Содержание лекции

- Свойства алгоритма.
- Сложность алгоритма. O- и Θ- нотации.
- Исполнитель алгоритма.
- Инварианты. Индуктивные функции.
- Абстракции. Интерфейс абстракции.
- Рекурсия. Принцип *разделяй и властвуй*.
- Основная теорема о рекурсии.
- Быстрое вычисление степеней.

Свойства алгоритма.

Исполнитель

Алгоритм — это последовательность команд для исполнителя, обладающая рядом свойств:

- **полезность**, то есть умение решать поставленную задачу.
- **детерминированность**, то есть каждый шаг алгоритма должен быть строго определён во всех возможных ситуациях.
- **конечность**, то есть способность алгоритма завершиться для любого множества входных данных
- **массовость**, то есть применимость алгоритма к разнообразным входным данным.

Алгоритм для своего *исполнения* требует от исполнителя некоторых *ресурсов*.

Программа есть запись алгоритма на формальном языке.

Исполнители

Одна задача — несколько алгоритмов — разные используемые ресурсы.

Разные исполнители — разные *элементарные действия* и *элементарные объекты*.

Исполнитель «компьютер»:

- устройство *центральный процессор*
- элементарные действия — сложение, умножение, сравнение, переход ...
- устройство *память* как хранителя элементарных объектов
- элементарные объекты — целые, вещественные числа

Эффективность — способность алгоритма использовать ограниченное количество ресурсов.

Сложность алгоритма. O- и Θ- нотации.

Сложность алгоритма

Что есть сложность алгоритма?

- комбинационная сложность — минимальное число элементов для реализации алгоритма в виде вычислительного устройства.
- описательная сложность — длина описания алгоритма на формальном языке
- вычислительная сложность — количество элементарных операций, исполняемых алгоритмом для неких входных данных.

Нет циклов — описательная сложность примерно коррелирует свычислительной.
Есть циклы — интересна асимптотика зависимости времени вычисления от входных данных.

Главный параметр сложности алгоритма

Введём понятие *главный параметр* N, наиболее сильно влияющий на скорость исполнения алгоритма.

Это может быть:

- размер массива
- количество символов в строке
- количеством битов в записи числа
- если таких параметров несколько — обобщённый параметр, функция от нескольких параметров

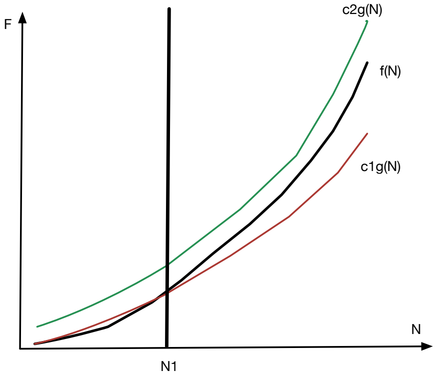
Нотация сложности. Символ Θ

Далее: сложность $\equiv$ вычислительная сложность.

Функция $f(N)$ имеет порядок $\Theta(g(N))$, если существуют постоянные c_1, c_2 и N_1 такие, что для всех $N > N_1$

$$0 \leqslant c_1 g(N) \leqslant f(N) \leqslant c_2 g(N).$$

$\Theta(f(n))$ — класс функций, примерно пропорциональных $f(n)$

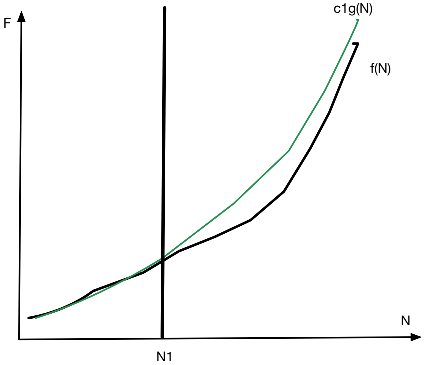


Нотация сложности. Символ O

Функция $f(N)$ имеет порядок $O(g(N))$, если существуют постоянные c_1 и N_1 такие, что для всех $N > N_1$

$$f(N) \leqslant c_1 g(N)$$

$O(f(n))$ — класс функций, ограниченных сверху $cf(n)$.



