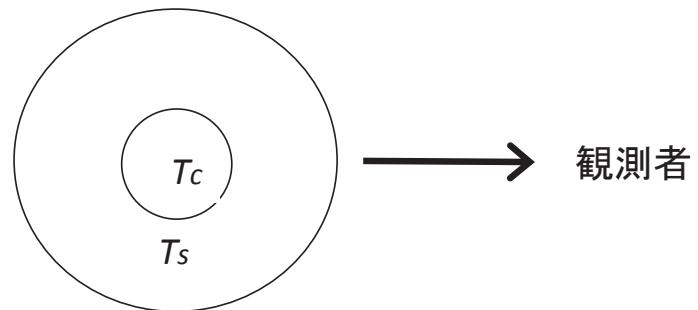


図 4

- (6) 図 3において、吸収線成分の中心波長は輝線成分の中心波長より短い。この大気は一様に膨張しているか、収縮しているか、どちらであるか理由とともに述べよ。また、膨張あるいは収縮速度を、有効数字 1 術で求めよ。

(このページは白紙である)

III-7(実験；中性子集束) (100点)

中性子は電荷を持たないが、磁気双極子能率を持っているため磁場と相互作用する。磁気双極子能率を生み出す中性子のスピンの向きは、磁場中では磁場に平行な成分と反平行な成分に量子化される。運動エネルギーの十分低い中性子では、磁場の向きの変化が急激でなければスピンの向きは磁場の向きに常に追随し、平行性(平行、反平行)は維持される。磁場と平行な向きのスピンを持つ中性子は、磁場の磁束密度の大きさ B だけに比例したポテンシャル W を感じる。例えば、 $B = 1 \text{ [T]}$ の磁束密度の中で感じるポテンシャル W はスピンと磁場が平行と反平行の場合で符号が逆になるが、その絶対値は $60 \text{ [neV]} (6.0 \times 10^{-8} \text{ [eV]})$ である。

図1の長さ L の磁場領域には Z 軸からの距離 r のみに依存する大きさ $B(r)$ の磁束密度が存在するとする。中性子が幅のある平行ビームとなって Z 軸方向に運動しているとき、適当な $B(r)$ のもとで磁場に平行なスピンを持つ中性子を Z 軸上のある一点に集束させることができる。ここで、それぞれの中性子は運動エネルギー $K=25 \text{ [meV]} (2.5 \times 10^{-2} \text{ [eV]})$ を持つとする。中性子平行ビーム全体は Z 軸を中心として半径 a の円となる断面を持つ。 L および a は焦点距離 f に比べて十分短いとする ($a \ll f, L \ll f$)。なお、以下の基礎物理定数は自由に使ってよい。

真空中の光速度	3.0×10^8	$\text{[m}\cdot\text{s}^{-1}]$
電気素量	1.6×10^{-19}	[C]
中性子の質量	1.7×10^{-27}	[kg]

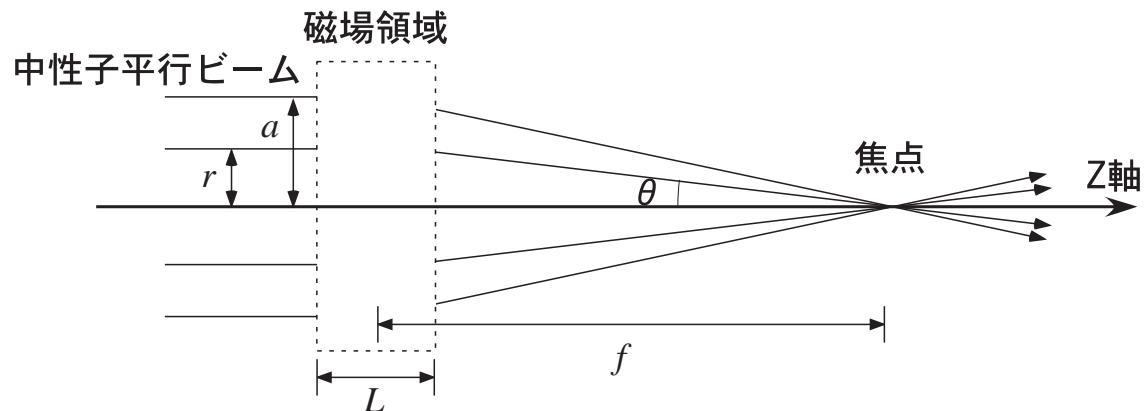


図1

(次ページに続く)

- (1) 中性子の質量 M をエネルギー換算して運動エネルギー K との比を概算せよ.
- (2) 非相対論的運動学による取り扱いのもとで, 中性子の運動量の大きさ p を M と K を用いて表せ.
- (3) 大きさ $B(r)$ の磁束密度により, 中性子は磁場領域で r に依存したポテンシャル $W(r)$ を感じる. ここで α を定数として $W(r) = \alpha B(r)$ の関係がある. このポテンシャルのために生じる運動量変化は Z 軸に対して垂直方向である. 中性子が磁場領域内で受ける力の大きさ F を $M, K, L, \alpha, B(r)$ およびその微分量 $dB(r)/dr$ 等を用いて表し, さらに磁場による運動量変化の大きさ Δp を求めよ.
- (4) Z 軸から r だけ離れた位置を走る中性子が角度 θ だけ偏向して焦点に到達するとする. Z 軸に垂直な方向の運動量変化の大きさ Δp を M, K, r, f 等で表せ. ただし, Z 軸方向の運動量変化はないものとする.
- (5) (3) および (4) の結果を比較して, 磁束密度 $B(r)$ を K, L, f, r, α 等を用いて表せ.
- (6) $r = 5.0$ [mm] での磁束密度の大きさが $B(r) = 1.0$ [T] で与えられ, かつ $L = 1.0$ [m] のとき, 焦点距離 f を求めよ.

IV-1

以下の英文は, Steven Weinberg 著 “The First Three Minutes” の一節である. これを読んで以下の問いに答えよ.

By 1931 the evidence had greatly improved, and -----

----- Thus, (a) -----

(b) What does all this say -----

(c) The true age of the universe

(d) Sometimes

But then (e)
the ratio

(註)

Hubble : ハッブル (米国の天文学者) galaxies : 銀河 spectroscopist : 分光学者

Ursa Major : おおぐま座 cluster of galaxies : 銀河団

Palomar, Mt. Hamilton, Mt. Wilson : いずれも (当時) 最大級の望遠鏡があった天文台
Cosmological Principle : 宇宙原理

Cepheid period-luminosity relation : セファイド (変光星) の周期光度関係

- (a) 下線部 (a) に関するて、1931 年段階と 1936 年段階で、それぞれハッブル定数 (Hubble constant) はいくらと測定されたか、本文に即して日本語で答えよ。なお単位は km/s/million light years (km/s/100 万光年) とする。
- (b) 下線部 (b) を和訳せよ。
- (c) 下線部 (c) に関するて、true age (本当の宇宙年齢) が characteristic expansion time より短くなる理由を、characteristic expansion time の定義を明記した上で、本文に即して、日本語で簡潔に説明せよ。
- (d) 下線部 (d) を和訳せよ。
- (e) 下線部 (e) を和訳し、その内容を式に書け。必要に応じて、 d (距離) などの記号を定義してよい。

IV-2

以下は，湯川秀樹のノーベル賞の受賞理由に関する文章である．以下の (a) から (e) の日本語を英訳しなさい．

- (a) 長年にわたり，科学の重要な目的の 1 つは，観測される現象を基本的な粒子の性質によって説明することであった．
- (b) メソンは，湯川の核力に対する理論的な研究によって 1934 年にその存在が予言されるまで，全く知られていなかった．
- (c) ハイゼンベルクらの先行研究によって，原子核は陽子と，陽子と同じ質量で電荷を持たない別の粒子から構成されているということが知られていた．
- (d) 湯川は，力の到達距離とその力に対応した粒子の間に簡単な関係があることを発見した．
- (e) 湯川はまた，メソンが原子核の外側に現れるのかどうかという重要な問い合わせについても研究を行った．

(ヒント)

メソン: meson, 核力: nuclear force, 原子核: nucleus, 陽子: proton

ハイゼンベルク: Heisenberg, 到達距離: range

(このページは白紙である)

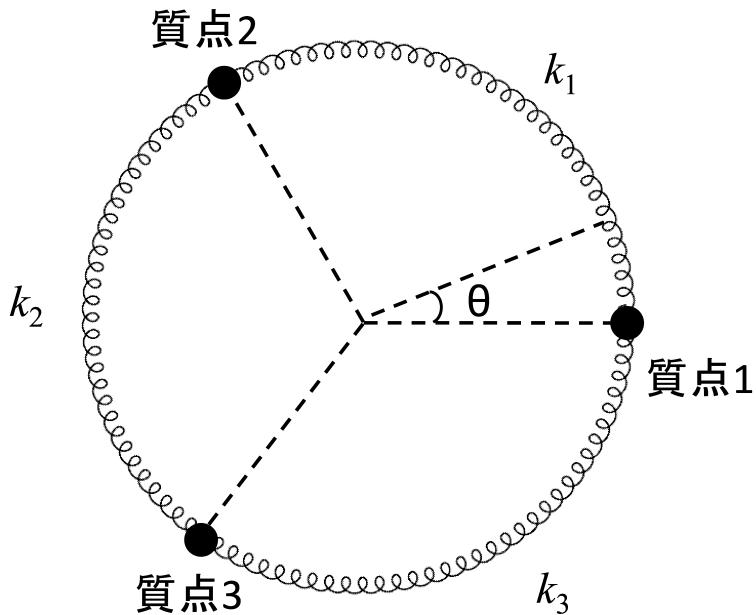
平成 23 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いてもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

I-1 (力学) (100点)

- (1) 質量 m の質点が 3つ直線状に配置しており、1番目と2番目、2番目と3番目の質点は等しいばね定数 k のばねで結ばれている。この系の1次元的な運動を考察する。重力の効果は無視できるとする。初期状態ではばねは自然長である。
- 3つの質点の初期位置からの変位を x_1, x_2, x_3 とする。この時の系のラグランジアンを求めよ。
 - 基準振動を考察する。ラグランジュ方程式を解くことによって振動数 Ω を求め、求まったモードの対称性について図を使って説明せよ。
 - さらに、真中の質点が原点を中心とするばね定数 k_A の調和振動ポテンシャルのもとにあるとする。この場合の基準振動の振動数を考察せよ。また基準振動の個数について (b) との相違とその理由について述べよ。
- (2) 次に、図のように質量 m の質点が円状に配置しており、これらはばね定数 k_1, k_2, k_3 の3つのばねで結ばれている。3つの質点は常に円上にあるものとし、復元力も円に沿って作用する。重力の効果は無視できるとする。円の半径を a とし、3つの質点は初期状態では等しい間隔（円の中心から $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ 方向）におかれており、ばねは自然長であるとする。



(次ページに続く)

- (a) まず $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合を考える. 3つの質点に角度の変位 (質点 1, 2, 3 それに $\theta_1, \theta_2, \theta_3$) を与えた場合のラグランジアンを求めよ. ただし変位角度は微小であるとする.
- (b) この場合の基準振動の振動数 Ω と 3つの質点の振動の振幅に課せられる条件を求めよ. さらに, (1) の (b) で求めた「直線状の場合の基準振動の振動数とモードの対称性の関係」が, 今の円状の場合にはどう変化するかについて簡単に述べよ.
- (c) バネ定数 k_3 が k_A に変化した場合 (残りは k) の基準振動の振動数を求めよ.

I-2 (電磁気学) (100 点)

電気抵抗が 0 である超伝導体では、散乱されない電子が電気伝導を担っていると考えることができる。超伝導体の外部に磁場があるとき、超伝導体内部への磁場侵入を考察する。設問に出てくる定数 n , $-e$, m は電子の数密度、電荷および質量である。超伝導体内部も誘電率、透磁率は真空中と同じで、それぞれ ϵ_0 , μ_0 とする。すなわち超伝導体の反磁性効果は、超伝導体の電流によって生じる磁場への寄与として扱う。

- (1) 電子が全く散乱を受けないとすると電流密度 J は、電場 E に対して次式が成り立つことを示せ、

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}. \quad (\text{A})$$

また常伝導状態の電流密度 J_N と電場との関係式は、この式と大きく異なる。異なる理由を簡潔に述べよ。

- (2) 前問の (A) 式とマックスウェル方程式から、 J と磁束密度 B に関する次の式が導かることを示せ、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{rot} \mathbf{J} + \frac{ne^2}{m} \mathbf{B} \right) = 0. \quad (\text{B})$$

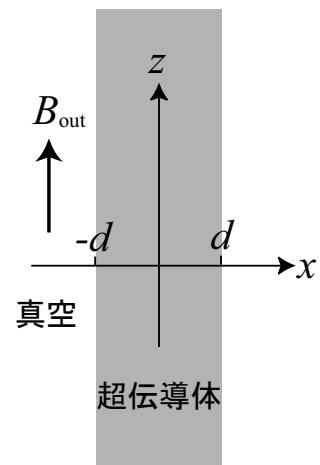
- (3) 前問の (B) 式を積分し、マックスウェル方程式を使い、定常状態になるとして次の式を導き、 λ^2 の表式を求めよ、

$$\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0. \quad (\text{C})$$

ただし、 \mathbf{B}_0 は時間に依存しないベクトルである。

- (4) 超伝導体の表面から深く入った内部では、磁場も磁束密度も 0 である。これがマイスナー効果である。超伝導体のあらゆるところで $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$ とすることにより、(C) 式でマイスナー効果を説明できる。図のように、 $-d \leq x \leq d$ に板状の超伝導体があり、 y, z 方向に十分遠方まで広がっている。 y, z に依存しない z 方向の外部の磁束密度 \mathbf{B}_{out} が超伝導体表面にあるとき、(C) 式を解き、超伝導体内部の磁束密度分布を求めよ。また $d \gg \lambda$ であるとき、磁束密度は超伝導体表面から λ 程度しか侵入できないことを示せ。
- (5) 前問で得られた磁束密度を用いて、超伝導体内部を流れる電流密度を $d \gg \lambda$ の場合について計算せよ。結果を電流の方向や x 依存性が分かるように図示せよ。

(次ページに続く)



I-3 (量子力学) (100 点)

一次元線分上で運動する 2 粒子の問題を量子力学的に考える。2 粒子は δ 関数型の相互作用を持つと仮定しよう。2 粒子の質量はともに $1/2$ であり、それらの座標を x_1, x_2 とするとき、ハミルトニアンは無次元化した表示 ($\hbar = 1$) で、

$$H = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + 2c\delta(x_1 - x_2) \quad (\text{A})$$

で与えられる。ただし、 c は実定数である。

- (1) まず、波動関数の微係数に関する条件を導く。相互作用がデルタ関数型なので、微係数は $x_1 = x_2$ で不連続になる。その結果、波動関数の微係数に関する不連続性を表す式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi \Big|_{x_1=x_2+0} - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi \Big|_{x_1=x_2-0} = 2c\psi \Big|_{x_1=x_2} \quad (\text{B})$$

となる。

- (a) 上式を求めるため、まず定常状態 $\psi(x_1, x_2)$ に関するシュレディンガー方程式を、新しい基準座標 $s = x_1 + x_2$ と $r = x_1 - x_2$ で書き直せ。
 (b) 相対座標 r に関して $r = 0$ の近傍で積分することで、微係数に関する条件式を求めよ。座標 (s, r) を元の座標 (x_1, x_2) に戻すことで、(B) 式を導出せよ。
 (2) 計算の準備が整ったので、2 粒子の固有関数を求めよう。互いに粒子が離れている場合には相互作用が働かないで、波動関数は平面波で与えられる。相互作用による散乱の効果を取り入れるため、2 粒子の座標を領域 I ($x_1 < x_2$) と領域 II ($x_1 > x_2$) に分けて波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ を次のように定義する。

$$\text{領域 I } (x_1 < x_2) : \quad \psi(x_1, x_2) = A_1 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_2 e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)},$$

$$\text{領域 II } (x_1 > x_2) : \quad \psi(x_1, x_2) = B_1 e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)} + B_2 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

ここで、4 つの係数 A_1, A_2, B_1, B_2 と、2 つの独立な運動量 $k_1 \neq k_2$ を導入した。

- (a) まず、2 粒子がボソンである場合を考えよう。波動関数の対称性、(B) 式などを用いて係数 A_1, A_2, B_1, B_2 の間の関係式を求めよ。ただし、波動関数を規格化する必要はない。

(次ページに続く)

- (b) さて、エネルギー固有値を求めるために周期境界条件を課す。長さ L での周期境界条件は、 $\psi(x_i, x_j) = \psi(x_i + L, x_j)$ で与えられる。実際に x_1 あるいは x_2 を L だけ移動させると、粒子が交換するときに散乱の影響ができる。この散乱の影響は、係数間の関係に自動的に繰りこまれている。ボソンの場合、周期境界条件の式として次式が得られることを示せ。

$$\exp(ik_2L) = \frac{k_2 - k_1 + ic}{k_2 - k_1 - ic}, \quad \exp(ik_1L) = \frac{k_1 - k_2 + ic}{k_1 - k_2 - ic}. \quad (\text{C})$$

- (c) 2 粒子がフェルミオンである場合はどのようになるか。係数の間の関係式と、周期境界条件の式を求めよ。

- (3) 上記の (C) 式を強い斥力の極限 ($c \rightarrow \infty$) で解いて、フェルミオンの場合と比較してみよう。

- (a) この極限では、ボソンは同じ位置に来ることができなくなる。これはハードコアの極限と呼ばれる。この場合の解 (k_1, k_2) を求めよ。また、 (k_1, k_2) のセットの中で最低エネルギーを与えるものを求めよ。以上の結果を用いて、2 ボソン系の最低エネルギー（基底エネルギー） $E_B = k_1^2 + k_2^2$ を求めよ。

- (b) フェルミオンの場合の解 (k_1, k_2) を求めよ。また、この中で最低エネルギーを与えるものを求めよ。基底エネルギー E_F を計算し、これを上記のボソンの結果と比較することで、 $E_B < E_F$ となることを示せ。

- (4) 次に、引力相互作用 ($c < 0$) を持つ 2 ボソンを考える。十分大きな系 $L \rightarrow \infty$ に対して、運動量 k_1, k_2 に対する複素解（束縛解）を求めよ。この結果を利用し、束縛状態に対するエネルギーと波動関数を求めよ。ただし、波動関数を規格化する必要はない（ヒント： k が複素数の場合、 $\exp(ikL)$ は $L \rightarrow \infty$ で発散するか、あるいはゼロに収束することを用いよ）。

平成 23 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1 , II-2 , II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ . 裏面を用いててもよい .
- (2) 各解答用紙は横長に使用して , 解答用紙表側の左上部 (線より上) に問題番号 , 受験番号 , 氏名を記入せよ . 解答用紙の他の部分に受験番号 , 氏名を書いてはいけない . この線より上の欄には表 , 裏とも解答を書いてはいけない .
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること . なお , 問題冊子および下書き用紙は回収しない .
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである .

II-1 (電磁気学) (100 点)

一様な磁場分布を得るために、図のようなコイルを考える。半径 a 、巻き数 N_1 のコイルと、半径 $2a$ 、巻き数 N_2 のコイルとが、同一平面上で中心を一致させて巻かれている。コイルの厚みは無視できるものとして、以下の設問に答えよ。ただし真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$ である。また、コイルの中心に円筒座標 $r = (r, \varphi, z)$ の原点 O をとり、コイル面に対して垂直方向に z 軸をとる。

- (1) 内側のコイルだけに図の向きに電流 I を流したときの、軸上の位置 $r = (0, 0, z)$ での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、ビオ・サバールの法則 (A) を用いて求めよ。ここで R は電流素片 Idr' から観測点 r までの距離、 \hat{e}_R はその方向への単位ベクトルである。

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 N_1}{4\pi} \oint (Idr') \times \frac{\hat{e}_R}{R^2}. \quad (\text{A})$$

以下の設問 (2) - (7) では、図にあるように二つのコイルに互いに逆向きに電流 I を流した場合について答えよ。

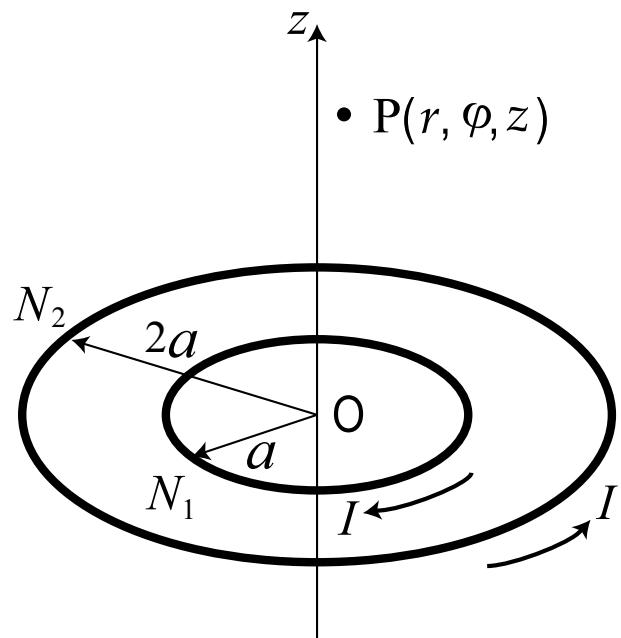
- (2) 軸上での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を求めよ。
- (3) 軸上でのコイル中心付近 ($|z/a| \ll 1$) の磁束密度をなるべく一様にするためには、 $N_2 = 8N_1$ にすればよいことを導け。

次に設問 (4) - (7) では、(3) の巻き数比のコイルについて答えよ。

- (4) 軸上での正確な磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、 N_2 を使わずに表せ。
- (5) 軸上かつ中心付近 ($|z/a| \ll 1$) での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、 z/a の 4 次の項までの展開式で表せ。
- (6) $a = 1.0 \text{ cm}$, $N_1 = 10$ のとき、コイルの中心に 1.0 ガウス = $1.0 \times 10^{-4} \text{ T}$ を発生させるための電流 I を求めよ。またコイル中心の軸上に置いた、全長 $l = 2.0 \text{ mm}$ の細い棒状試料にかかる磁場の強さは、中心と両端で何%異なるか求めよ。
- (7) 任意の z について、軸からわずかに離れた位置 $P(r/a \ll 1)$ での軸に垂直方向の磁束密度 $B_r(r, \varphi, z)$ を求めよ。ただし $B_z(r, 0, z) \cong B_z(0, 0, z)$ と近似できるものとし、また r/a の 2 次以上の項は無視してよい。なお円筒座標系でのベクトルの発散は以下で与えられる：

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (\text{B})$$

(次ページに続く)



II-2 (物理数学) (100 点)

以下の設問に答えよ .

- (1) 以下の微分方程式の特解と一般解を求めよ .

$$y = xy' + (y')^2. \quad (\text{A})$$

ただし $y' \equiv dy/dx$ である (ヒント : 両辺を x で微分してみよ.) また , 一般解の幾つかと特解とを (x, y) 平面で図示し , それらの幾何学的関係を述べよ .

- (2) 微分方程式

$$y' = e^{-2xy} \quad (\text{B})$$

の解に

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a \quad (> 0) \quad (\text{C})$$

を満たすものがある . この解の $x \rightarrow +\infty$ での近似展開の式 $y = a + \dots$ において , a の次の 2 項目と 3 項目を求めよ .

- (3) 以下の積分を実行して値を求めよ .

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx. \quad (\text{D})$$

- (4) 領域 $\theta \in \{-\pi, \pi\}$ で定義された以下の関数のフーリエ展開を求めよ .

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{for } -\pi < \theta < 0, \\ 0 & \text{for } \theta = 0, \\ +1 & \text{for } 0 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (\text{E})$$

- (5) あるコンビニの昼の T 分間に N 人の客が来店するという . その間 , 客の来店はランダムであるとして , ある一分間に n 人の客が来る確率 P_n を求めよ . また , $T \gg 1$, $N \gg n$ の時には , その確率がポアッソン分布で近似されることを示せ .

(このページは白紙である)

II-3 (統計力学) (100 点)

以下の設問に答えよ .

- (1) 温度 T で平衡状態にある理想気体を閉じ込めた容器に円形の小孔を開けた . 小孔の直径も奥行きも気体分子の平均自由行程より十分短いとする . また , 簡単のため , 容器の外は真空であるとする . そのとき単位時間 , 単位面積あたりに小孔から出て行く分子数 R が気体の種類によらず

$$R = \frac{1}{4}n\langle v \rangle \quad (\text{A})$$

と書けることを示せ . ただし , $n, \langle v \rangle$ はそれぞれ気体の数密度 , 平均速さである . また速度分布は等方的であり , 速さ v の分布関数 $f(v)$ は $4\pi \int_0^\infty dv v^2 f(v) = n$ を満たすものとする . なお , 一般に小孔のある壁に垂直な成分と平行な成分の独立性は保障されないと注意すべきである .

- (2) マクスウェル分布に従う質量 m の古典理想気体を容器に入れたときに , (A) 式に基き R を数密度 n と温度 T の関数として表せ .
- (3) 同種の理想気体を入れた 2 つの容器を小孔で繋ぐことを考える . それぞれの容器の小孔が開いていない壁は透熱壁であり , 熱浴と接触して容器内を一定温度に保つことができるとする . 厳密には小孔から流入する気体によって小孔近傍の気体は平衡状態でなくなるが , その影響は小さいとして無視し , 小孔で繋いだ 2 つの容器内の気体は , それぞれ平衡状態を保っているものとする .
- (a) ここで温度 T_H の古典理想気体を入れた容器と , 温度 T_L の古典理想気体を入れた容器を小孔で繋いだとき平衡条件が
- $$\frac{P_H}{\sqrt{T_H}} = \frac{P_L}{\sqrt{T_L}} \quad (\text{B})$$
- となることを示せ . ただし , P_H, P_L はそれぞれ温度 T_H, T_L に保った容器の圧力である (このように分子間衝突が無視できる状態で平衡化した稀薄気体はクヌーセン領域にあると言われる .)
- (b) 1 粒子当たりのエネルギー ϵ が $\epsilon = cp$ で与えられる光子気体の場合に , (A) 式の R が温度のみの関数であることを示し , その値を求めよ . ただし , c, p はそれぞれ光速 , 運動量の大きさである . また光子気体は化学ポテンシャルがゼロのボース分布に従うことと $\zeta(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^x$ を用いて良い (このことから光子気体の小孔を通した接続では左右の容器の温度が等しくない限り平衡にならず , $T_H \neq T_L$ の条件下では熱伝導が存在する非平衡定常状態になる .)

(このページは白紙である)

平成 23 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 15 ページまである。
-

III-1 力学（潮汐力）

III-2 量子統計（一次元調和振動子）

III-3 量子力学（ポテンシャル問題）

III-4 物理数学（常微分方程式）

III-5 実験（放射線計測）

III-6 実験（真空）

III-7 宇宙（コンパクト天体）

III-1 (潮汐力) (100 点)

潮の満ち引きが起こる原因となる潮汐力について考察する。以下、地球と月のみを考え、それぞれの質量を M, m 、中心間距離を D 、地球の半径を R 、共通重心と地球中心間の距離を d 、月の公転の角速度を ω とする(図1)。ただし、地球の自転が及ぼす影響については考えず、公転軌道の離心率は0であり、万有引力定数は G とする。



図 1

- (1) 以下の文章の空欄を埋めよ。

ある瞬間ににおける地球上の月への最近点と最遠点をそれぞれ点A、点Bとする(図2)。地球の自転を考えないとき、地球上の全ての点はある円周に沿って平行移動するよう

に運動する。すなわち点A、点Bを含む地球上の全ての点は半径 (ア)、角速度

(イ)で相互の位置関係や向きを保つた状態で運動する。このとき、地球中心位置での遠心力と月との引力の釣り合いから G, m, D, d, ω の関係を求めると (ウ) となる。また、地球上の月への最近点と最遠点にある単位質量の質点に対する月の引力と遠心力の差をそれぞれ G, m, R, D で表すと (エ) となり、これを (R/D) の1次まで近似すると (オ) となる。

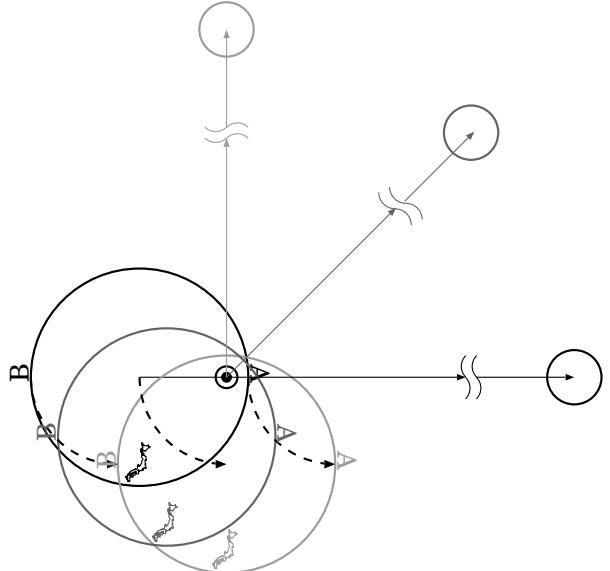


図 2

(次ページに続く)

- (2) 次に、地球中心を原点とし、月の位置ベクトルを D 、地球表面付近のある点の位置ベクトルを R 、 R と D のなす角を θ とする(図3)。位置 R にある単位質量の質点に対する月の引力ポテンシャル $U(R)$ を (R/D) の2次の項までで近似し、その各項が、公転運動や潮汐力とどのように関係しているか説明せよ。

- (3) 前問で求めた $U(R)$ に含まれる潮汐力に関する部分を用いて、潮汐力の R 方向の成分 F_R と θ 方向の成分 F_θ (図3) を求めよ。

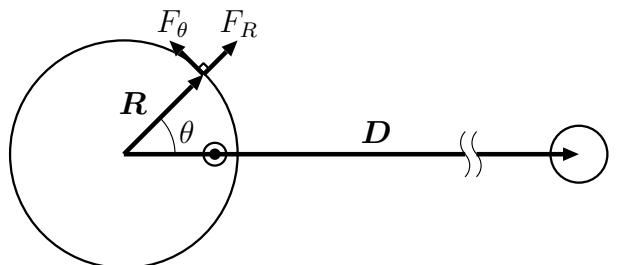


図3

- (4) 公転軸方向より見た海面の形状を特徴がわかるように図示し、 $\theta = n\pi/6$ の地球表面上の各点における潮汐力ベクトルの概要を図示せよ(誇張のために海面が地表面より内側に描かれていても構わない)。必要であれば図4を解答用紙に書き写して使用しても良い。

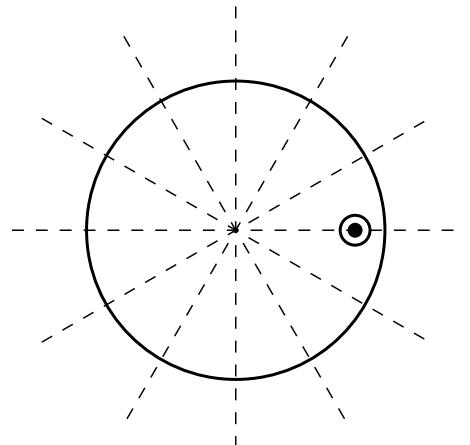


図4

III-2 (量子統計：一次元調和振動子) (100 点)

調和ポテンシャル中の古典ならびに量子系の統計力学的性質を考察しよう。

- (1) まず、 N 個の古典的な一次元調和振動子から成る系を考える。系のハミルトニアンは位置座標 x_i 、運動量 p_i を用いて

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{k}{2} x_i^2 \right) \quad (\text{A})$$

で与えられる。

(a) 分配関数を求めよ。

(b) エネルギーの期待値を計算し、その結果を用いて比熱を求めよ。

- (2) 古典力学と異なり、量子力学的な調和振動子では、エネルギーは次のような離散的な値をとる：

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B})$$

ただし、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である。

- (a) N 個の独立な調和振動子からなる量子系に関する分配関数を求めよ。
- (b) エネルギーの期待値および比熱を求めよ。比熱の温度依存性の概略図を描け。
- (c) 量子系に対する比熱の表式を低温極限ならびに高温極限で評価し、古典論と量子論の相違点について議論せよ。

- (3) 次に多電子が一次元の調和ポテンシャルに閉じ込められて運動する場合を考えよう。1 電子のエネルギー固有値は (B) 式で与えられる。一様な磁場 H がかけられており、磁場は電子のスピン内部自由度 σ と結合し、ゼーマンエネルギー E_σ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) を与える：

$$E_\uparrow = -\frac{1}{2}g\mu_B H, \quad E_\downarrow = \frac{1}{2}g\mu_B H. \quad (\text{C})$$

ただし、 g はランデの g 因子、 μ_B はボーア磁子である。

- (a) 系が熱浴、粒子浴と接触していると仮定し、電子系の大分配関数を求めよ。また、大分配関数よりスピン σ ($= \uparrow, \downarrow$) の電子数の期待値 N_σ の表式を導出せよ。化学ポテンシャルは μ とする。

(次ページに続く)

- (b) 調和ポテンシャルが弱くなると，エネルギー間隔 $\hbar\omega_0$ は小さくなる．ここでは，化学ポテンシャル μ を固定し， $\omega_0 \rightarrow 0$ の極限を考える．この極限では，エネルギー固有値は稠密に分布するので，量子数 n に関する離散的な和は近似的に積分に置き換えることができる． $k_B T \ll \mu$ を満たす低温領域での比熱を T の最低次まで求めよ．ここで， μ には温度依存性がないものとし，磁場は $g\mu_B H < 2\mu$ の範囲をとるものとする．

ただし， $\beta \rightarrow \infty$ で

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\infty dx g(x) \log[1 + \exp(-\beta(x - \mu))] \simeq \text{定数} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} g(\mu)$$

となることを用いてよい．

- (c) 次に絶対零度で有限磁場の場合を考えよう．ここでも $\omega_0 \rightarrow 0$ の極限を考え，量子数の和は積分に置き換えられるものとする．ここで，磁化

$$M = \frac{1}{2} g\mu_B (N_\uparrow - N_\downarrow)$$

の磁場依存性を計算せよ．ただし，磁場は $g\mu_B H < 2\mu$ の範囲をとるものとする．

III-3 (量子力学：ポテンシャル問題) (100 点)

1 次元空間に質量 m の粒子がある。この空間の座標を x として、この粒子に働くポテンシャルは

$$V(x) = g^2 x^4 \quad (g > 0) \quad (\text{A})$$

であるという。以下の設問に答えよ。

- (1) この粒子が量子力学に従うとして、その基底状態のエネルギーを E_0 とする。次元解析により、 E_0 が \hbar , m , g にどう依存するかを求めよ。
- (2) この粒子のエネルギー準位の近似値を、変分法を使って求めることを考える。変分法とは、あるパラメータを持つ波動関数 $\Psi(x)$ を用意し、そのエネルギー期待値をパラメータについて最小化することでエネルギー固有値の近似値を求める意味である。
 - (a) 任意の規格化可能な波動関数 $\Psi(x)$ を持つ状態は、必ず基底状態のエネルギー E_0 より大きいか等しいエネルギー期待値を持つことを示せ（したがって、上に述べた変分法によって、 E_0 の上限が求まる。）
 - (b) 波動関数

$$\Psi(x) = N e^{-bx^2} \quad (N > 0, b > 0) \quad (\text{B})$$
 が規格化されているための N の値と、そのエネルギー期待値を求めよ。
 - (c) 上の結果を用いて、変分法により E_0 の近似値を求めよ。
 - (d) 次に、同様にして第1励起状態のエネルギーの近似値を求めるためには、波動関数をどう選べばよい？理由を明示して答えよ。
- (3) 上で示したように、量子力学のエネルギー準位は g に依存していて、 g の値は物理的に重要な意味を持つ。しかし、この粒子が古典力学に従うときは、 g に対する依存性は非常に単純なものである。これはなぜかを説明せよ。（ヒント：作用、または運動方程式を書き出し、 $y = gx$ とスケール変換をしてみよ。）また、古典力学で重要ではない g が、量子力学ではなぜ重要な意味を持つかを説明せよ。

(このページは白紙である)

III-4 (物理数学 : 常微分方程式) (100 点)

(1) $\dot{y}(t) \equiv dy(t)/dt$, $\ddot{y}(t) \equiv d^2y(t)/dt^2$ として, 2 階の非齊次線形常微分方程式

$$\ddot{y}(t) + a(t)y(t) = r(t) \quad (\text{A})$$

の一般解を以下の手順に従って求めてみよう .

(a) 齊次方程式

$$\ddot{y}(t) + a(t)y(t) = 0$$

の独立な一般解を $y_1(t)$, $y_2(t)$ としたとき

$$Y(t) \equiv c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

が条件

$$\dot{c}_1(t)y_1(t) + \dot{c}_2(t)y_2(t) = 0, \quad \dot{c}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{y}_2(t) = r(t)$$

の下で (A) 式の解になっていることを示せ .

(b) $c_1(t)$, $c_2(t)$ の連立微分方程式を解くことで, その解が

$$c_1(t) = c_1(0) - \frac{1}{W} \int_0^t r(s)y_2(s)ds, \quad c_2(t) = c_2(0) + \frac{1}{W} \int_0^t r(s)y_1(s)ds \quad (\text{B})$$

となることを示せ . このとき W が時間によらない定数であり

$$W = y_1(0)\dot{y}_2(0) - \dot{y}_1(0)y_2(0)$$

となることを示せ .

(2) (1) で解いた 2 階の非齊次線形常微分方程式を, 理想化された溶媒中の粒子の問題に適用してみよう . 質量 M , 位置 $X(t)$ の溶質粒子が質量 m , 位置 $\{x_j(t)\}$ の N 個の溶媒粒子 $j = (1, 2, \dots, N)$ からの影響を受けて運動方程式

$$M\ddot{X}(t) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \left\{ x_j(t) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(t) \right\}, \quad (\text{C})$$

$$m\ddot{x}_j(t) = -m\omega_j^2 x_j(t) + \gamma_j X(t) \quad (\text{D})$$

に従うとする . ただし, ω_j , γ_j はそれぞれ定数であるとする . このモデルでは溶媒粒子同士の相互作用は無視されている .

以下の設問に答えよ .

(次ページに続く)

- (a) (D) 式が (A) 式と同じ形の微分方程式であることを利用して , (D) 式の解を求めよ . その解を書き直すと

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(t) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} \int_0^t \cos[\omega_j(t-s)] \frac{dX(s)}{ds} ds \\ &\quad + \left\{ x_j(0) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(0) \right\} \cos(\omega_j t) + \dot{x}_j(0) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} \end{aligned} \quad (\text{E})$$

となることを示せ . ただし , $X(0)$, $x_j(0)$, $\dot{x}_j(0)$ はそれぞれ $X(t)$, $x_j(t)$, $\dot{x}_j(t)$ の初期時刻での値である .

- (b) (E) 式を利用して , (C) 式が

$$M\ddot{X}(t) = - \int_0^t \eta(t-s) \frac{dX(s)}{ds} ds + F(t) \quad (\text{F})$$

と書けることを示せ . このとき $\eta(t)$, $F(t)$ を求めよ .

- (c) 求めた方程式 (F) は一階微分を含むので一見すると時間反転対称性を破っているように見える . しかし , 元の方程式は時間反転対称性を保っているのでそれは見かけに過ぎない . 方程式 (F) が時間反転対称性を保っていることを示せ . また , その方程式が時間反転対称性を破るためにには , どのような操作が必要であるかを考察せよ .

III-5 (実験：放射線計測) (100 点)

- (1) 図 1 のような中心部に半径 r_a の陽極があり、内径 r_c の陰極を持つ長さ ℓ の円筒電離箱に、 $-U$ の電圧が印加されている。管の内部は 1 気圧のキセノンガスで満たされ、10 keV 以上の X 線には 100% の感度がある。電子のドリフト速度 d_e とイオンのドリフト速度は d_i は、どちらも電場の強さに依らず一定であり $d_e \gg d_i$ である。またキセノンガスの誘電率を ϵ 、W 値（二次電子を放出するのに必要なエネルギー）を 22 eV とする。電子の電荷を $-e$ とし、SI 単位系を用いよ。
- (a) 電離箱内の電場の大きさ E を円筒中心からの距離 r の関数として求めよ。また電気容量 C を求めよ。
 - (b) 今、20 keV の X 線光子 1 個が距離 r の位置に入射し、電離電子を生成した。生成された電離電子の数 N を求めよ。また電離電子がすべて陽極で計測された場合のエネルギー分解能 $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ (ε はエネルギー) を、統計揺らぎのみを考慮して求めよ。
 - (c) 抵抗 R が無限大のとき、X 線が入射してから充分時間が経過した後の陽極電圧 ΔU を、二次電子による寄与 ΔU^e とイオンによる寄与 ΔU^i に分けて、電気容量 C と電離電子数 N を用いて求めよ。ただし、 ΔU^e 、 ΔU^i は U に比べて十分小さい。
 - (d) $r_a \ll r_c$ の場合、 ΔU は X 線の入射位置にあまり関係なく電子の寄与 ΔU^e が大半となることを示せ。 $\frac{r_a}{r_c} = \frac{1}{1000}$ として考えてみよ。
 - (e) 抵抗 R が有限の値のとき、この電離箱で放射線のパルス計測が行えるように、時定数を設定したい。二次電子成分のみをパルスとして取り出したいときの R の条件を、電気容量 C を用いて求めよ。またそのときの ΔU の時間変化をグラフに表せ。
- (2) 電離箱を用いて X 線放射線源の強度を求める。この放射線源からは単色の X 線が放射され、電離箱はこの X 線に対して 100% の感度があるものとする。
- (a) 図 2 に示すように、点状の X 線放射線源と電離箱の間に、放射線源から見込み角の直径 2 度の円窓を開けた鉛板を置く。鉛板は X 線を完全に吸収する。放射線源から一様等方に X 線が放射されるとき、この電離箱で計測される X 線の全放射線量に対する割合を求めよ。
 - (b) 今、1 分間の計測を 3 回行い、その電離箱計測数が表のようになった。また測定に含まれる宇宙線などのバックグラウンド (BG) を測定するために、放射線源を取り除いて同じ時間計測を行った。各測定における X 線計測数 A , B , C およびその分散 D , E , F を求めよ。

(次ページに続く)

- (c) この3回の計測によるX線計測数の重み平均 μ とその分散 σ_{μ}^2 を求めよ. またX線放射線源の最も確からしい放射線強度を求めよ.

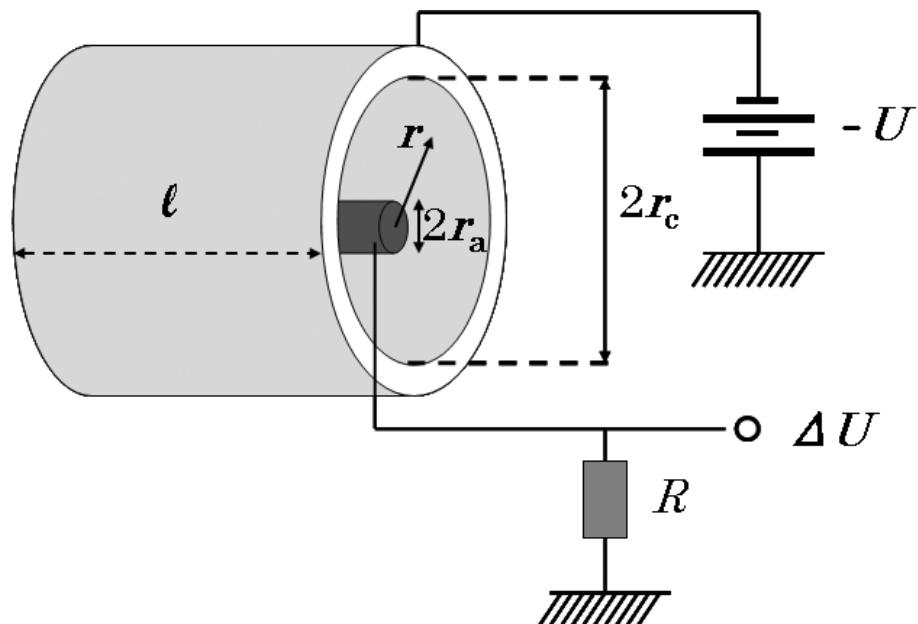


図 1

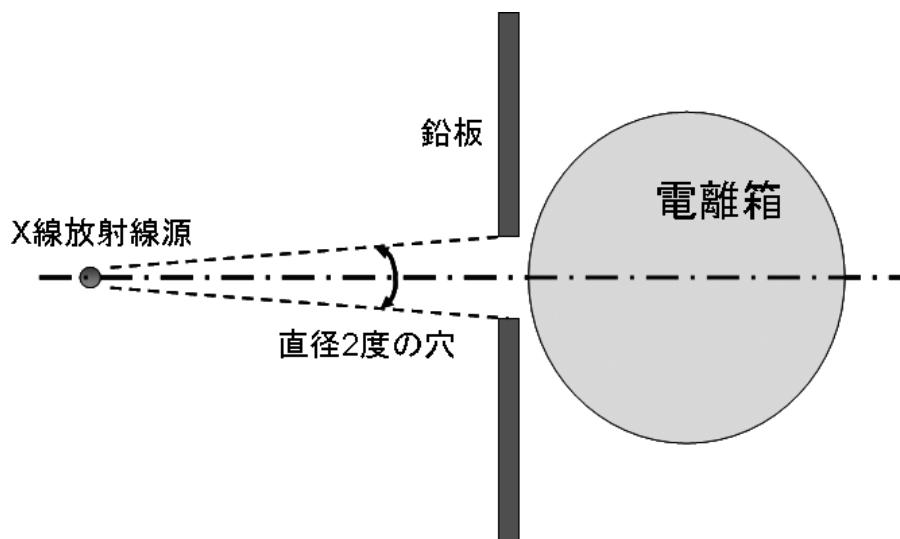


図 2

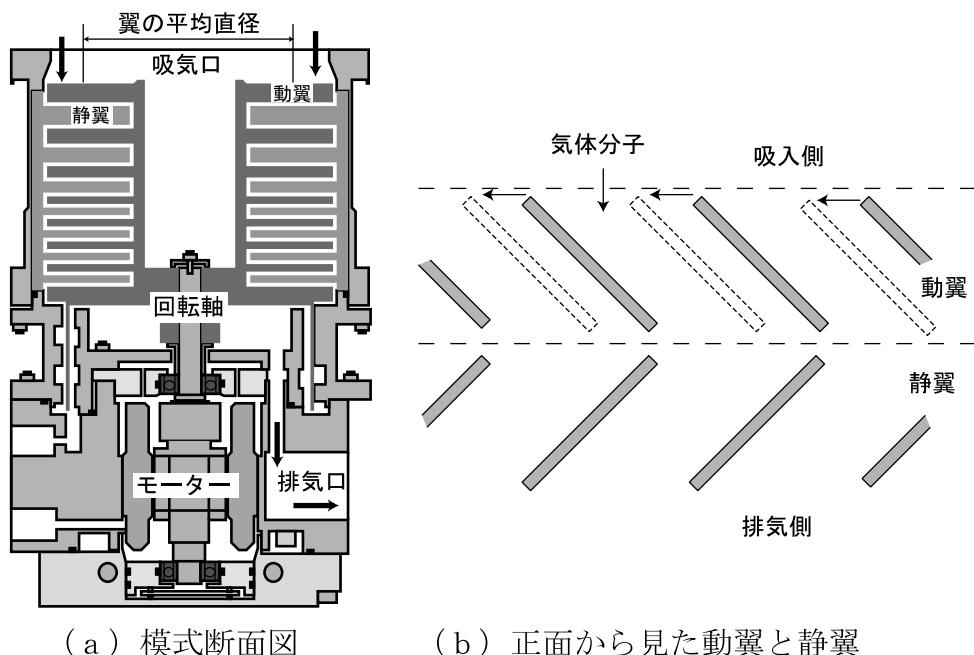
表

計測番号	電離箱計測数	BG 計測数	X 線計測数	X 線計測数の分散
1	14	3	(A)	(D)
2	15	5	(B)	(E)
3	11	2	(C)	(F)

III-6 (実験：真空) (100点)

ターボ分子ポンプを用いて真空槽を圧力 10^{-5} Pa($=\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$) 以下の超高真空に排気するシステムを設計する。ターボ分子ポンプとは、下図に示したように、動翼（高速で回転する円筒の周囲に取り付け、軸に対して傾いた幅の狭い多数の羽）と静翼（動翼に対して逆に傾けて固定した羽）を交互に配置して取り付けて、吸気側から排気側へ気体を送り出すポンプである。以下の設問に答えよ。なお対象とする気体は 20 °C の空気とし、数値の解答は有効数字 1 桁でよい。

- (1) 空気分子の平均速度 \bar{v} を求めよ。ただし気体定数は $8.3 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ 、空気の分子量は 29 である。
- (2) 気体の圧力が高いときと低いときでは、流体としての性質が大きく異なる。圧力が高いとき、分子はお互いに頻繁に衝突し、連続流体のように振る舞う（粘性流）。圧力が低くなると分子の平均自由行程 l_m が大きくなり、パイプの直径 D などに対して同程度となり、連続流体とは見なせなくなる（分子流）。正確には $l_m/D \geq 0.3$ を分子流領域と呼ぶ。平均自由行程は、 $l_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi n d^2}}$ [m] の式を使って計算できる。 d は分子の直径で、 n は分子数密度である。分子流領域に入る圧力を内径 20 cm のパイプについて求めよ。空気分子の直径 d は 3.7×10^{-10} m で、ボルツマン定数は $1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ である。
- (3) ターボ分子ポンプの超高真空における動作の仕組みを推察して記し、翼の平均直径が 20 cm とすると、どの程度の回転速度が必要か目安になる値を求めよ。



(次ページに続く)

- (4) ある断面を単位時間に通過する気体の量，すなわち流量 Q は，単位時間にその断面を通過する気体の体積とその点での気体の圧力との積である。パイプの流量は $Q = C \Delta P$ と表すことができる。ここで ΔP はパイプの両端の圧力差， C はコンダクタンスである。パイプの分子流領域におけるコンダクタンスは， $C = \alpha \frac{D^3}{L} [m^3 \cdot s^{-1}]$ で近似できる。係数 α は $120 m \cdot s^{-1}$ ， L はパイプの長さ， D はパイプの内径である。内径 $20 cm$ ，長さ $50 cm$ のパイプ A の，分子流領域のコンダクタンス C_A を計算せよ。
- (5) ターボ分子ポンプを使うと， $10^{-8} Pa$ の超高真空まで一定の排気速度で排気できるが，排気側の圧力が $10 Pa$ 程度に高くなると機能しなくなる。一方油回転ポンプは大気圧から一定の排気速度で排気できるが， $0.1 Pa$ 以下になると急速に排気速度が低下する。排気速度 $S_T = 1.6 m^3 \cdot s^{-1}$ のターボ分子ポンプと $S_R = 600 l \cdot min^{-1}$ の油回転ポンプ，さらにパイプ A，B も装置間を接続するために使って真空槽を超高真空に排気するシステムを考えて図示せよ。なおパイプ B は内径 $30 mm$ ，長さ $1.3 m$ で，パイプ内の平均圧力 $10 Pa$ においてコンダクタンスは $0.01 m^3 \cdot s^{-1}$ である。
- (6) コンダクタンス C_X および C_Y である 2 本のパイプを直列接続する場合の合成コンダクタンス C_S と，並列接続する場合の合成コンダクタンス C_P を， C_X および C_Y を使って表せ。
- (7) パイプを接続することによりポンプの排気速度は変化する。この場合，パイプのコンダクタンスを含めてポンプの有効排気速度を定めることができる。コンダクタンスと排気速度が同じ単位であることに注目して，問(5)のターボ分子ポンプの有効排気速度 S_T^e と $10 Pa$ における油回転ポンプの有効排気速度 S_R^e を求めよ。
- (8) 真空槽表面に小さな穴があり，その穴から $Q_L = 5 \times 10^{-6} Pa \cdot m^3 \cdot s^{-1}$ で空気が流入しているとする。問(5)の排気システムを使うと真空槽内の到達圧力 P_{eq} がいくらになるか求めよ。

III-7 (宇宙 : コンパクト天体) (100 点)

次の文章を読んで、以下の設問に答えよ。

一般に星の大きさは、自己重力と圧力勾配力との釣り合い(静水圧平衡)により決まる。星は球対称とし、星の半径、質量、中心圧力をそれぞれ R , M , P とすると、それらを用いて静水圧平衡はおおよそ

$$\frac{GM}{R^2} \sim \boxed{\text{(ア)}} \quad (\text{A})$$

で与えられる。(簡単のため、微分を割り算で、また星の中心密度を星の平均密度で、それぞれ置き換えなさい。)

これをもとに電子の縮退圧で支えられている星、白色矮星の質量と半径との間の関係を求めよう。化学組成は一様で温度はゼロ、質量分布は等方とし、回転は考えない。まず電子の位相空間密度を運動量空間で積分することにより、電子の数密度 n_e を求めると、それは p_F (フェルミ運動量) を用いて、

$$n_e = \boxed{\text{(イ)}} \quad (\text{B})$$

とかける(ただしプランク定数を \hbar とする)。逆に、Fermi 運動量を電子の数密度 n_e で表すと

$$p_F = \boxed{\text{(ウ)}} \quad (\text{C})$$

となる。縮退電子ガスの圧力 P を n_e の関数として表せば、非相対論的な極限では、電子質量を m_e として

$$P = \boxed{\text{(エ)}}, \quad (\text{D})$$

超相対論的な極限では、光速を c として

$$P = \boxed{\text{(オ)}} \quad (\text{E})$$

となる。(ヒント: 圧力は速度 v と運動量 p の積の $1/3$ を運動量空間で積分して求められる。)

すなわち、(A) 式から、非相対論的な白色矮星の質量と半径との間の関係は、核子一個あたりの平均的な電子数を Z/A 、核子質量を m_p として、

$$R \sim \boxed{\text{(カ)}} \quad (\text{F})$$

で与えられる。星の半径は質量の $-1/3$ 乗に比例することがわかる。

相対論的な白色矮星の場合、質量は一意に決まり、それは核子一個あたりの電子数を $Z/A = 1/2$ として

$$M \sim \frac{3\sqrt{\pi}}{64} \left(\frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p \quad (\text{G})$$

となる。これは、チャンドラセカール質量に相当する質量である。

(次ページに続く)

- (1) 上の文章中の空欄 (ア) ~ (カ) を埋めよ。なお、導出の過程も示せ。
- (2) 主系列星の半径はほぼ質量に比例することを示せ。ただし、主系列星はガス圧で支えられており、中心温度は質量によらないと仮定してよい。また、白色矮星と主系列星とで、質量と半径の間の関係が異なる理由を簡潔に説明せよ。
- (3) (G) 式を導出し、相対論的な白色矮星の質量が、半径によらず一意に決まることを示せ。
- (4) 中性子星は中性子の縮退圧で支えられた星である。中性子星は中性子のみで構成されると仮定することにより、(F) 式にならって、中性子星の半径と質量の間の関係を数式で表せ。また、中性子星の半径は同じ質量の白色矮星の半径のおよそ何分の一になるか、答えよ。
- (5) あるコンパクト天体が白色矮星か中性子星のどちらかであるとする。両者を区別するには、どのような観測で何を求めればよいか、記せ。ただし、コンパクト天体までの距離 D は分かっており、スペクトルは単一温度 $T(\neq 0)$ の黒体放射で表せ、星表面全体が一様に光っているとする。

平成 23 年度 京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
大学院入試問題 注釈集

問題 I-1(力学)

基本的なバネの振動の問題である。3つの直線状や円状に並んだ質点がどのような基準振動を持つか、系の対称性を考慮しつつ、基準振動の個数やその振動数を Lagrange 方程式から導く事を目的としている。この問題は特に専門的な知識を必要としておらず、力学の基本的理解度を測る事を目的としている。

問題 I-2(電磁気学)

超伝導を題材にした古典電磁気学の問題である。電磁気学の問題として解けるように設定しているが、超伝導の最も基本的な性質は完全電気伝導性ではなく完全反磁性(マイスナー効果)であり、古典電磁気学のみからは導出できない。マイスナー効果の式を得るために形式的に $B_0 = 0$ と置いたが、古典電磁気学の範囲でこの手続きに理論的な根拠を与えられない。問題文では説明しなかったが、「マイスナー効果はボーズ・AINシュタイン凝縮という量子現象なしには理解できない」ことを認識することは重要である。また(A)式の右辺はクーロン力項ではない電磁誘導に寄与する電場成分を含んでいるので、ローレンツ力項もそこには加わるはずであるが、電磁場が十分弱いと仮定し無視されている。

問題 I-3(量子力学)

δ 関数型ポテンシャルによる散乱は量子力学の基本問題である。今回の問題は、これを 2 粒子に拡張したものである。相対座標を使えば、散乱は通常の δ 関数ポテンシャル問題に帰着するので解くことができる。この問題のもう一つのポイントは、フェルミ粒子とボース粒子の違いである。粒子の入れ替えによって波動関数にマイナスがつくかどうかが、固有エネルギーに違いを生み出す。設問に従って丁寧に考えていけば自然に答が得られると思う。

問題 II-1(電磁気学)

前半は、ビオ・サバールの法則を適用して、一様な磁場分布を得るためのコイルの巻き数比を求める問題。後半は、コイルに流すべき電流値と試料にかかる磁場の均一度を算出する問題と、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ を利用して軸上からわずかに離れた位置の磁場を評価する問題である。電磁気の基本方程式は問題文に与えてあり、その適用力が問われた。また磁場の数値を算出する能力も問われた。展開式による近似計算の正確性が要求されたが、高得点者が比較的多かった。

問題 II-2(物理数学)

この問題では、物理の理解とさらなる探求に必要な基礎的な数学の知識を問うた。具体的には(1)において基本的な微分の知識、(2) では近似法の初步、(3) では複素平面での解析性と積分、(4)

では基礎的なフーリエ展開について短い設問を設けた。どれも、テーマとしては少し馴染みのないものもあるかも知れないが、基本的な微分積分の知識を元に考え得る範囲である。また(5)では初步的な確率の計算とその近似を問い合わせ、物理学実験等に必要な基礎的な確率論の知識を身につけているかどうかを見た。

問題 II-3 (統計力学)

小孔を通した理想気体の平衡状態を求める問題。一見直感に反する事であるが、小孔を通しての古典理想気体の平衡は異なった温度や圧力でも実現し得る。また(1)ではその効果が一般の場合でも実現可能なように速度分布の独立性が成り立たない場合での平衡条件を求めさせ、以下の設問が量子気体でも有効であるようにした。しかし(1)の一般的条件が受験生には難しかったようである。

問題 III-1 (潮汐力)

通常の力学ではあまり馴染みの無い潮汐力であるが、最近点と最遠点に関しては非常に簡単にその大きさが計算できる。この問題では、上記2点での潮汐力を確認した後、重力場のポテンシャルを展開近似し、潮汐力に対応する項を取り出してより正確な潮汐力に関しての考察を行う。ポテンシャルの勾配が力となることと、潮汐力による海面の形状を一般常識として持つていれば、解きやすい問題であるものと思われる。

問題 III-2(量子統計：一次元調和振動子)

問(1), (2)は調和振動子の古典および量子統計力学というスタンダードな問題である。分配関数や比熱の計算などは教科書に載っているものである。一方、問(3)は調和ポテンシャル中にある「フェルミ粒子」の問題なので、フェルミ粒子系の分配関数や低温展開の計算をする必要がある。これも統計力学のスタンダードな問題であるが、「調和ポテンシャル」という言葉に惑わされることなく、思考をボースからフェルミに切り替える必要がある。

問題 III-3 (量子力学:ポテンシャル問題)

これは量子力学の初步から初めて、すこし応用を取り入れた問題である。テーマは1次元1質点という分かりやすいものであり、基本的な束縛状態の概念が基礎となっている。しかし、ありがちな調和振動子を避け、座標の4乗に比例するポテンシャルについて問うことで、量子力学を表面的ではなく、ある程度深く理解しているかどうかを聞くように構成されている。設問(1)は、重要ではあるが、しばしばよく認識されていない次元解析、(2)は変分法について、その知識を前提とはせずに、受験生を解へと導く工夫をしている。また(3)ではより高度にスケール変換について問い合わせ、高いレベルの受験生を識別するようになっている。

問題 III-4(物理数学:常微分方程式)

常微分方程式の一般的解法を前半で求めさせ、後半ではそのうちの自由度を形式的に消去して着目した自由度が従うべき方程式を求めさせた。後半はランジュバン方程式と呼ばれる揺らぎを受けた粒子が従う方程式がどのように導かれるかという概念的に難しい問題を含んでいるが、誘導が丁寧だったために受験生の平均点は高かった。

問題 III-5(実験:放射線計測)

実験の問題と分類されているが、放射線検出の最も基本的な電離箱の原理とそのデータ処理法を扱った問題であり、電磁気学および統計学の基礎的な問題である。電離箱の問題はコンデンサー内を移動する電荷移動によるコンデンサーで発生する電圧・電流変化を調べる初等電磁気学の問題であり、放射線計測の専門知識は全く必要としない。このように当専攻の実験に分類される問題は、実験の専門知識を問うのではなく、基礎物理で現実的な問題を考えられるように作られた考え方やすい問題が多い。

問題 III-6(実験:真空)

真空技術は多くの物理実験で必要とされる。最近油拡散ポンプに代わって使われることが多くなったターボ分子ポンプを題材にした問題である。簡単な計算からターボ分子ポンプの動作原理を推察し、パイプのコンダクタンスを考慮してポンプの性能が發揮される真空排気システムを考える。真空技術に対する専門知識は必要なく、実験に対する基礎的な洞察力を問う問題である。

問題 III-7(宇宙:コンパクト天体) 量子力学の基礎概念と、天体構造の基礎を結びつけた問題。縮退圧という微視的な物理過程が、白色矮星の質量一半径関係という巨視的で観測可能な量として現れることを導き出す問題である。計算にはやや時間がかかるものの、内容は量子力学および宇宙物理学の初等レベルな問題で、宇宙物理学の専門知識は全く必要としない。設問を追っていけば解答にたどり着くよう工夫されている。

平成 22 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである。

I-1 (力学) (100 点)

重さの無視できる半径 R のリングが、その 1 つの鉛直方向の直径を固定軸として回転している。このリングに取り付けられた質量 m の質点の運動について考えよう(図 1)。但し、リングと質点の間には摩擦はなく、質点はリングに沿って離れることなく自由に移動できるものとする。重力加速度は g とする。

- (1) リングの中心を原点、鉛直上方向を z 軸とする円柱座標系を考える。円柱座標系における基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ (図 2) を用いて質点の位置ベクトル \mathbf{x} が

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (\text{A})$$

と表されるとき、式(A)の両辺を 2 階微分することにより、加速度 $\mathbf{a} = d^2\mathbf{x}/dt^2$ を

$$\mathbf{a} = A\mathbf{e}_r + B\mathbf{e}_\varphi + C\mathbf{e}_z \quad (\text{B})$$

という形で表せ。

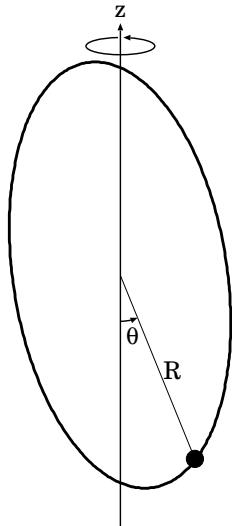


図 1

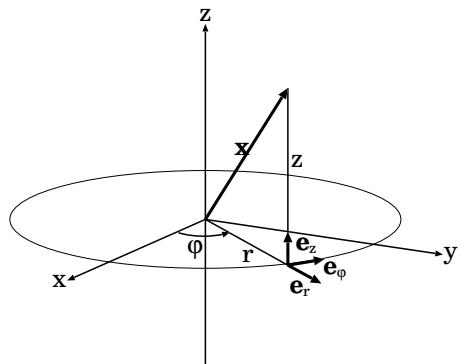


図 2

- (2) 質点がリングより受ける原点方向の力の大きさを T 、リングに与えられるトルクの大きさを N 、 z 軸負の方向と質点の位置ベクトルのなす角を θ として(1)の結果より質点の運動方程式を求め、 r, z, T を消去して θ と φ の運動方程式とせよ。
- (3) リングが角速度 ω_0 で等速回転し、かつ $\theta = \theta_0 > 0$ で平衡状態にあるとき、 $\cos\theta_0$ を R, g, ω_0 で表し、このような平衡状態が存在するための ω_0 の条件を求めよ。また、等速回転が常に保たれるものとして、この平衡点を挟む微小振動の周期を求めよ。

(次ページに続く)

以下、自由回転($N = 0$)の場合を考える。

- (4) この系のラグランジアンを θ と φ で表し、オイラー・ラグランジュ方程式より導かれる結果が(2)の結果と一致することを示せ。
- (5) $\theta = \theta_0$ で等速回転の平衡状態にあった質点に対し、水平方向に微小な力積が加わって角速度が $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ ($0 < |\omega_1| < |\omega_0|$) に変化した場合、その後の質点の運動の概要を述べ、 $\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ。

I-2 (電磁気学) (100 点)

導体に電磁波が侵入したときの様子について考える。まずは導体中の電磁波（電場 E , 磁束密度 B ）について、電気伝導率 σ 、誘電率 ϵ 、透磁率 μ が一様な場合の Maxwell 方程式を出発点とする。その時の Maxwell 方程式は以下のように与えられるとする。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{j} \quad (\text{A})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B})$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{C})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{D})$$

ただし、電流密度 j と E の間には Ohm の法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{E})$$

が成り立つとする。

- (1) 式 (A)-(E) から B を消去して E に関する偏微分方程式を導け。必要であれば、以下の公式を用いること。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{F})$$

次に、 $z \geq 0$ の半無限空間にある導体の表面に平面波である角振動数 ω 、波数 k の電磁波 ($E_x(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$) を垂直に入射した。ただし、電場 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ 、磁束密度 $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$ とし E_x, B_y は x, y に依存しないとする。

- (2) この導体内での電場 E_x の振る舞いを設問 (1) で求めた偏微分方程式を解くことで考
える。導体内での波数を複素数 $k_r + ik_i$ とし、 $\sigma, \mu, \epsilon, \omega$ を用いて k_r, k_i を求めよ。
- (3) 設問 (1) の偏微分方程式から E_x を求めると導体の境界付近では、電磁波の振幅が急
激に変化することがわかる。これは表皮効果と呼ばれる。電磁波の振幅が、表面に比
べ e^{-1} に減衰する表皮効果の深さ δ を $\sigma, \mu, \epsilon, \omega$ を用いて表せ。

(次ページに続く)

- (4) B_y を計算し、 E_x との間の位相差 ϕ を求めよ。
- (5) 通常の金属にマイクロ波が入射した場合 ($\sigma \gg \epsilon\omega$) 表皮効果の深さが $\sqrt{2/(\mu\sigma\omega)}$ に一致することを示せ。かつ、この場合 E_x と B_y の間の位相差 ϕ を求めよ。

I-3 (統計力学) (100 点)

(1) 角振動数 ω をもつ調和振動子のエネルギー準位は基底エネルギーから測って

$$\varepsilon = 0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, \dots, n\hbar\omega, \dots$$

で与えられる。ここでは簡単のため、ゼロ点振動は無視する。全体が N 個のほとんど独立な振動子からなる系が、全エネルギー $E = M\hbar\omega$ を持つ状況を考える。

(1a) 热力学的重率 W を求め、 $N \gg 1$ にて成立する Stirling の公式 $\log(N!) \approx N \log(N/e)$ を用いて、 $k \log W$ で与えられるエントロピーを求めよ。

(1b) 热力学関係式よりこの系の温度 T と E の関係を求めよ。

(1c) $N(\gg 1)$ 個のうちの 1 つの振動子がエネルギー $E_1 = L\hbar\omega$ をもつ確率を与える、それを $M \gg L$ の条件下で近似せよ。また、その確率が規格化条件を満たしていることを示せ。

(2) 热浴に接した調和振動子 1 個がエネルギー $\varepsilon = L\hbar\omega, L = 0, 1, 2, \dots$ を持つ確率を P_L とする。

(2a) 平均エネルギー $E_1 = \sum_{L=0}^{\infty} L\hbar\omega P_L$ のもとで、エントロピー $S = -k \sum_{L=0}^{\infty} P_L \log P_L$ を最大化するような分布 $\{P_L\}$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。

(2b) (2a) においてエントロピー最大化原理で求めた分布 $\{P_L\}$ が、(1c) で热力学的重率から計算した確率分布と同じになる条件を求めよ。

(このページは白紙である)

平成 22 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いててもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである。

II-1 (量子力学) (100 点)

1 次元シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - 2aV_0\delta(x^2 - a^2)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{A})$$

の束縛状態に対する固有関数、エネルギー固有値について考える。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数を表し、 V_0 と a は正の定数である。以下の設間に答えよ。

(1) 一般に 1 次元シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{B})$$

に於いて、 $V(x) = V(-x)$ が成り立ち、エネルギー固有値に縮退が無い時、固有関数は必ず偶関数、又は奇関数であることを示せ。また縮退がある時にも、固有関数を必ず偶関数、又は奇関数の形に取り直すことが出来ることを示せ。

- (2) 式 (A) の束縛状態に対する固有関数について、偶関数、奇関数の関数形をそれぞれ求め（但し、規格化定数はそのまま残しておいて構わない）、概形を図示せよ。
- (3) 設問 (2) で導出した偶関数、及び奇関数に対するエネルギー固有値を求める式を導出せよ。
- (4) 設問 (3) で導出した式を用いて、エネルギー固有値の a に対する依存性を、偶関数及び奇関数の固有関数それについて考察し、概略を図示せよ。

(このページは白紙である)

II-2 (物理数学) (100 点)

- (1) a を実数の定数としたとき、実軸に平行な積分路に沿った次の複素積分の値が $\sqrt{\pi}$ になることを示せ。

$$\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} e^{-z^2} dz. \quad (\text{A})$$

- (2) $u = u(x, t)$ に関する $-\infty < x < \infty$ での一次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{B})$$

を考える。ここで D は拡散係数で正の定数である。

$t = 0$ での $u(x, 0)$ が与えられたとき、 $t > 0$ での拡散方程式 (B) の解を以下のようにして求めよう。

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を f_k としたとき、フーリエ変換の反転公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} dk \quad (\text{C})$$

を $u(x, t)$ に適用し、 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx} dk \quad (\text{D})$$

と表そう。

(2a) 式 (D) を拡散方程式 (B) に代入して $u_k(t)$ の従う微分方程式を導け。

(2b) 初期値 $u_k(0)$ に対する上の微分方程式の解を $u_k(t) = u_k(0)g_k(t)$ と表したとき、 $g_k(t)$ を求めよ。

$u_k(0)$ は $u(x, 0)$ のフーリエ変換

$$u_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) e^{-ikx'} dx' \quad (\text{E})$$

であるので、 $u_k(t) = u_k(0)g_k(t)$ を式 (D) に代入すると、 $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) u(x', 0) dx' \quad (\text{F})$$

$$G(x, x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) e^{ik(x-x')} dk \quad (\text{G})$$

と書ける。

(次ページに続く)

(2c) 式 (G) の積分を実行して、関数 $G(x, x', t)$ を求めよ。
このとき、必要なら設問 (1) の結果を用いて良い。

以下では、 u_1 を正の定数として $x \geq 0$ のとき $u(x, 0) = u_1$ で、 $x < 0$ のとき $u(x, 0) = 0$ という初期条件を考える。

(2d) $t > 0$ に対して式 (F) から、 $x = -\infty$ 、 $x = 0$ と $x = \infty$ での $u(x, t)$ の値を求めよ。

(2e) 一般の x に対しては、 $u(x, t)$ は解析的には積分はできないが、その振る舞いは調べることができる。 t_1 と t_2 を $0 < t_1 < t_2$ を満たす 2 つの異なる時刻としたとき、 $u(x, t_1)$ と $u(x, t_2)$ の概形を同じ図中に違いが分かるように図示せよ。また、 $t > 0$ での $u(x, t)$ の時間変化の特徴を述べよ。

(3) x の変域を $0 \leq x < \infty$ とし、 $x = 0$ で $u(0, t) = 0$ という境界値が与えられているとき、拡散方程式 (B) の解は $G(x, x', t)$ を用いて

$$u(x, t) = \int_0^\infty (G(x, x', t) - G(x, -x', t)) u(x', 0) dx' \quad (\text{H})$$

と書ける。

u_0 を正の定数として、 $x > 0$ に対して $u(x, 0) = u_0$ という初期条件を考える。

(3a) $t > 0$ に対して式 (H) から、 $x = \infty$ での $u(x, t)$ の値を求めよ。

(3b) 一般の x に対しては、 $u(x, t)$ は解析的には積分はできないが、その振る舞いは調べることができる。 t_1 と t_2 を $0 < t_1 < t_2$ を満たす 2 つの異なる時刻としたとき、 $u(x, t_1)$ と $u(x, t_2)$ の概形を同じ図中に違いが分かるように図示せよ。

II-3 (電磁気学) (100 点)

十分に長く、太さの無視できる針金が z 方向に沿って直線に保たれたまま、一定の誘電率 ϵ を持つ誘電体の中に置かれているとする。針金は $x-y$ 面内において $x = b, y = 0$ に置かれてあり、一様な線電荷密度 σ を持つて帯電している。外部からの電磁場はないものとする。

(1) この誘電体中の静電場 E が従うマックスウェル方程式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon E) &= \rho(x, y), \\ \nabla \times E &= 0\end{aligned}\tag{A}$$

で与えられる。ここで $\rho(x, y)$ は電荷密度である。対称性から、電場に z 依存性がないことに注意して、この針金がもたらす電場を導出せよ。

次に図 1 のように、上記の誘電体が左側 ($x < 0$) にある別の媒質と平面 $x = 0$ で接しており、上記の針金がその接触面に平行に置かれているとしよう。 $x < 0$ にある媒質の誘電率は ϵ' とする。この場合、 $\epsilon \neq \epsilon'$ であれば、実際には針金が誘起する電荷分布が接触面上に存在するが、この面電荷の存在を一旦忘れて、以下の鏡像の方法を用いて電場分布を調べる方が便利である。

「実際に針金が置かれてある右側の誘電体内的電場は、A にある針金と A' の対称点 A' に置かれた線電荷密度 σ' の仮想針金からの寄与の和で与えられる。一方、左側の誘電体内的電場は A には線電荷密度 σ'' の別の針金があると仮定することで得られる。ただし、これらの針金は全て z 軸に平行になっている。」

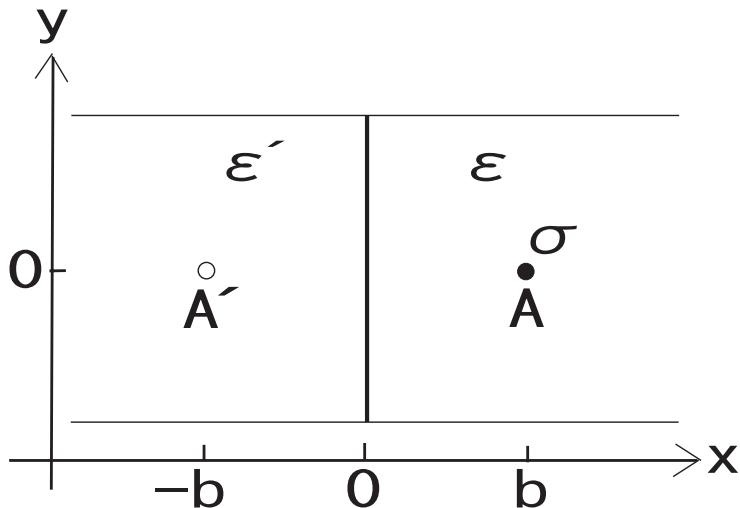


図 1

(次ページに続く)

- (2) 鏡像の方法を用いるには、接触面 $x = 0$ 上で電場が満たすべき境界条件を決める必要がある。マックスウェル方程式を狭い区間 $|x| < \delta$ にわたって積分して、その境界条件を求めよ。ただし、 $x > 0, x < 0$ における電場をそれぞれ、 $\mathbf{E}(x, y) = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{E}'(x, y) = (E'_x, E'_y, E'_z)$ とする。
- (3) \mathbf{E}, \mathbf{E}' を決めることにより、2つの誘電体にわたる電気力線の概略図を描け。
- (4) 針金が受ける力を導出し、力の方向について論じよ。
- (5) 左側の媒質が導体である場合、導体表面の面電荷密度 $\Sigma(y)$ は $\varepsilon E_x(x = 0, y)$ で与えられ、その導体面電荷 Q_s は $-\sigma L$ となる。ただし、 L は z 方向の系のサイズである。 Q_s を実際に計算することにより、左側の媒質が導体である場合は $\varepsilon' \rightarrow +\infty$ の極限に相当することを示せ。

平成 22 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 15 ページまである。
-

III-1 量子力学（電磁場中の荷電粒子）

III-2 力学（変分）

III-3 量子統計（フェルミ気体）

III-4 物理数学（ルジャンドル変換）

III-5 電磁気学（応用）

III-6 量子力学（磁場中のスピン）

III-7 宇宙（コンパクト星）

III-1 (量子力学: 電磁場中の荷電粒子) (100 点)

2 次元 x - y 面内に束縛され、一様電磁場下に置かれた質量 m , 電荷 $q (> 0)$ の荷電粒子の定常状態について考える。この粒子の波動関数 $\psi(x, y; t)$ が従うシュレディンガー方程式は、電磁場を表すベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、スカラーポテンシャル Φ を用いて

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - q \mathbf{A} \right)^2 + q \Phi \right] \psi \quad (\text{A})$$

と表される。 \mathbf{p} は運動量ベクトルである。以下、一様な磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ はゲージ $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ で表されるものとする。

まず、電場がない場合 ($\Phi = 0$) を考える。

(1) ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar q B}{m} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \\ a a^\dagger - a^\dagger a &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B})$$

の形に書けることを示せ。

(2) 基底状態の波動関数は

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y; t) &= \exp \left(-i \frac{qB}{2m} t \right) \varphi_0(x, y), \\ \varphi_0(x, y) &= \sum_k c_k \exp(i kx) u_0(y, k) \end{aligned} \quad (\text{C})$$

の形に書けることを説明し、 $u_0(y, k)$ を求めよ。ただし、 k は実数、 c_k は k のみに依存する任意の係数である。

次に、一様な面内電場 $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ がさらに加わった系を考えよう。

(3) シュレディンガー方程式 (A) は次の形の解を含むことを示せ。

$$\psi(x, y; t) = \exp \left[i \left(\frac{mv}{\hbar} x' + \frac{mv^2}{2\hbar} t' \right) \right] \psi_0(x', y'; t') \quad (\text{D})$$

ただし、 $x' = x - vt$, $y' = y$, $t' = t$ である。また、 v を具体的に与えよ。

(次ページに続く)

(4) (D) 式は、速度 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ で動いている座標系 (x', y', t') においては、粒子が基底状態にあることを意味している。実験室系 (x, y, t) で見た電流 \mathbf{J}_e は $(q v, 0, 0)$ で与えられることを示せ。ただし、電流は粒子の確率流密度

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2m} \psi^* (\mathbf{p} - q \mathbf{A}) \psi + \text{c.c.} \quad (\text{E})$$

(c.c. は複素共役を表す) を用いて、

$$\mathbf{J}_e = q \int dx dy \mathbf{j} \quad (\text{F})$$

で与えられる。また、(D) の ψ_0 は十分遠方で粒子が存在しないという条件、 $|\psi_0(|x| \rightarrow \infty)| = |\psi_0(|y| \rightarrow \infty)| = 0$ 、と規格化条件

$$\int dx dy |\psi_0|^2 = 1 \quad (\text{G})$$

を満たすものとする。

(5) (D) 式に現れる位相因子は、電磁場がない状況下の自由粒子のシュレディンガー方程式がガリレイ変換に対し不变であることを要請しても、波動関数の変換則に現れる。このことを、座標系を (x, y, t) から $(x'' = x - wt, y'' = y, t'' = t)$ に変換することにより、具体的に示せ。ただし、定数 w は任意の実数である。

III-2 (力学: 変分) (100 点)

以下の問題は、2次元平面 (x, y) で考える。

- (1) 任意の点 $P(x_1, y_1)$ を始点とし、別の任意の点 $Q(x_2, y_2)$ を終点とする滑らかな曲線 $y(x)$ を考える。

(1a) P から Q までの曲線の長さ L を x に関する積分で表せ。

(1b) 始点と終点は固定して、変分 $\delta L = 0$ を課したとき、 $y(x)$ の従う微分方程式を導け。

(1c) (1b) で求めた方程式の解を求めよ。

- (2) 媒質中での光線の伝搬を考える。 $y_1 < 0, y_2 > 0, x_1 < x_2$ として、点 $P(x_1, y_1)$ を光線の始点とし、点 $Q(x_2, y_2)$ を終点とする。屈折率 n が n_1, n_2 を定数として

$$y < 0 \text{ の時} : n = n_1 \quad (\text{A})$$

$$y \geq 0 \text{ の時} : n = n_2 \quad (\text{B})$$

で与えられるとする。ここで、屈折率 n は、真空中の光速度 c を媒質中の光速度（位相速度） v で割った値 ($n = c/v$) で定義される。

- (2a) 光線が点 $R(X, 0)$ で x 軸を横切るとした場合、 P から R を通過して Q までに進むのに要する時間 T を式で表せ。

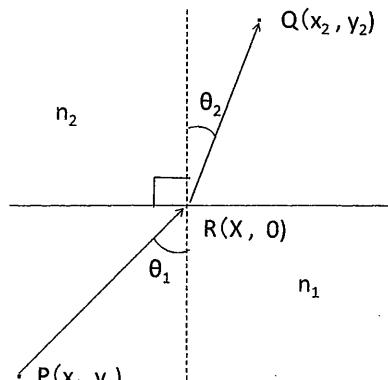


図 1

- (2b) 境界面に対する光の入射角を θ_1 、屈折角を θ_2 とするとき（図 1）、 T が最小になるのが、実現される X であるという要求から、光の屈折の法則 ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) を導け。

（次ページに続く）

屈折率が、 y の滑らかな関数 $n(y)$ の場合を以降考える。

(2c) 光線の経路が $y(x)$ で与えられるとして、光線が P から Q にまで進むのに要する時間 T を x に関する積分で表せ。

(2d) 始点と終点は固定して、変分 $\delta T = 0$ を課したとき、経路 $y(x)$ の従う微分方程式を導け。

(2e) 実際の光線は (2d) で求めた微分方程式に従って伝搬することが知られている。

屈折率が、今の場合のように y のみの関数の時には、光線の伝搬に沿って x に依存しない保存量が存在することを示せ。

(2f) 上の保存量を具体的に求めよ。

(2g) 原点から y 軸となす角度 θ_0 で y の正の方向に進み出した光線が $y = Y (> 0)$ に到着したとき、光線の進行方向が y 軸となす角度 θ を求めよ。

(2h) $n(y)$ が y の減少関数の場合、光線の経路の特徴を言え。

III-3 (量子統計: フェルミ気体) (100 点)

2 次元自由電子気体の統計力学について調べる。まず、ゼロ磁場下でこの系を考えよう。電子はフェルミ粒子であるため、この系の熱力学ポテンシャルは

$$\Omega_0 = -2\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 + \exp[-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)]) \quad (\text{A})$$

と与えられる。ここで、 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 μ は化学ポテンシャル、 $\hbar k$ は自由電子の運動量、 $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$ は 1 電子運動エネルギーである。(A) 式の数因子 2 はスピンに関する縮退度を表す。

(1) 1 スピン自由度あたりの状態密度 $D(\varepsilon) = dN_s(\varepsilon)/d\varepsilon$ は 1 電子エネルギー ε に依らないことを示せ。また、全電子数 N を D と $T = 0$ での化学ポテンシャル $\mu(T = 0) = E_F$ (フェルミエネルギー) を用いて表せ。ただし、 $N_s(\varepsilon)$ はエネルギーが ε 以下の 1 スピン当たりの状態数を表す。

(2) Ω_0 は次式で表されることを示せ。

$$\Omega_0 = -\mu N \left(1 - \frac{\mu}{2E_F} \right) - \frac{N}{E_F} \beta^{-2} \left[\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^{\beta\mu} dx \frac{x}{e^x + 1} \right] \quad (\text{B})$$

(3) μ の低温での振る舞いに留意して、低温比熱 C を T について最低次まで求めよ。必要があれば、

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{C})$$

を用いよ。

今、この電子系が 2 次元面に垂直にかけられた一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ の下にあるとしよう。ただし、簡単のため、電子のゼーマン効果は無視できるとしよう。この場合、1 電子のエネルギー固有値 E_n は量子化され、

$$E_n = \frac{e\hbar B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{D})$$

となる。また、各固有状態における縮退度 N_{Φ} は

$$N_{\Phi} = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \quad (\text{E})$$

で与えられる。ここで、 Φ は全磁束、 e は素電荷である。このことを用いて、以下で
(次ページに続く)

は弱い磁場下での熱力学ポテンシャルを調べる。

(4) 磁場下での熱力学ポテンシャル Ω を N を用いて表せ。

(5) パラメタ b が微小量と仮定し、ポワッソンの和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i 2\pi mx) \quad (\text{F})$$

を用いて、次の近似式

$$b \sum_{l=0}^L f(b(l + 1/2) - \mu) \simeq \int_0^X dx f(x - \mu) - \frac{b^2}{24} \left(-\frac{\partial f(x - \mu)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{G})$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $b(L + 1/2) \equiv X \gg \mu$ であり、 $f(x - \mu)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x - \mu)$ ($n \geq 0$) について、 $f^{(n)}(X - \mu) = 0$ が成り立つとせよ。

(6) わずかな磁場により、熱力学ポテンシャル Ω は Ω_0 に比べて増大すること（ランダウ反磁性）を示せ。

III-4 (物理数学 : ルジャンドル変換) (100 点)

下に凸の関数 $F(V)$ があるとき、与えられた実数 p に対して、

$$G(p) \equiv \min_V (F(V) + pV) \quad (\text{A})$$

で定義される関数 $G(p)$ を考える。ここで \min_V は p を固定し V を動かしたときの最小値を表す。

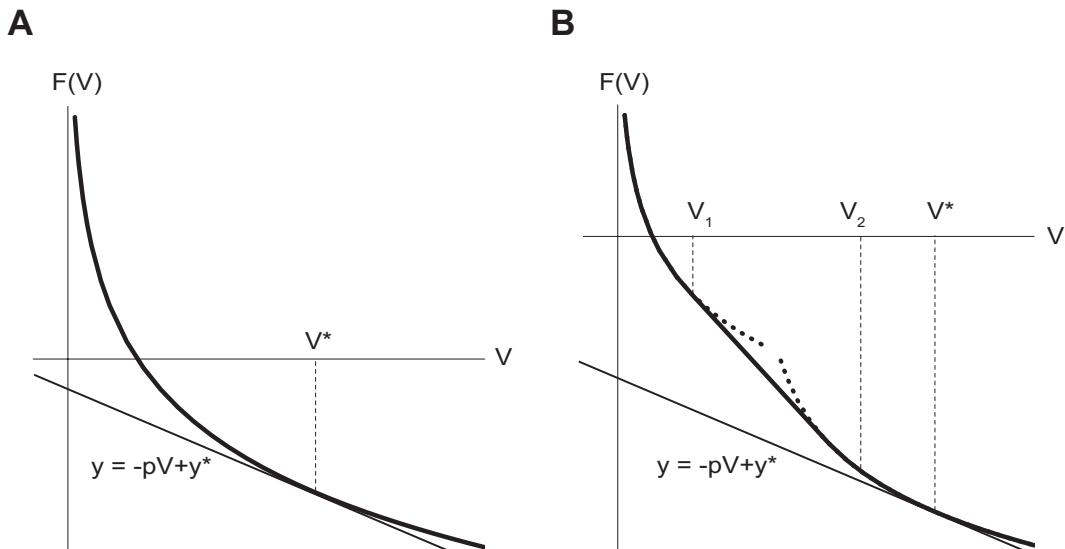


図 1

- (1) 図 1 A のように、傾き $-p$ の直線が関数 $y = F(V)$ に接する点を $V = V^*$ とし、 $G(p)$ の値を V^* を用いて表せ。また、それは図のどこに表現されているか。
- (2) $G(p)$ は、 $dG/dp = V^*$ の関係を満たすことを示せ。
- (3) 関数

$$F(V) = c \times \left\{ (V/V_0)^{-q} - 1 \right\} / q \quad (\text{B})$$

について、式 (A) で与えられる変換 $G(p)$ を求めよ。また、 $q \rightarrow +0$ の極限について dG/dp を求めよ。ここで c と V_0 は定数である。

- (4) 図 1 B で示された関数

$$F(V) = \begin{cases} -c \log(V/V_0) & (V < V_1) \\ c \{1 - V/V_1 - \log(V_1/V_0)\} & (V_1 \leq V \leq V_2) \\ c \{1 - V_2/V_1 - \log((V - V_2 + V_1)/V_0)\} & (V > V_2) \end{cases} \quad (\text{C})$$

について、式 (A) で与えられる変換 $G(p)$ を求めよ。ここで \log は自然対数とする。

(次ページに続く)

- (5) $F(V)$ が熱力学におけるヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, V)$ の体積依存性を表したものとすれば、式 (A) は、ギブス自由エネルギー $G(T, p)$ へのルジャンドル変換に対応する。式 (C) で定義される $F(V)$ から導かれる $p = -dF/dV$ を V の関数として描け。また、 $G(p)$ から求まる $V = dG/dp$ を p の関数として描け。 $F(V)$ がヘルムホルツ自由エネルギーの体積依存性を定性的に模したものとすれば、図 1 B の V_1 から V_2 への直線部分はどのような物理的状況を表しているか。
- (6) 热力学関数の変換以外に物理学でルジャンドル変換が使われている例をあげよ。

III-5(電磁気学:応用) (100点)

電力ケーブルに流れる交流を測定するために、図1のような構造を持つ装置が用いられる。以下、これをCT(current transformer)と呼ぶ。CTは、磁性体からなるリング状のコアに導線を巻いたコイルで、リングの中心に電力ケーブルを通す。電力ケーブルの交流により発生する磁場が誘起する起電力によってコイルに流れ电流を測定する。磁性体の透磁率を μ 、コアの内半径を r_i 、外半径を r_o 、厚みを d 、コイルの巻き数を N とする。

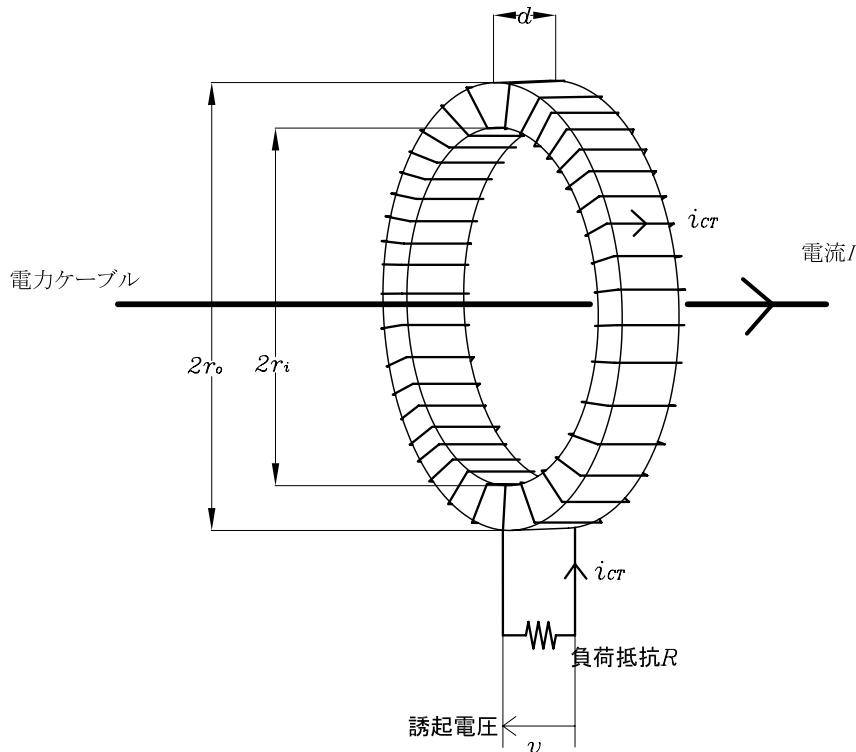


図1

CT自身のインダクタンス L を求めるため、まずCT単体で、コイルの導線に電流 i が流れている場合を考える。

- (1) コア内で、動径位置 r に発生する磁場の大きさ B を求めよ。ただし、リングの中心軸を z 軸とした円柱座標 (r, ϕ, z) において、コア内の磁場分布は、 z 方向、 ϕ 方向について一様としてよい。
- (2) (1)の結果を用いて、コア内に蓄えられる全磁場エネルギー U を求めよ。また、コイルのインダクタンス L と U の関係 $U = \frac{1}{2}Li^2$ より、 L を求めよ。

(次ページに続く)

次にリングの中心に電力ケーブルを通す。

- (3) 電力ケーブルに電流 I が流れたときに、コイルには電流 i_{CT} が誘起されるとして、コア内に発生する磁束 Φ を I 、 i_{CT} およびコイルの巻き数 N とインダクタンス L で表せ。 i_{CT} の向きは、図1の矢印方向を正とする。
- (4) CT には、図1にあるように、信号を読み出すための負荷抵抗 R が直列につけられる。コイルに誘起される電圧を v とすると $v = Ri_{CT}$ が成り立つ。(3)で求めた磁束の時間変化により v が誘起されるということを考慮して、 v が満たすべき時間に対する微分方程式を、 L, R, N, I および I の時間微分を用いて表せ。
- (5) ケーブルに流れる電流が角振動数 ω をもった交流 ($I = I_0 e^{j\omega t}$, I_0 : 正の実数) である場合に、誘起電圧を $v(t) = V(\omega) e^{j\omega t}$ として、(4)より、 $V(\omega)$ を求めよ。 j は虚数単位である。また、 $|V|$ と ω の関係を、横軸を ω 、縦軸を $|V|$ として図示せよ。 $|V|$ の最大値を縦軸に記入せよ。

