Metody obliczeniowe w nauce i technice

Adam Naumiec

Marzec 2023

Laboratorium 4

*Aproksymacja*

Spis treści

[1. Treść zadań 2](#_Toc131171224)

[2. Rozwiązania 3](#_Toc131171225)

[2.1. Zadanie 1 3](#_Toc131171226)

[2.1.1. Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia pierwszego metodą średniokwadratową 3](#_Toc131171227)

[2.1.2. Wnioski 5](#_Toc131171228)

[2.2. Zadanie 2 5](#_Toc131171229)

[2.2.1. Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a 5](#_Toc131171230)

[2.2.2. Wnioski 8](#_Toc131171231)

[2.3. Zadanie 3 – zadanie domowe 1 9](#_Toc131171232)

[2.3.1. Aproksymacja punktowa za pomocą wielomianów drugiego stopnia 9](#_Toc131171233)

[2.3.2. Kod funkcji 9](#_Toc131171234)

[2.3.3. Prezentacja działania programu na przykładowych danych 10](#_Toc131171235)

[2.3.4. Wnioski 10](#_Toc131171236)

[2.4. Zadanie 4 – zadanie domowe 2 11](#_Toc131171237)

[2.4.1. Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach 11](#_Toc131171238)

[2.4.2. Aproksymacja funkcji wielomianami Grama stopnia trzeciego 11](#_Toc131171239)

[2.4.3. Wnioski 12](#_Toc131171240)

[3. Bibliografia 13](#_Toc131171241)

# Treść zadań

1. Zadanie 1. Aproksymować funkcję:

w przedziale: wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla:

1. Zadanie 2. Aproksymować funkcję:

w przedziale: wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a.

1. Zadanie domowe 1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia.
2. Zadanie domowe 2. Oblicz wartość funkcji:

w dyskretnych postaciach :

a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego.

# Rozwiązania

## Zadanie 1

### Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia pierwszego metodą średniokwadratową

Aproksymujemy funkcję wielomianem pierwszego stopnia, więc mamy układ funkcji bazowych:

zatem wielomian aproksymacyjny ma postać:

Możemy zapisać:

gdzie:

Obliczamy:

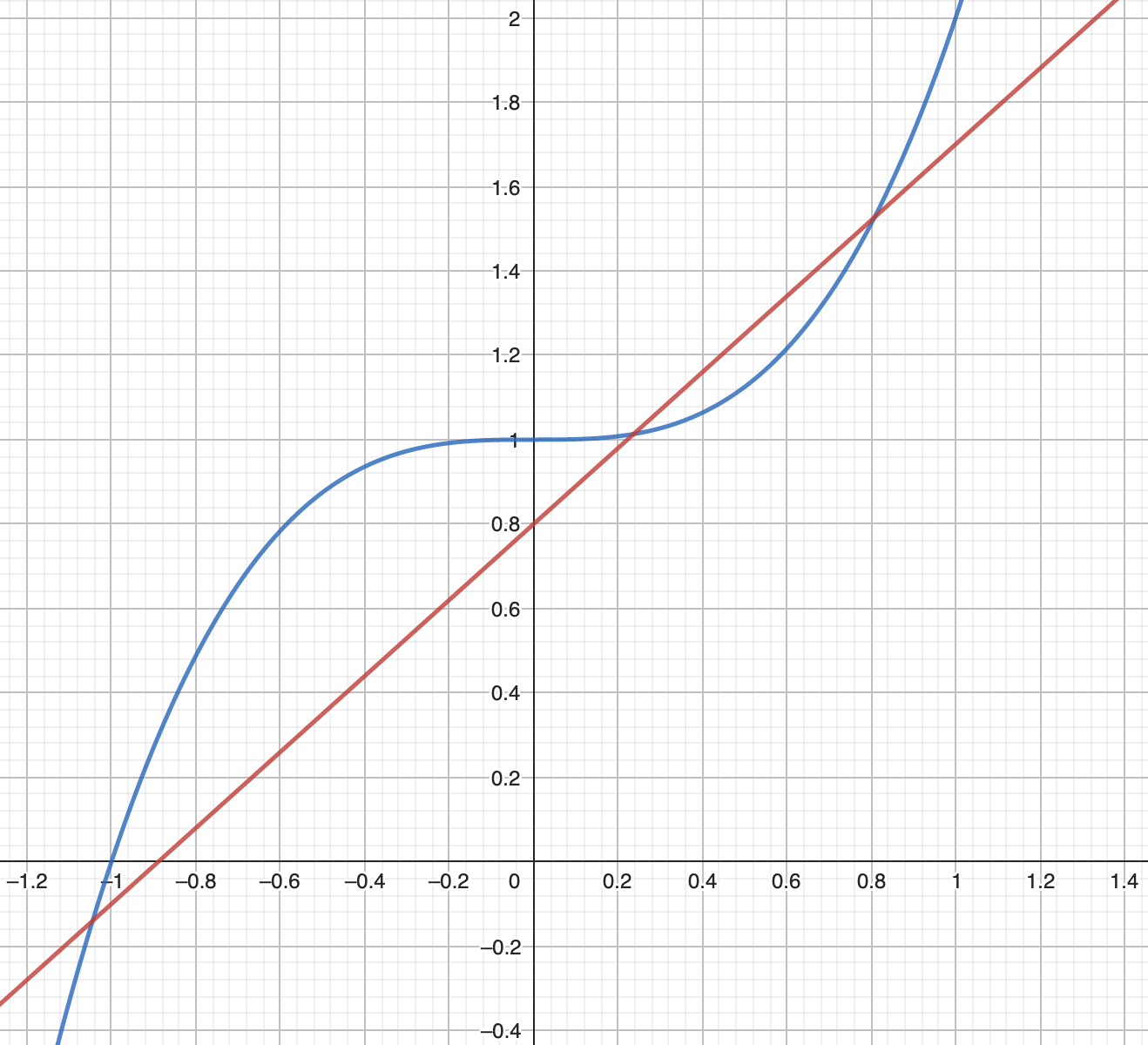
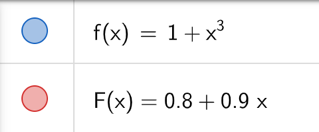
oraz:

