Metody obliczeniowe w nauce i technice

Adam Naumiec

Marzec 2023

Laboratorium 3

*Interpolacja*

Spis treści

[1. Treść zadań 3](#_Toc130556634)

[2. Rozwiązania 4](#_Toc130556635)

[2.1. Zadanie 1 4](#_Toc130556636)

[2.1.1. (a) Jednomiany 4](#_Toc130556637)

[2.1.2. (b) Wielomiany Lagrange’a 5](#_Toc130556638)

[2.1.3. (c) Wielomiany Newtona 6](#_Toc130556639)

[2.1.4. Wnioski 6](#_Toc130556640)

[2.2. Zadanie 2 7](#_Toc130556641)

[2.2.1. Wyrażenie wielomianu metodą Hornera 7](#_Toc130556642)

[2.2.2. Wnioski 7](#_Toc130556643)

[2.3. Zadanie 3 8](#_Toc130556644)

[2.3.1. (a) Jednomiany 8](#_Toc130556645)

[2.3.2. (b) Wielomiany Lagrange’a 8](#_Toc130556646)

[2.3.3. (c) Wielomiany Newtona 8](#_Toc130556647)

[2.3.4. Wnioski 9](#_Toc130556648)

[2.4. Zadanie 4 (Zadnie domowe 1) 9](#_Toc130556649)

[2.4.1. Obliczenie wielomianu interpolacyjnego za pomocą jednomianów 9](#_Toc130556650)

[2.4.2. Obliczenie wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a orax pokazanie, że jest taki sam jak w (a) 9](#_Toc130556651)

[2.4.3. Obliczenie wielomianu interpolacyjnego Newtona korzystając z metody trójkąta różnic i metody różnic skończonych oraz pokazanie, że każda z metod (a), (b) i (c) daje ten sam wynik 9](#_Toc130556652)

[2.4.4. Wnioski 9](#_Toc130556653)

[2.5. Zadanie 5 (Zadanie domowe 2) 10](#_Toc130556654)

[2.5.1. Dowiedzenie, że wzór używający różnic skończonych daje wyniki funkcji bazowych w interpolującym wielomianie Newtona 10](#_Toc130556655)

[2.5.2. Wnioski 11](#_Toc130556656)

[2.6. Zadanie 6 (Zadanie domowe 3) 12](#_Toc130556657)

[2.6.1. Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 2. stopnia 12](#_Toc130556658)

[2.6.2. Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 5. stopnia 12](#_Toc130556659)

[2.6.3. Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 10. stopnia 12](#_Toc130556660)

[2.6.4. Wykres i interpretacja wykresu 12](#_Toc130556661)

[2.6.5. Wnioski 12](#_Toc130556662)

[3. Bibliografia 12](#_Toc130556663)

# Treść zadań

1. Dane są trzy węzły interpolacji: *(-2,9; 1), (0; 1,5), (2,3; 3,9).*

proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2. stopnia, wykorzystując:

* 1. jednomiany,
  2. wielomiany Lagrange’a,
  3. wielomiany wg wzory Newtona.

Pokazać, że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian.

1. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera:
2. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu stopnia w danym punkcie jeżeli wybieramy jako reprezentację:
   1. jednomiany,
   2. wielomiany Lagrange’a,
   3. wielomiany Newtona.
3. Zadanie domowe 1
   1. (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych:

przy pomocy jednomianów.

* 1. (b) Obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange’a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a).
  2. (c) Obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik.

1. Zadanie domowe 2

Dowieść, że wzór używający różnic skończonych:

rzeczywiście daje współczynnik funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona.

1. Zadanie domowe 3

Wykonać interpolację funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 2., 5. i 10. stopnia, dla równoległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować.

# Rozwiązania

## Zadanie 1

### (a) Jednomiany

Niech wielomian interpolacyjny drugiego stopnia przy użyciu jednomianów będzie postaci:

gdzie: to współczynniki, które należy wyznaczyć.