電力ケーブルに図2のように最大値 1A で、1kHz の交流が流れているのを、CT で測定する場合を考える。

$R = 50 \Omega$, $d = 5 \text{ cm}$, $r_o = 12.2 \text{ cm}$, $r_i = 10 \text{ cm}$ とする。真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 、 $\log_e 1.22 = 0.2$ とする。

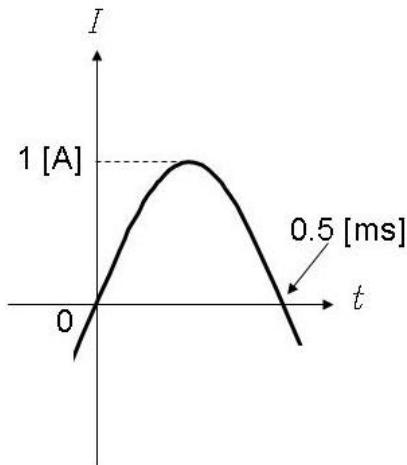


図2

- (6) コアが空芯 ($\mu = \mu_0$) で、 $N = 100$ の場合に、 $v(t)$ を横軸時間 t として図示せよ。 $t = 0$ からの半周期分でよい。最大値も(有効数字一桁で)記入せよ。
- (7) コアの透磁率が $\mu = 10^4 \mu_0$, $N = 1000$ の場合に、 $v(t)$ を横軸時間 t として図示せよ。 $t = 0$ からの半周期分でよい。最大値も(有効数字一桁で)記入せよ。

III-6 (量子力学：磁場中のスピン) (100点)

孤立した水素原子の1s状態を考えよう。陽子(p)と電子(e⁻)は、磁気モーメントをもつていて、外磁場**B**の下で、次のハミルトニアンで表される磁気的相互作用をする。

$$\mathcal{H} = a\mathbf{I} \cdot \mathbf{S} - \gamma_p h \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} - \gamma_e h \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A})$$

$h\mathbf{I}$ と $h\mathbf{S}$ はそれぞれpとe⁻のスピン角運動量(h はプランク定数 h を 2π で割った量、 $I=S=\frac{1}{2}$)を、 $\gamma_p h \mathbf{I}$ と $\gamma_e h \mathbf{S}$ は対応する磁気モーメントを表す。 γ は粒子に固有の定数であり、 $\gamma_p > 0$ 、 $\gamma_e < 0$ 、 $|\gamma_e| \approx 660\gamma_p$ である。(A)式の右辺第1項にある a は超微細結合定数と呼ばれ、1s状態の水素原子の場合、pとe⁻の磁気的結合の強さを表し、 $a > 0$ である。第2項と第3項はそれぞれpとe⁻のゼーマンエネルギーを表す。以下の3つの問い合わせよ。

(1) \mathcal{H} の4つの固有値を求めよ。ただし、 \mathbf{B} の方向を z 軸とする： $\mathbf{B}=(0,0,B)$ 。

(ヒント： z 軸を量子化軸にとり、pスピンが上向き、e⁻スピンが下向きの状態を表す $|\uparrow-\rangle$ などの4つのケットベクトルで張られる空間を考え、 \mathcal{H} を作用させて得られる固有方程式から固有値を求めればよい。その際、 I_z の値を±1変える $I_{\pm} = I_x \pm \sqrt{-1}I_y$ などを使って $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}$ を表し、 $I_+|\downarrow+\rangle = |\uparrow+\rangle$ 、 $S_-|\uparrow+\rangle = |\uparrow-\rangle$ 、 $I_z|\uparrow-\rangle = +\frac{1}{2}|\uparrow-\rangle$ などの関係を用いよ。)

(2) B が小さく、 \mathcal{H} の第2項と第3項が第1項に比べて小さいとして、(1)で得た各エネルギー固有値に対応する規格化した固有ケットベクトルを求めよ。ただし、 B の0次の項のみでよい。ケットベクトルの表記には(1)のヒントで示したもの用いよ。

(3) B が小さい範囲でエネルギー固有値と磁場の関係を示す概略図を描け。その図に、 $B \neq 0$ 場合のエネルギー固有値の大きい順に1から4までの番号を記入せよ。また、(2)で求めた、対応する固有ベクトルを示せ。(必要に応じて、(1)で得た固有値を近似し、それらの大きさを比較せよ。)

次に、半導体Ge中に不純物として存在する水素原子の状態を調べよう。このために、 z 軸方向に一様な静磁場**B**をかけ、pと同じ電荷とスピンをもち、質量はその約 $\frac{1}{9}$ の正ミュオン(μ^+)をGe試料に打ち込み、pの代わりに用いる。個々の μ^+ は試料中に静止してe⁻とクーロン相互作用により結合しミュオニウムと呼ばれる水素に似た系をつくる。この場合も超微細結合定数 a および $\gamma_\mu(\mu^+)$ に対する値をとる。

打ち込まれた μ^+ のスピンはすべて、 \mathbf{B} に直交する x 軸方向に向いているとする。 μ^+ は平均寿命 $2.2\ \mu\text{s}$ で崩壊するが、その際発生する陽電子(e⁺)は、 μ^+ のスピン方向に放出されやすい。しかし、外磁場**B**の下で μ^+ のスピンが z 軸のまわりに歳差運動をするため、

(次ページに続く)

e^+ の放出されやすい方向は周期的に時間変化する。したがって、 μ^+ の打ち込みと e^+ の検出を繰り返すと、 x 軸方向に置いた e^+ 検出器の計数率は、打ち込みから検出までの時間 t に対して、図 1 に示されるような周期的变化を示す(横軸の時間はナノ秒単位である)。図 1 は、 $B = 5 \text{ mT}$ の場合をシミュレートした結果である(振動パターンは全体として右下がりになっているが、その減少の程度は μ^+ の平均寿命を反映している)。以下の 2 つの問い合わせよ。

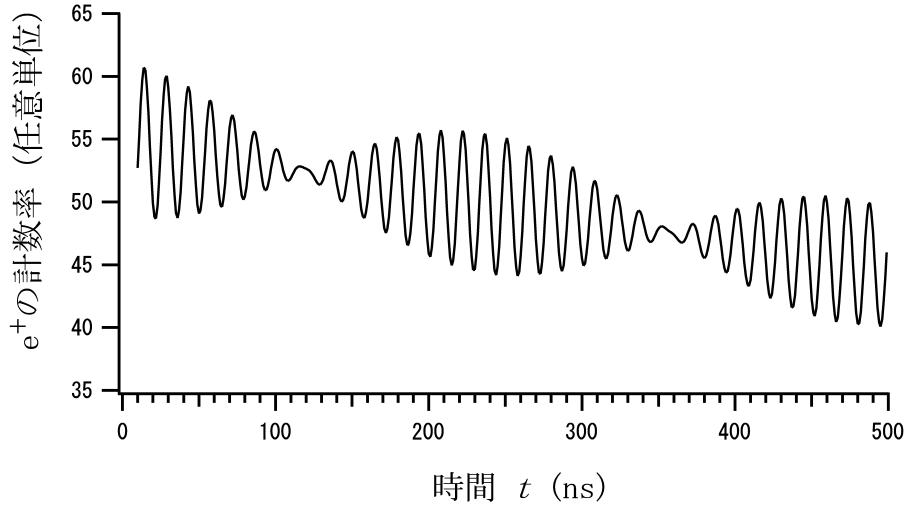


図 1

- (4) 図 1 のパターンは基本的に $\cos(2\pi\nu_{12}t)$ と $\cos(2\pi\nu_{23}t)$ の和で表される時間変化を示している。ここで、 $\nu_{ij} = (E_i - E_j)/h$ であり、 E は磁場中のエネルギー固有値、 i と j は 4 つのエネルギー固有値の大きさの順を示す番号である ($E_1 > E_2 > E_3 > E_4$)。“うなり”に着目して、図 1 から適当な時間間隔を読み取り、(1) と (3) で得た結果を利用して、Ge 中の μ^+ と e^- の磁気的結合の強さを表す a/h の値を計算せよ (GHz 単位、有効数字 1 術でよい)。ただし、 $\gamma_\mu = +8.5 \times 10^8 \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$ 、 $\gamma_e = -1.8 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$ とする。
- (5) (4) で求めた a/h の値から、Ge 中のミュオニウムにおける μ^+ と e^- のクーロン結合の強さについて考察せよ。考察の材料として、以下の事実を用いよ。
- ・ a/h は μ^+ 位置での電子密度に比例している。
 - ・ 孤立したミュオニウムの a/h の値は 4.5 GHz である。
 - ・ 孤立したミュオニウム中の電子のボーア半径は、孤立した水素原子の場合とほとんど同じ 0.053 nm である。
 - ・ Ge より原子番号の 1 つ大きい As は Ge 中でドナー不純物として働く。Ge 中に存在する As^+e^- 系は水素に似た系であるが、ボーア半径は 5 nm のオーダーである。

III-7(宇宙:コンパクト星) (100点)

白色矮星・中性子星・ブラックホールなどのコンパクト星と、普通の星からなる近接連星系を考えよう。以下、天体と観測者との距離 D は既知であるとする。

- (1) コンパクト星へガスが降着すると、その重力エネルギーの一部が放射エネルギーへと変換されて輝く。降着流が球対称な場合には、ガスに働く輻射圧と重力がつりあつたところで光度が頭打ちになる(エディントン限界光度)。
 - (1a) その限界光度 L_E を、コンパクト星の質量 M の関数として求めよ。ただし、ガスは水素のみからなる完全電離ガスであると仮定し、陽子の質量を m_P 、トムソン散乱の断面積を σ_T 、重力定数を G 、光速を c とせよ。陽子に対する電子の質量は無視してよい。
 - (1b) コンパクト星の質量が太陽質量の 1.4 倍の場合、そのエディントン限界光度はいくらになるか、有効数字 1 衔の精度で計算せよ。必要なら、 $\sigma_T = 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$ 、 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ を用いよ。
 - (1c) 観測されたフラックス F と距離 D から計算される光度 $L = 4\pi D^2 F$ を用いて、エディントン限界光度による制限から、コンパクト星の質量の下限を見積もることができる。しかし厳密には、この議論には問題がある。その理由を簡潔に説明せよ。
- (2) コンパクト星の質量を見積もる最も信頼できる方法は、ドップラー効果を用いて、連星運動を測定することである。伴星の分光観測により、連星系の軌道周期 P と、伴星の視線方向の速度振幅 v_O がわかると、コンパクト星の質量に制限を与えることができる。ここでは、円軌道を仮定し、軌道傾斜角を i 、コンパクト星の質量を M_X 、伴星の質量を M_O とする(図 1)。この時、観測量のみで定義される「質量関数」 $f_O \equiv Pv_O^3/(2\pi G)$ を、 M_X , M_O , i のみを使って表し、 f_O が M_X の下限値を与えることを示せ。

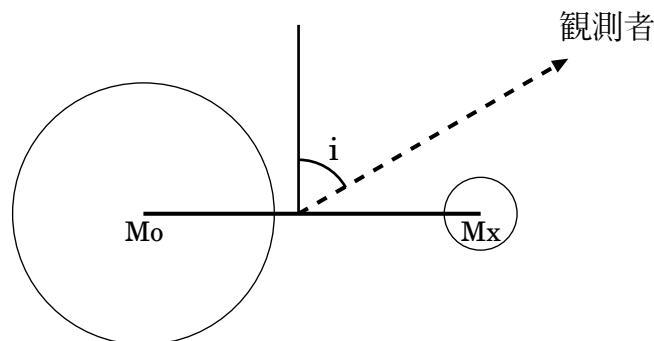


図 1 (軌道面を真横から見た図)

(次ページに続く)

- (3) コンパクト星の周りの降着円盤（ここでは連星系の公転軌道面と一致しているものとする）の垂直方向に、「ジェット」と呼ばれる相対論的速度をもつガスが放出されることがある。その動きを観測することで、系の軌道傾斜角に制限が得られる。図2のように、視線方向に対して角度 i ずれた方向に、真の速度 v で移動するガスについて考えよう。
- (3a) ガスの動きを天球上に投影した時の「見かけの速度」が、光速を超えることを示せ。
- (3b) 円盤から見て双方に完全対称にジェットが放出されると仮定する。この時、両ジェットの天球への投影速度 $v+$, $v-$ の測定値から、ジェットの真の速度 v および軌道傾斜角 i が決定できることを示せ。

軌道傾斜角 i がわかると、(2) の方法を用いてコンパクト星の質量をより強く制限することが可能となる。

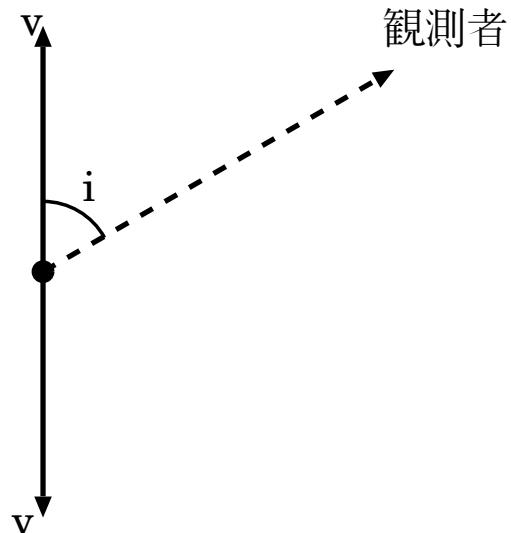


図 2

平成 21 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである。

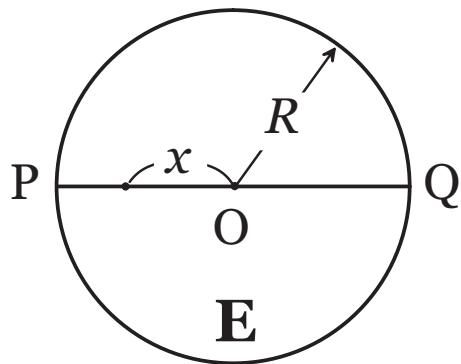
I-1 (力学) (100 点)

一様な密度で半径 R の完全な球体 E を考える。自転はしていない。その表面の一点 P からその対極点 Q (P と中心 O を結ぶ直線が、表面と交わるところ) に行く 2 つの経路を考える。表面での重力加速度を g とせよ。

経路 (i) 表面から無限小の高さで E を等速円運動で回る(大きさを持たない)人工衛星に乗って $P \rightarrow Q$ に行く。

経路 (ii) P から O を通って、 Q に到る、無限小の半径の円柱をくりぬいて、その中を P に静止していた質点が Q まで自由落下する。

ただし、自由落下の場合や、運動している人工衛星に、乗り降りするのにかかる時間は無視できるものとする。



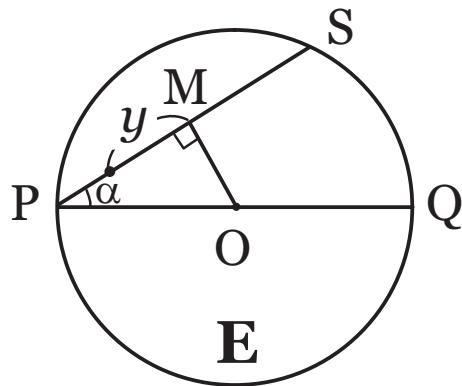
(1) P から Q まで自由落下する質点について、その運動方程式を書け。ただし、 O を原点とした位置座標を x とする。 $(O$ から P へ向かう方向を正とする。)

(2) 経路 (i), (ii) のそれぞれについて、 Q に到着するまでにかかる時間を答えよ。

次に、直線 PQ と角 α を成す直線が球体表面と交わる点を S とする。線分 PS の中点を M とする。上と同様に点 P から点 S に行く 2 つの経路を考える。

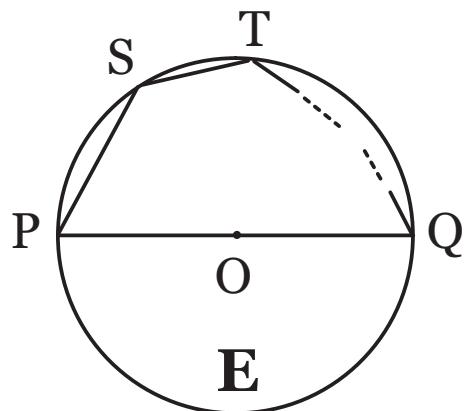
経路 (iii) 表面から無限小の高さで E を等速円運動で回る(大きさを持たない)人工衛星に乗って $P \rightarrow S$ に行く。

経路 (iv) P から M を通って、 S に到る、無限小の半径の円柱をくりぬいて、その中を P に静止していた質点が S まで摩擦なくすべり落ちる。



(次ページに続く)

- (3) P から S まですべり落ちる質点について，その運動方程式を書け。ただし，M を原点とした位置座標を y とする。(M から P へ向かう方向を正とする。)
- (4) 経路 (iii), (iv) のそれぞれについて，S に到着するまでにかかる時間を答えよ。
- (5) 経路 (iv) の行き方を平面 SPQ 内で延長して，点 P から出発して S, T, … と，表面上のいくつかの点を通過して，Q に到る種々の経路を考える。さらに，移動途中での加速度の絶対値が $g/2$ を超えないという制限をつけよう。その中で，最短時間となる経路の所要時間を答えよ。



I-2 (量子力学) (100 点)

半径 a の円環の上に拘束されている電子 (質量 m) を考察しよう。

- (1) 円環上の位置を中心角 θ を使って $a\theta$ とすると、系の定常状態を表わす Schrödinger 方程式は

$$\frac{d^2\phi(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{E}{E_0}\phi(\theta) \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (\text{A})$$

となることを示せ。ここで E は定常状態のエネルギー、 $\phi(\theta)$ は波動関数、 $\hbar = h/(2\pi)$ 、 h はプランク定数である。また E_0 はエネルギーの次元を持つ量であり、系の典型的エネルギー尺度を与える。 E_0 の値を概算せよ (単位は [eV]、有効数字 1 術)。ただし電子質量は $m \simeq 9.1 \times 10^{-31}$ [kg] $\simeq 511$ [keV/c²]、円環の半径は $a = 2.0 \times 10^{-10}$ [m] とせよ。また、光速度 $c \simeq 3.0 \times 10^8$ [m/s]、素電荷 $e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ [C]、 $\hbar \simeq 1.1 \times 10^{-34}$ [J s]。

- (2) 定常解のうちエネルギー準位が最も低い状態 (基底状態) および、二番目に低い状態 (第一励起状態) のエネルギーを求めよ。また、これらの準位に対応する波動関数とその縮退度を確定せよ。なお、この設問においては電子スピンの自由度は考えなくて良い。
- (3) この系に次のようなデルタ関数型の相互作用が加わったとしよう。

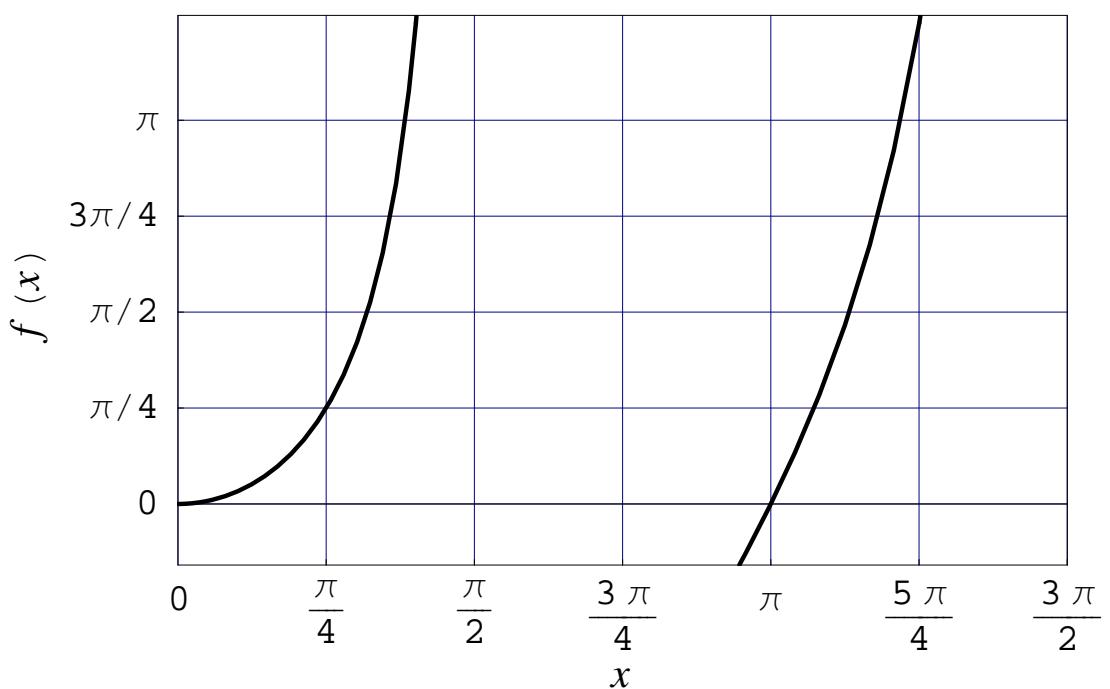
$$V(\theta) = E_0 \left\{ \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (\text{B})$$

このとき、基底状態のエネルギーはどのように変化するか。また、対応する波動関数を求めよ。必要ならば次ページのグラフを参照せよ。

- (4) この円環上に 2 つの電子が存在するとし、それらの電子の間には

$$V_{\text{spin}} = -E_0 \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2} \quad (\text{C})$$

と表わされる相互作用が働くとしよう。ただし、 $\vec{S}_{1,2}$ は 2 つの電子のスピン角運動量である。この系の基底状態のエネルギーを求めよ。また波動関数とその縮退度を確定せよ。ただし、スピン波動関数については、 $|\uparrow\rangle_1$ (粒子 1 のスピンが量子化軸の正方向を向いている状態)、 $|\downarrow\rangle_2$ (粒子 2 のスpinが量子化軸の負方向を向いている状態) 等の記法を用いよ。なお、式 (C) による第一励起状態のエネルギー変化にも注意を払うこと。また、この設問においては式 (B) で表わされる相互作用や電子間のクーロン相互作用は存在しないとせよ。



$f(x) = x \tan(x)$ のグラフ

I-3 (統計力学) (100 点)

量子状態 p における粒子数が $n_p = 0, 1$ に限られるフェルミ粒子系を考える。粒子のエネルギーを ϵ_p , 化学ポテンシャルを μ , $\beta = 1/(k_B T)$ (T は温度, k_B はボルツマン定数) として以下の問い合わせよ。

- (1) 大正準 (グランドカノニカル) 集合の分配関数

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}=0,1} e^{-\beta[E(\{n_p\})-\mu N]} \quad (\text{A})$$

を求めよ。ここで, $N = \sum_p n_p$, $E(\{n_p\}) = \sum_p \epsilon_p n_p$ であり, $\sum_{\{n_p\}=0,1}$ は N を一定としたときの各 n_p に関する和である。

- (2) n_p の平均値 $\langle n_p \rangle$ と n_p^2 の平均値 $\langle n_p^2 \rangle$ は等しいことを示せ。また, n_p の揺らぎの2乗 $(\Delta n_p)^2 \equiv \langle n_p^2 \rangle - \langle n_p \rangle^2$ の上限値を求めよ。
- (3) 圧力を P , 体積を V , エントロピーを S , 全粒子数の平均値を $\langle N \rangle$ とする
と $VdP = SdT + \langle N \rangle d\mu$ という関係式が成り立つ。これを用いて, 定温圧縮率

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{\langle N \rangle, T} \quad (\text{B})$$

は次の関係式

$$\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{V,T} = \frac{\langle N \rangle^2}{V} \kappa_T \quad (\text{C})$$

を満たすことを示せ。以下ではこの関係式を利用する場合がある。

- (4) 式 (A) から得られる関係式

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_G \quad (\text{D})$$

を用いて, 全粒子数の揺らぎの2乗と定温圧縮率の間には

$$(\Delta N)^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = k_B T \frac{\langle N \rangle^2}{V} \kappa_T \quad (\text{E})$$

という関係式があることを示せ。

(次ページに続く)

- (5) 関数 $g(\epsilon)$ が $\epsilon = \mu$ 付近で急激に変化しないとすると、フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ との間には $\beta\mu \gg 1$ の極限で

$$I = \int_0^\infty g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon \simeq \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \dots \quad (\text{F})$$

という関係が成り立つ。ここで g' は 1 階導関数である。 $G(\epsilon) = \int_0^\epsilon g(x)dx$ という関数を導入すると

$$I = - \int_0^\infty G(\epsilon)f'(\epsilon)d\epsilon \quad (\text{G})$$

となることを示すとともに、 $G(\epsilon)$ を $\epsilon = \mu$ の周りでテイラー展開することで式 (F) を導く。ただし、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (\text{H})$$

を用いてよい。

- (6) 単位エネルギー当たりの状態数（状態密度）を $\rho(\epsilon)$ とする。式 (F) を用いて $(\Delta N)^2$ の表式を求めよ。

平成 21 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いててもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 9 ページまである。

II-3 (物理数学) (100 点)

常微分方程式

(1) 次の 1 階線形齊次常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = 0 \quad (\text{A})$$

またこれを基に、以下の初期値問題の解を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = \sin 2t, \quad y(t=0) = 0 \quad (\text{B})$$

(2) 次の 2 階線形齊次常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (\text{C})$$

また、 $y(t=0) = 0, dy/dt|_{t=0} = 1$ の初期条件を満たす解を求めよ。

熱伝導方程式

1 次元の熱伝導方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{D})$$

$$u(x, t=0) = f(x)$$

の $t > 0$ における解は、グリーン関数 G を用いて次の様に表される。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau=0) f(\xi) d\xi \quad (\text{E})$$

ここで、 G は次の式を満たす。

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (\text{F})$$

このグリーン関数 G を、以下の手順に従い、求めよ。

(3) 今、グリーン関数 G を

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(k, \omega) \exp\left[i\{k(x - \xi) - \omega(t - \tau)\}\right] dk d\omega \quad (\text{G})$$

と仮定するとき、式 (F) より $g_0(k, \omega)$ を求めよ。必要であれば、次のデルタ関数のフーリエ積分表示式を用いよ。

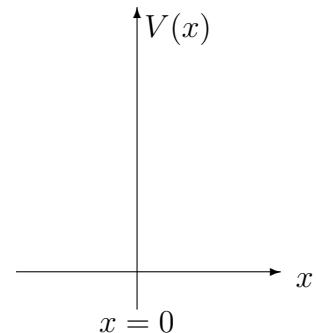
$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i p y) dp$$

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた $g_0(k, \omega)$ を式(G)に代入し、留数の定理を用いて積分を行い、グリーン関数 G を求めよ。その際、因果律を満たすことに留意せよ。必要であれば、以下の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2y^2 + by) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \quad (a > 0)$$

- (5) 問(4)で求めた G は、 $t > \tau$ において式(D)の解の一つであり、物理的には、時刻 $t = \tau$ に場所 $x = \xi$ に置かれた点源の拡散を表す。 $V = G, \xi = 0, \tau = 0$ とするとき、 $V(x)$ が様々な t に対してどのように時間発展するか。右図のように座標を設定し、模式的に図に表せ。



II-2 (電磁気学) (100 点)

電磁波を考えるとき，よく使われるのが Lorenz ゲージにおける電磁場の方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\vec{x}, t) \quad (\text{A})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{i}_e(\vec{x}, t) \quad (\text{B})$$

である。ここで， ϕ ， \vec{A} はそれぞれスカラーポテンシャル及びベクトルポテンシャル， ρ_e と \vec{i}_e はそれぞれ電荷密度及び電流密度，また Δ は 3 次元ラプラシアンである。この式の因果律を満たす解は，任意の電荷分布に対して，遅延ポテンシャル

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{C})$$

で与えられることが知られている（ベクトルポテンシャルについても同様）。通常の静電場におけるポアソン方程式の拡張として，実際に式 (C) で与えられるポテンシャルが式 (A) を満たすことを以下の方法で証明しよう。

(1) まず，式 (C) の積分を， \vec{x} 周辺の微小領域 V_ϵ に対応する ϕ_ϵ と，それ以外の領域 V_{other} に対応する ϕ_{other} に分ける。すなわち，

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_\epsilon(\vec{x}, t) + \phi_{\text{other}}(\vec{x}, t) \quad (\text{D})$$

$$\phi_\epsilon(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\epsilon d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{E})$$

$$\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{other}} d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{F})$$

V_ϵ は微小領域なので，時間間隔 $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ での電荷密度 ρ_e の変化は無視できる。すなわち，式 (E) において $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ を無視することができる。その場合， $\phi_\epsilon(\vec{x}, t)$ にラプラシアン Δ を施した結果の式を導け。なお，必要ならば以下の恒等式を用いてよい。

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}) = -4\pi\delta^3(-\vec{x}) \quad (\text{G})$$

ここで， $\delta^3(\vec{x})$ は 3 次元空間でのディラックのデルタ関数である。

(次ページに続く)

- (2) 次に, V_{other} の領域を考える。同様に, ϕ_{other} にラプラシアン Δ を施す。 ϕ_{other} の被積分関数は, \vec{x}' を固定して \vec{x} の関数として見た場合, $R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$ のみの関数になっていることに注目し, $\Delta\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t)$ を R に関する微分で表せ。なお, 極座標 (R, θ, ϕ) でのラプラシアンは任意の関数 f に対し

$$\Delta f = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (Rf) + \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{H})$$

である。

- (3) 任意の関数 $F(t - R/c)$ は, 1次元波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F(R, t) = 0 \quad (\text{I})$$

を満たす。このことと問(2)の結果から, V_ϵ 領域が無限小の極限での $\Delta\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t)$ を, $\phi(\vec{x}, t)$ とその時間微分を用いて表せ。なお, 3次元空間積分は含まない形にすること。

- (4) 上記のことから, 遅延ポテンシャルが実際に電磁場の方程式 (A) を満たしていることを示せ。

次に, 点電荷によるポテンシャルを考えよう。点電荷の密度は, 電荷 q に対し,

$$\rho_e(\vec{x}, t) = q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \quad (\text{J})$$

で与えられる。ただし, $\vec{x}_q(t)$ は点電荷の軌跡である。これを用いると, 遅延スカラーポテンシャルは

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_q(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{K})$$

となる。この積分は実行できて, その結果は Lienard-Wiechert (以下, LW) ポテンシャルと呼ばれる。以下ののような数学的技巧を用いて, LW ポテンシャルを導こう。まず, 時間にに関するデルタ関数を用いて, 次のように時間に関する積分を追加する。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c) \quad (\text{L})$$

(次ページに続く)

(5) さらに以下の手順により，式 (L) を変形し，LW ポテンシャルを求めよ。

(a) 空間にに関するデルタ関数積分を行う。

(b) $t'' = t' - t + R(t')/c$ と変数変換を行った上で， t'' に関するデルタ関数積分を行う。ここで， $\vec{R}(t') \equiv \vec{x} - \vec{x}_q(t')$ ， $R(t') \equiv |\vec{R}(t')|$ である。デルタ関数積分でも，通常の変数変換が使えるとしてよい。

(ヒント) $R(t')$ の t' 微分の際は，まず $R^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$ の微分を考えるとよい。

なお，最終的に得られる LW ポテンシャル $\phi_{\text{LW}}(\vec{x}, t)$ は，

$$t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c \quad (\text{M})$$

の解として定まる t_{ret} と， $\vec{R}(t_{\text{ret}})$ ，その絶対値 $R(t_{\text{ret}})$ ， $\vec{v}_q(t_{\text{ret}}) \equiv d\vec{x}_q(t_{\text{ret}})/dt$ を用いて表すこと。

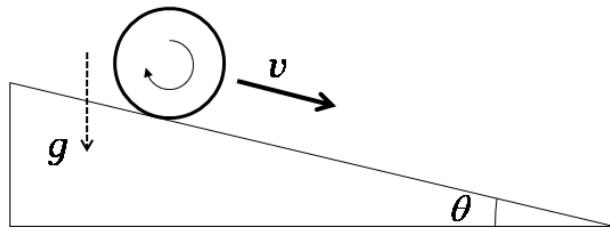
(このページは白紙である)

II-1 (力学) (100 点)

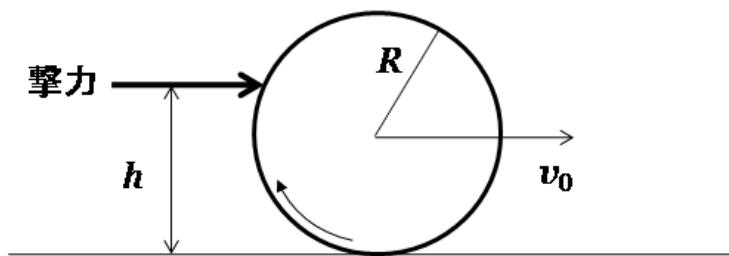
半径 R のサッカーボール（皮の薄い理想的な球殻）を考える。質量は M ，面密度は一様である。以下の問いに答えよ。

(1) 中心を通る軸の周りの慣性モーメント I を求めよ。

(2) 勾配 θ の無限に長い坂の上にこのサッカーボールを置き，時刻 $t = 0$ で手をはなした。ボールはすべらずに重力加速度 g によって転がりはじめた。時刻 t におけるボールの並進速度 $v(t)$ を求めよ。



このボールを水平な地面に置く。地面とはある一点で接しているとする。中心を含む鉛直面内（高さ h ）で水平にボールを蹴る。このとき，かかる力は一瞬なので撃力とみなせる。蹴った直後の並進速度を v_0 とし，転がりの摩擦はないと仮定する。また蹴ってもボールの形は変形しないとする。



(3) このとき，地面からどの高さで蹴れば，ボールはすべらずに地面を転がるか。その高さ h_c を求めよ。

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた高さ h_c より下を蹴った場合のボールの運動を考える。ボールを蹴った時刻を $t = 0$ とし、並進速度 $v(t)$ と回転角速度 $\omega(t)$ を求めよ。また、並進速度 $v(t)$ と中心に対する表面の速度 $R\omega(t)$ の時間変化を同一のグラフ上に図示せよ。すべり摩擦係数を μ とする。

平成 21 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (4) 問題冊子は表紙を含めて 17 ページまである。
-

III-1 量子暗号

III-2 電磁気学応用

III-3 宇宙衝撃波

III-4 黒体放射

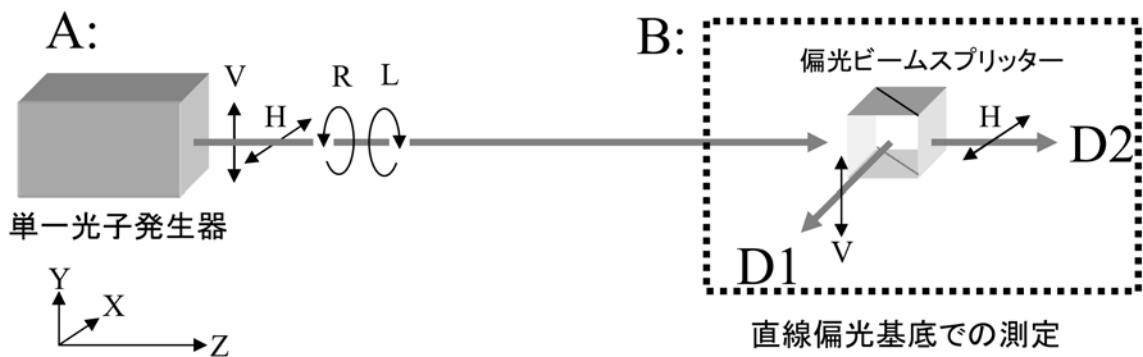
III-5 物理数学

III-6 量子力学

III-7 統計力学

III-1 (量子暗号) (100 点)

データの送信者を A , 受信者を B とする。下図のように, A から B へ特定の偏光状態の单一光子を多数回送ることにより, 両者で 0 および 1 からなるデータを共有する実験を考える。光の進行方向を Z 方向とし, X 軸方向に電場が振動している直線偏光を H , Y 軸方向に電場が振動している直線偏光を V と表記する。また, 進行方向に向かい, (X,Y) 平面で右周りに回転している円偏光を R , 左周りに回転している円偏光を L と表記する。



- (1) 光検出器の例を一つ挙げ, その原理を 50 字以内で簡潔に述べよ。
- (2) 複屈折性結晶などを利用した光学素子で, 特定の軸 (光学軸) に平行な偏光成分とそれと垂直な偏光成分との間で, 透過した光に 90 度の位相差をつけることができるものを $\lambda/4$ 板という。直線偏光 H の光から円偏光 R の光を得るには $\lambda/4$ 板をどのように設置すればよいか, 光学軸と入射する直線偏光の方向に注意して説明せよ。また, 円偏光 L の光はどのようにして得られるか説明せよ。
- (3) 上図点線部に示したように, 単一光子の直線偏光 V または H の検出は, 2 つの光検出器 $D1$ および $D2$, そして「偏光ビームスプリッター」を用いることにより可能となる。ただし, 「偏光ビームスプリッター」は, V 偏光の場合は反射し, H 偏光の場合は透過するようなビームスプリッターである。ここで, $\lambda/4$ 板を追加することで, 円偏光基底での偏光測定, すなわち円偏光 R と L の区別ができるることを説明し, その配置を具体的に図示せよ。

(次ページに続く)

送信者 A は一定の時間間隔で单一光子を送る際に, 直線偏光 V および H , 円偏光 R および L の 4 つの状態をランダムに送ることにする。受信者 B は A がどちらの基底で偏光を送信したかは知らず, 検出する際には, 直線偏光基底と円偏光基底の測定をランダムに行う。これを行なったところ, 次のような結果になった。ただし, 「直」とあるのは直線偏光基底, 「円」とあるのは円偏光基底をそれぞれ表す。

A の偏光	V	R	R	H	V	L	V	R	L	V	R	V	H	L	L
B での測定基底	直	円	直	円	円	円	直	直	直	円	円	円	直	直	円
B の測定結果	V	R	V	R	無	L	V	H	無	L	R	R	H	V	L

- (4) B での測定結果において, 「無」とあるのは, $D1, D2$ とも光子を検出しなかった場合を表している。送信中のロスはないとするとき, 検出器の量子効率を推定せよ。ただし, $D1$ と $D2$ は同じ量子効率とする。
- (5) A と B は, 選択した基底について連絡をとり合い, A と B で基底が一致している場合のみを取り出し, 0 と 1 からなるデータを作成する。上の結果に対してこのデータを作成せよ。ただし, 下記表のように各偏光状態に 0 および 1 のビットを割り振り, 「無」はデータとして採用しない。

偏光	V	H	R	L
ビット	0	1	0	1

問(5)の手続きで得られたデータを鍵データと呼ぼう。これをもとに暗号化および復号化を以下の手続きで行なう。鍵データを a , 送信したいデータを b としたとき, 暗号化データ $c = XOR(a, b)$ は以下の表のように定義される。

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$c = XOR(a, b)$	0	1	1	0

- (6) 今, 送信したいデータを $b = [0101001]$ としたとき, 暗号化したデータ c を具体的に求めよ。
- (7) データの復号は $d = XOR(c, a)$ で行なえることを示せ。

III-2(電磁気学応用) (100点)

物体を垂直真上に投げると元の場所に戻ってくるが、戻るまでに必要な時間は初速度に依存する。逆に、初速度の異なる物体については投げ上げるタイミングを調整すれば、全ての物体がほぼ同時に元の場所に戻るようにすることも可能である(図1参照)。容易に想像できるように、電子についても同様な現象を起こすことが出来るが、これを上手に使うとマイクロ波を增幅する装置(反射型クライストロン)を実現することが出来る。以下ではこの装置の原理を考察しよう。

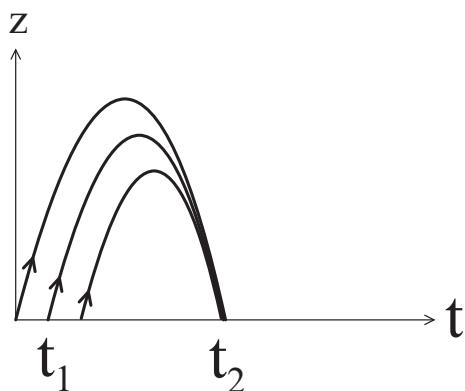


図1: 真上に投げられた物体の軌跡: 初速度の小さい物体程遅く投げ上げれば、物体は同時に元の場所に戻る。

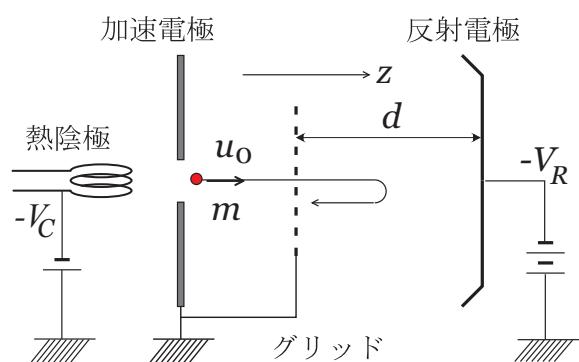


図2: 热電子加速用電極構造

図2に示されるように、熱電子を発生する熱陰極(フィラメント)、電子の初期速度を与える加速電極、電子を押し戻す反射電極、及びグリッドからなる装置を考える。加速電極には小さな穴があり、そこから電子はグリッドや反射電極の領域に進入する。またグリッドは金網状の金属から出来ているため、電子はグリッドを自由に通過する。各電極の電位については、熱陰極が $-V_C$ ($V_C > 0$)、反射電極が $-V_R$ ($V_R > V_C$)、その他は接地されているとする。各電極により作られる電場は z 方向(図2参照)に平行であり、かつ(電場のある領域では)一様であるとする。

- (1) 热陰極から出た電子(初速度はゼロ)が加速電極を通過した直後の速度を u_0 とする。電子の質量を m 、電荷を $-e$ ($e > 0$) とするとき、 u_0 を m 、 e 、 V_C を用いて表せ。

(次ページに続く)

- (2) 電子はグリッドを通過した後, 反射電極の作る電場により押し戻される。速度 u_0 をもってグリッドを出発し, 再度グリッドに戻るまでの時間 τ を求め, u_0 , V_R , d , m , e を用いて表せ。ただし d は, グリッドと反射電極間の距離である。

反射型クライストロン装置 反射型クライストロンは, 図 2 に示される電極のうち, グリッド部を円盤状金属空洞で置き換えたものである(図 3 参照)。ただし空洞の中央部は, 2 枚の金網状グリッド G_0 および G_1 から成り立っている。以下ではグリッド間に時間変動する電圧が印加されている状況を考える。電子が時刻 t_0 において G_0 に到達したとき, グリッド間には, G_0 を基準にして

$$V_g \sin(\omega t_0), \quad V_g > 0 \quad (\text{A})$$

で表される電圧が存在しているとしよう。上式で ω は空洞の共振角周波数であるが, ここでは与えられた定数としてよい。

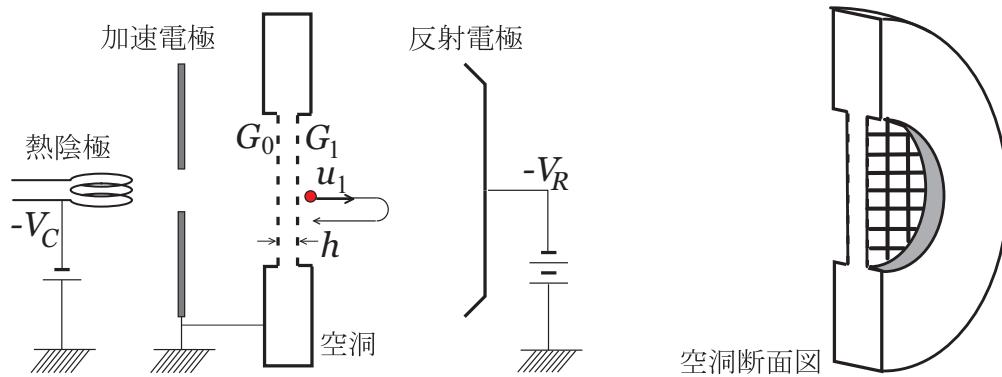


図 3: (左) 反射型クライストロン概念図, (右) 空洞部断面図

- (3) G_1 面に於ける電子速度 u_1 は, $V_g/V_C \ll 1$ のとき

$$u_1 \simeq u_0 \left[1 + \frac{V_g}{2V_C} \sin(\omega t_0) \right] \quad (\text{B})$$

と近似出来ることを示せ。ここで u_0 は G_0 面に於ける電子速度である。またグリッドの間隙を通過する時間は, 間隙を h とすると, h/u_0 程度であるが, この時間は $1/\omega$ に比較して非常に短いとした ($h/u_0 \ll 1/\omega$)。

- (4) 電子が G_1 を通過する時刻を t_1 , 反射電極により押し戻されて再び G_1 に戻ってくる時刻を t_2 とする。 $t_2 - t_1$ を τ , V_g , V_C , ω , t_1 を用いて表せ。なお, 問(3)での条件 $h/u_0 \ll 1/\omega$ より, $t_0 \simeq t_1$ と近似して良いものとせよ。

(次ページに続く)

集群(パンチ)条件とマイクロ波の增幅 時間間隔 $[t_1, t_1 + dt_1]$ に G_1 を出発した電子が、再度 G_1 に戻る時間間隔を $[t_2, t_2 + dt_2]$ とする。単位時間当たりに G_1 面を出発する、および戻ってくる電子の数を、それぞれ、 N_1 および N_2 と書くと電子数の保存則より

$$N_1 dt_1 = N_2 dt_2 \quad (C)$$

が成り立つ。このうち N_1 については、熱陰極の性質より、定数と見なせる。

- (5) N_2 を N_1 , t_1 , ω , τ を用いて表せ。これより、特定のタイミング t_1 で G_1 を通過した電子は、 t_2 で集群することが分かる。空洞に再突入する電子の個数を単位時間当たり最大とするには t_1 をどの様に選べば良いか。
- (6) 次に t_2 のタイミングに注目しよう。もし電子が空洞に再突入したとき、グリッド間の電場が電子を減速させる位相であるならば、電子の運動エネルギーは減少する。減速量が最大となる t_2 を定めよ。
- (7) 問(5)の条件(集群条件)と問(6)の条件(減速位相条件)を同時に満足するには、 $\omega\tau$ はどの様な条件を満たせば良いか。
- (8) グリッド間隙に電場を作り出す源が空洞に蓄えられたマイクロ波であり、その角周波数 ω が問(7)の条件を満たすならば、空洞に蓄えられたマイクロ波のエネルギーは全体として増していく。この理由を簡単に説明せよ。

(このページは白紙である)

III-3 (宇宙衝撃波) (100 点)

一様な密度をもつ星間物質中において、爆発エネルギー E_0 を持つ超新星爆発が起きた後、星間物質中を衝撃波が伝播していく問題を考える。

図1のように、衝撃波面の静止系で見た時の衝撃波上流の流体速度、質量密度、圧力を v_1, ρ_1, p_1 とし、衝撃波下流の量を同様に v_2, ρ_2, p_2 とする ($v_1, v_2 > 0$)。強い衝撃波の極限では、以下の Rankine-Hugoniot の関係式が成り立つ。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (\text{A})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} \quad (\text{B})$$

ここで、 $M_1 \equiv v_1/c_1$ は上流にとっての衝撃波速度のマッハ数であり、 $c_1 = (\gamma p_1/\rho_1)^{1/2}$ は上流での音速である。また、 γ は断熱指数（比熱比）である。

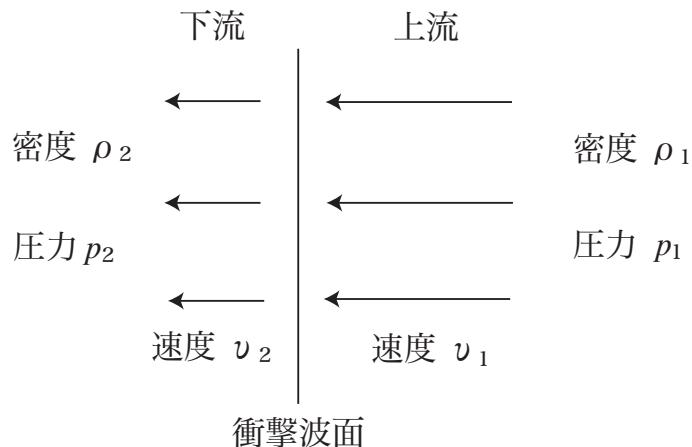


図1：衝撃波面の静止系で見た時の上流と下流の流体の物理量

簡単のため、球対称の爆発を考える。時刻 $t = 0$ で爆発が起き、衝撃波面が星間空間に広がっていく。時刻 t での衝撃波面の位置を $R(t)$ 、衝撃波の伝播速度を $V_{sh} = dR/dt$ とする。星間物質は一様な密度 ρ_0 で星間空間において完全に静止しているとする。衝撃波面内（衝撃波面の作る球面の内側の領域）に含まれる物質はもとの星間物質のみを考え、超新星自身が放出した物質の質量は無視できるものとする。衝撃波面の通過前後の物理量は上記 Rankine-Hugoniot の関係式を満たすものとする。従って、 $V_{sh} = v_1$ 、また $\rho_0 = \rho_1$ である。さらに、衝撃波面通過後の物質の空間的構造や、放射によるエネルギー損失（冷却）は考えない。すなわち、衝撃波面内に取り込まれた全ての星間物質の物理量は単一の密度、圧力、速度を持つものとする。

（次ページに続く）

- (1) ある時刻 t までに衝撃波面内に取り込まれた星間物質の総質量 $M_{\text{mat}}(t)$ を , R と ρ_0 を用いて表せ。
- (2) 衝撃波面内に取り込まれた物質は衝撲波によって加熱されている。気体の単位質量あたりの内部エネルギーは $\epsilon_U = (\gamma - 1)^{-1} p / \rho$ で与えられることを用いて , ある時刻 t での衝撲波面内の物質がもつ全内部エネルギー $U(t)$ を $\rho_0, R, p_2, \rho_2, \gamma$ で表せ。さらに , Rankine-Hugoniot の関係式を用いて p_2, ρ_2 を消去し , $U(t)$ を $\rho_0, R, V_{\text{sh}}, \gamma$ を用いて表せ。
- (3) 衝撲波面内の物質が星間空間の静止系に対して膨張する速度 V_{mat} は , V_{sh} より遅い。 v_2 は衝撲波面の静止系においての速度であることに留意して , V_{mat} を , V_{sh} と v_2 を用いて表せ。さらに , Rankine-Hugoniot の関係式を用いて v_2 を消去し , V_{mat} を V_{sh} と γ を用いて表せ。
- (4) ある時刻 t における衝撲波面内に含まれる物質の全運動エネルギー $K(t)$ を $\rho_0, R, V_{\text{sh}}, \gamma$ を用いて表し , $K(t)$ が $U(t)$ と一致することを示せ。
- (5) 冷却が無視できるという仮定により , 上記の内部エネルギーと運動エネルギーの和が保存され , それは爆発エネルギー E_0 と等しいはずである。このことから , $R(t)$ が満たす微分方程式をたて , その解を求めよ。
- (6) 爆発エネルギー $E_0 = 10^{51}$ [erg] , 星間空間の水素原子数密度 $n = 1$ [cm^{-3}] としたとき , $t = 10^4$ [yr] の時の衝撲波の位置をパーセク (pc) 単位で求めよ。ファクター 2 程度の計算精度でよい。星間物質は水素だけでできていると考えてよい。また , $\gamma = 5/3$ とする。なお , 以下の数値や変換を用いてよい。 $1 [\text{erg}] = 10^{-7} [\text{J}]$, 陽子質量 $m_p = 1.7 \times 10^{-24}$ [g] , $1 [\text{pc}] = 3.1 \times 10^{18}$ [cm]。また , 5 乗根を求めるのに以下の表を用いてよい。

$$\begin{aligned}
 2^5 &= 32 \\
 3^5 &= 243 \\
 4^5 &= 1024 \\
 5^5 &= 3125 \\
 6^5 &= 7776 \\
 7^5 &= 16807 \\
 8^5 &= 32768 \\
 9^5 &= 59049
 \end{aligned}$$

III-4(黒体放射) (100点)

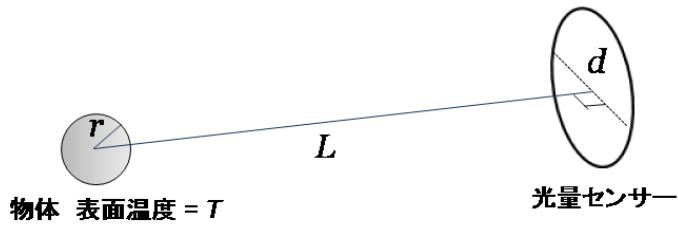
黒体放射をする温度 T の物体を考える。物体表面の単位面積から単位波長幅、単位時間、立体角 2π に、ある波長 λ において放射される光のエネルギーは

$$F_\lambda = \pi B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1} \quad (\text{A})$$

で与えられる。ここで、 $B_\lambda(T)$ はプランク関数である。また、 h はプランク定数、 k_B はボルツマン定数、 c は光の速度である。

- (1) 物体の単位面積から放射される、単位波長幅、単位時間あたりの、ある波長 λ での光子数を P とする。 P を $B_\lambda(T)$ を使って表せ。

光量センサーと温度の測定 物体を半径 r の球とし、その中心から距離 $L(\gg r)$ のところに物体と正対する直径 $d(\ll L)$ の円形受光面をもつ光量センサーをおく。光量センサーの光検出効率（到達した光子のうち実際に検出する光子の割合）は、簡単のため、1とする。センサーの前には中心波長 λ 、透過波長幅 $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda$ 内の透過率は 100%) のフィルターが設置してある。



- (2) センサーが Δt 秒間に検出する光子数 N を、 $B_\lambda(T)$ を使って表せ。但し $\Delta\lambda \ll \lambda$ であり、フィルター内において $B_\lambda(T)$ と光子エネルギーは、常に中心波長 λ での値で近似的に表すことができると仮定してよい。

(次ページに続く)

- (3) 物体までの距離または物体の半径が未知の場合，单一波長で測定した光の強度からは，直接物体の温度を求めることができない。しかし，2つの波長 λ_1 , λ_2 で強度を測ると，その強度比から物体の温度を求めることができる。以下では，プランク関数が，ウィーンの式

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \quad (\text{B})$$

で近似できる波長帯で測定を行なう場合を考える。問(2)の結果を使い，物体の温度 T を，波長 λ_1, λ_2 と，それぞれの波長で検出した光子数 N_1, N_2 を用いて表せ。なお，フィルターの透過波長幅 $\Delta\lambda$ ，および測定を行なう時間 Δt は，2つの波長帯でそれぞれ等しい ($\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$, $\Delta t_1 = \Delta t_2$) とする。

- (4) 問(3)の方法で求めた温度の決定精度（統計誤差） $\delta T/T$ は，波長 λ_1, λ_2 で検出した光子数 N_1, N_2 により表すことができる。ただし，光量センサーで検出した光子数 N の統計誤差は， $\delta N/N \sim 1/\sqrt{N}$ で与えられるとせよ。また，ある物理量 F が測定値 x と y の関数であり， x と y の統計誤差 δx と δy が無相関である場合， F の統計誤差は

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y\right)^2$$

で与えられる。 $\delta T/T$ を， $\lambda_1, \lambda_2, N_1, N_2$ を用いて表せ。

恒星温度の観測 地球から十分遠方に存在する恒星の温度を，問(3)の方法により求める観測について考える。必要に応じて次の指數・対数表を使ってよい。

$\exp(x)$	1.1	1.2	1.5	2	5	10	20	50	100	200	x
x	0.095	0.18	0.41	0.69	1.6	2.3	3.0	3.9	4.6	5.3	$\ln(x)$

- (5) 恒星の温度が $T = 6000[\text{K}]$ であるとする。この温度においてプランク関数が，式(B)のウィーンの式を用いて2%以下の誤差で近似できるための波長 λ に対する条件を，有効数字1桁で求めよ。 $h = 6.6 \times 10^{-34} [\text{J s}]$, $k_B = 1.4 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$, $c = 3.0 \times 10^8 [\text{m/s}]$ を用いてよい。

- (6) ある恒星の温度を，2つの波長 $\lambda_1 = 550[\text{nm}], \lambda_2 = 460[\text{nm}]$ で観測して求めたい。恒星の温度が $T = 6000[\text{K}]$ のとき， $\delta T = 10[\text{K}]$ の決定精度で温度を求めるためには，波長 λ_1 でどの程度の光子数を観測する必要があるか，有効数字1桁で概算せよ。ここで，それぞれの波長で検出する光子数の比は， $N_1/N_2 = 1.1$ としてよい。また簡単のため，検出器のノイズは無視し，さらに，恒星からの放射は，観測波長においてウィーンの式で近似される黒体放射であると仮定してよい。

III-5 (物理数学) (100 点)

フーリエ変換 実軸上で定義された, なめらかな (つまり無限回まで微分可能で), 2乗可積分な複素数値関数の全体を \mathcal{V} とする。すなわち

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad f(x) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A})$$

である。 \mathcal{V} 上の線形変換 (線形演算子) として, フーリエ変換 \mathcal{F} , $\mathcal{V} \ni f \rightarrow \mathcal{F}f \in \mathcal{V}$ を次のように定義する。

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx, \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B})$$

解答に当たっては, 積分同士および微分と積分の順序変換可能性やデルタ関数の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dx = 2\pi\delta(p) \quad (\text{C})$$

およびガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{D})$$

は既知としてよい。

- (1) 線形変換としてのフーリエ変換を 2 回続けて行う演算 \mathcal{F}^2 を考えよう。任意の $f \in \mathcal{V}$ について

$$(\mathcal{F}^2 f)(z) = f(-z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{E})$$

を示せ。

- (2) 線形変換としてのフーリエ変換を 4 回続けて行う演算 \mathcal{F}^4 が恒等変換 I になっていること

$$\mathcal{F}^4 = I \Leftrightarrow (\mathcal{F}^4 f)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{F})$$

を示せ。

- (3) 線形変換としてのフーリエ変換 \mathcal{F} のスペクトル, つまり可能な固有値の全体を答えよ。多重度については, 触れないでよい。

- (4) ガウス関数 $g(x) = e^{-x^2/2}$ がフーリエ変換の固有値 1 の固有関数であること

$$\mathcal{F}g = g \quad \text{つまり} \quad (\mathcal{F}g)(x) = g(x) \quad (\text{G})$$

を示せ。

(次ページに続く)

- (5) 1次元の調和振動子の量子力学のハミルトニアン \mathcal{H} ($m = \hbar = \omega = 1$ となる単位系を採用)

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{H})$$

も、 \mathcal{V} 上の線形変換（線形演算子）であるとしよう。 \mathcal{F} と \mathcal{H} がその共通の定義域の上で、線形変換（線形演算子）として可換であること

$$\mathcal{F}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{F} \quad (\text{I})$$

を示せ。

- (6) \mathcal{V} 上の線形変換（線形演算子）として、フーリエ変換 \mathcal{F} のすべての固有値とそれに属する固有関数を求めよ。ここで、エルミートの多項式 $H_n(x)$ の母関数

$$G(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad (\text{J})$$

と、それから得られる関係式

$$G(x, \frac{t}{2}) = e^{tx-\frac{t^2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{2^n n!} \quad (\text{K})$$

および、関数 $e^{-x^2/2} H_n(x)$ が問(5)の1次元の調和振動子のハミルトニアン \mathcal{H} の固有関数であることは既知としてよい。

III-6 (量子力学) (100 点)

質量 m , 電荷 $-e$ の電子と, 質量 m , 電荷 $+e$ の正孔(ホール)が1次元空間内で相互作用しながら運動している。電子と正孔の位置座標をそれぞれ x_1, x_2 とするとき, それらの間には距離 $|x_1 - x_2|$ に依存したポテンシャル $V(x_1 - x_2)$ が働いている。 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) として以下の問い合わせよ。ただし, 電子と正孔のスピンの自由度は考えなくてよい。

- (1) 電子と正孔の重心座標を R , 相対座標を x とすると, ハミルトニアンは,

$$H_T = H_R + H_x, \quad H_R = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2}, \quad H_x = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (\text{A})$$

で与えられることを示せ。ここで, $M = 2m$, $\mu = m/2$ である。

以下では, 相対運動に関するハミルトニアン H_x を考えよう。電子と正孔は相対運動による束縛状態を, ポテンシャル

$$V(x) = -\frac{e^2}{|x|} \left(1 - \frac{b}{|x|}\right) \quad (\text{B})$$

のもとで形成しているとする。ここで, $b > 0$ とする。無次元化された座標変数 $z = x/a_0$ を導入すると, H_x は

$$H_0 = -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{2}{|z|} \left(1 - \frac{b_0}{|z|}\right) \quad (\text{C})$$

の定数倍となる。ここで, $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$, $b_0 = b/a_0$ である。

- (2) まずは $z > 0$ の領域に限定して議論を進める。実パラメータ c ($c > 1$) を用いて, 次の互いにエルミート共役な演算子の対を定義する。

$$A^\dagger(c) = -\frac{d}{dz} - \frac{c}{z} + \frac{1}{c}, \quad A(c) = \frac{d}{dz} - \frac{c}{z} + \frac{1}{c} \quad (\text{D})$$

このとき, $A^\dagger(c)A(c)$ と $A(c-1)A^\dagger(c-1)$ の関係を示せ。

- (3) 演算子 $H(c) = A^\dagger(c)A(c) - 1/c^2$ を導入する。 c を調整することにより $H(c)$ を H_0 と一致させることができる。このときの c を b_0 を用いて表せ。

- (4) n を 0 以上の整数とする。ある関数 $\phi_{c+n}(z)$ を $A(c+n)\phi_{c+n}(z) = 0$ の解として定義する。この $\phi_{c+n}(z)$ は演算子 $H(c+n)$ の最低エネルギー固有値に属する固有状態であることを示せ。

- (5) $n \geq 1$ のとき

$$A^\dagger(c)A^\dagger(c+1) \dots A^\dagger(c+n-1)\phi_{c+n}(z) \quad (\text{E})$$

が $H(c)$ の固有関数となることを示すとともに, そのときの固有エネルギーを求めよ。

(次ページに続く)

- (6) 上記の結果を用いて $z > 0$ の領域に限定したときの H_x の基底状態および第一励起状態のエネルギー準位と波動関数を求めよ。ただし，波動関数の規格化因子は考慮しなくてよい。
- (7) 次に， $z < 0$ の領域を含む z の全領域を考える。 $b \ll a_0$ のときのポテンシャルの概形を図示せよ。また， $z = 0$ に関して対称なポテンシャルによる束縛状態の固有関数は偶関数または奇関数であることに注意して，最低エネルギー状態の特徴を述べるとともに，その状態の波動関数の概形を図示せよ。

III-7 (統計力学) (100 点)

N 個の格子点上に x, y, z 方向の成分を持つ大きさ S のスピン $s_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ を考え ($i = 1, 2, \dots, N$) , 系のハミルトニアンは式 (A) で与えられるとする。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{s}_i \quad (\text{A})$$

ここで , J は相互作用の強さ , \mathbf{h} は外部磁場である。また , $\sum_{\langle i,j \rangle}$ は最近接するスピン対の和を表す。

このハミルトニアンは , 強さ h で z 方向を向いた外部磁場 \mathbf{h} を与えた場合 , s_i の z 成分の期待値 $m = \langle s_i^z \rangle$ を用いて実効的に

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = NJqm^2/2 - (Jqm + h) \sum_i s_i^z \quad (\text{B})$$

と近似することができる。これを平均場近似という。ここで , q は最近接格子数である。対称性から $m = \langle s_i \rangle$ は z 方向のみを持ち , m は単位格子あたりの磁化を与える。

- (1) s_i^z は , $s_i^z = -S, -S+1, \dots, S-1, S$ の $(2S+1)$ 個の値をとる。式 (B) で与えられる実効的ハミルトニアンを用いると , 系のヘルムホルツ自由エネルギーが次のように表せることを示せ。

$$F(h) = N \left[Jqm^2/2 - \beta^{-1} \ln \frac{\sinh\{\beta(Jqm + h)(S + 1/2)\}}{\sinh\{\beta(Jqm + h)/2\}} \right] \quad (\text{C})$$

ここで , $\beta = 1/(k_B T)$, k_B はボルツマン定数 , T は温度である。

- (2) 式 (B) の実効的ハミルトニアンのもとで , 単位格子あたりの磁化 m の満たすべき式を書き下せ。
- (3) 問 (2) の結果を用いて , $h = 0$ で , 系を高温から冷やしていくとき , 自発磁化 $m \neq 0$ が生じ始める温度 (臨界温度 T_c) を求めよ。ただし , 必要ならば次の展開式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7) \\ \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) \\ \coth(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた T_c 近傍での $m(T)$ の温度依存性を求め、その振る舞いを (T, m) 平面上に図示せよ。
- (5) 式(B)の近似のもとで、スピン s_i が大きさ $S = 1$ の古典スピン（様々な方向をとることができる）の場合の分配関数とヘルムホルツ自由エネルギーを求めよ。

平成 21 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間 30 分)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1, IV-2 の解答は、それぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 5 ページまである。

(このページは白紙である)

平成 20 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。

I-1 (力学) (100 点)

3 次元空間内を運動する一つの質点の系を考える。質点の時刻 t における位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ 、速度ベクトルを $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ として、この系のラグランジアンが $L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ で与えられるとする。

- (1) 質点の運動は「最小作用の原理」から決定される。「最小作用の原理」を簡潔に説明し、この原理から オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (\text{A})$$

を導く。なお、デカルト座標系における $\mathbf{r}(t)$ の成分表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を用いると、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)$$

である。

- (2) 質点 (質量 m) の慣性系におけるラグランジアンは、

$$L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t)^2 - U(\mathbf{r}(t)) \quad (\text{B})$$

で与えられる。ここに、 $U(\mathbf{r}(t))$ は質点に働く力のポテンシャルエネルギーである。特に $U(\mathbf{r}(t))$ がデカルト座標系での成分表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を用いて

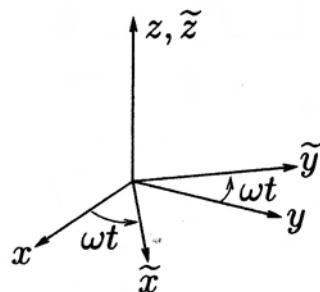
$$U(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2}m\Omega^2(x(t)^2 + y(t)^2) + mgz(t) \quad (\text{C})$$

で与えられる場合に、オイラー・ラグランジュ方程式 (A) を解いて $x(t)$, $y(t)$ および $z(t)$ を求めよ。ただし、 Ω と g は定数であり、時刻 $t = 0$ における初期条件を

$$\mathbf{r}(0) = (a, 0, b), \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, v, w)$$

とする。

- (3) 以上で考えた慣性系に対して、座標の原点を共有し、時間に依らない一定の角速度 ω で z 軸まわりに回転する座標系 (非慣性系) での質点の運動を考えよう。



(次ページに続く)

慣性系の座標 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と回転系の座標 $\tilde{\mathbf{r}}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} \quad (D)$$

の関係がある。

回転座標系における質点の運動を定めるラグランジアン $L_R(\tilde{\mathbf{r}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{r}}}(t))$ は、慣性系のラグランジアン (B) に (D) の関係を代入することにより得られる。この回転系のラグランジアン L_R を $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}$ を用いて与えよ。ただし、ポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r}(t))$ は (C) のものとする。さらに、得られた L_R から $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ の運動方程式を求めよ。

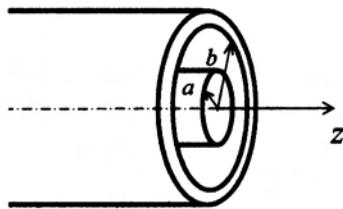
- (4) 今、回転系が慣性系に対して非常にゆっくりと回転しており、角速度 ω が微小である場合を考える。前問 (3) で求めた回転系での運動方程式の解 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ を

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = (a, 0, 0), \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}(0) = (0, 0, 0)$$

の初期条件で ω の 1 次まで求めよ。(なお、 t は有限とする。)

I-2 (電磁気学) (100 点)

信号測定などに頻繁に用いられる同軸ケーブルのモデルを考える。図のように、半径 a の導体円柱を、同軸で内径 b の導体円筒で囲んだ。導体の電気抵抗は充分に小さく、円柱と円筒は z 方向に充分に長い。 z 軸からの距離を ρ とする。円柱と円筒の間の空間 ($a < \rho < b$) と円筒の外の空間は真空で、誘電率が ϵ_0 、透磁率が μ_0 である。



(SI 単位系での μ_0 の値は、電流の強さアンペアの定義から決まっている。すなわち、距離 1m をへだてて置かれた 2 本の平行な 1A の定常電流間に作用する力を、1m あたり $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ としている。)

以下では、円筒座標 (ρ, φ, z) でのラプラシアン、発散、回転について次の公式を使って良い。

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

ここで、 \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ , \vec{e}_z はそれぞれの方向の単位ベクトル。

- (1) まず、内側の円柱に、 z 方向の単位長さあたり電荷 λ を与え、外側の円筒を接地した。静電ポテンシャル $\phi(\rho)$ を、ポアソン方程式を用いて求めよ。
- (2) この系の、単位長さあたりの電気容量 C を求めよ。また、電場 $\vec{E}(\rho)$ を求めよ。円筒座標成分で表して良い。
- (3) 次に、内側の円柱に、 z 方向の正の向きに定常電流 I を流し、外側の円筒には定常電流 $-I$ を流した。 $a < \rho < b$ の空間と円筒の外の空間において、磁束密度 $\vec{B}(\rho)$ を求めよ。円筒座標成分で表して良い。

(次ページに続く)

今度は、円柱に生じる電荷も流れる電流も、 z と時刻 t に依存して $\lambda(z, t), I(z, t)$ となっている場合を考える。

- (4) $a < \rho < b$ の空間での電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} が、前問までの静電磁場の λ と I を $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ に置き換えることで求められるものとする。それらに ファラデーの電磁誘導の法則を適用することで、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ の間に成り立つ偏微分方程式を導け。
- (5) 同様に、 $a < \rho < b$ の空間にアンペール・マクスウェルの法則を適用することで、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ の間に成り立つ偏微分方程式を導け。また、この偏微分方程式の物理的意味を述べよ。
- (6) 上記2つの偏微分方程式から、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ は波として伝わることを示せ。
- (7) 単位時間あたり $a < \rho < b$ の空間を流れるエネルギーを、電流 $I(z, t)$ と、円柱と円筒の電位差 $\phi_a(z, t)$ とを使って表せ。
- (8) $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ が z 軸の正の向きに伝播していく場合を考え、電位差と電流の比 ϕ_a/I を特性インピーダンスと定義しよう。円筒と円柱の半径の比 b/a が 2.7 のとき、この系の特性インピーダンスは何オームか、有効数字1桁で答えよ。

I-3 (物理数学) (100 点)

- (1) 次の式が成り立つことを示せ。ただし、 a は実定数とする。

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi|a|}{2} \quad (\text{A})$$

(ヒント 例えれば、主値積分 $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_\epsilon^R \right) \frac{1 - e^{2iax}}{x^2} dx$ の計算に留数積分の方法を適用してみよ。)

- (2) 3 次元空間 \mathbb{R}^3 の原点にあった粒子が、順に $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ の変位を行った後の位置を

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_N$$

と表す。ただし、各変位 \mathbf{r}_i は確率的に値をとるものとし、その値はそれぞれ独立に、同じ確率密度関数 $p(\mathbf{r})$ で与えられる分布に従うとする。すなわち、変位 \mathbf{r}_i がある領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内の値をとる確率は、積分

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{r}) d^3 r = \iiint_{\Omega} p(x, y, z) dx dy dz$$

で与えられ ((x, y, z) は変位 \mathbf{r} に対するデカルト座標を表す。)、特に $\Omega = \mathbb{R}^3$ であればこの値は 1 になる。つまり、

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{r}) d^3 r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) dx dy dz = 1$$

である。 \mathbf{R}_N に対する確率密度関数を $P_N(\mathbf{R})$ とする。

- (a) $p(\mathbf{r}), P_N(\mathbf{R})$ のフーリエ変換をそれぞれ

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 r, \quad \hat{P}_N(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} P_N(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} d^3 \mathbf{R}$$

とするとき、 $\hat{p}(\mathbf{k})$ と $\hat{P}_N(\mathbf{k})$ の間の関係を求めよ。

(ヒント 例ええば、 $N = 2$ のとき $P_2(\mathbf{R}) = \int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{R} - \mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d^3 r$ である。)

- (b) 各変位の大きさは一定値 ℓ で、等方的な確率で向きを選ぶ場合、確率密度関数は

$$p(\mathbf{r}) = C \delta(|\mathbf{r}| - \ell)$$

と表される。定数 C を求めよ。

以下、(b) の場合について考える。

- (c) $\hat{p}(\mathbf{k})$ を求めよ。

(次ページに続く)

- (d) $P_3(\mathbf{R})$ を求めよ。結果は $|\mathbf{R}|$ のみの関数になる。このグラフを描け。
(ヒント 必要ならば、次の式が成り立つことを用いよ。)

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \sin^3 \beta \\ &= \frac{1}{8} [\cos(\alpha + 3\beta) - 3 \cos(\alpha + \beta) + 3 \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - 3\beta)] \end{aligned}$$

また、公式 (A) を用いることを考えよ。)

- (e) $\xi_N = \frac{\mathbf{R}_N}{\sqrt{N}}$ の確率密度関数は $N \rightarrow \infty$ で収束する。この収束先の関数を求めよ。

(ヒント c を正の定数とするとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

が成り立つ。)

平成20年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いててもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。

II-1 (力学) (100 点)

一様な重力を受ける質点の、滑らかな曲線に沿った運動を考える。図1のように鉛直下方に x 軸、水平方向に y 軸をとる。原点Oから質点を初速度ゼロで放つと、 xy 面内の曲線にそって運動をはじめ、点 $P(x_1, y_1)$ に達する。曲線との摩擦、空気抵抗は働くないとする。ここでO、P間の所要時間 T_1 を最小にする曲線の形を決定する問題を考えてみよう。

必要であれば、 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ を用いよ。

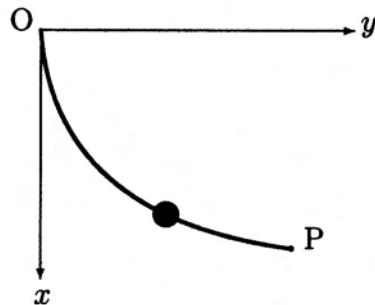


図 1:

- (1) 時刻 t における位置 (x, y) での質点の速さはエネルギー保存則より $\sqrt{2gx}$ である。ただし g は重力加速度である。曲線に沿って原点から測った質点までの距離を s とする。 $ds = \sqrt{2gx}dt$ であることを考慮して、所要時間 T_1 を、 $x, dy/dx$ を含む関数の x に関する積分の形に表せ。

一般に、定まった二点間での関数 L の積分

$$\int L(x, y, dy/dx) dx$$

が停留値（極値）をとるように関数 $y(x)$ を決定するには、変分原理にしたがってオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial (dy/dx)} = 0$$

を解けばよい。

- (2) オイラー・ラグランジュの方程式を用いて、

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{2a}{x} - 1 \quad (\text{A})$$

が成り立つことを示せ。 a は正定数である。

(次ページに続く)

(3) 次式

$$y = a(\phi - \sin \phi), \quad (B)$$

$$x = a(1 - \cos \phi) \quad (C)$$

が微分方程式(A)の解であることを示せ。ただし ϕ は助変数である。これは半径 a の円が直線上を転がる場合に、その円周の1点が描くサイクロイドと呼ばれる曲線である。したがってサイクロイドが最速降下曲線であることが判った。

つぎに式(B)と(C)で表されるサイクロイドが持つ、もうひとつの性質について調べてみよう。この曲線に沿って図2のように $\phi = \pi$ を中心とし往復運動する質量 m の質点を考える。この場合も、重力は一様で x 軸方向を向き、摩擦、空気抵抗は働くかないものとする。

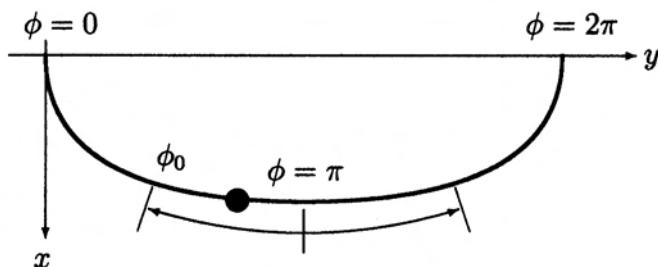


図 2:

- (4) エネルギー保存則より $(d\phi/dt)^2$ を ϕ を用いて表す式を導け。ただし、質点が左側に最大に振れる位置を $\phi = \phi_0$ とする。
- (5) 往復運動の周期 T は ϕ を用いて $T = 4 \int_{\phi_0}^{\pi} d\phi (d\phi/dt)^{-1}$ と表される。周期 T を求め、サイクロイドに沿った往復運動が等時性（周期が振幅によらないこと）を持つことを示せ。
- (6) 京都と東京の間にサイクロイドの形をしたトンネルを考える。その際図2の両端が京都 ($\phi = 0$) と東京 ($\phi = 2\pi$) である。このトンネルへ京都側から初速0で落とした物体が、東京へ達するまでの時間を求めよ。京都-東京間の直線距離は310kmとし、重力は一様で x 軸方向を向き、重力加速度は $g = 9.8m/s^2$ とする。ただし地球の回転運動、空気抵抗、トンネル壁との摩擦は無視する。答えは有効数字1桁の分単位で求めよ。

II-2 (量子力学) (100 点)

一次元空間上の点粒子（位置座標 x , 質量 m ）の量子力学を考える。ポテンシャル $V(x)$ の下でエネルギー固有値 E をもつ定常状態の波動関数 $\psi(x)$ は、シュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

を満たす。以下で、 ω は正の定数とする。

(1) まず、ポテンシャルが

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

の場合を考える。

(a) 演算子

$$\hat{A} = -i\hbar \frac{d}{dx} - im\omega x$$

と、そのエルミート共役

$$\hat{A}^\dagger = -i\hbar \frac{d}{dx} + im\omega x$$

を用いて、 \hat{H} を書き表せ。

(b) エネルギー固有値を小さい順に 3 番目まで (E_0, E_1, E_2 とする) 求めよ。また、それぞれに対応する波動関数 ($\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ とする) も求めよ。(つまり、 E_0 と $\psi_0(x)$ は、この系の基底状態のエネルギー固有値と波動関数である。) なお、波動関数は規格化しなくてよい。

(2) さらに、問(1)で扱ったシュレディンガー方程式の固有値 $E = E_0$ の解であって、上で求めた波動関数 $\psi_0(x)$ とは独立な（規格化できない）関数を一つ求めよ。解答は

$$F(x) = \int_0^x e^{y^2} dy$$

で定義される関数 $F(x)$ を用いて表してよい。（ヒント：求める関数を、 $\psi_0(x)$ と未知関数の積と置いて考えてみよ。）

(3) 次に、 b を正の定数として、ポテンシャルが、 $x < 0$ と $b < x$ では $V(x) = 0$ で、 $0 \leq x \leq b$ では

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

となっている場合を考える。問(1)で求めたエネルギー E_0 をもつ点粒子が $x < 0$ の遠方から入射するとき、その透過率を求めよ。

II-3 (量子統計力学) (100 点)

1 粒子のエネルギーが

$$\varepsilon(\vec{k}, \sigma) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \sigma\alpha H$$

で与えられるスピン 1 の理想ボース気体を考える。ここで、 m は粒子の質量、 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は波数ベクトル、 α は磁気モーメントの次元を持つ正の定数、 H は磁場 ($H \geq 0$)、 σ は $-1, 0, 1$ の値をとるスピン変数である。つまり、第 2 項はスピン σ の粒子は $\sigma\alpha$ の磁気モーメントをもつことを表している。また、気体の体積 V は十分大きいとする。

- (1) スピン $\sigma = 0$ の粒子の 1 粒子状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよ。
- (2) 温度 T 、磁場 H 、化学ポテンシャル μ のときスピン σ をもつ励起状態の粒子数 $N_\sigma(T, H, \mu)$ を、次式で定義される関数 $F(x)$ を用いて表せ。ボルツマン定数は k_B とする。

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^{z+x}-1} dz \quad (\text{A})$$

また、 μ の取り得る値の範囲を求めよ。

- (3) 励起状態の粒子数 $\sum_{\sigma=0,\pm 1} N_\sigma(T, H, \mu)$ が最大になるように μ を選んだとしても、ある温度以下ではこの和が全粒子数 N に満たなくなる。このとき、残りの巨視的な数の粒子は基底状態を占めている。これをボース・アインシュタイン凝縮という。磁場 H のもとでボース・アインシュタイン凝縮が起こる温度を $T_c(H)$ と表すとき、 $T_c(0)$ を求めよ。ただし、 $F(0)$ は既知の数であるとしてよい。
 - (4) 磁化 M は全粒子の磁気モーメントの和で与えられる。 $T > T_c(0)$ における磁化率 $\chi(T, \mu) = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M(T, H, \mu)}{H}$ を求め、次式で定義される関数 $G(x)$ を用いて表せ。
- $$G(x) = -\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^{-1/2}}{e^{z+x}-1} dz \quad (\text{B})$$
- (5) 磁場が正のとき、 $T < T_c(H)$ で凝縮が起こる 1 粒子状態はどのような波数とスピンを持つか。また、そのときの化学ポテンシャルの値はいくらか。さらに、 $T_c(H)$ は $T_c(0)$ より大きいか小さいか? 理由をつけて答えよ。
 - (6) $T < T_c(H)$ における磁化の値 $M(T, H)$ を N_σ を用いて表せ。また、自発磁化 $M_s(T) = \lim_{H \rightarrow +0} M(T, H)$ を求め、結果を $N\alpha \times \left(\frac{T}{T_c(0)} \right)$ の形に表せ。

平成20年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-8 まで 8 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合にはすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。
-

III-1 エレクトロニクス

III-2 古典統計力学

III-3 光のドップラー効果

III-4 散乱の量子力学

III-5 誤差論

III-6 重力熱力学

III-7 電磁波の散乱

III-8 X 線分光

III-1 (エレクトロニクス) (100 点)

- (1) 図1に示す抵抗 R とコイル L とコンデンサー C からなる RLC 直列回路を考える。入力電圧を V_{in} 、出力電圧を V_{out} とし、 $1/(LC) > (1/4)(R/L)^2$ であるとする。

まず、 V_{in} として角周波数 ω と振幅 V_0 を持つ正弦波信号を入力し、 V_0 は一定のまま、 ω を変化させてみる。

- (a) 角周波数が ω の時の RLC 直列回路全体の複素インピーダンスを求めよ。
- (b) 出力電圧 V_{out} の振幅が最大になる角周波数を ω_0 とする。 ω_0 の値とその時の出力電圧 V_{out} の振幅を求めよ。
- (c) 角周波数が ω_0 の時、コンデンサー C とコイル L それぞれの素子の電流、電圧、位相がどうなっているかを考え、出力電圧 V_{out} の振幅のとり得る最大値がなぜ (b) で求めた値になるのか説明せよ。

次に $V_{in}(t) = V_0 H(t)$ の信号を入力する。ただし、 $H(t)$ は階段関数であり

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

と定義されている。

- (d) 出力電圧 $V_{out}(t)$ を求めよ。必要なら、後に示すラプラス変換のテーブルを用いても良い。

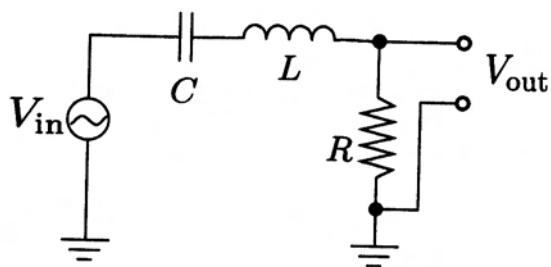


図 1:

(次ページに続く)

(2) X線検出器とプリアンプ(前置増幅器)を図2で示す回路としてモデル化する。X線検出器はコンデンサー C_d に対応する。時刻 $t = 0$ にX線光子がこのX線検出器に入射し、図2のようにコンデンサー C_d に電荷量 $Q_1(>0)$ が発生した。ただし、時刻 $t < 0$ では、コンデンサー C_d および C_f に蓄えられた電荷量は0であり、オペアンプは理想的な特性を持つと仮定する。

- (a) 時刻 $t > 0$ にコンデンサー C_d に蓄えられている電荷量 $Q_d(t)$ を求めよ。
- (b) 時刻 $t > 0$ にコンデンサー C_f に蓄えられている電荷量 $Q_f(t)$ を求めよ。
- (c) 時刻 $t > 0$ でのオペアンプの出力電圧 $V_{out}(t)$ を求めよ。
- (d) オペアンプの出力電圧 $V_{out}(t)$ は、漸近的に電圧 $V_1 (= V_{out}(\infty))$ に近づく。 $V_{out}(t)$ が $(1 - e^{-1})V_1$ に達する時間を、1つのX線光子に対する出力信号の時定数 τ_0 と定義する。 V_1 を求め、 V_1 より Q_1 が得られることを示せ。また、 τ_0 を求めよ。

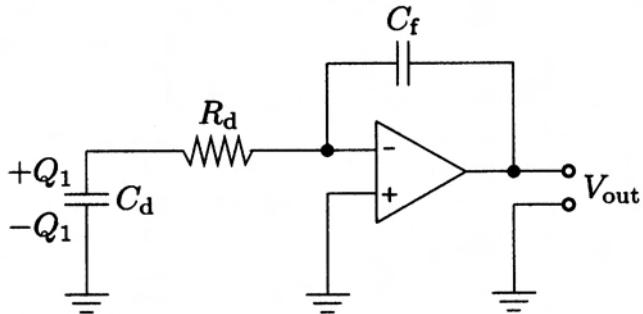


図2:

次に、1個目のX線光子に続いて時間 τ_X 後に2個目のX線光子がX線検出器に入射し、コンデンサー C_d に電荷量 $Q_2(>0)$ が発生する場合を考える。1個目と同様に2個目のX線光子に対しても、オペアンプの出力電圧が漸近的に近づく電圧 V_2 を測定し、 Q_2 を得たい。そのためには2個目のX線光子が入射する前に、1個目のX線光子によってコンデンサー C_f に溜められた電荷を放電する必要がある。そこで、 C_f と並列に抵抗 R_f を追加した。

- (e) 放電の時定数を τ_f と書くと、 τ_0 、 τ_X 、 τ_f の3つがどのような関係にあれば良いか。
- (f) 前問(e)の場合に期待されるオペアンプの出力電圧波形の概形をグラフとして書け。ただし、グラフには τ_0 、 τ_X 、 τ_f 、 V_1 、 V_2 を記入すること。
- (g) 以上の議論をふまえ、 $C_d = 10^{-8}\text{F}$ 、 $R_d = 10\Omega$ 、 $C_f = 10^{-11}\text{F}$ 、 $\tau_X = 10^{-3}\text{sec}$ の場合に、 R_f として適切な典型値を示せ。

(次ページに続く)

ラプラス変換のテーブル

実関数 $f(t)$ に対するラプラス変換は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt$$

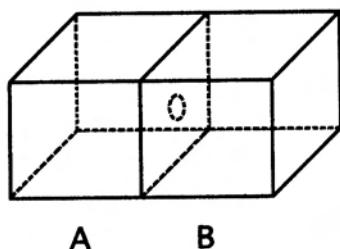
と定義される。様々な関数に対するラプラス変換は以下の通りである。

$f(t)$	\rightarrow	$F(s)$
$\delta(t)$		1
$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$		$1/s$
t		$\frac{1}{s^2}$
t^2		$\frac{2}{s^3}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$		$\frac{1}{s^n}$
$\exp(-at)$		$1/(s+a)$
$\sin(at)$		$a/(s^2 + a^2)$
$t \exp(-at)$		$1/(s+a)^2$
$\exp(-at) \sin(bt)$		$b/[(s+a)^2 + b^2]$
$\exp(-at)f(t)$		$F(s+a)$
$f(t/a)$		$aF(as)$
$\frac{df(t)}{dt}$		$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$		$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(t') dt'$		$F(s)/s$
$\int_0^t f(t-t')g(t') dt'$		$F(s)G(s)$

(このページは白紙である)

III-2 (古典統計力学) (100 点)

図のように、断熱壁で作られた箱A、Bに同種の理想気体が入っている。気体分子1個の質量は m である。箱Aの分子数密度を ρ_A 、温度を T_A 、同様に、箱Bの分子数密度を ρ_B 、温度を T_B とする。時刻 $t = 0$ に箱Aと箱Bの境界の断熱壁に分子の平均自由行程よりも充分小さな穴をあけ、そこを通って分子は左右に出入りできるようにする。穴の面積を σ とする。それぞれの箱は充分大きく、温度と密度の変化は無視できる。ある時刻までに穴を通った分子数を ΔN 、それに伴うエネルギー変化を ΔU とする。(箱Aから箱Bへの移動を正とする。)



- (1) 穴を通って分子が行き来することによる全系のエントロピー変化 ΔS は

$$\Delta S = C_1 \Delta U + C_2 \Delta N \quad (\text{A})$$

と表現できる。係数 C_1 と C_2 を ρ_A 、 ρ_B 、 T_A 、 T_B で表せ。理想気体の化学ポテンシャル μ と密度 ρ 、温度 T の関係は $\mu = kT \log(\rho/T^{3/2})$ としてよい。 k はボルツマン定数である。

- (2) 時刻 t における箱Bの($t = 0$ と比べた)分子数の増分が ΔN であり、エネルギーの増分が ΔU である確率分布 $P(\Delta U, \Delta N, t)$ の時間発展は次の式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\Delta U, \Delta N, t) &= \int_0^\infty W_{A \rightarrow B}(E) P(\Delta U - E, \Delta N - 1, t) dE \\ &\quad + \int_0^\infty W_{B \rightarrow A}(E) P(\Delta U + E, \Delta N + 1, t) dE \\ &\quad - P(\Delta U, \Delta N, t) \int_0^\infty [W_{A \rightarrow B}(E) + W_{B \rightarrow A}(E)] dE \end{aligned} \quad (\text{B})$$

右辺の各項の意味を簡単に述べよ。なお、 $W_{A \rightarrow B}(E)$ は、運動エネルギー E をもつ1個の分子が単位時間に穴を通って箱Aから箱Bに移動する単位エネルギー間隔あたりの確率(遷移確率)である。

(次ページに続く)

- (3) 方程式 (B) を初期条件 $P(\Delta U, \Delta N, t = 0) = \delta(\Delta U)\delta_{\Delta N, 0}$ のもとで解く。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、 $\delta_{x,y}$ はクロネッカーデルタである。次の変換

$$g(\lambda_U, \lambda_N, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta U \sum_{\Delta N=-\infty}^{\infty} P(\Delta U, \Delta N, t) \exp[-\lambda_U \Delta U - \lambda_N \Delta N] \quad (\text{C})$$

によって解は $g(\lambda_U, \lambda_N, t) = \exp[-t\Psi(\lambda_U, \lambda_N)]$ の形になる。 $\Psi(\lambda_U, \lambda_N)$ を求めよ。遷移確率が

$$W_{A \rightarrow B}(E) = \frac{\sigma \rho_A}{(2\pi m k T_A)^{1/2}} \frac{E}{k T_A} \exp\left[-\frac{E}{k T_A}\right]$$

であることを使ってよい。(箱Bから箱Aに移動する確率 $W_{B \rightarrow A}(E)$ は添え字 A を B におきかえればよい。)

- (4) 上の問 (3) で得られた $\Psi(\lambda_U, \lambda_N)$ は関係

$$\Psi(\lambda_U, \lambda_N) = \Psi\left(\frac{C_1}{k} - \lambda_U, \frac{C_2}{k} - \lambda_N\right) \quad (\text{D})$$

を満たすことを示せ。 C_1 と C_2 はエントロピー変化の表式 (A) の係数である。

- (5) 分布関数 $P(\Delta U, \Delta N, t)$ とエントロピー変化 ΔS との間には興味深い関係

$$\frac{P(\Delta U, \Delta N, t)}{P(-\Delta U, -\Delta N, t)} = \exp[\Delta S/k] \quad (\text{E})$$

が成立することが知られている。関係式 (E) から関係式 (D) を導出せよ。

- (6) 関係式 (E) は熱力学第 2 法則と矛盾しないことを示せ。

III-3(光のドッpler効果) (100点)

光のドッpler効果を使って、天体内のガスの運動状態を知る方法について考える。まず、光のドッpler効果による波長のずれを求めよう。慣性系Sと、Sのx軸正方向に一定の速さvで動く慣性系S'を考えよう。SとS'はある時刻でその原点が一致し、その時刻をSとS'でそれぞれ $t=0, t'=0$ とする。S'の x' 軸、 y' 軸、 z' 軸は、 $t=t'=0$ で、Sの各軸にそれぞれ重なるようにとる。

Sの座標を (ct, x, y, z) とし(c は光速)、S'の座標を (ct', x', y', z') とすると、これらの間には、 $\beta = v/c$ として、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (1) Sにおいて進行している光の位相部を $\exp[i(-\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)]$ とする。S'におけるこの光の角周波数 ω' を求めよ。この光がx軸方向に進行するとして、S'で見たときの波長 λ' とSでの波長 λ の関係を求めよ。

具体的な例として水素原子のガス雲を考える。温度が約 10^4 Kの、光学的に薄い水素のガス雲からは、バルマー線と呼ばれる可視の輝線が放射される。このうちH α 線(静止系でみた波長は660 nmとする)に注目する。以下では、 $v/c \ll 1$ であるとして $(v/c)^2$ のオーダーを無視して考える。また、必要なら以下の諸量を用いよ。

光速 $c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹

陽子の質量 $m_p = 2 \times 10^{-27}$ kg

電子の質量 $m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg

ボルツマン定数 $k = 1 \times 10^{-23}$ J K⁻¹

重力定数 $G = 7 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻²

- (2) このような水素ガス雲が放つH α 輝線の、熱運動による輝線幅は何nmか。桁だけの精度でよい。

- (3) 球対称な水素ガス雲を考える。観測されるガス雲は、図1のように、真上から見ても真横から見ても円板状に見える。真横から見たときの直径上の7点(A,B,..,G)でH α 輝線スペクトルを調べると、ほとんどのスペクトルに2本のH α 輝線が見られた。図1からこの水素ガス雲がどのような運動をしているか答えよ。

(次ページに続く)