Приближённое вычисление сложности

- Пусть $F(N)$ — функция сложности алгоритма в зависимости от N
- Тогда если существует такая функция $G(N)$ (асимптотическая функция) и константа C, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{F(N)}{G(N)} = C,$$

то сложность алгоритма $F(N)$ определяется функцией $G(N)$ с коэффициентом амортизации C.

Асимптотика основных зависимостей

Класс сложности определяется по асимптотической зависимости F(N).

- Экспонента с любым коэффициентом превосходит любую степень
- Степень с любым коэффициентом, большим единицы, превосходит логарифм по любому основанию, большему единицы
- Логарифм по любому основанию, большему единицы превосходит 1

- $F(N) = N^3 + 7N^2 - 14N = \Theta(N^3)$
- $F(N) = 1.01^N + N^{10} = \Theta(1.01^N)$
- $F(N) = N^{1.3} + 10\log_2 N = \Theta(N^{1.3})$

На практике чаще используют O-нотацию, так как Θ-нотацию обычно сложнее доказывать.

Зависимость времени исполнения от исходных данных

Пусть имеется массив A длиной N элементов.
Сколько операций потребуется, чтобы обнаружить номер первого вхождения элемента со значением P алгоритмом, заключающимся в последовательном просмотре элементов массива?

- $K_{min} = 1$
- $K_{max} = N$
- $K_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} i}{N} = \frac{N \times (N-1)}{2N} = \frac{N-1}{2}$

  Подходит ли символ Θ?

Зависимость времени исполнения от исходных данных

Пусть имеется массив A длиной N элементов.
Сколько операций потребуется, чтобы обнаружить номер первого вхождения элемента со значением P алгоритмом, заключающимся в последовательном просмотре элементов массива?

- $K_{min} = 1$
- $K_{max} = N$
- $K_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} i}{N} = \frac{N \times (N-1)}{2N} = \frac{N-1}{2}$

  Подходит ли символ Θ?
  Нет. Для данного алгоритма подходит O-символ:
  $f(N) = O(N)$.

Зависимость времени исполнения от исходных данных

Пусть имеется массив A длиной N элементов.
Сколько операций потребуется, чтобы сложить все элементы массива?

- $K = N$

  Подходит ли символ Θ?

Зависимость времени исполнения от исходных данных

Пусть имеется массив A длиной N элементов.
Сколько операций потребуется, чтобы сложить все элементы массива?

- $K = N$

  Подходит ли символ Θ?
  Подходит. $f(N) = \Theta(N)$.

Неполиномиальные задачи. Задача о рюкзаке.

Имеется N предметов, каждый из которых имеет объём V_i и стоимость C_i, предметы неделимы.

Имеется рюкзаквместимостью V.

Требуется поместить в рюкзак наборпредметов максимальной стоимости, суммарный объёмкоторых не превышает объёма рюкзака.

Задача о рюкзаке.

- Обратим внимание на то, что предметы разрезать на куски нельзя. Если это разрешить, то задача будет иметь простое решение.
- Для решения задачи достаточно перебрать все возможные комбинации из N предметов. Это гарантирует то, что мы не пропустим нужной комбинации.
- Для определения количества комбинаций можно рассуждать так, что K предметов можно выбрать из N предметов C_N^K и так для всех K от 0 до N.

$$F(N) = \sum_{K=0}^{N} C_N^K$$

Задача о рюкзаке.

- Обратим внимание на то, что предметы разрезать на куски нельзя. Если это разрешить, то задача будет иметь простое решение.
- Для решения задачи достаточно перебрать все возможные комбинации из N предметов. Это гарантирует то, что мы не пропустим нужной комбинации.
- Для определения количества комбинаций можно рассуждать так, что K предметов можно выбрать из N предметов C_N^K и так для всех K от 0 до N.

$$F(N) = \sum_{K=0}^{N} C_N^K$$

$$F(N) = (1+1)^N = 2^N$$

Одно из решений задачи о рюкзаке

1. Перенумеруем все предметы.
2. Установим максимум стоимости в 0.
3. Составим двоичное число с N разрядами, в котором единица в разряде будет означать, что предмет выбран для укладки в рюкзак (расстановку).
4. Рассмотрим все расстановки, начиная от $000\dots000$ до $111\dots111$, для каждой из них подсчитаем значение суммарного объёма.
   4.1 Если суммарный объём расстановки не превосходит объёма рюкзака, то подсчитывается суммарная стоимость и сравнивается с достигнутым ранее максимумом стоимости.
   4.2 Если вычисленная суммарная стоимость превосходит максимум, то максимум устанавливается в вычисленную стоимость и запоминается текущая конфигурация.

