

正規形漸化式の解法についての理論的背景

なっふい

@naughiez

Contents

1	予備知識	1
1.1	代数	1
1.2	Lie 代数とその表現	2
1.3	Laurent 多項式環と冪級数環	5
2	正規形漸化式の解空間について	8
2.1	母関数	8
2.2	シフト演算子	10
2.3	一般固有空間と Heisenberg 代数	18
2.4	正規形漸化式の解空間	21

第 1 章 予備知識

以下、ベクトル空間はすべて複素数体 \mathbb{C} 上で考える.

ここでは、以下の理論に必要な代数系について述べる. 代数系についての知識がある読者は、読み飛ばしても構わない.

§ 1.1 代数

DEFINITION 1.1.1

A をベクトル空間とする. A が積 $A \times A \rightarrow A$ によって可環環になり^{*1}, それが \mathbb{C} 上双線型であるとき (積が線型写像 $A \otimes A \rightarrow A$ を定めるとき), A を \mathbb{C} 上の**代数** (algebra) と呼ぶ.

代数の間の線型写像 $A \rightarrow B$ は, それが同時に環準同型でもあるとき, **代数準同型** (algebra homomorphism) と呼ばれる. とくに誤解の恐れのない場合は単に準同型と言う.

DEFINITION 1.1.2

A を代数, V をベクトル空間とする.

V 上に A によるスカラー倍 $A \otimes V \rightarrow V$ が定まっていて, ベクトル空間と同様の公理

- i) $a(bv) = (ab)v$ ($a, b \in A, v \in V$),
- ii) $1v = v$ ($v \in V$)

を満たすとき, V を A **加群** (A -module) と言う.

A 加群の間の A **準同型** (A -homomorphism) とは, A によるスカラー倍を保つような線型写像のことである. V から W への A 準同型全体のなすベクトル空間を $\text{Hom}_A(V, W)$ と書く. これも再び A 加群となる.

^{*1} 一般には可環である必要はないが, §1.2 以降で現れる代数はすべて可環である.

REMARK 1.1.1 代数準同型 $f: A \rightarrow B$ があるとき、スカラー倍 $A \otimes B \rightarrow B$ が

$$a \cdot b := f(a)b \quad (a \in A, b \in B)$$

で定義できる。これにより、 B は自然に A 加群の構造を持つ。

DEFINITION 1.1.3

代数 A について、 A の可逆元全体のなす集合を

$$A^\times := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

と書き、 A の単元群 (unit group) と言う。それに伴い、可逆元のことを単元 (unit) とも呼ぶ。単元群 A^\times は群となる。

§ 1.2 Lie 代数とその表現

DEFINITION 1.2.1

ベクトル空間 \mathfrak{g} 上にブラケット (bracket) と呼ばれる二項演算 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が定義されていて、次の性質を満たすとき、 \mathfrak{g} を Lie 代数 (Lie algebra) と言う：

- i) 歪対称性 $[x, x] = 0$ ($x \in \mathfrak{g}$),
- ii) Jacobi 恒等式 $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ ($x, y, z \in \mathfrak{g}$).

Lie 代数の間の線型写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ がブラケットを保つ、すなわち $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ が成り立つとき、これを Lie 代数準同型 (Lie algebra homomorphism)、あるいは単に準同型と呼ぶ。

REMARK 1.2.1 歪対称性は、任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, y] = -[y, x]$ が成り立つことと同値である。また、歪対称性を仮定したとき、Jacobi 恒等式は

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \quad (x, y, z \in \mathfrak{g})$$

と書くこともできる。

EXAMPLE 1.2.1 i) (非可換) 代数 A は、ブラケットを $[a, b] := ab - ba$ で定義するとき、Lie 代数となる。

ii) とくに、ベクトル空間 V 上の線型作用素のなす代数 $\text{End } V$ は Lie 代数となる。これが (代数ではなく) Lie 代数であることを強調するため、 $\text{End } V$ の代わりに $\mathfrak{gl } V$ と表す。

iii) Lie 代数 \mathfrak{g} に対して、準同型 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が $\text{ad}(x): y \mapsto [x, y]$ によって定義できる。ad がたしかに準同型であることは、REMARK 1.2.1 から従う。

DEFINITION 1.2.2

Lie 代数 \mathfrak{g} とベクトル空間 V について, Lie 代数準同型 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl} V$ を \mathfrak{g} の表現 (representation) と呼ぶ. 単に V を \mathfrak{g} の表現と呼ぶことも多い. また, 表現を \mathfrak{g} 加群 (\mathfrak{g} -module) と呼ぶ.

表現 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl} V$ があるとき, $x \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ に対して $\rho(x)v \in V$ という元が定まる. ρ を明示する必要のない場合は, これを

$$\rho(x)v = x \cdot v = xv$$

のようにも表す. さらに, V の (空でない) 部分集合 $S \subset V$ に対して, $x \in \mathfrak{g}$ による軌道 (orbit) を

$$\rho(x)S = xS := \{\rho(x)s \mid s \in S\}$$

と, \mathfrak{g} 全体による軌道を

$$\rho(\mathfrak{g})S = \mathfrak{g}S := \bigcup_{x \in \mathfrak{g}} \rho(x)S$$

と表す.

REMARK 1.2.2 Lie 代数 \mathfrak{g} の表現 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl} V$ があるとき, 線型写像 $\mu: \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$ が $\mu(x \otimes v) := \rho(x)v$ で定まる. 逆に線型写像 $\mu: \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$ が $\mu([x, y] \otimes v) = \mu(x, \mu(y, v)) - \mu(y, \mu(x, v))$ を満たすとき, \mathfrak{g} の表現 ρ を $\rho(x): v \mapsto \mu(x, v)$ と定義できる.

EXAMPLE 1.2.2 i) $\text{ad}: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を用いて \mathfrak{g} をそれ自身の表現と見做すことができる. これを随伴表現 (adjoint representation) と言う.

DEFINITION 1.2.3

$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl} V$, $\rho': \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl} V'$ をともに Lie 代数 \mathfrak{g} の表現とする. 線型写像 $f: V \rightarrow V'$ が \mathfrak{g} の作用を保つ, つまり $f(\rho(x)v) = \rho'(x)f(v)$ を満たすとき, f を表現の準同型 (homomorphism) と言う.

表現 V の部分空間 $W \subset V$ は, \mathfrak{g} の作用で閉じている $\mathfrak{g}W \subset W$ とき, V の部分表現 (subrepresentation) あるいは部分 \mathfrak{g} 加群 (\mathfrak{g} -submodule) と呼ばれる.