Otrzymujemy:

Rozwiązujemy układ równań:

i otrzymujemy:

Wielomian aproksymacyjny wyraża się równaniem:



Wykres 1. Funkcja aproksymowana funkcją przy użyciu metody średniokwadratowej

### Wnioski

Wnioskując z przeprowadzonych badań, metoda średniokwadratowa jest skutecznym narzędziem do aproksymacji funkcji w sposób numeryczny. Metoda ta pozwala na znalezienie najlepszej krzywej dopasowanej do danych pomiarowych, minimalizując sumę kwadratów błędów między wartościami rzeczywistymi a wartościami obliczonymi.

Dzięki zastosowaniu tej metody możliwe jest wyznaczenie równania funkcji aproksymującej, które jest wykorzystywane w wielu dziedzinach nauki i techniki, między innymi w analizie danych, fizyce, matematyce czy inżynierii. Metoda średniokwadratowa pozwala na dokładne określenie wartości parametrów funkcji, co jest szczególnie istotne w przypadku analizy złożonych zjawisk.

## Zadanie 2

### Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a

Wielomiany Legendre’a określone są wzorem (Rodrigeusa):

można je zapisać w jawnej postaci:

zależność rekurencyjna wzoru:

Dla mamy:

Wielomiany te są ortogonalne z wagą na przedziale , zatem:

Ponieważ rozważamy przedział , a nie to musimy zastosować podstawienie transformujące przedział:

Funkcja aproksymowana przyjmie postać:

a funkcja aproksymacyjna przyjmie postać:

Możemy zapisać:

Wykorzystując wcześniejszy wniosek z ortogonalności możemy zapisać:

oraz uprościć do:

Możemy z tej postaci zapisać wzór na :