Свойства алгоритма

Предложенный алгоритм:

1. Детерминированный
2. Конечный
3. Массовый
4. Полезный

Его сложность пропорциональна 2^N, так как требуется перебрать все возможные комбинации предметов.

Сложность решения задачи о рюкзаке

- Много ли времени потребуется на решение задачи для $N = 128$?

Сложность решения задачи о рюкзаке

- Много ли времени потребуется на решение задачи для $N = 128$?
- Предположим, на подсчёт одного решения потребуется 10^{-9} секунд, то есть, одна наносекунда.

Сложность решения задачи о рюкзаке

- Много ли времени потребуется на решение задачи для $N = 128$?
- Предположим, на подсчёт одного решения потребуется 10^{-9} секунд, то есть, одна наносекунда.
- Предположим, задачу будет решать триллион компьютеров (10^{12})

Сложность решения задачи о рюкзаке

- Много ли времени потребуется на решение задачи для $N = 128$?
- Предположим, на подсчёт одного решения потребуется 10^{-9} секунд, то есть, одна наносекунда.
- Предположим, задачу будет решать триллион компьютеров (10^{12})
- Тогда общее время решения задачи будет составлять

$$\frac{2^{128} \times 10^{-9}}{10^{12}} \text{секунд} \approx 10.8 \times 10^{9} \text{лет}$$

NP-задачи

Задача о рюкзаке относится к классу *NP-полных*.

Быстрое (полиномиальное) точное решение таких задач (пока) не найдено.

Если будет найдено решение одной из *NP-полных* задач, то будут решены все задачи из этого класса.

Сейчас их решают приближённо.

Исполнитель алгоритма

Исполнители

Нашим исполнителем будет язык C++.

- Элементарные типы отображаются на вычислительную систему *char*, *int*, *double*.
- Элементарные операции аппаратного исполнителя: операции над элементарными типами и операции передачи управления.
- Типы данных языка есть комбинация элементарных типов данных.
- Операции языка есть комбинация элементарных операций.

Элементарные и неэлементарные операции

Пример: цикл *for* как неэлементарная операции языка.

```
int a[10];
int s = 0;
for (int i = 0; i < 10 && a[i] % 10 != 5; i++) {
    s += a[i];
 }
```

Неэлементарный тип *массив*, его представитель a

Элементарный тип *int*, его представитель s

Элементарная операция присваивания (инициализации) $s = 0$

Неэлементарная операция *for*, состоящая из операций присваивания $i = 0$, двух операций сравнения, и т. д.

Представление типов

Целые числа — двоичное представление.

Простые элементарные операции: сложение, вычитание, присваивание,...

Сложные элементарные операции: целочисленное умножение, деление (не на степень двойки), переход.

```
if (x > 0) t = 1;
else t = 0;
```

выполняется много медленнее, чем

```
t = x > 0;
```

так как для второго есть машинная команда.

Инварианты.
Индуктивные функции.

Индуктивное программирование. Индуктивные функции.

Пусть имеется множество M. Пусть аргументами функции f будут последовательности элементов множества M а значениями — элементы множества N.

Тогда, если её значение на последовательности

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

можно восстановить по её значению на последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

и x_n, то такая функция называется *индуктивной*.
Пример: Если мы хотим найти наибольшее значение все элементов последовательности, то функция *maximum* — индуктивна, так как

$$maximum(x_1, x_2, \ldots, x_n) = max(maximum(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

Инварианты и предикаты алгоритма

Значение функции для подмножества является *инвариантом*, то есть, предикатом, значение которого всегда истинно.

```
int m = a[0];
for (int i = 1; i < N; i++) {
   if (a[i] > m) {
      m = a[i];
   }
}
```

Предикат: $\forall i < N$: m_i есть наибольшее значение из элементов $a[0] \ldots a[i]$, то есть, $m_i = maximum$.

