Metody numeryczne

Wykład nr 2

dr hab. Piotr Fronczak

Przybliżone rozwiązywanie równań nieliniowych

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Szukamy pierwiastków rzeczywistych równania $f(x) = 0$.

$f(x)$ zwykle jest funkcją nieliniową, zatem korzystamy z metod iteracyjnych (poprawianie kolejnych przybliżeń pierwiastków)

Wykładnik zbieżności

- Określa szybkość zbieżności metod iteracyjnych
- Metoda jest rzędu *p*, jeżeli istnieje stała *c* taka, że dla dwóch kolejnych przybliżeń x_k i x_{k+1} zachodzi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = c$$

gdzie $\varepsilon_k = x_{k+1} - x_k$.

Przypadki specjalne

p=1 (metoda liniowa),
p>1 & p<2 (metoda superliniowa)
p=2 (metoda kwadratowa),
p=3 (metoda kubiczna)

Zbieżność

1. $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\ldots$ linowa z $C = 10^{-1}$
2. $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}\ldots$ linowa z $C = 10^{-2}$
3. $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}\ldots$ superliniowa
4. $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}\ldots$ kwadratowa

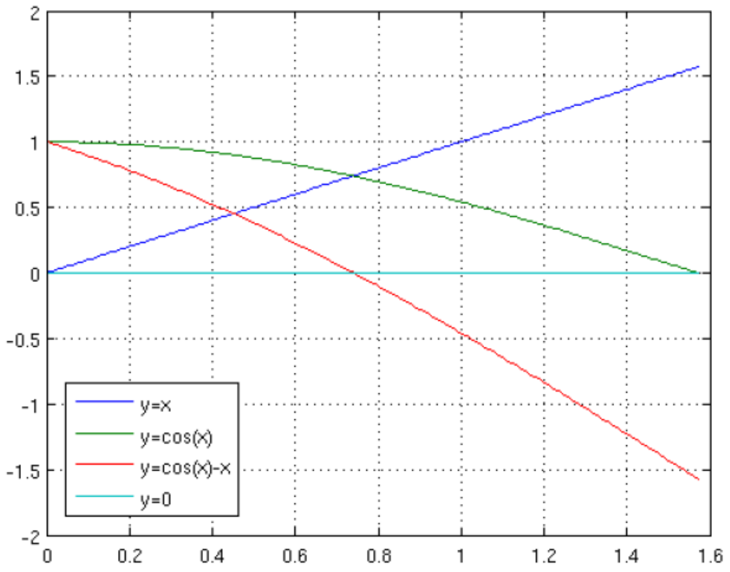
Kroki podstawowe

1. Przeanalizuj problem pod kątem

- złożoności badanej funkcji
- dokładności rozwiązań
- szybkości obliczeń

2. Jeśli to możliwe, narysuj funkcję

$f(x) = \cos(x) - x$

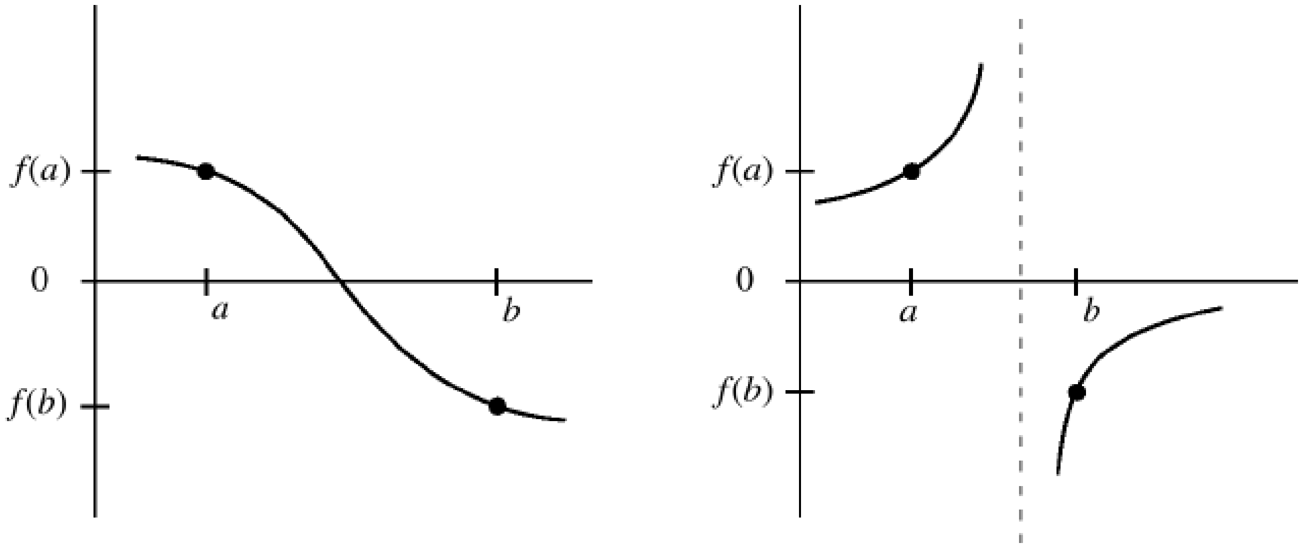


3. Oceń problemy (np. rozbieżność funkcji)
4. Wybierz rozwiązanie początkowe

Metoda bisekcji (połowienia)

Wybieramy przedział domknięty <*a*; *b*>, wewnątrz którego znajduje się pierwiastek i na którego końcach wartości funkcji *f*(*x*) mają przeciwne znaki

$$f(a)\,f(b) < 0$$



UWAGA!

Metoda bisekcji (połowienia)

1. Wybieramy przedział $<a, b>$, tak by $f(a)f(b)<0$
2. Dzielimy przedział na połowy:

$$x_0 = a + \frac{b-a}{2}$$

3. Mamy trzy przypadki:

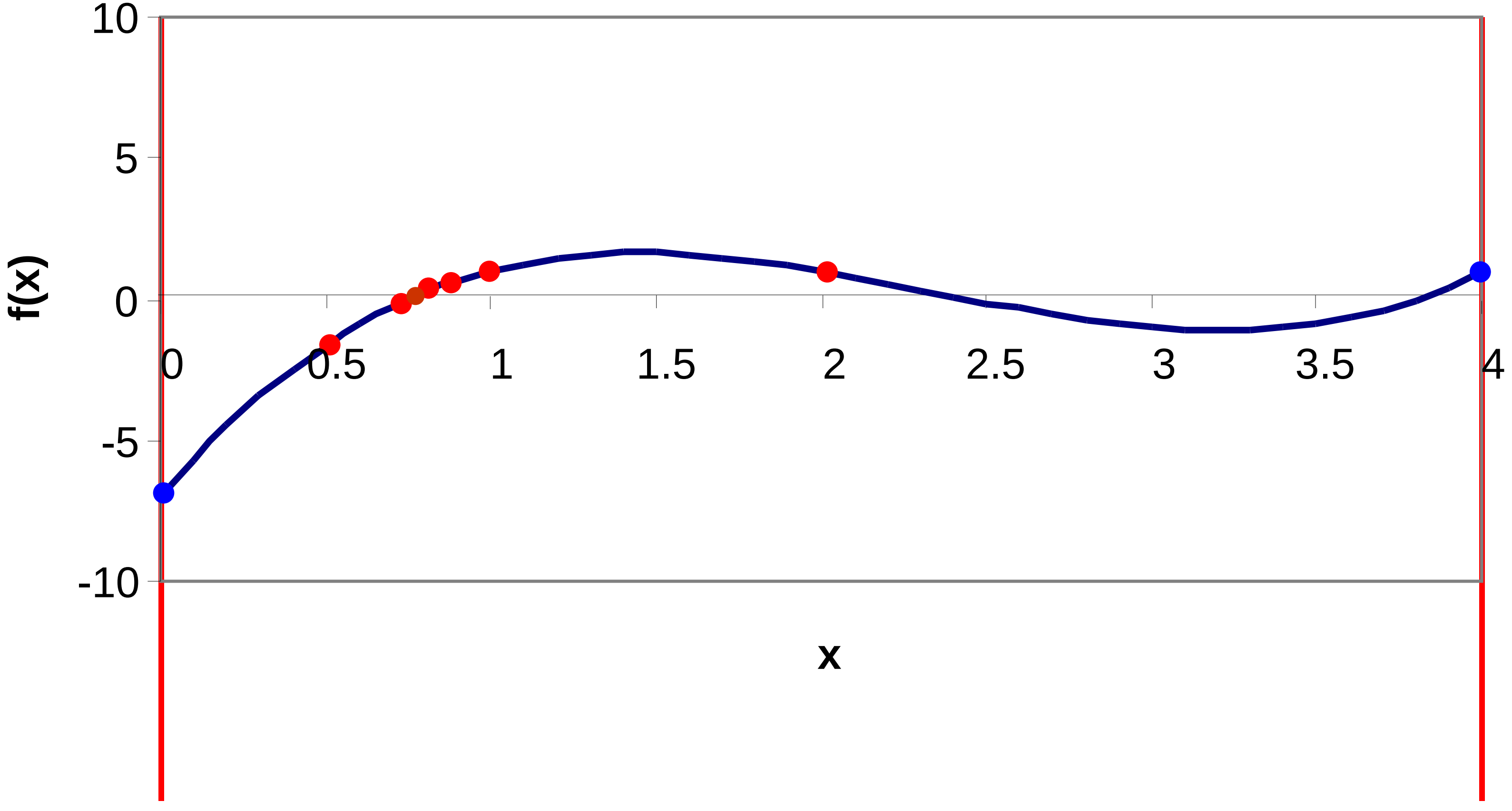
$$f(x_0) = 0, \quad znaleziono\ pierwiastek$$

$$f(x_0)\ ma\ ten\ sam\ znak\ co\ f(a)\ zatem\ pierwiastek$$
$$jest\ w\ przedziale\ (x_0, b)$$

$$f(x_0)\ ma\ ten\ sam\ znak\ co\ f(b)\ zatem\ pierwiastek$$
$$jest\ w\ przedziale\ (a, x_0)$$