- (4) 図2のような、回転しているリング状の水素ガス雲を考える。回転の速さは 300 km s^{-1} とする。また、リングの半径も大きくなっているとし、その速さは 100 km s^{-1} とする。このガス雲を、リングを含む平面内で真横から見たときに、観測点 A-G の各点で、どのような $\text{H}\alpha$ 輝線のスペクトルが見られるか、その概形図を描け。リングを真横からみたときの位置を縦軸にとり、A から G までの 7 点での $\text{H}\alpha$ 輝線のスペクトルを図1のように並べて描け。横軸は観測波長とし、図1のように代表的な数値も記入せよ。ただし、輝線は途中で吸収されることはないとする。

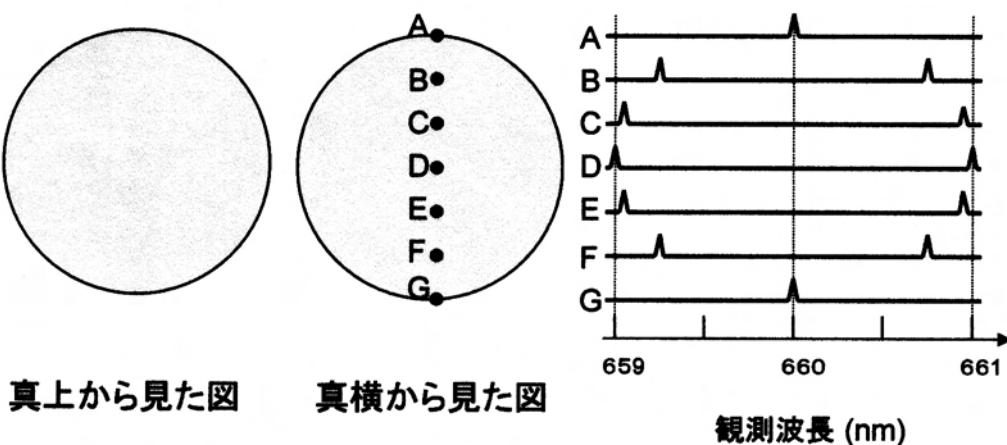


図1

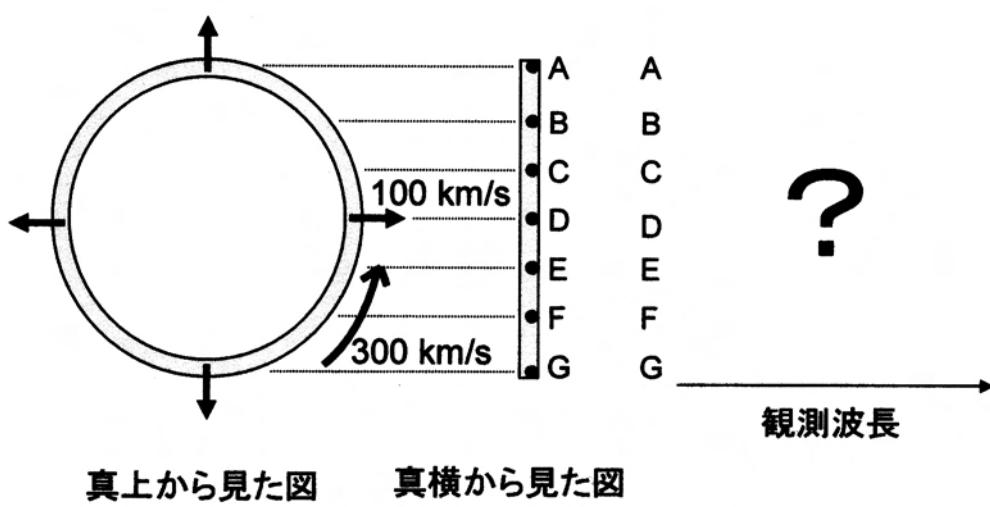


図2

III-4 (散乱の量子力学) (100 点)

球対称ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , r < a \\ 0 & , r \geq a \end{cases}$$

による粒子の量子論的な散乱を考える。ここで、 r は原点からの距離、 a, V_0 は正の定数である。質量 m 、エネルギー E の入射粒子は、 z 軸の正の向きに進行する平面波

$$e^{ikz}, \quad \text{ただし、 } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

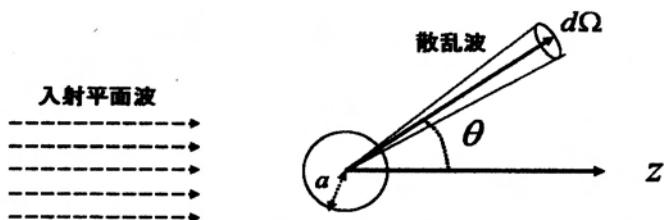
で記述することができる。この入射波はポテンシャル V によって散乱される。散乱角を θ とすると、十分遠方 $r \rightarrow \infty$ では、散乱波は

$$\frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

と表される。単位時間、単位面積当たり j_{inc} 個の粒子が入射しているとき、粒子が動径方向へ、単位時間、単位面積当たり j_r 個散乱されるとする。このとき、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{j_r r^2 d\Omega}{j_{\text{inc}}}$$

で定義される。ここで、 $d\Omega$ は粒子が検出される領域の微小立体角である。



(1) 波動関数 ψ で表される状態の確率の流れの表式

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2m_i} \{ \psi^*(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla \psi^*(\mathbf{x}) \}$$

を使って、 j_{inc}, j_r を計算し、微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

となることを示せ。

(次ページに続く)

- (2) ポテンシャルが球対称なので、波動関数を量子数 ℓ の角運動量固有状態に分解し、それぞれの波動関数を独立に扱うことができる。十分低エネルギーでは球対称な波 ($\ell = 0$ の波) の散乱だけを考えれば良いが、その理由を簡単に述べよ。

以下の問題では、低エネルギー粒子の散乱のみを考える。従って、 $\ell = 0$ の波だけを考えてよい。この場合、 $f = f(\theta)$ は θ に依存していない。

- (3) 確率の保存から、 f は実数 δ を用いて

$$f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta} \sin \delta}{k}$$

と表すことができることを示せ。この δ は位相のずれと呼ばれる。また、このとき、光学定理

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f$$

が成り立つことも示せ。ただし、 $\text{Im} f$ は f の虚部を表す。必要ならば、平面波の角運動量固有状態による展開公式

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \frac{\sin kr}{kr} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

を使え。ここで、 j_ℓ と P_ℓ はそれぞれ球ベッセル関数とルジャンドル関数である。ただし、 $\ell = 0$ の波だけを考える場合は $\frac{\sin kr}{kr}$ だけを考えればよい。

- (4) 十分遠方での波動関数を位相のずれ δ を使って表せ。

- (5) $\ell = 0$ の場合、定常状態に対するシュレディンガーエルギー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + V(r)\psi(r) = E\psi(r)$$

となる。 $r < a$ と $r > a$ のそれぞれの領域でこの方程式を解き、波動関数の接続条件より $\tan \delta$ を計算せよ。その結果を使って、球対称ポテンシャル $V(r)$ による散乱の全断面積 σ を求めよ。

III-5 (誤差論) (100点)

円の直径を測定してその面積を求めることを考える。但し、測定には系統誤差はないものとする。

測定値は確率変数によってモデル化される。測りたいものの真の値を平均とし、測定誤差の2乗を分散とする確率分布をもつ確率変数の集団を考える。これを母集団という。一回の測定は、この母集団の中から一つの変数を抽出することに対応する。

独立な確率変数 X と Y を考える。その平均と分散をそれぞれ m_X, σ_X^2 と m_Y, σ_Y^2 とする。ここで、 $Z = aX + bY$ という新たな確率変数 Z を定義すると、その平均 m_Z は $m_Z = am_X + bm_Y$ であり、分散 σ_Z^2 は $\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$ となる。以下では、この関係を用いてよい。

- (1) 円の直径を n 回測定したとする。 m_D を真の直径、 σ_D を一回の測定に伴う誤差とすると、 n 回の測定は、同じ平均 (m_D) と分散 (σ_D^2) をもつ確率変数から n 回の独立な抽出を行ったことに対応すると考えられる。一回毎に測定 (抽出) した直径を意味する確率変数を d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とし、確率変数 (標本平均)

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

を定義しよう。この確率変数の分散を求めよ。

\bar{d} の期待値 $E[\bar{d}]$ を計算すると、真の値 m_D となる。一方、確率変数 (標本分散)

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$$

の期待値 $E[s^2]$ は σ_D^2 とはならず、 $\frac{n-1}{n}\sigma_D^2$ となる。母集団の求めたい統計量 (平均や分散等) の値と一致する期待値を持つ確率変数をその統計量のよい推定量という。(一般には不偏推定量という。) また、その実際の値をよい推定値という。すなわち、実際の測定値から得られる標本平均 \bar{d} の値は母集団の平均のよい推定値である。一方、 σ_D^2 のよい推定値は、 s^2 ではなく $\frac{n}{n-1}s^2$ となる。

- (2) n 回の測定から得られる、円の直径 \bar{d} につけるべき誤差はいくらか。測定値 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて表記せよ。 $(\bar{d}$ の記号を用いてもよい。)

(次ページに続く)

次に円の面積を考える。直接測定されたのは直径であるので、その誤差が伝播して面積の誤差となる。

- (3) 一般に、求める量 Z が二つの独立な直接測定量 X, Y の関数 $Z = \phi(X, Y)$ で表される場合を考えよう。 Z の分散 σ_Z^2 は、直接測定値とその真の値の差が十分小さいとすると、誤差の分布によらず、

$$\sigma_Z^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 \Bigg|_{\substack{X=m_X \\ Y=m_Y}} \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 \Bigg|_{\substack{X=m_X \\ Y=m_Y}} \sigma_Y^2$$

と近似できることを示せ。

- (4) 直径の測定精度（誤差を真の値で割った値）は 1% であるとする。このとき、円の面積も 1% の精度で出したければ、測定を何回行えばよいか。

- (5) 円の面積の期待値 $E[\frac{\pi}{4}\bar{d}^2]$ を計算し、測定値から得られるよい推定値を求めよ。測定値 $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ から計算可能な量として表記せよ。 $(\bar{d}, s^2$ の記号は用いてよい。)

III-6 (重力熱力学) (100 点)

星は自分の重力によって束縛されており、その全エネルギー E は内部エネルギーの総和 $U (> 0)$ と、重力ポテンシャルエネルギー $\Omega (< 0)$ の合計である。これらのエネルギーの関係を議論しよう。星は球対称で、重力とガス圧の勾配が静的につりあつた平衡状態にあると仮定する。光子による放射圧は無視でき、ガスの対流は存在しないとする。星の中心からの距離 r における圧力を $P(r)$ 、質量密度を $\rho(r)$ とする。星の半径は R として、その外は真空であり、 $\rho(r \geq R) = 0$ 、 $P(r \geq R) = 0$ である。半径 r より内側の質量を $M(r)$ とし、星の総質量は $M_0 = M(R)$ とする。星を構成するガスの断熱指数を γ (一定) とし、重力定数を G とする。

- (1) 星の中心からの距離 $r (< R)$ の位置での薄い層 dr における平衡条件から得られる次の式を完成せよ。

$$-G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) =$$

- (2) Ω と U と γ の関係式を導け。ただし、

$$\Omega = - \int_0^R G \frac{M(r)}{r} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

であることを利用して良い。また、圧力 P と単位体積あたりの内部エネルギー ε には $P = (\gamma - 1)\varepsilon$ の関係がある。

- (3) 星が重力的に束縛され安定であるには、全エネルギー E が負である必要がある。このことから、星を構成するガスの断熱指数 γ が満たすべき条件を求めよ。次に、星を構成するガスが非相対論的な单原子分子 ($\gamma = 5/3$) である場合、星として安定に存在し得ることを示せ。

以下の設問では星は非相対論的な单原子分子のガスで構成されているとする。

- (4) ガスの平均温度 T_0 を U と M_0 で表せ。ただし单原子分子1個の質量を m 、ボルツマン定数を k とする。
- (5) 星は光を放射することで準静的にエネルギーを失う。全エネルギーが E から $E + \Delta E$ に変化した場合、内部エネルギーと重力エネルギーそれぞれの変化量はいくらか。また、平均温度 T_0 の変化量 ΔT_0 がいくらになるかを考え、星全体としての見掛けの比熱 $C \equiv \Delta E / \Delta T_0$ を求めよ。
- (6) 前問の結果を踏まえ、以下の文について { } 内の言葉から適切なものを選べ。
 星は光を放射することでエネルギーを失った結果、平均温度は {①上昇する。
 ②下降する。③変化しない。} また、星は全体的に {④膨張する。⑤収縮する。⑥変化しない。}

III-7(電磁波の散乱) (100点)

電荷 e 、質量 m の荷電粒子による電磁波の真空中での古典的な散乱を考えよう。入射電磁波が荷電粒子を加速し、この荷電粒子の運動によって電磁波が放射される。これが、荷電粒子による電磁波の散乱現象である。

- (1) 荷電粒子の速さが光速 c に比べて十分小さいとき、その運動によってつくりられる電場と磁場は、十分遠方では

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})}{r}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

と与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 r は観測点の位置ベクトル \mathbf{r} の大きさで、 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ はその方向ベクトルである。荷電粒子の位置ベクトルは \mathbf{x} であり、 $\mathbf{d} = e\mathbf{x}$ 、 $\ddot{\mathbf{d}} = d^2\mathbf{d}/dt^2$ である。ただし、荷電粒子は原点付近に局在していて、 $|\mathbf{x}| \ll |\mathbf{r}|$ が成立しているものとする。十分遠方では、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の大きさが

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta$$

と書けることを示せ。ここで、 θ は $\ddot{\mathbf{d}}$ と \mathbf{n} のなす角である。

- (2) 座標系の原点に位置する束縛のない荷電粒子による電磁波の散乱を考えよう。入射電磁波は、 z 軸方向に進行する平面波であり、その電場は x 軸方向に向いている。単位時間に単位面積を通って単位エネルギーの電磁波が入射するとき、単位時間に単位立体角のなかに散乱される電磁波のエネルギーを求めよ。これは、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ と呼ばれている。ここでは、電磁波放射による反作用は無視できるものとする。
- (3) 入射電磁波によって加速された荷電粒子は電磁波を放射することでエネルギーを失う。その際に反作用として、荷電粒子は力を受けると考えられる。荷電粒子の運動が周期的である場合に、エネルギー保存則を使って電磁波放射による反作用力が

$$\mathbf{F}_r = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$$

と与えられることを示せ。

- (4) 今度は荷電粒子がポテンシャルエネルギー $V = m\omega_0^2 |\mathbf{x}|^2/2$ ($\omega_0 > 0$) で束縛されている場合を考える。電磁波放射の反作用まで考慮して散乱の全断面積 $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) d\Omega$ を計算せよ。ただし、入射電磁波の角振動数を $\omega (> 0)$ とせよ。

III-8 (X線分光) (100点)

プラグ反射を原理にもつ結晶分光器について考察する。

- (1) プラグ反射の原理を理解するために、図1に示す結晶の回折格子のモデルを考える。図1のように結晶中の原子が作る格子面が周期的に存在するものとする。格子面の間隔を d とする。入射角 θ でX線を入射させる。それぞれの面を単独で考えた場合には、X線光子エネルギーによらず同じ角度 θ で反射すると考えてよいものとする。次に、各々の格子面とその上下の格子面からの反射光同士の干渉を考えると、特定のエネルギー E をもつX線のみが強い強度で反射する。これをプラグ反射と呼び、この角度 θ をプラグ角と呼ぶ。なぜそうなるかを説明し、 d 、 E 、 θ の間に成り立つ式（プラグの式）を求めよ（プランク定数を \hbar 、光速を c とする）。ただし、各格子面でのX線反射率は非常に小さく、格子面の数は十分に多いとする。

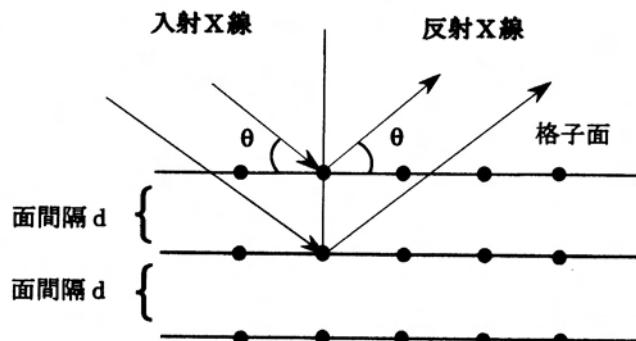


図1:

このプラグの式を満たすX線のエネルギーは複数あるが、以下では一番エネルギーの低いものだけを考える。

- (2) 上記で述べた結晶を一つだけ用いて、図2に示すような分光器を構成する。この結晶分光器に種々のエネルギーを持った白色X線を図2のように点光源から入射する。今、 E_0 のエネルギーをもつX線が、プラグ角 θ_0 で反射されスクリーン上Oに垂直に入るるものとする。X線源は点光源としX線は紙面のみを考える。この時、光源から結晶の中心までの距離と結晶の中心からスクリーンまでの距離を l とする。

- (a) $\theta_0 \pm \Delta\theta$ の入射角で結晶に反射されるX線エネルギーは、図2のようにスクリーン上で $E_0 \mp \Delta E$ に対応する。このとき、 $\Delta\theta$ を ΔE 、 θ_0 、 E_0 を用いて求めよ。ただし、 $\frac{\Delta\theta}{\theta}$ は充分に小さいものとする。

(次ページに続く)

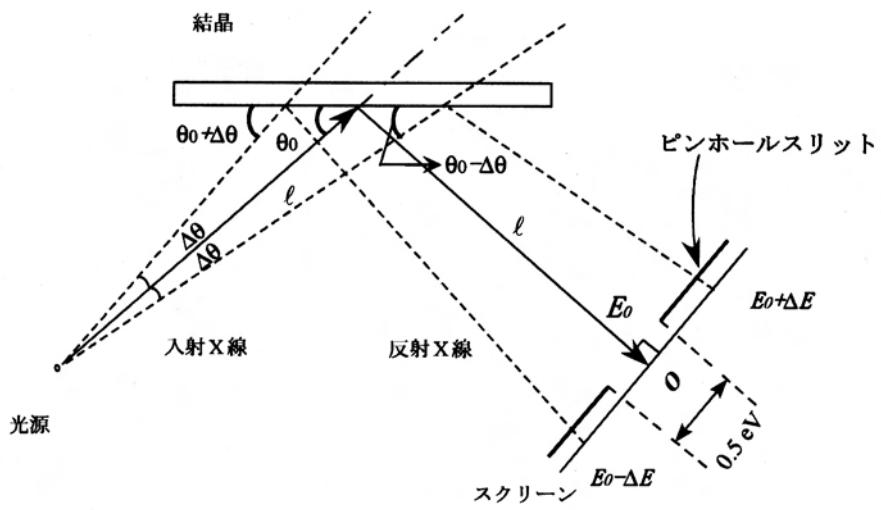


図 2:

- (b) 白色 X 線からこの結晶分光器を用いて $E_0 = 10000 \text{ eV}$ 、エネルギー幅 0.5 eV の X 線を取り出すとすると、スクリーンOのところで直径いくらのピンホールスリットが必要かを求めよ。ただしブラッグ角 $\theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $\ell = 1.0 \text{ m}$ とする
- (3) 同様に白色 X 線の点光源を用いて、図 2 のOの位置に、もう一つ同じ結晶を追加し、図 3 に示すような 2 結晶分光器を組み立てる。このとき、第 1 結晶と第 2 結晶とが図 3 の M に関して鏡映対称の関係になるように配置する。新たに置いたスクリーン上で E_0 を中心として幅 $2\Delta E$ のエネルギーを持つ X 線がどのように観測されるかを問題 (2) の場合と比較して述べよ。

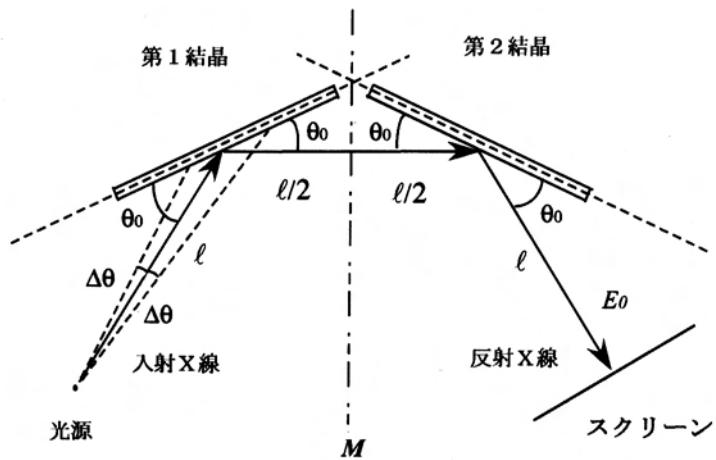
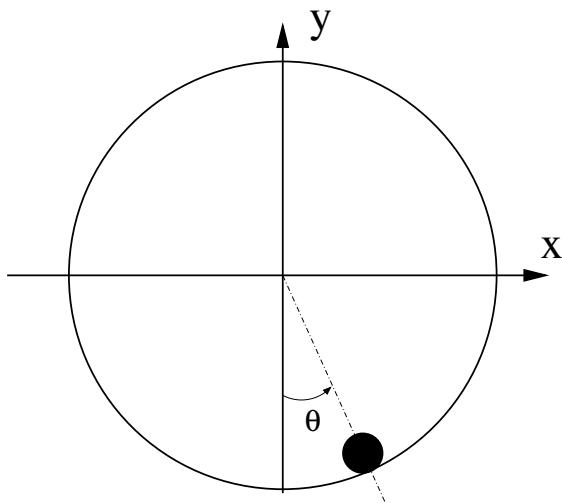


図 3:

I-1 (力学 : 拘束系) (100 点)

図のように鉛直に固定された半径 a の滑らかな円周の内側を運動する質量 m の質点を考える。ここで重力加速度を g とする。ただし、図に描かれている (x, y) 座標は、円の中心を原点とし、 y は鉛直上向きに、 x は y と直交するようにとつてある。



- (1) 極座標 (r, θ) を

$$x = r \sin \theta, \quad y = -r \cos \theta$$

として、 (r, θ) 座標でラグランジアンを書け。ここで、拘束条件 $r = a$ を考慮し、ラグランジアンに $\lambda(a - r)$ を加えよ。ただし、 λ は、ラグランジュの未定乗数である。

- (2) (a) (r, θ) に関するオイラー・ラグランジュの運動方程式を書け。また、この運動方程式において λ に比例する項は、どのような力を表すか簡単に述べよ。
 (b) λ を一般座標とみなし、オイラー・ラグランジュ方程式を書け。
- (3) この質点が円周上を運動し、 θ^3 が θ に比べて無視できる場合の θ に関する運動方程式を書き、それを解け。ただし、 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ となる初期値を与えたとする。ここで、 $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ である。
- (4) (3) のような近似が有効でない場合を考える。 $t = 0$ で $\theta = \pi/2$ の円周上で初速度ゼロ ($\dot{\theta} = 0$) でこの質点を滑り落す。このときの周期 T を求めよ。ただし、定積分 $F \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{-1/2}$ を使って T を表せ。(この定積分を実行する必要はない。)

(次ページに続く)

(5) $t = 0$ で、 $\theta = 0$ の点で速さ $a\dot{\theta} = 2\sqrt{ag}$ で、円周上を滑らせる。

- (a) 角度 θ の点での λ を求めよ。
- (b) この質点が円周上を離れる $\cos \theta$ の値を求めよ。

I-2 (電磁気学 : 磁性体) (100 点)

真空の透磁率を μ_0 とし以下の問いに答えよ。

真空中に半径 R の球形の磁性体があり, 一様な磁化 M をもっている。ここで磁化 M は $B = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ を満たすように定義されているとする。磁化に平行に z 軸をとる。外部磁場はなく, 定常であり電流も流れていないとする。

- (1) 球の内部の磁場 H_{in} , 磁束密度 B_{in} と外部の磁場 H_{out} , 磁束密度 B_{out} は一般に球の表面で連続にはつながらない。球の表面における磁場と磁束密度の接続の条件を示せ。ただし, 球の表面上の各点での単位法線ベクトルを n とし, 単位接線ベクトルを t とする。
- (2) 球の内部および外部それぞれについて H がスカラーポテンシャル ϕ を用いて表わせることを示せ。また, ϕ が Laplace 方程式を満たすことを示せ。
- (3) 全空間で磁場 H と磁束密度 B を求めよう。 z 軸対称な系の Laplace 方程式の極座標での一般解は, a_n, b_n を定数として,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

となる。ここで

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

は Legendre の多項式である。

球の表面で (1) で求めた接続条件を適用して全空間で磁場 H と磁束密度 B を求めよ。

- (4) この磁性体において

$$-\frac{\mu_0}{2} \int_{\text{球の内部}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{\text{全空間}} \mathbf{H}^2 dV$$

となることを示せ。

この等式は磁性体を磁化させるのに必要なエネルギーは, 仮想的に球の表面に誘起される磁荷の作る磁場のエネルギーに等しいことを示している。

I-3 (量子力学 : 調和振動子) (100 点)

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (\text{A})$$

で与えられる。ここで、 x は座標演算子、 p は運動量演算子を表し、 ω は角振動数、 m は粒子の質量である。系は量子力学に従うものとする。

エネルギー固有状態（定常状態）は、

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (\text{B})$$

を満たす解である。ただし、 $|\psi_n\rangle$ および E_n は n 番目 ($n = 0, 1, 2, \dots$) のエネルギー固有状態および固有エネルギーである。

(1) 以下の消滅演算子 a と生成演算子 a^\dagger を定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{1}{m\omega}p) \quad (\text{C})$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - i\frac{1}{m\omega}p) \quad (\text{D})$$

交換関係 $[x, p] = i\hbar$ より、 a, a^\dagger の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ である。このとき、ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (\text{E})$$

と表せることを示せ。

(2) 演算子 $N \equiv a^\dagger a$ は粒子数演算子と呼ばれ、エネルギー固有状態は N の固有状態として表すことができる。基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $a|\psi_0\rangle = 0$ を満たす解である。ここで $|\psi_0\rangle$ は $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ に規格化されているとする。このとき、 n 番目の固有状態 $|\psi_n\rangle$ は

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\psi_0\rangle \quad (\text{F})$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示し、その固有エネルギー E_n を求めよ。また、この $|\psi_n\rangle$ は規格化条件 $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$ を満たすことを示せ。

(3) $\langle\psi_k|x|\psi_l\rangle$ および $\langle\psi_k|p|\psi_l\rangle$ を求めよ。

(次ページに続く)

次に、基底状態を x 軸方向に微小距離移動させた状態について、その時間発展を考える。運動量演算子 p が微小並進の生成子であることから、 x 軸に沿って微小距離 ϵ だけ移動させた状態は

$$(1 - i \frac{1}{\hbar} \epsilon p) |\psi_0\rangle \quad (\text{G})$$

のように表せる。時刻 $t = 0$ のときに式 (G) の状態にあったとし、この系の時間発展 $|\psi(t)\rangle$ を考える。

(4) $t = 0$ での状態 $|\psi(t = 0)\rangle$ を $|\psi_n\rangle$ で展開し、

$$|\psi(t = 0)\rangle = \sum_n C_n |\psi_n\rangle \quad (\text{H})$$

と表した時の係数 C_n を求めよ。

(5) 状態 $|\psi(t)\rangle$ について、 x の期待値 $\langle x \rangle = \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$ および p の期待値 $\langle p \rangle = \langle \psi(t) | p | \psi(t) \rangle$ を求めよ。ただし、エネルギー固有状態 $|\psi_n\rangle$ の時間発展は $|\psi_n(t)\rangle = e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n\rangle$ と表せる。

また、 $X \equiv \langle x \rangle$, $Y \equiv \langle p \rangle$ としたとき、点 (X, Y) の軌跡を X - Y 平面上で図示し、 $t = 0$ での点の位置を示し、その移動方向を矢印で表せ。

II-1 (統計力学：混合のエントロピー) (100 点)

- (1) 混合のエントロピー（混合前と後のエントロピー変化）を熱力学的に求めよう。2種類の理想気体 α, β があり、それぞれの分子が体積 V_α, V_β の中に N_α 個、 N_β 個ずつあるとする。また、温度と圧力は等しいものとし、 $N = N_\alpha + N_\beta$ とおく。更に分子 α, β の間に相互作用はないものとする。
- (a) 気体 α が体積 V_α から等温のまま膨張して体積が $V_\alpha + V_\beta$ になった時のエントロピー増を求めよ。ただし Boltzmann 定数を k 、温度を T とする。
- (b) 体積が $V_\alpha + V_\beta$ である気体 α, β を半透膜を通してそれぞれ体積一定のまま準静的に混合したとする。図1はこれを図示したもので、それぞれ体積 $V_\alpha + V_\beta$ の箱に入った気体 α, β をC-D, A'-B'に張った半透膜を通してしながら混合し、最終的に全体の体積が $V_\alpha + V_\beta$ になったことを表している。また半透膜C-Dは気体 β のみを、半透膜A'-B'は気体 α のみを通すものとする。この過程でエントロピーがどのように変化するか答えよ。

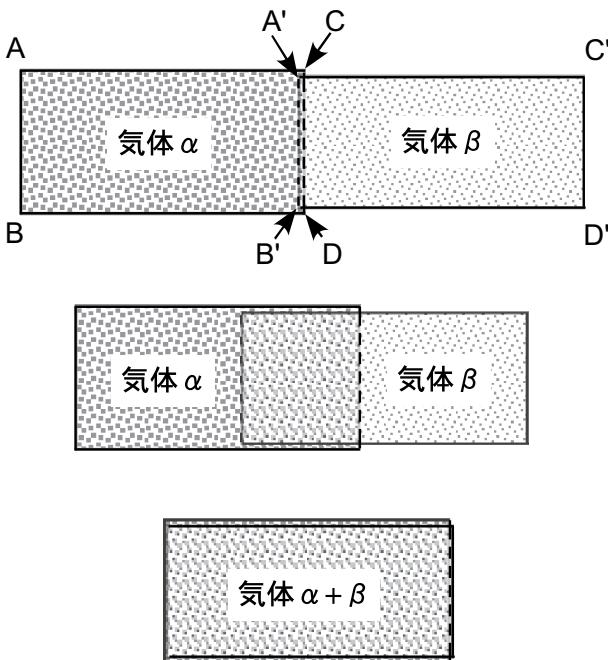


図 1

(次ページに続く)

- (c) 気体 α の全体に対する混合比を $\phi (= \frac{N_\alpha}{N})$ と置いたときの混合のエントロピーが

$$\Delta S = -Nk[\phi \log \phi + (1 - \phi) \log (1 - \phi)] \quad (\text{A})$$

と書けることを示せ。

- (2) 次に混合のエントロピーを、統計力学的に求めてみよう。分子の総数を N とし、 α 分子、 β 分子の数をそれぞれ N_α 、 N_β とする。系全体を N 個の格子点で表し、各格子点に 1 個ずつ分子を置くものとする。系を左右に分割し、左側の N_α 個の格子点に分子 α を、右側の N_β 個の格子点に分子 β を置くものとすると、この時の配置は 1 通りしかない。

- (a) N 個の格子点にランダムに分子 α, β を配置したとする。この時の状態数とエントロピーを求めよ。
- (b) 完全に 2 つに分かれている状態との差から、混合のエントロピーが式 (A) と同じ形に書けることを示せ。ただし Stirling の公式

$$\log x! \approx x(\log x - 1) \quad (\text{B})$$

を用いよ。

- (3) 分子 α 、分子 β を格子点上に配置したとき、最隣接点間のみに相互作用が働くものとする。 $\alpha - \alpha$ 間相互作用を $\epsilon_{\alpha\alpha}$ 、 $\beta - \beta$ 間相互作用を $\epsilon_{\beta\beta}$ 、 $\alpha - \beta$ 間相互作用を $\epsilon_{\alpha\beta}$ と書き、また最隣接格子点の数が z とする。このとき系が一様に混合したとして、混合前と後の内部エネルギー差が

$$\Delta U = N\chi\phi(1 - \phi)kT \quad (\text{C})$$

の形に書けることを示せ。またこの時の χ の表式を求めよ。

- (4) 混合の自由エネルギー ΔF を ϕ, χ, T で書き表せ。また χ を変化させたときの ΔF の ϕ 依存性の概略を図示し、一様な混合状態が不安定になる χ の値を求めよ。

II-2 (物理数学 : プラウン運動) (100 点)

単位時間に 1 回ずつ, 左右ランダムに単位ステップで移動する粒子を考える。1 単位時間に右向きに進む確率を $(1 + v)/2$, 左向きに進む確率を $(1 - v)/2$ とする。

- (1) t 単位時間が経過する間に, 右向きに k ステップ (左向きに $t - k$ ステップ) 進む確率 p_k を与えよ。規格化条件 $\sum_{k=0}^t p_k = 1$ を満たすことも確認せよ。

- (2) (a) $|v| \ll 1$ なら $t \gg 1$ で上記確率分布はガウス分布に漸近する。これを以下の手順で調べよう。まずスターリングの公式 $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ を用い, k を $x \equiv 2k - t$ に置き換えることにより, 上記確率は x, t, v を使って

$$p_{\frac{t+x}{2}} \approx \sqrt{\frac{2t}{\pi(t^2 - x^2)}} \times (\alpha)^{\frac{t}{2}} \times (\beta)^{\frac{x}{2}},$$

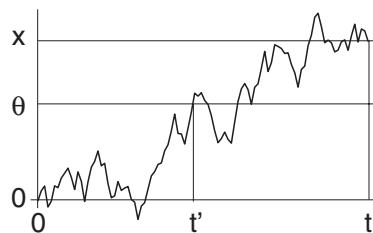
と表すことができる。この α と β を求めよ。

- (b) $|v|$ も $|x|/t$ も共に $O(1/\sqrt{t}) \ll 1$ の微小量とすれば, 例えば $(1+v)^{\frac{x}{2}} \approx e^{\frac{vx}{2}}$ と近似できる。このような近似を用いることによって, 時刻 t に粒子が位置 x から $x+dx$ の間にいる確率分布 $f(x, t)dx$ を求める。 $x (= 2k - t)$ の基本ステップ幅が 2 であることに注意を払って

$$f(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \times \exp(\gamma),$$

と表すことができる。この γ を求めよ。

- (3) このようなプラウン粒子が, 時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ から運動を開始して位置 $\theta (> 0)$ を初めて通過する時刻 (初期通過時刻) が $[t, t + dt]$ の区間内にある確率 $p_\theta(t)dt$ を以下の方法で求めよ。



時刻 t に位置 $x > \theta$ に到着するには, 必ず θ は一度は通過するから

$$f(x, t) = \int_0^t dt' f(x - \theta, t - t') p_\theta(t') \quad (A)$$

が成り立つ . この関係にラプラス変換 $\int_0^\infty dt e^{-st} \dots$ を施すことによって初期通過時刻の分布 $p_\theta(t)$ を求めることができる . ここで ,

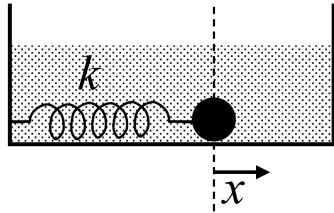
$$\int_0^\infty dt \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t} - st\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-|z|\sqrt{s}}, \quad (\text{B})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{|z|}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t} - st\right) = e^{-|z|\sqrt{s}} \quad (\text{C})$$

の関係を使うとよい .

II-3 (力学 : 減衰振動) (100 点)

1本のバネでつないだおもりの運動を考える。バネの一端を固定し他端におもりをつけ(バネ振り子)、液体で満たされた箱の床面に置く。バネ定数を k 、液体の粘性係数を η とする。おもりの質量を m とし、平衡点からの位置を x とする。以下では、バネの質量と抵抗は無視でき、床は水平で滑らかであるとする。



おもりが液体から受ける粘性力は粘性係数とおもりの速度に比例し、 $-A\eta \frac{dx}{dt}$ のように書ける。このとき、おもりの運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - A\eta \frac{dx}{dt} \quad (\text{A})$$

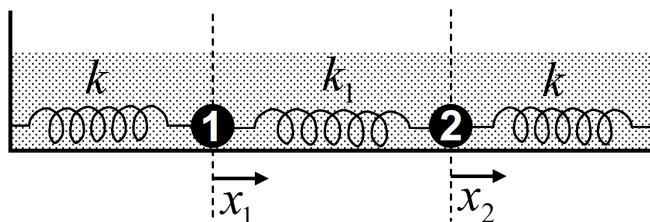
となる。 $x = Ce^{gt}$ とおいたとき、上述の運動方程式は以下の代数方程式に変換できる。

$$g^2 + 2\alpha g + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{B})$$

ただし、 $\alpha = \frac{A\eta}{2m}$ および $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である。

- (1) 初期条件として $t = 0$ で $x = 0, \frac{dx}{dt} = v_0$ とする。 $\alpha > \omega_0$ および $\alpha < \omega_0$ の場合のそれについて $x(t)$ を求めよ。 $x(t)$ は実数のパラメータと変数のみで記述すること。
- (2) 同じ初期条件で、 $\alpha < \omega_0$ の解で $\alpha \rightarrow \omega_0$ の極限をとることによって、 $\alpha = \omega_0$ の場合の $x(t)$ を求めよ。

次に、上述と同じバネ振り子を二つ用意し、バネ定数 k_1 のバネで連結して液体中(粘性係数 η)の床面に置いた場合の2個のおもりの運動を考える。バネの両端は自然長の状態で固定しており、平衡点からのおもりの位置を図のように x_1, x_2 とする。



- (3) おもり 1,2 の運動方程式を書け。

(次ページに続く)

- (4) x_1, x_2 の線形結合 q_1, q_2 を考える。 q_1, q_2 の方程式が以下のとおり独立になるように適当な線形結合を選び、以下の式の ω_1, ω_2 を求めよ。

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq_1}{dt} + \omega_1^2 q_1 = 0 \quad (\text{C})$$

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq_2}{dt} + \omega_2^2 q_2 = 0 \quad (\text{D})$$

- (5) 初期条件として、 $t = 0$ で $x_1 = x_2 = 0, \frac{dx_1}{dt} = v_0, \frac{dx_2}{dt} = 0$ とする。粘性係数 $\eta = 0$ のとき、おもり 1,2 の運動にはうなり現象が生じる。 η を次第に大きくしたとき、ある臨界の粘性係数 η_c でうなり現象は消える。 η_c を求め、そのときの $x_1(t), x_2(t)$ を求めよ。
- ここでは、「うなり」とは異なる周波数の振動が重なり、振幅が周期的に変動する現象を呼び、

$$e^{-\gamma t} [B_1 \sin(\Omega_1 t + b_1) + B_2 \sin(\Omega_2 t + b_2)] \quad (\text{E})$$

の形式で表せることとする。(ここで t 以外の変数は時間に依存しない実数パラメータで、 $\Omega_1 \neq \Omega_2$ かつ $\Omega_1, \Omega_2, B_1, B_2$ はゼロ以外の数である。)

III-1(電磁気学：双極子放射) (100点)

- (1) スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ 、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と電磁場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ との関係は、以下の式で与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A})$$

- (a) 4つのMaxwell方程式のうち、電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ を含む2つの方程式は、以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B})$$

ここで、 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = c^2 \epsilon_0 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ であり、 c は光速、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

式(A)より、 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 、 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 、 $\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ に関する(式(B)以外の) Maxwell 方程式を導け。

- (b) 式(A)には、ゲージ変換の不定性がある。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{C})$$

という条件を課した上で、式(A)を式(B)に代入し、 ϕ 、 \mathbf{A} についての2階微分方程式を導け。ただし、必要なら以下のベクトルの積の公式を使え。

$$\mathbf{K} \times (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) = \mathbf{L}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{L})\mathbf{M} \quad (\text{D})$$

- (2) 電荷 e 、質量 m をもつ荷電粒子が軌道 $\mathbf{x}_e(t)$ を描いて運動している。この粒子がつくる電荷密度、電流密度は、 $\rho = e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t))$ 、 $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{x}}_e(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t))$ である。ここで、 $\dot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$ とする。

- (a) この荷電粒子の運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_e}{dt^2} = e\mathbf{E}(\mathbf{x}_e, t) + e\dot{\mathbf{x}}_e \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_e, t) \quad (\text{E})$$

と Maxwell 方程式を使い、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_e^2 + \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right] = - \int d^3x \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{F})$$

を示せ。また、この式は物理的に何を表すか簡単に述べよ。必要なら以下のベクトルの積の公式を使え。

$$\nabla \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{L}) - \mathbf{L} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (\text{G})$$

(次ページに続く)

- (b) この荷電粒子の速さが c に比べて十分小さいとき、この荷電粒子がつくる電磁場は、十分遠方で

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}})], \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{E}}{rc} \quad (\text{H})$$

で与えられる。ここで、 $r = |\mathbf{x}|$ 、 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_e$ である。このとき、(F) の右辺が $S = -e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 / (6\pi\epsilon_0 c^3)$ となることを示せ。

また、この荷電粒子が半径 a 、角速度 ω の円運動をしているとき、 S の表式を求めよ。

III-2 (量子力学 : 摂動論) (100 点)

系のハミルトニアンとして

$$H = H_0 + \lambda V$$

を考える。ここで、 λV はハミルトニアン H_0 に対する微小な摂動である。 H_0 の固有状態は既知とし、エネルギー固有値を $\varepsilon_k^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots$)、その固有状態を $|\phi_k^{(0)}\rangle$ と表す。 $\varepsilon_k^{(0)}$ は離散的とする。 λ は実数のパラメータであり、 $0 \leq \lambda \leq 1$ である。

(1) まず簡単のために $|\phi_k^{(0)}\rangle$ が縮退していない場合を考える。

H のエネルギーの固有値を ε_k と表し、その固有状態を $|\phi_k\rangle$ と書こう。 $|\phi_k\rangle$ は $\lambda \rightarrow 0$ の時に $|\phi_k^{(0)}\rangle$ に一致するとする。ここで λV が十分小さいとして、

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon_k^{(0)} + \lambda \varepsilon_k^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon_k^{(2)} + \dots \\ |\phi_k\rangle &= |\phi_k^{(0)}\rangle + \lambda |\phi_k^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\phi_k^{(2)}\rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{A})$$

と展開できるとしよう。 $|\phi_k\rangle$ として

$$\begin{aligned} H|\phi_k\rangle &= \varepsilon_k|\phi_k\rangle \\ \langle\phi_k^{(0)}|\phi_k\rangle &= \langle\phi_k^{(0)}|\phi_k^{(0)}\rangle = 1 \end{aligned} \quad (\text{B})$$

を満たすものを考え、 $\varepsilon_k^{(1)}$ 、 $|\phi_k^{(1)}\rangle$ 、 $\varepsilon_k^{(2)}$ を $\varepsilon_k^{(0)}$ と $|\phi_k^{(0)}\rangle$ と V を用いて表せ。

(2) 次に $\varepsilon_k^{(0)}$ に対応する H_0 の固有状態に縮退がある場合を考える。この場合、 $\varepsilon_k^{(0)}$ を固有値として持つ部分空間を考え、基底として適当な直交規格化関数列 $|\phi_{k\alpha}^{(0)}\rangle$ を採用することにしよう。ここで α はこれらの基底の指標であり、 $|\phi_{k\alpha}^{(0)}\rangle$ は以下の式を満たす。

$$\begin{aligned} H_0|\phi_{k\alpha}^{(0)}\rangle &= \varepsilon_k^{(0)}|\phi_{k\alpha}^{(0)}\rangle \\ \langle\phi_{k\alpha}^{(0)}|\phi_{k\alpha'}^{(0)}\rangle &= \delta_{\alpha\alpha'} \end{aligned} \quad (\text{C})$$

この基底を用いると H_0 の固有状態でエネルギー $\varepsilon_k^{(0)}$ に対応する状態は、 a_α を係数として

$$|\phi_k^{(0)}\rangle = \sum_\alpha a_\alpha |\phi_{k\alpha}^{(0)}\rangle \quad (\text{D})$$

(次ページに続く)

のように展開される。この場合のエネルギーに対する摂動の一次補正 $\varepsilon_k^{(1)}$ の満たすべき関係式を求めよ。

- (3) 縮退している場合の具体的な例として水素原子の主量子数 $n = 2$ の状態を考えてみる。この場合、状態は 1 つの $2s$ 軌道 ($l = 0, m = 0$) と 3 つの $2p$ 軌道 ($l = 1, m = -1, 0, 1$) からなっており、それぞれの状態は極座標表示では Bohr 半径 a を用いて

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = a^{-3/2} g_{nl}(r/a) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{E})$$

で表される。ここで $Y_l^m(\theta, \varphi)$ は球面調和関数であり、

$$g_{2s}(\rho) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1 - \rho/2) e^{-\rho/2} \quad (\text{F})$$

$$g_{2p}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{6}}{12} \right) \rho e^{-\rho/2} \quad (\text{G})$$

である。 z 軸方向に電場 $E = E\hat{z}$ がある場合、電子の電荷を $-e$ とすると、ハミルトニアンに $eEr \cos \theta$ という項が加わる。 $eEr \cos \theta$ が小さいとしてエネルギーに対する 1 次補正 $\varepsilon_n^{(1)}$ を求めよ。(Linear Stark Effect)。

ただし、以下の公式を用いてもよい。

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^{m*}(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (\text{H})$$

$$\cos \theta Y_l^m = \left[\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m \quad (\text{I})$$

III-3 (統計力学 : イジング・ спин) (100 点)

- (1) 上下 2 方向しか向くことができないスピン(イジング・スピニ)が外場 H 中に置かれている状況を考える。スピンは状態 $s = \pm 1$ に応じて、エネルギー $-s\mu_B H$ をとる。ここで μ_B はスピン磁気モーメント。
 温度を T 、ボルツマン定数を k_B として、この 1 スピンの分配関数を求めよ。
 このスピンがとる状態の平均値 $\langle s \rangle$ とエントロピー S を求め、それらの外場 H への依存性を図示せよ ($H \geq 0$ のみならず $H < 0$ も考える)。
- (2) 次に、 $N(\gg 1)$ 個のスピンが互いに同じ強さ J/N で強磁性相互作用している平均場(分子場)結合系を考えよう。各スピン s_k が受けている分子場 H_{eff} は、系の全スピンの平均値を $m = \sum_j s_j / N$ とおくと、

$$H_{\text{eff}} = \frac{J}{\mu_B N} \sum_{j(\neq k)} s_j = \frac{J}{\mu_B} \left(m - \frac{s_k}{N} \right) \approx \frac{Jm}{\mu_B} \quad (\text{A})$$

と表すことができる。温度 T で、分子場 Jm/μ_B の中でスピンがとる平均値 $\langle s_k \rangle$ が、全スピンの平均値 m に等しいとおいた方程式(自己無撞着方程式、self-consistent equation)を書き下し、系を高温から冷やしていくときに、自発磁化 $m \neq 0$ が生じ始める臨界温度 T_c を求めよ。系の自発磁化の温度依存性を描け。また系のエントロピーの温度依存性を描け。

- (3) 別の考え方で臨界温度が存在することを示そう。この平均場結合イジング・スピニ系のエネルギーは

$$E = -\frac{J}{2N} \sum_{i \neq j} \sum s_i s_j = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N s_i \right)^2 + \frac{J}{2} \approx -\frac{NJ}{2} m^2 \quad (\text{B})$$

と書き換えることが出来る。磁化のない状態 $m \approx 0$ のエネルギーは、スピンがすべてそろった基底状態 $m = \pm 1$ のエネルギーに比べれば $NJ/2$ と非常に大きいので、その滞在確率は基底状態に比べれば $e^{-NJ/2k_B T}$ と微小である。このようなきわめて小さい滞在確率にもかかわらず、温度がある値より大きくなると系が磁性を失うのはなぜか、その理由を考察せよ。

系がとり得る微視的状態の数は $e^{\frac{S}{k_B}}$ と概算されること、 $\ln 2 \approx 0.69$ であること、の知識に基づいて臨界温度を概算せよ。

III-4(物理数学：熱伝導) (100点)

地表を無限に広い平面と見なし、その温度が周期 T で変動しているものとする。地表から下向きに x 軸を取り、温度 u を x と時間 t の関数であるとすると、その分布の時間依存性は次の熱伝導方程式に従う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A})$$

ここで a は地殻の熱拡散率で、 $a = 2.53 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ と仮定する。

(1) 式 (A) を解き、 $x \rightarrow \infty$ で有限な解が

$$u(x, t) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n x} \cos(n\omega t - \alpha_n x + \phi_n) \quad (\text{B})$$

と書けることを示せ。ただし

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2a}} \quad (\text{C})$$

で、 ϕ_n は t と x によらない位相成分である。また必要であれば

$$i = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad -i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (\text{D})$$

を用いよ。

(2) 地表の温度変化が

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\text{E})$$

と書けるとき、式 (B) の係数の満たすべき式を求めよ。

(3) 地表の温度が、1年 ($T = 60 \times 60 \times 24 \times 365 \simeq 3.15 \times 10^7 \text{s}$) 周期で、平均値 15°C 、振幅 15°C で変動しているものと考える。すなわち

$$f(t) = 15 + 15 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (\text{F})$$

とする。このとき、地上における温度変化と逆転している（すなわち地上の夏に最低温度、冬に最高温度になる）深さの中で、最も小さい x の値を求めよ。またその深さにおける温度変化の振幅を求めよ。ただし $\exp(-\pi) = 0.043$ である。

III-5 (実験：信号雑音比) (100 点)

天体からの可視光を検出する際の信号雑音比について考える。天体から 1 秒間に平均 N 個の光子が検出器に入るとする。検出器の検出効率は 100% であるとし、光子 1 個が検出器に入ると電子 1 個が発生するとする。この電子の数は、ポアッソン分布に従い、ある 1 秒間に M 個の電子が生じる確率は

$$P_N(M) = \frac{e^{-N} N^M}{M!} \quad (\text{A})$$

で与えられる。

- (1) ある 1 秒間に生じる電子数が、式 (A) の確率分布に従うとき、その平均は N で、標準偏差は $N^{1/2}$ であることを示せ。但し、

$$\sum_{M=0}^{\infty} P_N(M) = 1$$

である。

t 秒間の積分を行ったとき、天体からの信号は平均で Nt となり、一方、その雑音はポアッソン分布の標準偏差と考えてよいので $(Nt)^{1/2}$ となる。従って、信号雑音比は $Nt/(Nt)^{1/2} = (Nt)^{1/2}$ となりそうだが、雑音源はこれだけではない。夜空からやってくる光子も雑音源となる(これを背景光という)。夜空からは、1 秒間に平均 B 個の光子が検出器に入り、この数もポアッソン分布に従う。更に、 t 秒間積分した後に検出器にたまたま電子を読み出す際にも雑音を生じる。これを読み出し雑音といい、ポアッソン分布に従いその標準偏差は R である。信号雑音比を求めるには、これら 3 つの雑音を全て含んだトータルの雑音を計算する必要がある。

- (2) 一般に、独立なポアッソン分布である $P_N(M)$ と $P_B(M)$ にそれぞれ従う確率変数の和を考えると、その分布の標準偏差は $(N + B)^{1/2}$ となる。これを考慮して、 t 秒間の積分をして読み出した時の天体の信号雑音比を求めよ。(但し、 N 、 B 、 R は時間によらず一定である。)

以下に、得られた信号雑音比について考察する。

- (3) R が他の雑音に比べて十分に大きく他の雑音が無視可能な場合(これを読み出し雑音リミットと言う)、信号雑音比を 2 倍よくするには、積分時間を何倍にしなければならないか?
- (4) 雜音の中で夜空の明るさが起源となっているものが最も卓越しており、他の雑音が無視可能な場合(これを背景光リミットと言う)、信号雑音比を 2 倍よくするには、積分時間を何倍にしなければならないか?

(次ページに続く)

実際の測定では、検出器の都合上、非常に長い間(例えば1晩)積分し続ける事はできない。そこで、1回の積分時間を例えば Δt として、この積分を1晩で n 回くり返し、取得したデータを足し合わせるという操作を行う。この場合、トータルの積分時間 T は $n\Delta t$ となる。

- (5) 非常に暗い天体からの光を検出する場合、一般には1回の積分時間が短いと読み出し雑音リミットになり、ある程度以上長くなると背景光リミットになる。トータルの積分時間が同じ($T = \text{一定}$)であった時に、読み出し雑音リミットのデータを何度も取得して足し合わせる場合と、背景光リミットのデータを何度も取得して足し合わせる場合では、どちらが信号雑音比としては得をするか?

III-6 (実験 : X線回折) (100点)

結晶の構造をX線回折によって調べる実験を考える。実験室系ではX線の発生装置として数十kVの電圧で加速した電子を金属ターゲットに衝突させて発生するX線を用いる方法(管球型、回転対陰極型)が広く用いられている。

- (1) この場合、発生するX線は2種類に分類することができる。それぞれ、名前を挙げ、その起源、特徴を簡潔に説明せよ。
- (2) X線は電磁波のうちどの範囲の波長に対応するか有効数字二桁で答えよ。ただし、X線の光子のエネルギーは $1.2 \times 10^2 \sim 1.2 \times 10^5$ eVの範囲にあるとする。なお、プランク定数は 6.6×10^{-34} J・s、1eVは 1.6×10^{-19} J、光の速度は 3.0×10^8 m/sである。
- (3) 電磁波の中でX線が精密な結晶構造解析に適している理由を述べよ。また、X線以外の結晶構造解析の方法を挙げ、その特徴を述べよ。

結晶に入射するX線および散乱するX線の波数ベクトルをそれぞれ \mathbf{k} 、 \mathbf{k}' (絶対値はともに $2\pi/\lambda$ 、 λ はX線の波長)とすると散乱ベクトルは $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ と定義される。結晶によるX線の回折は $\mathbf{K} = \mathbf{G}$ の場合に起こる。(ラウエの条件)ただし、 \mathbf{G} は逆格子ベクトルであり、次のように表される。

$$\mathbf{G} = h\mathbf{a}^* + k\mathbf{b}^* + l\mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{a}^* = 2\pi \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \mathbf{b}^* = 2\pi \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \mathbf{c}^* = 2\pi \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}$$

ここで、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} はそれぞれ実空間における単位格子の軸ベクトルであり、 h 、 k 、 l はミラー指標である。

- (4) ラウエの条件はよく知られたブレッカの法則 $2d \sin \theta = n\lambda$ と等価であることを示せ。ただし、 d は回折に寄与する格子面(回折面)の面間隔、 θ は回折面から測った散乱角である。
- (5) 実際のX線回折測定では、結晶に対するX線の入射角 ω 、検出器の角度 2θ (入射方向から測った角度)を変化させて散乱強度を測定して逆格子点の位置を決定し、結晶構造の解析を行う。今、2次元逆格子平面内にある逆格子点 \mathbf{Q} (q_x , q_y)が回折計では ω 、 2θ の位置に観測された。逆格子平面内で逆格子点(q_x , q_y)と結晶に対する ω 、 2θ 、散乱ベクトル \mathbf{K} の関係を図示せよ。また、 q_x および q_y を ω 、 2θ の関数として示せ。

(次ページに続く)

無限の大きさの完全結晶について、ある散乱ベクトル \mathbf{K} での回折強度 $I(\mathbf{K})$ は $I(\mathbf{K}) = I_e |F(\mathbf{K})|^2 L(\mathbf{K})$ となる。ここで、 I_e は 1 つの電子による散乱強度、 $L(\mathbf{K})$ はラウエの回折関数、 $F(\mathbf{K})$ は構造因子である。 $L(\mathbf{K})$ は $\mathbf{K} = \mathbf{G}$ のときのみ有限な値を持つため、

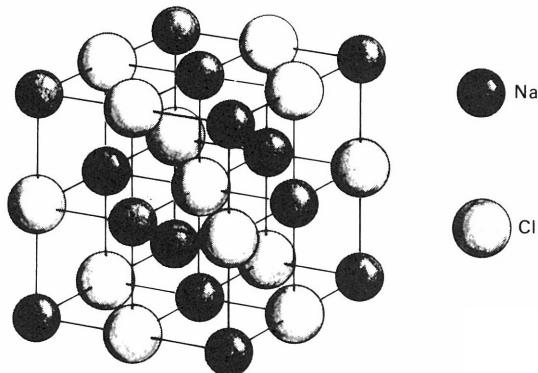
$$F(\mathbf{K}) = F(\mathbf{G}) = \sum_j f_j e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_j}$$

のみを考えればよい。また、 \mathbf{G} はミラー指数で記述できるので、

$$F(\mathbf{G}) = \sum_j f_j e^{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)}$$

となる。ここで、 \mathbf{r}_j は単位格子内の原子の位置であり、単位格子の軸ベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} を用いて、 $\mathbf{r}_j = x_j \mathbf{a} + y_j \mathbf{b} + z_j \mathbf{c}$ である。また、 f_j は \mathbf{r}_j にある原子の原子散乱因子である。

- (6) NaCl 結晶からの回折を考える。NaCl 結晶について構造因子を計算し、消滅則を示せ。ただし、消滅則とは特定のミラー指数 h, k, l に対する構造因子が 0 となり、X 線の回折強度が 0 になる法則である。また同じ岩塩型構造を持つ NaCl と KCl では実際に観測される回折に差が生じる。どのような回折に対し、どのような違いが生じるか述べよ。



NaCl の単位格子

III-7(実験：レーザー)(100点)

- (1) レーザーに関する以下の問い合わせに答えよ。
- レーザーの原理を述べよ。
 - 発振器から波長 $8.00 \times 10^{-7}\text{m}$ のレーザーが出力 1.00kW で放射されているとすると、振動の1周期の間に放射される光子の数はいくらか。光速を $c=3.00 \times 10^8\text{m/s}$ 、プランク定数を $h=6.63 \times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ とし、有効数字に注意して計算せよ。
 - 波長 λ のレーザーを共鳴吸収する原子が静止している。この原子が速度 v でレーザーの進行方向に対向して移動する場合、原子に共鳴吸収させるにはレーザーの波長を $\Delta\lambda$ だけシフトさせる必要がある。シフト量を求めよ。ただし、共鳴吸収時に起こる原子の反跳は無視する。
 - 静止している励起原子から λ の光が放出されれば、その正反対の方向へ原子は反跳する。原子質量を M 、光放出前後の原子の内部エネルギー差を ΔE として光放射後の原子の速さ v を求めよ。
 - 発振器から放射されるレーザーの波長は共振器内に配置した分散素子を使って変化させることができるが、波長範囲は主にレーザー媒質によって決まる。ある標的原子を共鳴遷移できる波長を発振するレーザーを作成したい。図1に標的原子のエネルギー準位を示す。光学的に許される遷移は選択規則により与えられる。いま、 $\Delta J=0,\pm 1$ の遷移が許され、偶項は奇項（奇項は偶項）へ遷移できる、という選択規則が成立する場合、標的原子の遷移可能な準位の組み合わせを全て記せ。ここで、 ${}^1\text{S}_0$ は標的原子の基底準位で偶項を、 ${}^3\text{P}_n$ ($n=0,1,2$) は励起準位で奇項を示す。

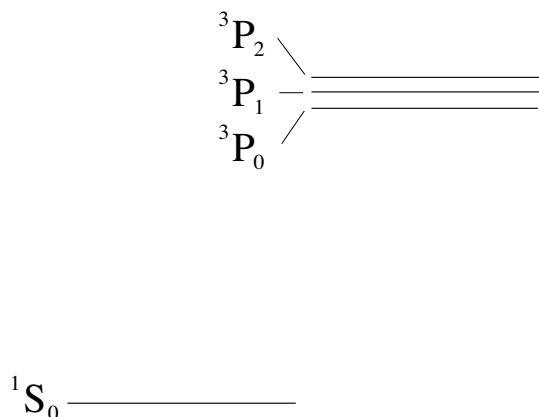


図 1:

(次ページに続く)

(f) 設計したレーザー発振器は直線偏光となるよう製作した。この発振器から放射されるレーザーの光軸上に $\lambda/4$ 波長板を配置し円偏光となるよう $\lambda/4$ 波長板を調整した。円偏光の電場振幅は直線偏光のものに比べ何倍になるか。

(2) 図2に示すような2個のスリットによる光の干渉実験を行った。以下の問い合わせに答えよ。

- (a) S1,S2 における光の電場振幅を A_1, A_2 とし、位相が距離 r とともに $\exp(ikr)$ の形で変化するものとして、スクリーン上に表れる干渉パターンの強度分布をスクリーンの中央からの距離 x の関数として求めよ。ただし、S1,S2 における光の位相は一致しているものとし、 $l \gg x, l \gg d$ を満足しているものとする。ここで、 $k=2\pi/\lambda$ であり λ は光の波長を示す。簡単のため電場振幅は距離 r とともに変化しないものとする。
- (b) スクリーン上の干渉パターンの強度分布について、極大から次の極大までの距離を測ったところ、3.16cm であった。 $l=10.0\text{cm}$ 、 $d=2.00\mu\text{m}$ とし、(a) で求めた近似的な関数を使って光の波長を求めよ。
- (c) 一方のスリット S2 を小さくし通過しにくくし、S2 を通過する強度が S1 を通過する強度の 4% にしても、スクリーン上の干渉縞濃度の極大と極小値にかなりの違いがあって、干渉効果が認められる。極大値と極小値の比を示せ。

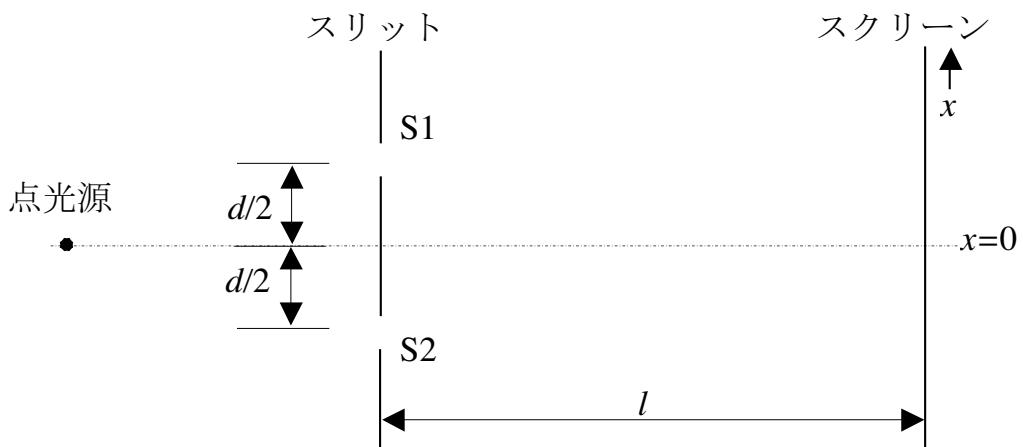


図 2:

III-8 (天文学 : 電磁流体) (100 点)

電気伝導度が高く、電磁力の働きが本質的である流体の力学を電磁流体力学とよぶ。電磁気学の基礎方程式を用いて電磁流体の運動を論じよう。解答では、以下のベクトル恒等式を適宜使用してよい。

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.$$

- (1) 磁束密度 \mathbf{B} の磁場内を電気伝導度 σ の電磁流体が速度 \mathbf{v} で運動している。ただし c を光速として、 $|\mathbf{v}| \ll c$ とする。この時、電磁流体の電流 \mathbf{j} 、電場 \mathbf{E} の関係式 (Ohm の法則) は、式 (A) のように与えられる。

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (A)$$

l, τ を、ここで考えている電磁場、電磁流体の特徴的な空間、時間変化の大きさとすると、 $l/\tau \sim |\mathbf{v}| \ll c$ の場合、変位電流を無視することができる。また、電磁流体は電気的に中性であるとする。この場合、Maxwell 方程式は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}. \end{aligned}$$

ここで、磁場を \mathbf{H} 、真空の透磁率を μ_0 とすると、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。なお、電気伝導度 σ は定数とする。この場合、磁束密度の時間変化が式 (B) で与えられることを示せ。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (B)$$

- (2) 電気抵抗が無視できる場合 ($\sigma \rightarrow \infty$) の電磁流体と磁場の運動を調べよう。

- (a) 流体の速度を \mathbf{v} とすると、流体中の線要素 $\delta \mathbf{r}$ の流体運動にそった変化 (Lagrange 微分) が、式 (C) で与えられることを示せ。(ヒント: 点 $A(\mathbf{r})$, 点 $B(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$ からなる線要素の、流体速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ にそった時間変化を考える。)

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (C)$$

- (b) 電磁流体の質量密度を ρ として、連続方程式(質量保存則)と式 (B) を用いて、 $\sigma \rightarrow \infty$ での \mathbf{B}/ρ の Lagrange 微分を求めよ。また、この結果と式 (C) とを参照して、このとき磁力線は電磁流体とともに運動することを示せ。これを Alfvén の磁気凍結定理と呼ぶ。

(次ページに続く)

(3) 磁気凍結定理のひとつのあらわれに、太陽風の大規模磁場構造がある。太陽には表面から放射状に出る大局的な磁場構造がある。また、太陽からは太陽風とよばれる電気伝導度の高い高温プラズマが惑星間空間へ放射状に流出している。この太陽風プラズマの軌跡のパターンは、太陽の自転運動のためにスパイラル状になる。磁気凍結定理から、太陽風プラズマにより太陽表面から引き出された磁力線も、このプラズマのスパイラルパターンをなぞった構造を持つことになる(図1)。ここでは、太陽からの距離 $r \geq 10r_{\odot}$ (r_{\odot} は太陽半径) では、慣性系で見た場合、太陽風プラズマは動径方向に V で等速直線運動をするものとする。太陽赤道面内にある太陽風の磁場構造に関して、以下の間に答えよ。

- (a) 太陽とともに一定の角速度 ω で回転する系で見た太陽風プラズマの運動を考え、この系での太陽を中心とする2次元極座標 (r, ϕ) で、 $r \geq 10r_{\odot}$ にあるスパイラル磁場の磁力線構造(形状)を表す方程式を求めよ。
- (b) 太陽の自転角速度 $\omega = 3.0 \times 10^{-6} [\text{rad/s}]$ 、太陽半径 $r_{\odot} = 7.0 \times 10^5 [\text{km}]$ 、太陽風の速さ $V = 4.0 \times 10^2 [\text{km/s}]$ 、太陽と地球の間の距離を $r_0 = 1.5 \times 10^8 [\text{km}]$ として、地球軌道付近で磁力線と、太陽と地球を結ぶ線のなす角度 ψ を求めよ。

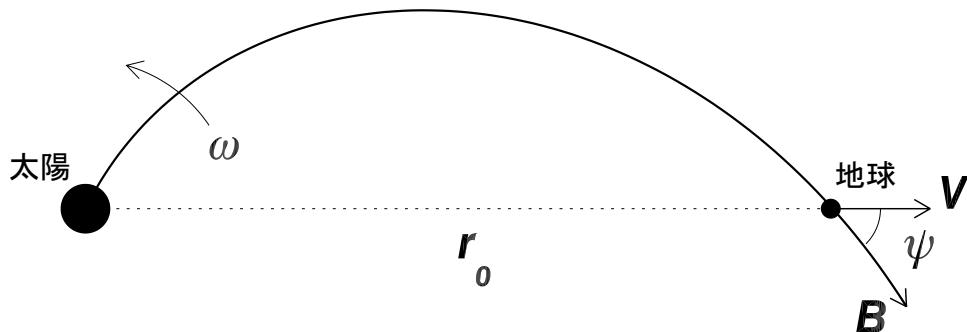


図1: 太陽赤道面内での太陽風のスパイラル磁場。 \mathbf{V} は太陽風プラズマの速度、 \mathbf{B} は太陽風の磁力線を表す。

III-9 (天文学：光電離平衡) (100点)

高温度星は紫外線を放出し、周りにある希薄な星間ガスを光電離する。一方、電離された自由電子とイオンは再結合する。この光電離と再結合という過程がつり合う状態、つまり光電離平衡が実現することにより、高温度星の周りに広大な電離ガス領域が形成される。以下、球対称な電離ガス領域の構造を考える。ガスは水素原子 (H^0)、陽子 ($H^+ = p$)、自由電子 (e^-) のみから成るとし、星からの距離 $r[m]$ におけるそれぞれの個数密度を $n_{H^0}(r)$ [m^{-3}]、 $n_p(r)$ [m^{-3}]、 $n_e(r)$ [m^{-3}] とする。なお、電離ガス領域自体から放出される光子の影響、及び粒子の衝突による H^0 の電離・励起は無視する。 H^0 は全て基底状態にあるとする。

- (1) 単位周波数 (1 Hz)あたりの光度、つまり光度密度 $L_\nu(\nu)$ [$J \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$] を持つ高温度星から距離 $r[m]$ の位置において、単位体積 (1 m^3) 単位時間 (1 s) あたり何個の H^0 が電離されるか。ただし、電離光子に対する H^0 の吸収断面積を $a(\nu)$ [m^2] とする。また、この位置に届くまでに電離光子が電離に使われて減る効果は小さくて無視できるとする。
- (2) 一方、単位体積・単位時間あたりに起きる再結合の数は、再結合係数を β [$m^3 \text{ s}^{-1}$] として、 $n_p(r) \cdot n_e(r) \cdot \beta$ で与えられる。中性である水素の割合 $\xi(r) = n_{H^0}(r)/n_H(r)$ を用いて、光電離平衡の式を書け。ただし、 $n_H(r) = n_{H^0}(r) + n_p(r)$ である。

以下、電離ガス領域内外で一定の $n_H = 1 \times 10^7$ [m^{-3}]、高温度星から単位時間に放射される電離光子の個数が 5×10^{48} [s^{-1}] である場合を考える。なお、 $a(\nu)$ は電離光子の周波数 ν に依らず一定で $a \sim 6 \times 10^{-22}$ [m^2] と近似して良い。また、 $\beta \sim 3 \times 10^{-19}$ [$m^3 \text{ s}^{-1}$] である。

- (3) (2) で求めた式から、 $r = 1 \times 10^{17}$ [m] における ξ を有効数字一桁で概算せよ。
- (4) ここまで、電離光子が途中で電離に使われて減る効果を無視してきた。しかし、高温度星から遠ざかるにつれて、この効果を無視できなくなる。この効果を評価するために、周波数 ν [Hz] を持った $N_\nu(\nu)$ 個 [Hz^{-1}] の電離光子が、半径 r [m] の球殻から $r + dr$ [m] の球殻へ微小距離 dr [m] だけ進んだときの個数変化 $dN_\nu(\nu)$ [Hz^{-1}] を $\xi(r)$ を用いて表せ。
- (5) 電離ガス領域とその外側の中性ガス領域との境目の領域を遷移領域とよぶ。この領域を通過する際に電離光子の数が $1/e$ に減る (e は自然対数の底) と考えることにより、遷移領域の厚さを有効数字一桁で概算せよ。ただし、この領域において $\xi \sim 0.5$ と近似してよい。
- (6) 電離ガス領域の半径を有効数字一桁で概算せよ。必要なら $\pi^{1/3} \sim 1.5$ を用いてよい。

平成18年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1,I-2,I-3の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ(裏面を用いてもよい)。
- (2) 各解答用紙は、横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 計算用紙は回収しない。

I-1 (力学) (100点)

図のような二重振子の微小な振動について考えよう。振動は鉛直面内でおこると仮定し、一般化座標として図の θ と φ を使い、その時間微分をそれぞれ $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\varphi}$ とする。また、図のように、おもりの質量を m 、 m' 、糸の長さを l 、 l' とする。以下では、 θ 、 φ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\varphi}$ は微小量として、これらの2次まで考慮する。重力加速度は g とし、糸の部分の質量は無視する。

- (1) 振子全体の運動エネルギーを求めよ。
- (2) 振子全体の位置エネルギーを求めよ。但し、振子が鉛直に垂れている状態の位置エネルギーを0とする。
- (3) θ 、 φ に対する運動方程式を求めよ。
- (4) 問(3)で求めた運動方程式を解くと、一般解は、

$$\theta(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

と書ける ($\omega_1 < \omega_2$)。 ω_1^2 、 ω_2^2 の値、 A_1/B_1 、 A_2/B_2 の値を求めよ。

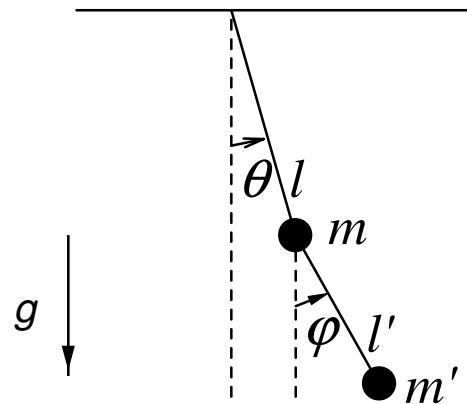
- (5) 以下では、 $l = l'$ 、 $m' \ll m$ とする。このとき、角振動数 ω_1 と ω_2 は、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m'}{m}} \right), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m'}{m}} \right)$$

と近似的に表せることを示せ。

- (6) 初期条件を、 $t = 0$ で $\theta = 0$ 、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $\varphi = \varphi_0$ 、 $\dot{\varphi} = 0$ とする。この場合、一般解の係数 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 を求めよ。また、 $\theta(t)$ と $\varphi(t)$ の運動の様子を、時間 t の関数としてグラフで示せ。時間 t の範囲は $t = 0$ から $\frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ までとり、 $\theta(t)$ と $\varphi(t)$ の挙動の違いがわかるように二つのグラフを上下にならべて比較せよ。

(ヒント : $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$)



I-2 (電磁気学) (100 点)

一様な電場 $\vec{E} = (0, 0, E)$ と、それに垂直な一様磁場 $\vec{B} = (0, B, 0)$ の存在する空間における、荷電粒子の運動を考える。ただし、 $E > 0, B > 0$, 荷電粒子の電荷を q 、質量を m とする。電荷 q は正または負とする。また、粒子の初速度は $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ とし、 $|v_0/c| \ll 1$ を満たすものとする。 c は光速である。

- (1) 荷電粒子の運動方程式を書け。
- (2) 荷電粒子の速度を求め、時間の関数として表せ。
- (3) 荷電粒子の初期の位置を、原点 $(0, 0, 0)$ に選んだとき、軌道の形を、次の 2 つの場合について図示せよ。
 - (a) $v_0 = -E/B$
 - (b) $v_0 = 0$
- (4) E/B という速さで x 軸の負方向に運動する座標系で見たときの、電場と磁場の大きさ、方向を求めよ。これより、問(3)(a) の運動の特徴が説明できることを述べよ。
- (5) 次に、磁場はそのままにして一様な電場の代わりに、一様な重力場（重力加速度 $\vec{g} = (0, 0, -g)$ ）を与える。このときの荷電粒子の運動方程式を解き、旋回中心の動く向きに注意して、運動の特徴を述べよ。

I-3 (量子力学) (100 点)

スピン $1/2$ を持つ粒子のスピン演算子 s は、パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いて $s = \frac{\hbar}{2}\sigma$ と表され、スピン演算子 s は交換関係

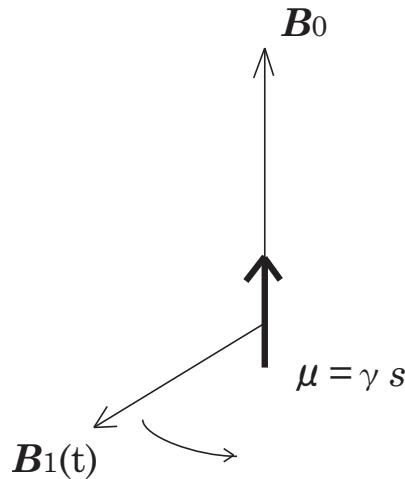
$$[s_1, s_2] = i\hbar s_3, \quad [s_2, s_3] = i\hbar s_1, \quad [s_3, s_1] = i\hbar s_2,$$

を満たす。

一般にスピンを持った粒子は、粒子に固有の磁気モーメントを持っている。今、考えているスピン $1/2$ の粒子の固有磁気モーメントを $\mu = \gamma s$ として、この粒子が z 方向の静磁場 B_0 、及び静磁場に直交する $x-y$ 平面内で角速度 ω で回転する磁場 $B_1(t)$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos(\omega t) \\ -B_1 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A})$$

の中に静止しているとしよう。(下図参照)



軌道運動は考えないとするとハミルトニアンは

$$H(t) = -\mu \cdot (B_0 + B_1(t)),$$

で与えられる。ここで時刻 $t = 0$ にスピンが z 軸の正方向を向いていたとして、時刻 t にスピンが z 軸の負方向を向いている確率 $P(t)$ を求めよう。

但し、スピン $1/2$ を持つ粒子の状態は二成分波動関数

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix},$$

で表され、これを用いてシュレーーディンガー方程式は通常の形

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t) \psi(t),$$

に書くことができる。

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad \omega_1 = \gamma B_1,$$

と定義し、以下の問題に答えよ。

(1) まず静磁場のみ ($B_1 = 0$) の場合を考え、この場合の波動関数

$$\psi_0(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0+}(t) \\ \psi_{0-}(t) \end{pmatrix}$$

を求めよ。但し、任意定数を決める必要はない。

(2) 次に一般に $B_1 \neq 0$ の場合を考える。問(1)で求めた ψ_0 を用いて波動関数

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a_+(t)\psi_{0+}(t) \\ a_-(t)\psi_{0-}(t) \end{pmatrix}$$

のように表したとき、 $a_\pm(t)$ の満たす方程式を求めよ。

(3) $t = 0$ でスピンが z 軸の正方向を向いていたものとして $a_\pm(t)$ を求めよ。また、時刻 t でスピンが z 軸の負方向を向いている確率 $P(t)$ を求めよ。

(4) $P(t)$ の最大値の大まかな形を、式(A)で導入された振動磁場 B_1 の角振動数 ω の関数として図示し、その物理的意味を考察せよ。

平成18年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題II-1、II-2、II-3の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ(裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に、問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (3) 計算用紙は回収しない。
-

II-1(熱統計力学)(100点)

(1) ファン・デル・ワールス方程式で記述される流体がある。即ち圧力 p は温度 T と粒子数密度 n により

$$p = \frac{k_B T n}{1 - bn} - an^2 \quad (\text{A})$$

と表せる。正の定数 a, b の物理的意味を述べよ。 k_B はボルツマン定数である。

(2) 一定温度 T での $p - v$ 曲線が図のような形状の時には、気体相と液体相が共存する。ただし $v = 1/n$ は一粒子当たりの体積。 v_g と v_l は気体相と液体相での v の値である。共存する時の圧力 $p = p_{\text{cx}}(T)$ は温度の関数であるがどのように決まるか考えよう。平衡では2相の圧力と化学ポテンシャル μ が等しくなることを利用して、一粒子当たりのヘルムホルツ自由エネルギー f の2相の間の差を v_g, v_l, p_{cx} を用いて書け。また温度一定の場合の微分式 $df = -pdv$ も用いて、平衡での2相共存の条件として、領域Aと領域Bの面積が等しいことを導け (Maxwellの規則)。

(3) (A)式より、等温圧縮率 $K_T = (\partial n / \partial p)_T / n$ は

$$n k_B K_T = \frac{(1 - bn)^2}{T - T_s(n)} \quad (\text{B})$$

の形に書ける。 n に依存した温度 $T_s(n)$ を計算せよ。図で $T = T_s(n)$ となる点はどこに位置するか答えよ。

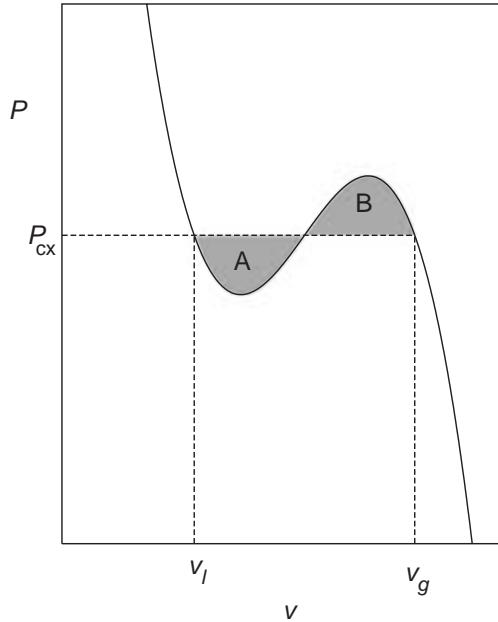
(4) 温度 T を臨界温度 T_c まで上昇させると、2相の体積差 $\Delta v = v_g - v_l$ が零になり、2相の区別がなくなる臨界点と呼ばれる状態が達成できる。 $T_s(n)$ が密度 n の

関数として最大となり、かつ温度が $T = T_s(n)$ である状態が臨界点になることを示せ。このことから臨界点における密度 n_c と温度 T_c を a, b で表せ。次に密度 n を臨界値 n_c に保ったまま温度 T を臨界温度 T_c に高温側から近づけてみよう。等温圧縮率 K_T がどのように振舞うか図示せよ。

(5) 2相共存状態で外から熱を僅かに与えると、共存状態を保ったまま圧力と温度が変化する。平衡状態では

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta v} \quad (\text{C})$$

の関係が知られている。ここで $L = T\Delta s$ は粒子 1 個当たりの潜熱であり、 $\Delta s = s_g - s_l$ は気体状態と液体状態での粒子 1 個当たりのエントロピー差である。この(C)式がどのようにして導かれるか答えよ。



II-2 (物理数学) (100 点)

$f(t)$ は時間 t の連続な実関数で、正の定数 M と α に対し、 $|f(t)| \leq M e^{-\alpha t}$ を満たす。この $f(t)$ を用いて、複素関数 $\chi(\zeta)$ を、次式で定義する。

$$\chi(\zeta) = \int_0^\infty f(t) e^{i\zeta t} dt \quad (\text{A})$$

以下の間に答えよ。

(1) $\chi(\zeta)$ の n 階導関数 $\chi^{(n)}(\zeta)$ が、 ζ 複素平面の上半面で

$$|\chi^{(n)}(\zeta)| \leq M \frac{n!}{(\alpha + \zeta_2)^{n+1}} \quad (\text{B})$$

を満たすことを示せ。但し、 ζ_2 は ζ の虚部である。

(ヒント：一般に、 $\left| \sum_{i=1}^N a_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |a_i|$ であり、これは積分にも拡張できる。)

(2) ζ 平面上の複素積分を利用して、

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \quad (\text{C})$$

を導け。ここで、 ω は実数であり、P の付いた積分は実軸上の主値積分を意味する。即ち、被積分関数 $F(x)$ が x_0 のみで極をもつ場合、 $x_1 (< x_0)$ から $x_2 (> x_0)$ までの主値積分は、次式で与えられる。

$$P \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{x_1}^{x_0 - \varepsilon} F(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{x_2} F(x) dx \right]$$

(3) $\chi(\zeta)$ の実部を $\chi_1(\zeta)$ 、虚部を $\chi_2(\zeta)$ とする。即ち、 $\chi(\zeta) = \chi_1(\zeta) + i\chi_2(\zeta)$ 。このとき、まず、 $\chi_1(\zeta)$ と $\chi_2(\zeta)$ について、 ζ の関数としての偶奇性を調べよ。次に、それを利用して、(C) 式より次の 2 式を導け。

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\zeta \chi_2(\zeta)}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta \quad (\text{D})$$

$$\chi_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega \chi_1(\zeta)}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta \quad (\text{E})$$

(4) $f(t)$ が次の 1 階微分方程式を満たすとする。

$$\frac{df(t)}{dt} + af(t) = Ae^{-bt} \quad (\text{F})$$

このとき $f(t)$ および $\chi(\zeta)$ を求めよ。ここで, a, b, A は共に正の定数である(但し, $a > b$)。また, $f(t)$ の初期条件は $f(0) = 0$ である。

II-3 (複合問題) (100 点)

理想流体の渦のダイナミックスを論じよう。粘性がないために渦はその形状を保ち続ける。その結果、直線的な渦が存在する場合は流体の運動は渦ベクトルに垂直な平面内に拘束され、2次元的な扱いが可能になる。また、この系では電磁気学とのアナロジーが成立する。

今、流体系は十分大きく広がっており、境界の影響はないものとして、以下の間に答えよ。

- (1) 流体の速度場 v が

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A})$$

を満たすとする。但し \mathbf{A} は $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ を満たすベクトルポテンシャルである。このとき渦度 $\omega = \operatorname{rot} v$ は $\nabla^2 \mathbf{A} = -\omega$ を満たすことと、その特解がビオ・サバル則

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{B})$$

で表されることを示せ。

- (2) e_z を z 方向の単位ベクトルとして、渦度が $\omega = \omega e_z$ で表される直線渦を考える。渦の断面積を S として循環 $\Gamma \equiv \omega S$ を一定に保ったまま $S \rightarrow 0$ の極限を取ったものを渦糸と呼ぶ。 xy 平面の原点に置かれた循環 Γ の渦糸が、原点以外の場所に作る速度場を求めよ。(ヒント: この状況では渦度は $\omega = \Gamma \delta(x)\delta(y)$ と表される。またベクトルポテンシャル自体は無限遠に 2 次元系特有の特性を持つが、速度場は無限遠ではゼロになる。)
- (3) 位置 (x_j, y_j) に循環 Γ_j の渦糸 j が存在する渦糸系 ($1 \leq j \leq N$) を考える。この系での渦糸の移動速度は問 (2) で計算した他の渦糸が作る誘導速度の総和に等しいものとする。このとき $z_j \equiv x_j + iy_j$, $z_j^* \equiv x_j - iy_j$ の時間発展は

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\Gamma_j}{z_j - z_k} \quad (\text{C})$$

で記述できることを示せ。

(4) 問(3)の(C)式は

$$\Gamma_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (\text{D})$$

という(係数を別にして)正準方程式に書き直せることを示せ。またこのときのハミルトニアン H を既知変数を用いて表せ。

(5) この系で渦糸の全角運動量

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_j \left(x_j \frac{dy_j}{dt} - \frac{dx_j}{dt} y_j \right) \quad (\text{E})$$

が保存量であることを示せ。

平成 18 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題 III-1 から III-9 まで 9 問ある。これらから 3 問選択せよ。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。
裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に、
問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 計算用紙は回収しない。
-

III-1 力学：中心力

III-2 量子力学：磁場中の電子

III-3 統計力学：ボーズ凝縮

III-4 物理数学：微分方程式

III-5 流体力学：ラバール管

III-6 実験：中性子散乱

III-7 実験：データ解析

III-8 天文学：制動放射

III-9 天文学：恒星

III-1 (力学 : 中心力) (100 点)

3 次元座標空間において中心力ポテンシャル $U(r)$ の中を運動する質量 m の粒子の運動を古典力学によって考察する。以下の問いに答えよ。

- (1) 粒子の軌道は一つの平面上にのる。この理由を簡潔に説明せよ。
- (2) この平面上で、動径 r 方向と角度 θ 方向の運動方程式を導け。
- (3) 中心力ポテンシャルが $U(r) = g/r$ で与えられる場合に粒子の軌道の形を求めたい。ただし、 $g < 0$ とする。変数変換 $u = 1/r$ を行い、 u を θ の関数とみなして u に対する 2 階の微分方程式を導け。
- (4) 上で求めた微分方程式を解くと r は θ の関数として

$$r = \frac{a}{1 + b \cos \theta} \quad (\text{A})$$

という形に表わせることを示せ。ここで、 a, b は定数である。

- (5) 上で求めた軌道は $b < 1$ のときどのような曲線になるか。また、 $a/(1 - b^2)$ という量は何を表すか。
- (6) 中心力ポテンシャルが $U(r) = gr^n$ と書ける場合を考える。ただし、 $g > 0$ または $g < 0$ 、 n は正または負の整数とする。運動方程式の解として円軌道が存在するためには、 g と n がある関係を満たす必要がある。この関係を求めよ。
- (7) 問(6)で求めた関係が満たされていると仮定し、半径 r_0 の円運動に動径方向の小振幅振動が加わった運動を考察しよう。 $U(r)$ に遠心力ポテンシャルを加えた有効ポテンシャル $U^{(\text{eff})}(r)$ を $r - r_0$ に関して 2 次まで展開して動径方向の角振動数 ω_r を求めよ。
- (8) 問(7)で求めた ω_r の表式から g を消去すれば、 ω_r と角度 θ 方向の角振動数 ω_θ の関係式が得られる。この関係式を求めよ。
- (9) 問(8)で求めた関係式を見ると、よく知られた $n = -1$ の場合や調和振動子ポテンシャル ($n = 2$) 以外にも、円軌道でない周期軌道が存在する n の値がたくさんあることが分かる。そのような n の例を一つ挙げ、その軌道の略図を示せ。ただし、周期軌道とは何回か回転した後ふたたび初期時刻と同じ点に同じ速度で戻ってくる軌道のことである。

III-2 (量子力学：磁場中の電子) (100点)

一様な磁場中にある質量 m , 電荷 $-e$ の電子の運動を考える。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて電子のハミルトニアンは,

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2$$

と与えられる。以下 x, y, z 方向に, それぞれ長さ L_x, L_y, L_z の周期的境界条件で考えよう。

- (1) ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ は, z 方向に B の大きさの一様磁場を与えることを示せ。以下このベクトルポテンシャルを使って問題を解け。
- (2) 变数 z に関する部分の固有関数とエネルギー固有値を求めよ。ただし, 固有関数を規格化する必要はない。
- (3) 以下の問は, 变数 x および y に関する自由度のみを考えることにする。 y 方向には平面波を考えて, 变数 x に関する波動関数のシュレーディンガー方程式を書け。また, なぜ平面波が固有関数になるか理由を書け。
- (4) 質量 m , バネ定数 K を持つ一次元調和振動子の固有関数は,

$$u_N(x) = C_N \exp\left(-\frac{x^2}{2\ell^2}\right) H_N\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

であり, エネルギー固有値は $\varepsilon_N = (N + 1/2)\hbar\omega_c$ であることを参考にして, 变数 x に関する部分のシュレーディンガー方程式の固有関数とエネルギー固有値 E_x を求めよ。ここで, N は 0 以上の整数, C_N は N に依存する定数, $\omega_c = \sqrt{K/m}$ は固有角振動数, $\ell = \sqrt[4]{\hbar^2/mK}$ は波動関数の広がりを表す定数, $H_N(x/\ell)$ はエルミート多項式である。

- (5) 同じ固有値 E_x に属する、単位面積あたりの状態の数(縮退度)を求めよ。ただし $L_x \gg \ell, L_y \gg \ell$ とする。
- (6) ベクトルポテンシャルに関数 $\chi = -Bxy$ の勾配 $\nabla\chi$ を加えるゲージ変換を行ってもエネルギー固有値は変わらないことを示せ。このことはゲージ変換によってベクトルポテンシャルが変わっても, 位相に関係しない物理現象は変わらないことを意味している。これをゲージ不变性と言う。

III-3 (統計力学: ボーズ凝縮) (100 点)

粒子数 N のボーズ統計に従う理想気体が十分大きな体積 V の容器に閉じこめられている。このとき、分布関数 $f(\epsilon)$ は

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

で与えられる。但し ϵ, μ はそれぞれボーズ粒子のエネルギー、化学ポテンシャルであり、 β はボルツマン定数 k_B 、温度 T を用いて $\beta = 1/(k_B T)$ と表される。以下の間に答えよ。

- (1) この系の化学ポテンシャル μ に関連して以下の事を説明せよ。
 - (a) 物理的に μ の取り得る範囲を求めよ。
 - (b) 温度を固定したとき、粒子数の期待値が $\mu = 0$ で最大になることを示せ。
- (2) ボーズ粒子のエネルギーが運動量の大きさ p および粒子質量 m を用いて $\epsilon = p^2/2m$ で与えられるとして。系の体積が十分大きいので励起状態にある粒子数 N' は積分で表現できる。このとき d 次元理想ボーズ気体において T と数密度 N'/V の関係を積分

$$F_{d/2}(\alpha) \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{d/2-1}}{e^{x+\alpha} - 1}$$

を用いて表せ。尚、この関係式は T 及び N' が与えられたときの化学ポテンシャルの決定方程式となっている。また考えているボーズ粒子のスピンはゼロとし、スピン自由度は考えなくてよいものとする。更に d 次元単位球の表面積を一括して S_d と表すと、求める式が一つの式で書けて便利である ($S_3 = 4\pi, S_2 = 2\pi$ 等に注意)。

- (3) 問 (2) で求めた条件式では、空間次元 d がある条件を満たすと、十分低温では α が解を持たなくなる。このことを考慮して 1 次元系、2 次元系でボーズ凝縮が生じるか否かを論ぜよ。
- (4) 3 次元系に限定して考察を進める。

- (a) これまでの議論を参考にして、ボーズ凝縮の生じる温度 T_c を求めよ。
- (b) $T \leq T_c$ での凝縮相における粒子数密度 n_c を粒子数密度 $n \equiv N/V$ 及び T, T_c の関数として書き下せ。

但し

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

等を用いて良い。

- (5) 次に $\epsilon = cp$ の光子気体を考えよう。仮に問(2)、(3)で用いたボーズ凝縮の判定条件が有効であれば、3次元系では有限温度でボーズ凝縮が起こることになる。しかし実際には、光子気体では有限温度で熱力学量に何の異常も現れない。その理由を説明せよ。

III-4 (物理数学 : 微分方程式) (100 点)

- (1) 実関数 $u(x, y)$ に対する 2 次元のラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0,$$

を極座標 (r, θ) ($0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \theta < \pi$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

を用いて書き直せ。

- (2) 問 (1) で極座標で表したラプラス方程式の解 $u(r, \theta)$ で、原点 $r = 0$ で有限であるものの一般形を求めよ。

- (3) 問 (2) で求めた一般形を用いて、円周 $r = r_0$ で境界条件

$$u(r_0, \theta) = f(\theta),$$

を満たす解を求めよ。但し、 $f(\theta)$ は与えられた関数とする。

- (4) 問 (3) で求めた解で特に、 $f(\theta)$ を $[-\pi, \pi]$ で区別的に連続な関数

$$f(\theta) = |\theta|, \quad (-\pi \leq \theta < \pi),$$

を接続して得られる周期関数とした場合の解を求めよ。但し、解は級数形のままで足し上げる必要はない。

III-5 (流体力学 : ラバール管) (100 点)

管の中の定常流を考える。簡単のため、流れの性質は管の中心軸に沿った座標(x)にのみ依存するとし、管の断面積 A は x のみの関数 $A(x)$ とする。

このとき、流れの連続の式、運動方程式は、以下のようになる。

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx}(A\rho v) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (\text{B})$$