Абстракции.
Интерфейс абстракции.

Понятие абстракции

Как только появляются *объекты*, появляются *абстракции* — механизм разделения сложных объектов на более простые, без деталировки подробностей разделения.

Функциональная абстракция — разделение функций, *методов*, которые манипулируют с объектами с их реализацией.

Интерфейс абстракции — набор методов, характерных для данной абстракции.

Пример: абстракция массива

- **create** — Создать массив. Статический или динамический?

  ```
  int a[100]; // Статический
  int *b = calloc(100, sizeof(int)); // Динамический
  int *c = new int[100]; // Динамический
  ```

- **destroy** — Удалить массив. Статический или динамический?

  ```
  free(b);
  delete c; // можно и delete [] c
  ```

- **fetch** — Обратиться к элементу массива.

  ```
  int q1 = a[i];
  int q2 = b[i];
  int q3 = c[i];
  ```

Для массива основная операция — это доступ к элементу. Она выглядит одинаково для всех представлений.

Абстракция стек

Одна из удобных абстракций — стек. Он должен предоставлять нам методы:

- **create** — создание стека. Может быть, потребуется аргумент, определяющий максимальный размер стека.
- **push** — занесение элемента в стек. Размер стека увеличивается на единицу. Занесённый элемент становится *вершиной стека*.
- **pop** — извлечь элемент, являющийся вершиной стека и уменьшить размер стека на единицу. Если стек пуст, то значение операции не определено.
- **peek** — получить значение элемента, находящегося на вершине стека, не изменяя стека. Если стек пуст, значение операции не определено.
- **empty** — предикат истинен, когда стек пуст.
- **destroy** — уничтожить стек.

Абстракция *множество*

Множество есть совокупность однотипных элементов, на которых определена операция сравнения
Обозначение: списком значений внутри фигурных скобок.
Пустое множество: $s = \{\}$.

- **insert** — добавление элемента в множество.

```
{1,2,3}.insert(5) -> {1,2,3,5}
{1,2,3}.insert{2} -> {1,2,3}
```

- **remove** — удалить элемент из множества.

```
{1,2,3}.remove(3) -> {1,2}
{1,2,3}.remove(5) -> не определено.
```

- **in** — определить принадлежность множеству.

```
{1,2,3}.in(2) -> true
{1,2,3}.in(5) -> false
```

- **size** — определить количество элементов в множестве

Рекурсия.
Принцип *разделяй и властвуй*.

Числа Фибоначчи. Рекуррентная форма

$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$

Рекуррентная форма определения:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{если n} = 0, \\ 1, & \text{если n} = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Много алгоритмов первично определяются рекуррентными зависимостями.

Рекуррентность и рекурсия

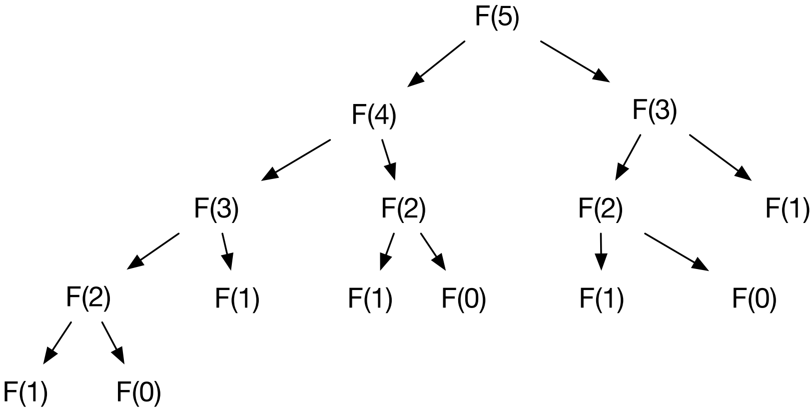
Рекуррентная форма $\to$ рекурсивный алгоритм

```
int fibo(int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return fibo(n-1) + fibo(n-2);
}
```

Три вопроса:

1. Корректен ли он?
2. Как оценить время его работы?
3. Как его ускорить?