4. Wybieramy przedział zawierający pierwiastek jako nowy przedział $<a,b>$ i wracamy do kroku 2.

Metoda bisekcji: przykład



Metoda bisekcji (połowienia): uwagi

- Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy.
- Metoda zawiedzie, gdy $f(x)$ styczne z osią x dla $f(x)=0$.
- Wolna zbieżność $p=1$ (metoda liniowa)

- Po k iteracjach rozmiar przedziału zmalał do:

$$\varepsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

- Zatem liczba iteracji konieczna do uzyskania tolerancji błędu ε_0:

$$k = \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon_0}\right)$$

Metoda Regula Falsi

- Opisana w hinduskim tekście *Vaishali Ganit* (III w. p.n.e.)
- *Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej* (九章算術) (200 p.n.e. – 100 n.e.) wykorzystuje algorytm do rozwiązywania równań liniowych
- *regula* – linia, *falsus* - fałszywy

Metoda Regula Falsi

1. Wybierz przedział $\langle a, b\rangle$, tak by $f(a)f(b)<0$
2. Przybliżenie pierwiastka: punkt, w którym prosta łącząca punkty a i b przecina oś x.

   równanie prostej: $$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$$

   Stąd, gdy $y=0$, mamy: $$x_{app} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

3. Mamy trzy przypadki:

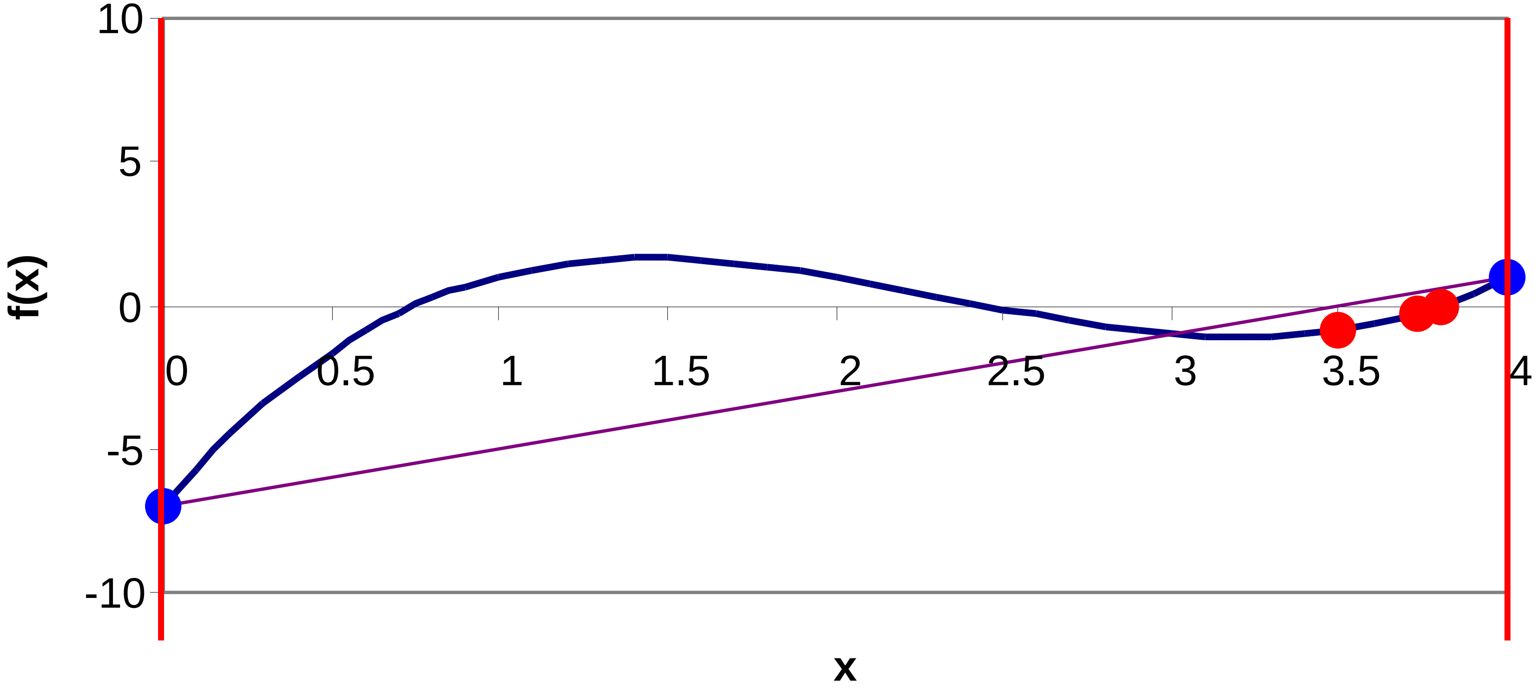
$$f(x_{app})=0, \quad znaleziono \ pierwiastek$$

$$f(x_{app}) \ ma \ ten \ sam \ znak \ co \ f(a) \ zatem \ pierwiastek \ jest \ w \ przedziale \ (x_{app}, b)$$

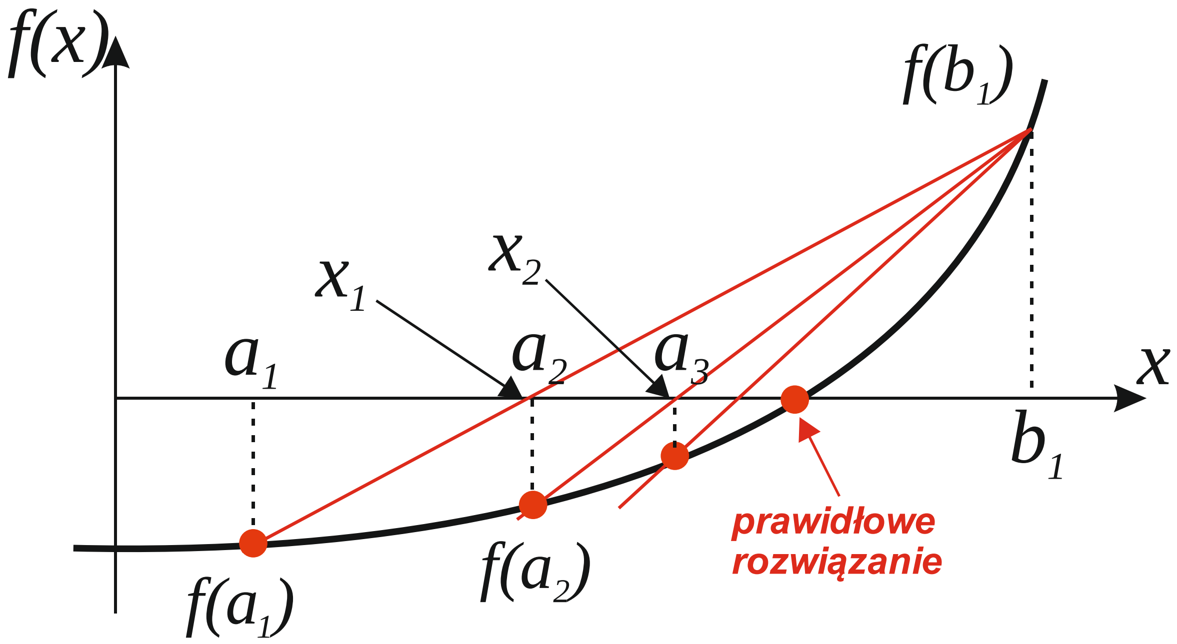
$$f(x_{app}) \ ma \ ten \ sam \ znak \ co \ f(b) \ zatem \ pierwiastek \ jest \ w \ przedziale \ (a, x_{app})$$

