Metody obliczeniowe w nauce i technice

Adam Naumiec
Marzec 2023

Laboratorium 4

Aproksymacja

Spis treści

1. Treść zadań

1. Zadanie 1. Aproksymować funkcję:

$$f(x) = 1 + x^3$$

w przedziale: $[0;1]$ wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla:

$$w(x) = 1.$$

2. Zadanie 2. Aproksymować funkcję:

$$f(x) = 1 + x^3$$

w przedziale: $[0;1]$ wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

3. Zadanie domowe 1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia.

4. Zadanie domowe 2. Oblicz wartość funkcji:

$$f(x) = 1 - x^2$$

w dyskretnych postaciach x_i:

$$x_i = -1 + 0{,}5 \cdot i, i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego.

2. Rozwiązania

2.1. Zadanie 1

2.1.1. Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia pierwszego metodą średniokwadratową

Aproksymujemy funkcję wielomianem pierwszego stopnia, więc mamy układ funkcji bazowych:

$$\varphi_0(x) = x^0 = 1,$$
$$\varphi_1(x) = x^1 = x;$$

zatem wielomian aproksymacyjny ma postać:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x) = c_0 + c_1 x.$$

Możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\varphi_o(x)\varphi_o(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\varphi_o(x)f(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)f(x)dx \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$w(x) = 1; f(x) = 1 + x^3.$$

Obliczamy:

- $\int_0^1 w(x)\varphi_o(x)\varphi_o(x)dx = \int_0^1 (1 \cdot 1 \cdot 1)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1,$
- $\int_0^1 w(x)\varphi_o(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 (1 \cdot 1 \cdot x)dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$
- $\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_o(x)dx = \int_0^1 (1 \cdot x \cdot 1)dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$
- $\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 (1 \cdot x \cdot x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3};$

oraz:

- $\int_0^1 w(x)\varphi_o(x)f(x)dx = \int_0^1 (1 \cdot 1 \cdot (1 + x^3))dx = \int_0^1 (1 + x^3)dx = \left[x + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{4},$
- $\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 \left(1 \cdot x \cdot (1 + x^3)\right)dx = \int_0^1 (x + x^4)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{7}{10}.$

Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań:

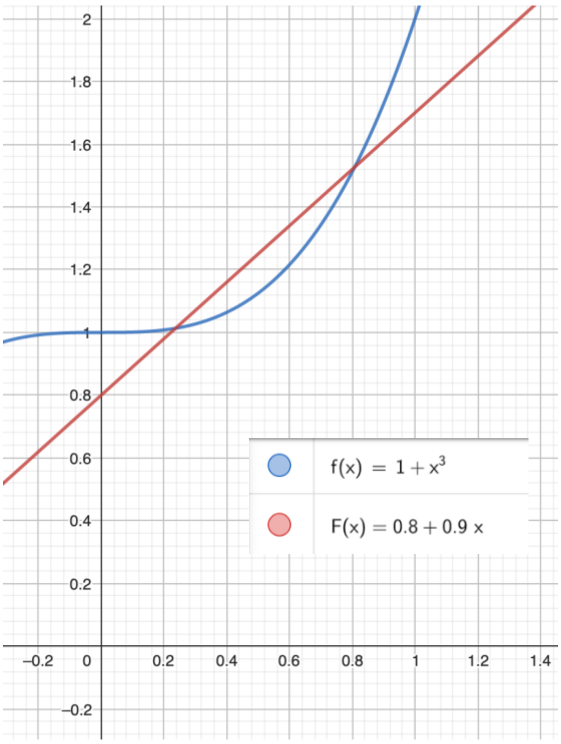
- $1c_0 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{5}{4}$,
- $\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{7}{10}$;

i otrzymujemy:

$$c_0 = \frac{8}{10},$$
$$c_1 = \frac{9}{10}.$$

Wielomian aproksymacyjny wyraża się równaniem:

$$F(x) = 0{,}9 + 0{,}8x.$$



Wykres 1. Funkcja $f(x)$ aproksymowana funkcją $F(x)$ przy użyciu metody średniokwadratowej

2.1.2. Wnioski

Wnioskując z przeprowadzonych badań, metoda średniokwadratowa jest skutecznym narzędziem do aproksymacji funkcji w sposób numeryczny. Metoda ta pozwala na znalezienie najlepszej krzywej dopasowanej do danych pomiarowych, minimalizując sumę kwadratów błędów między wartościami rzeczywistymi a wartościami obliczonymi.