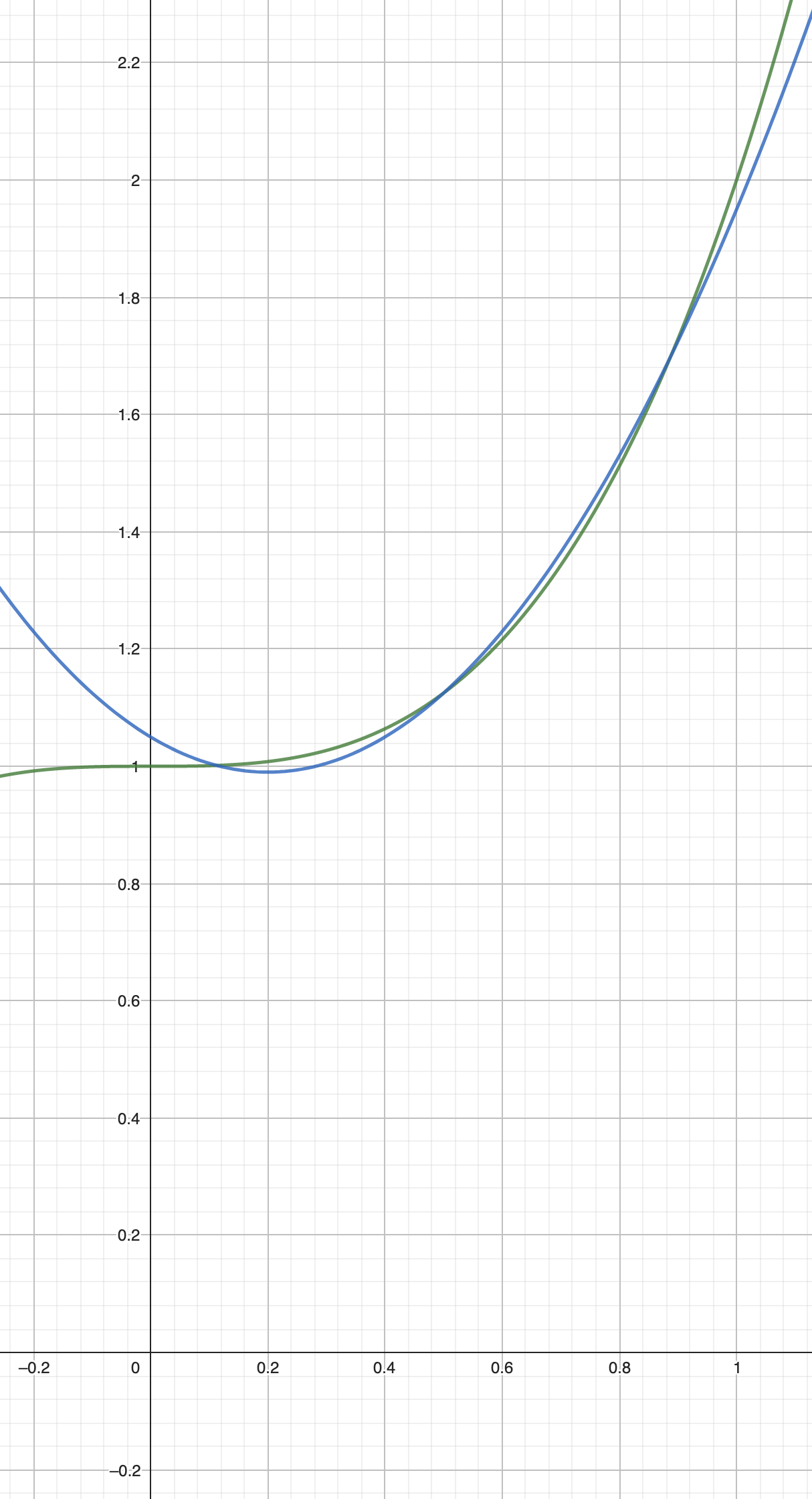
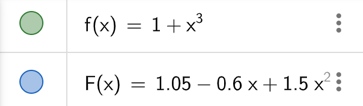
Obliczamy składowe:

Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

Funkcja aproksymująca ma postać:

wracając ze zmiennej na zmienną otrzymujemy funkcję aproksymująca postaci:

zatem ostatecznie funkcja aproksymacyjna wyraża się wzorem:



Wykres 2. Funkcja aproksymowana funkcją za pomocą wielomianu stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a

### Wnioski

Aproksymacja funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a jest metodą skuteczną i dokładna w przypadku funkcji o regularnym rozkładzie punktów pomiarowych na przedziale [ Wielomiany Legendre’a są ortogonalne i dają się wyrazić za pomocą wzorów rekurencyjnych, co znacznie ułatwia obliczenia. Dzięki temu metoda ta pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie współczynników wielomianu aproksymującego.

Warto jednak zauważyć, że stosowanie wielomianów Legendre’a do aproksymacji funkcji o nieregularnym rozkładzie punktów pomiarowych może prowadzić do błędów i niedokładności. Ponadto, ze względu na fakt, że wielomiany Legendre’a są zdefiniowane tylko na przedziale [-1,1], konieczne może być przeprowadzenie odpowiedniej transformacji argumentów funkcji w celu ich dopasowania do tego przedziału.

Mimo tych ograniczeń, metoda aproksymacji funkcji wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre’a jest często stosowana w naukach przyrodniczych, technicznych oraz ekonomicznych. Dzięki swojej skuteczności i dokładności pozwala na uzyskanie wartościowych wyników numerycznych, które mogą mieć zastosowanie w praktyce.

## Zadanie 3 – zadanie domowe 1

### Aproksymacja punktowa za pomocą wielomianów drugiego stopnia

Aproksymacja punktowa to metoda numeryczna służąca do przybliżania funkcji za pomocą wielomianów, w której punkty, w których funkcja ma być przybliżana, nazywane są węzłami interpolacji. W przeciwieństwie do innych metod interpolacji, takich jak interpolacja Lagrange'a lub interpolacja Hermite'a, aproksymacja punktowa nie wymaga wyznaczania dokładnej formuły analitycznej dla funkcji interpolowanej.

W metodzie aproksymacji punktowej szuka się wielomianu o niewielkiej liczbie stopni, który najlepiej odwzoruje funkcję na przedziale, na którym ma być stosowany. Stopień wielomianu zwykle jest ustalany z góry i zależy od ilości dostępnych punktów interpolacji.