4. Wybierz przedział zawierający pierwiastek jako nowy przedział $\langle a, b\rangle$ i wróć do kroku 2.

Metoda Regula Falsi: przykład

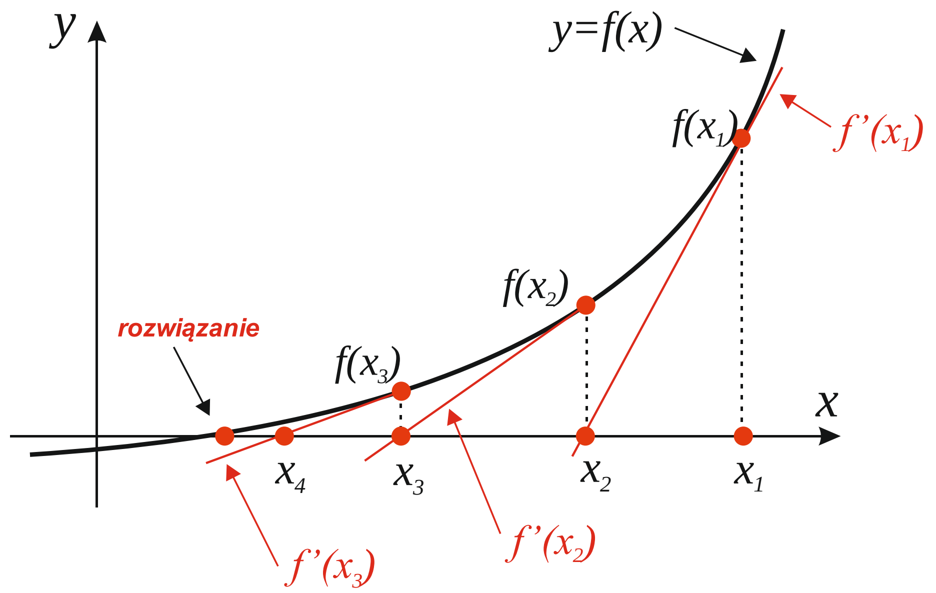


Metoda Regula Falsi: uwagi



- Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy.
- Metoda zawiedzie, gdy $f(x)$ styczne z osią x dla $f(x)=0$.
- Wolna zbieżność $p=1$ (metoda liniowa)

Metoda Newtona



Wybierzmy pewien punkt początkowy x_k i rozwińmy funkcję $f(x)$ w szereg Taylora

$$f(x_k + \Delta x) = f(x_k) + \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_k} + \ldots$$

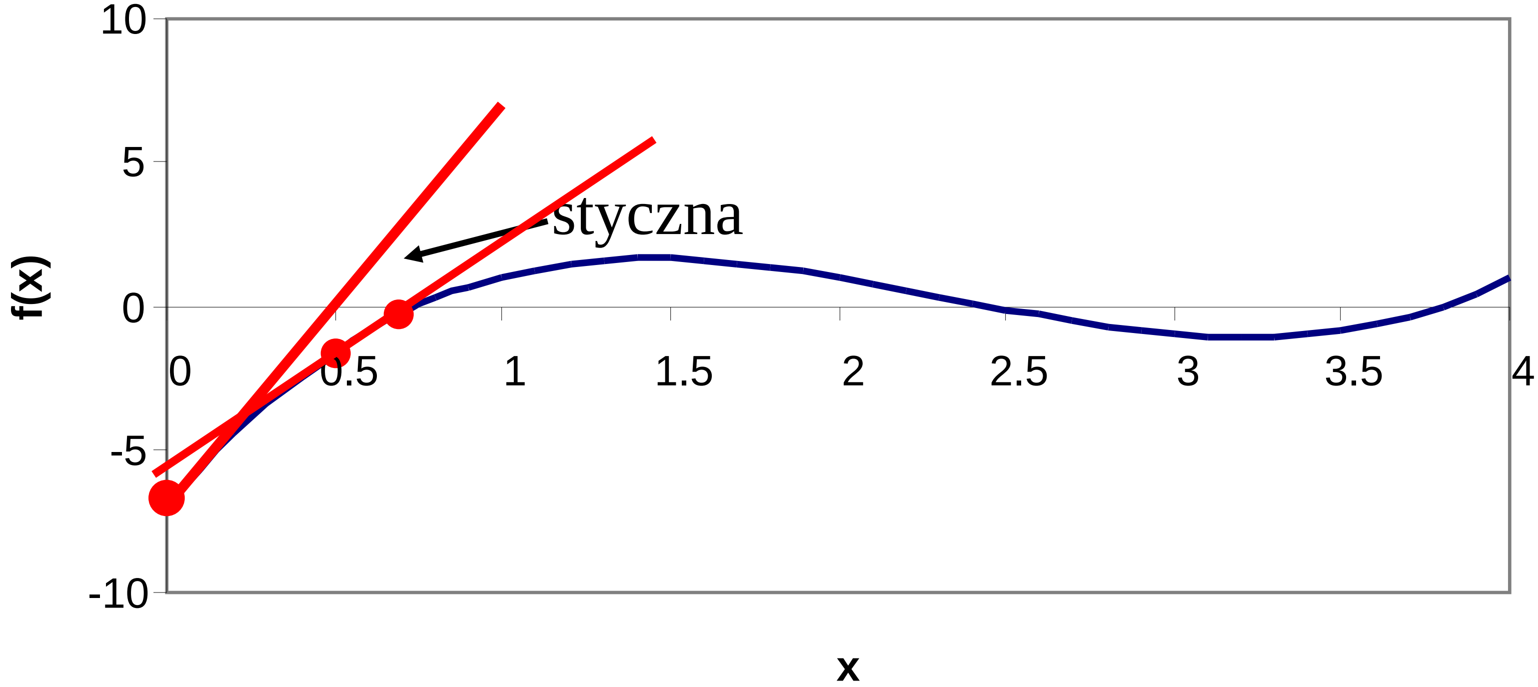
Podstawmy $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ i weźmy tylko dwa wyrazy rozwinięcia:

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

Niech $f(x_{k+1}) = 0$. Wtedy

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Metoda Newtona: przykład



Metoda Newtona: przykład c.d.

Szukamy pierwiastków $x - x^{1/3} - 2 = 0$

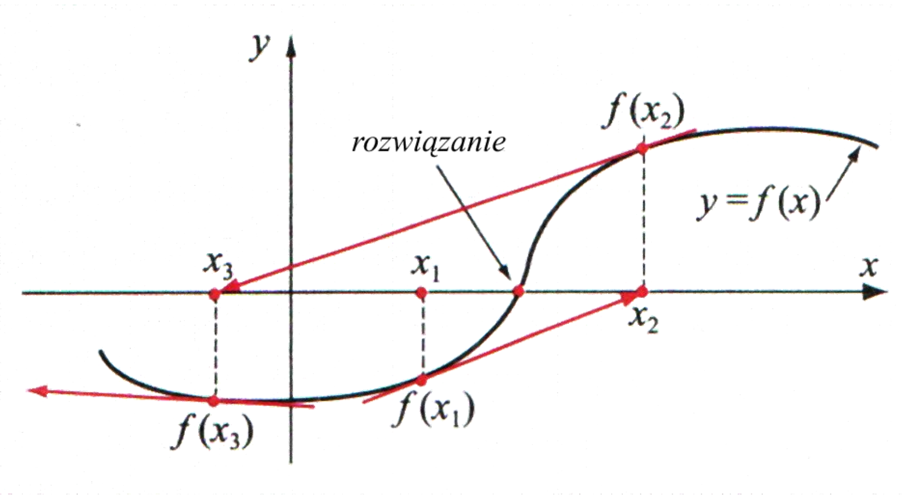
Liczymy pochodną $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$

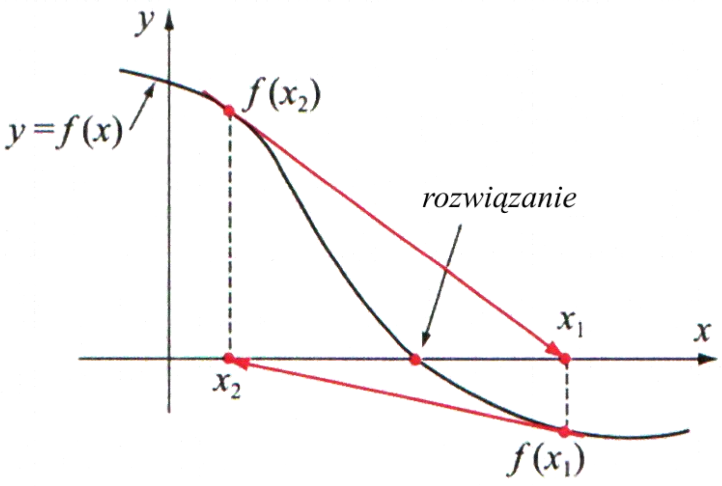
Równanie iteracyjne $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}}$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015	0.85598641	3.771×10^{-7}
3	3.52137971	0.85598640	2.664×10^{-15}
4	3.52137971	0.85598640	0.0