Dzięki zastosowaniu tej metody możliwe jest wyznaczenie równania funkcji aproksymującej, które jest wykorzystywane w wielu dziedzinach nauki i techniki, między innymi w analizie danych, fizyce, matematyce czy inżynierii. Metoda średniokwadratowa pozwala na dokładne określenie wartości parametrów funkcji, co jest szczególnie istotne w przypadku analizy złożonych zjawisk.

2.2. Zadanie 2

2.2.1. Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a

Wielomiany Legendre'a określone są wzorem (Rodrigeusa):

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, (n = 0,1,\dots),$$

można je zapisać w jawnej postaci:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^n\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n}x^{n-2i},$$

zależność rekurencyjna wzoru:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n+1}(x), (n = 1,2,\dots).$$

Dla $n = 0,1,2$ mamy:

$$P_0 = 1,$$
$$P_1 = x,$$
$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}.$$

Wielomiany te są ortogonalne z wagą $p(x) = 1$ na przedziale $[-1,1]$, zatem:

$$\forall(i \neq j; i,j \in 0,1,2): \int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0.$$

Ponieważ rozważamy przedział $[0,1]$, a nie $[-1,1]$ to musimy zastosować podstawienie transformujące przedział:

$$t = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t+1).$$

Funkcja aproksymowana przyjmie postać:

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+1)^3 + 1, t \in [-1,1],$$

a funkcja aproksymacyjna przyjmie postać:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{2} c_i P_i(t), t \in [-1,1].$$

Możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} P_0(t)P_0(t)dt & \int_{-1}^{1} P_0(t)P_1(t)dt & \int_{-1}^{1} P_0(t)P_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} P_1(t)P_0(t)dt & \int_{-1}^{1} P_1(t)P_1(t)dt & \int_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} P_2(t)P_0(t)dt & \int_{-1}^{1} P_2(t)P_1(t)dt & \int_{-1}^{1} P_2(t)P_2(t)dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_2(t)dt \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując wcześniejszy wniosek z ortogonalności możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} P_0(t)P_0(t)dt & 0 & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1} P_1(t)P_1(t)dt & 0 \\ 0 & 0 & \int_{-1}^{1} P_2(t)P_2(t)dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_2(t)dt \end{bmatrix},$$

oraz uprościć do:

$$\begin{bmatrix} c_0 \cdot \int_{-1}^{1} P_0(t)P_0(t)dt \\ c_1 \cdot \int_{-1}^{1} P_1(t)P_1(t)dt \\ c_2 \cdot \int_{-1}^{1} P_2(t)P_2(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)P_2(t)dt \end{bmatrix}.$$

Możemy z tej postaci zapisać wzór na c_i:

$$c_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)P_i(t)dt}{\int_{-1}^{1} {P_i}^2(t)dt}.$$

Obliczamy składowe:

- $\int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (\frac{1}{2}(t+1)^3 + 1)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}(t+1)^3 + 1)dt = 2{,}5;$
- $\int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t \cdot (\frac{1}{2}(t+1)^3 + 1)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{t}{2}(t+1)^3 + t)dt = 0{,}3;$
- $\int_{-1}^{1} f(t)P_2(t)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{3t^2-1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}(t+1)^3 + 1)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{3t^2-1}{2}(t+1)^3 + \frac{3t^2-1}{2})dt = 0{,}1;$
- $\int_{-1}^{1} {P_0}^2(t)dt = \int_{-1}^{1} 1^2 dt = \int_{-1}^{1} 1dt = 2;$
- $\int_{-1}^{1} {P_1}^2(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3};$
- $\int_{-1}^{1} {P_2}^2(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3t^2-1}{2}\right)^2 dt = 0{,}4.$

Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$c_0 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt}{\int_{-1}^{1} {P_0}^2(t)dt} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25;$$

$$c_1 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt}{\int_{-1}^{1} {P_1}^2(t)dt} = \frac{0{,}3}{\frac{2}{3}} = 0{,}45;$$

$$c_2 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)P_2(t)dt}{\int_{-1}^{1} {P_2}^2(t)dt} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25.$$

Funkcja aproksymująca ma postać:

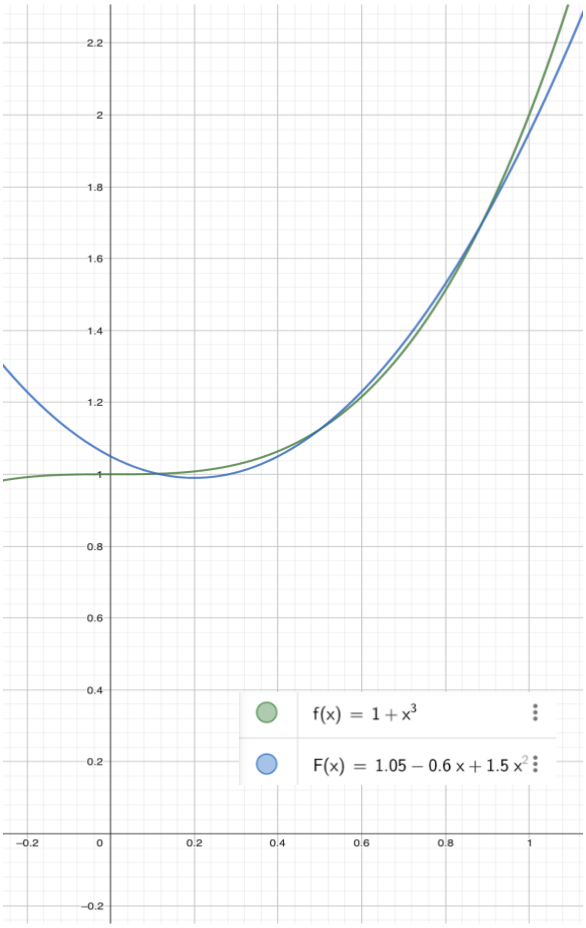
$$F(t) = 1{,}25 + 0{,}45t + 0{,}25\frac{3t^2 - 1}{2},$$

wracając ze zmiennej t na zmienną x otrzymujemy funkcję aproksymująca postaci:

$$F(x) = 1{,}25 + 0{,}45(2x-1) + 0{,}25\frac{3(2x-1)^2 - 1}{2},$$

zatem ostatecznie funkcja aproksymacyjna wyraża się wzorem:

$$F(x) = 1{,}05 - 0{,}6x + 1{,}5x^2.$$



Wykres 2. Funkcja $f(x)$ aproksymowana funkcją $F(x)$ za pomocą wielomianu stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a

2.2.2. Wnioski

Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a jest metodą skuteczną i dokładna w przypadku funkcji o regularnym rozkładzie punktów pomiarowych na przedziale $[-1,1]$. Wielomiany Legendre'a są ortogonalne i dają się wyrazić za pomocą wzorów rekurencyjnych, co znacznie ułatwia obliczenia. Dzięki temu metoda ta pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie współczynników wielomianu aproksymującego.

Warto jednak zauważyć, że stosowanie wielomianów Legendre'a do aproksymacji funkcji o nieregularnym rozkładzie punktów pomiarowych może prowadzić do błędów i niedokładności. Ponadto, ze względu na fakt, że wielomiany Legendre'a są zdefiniowane tylko na przedziale [-1,1], konieczne może być przeprowadzenie odpowiedniej transformacji argumentów funkcji w celu ich dopasowania do tego przedziału.