ただし、 $\rho(x)$ は質量密度、 $p(x)$ は圧力、 $v(x)$ は速度である。また、流れは断熱的であるとすると、以下の式が成りたつ。

$$\frac{d}{dx}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (\text{C})$$

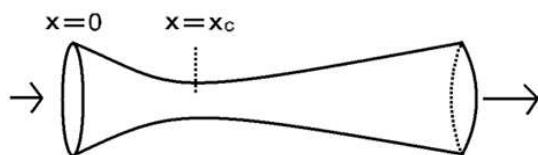
ここで、 $\gamma = C_p/C_v$ は比熱比であり、单原子理想気体では $5/3$ である。 $(C_p, C_v$ は、それぞれ、定圧比熱、定積比熱である。)

上記の方程式を積分しよう。まず、方程式 (A) と (C) の積分は容易に以下のように求まる。

$$A\rho v = f = \text{constant} \quad (\text{D})$$

$$p\rho^{-\gamma} = K = \text{constant} \quad (\text{E})$$

- (1) 運動方程式 (B) の積分を求めよ (ベルヌーイの定理)。また、その物理的意味を述べよ。



以下では、有限の長さの管を考える。このとき、左端を高圧、右端を低圧とすると、左端から右端へ流れが発生する。右端(出口)における流れの速度が超音速となるためには、管の断面積が x と共に減少し、あるところ($x = x_c$)で $dA/dx = 0$ となり、再び増大するようになっている必要がある。そのような管(上図参照)をラバール管といい、ロケットやジェット機のジェット噴射における超音速流の生成に使われる。以下の問い合わせに答えよ。

- (2) 流れの初速 v_0 が音速以下であり、かつ、 $dA/dx < 0$ ならば、流れの速さの2乗は x と共に単調増加する ($dv^2/dx > 0$) ことを示せ。ただし、音速 c は $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ と表される。
- (3) 流れの速さが音速に等しくなることができるのは、 $dA/dx = 0$ の場所のみであることを示せ。
- (4) 速さの2乗の勾配 (dv^2/dx) の符号がどうなるか、以下の場合に分けて答えよ。
- (a) $x < x_c, v > c$
 - (b) $x < x_c, v < c$
 - (c) $x > x_c, v > c$
 - (d) $x > x_c, v < c$

また、この結果に基づいて、解曲線のあらましを図示せよ。図は縦軸に v/c をとり、横軸に x をとること。ただし、 c は x における音速とする。

- (5) ラバール管の左端（入口）では流れの初速 v_0 はそこでの音速 c_0 に比べて十分小さい ($v_0 \ll c_0$) とし、右端（出口）では、流れの速さ（終速） v_1 はそこでの音速 c_1 より十分大きい ($v_1 \gg c_1$) とする。終速 v_1 を、比熱比と c_0 で表せ。

III-6 (実験：中性子散乱) (100 点)

- (1) 中性子は、原子炉内で核分裂反応により発生させることができる。しかし、発生直後の中性子はあまりにも高速であるため、減速材と呼ばれる物質との衝突を通して熱中性子に変換した後で、構造解析等の物性研究に利用されている。以下の間に答えよ。
- (a) 中性子の減速材として、多量の水素原子を含む物質を低温に保持して用いることが多い。この理由を、数式を使わずに、簡潔に述べよ。
- (b) 中性子の質量 m はいくらか。 kg 単位で有効数字二桁で答えよ。ヒント：アボガドロ数 N_A は $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$ である。
- (c) ド・ブロイ波長が 1 である中性子のエネルギーを、電子ボルト単位で有効数字二桁で答えよ。なお、素電荷 e は $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 、プランク定数 h は $6.6 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$ である。
- (2) 固体中の原子は、平衡位置を中心に微小振動している。一つの原子の振動は、原子間相互作用を通して固体全体に伝播し、格子振動と呼ばれる集団運動となる。格子振動は、基準振動の重ね合わせとして記述され、各々の基準振動を量子化したものがフォノンである。フォノンの分散関係（即ち、運動量とエネルギーの関係）は、中性子非弾性散乱を用いて調べることができる。以下の間に答えよ。
- (a) 中性子の波数ベクトルが、非弾性散乱により k_1 から k_2 に変化したとする。このとき中性子が失った運動量 P とエネルギー E を、 k_1 , k_2 および中性子の質量 m を用いて表せ。
- (b) k_1 と k_2 がなす角度を散乱角と呼ぶ。散乱角が 0 度から 180 度まで変化する際、 P の絶対値 P が取りうる範囲を、 k_1 の絶対値 k_1 と、 k_2 の絶対値 k_2 を用いて表せ。但し、 $k_1 \geq k_2$ とする。
- (c) 前問で得られた不等式から k_2 を消去して、 P , E , k_1 の関係を表す不等式を導け。また、その不等式を満たす領域を、 $P - E$ 平面上に図示せよ。
- (d) フォノンのエネルギーを E_{ph} 、運動量の絶対値を P_{ph} とする。このフォノンが中性子非弾性散乱によって観測されるためには、 $P = P_{\text{ph}}$ および $E = E_{\text{ph}}$ の条件が必要である。即ち、中性子が失った運動量およびエネルギーが格子系に移動して、フォノンが生成される条件である。今、フォノンの分散関係が、フォノンの速度 v を用いて、 $E_{\text{ph}} = vP_{\text{ph}}$ で与えられる場合を考える。前問の結果を参考にして、 $E > 0$ でフォノンが観測されるために k_1 が満たすべき条件を求めよ。なお、ここでは、完全に等方的な固体を想定する。また、結晶における逆格子ベクトルについては考慮しなくてもよい。

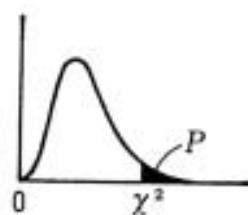
III-7 (実験: データ解析) (100 点)

- (1) 表面張力の作用により、液滴は振動数 ω で振動している。この液体の密度を ρ 、液体の表面張力を f 、液滴の直径を R とする。
- ω, ρ, f, R のそれぞれの次元を長さ [L]、質量 [M]、時間 [T] の基本次元を使って表せ。(ヒント: 表面張力は単位面積あたりのエネルギー)
 - ω, f, ρ, R の間には、 $\omega \propto f^A \rho^B R^C$ の関係がなり立つ。次元解析により A, B, C を求めよ。
- (2) 每分、平均で 2 個崩壊すると言われている放射性同位元素の試料がある。これを確かめるために、1 分毎の崩壊数の測定を 40 回行ない表 1 の分布を得た。以下の問い合わせに答えよ。
- 確率変数 X 、平均 μ のポアッソン分布の確率分布関数 $P(X, \mu)$ は、
- $$P(X, \mu) = \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}$$
- である。このときの分散 σ^2 を求めよ。その算出方法も書け。
- 表 1 にある測定回数の分布はポアッソン分布に従うものとする。上に述べた「平均每分 2 個崩壊する」が正しいと仮定して、各崩壊数に対応する測定回数の期待値を求めよ。但し、 $e^{-2} = 0.14$ とする。
 - この「平均每分 2 個崩壊する」という仮定の正当性を χ^2 検定法で判定する。この場合の自由度を求めよ。また表 2 の χ^2 分布を用いてこの仮定を検定してみよ。

崩壊数	測定回数	期待値
0	11	
1	12	
2	11	
3	4	
4	2	
5 以上	0	

表 1

右すその面積が P になるような χ^2 の値



$\phi \backslash P$	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	$P \backslash \phi$
1	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100

表2 χ^2 分布: ϕ は自由度。
(日科技連出版 大村平著 「統計のはなし」より転写)

III-8 (天文学：制動放射) (100 点)

完全電離した水素ガスからの連続光放射について考える。電離ガス中の自由電子が陽子の近くを通過していく際に、加速を受けて双極子放射を出す。このガスが単位体積、単位時間、単位周波数当たりにどれだけの放射を出すかを考えよう。まず、一つの自由電子(電荷 $-e$ 、質量 m)が、衝突パラメータ b 、無限遠方での速さ v で陽子に接近し、その軌道をわずかに直線からまげながら通過していく場合を考える。この場合、双極子放射のスペクトル、すなわち単位周波数当たりの放射エネルギー ($dW/d\nu$) は、

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{4\pi e^2}{3\epsilon_0 c^3} |\hat{\ddot{\mathbf{r}}}(\omega)|^2 \quad (\text{A})$$

で与えられる。ただし、 ν は周波数で、 $\omega = 2\pi\nu$ であり、 ϵ_0 は真空の誘電率、 c は光速、 \mathbf{r} は電子の陽子に対する相対位置ベクトルで、 $\ddot{\mathbf{r}}$ はその時間 2 階微分を示している。また、 $\hat{\ddot{\mathbf{r}}}(\omega)$ は、 $\ddot{\mathbf{r}}$ のフーリエ変換である。衝突時間 τ を $\tau = b/v$ とすると、 $\hat{\ddot{\mathbf{r}}}(\omega)$ は次式で近似される。

$$\hat{\ddot{\mathbf{r}}}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}} dt & \omega \ll \tau^{-1} \\ 0 & \omega \gg \tau^{-1} \end{cases} \quad (\text{B})$$

- (1) $dW/d\nu$ を $\omega \gg \tau^{-1}$ と $\omega \ll \tau^{-1}$ の場合に分けて求めよ。但し、式 (B) を積分する際には、電子の運動は直線で近似してよく、その軌道の垂直方向に働く加速度だけ考慮すればよい。
- (2) 電子の速度を v として(陽子は静止しているとする)、衝突パラメータが b と $b+db$ の間での、単位時間、単位体積当たりの電子と陽子の衝突数を求めよ。電子と陽子の密度はそれぞれ n_e 、 n_p とし、電子の軌道は直線で近似してよい。

以下では、 $\omega \ll \tau^{-1}$ だけを考える。 b を b_{\min} から b_{\max} まで積分することによって、単位周波数、単位体積、単位時間当たりの放射エネルギー $d^3W/d\nu dV dt$ を求め、次に、電子の速度分布でこの結果を平均化する。温度 T の電子の速度分布をマクスウェル分布として平均化すると、

$$\frac{d^3W}{d\nu dV dt} = \frac{e^6}{6\pi^2 \epsilon_0^3 m c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}} n_e n_p e^{-h\nu/kT} \overline{g_{ff}} \quad (\text{C})$$

が得られる。ここに、 k はボルツマン定数、 h はプランク定数で、 $\overline{g_{ff}}$ は定数である。速度平均をとった $d^3W/d\nu dV dt$ は、 α_ν を吸収係数とし、黒体放射を

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (\text{D})$$

として、 $4\pi\alpha_\nu B_\nu$ と書くことができる。

- (3) $h\nu \ll kT$ の場合に、 $\exp(-h\nu/kT)$ を $h\nu/kT$ の 1 次の項までとて、吸収係数を求めよ。

完全電離水素ガスの視線方向の厚みを L とすると、光学的厚み τ_ν は近似的に

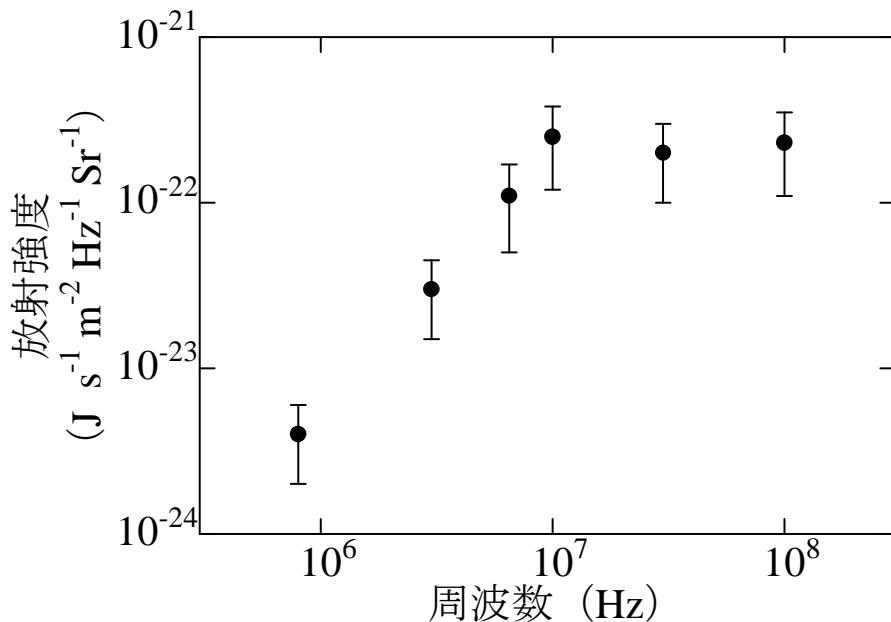
$$\tau_\nu = \alpha_\nu L = 1.6 \times 10^{-11} \left(\frac{n_e}{1 \text{ m}^{-3}} \right) \left(\frac{n_p}{1 \text{ m}^{-3}} \right) \left(\frac{L}{1 \text{ m}} \right) \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right)^{-3/2} \left(\frac{\nu}{1 \text{ Hz}} \right)^{-2} \quad (\text{E})$$

と書ける。また、これから、電波領域で観測されるこのガスの放射強度 I_ν は、次式で与えられる。

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T (1 - e^{-\tau_\nu}) = 3.1 \times 10^{-40} \left(\frac{\nu}{1 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right) (1 - e^{-\tau_\nu})$$

$$(\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ Sr}^{-1}) \quad (\text{F})$$

- (4) $\tau_\nu = 1$ となる ν を ν_c とする。 ν が ν_c より十分大きな場合と十分小さい場合について、それぞれ放射強度の ν 依存性を調べよ。また、得られた結果の物理的な解釈を述べよ。
- (5) 視線方向の長さが $3 \times 10^{16} \text{ m}$ で温度 10^4 K の完全電離水素ガスからの電波放射強度を測定したところ、図のような結果が得られた。この結果から、この電離ガスの電子密度を推定せよ。



III-9 (天文学：恒星) (100 点)

恒星の大気を、電磁波が出てくる層と定義しよう。ある波長の電磁波に注目したとき、放射と吸収という、物質との相互作用が充分に起これば、その波長での黒体放射が実現する。太陽よりもやや低温で大気の温度 T が 5.0×10^3 K の恒星は、可視光の波長域 ($\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m 付近) 全体にわたってそのスペクトルを $T = 5.0 \times 10^3$ K の黒体放射と粗く近似することができる。

しかし、恒星の主成分である水素のエネルギー準位を考えると、なぜ黒体放射で近似できるのか不思議でもある。どうして輝線でなく連続スペクトル (continuum) として出てくるのだろうか、以下に考察しよう。光速度を $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、プランク定数を $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s、ボルツマン定数を $k = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K、素電荷を $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C とせよ。また、エネルギー $\chi = \chi_0$ eV に対して $T = T_0$ K なら $\log_{10}(e^{-\chi/kT}) = -5.0 \times 10^3 \chi_0/T_0$ となることを使ってよい。

- (1) 水素のイオン化工エネルギーは 13.6 eV である。主量子数 $n = 2$ と $n = 3$ の準位が $n = 1$ の準位から 10.2 eV、12.1 eV 上にあることを示せ。
- (2) 今、水素原子だけを考える。恒星の大気と光との相互作用で $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m 付近の連続スペクトルを放射したり吸収したりする場合には、 $n = 3$ とそれより上の準位にある水素原子が重要だと考えられる。なぜか、簡潔に説明せよ。
- (3) $T = 5.0 \times 10^3$ K の熱平衡で、水素の $n = 3$ の準位には、基底準位に比べておよそ 10 の何乗倍だけ分布しているか。
- (4) 次に、ボルツマンの原理を水素原子と水素陽イオン H^+ に適用する。水素原子が基底準位にある場合の数を N とし、水素陽イオンがあって自由電子が速さの範囲 $(v, v + dv)$ にある場合の数を dN^+ とすると、

$$\frac{dN^+}{N} = \frac{2g^+}{g} \frac{4\pi m_e^3 v^2 dv}{N_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi + m_e v^2/2}{kT}\right) \quad (\text{A})$$

となることを示せ。ここで、 g と g^+ はそれぞれ水素原子と水素陽イオンの統計重率、 N_e は電子の密度、 χ は水素のイオン化工エネルギー、 m_e と v は電子の質量と速さである。

上式を、速さに関して積分すると、水素原子と水素陽イオンの個数比として

$$\frac{N^+}{N} = \frac{2g^+}{g} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{N_e h^3} e^{-\chi/kT} \quad (\text{B})$$

が得られる。この式で $\chi = 13.6$ eV、 $T = 5.0 \times 10^3$ K とし、 $g^+/g = 1/2$ 、恒星大気の電子の密度を代入して計算すると、およそ 10^{-6} の比となる。

- (5) 恒星大気には電子を2個持った陽子、水素陰イオン H^- も存在する。水素陰イオンから1個の電子を無限遠に引き離すのに必要なエネルギーは0.7 eVである。(B)と同様の計算を水素陰イオン H^- に対して行ない、水素原子に対する個数比を求めよ。なお、水素陰イオンに対して電子状態を考えた統計重率 g^- は1である。
- (6) 水素原子の $n = 3$ の準位にあるものと水素陰イオンとの個数比から、 $T = 5.0 \times 10^3$ Kの大気を持つ恒星の可視光の連続スペクトルの成因について述べよ。

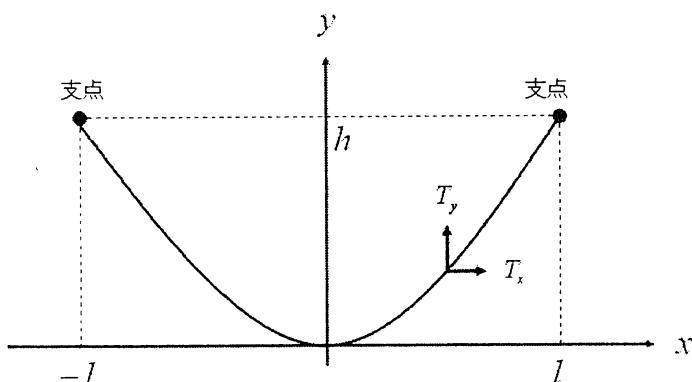
平成17年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1,I-2,I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ（裏面を用いてよい）。
- (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

I-1 (力学) (100点)

長さが $2L$ で一定で、任意の張力に対しても伸び縮みしないひもを、両端を持って支えたときの重力に対する安定形状を考える。ひもの線密度を ρ とし、水平方向の座標を x 、上向き縦方向への座標を y とし、ひもの形状は $y(x)$ で与えられるとする。 $y(x)$ の一階、二階の微分をそれぞれ \dot{y}, \ddot{y} とする。重力加速度は g とする。図の黒丸は手で支える支点を表す。



- (1) ひもの x, y 方向の張力をそれぞれ T_x, T_y とする。 $y(x), T_y(x)$ という二つの未知の関数について、ひも上のある一点 (x, y) でのひも素片の傾きと力の釣り合いから二つの微分方程式を立てよ。ただし、 $x = 0$ を中心にひもは左右対称であるとし、 $x \geq 0, \dot{y} \geq 0$ の領域で考えよ。
- (2) 上で求めた連立方程式を解いて、 $y(x), T_y(x)$ の一般解を求めよ。 $(\rho, g, T_x$ と積分定数を含む形で表すこと。)

ヒント：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (\text{A})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\text{B})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (\text{C})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x. \quad (\text{D})$$

- (3) ひもの両端の高さが同じで、その間の水平方向の距離が $2l$ だったとしよう。この時の T_x と、ひもの真ん中の最低点とひもの両端の高さの差 h を、 ρ, g, L, l のみで書かれた形で求めよ。ただし、 $\sinh x/x = A$ ($A > 1, x > 0$) の解を $x = f(A)$ と表記すること。

次に、同じ問題を変分原理の考え方で解いてみよう。

- (4) 単位質量の質点に対する重力場のポテンシャルが、質点の座標 y のみの関数として一般的に $\phi(y)$ と書けるとしよう。任意のひもの形状 $y(x), x_1 \leq x \leq x_2$ に対して、ひもの全重力ポテンシャルエネルギー $U[y(x), \dot{y}(x)]$ と、ひもの長さ $L[y(x), \dot{y}(x)]$ を x に関する積分の形で表せ。
- (5) 安定な形状は、ひもの長さ L が一定という条件のもとで、重力ポテンシャルエネルギーが最小になるという条件で求めることができる。これは、変分 δL がゼロになるように制限を課した任意の微小変分 $\delta y(x)$ に対し、変分 δU がゼロになるということと等価である。これを解くためには、ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、

$$S \equiv U - \lambda L \equiv \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(y, \dot{y}) dx \quad (\text{E})$$

が最小になるような解を求めれば良い。ここで、 S を作用、 \mathcal{L} をラグランジアンに見立てれば、 \mathcal{L} には x が陽に含まれないことから、エネルギー積分

$$\frac{d\mathcal{L}(y, \dot{y})}{d\dot{y}} \dot{y} - \mathcal{L} = \text{const.} \quad (\text{F})$$

が成り立つ。これを用いて $y(x)$ に関する方程式を求めよ。特に、 $\phi = gy$ の場合、(2) で求めた解が実際にここで求めた方程式を満たすことを示せ。(2) が解けなかった者はここで得られた方程式を解いて解を導いても良い。

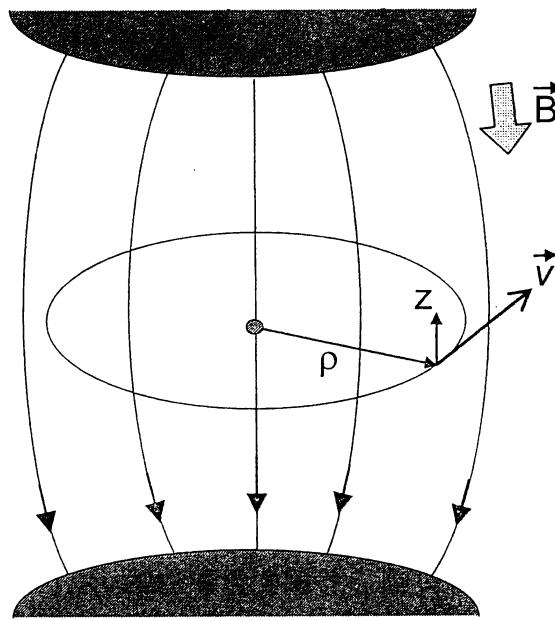
- (6) ここで求めた、垂直な重力場に対して安定な曲線はカテナリー曲線として知られているが、この曲線は、 $y_1 \leq 0, y_2 \leq 0$ であるような始点 (x_1, y_1) 、終点 (x_2, y_2) 及びその間の曲線の長さが固定された条件下で、曲線を x 軸の回りに回転してできる曲面の表面積が最大になっていることが知られている。この理由を説明せよ。

I-2 (電磁気学) (100 点)

磁場 \vec{B} 中を速度 v で運動する荷電粒子を考える。

- (1) ローレンツ力による仕事では、粒子のエネルギー、従って軌道に沿った粒子の速さ v は変化しないことを示せ。

以下では、下図のように鏡像対称な上下 2 つの磁極で作られる軸対称な下向きの磁場（円筒座標では $\vec{B} = (B_\rho(\rho, z), 0, B_z(\rho, z))$ ）の中での正電荷 qe を有する荷電粒子の運動を考える。鏡像対称面 ($z = 0$) では磁場 \vec{B} はこの面に垂直であり、 ρ のみの関数となる。



- (2) 相対論的運動方程式は運動量 $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$ を用いて $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ で記述できる。ここで、 m_0 は荷電粒子の静止質量、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ はローレンツファクター、 \vec{F} は作用する外力である。鏡像対称面上で対称軸を中心とする円運動を考えるとき、ローレンツ力が動径方向の向心加速度を与えることから
- $$m_0\gamma \frac{v^2}{\rho} + qevB_z(\rho, 0) = 0 \quad (\text{A})$$
- が成り立つことを示せ。

式 (A) から円軌道の半径は $\rho_0 = -\frac{m_0\gamma v}{qeB_z(\rho_0, 0)}$ となることが判る。

次に、速さ v を同一に保ったまま、この鏡像対称面内の半径 ρ_0 の円軌道から動径方向に微小な距離 x だけ離れた位置 ($\rho_0 + x$) に変位した粒子の運動について考える。

(3) 静止系に於ける加速度の動径方向の成分が $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v^2}{\rho_0 + x}$ で与えられることを用いて、動径方向の運動方程式を導け。

(4) 粒子の軌道に沿った進行方向の距離を s とするとき、(1)で証明したように速さ v は一定であるから、 $vdt = ds$ と記述できることを用いて、独立変数を t から s に変換して、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1-n}{\rho_0^2}x = 0 \quad (\text{B})$$

が成り立つことを示せ。但し、 $n = -\frac{\rho_0}{B_z} \frac{dB_z}{dx}$ とする。また、 x が微小量であることから、 $\frac{x}{\rho_0}$ の2次以上の項は無視できると考えてよい。

さらに、速さ v を同一に保ったまま、鏡像対称面上の半径 ρ_0 の円軌道から垂直方向に微小な距離 z だけ変位した粒子の運動を考える。

(5) 軸方向 (z 方向) の運動方程式を求めることにより

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{n}{\rho_0^2}z = 0 \quad (\text{C})$$

が成り立つことを示せ。微小量 z の2次以上の項は(4)と同様に無視できるものとする。

(6) 荷電粒子の運動が鏡像対称面上の円軌道から少しずれた場合、そのずれが水平、垂直両方向ともに増大せず、有限の範囲内に収まるための n に対する条件を求めよ。

I-3 (量子力学) (100 点)

量子力学に関する次の文章の□に入るべき式や文章と、{}の中で選ぶべきものの記号を答えよ。理由も簡単に述べよ。

- (1) デルタ関数ポテンシャル $V(x) = c\delta(x)$ のもとで運動している1次元粒子を考える。束縛状態の個数は $c > 0$ のときは、(イ) 個であるが、 $c < 0$ のときは、(ロ) 個である。また、ポテンシャルが $V(x) = c\delta(x-a) + c\delta(x+a)$ のような2つのデルタ関数の和からなる偶関数のとき、束縛状態が存在する条件は、(ハ) であり、束縛状態のうち、パリティが偶のものの個数は(ニ)、奇のものの個数は(ホ) である。ここで、パリティとは x を $-x$ に写す変換のことである。
- (2) z 軸に平行な磁場の中にある粒子の $x-y$ 面内の運動を考える。磁場の大きさを B 、粒子の質量を m 、電荷を e とする。サイクロトロン運動の角振動数は、 $\omega = \boxed{(1)}$ であたえられ、エネルギー準位は(ロ){(a) $E_n = -\frac{C}{n^2}$, ($n = 1, 2, \dots$)}, (b) $E_n = C \times (n + \frac{1}{2})$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), (c) $E_n = C \times n^2$, ($n = 0, 1, 2, \dots$)} であたえられる。ここで、 C は ω と Planck 定数 \hbar を使って、 $C = \boxed{(ハ)}$ と書ける。また、各準位に含まれる状態の数は、系の $x-y$ 方向の面積の(ニ) 乗に比例し、磁場の大きさの(ホ) 乗に比例する。
- (3) 3次元空間の原点付近に局在している球対称ポテンシャル $V(r)$ によるスピンのない粒子の散乱を考える。局在しているとは、遠方 $r \rightarrow \infty$ で $V(r)$ が速やかにゼロに近づくことである。3次元空間の波を角運動量の大きさが定まった球面波に分解して考えると、各成分には、 $V(r)$ に加えて、遠心ポテンシャルが働く。角運動量の演算子を $\vec{\hat{L}}$ とすると、 $\vec{\hat{L}}^2$ の固有値は(イ){(a) $-\frac{b}{l^2}$, (b) $b \times (l + \frac{1}{2})$, (c) $b \times l(l + 1)$ } と書ける。ここで、 $l = 0, 1, 2, \dots$ であり、 b は Planck 定数 \hbar を使ってあらわすと、(ロ) である。各成分に働く遠心ポテンシャルは $\vec{\hat{L}}^2$ の固有値に比例し、 r の(ハ) 乗に比例するから、遠心力バリアーによってポテンシャル $V(r)$ が遮蔽される効果は、(ニ){(a) l が大きいほど大きい, (b) l が大きいほど小さい, (c) l が中くらいのとき最も大きい}といえる。よって、入射粒子のエネルギーが低いときは、散乱は(ホ){(a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$ 以上}の部分波によって起こっているとしてよい。
- (4) 粒子のスピント統計性の間には、密接な関係があることが知られている。実際、スピントが(イ)の粒子はフェルミオンであり、そうでないスピントもつ粒子はボソンである。また、 n_F 個のフェルミオンと、 n_B 個の粒子からなる複合粒子の統計性は、(ロ) が偶数であるか奇数であるかに応じて、ボソンであ

るかフェルミオンであるかがきまる。例えば、 ${}^3\text{He}$ 原子は、原子核が 2 個の陽子と 1 個の中性子からなり、そのまわりを 2 個の電子がまわっているから、フェルミオンであるのに対し、 ${}^4\text{He}$ 原子核は、 ${}^3\text{He}$ 原子核に比べて、(八) が 1 つ多いため、 ${}^4\text{He}$ 原子はボソンである。また、 ${}^3\text{He}$ 原子と ${}^4\text{He}$ 原子のスピンは、それぞれ、(二) である。そのため、凝縮系の低温での振舞いは大きく異なっている。 ${}^4\text{He}$ が 2K 程度で超流動性を示すのに対し、 ${}^3\text{He}$ の超流動は Cooper 対を作る必要があるため、(ホ){(a) 決して起きない, (b) ずっと高い温度で起きる, (c) ずっと低い温度で起きる} ことが知られている。

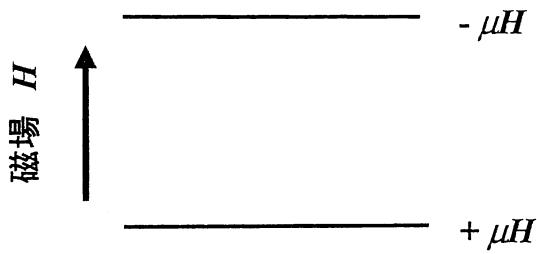
平成17年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題II-1、II-2、II-3の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
- (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

II-1(熱統計力学)(100点)

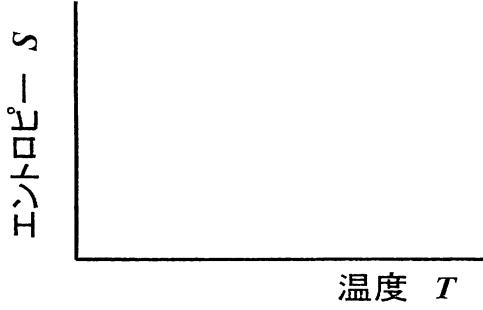
$1/2$ のスピンを持つ粒子からなる系について考える。個々の粒子は磁気モーメント μ を持つとする。この粒子が外部磁場 H の中に置かれると Zeeman 効果により、エネルギー準位は、 $-\mu H$ 、 $+\mu H$ の2つに分裂する。このような粒子 N 個からなる系が一様な磁場 H の中に置かれ、温度 T に保たれている。またこの系はカノニカル分布によって扱えるものとする。以下ボルツマン定数 k_B とする。ただし磁気モーメント間の相互作用は無視してよいものとする。



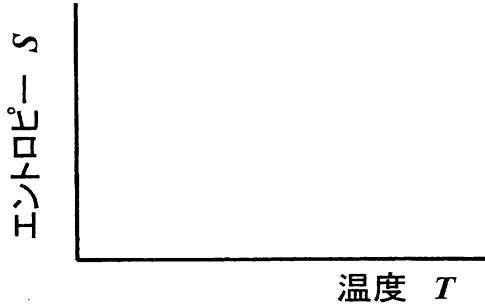
- (1) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F 、エントロピー S を求めよ。またエントロピー S に対して以下の2つの極限について値を求めよ。

- (a) 高温極限(2準位が縮退しているとみなせる場合)。
- (b) 低温極限($\mu H \gg k_B T$ とみなせる場合)。また低温極限の漸近式を求めよ。

上で求めた極限での振る舞いを考慮し、エントロピー S の温度依存性を下記の座標軸を用いて図示せよ。(各自、座標軸を解答用紙に書くこと。)



- (2) この系の磁気モーメント(磁化) M を求めよ。また $H/T \rightarrow 0$ の時 M はどのように表されるか。
- (3) また上で求めた磁気モーメントを利用して、比熱を求めよ。
- (4) 今、この系の磁化率($\chi: M/H$)が $\chi = C/T$ (C : 正の定数)と書き表せる状態にあるとする。温度を T_1 に保って磁場をゼロから $H = H_1$ まで等温的に変化させる。このときに発生する磁化熱、エントロピー S の変化を求めよ。簡単のため内部エネルギーの変化は無視できるものとする。
- (5) 次に断熱的に磁場を H_1 から H_2 ($H_1 \gg H_2 \sim 0$)に戻すとき温度はどのように変化するか。下記の座標軸でエントロピーの図を使って議論せよ。(各自、座標軸を解答用紙に書くこと。)



- (6) 上記のようなスピン $1/2$ の系の代表例として、電子スピンと陽子(プロトン)の核スピンがある。電子の磁気モーメントは $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ (J/T)、陽子(プロトン)の磁気モーメントは $\mu_N = 5.05 \times 10^{-27}$ (J/T)である。それでは $H = 10$ T、 $T = 2$ Kのもとではどちらの方が強くスピン偏極を起こしているか。スピン偏極率, $P = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$ を用いておおよその値を評価し、議論せよ。 $(N_+, N_-$ は、 $+\mu$ 、 $-\mu$ の状態の存在確率)。ただし $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ (J/K)である。

II-2 (物理数学) (100 点)

- (1) 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。

(ヒント : (b) の解は齊次方程式の一般解と非齊次方程式の特解の和)

$$(a) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (b) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

- (2) N 次元空間の半径 r の球の体積は、 $V_N = C_N r^N$ と書ける。以下のように 2 通りの方法で $\exp(-r^2)$ を全空間で積分し C_N を求めよ。

ただし、 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$ 、 $\Gamma(m) = \int_0^\infty dr e^{-r} r^{m-1}$ である。必要なら、 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

$$\begin{aligned} i) \quad I_N &= \int_{\text{全空間}} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_N^2)} dx_1 \cdots dx_N \\ ii) \quad I_N &= \int_{\text{全空間}} e^{-r^2} dV_N = \int_0^\infty e^{-r^2} N C_N r^{N-1} dr = C_N \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

- (3) コーシーの積分公式¹を利用して $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$ を求めよ。この結果を用いて次の公式を導け。

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

- (4) コーシー分布 $p(x; a) = \frac{C}{x^2 + a^2}$ ($x \in [-\infty, \infty]$ 、 a は正の定数) に対し次の間に答えよ。

$$(a) \text{ フーリエ変換 } \tilde{p}(k; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x; a) e^{ikx} dx \text{ を求めよ。}$$

(ヒント : コーシーの積分公式¹を利用する。)

- (b) 規格化定数 C 、平均、分散を求めよ。

- (c) 確率変数 ζ が $p_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta - x; a) p(x; a) dx$ に従うとき、 p_2 のフーリエ変換を求め、 $p_2(\zeta) = p(\zeta; 2a)$ となることを示せ。

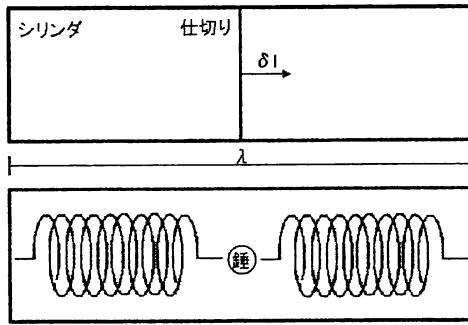
- (d) それぞれが $p(x; a)$ に従う n 個の独立な確率変数の和 $\zeta_n = x_1 + \cdots + x_n$ の従う確率密度関数は、 $p_n(\zeta_n) = p(\zeta_n; na)$ と書けることを示せ。

¹ コーシーの積分公式 : $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ 、点 a は経路 C の内部の点、 $f(z)$ はこの領域内で正則。更に、 $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n}|_{z=a}$ ($n \geq 0$) が成り立つ。

II-3 (流体力学) (100 点)

気体中を音波が伝わるとき、熱エネルギーの損失を通して様々な構造形成の種が励起されることがある。本問では、バネの振動との対比から音波の復元力を理解した上で、種が生まれるメカニズムを考察しよう。

長さ λ 、断面積 S のシリンダの中央に厚さが無視できる重さ M の仕切りを置き(下図)、この仕切りが圧力差を復元力として振動することを確認する。シリンダと仕切りとの間の摩擦は無視する。仕切りをはさんで両側には同種の理想気体が同じ圧力(p_0)で断熱的に満たされている。以下、仕切りを跨いだ気体のやりとりはないものとする。また、気体は高温とし、仕切りが動いても仕切りのそれぞれの側で温度、密度、圧力は常に一様に保たれるものとする。



(1) 以下の文章の空欄 (イ) ~ (ホ) に入るべき式または言葉を答えよ。

仕切りが δl だけ右に移動し、仕切りの右の体積が V_r になったとする。移動前の体積を V_0 とすると S を用いて $\delta V = V_r - V_0 = \boxed{(イ)}$ である。このとき、(口)のために仕切りの右側の気体の圧力は増加し、(ハ)のために左側の圧力は減少している。左右での圧力変化を $\delta p_l \equiv p_l - p_0$ 及び $\delta p_r \equiv p_r - p_0$ と表す。圧力差による仕切りに働く力(F_p)は図の右向きを正として

$$F_p = -(\delta p_r - \delta p_l) S \quad (\text{A})$$

となる。 λ を用いて δp_r を求めると、

$$\delta p_r = -\frac{1}{\kappa_s} \frac{\delta V}{V_0} = \boxed{(二)} \delta l \quad (\text{B})$$

である。ここで、 κ_s は(口)率である。次に、バネ定数が K_s のバネによる力と比較してみる。錘の両側の位置の変化を同じ様に δl とすると、フックの法則により、錘に働く力(F_s)は

$$F_s = -K_s \delta l + K_s (-\delta l) \quad (\text{C})$$

である。式(A)の右辺第1項を $\delta p_r S = K_p \delta l$ とすると、 $K_p = \boxed{(ホ)}$ となり、仕切りの振動は圧力差を復元力とするバネの振動とみなせることがわかる。

これ以後、仕切りを取り除き、断面積 S の無限に長いシリンダを考える。シリンダの中には密度 ρ_0 の一様な気体が満たされている。このときにシリンダ軸方向に伝搬する波長 λ の平面波を考察しよう。平面波に伴う密度、速度、圧力の揺らぎをそれぞれ $\delta\rho$ 、 δv 、 δp とする。揺らぎ成分に対する流体力学の基礎方程式は、軸方向を x とすると次のように与えられる：

$$\text{質量保存式} : \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad (\text{D})$$

$$\text{運動方程式} : \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = - \frac{\partial \delta p}{\partial x}. \quad (\text{E})$$

- (2) 一様な気体の単位質量当りの体積 V_0 は $1/\rho_0$ である。一方、平面波が伝搬するときの単位質量当りの体積 $V_0 + \delta V$ は $1/\rho$ となる。 $\delta\rho$ は微小であるとし、 δV を $\delta\rho$ の 1 次まで考えて ρ_0 を用いて表せ。なお、 $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ である。
- (3) 波の伝播が断熱過程とみなせる場合、密度と圧力の揺らぎの関係は音速 c_s を用いて $\delta p = c_s^2 \delta\rho$ と表せるため基礎方程式系が δv と $\delta\rho$ の 2 変数で閉じている。従って、揺らぎの伝搬を陽に記述できる。このとき、単位質量当りの体積変化に対しても問(1)の考察が成り立つとして、 c_s を K_p を用いて表せ。
- (4) 音波の復元力である圧力勾配力を K_p と密度勾配を用いて表せ。

このように、音波はバネ定数 K_p を持つバネ振動と理解できる。最後に、密度の大きさに応じて熱エネルギーが散逸する場合を考える。このとき圧力揺らぎは

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho - L(\rho, T) \quad (\text{F})$$

の様に、断熱の場合(右辺第1項)と熱エネルギーの散逸による圧力の減少(右辺第2項)の差として記述される。簡単のため $L(\rho, T)$ の温度依存性は密度の依存性に組み込まれるとし、 $L = C\rho^n$ の場合を考えよう。 C はある正定値とする。

- (5) 热エネルギーが散逸する場合、式(F)を用いると、運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + F(\rho_0) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \quad (\text{G})$$

と書き下せる。 $\delta\rho$ は十分小さいとして、 $F(\rho_0)$ を求めよ。

- (6) $n = 1$ の場合を考える。この振動のバネ定数 K'_p を評価し、断熱の場合と比べて復元力が小さくなることを示せ。その物理的理由も述べよ。
- (7) $n < 0$ の場合を考える。このときのバネ定数 K''_p は K_p より大きくなるが、その物理的理由を述べよ。

この様に熱エネルギーが散逸しても音波の復元力が増大する場合がある。この結果、密度塊の形成が始まり、更に複雑な構造形成につながる。宇宙における星雲形成のメカニズムの一つとして考えられている過程である。

平成 17 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題 III-1、から III-9 まで 9 問ある。これから 3 問選択せよ。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
 - (3) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
-

III-1 力学：散乱問題

III-2 電磁気学：核磁気共鳴

III-3 量子力学：角運動量の合成

III-4 統計力学：量子統計

III-5 物理数学：微分方程式

III-6 実験学：半導体

III-7 実験学：荷電粒子の検出

III-8 天文学：輻射輸送

III-9 天文学：力学平衡

III-1 (力学 : 散乱) (100 点)

図1[実験室系]のように質量 m_1 で無限遠点で速度 v を持つ粒子 1 と質量 m_2 で静止した粒子 2 との散乱を考える。粒子 1 と 2 の間には中心力ポテンシャル $U(r) = \frac{k}{r}$ (r は粒子間距離。 $k > 0$) による力が働いている。粒子の速度は非相対論的範囲であると仮定する。

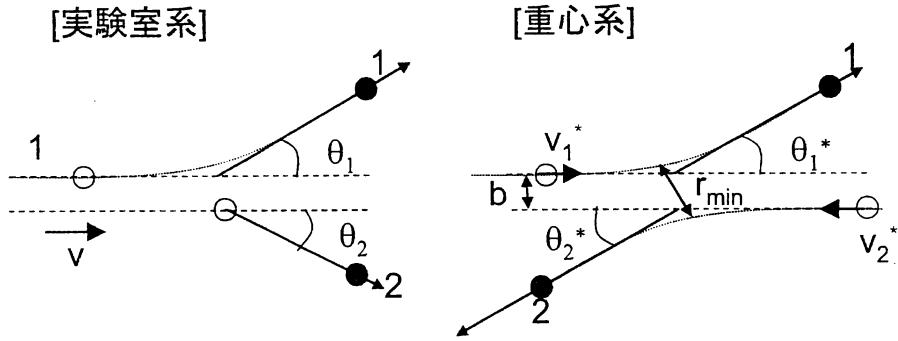


図 1: 左図は実験室系、右図は重心系での粒子 1 と粒子 2 の散乱の模式図である。白マルは散乱前無限遠点での粒子の位置、黒マルは散乱後無限遠点での粒子の位置を示している。座標は粒子 1 の進行方向を正にとる。 θ_1 、 θ_2 は粒子 1 の進行方向に対する実験室系での粒子 1 と粒子 2 の散乱角で、 θ_1^* 、 θ_2^* は重心系での粒子 1、粒子 2 の散乱角である。 b は衝突係数、 r_{min} は粒子 1 と粒子 2 の最近接距離とする。

- (1) 重心系での粒子 1 の速度 v_1^* と粒子 2 の速度 v_2^* を m_1 、 m_2 、 v を使って表せ。
- (2) 重心系での粒子 1 の散乱角 θ_1^* と実験室系での粒子 1 の散乱角 θ_1 の間に次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \theta_1^*}{m_1 + m_2 \cos \theta_1^*} \quad (\text{A})$$

- (3) 換算質量を $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 、重心系での衝突係数を図 1[重心系] のように b としたとき、重心系での散乱角 θ_1^* は

$$\theta_1^* = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - 2k/(\mu v^2 r)}} \quad (\text{B})$$

となることを示せ。ここで r は粒子間距離で r_{min} は r の最小値である。

- (4) 式 (B) より重心系での微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\text{重心系}} = \left(\frac{k}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_1^*}{2}} \quad (\text{C})$$

を導くことができる。ここで微小立体角は $d\Omega|_{\text{重心系}} \equiv \sin \theta_1^* d\theta_1^* d\phi_1^*$ と定義され、 ϕ_1^* は粒子 1 の無限遠からの進行方向を軸とした方位角 ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) である。式 (C) をもとに $m_1 = m_2 (\equiv m)$ の場合の実験室系での微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\text{実験室系}} = \left(\frac{2k}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (\text{D})$$

となることを示しなさい。

- (5) 散乱後の粒子 2 の実験室系での運動エネルギーを m, v, θ_1 の関数として求めよ。この際に $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ の関係が成り立つことを使ってよい。
- (6) 粒子 2 の運動エネルギーが $\frac{1}{4}mv^2$ 以上になる場合の全断面積を求めよ。
- (7) これまで展開してきた計算をもとに、速度 v で宇宙に漂う未発見の質量 m の素粒子を原子核との散乱を使って検出する方法を考える。ここで簡単のためにこの未知の素粒子の質量と原子核の質量は同じとする。未知の素粒子の速度は原子核に対し、地球の公転の影響で夏に速度 $1.1v$ 、冬に速度 $0.9v$ になるとする。原子核の運動エネルギーが $\frac{1}{4}mv^2$ を超えた時に暗黒物質が検出できるとして、夏と冬での検出数の比を有効数字 2 桁で求めよ。参考までに、この検出率の季節変化を信号として暗黒物質の候補である未発見の素粒子を探索する手法がある。

III-2(電磁気：核磁気共鳴) (100点)

- (1) 図1に示すような無限に長い直線電流 I からの垂直距離 a の点に生ずる磁場の強さ H を表せ。
- (2) 図2のように、半径 a の円周を電流 I が流れるとき、中心軸上の円中心から x の距離の点Pに生ずる磁場の強さ H を求めよ。

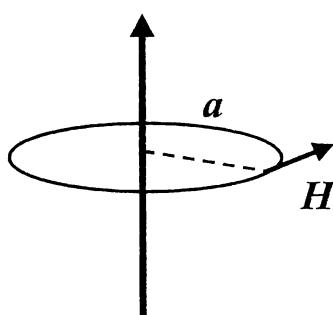


図 1

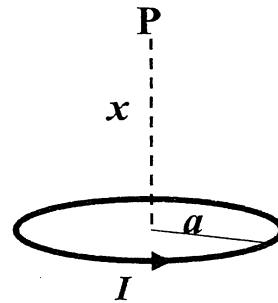
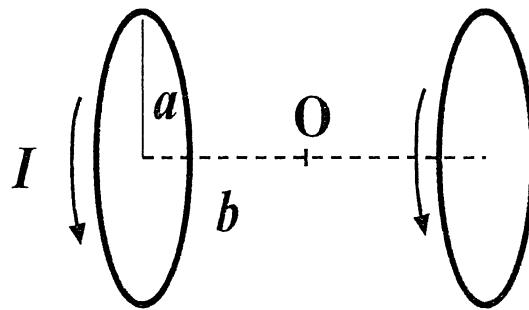


図 2

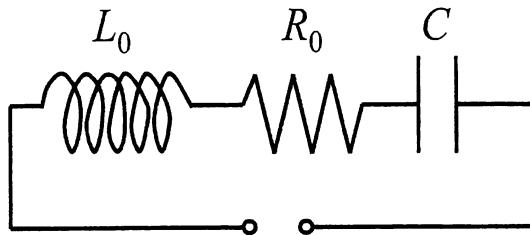
- (3) 上記の半径 a の等しい2つの円形コイルの中心軸を共通にして $2b$ の間隔で対置し、両コイルに同じ向きに同じ強さの電流を流す。中心軸上二つのコイルの中点Oの付近で中心軸に沿ってわずかに場所が変わつてもなるべく磁場が一様であるようにするには、コイルの間隔 $2b$ と半径 a には $a = 2b$ の関係が必要である。これを示せ。



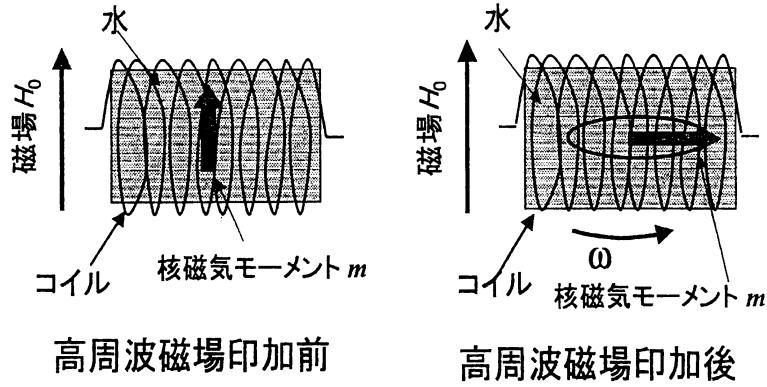
上記のような均一な磁場中で、プロトン(水素の原子核: 核スピン $I = 1/2$)の核磁気共鳴(NMR)の実験を行うことを考える。NMRは磁場下で誘起されたプロトンの核磁気モーメントがコイル内で歳差運動をすることによって、コイルに誘起される電圧を測定する実験である。以下の設問を答えよ。

- (4) NMR実験では、コイルとコンデンサーからなる共鳴回路を用いる。今コイル(インダクタンス L_0 、抵抗 R_0)とコンデンサー(容量 C)が下図に示すように、直列につながれている。このときの角周波数 ω での合成インピーダン

ス $Z(\omega)$ 、共振周波数 ω_0 、共振の幅 $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega$ (ただし $\Delta\omega$ は電流の最大値 I_{\max} に対し $I_{\max}/\sqrt{2}$ となるときの ω の幅) をそれぞれ求めよ。



- (5) 前問の共振回路を用いて NMR 実験を行う。磁場の不均一は無視できる微小なコイル(断面積:A、長さ:l、巻数:n)を磁場の中心に持っていく。コイルの軸は x 方向を向いており、均一な静磁場 H_0 は z 方向にかかっているものとする。コイルの中を水で満たし、水のプロトンの核磁気モーメントは熱平衡状態にあるものとする。 H_0 によって作られたコイル中のプロトンの核磁気モーメント m を単位体積あたりの核の静磁化率 χ_0 を用いて表せ。コイル内の核磁気モーメント m は、コイルに高周波磁場を加えることにより向きを変えることが出来る。今核磁気モーメント m が z 軸方向から 90 度向きを変え、 $x-y$ 平面に来るような条件の高周波磁場を加える。その後 m は $x-y$ 平面内で歳差運動(角周波数 ω)を行う。このときコイルに誘導される電圧 V_0 を求めよ。ただし核磁気モーメントの大きさ m は上記の過程で変化しないものとする。



- (6) 核磁化により、問(4)にある直列共振回路のコイルに誘起される電圧を $V_0 \exp(i\omega t)$ とする。このときコンデンサーの両端の電圧 V_c を求めよ。また歳差運動の角周波数 ω が回路の共振周波数 ω_0 と同じとき、 V_c を回路の共振の幅 Q を用いて表せ。
- (7) 実験室等では磁場は、実際どのような方法で測定されるか。そのとき用いられる物理現象に基づいて説明せよ。

III-3 (量子力学：角運動量の合成) (100 点)

以下では角運動量やスピンの演算子は Planck 定数 \hbar で割って、無次元量としてあつかうこととする。

(1) 大きさがそれぞれ j_1 と j_2 である角運動量 $\hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{j}}_2$ をもつ 2 つの系がある。

- (a) 合成角運動量 $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$ はどのような大きさをとるか。結果だけ答えよ。
- (b) $c_1\hat{\mathbf{j}}_1 + c_2\hat{\mathbf{j}}_2$ であたえられる物理量を考える。合成角運動量の大きさが確定値 j をとるような空間上での行列要素を考えると、それはベクトルとして $\hat{\mathbf{j}}$ に平行である、すなわち、等式 $c_1\hat{\mathbf{j}}_1 + c_2\hat{\mathbf{j}}_2 = c^{(j)}\hat{\mathbf{j}}$ がなりたつとしてよい。ここで、係数 $c^{(j)}$ は j に依存して決まるが、

$$c^{(j)} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2) \frac{j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)}{j(j + 1)}$$

であたえられることを示せ。(ヒント：上の等式の両辺と $\hat{\mathbf{j}}$ の内積をとり、 $2\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 = \hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{j}}_1^2 - \hat{\mathbf{j}}_2^2$ を使え。)

(2) スピンをもつ粒子は磁気能率をもっている。磁気能率の演算子 $\hat{\mu}$ はスピンの演算子 $\hat{\mathbf{s}}$ に比例しており、 $\hat{\mu} = \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}$ であたえられる。ここで、 s はスピンの大きさであり、 μ は磁気能率の大きさである。一般に、スピン $1/2$ の粒子が Dirac 方程式に従う点粒子であるとすると、磁気能率の大きさは、質量 m と電荷 q をつかって $\mu = \frac{q\hbar}{2m}$ であたえられる。ところが、陽子の磁気能率は、陽子の電荷 e と質量 m_p からこの公式によって素朴に得られる値（これを核磁子とよぶ。） $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ から大きくずれている。実際、陽子の磁気能率の測定値は、 $\mu_p = \mu_N \times (2.793..)$ である。また、中性子は電荷を持たないため、Dirac 方程式から素朴に得られる磁気能率の値はゼロであるが、測定値は、 $\mu_p = \mu_N \times (-1.913..)$ である。以下に見るように、陽子や中性子が点粒子ではなく、3 つのクォークからできているものとすると、これらの値を説明することができる。

- (a) u-クォークと d-クォークの電荷はそれぞれ、 $\frac{2e}{3}$ と $-\frac{e}{3}$ である。クォークの質量は u-クォークも d-クォークも陽子の質量 m_p の $1/3$ であるとし、クォークは Dirac 方程式にしたがう点粒子であるとする。上の公式を使うと、u-クォークと d-クォークの磁気能率はそれぞれ、 $\mu_u = 2\mu_N$, $\mu_d = -\mu_N$ となることを示せ。
- (b) 陽子は 2 つの u-クォークと 1 つの d-クォークからなっているが、3 つのクォークはどれも s 軌道に入っているとしてよい。3 つのクォークのスピン演算子を $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_3$ とすると、陽子のスピンの演算子は $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_3$

で、磁気能率の演算子は $\hat{\mu} = 2\mu_u \hat{s}_1 + 2\mu_u \hat{s}_2 + 2\mu_d \hat{s}_3$ であたえられることを示せ。ただし、1番目と2番目は u-クォークであり、3番目が d-クォークとする。この2つの演算子を $\hat{\mu} = 2\mu \hat{s}$ と書いたときの比例係数 μ が陽子の磁気能率の大きさである。

- (3) 陽子の中で、3つのクォークの角運動量がどのように合成されているかを調べるために、陽子の波動関数を考える。クォークはスピン 1/2 のフェルミオンであるが、座標およびスピンの自由度のほかにカラーの自由度をもっている。3つのクォークの座標、スピン、カラーをそれぞれ、 $r_1, \alpha_1, i_1, r_2, \alpha_2, i_2, r_3, \alpha_3, i_3$ とすると、波動関数は $\psi_{\text{陽子}}(r_1, \alpha_1, i_1; r_2, \alpha_2, i_2; r_3, \alpha_3, i_3)$ のように書ける。ここで、はじめの2組は u-クォークの変数であり、3組目が d-クォークの変数である。また、カラーの自由度をあらわす変数 i_1, i_2, i_3 は 1, 2, 3 のいずれかの値をとるが、波動関数は完全反対称テンソル ϵ_{i_1, i_2, i_3} に比例することがわかっている。さらに簡単のため、陽子の中では3つのクォークはどれも同じ s 軌道 $\phi_0(r)$ に入っているとすると、 $\psi_{\text{陽子}} = \epsilon_{i_1, i_2, i_3} \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \phi_0(r_1) \phi_0(r_2) \phi_0(r_3)$ と書ける。ここで、 $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ は波動関数のスピン部分である。
- (a) クォークがフェルミオンであることから $\chi_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3} = \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ が導かれることを示せ。
 - (b) 2つの u-クォークの合成スピンは 1 であることを示せ。
 - (c) さらに d-クォークも考えると、この系の全角運動量はどのような値をとりうるか。このうちで特に全角運動量が 1/2 のものが陽子である。
- (4) 以上の議論から、陽子の中では、2つの u-クォークの合成スピンは 1 であり、その合成系と、d-クォークのスピン 1/2 が合成されて陽子のスピン 1/2 になっていることがわかった。よって、まず、2つの u-クォークに対して (1) の結果を適用して、 $\hat{\mu}_{uu} = 2\mu_u \hat{s}_1 + 2\mu_u \hat{s}_2$ を2つの u-クォークの合成スピン $\hat{s}_{uu} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ に比例するものとしてあらわし、次にその合成系と d-クォークに対してもう一度 (1) の結果を適用することにより、陽子の磁気能率の大きさを求めることができる。
- (a) $j_1 = j_2 = 1/2, j = 1, c_1 = c_2 = 2\mu_u = 4\mu_N$ として、(1) の結果を使うことにより、 $\hat{\mu}_{uu} = 4\mu_N \hat{s}_{uu}$ となることを示せ。
 - (b) $j_1 = 1, j_2 = 1/2, j = 1/2, c_1 = 4\mu_N, c_2 = 2\mu_d = -2\mu_N$ として、(1) の結果を使うことにより、 $\mu = 3\mu_N$ となることを示せ。
 - (c) 中性子の場合はどうなるか。中性子は1個の u-クォークと2個の d-クォークからなり、u-クォークと d-クォークの役目が入れ替わっている以外はほとんど陽子と同じ系である。

III-4(統計力学：量子統計)(100点)

相互作用のない理想量子気体($\epsilon = p^2/2m$; ϵ 、 p はそれぞれ一粒子のエネルギー、運動量で m は粒子の質量)が体積 V の空間内で運動しているような開いた系を考える。Bose粒子、Fermi粒子の分配関数(Q_{BE} 、 Q_{FD})がそれぞれ

$$Q_{\text{BE}} = \sum_{n_i=0,1,2,\dots}^{\text{組}\{\{n_i\}\}\text{の和は } N} \exp\left(-\sum_i \beta n_i \epsilon_i\right) \quad (\text{A})$$

$$Q_{\text{FD}} = \sum_{n_i=0,1}^{\text{組}\{\{n_i\}\}\text{の和は } N} \exp\left(-\sum_i \beta n_i \epsilon_i\right) \quad (\text{B})$$

で与えられることを前提として($\beta = 1/kT$ 、 k はボルツマン定数、 T は系の温度、 ϵ_i はエネルギー準位、 n_i は ϵ_i のエネルギーを持つ粒子の数、 N は系内の粒子数)、以下の問い合わせよ。

- (1) Bose粒子系、Fermi粒子系の大分配関数 $\Xi(V, \beta, \mu)$ がそれぞれ

$$\Xi = \prod_i [1 - \exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\}]^{-1} \quad \text{BE 分布} \quad (\text{C})$$

$$\Xi = \prod_i [1 + \exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\}] \quad \text{FD 分布} \quad (\text{D})$$

であることを示せ(μ は化学ポテンシャル)。但しBose粒子系に於ける化学ポテンシャルは負であることを前提としてよい。

- (2) (1)で求めた大分配関数の形を利用して、(1)のような開いた系に於ける、量子状態 i にある平均粒子数 $\langle n_i \rangle$ をBose粒子系、Fermi粒子系についてそれぞれ求めよ。又、Fermi粒子系について、縮退が強い(すなわち、充分低温である)場合の $\langle n_i \rangle$ の概形を ϵ_i の関数として図示せよ。但し系内の粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ は充分大きいものとする。
- (3) 縮退の弱い極限に於てはBose分布、Fermi分布はMaxwell-Boltzmann分布に移行する。このことを(2)で求めた n_i の期待値 $\langle n_i \rangle$ を用いて説明せよ。尚、ここで縮退が弱い極限とは、全ての量子状態 i に於て $\langle n_i \rangle \ll 1$ が成り立つことを意味するものとする。
- (4) Maxwell-Boltzmann分布の下での化学ポテンシャル μ を粒子数密度 n と β を用いて表せ。但し系内の粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ は充分大きいとし、スピンは $1/2$ とする。
- (5) (3)、(4)の結果を用いて、Bose分布、Fermi分布がMaxwell-Boltzmann分布に移行する条件を典型的なド・ブロイ波長($\lambda = h/p$; h はプランク定数)と平均的な粒子間距離の大小比較をすることから求めよ。但し基底状態 ϵ_1 に対して $\beta \epsilon_1 \ll 1$ が成り立っているものとする。

- (6) (5) の結果を用いて、中性子内部に於ける中性子の縮退の程度を評価せよ（中性子星は一様密度で近似出来るものとし、また組成は近似的に陽子と中性子のみで構成されているものと仮定せよ）。評価は有効数字一桁で良いものとする。但し、中性子星の物理量について近似的に次の値を使用してよいものとする。中性子星の平均密度 $\rho_{\text{NS}} = 10^{14} \text{ g/cm}^3$ 、(今回考える) 中性子星の平均温度 $T_{\text{NS}} = 10^8 \text{ K}$ 、全核子数に於ける陽子数の割合 $Y_e = 0.1$ 。又、必要であれば次の数値を用いてよい。核子の質量 $m_u = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$ 、ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ 、プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ 、光速 $c = 2.9979 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ 。1erg=10⁻⁷Jである。尚、縮退が弱くないと結論された場合には縮退が強いか否かを別途検討せよ。

III-5 (物理数学 : 微分方程式) (100 点)

(1) ばね定数が時間とともに変化する調和振動子

$$\ddot{x}(t) = -\omega(t)^2 x(t)$$

を考え、振幅がどのように変化するかを議論する。

- (a) $\omega(t)^2$ は、 $t \leq t_1$ では一定値 ω_1^2 であり、 $t = t_1$ から $t = t_2$ にかけてゆっくり増加し、 $t \geq t_2$ で別の一定値 ω_2^2 になるとする。 $t \leq t_1$ のときの振幅が A_1 であったとすると、 $t \geq t_2$ のときの振幅 A_2 はどれくらいか。(ヒント: ハミルトニアンであらわし、断熱定理を使うと簡単である。)
- (b) 逆に、 $\omega(t)^2$ が $t = 0$ で瞬間に一定値 ω_1^2 から一定値 ω_2^2 まで増加するときはどうか。 A_2 の最大値と最小値はいくらか。(ヒント: $t < 0, t > 0$ でそれぞれ $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$, $x(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$ とし、 $t = 0$ で解がなめらかにつながる条件から A_1 と A_2 の関係をもとめよ。)

(2) 半無限領域 $x \geq 0$ で定義されている関数 $f(x)$ に対する微分方程式

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + (a - x) \frac{d}{dx} + \lambda \right) f = 0.$$

を考える。この自明でない解（恒等的にはゼロでない解）が、 $x \sim 0$ で有限であり、 $x \rightarrow \infty$ で x の幕でおさえられるためには、 λ がどのような値であるべきか議論する。ただし、 a は実数で $a > 1$ とする。

- (a) $x \sim 0$ で $f(x) \sim x^b$ とすると、あたえられた微分方程式をみたすためには b はどのような値でなければならないか。さらに、 $f(x)$ が $x \sim 0$ で有限であるためには、 $b = 0$ でなければならないことを示せ。
- (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と幕展開して係数に対する漸化式を導き、級数が有限で切れるために λ がみたすべき条件をもとめよ。

(3) 次の偏微分方程式の解を求めよ。ただし、 Δ は 3 次元のラプラシアンであり、 $\delta^3(\mathbf{r})$ は 3 次元のデルタ関数である。解を知っている場合は、見つけ方を述べる必要はなく、それが確かに解であることを示すだけでよい。

(a) $(-\Delta + m^2) \phi(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ の無限遠でゼロになる球対称解。

(b) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi(t, \mathbf{r}) = \delta(t) \delta^3(\mathbf{r})$. ただし、 $t < 0$ で、 $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$ とする。

III-6 (実験学 : 半導体) (100 点)

電場および磁場中での荷電粒子の運動を考えることで、半導体結晶の性質を知ることができる。図 1 に示すように、細長い板状の直方形試料の z 方向に一様な磁場 $B_z (> 0)$ を印加する。さらに x 方向に電場 $E_x (> 0)$ を印加し電流を流す。電流に寄与するキャリヤ (carrier) の種類はひとつであり、その電荷は q とする。 q は $+e$ または $-e$ である。以下の問題に答えなさい。

- (1) x 方向に電場印加直後、キャリヤが移動し始めると磁場により y 方向に力を受ける。キャリヤが電荷 $+e$ を持つ場合、キャリヤは磁場により $+y$ 方向または $-y$ 方向のどちらに曲げられるか答えよ。また、電荷 $-e$ のキャリヤは、磁場により $+y$ 方向または $-y$ 方向のどちらに曲げられるか答えよ。

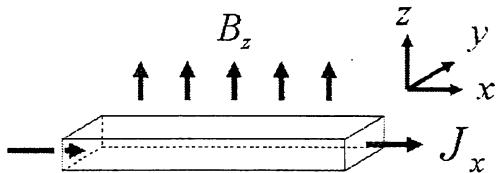


図 1 : ホール効果の測定配置図

- (2) y 方向から外へ電流が流れないようにする。磁場により y 方向に曲げられたキャリヤが試料の一方の側の面にたまり、その結果 y 方向に電場が発生するようになる。やがて発生した電場により、 y 方向へキャリヤの移動がなくなり、定常状態となる。キャリヤの電荷が $+e$ のとき、定常状態で y 方向に誘起される電場 E_y を求めよ。 x 方向に一定の速さ v でキャリヤは動いている。
- (3) ホール定数 R_H は、 $R_H = E_y / (J_x B_z)$ で定義される。ここで、定常状態での x 方向の電流密度を J_x とする。ホール定数を測定することによりキャリヤの密度とキャリヤの電荷の符号が分かることを示せ。ただし、キャリヤはすべて x 方向に同じ速さ v で移動するものとする。

半導体の電気伝導を担うキャリヤは、伝導帯の電子と価電子帯の正孔である。図 2 に示すように、伝導帯の下端のエネルギーを E_C 、価電子帯の上端のエネルギーを E_V とする。バンドギャップエネルギー E_g は、 $E_g = E_C - E_V$ で与えられ、 $E_g \gg k_B T$ である。伝導帯の電子密度 n は、

$$n = N_C \exp[-(E_C - E_F)/k_B T] \quad (A)$$

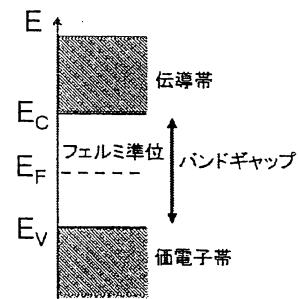


図 2 : 電子のエネルギーを縦軸にとって描いた半導体のエネルギー・バンド図

で与えられる。 E_F は、フェルミ準位であり、 N_C は、伝導帯の有効状態密度である。また、伝導帯の電子密度 n と価電子帯の正孔密度 p の積 np は、

$$np = N_C N_V \exp(-E_g/k_B T) \quad (B)$$

で与えられる。 N_V は、価電子帯の有効状態密度である。 N_C と N_V は同程度の大きさである。

- (4) 不純物を添加していない純粋な結晶である真性半導体のフェルミ準位 E_F は、バンドギャップの中央付近に位置することを示せ。 $N_C = N_V$ の場合には、バンドギャップの真中にあることを示せ。
- (5) 真性半導体の伝導帯の電子密度 n の温度依存性を測定することにより、バンドギャップエネルギー E_g を決定できることを示せ。
- (6) 一種類の不純物（ドナー）が添加されている半導体を考える。ドナー準位のエネルギーを E_D およびドナー密度を N_D とする。ドナー準位に存在する電子の密度 n_D は、占有確率関数を f として、 $n_D = N_D f$ で与えられる。一つのドナー準位に一個の電子のみを収容できるとき、 f は以下の式で与えられる。

$$f = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_D - E_F}{k_B T}\right)} \quad (C)$$

プラスにイオン化しているドナーの密度は $N_D - n_D$ である。正孔の密度が無視できるほど小さく、さらに伝導帯の電子密度 n がドナー密度 N_D にくらべ小さい時、 n は以下の式で与えられることを示せ。

$$n \cong \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_D}{2k_B T}\right) \quad (D)$$

ここで、ドナーのイオン化工エネルギー ΔE_D は、 $\Delta E_D = E_C - E_D$ である。

- (7) ホール効果の測定により求めたゲルマニウム結晶のキャリヤ密度の温度依存性を図3に示す。一種類の不純物（ドナー）が添加されている。ただし、 $E_g \gg \Delta E_D$ であり、 N_C は、 10^{18} cm^{-3} 程度である。キャリヤ密度の温度依存性は、大きく3つの領域（図のI,II,III）に分けることができる。ゲルマニウム結晶のバンドギャップエネルギー E_g とドナーのイオン化工エネルギー ΔE_D は、どの領域からどのようにして求めることができるか述べよ。また、ドナー密度 N_D は、どの程度であるか。

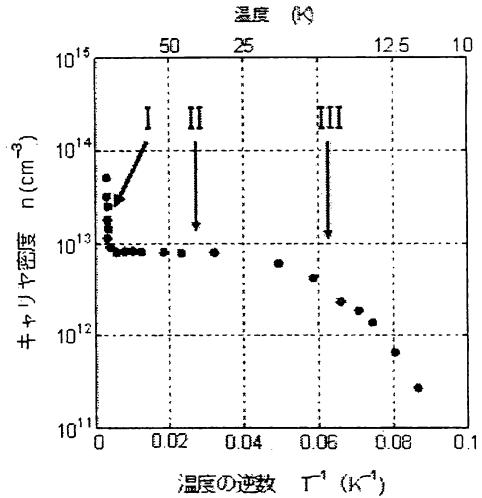
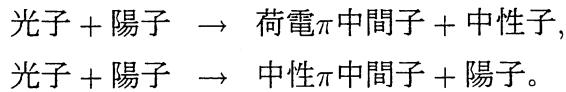


図3：不純物が添加されたゲルマニウムの
キャリヤ密度 n の温度依存性

- (8) 上記で述べた電気測定以外の方法で半導体のバンドギャップエネルギーを求める方法をあげよ。

III-7 (実験学：荷電粒子の検出) (100点)

図1のように高エネルギーの光子を陽子標的に照射し、その反応で生成される荷電粒子を検出する実験を考える。光子のエネルギーを適切に選んだ場合、次のような反応が起こることが期待される。



光子のエネルギーを k 、陽子と中性子の質量を $m_1 (= 1\text{GeV}/c^2)$ 、荷電 π 中間子と中性 π 中間子の質量を $m_2 (= 0.1\text{GeV}/c^2)$ として以下の間に答えよ。必要ならば、エネルギー (E)、運動量 (p) と静止質量 (m_0)、粒子の光速を基準とした速度 (β)、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 、光速 ($c = 3 \times 10^8 \text{m/sec}$) の間の関係 $E = m_0\gamma c^2$ 、 $p = m_0\gamma\beta c$ を用いてよい。また、本問題の計算において計算途中及び答えに対して、有効数字は2桁でよい。

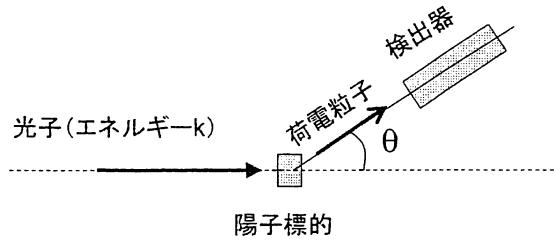


図1: 高エネルギーの光子を陽子標的に照射し、散乱角 θ に放出される荷電粒子を観測する実験。

- (1) 図1の検出器で、荷電粒子の入射位置測定に多線式比例計数箱を用いた。比例計数管では荷電粒子が計数管中のガスを電離したことで生じた電子を信号として読み出した。この電子の微弱な信号を電気信号として計測できるように増幅する比例計数管の原理を簡潔に説明しなさい。
- (2) 散乱角 θ に出てくる陽子の4元運動量を $(E_1/c, \vec{p}_1)$ 、荷電 π 中間子の4元運動量を $(E_2/c, \vec{p}_2)$ とする時、次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{aligned} 2(k + m_1 c^2) E_1 &= 2km_1 c^2 + 2kp_1 c \cos \theta + 2m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 \\ 2(k + m_1 c^2) E_2 &= 2km_1 c^2 + 2kp_2 c \cos \theta + m_2^2 c^4 \end{aligned}$$

- (3) 検出器で観測される陽子と荷電 π 中間子を識別することを考える。問題(2)よりそれぞれの粒子の運動量は決まっているので、その速度を測れば荷電粒子を識別することができる。速度は粒子が距離 L を通過するのにかかる時間

を精密に測定することで測れる。この方法を TOF (Time of Flight) 法といふ。TOF 法には一般にプラスチックシンチレータを光電子増倍管で読み出す検出器が使用される。この検出器で荷電粒子通過の信号が電気信号としてどのように得られるか、その動作原理を簡潔に説明しなさい。

- (4) TOF 法では通常 γ 線測定に使用される NaI(Tl) シンチレータは用いない。この理由を NaI(Tl) シンチレータとプラスチックシンチレータの特性を比較して簡潔に答えなさい。
- (5) TOF 法で $1\text{GeV}/c$ の運動量を持った 荷電 π 中間子と陽子を識別する。飛行距離 $L = 3\text{ m}$ の場合、荷電 π 中間子と陽子の飛行時間差は何ナノ秒となるか ($1\text{ ナノ秒} = 10^{-9}\text{ 秒}$)。また、この間に荷電 π 中間子が崩壊してしまっては測定ができなくなる。寿命 26 ナノ秒 の荷電 π 中間子の飛行距離はいくらか？
- (6) TOF 法以外にも粒子を識別する方法はいくつかある。その一つは単位長さ当たりに荷電粒子が落とすエネルギーを測定することで、粒子識別を行う方法である (dE/dx 法)。荷電粒子の単位長さあたりのエネルギー損失は本問題の仮定するエネルギー領域においてはベーテ・ブロッホの式を使って近似的に

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{\beta^2}$$

と表せる。このエネルギー損失はどのような過程によって起こるか。簡潔に答えなさい。

- (7) 入射光子のエネルギーが 1GeV 、検出器の設置角度 $\theta = 30^\circ$ とする。検出器で観測される陽子と荷電 π 中間子の運動量を求めよ。また、 dE/dx 法により大きなエネルギー損失が観測される粒子はどちらかを答えなさい。

III-8 (天文学：輻射輸送) (100 点)

ガス中の光によるエネルギーの伝達を輻射輸送という。ここでは、単一の遷移のみを持つガスにおける輻射輸送に関して、基礎的な考察を行う。

ガス中に単位面積を底面とする長さ ds の微少体積を考え、両端面での単位振動数あたりの表面輝度を $I_\nu, I_\nu + dI_\nu$ ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$, sr:ステラジアン) とする(図1)。この微少体積で新たに発生するエネルギーによる輻射を Emissivity といい、 j_ν ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$) で表す。また、この体積内での輻射の吸収率を吸収係数 α_ν (cm^{-1}) で表すと、 I_ν について以下の式が成り立つ。

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad (\text{A})$$

これを輻射輸送の基礎方程式という。

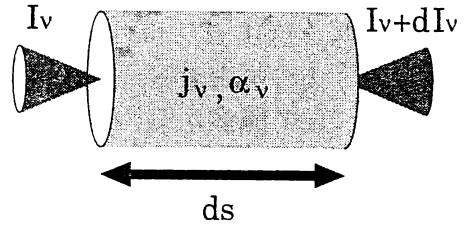


図 1

(1) 光学的厚さ (Optical depth) τ_ν

$$\tau_\nu \equiv \int_0^s \alpha_\nu(s') ds'$$

源泉関数 (Source function) S_ν

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$$

を用いて式(A)を書き換え、それを解くことにより I_ν を τ_ν の関数として表せ(ヒント: 変数を s から τ_ν に変換し、 $0 \sim \tau_\nu$ の区間で積分)。また、 S_ν が τ_ν によらず一定である場合について解を整理して書き直し、 $\tau_\nu \rightarrow 0, \tau_\nu \rightarrow \infty$ の場合について解の物理的意味を説明せよ。

次に、このガスに含まれる原子の準位 1,2 間の遷移 (エネルギー差 $h\nu_0$) について考える。

原子周辺での輻射の平均強度 J_ν は I_ν の立体角平均で与えられる。

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

このうち、準位 1,2 間の遷移に関与する部分を \bar{J} とすると、

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$$

ここで、 $\phi(\nu)$ は ν_0 を中心とする δ 関数に近い形状を持つ規格化された関数で、輝線や吸収線の形を与えるものである(図2)。

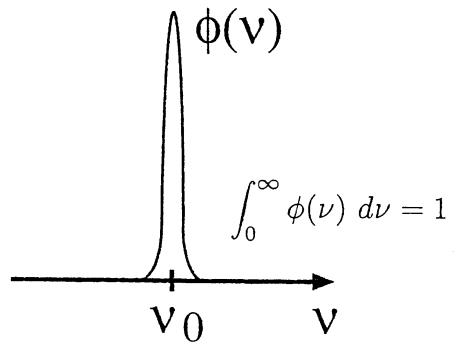


図 2

準位 1,2 間の遷移には、確率 A_{21} で起る自発的な放射と、 \bar{J} により確率 $B_{12}\bar{J}$, $B_{21}\bar{J}$ で引き起こされる誘導吸収および誘導放射がある(図 3)。また、準位 1,2 にある原子の個数密度を n_1 , n_2 とすると、温度 T の熱力学平衡状態にあるガスでは、

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \quad (\text{B})$$

(g_1 , g_2 はそれぞれの準位の状態総数)
の関係がある。

- (2) 放射と吸収が平衡状態にあることから \bar{J} を求め、それが振動数 ν_0 における温度 T の黒体輻射 B_{ν_0} ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$)

$$B_{\nu_0} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu_0/kT) - 1} \quad (\text{C})$$

と一致すると考えて、 B_{12}, B_{21} 間の関係及び A_{21}, B_{21} 間の関係を導け。また、前文下線部のように考えて良い理由を定性的に述べよ。

j_ν , α_ν は A_{21}, B_{12}, B_{21} を用いて以下のように表される。

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (\text{D})$$

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) \quad (\text{E})$$

- (3) (2) の結果および式 (B)(D)(E) を用いて、熱力学平衡状態にあるガスの α_ν , S_ν を温度 T を含む形で表せ。また、 $\nu \sim \nu_0$ 付近でのそれらの振る舞い及びその物理的意味を、簡潔に説明せよ。

- (4) 温度 T_2 のガスに囲まれた温度 T_1 の星を考える(図 4)。ガスは振動数 ν_0 のみに遷移を持ち、この振動数においてガスは光学的に十分厚いものとする。振動数 ν_0 とそれに近い異なる振動数でこの天体を観測した場合、それぞれの振動数での天体の見え方を、簡単な説明とともに図示せよ。

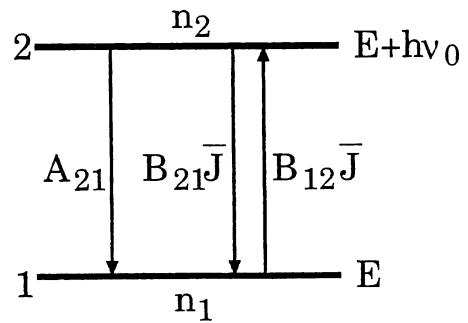


図 3

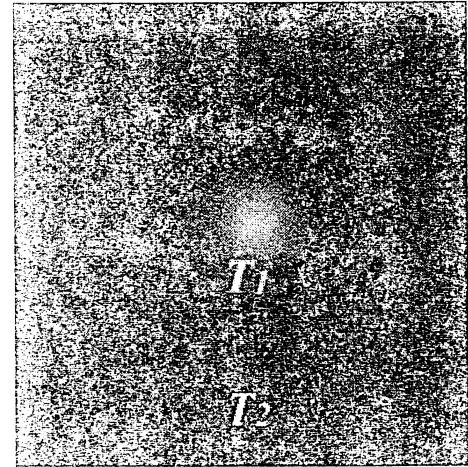
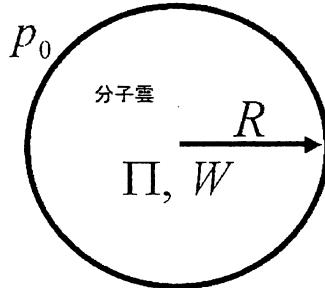


図 4

III-9 (天文学：力学平衡) (100 点)

恒星は分子雲¹の自己重力による収縮の結果として誕生する。一方、実際の分子雲は孤立して存在しておらず、外周の星間ガスから圧力を受けている。本問では、星形成に先立つ分子雲の力学を、分子雲全体での力のバランスを考えることにより議論する。

外圧を被る分子雲の概念図



さて、分子雲全体の収縮や膨張といった形状の変化は、慣性能率 (I) の時間の 2 階微分を調べることにより分かることが知られている²。 I を用いて基本となる方程式を書き下すと以下となる。

$$\frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt^2} = 3\Pi + W - \int_{\text{分子雲の全表面}} p_0 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A})$$

ここで、 p_0 は分子雲が受ける外圧であり、分子雲の全表面に対して面積分されている。分子雲の表面ベクトル \mathbf{S} は外向きを正とした。 \mathbf{r} は位置ベクトルである。球対称を仮定すると分子雲の総内部圧力 Π と総重力 W は

$$\Pi = \int_0^R p \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{B})$$

$$W = \int_0^R \rho \times r F(r) \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{C})$$

である。ここで、 p は分子雲内部の圧力、 $F(r)$ は分子雲中心から距離 r における単位質量当たりの重力で、外向きを正とする。分子雲の半径は R としている。以下、密度 ρ 及び温度 T は空間的に一様と近似し、分子雲の半径 R の変化は許すが質量は常に M と固定する。まず、方程式 (A) の右辺を分子雲の半径 R を用いて整理しよう。

¹分子雲とは、主に水素分子から成る星間雲である。CO 分子輝線の検出によりその存在が認識されている

²分子雲を構成するガス粒子の運動方程式に位置ベクトル \mathbf{r} を乗じ、分子雲の体積全体にわたり積分することから分かる

- (1) 分子気体の平均分子量を $\mu(g)$ 、ボルツマン定数を $k_B(\text{erg}/\text{K})$ とし、気体の状態方程式から分子雲の圧力 p を温度と密度で表せ。
- (2) 半径 r 内の質量 $M(r)$ を用いて、半径 r での重力 $F(r)$ を書け。重力定数は G とする。
- (3) 式(A)の右辺を R の関数として、 M 、 T 、 μ 、 k_B 、 G 、 p_0 を用いて書き下せ。

以上より、 M と T が与えられた場合、分子雲の大域的力学状態は外圧 p_0 と分子雲の半径 R で特徴づけられることが分かる。次に、分子雲がビリアル平衡(力学平衡： $\frac{d^2I}{dt^2} = 0$)にあるとする。

- (4) 分子雲がビリアル平衡となるためには、 p_0 がある上限値 p_m 以下でなければならない。ある温度 T 及び質量 M が与えられたとする。 T と M を用いてこの p_m を求めよ。 G 、 k_B 、 μ はそのまま用いて良い。
- (5) $p_m > p_0$ の場合を考える。このとき(ある p_0 が定まった場合)、2つの平衡解が許されることを、横軸が分子雲のサイズ R 、縦軸を $\frac{1}{2} \frac{d^2I}{dt^2}$ として、大まかなグラフを描いて示せ。

次に、ビリアル平衡にある分子雲の安定性を考察しよう。平衡となる半径で、小さい方を R_s 、大きい方を R_l とする。 p_m より小さいある p_0 のもと、分子雲のサイズ R が一様に少し揺らいだとする。簡単のため T は常に一定と仮定する。

- (6) 縦軸が $\frac{1}{2} \frac{d^2I}{dt^2}$ 、横軸が R であるグラフから、 $\frac{1}{2} \frac{d^2I}{dt^2}$ の符号が R に応じて変わることが分かる。(イ)正の場合、(ロ)負の場合、それぞれ分子雲の形状はどのように変化するか、簡単な理由とともに述べよ。
- (7) 2つのビリアル平衡状態の安定性をそれぞれ定性的に論ぜよ。

最後に、ビリアル平衡にある分子雲を具体的に考察する。物理定数の値は、 $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g}\cdot\text{s}^2$ 、 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}/\text{K}$ であり、 $\mu = 3.0 \times 10^{-24} \text{ g}$ とする。

- (8) 温度が 30 K、質量が $4.0 \times 10^{34} \text{ g}$ である小型の分子雲の p_m を具体的に求めよ。有効数字は 2 桁とし、単位は erg cm^{-3} とせよ。
- (9) 非常に強い衝撃波が通過し、小型の分子雲が受ける外圧が $10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$ となったと仮定する。この外圧と小問(8)で求めた p_m との大小を比較し、この外圧が十分な時間保たれた場合に分子雲がどの様に進化するか簡単に述べよ。

平成 16 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1、I-2、I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いててもよい)。
 - (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
-

I-1 (弦の振動) (100 点)

長さ $2l$ 離れた、水平面内にある固定点間に張られた弦について考える。両固定点を通る方向を x 軸にとり、固定点の中央を $x = 0$ とする。鉛直下方を y 軸にとり、時刻 t での弦の形状を $y(x, t)$ で表す。両端では $y(\pm l, t) = 0$ とする。弦の単位長さあたりの質量を m 、張力を T 、重力加速度を g とおく。 $|y(x, t)| \ll l$ の場合には、 $y(x, t)$ は方程式

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = g \quad (\text{A})$$

に従う。ここで、 $c = \sqrt{T/m}$ である。

- (1) 振動していない平衡状態では、弦は重力のためにわずかに下方にたれている。このとき、弦の平衡形状 $y_0(x)$ は

$$y_0(x) = \frac{g}{c^2} (l^2 - x^2) \quad (\text{B})$$

と表されることを示せ。

- (2) 問(1)の平衡状態にある弦の中央をつまんで、微小量 h だけ下に引っ張ったときの弦の形状を $y_1(x)$ とする。 $u_1(x) \equiv y_1(x) - y_0(x)$ を求めよ。

この状態で弦を静かに放すと、弦は振動を始める。 y 方向の変位を $u(x, t) \equiv y(x, t) - y_0(x)$ として、以下の間に答えよ。

- (3) この振動にあらわれる固有振動の振動数を求めよ。

- (4) 初期条件を満足する $u(x, t)$ を求めよ。

- (5) この振動における、もっとも低い固有振動のモードと、その次に低い固有振動のモードの振幅の 2 乗の比を求めよ。

I-2 (数学) (100 点)

(1) 関数 $y(x)$ についての以下の二つの微分方程式の一般解を求めよ。なお、
 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ 、 $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$ の意味である。

(a) $y'' + 2y' - 3y = 9e^{2x}$

(b) $x^2y'' - 6y = 5x^4$

(2) Bernoulli 数 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を以下の無限級数展開で定義する。

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

このとき、 B_0, B_1, B_2 を求めよ。また、

$$B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$$

を証明せよ。

(3) $\cot x$ の無限級数展開、

$$\cot x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$$

の係数 A_n を Bernoulli 数を用いて書け。

(4) $\cos(kx)$ の $x \in [-\pi, \pi]$ における Fourier 展開、

$$\cos(kx) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cos(nx) + S_n \sin(nx) \right\}$$

において、係数 C_n と S_n を求めよ。

I-3 (交換相互作用) (100 点)

二つの原子に電子の軌道 1, 2 がそれぞれ局在している。その軌道部分の規格化された波動関数を $\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x})$ とし、それらは互いに直交するものとする。今 ϕ_1, ϕ_2 にそれぞれ電子が 1 つ入っている。また 2 つの電子のスピン演算子を、 \mathbf{s}_1 と \mathbf{s}_2 とし、スピン部分の波動関数を $\psi_{s_z}^{(1)}, \psi_{s_z}^{(2)}$ とする。

- (1) 全スピン演算子を $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ 、全スピンを S 、その磁気量子数を S_z としたとき、その規格化された固有関数 Ψ_{S,S_z} をすべて求めよ。また電子がフェルミ統計に従うことを考慮し、 $S = 1, S = 0$ のそれぞれについて、許される軌道部分の規格化された波動関数を書け。ただし二つの電子の座標を \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 とする。
- (2) 演算子 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 \Psi_{1,S_z} &= \Psi_{1,S_z}, \quad \mathbf{P}_1 \Psi_{0,0} = 0, \\ \mathbf{P}_0 \Psi_{0,0} &= \Psi_{0,0}, \quad \mathbf{P}_0 \Psi_{1,S_z} = 0\end{aligned}$$

を満たすものとする。 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ を $\mathbf{P}_i = c_i + d_i \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ という形で書け。ただし c_i, d_i は実数である。

- (3) 電子間にクーロン相互作用が働く。このハミルトニアンを $H = e^2/r_{12}$ とする。ここで $r_{12} \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ である。このハミルトニアンの期待値を $S = 0, S = 1$ の両方の場合について計算し、それが

$$\langle H \rangle = a + b \langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle |_S$$

の形にまとまり、 b が

$$b = -2 \int d^3x_1 d^3x_2 \phi_1^*(\mathbf{x}_2) \phi_2^*(\mathbf{x}_1) \frac{e^2}{r_{12}} \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2)$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle |_S$ は、全スピンが S の場合の $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ の固有値であり、 a, b は共に S によらない量とする。

- (4) 系の体積を Ω としたとき

$$\phi_1^*(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

と展開できることを用い、 b が負であることを示せ。ただし

$$\int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \epsilon r}}{|\mathbf{r}|}$$

とする。

- (5) $S = 1, S = 0$ のうちエネルギーが低い状態はどちらか。

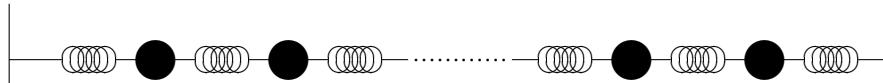
平成 16 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1、II-2、II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

II-1 (格子振動) (100 点)

下の図の様に N 個の同じ質量 m を持つ質点が同じ強さ k のばね $(N+1)$ 本でつながれている場合を考えよう。ただし、両端のばねは固定されている。



- (1) 左から n 番目の質点の任意の時刻 t における変位を $x_n(t)$ として、系のラグランジアンを書け。ただし、右の方向を正にとる。
- (2) $x_n(t)$ を第 n 成分とする N 次元ベクトルを $\mathbf{x}(t)$ と書く。系の運動方程式を

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = L \mathbf{x}$$

と表すとき、 N 次の対称行列 L を書け。

- (3) すべての質点が同じ角振動数で振動する運動 $x_n^{(p)}(t) = a_n^{(p)} \cos \omega_p t$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を基準振動という。独立な基準振動は N 個ある ($p = 1, 2, \dots, N$)。基準角振動数 ω_p と振幅 $a_n^{(p)}$ はそれぞれ

$$\omega_p = \Omega \sin \frac{\theta_p}{2}, \quad a_n^{(p)} = A \sin n\theta_p \quad (\text{A})$$

と与えられることを示せ。ただし、 $\Omega = 2\sqrt{k/m}$ 、 $\theta_p = p\pi/(N+1)$ 、そして A は任意定数である。

(ヒント : $a_n^{(p)} = a \sin(n\theta + \alpha)$ と置いて、境界条件から θ と α を求めよ。)

- (4) $\mathbf{a}^{(p)} = {}^t(a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \dots, a_N^{(p)})$ とベクトル表示するとき、 $\mathbf{a}^{(p)}$ は次のように正規直交系になっていることを示せ。ただし、式 (A)において $A = \sqrt{2/(N+1)}$ と選ぶものとする。

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(p)} a_n^{(p')} = \delta_{pp'} \quad (p, p' = 1, 2, \dots, N)$$

ここで、 $\delta_{pp'}$ はクロネッカーのデルタである。また、 $\sum_{n=1}^N \sin^2 n\theta_p = (N+1)/2$ である。

- (5) 各質点にさらに速度に比例する抵抗 $-2m\gamma\dot{x}_n$ (ただし、 $\gamma > 0$; 定数) と外力 $F_n(t) = mf_n \cos \omega_e t$ が加わっている場合を考える。このときの運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} - L\mathbf{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f} \cos \omega_e t \quad (\text{B})$$

となる。ただし、 $\mathbf{f} = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_N)$ 。基準座標 $q_p(t) \equiv \sum_{n=1}^N a_n^{(p)}x_n(t)$ の従う運動方程式を $f^{(p)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(p)}f_n$ を使って表せ。

- (6) 十分時間が経過したときの $q_p(t)$ を求めよ。

II-2 (静電容量) (100 点)

- (1) 図1のような同軸円筒コンデンサーがある。内側の円筒極板の半径は a 、外側の円筒極板の半径は b 、軸方向の長さは L であり、両円筒極板の厚みは無視できるものとする。この同軸コンデンサーの静電容量 C_0 を求めよ。ただし、両円筒極板間は真空であり、真空の誘電率を ϵ_0 とする。またコンデンサーは十分長く、両端で電場の乱れる効果は無視してよい。

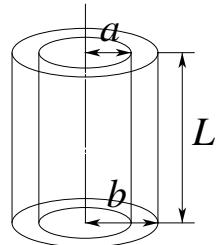


図1

- (2) このコンデンサーの軸を鉛直方向に保持しながら、下端を大きな容器にためた非導電性の液体表面に接するように設置する。このとき極板間の間隔が十分狭ければ、液面の極板との接触線Cの接線方向に働く表面張力 α (図2) (注) の反作用 α' によって、液面は高さ h_1 だけ上昇する(毛管現象) (図3)。この h_1 を上昇した液体に働く重力(重力加速度を g とせよ)と α' との釣り合いを考えることによって求めよ。ただし、液面形状の水平面からの変形は高さ h_1 と比べて無視できるものとし、接触線Cでの接触角は常に θ であるものとする。また液体の密度は ρ で与えられ、液体より上にある気体の密度は無視する。