Metoda Newtona: uwagi

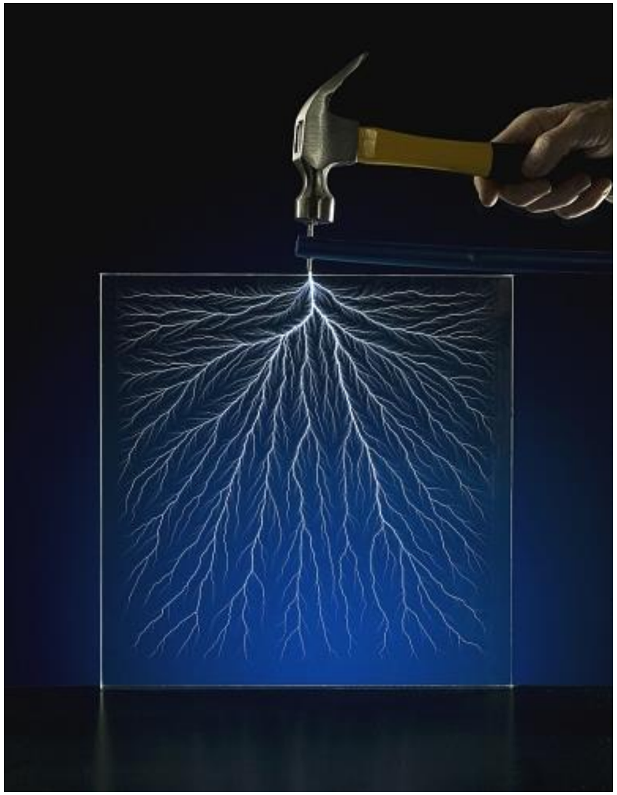
- Szybka zbieżność $p=2$ (metoda kwadratowa)
- Wymaga analitycznej znajomości $f'(x)$
- Metoda zbieżna, gdy $f(x), f'(x), f''(x)$ ciągłe, $f'(x)<>0$ w pobliżu rozwiązania, początkowa wartość x_1 leży blisko rozwiązania





Fraktale

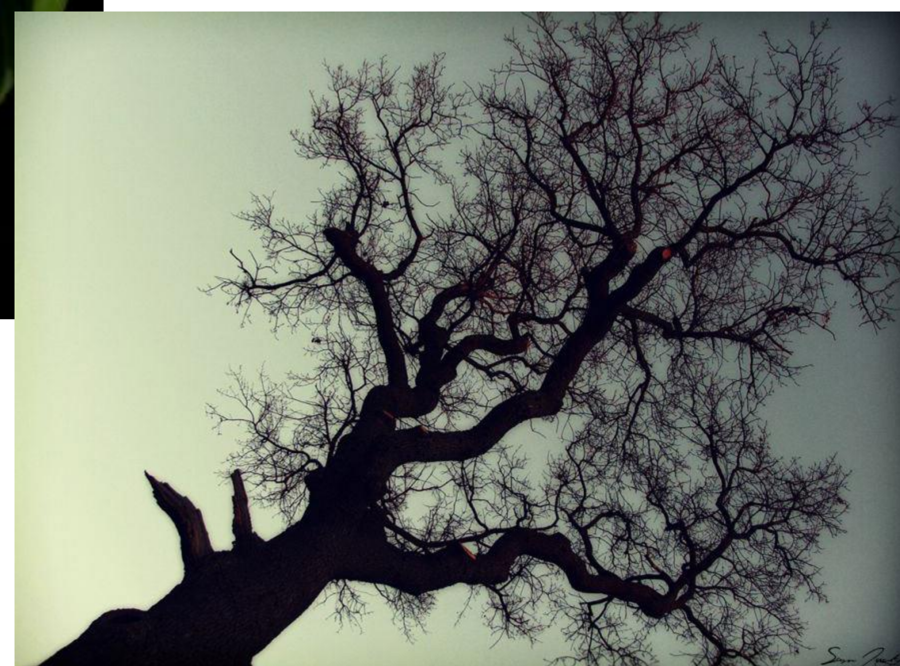
- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jest samo-podobny,
- ma wymiar wymierny (fractional) a nie całkowity



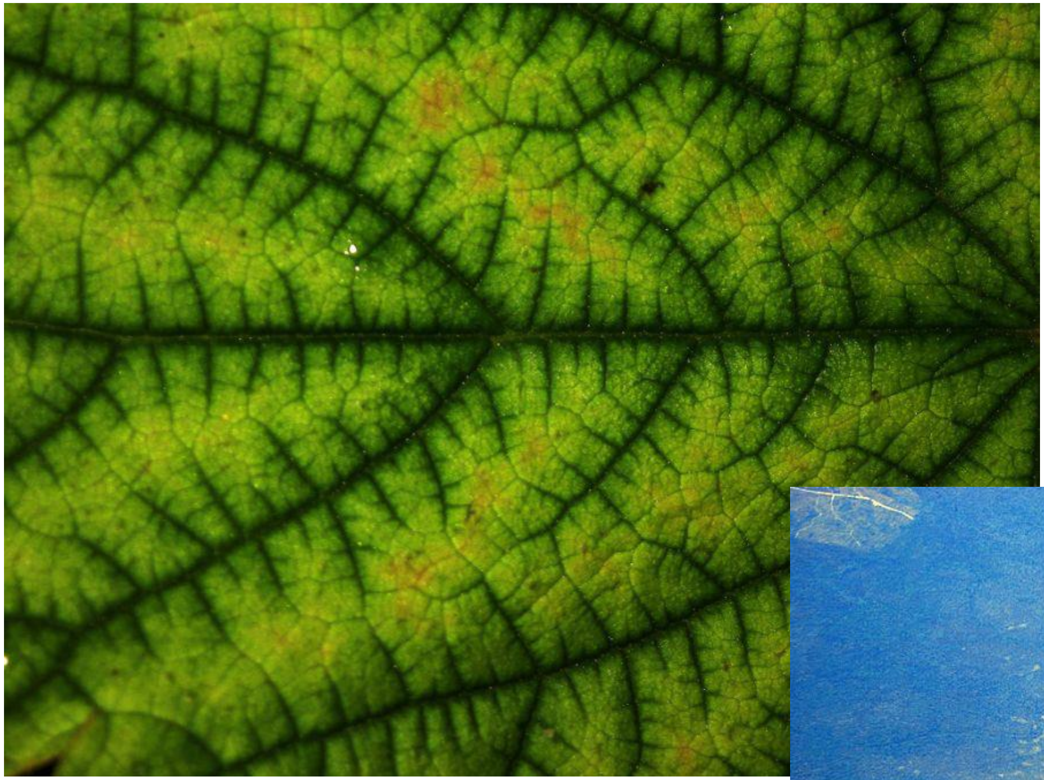
obraz Lichtenberga:
wyładowanie elektryczne w dielektryku.

