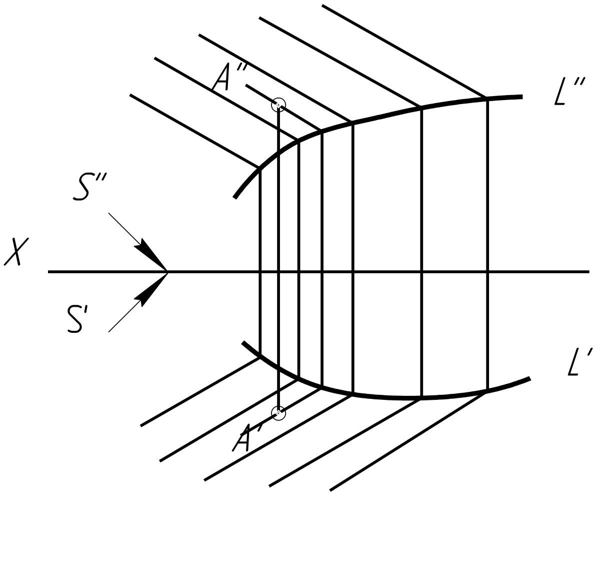
Министерство образования Российской Федерации
Рязанская государственная радиотехническая академия

В. П. Стрельников

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Рязань 2004

Министерство образования Российской Федерации

Рязанская государственная радиотехническая академия

В.П. СТРЕЛЬНИКОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Рязань 2004

УДК 515(015)
Начертательная геометрия: Учеб. пособие / В.П. Стрельников; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2004. 52 с.

Содержит краткие сведения по основным разделам теории начертательной геометрии. Каждый раздел сопровождается иллюстрированными примерами чертежей и показывается методика их построения. Для каждого раздела приведены варианты заданий для студентов.

Предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения.

Табл. 1. Ил. 116. Библиогр.: 6 назв.

Начертательная геометрия, точка, линия, плоскость, поверхность.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра начертательной геометрии и черчения Рязанской государственной радиотехнической академии.

С т р е л ь н и к о в Виктор Павлович

Начертательная геометрия

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор Н.А. Орлова
Лицензия № 020446.
Подписано в печать 20.10.04. Формат бумаги 60x84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,25.
Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ
Рязанская государственная радиотехническая академия.
390005, Рязань, ул.Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТА.

Введение

Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, в котором изучают способы изображения пространственных форм (линий, плоскостей, поверхностей) на плоскости чертежа и решают позиционные и метрические задачи по заданным изображениям данных форм.

К позиционным задачам относятся задачи, в которых выясняются позиционные отношения между геометрическими элементам. Это задачи на их видимую принадлежность или пересечение.

К метрическим относятся задачи, в которых определяются измеряемые величины: это расстояния между геометрическими элементами и углы между ними.

Любое инженерное творчество – это создание каких-то геометрических образов. Способами начертательной геометрии и графическими построениями осуществляется конструирование этих образов. Инженер получает информацию зрением, а не обонянием или слухом. Составлением и обработкой этой информации занимается начертательная геометрия. Обмен информацией между людьми осуществляется в виде закодированной геометрии. Роль начертательной геометрии возрастает в связи с компьютеризацией процессов конструирования. Способы начертательной геометрии – это единственные способы при конструировании поверхностей.

Начертательная геометрия – единственная наука, формирующая пространственное мышление. Она является основой инженерного образования.

Система обозначений геометрических образов и действий

A, B, C … – точки пространства (заглавные буквы латинского алфавита)
a, b, c … – линии в пространстве (строчные буквы латинского алфавита)
α, β, γ … – плоскости, поверхности (строчные буквы греческого алфавита)
$[AB]$ – отрезок прямой
A^{α} – проекция точки A на плоскость α
$||$ – параллельность
$\cap$ – пересечение, например $[AB] \cap [CD] = K$
$\supset$ – взаимная принадлежность, например $a \subset \alpha$ (линия a принадлежит плоскости или поверхности α)
$\equiv$ – совпадение геометрических образов

Метод проекций

Через точку *A* проведём прямую *S* перпендикулярно к плоскости α (рис. 1). Прямая *S* есть направляющая или проецирующая прямая.

Плоскость α – плоскость проекции. Точка A^{α} есть проекция точки *A*, которая получается от пересечения прямой *S* с плоскостью α. Такое проецирование называется прямоугольным или ортогональным $S \perp \alpha$.

В случае, когда угол между *S* и α не равен 90°, проецирование называется косоугольным.

На рис. 2 проекция фигуры *J* (J^{α}) есть множество проекций её точек. Проецирующие прямые *S* параллельны друг другу.

Такое проецирование называется параллельным.

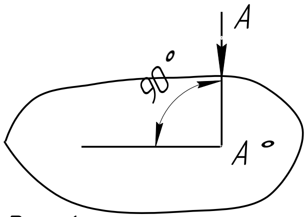


Рис. 1

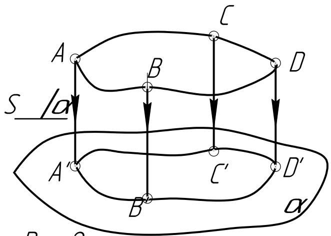


Рис. 2

Инвариантные (неизменные) свойства параллельного проецирования

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой есть прямая, если она не совпадает с направлением проецирования (рис. 3). Для любой прямой, параллельной *S* (совпадающей с направлением проецирования), проекция прямой является точка (рис. 4).

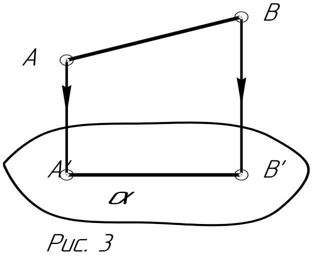


Рис. 3

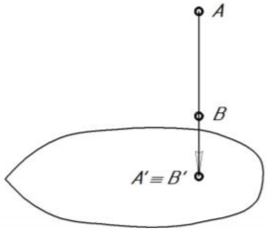


Рис.4

3. а) если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции линии;

б) если линия принадлежит поверхности или плоскости, то проекция линии принадлежит проекции поверхности или плоскости;

в) если точка принадлежит линии и линия принадлежит плоскости или поверхности, то проекция точки принадлежит проекции поверхности или плоскости;

г) если фигура принадлежит поверхности или плоскости и поверхность или плоскость параллельна направлению проецирования, то проекция этой фигуры принадлежит их следу (рис. 5).

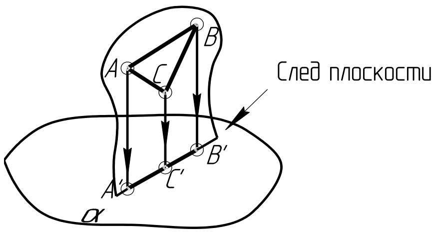


Рис. 5

4. Если прямые в пространстве параллельны, то проекции этих прямых также параллельны.
5. Если фигура принадлежит поверхности и поверхность параллельна плоскости проекции, то проекция этой фигуры равна самой фигуре (рис. 6).
6. При ортогональном (прямоугольном) проецировании, если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекции и другая сторона не перпендикулярна к плоскости проекции, то проекция прямого угла есть прямой угол (рис. 7).

$$\frac{\text{пл. } \alpha \parallel \text{пл. } \beta}{\Delta ABC = \Delta A'B'C'}$$

$$\frac{AB \parallel \alpha \qquad BC \text{ не } \perp \alpha}{\angle ABC = 90^\circ \qquad \angle A'B'C' = 90^\circ}$$

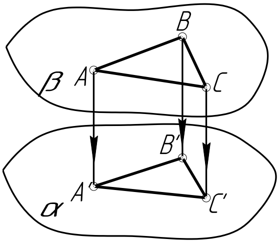


Рис. 6

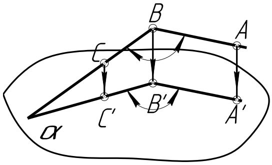


Рис. 7

Прямоугольное (ортогональное) проецирование точки на три плоскости проекции

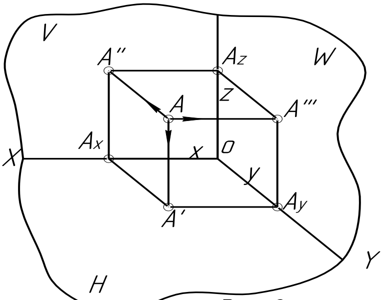


Рис. 8

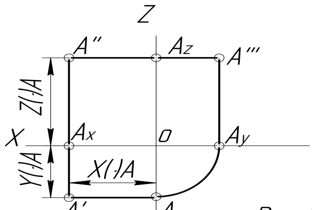


Рис. 9

Положение точки (а следовательно, и любой геометрической фигуры) может быть определено, если будет задана какая-нибудь координатная система. Очень удобной для фиксации геометрической фигуры является декартова система координат (Декарт – французский математик и философ), состоящая из трёх взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций. В пространстве трёхгранного угла, образованного плоскостями проекций: *V* (вертикальной), *H* (горизонтальной), *W* (профильной), точка определяется тремя координатами: *X, Y* и *Z*. Линии пересечения плоскостей проекций образуют оси координат *X*, *Y* и *Z*. Точка пересечения координатных осей (точка *O*) принимается за начало отсчёта координат.

Пользоваться пространственным макетом (рис. 8) для отображения ортогональных проекций неудобно из-за его громоздкости. Поэтому пользуются эпюром, т.е. чертежом, составленным из двух или более связанных между собой проекций геометрических фигур (рис. 9).

Преобразование пространственного макета в эпюр производится совмещением плоскостей *H* и *W* с фронтальной плоскостью проекции *V*.

На рис. 9 изображены три проекции точки *A*, причём проекция точки A''' может быть построена следующим образом.

Из фронтальной проекции точки (A''') проводим прямую, $\perp$ -ю оси *Z*, и на этой прямой от оси *Z* откладываем отрезок равный, координате *Y* точки. Следует заметить, что две проекции точки A'' и A' вполне определяют положение точки в пространстве, поэтому чаще всего на эпюре изображают две проекции геометрического образа (как правило, на горизонтальной и фронтальной плоскостях).

<u>Пример.</u> Построить точку *A* с координатами *X*=50, *Y*=40, *Z*=60 (рис.10).