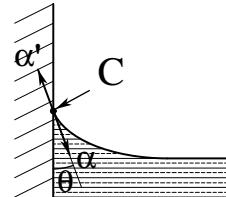


図2

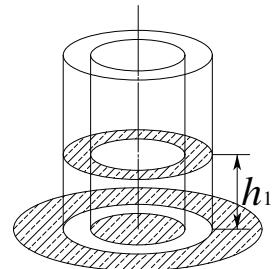


図3

(注) 二つの媒質が接する界面(表面)を変形させる時に必要な仕事は、体積変化に伴う仕事(=体積変化×圧力差)と表面積を変化させるのに伴う仕事(=表面積変化×表面エネルギー α)に分類される。この表面エネルギーは表面張力とも呼ばれ(エネルギー÷面積)の次元を持つ量である。

- (3) このときのコンデンサーの静電容量 C_1 を測定した。液の高さ h_1 を C_1 より求めよ。ただし液体の誘電率は ϵ 、気体の誘電率は ϵ_0 と書けるものとする。

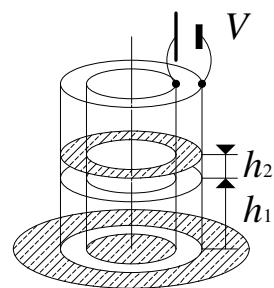


図4

- (4) 極板間に電位差 V を与えると液面はさらに h_2 だけ上昇した(図4)。この状態の静電容量 C_2 を用いて h_2 および液体の密度 ρ を求めよ。

- (5) コンデンサーを液体中に完全に沈めたときの静電容量 C_3 を測定すれば、液体の誘電率 ϵ を知ることができる。このことを利用して a , b , C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , V , ϵ_0 , θ を用いて表面張力 α を表せ。

II-3 (Ising モデル) (100 点)

- (1) 体積 V の結晶の全原子数を N とする。各原子が磁気モーメント μ を持ち、磁場 H に対して平行 (+) か反平行 (-) のいずれかの状態のみを取るものとする。各格子点の状態を表す変数を $\sigma_i (i = 1, \dots, N)$ とし、磁場 H に対して平行な時 +1、反平行な時 -1 とする。また隣り合うスピンの間のみに相互作用が働くものとする。この時の系全体の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \quad (\text{A})$$

と書ける。ただし、 $\langle ij \rangle$ は隣り合うスピンに対する和である。ここで i 番目の格子点にあるスピンの Hamiltonian \mathcal{H}_i を σ_i の平均値 $\langle \sigma \rangle$ を用いて次の形で書けると仮定する。

$$\mathcal{H}_i = -Jz \langle \sigma \rangle \sigma_i - \mu H \sigma_i \quad (\text{B})$$

ここで z は最隣接原子の数である。また $Jz \langle \sigma \rangle = \mu H'$ と置けば、一つのスピンには有効磁場 $H_{\text{eff}} = H + H'$ が働いているとみなすことができる。

- (a) 一つのスピンに対する分配関数 Z_1 を H_{eff} を用いて書け。
- (b) 各スピンが独立であるとして、系全体についての Helmholtz の自由エネルギー F を求めよ。更にエントロピー S と内部エネルギー U の表式を導け。
- (c) この系の磁化の強さ $M (= \frac{N}{V} \mu \langle \sigma \rangle)$ が次の式を満たすことを示せ。

$$M = \frac{N\mu}{V} \tanh\left(\frac{\mu H}{kT} + \frac{JzVM}{kT\mu N}\right) \quad (\text{C})$$

- (d) 式 (C) が $H = 0$ で $M = 0$ 以外の解を持つ条件を求めよ。ここで、Curie 温度 $T_c = Jz/k$ (k は Boltzmann 定数) を用いよ。
- (2) 同じことを統計力学的に考える。原子の総数を N とし、磁場 H に対して平行 (+)、反平行 (-) にあるスピンの数をそれぞれ N_+ 、 N_- とする。またパラメータ Φ を $N_+/N = (1 + \Phi)/2$ 、 $N_-/N = (1 - \Phi)/2$ により定義する。隣接原子対 (総数 $zN/2$) を +, - で区別し、隣接原子の両方が磁場に平行である対の数を N_{++} 、以下同様に N_{--} 、 N_{+-} と置くと、この時の相互作用エネルギー U は

$$U = -J(N_{++} + N_{--} - N_{+-}) \quad (\text{D})$$

となる。ここで一つの格子点が + または - により占められる確率 $p_+ = N_+/N$ 、 $p_- = N_-/N$ を導入し、 U の式の中の N_{++} 等をその平均値

$$\overline{N_{++}} = \frac{1}{2}zN_+p_+ = \frac{z}{8}N(1+\Phi)^2 \quad (\text{E})$$

$$\overline{N_{+-}} = zN_+p_- = \frac{z}{4}N(1-\Phi^2) \quad (\text{F})$$

$$\overline{N_{--}} = \frac{1}{2}zN_-p_- = \frac{z}{8}N(1-\Phi)^2 \quad (\text{G})$$

で置き換える近似を行う。

- (a) N 個のスピンのうち、 N_+ 個が平行スピン、 N_- 個が反平行スピンであるときの系全体のエントロピーを Φ を用いて書き表せ。ただし、Stirling の公式 ($\log x! \simeq x \log x - x$) を用いること。
- (b) 磁場 H をゼロとしたときの Helmholtz の自由エネルギー F を Φ を用いて書け。
- (c) Φ の平衡値を求める式が、式 (C) で $H = 0$ としたときと同じ形になることを示せ。またパラメータ Φ の物理的意味を説明せよ。
- (d) 定積比熱 C_v の T_c 近傍での振舞いがどうなるか、グラフを用いて説明せよ。

平成16年度大学院入学試験問題III（3時間）

注意

- (1) 問題は III-1 から III-8 まで 8 間ある。これから 3 間選択せよ。
- (2) 選択した問題の回答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ（裏面を用いてよい）。
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択)(振り子の実験) (100 点)

剛体を水平な固定軸で支えた実体振り子で重力加速度 g を求める実験を行うものとする (Borda の振り子)。この振り子は図1のように細い針金で吊られた半径 r 、質量 M の金属球からなり、支持体のナイフエッジ K を支点として振動する。針金の長さを l 、振り子が最大振幅になるときの角度を α 、振動の周期を T とすると、重力加速度 g は次の式で求めることができる。

$$g = \frac{4\pi^2(l+r)}{T^2} \left[1 + \frac{2r^2}{5(l+r)^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2}{8} \right] \quad (\text{A})$$

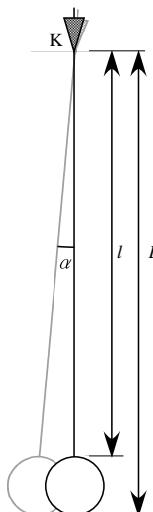


図1



図2

- (1) 金属球の直径をノギス (キャリパー) を用いて測定したところ、図2のような表示だった。直径の値を誤差を含めて書け。

- (2) 振り子の周期 T を測定するため、振り子を 190 回振動させて 10 回ごとのラップタイムを測った。表はその結果である。1 列目は 0 から 90 回目、2 列目は 100 から 190 回目のラップタイムで、3 列目は 1 列目と 2 列目の差にあたる 100 周期分の時間である。

回数	ラップタイム	回数	ラップタイム	100 回ごとの時間
0	1 分 40 秒 5	100	5 分 09 秒 7	3 分 29 秒 2=209.2 秒
10	2'01.2	110	5'30.7	3'29.5=209.6
20	2'22.0	120	5'53.7	3'31.7=211.7
30	2'43.1	130	6'14.5	3'29.4=209.4
40	3'03.8	140	6'35.5	3'29.7=209.7
50	3'24.8	150	6'56.5	3'29.7=209.7
60	3'45.8	160	7'17.3	3'29.5=209.5
70	4'06.6	170	7'38.3	3'29.7=209.7
80	4'27.6	180	7'59.5	3'29.9=209.9
90	4'48.6	190	8'20.5	3'29.9=209.9

このデータを用いて、平均周期 T とその誤差 ΔT を求めよ。測定データの取り扱いには十分注意すること。また、 ΔT は平均値の標準偏差より求め、 $\sqrt{\frac{4.32}{90}} = 0.219089$, $\sqrt{\frac{0.43}{72}} = 0.077281$ を用いて良い。

長尺ノギスを用いた測定により、支点 K から金属球の下端までの長さ L は 110.96 ± 0.01 cm であった。また周期の測定前後において求めた振り子の振幅を求めそれらの幾何平均をとることにより、 $\alpha^2 = 1.54 \times 10^{-3}$ を得た。

- (3) 針金の長さ l はいくらか。誤差を含めて示せ。
- (4) g の計算式を書き下せ。ただし、数値計算は行わなくて良い。
- (5) 問(4)の計算を電卓を用いて行ったところ、979.60184 と言う値が出た。 g の値はいくらか。
- (6) l, r, T の誤差を $\Delta l, \Delta r, \Delta T$ としたとき、 g の相対誤差が次の形で近似できることを示せ。

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta L + \Delta r}{L - r} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \quad (\text{B})$$

また、有効数字を考えて g の誤差 Δg を求めよ。

III-2(選択)(回路) (100 点)

超伝導電磁石の「永久モード」と「永久モードスイッチ」に関する以下の記述を読んで、下記の問い合わせよ。

一般に常伝導線材でできた電磁石に大電流を流すと、線材の電気抵抗に伴う自己発熱のため、発生磁界の限界が小さくなる。超伝導転移点以下に冷却された超伝導電磁石ではこのような問題ではなく、小型の電磁石で強磁界を発生できる。また、超伝導物質のみで作られた閉回路に流れる定常電流は減衰しない。この特質を利用したものが超伝導電磁石の永久モードである。超伝導電磁石の巻き線の両端を常伝導物質を介さずに接続しておけば、外部電源から電流を供給し続けなくとも、電流および磁界を高精度に維持することができる。しかしながら、当然、超伝導体の閉回路中の電磁石に外部から電流を流し込むことはできない。このままでは超伝導体となった時に流れていた電流が維持されるだけである。永久モードスイッチがこの問題点を打開する。超伝導電磁石の両端を結ぶ超伝導線材の一部に、局所的に熱を加えて超伝導転移温度以上に加熱保持できる仕組みが取り付けられてある。この部分が超伝導状態の時は永久モード、常伝導の時には外部から電流を流し込める通常モードとなり、あたかも永久モードのスイッチのように働く。

- (1) 超伝導線を巻いた直径 10 cm、長さ 50 cm の巻き線の厚みの無視できる空芯ソレノイド形の電磁石がある。この磁石に 100 A の電流を流した時、中心部で 10 T の磁束密度が得られた。この磁石のインダクタンス L はいくらか。ただし、このソレノイドは十分細長く、無限長近似を適用してよいものとする。ソレノイド内部の空間の透磁率としては $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{C}^{-2}$ を用いよ。
- (2) 永久モードスイッチの常伝導部分の線材の電気抵抗率が $1 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$ 、線材の半径 0.1 mm、長さ 1 m とした時の電気抵抗を R とする。今、超伝導電磁石に流れる電流が 0 の状態の時に永久モードスイッチのヒーターに熱を入れ通常モードにした。時刻 $t=0$ にこの電磁石に接続した電源より電流 I_0 (一定値) を流しはじめたとする。時刻 t において磁石中心部における磁束密度 B を I_0 , L , R を用いて求め、時間変化の様子を L , R の数値を用いてグラフに示せ。
- (3) 問(2)の状態で十分時間が経って定常状態になったところで永久モードにすれば、その時ソレノイドに流れる電流を永久に保持することになる。しかし、現実的な超伝導磁石では、超伝導の完全な閉回路を作ることは難しい。技術的な理由で超伝導線は多数本の超伝導体の細線を束ねて銅線の中に埋め込んだ構造をとっており、超伝導線の閉回路を作ろうとしても接続部分において超伝導体同士の間にこの銅が挟まれてしまうからである。しかしながら、ソレノイドの両端からの二本の超伝導線を十分な長さだけ平行にハンダ付けすることにより接続部分の電気抵抗 r を小さくし、擬似的に永久モード動作を

させることができる。今、永久モードにしてから電源を切り離した状態で、磁場が1時間あたり $1 \text{ ppm} (=1 \times 10^{-6})$ の精度で安定していることを要求するには接続部分の電気抵抗 r の値の上限はいくらか。

- (4) 永久モードスイッチのついた超伝導電磁石では問(2)のように外部から流した電流が即電磁石に流れる電流にはならないことに注意しなければならない。今、超伝導電磁石に流れる電流が0の状態で永久モードスイッチのヒーターに熱を入れ、通常モードにしてあるものとする。時刻 $t=0$ にこの電磁石に接続した電源より時間に対して線形に変化する電流 $I_0 = \beta t$ を流し始めたとする。時刻 t において磁石中心部の磁束密度 B を I_0, L, R, β を用いて求め、時間変化の様子を $\beta = 0.1 \text{ A/sec}$ の場合について L, R の数値を用いてグラフに示せ。
- (5) 100Aの電流を流して永久モードにしてからスイッチ(S1)で電源を切り離した状態の超伝導電磁石がある(図1)。この超伝導電磁石の永久モードスイッチ(PSW)を誤操作により通常モードにしてしまった。このとき、電磁石に貯えられていた磁気エネルギーは常伝導になった部分でジュール熱として発散される。この発熱で超伝導転移温度を超える領域が周辺の線材部分に拡大し、磁気エネルギーはすべて熱となってしまう。このとき局所的に著しく発熱することとなるため、最悪の事態では線材の融点を超えて電磁石巻き線を焼損することになる。このような事態を防ぐため、通常は保護回路(D1,D2,R1よりなる)が取り付けられている。この保護回路の動作を説明せよ。ただしD1,D2の電圧電流特性は図2に示されているものを使用するとし、R1の抵抗値は 0.02Ω とする。また、この保護回路を付加することによって超伝導電磁石の使用条件に制約を受けることになるが、その条件を説明せよ。

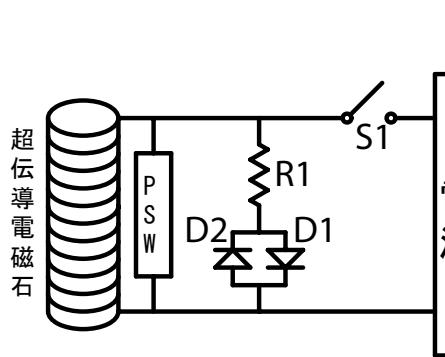


図1

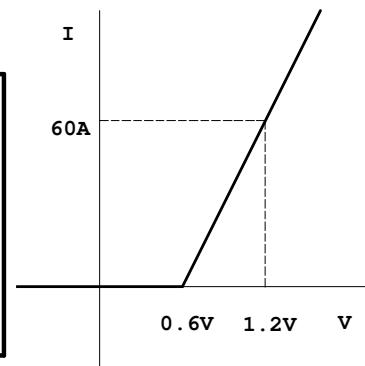


図2

III-3 (選択)(調和振動子) (100 点)

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2)$$

である。ここで、 x, p は座標および運動量の演算子を表わし、 ω は角振動数である。また質量は簡単のため 1 にとった。系が量子力学に従うとして

$$a = (2\omega)^{-1/2} (p - i\omega x)$$

$$a^\dagger = (2\omega)^{-1/2} (p + i\omega x)$$

と表わされる消滅演算子 a 、生成演算子 a^\dagger を導入する。ただし、 $\hbar = 1$ とした。

(1) a と a^\dagger の交換関係を求めよ。また H は

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

のように書き換えられることを示せ。

(2) 系の基底状態 $|0\rangle$ は式

$$a|0\rangle = 0$$

を満たす。この式から基底状態の波動関数 $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$ についての微分方程式を導き、その規格化された解を求めよ。なお、必要ならば次のガウス積分を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(3) 第一励起状態 $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ の規格化した波動関数 $\varphi_1(x) = \langle x|1\rangle$ を求めよ。

次に、二次元の調和振動子を考える。そのハミルトニアン H_0 は

$$H_0 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$$

と与えられる。この系に

$$H' = -\lambda \left[(\vec{p} \cdot \vec{e})^2 - \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) \right]$$

の摂動が加わったとする。ただし、 $\vec{p} = (p_x, p_y)$ であり、 \vec{e} は単位ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ を表わしている。

(4) $\theta = \pi/4$ のとき、基底状態のエネルギーを H' の 2 次の摂動項まで求めよ。

摂動が加わらないときには第一励起状態には 2 重の縮退がある。その縮退は H' によりとれる。

(5) $\theta = 0$ のとき、エネルギーの低い方の状態を表わす波動関数とそのエネルギーを一次の摂動により求めよ。 $\lambda > 0$ と $\lambda < 0$ の 2 つの場合に分けて考えよ。なお、波動関数の答えは $\varphi_0(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(y)$ を用いて書くこと。

(6) 一般の θ の場合にエネルギーの低い方の状態を表わす波動関数とそのエネルギーを一次の摂動により求めよ。

(7) 問(5)の結果を考慮して、問(6)の結果がなぜそのようになったか説明せよ。

III-4(選択)(電磁誘導) (100点)

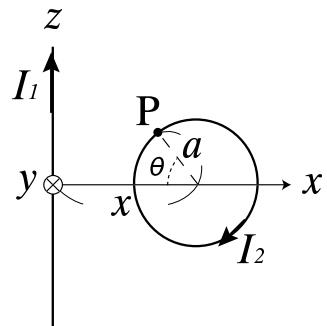
透磁率 μ_0 の真空中に、 z 軸に沿った無限に長いまっすぐな導線と、それから距離 $x(>a)$ を隔てて半径 a の円形一巻きコイルとが $x-z$ 平面内にある(右図)。以下の間に答えよ。

- (1) 導線に電流 I_1 、コイルに電流 I_2 を図の向きに流す。このとき、電流 I_1 によって図の P 点の位置に生じる磁界の向きと大きさ H を答えよ。
- (2) 問(1)の磁界によって、P 点の線要素 $ds = ad\theta$ を流れる電流に作用する力の x 軸方向成分 dF_x と z 軸方向成分 dF_z を求めよ。
- (3) コイル全体に作用する力の方向と大きさ F を求めよ。必要ならば、

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{u - t \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{u^2 - t^2}} \quad (u > t)$$

を用いてよい。

- (4) この後、一旦両方の電流を切り、導線に $I_1 = I \sin \omega t$ と時間変化する電流を流した。導線とコイルの相互インダクタンス M を求め、このときコイルに発生する起電力 e (時計周りを正にとる) を求めよ。
- (5) 次に導線に $I_1 = I$ の定常電流を流し、コイルを x 軸の正の方向に一定速度 v_0 で動かした。このとき、コイルが場所 $x(>a)$ を通過する時点でのコイルに流れる電流 I_2 の向きを答え、大きさを求めよ。コイルの抵抗を R とし、また自己インダクタンスは無視できるものとする。
- (6) 問(5)の場合、コイルを $x = d_1(>a)$ から $x = d_2$ まで動かしたときの仕事 W を求めよ。またこの仕事が、発生するジュール熱 Q と等しいことを示せ。



III-5 (選択) (量子統計) (100 点)

ボゾン、フェルミオンといった量子力学的粒子は、状態の占有に関して古典的な Maxwell-Boltzmann 粒子とは大きく異なるルールに従っている。このため、さまざまな熱力学的性質にも統計性の効果が顔を出してくる。以下では、状態方程式を例にとり、

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \quad (\text{A})$$

のような分散を持って3次元空間中を運動する質量 m の Maxwell-Boltzmann 粒子からなる気体（古典気体）と量子力学的粒子の気体とが、どのように異なるかを考察してみよう。以下の問題では、**粒子間の相互作用は無視するもの**とし、プランク定数を \hbar （あるいは \hbar ）、ボルツマン定数を k_B などとするものとする。

- (1) まず、古典気体を考えよう。体積 V の箱に閉じこめられ、温度 T で熱平衡にある**一個の**古典粒子の分配関数 Z_1 を計算せよ。ただし、必要があれば Gauss 積分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (2) 上の問題と同じ設定で、同種粒子が N 個あるときの分配関数 Z_N も計算せよ。（ただし、気体分子の位置は空間内に固定されていないので、エネルギー、エントロピーなどの物理量が正しく示量的になるように、分配関数をある因子で割る必要があることに注意せよ。）
- (3) この系の粒子数 N が変化できるようにする。化学ポテンシャルを μ として、大分配関数 Ξ を計算せよ。
- (4) 热力学関係式 $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$ ($\Omega = -pV = -k_B T \ln \Xi$ はグランドポテンシャル) により、古典気体の化学ポテンシャル $\mu = \mu_{\text{cl}}$ を粒子数 N 、温度 T 、体積 V の関数として定めると、

$$\mu_{\text{cl}} = k_B T \ln \left[\left(\frac{N}{V} \right) \lambda_T^3 \right]$$

となることを示し、状態方程式を導け。ただし、熱的ドブロイ波長 λ_T は、

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$$

で与えられる。

- (5) 次に**量子力学的粒子**の場合を考えよう。古典粒子と同じ質量 m 、式 (A) で与えられる同一の分散 $\varepsilon(\mathbf{p})$ を持つボゾン、フェルミオンについて、そのグランドポテンシャルが

$$\Omega = -\frac{2}{3} \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{ze^{-\beta\varepsilon}}{1 - gze^{-\beta\varepsilon}} \quad (\text{B})$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ で、 $z = e^{\beta\mu}$ (μ は化学ポテンシャル) はフガシティ、統計性を表す定数 g は、ボゾンのとき +1、フェルミオンのとき -1 をとるものとする。

- (6) 状態方程式を求めるには、式(B)の右辺に現れる z を、 N 、 V 、 T などで表す必要がある。以下、フガシティ $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ の状況を考えよう。式(B)の右辺を z について 2 次まで展開し、 $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$ を用いて、 z と N とを結びつける方程式を作れ。ただし、最終的な結果は、積分を全て実行した上で、 λ_T 、 V 、 z 、 N 、 g だけを用いてできるだけ簡潔な形で表せ。ただし、必要ならば Γ 関数の公式:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x} , \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) , \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (7) 今の方程式で条件: $z = e^{\beta\mu} \rightarrow 0$ を仮定して、 z について最低次の項のみを残すと、問(2)で計算した古典気体のフガシティ $z = \exp(\beta\mu_{cl})$ が得られることを示し、量子気体が古典気体で近似できるためには粒子数密度に対してどのような条件を課す必要があるか述べよ。
- (8) 問(6)、(7)の結果を考慮すると、フガシティ z を、微小パラメータ: $x \equiv \frac{N}{V} \lambda_T^3$ についての巾級数の形に求めると良いことが示唆される。問(6)で得られた方程式の解 z を x の巾級数として求めよ (x の 2 次まででよい)。
- (9) また、物理量: $\frac{pV}{Nk_B T}$ を古典近似の次のオーダーまで計算し、ボゾン、フェルミオンの両方について、圧力 p が量子効果により古典気体からどのようにずれるかを調べよ。さらに、その結果を粒子の統計性と関係付けながら物理的に解釈せよ。

III-6 (選択)(天文学:銀河) (100 点)

円盤銀河(渦巻銀河)では、星や水素ガスが薄い円盤状に分布しており、その円盤中心を中心として回転運動をしている。円盤部では、ガスから星が形成されているが、銀河のある半径より内側だけで星形成が起こっているのが普通である。このことを NGC6946 という円盤銀河を例にとって見てみよう。図1は、この円盤銀河を回転軸方向から見た時の、ガスの面密度の半径方向の変化を表したものである。横軸は kpc(キロパーセク、 $1 \text{ kpc} = 3.1 \times 10^{21} \text{ cm}$)という長さの単位で表示してある。ガス面密度は、銀河中心付近から外側に向かって減少しているが、 10 kpc を越えてもガスが存在していることがわかる。一方、図2は、星形成量の指標である水素 H α 輝線の、回転軸方向から見た表面の明るさ(面輝度)の半径方向の変化を表している。図2から、H α 輝線の面輝度は半径約 8 kpc 付近で急にほぼゼロに落ちていることがみてとれる。このことは、 8 kpc より外側では、ガスは存在しているのだが、星は生まれていないことを示している。この半径を臨界半径と呼ぶ。臨界半径がどのように決まっているのかについて、以下、回転するガス円盤の安定性を考察しながら考えてみよう。

$x-y$ 平面内で回転する無限に薄いガス円盤を考える。この系を記述する基本方程式は、以下の3式である。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \vec{v}) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\sigma} - \nabla \Phi - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \Omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \quad (\text{B})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \sigma \delta(z) \quad (\text{C})$$

ここで、 σ はガス面密度、 \vec{v} は回転円盤に乗った系からみた速度、 p はガス圧、 Φ は重力ポテンシャル、 $\vec{\Omega}$ は円盤の回転角速度で、ここでは時間と半径に依らず一定とし、向きは z 軸方向でその大きさを Ω とする。 \vec{e}_x 、 \vec{e}_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の単位ベクトル、 G は重力定数、 $\delta(z)$ はデルタ関数である。また、ガス圧 p はガス面密度 σ のみに依存する。すなわち、

$$p(x, y, t) = p(\sigma(x, y, t)) \quad (\text{D})$$

である。

- (1) このガス円盤に摂動を与えてその成長を調べたいわけだが、まず非摂動状態を添字 0 をつけて表し、 $\sigma = \sigma_0 = \text{一定}$ 、 $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{一定}$ 、 $p = p_0 = p(\sigma_0) = \text{一定}$ 、 $\Phi = \Phi_0$ の場合を考える。この場合、上の式 (A)~(C) は次の 2 式になることを示せ。

$$\nabla \Phi_0 = \Omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y), \quad \nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \sigma_0 \delta(z) \quad (\text{E})$$

- (2) 次に、以下の摂動を与える。

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(x, y, t), \quad \vec{v} = \vec{v}_1(x, y, t), \quad p = p_0 + p_1(x, y, t) \quad (\text{F})$$

ここで、添字 1 がついている量は微小量と考え、その 1 次の項まで展開すると、以下の 3 式が得られることを示せ。ただし、 $v_s^2 = \frac{dp(\sigma)}{d\sigma}|_{\sigma_0} = \text{一定}$ を用いる。 v_s は音速である。

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \sigma_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{G})$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\sigma_0} \nabla \sigma_1 - \nabla \Phi_1 - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_1 \quad (\text{H})$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \sigma_1 \delta(z) \quad (\text{I})$$

(3) 摂動量として、

$$\sigma_1 = \sigma_a \exp[i(kx - \omega t)] \quad (J)$$

$$\vec{v}_1 = (v_{ax} \vec{e}_x + v_{ay} \vec{e}_y) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (K)$$

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G \sigma_a}{|k|} \exp[i(kx - \omega t) - |kz|] \quad (L)$$

を考える。 $(x$ 軸方向の摂動だけだが一般性を失わない。また式(L)は式(I)を考慮したものである。) この摂動を与えたとき、 σ_a, v_{ax}, v_{ay} が自明でない解を持つために必要な条件(これを分散関係という)を求めよ。また、得られた分散関係から、この摂動に対してガス円盤が安定となる条件を求めよ。

(4) より一般的なケースとして、 $\tilde{\Omega}$ が半径 r 方向に変化するようなガス円盤を考え、渦巻パターンの摂動を与えた場合には、上で求めた分散関係と少し異なる分散関係が得られる。それから得られる、軸対称摂動に対するガス円盤の安定条件は、次式のように与えられる。

$$\sigma_0(r) < \frac{v_s [r \frac{d\Omega(r)^2}{dr} + 4\Omega(r)^2]^{1/2}}{\pi G} \quad (M)$$

この安定条件が満たされる場所では星は誕生せず、この条件が満たされない半径にあるガス円盤は不安定を起こしてガス密度が上がり、星が誕生すると考えられる。この考えに基づいた場合、NGC6946 の臨界半径が約 8 kpc になることを、図 1 を利用して説明せよ。ただし、この円盤銀河内のガスの回転速度は、半径 2 ~ 3 kpc より外側では、 200 km s^{-1} で一定であるとする。計算には以下の数字を用いよ。 $G = 6.7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $v_s = 5 \text{ km s}^{-1}$, $1 \text{ kpc} = 3.1 \times 10^{21} \text{ cm}$ 。

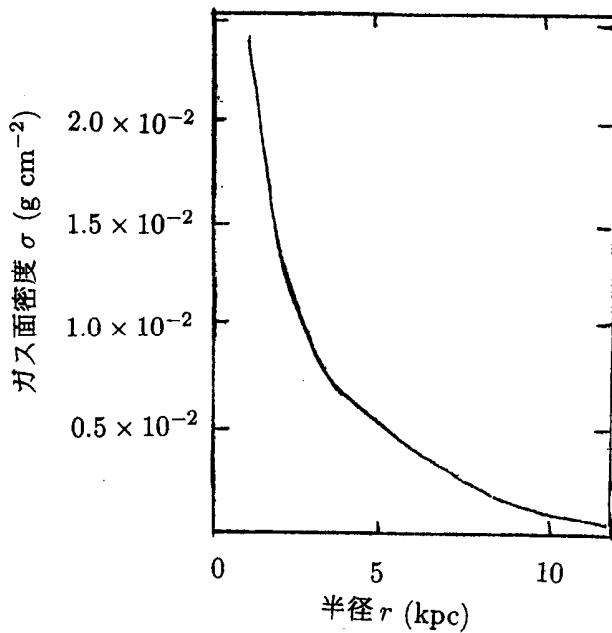


図 1

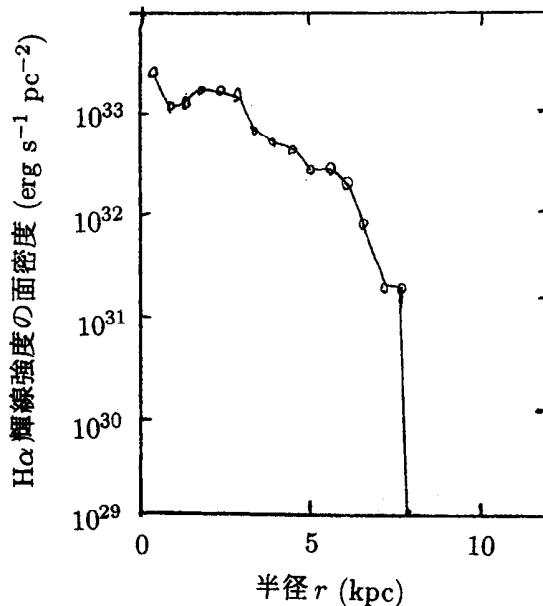


図 2

III-7(選択)(天文学:恒星) (100点)

恒星からの定的な球対称質量放出(恒星風)について考える。恒星風は理想気体からなり、温度一定としよう。恒星風中では重力と圧力勾配による力のみが働くものとし、また、質量放出量は小さく、恒星本体の質量は一定とみなせるものとする。恒星本体の質量を M 、恒星中心からの距離が r である点での恒星風の圧力、密度、速度をおのおの $p(r)$, $\rho(r)$, $v(r)$ として以下の間に答えよ。

(1) この恒星風における質量保存の式と運動方程式を書け。

(2) 恒星風中の速度 v は

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2}}{v^2 - a^2} \quad (\text{A})$$

で記述されることを示せ。ここで、 $a \equiv \sqrt{p/\rho}$ は音速、 G は重力定数である。

式(A)の解のうち、右辺の分母がゼロとなる点を通る解は、その点で分子もゼロにならなければならない。右辺の分子、分母ともにゼロとなる点を臨界点(critical point)と呼ぶ。右図に、距離を臨界点の位置 r_{crit} 、速度を音速 a を単位にして、式(A)のすべての解を示してある。臨界点を通る解には、距離 r が大きくなるにつれて、亜音速から超音速になる解と超音速から亜音速になる解があるが、実際の恒星風では前者が実現している。

(3) v と r に対して分離型の式となっていることを利用して、式(A)を積分せよ。

(4) 問(3)の積分形から、臨界点を通る解がどのように得られるか説明せよ。

(5) 太陽風は高温のコロナから流れ出す恒星風である。太陽風を等温とみなした場合、臨界点の位置は太陽半径の何倍か、また臨界点での流出速度はいくらか、以下の数値を用いて答えよ。

重力定数 $6.7 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$

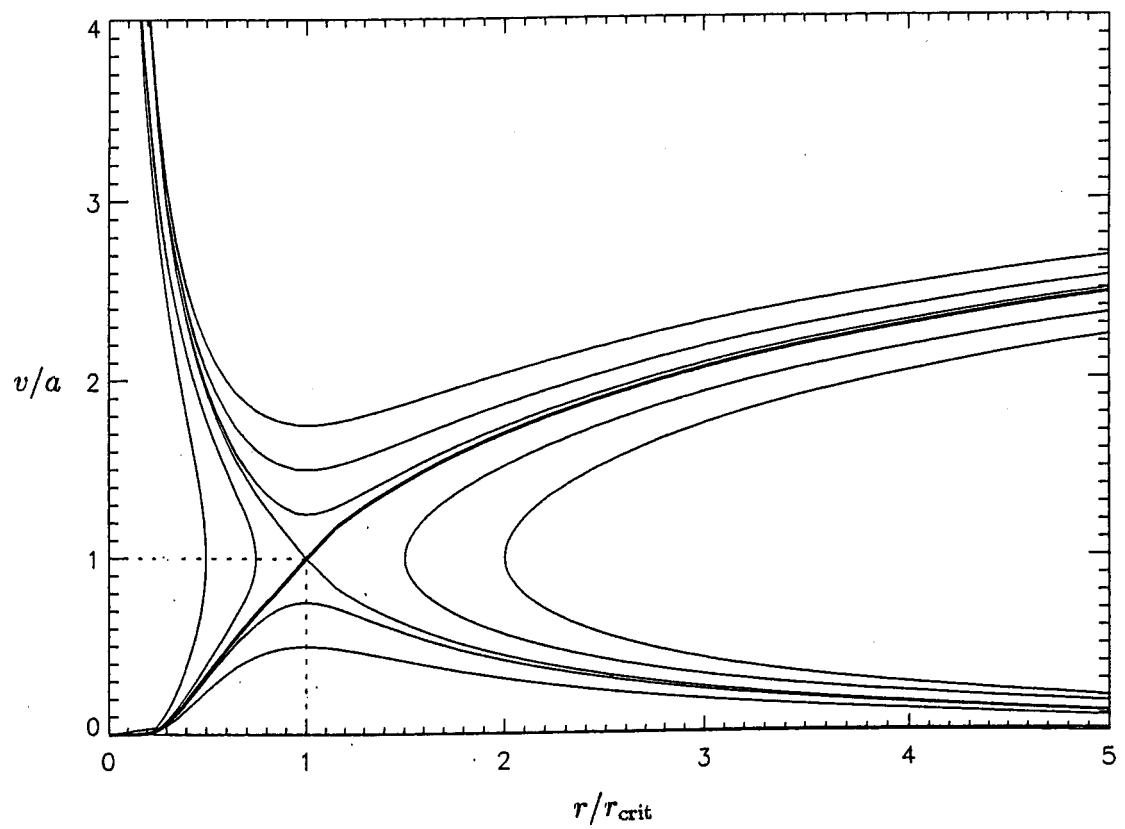
ガス定数 $8.3 \times 10^7 \text{ erg deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

平均分子量 0.60

太陽質量 $2.0 \times 10^{33} \text{ g}$

太陽半径 $7.0 \times 10^{10} \text{ cm}$

恒星風の温度 $1.0 \times 10^6 \text{ K}$



III-8 (選択) (天文学：太陽) (100 点)

(注意) この問題の解答は、問題冊子の最終ページに綴じてある解答用紙を用いること。
 皆既日食で見られる太陽コロナの温度が百
 万度を越える高温であることは、1940 年代
 に入るまで誰にも気付かれなかった。コロ
 ナの分光スペクトルに見られる緑色輝線や
 赤色輝線などは、実験室では非常に弱いた
 めに長い間同定できなかったので、未知の
 元素の線と考えられ、コロナに因んでコロ
 ニュームの線と呼ばれていた。これらの輝
 線が高階電離の Fe XIV イオンや Fe X イオ
 ンから出る輝線であることが判るきっかけ
 となつたのは、実験室における極紫外線領
 域のデータであった。Edlen によって同定
 された極紫外線領域の輝線(図 1)に着目し
 て、Grotorian はこの Fe X イオンの基底 2 重項のレベル間の遷移に対応する波長が、ち
 ょうどコロニュームの赤色輝線の波長と合致することを 1939 年に初めて示したのである。

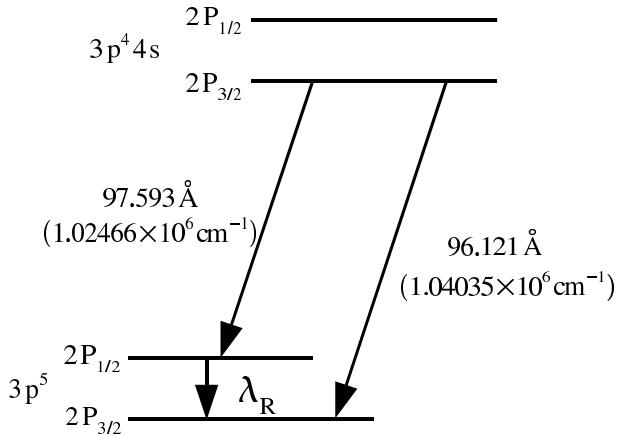


図 1: Fe X のエネルギーレベルと輝線波長
 て、Grotorian はこの Fe X イオンの基底 2 重項のレベル間の遷移に対応する波長が、ち
 ょうどコロニュームの赤色輝線の波長と合致することを 1939 年に初めて示したのである。

- (1) 図 1 の基底 2 重項レベル間の遷移による赤色輝線の波長 λ_R を計算せよ。
- (2) これら Fe X や Fe XIV イオンの電離ポテンシャルの平均値が約 300eV であるこ
 とを用いて、コロナの電離平衡温度の近似値を有効数字 2 衔で計算せよ。但し、
 $1\text{eV}=1.60 \times 10^{-12}\text{erg}$ 、ボルツマン定数 $k=1.38 \times 10^{-16}\text{erg}\cdot\text{K}^{-1}$ を用いよ。

皆既日食の時以外でも、コロナグラフを 3000m 級の高山に設置すれば、地上でコロナを観測できる。図 2 はコロナグラフの原理を示している(光軸方向に圧縮して作図している)。L₁ は対物レンズで、L₂ はリレーレンズ、L₃ はコロナ像を最終焦点面 F 上に再結像するレンズである。この光学系では、L₁ によって出来た明るい太陽本体の像を遮光円錐 C で除去して、コロナからの光だけが通過するようにしている。破線は太陽中心からの光線が遮光円錐 C の中心に結像し、実線はコロナ中のある 1 点からの光線が点 A に結像していることを示している。3 本ずつ描かれている破線と実線のうち、両端の 2 本はそれぞれ対物レンズ L₁ の縁より少し内側を通る光線を示しており、真中の線はレンズ L₁ の中心を通る光線を示している。また、L₂ によって、対物レンズ L₁ の像を絞り D (真中を円形にくり抜いた板) の位置に作り、対物レンズの縁やレンズ枠から生ずる散乱光を、この絞りによって除去している。

- (3) 図 2 で光線は途中の L₂ の位置までしか書かれていないが、これを延長して、コロ
 ナ像上の 1 点 A が焦点面 F 上の A' 点に結像するまでの光路を解答用紙の図に実線
 で示せ。この際、L₁ の縁より少し内側から出た光は、絞り D の開口の端を通過する
 ことに留意せよ。

コロナグラフを用いてコロナの分光スペクトルを観測すると、例えば Fe XIV の 5303Å 緑
 色輝線は、図 3 のように波長方向に広がった輪郭を示しており、この広がりからもコロナ
 の温度を求めることが出来る。

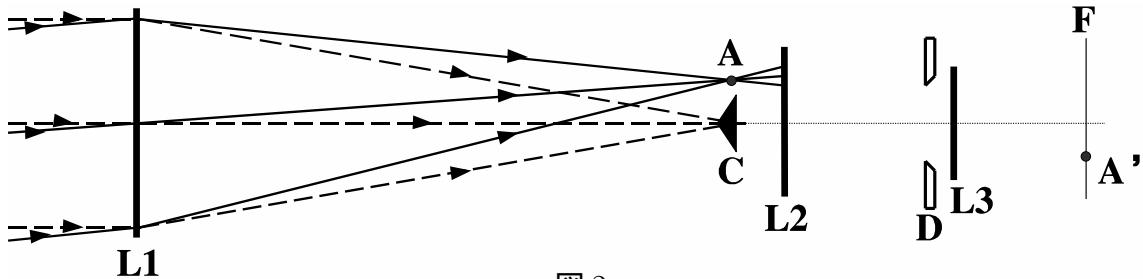


図 2

温度 T の熱平衡にある Fe XIV イオンプラズマの速度分布は等方的な Maxwell 分布をしていると考えられるが、今視線方向のみの運動を考えると、Fe XIV イオン粒子が v と $v + dv$ との間の速度を持つ確率は、

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv^2/(2kT)} dv$$

で与えられる。但し、ここで m は鉄イオンの質量、 k はボルツマン定数である。

- (4) この分布における Fe XIV イオン粒子の平均運動エネルギーは $\frac{1}{2}kT$ で与えられることを示せ。

図 3 の Fe XIV 5303 Å 輝線の輪郭の幅を広げる主たる要因は、望遠鏡の視線方向に沿って存在する Fe XIV イオン粒子の速度分布であると考えることが出来る。すなわち、視線方向に沿って運動している Fe XIV イオン粒子から放射される光は、ドップラー効果によって、中心波長 $\lambda_0 = 5303 \text{ Å}$ から運動速度に比例した量だけずれた波長で観測されるので、図 3 のようなガウス分布の線輪郭となる。

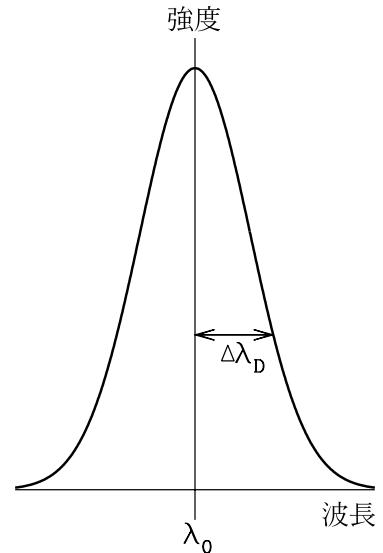


図 3: Fe XIV 5303 Å 輝線
の輪郭

- (5) 輝線の強度は図 3 のように輝線中心から外側に向けて弱くなるが、中心強度の $1/e$ にまで強度が落ちた波長での線輪郭幅 $\Delta\lambda_D$ をドップラー幅と呼んでいる。このドップラー幅が温度のみによって決まっているとした時は、それらの関係は次の式で与えられることを示せ。但し c は光速である。

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

- (6) 核融合によって生成された太陽中心部の熱エネルギーは、放射と対流によって運ばれて、太陽表面（光球）では約 6 千度の熱力学的平衡状態が保たれている。同じ物理過程で、光球の外側に広がっているコロナを百万度まで加熱することができないことは明らかであるにもかかわらず、コロナが百万度に達しているのはなぜか。光球からコロナに、どの様な物理過程によってエネルギーが輸送されてコロナを加熱しているかを答えよ。

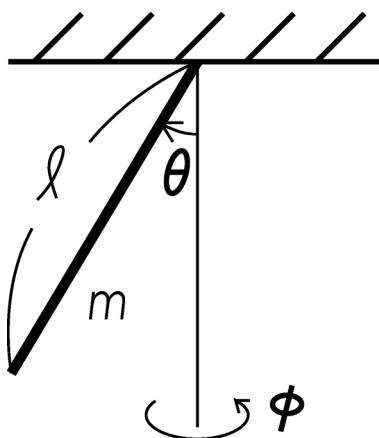
平成 15 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (力学・振り子) (100 点)

図のような、質量 m と長さ l を持つ、太さの無視できる一様な剛体の棒が天井からぶら下がっているとする。天井との接点を支点にして、棒は自由に運動できる。鉛直下向きからの棒の向きのずれの角度を θ とし、鉛直軸の周りに回転運動するときの回転角度を ϕ とする。重力加速度を g とする。以下の間に答えよ。



- (1) まず鉛直軸周りの回転運動が無い場合 ($\dot{\phi} = 0$, \cdot は時間微分) を考える。
 - (a) 変数 θ について、Lagrangian と運動方程式を求めよ。
(ヒント：一つの解き方として、棒の微小部分についての Lagrangian を積分することにより、全体の Lagrangian を求めることもできる。)
 - (b) 棒が鉛直軸 ($\theta = 0$) 付近を微小振動をしている場合に、固有振動数を求めよ。
微小振動であるので、運動方程式において、振動の振幅について 2 次以上の項は無視して考えよ。
- (2) 次に鉛直軸周りの回転運動もあるとする。
 - (a) 変数 θ と ϕ について、Lagrangian と運動方程式を求めよ。
 - (b) 問 (a)において、変数 ϕ の変分により導かれた運動方程式が意味する運動の保存量は何か。
 - (c) 鉛直軸周りの回転運動が一様 ($\dot{\phi}$ が定数) であるときは、等速円運動 (θ が定数) であることを示し、 $\dot{\phi}$ と θ の間の関係を求めよ。
 - (d) 上記のような等速円運動で、鉛直軸からの角度が $\theta = \theta_0$ のものを考える。この等速円運動から微小量だけずれた運動を考えたときに、その微少量のずれの運

動を記述する運動方程式を求めよ。微小量の振幅についての2次以上の項は無視して考えよ。力学変数としては、微少量 h, f を以下のように定義したものを使うこと。

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + h \\ \phi &= \omega_0 t + f\end{aligned}$$

ここで、 ω_0 は問(c)で求めたもので、 θ_0 により表される。(変数 t は時間を表す。)

- (e) 問(d)の運動方程式を解き、微小なずれの時間変化を求めよ。ただし、ずれの時間平均が 0 となるような解を求めるここと。(ずれの時間平均値がある場合、それが 0 となるように元の等速円運動を取り直すことができるので、時間平均を 0 と仮定しても、一般性を失わない。)

I-2(量子力学・静電磁場中の原子のエネルギー) (100点)

全角運動量 $J = 1$ の原子に、静電場 \mathbf{E}_0 及び静磁場 \mathbf{B}_0 を印加した。原子は静電場 \mathbf{E}_0 とシュタルク相互作用

$$\hat{H}_S = -\frac{1}{2}\alpha_0 \mathbf{E}_0^2 - \frac{1}{2}\alpha_2(3(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E}_0)^2 - 2\mathbf{E}_0^2)$$

を、また静磁場 \mathbf{B}_0 とはゼーマン相互作用

$$\hat{H}_Z = -g\mu_B \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{B}_0$$

をする。ここで、 α_0 及び α_2 はスカラー及びテンソル分極率をあらわし、 $\alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0$ とする。また、 g は g 因子、 μ_B はボア磁子をあらわす。また、 $h\hat{\mathbf{J}}$ は原子の角運動量演算子である。

ここでは特に、大きさ E_0 の静電場が z 方向に印加され、大きさ B_0 の静磁場が x 方向に印加されている場合を考える。

- (1) \hat{J}_z の固有状態 $|m_z\rangle (m_z = -1, 0, 1)$ について、 $\hat{J}_z|m_z\rangle = m_z|m_z\rangle$ および、 $\hat{J}_{\pm}|m_z\rangle = \sqrt{(1 \mp m_z)(1 \pm m_z + 1)}|m_z \pm 1\rangle$ が成り立つ。ただし、 $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ である。 $|m_z\rangle$ を基底ベクトルとした \hat{J}_x 、 \hat{J}_y 、および \hat{J}_z の行列表示を求めよ。

まず、原子が静止している場合を考える。

- (2) 原子の 3 つのエネルギー固有値を求めよ。そして、それを静磁場の大きさ B_0 の関数として図示せよ。

次に、原子が一定速度 $\mathbf{v} (|\mathbf{v}| \ll c)$ で運動している場合を考える。このときには相対論的効果から、原子は付加的な磁場 $\mathbf{B}_m = (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_0)/c^2$ を感じるようになる。ただし、 c は光速である。

- (3) 原子が $+y$ 方向に運動しているとして、原子の 3 つのエネルギー固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_{-1}$ を求めよ。ただし、 $|\mathbf{B}_m| \ll B_0$ および $|\alpha_2|E_0^2 \ll g\mu_B B_0$ であり、 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{-1}$ とする。これから、 $\varepsilon_{\pm 1}$ には、原子の運動に起因する項 $\pm \varepsilon_m$ が加わることがわかる。

- (4) この原子の運動によって誘起された波動関数の位相変化 $\phi_{AC} \equiv \varepsilon_m t/h$ はアハラノフキヤッシャー位相と呼ばれ、系の幾何学的配置にのみ依存する。ここで、 t は相互作用時間である。電場の大きさ $E_0 = 10 \text{ kV/cm}$ 、電場の印加されている距離 $L = 25 \text{ mm}$ のときにアハラノフキヤッシャー位相の大きさを求めよ。ただし、 $h = 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $g = 1.0$ 、 $\mu_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/T}$ として計算せよ。

I-3(統計力学・氷のエントロピー) (100点)

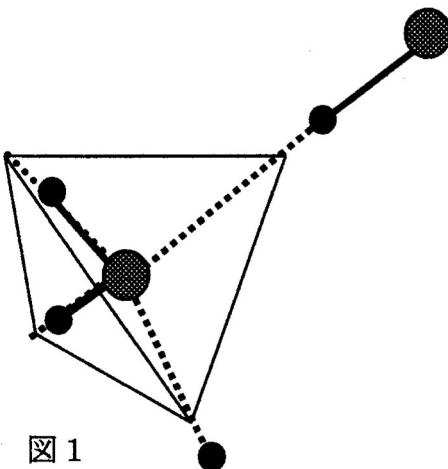


図 1

- (1) 図 1 はある温度・圧力領域における氷の結晶構造の一部を示したものである。正四面体の重心に位置する各酸素（大きな丸印）の周りの水素原子核、すなわち陽子（小さな丸印）は、正四面体の頂点に近い位置を占め、それら正四面体が互いにつながった構造をしている。酸素 - 酸素の各結合軸上に 1 個の陽子があるが、 H_2O 分子を構成するように、各酸素原子の周りの 4 個の陽子のうち、2 個だけがその酸素に近接しており、残りの 2 個は注目する酸素に隣接する酸素の方に近接している。各酸素の周りに陽子 2 個だけが近接している規則をアイス・ルールと呼ぶことにする。

氷を極低温に冷やすと、多くの可能な構造の中の一つの構造をとるが、 H_2O 分子の向きが全く規則的な一義的に決まった原子配置を相当長時間に渡ってとっているわけではない。従って、残留エントロピー $S_0 = k_{\text{B}} \ln W_0$ が存在する。ここで k_{B} はボルツマン定数、 W_0 は極低温で結晶の取りうる原子配置の数である。この残留エントロピーについて、以下で述べる Pauling の方法に基づいて答えよ。なお氷では実際に、この方法で求めた S_0 に極めて近いエントロピーが確認されている。

- (a) 氷 H_2O に含まれる陽子が、酸素 - 酸素の結合軸上の二つの可能な位置（第一の酸素に近い位置と第二の酸素に近い位置）のいずれかをアイス・ルールの制約を受けずに任意に取りうるとすると、氷 1 モルあたり可能な原子配置はいくつあるか、アボガドロ数 N_A を用いて表せ。
- (b) ひとつの OH_4 四面体について、酸素の周りの 4 つの陽子の可能な原子配置のうち、アイス・ルールを満たすものの割合を求めよ。
- (c) 低温における氷 1 モルあたりの残留エントロピー S_0 を見積もるため、アイス・ルールの制約のもとで実現可能な陽子の配置の数 W_0 を考える。Pauling はアイス・ルールを無視した全配置に対し、独立な N_A 個の四面体がすべてアイス・ルールを満たす割合を乗じて W_0 を求めた。この方法で S_0 を求めよ。
- (d) 陽子の配置がアイスルールの制約を受けずに完全に乱雑になった場合のエントロピーを S_1 とする。比 S_0/S_1 を求めよ。またその数値を有効数字 2 桁で答えよ。ただし近似値 $\ln 2 = 0.693$, $\ln 3 = 1.099$ を用いよ。

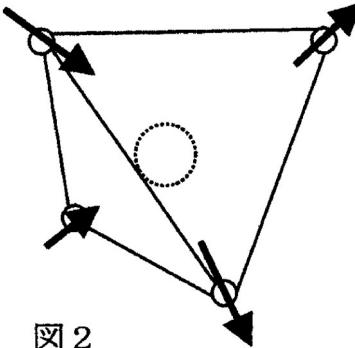


図 2

(2) 図 2 はある磁性体の結晶構造の一部である。頂点を共有してつながった正四面体の各頂点には矢印で示したように磁気モーメント \vec{m} をもつイオン（小さな丸印）がある。また、この磁気モーメントの方向は、正四面体の頂点から重心にある磁性を示さない別のイオン（大きな丸印）に向かう軸方向に限られ、その向きは重心向き（内向き）とその反対（外向き）のいずれかをとる。重心の座標を原点にとると、辺の長さが r の正四面体の頂点の座標は

$$(x, y, z) = \left(\pm \frac{r}{2}, 0, -\frac{r}{2\sqrt{2}} \right), \left(0, \pm \frac{r}{2}, \frac{r}{2\sqrt{2}} \right) \quad (1)$$

と表せる。

さて隣同士の磁気モーメント \vec{m}_1 と \vec{m}_2 の間にのみ、式 (2) のエネルギーで与えられる磁気双極子相互作用が働くものと仮定する。

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{m}_1)(\vec{r} \cdot \vec{m}_2)}{r^2} \right\} \quad (2)$$

ここで μ_0 は真空透磁率、 \vec{r} は磁気イオン \vec{m}_1 の位置から \vec{m}_2 の位置へ向かうベクトルであり、磁気モーメントの大きさは $|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = m$ である。

- (a) $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2$ と $\vec{r} \cdot \vec{m}_1$ をそれぞれ求めよ。
- (b) 隣接する磁気モーメントに対して、内外同じ向き同士と反対向きとのエネルギー差を $2J$ としたとき、 $J(J > 0)$ を求めよ。
- (c) あるひとつの正4面体の頂点を占める4個の磁気モーメントの可能なスピン配列（内3個・外1個 や 内4個・外0個など）に対して、それぞれのエネルギー準位と縮重重度について述べよ。
- (d) 氷の性質とこの磁性体の性質との類似性を論ぜよ。

平成 15 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

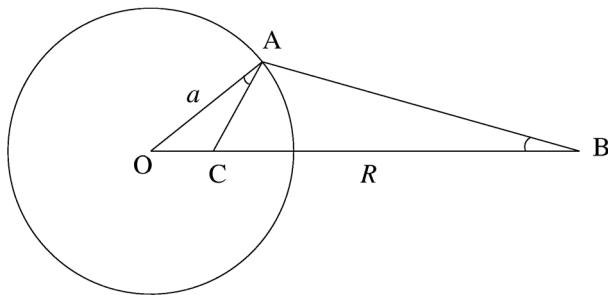
- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1(電磁気学・鏡像法) (100 点)

半径 a の導体球が固定されており、その中心を原点 O とする。この導体球の中心から距離 R だけ離れた点 B に点電荷 Q をおいたとき ($R > a$)、この点電荷が導体球から受ける Coulomb 力 $F(R)$ を求めたい。ただし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) まず、導体球が接地されている場合を考える。距離 R の関数として点電荷にはたらく力 F はどのように変化するか、鏡像法を用いて決定せよ。さらに、 $F(R)$ の定性的なグラフを書け。

(ヒント) 下図において、三角形 OAB と三角形 OCA は相似である。
点 C に鏡像を置くとよい。



- (2) 次に、導体球が接地されておらず、電荷 Q を帶びているとする。

- (a) 球と点電荷の距離 R が球の半径 a よりも非常に大きいときの $F(R)$ の漸近形を予想せよ。
- (b) 鏡像法を用いて、 $F(R)$ を求めよ。
- (c) $F(R)$ のグラフを書け。
- (d) 点電荷が球表面に近づいたとき ($0 < R - a \ll a$) の $F(R)$ の漸近形を答え、その結果を解釈せよ。

II-2(量子力学・可解系) (100 点)

実数値をとる一自由度 x を持つ量子力学系を考える。以下のような特殊なポテンシャルを持つ場合、幾つかの状態について、エネルギー固有値とその対応する固有波動関数をあらわに求めることができる。以下においては、 $\hbar = c = 1$ 、 $p = -i\frac{d}{dx}$ であり、 \dagger はエルミート共役を表し、特に $x^\dagger = x$, $p^\dagger = p$ である。以下の問い合わせに答えよ。

(1) ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$$

におけるポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 + \frac{d^2W(x)}{dx^2} \right)$$

のように、実数値の関数 $W(x)$ を使って上記のような形で与えられるとき、このハミルトニアンは、ある演算子 Q を使って

$$H = \frac{1}{2}Q^\dagger Q \quad (\text{A})$$

の形に表すことができる。 Q が

$$Q = p + if(x)$$

のように、運動量 p と座標 x の実数値関数 $f(x)$ により表されると仮定して、 $f(x)$ を $W(x)$ を用いて表せ。但し、ある $f(x)$ を求めれば十分とし、唯一であるかどうかの議論は不要とする。

(2) ハミルトニアンが (A) のような形を持つと、エネルギー固有値 E を持つ固有状態 $|\psi\rangle$ について、

$$E = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle Q\psi | Q\psi \rangle}{2\langle \psi | \psi \rangle}$$

が成り立つのので、エネルギー固有値 E はゼロまたは正である。基底状態のエネルギー固有値がゼロであると仮定した場合の基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ を求めよ。 $(W(x)$ を使って表せ。)

(3) 基底状態のエネルギーがゼロでないのはどのような場合か、 $W(x)$ に対する条件を答えよ。特に $W(x) = -x^3$ の時は、基底状態のエネルギーはゼロか正か。

(4) ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{2}x^2$$

のとき、これが問(1)のように $W(x)$ を用いて表されることを使って、基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ を求めよ。但し、波動関数の規格化定数は求めなくて良い。(ヒント： $W(x)$ が単項式であると仮定して考えよ。)

(5) 以下では、ポテンシャルが、 N を実数として

$$V_N(x) = \frac{1}{2}x^6 - \left(\frac{3}{2} + 2N\right)x^2$$

で与えられる場合を考える。この場合、 $V_N(x)$ を実数値の関数 $W(x)$ を使って、問(1) にあるような形で表すことができないので、エネルギー固有値と波動関数を求めるには工夫が必要である。

(a) 問(4) で求めた $\psi_0(x)$ を使って、波動関数 $\psi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を

$$\psi_k(x) \equiv x^{2k}\psi_0(x)$$

で定義するとき、ハミルトニアン $H = \frac{1}{2}p^2 + V_N(x)$ について、 $H\psi_k(x)$ を計算し、ハミルトニアンの行列表示の成分 h_{kl}

$$H\psi_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} h_{kl}\psi_l(x)$$

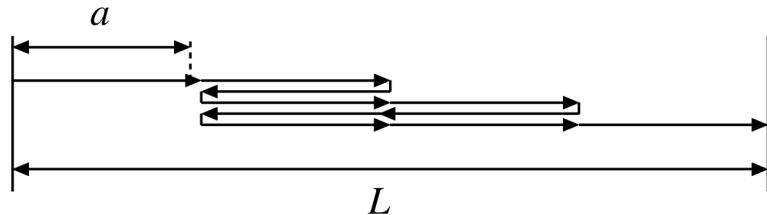
を求めよ。

(b) N が自然数のとき、波動関数 $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$ の線形結合で得られる波動関数全体の線形空間を \mathcal{H}_N と書くことにする。 \mathcal{H}_N の任意の波動関数 $\psi(x) \in \mathcal{H}_N$ について、 $H\psi(x)$ もその元となること ($H\psi(x) \in \mathcal{H}_N$) を、問(a) の結果から示せ。

(c) 問(b) の結果から、ハミルトニアン H は、線形空間 \mathcal{H}_N 内にその作用を限れば、有限行列で表され、エネルギー固有値と波動関数を求める問題は、その有限行列の固有値と固有ベクトルを求める問題となる。 $N = 2$ の場合に、 H の $\mathcal{H}_{N=2}$ 内の波動関数に対するエネルギー固有値と固有波動関数を求めよ。固有波動関数の規格化定数は求めなくて良い。

II-3(統計熱力学・ゴム弾性) (100点)

ゴムひもの性質を統計力学を用いて理解しよう。最も簡単なモデルとして、質量と体積を無視できる長さ a の剛体棒分子 N 個が一直線上につながった高分子鎖を考える。分子と分子の接合角は0度か180度しかとらないものとし、どちらの状態も等しいエネルギーを持つとして以下の問い合わせに答えよ。ボルツマン定数を k_B とする。



- (1) 上図のように剛体棒分子に矢印をつけ（必ず先端と根元で接合する），右向きの矢印のついた分子の数を n_+ ，左向きの数を n_- とする。 N 個の分子で作られる高分子鎖の始端から終端までの長さ L を求めよ。ただし $n_+ \geq n_-$ とする。
- (2) さらにこのときの分子配置の総数 W を求めよ。
- (3) n_+, n_- を L, N, a を使って表せ。(以降の問題では解答に n_+, n_- を用いてはいけない)
- (4) 始端から終端までの長さを L にした場合の鎖のエントロピー $S(L)$ を求めよ。ただし 無次元パラメータ $\frac{L}{Na}$ のみの関数となるように答えを整理すること。 $N, n_+, n_- \gg 1$ として Stirling の公式 ($\log N! \simeq N \log N - N$) を用いよ。
- (5) この高分子鎖が温度 T の熱浴に接している。Helmholtz の自由エネルギー $F(T, L)$ を求めよ。
- (6) 両端距離を L に保持した時の張力 $P(T, L) = \left(\frac{\partial F(T, L)}{\partial L}\right)_T$ を求めよ。
- (7) 張力 $P(T, L)$ の等温線の概略図を描け。
- (8) L を固定して熱浴温度 T を上げると、張力 P は増加するか、それとも減少するか。またその理由を簡潔に述べよ。

現実のゴムの性質をより正確に説明するためには高分子鎖の内部エネルギー E を考慮する必要がある。上のモデルで1分子当たり $k_B T$ の内部エネルギーを持つとすれば $E = Nk_B T$ となり、内部エネルギーは温度だけの関数になる（したがって張力 $P(T, L)$ については問題(6)と同じになる）。

- (9) 上のような内部エネルギー $E = Nk_B T$ を持つ高分子鎖が温度 T_0 の熱浴に接し、 $L = L_0$ の状態にある。この高分子鎖を熱浴から切り離し、 $L = L_1$ まで断熱伸張させた。このとき高分子鎖の温度 T_1 を求めよ。ただし $L_0 < L_1 \ll Na$ である。必要なら Maxwell の関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_L$ を用いてよい。

平成 15 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

(1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。これから 3 問選択せよ。

なお、各問題は以下の通りである。

III-1(電子回路)

III-2(γ 線の測定)

III-3(核スピンの偏極)

III-4(粒子の収束)

III-5(電磁放射)

III-6(物理数学)

III-7(量子力学・光と原子の相互作用)

(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。

(3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1(電子回路) (100 点)

(1) p 型と n 型の 2 つの半導体を接合した一般的な pn 接合ダイオードについて、図 1 のように電圧 V と電流 I を設定した場合の $V - I$ 特性 (横軸 V 、縦軸 I) の概形を描け。

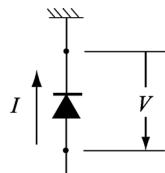


図 1

(2) pnp 型のトランジスターは 2 つの p 型半導体の間に薄い n 型半導体を接合したものである。トランジスターの重要な特徴として電流の増幅作用がある。以下、図 2 のようなトランジスター回路について考察してみよう。

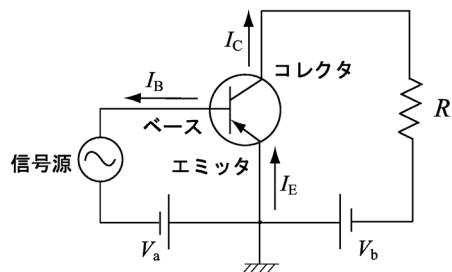


図 2

(a) 今、エミッタ電流 I_E に対するコレクタ電流 I_C の利得を $\alpha = I_C/I_E$ として、

$\beta = I_C/I_B$ を α で表せ。また、 α の値が 1 に近い場合に対して、トランジスターの増幅作用について簡単に記せ。

- (b) コレクタ電流 I_C がベース電流 I_B に比例するようなある動作点で、トランジスターの特性を図 3 のような四端子回路と見なして考えてみよう。

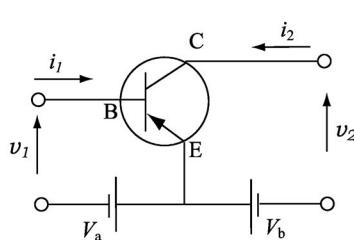


図 3

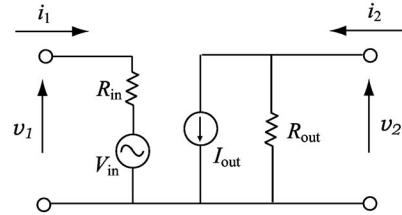


図 4

微小な電流変化 i_1 と微小な電圧変化 v_2 をパラメータとすると微小な電流変化 i_2 と微小な電圧変化 v_1 は、

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2,$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

と表すことができる。図 4 のような等価回路を考えたとき、抵抗 R_{in} 、電圧 V_{in} 、電流 I_{out} 、抵抗 R_{out} 、を h_{11} 、 h_{12} 、 h_{21} 、 h_{22} 、 i_1 、 v_2 で表せ。

- (c) ここで、(b) で考えた四端子回路の入力側に信号源 v_1 と出力側に抵抗 R を接続した場合を考えよう。これは図 2 の回路に相当するものである。このとき、電流利得 i_2/i_1 および電圧利得 v_2/v_1 を h_{11} 、 h_{12} 、 h_{21} 、 h_{22} および R を用いて表せ。
 (d) (c)において最大電力利得を与える抵抗 R を h_{11} 、 h_{12} 、 h_{21} 、 h_{22} を用いて表せ。
 (e) ここで、トランジスターの特性が、

$$h_{11} = 4 \times 10^3 (\Omega), h_{12} = 3 \times 10^{-4}, h_{21} = 5 \times 10^2, h_{22} = 5 \times 10^{-5} (\Omega^{-1})$$
 で与えられた場合、最大電力利得を与える抵抗 R の値を求め、そのときの電圧利得と電流利得を求めよ。

- (3) 下図は、電流、電圧の方向だけが逆で他の特性が等しい PNP と NPN のトランジスターを用いた B 級プッシュプル回路の原理を示したものである。正弦波入力信号に対しての増幅動作を定性的に説明せよ。

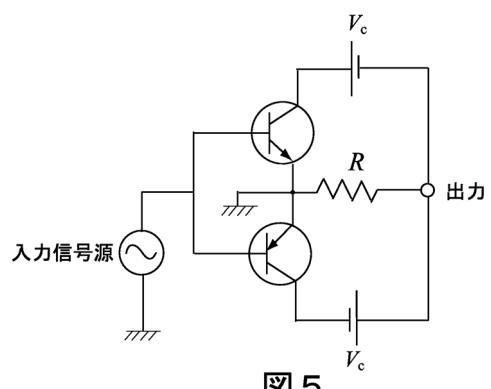


図 5

III-2 (γ 線の測定) (100 点)

- (1) (a) γ 線のエネルギースペクトル測定または時間スペクトル測定をするために必要な検出器を1つ挙げ、その検出器内で起こる γ 線と物質との相互作用について説明せよ。なお、測定対象とする γ 線のエネルギーは数keVから10MeV程度までの範囲で選んでよいが、解答には選んだエネルギー領域と選んだスペクトルの種類(エネルギースペクトルか時間スペクトルか)を記し、エネルギースペクトルの場合にはエネルギー分解能のオーダーを、時間スペクトルの場合には時間分解能のオーダーについても記せ。
- (b) 以下の、放射線測定に用いられる装置のうちから2つを選び、使用する測定例を挙げてその機能について説明せよ。なお、測定例については2つの装置に対して同じでも違っていてもどちらでもよい。
- 前置増幅器 (Preamplifier)
 - 波高弁別器 (Discriminator)
 - TAC(Time-to-Amplitude Converter)
 - TDC(Time-to-Digital Converter)
 - ADC(Amplitude-to-Digital Converter)
 - MCS(Multi Channel Scaler)
- (2) γ 線のエネルギーを微小変化させる方法について考察してみよう。今、真空中の点Aにおいて小型線源から放射される γ 線を考えよう。この地点から距離 x だけ離れたB点の時刻 t における γ 線の電場成分は、振幅を E_0 、角振動数を ω とすると、 $E = E_0 \exp(i\omega(t - x/c))$ であったとしよう。ここで、光速を c とした。
- (a) このA点とB点の間に長さ $L (< x)$ 、屈折率 n の物質を置いてみよう。このときのB点における電場成分は $E = E_0 \exp(i\omega(t - x/c) + i\phi)$ となる。このときの ϕ を求めよ。
- (b) この ϕ を時間変化させることができたとしよう。いま、 $\phi = \omega't$ ($\omega' = d\phi/dt = \text{constant}$)とおくと、B点で観測される γ 線のエネルギーはどれだけか。
- (c) ^{181}Ta の第1励起準位(6.238keV)の半減期は $6.05\mu\text{s}$ である。この準位の自然幅のオーダーを求めよ。
- (d) 6.238 keVの γ 線のエネルギーを $1.0 \times 10^{-10}\text{eV}$ だけ変化させたい。これを実験的に実行するために、上述の位相変化をどのように実現すればよいか述べよ。なお、 $(1 - n) \sim 1 \times 10^{-6}$ であるとせよ。
- (e) (d)で論じた以外の方法で ^{57}Co 線源からの14.4 keVの γ 線のエネルギーを100 neVだけ変化させる実行可能な方法について述べよ。

III-3(核スピンの偏極) (100点)

固体中の高偏極した原子核スピンを用いて興味深い研究が行われてきている。しかし、核スピンを高偏極させるには工夫を要する。以降においては簡単のため核スピンは $1/2$ とする。ここで、磁気回転比を γ とすると、ゼーマン相互作用は $E_Z = -\gamma h m_z B$ とあらわされる。ただし B は z 方向に印加された磁場の大きさをあらわし、 $m_z = \pm 1/2$ はスピン磁気量子数をあらわす。

- (1) 磁場 B 中の核スピンが温度 T_n で熱平衡しているときのスピン偏極率

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

を求めよ。ここで、 N_+ および N_- はスピン磁気量子数 m_z がそれぞれ $+1/2$ および $-1/2$ の状態の存在確率である。ただし、ボルツマン定数を k_B とする。

- (2) 陽子核スピンの場合、磁気回転比 $\gamma_p = 2\pi \times 42\text{MHz}/\text{T}$ である。 $B = 10\text{T}$ 、 $T_n = 2\text{K}$ のときの核スピン偏極率を求めよ。また、磁気回転比 $\gamma_e = -2\pi \times 28\text{GHz}/\text{T}$ の場合にはどうなるか答えよ。この場合は電子スピンに相当する。ただし $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\text{J/K}$ およびプランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}\text{Js}$ として計算せよ。
- (3) (a) 固体の試料を 4K 以下の温度に冷却するには、具体的にどのような方法があるか、またその温度はどのようにして測定することができるか、それぞれ例を挙げよ。
- (b) 5T 以上の磁場を生成するには、具体的にどのような方法があるか、またその磁場の値はどのようにして測定することができるか、それぞれ例を挙げよ。
- (4) 偏極した核スピンの信号を観測するには、核磁気共鳴法(NMR)、放射線の非等方性の測定、メスバウア一分光法など様々な方法がある。1例をとり挙げ、その原理を説明せよ。

このように、上記のような極低温、高磁場中において電子スピンはほぼ完全に偏極しているが、陽子核スピンはほとんど偏極していない。そこで、この電子スピン偏極を陽子核スピンに移行させることを考える。

- (5) 電子スピン1つと陽子核スピン1つの系を考える。高磁場 B においては4つのエネルギー準位に分裂し、磁気双極子相互作用により状態はわずかに混合する(ただし、エネルギーシフトは小さく無視できるとする)。このような状況では電子スピン共鳴(電子スピン間に遷移を起こさせること)のスペクトルが3本観測される。この3本の共鳴周波数を電子の磁気回転比 γ_e 、陽子核の磁気回転比 γ_p 、および磁場 B を用いて答えよ。
- (6) 3本の電子スピン共鳴線のうち、特定の共鳴線のみを励起して飽和させる(上準位と下準位の存在確率を等しくさせる)ことにより電子スピン偏極を陽子核スピンに移行させることができる。電子スピン系は緩和時間が短く常に熱平衡しているとし、また陽子核スピン系の緩和時間は非常に長いとして、これを説明せよ。これは「固体効果」と呼ばれている。

III-4 (力学・粒子の収束)(100 点)

空間の一点で生成され、ばらばらな方向に運動する荷電粒子(電荷 e)を、一つの方向($+z$ 軸)に出来るだけ揃えたい。その方法の一つにソレノイド電磁石を利用する方法が考えられている。(ソレノイド磁石とは、円筒の円の周りに電流を流し、軸方向に一様な磁場を作る電磁石である。)(下図参照)

荷電粒子(電荷 e , 質量 m)の電磁場中での非相対論的運動のラグランジアンは、 \vec{v} を粒子の速度、 \vec{H} を磁場、 \vec{E} を電場、 c を光速とすると、

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi, (\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

で与えられる。

- (1) ラグランジュ方程式をポテンシャル \vec{A}, ϕ を使って書き下せ。(必要ならベクトル解析の公式 $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$ を使って良い)

- (2) 粒子の運動方程式は、

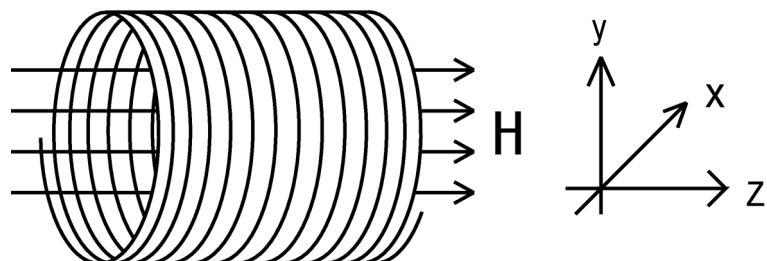
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

で与えられることを示せ。

- (3) 以下ソレノイド磁石の半径は十分大きいと仮定する。いま電場は零、磁場は一様であるとし \vec{H} の方向を z 軸として、 $(v_{0x}, 0, v_{0z})$ の速度成分を持って生成された粒子は、らせん運動をすることを示せ。

- (4) 運動の条件がゆっくり変化するとき、断熱不变量として知られる量は不变である。いま磁場が z 軸の関数として、ゆるやかに(断熱的に)減少するソレノイド磁石を考える。らせん運動において、磁場と垂直な $x-y$ 面での粒子の運動は周期的であるから一つの断熱不变量は、円周にわたってとった積分 $\oint \vec{P}_t \cdot d\vec{r}$, (\vec{P}_t は一般化運動量の $x-y$ 面への射影) である。断熱不变量を v_{0x} と $|\vec{H}|$ の関数として求めよ。

- (5) z 軸に垂直な運動量成分 $(m\sqrt{v_x^2 + v_y^2})$ は、 $+z$ に進むに従い、 $\sqrt{|\vec{H}|}$ に比例して減少することを示せ。また十分強い磁場の領域には粒子が進入できないことを示せ。



III-5(電磁放射) (100点)

ポテンシャル $U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2|\mathbf{x}|^2$ に束縛されて原点付近を運動する電子(質量 m 、電荷 e)からの電磁波の放射について考える。

- (1) 電子が軌道 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ に沿って運動しているとき、時空点 $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$ における電磁場は、次式の Liénard-Wiechert のポテンシャルから求められる。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)]}, \quad (\text{A})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)]}. \quad (\text{B})$$

ここで、 ε_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率、 c は光速 ($\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$)、 $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = d\mathbf{x}(t_0)/dt_0$ であり、 t_0 は

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)|}{c} \quad (\text{C})$$

の解として定まる。以下では、原点から十分離れた点 \mathbf{r} における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を、定義式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{D})$$

から求めたい。ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ である。また、以下では、電子の速度は光速よりも十分に小さいと仮定する。

- (a) 条件 $|\mathbf{x}(t)| \ll |\mathbf{r}|$ 及び $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \ll c$ の下では、 t_0 の \mathbf{r} と t に関する偏微分を

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}, \quad \frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 \quad (\text{E})$$

と近似してよいことを示せ。ここで、 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ である。

- (b) 上式 (E) の近似を用いて、電場と磁場の無限遠での漸近形

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{F})$$

を導け。ここで、 $\ddot{\mathbf{x}} = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ である。

- (c) Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ を用いて、電磁波の放射により電子が単位時間あたりに失うエネルギーが

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{x}}|^2 \quad (\text{G})$$

となることを示せ。

- (2) 上の (1) で計算したように、加速度をもって運動する電子は電磁波を放射することによって力学的エネルギーを失っていく。この電磁波の放射の反作用は、電子の運動方程式に減衰力として取り入れることができる。電子が周期的な運動をしており、

ある時刻 t_1 と t_2 において $\dot{\mathbf{x}}(t_1) = \dot{\mathbf{x}}(t_2) = 0$ をみたすとしよう ($t_1 < t_2$)。このとき、時刻 $t = t_1$ から $t = t_2$ までに減衰力 \mathbf{F} が電子になす仕事と電磁波の放射エネルギーを等しいとおくことにより、減衰力が

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} \quad (\text{H})$$

と書けることを示せ。

(3) (2) で求めた減衰力を含めると、電子の運動方程式は

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x}) + \mathbf{F} \quad (\text{I})$$

となる。電子が時刻 $t = 0$ に $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ あり、 $t > 0$ で減衰振動するとき、運動方程式 (I) の解は

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \quad (t > 0) \quad (\text{J})$$

とおける。 $\gamma \ll \omega_0$ を仮定して、 γ を求めよ。

(4) 式 (J) の運動をする電子は電磁波を放射する。放射されるエネルギーの時間依存性の概形を $t > 0$ の領域で図示せよ。

III-6(物理数学) (100点)

温度分布関数 $T(x, t)$ は、熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

に従って時間発展する ($\kappa > 0, -\infty < x < \infty$)。

- (1) 時刻 $t = 0$ において温度分布が $T(x, 0) = \delta(x)$ のとき、熱伝導方程式を Fourier 変換

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{T}(k, t) e^{ikx}$$

を用いて解け。但し、デルタ関数の Fourier 変換

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

及びガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (2) 初期条件が

$$T(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

で与えられたとき、 $T(x, t)$ を以下の 2通りの方法で求めよう。

- (a) 热伝導方程式は線形であることから、(1)の解を用いて $T(x, t)$ を書き下せ。
 (b) $T(x, t)$ は周期 1 の x の周期関数である。したがって、

$$T(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k(t) e^{2\pi i k x}$$

と Fourier 級数に展開できる。 $T(x, 0)$ も同様に Fourier 展開することにより、 $T(x, t)$ を求めよ。

- (c) 次の恒等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-n)^2}{\tau}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x - \pi^2 k^2 \tau}$$

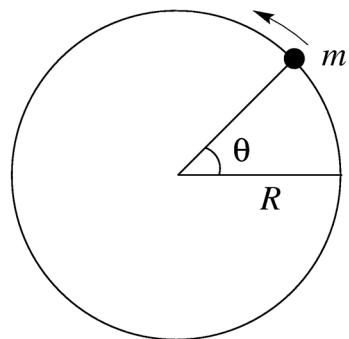
- (3) 半径 R の円周上を運動する質量 m の粒子 (下図参照) は、Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \psi(\theta) = E\psi(\theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

に従う。波動関数 ψ は角度変数 θ の一価関数とする: $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ 。

- (a) この粒子のエネルギー固有値 E_n をすべて求めよ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

- (b) このような粒子の集団が温度 T の熱平衡状態にあるとき、(a) で求めたエネルギー固有値 E_n から分配関数 $Z(T) = \sum_n e^{-E_n/k_B T}$ と自由エネルギー $F(T) = -k_B T \ln Z(T)$ が定義できる。このとき、この系の比熱 $C(T)$ は、 $C = -Td^2F/dT^2$ で与えられる。低温極限 ($k_B T \ll h^2/mR^2$) での比熱の温度依存性と、高温極限 ($k_B T \gg h^2/mR^2$) での比熱の漸近値を求めよ。



III-7(量子力学・光と原子の相互作用) (100点)

单一モードの光(角周波数 ω)と2準位原子(励起状態 $|e\rangle$ 及び基底状態 $|g\rangle$)との相互作用を量子力学的に取り扱う。ただし、励起状態 $|e\rangle$ のエネルギーを $+h\omega_0/2$ 、基底状態 $|g\rangle$ のエネルギーを $-h\omega_0/2$ とし、 $\omega \cong \omega_0$ とする。

まず、单一モードの光について考察する。光のハミルトニアン \hat{H}_F は $\hat{H}_F = h\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ であらわされる。ここで \hat{a}^\dagger および \hat{a} は光子の生成および消滅演算子で、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす。

- (1) 光子数状態 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle (n = 0, 1, 2, \dots)$ がエネルギー固有状態であることを示し、そのエネルギー固有値を求めよ。ただし、 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ で定義される基底状態(真空)をあらわす。

次に原子との相互作用を考える。原子系のハミルトニアン \hat{H}_A は $\hat{H}_A = h\omega_0\hat{S}_z$ であらわされ、また相互作用ハミルトニアン \hat{H}_I は回転波近似のもとでは、 $\hat{H}_I = h\chi(\hat{S}_+ \hat{a} + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger)$ とあらわされる。ここで $\hat{S}_z = \frac{1}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$ 、 $\hat{S}_+ = |e\rangle\langle g|$ 、 $\hat{S}_- = |g\rangle\langle e|$ であり、 χ は実定数で、 $0 \leq \chi \ll \omega$ とする。

- (2) 相互作用のないとき($\chi = 0$)、全系の固有状態は、 \hat{H}_A の固有状態 $|e\rangle$ 及び $|g\rangle$ と \hat{H}_F の固有状態 $|n\rangle$ の直積 $|e, n\rangle \equiv |e\rangle \otimes |n\rangle$ および $|g, n\rangle \equiv |g\rangle \otimes |n\rangle$ となる。
このときのエネルギー固有値をもとめよ。
- (3) 相互作用のあるとき($\chi > 0$)を考える。

- (a) 相互作用ハミルトニアン \hat{H}_I は $|e, n\rangle$ と $|g, n+1\rangle$ の間にのみ遷移振幅をもち、他の状態間ではゼロである。遷移振幅 $\langle e, n | \hat{H}_I | g, n+1 \rangle$ を求めよ。
- (b) 全系のエネルギー固有値を求めよ。そして、特に $\omega_0 = \omega$ のときの固有状態を求め、エネルギー構造を図示せよ。

ここで求めた状態は、原子と光の相互作用をすでに取り入れた状態で、光子の衣を着た状態「ドレスド状態」と呼ばれている。時刻 t での全系の波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ はこのドレスド状態の線形結合であらわされる。

- (4) $\omega_0 = \omega$ の場合を考える。系の初期状態は、 $|\Psi(t=0)\rangle = |e, n\rangle$ とする。この場合の波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。特に、 $n = 0$ (真空)の場合について励起状態 $|e\rangle$ の存在確率 $P_e(t) = |\langle e | \Psi(t) \rangle|^2$ を求めよ。

平成 14 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

I-1 (力学) (100 点)

2つの星の運動を考えよう。この系を2重星系と呼ぼう。2重星系の運動は万有引力に従って運動する2つの質点の運動と同じとみなすことができる。それぞれの星を星1(質量 m_1 , 座標 \mathbf{r}_1), 星2(質量 m_2 , 座標 \mathbf{r}_2)と呼ぶ。

- (1) 万有引力定数を G として、両星間の重力ポテンシャルエネルギー ψ を書け。
- (2) 2重星系のラグランジアン L を書け。
- (3) 慣性中心座標 \mathbf{R} と相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を用いてラグランジアンを書け。
- (4) 慣性中心の運動方程式を導いて解け。
- (5) 相対座標の運動方程式を求めよ。
- (6) 相対運動の軌道は、橢円、放物線または双曲線になることが知られている。今、特別な場合として半径 a の円軌道のとき、角速度 Ω を求めよ。また、相対運動の全エネルギーを求めよ。
- (7) 今、相対運動が円軌道である2重星の片方(星1)が急に爆発して、星の一部が吹っ飛び、質量が m_1 から $m'_1 (< m_1)$ になったとしよう。この後の両星の運動は一般には複雑であるが、次のような簡単化をして考えよう。爆発は、極めて等方で、ほとんど瞬間に起こったので、星1と星2の位置と速度は変わらず、星2の質量も変わらず、星1の質量が減っただけと見なせるとする。また、爆発で飛び散った物質は急速に遠方に遠去だったので、両星に影響をおよぼさない。従って両星の爆発後の運動は万有引力に従って運動する2つの質点の運動とみなすことが再び成り立つとする。
このとき、
 - (a) 爆発後の両星の慣性中心の速度を求めよ。
 - (b) 爆発後の星1、星2の慣性中心に対する相対速度をそれぞれ求めよ。
 - (c) 相対運動のエネルギーを求めて、爆発後に両星が束縛されない条件を求めよ。

I-2 (量子力学 [電子間相互作用]) (100 点)

結晶中の隣接する 2 格子点 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ を考える。今、簡単化して、これらの 2 格子点 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ にある同一原子（水素原子とする）1 と 2 のみを考える。2 つの原子それぞれの最低エネルギーの原子軌道（1s 軌道） $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1), \phi_2(\mathbf{r}) = \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$ を考え、この 2 つの軌道の間の重なり積分は無視できるとする。各原子が孤立している時のハミルトニアンを \mathcal{H}_0 として

$$\mathcal{H}_0\phi_s(\mathbf{r}) = E_0\phi_s(\mathbf{r})$$

であり、 E_0 は 1 原子の最低電子軌道（1s 軌道）のエネルギーである。ハミルトニアンの遷移行列要素 $\mathcal{H}_{12}, \mathcal{H}_{21}$ は

$$\mathcal{H}_{21}\phi_1(\mathbf{r}) = -t\phi_2(\mathbf{r}) \quad (\text{A})$$

$$\mathcal{H}_{12}\phi_2(\mathbf{r}) = -t\phi_1(\mathbf{r}) \quad (\text{B})$$

とし、電子がこの行列要素 $-t(t > 0)$ で格子点を移動する。以下の間に答えよ。

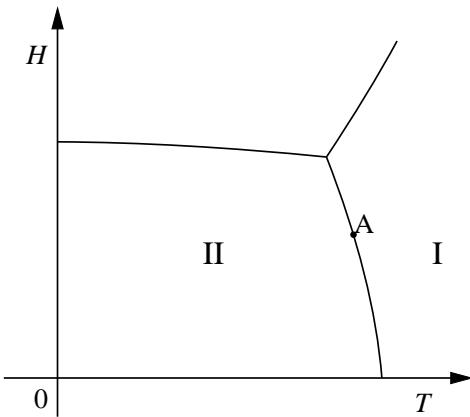
ただし、2 電子を詰めたときは常にスピン一重項状態（singlet 状態）にあるとする。そのスピン波動関数は $\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$ と表される。ここで、 α, β はそれぞれ上向き、下向きのスピン状態、1, 2 は電子を表す。

- (1) (a) 原子軌道 ϕ_1 と ϕ_2 の間に式 (A), (B) の遷移行列 $-t$ が働いた時の 2 つの 1 電子軌道とその固有エネルギーを求めよ。この 1 電子軌道は H_2^+ の 1 電子軌道に対応する。
(b) 2 原子の系に 2 電子 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ が存在するとする。前問 (a) で得られた低い方の 1 電子状態に、上向きと下向きのスピンを持つ 2 電子を独立に詰めたスピン一重項状態の軌道部分の波動関数を問 (a) の結果を利用して書け。この状態は原子が正負に分極した状態と中性の状態が等確率で現れることを示していることを説明せよ。
 - (2) 現実には問 (1) で考えた場合とは異なり、電子は互いに独立ではなく、同じ格子点の原子に 2 個の電子が来るとクーロン反発のエネルギー U だけエネルギーが上がる。今、 $U \neq 0$ とし、しかし、簡単のために $t = 0$ として次の (a), (b) の場合のスピン一重項の 2 電子波動関数とそのエネルギーを示せ。ただし、異なる格子点上にある電子間のクーロン斥力は無視できるとする。
 - (a) 2 個の電子 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ がそれぞれ異なる原子の軌道に 1 個ずつ分かれて詰まり、原子が中性である時。
 - (b) 2 個の電子 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ がどちらかの同じ原子の軌道に詰まり、原子が正と負に分極している時。
 - (3) 問 (2) の状態に $-t$ がゼロでないとして電子の移動を許し、しかも電子間のクーロン相互作用 U が働いた時の基底状態であるスピン一重項の固有関数とエネルギーを求めよ。
- ヒント：問 (2)(a) と問 (2)(b) の状態の波動関数の線形結合を考えエネルギーを最小にする。

I-3 (熱力学) (100 点)

磁化 M を持つ磁性体が磁場 H の中にある。一般に磁性体の内部エネルギーの微小変化は、温度を T 、エントロピーを S 、圧力を P 、体積を V として、 $dU = TdS + HdM - PdV$ と書ける。ここでは固体を考え、体積変化は小さいとして無視する。この場合、内部エネルギーの微小変化は $dU = TdS + HdM$ となる。以下の間に答えよ。

- (1) (a) $F = U - TS$ で定義される Helmholtz の自由エネルギーの微小変化を求めよ。
 (b) 独立変数が T と M の場合、Maxwell の関係式 $(\partial H / \partial T)_M = -(\partial S / \partial M)_T$ が成り立つことを示せ。
- (2) 一般に常磁性体は高温でキュリー則を満たす。 $M = (a/T)H$ ($a : a > 0$ である定数) とし、キュリー則を満たす磁性体の内部エネルギー U と M 一定での熱容量 C_M が M に依存しないことを示せ。(独立変数として T と M を用いよ)
- (3) 簡単のため $C_M = b/T^2$ ($b : b > 0$ である定数) と仮定しよう。系のエントロピー、Helmholtz の自由エネルギー F 、 H 一定での熱容量 C_H 、断熱帶磁率 χ_S を求めよ。ただし、 $T = T_0$ で $S = S_0$ 、 $F = F_0$ とする。
- (4) いま、上記の系が外部磁場 H_0 の中にあり、 $T = T_0$ であるとする。断熱的に外部磁場をゼロにした時、温度はいくらになるか。
- (5) 通常、常磁性体は低温でスピンが整列した秩序相に転移する。下図のような相図が得られているものとする。いま点 A は 2 相の共存曲線上にあるとする。
 - (a) Gibbs の自由エネルギーを $G = U - TS - HM$ と定義する。共存曲線上を動く限り 2 相の Gibbs の自由エネルギーの微小変化 dG は一致していかなければならない。いま点 A の近傍で相 I、相 II がそれぞれエントロピー S_I 、 S_{II} 、磁化 M_I 、 M_{II} を持っているとする。 dH/dT を S_I, S_{II}, M_I, M_{II} を用いて表せ。(Clausius-Clapeyron の式)
 - (b) 図中の点 A において 1 次の相転移をするとし、 $S_I > S_{II}$ であるとする。 M_I と M_{II} はどのような関係にあるかを示せ。



平成 14 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1 (電磁波) (100 点)

一様な電離層および導体内における電磁波の伝播について考えよう。

まず始めに空気分子がイオンと電子に分離している電離層での電磁波の振る舞いについて考える。いま電子の密度を N , 電荷を $-e$, 質量を m として高周波電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ によって電子だけが動きうるとする。また、電子とイオンの衝突は考えない。

- (1) 電磁場内での電子の運動方程式を書け。この時電子の速度が光速 c にくらべて充分小さい時は、電磁波の高周波磁場 \mathbf{B} による項が無視できることを示せ。
- (2) 電子の運動によって生ずる電流密度を $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ で表したときの電気伝導率 σ を求めよ。
- (3) 空間電荷密度はゼロとしたとき、Maxwell 方程式

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

から \mathbf{E} にたいして次の方程式が成立することを示せ。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

- (4) 電離層内を z 方向に伝播する電磁波を $E_x(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ として、この電磁波の分散関係式

$$k^2 = (\omega^2/c^2)\gamma \tag{A}$$

を導き、 γ を求めよ。 γ が 0 となる周波数 ω_p (プラズマ周波数) を導き、電離層に対して電磁波はこの周波数の前後でどう振舞うか述べよ。

次に電子密度 n の導体内での電磁波の伝播について考えよう。導体内の電子は物質中の欠陥と衝突することによって速度に比例する抵抗を受ける。電子が散乱されることなく自由運動できる時間 (緩和時間) を τ とすると、電子の速度を \mathbf{v} として、外力 \mathbf{F} のもとでの電子の運動方程式は

$$\mathbf{F} = m(d/dt + 1/\tau)\mathbf{v} \tag{B}$$

で与えられる。

- (5) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ の電場によって電子が駆動され、電流密度 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-i\omega t}$ が得られたとしてこのときの電気伝導率 σ ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) を求めよ。

- (6) 導体に対して式 (A) を適用し, $\omega\tau \gg 1$ のとき, この導体のプラズマ周波数 ω_p より高い周波数の電磁波は導体中を伝播することを示せ。ただし, $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ とする。

次にこの導体に強い静磁場 \mathbf{B}_0 ($\omega_c\tau \gg 1$, $\omega_c = eB_0/m$) が z 方向にかけられている場合を考えよう。