Korzystając z trzech warunków interpolacji:

otrzymujemy układ równań:

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

zatem wielomian interpolacyjny ma postać:

### (b) Wielomiany Lagrange’a

Niech wielomian interpolacyjny drugiego stopnia przy użyciu wielomianów Lagrange’a będzie postaci:

gdzie: są wielomianami Lagrange’a wyznaczonymi przez punkty interpolacji, tj.:

a: są punktami i wartościami w tych punktach funkcji interpolowanej, tj.:

Obliczamy podstawiając wartości do wzoru:

Ostatecznie wielomian interpolacyjny Lagrange’a ma postać:

### (c) Wielomiany Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona wyraża się wzorem:

Podstawiając wartości węzłów interpolacyjnych otrzymujemy:

i uwzględniając:

otrzymujemy układ równań:

który rozwiązujemy:

Ostatecznie otrzymujemy wielomian interpolacyjny drugiego stopnia otrzymany metodą Newtona postaci:

### Wnioski

Każda z metod interpolacji ma swoje wady i zalety. Należy odpowiednio dobrać metodę obliczeń by uzyskać satysfakcjonujące wyniki, akceptowalną złożoność obliczeniową i minimalizację błędów obliczeniowych.

## Zadanie 2

### Wyrażenie wielomianu metodą Hornera

Wielomian:

można za pomocą schematu (metody) Hornera przedstawić w postaci:

### Wnioski

Tak przedstawiony wielomian jest łatwiejszy do obliczenia. Zamiast za każdym razem osobno obliczać wartość każdego wyrazu (przez co za każdy razem od nowa liczymy wartość potęgi zmiennej), mnożymy kolejno poszczególne wyrażenia dodając lub odejmując współczynniki przy kolejnych potęgach. Taka postać jest nie tylko wygodna do wykonywania obliczeń ręcznie, ale także jest efektywna przy dokonywaniu obliczeń w komputerze.

## Zadanie 3

### (a) Jednomiany

Trzeba wykonać mnożeń do ewaluacji wielomianu stopnia   
w punkcie , gdyż wielomian interpolacyjny z jednomianami ma postać:

Wielomian można obliczać za pomocą schematu Hornera co da mnożeń.

### (b) Wielomiany Lagrange’a

Obliczenie wartości wyrazu wymaga mnożeń. Przy dokonywaniu obliczeń występują także operacje dzielenia, które jest działaniem odwrotnym do mnożenia:

Należy obliczyć  wyrazów :

zatem łącznie należy dokonać: mnożeń.

### (c) Wielomiany Newtona

Wyliczenie wyrazu wymaga mnożeń. Każdy z wyrazów należy pomnożyć jeszcze przez co daje nam kolejne mnożeń:

Łącznie daje to liczbę mnożeń:

### Wnioski

Przy ewaluacji wielomianów w komputerze należy pamiętać o reprezentacji wielomianu i jej wpływu na liczbę potrzebnych do wykonania mnożeń. Większa liczba mnożeń może wpłynąć na złożoność obliczeniową zadania oraz może niekorzystnie wpłynąć na dokładność poprzez uwydatnienie błędów związanych z obliczeniami w komputerze.

## Zadanie 4 (Zadnie domowe 1)

### Obliczenie wielomianu interpolacyjnego za pomocą jednomianów

### Obliczenie wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a orax pokazanie, że jest taki sam jak w (a)

### Obliczenie wielomianu interpolacyjnego Newtona korzystając z metody trójkąta różnic i metody różnic skończonych oraz pokazanie, że każda z metod (a), (b) i (c) daje ten sam wynik

### Wnioski

Wszystkie 3 przedstawione metody dały na koniec ten sam wynik.

1. Zadanie domowe 1
   1. (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych:

przy pomocy jednomianów.

* 1. (b) Obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange’a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a).
  2. (c) Obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik.

## Zadanie 5 (Zadanie domowe 2)

### Dowiedzenie, że wzór używający różnic skończonych daje wyniki funkcji bazowych w interpolującym wielomianie Newtona

Teza:

Wzór używający różnic skończonych:

daje współczynnik funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona.