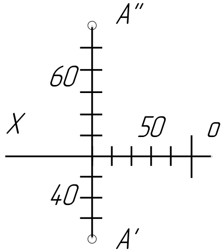


Рис. 10

Эпюр прямой линии

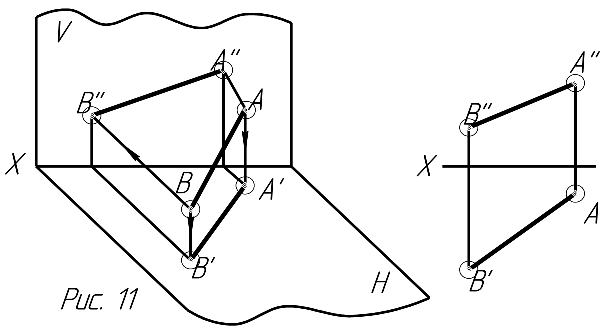


Рис. 11

A(*Y*,*Z*) $Y \neq Z$
B(*Y*,*Z*) $Y \neq Z$

Это прямая общего положения.

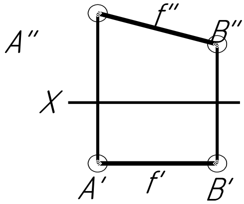


Рис. 12

$Y(\cdot)A = Y(\cdot)B,\ A'B' \parallel x$

$Z(\cdot)A \neq Z(\cdot)B,\ AB \parallel$ пл. V

Это фронтальная прямая (фронталь), обозначается буквой *f*.

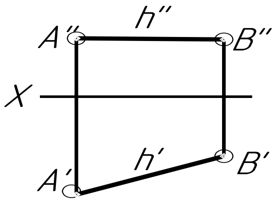


Рис. 13

$A''B'' \parallel x$

$A'B'$ не $\parallel x$

$AB \parallel H$

Это горизонтальная прямая (горизонталь). Обозначается буквой *h*.

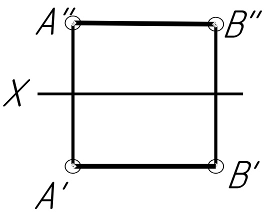


Рис. 14

$$\left.\begin{aligned} A''B'' &\parallel x \\ A'B' &\parallel x \end{aligned}\right\} \quad AB \parallel H$$

Это линия уровня.

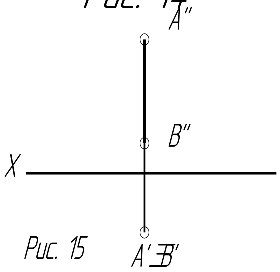


Рис. 15

$$\left.\begin{aligned} &A''B'' \perp x \\ &A' \equiv B' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &AB \perp H \\ &AB \parallel V \end{aligned}$$

Это горизонтально-проецирующая прямая.

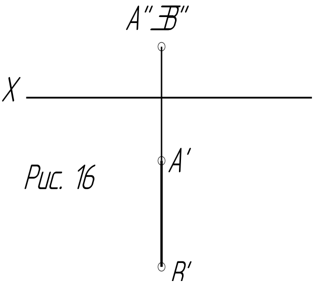


Рис. 16

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \perp x \\ A'' \equiv B'' \end{array}\right\} \begin{array}{l} AB \perp V \\ AB \parallel H \end{array}$$

Это фронтально-проецирующая прямая.

Изображение плоскости

Плоскость может быть задана на чертеже:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой.

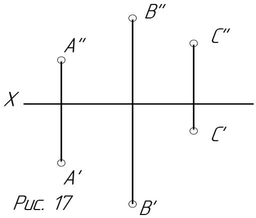


Рис. 17

2. Прямой и точкой вне прямой.

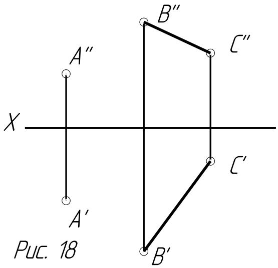


Рис. 18

3. Двумя пересекающимися прямыми линиями.

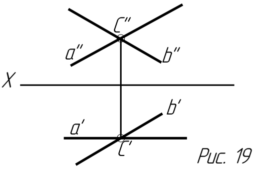


Рис. 19

4. Двумя параллельными прямыми линиями.

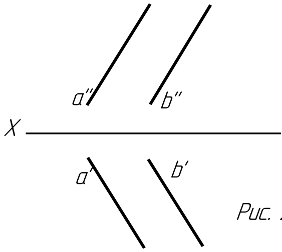


Рис. 20

О положении плоскости относительно плоскостей проекций удобно судить по её следам. Следами плоскости называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций.

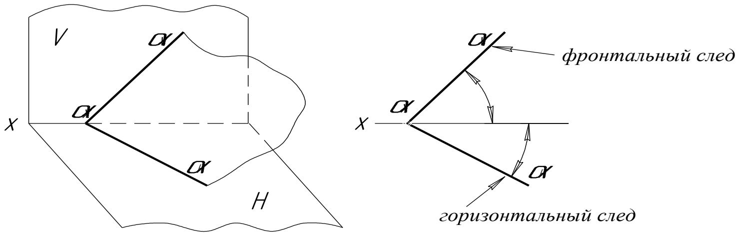


Рис. 21

На рис. 21 представлена плоскость общего положения.

Относительно плоскостей проекций плоскости могут занимать и частные положения.

1.

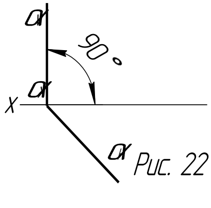


Рис. 22

$\alpha_V \perp x$ пл. $\alpha \perp H$

Это горизонтально-проецирующая плоскость (рис.22).

2.

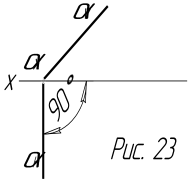


Рис. 23

$\alpha_H \perp x$

пл. $\alpha \perp V$

Это фронтально-проецирующая плоскость (рис.23).

3.

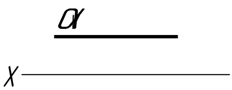


Рис. 24

$\alpha_V \parallel x$

пл. $\alpha \parallel H$

Это фронтально-проецирующая плоскость, называемая плоскостью уровня (рис.24).

4.

Рис. 25

пл. $\alpha \parallel V$ $\alpha_H \parallel x$

Это горизонтально-проецирующая плоскость, параллельная плоскости V (рис.25).

Аксонометрические (наглядные) проекции

В практике черчения часто бывает необходимо вместе с чертежом геометрической фигуры, выполненным в ортогональных проекциях, дать её наглядное изображение, состоящее только из одной проекции, т.е. путём параллельного проецирования предмета только на одну плоскость вместе с тремя осями координат (X, Y и Z).

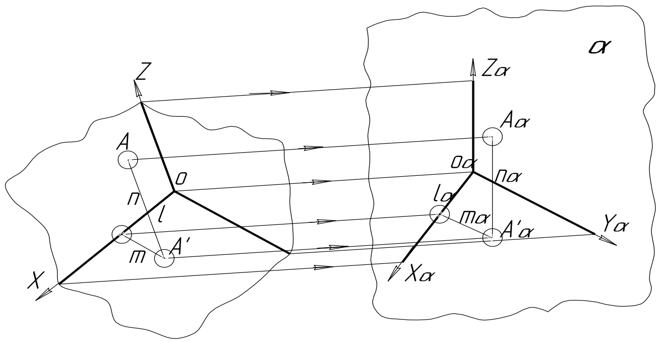


Рис. 26

Пространственная координатная ломаная точка $A(l + m + n)$ (рис. 26) проецируется на одну плоскость проекций α в плоскую координатную ломаную точку $A_\alpha(l_\alpha + m_\alpha + n_\alpha)$.

Отношение проекций любой из пространственных координат точки $A_\alpha(l_\alpha$, m_α или $n_\alpha)$ к натуральным, пространственным координатам этой точки называется показателем (коэффициентом) искажения по аксонометрическим осям.

$$K_1 = \frac{l_\alpha}{l}; \qquad K_2 = \frac{m_\alpha}{m}; \qquad K_3 = \frac{n_\alpha}{n};$$

Если три коэффициента равны между собой, то аксонометрическая проекция называется изометрической.

Если равны между собой только два коэффициента, то проекция называется диметрической проекцией.

Если все коэффициенты не равны – проекция называется триметрической.

В начертательной геометрии рассматривается теорема о свойствах показателей искажения по аксонометрическим осям.
Вывод этой теоремы следующий:

Сумма квадратов показателей искажения по аксонометрическим осям равна двум:

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 2$$

В практике черчения чаще всего применяется изометрическая проекция, где все показатели равны между собой. И тогда получается

$K^2 + K^2 + K^2 = 2$.

$3K^2 = 2$, отсюда $K = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$: X : Y : Z ≈ 0,82 : 0,82 : 0,82

Это теоретическая изометрия.

Но показатель неудобен из-за своей двузначности, и его упрощают, приведя к единице. И тогда получается

X : Y : Z ≈ 1 : 1 : 1

Изометрия в последнем случае называется практической. Размеры с ортогональных проекций предметов без изменения переносятся в проекцию изометрическую.

Пример. По заданным координатам точки *A*(40,60,50) построить три проекции в системе декартовых координат и прямоугольную изометрическую проекцию (рис.27).

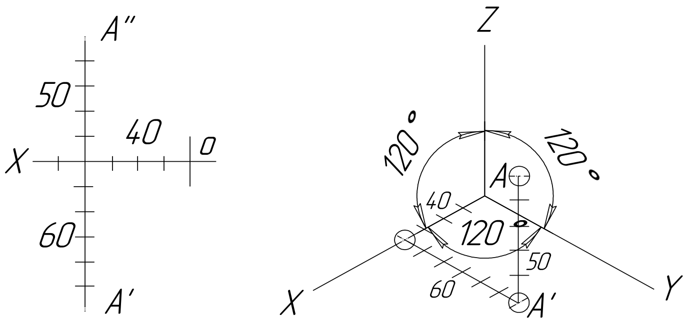


Рис. 27

Позиционные задачи

I. Задачи на принадлежность

1. Задать в плоскости произвольную прямую.

Признак принадлежности прямой и плоскости.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то эта прямая принадлежит плоскости.

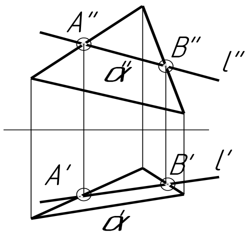


Рис. 28

Чтобы задать в плоскости произвольную прямую, надо провести её через две точки, принадлежащие данной плоскости. Эти точки (рис. 28) *A* и *B* берём на сторонах плоскости треугольника.

2. Задать в плоскости произвольную точку.

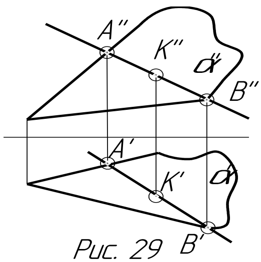


Рис. 29

Эту точку надо взять на прямой, принадлежащей плоскости (рис. 29).