部分表現による商空間 V/W への \mathfrak{g} の作用が, 自然に

$$\bar{\rho}(x)(v + W) := \rho(x)v + W \quad (x \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

で定義できる. この表現 $\bar{\rho}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W)$ を V の W による商表現 (quotient representation) あるいは商加群 (quotient \mathfrak{g} -module) と呼ぶ. このとき自然な射影 $V \twoheadrightarrow V/W$ は表現の準同型となる.

DEFINITION 1.2.4

\mathfrak{g} をそれ自身の随伴表現と見たとき，部分表現を**イデアル** (*ideal*)，商表現を**商 Lie 代数** (*quotient Lie algebra*) と呼ぶ．

PROPOSITION 1.2.1

表現の準同型 $f: V \rightarrow W$ に対して，次が成り立つ：

- i) f の核 (kernel) $\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$ は V の部分表現である；
- ii) f の像 (image) $\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$ は W の部分表現である；
- iii) 表現としての準同型定理 $V/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ ．

Proof. 証明はベクトル空間のときと同じであるから省略する． □

PROPOSITION 1.2.2

\mathfrak{g} を Lie 代数， \mathfrak{a} をそのイデアルとする． \mathfrak{g} の表現 V の部分表現 $W \subset V$ について， $\mathfrak{a}W \subset W$ が成り立つならば (\mathfrak{g} の) 商表現 V/W は商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の表現となる．

Proof. $\mathfrak{a}W \subset W$ より，線型写像 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \otimes V/W \rightarrow V/W$ が well-defined に定まる． □

DEFINITION 1.2.5

\mathfrak{g} の 0 でない表現 $V \neq 0$ が $0, V \subset V$ 以外に部分表現を持たないとき， V を**既約** (*irreducible*) 表現あるいは**単純** (*simple*) \mathfrak{g} 加群である言う．

PROPOSITION 1.2.3 (Schur の補題)

表現の 0 でない準同型 $f: V \rightarrow W$ について，次が成り立つ：

- i) V が既約ならば f はつねに単射；
- ii) W が既約ならば f はつねに全射；
- iii) V と W がともに既約ならば f はつねに全単射．

Proof. V が既約であれば， V の部分表現 $\text{Ker } f$ は 0 または V でなければならないが， $f \neq 0$ という仮定により $\text{Ker } f = 0$ が分かる．他の主張も同様に示せる． □

§ 1.3 Laurent 多項式環と冪級数環

DEFINITION 1.3.1

V をベクトル空間とする. z を変数とする V 係数の (形式的) **Laurent 多項式環** (Laurent polynomial ring)^{*2} を

$$V[z^{\pm 1}] := \left\{ \sum_{n=p}^d a_n z^n \mid p, d \in \mathbb{Z}, a_n \in V \right\}$$

で定義する. また Laurent 多項式 $a(z) = \sum_{n=p}^d a_n z^n \in V[z^{\pm 1}]$ に対して,

$$\begin{aligned} \deg a(z) &:= \max\{0\} \cup \{p \leq n \leq d \mid a_n \neq 0\}, \\ \text{ord } a(z) &:= -\min\{0\} \cup \{p \leq n \leq d \mid a_n \neq 0\} \end{aligned}$$

をそれぞれ $a(z)$ の **次数** (degree), **位数** (order) と言う.

$V = A$ が代数のとき, Laurent 多項式環上に積

$$\left(\sum_{m=p}^d a_m z^m \right) \left(\sum_{n=p'}^{d'} b_n z^n \right) := \sum_{\ell=p+p'}^{d+d'} \left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n \right) z^\ell$$

が定義できる. これにより $A[z^{\pm 1}]$ は代数となる.

PROPOSITION 1.3.1

ベクトル空間として,

$$V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \cong V[z^{\pm 1}]$$

という自然な同型が成立する. この同型は具体的には, $v \otimes \sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で与えられる.

Proof. 写像 $(v, \sum_n a_n z^n) \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ は双線型であるから, 線型写像 $V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \rightarrow V[z^{\pm 1}]$ が存在する. 逆写像は

$$\sum_{n=p}^d a_n z^n \mapsto \sum_{n=p}^d (a_n \otimes z^n)$$

とすれば良い. ただし, 右辺の z^n は $z^n \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ と見做している. □

^{*2} V が環でなければ $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ も環にはならないが, 呼称の単純化のために多項式環と呼ぶことにする.

DEFINITION 1.3.2

V をベクトル空間とする. z を変数とする V 係数の (形式的) 冪級数環 (power series ring) を

$$V[[z]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid a_n \in V \right\}$$

で定義する.

$V = A$ が代数のとき, 冪級数環上に積

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n \right) z^{\ell}$$

が定義できる. これにより $A[[z]]$ は代数となる.

PROPOSITION 1.3.2

A を代数として, 任意の冪級数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in A[[z]]$ を取る. もし定数項 $a_0 = a(0)$ が A の単元であれば, $a(z)^{-1} \in A[[z]]$ も存在する. 具体的には, $a(z)^{-1} = \sum_n b_n z^n$ と置くとき

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_n &= -b_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

によって帰納的に求まる.

とくに, $A[[z]]$ の単元群が

$$A[[z]]^{\times} = A^{\times} + A[[z]]z$$

と求まる.

Proof. $\sum_n b_n z^n$ を上で定義したとき, $(\sum_n a_n z^n)(\sum_n b_n z^n) = 1$ を示せば良い. □

EXAMPLE 1.3.1 i) $a \in A^{\times}$ が単元のとき, 任意の $n \geq 0$ に対して

$$(a+z)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}z + O(z^2)$$

が成り立つ.

PROPOSITION 1.3.3

線型写像 $f: U \otimes V \rightarrow W$ があるとき, 線型写像 $\tilde{f}: U[[z]] \otimes V[[z]] \rightarrow W[[z]]$ が

$$\tilde{f}\left(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n\right) := \sum_d \left(\sum_{m+n=d} f(a_m \otimes b_n)\right) z^d$$

で定義できる.

Proof. 写像 $(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n) \mapsto \sum_d f(a_m \otimes b_n) z^d$ が双線型であるから良い. □

COROLLARY 1.3.4

\mathfrak{g} が Lie 代数のとき, ブラケット $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を冪級数環上へ拡大することで, 冪級数環 $\mathfrak{g}[[z]]$ もまた Lie 代数となる.