Mimo tych ograniczeń, metoda aproksymacji funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a jest często stosowana w naukach przyrodniczych, technicznych oraz ekonomicznych. Dzięki swojej skuteczności i dokładności pozwala na uzyskanie wartościowych wyników numerycznych, które mogą mieć zastosowanie w praktyce.

2.3. Zadanie 3 – zadanie domowe 1

2.3.1. Aproksymacja punktowa za pomocą wielomianów drugiego stopnia

Aproksymacja punktowa to metoda numeryczna służąca do przybliżania funkcji za pomocą wielomianów, w której punkty, w których funkcja ma być przybliżana, nazywane są węzłami interpolacji. W przeciwieństwie do innych metod interpolacji, takich jak interpolacja Lagrange'a lub interpolacja Hermite'a, aproksymacja punktowa nie wymaga wyznaczania dokładnej formuły analitycznej dla funkcji interpolowanej.

W metodzie aproksymacji punktowej szuka się wielomianu o niewielkiej liczbie stopni, który najlepiej odwzoruje funkcję na przedziale, na którym ma być stosowany. Stopień wielomianu zwykle jest ustalany z góry i zależy od ilości dostępnych punktów interpolacji.

Aby znaleźć wielomian aproksymacyjny, należy wykorzystać metody numeryczne, takie jak metoda najmniejszych kwadratów lub metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta. Metoda aproksymacji punktowej jest powszechnie stosowana w wielu dziedzinach, takich jak inżynieria, fizyka, ekonomia czy finanse, gdzie wymagane jest szybkie i dokładne przybliżanie funkcji.

2.3.2. Kod funkcji

Kod programu został napisany w języku Python w wersji 3.11 z wykorzystaniem biblioteki NumPy w wersji 1.24.

```python
import numpy as np
from time import time

def pointwise_approximation(x, y):
    n = len(x)
    A = np.zeros((n, 3))
    b = y.copy()

    A[:, 0] = x ** 2
    A[:, 1] = x
    A[:, 2] = np.ones(n)

    coeffs = np.linalg.solve(A, b)

    return coeffs

if __name__ == "__main__":
    x = np.array([234, 432, 567])
    y = np.array([18364395, 62386329, 107371299])

    start = time()
    f = pointwise_approximation(x, y)
    end = time()

    a, b, c = f
    a, b, c = round(a, 5), round(b, 5), round(c, 5)
    print(f"Wielomian ma postać: {a} x^2 + {b} x + {c}")
    print(f"Time: {end - start}")
```

2.3.3. Prezentacja działania programu na przykładowych danych

Program przetestowano dla kilku zestawów danych:

- (1, 1), (3, 9), (5, 25)
  Wynik: Wielomian ma postać: 1.0 x^2 + 0.0 x + 0.0
  Wartość dokładna: $1x^2 + 0x + 0$

- (4, 181), (11, 1007), (23, 4019)
  Wynik: 7.0 x^2 + 13.0 x + 17.0
  Wartość dokładna: $7x^2 + 13x + 17$

- (6, 1833), (36, 56943), (77, 257433)
  Wynik: Wielomian ma postać: 43.0 x^2 + 31.0 x + 99.0
  Wartość dokładna: $43x^2 + 31x + 99$

- (77, 443578), (100, 734137), (500, 17462137)
  Wynik: Wielomian ma postać: 69.0 x^2 + 420.0 x + 2137.0
  Wartość dokładna: $69x^2 + 420x + 2137$

- (234, 18364395), (432, 62386329), (567, 107371299)
  Wynik: Wielomian ma postać: 333.0 x^2 + 555.0 x + 777.0
  Wartość dokładna: $333x^2 + 555x + 777$

2.3.4. Wnioski

Program przetestowano dla różnych danych i otrzymano prawidłowe wyniki, można zatem twierdzić, że program działa poprawnie. Procedura ta pozwala na dokonanie aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia z bardzo dobrymi wynikami. Dzięki zastosowaniu biblioteki NumPy obliczenia były wykonywane bardzo szybko, wszystkie wyniki obliczane były momentalnie.