3. Зная одну проекцию точки, принадлежащей плоскости или поверхности, найти её вторую проекцию.

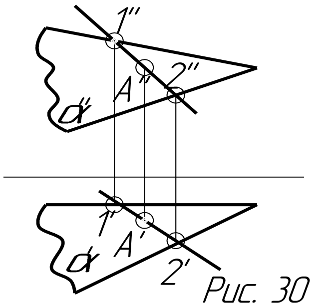


Рис. 30

Для этого через заданную проекцию точки *A* на плоскости проводим произвольную прямую (1 – 2). Находим вторую проекцию проведённой прямой. Затем по линиям связи находим вторую проекцию точки
(рис. 30).

4. Построить прямую принадлежащую проецирующей плоскости. На основании третьего инвариантного свойства (см. рис.5).

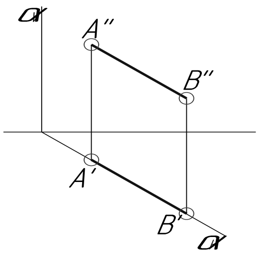


Рис. 31

Пл. α || направлению прямоугольного проецирования *S* (рис. 31).

5. Построить горизонталь в плоскости.

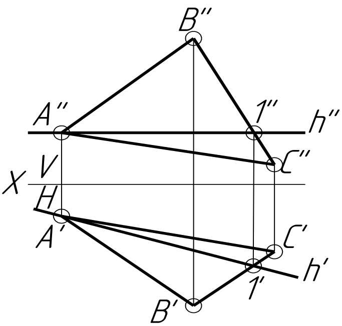


Рис. 32

Горизонталью в плоскости называется прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекции.

$h'' \parallel X$,   горизонталь $h \parallel$ пл. H (рис. 32).

6. Построить фронталь в плоскости.

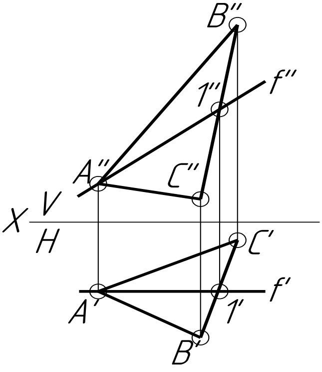
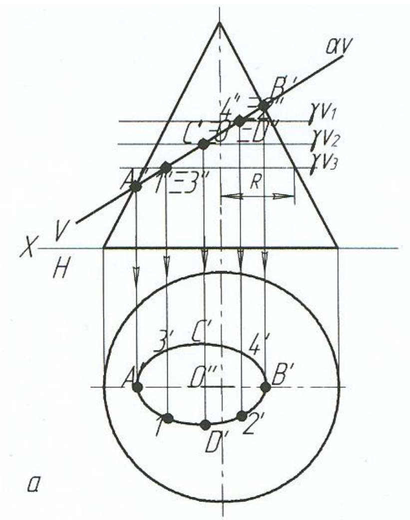


Рис. 33

$f' \parallel X$,

фронталь $f \parallel$ пл. V (рис. 33).



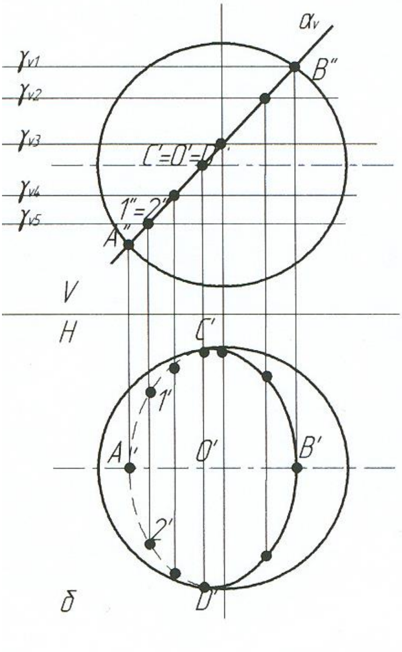
4. Построить линию пересечения конуса проецирующей плоскостью α.

В этом случае, если плоскость пересекает все образующие конуса, в сечении на поверхности образуется эллипс.

На плоскости V большая ось AB($A''B''$) и сам эллипс совпадают и проецируются в одну прямую.

Горизонтальной проекцией эллипса будет тоже эллипс. Большая ось находится по линии связи. Малая ось проходит через середину большой оси.

На пл. Н малую ось находят с помощью вспомогательной



горизонтальной секущей плоскости γ_2(γ_{V2}).

Точки *1-2-3-4* выбирают произвольно. Их горизонтальные проекции находят с помощью вспомогательных секущих плоскостей γ_1 и γ_3 (рис.39).

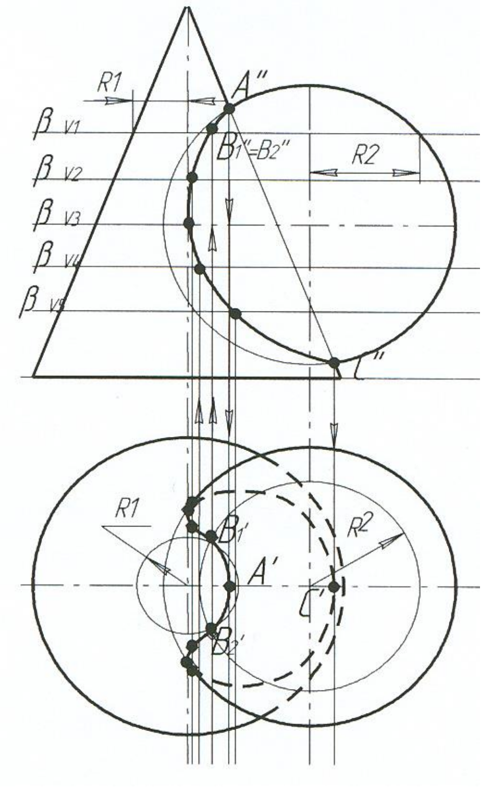
ис.

5. Построить сечение сферы проецирующей плоскостью α (рис. 40).

При пересечении сферы плоскостью образуется окружность. Диаметр её - *AB*. Проекция окружности на плоскость H есть эллипс. Его большая ось *CD* (*C'D'*), а малая ось *AB* (*A'B'*). Точки *A* и *B* расположены на главном меридиане шара. Точки *1-2* (*1'-2'*) – видимости эллипса, расположены на экваторе шара.

Рис.40

6. Построить линию пересечения двух поверхностей (конуса и сферы).



Искомая линия пересечения есть пространственная кривая линия. Её строят по точкам общим для обеих поверхностей конуса и сферы. Для этого используют метод вспомогательных секущих плоскостей β_1, β_2, β_3,… Их вводят так, чтобы они пересекали обе поверхности по простым линиям (по прямой или окружности). В данном примере (рис. 41) сначала находят так называемые характерные точки *A* и *C*. Это уже имеющиеся точки пересечения главного меридиана шара с образующей конуса, находящиеся в одной плоскости.

А далее необходимо:

1) ввести вспомогательную секущую плоскость (например, β_1);
2) построить линии пересечения вспомогательной секущей плоскости с каждой из заданных поверхностей. В данном примере это две окружности на шаре и конусе радиусами R_1 и R_2. Проводят горизонтальные проекции этих окружностей;
3) находят точки пересечения полученных линий окружностей сначала на плоскости H (B_1 и B_2), а затем по линии связи на плоскости V в этой же плоскости β_1;
4) этот алгоритм нахождения точек повторяют n раз.

Поверхности

В начертательной геометрии поверхность рассматривается как совокупность некоторой перемещающейся в пространстве по заданной программе линии. Эта подвижная линия может оставаться неизменной, а может менять свою форму – перегибаться или деформироваться, и называется она образующей. Эта образующая при своем движении скользит по другой неподвижной линии, которая называется направляющей. Наиболее распространенный способ задания поверхности на чертеже – кинематический. При этом задаются несколько положений образующей линии и положение одной или нескольких направляющих (рис.42).

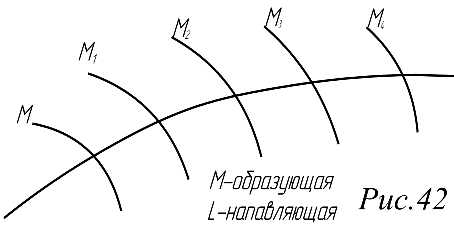


Рис.42

Таким образом поверхность определяют геометрические фигуры (точки, линии, поверхности), с помощью которых могут быть образована поверхность и порядок ее формирования с помощью этих фигур.

Линейчатые развертываемые поверхности

Цилиндрическая поверхность

Образована прямолинейной образующей, перемещающейся по криволинейной направляющей. При этом образующая остается параллельной заданному направлению S (рис. 43).

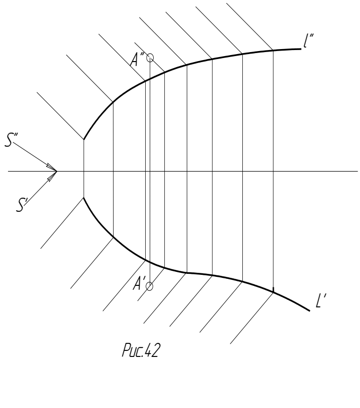
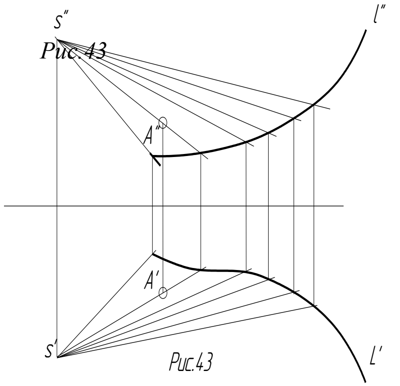


Рис.42



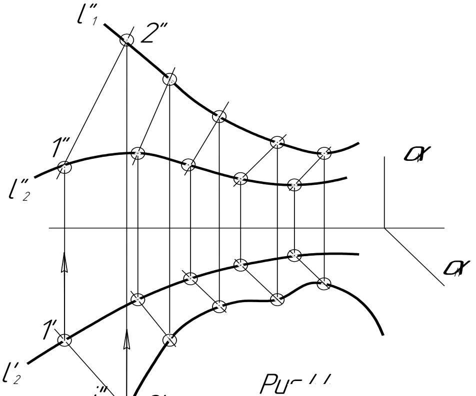
Коническая поверхность

Все прямолинейные образующие этой поверхности пересекаются в одной точке *S* (рис. 44).