Proof. 歪対称性は明らか. Jacobi 恒等式も定義通り愚直に計算すれば従う. □

COROLLARY 1.3.5

V が Lie 代数 \mathfrak{g} の表現のとき, \mathfrak{g} の作用 $\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$ を冪級数環へ拡大することで, $V[[z]]$ が $\mathfrak{g}[[z]]$ の表現となる.

Proof. 計算は省略する. □

第 2 章 正規形漸化式の解空間について

§ 2.1 母関数

DEFINITION 2.1.1

V をベクトル空間とすると、 V 値の形式的 Laurent 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ を数列 $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ の**母関数** (generating function) と呼ぶ。母関数全体のなすベクトル空間を

$$V[[z^{\pm 1}]] := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in V \right\}$$

と表す。

二変数以上の級数も同様に定義される：

$$V[[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]] := \left\{ \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{m, n} w^m z^n \mid a_{m, n} \in V \right\},$$

$$V[[w^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]] := \left\{ \sum_{k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}} a_{k, \ell, m, n} w^k x^\ell y^m z^n \mid a_{k, \ell, m, n} \in V \right\},$$

etc.

Laurent 級数のなすベクトル空間 $V[[z^{\pm 1}]]$ は、ベクトル空間としては数列のなす空間

$$\text{Map}(\mathbb{Z}, V) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in V\}$$

と同型になる。単なる数列との違いは、複素関数に由来する諸々の操作を持つところである。

DEFINITION 2.1.2

母関数 $a(z) = \sum a_n z^n \in V[[z^{\pm 1}]]$ の**留数** (residue) を

$$\text{Res}_z a(z) := a_{-1}$$

で定義する。

DEFINITION 2.1.3

ベクトル空間 U, V, W について, U, V の間のペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle: U \otimes V \rightarrow W$ (すなわち, $U \times V \rightarrow W$ の双線型写像) があるとき, 母関数の積を自然に定義できる. 具体的には, U 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in U[[z^{\pm 1}]]$ と V 値母関数 $b(z) = \sum_m b_m z^m \in V[[z^{\pm 1}]]$ に対して,

$$a(z)b(z) := \sum_{d \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} \langle a_n, b_m \rangle \right) z^d \in W[[z^{\pm 1}]]$$

で定義する. ただし, すべての z^d の係数 $\sum \langle a_n, b_m \rangle$ が有限和であるような $a(z), b(z)$ の組に限る. 無限和のときは定義しない.

このような (積を定義できる) 母関数 $a(z), b(z)$ に対して, その積の留数を

$$\langle a(z), b(z) \rangle := \text{Res}_z a(z)b(z) \in W$$

と書く.

この定義は, \mathbb{C} 値関数の内積

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* \psi(x) dx$$

に由来する.

EXAMPLE 2.1.1 i) 代数 A 上の加群 V には, 自然なペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \otimes A \rightarrow V$ (単なるスカラー倍の構造射) がある. これによって, V 値母関数 $a(z) \in V[[z^{\pm 1}]]$ と A 値 Laurent 多項式 $b(z) \in A[z^{\pm 1}]$ との積を定義できる:

$$a(z)b(z) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} b_m \cdot a_n \right) z^d \in V[[z^{\pm 1}]].$$

これは任意の $a(z) \in V[[z^{\pm 1}]]$ および $b(z) \in A[z^{\pm 1}]$ に対して定義できることに注意.

ii) 二変数の Laurent 級数は Laurent 級数値の母関数とみなすことができる: $V[[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]] = V[[w^{\pm 1}]][[z^{\pm 1}]]$. さらに, $V = A$ が代数のとき, 異なる変数の母関数のペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle: A[[x^{\pm 1}]] \otimes A[[y^{\pm 1}]] \rightarrow A[[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]]$ を自然に

$$\left\langle \sum_m a_m x^m, \sum_n b_n y^n \right\rangle := \sum_{m,n} (a_m b_n) x^m y^n$$

で定義できる. これによって, $A[[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$ と $A[[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$ の積を考えることができる. 積は三変数 x, y, z の母関数となる.

iii) V 値母関数のなすベクトル空間について, 線型写像 $V \otimes \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]] \rightarrow V[[z^{\pm 1}]]$ が $v \otimes \sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で定まる. ここから $V[[w^{\pm 1}]] \otimes \mathbb{C}[[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]] \rightarrow V[[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$ が誘導される.

もっとも重要な Laurent 級数の一つは Dirac のデルタ関数である.

DEFINITION 2.1.4

二変数の \mathbb{C} 値母関数

$$\delta(z, w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} w^{n-1} \in \mathbb{C}[[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$$

をデルタ関数 (delta function) と呼ぶ. この式は

$$\delta(z, w) = \sum_n z^n w^{-n-1} = \sum_n z^{n-1} w^{-n} = \sum_n z^{-n-1} w^n = \sum_{m+n=-1} z^m w^n$$

のように様々な形で表すことができる.

誤解の恐れのない場合は $\delta(z-w) = \delta(z, w)$ のようにも書く.

PROPOSITION 2.1.1

デルタ関数について, 次の性質が成り立つ.

- i) 任意の V 値母関数 $a(z) \in V[[z^{\pm 1}]]$ に対して $a(z)\delta(z-w) = a(w)\delta(z-w)$.
- ii) 任意の V 値母関数 $a(z) \in V[[z^{\pm 1}]]$ に対して $\text{Res}_z a(z)\delta(z-w) = a(w)$.

この命題は, 通常のデルタ関数の性質 $\int a(z)\delta(z-w)dz = a(w)$ 等を母関数の言葉で書き直したものになっている.

Proof. いずれも簡単な計算で示すことができる. ここでは後者のみ確かめる.

V 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n$ に対して,

$$\begin{aligned}
a(z)\delta(z-w) &= \left(\sum_m a_m z^m \right) \left(\sum_n z^{-n-1} w^n \right) \\
&= \sum_d \left(\sum_n a_{n+d+1} w^n \right) z^d
\end{aligned}$$

となるから, 留数を取ると

$$\text{Res}_z a(z)\delta(z-w) = \sum_n a_n w^n = a(w)$$

が分かる. □

§ 2.2 シフト演算子

数列の漸化式は, $p: (a_n) \mapsto (a_{n+1})$ というシフト演算子を用いて書くことができる. ここでは, シフト演算子の母関数表示とその性質について見ていく.

DEFINITION 2.2.1

V をベクトル空間とする. $pa(z) = z^{-1}a(z)$ で定まる線形演算子 $p : V[[z^{\pm 1}]] \rightarrow V[[z^{\pm 1}]]$ を $V[[z^{\pm 1}]]$ 上のシフト演算子 (shifting operator) と呼ぶ.