2.4.1. Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach

Wartości funkcji $f(x) = 1 - x^2$ w punktach $x_i = -1 + 0{,}5 \cdot i, i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$:

- $x_0 = -1; f(x_0) = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0;$
- $x_1 = -0{,}5; f(x_1) = 1 - (-0{,}5)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75;$
- $x_2 = 0; f(x_2) = 1 - (0)^2 = 1 - 0 = 1;$
- $x_3 = 0{,}5; f(x_3) = 1 - (0{,}5)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75;$
- $x_4 = 1; f(x_4) = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0.$

2.4.2. Aproksymacja funkcji wielomianami Grama stopnia trzeciego

Wielomiany Grama mają postać:

$$F_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[s]}},$$

gdzie:

$$r^{[s]} = r(r-1) \cdots (r-s+1).$$

Wielomiany Grama stopnia trzeciego mają postać:

$$F_0(q) = 1,$$
$$F_1(q) = 1 - 2\frac{q}{n},$$
$$F_2(q) = 1 - 6\frac{q}{n} + 6\frac{q(q-1)}{n(n-1)},$$
$$F_3(q) = 1 - 12\frac{q}{n} + 30\frac{q(q-1)}{n(n-1)} - 20\frac{q(q-1)(q-2)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Wielomiany te są ortogonalne w punktach 0,1,2,3 ..., aby zmienić ortogonalność na dane równoległe punkty należy zastosować podstawienie:

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

gdzie punkty są równoodległe $x_i = x_0 + ih, i = 0{,}1, \dots, n$.

Funkcja aproksymująca zbudowana na wielomianach Grama ma postać:

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} F_k^{(n)}(q),$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i F_k^{(n)}(x_i),$$

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} \left[F_k^{(n)}(q)\right]^2.$$

W zadanym przypadku, gdzie: $n = 4$, otrzymujemy wielomiany:

$$F_0(x) = 1,$$
$$F_1(x) = -x,$$
$$F_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$F_3(x) = -\frac{20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x.$$

Ze wzorów obliczamy:

$$c_0 = 2{,}5; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = -1{,}75; \quad c_3 = 0;$$

$$s_0 = 5; \quad s_1 = 2{,}5; \quad s = 3{,}5; \quad s_3 = 10.$$

Ponieważ macierz jest diagonalna to możemy wyprowadzić wzór na poszczególne współczynniki:

$$b_k = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i F_k^{(n)}(x_i)}{\sum_{q=0}^{n}\left[F_k^{(n)}(q)\right]^2},$$

obliczamy:

$$b_0 = 0{,}5;\ b_1 = 0;\ b_2 = -0{,}5;\ b_3 = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy końcowe rozwiązanie:

$$F(x) = [0{,}5 \cdot 1] + [0 \cdot (-x)] + [-0{,}5 \cdot (2x^2 - 1)] + [0 \cdot \left(-\frac{20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x\right)] = 1 - x^2.$$

2.4.3. Wnioski

Zastosowanie wielomianów ortogonalnych do aproksymacji znacznie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą. Nie trzeba wtedy rozwiązywać układu równań, ponieważ macierz współczynników jest macierzą diagonalną.

3. Bibliografia

1. Wykłady dr inż. Katarzyny Rycerz z przedmiotu *Metody obliczeniowe w nauce i technice* na czwartym semestrze kierunku Informatyka w AGH w Krakowie
2. Wykresy kreślono za pomocą internetowego programu GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator
3. Obliczenia wykonywano za pomocą internetowego programu WolframAlpha: https://www.wolframalpha.com/ oraz programu Microsoft Excel: https://www.microsoft.com/pl-pl/microsoft-365/excel
4. Programy napisane zostały w języku Python w wersji 3.11: https://www.python.org/
5. Wykorzystano bibliotekę NumPy dla języka Python w wersji 1.24: https://numpy.org/doc/stable/index.html
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon
7. https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754
8. https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/ieee-754-2008.pdf
9. https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_wielomianowa
10. https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf
11. https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_3.pdf
12. https://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja.pdf
13. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
14. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_ortogonalne