Aby znaleźć wielomian aproksymacyjny, należy wykorzystać metody numeryczne, takie jak metoda najmniejszych kwadratów lub metoda ortogonalizacji Grama‑Schmidta. Metoda aproksymacji punktowej jest powszechnie stosowana w wielu dziedzinach, takich jak inżynieria, fizyka, ekonomia czy finanse, gdzie wymagane jest szybkie i dokładne przybliżanie funkcji.

### Kod funkcji

Kod programu został napisany w języku Python w wersji 3.11 z wykorzystaniem biblioteki NumPy w wersji 1.24.

import numpy as np  
from time import time  
  
def pointwise\_approximation(x, y):  
 n = len(x)  
 A = np.zeros((n, 3))  
 b = y.copy()  
  
 A[:, 0] = x \*\* 2  
 A[:, 1] = x  
 A[:, 2] = np.ones(n)  
  
 coeffs = np.linalg.solve(A, b)  
  
 return coeffs  
  
if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":  
 x = np.array([234, 432, 567])  
 y = np.array([18364395, 62386329, 107371299])  
  
 start = time()  
 f = pointwise\_approximation(x, y)  
 end = time()  
  
 a, b, c = f  
 a, b, c = round(a, 5), round(b, 5), round(c, 5)  
 print(f"Wielomian ma postać: {a} x^2 + {b} x + {c}")  
 print(f"Time: {end - start}")

### Prezentacja działania programu na przykładowych danych

Program przetestowano dla kilku zestawów danych:

* (1, 1), (3, 9), (5, 25)

Wynik: Wielomian ma postać: 1.0 x^2 + 0.0 x + 0.0

Wartość dokładna:

* (4, 181), (11, 1007), (23, 4019)

Wynik: 7.0 x^2 + 13.0 x + 17.0

Wartość dokładna:

* (6, 1833), (36, 56943), (77, 257433)

Wynik: Wielomian ma postać: 43.0 x^2 + 31.0 x + 99.0

Wartość dokładna:

* (77, 443578), (100, 734137), (500, 17462137)

Wynik: Wielomian ma postać: 69.0 x^2 + 420.0 x + 2137.0

Wartość dokładna:

* (234, 18364395), (432, 62386329), (567, 107371299)

Wynik: Wielomian ma postać: 333.0 x^2 + 555.0 x + 777.0

Wartość dokładna:

### Wnioski

Program przetestowano dla różnych danych i otrzymano prawidłowe wyniki, można zatem twierdzić, że program działa poprawnie. Procedura ta pozwala na dokonanie aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia z bardzo dobrymi wynikami. Dzięki zastosowaniu biblioteki NumPy obliczenia były wykonywane bardzo szybko, wszystkie wyniki obliczane były momentalnie.

## Zadanie 4 – zadanie domowe 2

### Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach Obliczenie wartości funkcji w dyskretnych punktach

Wartości funkcji w punktach :

### Aproksymacja funkcji wielomianami Grama stopnia trzeciego

Wielomiany Grama mają postać:

gdzie:

Wielomiany Grama stopnia trzeciego mają postać:

Wielomiany te są ortogonalne w punktach , aby zmienić ortogonalność na dane równoległe punkty należy zastosować podstawienie:

gdzie punkty są równoodległe

Funkcja aproksymująca zbudowana na wielomianach Grama ma postać:

gdzie:

W zadanym przypadku, gdzie: , otrzymujemy wielomiany:

Ze wzorów obliczamy:

Ponieważ macierz jest diagonalna to możemy wyprowadzić wzór na poszczególne współczynniki:

obliczamy:

Ostatecznie otrzymujemy końcowe rozwiązanie:

### Wnioski

Zastosowanie wielomianów ortogonalnych do aproksymacji znacznie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą. Nie trzeba wtedy rozwiązywać układu równań, ponieważ macierz współczynników jest macierzą diagonalną.

# Bibliografia

1. Wykłady dr inż. Katarzyny Rycerz z przedmiotu *Metody obliczeniowe w nauce i technice* na czwartym semestrze kierunku Informatyka w AGH w Krakowie
2. Wykresy kreślono za pomocą internetowego programu GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator
3. Obliczenia wykonywano za pomocą internetowego programu WolframAlpha: https://www.wolframalpha.com/ oraz programu Microsoft Excel: https://www.microsoft.com/pl-pl/microsoft-365/excel
4. Programy napisane zostały w języku Python w wersji 3.11: https://www.python.org/
5. Wykorzystano bibliotekę NumPy dla języka Python w wersji 1.24: https://numpy.org/doc/stable/index.html
6. https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja\_wielomianowa
7. https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf
8. https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl\_AlgorOblicz\_3.pdf
9. https://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja.pdf
10. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany\_Legendre%E2%80%99a
11. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany\_ortogonalne