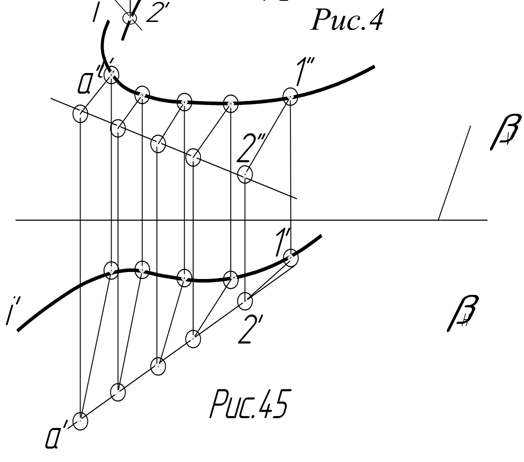
Рис.43

Линейчатые неразвертываемые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма

Цилиндроид



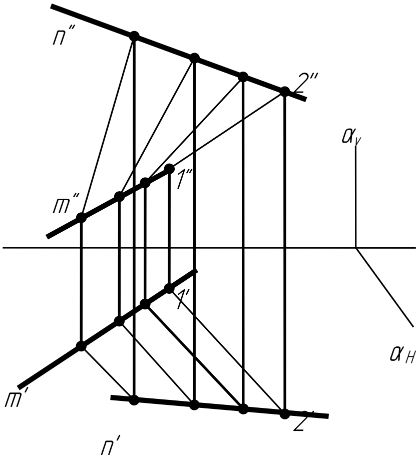
Образован направляющими l_1 и l_2 – это гладкие кривые линии. Образующие (например, 1-2) параллельны некоторой заданной плоскости параллелизма α ($1'$-$2' \parallel \alpha_H$) (рис. 45).



Коноид

Образован одной направляющей – кривой *l* и второй направляющей – прямой *a*. Образующие (например, *1*-*2*) в каждом своем положении параллельны некоторой плоскости параллелизма β ($1''$-$2''\parallel\beta_V$) (рис. 46).

Гиперболический параболоид (косая плоскость)



Образован скольжением образующей (например, *1*-*2*) по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим *m* и *n*. При этом образующая в каждом своем положении остается параллельной плоскости параллелизма α ($1'$-$2'\parallel\alpha_H$), (рис. 47а).

При пересечении ее плоскостями в сечении получаются парабола и гипербола.

Рис.47а

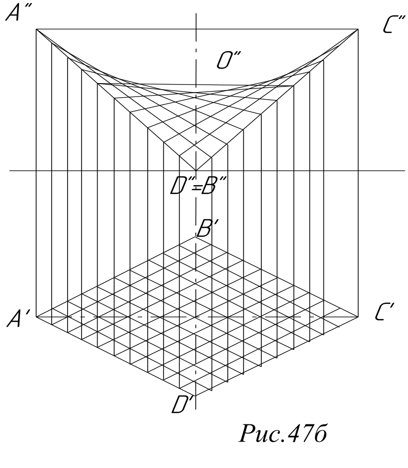


Рис.47б

В данном примере (рис. 47б) косой плоскости направляющих плоскостей параллелизма две: первой плоскости параллелизма параллельны образующие одной системы – это *AD* и *BC*, второй - образующие другой системы – это *AB* и *CD*. Плоскости параллелизма на рисунке не указаны.

Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида

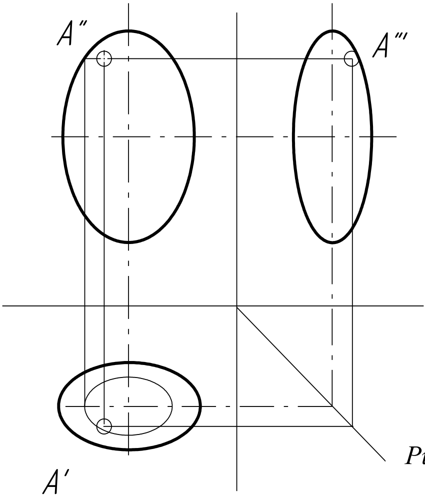


Рис.48

Трехосный эллипсоид

Образуется двумя направляющими эллипсами и деформирующейся образующей, тоже эллипсом, который начинается с одной точки, максимально расширяется в середине поверхности и снова превращается в точку, скользя по двум направляющим эллипсам (рис. 48).

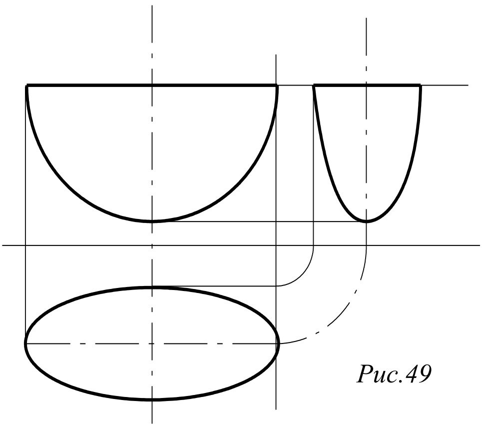


Рис.49

Эллиптический параболоид

Образуется двумя направляющими параболами и деформирующимся эллипсом (рис. 49).

Поверхность вращения общего вида

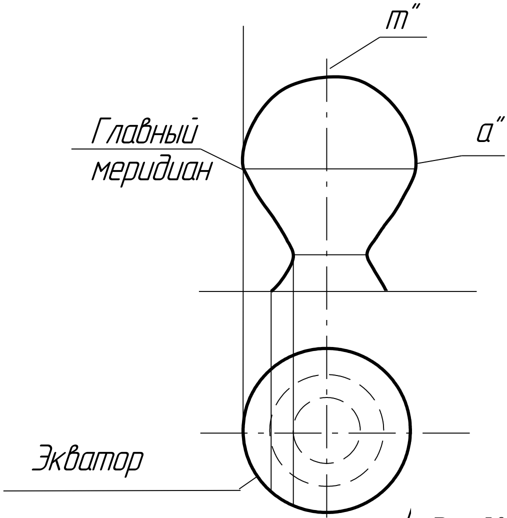


Рис.50

Это поверхность, образованная произвольной кривой (плоской или пространственной), при этом она вращается вокруг неподвижной оси.

В определители поверхности входят образующая *a*, ось вращения *m***.**

Каждая точка образующей *a* при вращении вокруг оси описывает окружность. Эти окружности называют параллелями. Наибольшая параллель называется экватором, наименьшая – горлом (шейкой) (рис. 50).

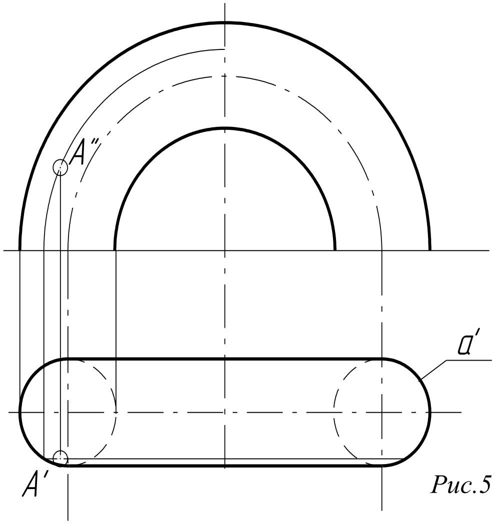


Рис.51

Поверхности вращения частного вида

Тор – поверхность, образованная вращением окружности *a* (образующая) вокруг оси *i* (рис. 51).

Эллипсоид вращения

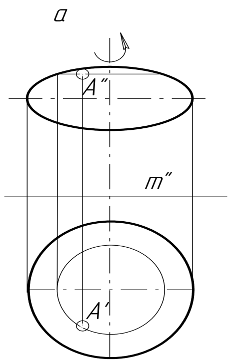


Рис.52а

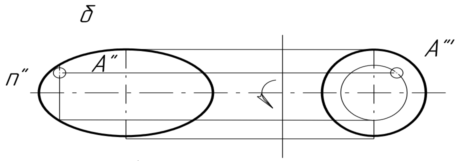


Рис.52б

Образован вращением эллипса вокруг своей оси. При этом, если за ось вращения принять ось *m*, получим сжатый эллипсоид вращения (рис. 52 а). Если вращение осуществлять вокруг большой оси *n*, образуется поверхность вытянутого эллипсоида вращения (рис. 52б).

Параболоид вращения

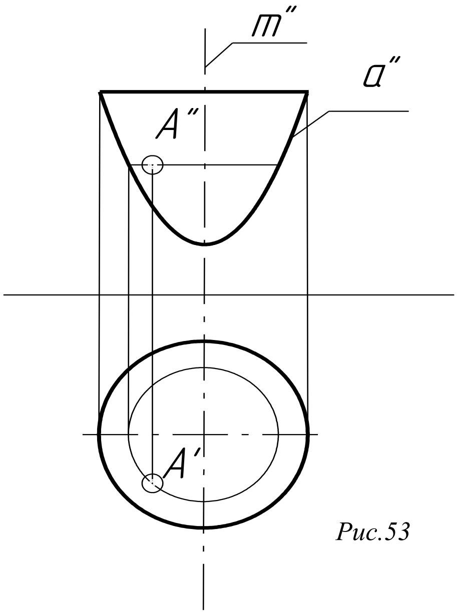


Рис.53

Образован вращением параболы *a* вокруг оси *m* (рис. 53).

Однополостный гиперболоид вращения

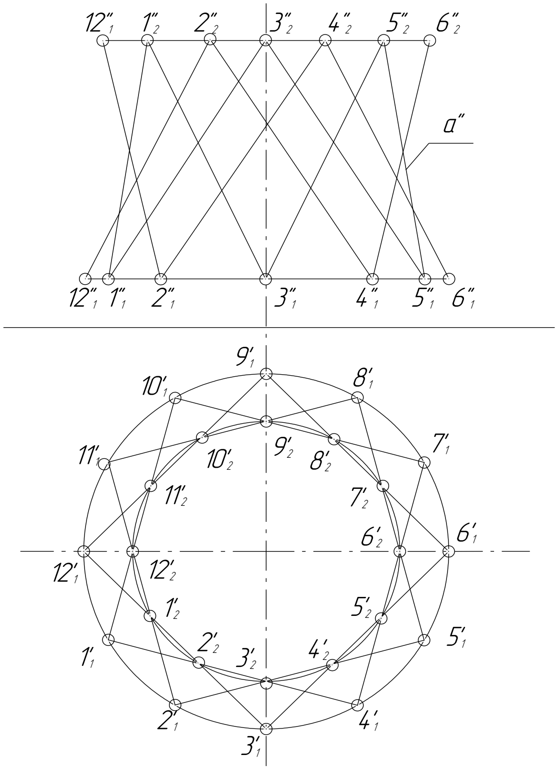


Рис. 54

Он в данном примере (рис.54) образован прямолинейной образующей *a* путем вращения ее вокруг оси *l*, скрещивающейся с ней. Плоскость, перпендикулярная к оси однополостного гиперболоида, рассекает его в данном случае по окружности.

