Ассоциативные правила

Наумов Д.А., доц. каф. КТ

Экспертные системы и искусственный интеллект, 2019

Содержание лекции

Что такое поиск ассоциативных правил?

Поиск ассоциативных правил

поиск часто в страчающихся шаблонов, ассоциаций, корреляций или структур среди множества элементов в транзакционной базе данных

Понять покупательские привычки клиента, находя ассоциации и корреляции между различными товарами, которые клиенты размещают в их "корзину для покупок".
Практическое применение:

- анализ покупок
- кросс-маркетинг
- каталогизация
- web-анализ
- обнаружение мошеннических схем

Что такое поиск ассоциативных правил?

Ассоциативное правило

Antecedent → Consequent [support, confidence]

- Antecedent - антецедент
- Consequent - косеквент, следствие
- Support - поддержка (мера интересности правила)
- Confedence - значимость (мера интересности правила)

Примеры:

$$buys(x, "computer") \rightarrow buys(x, "financialmanagementsoftware")$$

$$[0.5\%, 60\%]$$

$$age(x, "30..39") \, ^{i} ncome(x, "42..48K") \rightarrow buys(x, "car")$$

$$[1\%, 75\%]$$

Немного истории

Stories – Beer and Diapers

- Diapers and Beer. Most famous example of market basket analysis for the last few years. If you buy diapers, you tend to buy beer.
  - T. Blischok headed Terradata's Industry Consulting group.
  - K. Heath ran self joins in SQL (1990), trying to find two itemsets that have baby items, which are particularly profitable.
  - Found this pattern in their data of 50 stores/90 day period.
  - Unlikely to be significant, but it's a nice example that explains associations well.

Ronny Kohavi ICML 1998

Как можно использовать ассоциативные правила?

- пусть правило имеет вид

$$\{Bagels, ...\} \rightarrow \{Potato\ Chips\}$$

- "Potato chips": следствие - продажи чего мы собираемся (можем) увеличивать
- "Bagels": антецедент - какие продукты будут влиять на продажу, если объявить скидки
- "Bagels -> Potato chips": какие продукты следует размещать рядом, чтобы увеличить продажи "Potato Chips"

Практическое применение:

- оптимизировать размещение товара на полках
- формировать персональные рекомендации
- планирование промо-акции
- более эффективно управлять ценами и ассортиментом

Ассоциативные правила: основные понятия

Исходные данные

1. база данных **транзакций**
2. транзакция содержит список **элементов**

Результаты поиска ассоциативных правил

1. все правила, которые связывают наличие одного **набора**(itemset) с другим набором элементов

Например, 98% людей, которые покупают шины и автоаксессуары, также заказывают услуги шионмонтажа.

Ассоциативные правила: поддержка и значимость

$$A \Rightarrow B[s, c]$$

Поддержка (Support): обозначает, как часто правило встречается в транзакциях.

$$support(A \Rightarrow B[s, c]) = p(A \cup B)$$

Значимость (confidence): обозначает процент транакций, содержащая **A**, которые содержат также **B**. Значимость - это оценка условной вероятности:

$$confidence(A \Rightarrow B[s, c]) = p(B|A) = sup(A, B)/sup(A)$$

Пример

Trans. Id	Purchased Items
1	A,D
2	A,C
3	A,B,C
4	B,E,F

Itemset:

A,B or B,E,F

Support of an itemset:

Sup(A,B)=1 Sup(A,C)=2

Frequent pattern:

Given min. sup=2, {A,C} is a frequent pattern

For minimum support = 50% and minimum confidence = 50%, we have the following rules

A => C with 50% support and 66% confidence

C => A with 50% support and 100% confidence

Математические обозначения

X — пространство объектов;
$\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_j : X \to \{0, 1\}$ — бинарные признаки (items);
$X^\ell = \{x_1, \ldots, x_\ell\} \subset X$ — обучающая выборка.

Каждому подмножеству $\varphi \subseteq \mathscr{F}$ соответствует конъюнкция

$$\varphi(x) = \bigwedge_{f \in \varphi} f(x), \quad x \in X.$$

Если $\varphi(x) = 1$, то «признаки из φ *совместно встречаются* у x».

Частота встречаемости (*поддержка*, support) φ в выборке X^ℓ

$$\nu(\varphi) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \varphi(x_i).$$

Если $\nu(\varphi) \geqslant \delta$, то «набор φ *частый*» (frequent itemset).
Параметр δ — *минимальная поддержка*, MinSupp.