Brokuł romanesco

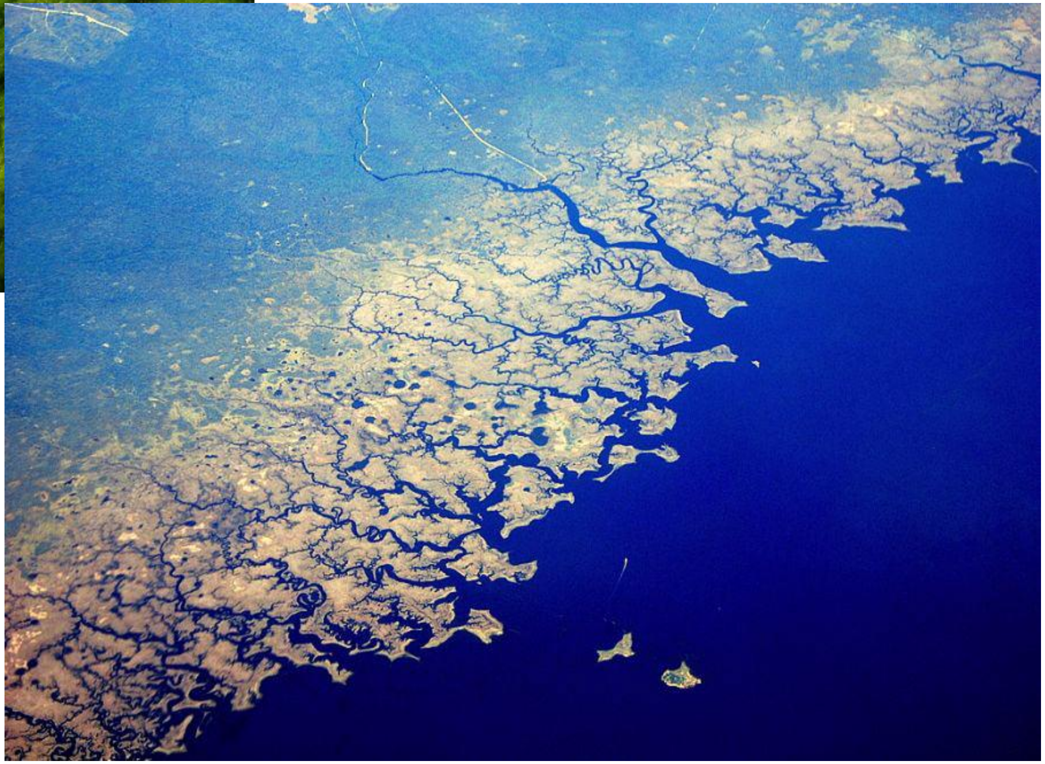
Drzewo



Liście



Linia brzegowa



Fraktale Netwona

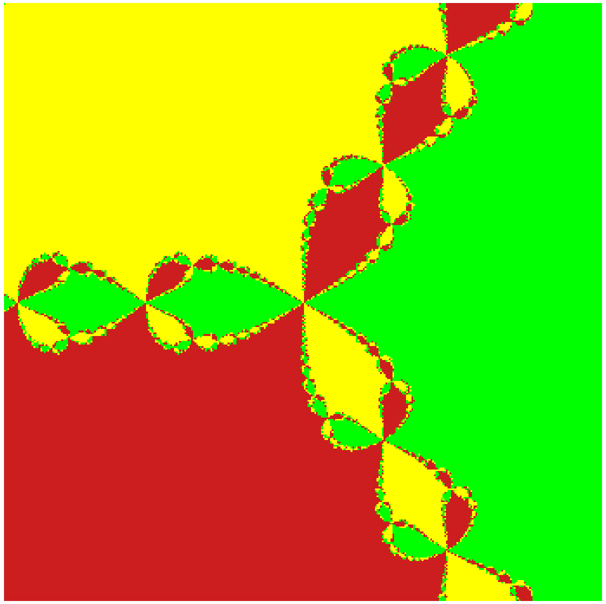
Weźmy równanie $f(z) = 0$, $z \in C$, np. $z^3 - 1 = 0$

Równanie zespolone stopnia n ma n pierwiastków.

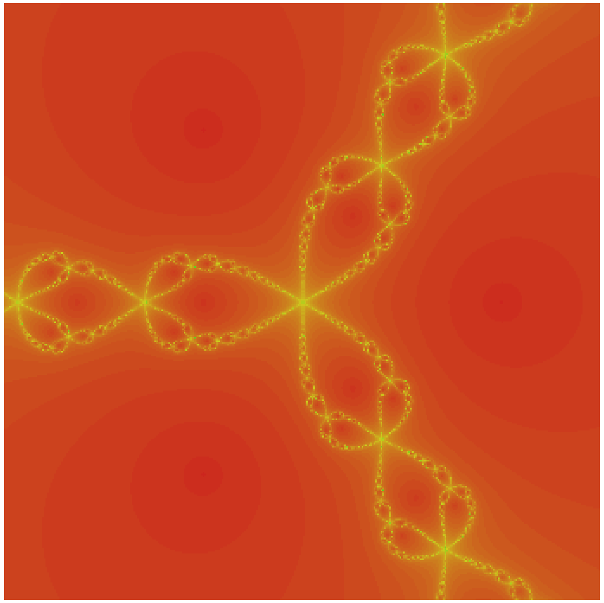
W zależności od wyboru punktu warunku początkowego $(x + iy)$ metoda Newtona doprowadzi nas do jednego z n pierwiastków.

Punkty te następnie oznacza się różnym kolorem w zależności od:

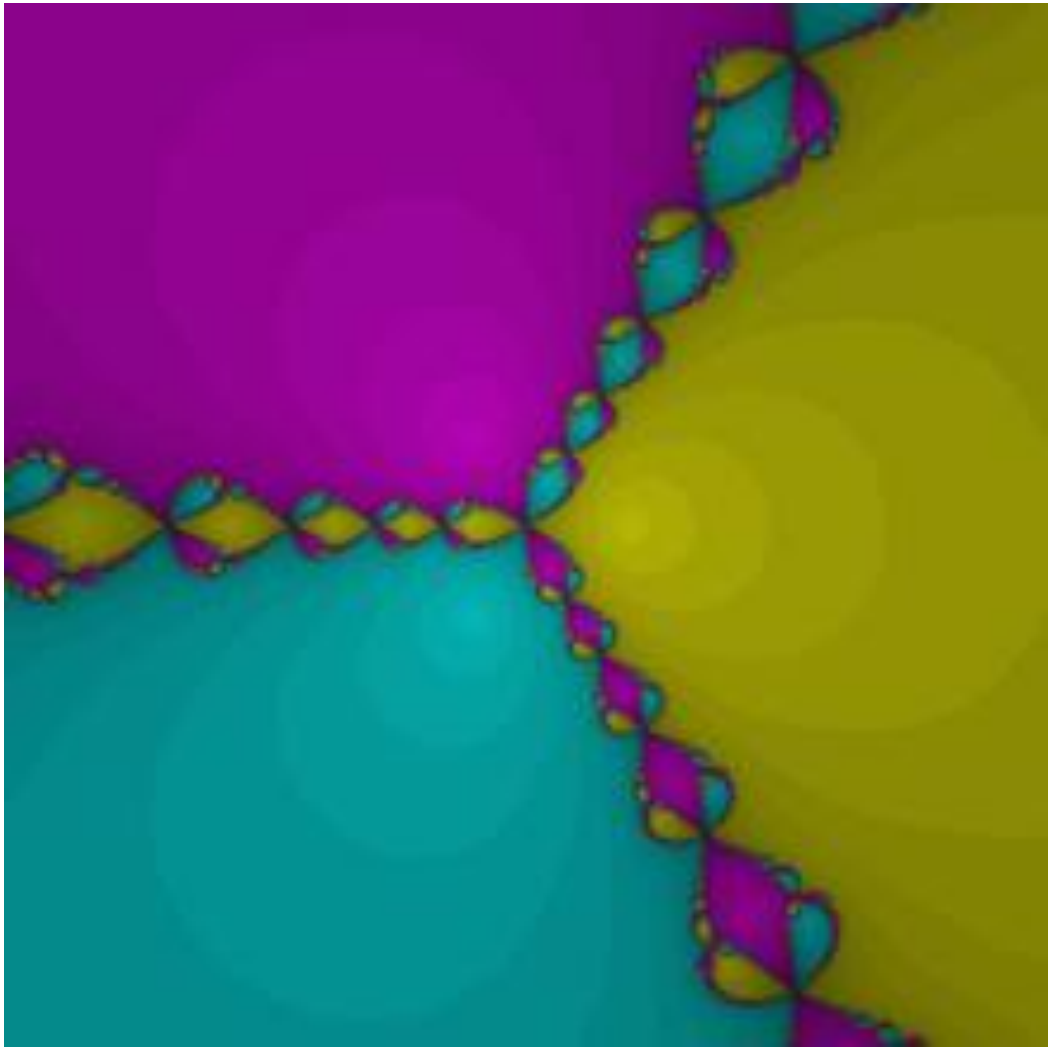
rozwiązania, do którego dąży dany punkt:



prędkości znalezienia rozwiązania:

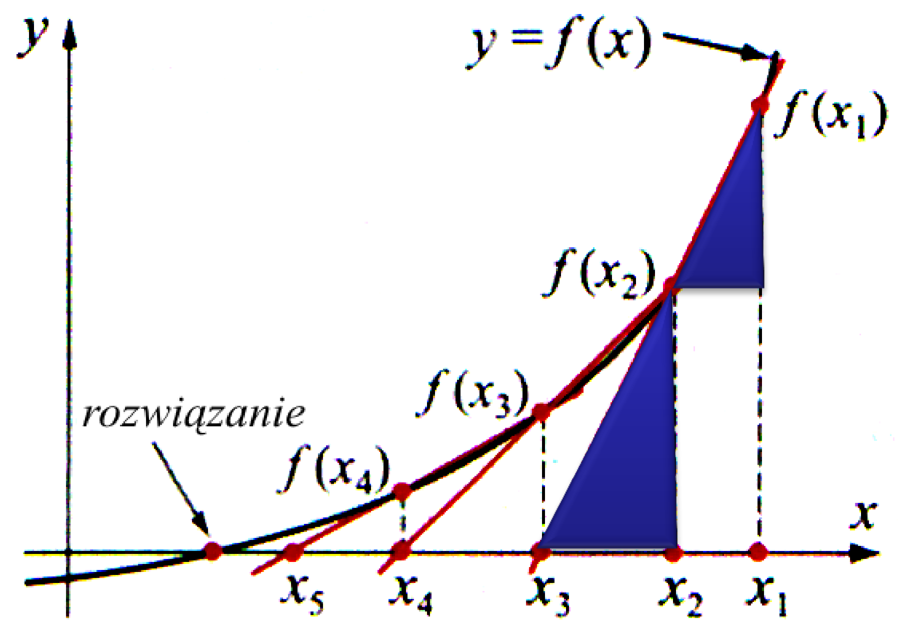


… lub oba warunki naraz:



Metoda siecznych

Do wyznaczenia $k+1$ przybliżenia korzystamy z punktów k-1 i k.