Для построения проекций необходимо: разделить проекции окружностей на произвольное равное число частей, затем соединить прямой линией точку $1''$ нижней окружности с любой (кроме $1_2''$) точкой верхней окружности (это образующая). На чертеже точка $1_1''$ соединена с точкой $3_2''$, точка $2_1''$ с $4_2''$ и т.д. Соединив все точки деления нижней окружности с точками деления верхней окружности, получим проекции каркаса поверхности. Второй каркас этой же поверхности образован соединением первой точки верхней окружности с третьей точкой нижней окружности, точка $2_2''$ - с точкой $4_1''$, $3_2''$ с $5_1''$ и т.д.

Плоскость, проходящая через ось (*i*) поверхности, пересекает построенную поверхность по гиперболе. Отсюда и произошло название этой поверхности.

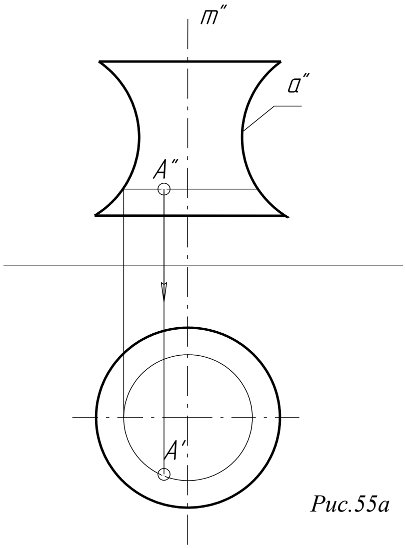


Рис.55а

Поверхность однополостного гиперболоида вращения можно получить также вращением гиперболы (*а*) вокруг ее мнимой оси (*m*), (рис. 55а)

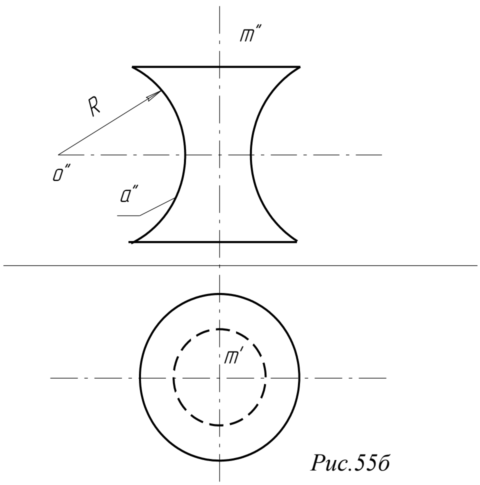


Рис.55б

Образующей а поверхности вращения, называемой глобоидом, является дуга окружности радиусом *R* (рис. 55б), а ось вращения линия *m* (*m”*-*m’*)

Винтовые поверхности

Поверхность называется винтовой, если она получается винтовым перемещением образующей линии. Данное перемещение характеризуется вращением этой линии вокруг оси и одновременно поступательным движением, параллельным этой оси.

Линейчатые винтовые поверхности называются геликоидами. Если образующая имеет угол с осью равный 90°, то геликоид называют прямым (рис.56), если угол произвольный, отличный от 0° и 90°, то геликоид называют косым или наклонным (рис.57).

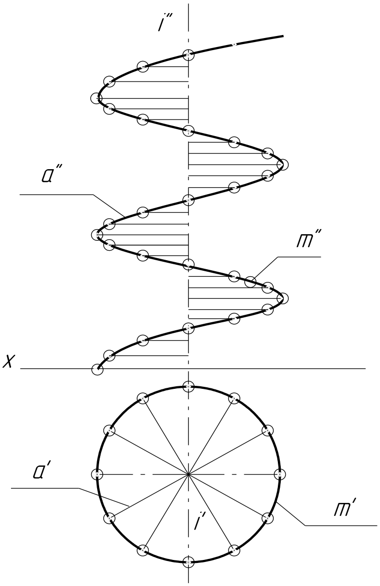


Рис.56

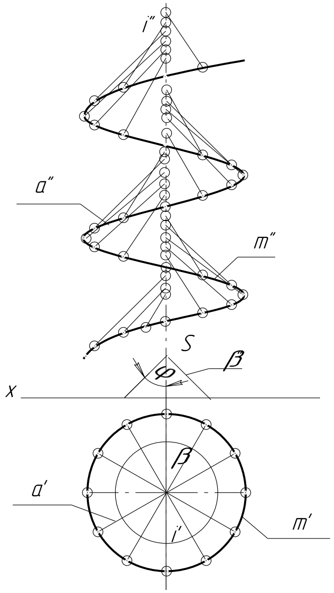


Рис.5

Линия *a* – образующая
Винтовая линия *m* – направляющая

Винтовая линия *m* – направляющая
Линия *a* – образующая, параллельная образующей конуса β

Поверхности, задаваемые каркасом

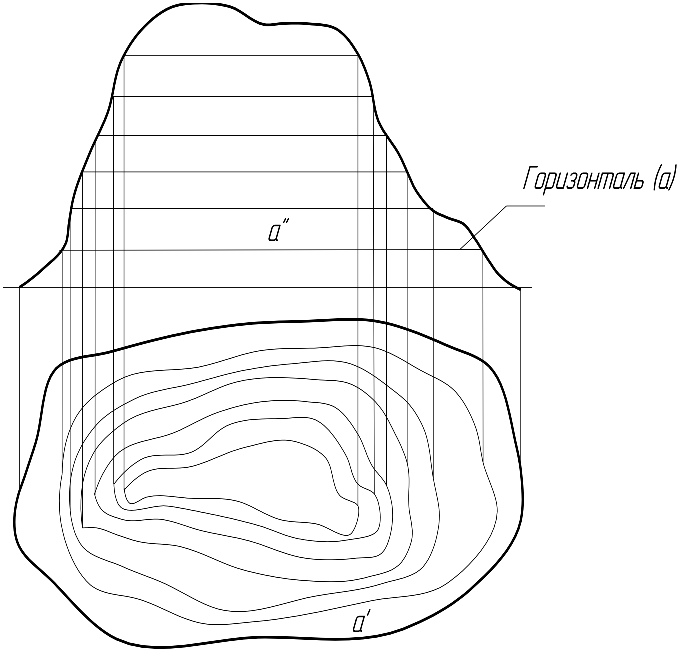


Рис.58

Примером поверхности, задаваемой каркасом, может служить топографическая поверхность (рис.58). Роль каркасных линий здесь выполняют горизонтали поверхности. Расстояния между горизонталями, как правило, берутся одинаковыми на фронтальной проекции. Горизонтальные проекции горизонталей определяются по линиям связи с вертикальными проекциями.

Метрические задачи

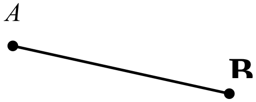
Эти задачи делятся на два типа:

1) задачи на определение расстояния между двумя точками;
2) задачи на нахождение угла между двумя прямыми.

Определение расстояния

В общем случае на одной плоскости встречаются следующие задачи (рис.59-63):

1. Определить расстояние от точки до точки.



i. *Рис.59*

2. Определить расстояние между двумя прямыми.

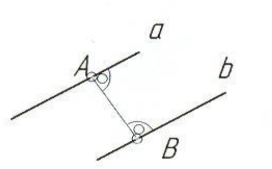


Рис.60

3. Определить расстояние между точкой и прямой.

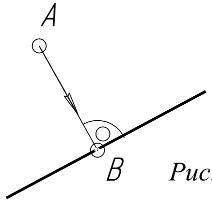


Рис.61

4. Определить расстояние от точки до плоскости.

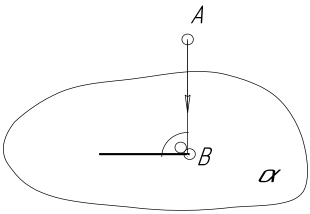


Рис.62

5. определить расстояние между двумя плоскостями (рис.63).

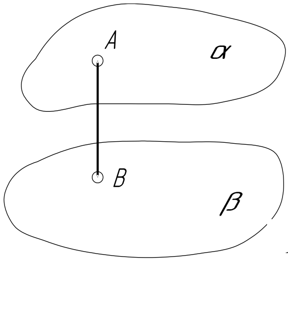


Рис.63

Во всех этих случаях задачи сводятся к определению расстояния от точки одного геометрического образа до точки другого.

6. Определение углов

В общем случае встречаются следующие задачи (рис.64-68):

1. Определить истинную величину угла между двумя прямыми.

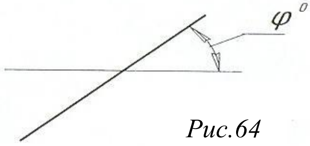


Рис.64

2. Определить истинную величину угла между прямой *a* и плоскостью *α*.

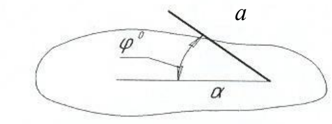


Рис.65

3. Определить истинную величину угла между двумя плоскостями α и β.

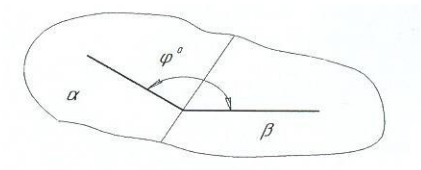


Рис.66

Метрические задачи

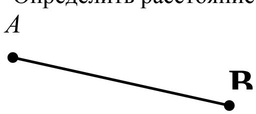
Эти задачи делятся на два типа:

3) задачи на определение расстояния между двумя точками;
4) задачи на нахождение угла между двумя прямыми.

Определение расстояния

В общем случае на одной плоскости встречаются следующие задачи (рис.59-63):

7. Определить расстояние от точки до точки.



i. *Рис.59*

8. Определить расстояние между двумя прямыми.

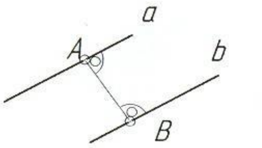


Рис.60

9. Определить расстояние между точкой и прямой.