Математические обозначения

Определение

Ассоциативное правило (association rule) $\varphi \to y$ — *это пара непересекающихся наборов* $\varphi, y \subseteq \mathscr{F}$ *таких, что:*

1) наборы φ *и* y *совместно часто встречаются,*

$$\nu(\varphi \cup y) \geqslant \delta;$$

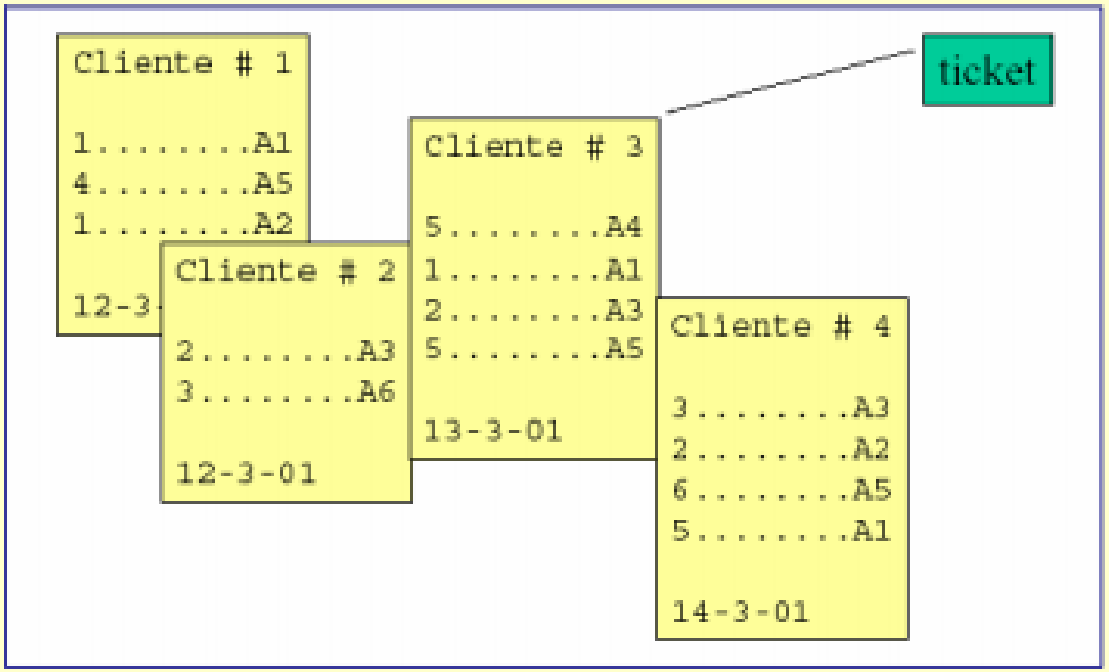
2) если встречается φ*, то часто встречается также и* y*,*

$$\nu(y|\varphi) \equiv \frac{\nu(\varphi \cup y)}{\nu(\varphi)} \geqslant \varkappa.$$

$\nu(y|\varphi)$ — *значимость* (confidence) правила.

Параметр δ — *минимальная поддержка*, `MinSupp`.
Параметр $\varkappa$ — *минимальная значимость*, `MinConf`.

Логические (булевые) ассоциативные правила



Each transaction is represented by a Boolean vector

Cliente	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Пример поиска ассоциативных правил

Transaction ID	Items Bought
2000	A,B,C
1000	A,C
4000	A,D
5000	B,E,F

Min. support 50%
Min. confidence 50%

Frequent Itemset	Support
{A}	75%
{B}	50%
{C}	50%
{A,C}	50%

For rule $A \Rightarrow C$:

support = support($\{A, C\}$) = 50%

confidence = support($\{A, C\}$) / support($\{A\}$) = 66.6%

Принцип Apriori

Поскольку $\varphi(x) = \bigwedge_{f \in \varphi} f(x)$ — конъюнкция, имеет место

свойство антимонотонности:

для любых $\psi, \varphi \subset \mathscr{F}$ из $\varphi \subset \psi$ следует $\nu(\varphi) \geqslant \nu(\psi)$.