微分演算子とのアナロジーを踏まえると, $[p, q] = 1$ を満たす演算子 q を考えたい. これを見つけるために, 量子力学の手続きを踏襲する.

PROPOSITION 2.2.1

$V = \mathbb{C}$ とする.

0 を除く任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して, λ を固有値とする p の固有ベクトルが (スカラー倍を除いて) 一意に存在する. この固有ベクトルのうち z^0 の係数が 1 であるものを $|\lambda\rangle$ と書く.

Proof. $a(z) = \sum_n a_n z^n \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ が固有値 λ に属する p の固有ベクトルであるとする, と,

$$0 = (p - \lambda)a(z) = \sum_n a_{n+1} z^n - \lambda \sum_n a_n z^n = \sum_n (a_{n+1} - \lambda a_n) z^n$$

より $a_{n+1} = \lambda a_n$ が従う. よって, $a(z) = a_0 \sum_n \lambda^n z^n$ となる. □

量子力学と同じように, 任意の母関数は $|\lambda\rangle$ によってスペクトル分解 (固有値分解) をすることができる. まず $|\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]]$ と見做し, $|\mu\rangle \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]]$ との内積を取ると,

$$\begin{aligned} \langle \mu, \lambda \rangle &= \text{Res}_z \left(\sum_m \mu^m z^m \right) \left(\sum_n \lambda^n z^n \right) \\ &= \sum_{m+n=-1} \mu^m \lambda^n \\ &= \delta(\lambda - \mu) \in \mathbb{C}[[\lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]] \end{aligned}$$

となる. したがって $\langle \lambda | := |\lambda\rangle \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]]$ をブラベクトルと見做すことができる.

そこで一般の母関数 $|a(z)\rangle \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ に対して波動関数 $\psi(\lambda) = \langle \lambda | a(z) \rangle$ を定義し, $|a(z)\rangle = \int \psi(\lambda) |\lambda\rangle d\lambda$ のように書けることを確認する.

THEOREM 2.2.2

V をベクトル空間とする.

母関数 $a(z) \in V[[z^{\pm 1}]]$ に対して, その波動関数を

$$\psi(\lambda) := \text{Res}_z (\langle \lambda | a(z) \rangle) \in V[[\lambda^{\pm 1}]]$$

で定義する．このとき

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m, \\ a(z) &= \text{Res}_\lambda (\psi(\lambda) | \lambda)\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. 直接計算して示す．

$a(z) = \sum_n a_n z^n$ のとき，波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \text{Res}_z \left(\sum_m \lambda^m z^m \right) \left(\sum_n a_n z^n \right) \\ &= \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\end{aligned}$$

となり，それと $|\lambda\rangle$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\text{Res}_\lambda (\psi(\lambda) | \lambda) &= \text{Res}_\lambda \left(\sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m \right) \left(\sum_\ell \lambda^\ell z^\ell \right) \\ &= \sum_{m+\ell=-1} a_{-m-1} z^\ell \\ &= a(z)\end{aligned}$$

が従う． □

続いてスペクトル分解を用いて， λ に関する無限小平行移動 $T(d\lambda)$ を求めよう．

LEMMA 2.2.1

A を代数， V を A 加群とする．与えられた母関数 $g(\lambda) = \sum_{m,n} g_{m,n} \lambda^m z^n \in V[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ について， A 準同型 $\hat{g}: A[[z^{\pm 1}]] \rightarrow V[[z^{\pm 1}]]$ が

$$\hat{g}(a(z)) := \text{Res}_\lambda g(\lambda) \text{Res}_z \langle \lambda | a(z) \rangle$$

で定義できる．さらに， $a(z) = \sum_n a_n z^n$ としたとき

$$\hat{g} \left(\sum_n a_n z^n \right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n} \right) z^n$$

と書ける．

Proof. $g(\lambda)$ が $V[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ の元であるから，各 n について $g_{m,n}$ は有限個を除いて 0 である．よって， $\sum_m a_m g_{m,n} (\in V)$ のような和が定義できる．そこで $(\text{Res}_z \langle \lambda | a(z) \rangle) g(\lambda)$ を計算すると，**THEOREM 2.2.7** より

$\text{Res}_z \langle \lambda | a(z) = \sum_{\ell} a_{-\ell-1} \lambda^{\ell}$ だから

$$\begin{aligned} g(\lambda) \text{Res}_z \langle \lambda | a(z) &= \left(\sum_{m,n} g_{m,n} \lambda^m z^n \right) \left(\sum_{\ell} a_{-\ell-1} \lambda^{\ell} \right) \\ &= \sum_d \left(\sum_{m,n} a_{m-d-1} g_{m,n} z^n \right) \lambda^d \end{aligned}$$

となる。したがって $\hat{g}a(z)$ は well-defined であり,

$$\hat{g} \left(\sum_n a_n z^n \right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n} \right) z^n$$

が成り立つ. □

LEMMA 2.2.2

逆に, A 準同型 $f: A[[z^{\pm 1}]] \rightarrow V[[z^{\pm 1}]]$ に対して, 新しい A 準同型 $\hat{f}: A[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]] \rightarrow V[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]]$ を

$$\hat{f} \left(\sum_m a_m(z) \lambda^m \right) := \sum_m f(a_m(z)) \lambda^m \quad (a_m(z) \in A[[z^{\pm 1}]])$$

で定義する。さらに,

$$f(a(z)) = \sum_n f_n(a(z)) z^n$$

と書いたとき, $f_n(\sum_k a_k z^k) = \sum_m a_m f_{m,n}$ ($f_{m,n} \in V$, 各 n に対して $(f_{m,n})_{m \in \mathbb{Z}}$ は有限個を除いて 0) の形をしていると仮定する。このとき $\hat{f}(A[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]) \subset V[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ であり,

$$f(a(z)) = \text{Res}_{\lambda} \hat{f}(|\lambda\rangle) \text{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

が成り立つ。

Proof. $a(\lambda) = \sum_{m,n} a_{m,n} \lambda^m z^n \in A[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ に対して

$$\hat{f}a(\lambda) = \sum_m f \left(\sum_n a_{m,n} z^n \right) \lambda^m = \sum_m \left(\sum_{\ell,n} a_{m,\ell} f_{\ell,n} z^n \right) \lambda^m$$

となり, これは $f_{m,n}$ に関する仮定により $V[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ の元である。