- (7) 式 (B) をもとに, 円偏光した電磁波の高周波電場 ($E_x = E_0e^{-i\omega t}$, $E_y = iE_x$) における電流密度 J_x を ω_c を使って表し, 電気伝導率 $\sigma_x = J_x/E_x$ を導け。
- (8) z 方向に伝播する円偏光電磁波 ($E_x = E_0e^{i(kz-\omega t)}$, $E_y = iE_x$) について式 (A) を適用すると, $\omega \ll \omega_c$ のとき電磁波が導体内を伝わることを示せ。また, $\omega_c < \omega_p$ のとき, その位相速度を求めよ。この電磁波はヘリコン波と呼ばれる。

II-2(統計力学) (100 点)

- (1) 非常に多くの N 個の相互作用の無視できる粒子からなる系を考える。各粒子は、独立に基底状態(エネルギー 0), または励起状態(エネルギー ε)のいずれかの状態をとることができる。この粒子系が熱源(温度 T)と接触し、熱平衡状態にあるものとする。この粒子系について、粒子数一定として以下の問い合わせよ。
- 分配関数 Z を求めよ。
 - 内部エネルギー U を求めよ。
 - 熱容量 C を求めよ。また、高温の極限($T \gg \varepsilon/k_B$)と低温の極限($T \ll \varepsilon/k_B$)における熱容量を求めよ。ここで、 k_B はボルツマン定数である。この結果をもとに、熱容量の温度に対する変化の概略をグラフに示せ。
 - エントロピーを温度 T の関数として求めよ。
- (2) 非常に多くの総数 N 個の相互作用の無視できる粒子からなる系を考える。個々の粒子の運動として許される量子状態をエネルギーの等しいグループに分け、 j 番目のグループに含まれる状態の数を $c_j(\gg 1)$, その状態にある粒子数を $n_j(\gg 1)$, エネルギーを ε_j , 全系のエネルギーを E とする。粒子系がフェルミ粒子、ボース粒子の場合について、それぞれ以下の問い合わせよ。
- j 番目のグループに含まれる状態の数 c_j , その状態にある粒子数 n_j , を用いて、このグループにおいて統計的に許される場合の数 W_j を求めよ。また、それぞれのグループが独立した系と見なすことから、全粒子系の統計的に許される場合の数 W を求めよ。
 - スターリングの近似式($N \gg 1$ のとき $\log_e N! \approx N \log_e N - N$)を用いて、問(2)(a)の結果から全粒子系のエントロピー S を求めよ。
 - j 番目のグループに含まれる状態にある粒子の平均数 $\langle n_j \rangle = n_j/c_j$ を導入して、問(2)(b)で求めた全粒子系のエントロピー S を c_j と $\langle n_j \rangle$ の関数として表した上で、全粒子系にある粒子の総数 N と全系のエネルギー E が一定であるという条件の下で、エントロピー S が極大値をとるような $\langle n_j \rangle$ を求めよ。ただし、ラグランジエの未定定数法を用いよ。その際、未定定数は体積一定のもとでの熱力学的恒等式 $TdS = dE - \mu dN$ から定めよ。ここで T は温度、 μ は化学ポテンシャルである。

II-3(量子力学) (100 点)

磁場中にある水素原子を考えよう。水素原子は陽子1個と電子1個からなる。陽子、電子共に大きさ $1/2$ のスピンを持っている。そのため磁場中にある場合、そのエネルギー準位は磁場の大きさや陽子、電子のスピン状態に依存する。以下、水素原子の波動関数のスピン部分のみについて考えることとし、 \mathbf{S} , \mathbf{I} をそれぞれ電子と陽子のスピン演算子としよう。 \hat{S}_x , \hat{I}_x 等は各演算子の x 方向成分等を表すものとする。以下の問い合わせに答えよ。

- (1) (a) $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$, $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$ と定義する。これらと \hat{S}_z との交換関係から \hat{S}_+ と \hat{S}_- が昇降演算子であることを示せ。
 (b) $\hat{S}_+|S, S_z\rangle$, $\hat{S}_-|S, S_z\rangle$ の演算結果を示せ。ただし $|S, S_z\rangle$ は $\mathbf{S}^2|S, S_z\rangle = S(S+1)|S, S_z\rangle$, $\hat{S}_z|S, S_z\rangle = S_z|S, S_z\rangle$ を満たす状態である。
- (2) 水素原子の状態を電子スピンの z 成分 S_z と陽子スピンの z 成分 I_z を用いて $|S_z, I_z\rangle$ と表そう。 S_z , I_z はそれぞれ $\pm 1/2$ をとりうるので、合計4つの状態が存在する。 $S_z = \pm 1/2$ のそれぞれについて $\hat{S}_x|S_z, I_z\rangle$, $\hat{S}_y|S_z, I_z\rangle$ を求めよ。
- (3) 磁場 \mathbf{B} 中にある水素原子のスピン部分のハミルトニアンは $\mathcal{H} = -(g_e\mu_B\mathbf{S} + g_p\mu_N\mathbf{I}) \cdot \mathbf{B} + \alpha\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$ と書ける。ここに g_e , g_p はそれぞれ電子、陽子の g 因子を、 μ_B , μ_N はボア磁子と核磁子を、 α は微細構造定数を表す。簡略化のために $|1\rangle = |1/2, 1/2\rangle$, $|2\rangle = |1/2, -1/2\rangle$, $|3\rangle = |-1/2, 1/2\rangle$, $|4\rangle = |-1/2, -1/2\rangle$ とおこう。また、以下の解答では $\mu_{\pm} = g_e\mu_B \pm g_p\mu_N$ を用いて表せ。
 - (a) $|i\rangle (i = 1, 2, 3, 4)$ に対して、 $\mathcal{H}|i\rangle$ を計算せよ。
 - (b) (a)より $|1\rangle$, $|4\rangle$ は \mathcal{H} の固有状態であり、残りの2個はそれらの線形結合が固有状態となる。エネルギーの固有値を求めよ。
 - (c) 各エネルギー固有値に対応する固有状態を求めよ。
 (線形結合のものは $\sin\theta|2\rangle + \cos\theta|3\rangle$ と表し、 θ に関する条件を示せばよい)
- (4) 問(3)(b)で求めたエネルギー固有値を磁場 B の関数としてその概略を図示せよ。ただし、 $g_e\mu_B \gg g_p\mu_N$ である。

平成 14 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

(1) 問題は III-1 から III-6 まで 6 問ある。これから 3 問選択せよ。

なお、各問題は以下の通りである。

III-1(電磁気・電子回路)

III-2(統計力学 [Bose 凝縮])

III-3(超伝導 [磁場侵入])

III-4(特殊相対論)

III-5(不安定核)

III-6(原子核の検出)

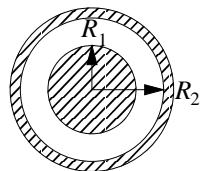
(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。

(3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

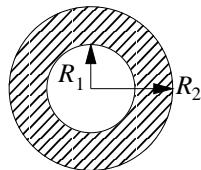
III-1 (電磁気・電子回路) (100 点)

以下の電磁気・電子回路に関する基本的な問題に回答せよ。

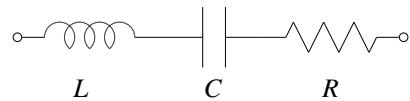
- (1) 電荷が導体表面に一様に分布するとし、Gauss の法則を利用して無限長の同軸型コンデンサーの単位長さ当たりの容量を求めよ。ただし、内導体の半径を R_1 、円筒の中心より外導体の内表面までの距離を R_2 ($R_1 < R_2$) とする。絶縁体部の誘電率は ϵ とする。



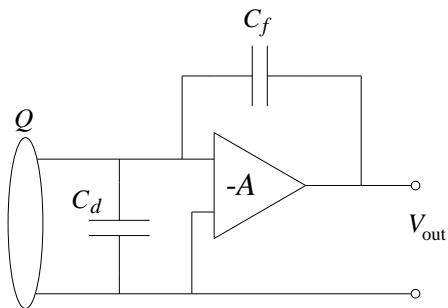
- (2) 内半径 R_1 、外半径 R_2 ($R_1 < R_2$) の無限長の円筒パイプ状導線に一様な密度 i で電流が流れているとする。円筒パイプ状導線の中心からの距離を r としたとき、 $0 \leq r < R_1$ 、 $R_1 \leq r < R_2$ 、 $R_2 \leq r$ での磁場を導け。



- (3) 下図のような自己インダクタンス L 、コンデンサー C 、抵抗 R を直列につないだ回路があり、電流 I が流れているとする。但し、変位電流は無視できるものとする。



- (a) L , C , R の各素子の端子間に現れる電圧 V_L , V_C , V_R を示せ。
- (b) 時刻 t において, LCR 回路の両端を短絡し, $V_L + V_C + V_R = 0$ としたときに成り立つ電荷 $Q(t)$ に関する2階の微分方程式を導き, その一般解を求めよ。
- (c) LCR 回路の両端を短絡したとき, 電荷 Q が有限値であったとして, Q が振動的に変化するための条件を導け。
- (4) 下図のような演算増幅器（オペアンプ）を用いた電荷増幅器で, 検出器に発生した微弱な電荷 Q を測定したい。 Q と出力電圧 V_{out} の関係式をオペアンプの増幅度 $-A$, 検出器を含むオペアンプの入力容量 C_d , 帰還容量 C_f を使って求め, さらに A が十分大きいとき ($A \gg (C_d + C_f)/C_f$) の近似式を求めよ。時刻 t_1 , t_2 にそれぞれ Q_1 , Q_2 の電荷が発生したときの出力電圧波形を図示せよ。



III-2 (統計力学 [Bose 凝縮]) (100 点)

- (1) Bose 統計に従う気体を考える。 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$, $a_{\mathbf{p}}$ を運動量 \mathbf{p} を持つ状態の生成・消滅演算子とし、次のように場の演算子を定義する。ここに V は系の体積である。

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} a_{\mathbf{p}}, \quad \psi^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

場の演算子の交換関係、 $[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')] = [\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ であり、有限サイズの空間では $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ である。

- (2) 数演算子は $\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ と定義される。

- (a) \hat{N} を場の演算子を用いて表せ。また $[\hat{N}, \psi(\mathbf{r})]$ を求めよ。
 (b) $|N\rangle$ を粒子数 N の状態とする。 $(\hat{N}|N_0\rangle = N_0|N_0\rangle)$
 $\psi(\mathbf{r})|N_0\rangle$ が粒子数 $N_0 - 1$ の状態となることを示せ。またそのノルムを求めよ。

- (3) Bose 気体は低温で Bose-Einstein 凝縮をおこす。そこではマクロな数の原子が同じ位相を持つコヒーレント状態(凝縮相)を形成し、残りは熱的に励起された状態で記述される。そこでは通常ゼロである場の演算子 $\psi(\mathbf{r})$ の平均 $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle N | \psi(\mathbf{r}) | N \rangle$ が、有限の値をもつようになる。この $\Psi(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$ はコヒーレント状態を特徴づける秩序変数と考えられる。いまコヒーレント状態を粒子数 N_0 , 位相 φ の状態とし、 $|N_0, \varphi\rangle$ と書く。 $|N_0, \varphi\rangle$ を、粒子数 $|N_0 + \nu\rangle$ の状態を位相 φ で重ね合わせたもので表す。

$$|N_0, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Delta N_0 + 1}} \sum_{\nu=-\Delta N_0}^{\Delta N_0} e^{i\varphi\nu} |N_0 + \nu\rangle$$

この状態は平均値のまわりに $2\Delta N_0$ の幅を持ってゆらいでいる。

この状態 $|N_0, \varphi\rangle$ を用いると、 $\Psi(\mathbf{r}) = \langle N_0, \varphi | \psi(\mathbf{r}) | N_0, \varphi \rangle \simeq \sqrt{n_0} e^{i\varphi}$ となることを示せ。ただし $n_0 = N_0/V$ であり $N_0 \gg \Delta N_0, \nu$ とせよ。

- (4) (3) で与えられる凝縮相は決まった位相 φ を持っている。2つの異なる位相を持つ状態 $|N_0, \varphi\rangle$ と $|N_0, \varphi'\rangle$ は直交していることを示せ。ただし $\Delta N_0 \simeq \sqrt{N_0} \sim \infty$ と考えてよい。

- (5) n_0 と φ が緩やかに空間変化していると考え、凝縮体の運動量密度を以下のように定義する。

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

\mathbf{j} は位相の空間変化で表せることを示せ。また凝縮相はある速度 \mathbf{v}_s をもって流れている。凝縮相を形成している粒子の質量を m として \mathbf{v}_s を求めよ。

- (6) 流体が単連結領域にある時, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ であり \mathbf{v}_s の閉じた経路に沿った循環はゼロある。しかし, 非凝縮相に渦などの多重連結領域がある場合は有限の値を取る。秩序変数の一価性より, 渦周りの \mathbf{v}_s の循環 $\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s}$ が量子化されていることを示せ。また $m = 6.63 \times 10^{-27}[\text{kg}]$ としたときの渦量子の大きさを計算せよ。ただし $h = 6.62 \times 10^{-34}[\text{J}\cdot\text{s}]$ とせよ。

III-3 (超伝導 [磁場侵入]) (100 点)

散乱されない電子が超伝導を担うと考えると、有効質量、有効電荷、速度をそれぞれ m^* , e^* , \mathbf{v}_s とする超伝導電子は、電場 \mathbf{E} の下で抵抗なしに加速されるので、

$$m^* \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = e^* \mathbf{E}$$

なる関係を満たすことが期待される。このとき超伝導電子密度を n_s とすると、超伝導電流 $\mathbf{J}_s = e^* n_s \mathbf{v}_s$ について、 $\Lambda_L = m^* / n_s e^{*2}$ として次の式が成り立つ、

$$\frac{\partial (\Lambda_L \mathbf{J}_s)}{\partial t} = \mathbf{E} . \quad (\text{A})$$

磁束密度 \mathbf{B} についての Maxwell の式

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と式 (A) より

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\Lambda_L \mathbf{J}_s) + \mathbf{B}] = 0 \quad (\text{B})$$

となるが、超伝導体は磁束を排斥するので内部では $\mathbf{B} = 0$ になるという Meissner 効果を考慮して、式 (B) にかかる積分定数は 0 と考え

$$\Lambda_L \nabla \times \mathbf{J}_s + \mathbf{B} = 0 \quad (\text{C})$$

としよう。この式をもとに以下の間に答えよ。

- (1) μ_0 を透磁率、 \mathbf{J} を物質中の全電流密度としたとき

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

なる関係が成り立つが、 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$ (物質中に流れる電流は超伝導電流 \mathbf{J}_s だけである) とし、式 (C) が成り立つときの \mathbf{B} の位置座標に関する 2 階の偏微分方程式を導け。

- (2) z 軸方向を向く一様な外部磁場 H_e 中に、 yz 面に平行な無限に広い面を持つ厚さ $2a$ の板状超伝導体があるとき、板の両面が $x = \pm a$ にあるとして問 (1) で導いた偏微分方程式を基に \mathbf{B} と \mathbf{J}_s を求めよ。さらに $\lambda_L = \sqrt{\Lambda_L / \mu_0}$ がほぼ板の厚さに等しいとき、その x 依存性を略図で示せ。
- (3) 超伝導体は外部磁場 H_e が臨界磁場 H_c に達したとき、常伝導に転移する。 $a \gg \lambda_L$ ならびに $a \ll \lambda_L$ の 2 つの場合について $H_e = H_c$ のときの板の表面における電流密度を求めよ。

- (4) λ_L は超伝導体への磁場侵入長と呼ばれる。その測定法を一つあげて、その考え方を説明せよ。

III-4 (特殊相対論) (100 点)

静止質量 m_1 と m_2 の 2 つの小球 1 と小球 2 がある。原点にこの小球をいろいろな速度で射出する装置があるとする。射出されたとき、小球の内部エネルギーはゼロとみなして良いとする。さて、時刻 $t = t_1$ に射出装置が小球 1 を x 軸の正の方向に速度 $v_1 > 0$ で射出した。次に時刻 $t = t_2 > t_1$ に小球 2 をやはり x 軸の正の方向に今度は速度 $v_2 > v_1$ で射出した。小球 2 は、小球 1 に追いついて衝突する。一般には衝突は複雑だが、簡単のため、衝突後、2 つの小球は合体して、 x 軸の正の方向に進みはじめたとしよう。

まず、非相対論近似（ニュートン力学）で以下の問い合わせに答えなさい。

- (1) 合体した小球の速度 v_m と内部エネルギー ϵ を求めよ。
- (2) 運動エネルギーの最高何%が内部エネルギーに変換され得るかを $m_1 = m_2 = m$ の時に求めよ。

さて、これからは v_1, v_2 が極めて光速に近く、相対論を考慮に入れなければならない場合を考えよう。

- (3) 速度の代りに、速度を光速 c で割った $\beta = v/c$ を使うのが慣習である。さらに β が極めて 1 に近い場合には γ - factor ($\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$) を使った方が便利である。 $\gamma \gg 1$ の場合、 β を γ^{-2} のオーダーまで近似的に表せ。
- (4) 合体後の 2 つの小球の速度 v_m で動く系では、合体した小球のエネルギーは $m_1 c^2 + m_2 c^2 + \epsilon$ である。ここで、 ϵ は衝突で発生した内部エネルギーである。ローレンツ変換をして、実験室系でのエネルギーと運動量を求めよ。ここで $\beta_m = v_m/c$ 、また、合体した小球の γ - factor を γ_m とせよ。
- (5) 小球 1 と 2 の γ - factor を $\gamma_1 \gg 1, \gamma_2 \gg 1$ として、 γ_m と ϵ を求めよ。ただし、簡単のため $m_1 = m_2 = m$ とし、問(3)で求めた β の近似式を使うこと。
- (6) 相対論的な場合、運動エネルギーの最高何%が内部エネルギーに変換され得るかを $m_1 = m_2 = m$ の時に求めよ。
- (7) さて、合体した小球は、温度が上昇したので、速度 v_m で動く系では等方に 1keV の X 線を放射し始めた。 $\gamma_m = 10^3$ として、速度 v_m で動く系で x' 軸の正の方向から
 - (a) $\pi/2$,
 - (b) $3\pi/4$の角度で放射された X 線はそれぞれ実験室系で、どのような方向、エネルギーを持った放射として観測されるか有効数字 2 衔で答えなさい。

III-5 (不安定核) (100 点)

加速器または原子炉を用いて未知の不安定核種を製造し、その核種を同定する実験を行った。生成された放射性試料を同位体分離法により、質量別に集めて質量数を決定し、 $\beta - \gamma$ 核分光法により、核種を決定したい。以下の問い合わせに答えよ。

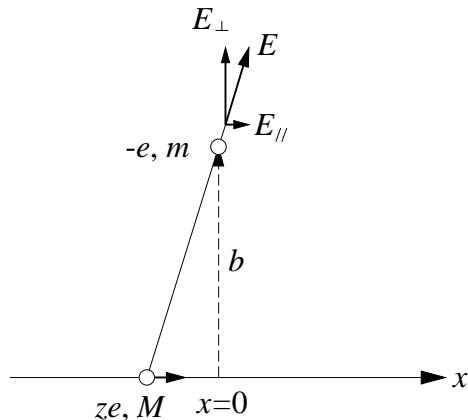
- (1) ある不安定核種の生成断面積を σ [barn]、その半減期を τ [s] とする。中性子束 ϕ [n/cm²/s] で質量数 A の試料を重さ M [g]、時間 t [s] だけ照射した直後のその不安定核種の生成量はどれだけか。
- (2) 同位体分離法では、イオン源によりイオン化した後、静電加速し、分析電磁石により質量分離を行う。正1価のイオンを $E = 50\text{keV}$ に加速した後、セクタ型均一磁場で曲率半径 $\rho = 1\text{m}$ の軌道上を偏向させ、スリットで選んで取出したところ、 $B = 0.3\text{T}$ の磁場の強さのところで放射能が観測された。この核種の質量数を求める式とその数値を求めよ。ただし、1原子質量単位 $M_u = 930 \text{ MeV}/c^2$ 、光速度 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。
- (3) 集められた不安定核（親核）は β 崩壊し、多くの場合娘核は励起状態になり γ 崩壊する。その特性 X 線及び γ 線のエネルギー・スペクトルを精度よく測定して娘核を同定し、未知核種（親核）の原子番号を決定する。このためにはどのような検出器がよいか。例を1つあげて、その動作原理と予想されるエネルギー・スペクトルの概略を図示せよ。ただし、 γ 線のエネルギーは 1 MeV 以下とする。
- (4) この不安定核（親核）からの β 線のエネルギー・スペクトルを β 線検出器で測定し、娘核の質量が精密に知られているとして親核の質量を精密に決定したい。但しニュートリノの質量はゼロとし、娘核の基底状態への β^- 崩壊が許されているとする。
 - (a) β^- 崩壊において β^- 線のエネルギーが最大となる時の β^- 線、娘核およびニュートリノのそれぞれの状態を説明せよ。
 - (b) 娘核の質量を M_d としたとき、 β^- 線の最大運動エネルギー E_β^{max} を用いて親核の質量を求める式を導け。
 - (c) 1種類の β^- 線が含まれる場合のエネルギー・スペクトルの概略を図示し、なぜそのようになるかその理由を説明せよ。
- (5) 未知核種の半減期を測定したい。放射性崩壊を表す式を導き、半減期の測定方法について説明せよ。

III-6 (原子核の検出) (100 点)

素粒子原子核反応で放出される高速の原子核(非相対論的取り扱いでよい)の検出を考える。この原子核の原子番号を z 、質量を M 、速度を v とする。電子の電荷は $-e$ 、質量は m とする。高速の原子核が物質に入射すると、入射原子核が物質原子と衝突し、原子の励起や電離を起こすことによりエネルギーを失う。

ここでは原子の電子励起によるエネルギーの移行を古典的に考える。

まず、下図のように荷電粒子が x 軸上に入射され、 x 軸から b の距離($x = 0$)に電子が1個あるとする。電子は最初停止していて、クーロン力による衝撃を短時間受けた直後も位置を変えないとし、電子へのエネルギー移行は小さくて非相対論的取り扱いでよいとする。また入射原子核の軌道は衝突によって変わらないで直進すると考える。 b が非常に大きくなると衝撃が短時間とは言えなくなるのでその最大値を b_{max} とする。 b が0付近では反跳等を無視できないので最小値を b_{min} と定義する。以下では b_{min} と b_{max} との間で考える。



- (1) この衝突において原子核の位置を x とした時に電子が受ける電場の x 軸と垂直方向の成分 E_{\perp} を示せ。
- (2) この衝突により電子が受けとる運動量(変化分) $\Delta p(b)$ を z 、 v 、 b を用いて表せ。
- (3) この衝突により電子が受けとるエネルギー $\Delta T(b)$ を示せ。

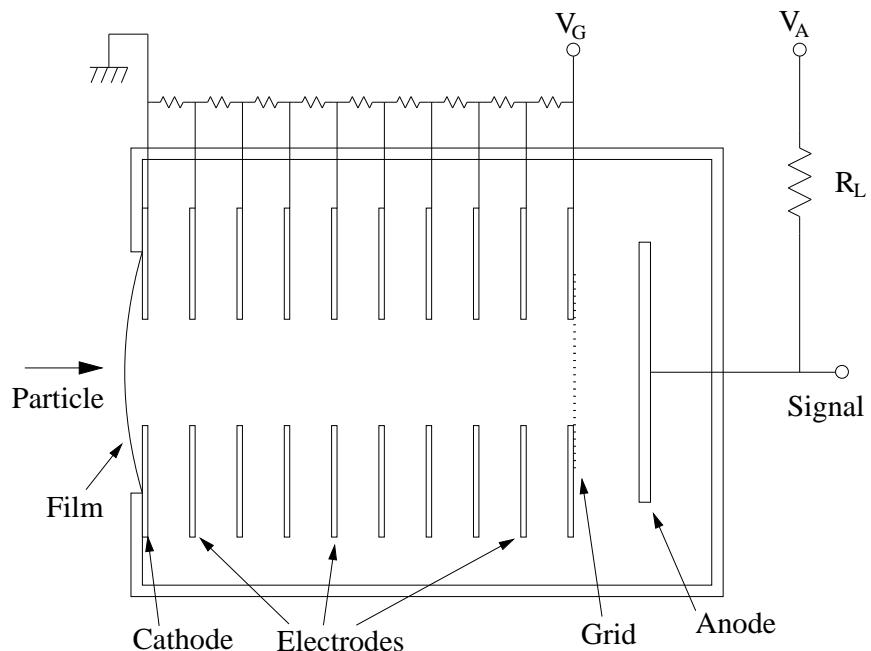
ここで、物質中のエネルギー移行を評価する。物質の原子番号を Z 、原子量を A 、質量密度を ρ とし、 b_{min} から b_{max} のみがエネルギー移行に寄与するとする。アボガドロ定数は N_A とする。

- (4) 入射原子核の単位長さあたりのエネルギー損失 $-dT/dx$ を z 、 v を用いて表せ。
- (5) 原子核の入射時の運動エネルギーを T として、物質中で停止するまでの距離 R は T のどのような関数になるかを示せ。ただし問(4)で求めた $-dT/dx$ は極く低いエネルギーでは成り立たないが、距離 R に与える効果は小さいので、これを近似的に用いて良い。

次に高速の原子核がガス中を通過すると原子の励起や電離を起こし、飛跡に沿って陽イオンと自由電子を生成する。これらイオンと電子を一様な電場で集め、初期のイオンと電子の分布を得て、原子核を検出することを考える。

検出器はアルゴン・メタン混合ガスを充填した電離箱の一種で、その構造を下図に示す。入口の薄膜(Film)を通して原子核は入射される。入口の陰極(Cathode)は接地され、正の高電圧(V_G)がかかった格子(Grid)により、生成された電子を集め。陰極と格子の間に有感領域となっていて、対象となる入射原子核は有効領域で止まるとする。陰極と格子の間には電圧分割された中間電極(Electrodes)があり、有感領域の電場は一様とされている。陽極(Anode)には、負荷抵抗(R_L)を通して、格子より少し高い正の高電圧(V_A)がかかり、格子に向かう電子はすべて格子を通過し、陽極に到達するとする。この陽極の電圧変化を信号とする。

入射する原子核の運動エネルギーを T 、平均の電離エネルギーを w とする。電離箱の中の電場は十分に強くて電離された電子は全て集められ、2次的な電離は起こさないとする。電子のドリフト速度は v_D とし、一定と考える。



(6) 電離された電子がすべて集められたとするとその電荷量はいくらか？

この電荷量は一般に”揺らぎ”を示す。その原因を簡潔に述べ、電荷量の”揺らぎ”的大きさを示せ。

(7) 原子核が入射してから止まるまでの $-dT/dx$ の変化を、入射したところを原点とし、横軸を x として図示せよ。(これはプラッグカーブと呼ばれている)

(8) その信号の大きさの時間変化の特徴を、信号の出始める時間を原点とし、横軸を時間として図示し、信号の出ている時間の長さを v_D を用いて表せ。この信号の測定が原子核の識別に有效であることを簡潔に示せ。

平成13年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (量子力学) (100 点)

ハミルトニアン H が

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

で与えられる1次元調和振動子を量子力学系として考える。従って、 q と p は交換関係 $[q, p] = i\hbar$ を満たすエルミート演算子である。

- (1) q と p を、別の演算子 a およびそのエルミート共役 a^\dagger の線形結合として

$$q = z a + z^* a^\dagger$$

$$p = w a + w^* a^\dagger$$

と表す。ここに z と w は複素数であり、 z^* と w^* はそれらの複素共役である。この時、ハミルトニアン H および交換関係 $[a, a^\dagger]$ が

$$H = \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \hbar\omega \quad \dots \dots \dots \quad (\text{A})$$

となるための z と w に対する条件式を (A) と (B) それぞれについて書き下せ。更に、これらの条件式を満たす (z, w) として、 w が正の実数であるものを求めよ。

- (2) $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ を満たす H の規格化された固有状態 $|n\rangle$ と固有値 E_n ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$) を考える。基底状態 $|0\rangle$ は $a|0\rangle = 0$ を満たすが、この理由を述べよ。更に、状態 $|n\rangle$ を $|0\rangle$ と a^\dagger を用いて表し、固有値 E_n を求めよ。

以下では、この調和振動子ハミルトニアン H に(陽には時間に依らない)小さな摂動項 \hbar を加えた新しいハミルトニアン $H + \hbar$ で記述される系を考える。なお、問(4)および(5)では、上の問(1)で得た、 q の a と a^\dagger による表現を用いること。

- (3) 新ハミルトンアン $H + h$ の n 番目の固有値が $E_n + e_n$ であるとする。摂動項 h の 1 次の近似では、固有値の変化分 e_n が

$$e_n = \langle n | h | n \rangle$$

で与えられることを示せ。

(4) $h = \lambda q^4$ (λ は定数) の場合に e_0 を求めよ。

(5) $h = g \delta(q)$ の場合に e_0 と e_1 を求めよ。ここに、 $\delta(q)$ はデルタ関数、 g は定数である。
必要なならば、以下の (i), (ii), (iii) を用いよ:

(i) デルタ関数の積分表示 (q が演算子の場合にも適用される)

$$\delta(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{iuq}$$

(ii) 交換子 $[F, G]$ が c 数 (全ての演算子と交換可能な、ただの数) であるような演算子 F と G に対する公式

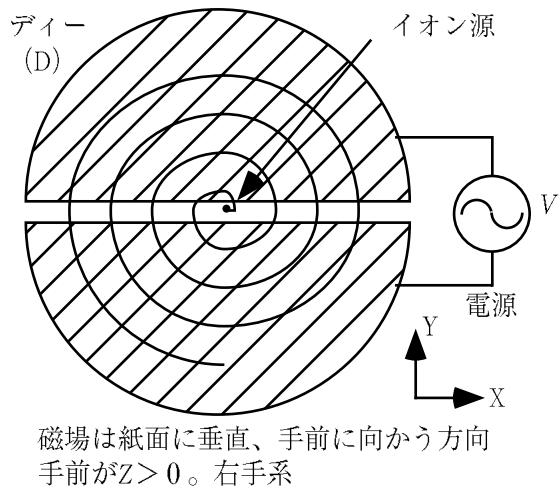
$$e^{F+G} = e^F e^G e^{-\frac{1}{2}[F,G]}$$

(iii) 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}bu^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \quad (b > 0)$$

I-2(電磁気・サイクロトロン) (100点)

サイクロトロンは1929年E.O.Lawrenceにより発明され、1932年には加速に成功している。1932年のノーベル賞受賞はその発明と、それに付随する功績によるものである。荷電粒子加速器としてよく知られているこのサイクロトロンの加速原理について、および、加速中の荷電粒子を装置内に捕捉しておけるか考えてみよう。加速原理は直流一様磁場 B ($=B_z$ 、便宜上 Z 方向を向いているとする) により半径 r の円運動を行う荷電粒子(運動量 p 、電荷 q 、質量 m)を磁場に直交する向きを持つ交流電場で加速するものである(図参照)。図中、斜線部分はその形状からディー(D)と呼ばれる中空の電極で、その内部では電場を感じないようになっていて、片方のディーからもう一方のディーに移る時に電場を感じるようになっている。ここでは相対論的效果を無視できる範囲で考えてよいとする。また、単一荷電粒子のみを考え、空間電荷効果などは無視する。磁場は軸対称性を仮定する。 $(B_\theta = 0, \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0)$



- (1) 円運動を行う荷電粒子の角速度 $\omega (=v/r)$ を上記物理量で記述せよ。加速により運動量が増えるにつれ角速度 ω はどのように変化するか。
- (2) 交流電場は振幅(電圧) V 、周波数 f 、位相 ϕ で記述できる。交流電場で加速するためにはこれらにどのような条件が必要になるか述べよ。
- (3) さて、ここからは軌道の安定性を検討するため、加速途中の状態を考察する。従って、運動量一定の定常状態を仮定し、加速を考えなくてよい。荷電粒子が Z 軸方向に運動量を持っていると Z 方向に一様な磁場による力は Z 成分を持たないため、そのままで Z 軸方向に走り去ってしまい、安定な加速ができない。このため、 B_z にわずかな半径依存性を持たせることを行われている。この磁場の変化を記述するため

$$n \equiv -\frac{r}{B_z(r)} \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \quad (A)$$

を定義し、 n 値とよぶ。 B_z が半径依存性を持つと B_r が生じてくる。この場合でも $B_r=0$

となる磁場中心面が存在し、その Z 座標を原点とする。

$$\nabla \times B = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \right) = 0 \quad (\text{B})$$

に着目すると、 $B_r=0$ の磁場中心面 ($Z=0$) 近傍での B_r を B_z で表すことができ、以下のように表すことができる。

$$B_r = \frac{\partial B_r}{\partial z} z = \frac{\partial B_z}{\partial r} z \quad (\text{C})$$

この磁場 B_r により円運動する荷電粒子がうける Z 方向の力を求めよ。また、係数に上記 n 値、 ω を用いて Z 方向の運動方程式を書け。 $(\frac{d^2 z}{dt^2} = (\text{constant})z)$ の形にする。)

- (4) 上記 Z 方向の運動方程式の非発散解（振動解）の条件を求めよ。それはどのような磁場分布となるか？
- (5) このように磁場が完全に一様ではなく、中心軸を持つようにした場合、円運動の中心は必ずしもこの中心軸と一致しなくなる。この中心軸を中心とし、半径 R を持つ円は運動量 mv を持つ粒子の平衡軌道と呼ばれる。ここで、実際の粒子の軌道半径を r として、 $\xi \equiv (r - R)/R$ を定義する。(C) 式同様、係数に上記 n 値、 ω を用いて $r=R$ 近傍での磁場 $B_z(r)$ を $B_z(R)$ からの増分で記述せよ。
- (6) 平衡軌道からのずれ ξ に対応する半径方向の力は次のように遠心力とローレンツ力の差により与えられる。

$$\Delta F_r(r) = \frac{mv^2}{r} - qvB_z(r) \quad (\text{D})$$

$v = R\omega$ である粒子の平衡軌道からのずれを考えていることに注意して、(3) と同様に、 $\Delta F_r(r)$ を $q, R, \omega, B_z(R), \xi, n$ で表し、係数に上記 n 値、 ω を用いてこの磁場変化による の運動方程式を求めよ。

- (7) 上記 ξ 方向の運動方程式の非発散解（振動解）の条件を求めよ。Z 方向および ξ 方向ともに非発散解となる条件があれば示せ。

I-3 (熱力学) (100点)

- 図1は等温圧縮・膨張、断熱圧縮・膨張の4つの過程を適当に組み合わせたカルノーサイクルである。このサイクルを温度(T) - エントロピー(S)平面で描け。そしてこのサイクルの効率、すなわち、(このサイクルで系がする仕事) / (高温熱源から系が得た熱エネルギー)を導き、その効率が温度 T_A 、 T_C の2つの熱源間で運転する熱機関の最大値であることを示せ。
- 図2のような理想気体のサイクルの効率を求めよ。この効率と温度 T_E 、 T_G の2つの熱源間で運転するカルノーサイクルの効率とを比較し、異なる場合にはその理由を述べよ。
- 異なった断熱過程の圧力 - 体積曲線が交叉しないことを熱力学第2法則に基づいて示せ。

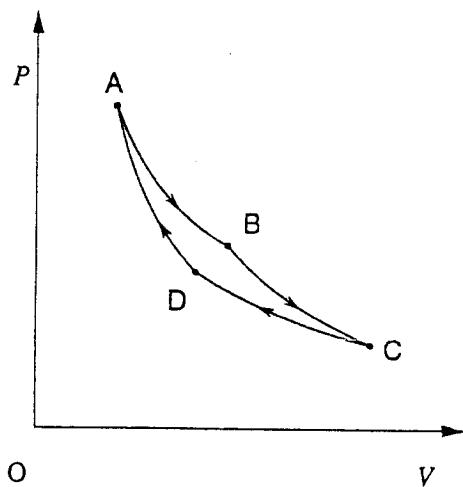


図1

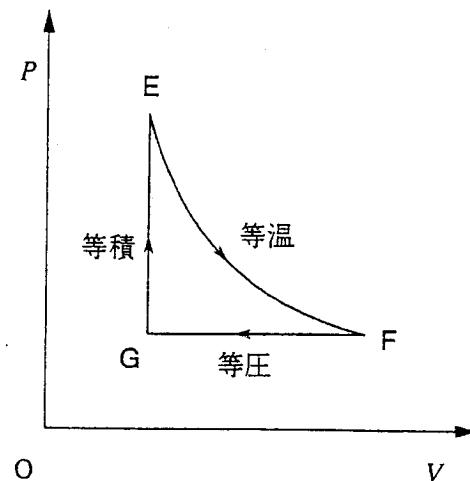


図2

平成13年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

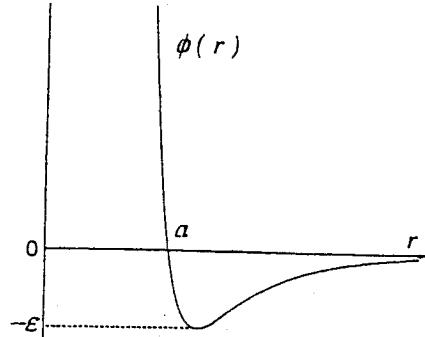
II-1: 統計力学 (100点)

古典力学に従う N 粒子系を考える。体系は体積 V の容器内にあり全エネルギーは 次のように運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに分けられる。

$$H = K + U$$

$$K = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$



この系の統計的性質は 分配関数

$$Z(N, T, V) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int_V \cdots \int_V d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N \int \cdots \int d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N \exp \left(-\frac{1}{k_B T} H \right)$$

を計算することによって記述できる。ここで $\phi(r)$ は 2体相互作用ポテンシャルであり、 h はプランク定数である。

- (1) 分配関数における二つの因子 $\frac{1}{N!}$ と $\frac{1}{h^{3N}}$ の存在は 量子力学から正当化されるのであるが、その物理的意味を述べよ。また相互作用のない理想気体における自由エネルギーを具体的に計算せよ。そして状態方程式と内部エネルギーを求めよ。
- (2) 図に示すような相互作用のある場合の近似計算を考えよう。まず 2体ポテンシャルは 近距離 $r < a$ では強い斥力部分を持つので、各粒子の動ける実効的体積は

$$V_{\text{eff}} = V - Nv_0$$

のように減少する。ここで $v_0 (\sim a^3)$ は 一粒子あたりの排除体積である。次に 2体ポテンシャルは遠距離 $r > a$ で弱い引力部分を持つので、全ポテンシャルエネルギー U の引力部分は

$$U_{\text{ap}} = -A\epsilon v_0 N^2 / V$$

と近似できる。ここで $-\epsilon$ は $\phi(r)$ の最小値であり、 $n = N/V$ は 密度である。 A は 1 の程度の定数であるが以下では簡単のため 1 とおく。

上記二つの近似の物理的意味を述べよ。そして分配関数の表式で、体積を V_{eff} にポテンシャルエネルギーを U_{ap} に置き換えて自由エネルギーを計算すると次式が得られることを示せ。

$$F = F_{\text{ideal}} - Nk_B T \log(1 - v_0 n) - \epsilon v_0 N^2 / V$$

ここで F_{ideal} は 理想気体系での自由エネルギーである。

- (3) 上で述べた近似理論により van der Waals の状態方程式が導出されることを示せ。また 内部エネルギー E 、定積比熱 C_V 、等温圧縮率 $K_T = (\partial n / \partial p)_T / n$ (ここでは p は圧力) を計算せよ。

II-2 (密度関数) (100点)

解析力学では、最小作用の原理から運動方程式が導かれる。即ち、作用とはラグランジアンの時間に関する定積分であり、最小化は変分法を用いて実行される。このような最小化の手続きは、解析力学に限らず、物理学の様々な分野で用いられている。

ここでは、固体壁に付着している液体の密度関数 $\rho(z) \geq 0$ を取り上げる。液体の密度は固体壁面 ($z = 0$)においては $\rho(0) = \rho_0$ であるが、壁からの距離 $z \geq 0$ が大きくなるにつれて単調に減少する。簡単のため、液体の密度は z に垂直な方向へは一様であると考える。このとき $\rho(z)$ は、次式で表わされる積分 $I(\{\rho\})$ を、 ρ に関して変分することにより求められると仮定する。但し、 K は正の定数である。

$$I(\{\rho\}) = \int_0^\infty \left[\frac{K}{2} \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 - W(\rho) \right] dz \quad (A)$$

ここで、被積分関数の第一項は解析力学における運動エネルギーに対応し、第二項はポテンシャル・エネルギーに対応すると考えることができる。

- (1) (A) 式を ρ に関して変分することにより、解析力学におけるラグランジェの方程式（即ち、ニュートンの運動方程式）に対応する、 $\rho(z)$ の微分方程式を導出せよ。
- (2) 次に、(1) で得られた方程式から出発して、解析力学におけるエネルギー保存則に対応する、 $\rho(z)$ の微分方程式を導出せよ。但し、全エネルギーに対応する量を λ と表わせ。
- (3) 特別な場合として、 $\lambda = 0$ とおく。さらに、

$$W(\rho) = -W_0 \rho(z)^2 [\rho(z) - \rho_S]^2 \quad (B)$$

と仮定する。ここに、 W_0 は正の定数、 ρ_S も正の定数で、 $\rho_S > \rho_0 \geq \rho(z) \geq 0$ を満たす。このとき、(2) で得られた微分方程式を解いて $\rho(z)$ を求めよ。また、その概形を実線を用いて図示せよ。但し、曲線の形がよくわかるように、 $z < 0$ の範囲も補助的に点線を用いて描け。

- (4) $\rho(z)$ を z について積分した量を被覆度 Γ と呼ぶ。すなわち、

$$\Gamma = \int_0^\infty \rho(z) dz \quad (C)$$

前問で得られた $\rho(z)$ について被覆度 Γ を求めよ。

II-3 (電磁気学・鏡像法) (100 点)

- (1) 真空中に電荷密度 ρ の電荷を分布させた場合、真空の誘電率を ϵ_0 として、静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{A})$$

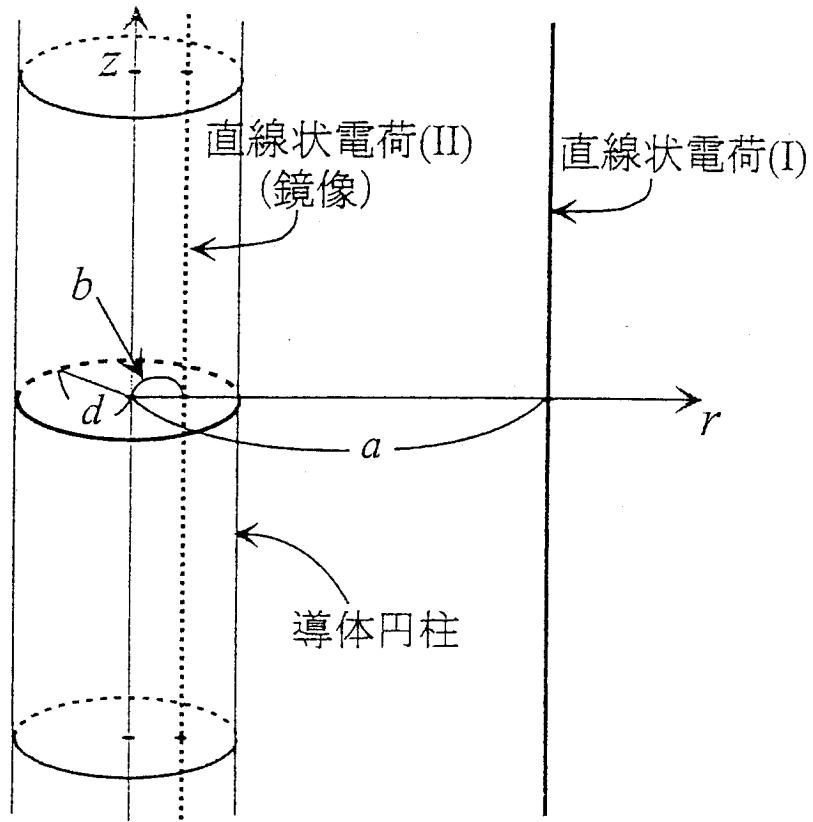
の解として与えられる。真空中に単位長さあたりの電荷が λ の無限に長い一様な直線状電荷を z -軸上に置いたとき、そのまわりにできる静電ポテンシャル ϕ は

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + c$$

で与えられる。ただし、ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義した。また、 c は定数である。このときの電場 E を求めよ。また、この与えられた電荷分布、および、静電ポテンシャル ϕ に対して、 $r < r_0$ で長さが l の z -軸に平行な円柱状領域で、式 (A) の両辺をそれぞれ体積積分した量が等しくなることを、ガウスの定理を用いて示せ。

図のように、 $r = 0$ の直線を中心とする半径が d の無限に長い導体円柱をおき、単位長さあたり λ' の電荷を帯電させる。この導体円柱に平行に、単位長さあたりの電荷が λ の直線状電荷 (I) を $r = a$ のところにおく。この状態での導体円柱外部の静電ポテンシャルを求めたい。そのために、図中に示したように、導体円柱内部の $r = b$ の位置に単位長さあたりの電荷が λ'' の直線状電荷 (II) を導体円柱の代わりに鏡像としておくことを考える。

- (2) 導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたとき、鏡像 (II) によって作られる電場が導体円柱外部の元の電場を与えるように鏡像を置く位置や鏡像の持つ電荷の大きさを決める。今の場合、導体円柱表面に現れる単位長さあたりの電荷 λ' と、鏡像 (II) の線電荷密度 λ'' は等しくなければならない。このことを示せ。
- (3) $r \rightarrow \infty$ の極限で静電ポテンシャルが一定値に近づくようにするには、 $\lambda'' (= \lambda')$ をどのように選べばよいか、答えよ。
- (4) 前問の λ'' の値に対して、鏡像 (II) によって作られる電場が元の導体円柱外部の電場を正しく与えるように b の値を求めよ。
- (5) 導体円柱にはたらく静電気力は、導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたときに鏡像 (II) にはたらく静電気力に等しいことを示せ。
- (6) 導体円柱が問 (3) の λ' の値に帯電している状態で、直線状電荷 (I) を $r = a$ の位置から $r = a'$ の位置まで十分にゆっくりと移動させる。この移動で、直線状電荷 (I) の単位長さあたりになされた仕事を求めよ。



図

平成13年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で 6 問ある。これらから 3 問を選択せよ。
(2) 選択した 3 つの問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい。)
(3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択:物理数学) (100 点)

ポテンシャル $V(x)$ のもとでの一次元直線 ($-\infty < x < \infty$) 上の質量 m の粒子系に対するエネルギー E の定常状態の Schrödinger 方程式は

で与えられる。以下では、ポテンシャル $V(x)$ として

$$V(x) = V_0 \left(1 - e^{-x/a}\right)^2$$

を考える。ここに、 V_0 と a は共に正の定数である。

- (1) このポテンシャル $V(x)$ を図示せよ。また、この系の束縛状態のエネルギー固有値 E はどの範囲にあるか？

さて、今のポテンシャル $V(x)$ に対して (I) 式の Schrödinger 方程式は、調和振動子や水素原子の系と同様の手法で近似無しに解くことが出来る。以下、順を追ってこれを実行しよう。

- (2) まず、変数 x の代わりに

$$y = b e^{-x/a} \quad (b \text{ は正の定数})$$

で与えられる新変数 $y (> 0)$ を取ることにより、Schrödinger 方程式 (I) を

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\psi}{dy} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{A}{y} - \frac{B}{y^2} \right) \psi = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(II)}$$

の形にすることが出来る。この時、変数変換に現れる定数 b 、および、微分方程式 (II) 内の定数 A と B を求めよ。解答は、 \hbar, m, a, V_0, E を用いて与えよ。

次に、微分方程式 (II) を y が大きな領域で考えるために、 y の負幕が掛かった項を単純に落とすと、 $d^2\psi/dy^2 - (1/4)\psi = 0$ となる。この解として $y \rightarrow +\infty$ で発散しないものを取ると $\psi = (\text{定数}) \times e^{-y/2}$ である。従って、(II) を y の全領域 ($0 < y < \infty$) で解く際に、この無限遠における大まかな振る舞いを考慮して、

$$\psi(y) = e^{-y/2} f(y)$$

で与えられる新未知関数 $f(y)$ を考えると、微分方程式 (II) は

$$y \frac{d^2 f}{dy^2} + (1 - y) \frac{df}{dy} + \left(A - \frac{1}{2} - \frac{B}{y} \right) f = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(III)}$$

となる。

(3) 新微分方程式 (III) の解が

$$f(y) = y^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \quad (a_0 \neq 0) \quad \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

なる幕級数で与えられるとして (III) に代入することにより、

(3-1) 隣り合う係数 a_k と a_{k+1} の間の関係を求めよ (A, B, λ を用いて表せ)。

(3-2) 更に、初項の幕 λ を求めよ (A, B を用いて与えよ)。波動関数の規格化積分の $y \sim 0$ ($x \rightarrow \infty$) における有限性より、 $\lambda > 0$ が要求されることに注意せよ。

さて、前問 (3) で求めた a_k の漸化式より、

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k} \quad (k \rightarrow \infty)$$

であることが分かるが、これは、級数 (IV) が無限級数なら f の $y \rightarrow \infty$ での振る舞いは $f \sim e^y$ となり、波動関数 ψ は規格化不能であることを意味する。従って、級数 (IV) は有限の k で切れた多項式でなければならない。

(4) n をある非負の整数 ($n = 0, 1, 2, \dots$) として、『級数 (IV) が $k = n$ の項で切れる』、即ち、

$$a_k = 0 \quad (k \geq n+1) \quad \text{但し} \quad a_n \neq 0$$

を要求すると、問 (3) の結果より A と B の間に関係が付き、この関係と問 (2) で求めた A と B の表式より、エネルギー固有値が n の関数として求まる。このエネルギー固有値 E_n を \hbar, m, a, V_0, n を用いて与えよ。

(5) 前問 (4) のレベル数 n には上限があることを説明せよ。また、この系に少なくとも 1 つの束縛状態が存在するためには、 \hbar, m, a, V_0 は如何なる条件を満たす必要があるか？

III-2 (選択 : 実験物理) (100 点)

(1) 回路 :

図 1 のようなインダクタンス L, M 及び、キャパシタンス C でできた回路の共振周波数をすべて求め、そのときの電流 i_1 と電流 i_2 の比を求めよ。

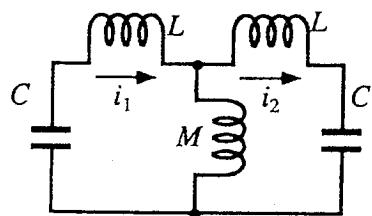


図 1

(2) X線分光 - 1 :

X線分光の主な目的は、

- (i) スペクトルを解析することにより、発光体、吸収体の微視的構造を明らかにする
- (ii) スペクトルの特色を利用して、物質の組成の分析をする

ことである。原子の発光スペクトルの解析から原子構造が解明されたことはよく知られており、(i)では、特性スペクトル（ダイヤグラムライン）の帰属、各殻の寿命の決定等および殻間の電子のスピントン交換相互作用など複雑な現象の解明のため精密な分光器が必要となっている。

X線スペクトル $I(\omega)$ の形は、輻射原子を時刻 t での変位が $x(t)$ の減衰振動子として扱う事により次式より求められる。

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega_0 t} \quad (\text{A})$$

x_0 は振動子の振幅の初期値、 ω_0 は角振動数、そして γ は減衰の速さを表す定数である。このような振動子によって放出されるX線のスペクトルの形 $I(\omega)$ は、式 (A) の実数部を時間 t から角振動数 ω へのフーリエ変換することにより得られる。その式を求め、およその形状を示せ。

(3) X線分光 - 2 :

X線分光法の原理は、極めて単純である。入射X線が完全に平行な光で拡がりが無視でき種々の波長を含んでいるとする。この完全に平行な種々の波長のX線が角度 θ で面間隔 d の結晶面に入射する（図 2 参照）と Bragg 条件 ($2d \sin \theta = \lambda$) を満たす時に波長 λ のX線だけが反射する。角度 θ を測定することにより波長 λ が決定される。しかしながら、実際には、入射光はある角

度拡がり $\Delta\theta$ を持つていて、単色光でも波長拡がりをもっているように観測される。この値が分光器の分解能を決定する。

- (a) 有限の大きさを持つ光源から角度拡がり $\Delta\theta$ を小さくする目的で長さ ℓ の距離をおいて幅 w の 2 枚のスリットを配置したとき（但し $\ell \gg w$ とする）（図 2 参照）、スリットによる角度拡がりの強度分布を θ の関数として求めよ。実際に観測される X 線スペクトルは、この強度分布と X 線スペクトルとの convolution である。
- (b) 今、 $\ell = 100 \text{ mm}$, $w = 50 \mu\text{m}$ ($1\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) のスリットを通過した波長 $\lambda = 1.92 \text{ \AA}$ ($1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$) の X 線が Bragg 条件を満たして Si の結晶（面間隔 $d = \frac{3.84}{2} \text{ \AA}$ ）に入射するとき、このスリットにより実際に観測される X 線の波長拡がり $\Delta\lambda$ を求めよ。

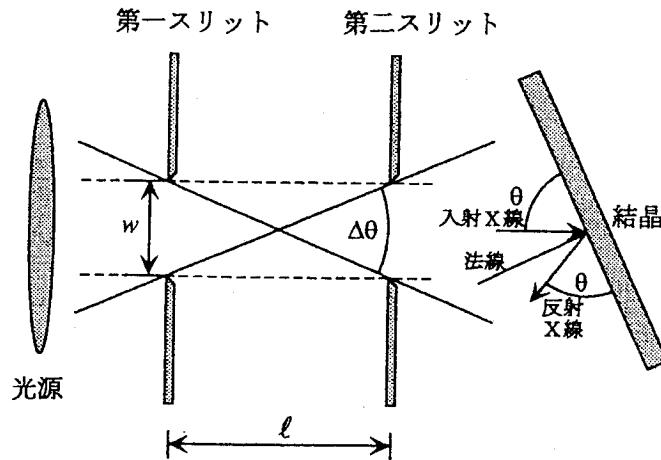


図 2 スリットによる角度分散

III-3 (選択: チェレンコフ光) (100 点)

真空中で等速運動する電荷は輻射しない。しかし、透明な媒質（誘電率 ϵ 、透磁率 μ ）中を高速で等速運動（速度 v ）する荷電粒子（電荷 e ）がつくる場から電磁波が輻射されることがある。このことを考察するために、外部電荷密度 ρ 、外部電流密度 J が存在するときのマックスウェル方程式から出発しよう。

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}\end{aligned}$$

今の場合、外部電荷密度と外部電流密度は、デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて、次式で与えられる。

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - vt), \quad \mathbf{J} = ev\delta(\mathbf{r} - vt)$$

ここで、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を導入しよう。

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi$$

また、ローレンツの条件

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を課すことにしてよう。

1) まず、ポテンシャル \mathbf{A} と ϕ に関する次式が得られることを示せ。

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -e\mu v \delta(\mathbf{r} - vt) \quad (\text{A})$$

$$\Delta \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\left(\frac{e}{\epsilon}\right) \delta(\mathbf{r} - vt) \quad (\text{B})$$

2) 次に、(A)、(B) 式の両辺の空間座標 \mathbf{r} についてフーリエ変換を行なって、各ポテンシャルの波数 \mathbf{k} のフーリエ成分、 $A_{\mathbf{k}} \equiv \iiint A \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ と $\phi_{\mathbf{k}} \equiv \iiint \phi \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ に関する方程式を導け。

3) $A_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ の時間依存性がともに $\exp(-ikvt)$ で与えられるとして、 $A_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ を求めよ。

4) 上の 3) の結果から、 $A_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ は $|\mathbf{k}| = (\epsilon\mu)^{1/2}(kv)$ のとき発散するが、輻射強度は有限にとどまる事が知られている。この時、輻射される電磁波がチェレンコフ光である。チェレンコフ光が輻射されるときは荷電粒子の速さ v が媒質中の光速を越えていることを示し、チェレンコフ光の輻射方向と粒子の速度 v の方向とのなす角 θ を求めよ。

5) チェレンコフ光は偏光している。チェレンコフ光の波数 \mathbf{k} の電場ベクトル $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ の方向は \mathbf{k} に垂直で \mathbf{k} と v のつくる平面内にあることを示せ。

III-4 (選択 : 力学・波) (100 点)

x 方向に無限に長い、一定の線密度 ρ をもったひもを考える。ひもの張力 T は一定とし、重力ははたらないものとする。

- (1) ひもは z -方向にしか振動しないものとし、その z -方向の変位を $Z(t, x)$ と記述することにする。ひもの変位が微小であるとすると、ひもの振動を記述する方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] Z(t, x) = 0 \quad (\text{A})$$

となる。このとき、定数 c^2 を求めよ。

以下では引き続き、微小振動を仮定する。

- (2) f, g を任意関数として

$$Z(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (\text{B})$$

が、このひもの運動の解であることを示せ。また、時刻 $t = 0$ で

$$Z(0, x) = h(x), \quad \left. \frac{\partial Z(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

となる場合の解を求めよ。

- (3) 式(B)は方程式(A)の一般解である。更に、 $x = +\infty$ から $x = -\infty$ の方向に伝播する波が存在しないという条件を課すと、この一般解がどのように制限されるか述べよ。

図1のように、端を固定されたバネにつながれた質量 m のおもりを考える。この状態で、おもりを z -方向に振動させると角振動数 ω_0 で単振動する。図2のように線密度 ρ の無限に長いひもをこのおもりの左右につなぎ両側から張力 T で引く。ただし、ひもがおもりにつながれている位置は $x = \pm x_0$ である。これまでの設問と同様、 ρ, T は一定で、微小振動を考え、重力は無視できるものとする。この状況で、ひも、おもり、両方が静止した状態から、時刻 $t = 0$ に、おもりに z -方向の初速度 v を与えた。

- (4) 仮に、ひもの変位 $Z(t, x)$ が既知のものであるとして、おもりがひもから受ける力を表わせ。更に、この力の表式を用いて、おもりの z -方向の変位 $q(t)$ の満たすべき運動方程式を書け。
- (5) 今、考えている状況では、ひもの運動には無限遠方からおもりに向かう内向きの波が存在しない。このことを用いて、前問(4)で得た $q(t)$ の満たすべき運動方程式を $Z(t, x)$ を含まない方程式に書き換えよ。
- (6) 前問(5)で得られた $q(t)$ の運動方程式を $T < m\omega_0$ の場合に解き、 $t > 0$ でのおもりの変位を求めよ。
- (7) この系では、摩擦を考慮していないにもかかわらず、おもりの振動が減衰する。失われたおもりの振動のエネルギーはどこへ行ったのかを答えよ。

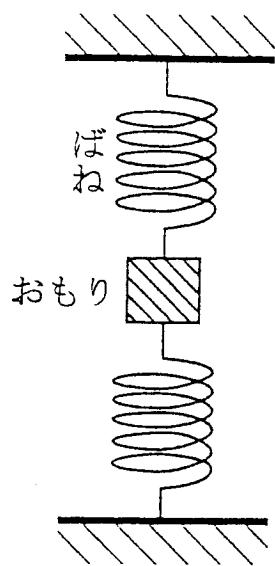


図 1

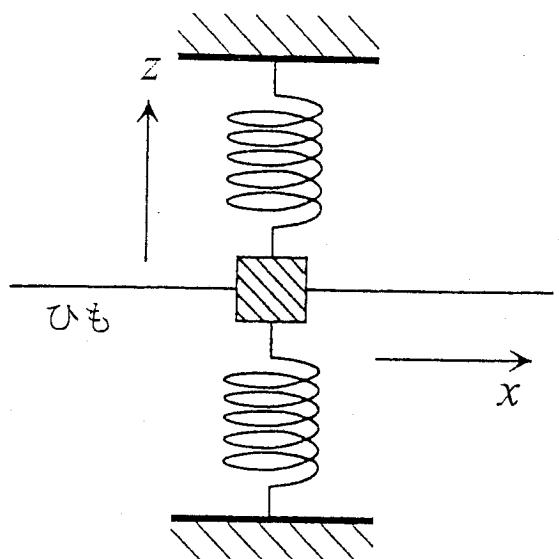


図 2

III-5 (選択): 量子力学 (100 点)

一次元の量子的調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$H(t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}k(t)x^2, \quad (\text{A})$$

で与えられる。簡単のためプランク定数 \hbar と質量 m が 1 となる単位系をとる。ここでバネ定数 $k(t)$ が時間的に変化するものとする。

- (1) 次のような x に関してガウス型の波動関数はシュレジンガ一方程式の解となることを示せ。

$$\psi(x, t) = f(t)^{-1/2} \exp \left[i \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)} x^2 \right]$$

ここで $f(t)$ は 時間に依存した複素関数であり 次の式に従う。

$$\ddot{f}(t) + k(t)f(t) = 0$$

なお、

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t), \quad \ddot{f}(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t)$$

である。

- (2) 次の時間変化を考えよう。

$$\begin{aligned} k(t) &= \omega_0^2 & (t < 0) \\ &= \omega_1^2 & (t > 0) \end{aligned}$$

$t < 0$ では 系は基底状態にあるとする。 $f(t)$ が $t < 0$ でどのような関数形であれば基底状態となっているか答えよ。また $t = 0$ で波動関数は連続とすると、 $t > 0$ で どのような波動関数がえられるか答えよ。

- (3) 上記設問 (2) の場合 エネルギーの期待値 $E(t) = \langle H(t) \rangle$ が時間的にどのように変化するか計算せよ。ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$ を使え。

III-6 (選択：波の伝播) (100点)

質量 m 、エネルギー E をもつ粒子が 1 次元ポテンシャル $V(x)$ のもとで運動するとき、その粒子の波動関数 $\psi(x)$ は次式 (A) で与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (\text{A})$$

さて、ここで波動関数 $\psi(x)$ とその x に関する 1 次導関数 $d\psi/dx$ を成分とするベクトル、

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi \\ d\psi/dx \end{pmatrix} \quad (\text{B})$$

を導入すると、(A) 式は次のような 1 階の微分方程式に書き直すことができる。

$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = S(x) \Phi(x) \quad (\text{C})$$

ここで、 $S(x)$ は 2 行 2 列の行列である。

- (1) 行列 $S(x)$ を求めよ。
- (2) まず、ポテンシャル $V(x)$ が一定値 V_0 をもつ場合を取り上げる。このとき、 $\Phi(x)$ の $x = x_1$ での値 $\Phi(x_1)$ と $x = x_2$ での値 $\Phi(x_2)$ は、行列要素が $x_2 - x_1$ の関数である 2 行 2 列の行列 $M(x_2 - x_1)$ を用いて、

$$\Phi(x_2) = M(x_2 - x_1) \Phi(x_1) \quad (\text{D})$$

と結び付けられることを示せ。また、 $E > V_0$ の場合について、 $M(x_2 - x_1)$ の各成分を求めよ。ヒント：波動関数 $\psi(x)$ は、 x 軸の正の方向に進む波と負の方向に進む波の重ね合わせとして、一般的に記述できる。

- (3) 次に、 $0 < x < a$ で $V(x) = V_0 < 0$ 、 $x \leq 0$ と $x \geq a$ で $V(x) = 0$ である井戸型ポテンシャルを想定する。今、エネルギー $E > 0$ の粒子が振幅 A の平面波として、 $x \leq 0$ の領域を x 軸の正の方向に進み、このポテンシャルによって散乱される場合を考える。このとき反射波は、 x 軸の負の方向に進む振幅 B の平面波として表わされ、一方、透過波は、 $x \geq a$ において、振幅 F で x 軸の正の方向に進む平面波として表わされる。この場合の反射係数 B/A および透過係数 F/A を求めよ。また、 $|F/A| = 1$ 、即ち完全透過になるための条件を求めよ。ヒント：ポテンシャルが不連続でも、 $\Phi(x)$ は連続であることに注意せよ。

- (4) ポテンシャル $V(x)$ が x に依存して変動するときには、特殊な場合を除いて解析的に $\Phi(x)$ を求めることは困難であるが、本問の行列を用いる方法を応用して、近似解を求めることは可能である。 $x \leq 0$ と $x \geq a$ で $V(x) = 0$ であり、 $0 < x < a$ で変動する任意のポテンシャル $V(x)$ によって、(3) と同様に振幅 A の平面波が散乱される場合の、反射係数 B/A および透過係数 F/A を計算する方法を考案せよ。

平成 12 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1、I-2、I-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

I-1 (物理定数) (100 点)

以下の定数のおおよその大きさ (枠だけでもよい) を書き、それぞれの定数の測定が可能な方法 (概数が知れればよい) を 1 つづつあげ、原理を簡単に述べよ。但し、被測定量以外の定数は知られているものとせよ。また、異なった定数に対して同じ測定法が適用できる場合には、必ず異なった方法を述べること。

(1) プランク定数

(2) ボルツマン定数

(3) アボガドロ数

(4) 電子の電荷

(5) 電子の質量

(6) 万有引力定数

I-2 (量子力学) (100 点)

最近、磁場を用いて真空中のある空間の中に閉じ込めた（トラップした）アルカリ気体でボースアインシュタイン凝縮（BEC）を起すことに成功した。BECとはある量子状態に多数の粒子が凝縮している状態のことである。アルカリ気体の BECにおいて気体は十分希薄であり、原子間の相互作用が無視できるとすると、原子が凝縮する状態を表わす波動関数はシュレディンガー方程式に従う。また、重力の影響は考えないことにする。なお、以下の計算で必要ならば積分公式

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2, \quad \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/4$$

を用いよ。

- (1) 最初に一次元の問題を考える。 m をアルカリ原子の質量とする。 $(1/2)m\omega^2 x^2$ と近似できるポテンシャルで原子を $x = 0$ 近傍にトラップしているとする。波動関数 $\psi(x)$ が従うシュレディンガー方程式および固有値方程式を書け。次に

$$\psi(x) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) \quad (\text{A})$$

と置いて x_0 を適当に選べば (A) 式の波動関数は固有値方程式を満足することを示せ。また x_0 を求めよ。ここで C は規格化定数である。 C も求めよ。(A) 式は節を持たないことから明らかなように基底状態の波動関数である。BEC でアルカリ原子はこの状態に凝縮する。したがって、凝縮した原子の密度分布は

$$C^2 \exp\left(-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) \quad (\text{B})$$

に比例する。

- (2) (A) 式をフーリエ変換して基底状態の波数表示 $\psi(k)$ を求めよ。次にこの $\psi(k)$ を用いて基底状態での原子の速度 v の二乗平均 $\langle v^2 \rangle$ を計算せよ。
- (3) BEC の観測はトラップ ポテンシャルをゼロにして、アルカリ気体の分布が適当に広がった後行う。トラップ ポテンシャルをゼロにする時間は非常に短いのでその間に波動関数は変化しないものとして、その後の時間発展を考える。時間 t 経過したあとでの波動関数を求めよ。また、気体の広がりを表わす x_0 と規格化定数 C はともに時間変化するが、凝縮した原子の密度分布は (B) 式と同じ関数形になることを示せ。

- (4) つぎに二次元のポテンシャル $\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2)$ でトラップされたアルカリ気体の BEC を考える。ここで $\omega_x > \omega_y$ とする。このとき、原子が凝縮する基底状態の波動関数はどう書けるか。また、トラップ ポテンシャルをゼロにした後、 x 方向の気体の広がり x_0 と y 方向の気体の広がり y_0 は時間とともに変化する。 x_0/y_0 の時間変化を求めよ。ポテンシャルにトラップされていたときとポテンシャルをゼロにしてから十分時間がたった後とを比較すると、 x_0 と y_0 の大小関係が変化する。その理由を物理的に説明せよ。

I-3 (電磁誘導) (100 点)

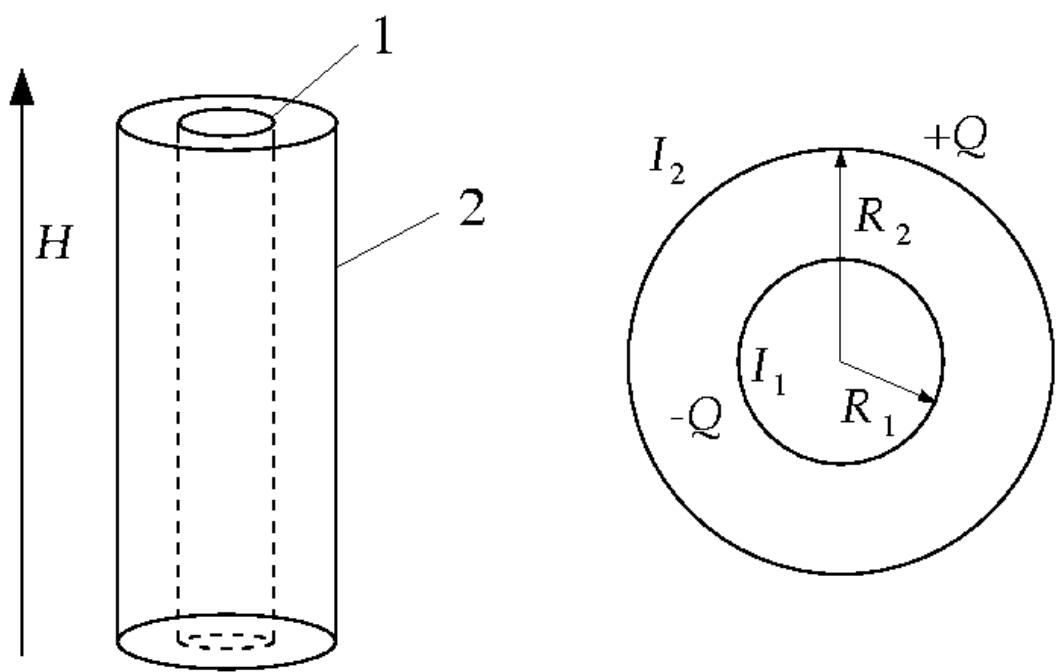
図のように長さが半径に比べて十分長い同軸で中空のふたつの円筒 1 と 2 を考える。円筒の厚さは無視できるとし、それらの半径を R_1 と R_2 ($R_1 < R_2$) とする。1 および 2 の円筒は単位長さ当たりそれぞれ $-Q$ と $+Q$ の一様に分布した電荷を持っているが、その電荷は円筒に固定され、円筒と一緒にしか動かないものとする。また、ふたつの円筒ともその軸の周りに摩擦なしで回転できるとし、その慣性モーメントを単位長さ当たりそれぞれ I_1 および I_2 とする。このような円筒の系に、最初、外部から一様な磁場 H_0 を回転軸に平行にかけておき、次にその磁場をゆっくりゼロにすると、円筒は回転を始める。このとき、円筒は電荷を持っているためその内部に一様な磁場ができる。

(1) 最初、内側の円筒の半径 $R_1 = 0$ とする。

- a) 外部磁場 H_0 をゼロにしたときに外側の円筒の持つ単位長さ当たりの角運動量が L_2 になったとする。 L_2 が与えられたとして、円筒間の磁場 H_2 を求めよ。
- b) 磁場が時間的に変化するときにファラデーの電磁誘導則が成立する。この誘導則から円筒にかかるトルクが求まる。円筒 2 の従う運動方程式を導け。
- c) a)、b) で得られた方程式を解いて、 H_2 を求めよ。
- d) ポインティング ベクトル $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ を用いると、電磁場の持つ角運動量は式 $\vec{L} = \frac{1}{c^2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{S}$ から計算できる。最初の外部磁場 H_0 がかかっている状態での電磁場の持つ角運動量を計算せよ。ここで誘電率を ϵ 、磁率を μ とすると $1/c^2 = \epsilon\mu$ 、c は光速である。
- e) c) の結果を角運動量保存則から説明せよ。

(2) 次に $R_1 \neq 0$ とする。外部磁場をゆっくりゼロにした後での円筒 1、2 の単位長さ当たりの角運動量をそれぞれ L_1 、 L_2 、円筒 1 内部の磁場を H_1 、そして円筒 1 と円筒 2 の間の磁場 H_2 をとする。

- a) L_1 、 L_2 、 H_1 、 H_2 を決定するための方程式を導け。
- b) I_1 が無限に大きいときの H_1 、 H_2 を求めよ。(ヒント: 角運動量は無限に大きくなることはない。)
- c) $I_1 = 0$ のときの H_1 、 H_2 を求めよ。(ヒント: 角速度は無限に大きくなることはない。)



平成 12 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1、II-2、II-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (中性子干渉) (100 点) スピンが $s = 1/2$ で磁気能率が μ の中性粒子が、 z 方向に向いている磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ の中にあるときのスピンの時間発展を考える。 $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ をスピンの演算子とするとハミルトニアンは次のように書ける。

$$H = -\frac{\mu}{s} \vec{s} \cdot \vec{B}$$

- (1) Heisenberg 表示での \vec{s} の運動方程式を書き、それを解いてスピンの歳差運動の周期 T を求めよ。
- (2) Schrödinger 表示での波動関数の時間発展を、スピンの z 成分 s_z を対角化する基底で表せ。特に、歳差運動の周期 T だけ時間がたつと、波動関数はどう変化するか。

以上の結果をふまえて、次のような実験を考える。図の左上では $+y$ 方向に進む、エネルギーが一定で x 軸の正の向きに偏極した中性子線が入射している。B と C に置かれた物体は中性子を完全に反射するが、A と D に置かれた物体は中性子をちょうど半分透過し、残りを反射するとする。また、反射や透過に際してはスピンの状態が変化することはないとする。二つの経路 A B D と A C D を通った中性子は干渉し、検出器 1 または検出器 2 によって検出される。また、中性子の経路 C D をはさむように電磁石が置いてあり、 z 方向にいろいろな大きさの磁場がかけられるようになっている。電磁石の磁場がゼロのとき、中性子はすべて検出器 1 で検出され、検出器 2 では検出されなかったとする。スピンの演算子を

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表示することにし、次の問い合わせよ。

- (3) 入射してくる中性子のスピン波動関数は、

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けることを示せ。

- (4) 中性子が D を通過したのち検出器に入るまえのある時点における波動関数 Ψ を

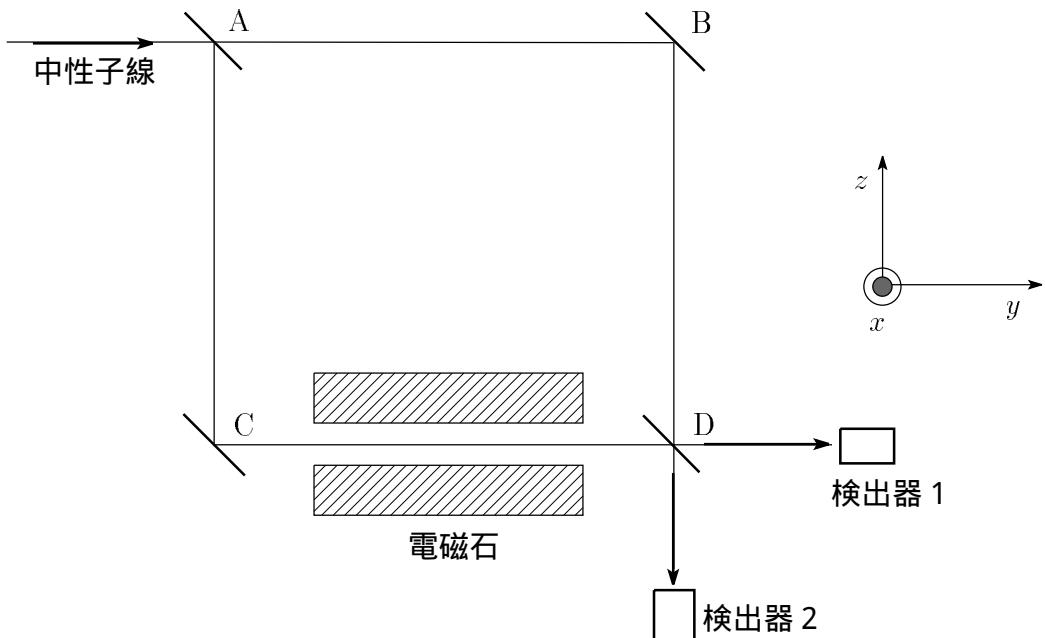
$$\Psi = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

のように表すことにする。ここで、 w_1 は検出器 1 に向かう中性子のスピン波動関数を表す 2 次元縦ベクトルであり、 w_2 は検出器 2 に向かう中性子のスピン波動関数を表す 2 次元縦ベクトルである。 Ψ を経路 A B D を通ってきた成分 Ψ_{ABD} と経路 A C D を通ってきた成分 Ψ_{ACD} の重ね合わせの形 $\Psi = \Psi_{ABD} + \Psi_{ACD}$ に書こう。また、 Ψ_{ABD} と Ψ_{ACD} をそれぞれ Ψ と同様に、

$$\Psi_{ABD} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ACD} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

と表すこととする。 Ψ の上下の成分の位相を適当に選ぶと、 $u_1 = \frac{1}{2}w$ 、 $u_2 = \frac{1}{2}w$ と書けることを示せ。ここで、 w は前問で与えられたものとする。

- (5) Ψ_{ABD} と Ψ_{ACD} は互いに直交しているはずであるが、これはなぜか説明せよ。この事実と $\Psi = \Psi_{ABD} + \Psi_{ACD}$ が検出器 1 に向かう状態を表していることに注意して、上の位相の選び方のもとで、 $v_1 = \frac{1}{2}w$ 、 $v_2 = -\frac{1}{2}w$ となっていることを示せ。
- (6) 磁場の大きさを調節して中性子が磁場のあるところを通過する間に、スピンが z 軸のまわりを右向きににちょうど一周期だけ歳差運動するようにした。このとき、中性子は各検出器によってどのように検出されるか。
- (7) 磁場の大きさを半分にして、中性子が磁場のあるところを通過する間に、スpinがちょうど 2 分の 1 周期だけ歳差運動するようにした。このとき、中性子は各検出器によってどのように検出されるか。また、各検出器によって検出される中性子は、どの向きに偏極しているか。磁場の向きを逆にするとどうなるか。



II-2 (統計熱力学) (100 点)

統計熱力学を学ぶ際、系と熱浴を分ける考え方やその設定方法にとまどう場合がある。ここでは分布関数の導出を行ないながら、系と熱浴の設定の重要性を再確認する。相互作用のない、同一粒子が N_0 個ある状態を考える(全エネルギーを U_0 とする)。この状態を以下のように熱浴と系に分ける。すなわち、系には N 個の粒子があり(熱浴には $N_0 - N$ 個)、系はエネルギー E_S の量子状態 S にあるとする(熱浴のエネルギーは $U_0 - E_S$)。系と熱浴は粒子の移動を許す熱平衡状態にあるものとする。以下でボルツマン定数を k_B とし、系のエネルギーの原点を 0 とする。

系がこの特定の量子状態 S をとる確率 $P(N, E_S)$ を考える。 $P(N, E_S)$ は、系と熱浴がとりうる状態数の積に比例するが、上のように系の粒子数と量子状態を決めた場合、系のとりうる状態数は 1 である。したがって $P(N, E_S)$ は熱浴がとりうる場合の数に比例する。

- (1) 热浴のエントロピー $\sigma(N_0 - N, U_0 - E_S)$ を使って^{注1)} $P(N, E_S)$ を書き下せ。ただし比例定数を C とする。

ここで $N_0 \gg N$ かつ $U_0 \gg E_S$ なので、(1)で求めた右辺を N_0 と U_0 の周りで展開すると、

$$P(N, E_S) = C \exp(\sigma(N_0, U_0)) \exp(-N(\partial\sigma/\partial N_0)_{U_0} - E_S(\partial\sigma/\partial U_0)_{N_0})$$

となる。

- (2) 温度 T と化学ポテンシャル μ の定義を使い、 $P(N, E_S)$ を大きな分配関数 Z (ギブス和、大きな状態和とも呼ばれる) T および μ を用いて書け。その際、導出過程も書くこと。ここで $P(N, E_S)$ は全ての粒子数 N と量子状態 S について和をとると 1 になることを用いよ。また Z は次式のように定義されており、和は全ての粒子数 N (0 も含む) と量子状態 S について実行するものとする。

$$Z = \sum_N \sum_S \exp((N\mu - E_S)/k_B T)$$

フェルミ粒子の分布関数を導出する。今まで N 粒子系の量子状態を考えたが、以下では系のエネルギーは、1 粒子エネルギー準位を占有する粒子数 N と、その準位のエネルギー ε との積で書けるものとする(このように系をとることで Z の計算が非常に簡単になる)。フェルミ粒子の場合、ある準位 ε を占有する粒子数は、0 または 1 個(ここではスピン量子数については考えない)なので、それに対応した系のエネルギーはそれぞれ 0 と ε になる。

- (3) フェルミ粒子系の Z を求めよ。

- (4) 分布関数 $f(\varepsilon)$ の定義を 25 字以内で述べ、フェルミ粒子系の分布関数を定義式から導け。

- (5) 同様の方法でボーズ粒子系の分布関数を導出せよ。その際、導出過程も書くこと。熱浴は充分大きく、実質的に N_0 を無限大にしてもよいとする。

注 1) 通常のエントロピーは $S = k_B\sigma$ で定義される場合が多い。

II-3 (磁気レンズ) (100 点)

図のように 4 つの四角形のコイルが組み合わされた磁気回路がある。これについて以下の問い合わせよ。xy 平面上のそれぞれの導線の座標が $(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$ にあるものは紙面に向かって入って行く方に電流が流れ、座標が $(b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$ にあるものは紙面から出てくる方向に電流が流れている。また、 $a > b > 0$ である。また磁気回路の中央部 ($z = 0$) ではそれぞれのコイルは反平行に電流 I の流れる無限に長い 2 本の導線で近似できると考えてよい。

(1) xy 平面上 ($z = 0$) での磁力線の様子を定性的に図示せよ。

(2) 原点付近での x 軸上の磁場 $\mathbf{B}(x, 0, 0)$ を求めたい。

(a) x 軸上の磁場は B_y 成分しか持たないことを示せ。

(b) $\mathbf{B}(x, 0, 0)$ を x 座標の一次までの関数として求めよ。

(c) 同様に y 軸上の磁場 $\mathbf{B}(0, y, 0)$ も求めよ。

(3) この磁気回路は電荷を持った z 軸方向に運動する粒子に対して、有効長が L の磁気レンズとして働く。この事実を確認してみよう。コイルの z 方向終端での磁場の乱れを無視できるとすると、コイルに囲まれた空間では、

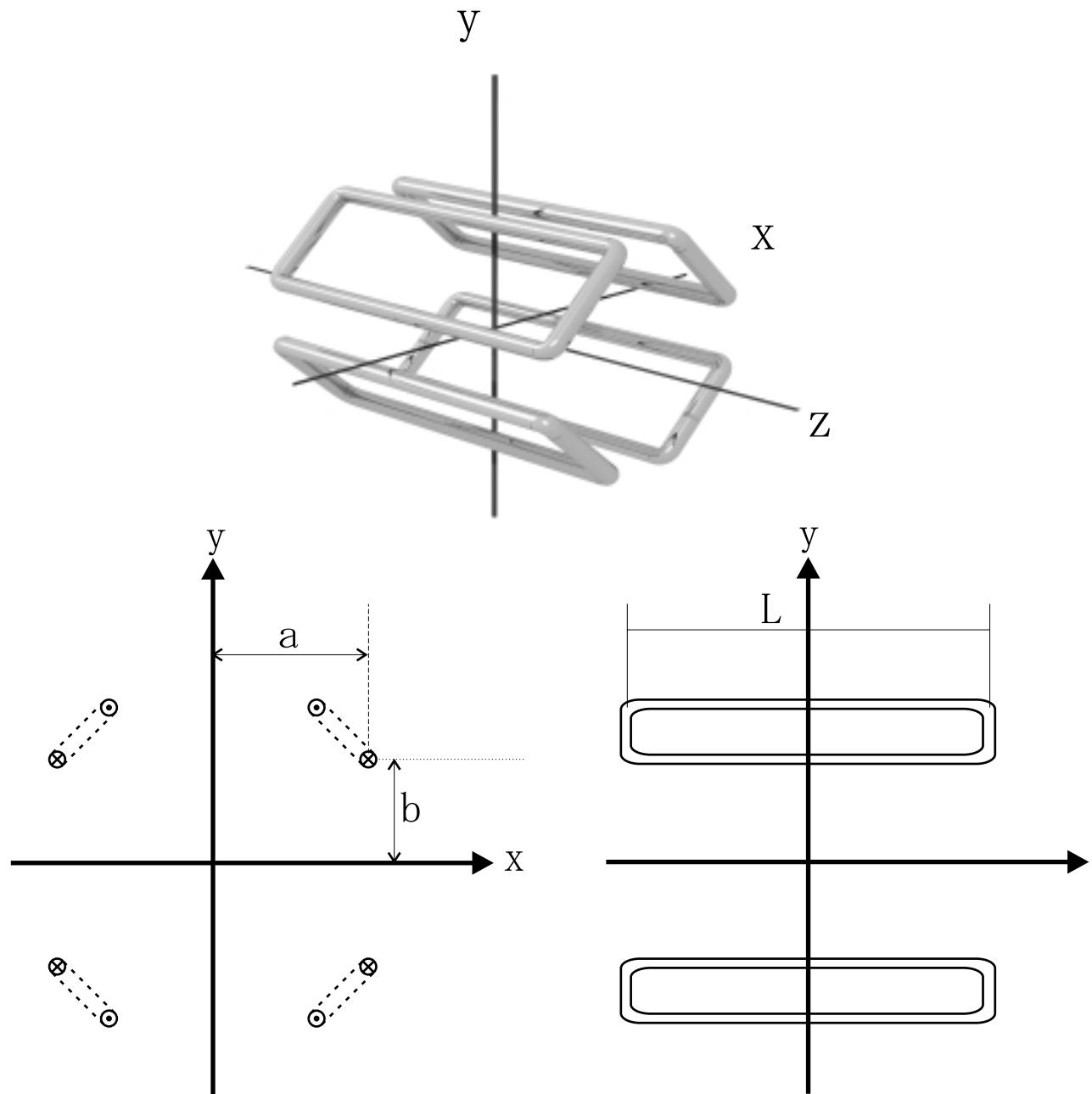
$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(x, y, 0) \quad (|z| < \frac{L}{2})$$

でそれ以外では

$$\mathbf{B}(x, y, z) = 0 \quad (|z| > \frac{L}{2})$$

が成り立つと考えることができる。次にレンズとしての厚み L は運動する粒子にとっては十分薄いとすると、粒子はレンズを通過するときその座標を変えず、磁場によって方向のみえると近似することができる（薄いレンズの近似法）。正の電荷 e と運動量 p を持った粒子を、xz 平面上を z 軸の負の方向から z 軸に平行にレンズに入射した場合を考察し、焦点距離 f_x を求めよ。また同様に yz 平面上に入射したときの焦点距離 f_y をもとめよ。但し、凹レンズの焦点距離は負の値を取るとせよ。

(4) 同様なもうひとつの磁気回路を z 軸の回りに 90 度回して、中心距離 D だけ離しておいたとする。この複合磁気回路のレンズとしての働きを前問と同様に考察し焦点距離 F_x, F_y を求めよ。ただし $|f_x| >> D, |f_y| >> D$ としてよい。



平成 12 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。これから 3 問選択せよ。
- (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択) (解析力学) (100 点)

ラグランジアンが $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, s)$ で与えられる力学系を考える。ここで、 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ は一般座標、 $\dot{q}_i, (i = 1, \dots, n)$ は一般速度で、 q_i の上につけられたドットは、時間 s による微分を表す。 q_i に正準共役な一般運動量を p_i とする。

そこで次のような作用積分

$$W = \int_0^t L(q_1(s), \dots, q_n(s), \dot{q}_1(s), \dots, \dot{q}_n(s), s) ds \quad (\text{A})$$

を考える。ここで、 $q_i(s)$ は、オイラー・ラグランジュ方程式を解いて、実現される運動である。 W は、時間 t のほかに、 $q_i(t), (i = 1, \dots, n)$ および初期値 $q_i^0 = q_i(0), (i = 1, \dots, n)$ に依存すると考えられる。

$$W = W(q_1, \dots, q_n, q_1^0, \dots, q_n^0, t) \quad (\text{B})$$

ここで $q_i(t)$ をあらためて q_i と書いた。

- (1) このようにして作られた W について

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial q_j^0} = -p_j^0, \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (\text{C})$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $p_j^0 = p_j(0)$.