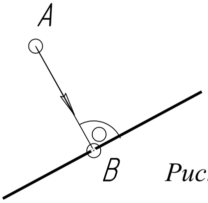


Рис.61

10. Определить расстояние от точки до плоскости.

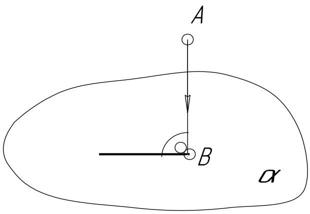


Рис.62

11. определить расстояние между двумя плоскостями (рис.63).

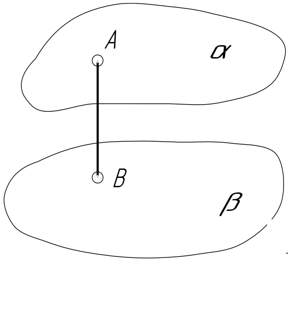


Рис.63

Во всех этих случаях задачи сводятся к определению расстояния от точки одного геометрического образа до точки другого.

12. Определение углов

В общем случае встречаются следующие задачи (рис.64-68):

4. Определить истинную величину угла между двумя прямыми.

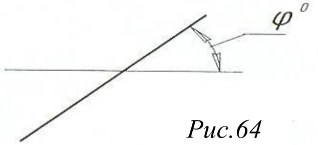


Рис.64

5. Определить истинную величину угла между прямой *a* и плоскостью *α*.

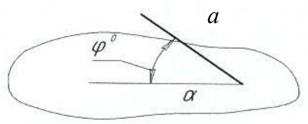


Рис.65

6. Определить истинную величину угла между двумя плоскостями α и β.

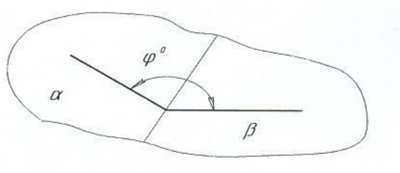


Рис.66

При перемене горизонтальной плоскости проекций выбираем новую ось проекций (x_1). Из фронтальной проекции точки проводим прямую перпендикулярную к новой оси проекций и на этой прямой (линии связи) от новой оси проекций откладываем величину координаты *у* точки для нахождения новой горизонтальной проекции точки.

<u>Пример 1.</u>

Произвести перемену плоскостей проекций так, чтобы отрезок прямой *AB* стал параллельным горизонтальной плоскости проекций (рис. 71).

В этом чертеже новая горизонтальная проекция

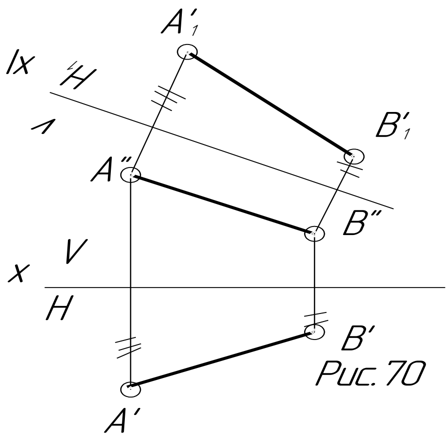


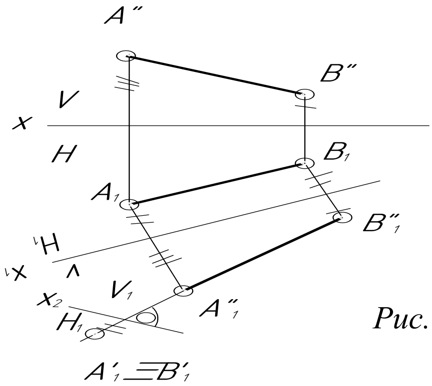
Рис. 70

отрезка ($A'_1B'_1$) есть истинная величина отрезка AB и расстояния между точками A и B.

Рис.71

<u>Пример 2.</u>

Произвести перемену плоскостей проекций таким образом, чтобы отрезок AB стал перпендикулярным к новой горизонтальной плоскости проекций (рис. 72).



$x_1 \parallel A'B''$
$x_2 \perp A''_1B''_1$

Рис.72

Способ вращения вокруг проецирующих прямых и прямых уровня

При вращении геометрического образа (например, точки) вокруг некоторой неподвижной оси, называемой осью вращения, каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Эта плоскость называется плоскостью вращения.

При этом точка перемещается по окружности, центр которой расположен на пересечении оси вращения с плоскостью вращения (это центр вращения), а радиус окружности (радиус вращения) равен расстоянию от вращаемой точки до центра вращения.

<u>Пример 1.</u>

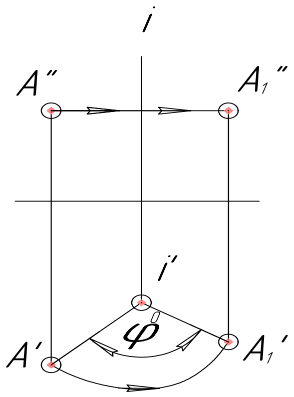


Рис.73

Повернуть точку A вокруг оси i на угол $\varphi°$ (рис.73).

Пример 2.

Отрезок прямой AB повернуть вокруг оси i так, чтобы он стал параллельным плоскости H (рис.74).

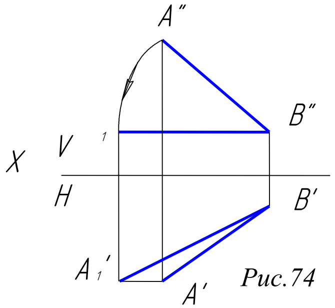


Рис.74

$$\frac{A''_1B'' \parallel x}{AB \parallel H}$$

A'_1B' – натуральная величина отрезка AB

Определение расстояний между двумя точками

Пример 1

Определить расстояние между точками A и B.

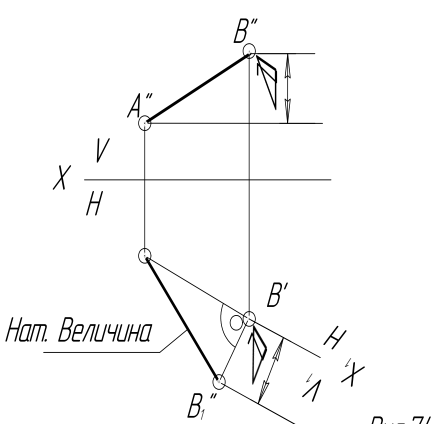


Рис.74

Соединить точки A и B. Найти натуральную величину отрезка AB способом прямоугольного треугольника. Этот способ является упрощенной схемой способа перемены плоскостей проекций. Переводим отрезок AB в положение, параллельное какой-либо плоскости проекций (в данном примере || пл. V_1), (рис.75).

Рис.75

<u>Пример 2</u>
Определить расстояние от точки до плоскости.

<u>Признак перпендикулярности прямой и плоскости.</u>

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости.

В соответствии с признаком перпендикулярности прямой и плоскости в плоскости ΔABC (рис.76) проводим две пересекающиеся прямые – горизонталь h и фронталь f, являющиеся наиболее выгодными прямыми, могущими составлять угол 90° с прямой, проведенной через т. D непосредственно на чертеже, в соответствии с инвариантным свойством проецирования прямого угла. При этом фронтальная проекция перпендикуляра составляет угол 90° с фронтальной проекцией фронтали f ($D''K'' \perp f''$), а горизонтальная проекция перпендикуляра составляет угол 90° с горизонтальной проекцией горизонтали h ($D'K' \perp h'$). Надо сказать, что искомый перпендикуляр с горизонталью и фронталью скрещивается под углом 90°. В дальнейшем находим точку встречи перпендикуляра с плоскостью треугольника ΔABC (точка K'). Натуральную величину его находим способом прямоугольного треугольника.

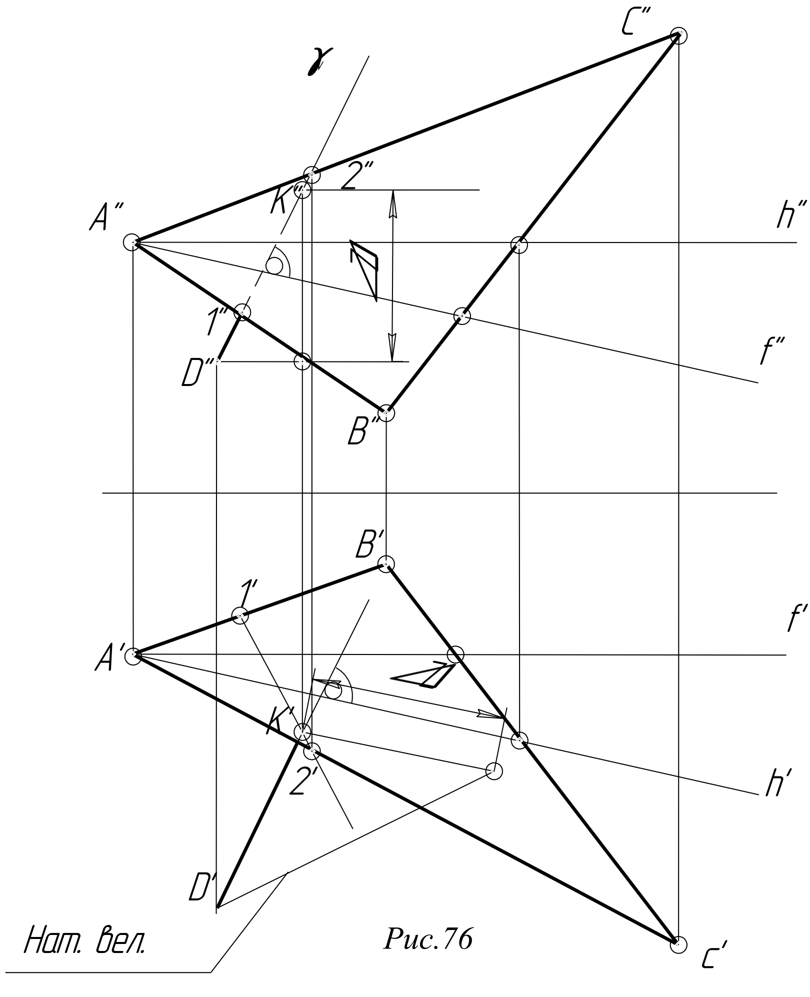


Рис.76

Определение углов ^φ° = ?

<u>Пример 1</u>

Определить величину угла между двумя плоскостями ΔABC и ΔBCD.