また, とくに $a_{m,n} = \delta_{m,n}$ と置くことで

$$\hat{f}|\lambda\rangle = \sum_m \sum_n f_{m,n} z^n \lambda^m$$

を得る。よって **LEMMA 2.2.1** より

$$f(a(z)) = \text{Res}_{\lambda} \hat{f}|\lambda\rangle \text{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

が従う. □

REMARK 2.2.1 **LEMMA 2.2.1** の写像 \hat{g} に **LEMMA 2.2.2** を適用することで、線型写像

$$\hat{g}: A[\lambda^{\pm 1}] \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \rightarrow V[\lambda^{\pm 1}] \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$$

が得られる。これは $\hat{g}|\lambda\rangle = g(\lambda)$ を満たし、その意味で “ $g(\lambda)$ を $A[\lambda^{\pm 1}] \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ 全体へ拡大したもの” と見做すことができる。そのため、記号を濫用して $\hat{g} = g$ と書く。

EXAMPLE 2.2.1 i) A を代数とすると、シフト演算子 $p: A \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \rightarrow A \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ は $p_n(a(z)) = a_{n+1}$ であるから、 $p_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ と書ける。 \hat{p} は

$$\hat{p} \left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m \right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

となる。たとえば

$$\begin{aligned} \hat{p}|\lambda\rangle &= \sum_n z^n \lambda^{n+1} \quad (a_{m,n} = \delta_{m,n}), \\ \hat{p} \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \lambda} &= \sum_n (n+1) z^n \lambda^n \quad (a_{m,n} = n \delta_{m,n-1}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.3

A を代数、 V を A 加群とする。**LEMMA 2.2.1** AND **2.2.2** によって構成される写像

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{A,V}^{-1}: \text{Hom}_A \left(A[\lambda^{\pm 1}] \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket, V[\lambda^{\pm 1}] \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \right) &\rightarrow \text{Hom}_A \left(A \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket, V \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \right) \\ g &\mapsto \hat{g} \end{aligned}$$

は次の性質を満たす：

- i) $\mathcal{F}_{A,V}^{-1}$ は A 準同型である。すなわち、 $\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[af + bg] = a\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[f] + b\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[g]$ が成り立つ ($a, b \in A$)。
- ii) A, B, C が代数で代数準同型 $A \rightarrow B \rightarrow C$ を持つとき (B が A 加群で C が B 加群であるとき)、 $\mathcal{F}_{B,C}^{-1}[f] \circ \mathcal{F}_{A,B}^{-1}[g] = \mathcal{F}_{A,C}^{-1}[f \circ g]$ が成り立つ。

Proof. 定義通り計算すれば従う。 □

この命題により、 $[\hat{f}, \hat{g}] = \mathcal{F}_{A,A}^{-1}[[f, g]]$ が分かる。つまり $[f, g]$ が既知のときに、それを用いて $[\hat{f}, \hat{g}]$ も計算することができる。

いよいよ平行移動の生成子 q を定義していく。

DEFINITION 2.2.2

スペクトルの平行移動演算子 $T(d\lambda): \mathbb{C} \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket \rightarrow (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}d\lambda) \llbracket z^{\pm 1} \rrbracket$ を、次のように定義する。まず $(\lambda + d\lambda)^n \in \mathbb{C} \llbracket \lambda, d\lambda \rrbracket$ を、 $n \geq 0$ のときは二項定理で、 $n < 0$ のときは **EXAMPLE 1.3.1** で展開したもの

として,

$$g(\lambda, d\lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\lambda + d\lambda)^n z^n \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, d\lambda]]$$

を考える. このままだと **LEMMA 2.2.1** を適用できないため, $O(d\lambda^2)$ を無視して

$$\hat{T}(d\lambda)|\lambda\rangle := |\lambda + d\lambda\rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\lambda^n + n\lambda^{n-1} d\lambda) z^n \in (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda)[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$$

とする. 正確には, 商写像

$$\mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, d\lambda]] \rightarrow \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, d\lambda]] / \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]] d\lambda^2 \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda)[[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}]]$$

による $g(\lambda, d\lambda)$ の像を考えている. こうして, 線型演算子 $T(d\lambda) : \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]] \rightarrow (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda)[[z^{\pm 1}]]$ が

$$T(d\lambda)a(z) := \text{Res}_\lambda |\lambda + d\lambda\rangle \text{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

で定まる.

REMARK 2.2.2 $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl} \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ と置く. ベクトル空間としての $\mathfrak{g}[[d\lambda]]$ には

$$[a d\lambda^m, b d\lambda^n] := [a, b] d\lambda^{m+n} \quad (a, b \in \mathfrak{g})$$

によって自然に Lie 代数の構造が入る (**COROLLARY 1.3.4**). これを Lie 代数のイデアル $\mathfrak{g}[[d\lambda]] d\lambda^2$ で割ると, Lie 代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} d\lambda$ を得る.

Lie 代数 $\mathfrak{g}[[d\lambda]]$ は $\mathbb{C}[[z^{\pm 1}, d\lambda]]$ 上に自然に作用する (**COROLLARY 1.3.5**):

$$(a d\lambda^m) \cdot b d\lambda^n := (a \cdot b) d\lambda^{m+n} \quad (a \in \mathfrak{g}, b \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]).$$

ここから, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} d\lambda$ の $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda)[[z^{\pm 1}]] \cong \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, d\lambda]] / \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, d\lambda]] d\lambda^2$ への作用が誘導される (**PROPOSITION 1.2.2**).

REMARK 2.2.3 **LEMMA 2.2.1** の記号に合わせると, $g_{m,n} = \delta_{m,n} + n\delta_{m,n-1} d\lambda \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda$ である. それによって

$$T(d\lambda) \sum_n a_n z^n = \sum_{m,n} a_m g_{m,n} z^n = \sum_n (a_n + n a_{n-1} d\lambda) z^n$$

と計算できる.