- (2) W がハミルトン・ヤコビの方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = 0 \quad (\text{D})$$

を満足することを証明せよ。ここで、 $H(\dots)$ はハミルトニアンである。

- (3) W は、正準変換 $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0)$ の母関数になっていることを証明せよ。

- (4) 1 次元調和振動子のハミルトニアンが

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (\text{E})$$

で与えられているとき、 W は

$$W = \frac{\omega}{2 \sin(\omega t)} [(q^2 + (q^0)^2) \cos(\omega t) - 2qq^0] \quad (\text{F})$$

で与えられることを示せ。ただし、 $q^0 = q(0)$ 。

- (5) 表式 (F) で与えた W を t で微分し、 $-\partial W / \partial t$ が (E) で与えられているハミルトニアン H になっていることを示せ。

III-2 (選択) (等角写像) (100 点)

比抵抗 ρ の一様な材質でできている半径 a 、厚み d の薄い円板の周上に小電極を4つ付ける。電極Aと電極Bを定電流電源につなぎ、円板を通って電極Aから電極Bに流れる電流が I になるようにした。また、電極Cと電極Dでは外部との電流の出入りはないとする。このときの電極Cと電極Dの間の電位差 V を求めたい。

まず、円板の中心を原点とする極座標 r, θ を考え、それぞれの電極の θ 座標を $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$ とする。電位差 V を $\rho, a, d, I, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$ の関数として表したとき、 V は ρ, a, d, I にどのように依存するか考えよう。

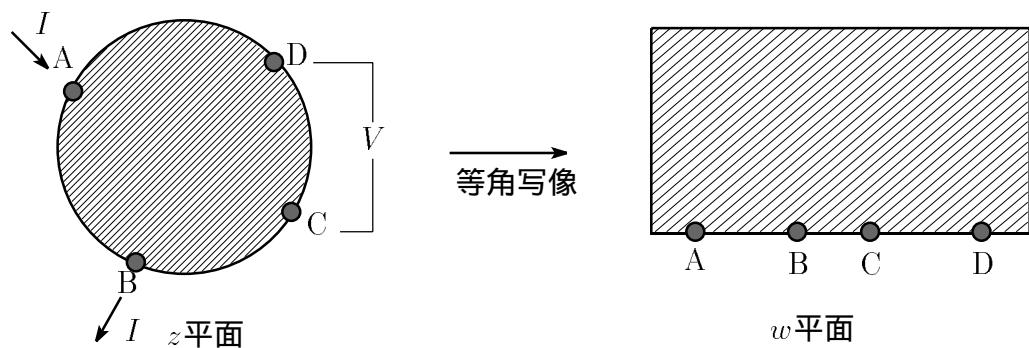
- (1) V は ρ と I に比例し、 d には反比例すること、すなわち、 $a, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$ だけに依存する関数 f があって、

$$V = I \frac{\rho}{d} f(a, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D)$$

と書けることを示せ

- (2) 上式右辺の f が無次元量であることを示し、そのことから V が a にはよらないことを説明せよ。

V が a に依存しないことがわかったので、以下では $a = 1$ とし、円板を複素平面 $z = re^{i\theta}$ 上の単位円板 $|z| \leq 1$ とみなし、 V を $z_A = e^{i\theta_A}, z_B = e^{i\theta_B}, z_C = e^{i\theta_C}, z_D = e^{i\theta_D}$ で表すことを考える。そのために、単位円板 $|z| \leq 1$ を等角写像によって上半平面 $\{w; \operatorname{Im} w \geq 0\}$ に写し、その写像で、 z_A, z_B, z_C, z_D はそれぞれ w_A, w_B, w_C, w_D に写るとする。



- (3) 知りたい電位差 V を求めるためには、円板と厚みが同じで同じ材質からなる上半平面 $\{w; \operatorname{Im} w \geq 0\}$ に、4つの電極A, B, C, Dが w_A, w_B, w_C, w_D のところに付いているとして、円板のときと同様の設定で、電極Cと電極Dの間の電位差を求めればよい。これはなぜか説明せよ。

- (4) 上半平面でもし電極 B がなくて、電極 A から流れ込む電流が無限遠まで流れしていくと仮定すると、座標が w である点における電位 $\phi_A(w)$ は、

$$\phi_A(w) = -I \frac{\rho}{d} \frac{1}{\pi} \log |w - w_A| + const.$$

と書けることを示せ。同様に、もし電極 A がなくて、無限遠から流れてきた電流が電極 B から出て行くと仮定したときの w における電位 $\phi_B(w)$ はどう書けるか。

- (5) 今考えたい場合、すなわち電極 A から流れ込んだ電流が電極 B から出て行く場合の w における電位は、上の $\phi_A(w)$ と $\phi_B(w)$ の和で与えられる。これはなぜか。このことから V は

$$V = -I \frac{\rho}{d} \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{(w_C - w_A)(w_D - w_B)}{(w_C - w_B)(w_D - w_A)} \right|$$

と書けることを示せ。

最後に、上で得られた結果を z_A, z_B, z_C, z_D で書きなおすことを考える。一般に、複素平面上の 4 つの点の座標を z_1, z_2, z_3, z_4 としたとき、次の量をその 4 点の非調和比と呼んでいる。

$$u = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

- (6) 非調和比は分数一次変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad - bc \neq 0$) をどこしても不变に保たれることを示せ。
- (7) 単位円から上半平面への等角写像の一例を示し、それが分数一次変換であることを確かめよ。
- (8) これらのことを使って V を z_A, z_B, z_C, z_D で表せ。

III-3 (選択) (行列式の計算) (100 点)

- (1) N 次複素正方行列 L が N 個の固有値 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$ を持つとき、行列 L の指数写像 $\exp L$ の固有値は、 $\exp \ell_1, \exp \ell_2, \dots, \exp \ell_N$ と書けることを示し、さらに次の公式 (A) が成り立つことを証明せよ。

$$\det(\exp L) = \exp(\text{Tr}L) \quad (\text{A})$$

ここで、 $\det(\exp L)$ は行列 $\exp L$ の行列式を表し、 $\text{Tr}L$ は行列 L の跡(トレース)で

$$\text{Tr}L = \sum_{k=1}^N L_{kk}$$

によって定義される。(行列 L は対角化可能として証明してよい。)

- (2) 上記公式 (A) を利用して行列式

$$\det(I - gM) \quad (\text{B})$$

を $\text{Tr}M^k$, ($k = 1, 2, 3, 4$) などを用いて展開し、 g の 4 次の項まで計算せよ。ただし、 I は N 次単位行列、 M は N 次複素正方行列 ($N > 4$)、 g は定数で、 gM のノルム $\|gM\|$ は

$$\|gM\| = |g| \left(\sum_{i,j=1}^N |M_{ij}^2| \right)^{1/2} < 1 \quad (\text{C})$$

なるものとする。

- (3) M が 3 次の複素正方行列であるとき

$$\frac{1}{6}(\text{Tr}M)^3 - \frac{1}{2}(\text{Tr}M)(\text{Tr}M^2) + \frac{1}{3}\text{Tr}M^3 = \det M \quad (\text{D})$$

が成り立つことを証明せよ。

- (4) 一般に、行列 M が N 次の正方行列、 I が N 次の単位行列であるとき、行列式 (B) を g で展開すると g^N の項の係数は $(-1)^N \det M$ となることを証明せよ。

- (5) $I - gM$ が 4 次の正方行列で、 M の成分が

$$M_{i4} = -M_{4i} = E_i, \quad M_{jk} = \epsilon_{ijk} B_i \quad (i, j, k = 1, \dots, 3) \quad (\text{E})$$

で与えられるとき、行列式 $\det(I - gM)$ を計算せよ。ここで ϵ_{ijk} の値は、添字 ijk が 123 の偶置換ならば 1、奇置換のときは -1 なるものとする。

III-4 (選択) (一次元スピン系) (100 点)

量子スピン (大きさ 1) が 1 次元的に並んだ系を考える。そのハミルトニアンを次式で与える。

$$\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^N (S_{ix} S_{i+1x} + S_{iy} S_{i+1y} + S_{iz} S_{i+1z}) + D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 \quad (\text{A})$$

第 1 項はスピン間の結合のエネルギーであり、隣りあうスピンどうしだけが相互作用するとした。また、第 2 項のため、各サイト i で $|S_{iz} = \pm 1\rangle$ の状態と $|S_{iz} = 0\rangle$ の状態のエネルギーが異なっている。以下では $|D| \gg |J|$ であると仮定する。

$D > 0$ の場合:

$D \gg |J|$ では (A) の第 1 項が近似的に無視でき、ハミルトニアンは次式のようになる。

$$\mathcal{H}' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 \quad (\text{B})$$

- (1) (B) 式で与えられるスピン系の分配関数 Z と自由エネルギー F を求めよ。さらにエントロピーと比熱を計算し、それらの温度変化の概略を図で示せ。
- (2) つぎにこの系に磁場をかけその磁気的性質を調べる。
 - a) z 方向に磁場 H をかけたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}'' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 - \mu H \sum_{i=1}^N S_{iz} \quad (\text{C})$$

- b) x 方向に磁場 H をかけたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}'' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 - \mu H \sum_{i=1}^N S_{ix} \quad (\text{D})$$

となる。ここで μ はスピンが持つ磁気モーメントである。帯磁率 $\chi = -d^2 F / dH^2$ を a) と b) のそれぞれの場合に計算せよ。また、その温度変化の概略をひとつの図に描け。

ヒント :

$S^\pm = S_x \pm iS_y$ についてつぎの関係式が成立する。

$$S^+ |S_z\rangle = \sqrt{S(S+1) - S_z(S_z+1)} |S_z+1\rangle, S^- |S_z\rangle = \sqrt{S(S+1) - S_z(S_z-1)} |S_z-1\rangle$$

$D < 0$ の場合:

- (3) 温度 T に対して $k_B T \ll |D|$ の条件が成立する低温において (A) のミルトニアンは次式のようなイジングスピンのハミルトニアンで近似できることを示せ。ここで k_B はボルツマン定数である。

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = J \sum_{i=1}^N S_i z S_{i+1} z \quad (\text{E})$$

- (4) 1 次元のイジングスピンの分配関数は $N \gg 1$ のときには $Z = (2 \cosh(J/k_B T))^N$ と求められている。この結果を用いてエントロピーの温度変化を計算せよ。また $|J| \ll k_B T \ll |D|$ の温度領域ではエントロピーが $N k_B \ln 2$ になることを示し、その物理的解釈を述べよ。
- (5) $k_B T \gg |D|$ のときには (A) のハミルトニアンにもどって考える必要がある。この高温の極限ではエントロピーが $N k_B \ln 3$ になる。(4)で議論したイジング模型で近似できるときの高温の極限と比較してその違いの理由を説明せよ。

III-5 (選択)(電送線) (100 点)

平行 2 線の電送線と同軸ケーブルをつないでパルス信号を送りたい。これに関して以下の問い合わせよ。光速 c は 3×10^8 m/sec であり、真空の透磁率 μ_0 と誘電率 ϵ_0 の間には $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] の関係がある。

- (1) 平行 2 線の電送線の場合、媒質は空気と考えられる。導線の半径を d 、相対距離を D としたとき 特性インピーダンスと信号の伝搬速度を求めよ。いま、 $d = 1$ mm、 $D = 7.39$ mm である。特性インピーダンスと伝搬速度を数値的に求めよ。なお、単位長さあたりのインダクタンスとキャパシタンスは平行 2 線の場合それぞれ

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log_e\left(\frac{D}{d}\right), C = \frac{\epsilon_0\pi}{\log_e\left(\frac{D}{d}\right)}$$

と近似できる。必要ならば $e^2 \approx 7.39$ を用いよ。

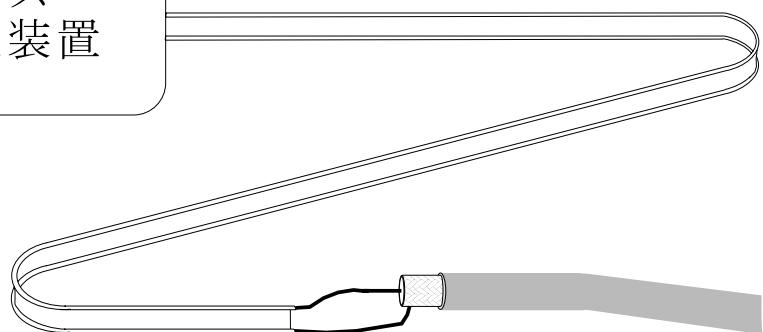
- (2) 同軸ケーブルの場合媒質があり、比透磁率 μ 、比誘電率 ϵ をもつ。芯線の半径を r 、外皮の半径を R としたとき特性インピーダンスと信号の伝搬速度を求めよ。いま、 $r = 1$ mm、 $R = 7.39$ mm であり、媒質の比透磁率は 1、比誘電率は 4 である。特性インピーダンスと伝搬速度を数値的に求めよ。なお、単位長さあたりのインダクタンスとキャパシタンスは同軸ケーブルの場合それぞれ

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \log_e\left(\frac{R}{r}\right), C = \frac{2\epsilon\epsilon_0\pi}{\log_e\left(\frac{R}{r}\right)}$$

で近似できる。

- (3) 直接ケーブルをつなぐと接続部で反射がおこる。図で示されたように出力インピーダンスが平行 2 線の電送線の特性インピーダンスに等しいパルス発生装置をつなぎ、幅 50 nsec、波高 1 V の矩形波を発生した。30m 先で無限に長い同軸ケーブルに接続してある。接続部での反射係数を数値的にもとめ、パルス発生装置出力につないだオシロスコープで観測される波形を図示せよ。図には縦軸と横軸に数値および単位を記すこと。時間軸の原点はパルス発生装置から出た矩形波の立ち上がる時間にとること。
- (4) 反射は接続部にトランスを挿入することによって防ぐことができる。トランスの巻き線比 n_1/n_2 を数値的に求めよ。ここで n_1 は平行 2 線側の巻き数であり、 n_2 は同軸側の巻き数である。
- (5) 平行 2 線と同軸ケーブルのどちら側から信号を送っても反射が起らないように抵抗だけを使って接続したい。抵抗のみの回路を設計せよ。抵抗値には数値を与えること。

パルス
発生装置



III-6 (選択) (γ 線) (100 点)

波長を自由に変えられる 線光源として以下のようなものを考えよう。

エネルギー E_e 、質量 $m_e (m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV})$ の電子が蓄積リングの中を周回している。これにレーザーからの光子 (エネルギー E_ω) を正面衝突させ、電子の進行方向から角度 θ の方向に弾性散乱させる。レーザー光は電子から運動エネルギーをもらい波長が短くなる。

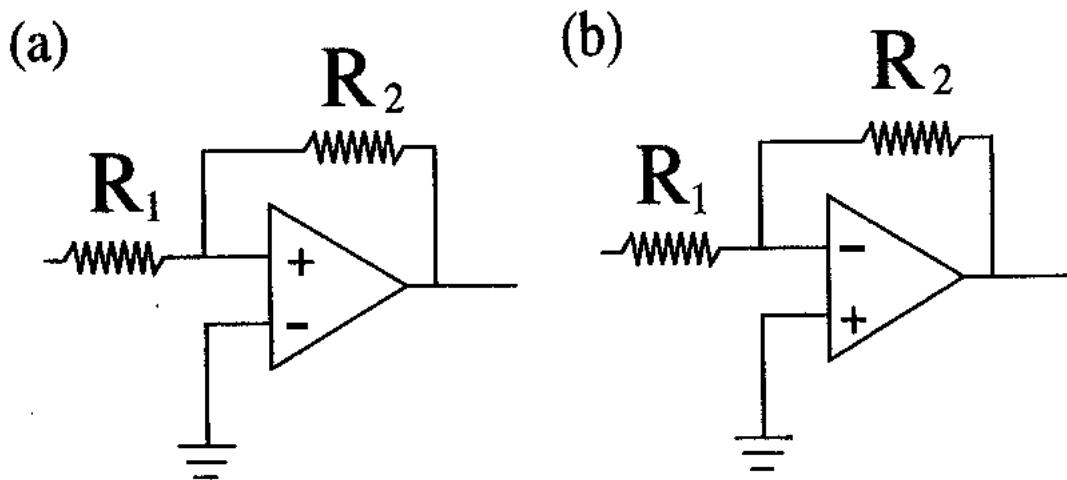
- (1) このとき散乱された光子のエネルギーを θ の関数として求めよ。

すなわち散乱された光のエネルギーを変えることは電子のエネルギー、レーザー光の波長、あるいは散乱角を変えることで実現できる。

- (2) (1)で求めた式では散乱される光子のエネルギーは $\theta = 0$ で最大になる。レーザー光の波長を 500 nm とし、周回している電子の全エネルギー E_e を 260 MeV にしたとき、散乱される光の最大のエネルギーは約何 MeV になるか？

NaI(Tl) シンチレーション検出器及び光電子増倍管を用いて 1 MeV の単色ガンマ線のエネルギースペクトルを測定したい。

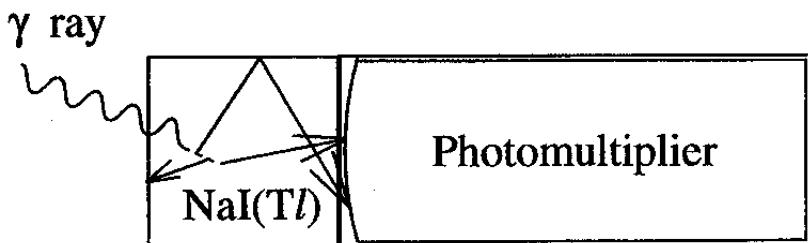
- (3) シンチレーション検出器からの出力信号は通常增幅器を通して増幅、整形されて波高分析器にいれられる。增幅器には一定の増幅度を得るために、通常演算增幅回路が用いられている。以下の (a) と (b) のどちらが正しい回路か？そしてその場合の增幅回路の増幅度はいくらか？図で R_1, R_2 は抵抗を示し、演算增幅器の入力端子の + (-) の意味は出力に対して入力が同 (逆) 位相であることを示す。



- (4) 波高分析器では 線と NaI(Tl) の相互作用を反映したエネルギースペクトルが得られる。得られたガンマ線のエネルギースペクトルはどのようになるか図示せよ。エ

エネルギースペクトルのどの部分に主にどの相互作用が効いているかを明示すること。

- (5) エネルギースペクトル中に見られる全エネルギーピークの幅について考えよう。1MeVの γ 線はその全エネルギーが NaI(Tl) 結晶中で吸収されたとすると、平均約 25 eV のエネルギー損失に対して 1 つのシンチレーション光の割合で発光する。このシンチレーション光の数が電気信号の波高に対応している。NaI(Tl) 結晶を図に示すように、光電子増倍管 (Photomultiplier) に接続したとしよう。シンチレーション光の数は光電子増倍管で電気信号になるまでに各種の効率のために減少していく。それゆえ電気信号の波高はゆらぐことになる。この揺らぎが全エネルギーピークの幅に対応している。考慮すべき各種の効率としてはどのようなものが考えられるか？ この幅は全エネルギーピークの波高の約何パーセントになるか？



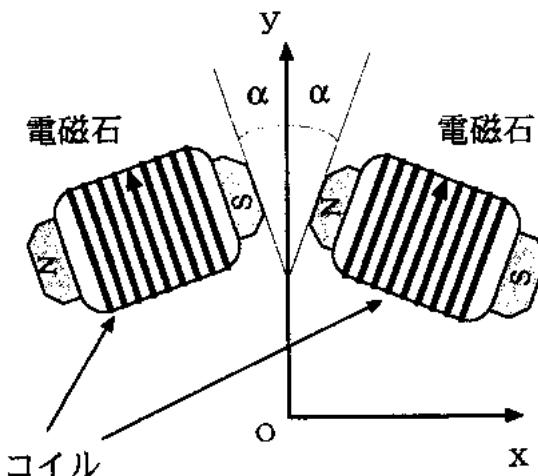
III-7 (選択) (磁化率測定) (100 点)

ピエール・キュリーは約 100 年前に、さまざまな物質の磁化率を広い温度範囲で測定し、常磁性体でのキュリーの法則を見つけた。彼の用いた方法は、磁場勾配の中では、磁性体に力が作用することを利用したもので、その力による測定試料の僅かな変位を測定し、磁化率を求めるものである。この実験に関する以下の間に答えよ。

同一の電磁石 2 台を図のように配置する。各電磁石の N と S 極を向かい合うようにコイルに電流を流し励磁すると、原理的には y 軸上の y 方向の磁場成分 H_y を 0 にすることができる。 z 方向（紙面に垂直）の磁場成分は、磁極の中心では無視でき、さらに $x = 0$ の近傍での磁場勾配、 $\partial H_x / \partial x$ および $\partial H_x / \partial z$ も無視できるとする。

図の説明

測定系を真上から見た図。同一の電磁石 2 台が図の y 軸からそれぞれ角度 α だけ傾いている。（ただし電磁石の中心軸は xy 平面内にあるものとする）。コイルに流す電流の向きを図の矢印の方向で示してある。測定試料は y 軸上に設置する。

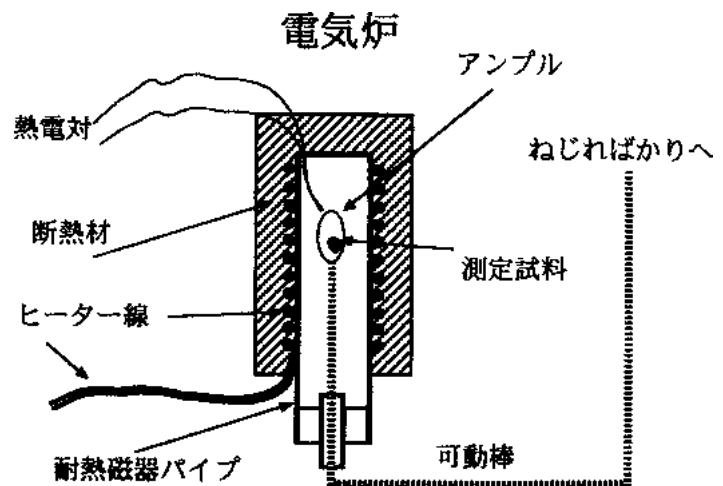


- (1) H_x と $\partial H_x / \partial y$ の y 依存性の定性的なグラフを描け。縦軸は任意のスケールでよい。また図の電磁石の傾き角 α を小さくするとこれらのグラフはどのように変化するか。2つの電磁石の磁極の中心間隔を固定した場合について、定性的に述べよ。
- (2) 磁場と常磁性体の相互作用エネルギーを考えて、測定試料に働く力の大きさを磁場の強さ、磁場勾配および単位質量当たりの磁化率 χ と試料の質量 m であらわせ。
- (3) 実際に磁化率を測定する場合、有限の大きさの試料は、どの場所に配置するのがよいか、またその理由を述べよ。
- (4) 高温での磁化率を測定するために、キュリーは下のような電気炉を用いた。金属線（直径 0.25mm）をヒーターとし、セラミックスの円筒の外周に巻いていく。100V の直流電圧を加える場合に、必要なヒーター線の長さを、金属の電気抵抗率の常識的な値を用いて計算せよ。必要とする発熱量は 1500W である。ただし抵抗率の温度変化を考える必要はない。

- (5) キュリーはヒーター線を巻く場合に、必要な長さを二つ折りにし、その二重線を互いに接触しないようにして外周に巻いた。その理由としてどんなことが考えられるか。また円筒の内部に置かれた有限の大きさの試料の垂直方向の温度不均一を小さくするために、彼はヒーター線の巻き方を工夫した。どんな工夫をしたと考えられるか、その理由と共に答えよ。
- (6) 試料の温度を測定するのに、熱電対が利用された。熱電対の原理とそれを用いて温度を測定する場合の測定系(必要な装置、接続方法など)を書け。またよく利用される熱電対の具体例を一つあげよ。

図の説明

装置を横から見た断面図を示している。測定試料はガラスのアンプルの中に入れてある。耐熱磁器パイプの外側にヒーター線が巻かれ、外側は断熱材で覆っている。試料の温度は熱電対で測定する。電気炉全体が2つの電磁石の磁極間に設置される。試料は可動棒に取り付けられ、磁場による微小変位を先端のねじればかり(省略)に伝えて測定する。



平成 11 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (電磁気学 : 同軸ケーブル) (100 点)

実験室では目的に応じて様々な検出器を使用するが、検出信号を同軸ケーブルでオシロスコープ等の種々の測定器につないで観測することが多い。同軸ケーブルについて、基礎的な事を理解しておくことは大事である。内導体の直径が $2a$ 、外導体の直径が $2b$ の無損失の同軸線路について考える。観測する信号の波長が $\pi(a + b)$ より十分長い場合には、線路内を自由空間におけると同じ横波 (Transverse electromagnetic wave T E M 波) として図 1 に示す様に z 軸方向に伝わる。

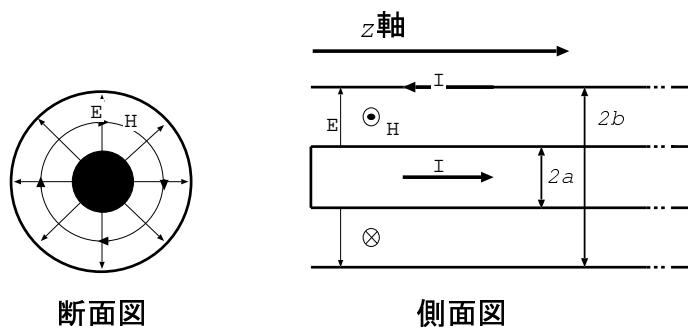


図 1

- (1) 媒質が真空の場合の Maxwell 方程式を用いて、T E M 波の電場は 2 次元の静電場の問題の解と変わらないことを示せ。真空の誘電率、透磁率を ϵ_0, μ_0 とし、電場、磁場の伝播方向に垂直な成分を $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ 、平行な成分を $\mathbf{E}_z, \mathbf{H}_z$ とせよ。
- (2) 内導体と外導体の間が真空だとして、
 - (a) 単位長さ当たりの静電容量 C とインダクタンス L を求めよ。
 - (b) Maxwell 方程式に基づいて、円筒座標を用いて電場 E 、磁場 H の波動方程式を導け。
 - (c) E, H ともに時間 t に関して、 $e^{-i\omega t}$ で変化するものとして、(i は虚数単位、 ω は信号の角周波数である。)(b) で求めた波動方程式を書き換えよ。
 - (d) 平面波 $e^{i(kz - \omega t)}$ を考え、 ϵ_0, μ_0 と光速 c との関係を示せ。
 - (e) 波動インピーダンス Z_w は E/H で表される。 Z_w を求めよ。

(f) (b) で求めた E の波動方程式、 H の波動方程式を内導体と外導体の間の空間でそれぞれ積分して、両導体間の電圧 V の方程式、両導体を流れる電流 I の方程式に書き換えよ。

(3) 無損失の伝送線路は分布定数 L, C の回路(図2)で表すことが出来る。

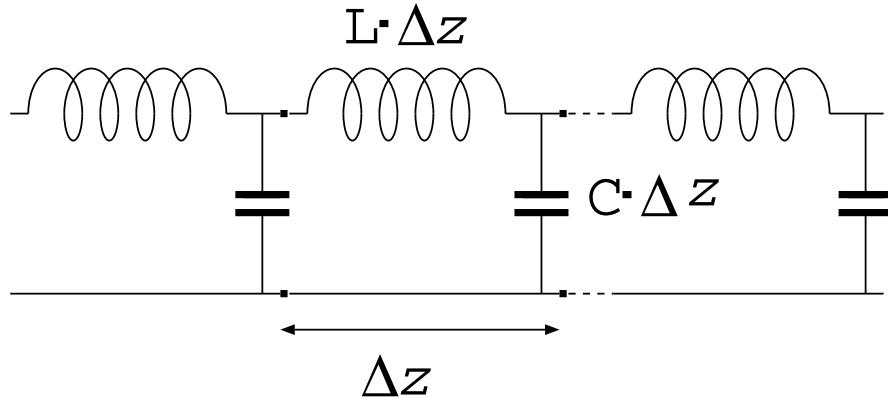


図2

(a) 線路上の、 V, I に関する微分方程式を示せ。

(b) V, I が $e^{-i\omega t}$ で変化するものとして、求めた微分方程式を書き換えよ。

(c) V, I が $e^{i(kz-\omega t)}$ で、変化するとして、 L, C と位相速度との関係を示せ。

(d) 線路の特性インピーダンスは、 $Z_0 = V/I$ で与えられる。 L, C との関係を示し、(2)(a)で求めた L, C を代入して Z_0 の値を求めよ。

付録

ベクトル公式:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

円筒座標 (r, θ, z) でのベクトル演算:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{\theta}} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

I-2 (量子力学) (100 点)

ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}^2 + \hat{W}^2(\hat{x}) + \hbar\sigma_3 \frac{d\hat{W}(\hat{x})}{dx} \right) \quad (\text{A})$$

で表されるスピン $1/2$ を持つ粒子の 1 次元運動を考えよう。但し、 σ_i ($i = 1, 2, 3$) はパウリ行列で交換関係、及び反交換関係

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2, \quad (\text{B})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{C})$$

を満たす。また、 $W(x)$ は x の実関数とする。

- (1) 具体的に $W(x) = m\omega x$ とすると、この模型は調和振動子ポテンシャル、及び定数磁場の中を 1 次元的に運動するスピン $1/2$ の粒子を記述し、状態は軌道部分である調和振動子の状態 $|n\rangle$ とスピン部分の状態 $|\pm\rangle$ の直積になる。ここで、 $|n\rangle$ は調和振動子のエネルギー固有値 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n = 0, 1, \dots$) を与える状態、 $|\pm\rangle$ はスピンの第 3 成分の固有状態 $\hat{S}_3|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma_3|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ である。この場合のエネルギー準位を、縮退度を明記して図示せよ。

この具体例に現れる定性的な性質は、実はこの系の対称性に起因しており、一般的な $W(x)$ の場合にも成り立つことを示すことができる。このことについて、この系の保存量であるエルミート演算子

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\sigma_1\hat{p} + \sigma_2\hat{W}(\hat{x})), \quad \hat{Q}_2 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\sigma_2\hat{p} - \sigma_1\hat{W}(\hat{x})), \quad (\text{D})$$

を用いて、以下の手順で考察することにしよう。

- (2) $\hat{Q}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_1 \pm i\hat{Q}_2)$ の間の反交換関係 $\{\hat{Q}_+, \hat{Q}_+\}$, $\{\hat{Q}_-, \hat{Q}_-\}$ 、及び $\{\hat{Q}_+, \hat{Q}_-\}$ を計算せよ。またこれらと \hat{S}_3 との交換関係 $[\hat{S}_3, \hat{Q}_\pm]$ を計算せよ。

次に、 \hat{H} , \hat{S}_3 を対角化する表示で固有状態 $\{|n, \pm\rangle; \hat{H}|n, \pm\rangle = E_n^{(\pm)}|n, \pm\rangle, \hat{S}_3|n, \pm\rangle = \pm\hbar/2|n, \pm\rangle, n = 0, 1, \dots\}$ が求まったとしよう。

- (3) (2) で求めた関係式からエネルギー固有値が非負 $E^{(\pm)} \geq 0$ であることを示せ。また、エネルギー準位 $E^{(\pm)} \neq 0$ は、少なくとも 2 重に縮退していることを示せ。
- (4) (2) の関係式を用いて、もし存在するなら基底状態となる $E = 0$ の状態の満たすべき微分方程式を求め、それを形式的に積分せよ。
- (5) (4) で求めた状態が実際に存在するためには、この波動関数が規格化可能でなければならない。波動関数が規格化可能であるためには、 $W(x)$ はどのような性質を満たさなければならないか。 $W(x)$ が x の多項式の場合に、その条件を求めよ。

I-3 (量子統計 : 固体) (100 点)

金属の熱的性質について考察する。金属の性質は伝導電子と結晶の格子振動によって特徴づけられる。金属は1価金属とする。 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ (ボルツマン定数)、 $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$ (プランク定数/ 2π)、 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (電子の質量)、格子定数 = $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ 、 R (気体定数) = $k_B \cdot N_A = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、 N_A はアボガドロ数である。金属中の音速 v は $5 \times 10^3 \text{ m/sec}$ とする。これらの値を用いて以下の間に答よ。数値は有効数字1桁まで求めよ。

- (1) 伝導電子をフェルミ粒子の自由気体（相互作用はない）として取り扱う。
 - (a) 自由電子の波動関数は $\Psi(r) \sim \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})$ であるから、一辺 L の立方体の試料（体積 $V = L^3$ ）を考えると、周期境界条件より波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の取りうる値はどうなるか？エネルギーと波数の関係はどうなるか？
 - (b) 電子はフェルミ統計に従うので、低いエネルギー準位より順に2個づつ（スピントの自由度）電子を詰めていくと、絶対零度で結晶中の電子の取りうる最も大きい波数 k_F (フェルミ波数という) を求めよ。ここで L は充分に大きいとして波数を連続数として扱え。 k_F を持つ電子のエネルギーを E_F とし、 $E_F = k_B T_F$ よりフェルミ温度 T_F を求めよ。上の数値を用いて T_F の大きさを概算せよ（室温と比較せよ）。電子が古典統計に従う時は、1モル当たりの電子比熱は $C_e = 3R/2$ であるが、 $T \ll T_F$ の時は電子はフェルミ縮退しているので、 $C_e \sim R(T/T_F)$ である。
- (2) 格子振動の比熱 C_p について、デバイモデルを用いて考える。格子振動を量子化したものをフォノンといい、フォノンの周波数 ω と波数 k の間には $\omega = v|\mathbf{k}|$ の関係がある。ここで v は音速であり、デバイモデルでは v は等方的である。
 - (a) 格子点は不連続であるから、結晶中のフォノンの波数には上限があり、これを Debye 波数 k_D という。格子振動には1つの縦波と2つの横波の振動モードがあるが、縦波と横波の音速は等しいとし、 $k = 0$ から k_D までに含まれる各振動モードの数が格子点の数に等しいとして、 k_D を求めよ。波数 k_D を持つフォノンのエネルギーを温度で表わし、それをデバイ温度 Θ_D という。 Θ_D を求めよ（数値）。
 - (b) 1モル当たりの格子振動の内部エネルギーを求めよ。
 $T \gg \Theta_D$ の時、格子振動のモル比熱 C_p を求めよ。
 $T \ll \Theta_D$ の時、 C_p を求めよ。必要なら公式 $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ を使ってよい。
 - (c) $T = 1\text{K}$ で、 C_e/C_p の比を求めよ。（数値）
- (3) 低温 ($T \sim 1\text{K}$) での金属の性質は大体の場合、伝導電子によって決まる（フォノンの寄与は無視する）。伝導電子の平均散乱時間を τ として、熱伝導率 κ を求めよ。電子のフェルミ速度 $V_F = \hbar k_F/m$ 、単位体積当たりの電子比熱 $c = C_e/V_m$ を用いよ。

V_m はモル体積である。(ヒント: 全ての電子は一定の速度 V_F で運動しており、一定時間 τ 毎に等方的に散乱されて、そこでの局所的な温度と熱平衡になるとする。即ち、電子は平均自由行程 $l = V_F \cdot \tau$ 行って、局所熱平衡に成る。微小な温度勾配 ∇T がある時、ある面を横切って流れる単位面積当たりの熱流 \mathbf{J} を求め、 $\mathbf{J} = -\kappa \nabla T$ と比較せよ。熱伝導率 κ の単位は [J/K · sec · m] である。)

平成 11 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (解析力学) (100 点)

Here we consider a model based on a linear symmetrical triatomic molecule¹. In the equilibrium configuration of the molecule two atoms of mass m are symmetrically located on each side of an atom of mass M (see Fig. 1). All three atoms are on one straight line, the equilibrium distances apart being denoted by b . For simplicity we shall consider only motion along the line of the molecule and the actual complicated interatomic potential will be approximated by two springs of force constant k joining the three atoms. There are three obvious coordinates x_1, x_2 and x_3 marking the position of the three atoms on the line as is shown in Fig. 1. Let us now introduce coordinates for each atom relative to the equilibrium positions as η_1, η_2 and η_3 . Here we only consider small oscillations.

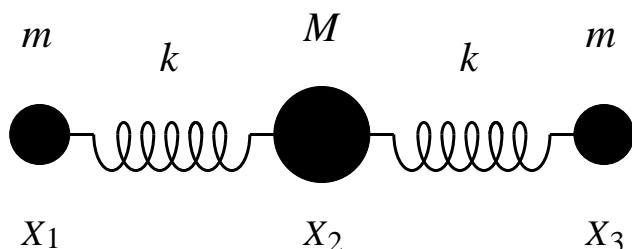


Fig. 1

- (1) Find the potential energy, the kinetic energy and the Lagrangian of the system.
- (2) Find the Lagrange equations of this system.
- (3) Now we are led to try an oscillatory solution of the form $\eta_j = A_j e^{-i\omega t}$. After substituting this solution into the equation of motion, find the equations for the amplitude factors A_j 's.
- (4) Find three non-negative solutions for ω .
- (5) For each normal mode, obtain the relative amplitudes of the three atoms and sketch their motions.

¹ triatomic molecule: 3 原子分子

- (6) This linear triatomic molecule system can be reduced to one of two degrees of freedom by introducing 'internal' coordinates $y_1 = x_2 - x_1$ and $y_2 = x_3 - x_2$, and eliminating x_2 by requiring the center of mass remains at rest. Obtain the frequencies of the normal modes and compare them with the results of (4). Note that it is convenient to introduce coordinates relative to the equilibrium as $\zeta_1 = y_1 - b$ and $\zeta_2 = y_2 - b$.
- (7) Let us take the initial condition ($t = 0$) that the center atom is at rest but displaced by an amount a_0 from equilibrium, the other two being at their equilibrium points. Give the time evolution of ζ_1 and ζ_2 defined in (6). Find the amplitudes of the small oscillations of each atom about the center of mass.

(注) 解答は日本語でよい。

II-2 量子力学（原子・分子）(100 点)

- (1) 固体基盤上に量子ドットをつくることが可能になってきた。量子ドットは、 $1 \sim 0.1$ nm オーダーのスケールの空間に電子を閉じ込めるこことできるポテンシャル場であり、電子を捕えた量子ドットは、疑似原子であると見なせる。そこで、球対称の量子ドットが集合してできる疑似分子の性質を考えて見よう。まず、二つの等価な量子ドット 1,2 からできる水素分子様の疑似分子を取り上げてみる。相互作用していないときの各々の波動関数を χ_1, χ_2 とする。対称性を考慮すると、弱く相互作用した 2 つの量子ドットでは、新たに 2 つの”分子軌道” Ψ_s, Ψ_a が生じる。 Ψ_s, Ψ_a は、 χ_1, χ_2 の一次結合で表せると近似することにより、次のように表すことができる。

$$\Psi = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$$

この疑似分子に対するハミルトニアン \mathcal{H} が、互いに相互作用していない 2 つの量子ドットに対するハミルトニアン \mathcal{H}_0 と相互作用による摂動項 V の和で表されるとして ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$)、 $\mathcal{H}\Psi = \epsilon\Psi$ の左から χ_1^*, χ_2^* を作用させ、空間積分をとる。すると、相互作用が小さいとすると、近似的に次のような c_1, c_2 に関する代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (H_{11} - \epsilon)c_1 + V_{12}c_2 &= 0 \\ V_{21}c_1 + (H_{22} - \epsilon)c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで例えば、

$$\begin{aligned} H_{11} &= \int \chi_1^* \mathcal{H} \chi_1 d\tau \sim \int \chi_1^* \mathcal{H}_0 \chi_1 d\tau \\ V_{12} &= \int \chi_1^* \mathcal{H} \chi_2 d\tau \sim \int \chi_1^* V \chi_2 d\tau \end{aligned}$$

$c_1 = c_2 = 0$ でない解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} H_{11} - \epsilon & V_{12} \\ V_{21} & H_{22} - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

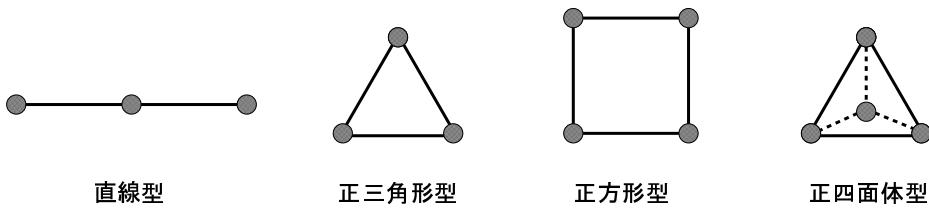
対称性により、 $H_{11} = H_{22} = \alpha, V_{12} = V_{21} = \beta$ とすると、

固有エネルギー	固有関数
$\epsilon_s = \alpha + \beta$	$\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + \chi_2)$
$\epsilon_a = \alpha - \beta$	$\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 - \chi_2)$

一般的に、 $\alpha > 0, \beta < 0$ となることに注意すると、 Ψ_s が安定な分子軌道となる。孤立した量子ドットに 1 個の電子が入ると、 α の固有エネルギーをもつ。そこで、 Ψ_s に一対の電子が入った水素分子様の疑似分子では、一つの”分子軌道”には、2つまでの電子が占めることができる（パウリの原理）ので、 $2(\alpha + \beta) - 2\alpha = 2\beta$ だけ全

電子エネルギーが安定化することになる（全電子エネルギーは、各電子のエネルギーの和で表されるとの近似をとる）。換言すると、 $|2\beta|$ がこの疑似分子の”化学結合エネルギー”に相当する。以上の議論を参考にして、次の間に答えなさい。ただし、最近接ではない量子ドット間の相互作用は無視することにする。

- (a) 3つの等価な量子ドットからなる、疑似分子に2つの電子が捕えられている。正三角形型と、直線型の各々の構造について、全電子エネルギーを計算して求め、どちらの構造がより安定か、論じなさい。（但し、 α や β の値は、上記の水素分子様の疑似分子の場合と変わらないと仮定し、スピン多自由度によるエネルギー変化については無視することにする）。
- (b) (a) の疑似分子について、電子が4つ入っている場合の、正三角形型と、直線型の相対的な安定性について論じなさい。
- (c) 4つの等価な量子ドットからなる疑似分子に、電子が2つ入っている。正方形型と正四面体型について電子の全エネルギーを求め、どちらがより安定となるか論じなさい。



- (2) 次に、平面の固体基盤上に作った円環状（半径 r ）の量子細線（一次元の井戸型ポテンシャルの両端がつながったものを考えればよい）に、電子が捕えられたときの状態について考えて見よう。ただし、電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ とする。

- (a) 二次元のシュレディンガー方程式は、以下の形で表される。これを参考にして、円環状の量子細線上の電子の状態を記述する波動関数（規格化すること）およびその固有エネルギーを求めなさい。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = E\Psi \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi)$$

但し、半径 r は一定。また、境界条件より、 $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$ が成り立つ。

- (b) 一個の電子が最低エネルギー準位に入っている（基底状態）。円環の半径を $r = 1.0 \text{ nm}$ としたとき、基底状態から第一励起状態に遷移させるのに必要なエネルギーをもつ光子 ($h\nu$) の波長を計算して求めなさい。（有効数字一桁）
- (c) 第一励起状態での軌道角運動量の固有値をもとにして、古典的な回転運動と対応させたときの、電子の運動速度を求めなさい。（有効数字一桁）

II-3 (統計力学) (100 点)

- (1) N 個の分子 (質量 m) からなる古典的 ideal 気体が一辺の長さ L の立方体に入っている。以下、分子の内部自由度は無視する。
- 立方体を仮想的な仕切りで高さ方向に半分に分ける。下半分に n 個の分子が存在する確率 $P(n)$ を求め、平均 $\langle n \rangle$ 、分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。
 - (a) のような確率の計算では、気体分子があたかも区別できるように扱っても良い。その理由を簡潔に述べよ。
- (2) 今、この立方体に下向きの重力 (重力加速度の大きさ g) が働いているとする。
- 1 個の分子が高さ z と $z + \delta z$ に置かれた仮想的な仕切りの間の、厚さ δz の薄い領域に存在する確率 $P(z)\delta z$ を求めよ。
 - 高さ z と $z + \delta z$ 間に気体分子が $n(z)$ 個存在する確率を求め、平均 $\langle n \rangle(z)$ と分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle(z)$ を求よ。総分子数 N が十分大きい極限では、分子数密度はどうなるか考察せよ。
- (3) 前問で見たように、熱平衡状態にあっても空間の小領域に入っている分子数は統計的に揺らいでいる。このような気体の中に、気体分子に比べると大きい粒子 (質量 m_B) を加える (ブラウン粒子)。ブラウン粒子の運動は容易に観測できるが、気体分子の揺らぎの影響を受け不規則である。

ここでブラウン粒子の運動を、醉歩を使ったモデルで考えよう。簡単のため、 z 軸に沿った 1 次元運動をするとし、時間、空間とも離散的に扱う。時間、空間の単位をそれぞれ、 τ と a とおく。時刻 $n\tau$ における格子点 la での存在確率を $W(l, n)$ とし、時間 τ 後に両となりの格子 $l+1$ か $l-1$ にそれぞれ p か $q = 1 - p$ の確率で移動すると、次の関係が成り立つ。

$$W(l, n+1) = pW(l-1, n) + qW(l+1, n) \quad (\text{A})$$

- 時刻 $n\tau$ での粒子の位置 z_n ($\equiv z(n\tau)$) を、総ステップ数 n と、正の方向に進んだステップ数 m を用いて表せ。ただし、 $z_0 = 0$ とする。 m を固定したとき、可能な経路はいくつあるか。

- z_n の平均 $\langle z_n \rangle$ 及び $\langle (z_n - \langle z_n \rangle)^2 \rangle$ を求め、粒子の平均的な移動を考察せよ。
(ヒント : $\langle (z(t) - \langle z(t) \rangle)^2 \rangle = 2Dt$ となるとき、 D を拡散係数と呼ぶ。)

- 単位時間 τ や格子間隔 a が十分小さいとし連続変数 $t = n\tau$, $z = la$ を導入する。式 (A) の $W(l, n)$ を $w(la, n\tau) = w(z, t)$ とおいて、 a^2 と τ のオーダーまで展開し、時間発展を記述する偏微分方程式を求めよ。

ここで、無次元微小パラメーター ϵ を用いて、 $a = \epsilon a_0$ と置く (a_0 は定数)。この時、(i) $q \sim 1$ 、(ii) $|q - p| \ll \epsilon$ ($p \sim q \sim 1/2$)、(iii) $|q - p| \sim \epsilon$ の 3 つの場合に、(A) 式の振舞いと関連づけて得られた偏微分方程式の各項について考察せよ。

- (d) $|q - p| \sim \epsilon$ の場合に 1 粒子の定常分布を求め、 M 個の粒子に対する数密度分布関数を求めよ。

ブラウン粒子が熱平衡状態で理想気体分子と同じ統計に従うとすると、問(2)で得た理想気体分子の数密度分布と同様の分布に従うことが言える。ブラウン粒子に対する熱平衡状態での分布と醉歩モデルでの定常分布が一致するとして、醉歩モデルのパラメーターを物理量で表せ。ただし、記号 $V \equiv (q - p)a/\tau$ 、 $D \equiv a^2/(2\tau)$ を用いよ。

平成 11 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は、III-1 から III-7 まで全部で 7 問ある。これから、3 問選択せよ。
 - (2) 選択した問題の解答は、それぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
 - (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

III-1 (水素原子) (100 点)

水素原子に対する Schrödinger 方程式は、極座標を用いて

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \quad (\text{A})$$

のように書かれる。但し、ここで μ は電子の換算質量、 \hat{L} は軌道角運動量演算子である。

- (1) $\hat{L}^2 Y_m^l(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_m^l(\theta, \phi)$ を満たす球面調和関数 $Y_m^l(\theta, \phi)$, ($l = 0, 1, \dots, m = -l, -l+1, \dots, l$) を用いて $\psi(r, \theta, \phi) = R_l(r) Y_m^l(\theta, \phi)$ のように変数分離したとき、動径波動関数 $R_l(r)$ の満たす方程式を求め、無次元の変数 $\rho = \sqrt{2\mu|E|r}/\hbar$ 、及びパラメータ $\lambda = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}$ を用いて書き直せ。
- (2) (1) で求めた方程式を用いて $R_l(\rho)$ の無限遠方 $\rho \rightarrow \infty$ での振る舞いを求めよ。
- (3) $\rho = 0$ の近傍における級数展開を用いて、波動関数が規格化可能である条件から、ボーア半径を $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ として、エネルギー固有値を求めよ。このとき、各エネルギー準位は何重に縮退しているか。
- (4) 陽子及び電子の質量を $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ として、ボーア半径、及び eV の単位を用いた基底状態のエネルギーを、有効数字 1 術まで求めよ。但し、 $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, とする。また、陽電子と電子の束縛状態であるポジトロニウムの場合、ボーア半径及び基底状態のエネルギーは、水素原子の場合と比べてそれほどどうなるか。
- (5) 水素原子の場合について、基底状態における平均 2 乗速度 $\frac{\sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle}}{\mu}$ を計算せよ。それは光の速度の何分の 1 か。

III-2 (量子力学：磁場中スピンの運動) (100 点)

- (1) 時間に依存する磁場 $\mathbf{H}(t)$ 中のスピン \mathbf{I} の運動を考える。今 $\mathbf{H}(t)$ が (A) 式のように、定常磁場 $H_0 \hat{\mathbf{z}}$ が z 軸方向にあり、角周波数 ω_0 で回転する磁場が z 軸と垂直面内に掛かっている。スピン \mathbf{I} の磁気モーメントは $\mu = \gamma \hbar \mathbf{I}$ であり、磁気回転比 γ は定数である。

$$\mathbf{H}(t) = \hat{\mathbf{z}} H_0 + \hat{\mathbf{x}} H_1 \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} H_1 \sin \omega_0 t \quad (\text{A})$$

- (a) Hamiltonian が $\mathcal{H} = -\mu \cdot \mathbf{H}(t)$ で与えられるとき、Schrödinger 方程式を書け。
 (b) z 軸の回りに角周波数 ω_0 で回転する座標系での Schrödinger 方程式を求めよ。
 ここで ω_0 を $\omega_0 = -\gamma H_0$ に選ぶ（共鳴条件）。

ヒント：

$$\begin{aligned} e^{-iI_z\phi} I_x e^{iI_z\phi} &= I_x \cos \phi + I_y \sin \phi \\ e^{-iI_z\phi} I_y e^{iI_z\phi} &= -I_x \sin \phi + I_y \cos \phi \end{aligned}$$

- (c) 回転系での Schrödinger 方程式の厳密解 $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ を実験室系での初期状態の波動関数 $|\Psi(0)\rangle$ を用いて書け（スピン演算子は残したままでよい）。その結果を用いて実験室系での $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。
 (d) 共鳴条件の時の磁気モーメントの z 成分の期待値 $\langle \mu_z(t) \rangle$ を求めよ。共鳴条件のもとでは $\langle \mu_z(t) \rangle$ はどのような運動をするか、言葉で説明せよ？
- (2) 大きさ一定の磁場 $H(t)$ が $t < 0$ で z 軸方向にあり、 $t = 0$ で x 軸の回りに角周波数 Ω で回転し始め $t = T$ で y 軸方向を向き、以後 y 軸方向を向いて止まる。

$$\mathbf{H}(t) = \begin{cases} H[0, \sin \Omega t, \cos \Omega t] & 0 \leq t \leq T \\ H[0, 1, 0] & T \leq t \end{cases}$$

ここで $\Omega T = \pi/2$ である。

- (a) $I = \frac{1}{2}$ の時、 $t = 0$ での波動関数が $|\Psi(0)\rangle$ であるとすると、 $0 \leq t \leq T$ の間の $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。（ヒント： x 軸回りで Ω で回転する座標系で Schrödinger 方程式を解け。 \hat{n} を単位ベクトルとすると $e^{i\omega \mathbf{I} \cdot \hat{n} t} = \cos \frac{\omega t}{2} + i 2 \mathbf{I} \cdot \hat{n} \sin \frac{\omega t}{2}$ である。）
 (b) 初期状態が $|\Psi(0)\rangle = |I, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ であるとき、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ（スピン演算子の部分を具体的に計算して、 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ と $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ で表わせ）。
 (c) 瞬間近似 ($\Omega \rightarrow \infty, T \rightarrow 0, \Omega T = \pi/2$) の場合、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。
 (d) 断熱近似 ($\Omega \rightarrow 0, T \rightarrow \infty, \Omega T = \pi/2$) の場合、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。

III-3 (放射線計測) (100 点)

- (1) ガンマ線と物質との相互作用の機構を 3 つ挙げ、それぞれの説明をせよ。3 つの相互作用のガンマ線のエネルギーに対する依存性および物質を構成する原子の原子番号に対する依存性についても簡単に言及せよ。
- (2) 2 MeV 程度のガンマ線のエネルギースペクトルを測りたい。どのような検出器を用いるか、1 つ名前を挙げて、その原理を説明せよ。
- (3) 小さい検出器で 2 MeV のガンマ線のエネルギースペクトルを測るとする。どのようなスペクトルが得られるか概略図を描き説明せよ。特徴的なエネルギーについては概算して図中に書き込め。ただし、電子の質量を $0.5 \text{ MeV}/c^2$ とせよ。
- (4) 同一原子核から連続して放出される 2 本のガンマ線 γ_A , γ_B をそれぞれ検出器 A、検出器 B で検出して、その同時計数 C を測定する。線源の放射能を N_0 とし、 γ_A , γ_B のそれぞれの計数を S_A , S_B として以下の問いに答えよ。ただし、放射能の減衰を考慮しなくてよい。また、 C , S_A , S_B の測定時間 T は同じとする。さらに、同時計数回路に入るパルスは時間巾 τ の矩形波とする。
- (a) 同時計数回路にはいるパルスの時間巾が 0 でないため、別々の原子核から放出される 2 本のガンマ線 γ_A , γ_B の検出に起因する偶然同時計数が測定した同時計数に必ず含まれる。即ち、測定した C は真の同時計数 TC と偶然同時計数 CC の和である。 $S_A\tau$ と $S_B\tau$ が T の値に対して十分小さいとして CC を S_A , S_B , τ , T を用いて表せ。
- (b) 線源の放射能を同時計数から求める式を導出せよ。また、 TC と CC の比を N_0 などを用いて表せ。
- (5) 検出器とそれにつながる電子回路をまとめて検出系と呼ぶことにする。ほとんどの検出系はひとつの放射線を検出して処理するのに有限の時間 τ を必要とし、その時間内に別の放射線が検出器と相互作用してもそのシグナルを処理できない。時間 τ を不感時間 (dead time) という。検出系の不感時間の単純化したモデルとして麻痺型と非麻痺型の 2 つがある。麻痺型では不感時間の間に別の放射線が検出器と相互作用するとその時からさらに τ だけ不感時間が延びる。その延長された不感時間の間にまた別の放射線が検出器と相互作用するとさらに τ だけ不感時間が延びる等々。非麻痺型では不感時間の間に別の放射線が検出器と相互作用しても不感時間は τ のままである(図を参照)。ここでは麻痺型検出系を考え、処理されるべき真の計数率 N と不感時間のため実際に処理されて記録される計数率 M の関係を次の要領に従って導く。
- (a) ポアッソン分布の式 $P(x) = \mu^x e^{-\mu} / x!$ (μ は x の平均値) を用いて、真の平均計数率が N の場合、ひとつの放射線が検出器と相互作用した後 t 時間何事も起こらず、その後 dt 時間に別の放射線が検出器と相互作用する確率を求めよ。

(b) (a) で求めた表式を用いて、麻痺型検出系において真の計数率 N と実際に処理されて記録される計数率 M の関係を導け。 N が大きくなると最初は当然 M も大きくなるが、ある N の値から N が大きくなると逆に M は小さくなる。麻痺型検出系では一般に測定されたひとつの M の値に可能な真の計数率 N として 2 つの値が対応する。さて、最大の M の値が $50,000\text{s}^{-1}$ であった。この検出系の不感時間 τ を有効数字 1 桁で求めよ。

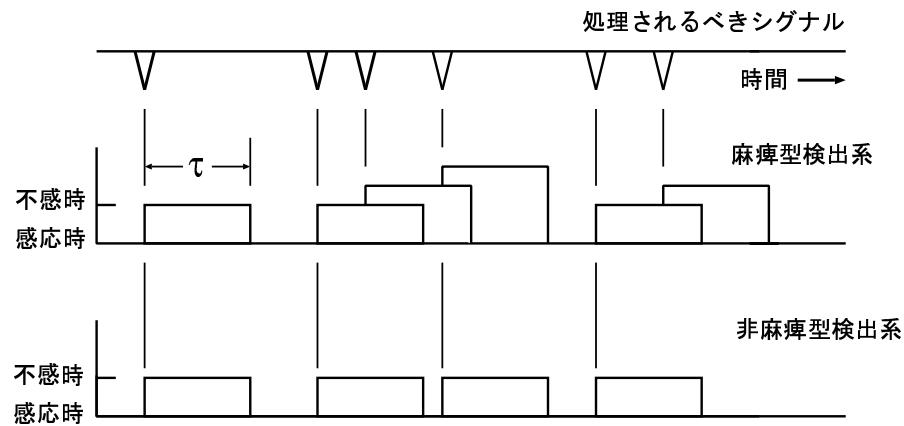
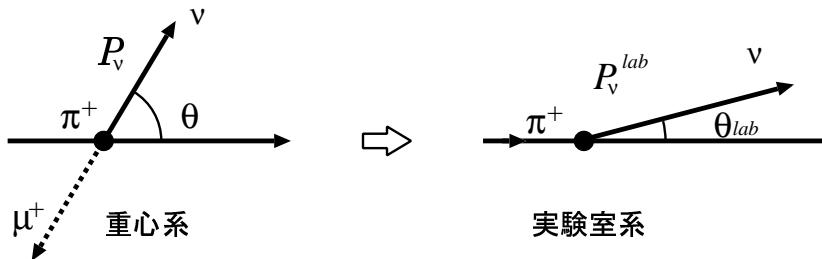


図 1: 図において処理されるべきシグナルの数は 6 個であるが、麻痺型検出系では 3 個が記録され、非麻痺型検出系では 4 個記録される。

III-4(ニュートリノ)(100点)

ニュートリノは謎の多い素粒子である。いま高エネルギー加速器で作られる π^+ 中間子ビームの崩壊 ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) から(ミュー)ニュートリノ (ν_μ) のビームを作つて実験を行いたい。そのことについて以下の設問に答えよ。(数値については有効数字1桁で良い。) ただし π^+ 中間子とミューオン (μ^+) の静止質量はそれぞれ M ($0.14\text{GeV}/c^2$) と m ($0.11\text{GeV}/c^2$) とし、ニュートリノの静止質量はゼロとせよ。

- (1) 静止した π^+ 中間子が崩壊したとき、ニュートリノの運動量の大きさ P_ν を M と m を用いて表わし、その数値をもとめなさい。
- (2) 速度 $\beta (=v/c)$ の π^+ 中間子が崩壊するとき、 π^+ 中間子の進行方向に対する実験室系でのニュートリノの角度と運動量を、 π^+ の重心系でのその進行方向に対するニュートリノの崩壊角 θ を使って表わしなさい(下図参照)。なお $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を用いよ。



- (3) π^+ 中間子は平均寿命 $2.6 \times 10^{-8}\text{sec}$ でミューオンとニュートリノに崩壊する。いま π^+ 中間子ビームの運動量が $7.0\text{ GeV}/c$ のとき、その平均飛行距離は何 m か？
- (4) 今この $7.0\text{ GeV}/c$ の π^+ 中間子ビームの崩壊点から 200km 先に、正しく π^+ 中間子ビームの方向にその中心をあわせて半径 20m のニュートリノ検出器を設置したとする。(但し、 π^+ 中間子ビームの拡がりは無視できるとせよ。)
 - (a) π^+ 中間子ビームの全崩壊数について検出器に入るニュートリノの割合はいくらか？
 - (b) そのニュートリノの平均運動量はおおよそいくらか (GeV/c) ?
- (5) 今このニュートリノは 200km 地中を通つて地下の検出器に到達する。
 - (a) このニュートリノと核子との全散乱断面積を $1.0 \times 10^{-38}\text{cm}^2$ と仮定すると、 200km 先の検出器に到達するまでにニュートリノが地中で散乱される確率はいくらか？ただし地中の物質密度は $3.0\text{g}/\text{cm}^3$ 、アボガドロ数は $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$ とせよ。
 - (b) 每秒 1×10^{10} 個の π^+ 中間子が崩壊するとして、ニュートリノ検出器の厚さが水 20m 相当のとき、その中でニュートリノと核子の散乱がおこる頻度はいくらか？

- (6) ニュートリノ振動はミューニュートリノや電子ニュートリノなどニュートリノの種類が飛行中に変化する現象である。これを調べるためににはニュートリノの種類を識別しなくてはならない。一般にニュートリノが核子と反応すると、ミューニュートリノの場合はミューオンが、電子ニュートリノの場合は電子が生成される。そこで数 GeV/c のミューオンと電子を区別するにはどうすればよいか？ 識別方法とその原理について述べよ。

III-5 (LCR 回路) (100 点)

実験室で大容積の強い磁場を必要とするとき、キャパシターバンクと空芯コイルを用いてパルス磁場を発生し利用することが多い。キャパシターバンクの静電容量を C 、空芯コイルのインダクタンスを L 、内部抵抗を R とすると、L、C、R回路の過渡現象の典型的な問題の1つである。L、C、R、スイッチSは理想的なもので、配線の抵抗は無視できるとする。過渡現象の解析にはラプラス変換(付録参照)を利用すると便利である。

- (1) 図の回路で、キャパシターCは電圧 V_0 ボルトに充電されている。時刻 $t = 0$ にスイッチSを閉じた。 L 、 C 、 R の値の如何によって (i) 振動する場合、(ii) 臨界減衰、(iii) 過減衰の場合に分類される。
 - (a) それぞれの場合の L 、 C 、 R に対する条件を示せ。
 - (b) 実用上殆どの場合が (i) に相当するので、以下 (i) の場合についてのみ考える。 C の両端の電圧 $V(t)$ 、 L を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。記述を簡単にするため、 $\tau^{-1} = R/(2L)$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \tau^{-2}$, $\tan \phi = 1/(\omega\tau)$ とせよ。

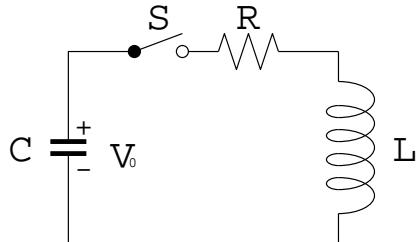


図 1

- (2) キャパシターには、直流用と交流用とがあるが、一般に、直流用の方が小型であり、値段も安いので、直流用キャパシターを利用するのが普通である。直流用キャパシターに振動電流を流すと、寿命が極端に短くなる。極端な場合は絶縁破壊をおこす。このようなことを避けるためと最大磁場に近い値を出来るだけ長く維持するためにダイオードを用いたクローバー回路と呼ばれる回路を使用する。
 - (a) 図の回路でSを閉じてから $I(t)$ が極大になる最初の時刻 t_I と $V(t)$ が0になる最初の時刻 t_V との関係を示せ。
 - (b) $R = 0$ として L、C、S からなる回路に、理想ダイオード D 1ヶを付け加えてクローバー回路を構成し図示せよ。
 - (c) (b) の回路における $V(t)$ と $I(t)$ とを時刻 t を横軸としてグラフ表示せよ。特徴的な t 、 $V(t)$ 、 $I(t)$ の値を座標軸上に記入せよ。
 - (d) 現実の回路では、(2)(b) の様に $R = 0$ とはならないので、静電容量、充電電圧の異なる2系統のキャパシターバンクとダイオードを使って、パワークローバー

回路と呼ばれる回路を構成して使用する。

静電容量が C と C_1 の 2 つのキャパシターバンクがあり、それぞれ V_0 , V_1 に充電されている。 $C_1 > C$ 、 $V_0 > V_1 = V(t_I)$ 、 $\omega_0\tau > (1 + C_1/C)^{1/2}$ であるとして、C, C_1 、理想ダイオード D 2ヶ、L, R, S を使って回路を工夫し図示せよ。

付録

- $F(t)$ のラプラス変換 $f(s)$ は、 $\mathcal{L}F(t) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ である。
- $f(s) = 1/s$ と $f(s) = 1/(s^2 + a^2)$ の逆変換は、 $\mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$ と $\mathcal{L}^{-1}(1/(s^2 + a^2)) = \sin(at)/a$ である。
- $\mathcal{L}^{-1}f(s) = F(t)$ のとき、 $\mathcal{L}^{-1}f(s - a) = e^{at}F(t)$ である。

III-6 (物理数学) (100 点)

(1) Fourier 変換を用いて 1 次元の熱伝導の方程式

$$\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \quad (\text{A})$$

を初期条件 $u(x, 0) = \delta(x)$ の下に解き、任意の時刻 ($t \geq 0$)、任意の点での温度分布 $u(x, t)$ を求めよ。

(2) “電荷” $\rho(\mathbf{r}, t)$ が存在する場合の Klein-Gordon 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = g\rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B})$$

について以下の問い合わせに答えよ。

(a) 運動量 \mathbf{p} 、エネルギー E を持つ平面波波動関数

$$\psi(\mathbf{r}, t) \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar - iEt/\hbar} \quad (\text{C})$$

が、真空中 ($\rho(\mathbf{r}, t) = 0$) の方程式を満たすための条件から $\psi(\mathbf{r}, t)$ が記述する粒子の質量が $M = \hbar\mu/c$ で表されることを示せ。

(b) 原点に静止した点電荷がある ($\rho(\mathbf{r}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$) 場合の方程式を解き、点電荷の作る静的なポテンシャルを求めよ。

III-7 (低温物理) (100 点)

ヘリウム (He) は絶対零度まで液体の状態で存在するので、真空ポンプを用いて He の蒸気を強制的に排氣することによって、低い温度を得ることが出来る。図 1 のような実験装置について考えてみよう。液体 He を入れる低温容器は、室温からの熱の流入を防ぐために A の空間は真空に保たれ、かつ多層の輻射遮蔽膜が挿入されている。液体 He は低温容器の B の空間に溜められる。低温容器の上部のフランジ部分からポンプで He の蒸気を排氣する。今、液体 He 中に試料室 C があり、真空にしてある。種々の測定用のリード線 (金属) が室温部から試料室に導入される。

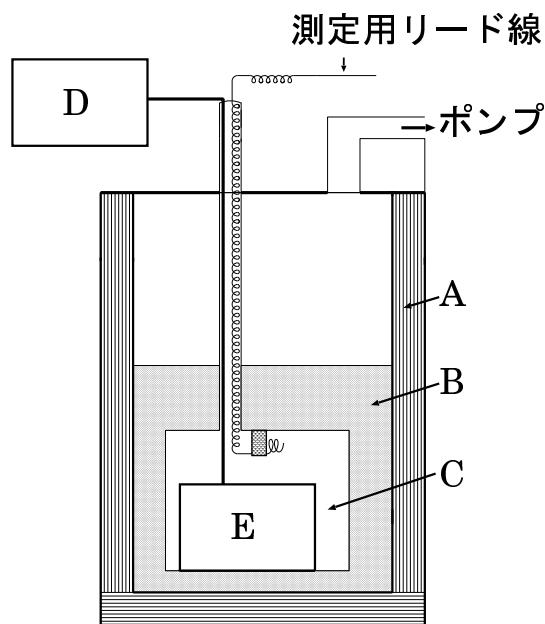


図 1

- (1) 圧力 $P[\text{Pa}]$ の He 気体を排氣速度 $\dot{V}[\text{m}^3/\text{sec}]$ のポンプで排氣した時に、何モル/ sec で He が排氣されるか? He を理想気体として計算せよ。室温を $T_0 = 300\text{K}$ とし、標準状態 ($0.1\text{MPa}, 300\text{K}$) の気体のモル体積は $2.24 \times 10^{-2}\text{m}^3$ である。
- (2) He の蒸発の潜熱を L とし、圧力 P が一様として、He の冷却能力を求めよ。ただし、蒸発した低温の He 気体が室温になる時の熱容量 (顕熱) は無視してよい。
- (3) 室温から液体 He への熱の流入は、室温部のフランジからの熱輻射と測定用のリード線からのものが考えられる。フランジの面積は $0.01[\text{m}^2]$ として、そこからの輻射熱は全部液体 He に吸収されるとする。図 1 に示すようにリード線は室温から途中どこにも熱接触することなく真空中を通って試料室に入り、そこで液体 He の温度に熱接觸する。室温部から液体 He に入る総熱流 \dot{Q} を有効数字 1 枠まで計算せよ。ステファン・ボルツマン係数は $5.7 \times 10^{-8}[\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4]$ 、フランジの放射率を 0.01 とする。リード線の直径を $0.1[\text{mm}]$ 、長さ $1[\text{m}]$ 、本数 10 本として、リード線に使われた金属の熱伝導率 κ は温度 T に依存し、 $25T[\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}]$ とする。

- (4) $L = 100[\text{J/mol}]$ 、 $\dot{V} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{sec}$ の時に、定常状態の圧力 P を求めよ。
- (5) 図 2 に示すように、He の蒸気圧 $P(T)$ は液体 He 温度に強く依存する。定常状態での液体 He の温度を有効数字 2 衔まで求めよ。

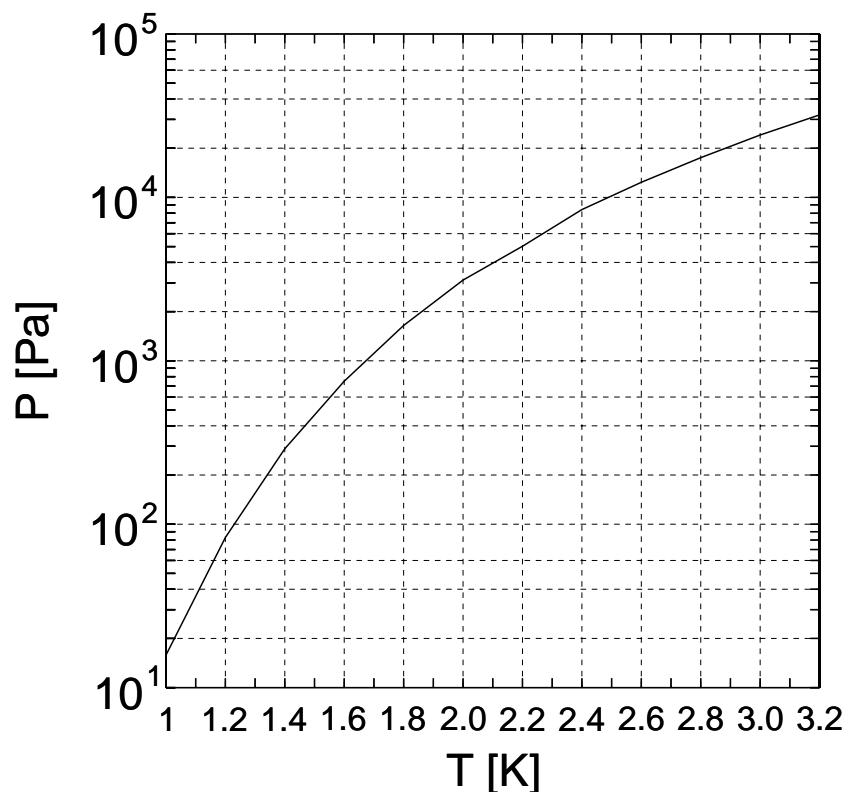


図 2

- (6) 図 1 のように同じ体積 V の密閉容器 D、E を D は室温に、E は液体 He 内の試料室の壁に熱接触させておき、その間を体積が無視できる細い管でつなぐ。最初、室温で D と E を 0.01MPa の He 気体で満たし、その後、液体 He を導入して上記のようにポンプを用いて He を排気し、試料室内の密閉容器の He 気体の温度を下げた。D には圧力計があり、その圧力から低温部の温度を推定できる。He は理想気体であるとして、D と E の圧力差はないとして、定常状態になった時の密閉容器の He 気体の圧力 [Pa] を求めよ。
最初、室温で D と E を 1MPa の気体で満たした後、上と同じように冷却した場合はどうなるか？

平成 10 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

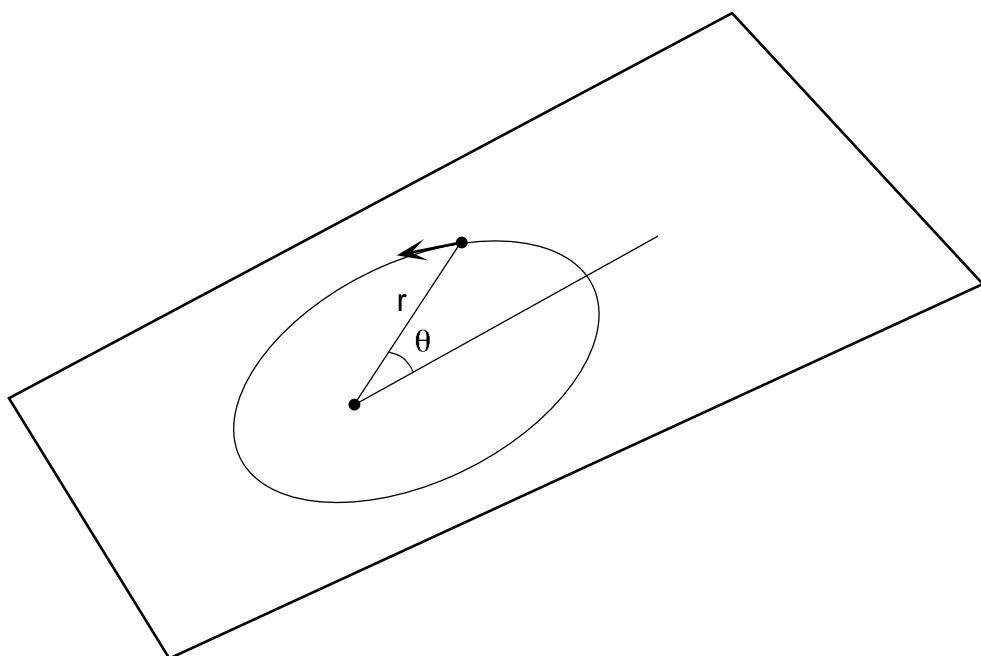
注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (ケプラー問題) (100 点)

原点からの距離を r として、ポテンシャルエネルギーが $U(r)$ で与えられるような中心力場中の質点の運動を考える。以下の問題について古典力学の範囲で答えよ。

- (1) 質点の運動は原点を含む平面内に限られることを示せ。
- (2) $U(r) \propto -1/r$ のポテンシャル中を運動する質点の束縛運動は橙円となることが知られている。古典力学を解くことによってその軌道の形を求めたい。以下簡単のため、質点の質量を 1、ポテンシャルエネルギーを $U(r) = -1/r$ とおくことにする。次の間に答えよ。
 - (a) 原点からの距離 r と質点の運動する平面内の方位角 θ を変数として、質点の全エネルギー E と角運動量 L を $\{r, \dot{r}, \dot{\theta}\}$ を用いて表せ (ここでドットは時間微分)。



- (b) 次に $s = 1/r$ として、変数 r を s に置き換える。さらに $ds/d\theta = \dot{s}/\dot{\theta}$ を通して s を θ の関数とよみかえる。角運動量保存を考慮に入れることによって、全エネルギー E の表式から時間微分の項、 \dot{s} と $\dot{\theta}$ を消去し、全エネルギー E を $\{ds/d\theta, s, L\}$ を用いて表せ。

- (c) 上で求めた E の表式を θ で微分せよ。そこで得られた s の微分方程式を解くことによって $s (= 1/r)$ の θ 依存性を示せ。ここで求めた解が質点の軌道の形を表している。
- (d) 上に求めた $s (= 1/r)$ と θ の関係が橜円を表していることを示せ。
- (3) $U(r) \propto -1/r$ 以外には、どのような中心力ポテンシャルが橜円軌道を生成することが知られているか。

I-2(中性子の磁気トラップ) (100 点)

- (1) 原点を通り z 方向に無限に長いワイヤーがある。これが線電荷密度 λ で一様に帯電している時、点 (x, y, z) における電場の大きさを求めよ。ワイヤーの太さは無視出来るものとする。これよりこのワイヤーが作る静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を求めよ。但しポテンシャルの基準は $\phi(a, 0, 0) = 0$ と定めよ。
- (2) 同様のワイヤーが 4 本、図 1 のように配置されている。但し x 軸上の位置 $(\pm a, 0, 0)$ を通るワイヤーは $+\lambda$ 、 y 軸上の位置 $(0, \pm a, 0)$ を通るものは $-\lambda$ の線電荷密度を有する。原点付近の点 (x, y, z) に於ける静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を、微少量 $(x/a, y/a)$ の 2 次のオーダーまで求めよ。良く知られている様に、この結果は 4 重極場を表す。 $x - y$ 平面内を考えると荷電粒子は、1 方向には収斂する力を受けるがこれと垂直な方向には発散する力を受ける。

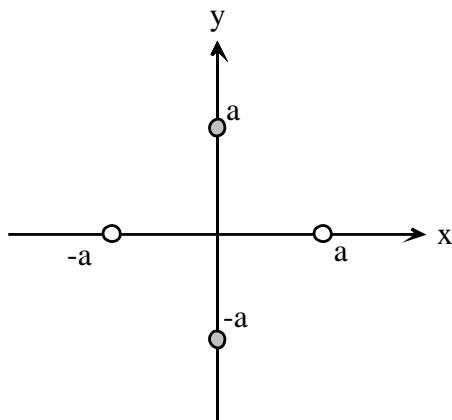


図 1: 4 本のワイヤーの配置図

- (3) 今度は帯電したワイヤーの代わりに電流 I の流れるワイヤーを考えよう。 x 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $+I\hat{z}$ 、 y 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $-I\hat{z}$ の電流を流す。但し \hat{z} は z 方向の単位ベクトルである。原点付近の点 (x, y, z) に於けるベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(x, y, z)$ を求めよ。これより原点付近での磁場の大きさ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ を求めよ。

(ヒント) 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$ と

ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$ の類似性に注意せよ。

ここで ρ 及び \vec{j} は電荷密度及び電流密度、また ϵ_0 及び μ_0 は真空中での誘電率及び透磁率を表す。

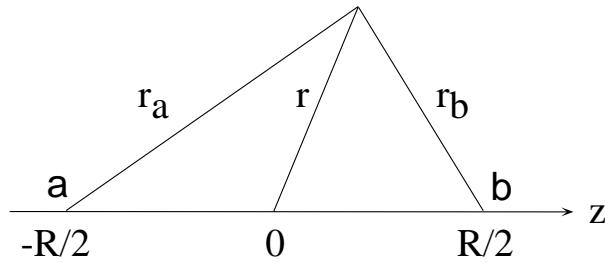
(4) 原点付近に置かれた中性子の運動を考えよう。荷電粒子と異なり中性子は磁気双極子モーメント ($\vec{\mu}_n$) と磁場の相互作用により力を受ける。中性子のスピンは $\frac{1}{2}\hbar$ であるので、スピン方向は磁場と平行または反平行の状態が許される。もし中性子の感ずる磁場の変化が緩やか(断熱的)ならば、中性子のスピン(従って磁気双極子モーメント)は磁場の変化に追随し、常に平行または反平行状態を保つ。この結果、あるスピン状態の中性子に関しては(3)の磁場の原点付近において $x - y$ 平面内のどの方向にも復元力が働く。復元力の大きさを求めよ。(なおこの問題に於いては z 方向は無限に長いと仮定した。しかし実際の実験では z 方向についても円形に閉じているトーラス状磁場を用い中性子を閉じ込める。)

I-3 (量子力学) (100 点)

水素分子イオン H_2^+ の結合状態を、分子軌道法を用いて考えよう。電子に比べて 1800 倍重い陽子は静止していると近似すると、ハミルトニアンは原子単位系 ($\hbar = m = e = 1$) で

$$H = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R} \quad (\text{A})$$

と書ける。ここで座標系の原点を陽子 a, b の中点にとり、陽子 a, b 間の距離を R とし、 $r_a = |\vec{r} - \vec{a}|$ 、 $r_b = |\vec{r} - \vec{b}|$ とした。



(1) シュレディンガー方程式

$$H\psi(r) = E\psi(r) \quad (\text{B})$$

の近似解を得るために、水素原子の $1s$ 軌道 $\phi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}$ の一次結合から作られた分子軌道

$$\psi(r) = C_a \phi_{1s}(r_a) + C_b \phi_{1s}(r_b) \quad (\text{C})$$

を考える。式 (A)、式 (C) から、エネルギー固有値は

$$E_{\pm} = \frac{H_{AA} \pm H_{AB}}{1 \pm S} \quad (\text{D})$$

と書けることを示せ。ただし

$$H_{AA} = H_{BB} = \int \phi_{1s}(r_a) H \phi_{1s}(r_a) d^3r \quad (\text{E})$$

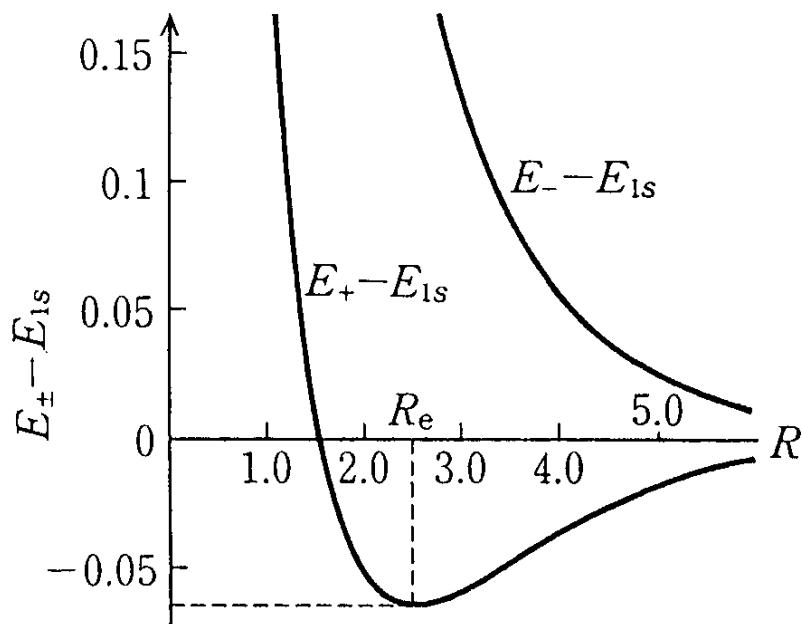
$$H_{AB} = \int \phi_{1s}(r_a) H \phi_{1s}(r_b) d^3r \quad (\text{F})$$

$$S = \int \phi_{1s}(r_a) \phi_{1s}(r_b) d^3r \quad (\text{G})$$

とする。

- (2) (1) で求めたエネルギー固有値 E_{\pm} に対応する固有関数 $\psi_{\pm}(r)$ を求めよ。ただし式 (C) の固有関数は規格化されているものとする。また、 z 軸上の $|\psi_+|^2$ と $|\psi_-|^2$ の概略図を描け。

- (3) 式 (E) の H_{AA} の積分を、球座標を用いて実行せよ。ここで、ハミルトニアン (A) の第一項、第二項は水素原子のハミルトニアンであり、これらの項の積分は $1s$ 状態のエネルギー $E_{1s} = -\frac{1}{2}$ を与えることを使え。
- (4) (3) と同様にして式 (F)、式 (G) の積分を実行すると、エネルギー固有値 E_{\pm} の R 依存性が決定され、 $E_+ - E_{1s}$ 、 $E_- - E_{1s}$ は下図のようになつた。この図と、(2) で求めた電子密度とをあわせて、水素分子イオンの結合状態の安定性について議論せよ。また E_+ の極小点から E_- に光励起をおこなうと、何が起こるか？



注：原子単位系ではボーア半径が長さの単位となり、リュードベリ定数の 2 倍がエネルギーの単位となる。

平成 10 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1 (量子統計) (100 点)

系の粒子数の変化を許すグランドカノニカル分布を考える。

粒子数、化学ポテンシャルをそれぞれ、 N 、 μ として N 個の粒子をもつ系が n 番目のエネルギー順位 E_{nN} にあるとき、その状態の確率 (分布) $P_n(N)$ は

$$P_n(N) = e^{\Omega/k_B T} e^{(\mu N - E_{nN})/k_B T} \quad (\text{A})$$

で与えられる。ここで k_B, T, Ω はそれぞれ、ボルツマン定数、温度、熱力学ポテンシャルである。この系の熱力学ポテンシャル Ω は

$$\Omega = -k_B T \ln \left[\sum_N e^{\mu N / k_B T} \sum_n e^{-E_{nN} / k_B T} \right] \quad (\text{B})$$

で与えられる。

この分布を量子統計に従う理想気体に適用しよう。状態 k にある 1 粒子のエネルギーを ε_k 、1 粒子状態 k にある粒子数を n_k とする。粒子の同等性にともなう量子力学的効果は同じ状態 k を占める粒子間にのみに存在する。さらに粒子間の相互作用が無視できるとすると、 k の異なる状態は互いに独立だから、1 つの量子状態 k のみが存在するとしてその部分系に (A)、(B) 式を適用してよい。

- (1) 理想フェルミ気体に対して、化学ポテンシャルを μ 、 k 番目の量子状態にある粒子全体からなる部分系の熱力学ポテンシャルを Ω_k とし、 $N = n_k$ 、 $E_{nN} = \varepsilon_k n_k$ とする。

- n_k 個の粒子が k を占める確率 $P(n_k)$ と、 Ω_k を求めよ。
- 平均の粒子数 $\langle n_k \rangle$ を求めよ。すべての k を含む全系の熱力学ポテンシャル Ω を求めよ。
- 全粒子数を N として μ を決定する関係式をかけ。
- 面積 A 、質量 m の 2 次元自由電子ガスの $T = 0$ における μ の値を求めよ (ただし、系の電子数を N 、プランク定数を h として $\hbar = h/2\pi$ とする)。

- (2) 理想ボーズ気体を考えて、(1) と同様の粒子がボーズ統計に従うとき、

- 分布 $P(n_k)$ と Ω_k を求めよ。
- 平均の粒子数 $\langle n_k \rangle$ と熱力学ポテンシャル Ω を求めよ。

- (c) $\varepsilon_k \geq 0$ とすると、ボーズ粒子の μ にはどのような制限がつくか。
- (d) 量子化された格子振動（フォノン）や光子（フォトン）もボーズ粒子とみなしてよい。このとき、 μ はどのような値をとるか。その理由を説明せよ。

II-2(ハイゼンベルグモデル) (100 点)

強磁性体における比熱や帶磁率等の物性を議論する際には、スピン波の素励起(マグノン)を考えることが多い。ここでは、大きさ S のスピンを持った N 個の原子が一次元に並んだ原子鎖を考え、隣り合うスピン間に交換相互作用が働く場合(Heisenberg モデル)について考察する。一次元の Heisenberg モデルにおいては、ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \quad (\text{A})$$

(ただし、 $J > 0$ 、 $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$ はスピン演算子) と書ける。

- (1) スピン昇降演算子 $S_i^+ = S_i^x + i S_i^y$, $S_i^- = S_i^x - i S_i^y$ と S_i^z を用いて、ハミルトニア (A) を書き直せ。
- (2) すべてのスピンの向きが揃った状態 $|F\rangle$ を考える。スピンの向きを z 軸に取り、その大きさを S とすると、 $S_i^z |F\rangle = S |F\rangle$ が成り立つ。この時、状態 $|F\rangle$ のエネルギー E_0 を求めよ。
- (3) ℓ 番目のサイトのスピン状態だけが変わった状態

$$|\ell\rangle = S_\ell^- |F\rangle \quad (\text{B})$$

を考えたとき、以下の表式が成り立つことを示せ。

$$H |\ell\rangle = -NS^2 J |\ell\rangle + 2SJ |\ell\rangle - SJ [|\ell+1\rangle + |\ell-1\rangle] \quad (\text{C})$$

- (4) (B) 式の一次結合から得られる、 $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N e^{ikR_\ell} |\ell\rangle$ は H の固有状態であること を示せ。また、その固有エネルギーを求め、波数 k の関数として概略図を描け。

但し、 R_ℓ は ℓ 番目のスピンの位置をあらわし、スピンは等間隔に $R_{\ell+1} - R_\ell = a$ の距離で配置され、周期的境界条件 $R_\ell = R_{\ell+N}$ が成り立つものとする。

- (5) (4) で求めた固有状態は、スピン波又はマグノンと呼ばれる。固有エネルギーの計算から、 $ka \approx 0$ でのマグノンの分散関係は $E(k) - E_0 = Ak^2$ (A は定数) と表される。三次元系でもこの分散関係は成り立つものとし、マグノンはボーズ粒子として扱えることを利用して、三次元系におけるマグノンによる比熱の温度依存性を導け。ここで、系は充分低温であるとする。

必要に応じて、公式 $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} dx \cong 1.783$ を使ってよろしい。

- (6) EuO の低温における比熱を実際に測定したところ、図に示すような結果が得られた。ここで、縦軸は比熱 \times (温度)²、横軸は (温度)^{7/2} にとってある。上記の議論を参考にして、比熱のデータから EuO の物性について何が言えるか。簡潔に述べよ。

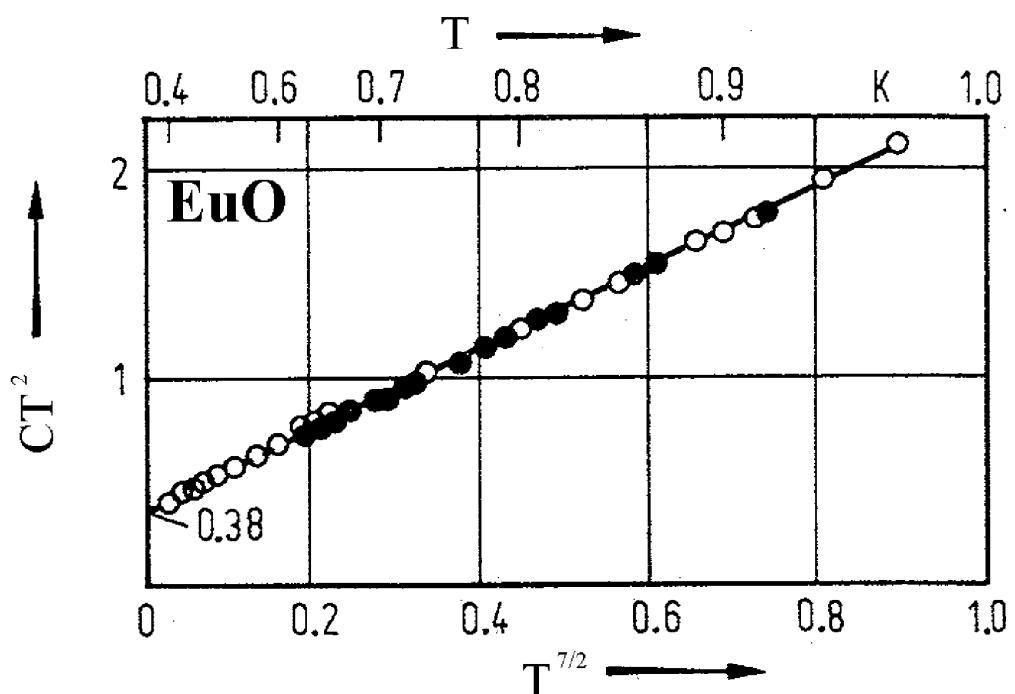


図 1: EuO の低温における比熱の測定データ

II-3 (WKB 法) (100 点)

(1) 図のようなポテンシャル障壁 $U(x)$ を通過する質量 m 、エネルギー E の粒子の透過係数(入射波のフラックスと透過波のフラックスの比) T は、WKB 近似を用いると、

$$T = e^{-2Y} \left(1 + \frac{1}{4}e^{-2Y}\right)^{-2}, \quad Y \equiv \frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx, \quad p \equiv \sqrt{2m[E - U(x)]}, \quad (\text{A})$$

と表されることを示せ。

なお、WKB 法の公式によると、波動関数は図の $x = a$ の左右では、

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx + \frac{\pi}{4} \right) \text{ は } \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx \right) \text{ に、} \quad (\text{B})$$

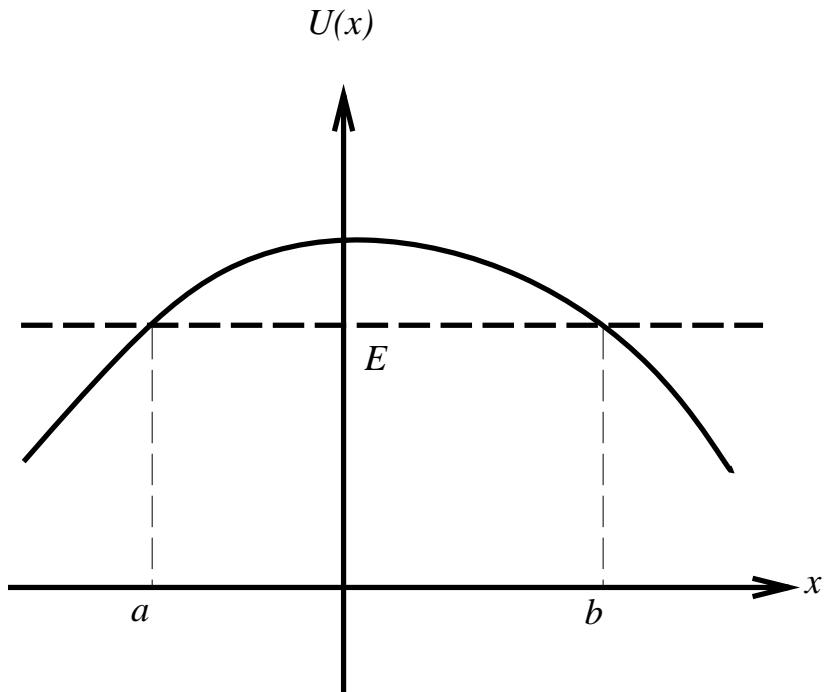
$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx + \frac{\pi}{4} \right) \text{ は } \psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{|p|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx \right) \text{ に、} \quad (\text{C})$$

それぞれ接続し、図の $x = b$ の左右では、

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx \right) \text{ は } \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx + \frac{\pi}{4} \right) \text{ に、} \quad (\text{D})$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{|p|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx \right) \text{ は } \psi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx + \frac{\pi}{4} \right) \text{ に、} \quad (\text{E})$$

それぞれ接続することが知られている。

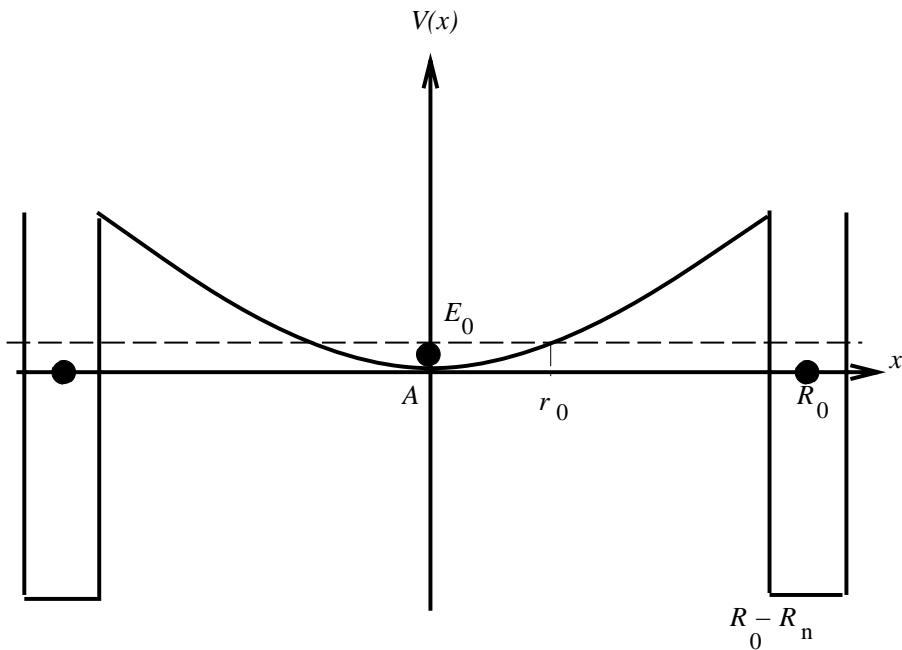


(2) 比較的小質量の恒星はその進化の最終段階で低温の白色矮星になる。このような星は、フェルミ縮退した電子の運動量による縮退圧で支えられ、一方イオンはクーロンエネルギーを最小にする配位として、格子状に配列することになる。そこでは熱核反応はもはや起こらないが、量子効果によってクーロンバリアを越えることによる核反応は起こり得る。これがどの程度の確率で起こるかを、以下のような簡単なモデルによって考察しよう。イオンの電荷を $Ze > 0$ とし、その運動は一次元に制限されるものとし、その方向(x 軸方向とする)の隣接イオンとの相互作用のみ考慮することにする。下図のように、両側のイオンは $x = \pm R_0$ に固定されているものとし、真中のイオン A の運動は、ポテンシャル $V(x)$ に従うものとする。すなわち、 $|x| < R_0 - R_n$ ではクーロン力のみ働き、 $V(x)$ は

$$V(x) = \frac{Z^2 e^2}{R_0 - x} + \frac{Z^2 e^2}{R_0 + x} - \frac{2 Z^2 e^2}{R_0}, \quad (\text{F})$$

で与えられ、 $|x \mp R_0| < R_n$ では核力の引力が勝り、深い井戸型ポテンシャルを持つものとする。イオンの質量を μ として、以下の問い合わせに答よ。

- (a) 原点付近 $|x| \ll R_0$ でのポテンシャルの近似形を求めよ。
- (b) イオン A は原点付近に局在するとして、その基底状態のエネルギー E_0 を求めよ。
- (c) 以下イオン A は上で求めた基底状態にあるとする。このとき、イオン A の古典的回帰点(イオンが古典的に運動した場合に到達可能な x の上限)の座標 $r_0 > 0$ を求めよ。但し、 $r_0 \ll R_0$ とする。
- (d) (1) の結果が用いられるとして、 $x = r_0$ から $x = R_0 - R_n$ への透過係数 T を WKB 近似で求めよ。 $r_0 \ll R_0, R_n \ll R_0$ として積分を行い、できるだけ簡単な形で表せ。
- (e) このイオン格子が密度 $\rho = 2 \times 10^7 \text{ g/cm}^3$ の $^{12}\text{C}^{6+}$ イオンから成るとして、 $\log_{10} T \cong 0.43 \ln T$ を有効数字一桁で求めよ。ただし、核子一個当たりの質量を $9 \times 10^8 \text{ eV}/c^2$ とし、 $\hbar c \cong 2 \times 10^{-5} \text{ eV cm}$ 及び $e^2 \cong \hbar c/137$ という関係を用いよ。(なおこのとき、反応率は $10^{68} T / \text{cm}^3/\text{sec}$ 程度となる。)



平成 10 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

- 注意 (1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で 6 問ある。これらから 3 問を選択せよ。
- (2) 問題の解答は、それぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (3) 各解答用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

III-1 (選択) (FET 回路) (100 点)

規格がわからない 1 個の電界効果トランジスタ (以後、FET と省略) がある。この FET の電気的特性を、図 1 のように $V_+ = +12$ V および $V_- = -5$ V の電源を用いた回路で調べた。 $R_S = 5.0$ k Ω をつなぎ、ゲート (G 端子) の電圧 V_G および ソース (S 端子) の電圧 V_S をそれぞれ測定した。得られた FET の測定データを表 1 に示す。

(解説 : FET は、ゲート端子 (G) に与えられる入力電圧 V_G に対応してドレイン (D) からソース (S) に流れる電流 I_{DS} が変化するという特性を持つ。この能動的機能を利用して信号增幅回路が作られる。)

- (1) 表 1 のデータに基づいて、この回路の電圧増幅率 $G(V_G)$ の変化に対する V_S の変化の割合、すなわち $G = V_S / V_G$ の推定値を有効数字 2 衔で求めよ。(グラフ用紙の使用を希望する者は、右のページの最後の注意を参照せよ。)

- (2) ソース電圧 V_S を基準にしてゲート電圧を測った場合の、ゲート・ソース間電圧を、 V_{GS} とする。(すなわち、 $V_{GS} = V_G - V_S$) 一方、FET の性能を示す相互コンダクタンスと呼ばれる量 g_m は、 V_{GS} の変化に対して起きるドレイン・ソース電流 I_{DS} の変化の割合 $g_m = I_{DS} / V_{GS}$ として定義されている。