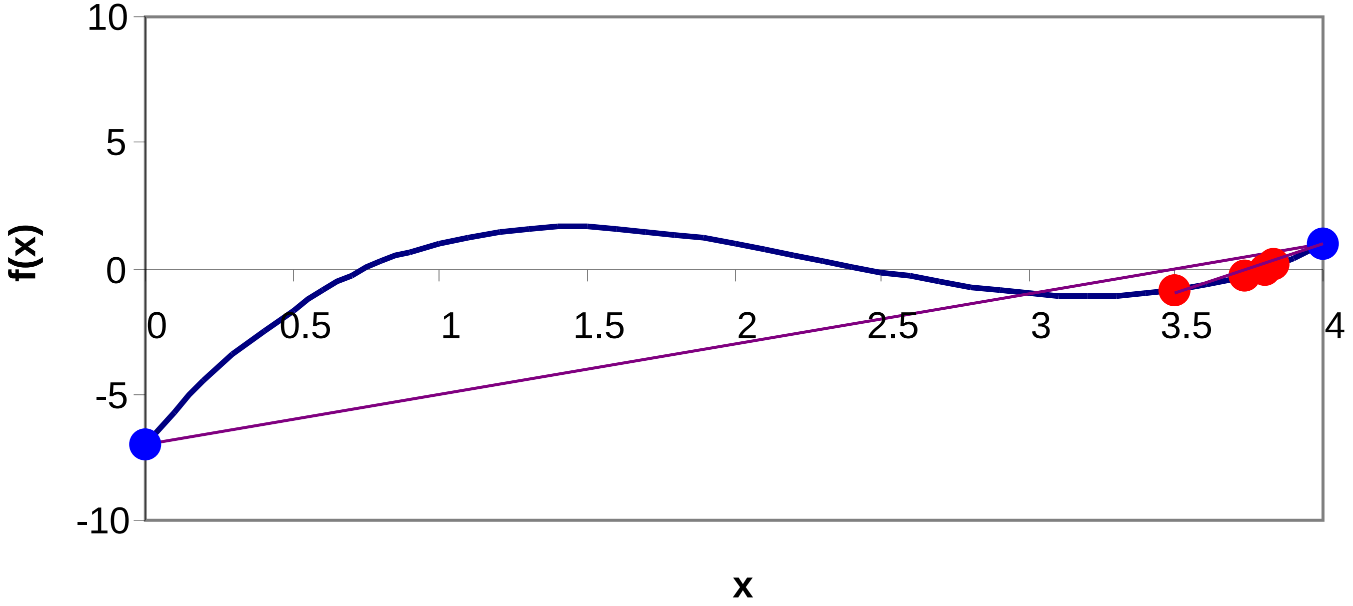
Korzystając z podobieństwa trójkątów:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_2)-0}{x_2-x_3}$$

Stąd $$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1-x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

Ogólnie $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1}-x_k)}{f(x_{k-1})-f(x_k)}$$

Metoda siecznych: przykład



Metoda siecznych: uwagi

Metoda między Regula falsi a Newtona

Zbieżność szybsza niż liniowa $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \Longleftrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{(x_{k-1} - x_k)}}$$

Przybliżenie pochodnej

Nie musimy znać analitycznej postaci *f'(x)* !

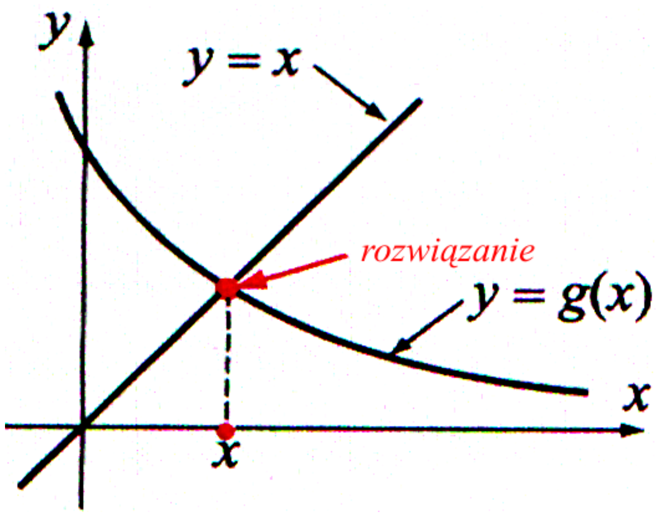
Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ale te same problemy ze zbieżnością co w metodzie Newtona.
Najpierw wolna ale pewna bisekcja, potem szybka metoda siecznych.

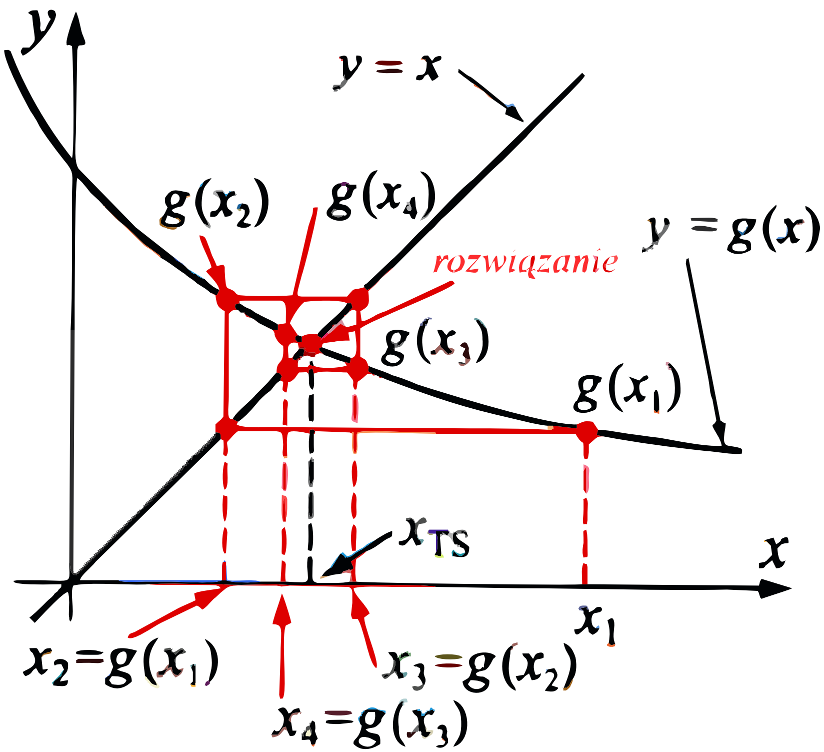
Metoda szukania punktu stałego

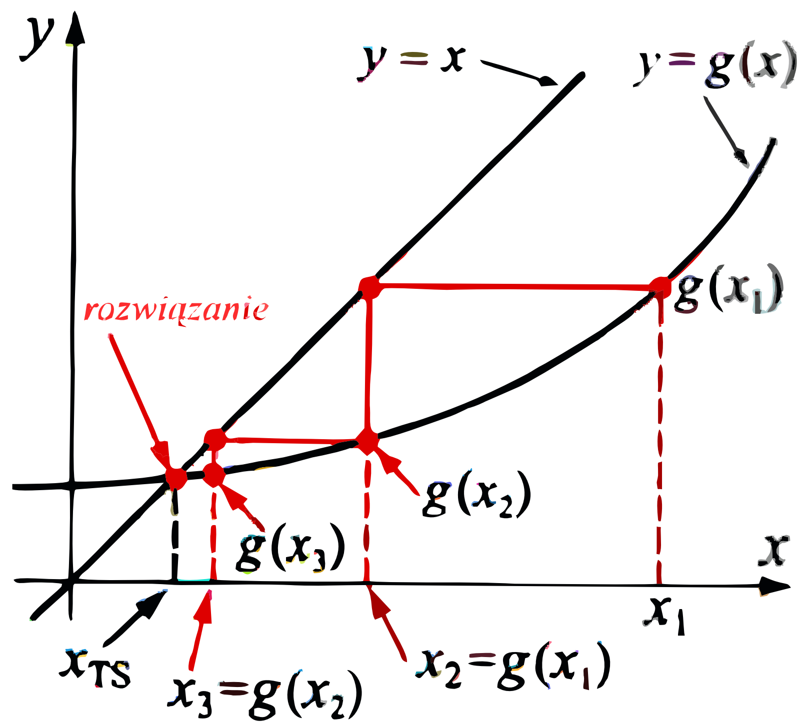
Równanie $f(x) = 0$ zastępujemy równaniem $x - g(x) = 0$, czyli $x = g(x)$