Дерево вызовов функции для $n = 5$



Оценка времени вычисления алгоритма

Пусть $t(n)$ — количество вызовов функции для аргумента n.

$$
\begin{aligned}
t(0) &= 1 \\
t(0) &> F_0 \\
t(1) &= 1 \\
t(1) &= F_1
\end{aligned}
$$

Для $n > 1$

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2) \geqslant F_n.$$

Оценка требуемой для исполнения памяти

- Каждый вызов функции создаёт новый *контекст функции* или *фрейм вызова*.
- Каждый *фрейм вызова* содержит все аргументы, локальные переменные и служебную информацию.
- Максимально создаётся количество фреймов, равное глубине рекурсии.
- Сложность алгоритма по занимаемой памяти равна $O(N)$.

Определение порядка числа вызовов

Числа Фибоначчи удовлетворяют отношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi,$$

где $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, то есть, $F_n \approx C \times \varphi^n$.

Сложность этого алгоритма есть $\Theta(\varphi^N)$.

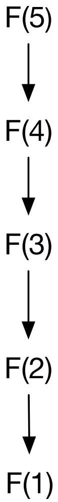
Как ускорить?

Проблема в том, что мы много раз повторно вычисляем значение функции от одних и тех же аргументов.

Третий вопрос: можно ли ускорить алгоритм?
Вводим добавочный массив.

```
int fibo(int n) {
  const int MAXN = 1000;
  static int c[MAXN];
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  if (c[n] > 0) return c[n];
  return c[n] = fibo(n-1) + fibo(n-2);
}
```

Дерево вызовов модифицированной функции для $n = 5$



Проблема с представимостью данных

Значение функции растёт слишком быстро и уже при небольших значениях n число выйдет за пределы разрядной сетки.

В реальных программах имеются ограничения на операнды машинных команд.

X86,X64 $\rightarrow$ *int* есть 32 бита, *longlong* есть 64 бита.

X86: сложение 32-битных $\approx$ 1 такт, сложение 64-битных $\approx$ 3 такта.
X64: сложение 32-битных $\approx$ 1 такт, сложение 64-битных $\approx$ 1 такт.

X86: умножение 32-битных $\approx$ 3-4 тактов, умножение 64-битных $\approx$ 15-50 тактов.
X64: умножение 32-битных $\approx$ 3-4 такта, умножение 64-битных $\approx$ 4-5 тактов.

Как работать с длинными числами?

На 32-битной архитектуре сложение двух 64-разрядных $\rightarrow$ сложение младших разрядов и прибавление бита переноса к сумме старших разрядов. Три машинных команды.

Числа (n) — те, которые занимают ровно n элементарных типов.

int есть числа (1), *longlong* — числа (2).

Большие числа требуют представления в виде массивов из элементарных типов.

Сколько операций потребуется для сложения двух чисел (n)?

Как работать с длинными числами?

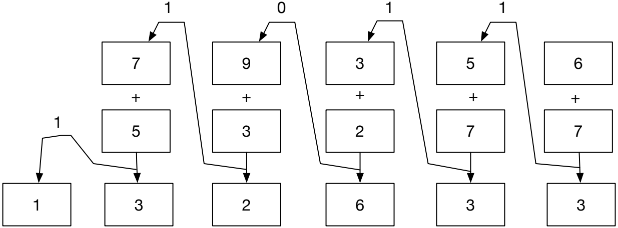
На 32-битной архитектуре сложение двух 64-разрядных $\to$ сложение младших разрядов и прибавление бита переноса к сумме старших разрядов. Три машинных команды.

Числа (n) — те, которые занимают ровно n элементарных типов.

int есть числа (1), *longlong* — числа (2).

Большие числа требуют представления в виде массивов из элементарных типов.

Сколько операций потребуется для сложения двух чисел (n)?



Как умножать длинные числа?

Школьный алгоритм:

$O(n^2)$

Алгоритм быстрого умножения

Можно ли быстрее?

Алгоритм быстрого умножения

Можно ли быстрее?

Да. Используя принцип *разделяй и властвуй*.
Быстрый алгоритм умножения был изобретён Гауссом в 19 веке и переизобретён Анатолием Карацубой в 1960-м году.