表 1 のデータを使って、FET の g_m の値を有効数字 1 衔で求めよ。

- (3) 設問 (1) では、抵抗 $R_S = 5.0$ k Ω の場合について、増幅率 $G = V_S / V_G$ を数値的に求めたが、もし任意の抵抗 R_S と相互コンダクタンス g_m の 2 つのパラメータが与えられた場合には、電圧増幅率 G はどんな式で表せるか。(G を R_S と g_m の関数として表すこと。) また、もしも $g_m R_S \gg 1$ の近似が成り立っているとして良い場合には、 G の値はいくらになるか。

- (4) 次に抵抗 R_Z をグランド (電位は 0 V) と出力端子 (S) との間に接続する。この場合の電圧増幅率 G を、 R_S 、 R_Z 、および g_m を使った式として求めよ。
- また、設問 (3) と同様に $g_m R_S \gg 1$ の近似が成り立っている場合に、増幅率 G の値が、 R_Z を付けない場合の増幅率の 2 分の 1 となるような抵抗 R_Z はどのような式で表されるか。さらに、この FET では R_Z が数値的に何 Ω となるかを求めよ。

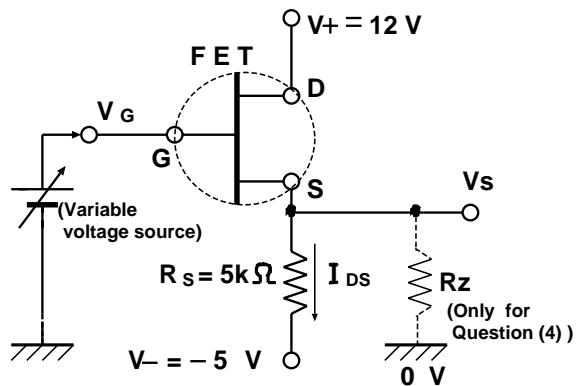


図1 . F E Tの電気的特性を測定した回路 (R_Z は設問(4)を解く際にのみ接続される抵抗である。)

表1 F E Tの測定値 (データの表)

V_G [V]	V_S [V]	(測定項目)
-3.19	-2.37	(実測データ)
-1.42	-0.79	
0.55	0.96	
2.76	3.00	
5.24	5.30	

===== 注 意 =====

必要ならばグラフ用紙の配布を受けられる。手を上げて要求して下さい。その場合記入したグラフ用紙も答案用紙と一緒に回収するので氏名、受験番号を記入しておくこと。

III-2(選択)(真空) (100点)

パイプの中の気体分子の移動を考えよう。

気体の圧力が真空に近いときには、管内で分子同士はほとんど衝突しないで、管壁に衝突するか全く衝突しないで端から出ていってしまう。これを分子流の状態という。一般にある断面を単位時間に通過する気体の量 Q は、単位時間にその断面を通過する気体の体積とその点での気体の圧力との積で表わされる。従って、 Q は例えば、 $\text{Pa} \cdot \ell \cdot \text{s}^{-1}$ という単位で表される ($1\ell = 10^3 \text{cm}^3$)。一方、パイプ全体を考えたときには、パイプ中を単位時間に通過する分子流の気体の量は両端の圧力差に比例して

$$Q = C(p_A - p_B)$$

と表される。ここで p_A および p_B はそれぞれパイプの一方の端 A および反対の端 B での気体の圧力で、 $p_A > p_B$ とする。このとき C をこのパイプのコンダクタンスという。

一定半径 $R[\text{cm}]$ で長さ $L[\text{cm}]$ のパイプ ($L \gg R$) の場合には、分子流については近似的に

$$C \simeq kR^3/L$$

となることが知られている。ここで定数 k は常温の空気の場合には $1.0 \times 10^5 \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ である。

この式の場合 C の単位は $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ となるが、実用的には $\ell \cdot \text{s}^{-1}$ で表すのが便利である。

- (1) 直径 40cm、長さ 20cm の円筒型の金属容器を真空にしたい。容器を真空にしていくと、一般に、容器の真空側の表面に吸着されている気体分子が放出されてくる。いま、この金属容器の内表面からは、 $10^{-6} \text{Pa} \cdot \ell \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ の割合で空気が放出され続けるとする。この容器を真空ポンプにつなぐために、半径 5cm、長さ 50cm のパイプの一方の端 A を容器に取り付け、パイプの反対の端 B から充分な排気能力のあるポンプで真空に引く。パイプのコンダクタンスだけを考慮すると容器の圧力はどこまで下げられるか。答の有効数字は一桁でよい。なお金属容器の内表面以外からのガスの放出は無視せよ。
- (2) 実際には使用したい真空度に見合うように、排気速度(圧力 p_B のポンプ入口 B において単位時間に排気できる気体の体積)が適当な値を持つ真空ポンプを選定しなければ不経済になる。いま設問 1 の構成で容器の圧力を 10^{-4}Pa 程度まで真空に引きたい。このとき、真空ポンプの排気速度 S はどの程度のものにすればよいか。答の有効数字は一桁でよい。 S の単位は $\ell \cdot \text{s}^{-1}$ で表せ。
- (3) 実際に設問 1 の容器を 10^{-4}Pa の真空にするためのシステムの概略を図示せよ。真空ポンプおよび真空計の種類は下記のものから適当に選ぶこと。
イオンポンプ、電離真空計、ターボ分子ポンプ、ガイスター管、油拡散ポンプ、クライオポンプ、ピラニゲージ、ロータリーポンプ、ペニングゲージ、メカニカルブースター
- (4) 設問 3 に示してある真空ポンプと真空計のうちそれぞれ 1 種類を選び、その特徴を簡単に説明せよ。

III-3 (選択) (液体窒素の性質) (100点)

液体窒素 (N_2) は1気圧 (101.3 kPa) での沸点の温度が77.3 Kであり、寒剤として放射線検出器の冷却、真空排気系の不純物除去 (コールドトラップ)、液体ヘリウムを用いた低温実験装置の予備冷却など、さまざまな分野の物理学実験で用いられている。この液体窒素の基本的な性質を調べるために、次のような実験を行った。

まず、液体窒素を容器に汲み入れ、液体と気体が共存するようにした。そして容器内の気体の圧力 P および液面近くの液体の温度 T を測定しながら、容器内を真空ポンプで徐々に排気していった。この測定の結果、液体窒素の飽和蒸気圧は沸点から65 Kまでの範囲で、

$$\ln(P/P_0) = A - (B/T) \quad (A)$$

でよく近似できることがわかった。ここで $P_0 = 101.3 \text{ kPa}$ 、 $B = 669 \text{ K}$ である。さらに排気を続けると、しばらくして容器内の圧力は1 kPa に達した。

実験の後で文献を調べると、窒素の三重点と臨界点はそれぞれ63 K (12.5 kPa) と 126 K (3.4 MPa) であるという。

- (1) この実験に適した容器の構造を簡単に説明せよ。
- (2) この実験に適した温度計の種類を一つだけあげ、その動作原理を簡単に説明せよ。
- (3) 式(A)の係数 A の値を見積もれ。
- (4) 縦軸に圧力 (常用対数目盛)、横軸に温度(比例目盛)をとって、窒素の気相、液相、固相の存在する範囲を示す相図の概要を描け。
- (5) 共存する気相と液相との間には熱平衡が成り立つから、両相の化学ポテンシャルは等しい。このことから、共存曲線の形が

$$dP/dT = -S/V \quad (B)$$

- で与えられることを導く。ここで S は 1 モルあたりの気相と液相のエントロピーの差であり、また V はそれらの体積の差をあらわす。
- (6) 液体窒素の1モルあたりの蒸発潜熱 $L = T \cdot S$ を求めよ。ただし L は温度によらず一定とみなせるものとする。また、気体窒素に対して理想気体の状態方程式が近似的に適用できるものとし (モル気体定数は $R = 8.31 \text{ J/Kmol}$)、さらに 1 モルあたりの気体の体積に比べてその液体の体積は無視できるものとする。
 - (7) 1 kPa にいたるまで減圧を続ける過程で、容器内の窒素にはどのような変化が起こるか。

III-4 (選択) (放射線測定技術) (100 点)

図 1 は陽電子 (β^+) の検出装置を示している。遮蔽体により、よく方向の決まった陽電子は、磁場 (Magnet) で 90 度曲げられ運動量を測定される。磁場の入り口と出口には小さな検出器 S1 と S2 が置いてあり粒子の通過したことが確認され、同時に通過時刻が記録される。その後検出器 A の内でエネルギーを失い静止して、電子と反応して 2 つの γ 線を生ずる。これらの γ 線は検出器 B と C で検出される。測定は A、B、C の同時計測 (同じ時刻に信号が来た時にデータを取る) で行なった。使用した検出器の種類は表に示されている。また陽電子の運動量は $P = 1 \text{ MeV}/c$ であり、磁場による曲率半径は $r = 1 \text{ m}$ であった。次の設問に答えよ。

答えには数値計算の元になった式 (必要であればその導出) および数値計算結果の両方を記すこと。ちなみに陽電子の静止質量は $0.511 \text{ MeV}/c^2$ であり、光速は $3 \times 10^8 \text{ m/sec}$ である。

検出器名	種類	備考
S1 および S2	プラスチック・シンチレータ	非常に薄い
A	プラスチック・シンチレータ	厚い
B および C	半導体検出器	A,B,C は同時計測

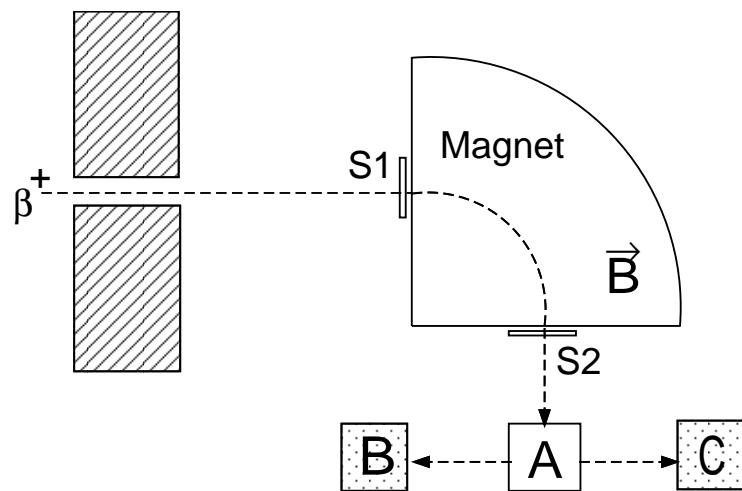


図 1: β^+ 検出装置

- (1) 検出器 S1 及び S2 での陽電子の通過時間差 $\Delta t = t_2 - t_1$ は幾らと予想されるか。
- (2) 磁場の強さはいくらか (非相対論的に考えても良い)。

- (3) 検出器 B で得られたエネルギースペクトルは図 2 に示されるようなものであった。右のピークは光電効果に起因するものであり、左の連続スペクトルはコンプトン散乱による。コンプトン端（連続スペクトラムのエネルギー最大点）に対応するエネルギーを与える式を導出し、その値を求めよ。光電効果とは γ 線が原子に吸収され $T = h\nu - B.E.$ の運動エネルギーを持った電子を放出する過程である。ここで $h\nu$ は γ 線のエネルギーであり、 $B.E.$ は電子の束縛エネルギーであるが無視できるほど小さいと考えてよい。またコンプトン散乱とは γ 線と物質中の自由電子との弹性衝突である。

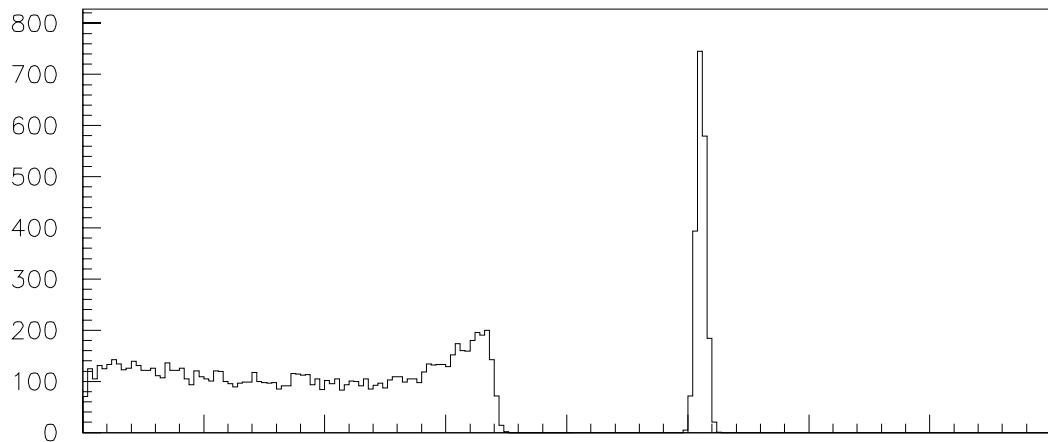


図 2: 検出器 B で得られたエネルギー分布図。

- (4) 検出器 A および C におけるエネルギー分布はどのようなものになるかを図示せよ。特にエネルギー軸（横軸）の値を書き込むのを忘れないように。また、ピークが在るときはそのエネルギー値を明示せよ。

III-5 (選択) (調和振動子) (100 点)

一次元の量子的調和振動子を考える。運動量を p 、位置を q として、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2,$$

で与えられるものとする。消滅、生成演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q - ip),$$

により定義する。準位演算子 $N = a^\dagger a$ の n 番目の規格化された固有状態を $|n\rangle$ とする。すなわち、 $N|n\rangle = n|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) このハミルトニアンで表される古典力学系では、エネルギーは非負の任意の値を取り得るが、量子論に移行すると、エネルギーは正の値の離散スペクトルを持つ。エネルギーがゼロの状態が存在しなくなる理由を簡潔に説明せよ。

- (2) 公式

$$e^{-A}Be^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!}[[B, A], A] + \dots,$$

を用いることにより、 a を複素定数 θ だけシフトする変換、すなわち

$$U^{-1}(\theta)aU(\theta) = a + \theta \equiv \alpha(\theta),$$

をみたす演算子 $U(\theta)$ をひとつ求めよ。

- (3) $\alpha(\theta)|\theta\rangle = 0$ をみたす規格化された状態 $|\theta\rangle$ を、

$$|\theta\rangle = \Lambda(a^\dagger, \theta)|0\rangle,$$

という形で表せ。但し $\Lambda(a^\dagger, \theta)$ は、 a^\dagger, θ に依存する単項式の演算子とする。

- (4) この状態 $|\theta\rangle$ における、座標表示による規格化された波動関数

$$\psi(q) \equiv \langle q|\theta\rangle,$$

を求めよ。

- (5) 同様に、運動量表示の規格化された波動関数

$$\tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\theta\rangle,$$

を求めよ。

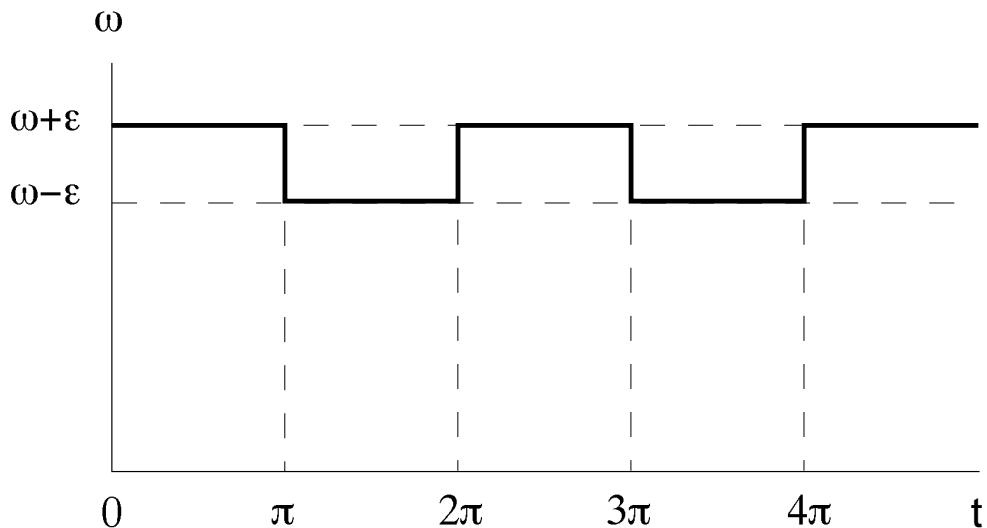
- (6) この状態 $|\theta\rangle$ における p と q の期待値 $\langle p \rangle = \langle \theta | p | \theta \rangle$, $\langle q \rangle = \langle \theta | q | \theta \rangle$ をそれぞれ求めよ。

- (7) この状態 $|\theta\rangle$ での p と q の分散 $\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle \theta | (p - \langle p \rangle)^2 | \theta \rangle$, $\langle (\Delta q)^2 \rangle = \langle \theta | (q - \langle q \rangle)^2 | \theta \rangle$, をそれぞれ求め、不確定性原理との関係を議論せよ。

III-6(選択)(パラメトリック振動)(100点)

振り子は振幅が小さい極限では、その角度 θ が二階の常微分方程式、 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ に従う。
 $\zeta = \frac{d\theta}{dt}$ とし、系の状態を $\vec{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \zeta \end{pmatrix}$ と置くと、 \vec{x} は一階の常微分方程式、 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ に従う。
ここで $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ である。

- (1) 状態 \vec{x} を時間が t だけすぎた状態に移す写像は $F = \exp(At)$ で与えることができる。この写像 F を、2行2列の行列の形であらわに書き下せ。(ヒント)もとの微分方程式の一般解を求めておいて、初期条件 $\vec{x}(0)$ に対して時間が t だけ過ぎたとき、 $\vec{x}(t) = F\vec{x}(0)$ となるように行列 F の要素を決める、という方法でも求まる。
- (2) 振り子の場合はこの ω は振り子の長さと重力加速度の関数である。ブランコをこぐときには体を伸び縮みさせて実効的な振動数 ω を変動させる。その様子を単純化して次のような状況を考える。時間 $0 < t \leq \pi$ の間は $\omega + \varepsilon$ 、 $\pi < t \leq 2\pi$ の間は $\omega - \varepsilon$ というように、振動数自体を周期 2π で振動(パラメトリック振動)させる(図参照)。状態 \vec{x} を時刻が 0 から 2π 経った状態に移す写像 F の、行列式 $\det F$ 、トレース $\text{tr } F$ 、をなるべく簡単な形で表せ。



- (3) 状態空間の点 \vec{x} を、行列 F によって写像を繰り返せば、 \vec{x} がどう発展していくかを知ることができる。写像 F によって状態 \vec{x} が原点からどんどん遠ざかっていくなら、振り子の運動は徐々に激しくなっていく。つまりブランコをこぐことに成功する。ここではいったん F を一般的な 2 行 2 列の行列 $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として考えて、次の間に答えよ。

- (a) 2行2列の行列 F の固有値を、行列式 $\det F$ とトレース $\text{tr}F$ を用いて表せ。
- (b) 2行2列の行列 F の行列式が $\det F = 1$ の条件を満たすとき、この行列のトレース $\text{tr}F$ がどのような値をとった場合に振り子が不安定化するか。
- (4) 上の(3)の結果を(2)の結果に応用すると、 ε が小さい場合、振り子が不安定化するのは ω の値が半整数と整数の近くであることがわかる。 ε が小さい極限について以下の問題に答えよ。
- (a) $\omega = 1/2 + \delta$ において、不安定化が起こる条件を δ と ε の関係で表せ。
- (b) $\omega = 1 + \delta$ とおいた場合の、不安定化の条件を δ と ε の関係で表せ。

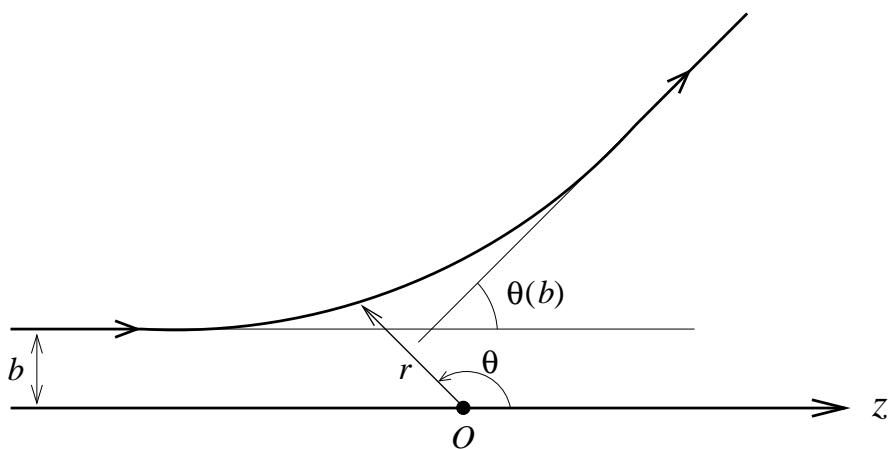
平成9年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

I-1 (中心力による散乱) (100点)

中心力による散乱の問題を非相対論的古典力学で考える。力は座標原点 O からの中心力ポテンシャル $U(r)$ で表され、 $U(r = \infty) = 0$ とする。角運動量保存により運動は一平面の上で行われる。入射粒子 A は質量 m を持ち、 z 軸に平行に衝突径数 b で $z = -\infty$ から入射する。入射時の運動エネルギーを E とする。衝突径数とは入射方向の直線と z 軸の間の距離をいう。粒子 A の座標を極座標 (r, θ, ϕ) で表す。図を参照のこと。



- (1) 角運動量の大きさ L を E 、 m 、 b を用いて表せ。
- (2) 運動平面が $\phi = 0$ で与えられるとき、角運動量の大きさ L を $\frac{d\theta}{dt}$ 、 r 、 m を用いて表せ。
- (3) 動径速度 $\frac{dr}{dt}$ を r 、 E 、 m 、 b 、 $U(r)$ を用いて表せ。
- (4) 粒子 A が原点に最も近付いた時の r の値を r_m で表す。 r_m を決める方程式を示せ。
- (5) 散乱角、つまり散乱方向の直線が z 軸となす角は衝突径数 b に依存するので、これを $\theta(b)$ で表し偏向関数と呼ぶ。偏向関数 $\theta(b)$ を r に関する積分の表式を用いて表せ。

散乱の実験はいろいろな衝突径数を持った入射粒子のビームの散乱を扱う。入射粒子 A のビームの強さを j とする。つまり、単位時間にビームの横断面の単位面積を j 個の粒子 A

が通過する。今、 θ 方向の単位立体角内に単位時間に N 個の粒子 A が散乱されて来るとする。このとき散乱の微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{j}$$

で与えられる。

- (6) 散乱角 θ に対し $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b は唯一つだけ存在するとする。散乱角 θ のまわりの微小領域 ($\theta \sim \theta + d\theta$) に散乱されてくる粒子は $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b のまわりの微小領域 ($b \sim b + db$) に入射した粒子であることに基づいて、散乱の微分断面積を偏向関数 $\theta(b)$ を用いて表せ。
- (7) 散乱角 θ に対し $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b が複数存在する場合は、散乱の微分断面積は偏向関数 $\theta(b)$ を用いてどのように表されるか。

I-2 (一様静磁場中の電子) (100点)

$-z$ 方向に一様な大きさ B の静磁場がかかっているとき、 $x-y$ 平面内における一電子の運動について考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right)^2$$

で与えられる。ベクトルポテンシャルは、

$$\left(\frac{e}{c} A_x, \frac{e}{c} A_y \right) = (\beta y, -\beta x), \quad \beta \equiv \frac{eB}{2c}$$

ととることにする。

(1) 演算子 π_x と π_y を

$$\pi_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x, \quad \pi_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y$$

で定義する。 π_x と π_y の交換関係を計算せよ。

(2) 次に、演算子 a と a^\dagger を

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\hbar\beta}}(\pi_x + i\pi_y), \quad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{\hbar\beta}}(\pi_x - i\pi_y)$$

で定義する。 a と a^\dagger の交換関係を計算せよ。さらに、複素数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 及びそれらの偏微分 $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ を用いて、 a と a^\dagger を表せ。

(3) ハミルトニアンを a と a^\dagger を用いて表し、エネルギー固有値をすべて求めよ。

(4) 角運動量の z 成分

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

を z , \bar{z} , $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ で表し、 L_z が H と同時対角化可能であることを示せ。

(5) L_z の固有値 $m\hbar$ をもつ、基底状態の波動関数 $\psi_{0,m}(z, \bar{z})$ を求めよ。ここで、 m は 0 以上の整数である。(波動関数は規格化しなくてよい。)

(6) 第一励起状態の波動関数で、 L_z の固有値が $m\hbar$ のものを求めよ。(波動関数は規格化しなくてよい。)

I-3 (Thomas 才差) (100 点)

電荷 e 、質量 m の荷電粒子が、Coulomb 引力（電場 $\mathbf{E} \propto -\nabla(1/r)$ ）によって原点まわりに等速円運動している系を考える。荷電粒子とともに動いている座標系—以後固有系と呼ぶ—は慣性系ではないが、各瞬間、瞬間には、その時々の荷電粒子の速度 \mathbf{v} と同じ速度で動いている慣性系で近似できると考えて良い。

以下の設問(1)～(4)では、円運動の平面を x - y 平面に採り、全ての速度・位置ベクトルは、この平面内のものに限ることとする。したがって、例えば、速度 \mathbf{v} は 2 次元ベクトル (v_x, v_y) を、時空座標 x^μ は 3 次元の (ct, x, y) を表す。 c は光速である。

さて、実験室系 O から、速度 \mathbf{v} で動いている慣性系 O' への Lorentz 変換は、一般に

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^2 \Lambda(\mathbf{v})^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\mu \equiv (ct, x, y)^T \quad (\text{A})$$

と書け、特に、 \mathbf{v} が x -軸方向 (\mathbf{e}_x : x 方向単位ベクトル) を向いている場合、

$$\Lambda(\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \Lambda_x(v), \quad \left(\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (\text{B})$$

である。

- (1) 実験室系 O から見て速度 \mathbf{w} で動いている物体は、 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ で動いている慣性系 O' から見れば、速度は \mathbf{w}' に見える。 $\mathbf{w}' = (w'_x, w'_y)$ を $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ で表す式を求めよ。
- (2) \mathbf{v} が x -軸を向いている場合の Lorentz 変換は (B) で与えられたが、 \mathbf{v} が x -軸と角度 θ を成して $(v_x, v_y) = (v \cos \theta, v \sin \theta)$ となる場合の Lorentz 変換 $\Lambda(\mathbf{v})$ は、 O 、 O' のそれぞれで座標系を角度 θ だけ空間回転すれば、(B) の場合に帰着できる、

$$\Lambda(\mathbf{v}) = R^{-1}(\theta)\Lambda_x(v)R(\theta) \quad (\text{C})$$

の形に書ける。 3×3 行列 $\Lambda(\mathbf{v})$ のあらわな表式を求めよ。

- (3) (C)式の形の Lorentz 変換でつながる二つの座標系は、お互いから見て座標軸が回転していないと見なし得るので、準平行と呼ばれる。

荷電粒子と共に動く固有系は、時々刻々それに対応する慣性系が、次々と互いに準平行な Lorentz 変換でつながっていくようなものである。

すなわち、時刻 t の固有系に対応する慣性系 O' から、無限小時間 dt 後の慣性系 O'' への Lorentz 変換は、速度 $d\mathbf{v}'$ の準平行 Lorentz 変換

$$x'' = \Lambda(d\mathbf{v}') x'$$

で与えられる。ただし、 $d\mathbf{v}'$ は、 O' から見た O'' の速度である。(図 1 参照)

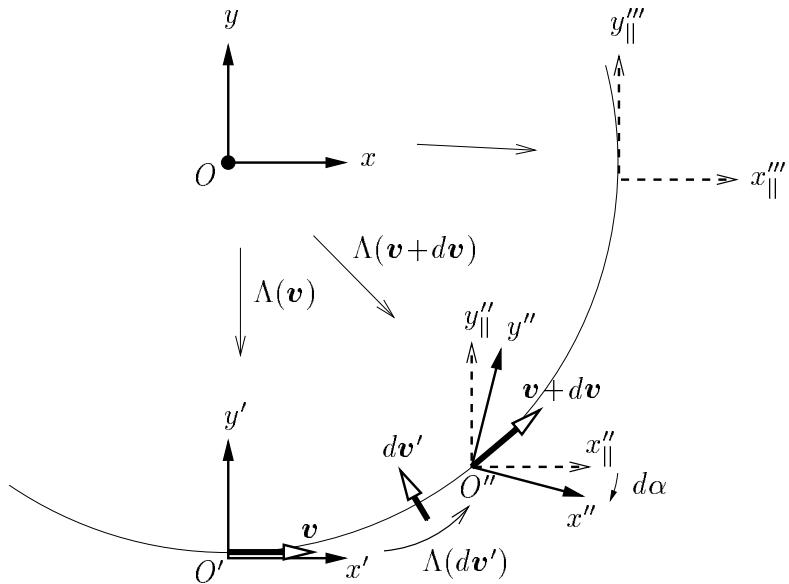


図 1: 固有系に対応する時刻 t の慣性系 O' (実線座標系) から、時刻 $t + dt$ の慣性系 O'' (実線座標系)への準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\mathbf{v}')$ 。点線の座標系は実験室系の座標系 O に準平行な座標系を表す。

実験室系で見て、時刻 t の荷電粒子の速度が $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ 、時刻 $t + dt$ での速度が $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, $d\mathbf{v} = dv \mathbf{e}_y$ (\mathbf{e}_y : y 方向単位ベクトル)とした時、 $d\mathbf{v}'$ を dv の一次のオーダーで求めよ。また、準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\mathbf{v}')$ のあらわな表式を同じオーダーで求めよ。

- (4) 時刻 t の慣性系 O' の座標軸は、実験室系 O の座標と準平行に揃えてあった、すなわち、 $x' = \Lambda(\mathbf{v}) x$ 、としよう。ところが、 dt 秒後の、 O' を準平行に Lorentz 変換した O'' : $x'' = \Lambda(d\mathbf{v}') x'$ の座標軸は、実験室系から直接、速度 $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ で準平行 Lorentz 変換した慣性系 $O''_{||}$: $x''_{||} = \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) x$ の座標軸とは一致せず、ある角度 $d\alpha$ だけ空間回転した関係になっている。これを示し、回転角 $d\alpha$ を dv の一次のオーダーで求めよ。 $(|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} + d\mathbf{v}| = v$ に注意。)

- (5) 3次元空間ベクトルの記号を使えば、この空間回転の角速度は、 $1/c^2$ のオーダーで

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{-e}{2mc} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}$$

と書けることを示せ。ただし、粒子の運動方程式 $m\mathbf{a} = e\mathbf{E}$ を用いた。

この結果は、固有系で静止しているスピン S があったとすると、実験室系から見れば角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転していることを意味する。これが Thomas 才差と呼ばれるものである。)

平成9年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい。)
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1 (Mg原子とスピンの交換相互作用) (100点)

結晶中でも、原子内でも、電子のスピン同士の間には、非常に強い相互作用が働いている。この相互作用は、素朴に期待される直接のスピン間相互作用 — スピンの磁気モーメントによる磁気相互作用 — などより桁違いに大きなもので、電子の統計性という純粹に量子力学的な性質に由来している。ここでは、例として、Mg原子を考えよう。原子番号 $Z = 12$ の Mg は、最初の 10 個の電子が、全軌道角運動量 0、全スピン 0 の閉じた殻を成し、そのまわりを 2 個の電子（最外殻電子）が回っている系である。

- (1) 原点に位置する Mg核と 10 個の閉殻電子全体を、実効的に電荷 $+Ze$ ($Z \approx 2 - 3$) の单なる点状原子核と見なす。その Coulomb ポテンシャル Ze/r の中を、互いに Coulomb 斥力を及ぼしながら運動している 2 個の最外殻電子（座標 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ）の Schrödinger 方程式は

$$\begin{aligned} H\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ H &= H_0(\nabla_1, \mathbf{r}_1) + H_0(\nabla_2, \mathbf{r}_2) + V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (\text{A})$$

の形に書ける。ただし、 $\nabla_i = \partial/\partial\mathbf{r}_i$ で、 V_{ee} は Coulomb 斥力ポテンシャルを表す。電子の質量を m 、電荷を $-e$ として、Hamilton 演算子 H をあらわな形で書け。

- (2) Schrödinger 方程式 (A) の解 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は、エネルギー固有値 E が縮退していなければ、必ず $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ の対称関数または反対称関数である。これを証明せよ。
- (3) Coulomb 斥力項 V_{ee} は小さいと見なして摂動で扱う。一体系の Hamiltonian $H_0(\nabla, \mathbf{r})$ の二つの相異なる（規格化された）固有状態をそれぞれ $\varphi_a(\mathbf{r})$ (固有値 E_a)、 $\varphi_b(\mathbf{r})$ (固有値 E_b) とした時、

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a(\mathbf{r}_1)\varphi_b(\mathbf{r}_2) \pm \varphi_a(\mathbf{r}_2)\varphi_b(\mathbf{r}_1))$$

は、Schrödinger 方程式 (A) の摂動のゼロ次の固有解になっている。対応する固有値 E_{\pm} を、摂動 V_{ee} の一次の近似で求めよ。ただし、次の積分 I, J を用いて答えよ。

$$\begin{aligned} I &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\varphi_a(\mathbf{r}_1)|^2 V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\varphi_b(\mathbf{r}_2)|^2 \\ J &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_a^*(\mathbf{r}_1) \varphi_b(\mathbf{r}_1) V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi_b^*(\mathbf{r}_2) \varphi_a(\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

また、この時 $E_+ > E_-$ が成り立つが、その定性的理由を述べよ。

- (4) ここまででは、電子のスピンの自由度を考慮しなかったが、これを考慮すれば、系の波動関数は $\Psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)$ と書くべきである。 s_i は、 $\pm 1/2$ の値をとるスピン変数である。ここで、電子がフェルミ統計に従うという事実を考慮に取り入れれば、Hamilton 演算子 H が全くスピン演算子 $\mathbf{s}_i (= \boldsymbol{\sigma}_i/2)$ ($i = 1, 2$) を含まないにもかかわらず、系のエネルギー固有関数は、系の全スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ の大きさの確定した状態になる。 \mathbf{S} の大きさの確定した状態を具体的に作り、それと前問の $\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ とを用いて、フェルミ統計性を満たす固有波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)$ を構成せよ。ただし、一体のスピン up, down 状態は、それぞれ $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$ ($s : s_1$ or s_2) と記せ。(あるいは $|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$ を使っても良い。)
- (5) 軌道状態 φ_a, φ_b ($a \neq b$) に電子が一個ずつあるという状態に話を限定しておけば、系は二電子のスピン自由度のみの系と見なせて、上の結果は、この近似の範囲内で、実効的 Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = c + d \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$$

で記述できる。係数 c, d を E_{\pm} で表せ。

II-2 (4 サイト Heisenberg 模型) (100 点)

4 サイトのハイゼンベルグ模型を考える。ハミルトニアンは

$$H = J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

で与えられる。スピンの大きさは $1/2$ である。以下では、ボルツマン定数を k とし、 $\hbar = 1$ とおく。

(1) 次の恒等式に注意して、すべてのエネルギー固有値と縮重重度を求めよ。

$$(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4)^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3)^2 + (\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_4)^2 + 2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

(2) この系が温度 T の熱平衡状態にあるとき、分配関数 Z と内部エネルギー E を $K(\equiv J/kT)$ と J を用いて書け。

(3) 系の比熱を計算し、 $kT \gg |J|$ と $kT \ll |J|$ のときの近似式を書け。 $(J > 0$ と $J < 0$ の両方の場合を考えよ。)

この系に磁場 h をかけると、ハミルトニアンには

$$H' = -hS^z, \quad S^z \equiv S_1^z + S_2^z + S_3^z + S_4^z$$

が加わり、全ハミルトニアンは $H + H'$ となる。 $(S_i^z$ は \mathbf{S}_i の z 成分である。)

(4) 磁化 $\langle S^z \rangle$ を $K, h, \beta(\equiv 1/kT)$ を用いて表せ。ただし、 $\langle \rangle$ は全ハミルトニアン $H + H'$ に関する平均である。

(5) この系の $h \rightarrow 0$ での帶磁率

$$\chi \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle S^z \rangle$$

を計算し、 $kT \gg |J|$ と $kT \ll |J|$ のときの近似式を書け。

(6) 前問で求めた帶磁率の低温極限 ($T \rightarrow 0$) での値は、 J の符号によって全く異なっている。この理由を簡単に述べよ。

II-3 (回転する球状超伝導体の作る磁場) (100点)

電気的に中性で超伝導状態になっている半径 R の球が真空中に置かれ、 z 軸まわりに一定の角速度 $\omega \equiv \omega e_z$ (e_z : z 軸方向単位ベクトル) で回転している。この時、球内外に作られる静的な磁束密度 \mathbf{B} を、Maxwell 方程式

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A})$$

および $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ を解いて求めることを考える（簡単のため球内と真空中での透磁率は共に μ_0 とする）。超伝導状態にある場合、球内の電流密度 \mathbf{j} は、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ のゲージのベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて

$$\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \frac{m}{e} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \quad (\text{B})$$

で与えられることが知られている。ここで、 λ は磁気侵入長と呼ばれる超伝導性を特徴づけるパラメータであり、 m と $-e$ はそれぞれ、電子の質量と電荷である。

必要な場合は、問題文のあとに記す公式を用いよ。

- (1) 動径方向単位ベクトル $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/r$ の各成分 $x/r, y/r, z/r$ は、どれも角運動量の大きさの演算子 \mathbf{L}^2 の固有関数である。その固有値を答えよ（計算は示さなくても良い）。ただし、 \mathbf{L}^2 は 3 次元極（球）座標 (r, θ, ϕ) で次の表式で与えられるものである：

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \quad (\text{C})$$

- (2) (B) 式を用いて、Maxwell 方程式 (A) を $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対する方程式に書き直せ。また、そこで $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$ ($\rho \equiv r/\lambda$) という関数形を予想すれば、方程式が簡単に

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \frac{2}{\rho^2} A = \begin{cases} A - \Omega \rho & (\text{球内: } \rho < \rho_R) \\ 0 & (\text{球外: } \rho > \rho_R) \end{cases} \quad (\text{D})$$

となることを示せ。ただし、 $\Omega \equiv (m/e)\lambda\omega$, $\rho_R \equiv R/\lambda$ と定義した。

- (3) 方程式 (D) を解き、球の内部と外部における $A(\rho)$ を求めよ。ただし、無限遠 ($\rho \rightarrow \infty$) で磁場はゼロになるとせよ。

（ヒント： 球内部では、 $\tilde{A}(\rho) \equiv A(\rho) - \Omega \rho$ に対する方程式を考えよ。）

- (4) 球外部における磁束密度 \mathbf{B} は、单一の磁気双極子 \mathbf{p} の作る磁束密度

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}$$

と同じ形になっていることを示せ。また、 \mathbf{p} を $\mu_0, \lambda, R, \boldsymbol{\Omega} (= \Omega e_z)$ で表せ。

(5) 球内部における電流密度は $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$ の形を持つ。以下、 $R \gg \lambda$ と仮定しよう。この場合、 $j(r)$ は球内部の殆どで $e^{-R/\lambda}$ 程度の非常に小さな量になる。 $j(r)$ の大きい所はどこか、またその近傍での $j(r)$ の関数形を答えよ。

(6) 球の中心での磁束密度 \mathbf{B} は λ に依らないことを示せ。

公式

- Laplace演算子の表式:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}$$

- 微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{n(n+1)}{x^2} \right) \right] F_n(x) = 0 , \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$\mathcal{D} x = 0$ で正則な解:

$$F_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sinh x}{x}$$

平成9年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で 6 間ある。これらから 3 間を選択せよ。
ただし、第一志望分科が、理論系の場合は問題 III-1,-2,-3 から少なくとも 1 間、実験系の場合は問題 III-4,-5,-6 から少なくとも 1 間、はそれぞれ選ぶこと。
 - (2) 選択した問題の解答は、それぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
 - (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

III-1 (選択) (古典粒子系の密度相関) (100点)

次のハミルトニアンで記述される一次元の古典 $N+1$ 粒子系を考える。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=0}^{N-1} w(x_{j+1} - x_j)$$

粒子の順序は交換せず常に $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ であり、 x_0 は $x_0 = 0$ に固定されているものとする。系には一定の圧力 P が外からかかっているものとしよう。 $w(x)$ は 2 粒子間の相互作用ポテンシャルで、その関数形は、任意の温度 $T(>0)$ 、 P に対して熱力学量が有限値をとるように選ばれていると仮定する。

- (1) 系の長さの期待値 $L = \langle x_N \rangle$ を計算し、関数 $w(x)$ を用いた積分形で表せ。ここで、 $\langle \rangle$ は 温度 T 、 P 一定下での統計平均とする(ヒント： P 、 T 一定下でのアンサンブルはハミルトニアン H を形式的に $H + x_N \cdot P$ で置き換えて定義される)。
- (2) 系の圧縮率

$$\kappa = -\left. \frac{\partial L}{\partial P} \right|_T$$

は、任意の $T(>0)$ 、 P に対して正であることを示せ。

次に、具体例として

$$w(x) = \begin{cases} 0 & (x > b) \\ +\infty & (0 < x < b) \end{cases}$$

の場合を考える。

- (3) 粒子の平均間隔 $a = L/N$ を用いて、状態方程式を書け。
- (4) 粒子の密度(位置)相関を見るには、その Fourier 変換

$$S(k) = \frac{1}{N} \int dx dx' e^{-ik(x-x')} \langle \rho(x) \rho(x') \rangle$$

がしばしば便利な量となる。ここで、密度は $\rho(x) = \sum_{j=0}^N \delta(x - x_j)$ で、 $k \neq 0$ とする。 $S(k)$ を k 、 a 、 b を用いて表せ(ただし、 $1/N$ のオーダーの量を無視せよ)。

(5) 十分高密度 ($\varepsilon \equiv (a - b)/a \ll 1$) の場合、 $S(k)$ はたいていの k に対し、 ε^2 程度の小さな量になるが、 k が nK (n は整数、 K はある正の定数) の極めて近くでは逆に ε^{-2} のオーダーの大きな値をとり、

$$S(k) \simeq \frac{2C_n\varepsilon^2}{(k - nK)^2a^2 + C_n^2\varepsilon^4}$$

の形で近似できるようになる。 K および、 C_n (n に依存する正の定数) を具体的に求めよ。

一次元系において完全な固体が実現した場合、 $S(k) = (2\pi/a) \sum_{n \neq 0} \delta(k - nK)$
という結果になる。上記のモデルの $S(k)$ は、高密度極限においてこの完全固体の結果になっている。

III-2 (選択) (角運動量の表現) (100点)

- (1) 2変数 u_1, u_2 からなる 2成分ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ を考える。 \mathbf{u} に関する微分演算子 j_x, j_y, j_z を

$$j_k = \mathbf{u} S_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 u_\alpha (S_k)_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta}, \quad (k = x, y, z)$$

で定義する。ここで、2行2列のスピン行列 S_x, S_y, S_z は

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる。 j_x, j_y, j_z の相互の間の交換関係は S_x, S_y, S_z の相互の間の交換関係に等しい、つまり角運動量の交換関係に等しい。この事実を見るために、実際に

$$[j_k, j_\ell] = \mathbf{u} [S_k, S_\ell] \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 u_\alpha ([S_k, S_\ell])_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta}$$

が成立することを証明せよ。

- (2) \mathbf{j}^2 を $\mathbf{j}^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ で定義する。2変数 u_1, u_2 から作る単項式

$$\phi_m^j(\mathbf{u}) = u_1^{j+m} u_2^{j-m}$$

は次の性質を持つことを示せ。

- (a) $j_z \phi_m^j(\mathbf{u}) = m \phi_m^j(\mathbf{u}),$
- (b) $\mathbf{j}^2 \phi_m^j(\mathbf{u}) = j(j+1) \phi_m^j(\mathbf{u}).$

以下の議論で、 j ($j \geq 0$) は整数か半整数で、 $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ であるとする。

- (3) 別の2変数 v_1, v_2 からなる 2成分ベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ を導入し、 \mathbf{v} に関する微分演算子 p_k を j_k と全く同様に $p_k = \mathbf{v} S_k (\partial/\partial \mathbf{v})$ ($k = x, y, z$) で定義する。さて、 $D = u_1 v_2 - u_2 v_1$ で与えられる行列式 D は合成角運動量演算子 $J_k = j_k + p_k$ に対して

$$J_k D = 0 \quad (k = x, y, z)$$

という性質を持つことを示せ。

- (4) $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ を

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1^{j_1-j_2+J} v_1^{-j_1+j_2+J} D^{j_1+j_2-J}$$

で定義する。ただし $J = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$ とする。このとき次の関係を証明することにより $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ が合成角運動量の固有状態であることを示せ。

- (a) $(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_1(j_1 + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- (b) $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_2(j_2 + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- (c) $J_z\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = J\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- (d) $(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = J(J + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

(5) 一般に合成角運動量の固有状態 $|JM\rangle$ は Clebsch-Gordan 係数 $(j_1m_1j_2m_2|JM)$ を用いて

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1m_1j_2m_2|JM) |j_1m_1\rangle |j_2m_2\rangle$$

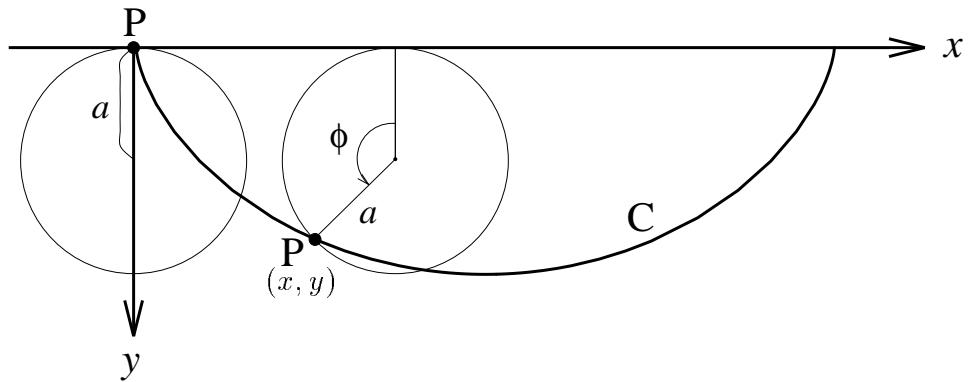
で与えられる。ここで、角運動量の固有状態 $|JM\rangle$ 、 $|j_1m_1\rangle$ 、 $|j_2m_2\rangle$ は規格化されている。さて変数 u_1 、 u_2 に関する適当な積分を定義すると、 $\frac{\phi_m^j(\mathbf{u})}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$ は量子数 j 、 m について規格直交化されている。前問(4)を用いて、 $M=J$ の場合の Clebsch-Gordan 係数 $(j_1m_1j_2m_2|JJ)$ の具体的な表式を示せ。Clebsch-Gordan 係数の符号の約束は $(j_1j_1j_2J - j_1|JJ) > 0$ である。必要なら公式

$$\sum_{a+b=r} \frac{(p+a)!}{p!a!} \frac{(q+b)!}{q!b!} = \frac{(p+q+r+1)!}{(p+q+1)!r!}$$

を用いよ。

III-3 (選択) (サイクロイド上の質点の運動) (100点)

- (1) 半径 a の円を下図のように x 軸に沿って反時計回りに滑ることなく一回転させるととき円上の点 P の描く軌跡をサイクロイドという。サイクロイド C 上の任意の点の座標 (x, y) を円の回転角 ϕ を用いて表せ。



- (2) 問(1)で求めたサイクロイド C に沿って滑らかなレールを作り、そのレール上を質量 m の質点が摩擦無しに重力の作用の下で運動するようにした。ただし、レールは鉛直面内にあり y 軸の正方向に加速度 g の重力が働いているとする。時刻 $t = 0$ に回転角 ϕ_0 の位置にあった質点が自然に滑り落ち始めた。このとき次の間に答えよ。

- (a) 質点の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を変数 $z = \cos(\phi/2)$ を用いて表せ。
 - (b) 質点の運動方程式を求め、 z について解け。また、この運動の特徴を記せ。
- (3) 前問(2)と同様にサイクロイド上を質量 m の質点が重力の作用下で運動し、更に質点の速度に比例する抵抗 $k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ が働いている場合を考える。 $t = 0$ での初期条件は前問(2)と同じであるとして次の間に答えよ。
- (a) 質点の運動方程式を変数 z を用いて書け。
 - (b) 運動方程式を、 k/m が $\sqrt{g/a}$ よりも大きい、小さい、あるいは等しい、の 3つの場合に分けて z について解け。また質点の運動の特徴を記せ。

III-4 (選択) (電気回路・電磁気) (100点)

インダクタンス L のコイルと容量 C のコンデンサーを周期的に並べた図 1 の様な回路は、電荷による信号を遅延させる働きをする。コイル間には電磁誘導による結合はないものとし、 I_i はコイルを流れる電流、 Q_i はコンデンサーに貯められた電荷とする。

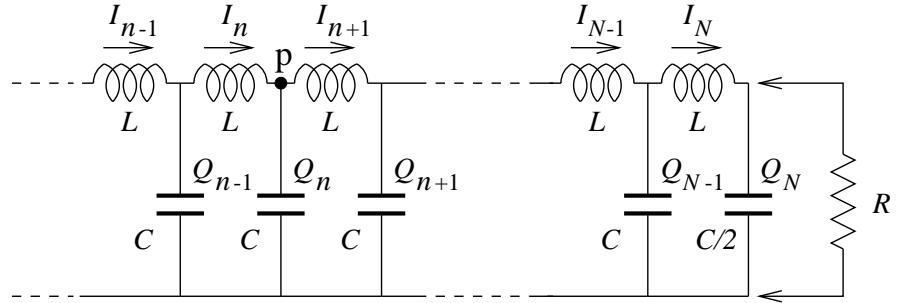


図 1:

- (1) n 番目と $n+1$ 番目の閉回路において、電圧が満たすべき関係式と、結節点 p に流入する電流の関係式を使って、次の関係が成り立つことを示せ。

$$L \frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \frac{1}{C} (Q_{n-1} + Q_{n+1} - 2Q_n).$$

- (2) n, N が大きく、回路の両端が無視できるとしたとき、

$$Q_{n-1}(t) = Q_n(t + \Delta t)$$

となって、 Δt だけ遅れて電荷による信号が図示のコンデンサー列上を左から右へと伝わる解がある。 Δt を L と C で表せ。(ヒント: Δt が小さいとして任意の時間 t のまわりにテイラー展開してその 2 次までをとる。)

- (3) 適当な大きさ R を持つ抵抗素子を、回路の右端の容量 $C/2$ のコンデンサーに並列につなぐと、反射が生じなくなり

$$Q_{N-1}(t) = 2Q_N(t + \Delta t)$$

となる。 R を L と C で表せ。

- (4) $Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, \dots$ は短い間隔 Δr で並んでおり、 r, t について滑らかな関数 $Q(r, t)$ で表現できるものとする。 L_0, C_0 をそれぞれ単位長さ当たりのインダクタンス、容量とし、(1)に示した関係式より電荷の伝播方程式を導き、伝播速度を求めよ。

(5) 図2のように接地された導体板上に厚さ d で比誘電率 ϵ 、比透磁率 μ の絶縁体膜をつけ、その上に幅 w の導体薄膜線路をついたときの単位長さ当りの容量、インダクタンスを求め、これをもとに電荷の伝播速度を導け。但し、 $w \gg d$ とし、電束密度、磁束密度は導体薄膜線路と導体板の間では一様で一定値をとるが、それ以外の部分では無視できるほど小さいものとする。単位系は、MKS、CGSのいずれを用いても良い。(ヒント：インダクタンスを求めるには、導体薄膜線路と導体板に流れる電流により両板の間に誘起される磁束の時間変化が起電力を与えることに着目すれば良い。)

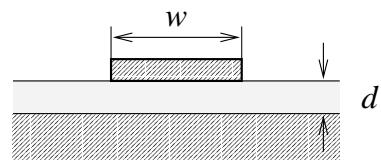


図2: 断面図。伝播方向は紙面に垂直。

III-5 (選択) (レーザー冷却) (100点)

電荷をもたない中性原子の運動をレーザー光を用いて制御することにより、原子集団の温度を下げることができる。これに関連して以下の間に答えよ。ただし簡単のため、質量 m の中性原子は 2 準位（基底状態 $|g\rangle$ と励起状態 $|e\rangle$ ）のみをとりうるとし、レーザー光は単色光とみなし、その実験室系での周波数を ν とする。なお原子の運動は鉛直 z 方向の 1 次元のみが可能とし、その速度 v は光速 c よりも十分小さく、 v/c の 2 次以上の項は無視するものとする。以下の設問 (1), (2), (3) では重力の効果を無視する。

光を吸収して励起状態 $|e\rangle$ (エネルギー E_e) に励起させられた原子は、その後すぐに自然放出光を出して基底状態 $|g\rangle$ (エネルギー E_g) に戻る。この際原子が常に同じ向きの光(鉛直下向きの光としよう)を吸収するようになると、その光子の運動量が原子に与えられ、これを繰り返すことにより一定の向き(鉛直下向き)に力を受けることになる。一方、自然放出光はあらゆる向きに放出されるので、これによって原子が受ける力の平均値は零になる。また、一旦停止した原子はある機構によりそのまま停止し続けるとする。

- (1) 時刻 t での、状態 $|g\rangle$ および $|e\rangle$ の存在確率を $N_g(t)$ および $N_e(t)$ とする ($N_g(t) + N_e(t) = 1$)。2 準位間の吸収及び誘導放出の遷移確率は加える光の強度 I に比例し、その比例係数を b (定数) とすると、原子の正味の光吸収率は $bI(N_g(t) - N_e(t))$ となる。励起状態 $|e\rangle$ の寿命を τ とすると、 τ より十分長時間の後に、 $N_g(t)$, $N_e(t)$ は定常状態 ($dN_g(t)/dt = dN_e(t)/dt = 0$) に達し、各々 $N_g(\infty)$, $N_e(\infty)$ になる。 $N_g(\infty)$, $N_e(\infty)$ を求め、その結果からレーザー光が原子に及ぼす力(単位時間あたりに受ける運動量変化) F が

$$F = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{bI}{1 + 2\tau bI}$$

と表わせることを示せ。ただし、 h はプランク定数である。

- (2) 原点 $z = 0$ から鉛直上向きに初速度 u で飛び出していく原子が、レーザー光から一定の力 F によって停止させられるまでに要する時間 t 、及び距離 L を、 m 、 u 、 F を用いて表わせ。また、座標 z ($0 < z < L$) の点における原子の速度 $v(z)$ を u 、 L 、 z を用いて表わせ。
- (3) 実際には、設問(1)で用いられた b の値は、原子とともに運動する座標系でみたレーザー周波数 ν' と原子の共鳴周波数 $(E_e - E_g)/h$ のずれに依存する。ここでは単純化して、 $E_e - E_g \neq h\nu'$ では $b = 0$ で、 $E_e - E_g = h\nu'$ のときのみ値 $b(\neq 0)$ をとるとする。このような状況では、原子がレーザー光から受けた力によって減速されるにつれてドップラー効果により ν' が変わるため、 ν' と $(E_e - E_g)/h$ を常に等しくして一定の力を原子に与え続けるためには工夫が必要になる。そこで、磁場によるエネルギーのシフトを利用してドップラー効果を補正し、原子を停止させることを考えよう。ここで、2 準位間のエネルギー差は $E_e - E_g$ から、実験室系において z 方向に加えた磁場 $B(z)$ により、 $E_e - E_g + \alpha B(z)$ のように変化するとする (α は定数)。実験室系でのレーザー光の周波数 ν が $\nu = (E_e - E_g)/h$ のとき、初速度 u の原子を停止させ

るために加えるべき磁場 $B(z)$ ($0 < z < L$) の表式を z の関数として求めよ。また、この磁場により、初速度が u 以下の原子も $z = L$ で停止することを説明せよ。

- (4) 冷却された原子集団の温度測定について考えよう。ただし、本問においては重力を無視せず、設問 (1), (2), (3) で考えたレーザー光や磁場はもはや加えてないし、さらに、原子弹うしの衝突を無視する。いま、時刻 $t = 0$ において全ての原子は点 $z = d (> 0)$ にあり、原子の速度 v_0 は温度 T の Maxwell 分布関数 $f(v_0)$ に従って分布している。また、原点 $z = 0$ には、 z 方向と直交する方向から非常に弱いレーザー光（プローブ光）が照射されている。原子は重力を受けながら運動し（重力加速度を g とする）、原点を横切るときプローブ光を吸収する。時刻 t での単位時間あたりの吸収量 $A(t)$ は、その時刻 t での原点における原子数密度 $\rho_z = f(v_0)dv_0/dz$ に比例する。この比例係数を a として $A(t)$ の t 依存性を表す具体的な表式を見い出せ。（これから温度 T を測定することができる。）ただし、必要ならば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$$

を用いよ。

- (5) 光の検出器の例を一つ挙げ、その原理を簡潔に述べよ。

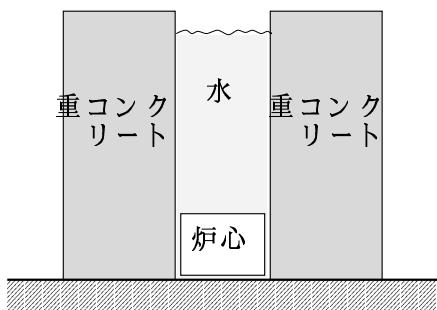
III-6 (選択) (放射線計測) (100点)

放射線計測の基礎に関する以下の間に答えよ。ただし、数値計算は有効数字2桁までの計算で良い。またアボガドロ数は $6.0 \times 10^{23} (\text{mol}^{-1})$ 、 $\ln 2 = 0.69$ とする。

- (1) 加速器のターゲット室や原子炉の炉心では多量の γ 線が発生している。人体を守るために、これらの γ 線は重コンクリートなどを用いて遮蔽されている。遮蔽物体の γ 線に対する吸収係数が $\mu (\text{cm}^{-1})$ のとき、 γ 線が $\Delta x (\text{cm})$ の厚さの遮蔽物を通過するときの、強さ I の γ 線の減衰 $-\Delta I$ は

$$-\Delta I = \mu I \cdot \Delta x$$

で表される。



図の様なスイミング・プール型の原子炉があり、炉心の周りは 1(m) 厚の重コンクリートで遮蔽されている。上部は水で遮蔽されている。いま原子炉の出力を 2 倍に上げる計画をした。前と同じ遮蔽効果(漏洩 γ 線量を同じ)にするためには重コンクリートの側面にどれだけの厚さの鉄板を補えばよいか。また、このとき、上部も側面と同じ遮蔽効果を得るために水の深さはどれほど必要か。 γ 線の強さは出力に比例するものとする。

ただし、

重コンクリートの密度は $5.0(\text{g}/\text{cm}^3)$ 、 γ 線にたいする質量吸収係数は $3.2 \times 10^{-2}(\text{cm}^2/\text{g})$ である。

鉄の密度は $7.9(\text{g}/\text{cm}^3)$ 、 γ 線にたいする質量吸収係数は $3.3 \times 10^{-2}(\text{cm}^2/\text{g})$ である。

水の γ 線にたいする質量吸収係数は $3.4 \times 10^{-2}(\text{cm}^2/\text{g})$ である。

- (2) 原子炉は強力な中性子場として色々な実験に利用されている。今、金箔 (${}^{197}\text{Au}$) $1.0 \times 10^{-6} (\text{g})$ を原子炉で丁度半減期 ($T_{1/2}$) 相当の時間照射した。中性子を吸収した ${}^{198}\text{Au}$ は β 崩壊して安定な ${}^{198}\text{Hg}$ になる。従って、 ${}^{198}\text{Au}$ の個数 N の変化は毎秒 $\phi \sigma A_0$ だけ増え、また毎秒 λN だけ崩壊するから、

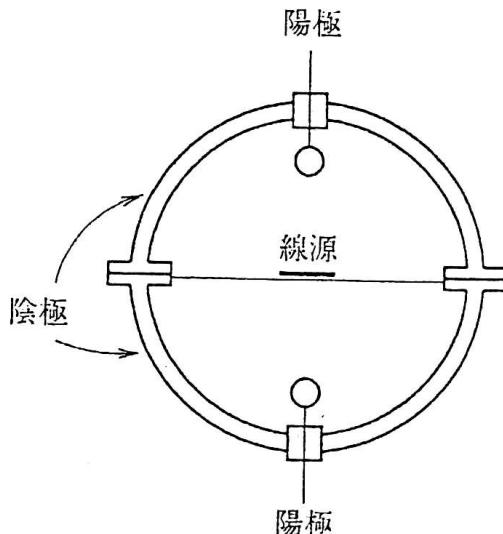
$$\frac{dN}{dt} = \phi \sigma A_0 - \lambda N$$

ただし、 ϕ は中性子束で σ は放射化断面積である。

A_0 は ^{197}Au の個数で照射中も殆ど変化せず、一定と考える。

λ は崩壊定数で $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ である。

金の放射化断面積を $9.6 \times 10^{-23}(\text{cm}^2)$ 、中性子束を $\phi (\text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1})$ とするとき照射後すぐの β 放射線の強さ Q は何ベックレル（毎秒当たりの崩壊数）か。（ ϕ を含んだ式で表せ。）



- (3) 中性子束を算出するため上記 β 線源の強さ Q の絶対測定を行った。 β 検出器として図示のような 4π ベータカウンターを用いた。カウンターは上下二段になっており、中央に β 線源をおいた薄いフィルムをおく。上下はこのフィルムで分断されている。すなわち、カウンター上部では直接 β 線源と向きあっているが、カウンターアンダーフィルムではフィルムの吸収を受けたものを測定することになる。フィルムによるバックスキッターによる効果は無視する。カウンターは上下部同時に、また別々にも測定出来るようになっている。なお β 線源自身の吸収は無視する。

上下を同時に測定し回路的に合計したときのカウント・レートを N_{12} ,

上だけの測定（下のカウンター電源を切る）したときのカウント・レートを N_1 ,

下だけの測定（上のカウンター電源を切る）したときのカウント・レートを N_2 ,
とする。

ただし、 β 線は上下に等量づつ放出されると考える。 β 線は電源が入っているカウンターでは散乱ではなく全て計数されるが、電源の入っていないカウンターでは w の割合で散乱され、薄いフィルムを通過して電源の入っているカウンターで計数される。

真のカウント・レート Q 、フィルムによる吸収率を v とするとき、 N_{12} , N_1 , N_2 を v , w , Q を用いて表せ。ただし、 v , w は小さく v^2 , w^2 , vw の寄与は無視する。

- (4) $N_{12} = 1,132,244$, $N_1 = 700,038$, $N_2 = 687,601$ (counts/sec) であった。真のカウント・レート Q を求め、中性子束の強さを算出せよ。

平成9年度大学院入学試験問題 I 訂正

I-3

設問(1)

誤 : … 物体は、慣性系 O' から見れば、…

正 : … 物体は、 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ で動いている慣性系 O' から見れば、…

設問(5)

誤 :

$$\frac{e}{2mc} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}$$

正 :

$$\frac{-e}{2mc} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}$$

平成8年度大学院入学試験問題 I (3時間)

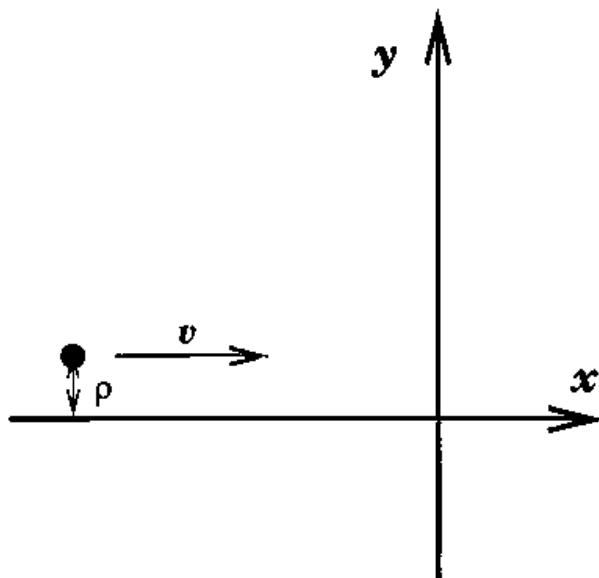
注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (100 点)

x - y 平面上に拘束された質量 m の質点に中心力 $V(r) = -ar^{-s}$ ($a > 0, s > 0$) が働いてい るとする。以下の問い合わせよ。

- (1) 系のラグランジアンを平面極座標 (r, θ) を用いて書き表し運動方程式を書き下せ。また角運動量 $M = mr^2\dot{\theta}$ の保存を用い角度変数 θ を運動方程式より消去せよ。[ドットは時間微分をあらわす。すなわち $\dot{\theta} \equiv d\theta/dt$]
- (2) 質点が円運動をしている場合、その半径と角運動量の関係を導け。その円軌道が動径 方向の微小なずれに対して安定であるために s がみたすべき条件は何か。
- (3) 円軌道が安定な場合、円軌道からの微小なずれに対して動径方向の振動の周期を求め よ。それを用いて角度方向に 1 回回転した時に軌道が閉じるための条件を求めよ。
- (4) 設問 (3) とは逆に円軌道が安定ではないような s の領域で考える。この場合質点が (x, y) 座標で無限遠点 $(-L, \rho)$ (ただし $L \rightarrow \infty$) より速度 $(v, 0)$ で原点に向かったと して(下図参照)、質点が原点からの中心力に吸収されるためには ρ はどの範囲にな ければならないか。



I-2 (100 点)

- (1) 調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ の下にある質量 m の粒子の基底状態は、ガウス型の波動関数で表される。この状態の固有エネルギー E_0 および規格化された固有関数を求めよ。必要ならば、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

次に、ポテンシャル $V_1(x)$ および $V_2(x)$ を次のように定義する。但し、 $a > 0$ とする。

$$V_1(x) = \frac{1}{2}k(x+a)^2 + V_0 ,$$

$$V_2(x) = \frac{1}{2}k(x-a)^2 - V_0 .$$

また、ポテンシャル $V_1(x)$ の下での基底状態を $|1\rangle$ 、 $V_2(x)$ の下での基底状態を $|2\rangle$ としよう。但し、 $\langle 1|1\rangle = 1$ 、 $\langle 2|2\rangle = 1$ である。

さて、この $V_1(x)$ 、 $V_2(x)$ を用いて表される二重調和振動子ポテンシャル（下図参照）

$$V_D(x) = \begin{cases} V_1(x) & (x < -V_0/ka) \\ V_2(x) & (x \geq -V_0/ka) \end{cases}$$

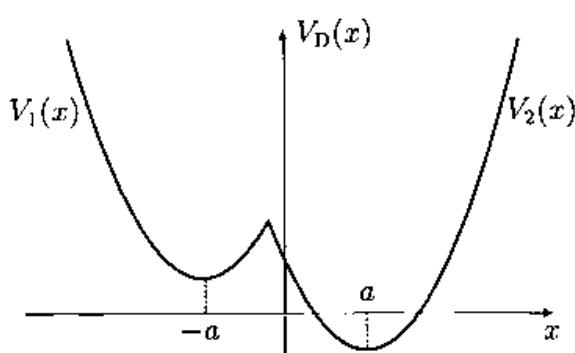
における質量 m の粒子の運動を考える。ハミルトニアンを $H = \frac{p^2}{2m} + V_D(x)$ とし、以下の問いに答えよ。

- (2) まず、 $V_0 = 0$ として $\langle 2|H|1\rangle$ を計算せよ。また、このとき $\langle 1|(V_D - V_1)|1\rangle < 0$ であること、 a が十分大きいとき $|\langle 1|(V_D - V_1)|1\rangle| \ll E_0$ であることを示せ。

- (3) 次に、 $V_0 > 0$ とする。 $|1\rangle$ および $|2\rangle$ を基底に取り、 H の行列要素を求めるとき、 a が十分大きいとき

$$\begin{pmatrix} E_0 + V_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 - V_0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。但し、 $\Delta = -\langle 2|H|1\rangle$ とおいた。これを用いて H の固有値を求め、固有関数を $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の線形結合で表せ。但し、固有関数の規格化は不要である。さらに、この固有関数の概形を図示せよ。



I-3 (100 点)

容積 V^{tot} の密閉容器の中に、総数 N ($\gg 1$) 個の古典理想気体粒子と、マクロな大きさの「かご」がある（下図参照）。系全体は均一の温度 T にあるとする。気体粒子はかごに自由に入り出しができる、1 粒子あたりのポテンシャルエネルギーはかごに囲まれた領域で $-\epsilon$ (ϵ は正定数)、それ以外では 0 とする。

次の各設問に答えよ。ただし (3) 以下では、 $N/V^{\text{tot}} \equiv \rho$ が有限、かつ $v/V^{\text{tot}} \ll 1$ という状況を考え、 $v/V^{\text{tot}} \rightarrow 0$ とおいた近似で答えること。

(1) かごに囲まれた領域の体積 (v とする) を指定したときの、全粒子の Helmholtz 自由エネルギーを求めよ。気体粒子の質量を m とし、また Stirling の公式 $\ln N! = N \ln N - N + \mathcal{O}(\ln N)$ を用いてよい。

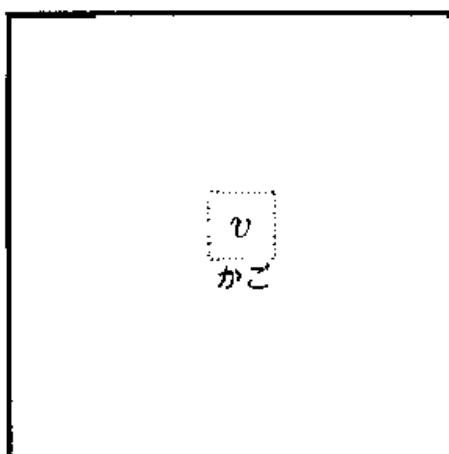
(2) このときのかご内外での平衡粒子数密度（それぞれ ρ_{in} , ρ_{out} とする）を求めよ。

さらに、このかごは弾性体でできているとしよう。かごは（気体粒子が自由に入れり出しができるだけでなく）その囲む体積 v が $0 < v < V^{\text{tot}}$ の範囲で可変で、その変化に関するかごの弾性エネルギーが $U_0(v) = \frac{1}{2}Kv^2$ (K は正定数) で与えられるとする。

(3) v の平衡値を求めよ。

(4) 設問 (3) の結果について、高温および低温の極限での v の温度依存性を調べよ。また、その物理的解釈も述べよ。

(5) 今の状況で、かごの体積を増やそうとする熱力学的力の起源を気体分子運動論の見地から説明せよ。必ずしも数式を用いなくてもよい。（かごに囲まれた領域のサイズは、気体粒子の平均自由行程にくらべて十分大きいとする。）



平成8年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (100点)

図のように直交座標系 (x, y, z) をとり、 $y-z$ 面上で z 軸からの角度 θ 、原点から充分遠い距離 r [m] の位置を A 点とする。荷電粒子の速度は光速 c に比べて十分小さいとして、以下の設問に答えよ。ここでは真空中(誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0)を仮定し、MKSA 有理単位系を用いている。

- (1) z 軸上原点から微小距離 $+\delta$ と $-\delta$ [m] の位置にそれぞれ $+q$ と $-q$ [クーロン] の電荷を置く。A 点での電場の r と θ 方向成分を求めよ。
- (2) 次に $+q$ 、 $-q$ の電荷を z 軸に沿って互いに逆位相で振動させることにより、電流 $I(t)$ を流す。まず簡単のために 2δ 間に等価的に I_0 [アンペア] の定常電流が流れた時を考える。この時 A 点に生ずる磁場ベクトルの強さと方向を求めよ。
- (3) 原点にモーメント $\mathbf{p}(t)$ をもつ電気双極子があるとき、A 点でのベクトルポテンシャルは

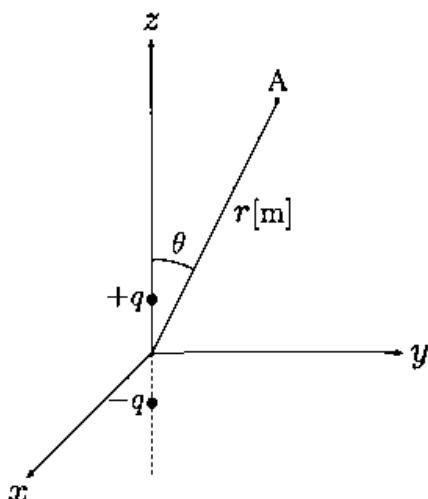
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t - \mathbf{r}/c)}{4\pi r}$$

で与えられる。ここに、 $\dot{\mathbf{p}}(t) \equiv d\mathbf{p}(t)/dt$ である。設問(2)と同じ配置で、電荷を原点を中心 z 軸上で振動させ、 $\mathbf{p}(t) = 2\delta q \sin \omega t$ で時間変動する電気双極子モーメントを考える。A 点での振動磁場ベクトルの強さと方向を求めよ。

(ヒント: 静電磁場と同様にして求め、 $r \gg c/\omega$ として最も主要な項をとれ。)

- (4) 前設問の結果を用いて、A 点において単位面積を単位時間に通過する電磁波エネルギーを求めよ。また全立体角に単位時間に放出される電磁波エネルギーの時間平均を求めよ。

(ヒント: 振動磁束密度を \mathbf{B} とすると、振動電場は $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{r}/r$ で与えられる。)



II-2 (100 点)

原子や原子核において時間反転対称性が成り立っていれば、その電気双極子モーメントはゼロでなければならない。従って電気双極子モーメントの値を測定することで、原子における時間反転対称性の破れの大きさがわかる。この問題を、稀ガス ^3He 原子を用いる実験で調べよう。球形のガラス容器内に、100%スピニ偏極した ^3He ガスを閉じ込め、外部よりスピニの偏極方向に垂直に静磁場および静電場をかける。電場と磁場の方向は平行である。核スピニ偏極の緩和はなく、測定装置は理想的に働いて、雑音などの影響を無視できるものとする。 ^3He 原子核は核スピニ $I = 1/2$ 、磁気モーメント $\mu = 2.1\mu_N$ を持っている。ただし、 μ_N (核磁子) = 5.1×10^{-27} [ジュール/テスラー (J/T)] である。

必要なら以下の定数を用いよ。

プランク定数 $\hbar = 6.6 \times 10^{-34}$ [J・s]、単位電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [クーロン (C)]。

- (1) 一様な静磁場(磁束密度を B [T] とする)をかけた時(電場はゼロとする)、偏極した ^3He 原子核はどのような振舞をしめすか。以下の設問に従って答えよ。
 - (a) スピニが静磁場によって受けるトルクを求め、実験室系でスピニの従う運動方程式を書け。
 - (b) 静磁場方向を軸として角速度 ω で回転している座標系での運動方程式を求めよ。
 - (c) スピニの才差運動の角周波数(ラーモア周波数)を B, μ で表わせ。
- (2) $B = 1.0 \times 10^{-5}$ [T] の時のラーモア周波数の値を求めよ。
- (3) 次に、静磁場とともに、それに平行に静電場 E [V/m] をかける。 ^3He 原子核が電気双極子モーメント d [$e \cdot m$] を持っているとすると、スピニの振舞にどのような変化が生じるか。 E, d を用いて表せ。ただし、電気双極子モーメントは、スピニの向きに平行か反平行であり、電場によりトルクを受ける。
- (4) 以上のことから、 ^3He 原子核の時間反転対称性の破れを調べるには、どのような測定をしたら良いか。測定法、必要な装置などの概略(定性的な説明でよい)を示せ。
- (5) ^3He 原子核の電気双極子モーメントの値を、 10^{-30} [$e \cdot m$] の精度で測定したい。 $E = 10^6$ [V/m] を用いるとして、どの程度の測定時間が必要か。

II-3 (100 点)

量子力学における角運動量演算子 $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ はエルミート演算子 ($\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}$) であり

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2 \quad (\text{I})$$

の交換関係をみたす(ここでは $\hbar = 1$ とする)。以下で、 \mathbf{J} の表現についての基本的性質を順次導びこう。

- (1) $\mathbf{J}^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ および \mathbf{J} のどれかの 1 成分(例えば J_3)が同時対角化可能であること(即ち、それらの同時固有状態を考える事が出来ること)を示せ。

- (2) J_+ および J_- を

$$J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2$$

で定義する。交換子 $[J_3, J_+]$, $[J_3, J_-]$ および $[J_+, J_-]$ を計算せよ。

- (3) \mathbf{J}^2 と J_3 の規格化された同時固有状態を $|C, m\rangle$ とする:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |C, m\rangle &= C |C, m\rangle \\ J_3 |C, m\rangle &= m |C, m\rangle \\ \langle C, m | C', m' \rangle &= \delta_{CC'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

すなわち、 C が \mathbf{J}^2 の固有値、 m が J_3 の固有値である。いまの段階では、 C と m は実数であることしかわからない。さて、ある複素数 α_m が存在して

$$J_+ |C, m\rangle = \alpha_m |C, m+1\rangle, \quad J_- |C, m\rangle = \alpha_{m-1}^* |C, m-1\rangle \quad (\text{III})$$

がなりたつことを示せ。特に、i) 両辺で C が変わらないこと、ii) 両辺での m の変化、iii) 第 1 式の α_m に対して第 2 式に α_{m-1}^* が現れること、を説明せよ。(α_m を具体的に求める必要はない。また、 α_{m-1}^* は α_{m-1} の複素共役を表す。)

- (4) α_m が m についての漸化式

$$|\alpha_{m-1}|^2 - |\alpha_m|^2 = 2m \quad (\text{IV})$$

をみたすことを示せ。

- (5) 漸化式 (IV) の一般解は

$$|\alpha_m|^2 = B - m(m+1) \quad (B \text{ は } m \text{ に依らない定数}) \quad (\text{V})$$

で与えられる。このことと (III) から次のことを説明せよ。

(V) の B は j をある非負の整数あるいは半整数 ($0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) として $B = j(j+1)$ と表されなければならず、またこのとき J_3 の固有値 m は

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j$$

の $2j+1$ 個の値のみをとる。

(6) J^2 の固有値 C は j を用いて

$$C = j(j+1)$$

で与えられる事を示せ。したがって通常 J^2 の固有値は j で識別し、(II) の固有状態 $|C, m\rangle$ を $|j, m\rangle$ と書き表す。

平成8年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

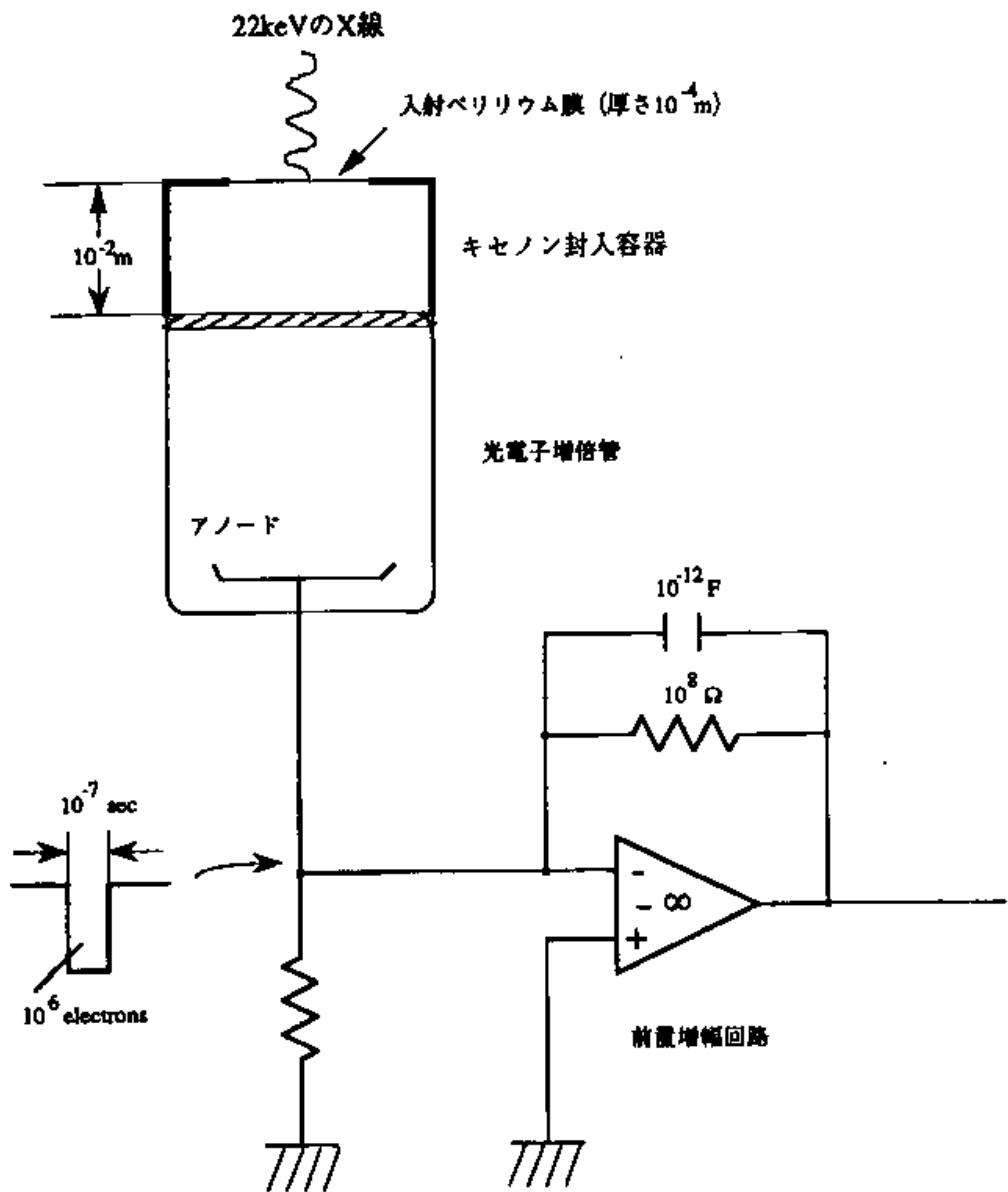
- (1) 問題は全部で5問ある。この中から3問を選択せよ。
- (2) 選択した3つの問題の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いててもよい)
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1(選択) (100点)

図のようなキセノンガス(Xe)のシンチレーション計数管によるX線計測システムを考え、このシステムで銀のK α 線(エネルギー22[keV])を計測する。ここで入射ペリリウム膜(Be)の厚さは 10^{-4} [m]、キセノン封入容器の奥行きは 10^{-2} [m]とする(図参照)。動作原理を理解するために、正確ではないが単純化したモデルをたてる。このモデルでは22[keV]のX線とペリリウム及びキセノンとの相互作用は光電吸収のみとし、その吸収断面積はそれぞれ 2×10^{-28} [m 2]と 5×10^{-25} [m 2]とする。また光電子とキセノンガスとの相互作用は電離と励起のみによるとする。

電気素量= 1.6×10^{-19} [クーロン]、アボガドロ定数= 6×10^{23} [mol $^{-1}$]、ペリリウムの質量数=9、比重1.8として以下の設問に答えよ。必要なら $e^{-0.22} = 0.8$ も使ってよい。

- (1) 垂直に入射する22[keV]のX線(図参照)がペリリウム膜で吸収される確率は1%以下であることを示せ。
- (2) 次にこのX線がキセノンガス中で確率20%で吸収された。このときキセノンは0°Cで何気圧相当か。
- (3) 設問(2)で求めた気圧のまま、キセノン封入容器の奥行きを3倍厚くした。この時22[keV]のX線が吸収される確率は何倍になるか。
- (4) キセノンガスでX線光子が吸収されると、エネルギー17[keV]の光電子が1個生まれ、この光電子はキセノンの電離と励起をそれぞれ確率0.6と0.4で繰り返し、やがて全てのエネルギーを失うと仮定する。光電子は電離により1個の電子を新たに生成し、エネルギー20[eV]を失う。また励起では、光電子はエネルギー10[eV]を失うとする。以上のプロセスにより、1個の光電子が最終的に生成する電子数N_eを概算せよ。
- (5) 励起状態のキセノン原子は1つの光子を再放射して、基底状態に戻るとする。これらの光子は光電子増倍管で総数 10^6 個の電子に変換されて、この電子がオープンループゲイン=-∞の演算増幅器から構成される前置増幅器に流れ込むとする。図中に示すような矩形電流(10^{-7} [sec]にわたって一定に流れ、積分量は 10^6 個の電子に相当する)が流れ込んだとき出力の電圧波形を図示し、およその数値をいれよ。必要なら図中に示された回路定数を用いよ。



III-2(選択) (100 点)

いくつかの物理系において次の N 次元積分が現れる。

$$Z_N(g) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_N [\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)]^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)\right) \quad (\text{A})$$

ここで $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ は Vandermonde 行列式、

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix},$$

であり、 $V(\lambda)$ は

$$V(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{g}{4}\lambda^4 \quad (\text{ただし, } g > 0)$$

で与えられる。

さて、この積分を評価するために、次の性質を満たす直交多項式 $P_n(\lambda)$ を定義しよう。

$P_n(\lambda)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は λ について n 次の多項式であり、次の 2 条件を満足する。

1. (正規化条件) $P_n(\lambda)$ の最高次のべき λ^n の係数は 1。即ち $P_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj} \lambda^j$ と展開される。
2. (直交性) $n \neq m$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(-V(\lambda)) P_n(\lambda) P_m(\lambda) = 0.$$

このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 正規化条件を用いると Vandermonde 行列式は P_n を用いて以下のように書き換えられることを示せ。

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \begin{vmatrix} P_0(\lambda_1) & P_0(\lambda_2) & \cdots & P_0(\lambda_N) \\ P_1(\lambda_1) & P_1(\lambda_2) & \cdots & P_1(\lambda_N) \\ P_2(\lambda_1) & P_2(\lambda_2) & \cdots & P_2(\lambda_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N-1}(\lambda_1) & P_{N-1}(\lambda_2) & \cdots & P_{N-1}(\lambda_N) \end{vmatrix}$$

(2) $P_n(\lambda)$ のノルムを s_n とする。すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(-V(\lambda)) P_n(\lambda) P_n(\lambda) = s_n.$$

このとき積分 (A) は次のように書けることを証明せよ。

$$Z_N(g) = N! \prod_{k=0}^{N-1} s_k.$$

(3) P_n の間に次の漸化式が成立することを証明せよ。

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + r_n P_{n-1}(\lambda) \quad (r_n = s_n/s_{n-1}).$$

(ヒント：まず展開式、

$$\begin{aligned} \lambda P_n(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n+1} c_{n,i} P_i(\lambda), \\ c_{n,n+1} &= 1, \\ c_{n,i} &= s_i^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-V(\lambda)} P_n(\lambda) \lambda P_i(\lambda), \end{aligned}$$

を証明し $c_{n,i}$ を各 $i = 0, 1, \dots, n$ について評価せよ。)

(4) 次に積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-V(\lambda)} \frac{dP_n}{d\lambda} \lambda P_n(\lambda)$$

を二通りに評価することにより次の漸化式を証明せよ。

$$r_n + g r_n (r_{n-1} + r_n + r_{n+1}) = n.$$

III-3(選択) (100 点)

調和振動子に時間に依存した外力 $F(t)$ が働いている系を量子力学的に考察する。この系のハミルトニアンは

$$H(t) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - F(t)x \quad (\text{A})$$

で与えられる。

(1) まず外力項を落とした純粹調和振動子のハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を考える。 H_0 の規格化された固有状態 $|n\rangle$ ($H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$) を固有値 E_n の小さい方から $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ とする。また、

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger)$$

で消滅演算子 a および 生成演算子 a^\dagger を定義する。

- (a) a と a^\dagger の間の交換関係を与えよ。また、 H_0 は a と a^\dagger でどのように表されるか。
 - (b) 状態 $|n\rangle$ を基底状態 $|0\rangle$ および a^\dagger を用いて表せ。また、固有値 E_n はどのように与えられるか。
- (2) 外力 $F(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = 0$ を満たし、したがって無限の過去 ($t \rightarrow -\infty$) および無限の未来 ($t \rightarrow \infty$) では、系の状態は H_0 の固有状態で良く識別されるとする。さて、最初 ($t \rightarrow -\infty$) 系が H_0 のある固有状態にあったとして、外力が作用し終わった無限の未来に系が H_0 の固有状態 $|n\rangle$ にある確率を (摂動論を用いずに正確に) 求めたい。このために次のような考察をする。Schrödinger 表示では、系の状態ベクトル $|\psi_s(t)\rangle$ の時間発展は、Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_s(t)\rangle = H(t) |\psi_s(t)\rangle$$

で記述されるが、今問題を扱い易くするため、

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-iH_0t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle$$

で与えられる相互作用表示の状態ベクトル $|\psi_I(t)\rangle$ を考える。 $|\psi_I(t)\rangle$ の時間発展の方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (\text{B})$$

の形になるが、この右辺の $H_I(t)$ が

$$H_I(t) = -F(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})$$

で与えられることを示せ。

- (3) 方程式 (B) は、 $H_I(t)$ が演算子であるため、一般にこれを解くためには c 数(演算子ではない普通の数)の微分方程式とは異なった取扱が必要である。しかし特に今の $H_I(t)$ の場合には、(B) の解は

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{i\theta(t)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau H_I(\tau)\right) |\psi_I(-\infty)\rangle \quad (\text{C})$$

で与えられ、 $H_I(t)$ を c 数として解いた場合との違いは位相因子 $e^{i\theta(t)}$ だけであることがわかる。(これは、 $H_I(t)$ が a あるいは a^\dagger の一次の項しか含まず、したがって $[H_I(t), H_I(t')]$ が任意の t, t' に対して c 数である事による。) この位相 $\theta(t)$ は外力 F で決まる c 数の実数関数であり、遷移確率だけを問題にする場合には知る必要はない。さて、(C) 式を用いて以下の (a) および (b) に答えよ。

- (a) 最初 ($t \rightarrow -\infty$) 系が基底状態 $|0\rangle$ にあった(すなわち、 $|\psi_I(-\infty)\rangle = |0\rangle$)として、外力 F が働き終わった後、無限の未来 ($t \rightarrow \infty$) に系が状態 $|n\rangle$ にある確率 P_n を求めよ。必要ならば、公式 $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ (但し、 $[A, B]$ は c 数) を用いよ。
- (b) $t \rightarrow \infty$ における系のエネルギー期待値と $t \rightarrow -\infty$ でのエネルギー E_0 との差

$$\Delta E = \langle \psi_I(\infty) | H_0 | \psi_I(\infty) \rangle - E_0$$

を求めよ。

- (c) 特に外力 $F(t)$ が

$$F(t) = \frac{F_0}{(t/T)^2 + 1}$$

で与えられる場合の P_n を計算せよ。

- (4) 以上では系を量子力学的に扱ったが、次に同じハミルトニアン (A) の系を古典力学で考察する。上と同様に $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = 0$ とする。最初 ($t \rightarrow -\infty$) 振動子が原点 $x = 0$ で静止していたとして、外力が働き終わった後の $t \rightarrow \infty$ での系のエネルギーを求めよ。

III-4(選択)(100点)

低速中性子を用いて、固体の構造や種々の物性を調べることができる。以下の設問に答えよ。

- (1) 低速中性子の発生方法を述べよ。
- (2) 300Kにおける熱中性子のエネルギーを電子ボルト単位で表せ。また、その波長を求めよ。但し、ボルツマン定数は 1.4×10^{-23} [J/K]、電気素量は 1.6×10^{-19} [C]、プランク定数は 6.6×10^{-34} [J·s]、中性子質量は 1.7×10^{-27} [kg] である。
- (3) 中性子を単色化する方法(すなわち、特定のエネルギーをもつ中性子を選別する方法)とその原理を述べよ。
- (4) 中性子の検出方法として、核反応 ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ を利用することができる。具体的にどのような検出器を用いればよいか、説明せよ。
- (5) 中性子散乱により、結晶中のフォノンの分散関係 $\omega(\mathbf{q})$ を調べたい。但し、 ω は角振動数、 \mathbf{q} は波数ベクトルを表す。入射中性子の波数ベクトルを \mathbf{k}_i 、散乱中性子の波数ベクトルを \mathbf{k}_f とし、測定原理の概要を述べよ。また、実験装置の概念図を示せ。

III-5 (選択) (100 点)

原子核が磁気モーメント $\mu = g\mathbf{I}$ (\mathbf{I} は核スピン、 g は定数) を持っていると、電子との間に磁気的相互作用 $V = A\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}$ が働く。ここで、 \mathbf{S} は電子のスピン ($S = 1/2$)、 A は超微細定数と呼ばれる。ある種の化合物半導体では、伝導帯電子や浅い不純物ドナーに局在する電子の軌道半径は 100 [オングストローム (Å)] 程度もあり、電子は多数の原子核と相互作用する。このような状態では、原子核の平均核スピン偏極度を P_N として、 \mathbf{I} を $P_N\mathbf{I}$ に置き換えることが出来る。相互作用 V が大きい系では、原子核スピンが偏極すると電子は熱平衡状態で大きいスピン偏極を持つことになる。このような状況で、電子のスpin偏極を人為的に核のスpin偏極に移すことが出来れば、電子と原子核は相互に偏極を強めあう。その結果、ある温度以下では外部磁場が無くとも有限の核スpin偏極が発生しうる。以下でこの問題を、外部磁場が無く、核スpinの大きさは $1/2$ であり、 A と g は正の値であるとして考えよう。

- (1) 原子核のスpin偏極度が P_N である時、熱平衡状態にある電子が温度 T [K] で持つ電子スpinの偏極度 P_e を、ボルツマン定数を k として求めよ。偏極度 P_e の定義は、

$$P_e = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

であり、 N_+ , N_- は、それぞれ平均核スpin偏極の向きに平行、反平行スpinを持つ電子の数である。

- (2) 設問 (1) で求めた電子スpinの偏極を核偏極に移すことが出来る。すなわち、外力 (マイクロ波またはレーザー光) を加えることにより $P_N = -P_e$ とすることが出来る。このような外力が加えられた状態で、核スpinの偏極は、温度の関数としてどのような振舞をしめすか。
- (3) 以上の設問では、電子と核スpin系の振舞を理想的な状態で考えた。しかし実際には様々な他の影響により振舞が変化することがある。どのような他の影響を考えられるか。2点を列挙せよ。