$x_1 \parallel B'C' \rightarrow$ пл. $V_1 \parallel BC$
$x_2 \perp B''_1C''_1 \rightarrow$ пл. $H_1 \perp BC$

$\angle\alpha^\circ$ истинный
(рис. 77)

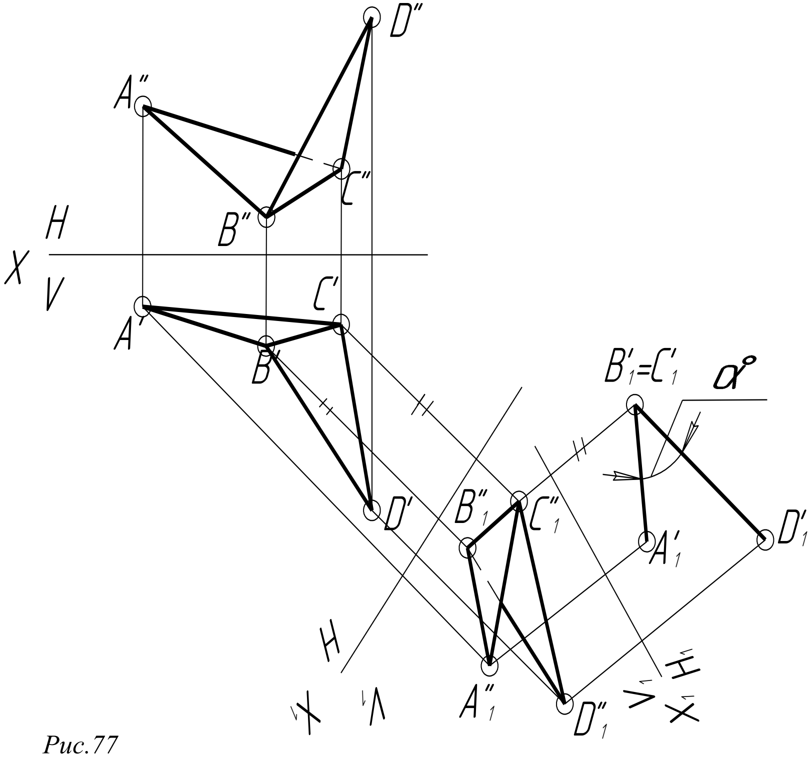


Рис.77

Пример 2

Определить натуральную величину ΔABC.

$x_1 \perp$ горизонтали h (h')
пл. $V_1 \perp$ горизонтали h
$x_2 \parallel A''B''C''$
пл. $\Delta ABC \parallel$ пл. H_1

$\Delta\ A'_1B'_1C'_1$ – нат. величина
(рис.78)

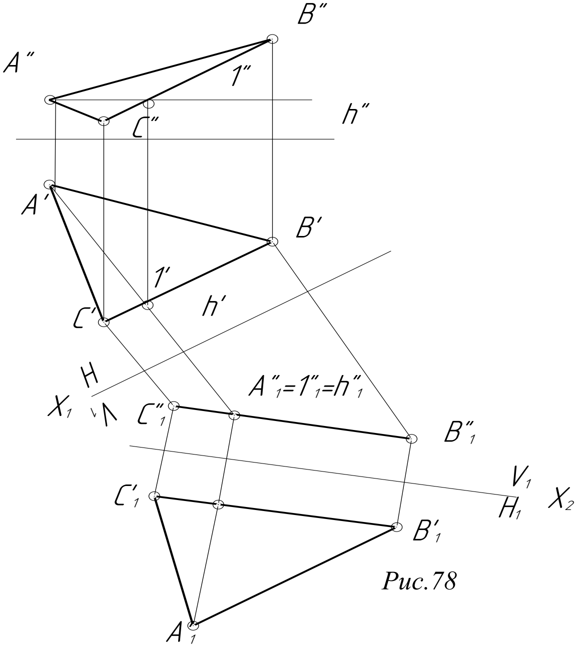


Рис.78

<u>Задание 1</u>

По данным координатам точек в таблице вариантов построить три проекции пирамиды в системе декартовых координат и прямоугольную изометрическую проекцию этой пирамиды (рис.79). Показать видимость её рёбер.

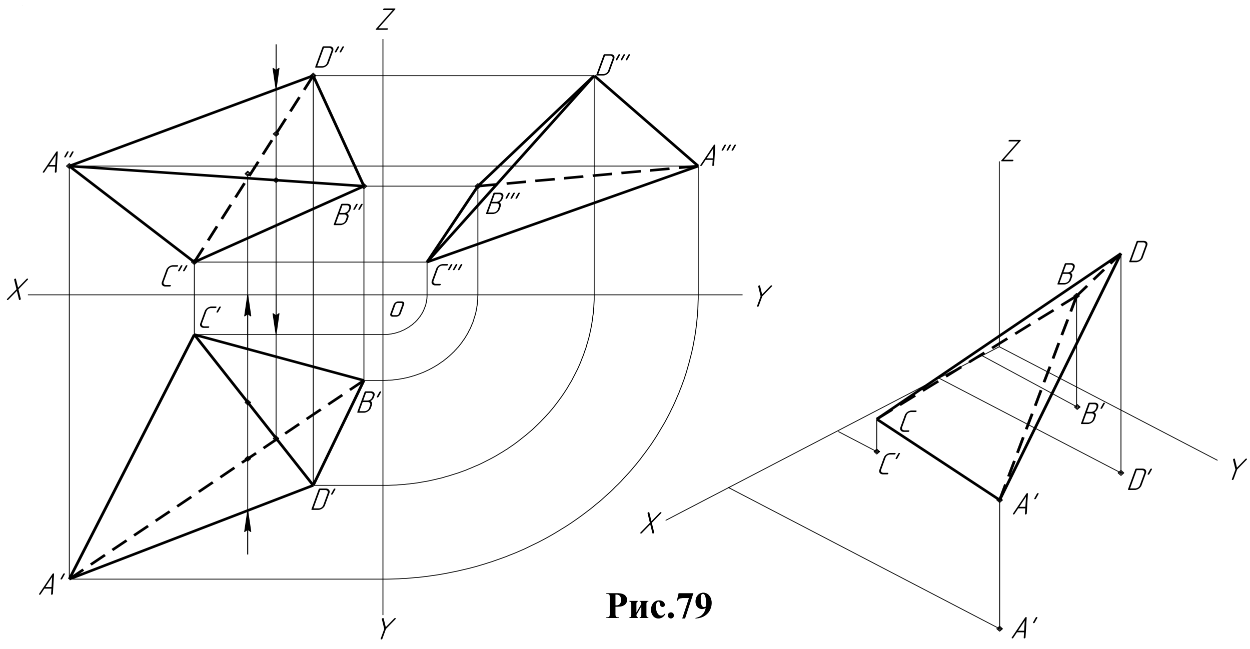


Рис.79

№ вар	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	16	14	90	86	80	26	132	52	82	75	85	110
[illegible]	[illegible]	[illegible]	92	85	80	25	136	50	84	68	85	112
[illegible]	[illegible]	[illegible]	86	80	72	20	132	48	82	70	82	106
[illegible]	[illegible]	[illegible]	39	84	80	109	136	49	48	70	84	19
[illegible]	[illegible]	[illegible]	86	52	78	26	0	52	86	72	86	110
[illegible]	[illegible]	[illegible]	90	86	80	26	136	50	85	70	85	112
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	54	28	82	0	80	45	65	105	80
[illegible]	[illegible]	[illegible]	9	83	26	80	134	84	47	67	109	84
[illegible]	[illegible]	[illegible]	90	52	80	26	0	44	82	72	86	108
[illegible]	[illegible]	[illegible]	76	83	118	5	134	48	39	68	19	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]	94	50	82	26	0	52	86	70	[illegible]	108
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12	52	22	75	0	82	48	70	[illegible]	86
[illegible]	[illegible]	[illegible]	45	83	80	112	134	49	45	68	[illegible]	19
[illegible]	[illegible]	[illegible]	40	84	6	108	133	39	48	68	[illegible]	20
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	50	25	80	0	85	50	70	[illegible]	85
[illegible]	[illegible]	[illegible]	86	86	81	25	134	51	80	70	86	111
[illegible]	[illegible]	[illegible]	39	51	80	110	0	47	48	68	84	19
[illegible]	[illegible]	[illegible]	8	53	110	80	0	48	47	68	19	84
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	84	109	78	136	48	47	69	19	86
[illegible]	[illegible]	[illegible]	76	51	109	7	0	49	39	139	19	0
21	121	38	74	50	107	5	0	46	40	135	19	0
22	19	41	9	82	110	80	136	47	47	68	19	86
23	117	41	75	51	108	7	0	48	37	134	21	0
24	116	75	39	51	5	108	0	38	46	136	45	19
25	118	89	10	53	26	80	0	70	49	68	111	86
26	122	10	88	50	84	22	0	54	84	66	82	112
27	120	10	90	54	80	26	0	50	86	70	88	110
28	90	35	20	170	55	60	110	130	120	35	60	135

Задание 2. По заданным вариантам выполнить:
1) чертёж сферы или конуса с вырезом;
2) чертёж на построение линии пересечения (перехода) геометрических поверхностей, формат А3 (рис.80).