逆に, $f_{m,n} = g_{m,n}$ として **LEMMA 2.2.2** を用いれば,

$$\hat{T}(d\lambda) \sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m = \sum_{\ell, m, n} a_{m,\ell} (\delta_{\ell,n} + n\delta_{\ell,n-1} d\lambda) z^n \lambda^m = \sum_{m,n} (a_{m,n} + n a_{m,n-1} d\lambda) z^n \lambda^m$$

を得る. たとえば $a_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ とすると,

$$\hat{g} \lambda |\lambda\rangle = \sum_n (\delta_{m,n+1} + n\delta_{m,n} d\lambda) z^n \lambda^m = \lambda |\lambda\rangle + \lambda \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \lambda} d\lambda \quad (= \lambda |\lambda + d\lambda\rangle).$$

DEFINITION 2.2.3

母関数 $\hat{q}|\lambda\rangle \in \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}][[z^{\pm 1}]]$ を

$$\hat{q}|\lambda\rangle := \sum_n n \lambda^{n-1} z^n$$

として, **LEMMA 2.2.1** によって線型演算子 $q: \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]] \rightarrow \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ を定義する:

$$qa(z) := \text{Res}_\lambda \hat{q}|\lambda\rangle \text{Res}_z \langle \lambda|a(z).$$

q 演算子の具体形は, 上で計算したように $q \sum_n a_n z^n = \sum_n n a_{n-1} z^n$ で与えられる.
次の命題は直ちに従う:

PROPOSITION 2.2.4

$V = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} d\lambda)[[z^{\pm 1}]]$ と置き, $\mathfrak{gl} V$ の元として $T(d\lambda) = 1 + q d\lambda$ が成り立つ.

Proof. $\hat{T}(d\lambda)|\lambda\rangle = |\lambda\rangle + d\lambda \cdot \hat{q}|\lambda\rangle$ と **PROPOSITION 2.2.3** を使う. □

さて, 最後に交換子 $[p, q]$ を計算しよう.

PROPOSITION 2.2.5

$V = \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ と置く.

シフト演算子 p は, V 上の演算子とも $V \oplus V d\lambda$ 上の演算子とも見做することができる. すると, V から $V \oplus V d\lambda$ への線型写像として

$$pT(d\lambda) - T(d\lambda)p = d\lambda.$$

ただし, $d\lambda$ は $V \ni a(z) \mapsto a(z) d\lambda \in V \oplus V d\lambda$ で定義される.

Proof. $\hat{p}\hat{T}(d\lambda)$ について,

$$\hat{p} \left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m \right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

であったから (**EXAMPLE 2.2.1**), $a_{m,n} = \delta_{m,n} + n \delta_{m,n-1} d\lambda$ とすれば

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{T}(d\lambda)|\lambda\rangle &= \hat{p}|\lambda + d\lambda\rangle = \sum_{m,n} (\delta_{m,n+1} + (n+1)\delta_{m,n} d\lambda) z^n \lambda^m \\ &= \lambda|\lambda\rangle + \left(|\lambda\rangle + \lambda \frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

一方 **REMARK 2.2.3** で確認したように

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\hat{p}|\lambda\rangle = \hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\lambda|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

となるから、結局 **PROPOSITION 2.2.3** より

$$(pT(\mathrm{d}\lambda) - T(\mathrm{d}\lambda)p)a(z) = \mathrm{Res}_\lambda \mathrm{d}\lambda|\lambda\rangle \mathrm{Res}_z \langle\lambda|a(z) = a(z)\mathrm{d}\lambda.$$

□

PROPOSITION 2.2.6

$\mathfrak{gl}\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ の元として, $[p, q] = 1$.

Proof. $V = \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ と置く.

PROPOSITION 2.2.5 で $V \rightarrow V \oplus V\mathrm{d}\lambda$ の写像として

$$[p, T(\mathrm{d}\lambda)] = \mathrm{d}\lambda$$

を証明したから、とくに $\mathfrak{gl}(V \oplus V\mathrm{d}\lambda)$ の元として

$$[p, 1 + q\mathrm{d}\lambda] = \mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ. よって一般に, $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}\lambda) \otimes \mathfrak{gl} V$ の元 $f + g\mathrm{d}\lambda$ が $\mathfrak{gl}(V \oplus V\mathrm{d}\lambda)$ の元として $f + g\mathrm{d}\lambda = 0$ ならば, $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}\lambda) \otimes \mathfrak{gl} V$ の元としても $f + g\mathrm{d}\lambda = 0$ となることを示せば十分である. $\mathfrak{gl}(V \oplus V\mathrm{d}\lambda)$ の元として $= 0$ のとき, 任意のベクトル $v, w \in V$ に対して

$$(f + g\mathrm{d}\lambda)(v + w\mathrm{d}\lambda) = f(v) + (f(w) + g(v))\mathrm{d}\lambda = 0$$

が成り立つ. つまり任意の $v \in V$ に対して $f(v) = 0$ であるから, $f = 0 \in \mathfrak{gl} V$. すると $g(v) = 0$ も従い, やはり $g = 0 \in \mathfrak{gl} V$ が言える. □

以上の命題を再度述べ直すと, 次の定理を得る.

THEOREM 2.2.7

$\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ 上の線型演算子 q を

$$qa(z) := z \frac{\partial}{\partial z}(za(z)) = \sum_n na_{n-1}z^n$$

で定義すると, 交換子が $[p, q] = 1$ を満たす.

なお, 今までの議論を経由せず天下り式に示すこともできる:

Proof. $pa(z) = z^{-1}a(z)$ であったから,

$$pq = z^{-1} \cdot z \frac{\partial}{\partial z} z = \frac{\partial}{\partial z} z = 1 + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$qp = z \frac{\partial}{\partial z} z \cdot z^{-1} = z \frac{\partial}{\partial z}.$$

□

§ 2.3 一般固有空間と Heisenberg 代数

ここでは, p 演算子の一般的な性質について調べるために, Heisenberg 代数を導入する.

DEFINITION 2.3.1

3 個のベクトル $p, q, 1$ を生成系とする自由ベクトル空間

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q \oplus \mathbb{C}1$$

に交換関係

$$[p, q] = 1, \quad [1, H] = 0$$

を定義すると, \mathfrak{h} は Lie 代数となる. これを **Heisenberg 代数** (Heisenberg algebra) と呼ぶ.

DEFINITION 2.3.2

$\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl} V$ を表現とする. ベクトル $v \in V$ が, ある複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を用いて $\rho(1)v = \lambda v$ を満たすとき, v を **ウェイトベクトル** (weight vector) と言い, λ を v の **ウェイト** (weight) と呼ぶ.

ウェイトベクトル v であって, さらに $v \neq 0$ かつ $\rho(p)v = 0$ を満たすとき, v を **最高ウェイトベクトル** (highest weight vector) と呼ぶ.