Разделим число (n) на две примерно равные половины:

$$N_1 = Tx_1 + y_1$$
$$N_2 = Tx_2 + y_2$$

При умножении в столбик

$$N_1 \times N_2 = T^2 x_1 x_2 + T(x_1 y_2 + x_2 y_1) + y_1 y_2$$

.
Это - четыре операции умножения и три операции сложения. Число T определяет, сколько нулей нужно добавить к концу числа в соответствующей системе счисления.

Алгоритм Карацубы

Алгоритм Карацубы находит произведение по другой формуле:

$$N_1 \times N_2 = T^2 x_1 x_2 + T((x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1 x_2 - y_1 y_2) + y_1 y_2$$

$N_1 = 56,\ N_2 = 78,\ T = 10$

$$x_1 = 5, y_1 = 6$$
$$x_2 = 7, y_2 = 8$$
$$x_1 x_2 = 5 \times 7 = 35$$
$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = (5 + 6)(7 + 8) = 11 * 15 = 165$$
$$y_1 y_2 = 6 \times 8 = 48$$
$$N_1 \times N_2 = 35 * 100 + (165 - 35 - 48) * 10 + 48 = 4368$$

Три операции умножения и шесть сложения.

Основная теорема о рекурсии.

Оценка асимптотического времени алгоритма

Как определить, какой порядок сложности будет иметь рекурсивная функция, не проводя вычислительных экспериментов?

Рекурсия есть разбиение задачи на подзадачи с последующей консолидацией результата.
Пусть

- a — количество подзадач
- размер каждой подзадачи уменьшается в b раз и становится $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$.
- Сложность консолидации пусть есть $O(n^d)$.

Время работы такого алгоритма, выраженное рекуррентно, есть

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$$

Основная теорема о рекурсии

Пусть $T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$ для некоторых $a > 0, b > 1, d \geqslant 0$. Тогда

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & \text{если } d > \log_b a, \\ O(n^d \log n), & \text{если } d = \log_b a, \\ O(n^{\log_b a}), & \text{если } d < \log_b a. \end{cases}$$

Оценка сложности алгоритма Карацубы

- Коэффициент порождения задач $a = 3$.
- Коэффициент уменьшения размера подзадачи $b = 2$.
- Консолидация решения производится за время $O(n) \to d = 1$

Так как $1 < \log_2 3$, то это третий случай теоремы $\to$ сложность алгоритма есть $O(N^{\log_2 3})$.

Операция умножения чисел (n) при умножении в столбик имеет порядок сложности $O(n^2)$.

Много операций сложения $\to$ при малых N выгоднее «школьный» алгоритм.

Ещё о сложности

Введём вектор-столбец $\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, состоящий их двух элементов последовательности Фибоначчи и умножим его справа на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Для вектора-столбца из элементов F_{n-1} и F_n умножение на ту же матрицу даст:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Возведение в степень

Для нахождения $n-$го числа Фибоначчи достаточно вычислить $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Можно ли возвести число в n-ю степень за число операций, меньших $n-1$?

Быстрое вычисление степеней.

Возведение в квадрат есть умножение на себя.

$$x^{16} = (x^8)^2 = ((x^4)^2)^2 = (((x^2)^2)^2)^2$$

$$x^{18} = (x^9)^2 = ((x^8 \cdot x)^2)^2 = (((x^2)^2)^2 \cdot x)^2$$

Рекуррентная формула

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0 \\ (x^{\frac{n}{2}})^2 & \text{если } x \neq 0 \land n \mod 2 = 0 \\ (x^{n-1}) \times x & \text{если } x \neq 0 \land n \mod 2 \neq 0 \end{cases}$$

Рекурсивная функция быстрого умножения

SomeType — некий тип данных.

```
SomeType pow(SomeType x, int n) {
   if (n == 0) return (SomeType)1;
   if (n % 2 != 0) return pow(x, n-1) * x;
   SomeType y = pow(x, n/2);
   return y*y;
}
```

Оценка сложности быстрого умножения

$$25 = 11001_2$$

- n — нечётное $\to$ обнуление последнего разряда.
- n — чётное $\to$ вычёркивание последнего разряда.
- каждую из единиц требуется уничтожить, не изменяя количества разрядов.
- каждый из разрядов требуется уничтожить, не изменяя количества единиц.

Сложность есть $O(\log N)$.