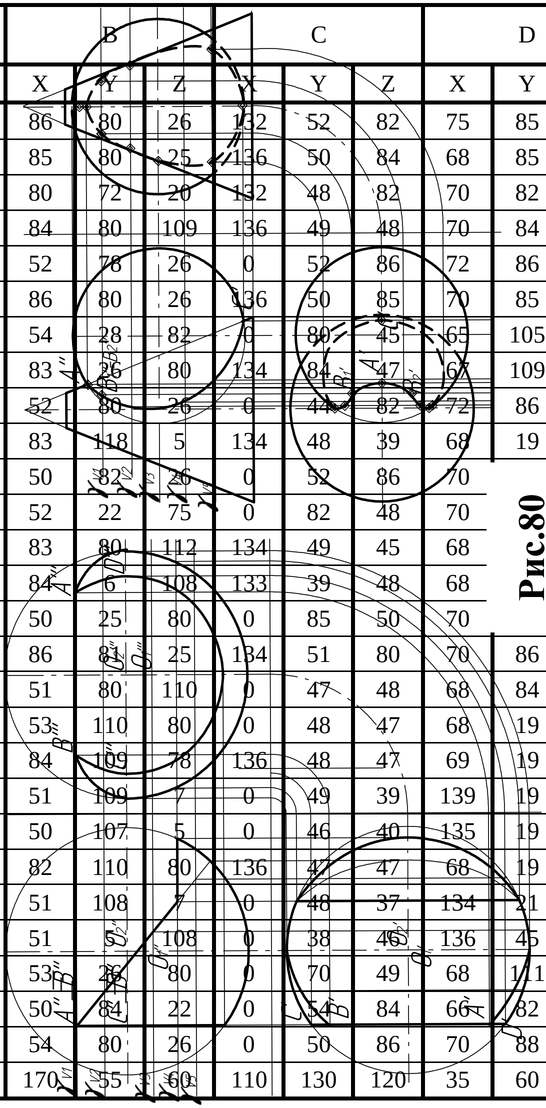
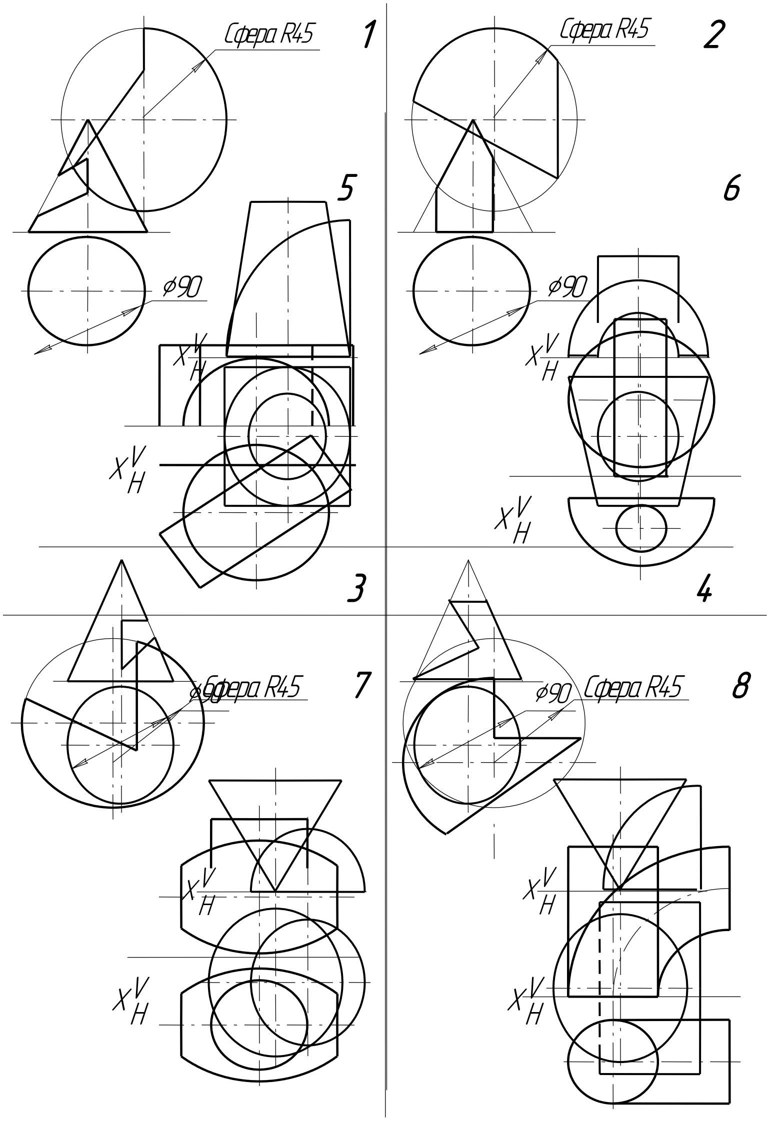
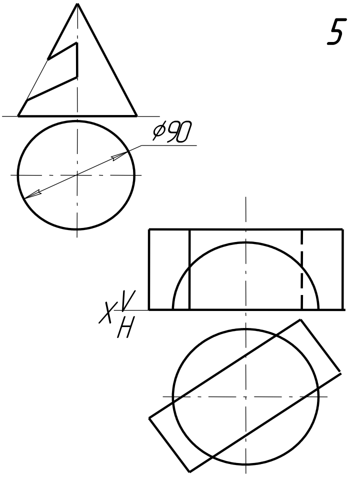


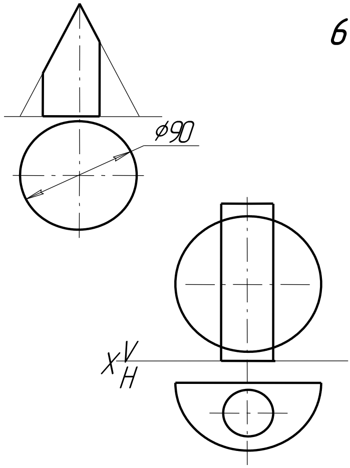
Рис.80


Сфера R45
1
2
5
6
ϕ90
ϕ90
X V H
3
4
7
8
Сфера R45
ϕ90
Сфера R45
ϕ90
Сфера R45

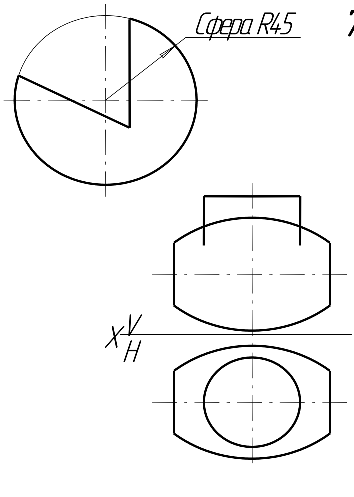
5



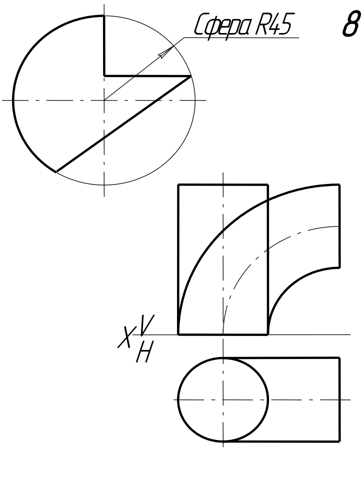
6

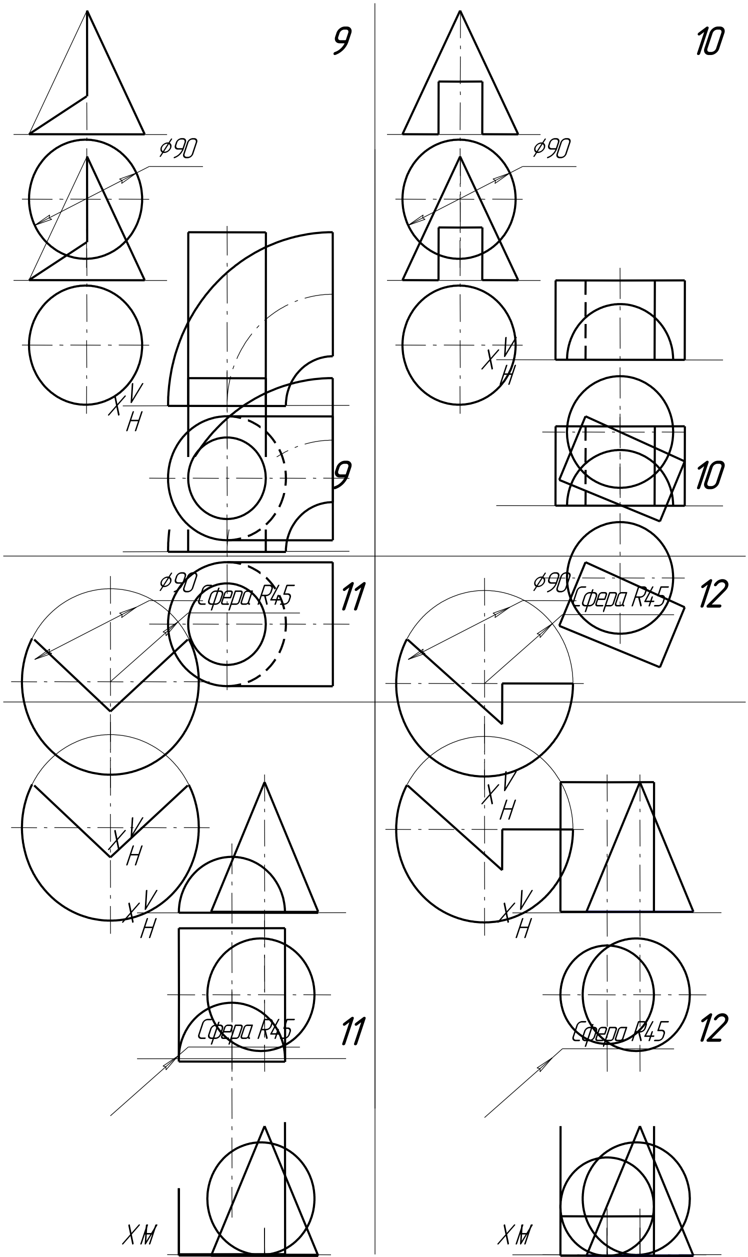


7



8




9
10
⌀90
⌀90
X V H
X V H
11
12
⌀90
⌀90
Сфера R45
Сфера R45
X V H
X V H

№ вар	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	16	14	90	86	80	26	132	52	82	75	85	110
2	20	10	92	85	80	25	136	50	84	68	85	112
3	16	12	86	80	72	20	132	48	82	70	82	106
4	21	9	39	84	80	109	136	49	48	70	84	19
5	118	8	86	52	78	26	0	52	86	72	86	110
6	20	14	90	86	80	26	136	50	85	70	85	112
7	110	85	10	54	28	82	0	80	45	65	105	80
8	18	91	9	83	26	80	134	84	47	67	109	84
9	116	10	90	52	80	26	0	44	82	72	86	108
10	18	40	76	83	118	5	134	48	39	68	19	0
11	116	12	94	50	82	26	0	52	86	70	86	108
12	124	96	12	52	22	75	0	82	48	70	118	86
13	17	10	45	83	80	112	134	49	45	68	84	19
14	19	79	40	84	6	108	133	39	48	68	0	20
15	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85
16	18	13	86	86	81	25	134	51	80	70	86	111
17	117	10	39	51	80	110	0	47	48	68	84	19
18	116	39	8	53	110	80	0	48	47	68	19	84
19	20	39	10	84	109	78	136	48	47	69	19	86
20	122	39	76	51	109	7	0	49	39	139	19	0
21	121	38	74	50	107	5	0	46	40	135	19	0
22	19	41	9	82	110	80	136	47	47	68	19	86
23	117	41	75	51	108	7	0	48	37	134	21	0
24	116	75	39	51	5	108	0	38	46	136	45	19
25	118	89	10	53	26	80	0	70	49	68	111	86
26	122	10	88	50	84	22	0	54	84	66	82	112
27	120	10	90	54	80	26	0	50	86	70	88	110
28	90	35	20	170	55	60	110	130	120	35	60	135