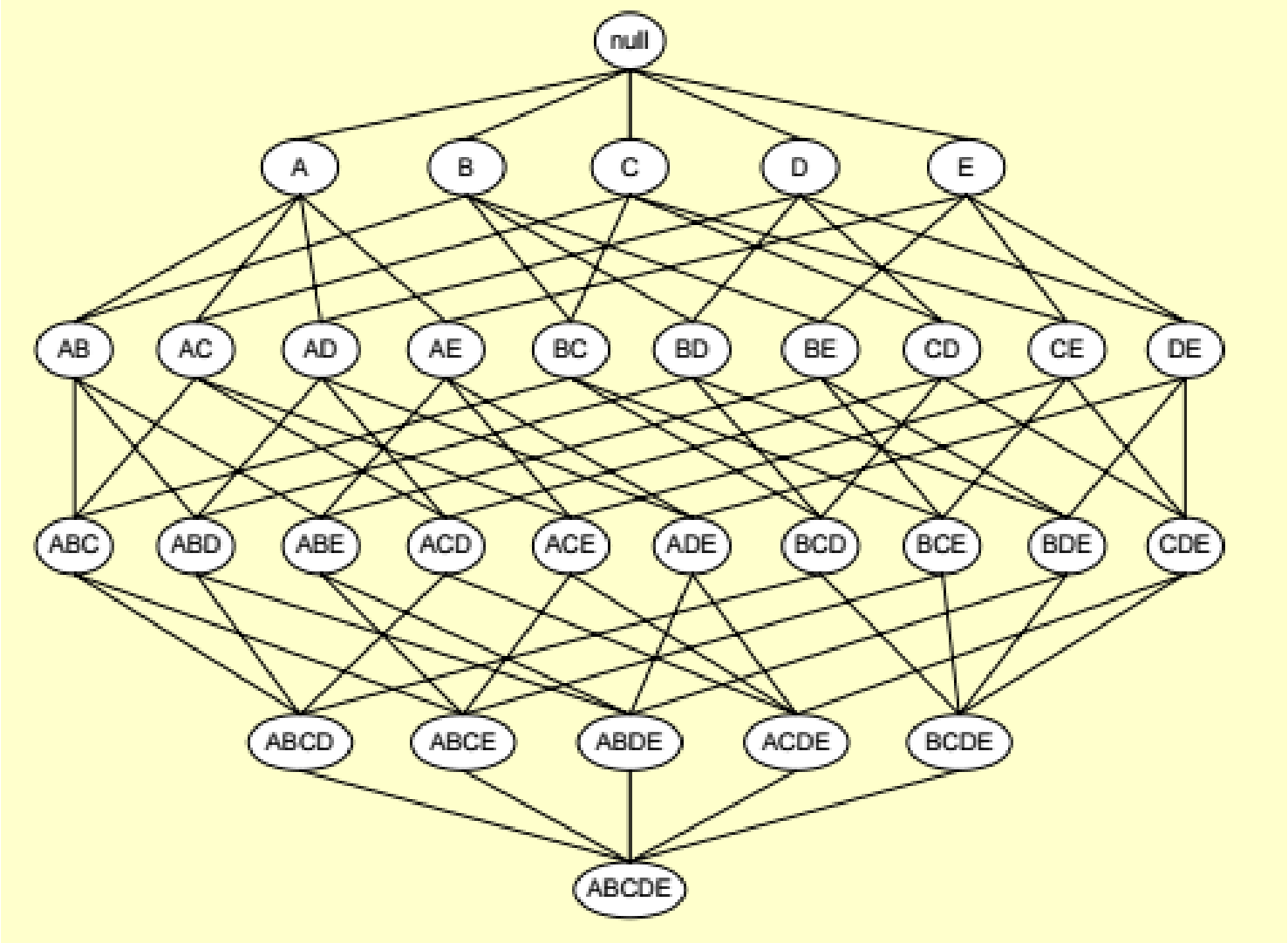
Следствия:

1. если ψ частый, то все его подмножества $\varphi \subset \psi$ частые.
2. если φ не частый, то все наборы $\psi \supset \varphi$ также не частые.
3. $\nu(\varphi \cup \psi) \leqslant \nu(\varphi)$ для любых φ, ψ.

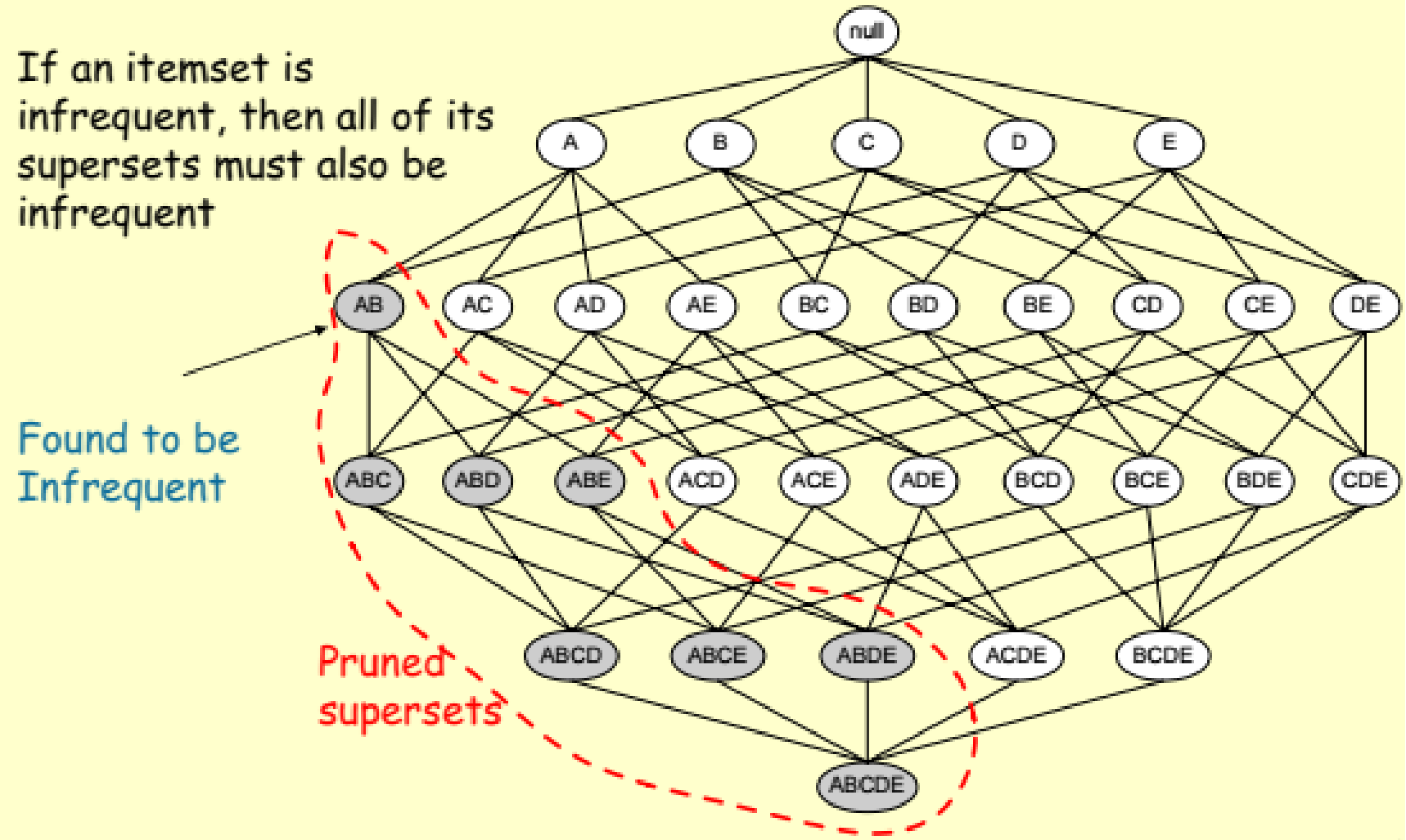
Два этапа поиска ассоциативных правил:

1. поиск частых наборов
   (многократный просмотр транзакционной базы данных).
2. выделение ассоциативных правил
   (простая эффективная процедура в оперативной памяти).

Принцип Apriori: множество наборов



Принцип Apriori: не рассматриваемые наборы

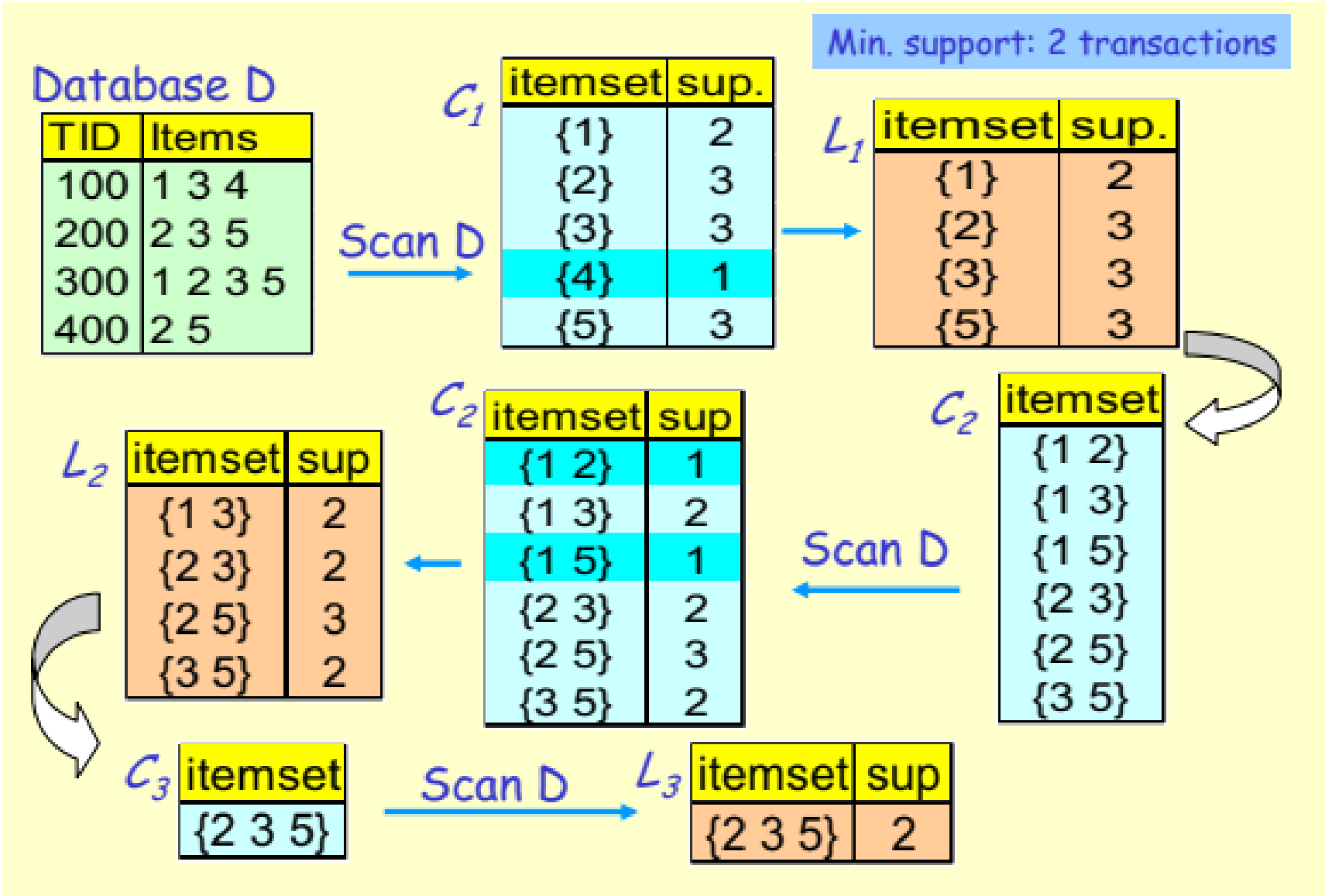


Принцип Apriori: основная идея - поиск в ширину

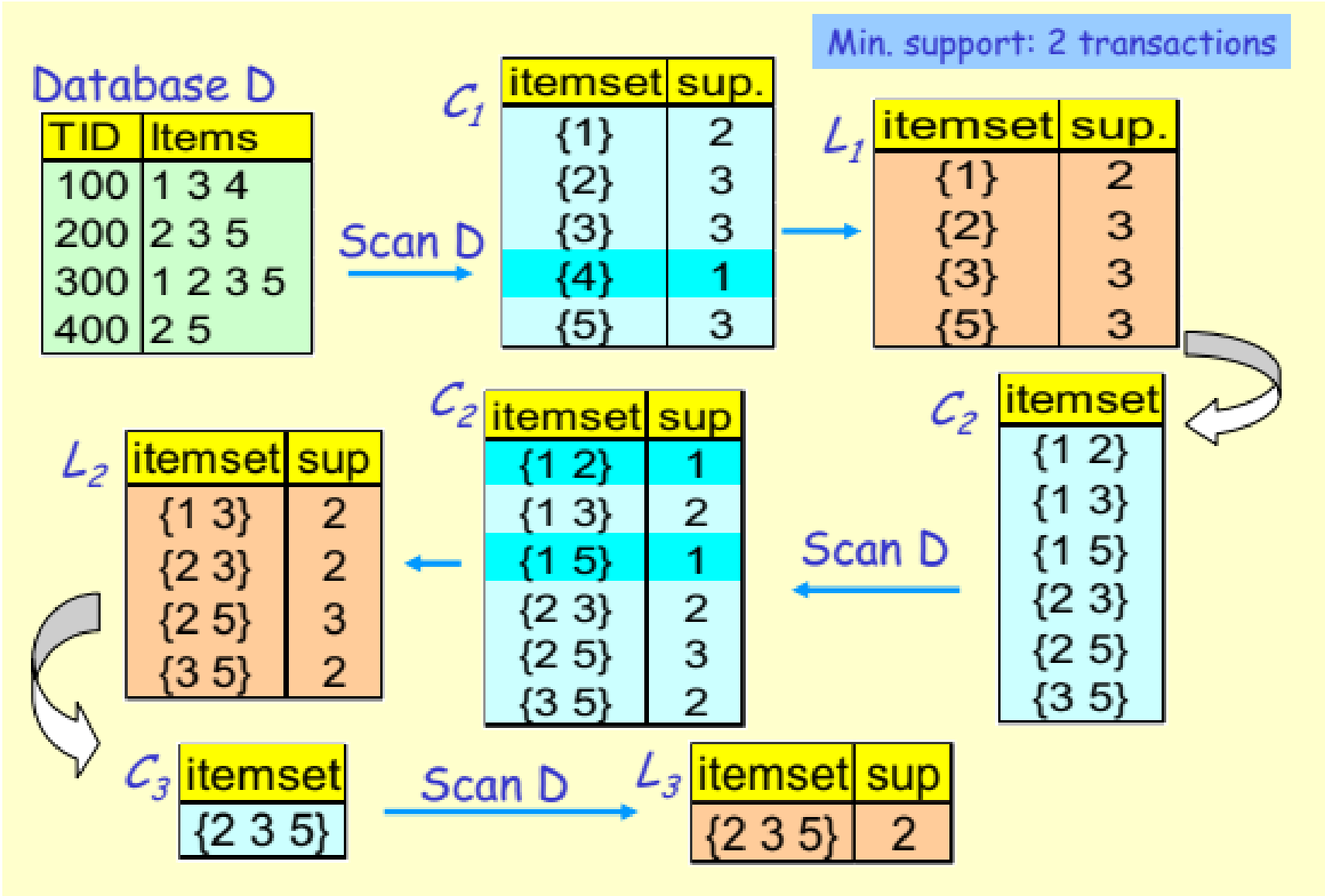
вход: X^ℓ — обучающая выборка; $\delta = \mathtt{MinSupp}$; $\varkappa = \mathtt{MinConf}$;
выход: $R = \{(\varphi, y)\}$ — список ассоциативных правил;

1 множество всех частых исходных признаков:
$G_1 := \{f \in \mathscr{F} \mid \nu(f) \geqslant \delta\}$;
2 **для всех** $j = 2, \ldots, n$
3 множество всех частых наборов мощности j:
$G_j := \{\varphi \cup \{f\} \mid \varphi \in G_{j-1},\ f \in G_1 \backslash \varphi,\ \nu(\varphi \cup \{f\}) \geqslant \delta\}$;
4 **если** $G_j = \varnothing$ **то**
5 **выход** из цикла по j;
6 $R := \varnothing$;
7 **для всех** $\psi \in G_j,\ j = 2, \ldots, n$
8 AssocRules $(R, \psi, \varnothing)$;