Rozwiązania szukamy iteracyjnie: $x_{k+1} = g(x_k)$

Metoda szukania punktu stałego





Metoda szukania punktu stałego: przykład

$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

Trzy sposoby zapisu:

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = x_k^{1/3} + 2$$

$$x_{k+1} = g_2(x_k) = (x_k - 2)^3$$

$$x_{k+1} = g_3(x_k) = \frac{6 + 2x_k^{1/3}}{3 - x_k^{2/3}}$$

Czy jest jakaś różnica?

k	$g_1(x_{k-1})$	$g_2(x_{k-1})$	$g_3(x_{k-1})$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931
2	3.5098974493	-1	3.5213801474
3	3.5197243050	-27	3.5213797068
4	3.5211412691	-24389	3.5213797068
5	3.5213453678	-1.451×10^{13}	3.5213797068
6	3.5213747615	-3.055×10^{39}	3.5213797068
7	3.5213789946	-2.852×10^{118}	3.5213797068
8	3.5213796042	∞	3.5213797068
9	3.5213796920	∞	3.5213797068
	zbieżność	**rozbieżność**	**szybka zbieżność**

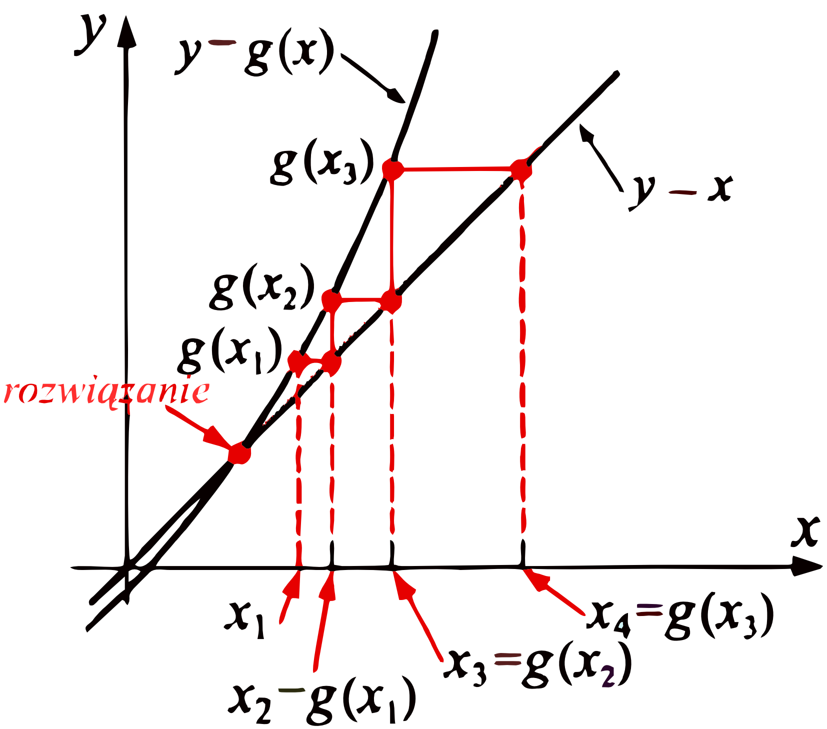
Metoda szukania punktu stałego: zbieżność

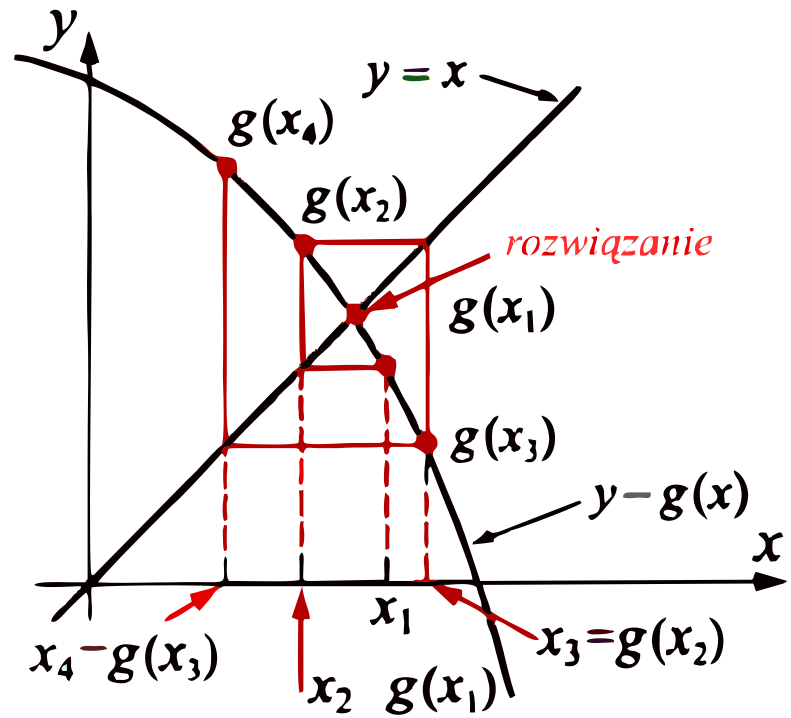
Twierdzenie:
Jeśli funkcja g jest ciągła w $[a, b]$ i ograniczona $a \le g(x) \le b$ dla każdego $x \in [a, b]$, to funkcja posiada przynajmniej jeden punkt stały

Jeśli ponadto $g'(x)$ jest ciągła na (a, b) i spełniona jest nierówność:
$|g'(x)| \le c < 1$, to ciąg iteracji $x_{n+1} = g(x_n)$ jest zbieżny do punktu stałego.

Dla opornych: jeśli $g(x)$ jest gładka i ograniczona i niezbyt stroma,
to proces iteracyjny jest zbieżny.

Metoda szukania punktu stałego: zbieżność





Metoda szukania punktu stałego: przykład

$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

Trzy sposoby zapisu:

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = x_k^{1/3} + 2$$

$$x_{k+1} = g_2(x_k) = (x_k - 2)^3$$

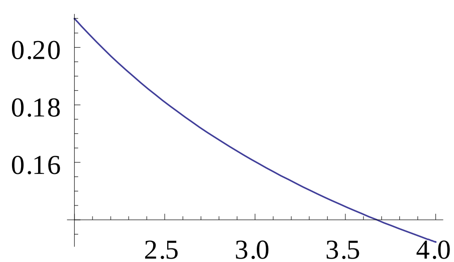
$$x_{k+1} = g_3(x_k) = \frac{6 + 2x_k^{1/3}}{3 - x_k^{-2/3}}$$

k	$g_1(x_{k-1})$	$g_2(x_{k-1})$	$g_3(x_{k-1})$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931
2	3.5098974493	-1	3.5213801474
3	3.5197243050	-27	3.5213797068
4	3.5211412691	-24389	3.5213797068
5	3.5213453678	-1.451×10^{13}	3.5213797068
6	3.5213747615	-3.055×10^{39}	3.5213797068
7	3.5213789946	-2.852×10^{118}	3.5213797068
8	3.5213796042	∞	3.5213797068
9	3.5213796920	∞	3.5213797068

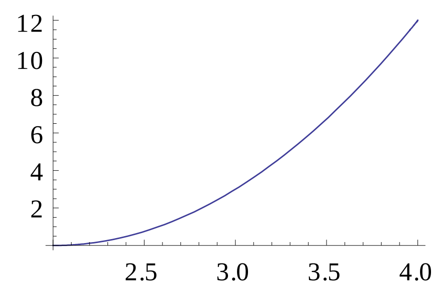
Czy jest jakaś różnica?

zbieżność **rozbieżność** **szybka zbieżność**

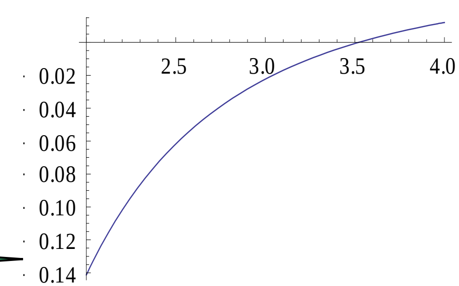
$$g_1'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