EXAMPLE 2.3.1 i) \mathbb{C} 値母関数のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ に対して,

$$\rho(p) = z^{-1}, \quad \rho(q) = z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho(1) = \text{id}$$

によって \mathfrak{h} 加群 $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]])$ が定まる. このとき任意の母関数はウェイト 1 のウェイトベクトルである. 最高ウェイトベクトルは存在しない.

ii) 0 でない複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を固定して

$$\rho_\lambda(p) = z^{-1} - \lambda, \quad \rho_\lambda(q) = \rho(q), \quad \rho_\lambda(1) = \rho(1)$$

と定義すると, ρ_λ もまた \mathfrak{h} 加群を定める. この場合も任意の母関数がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり, $|\lambda\rangle$ は最高ウェイトベクトルである.

iii) 一変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ に対して,

$$\rho(p) = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho(q) = z, \quad \rho(1) = \text{id}$$

によって \mathfrak{h} 加群 $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[z])$ が定まる. 同様に任意の多項式がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり, $1 \in \mathbb{C}[z]$ が最高ウェイトベクトルである.

iv) より一般に, あるベクトル空間 V の線型作用素 $P, Q, I \in \text{End } V$ であって $[P, Q] = I, [I, P] = 0 = [I, Q]$ を満たすものがあれば,

$$\rho(p) = P, \quad \rho(q) = Q, \quad \rho(1) = I$$

によって \mathfrak{h} 加群 $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl } V$ が定まる.

以下では数列の正規形漸化式の解空間が, \mathfrak{h} 表現 $\mathbb{C}[z]$ を用いて書けることを示す. 最初に便利な公式を証明しておこう.

LEMMA 2.3.1

$\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl } V$ を \mathfrak{h} の表現とする, $v \in V$ が複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ をウェイトとする最高ウェイトベクトルのとき,

$$\begin{aligned} \rho(1)\rho(q)^n v &= \lambda \rho(q)^n v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\ \rho(p)\rho(q)^n v &= n\lambda \rho(q)^{n-1} v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 上の等式は, $\rho(1)v = \lambda v$ と $[\rho(1), \rho(q)] = \rho([1, q]) = 0$ から従う.

下の等式を n に関する帰納法で示す.

v が最高ウェイトベクトルであるから,

$$\rho(p)\rho(q)v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))v = \lambda v$$

となり, $n = 1$ の場合が確かめられる.

n の場合を仮定すると, $n + 1$ について

$$\rho(p)\rho(q)^{n+1}v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))\rho(q)^n v = \rho(q) \cdot n\lambda \rho(q)^{n-1}v + \lambda \rho(q)^n v = (n+1)\lambda \rho(q)^n v$$

となるから, 任意の $n \geq 1$ で成り立つことが示された. □

THEOREM 2.3.1

V を \mathfrak{h} の表現とする. $v \in V$ が最高ウェイトベクトルのとき, V の部分空間

$$V' := \text{span}\{q^n v \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

は V の部分表現であり, さらに v のウェイトが 0 でないときは既約となる.

この表現を $U(\mathfrak{h})v = V'$ と書く. $U(\mathfrak{h})$ は \mathfrak{h} の universal enveloping algebra のつもりであるが, ここ

ではそれを定義せずに単なる記号として扱っている。

Proof. まず **LEMMA 2.3.1** より, V' が部分表現となることは分かる。

既約性を示すために, 次の性質に注意する:

$$p^n q^n v \in \mathbb{C}v \setminus 0, \quad p^{n+1} q^n v = 0.$$

これらは **LEMMA 2.3.1** を繰り返し適用すると, $p^n q^n v = n! \lambda v$ となることから従う。ただし v のウェイトを λ と置いた。 $0 \neq U \subset V'$ を任意の部分表現として, ベクトル $0 \neq u \in U$ を適当に取る。すると $u = \sum_{n=0}^N a_n q^n v$ ($a_n \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$) と書け,

$$p^N u = a_N p^N q^N v \in \mathbb{C}v \setminus 0$$

を満たす。また, U は部分表現であるから $p^N u \in U$ および $q^m p^N u \in U$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) となる。よって V' の任意のベクトルが U の元となるから, $U = V'$ 。したがって V' は既約表現である。 \square

COROLLARY 2.3.2

EXAMPLE 2.3.1 の表現 $\mathbb{C}[z]$ は既約。

Proof. $v = 1$ として **THEOREM 2.3.1** を適用すれば良い。 \square

COROLLARY 2.3.3

V を \mathfrak{h} の表現として, $v \in V$ がウェイト 1 の最高ウェイトベクトルであるとする。このとき, 部分表現 $U(\mathfrak{h})v$ は $\mathbb{C}[z]$ と同型となる。つまり, 全単射な \mathfrak{h} 準同型 $f: \mathbb{C}[z] \rightarrow U(\mathfrak{h})v$ が存在する。さらに, この準同型は $f(z^n) = q^n v$ を満たすように取ることができる。

とくに, 集合 $\{q^n v \mid n \geq 0\}$ は線型独立である。

Proof. 線型写像 $f: \mathbb{C}[z] \rightarrow U(\mathfrak{h})v$ を $f(z^n) = q^n v$ で定義すると, これは全射な \mathfrak{h} 準同型となる。よって **COROLLARY 2.3.2** および Schur の補題から主張が従う。 \square

COROLLARY 2.3.4

COROLLARY 2.3.3 と同じ状況の下で, 表現 $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl} U(\mathfrak{h})v$ について以下の性質が成り立つ:

- i) $\rho(p)^{n+1} \rho(q)^n v = 0$;
- ii) $U(\mathfrak{h})_{\leq n} v := \text{span}\{\rho(q)^i v \mid 0 \leq i \leq n\} \subset U(\mathfrak{h})v$ と置くと, 任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$U(\mathfrak{h})_{\leq n} v = \begin{cases} \rho(p) U(\mathfrak{h})_{\leq n+1} v & (\lambda = 0), \\ (\rho(p) - \lambda) U(\mathfrak{h})_{\leq n} v & (\lambda \neq 0); \end{cases}$$

iii) 任意の非零ベクトル $0 \neq w \in U(\mathfrak{h})v$ と 0 でない複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$(\rho(p) - \lambda_1) \cdots (\rho(p) - \lambda_k) w \neq 0.$$

Proof. 標準的な表現 $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl} \mathbb{C}[z]$ (**EXAMPLE 2.3.1**) の場合はすべて簡単な計算で確かめられる (iii) は w の次数を見れば, 左辺の leading term が 0 にはならない). したがって, **COROLLARY 2.3.3** より一般の $U(\mathfrak{h})v$ に対しても成立する. \square

§ 2.4 正規形漸化式の解空間

ここまでで準備は終わり, いよいよ漸化式の解空間の記述が始まる. まずは正規形漸化式を定義しよう.