Принцип Apriori: пример



Принцип Apriori: пример



Принцип Apriori: получение ассоциативных правил

вход: X^ℓ — обучающая выборка; $\delta = \texttt{MinSupp}$; $\varkappa = \texttt{MinConf}$;
выход: $R = \{(\varphi, y)\}$ — список ассоциативных правил;

1 множество всех частых исходных признаков:
$G_1 := \{f \in \mathscr{F} \mid \nu(f) \geqslant \delta\}$;
2 **для всех** $j = 2, \ldots, n$
3 множество всех частых наборов мощности j:
$G_j := \{\varphi \cup \{f\} \mid \varphi \in G_{j-1},\ f \in G_1 \backslash \varphi,\ \nu(\varphi \cup \{f\}) \geqslant \delta\}$;
4 **если** $G_j = \varnothing$ **то**
5 **выход** из цикла по j;
6 $R := \varnothing$;
7 **для всех** $\psi \in G_j,\ j = 2, \ldots, n$
8 AssocRules $(R, \psi, \varnothing)$;

Выделение ассоциативных правил

$$confidence(A \Rightarrow B) = P(B|A) = support(A \cup B)/support(A)$$

- Для каждого частого набора элементов x сгенерировать все непустые подмножества x
- Для каждого непустого подмножества x множества s получить правило:

$$s \Rightarrow (s \setminus x)$$

$$support(x)/support(s) > min_conf$$

Выделение ассоциативных правил

Этап 2. Простой рекурсивный алгоритм, выполняемый быстро, как правило, полностью в оперативной памяти.

```
1 функция AssocRules (R, φ, y)
  |  вход: (φ, y) — ассоциативное правило;
  |  выход: R — список ассоциативных правил;
2 |  для всех f ∈ φ: id_f > max_{g∈y} id_g (чтобы избежать повторов y)
3 |  |  φ' := φ \ {f};   y' := y ∪ {f};
4 |  |  если ν(y'|φ') ⩾ ϰ то
5 |  |  |  добавить ассоциативное правило (φ', y') в список R;
6 |  |  |  если |φ'| > 1 то
7 |  |  |  |  AssocRules (R, φ', y');
```

id_f — порядковый номер признака f в $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$

Пример

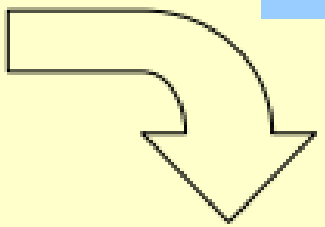
Задан часто встречающийся набор (A, B, E). Какие возможны ассоциативные правила?

- *Q: Given frequent set {A,B,E}, what are possible association rules?*
  - A => B, E
  - A, B => E
  - A, E => B
  - B => A, E
  - B, E => A
  - E => A, B
  - ___ => A,B,E (empty rule), or true => A,B,E

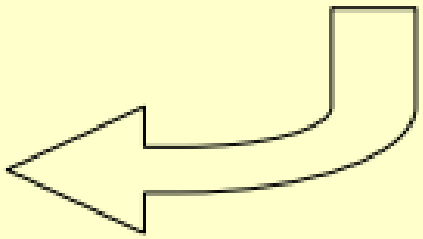
Пример

Trans-ID	Items
1	ACD
2	BCE
3	ABCE
4	BE
5	ABCE

Min_support: 60%
Min_confidence: 75%



Frequent Itemset	Support
{**BCE**},{AC}	60%
{BC},{CE},{A}	60%
{BE},{B},{C},{E}	80%



Rule	Conf.
{BC} =>{E}	100%
{BE} =>{C}	75%
{CE} =>{B}	100%
{B} =>{CE}	75%
{C} =>{BE}	75%
{E} =>{BC}	75%

Упражнение

TID	Items
1	Bread, Milk, Chips, Mustard
2	Beer, Diaper, Bread, Eggs
3	Beer, Coke, Diaper, Milk
4	Beer, Bread, Diaper, Milk, Chips
5	Coke, Bread, Diaper, Milk
6	Beer, Bread, Diaper, Milk, Mustard
7	Coke, Bread, Diaper, Milk

Упражнение

Bread	Milk	Chips	Mustard	Beer	Diaper	Eggs	Coke
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1

Упражнение

0.4*7= 2.8

C1	
Bread	6
Milk	6
Chips	2
Mustard	2
Beer	4
Diaper	6
Eggs	1
Coke	3

L1	
Bread	6
Milk	6
Beer	4
Diaper	6
Coke	3

C2	
Bread,Milk	5
Bread,Beer	3
Bread,Diaper	5
Bread,Coke	2
Milk,Beer	3
Milk,Diaper	5
Milk,Coke	3
Beer,Diaper	4
Beer,Coke	1
Diaper,Coke	3

L2	
Bread,Milk	5
Bread,Beer	3
Bread,Diaper	5
Milk,Beer	3
Milk,Diaper	5
Milk,Coke	3
Beer,Diaper	4
Diaper,Coke	3

C3	
Bread,Milk,Beer	2
Bread,Milk,Diaper	4
Bread,Beer,Diaper	3
Milk,Beer,Diaper	3
Milk,Beer,Coke	
Milk,Diaper,Coke	3