Dowód:

Interpolacyjny wielomian Newtona ma postać:

gdzie:

Różnica dzielona funkcji oparta na różnych węzłach jest zdefiniowana indukcyjnie:

Ponadto, jeśli jest wielomianem interpolującym dla węzłów to zachodzi tożsamościowa równość:

Należy udowodnić, że prawa strona równania, oznaczona jako przyjmuje w węzłach interpolacji wartości ,

dla

dla :

Dla :

Zatem zależność rekurencyjna jest prawdziwa.

Indukcyjnie ze względu na stopień wielomianu: załóżmy, że jest prawdziwe, wtedy, jeżeli stopień wielomianu: to: oraz:

zatem: jest współczynnikiem przy .

Udowodniliśmy zatem, że:

a z założenia indukcyjnego wiadomo, że współczynnik przy: w wielomianach: i są oparte o ilorazy różnicowe: i , zatem:

### Wnioski

Dowiedliśmy, że wzór używający różnic skończonych daje wyniki funkcji bazowych w interpolującym wielomianie Newtona.

## Zadanie 6 (Zadanie domowe 3)

### Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 2. stopnia

Dla wielomianu drugiego stopnia potrzeba 3 węzłów interpolacji.

Węzły interpolacji:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -4 | 0 | 4 |
|  | 0,7568 | 0,0000 | 0,7568 |

Tabela 1. Wartości funkcji w 3 węzłach

Teraz możemy skorzystać ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a dla wielomianu 2. stopnia:

L(x)=f(x0)((x-x1)/(x0-x1))((x-x2)/(x0-x2))+f(x1)((x-x0)/(x1-x0))((x-x2)/(x1-x2))+f(x2)((x-x0)/(x2-x0))((x-x1)/(x2-x1))

Podstawiając wartości węzłów i funkcji otrzymujemy:

L(x)=0.757\*((x-0)/(4-0))((x-4)/(-4))+0((x+4)/(-4))((x-4)/(0-4))+0.757((x+4)/(0+4))\*((x-0)/(4-0))

Po uproszczeniu otrzymujemy:

Wielomian ten interpoluje funkcję |sin x| w przedziale [-4,4] z dokładnością do 2 stopnia.

### Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 5. stopnia

Dla wielomianu piątego stopnia potrzeba 6 węzłów interpolacji.

Węzły interpolacji:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -4 | -2,4 | -0,8 | 0,8 | 2,4 | 4 |
|  | 0,7568 | 0,6755 | 0,7173 | 0,7173 | 0,6755 | 0,7568 |

Tabela 2. Wartości funkcji w 6 węzłach

Wielomian interpolacyjny ma postać:

gdzie to wielomiany Lagrange'a dla kolejnych punktów interpolacyjnych, zdefiniowane następująco:

Przekształcamy:

gdzie:

Ostatecznie wielomian ma postać:

### Interpolacja funkcji w przedziale przy użyciu wielomianów Lagrange’a 10. stopnia

Dla wielomianu dziesiątego stopnia potrzeba 11 węzłów interpolacji.

Węzły interpolacji:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -4 | -3,2 | -2,4 | -1,6 | -0,8 | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4 |
|  | 0,7568 | 0,0584 | 0,6755 | 0,9996 | 0,7173 | 0 | 0,7173 | 0,9996 | 0,6755 | 0,0584 | 0,7568 |

Tabela 3. Wartości funkcji w 11 węzłach

Po wstawieniu wartości do wzoru otrzymujemy równanie:

### Wykres i interpretacja wykresu

### Wnioski

# Bibliografia

1. Wykłady dr inż. Katarzyny Rycerz z przedmiotu *Metody obliczeniowe w nauce i technice* na czwartym semestrze kierunku Informatyka w AGH w Krakowie
2. Wykresy kreślono za pomocą internetowego programu GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator
3. Obliczenia wykonywano za pomocą internetowego programu WolframAlpha: https://www.wolframalpha.com/ oraz programu Microsoft Excel: https://www.microsoft.com/pl-pl/microsoft-365/excel
4. Programy napisane zostały w języku Python w wersji 3.11: https://www.python.org/
5. Wykorzystano bibliotekę NumPy dla języka Python w wersji 1.24: https://numpy.org/doc/stable/index.html