DEFINITION 2.4.1

正規形 (normal) の漸化式とは, 数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に関する

$$a_{n+d} = c_{d-1} a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \quad (c_i \in \mathbb{C}, c_0 \neq 0)$$

という形の漸化式のことである.

正規形漸化式は, $p = z^{-1} \in \text{End} \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ を用いて

$$p^d a(z) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i p^i a(z)$$

と母関数表示することができる. さらに特性多項式 (characteristic polynomial) $\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ を $\chi(t) := t^d - c_{d-1} t^{d-1} - \cdots - c_0$ で定義すると,

$$\chi(p) a(z) = 0$$

と書ける. この解空間を $S_\chi := \{a(z) \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]] \mid \chi(p) a(z) = 0\}$ と置き, S_χ の基底を求めることが目標である.

S_χ はベクトル空間であり, その次元を計算することで簡単に同定できるが, ここではあえてそれを避けて, Heisenberg 代数の作用によって解空間を記述しよう.

最初に $(p - \lambda)^N a(z) = 0$ という形の解空間から導出する.

PROPOSITION 2.4.1

$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を 0 でない複素数として, $\chi(t) = (t - \lambda)^N$ を考える. このとき,

$$S_\chi = U(\mathfrak{h})_{\leq N-1} |\lambda\rangle = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathbb{C} q^n |\lambda\rangle$$

が成り立つ.

Proof. **COROLLARY 2.3.3** および **COROLLARY 2.3.4** の i) より, 集合

$$B_\lambda^N := \{q^n|\lambda\rangle \mid 0 \leq n < N\}$$

は線型独立であり, かつ $(p-\lambda)^{n+1}q^n|\lambda\rangle = 0$ を満たす. とくに $\chi(p)B_\lambda^N = 0$ であるから, $U(\mathfrak{h})_{\leq N-1}|\lambda\rangle \subset S_\chi$ が分かる.

逆の包含関係を $N = \deg \chi$ に関する帰納法で示す. $N = 1$ のときは明らか.

$N \geq 2$ のとき, $a(z) \in S_\chi$ を仮定する. 定義より $(p-\lambda)^{N-1}a(z) \in \text{Ker}(p-\lambda)$ となるが, $N = 1$ の場合から $\text{Ker}(p-\lambda) = U(\mathfrak{h})_{\leq 0}|\lambda\rangle$ であり, さらに **COROLLARY 2.3.4** の ii) を繰り返し用いれば $U(\mathfrak{h})_{\leq 0}|\lambda\rangle = \rho_\lambda(p)^{N-1}U(\mathfrak{h})_{\leq N-1}|\lambda\rangle$ となる. よってある母関数 $a_1(z) \in U(\mathfrak{h})_{\leq N-1}|\lambda\rangle$ を使って $(p-\lambda)^{N-1}a(z) = (p-\lambda)^{N-1}a_1(z)$ と書け,

$$a(z) \in a_1(z) + \text{Ker}(p-\lambda)^{N-1} = a_1(z) + U(\mathfrak{h})_{\leq N-2}|\lambda\rangle \subset U(\mathfrak{h})_{\leq N-1}|\lambda\rangle$$

が導かれた. □

以上の命題を使って一般の解空間 S_χ も計算される.

THEOREM 2.4.2

一般の特性多項式 χ に対して,

$$S_\chi = \bigoplus_{i=1}^k S_{\chi_i} = \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{n=0}^{M_i-1} \mathbb{C} q^n |\lambda_i\rangle.$$

ただし, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ は χ の相異なる根であり, λ_i の重複度を M_i , $\chi_i(t) := (t-\lambda_i)^{M_i}$ と置いた.

Proof. 特性多項式の定数項が $\chi(0) = -c_0 \neq 0$ であったから, $\lambda_i \neq 0$ となることに注意する.

まず各 i, j に対して $[p-\lambda_i, p-\lambda_j] = 0$ という交換関係が成り立つから, $\chi_i(p)a(z) = 0$ ならば $\chi(p)a(z) = 0$ が言える. すなわち $S_{\chi_i} \subset S_\chi$.

続いて **COROLLARY 2.3.4** の ii) より

$$U(\mathfrak{h})_{\leq M_1-1}|\lambda_1\rangle = (\rho_{\lambda_1}(p) - (\lambda_2 - \lambda_1))^{M_2} \cdots (\rho_{\lambda_1}(p) - (\lambda_k - \lambda_1))^{M_k} U(\mathfrak{h})_{\leq M_1-1}|\lambda_1\rangle$$

と変形できる. そこで $a(z) \in S_\chi$ を任意に取れば, $(p-\lambda_2)^{M_2} \cdots (p-\lambda_k)^{M_k} a(z) \in S_{\chi_1} = U(\mathfrak{h})_{\leq M_1-1}|\lambda_1\rangle$ (**PROPOSITION 2.4.1**) だから, ある母関数 $a_1(z) \in U(\mathfrak{h})_{\leq M_1-1}|\lambda_1\rangle$ を用いて

$$(p-\lambda_2)^{M_2} \cdots (p-\lambda_k)^{M_k} a(z) = (p-\lambda_2)^{M_2} \cdots (p-\lambda_k)^{M_k} a_1(z)$$

と書ける. すると $a(z) - a_1(z) \in S_{\chi_2 \cdots \chi_k}$ となるから, k に関する帰納法によって $a(z) \in \sum_i S_{\chi_i}$. 以上で

$$S_\chi = \sum_{i=1}^k S_{\chi_i}$$

を証明できた.

最後に $\sum S_{\chi_i} = \bigoplus S_{\chi_i}$ を示す. $a(z) \in \sum S_{\chi_i}$ を $a(z) = \sum a_i(z)$ ($a_i(z) \in S_{\chi_i}$) という形で書いて, $a(z) = 0$ を仮定する. 等式 $0(=a(z)) = \sum a_i(z)$ の両辺に $\chi_2(p) \cdots \chi_k(p)$ を作用させると,

$$0 = \chi_2(p) \cdots \chi_k(p) \sum a_i(z) = \chi_2(p) \cdots \chi_k(p) a_1(z)$$

を得る. さらに $a_1(z) \in S_{\chi_1} \subset U(\mathfrak{h})|\lambda_1\rangle$ (**PROPOSITION 2.4.1**) に **COROLLARY 2.3.4** の iii) を適用すると, $a_1(z) = 0$ でなければならない. 他の i でも同様に $a_i(z) = 0$ となるから, $\sum S_{\chi_i} = \bigoplus S_{\chi_i}$ が示された. \square