L3	
Bread,Milk,Diaper	4
Bread,Beer,Diaper	3
Milk,Beer,Diaper	3
Milk,Diaper,Coke	3

$$8 + C_2^8 + C_3^8 = 92 \quad >> \quad 24$$

Модификация алгоритма Apriori

Основные проблемы при генерации наборов:

- общее число транзакций может быть очень большим
- одна транзакция может содержать много элементов

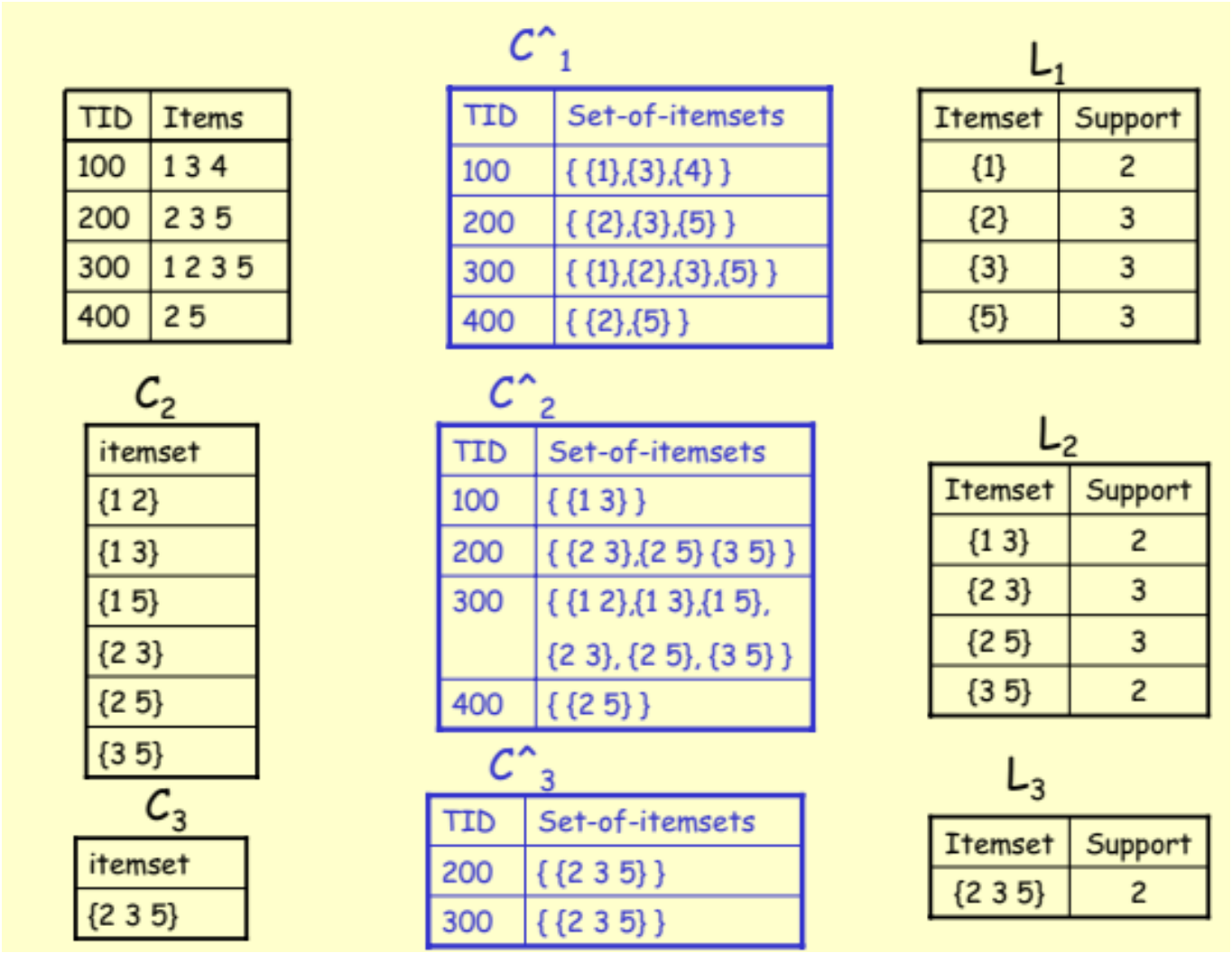
Модификации алгоритма:

- более эффективные структуры данных для быстрого поиска
- поиск по частичной случайной выборке при пониженных поддержке и значимости с последующей проверкой на полной базе
- алгоритмы, учитывающие иерархию признаков
- поиск последовательных шаблонов
- учет информации о клиентах

Модификации алгоритма Apriori

- **Проблема**: на каждом уровне осуществляется просмотр всей базы данных транзакций
- AprioriTID:
  - генерировать набора как в алгоритме Apriori, но БД используется для вычисления поддержки всех наборов за один проход;
  - требуется значительно больше памяти;
  - вычисляются и хранятся часто встречающиеся наборы $C\hat{}_k$ для каждой транзакции;
- AprioriHybrid
  - на начальном этапе используется алгоритм Apriori;
  - вычисляется размер $C\hat{}_k$;
  - как только $C\hat{}_k$ будет умещаться в памяти, переключиться на AprioriTid.