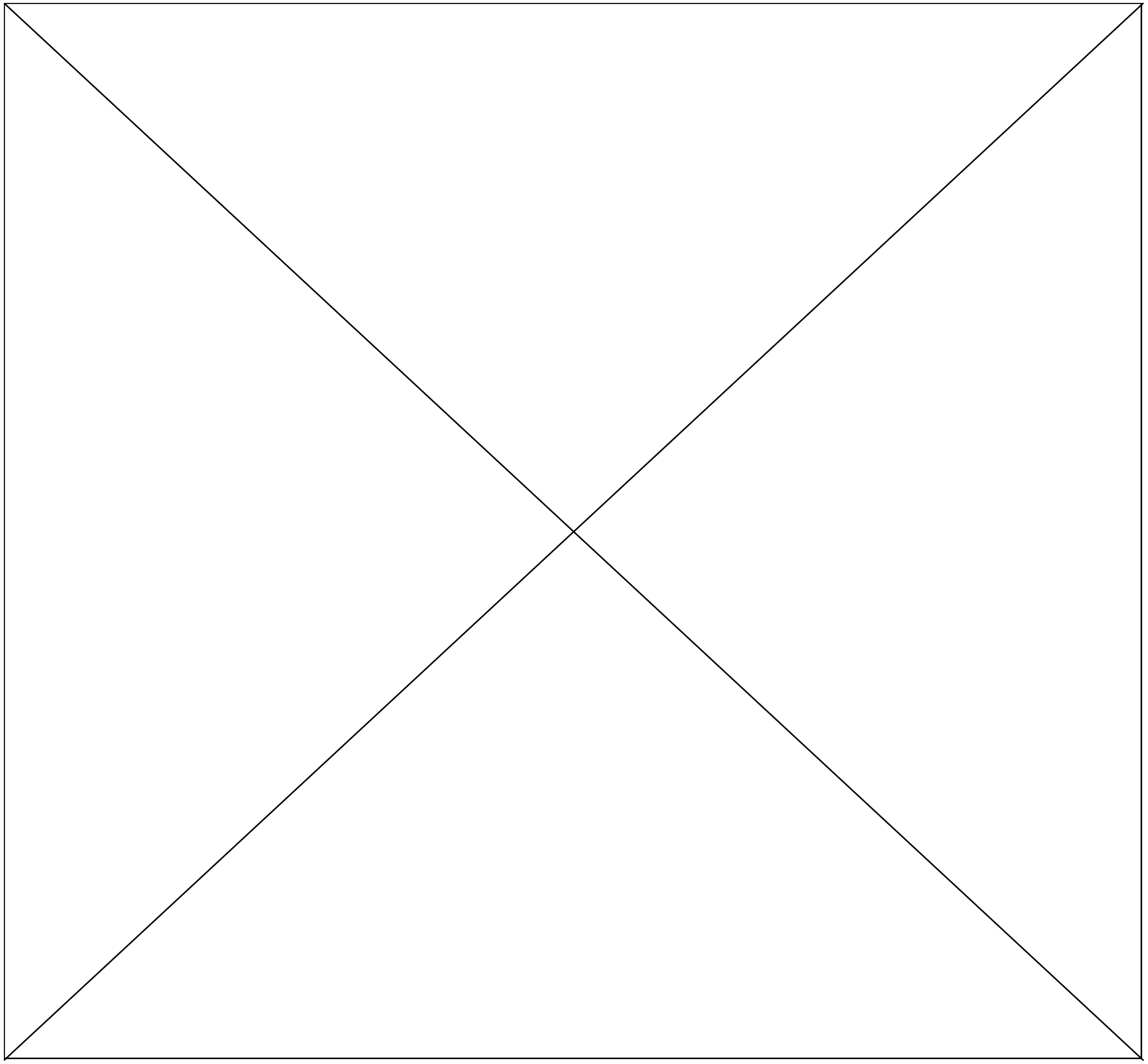


$$g_2'(x) = 3(x-2)^2$$



$$g_3'(x) = \frac{2(x - x^{1/3} - 2)}{x^{1/3}(1 - 3x^{2/3})^2}$$





Równania z wieloma pierwiastkami

```
krok = 1;          //<------ szerokość przedziału
a = 0;          //<--------- lewa granica pierwszego przedziału
b = a + krok;     //<------ prawa granica pierwszego przedziału
while(b < bmax)
   {
   if(f(a)*f(b) < 0)  //<-- sprawdź, czy funkcja zmienia znak
      {
      root[i] = FindRoots(f,a,b); //<-- np. bisekcja
      i = i + 1;
      }
   a = b;         //<------- lewa granica nowego przedziału
   b = a + krok;    //<---- prawa granica nowego przedziału
   };
```

Układy równań nieliniowych

Metoda Newtona

Dla układu dwóch równań:

$$f_1(x,y)=0$$
$$f_2(x,y)=0$$

Wybieramy rozwiązania początkowe x_1 i y_1. Jeśli są one blisko rozwiązań prawdziwych x_2 i y_2, to rozwinięcie Taylora funkcji f_1 i f_2 wokół x_1 i y_1:

$$\cancelto{0}{f_1(x_2,y_2)} = f_1(x_1,y_1)+(x_2-x_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}+(y_2-y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}+\ldots$$

$$\cancelto{0}{f_2(x_2,y_2)} = f_2(x_1,y_1)+(x_2-x_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}+(y_2-y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}+\ldots$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} \Delta x + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} \Delta y = -f_1(x_1,y_1) \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} \Delta x + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} \Delta y = -f_2(x_1,y_1) \end{cases}$$

Czyli układ dwóch równań liniowych. Korzystając z reguły Cramera:

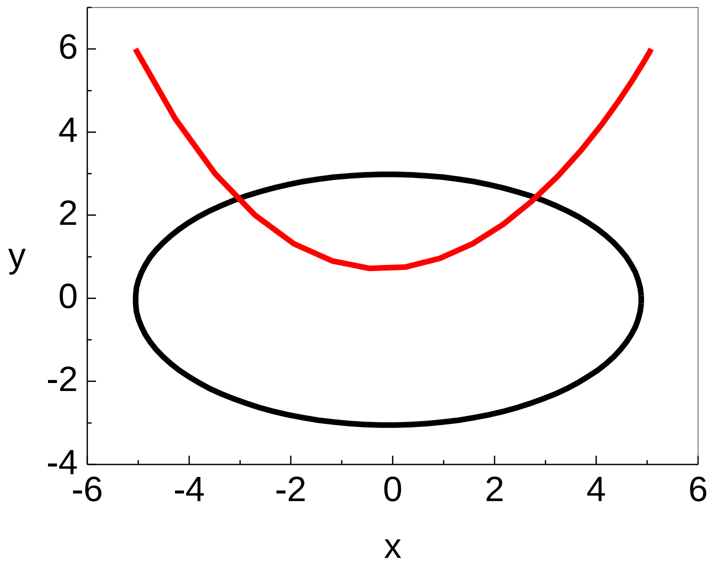
$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{-f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),\, f_2(x_1,y_1))} \\ \Delta y = \dfrac{-f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),\, f_2(x_1,y_1))} \end{cases}$$

gdzie J – jakobian: $$J(f_1, f_2) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Zatem nowe przybliżenie rozwiązań: $$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x \\ y_2 &= y_1 + \Delta y \end{aligned}$$

Układy równań nieliniowych: przykład

$$\begin{cases} f_1(x,y) = y - \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) = 0 \\ f_2(x,y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$



$$J(f_1, f_2) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right) & 1 \\ 18x & 50y \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)50y - 18x$$

```
F1(x,y) = function { y -0.5*(exp(x/2)+exp(-x/2)) }
F2(x,y) = function { 9*x^2+25*y^2-225 }
F1x(x,y) = function { -(exp(x/2)+exp(-x/2))/4 }
F1y(x,y) = function { 1 }
F2x(x,y) = function { 18*x }
F2y(x,y) = function { 50*y }

Jacob(x,y) = function { -(exp(x/2) + exp(-x/2))/4*50*y-18*x }
xi = 2.5; yi = 2; Err = 0.001;

for(i=1;i<=5;i++)
  {
  Delx = (-F1(xi,yi)*F2y(xi,yi)+F2(xi,yi)*F1y(xi,yi)) / Jacob(xi,yi);
  Dely = (-F2(xi,yi)*F1x(xi,yi)+F1(xi,yi)*F2x(xi,yi)) / Jacob(xi,yi);
  xip1 = xi + Delx;
  yip1 = yi + Dely;
  Errx = abs((xip1 - xi)/xi);
  Erry = abs((yip1 - yi)/yi);
  if(Errx<Err && Erry<Err) break;
  xi = xip1; yi = yip1;
  };
```

Warunki początkowe i dopuszczalny błąd

Δx i Δy

x_{k+1} i y_{k+1}

Błąd względny rozwiązania

i	x	y	Errx	Erry
1	3.0731	2.4296	0.22926	0.21479
2	3.0345	2.3849	0.01258	0.01840
3	3.0314	2.3858	0.00102	0.00037
4	3.0312	2.3859	0.00007	0.00004

Układy równań nieliniowych: uwagi

W ogólności:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \cdots \\ -f_n \end{bmatrix}$$

1. Zbieżność nie jest gwarantowana.
2. Funkcje $f_1, \ldots, f_n$ i ich pochodne muszą być ciągłe i ograniczone w pobliżu rozwiązania
3. $J(f_1, \ldots, f_n) <> 0$ w pobliżu rozwiązania
4. Warunki początkowe wystarczająco blisko prawdziwego rozwiązania
5. Dla układu $n>3$ równań powyższe równanie trzeba rozwiązać numerycznie.