Пример



TID	Items
100	1 3 4
200	2 3 5
300	1 2 3 5
400	2 5

C_2

itemset
{1 2}
{1 3}
{1 5}
{2 3}
{2 5}
{3 5}

C_3

itemset
{2 3 5}

$C\hat{}_1$

TID	Set-of-itemsets
100	{ {1},{3},{4} }
200	{ {2},{3},{5} }
300	{ {1},{2},{3},{5} }
400	{ {2},{5} }

$C\hat{}_2$

TID	Set-of-itemsets
100	{ {1 3} }
200	{ {2 3},{2 5} {3 5} }
300	{ {1 2},{1 3},{1 5}, {2 3}, {2 5}, {3 5} }
400	{ {2 5} }

$C\hat{}_3$

TID	Set-of-itemsets
200	{ {2 3 5} }
300	{ {2 3 5} }

L_1

Itemset	Support
{1}	2
{2}	3
{3}	3
{5}	3

L_2

Itemset	Support
{1 3}	2
{2 3}	3
{2 5}	3
{3 5}	2

L_3

Itemset	Support
{2 3 5}	2

Какие правила интересны?

- все ли найденные правила будут полезны и интересны?
- как можно измерить "интересность"правила?

Субъективные критерии:

- правило интересно, если оно неожиданно для пользователя и/или полезно (пользователь может его применить)

Объективные критерии:

- поддержка (support)
- значимость (confidence)
- поддержка (Lift, Interest, Correlation)
- убедительность (Conviction)
- влияние (Leverage, Piatetsky-Shapiro)
- покрытие (Coverage)

Пример

- Example 1: (Aggarwal & Yu, PODS98)
  - Among 5000 students
    - 3000 play basketball
    - 3750 eat cereal
    - 2000 both play basket ball and eat cereal

	basketball	not basketball	sum(row)	
cereal	2000	1750	3750	75%
not cereal	1000	250	1250	25%
sum(col.)	3000	2000	5000	
	60%	40%		

play basketball $\Rightarrow$ *eat cereal* [40%, 66.7%]

misleading because the overall percentage of students eating cereal is 75% which is higher than 66.7%.

play basketball $\Rightarrow$ *not eat cereal* [20%, 33.3%]

is more accurate, although with lower support and confidence

Пример

- **Lift (Correlation, Interest)**

$$\text{Lift}(A \rightarrow B) = \frac{\sup(A,B)}{\sup(A) \cdot \sup(B)} = \frac{P(B \mid A)}{P(B)}$$

  - A and B negatively correlated, if the value is less than 1; otherwise A and B positively correlated

X	1	1	1	1	0	0	0	0
Y	1	1	0	0	0	0	0	0
Z	0	1	1	1	1	1	1	1

rule	Support	Lift
X ⇒ Y	25%	2.00
X ⇒ Z	37.50%	0.86
Y ⇒ Z	12.50%	0.57

Пример

- Example 1 (cont)
  - *play basketball* $\Rightarrow$ *eat cereal* [40%, 66.7%] $LIFT = \frac{\frac{2000}{5000}}{\frac{3000}{5000} \times \frac{3750}{5000}} = 0.89$
  - *play basketball* $\Rightarrow$ *not eat cereal* [20%, 33.3%] $LIFT = \frac{\frac{1000}{5000}}{\frac{3000}{5000} \times \frac{1250}{5000}} = 1.33$

	basketball	not basketball	sum(row)
cereal	2000	1750	3750
not cereal	1000	250	1250
sum(col.)	3000	2000	5000

Пример

Note that A -> B can be rewritten as ¬(A,¬B)

$$Conv(A \rightarrow B) = \frac{\sup(A) \cdot \sup(\bar{B})}{\sup(A,\bar{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{B})}{P(A,\bar{B})} = \frac{P(A)(1-P(B))}{P(A)-P(A,B)}$$

- Conviction is a measure of the implication and has value 1 if items are unrelated.

- *play basketball* ⇒ *eat cereal* [40%, 66.7%]
- *eat cereal* ⇒ *play basketball* conv:0,85

$$Conv = \frac{\frac{3000}{5000}\left(1-\frac{3750}{5000}\right)}{\frac{3000}{5000}-\frac{2000}{5000}} = 0.75$$

- *play basketball* ⇒ *not eat cereal* [20%, 33.3%]
- *not eat cereal* ⇒ *play basketball* conv:1,43

$$Conv = \frac{\frac{3000}{5000}\left(1-\frac{1250}{5000}\right)}{\frac{3000}{5000}-\frac{1000}{5000}} = 1.125$$

Пример

- **Leverage or Piatetsky-Shapiro**

$$PS(A \rightarrow B) = \sup(A,B) - \sup(A) \cdot \sup(B)$$

  - PS (or Leverage):
  - is the proportion of additional elements covered by both the premise and consequence above the expected if independent.

Пример

$$coverage(A \rightarrow B) = sup(A)$$

Пример