

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)

О.А.ОГАНЕСОВ, П.Р.ДОБРОГАЕВ, Н.Н.КУЗЕНЕВА

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

для студентов механических
специальностей

Часть 1

Учебное пособие

Утверждено
в качестве учебного пособия
редсоветом МАДИ

МОСКВА 2011

УДК 514.18
ББК 22.151.3
О 361

Рецензенты:

зав. каф. начертательной геометрии и черчения МГТУ "МАМИ" канд.
техн. наук, проф. Э.М. Фазлулин;
канд. техн. наук, доц. И.М. Рябикова (МАДИ)

Оганесов О.А.

О 361 Курс лекций по начертательной геометрии: учебное пособие для студентов механических специальностей: Ч.1/ О.А.Оганесов, П.Р.Доброгаев, Н.Н.Кузенева; под ред. О.А.Оганесова; МАДИ. - 2-е изд., перераб. и доп. -М., 2011. -96с.

Данный курс лекций по начертательной геометрии для студентов механических специальностей Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета является переработанным изданием и полностью соответствует содержанию программы по начертательной геометрии государственных образовательных стандартов для указанного контингента обучаемых.

В данной 1-й части учебного пособия изложены два раздела курса - "Точка, прямая, плоскость" и "Задание поверхности на комплексном чертеже". Тематика первого раздела - задание точки, линии и плоскости на комплексном чертеже; преобразование комплексного чертежа; основные метрические задачи; главные позиционные задачи для прямой и плоскости; комплексные позиционно-метрические задачи. Во втором разделе рассмотрено задание на чертеже линейчатых, винтовых, циклических поверхностей и поверхностей вращения.

Учебное пособие рекомендуется также для студентов факультета управления и вечерней формы обучения.

Под редакцией канд. техн. наук, доц. Оганесова О.А.

УДК 514.18
ББК 22.151.3

© МАДИ, 2011

ПРИНЯТАЯ СИСТЕМА СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТИПЫ ЛИНИЙ

I. Сокращения

ГА - графический алгоритм;
 ГО - геометрический образ;
 ГПЗ - главная позиционная задача;
 1ГПЗ, 2ГПЗ - 1-я ГПЗ, 2-я ГПЗ;
 КЧ - комплексный чертеж;
 НГ - начертательная геометрия;
 ОЗПЧ - основная задача преобразования чертежа;
 1ОЗПЧ, 2ОЗПЧ, ... - соответственно 1-я ОЗПЧ, 2-я ОЗПЧ, ...;
 ОМЗ - основная метрическая задача;
 1ОМЗ, 2ОМЗ - соответственно 1-я ОМЗ, 2-я ОМЗ;
 ОПЗ - основная позиционная задача;
 ПА - пространственный алгоритм;
 ПП - плоскость проекций.

II. Обозначения геометрических образов в пространстве

1. Точки

A, B, C, ... - прописные буквы латинского алфавита;
 1, 2, 3, ... - арабские цифры (числа, записанные арабскими цифрами).

2. Линии

a, b, c, ... - строчные буквы латинского алфавита;
 h - только горизонтальная прямая (горизонталь);
 f - только фронтальная прямая (фронталь);
 l, t - только прямые линии;
 c, m - только окружности или их дуги;
 k - только кривая линия;
 AB, (A,B) - прямая, определяемая точками A и B;
 [A,B], [AB] - отрезок прямой, ограниченный точками A и B.

3. Поверхности

Г, Δ, Σ, Ω, Φ, ... - прописные буквы греческого алфавита;
 П - прописная буква греческого алфавита "ПИ", используемая для обозначения плоскости проекций;
 П₁, П₂, П₃, ... - плоскости проекций с соответствующим порядковым подстрочным индексом;

$\Sigma(A,B,D)$ - плоскость, заданная точками A, B, D;

$\Sigma(A,d)$ - плоскость, заданная точкой A и прямой d;

$\Sigma(b \parallel d)$ - плоскость, заданная параллельными прямыми b и d;

$\Sigma(a \cap b)$ - плоскость, заданная пересекающимися прямыми a и b;

ΔABD - треугольник ABD;

$\Sigma(\Delta ABD)$, $\Sigma(A,B,D,A)$ - плоскость, заданная треугольником ABD.

4. Углы

$\alpha, \beta, \nu, \dots$ - строчные буквы греческого алфавита;

$\alpha^{\wedge} b$ - угол между прямыми a и b.

5. Натуральные величины, длины, расстояния

$|A,B|, |AB|$ - длина отрезка [A,B], расстояние между точками A и B;

$|A,d|$ - расстояние от точки A до прямой d;

$|b \parallel d|$ - расстояние между параллельными прямыми b и d;

$|b \perp d|$ - расстояние между скрещивающимися прямыми b и d;

$|t, \Gamma|$ - расстояние между параллельными прямой t и плоскостью Γ ;

$|\Gamma \parallel \Sigma|$ - расстояние между параллельными плоскостями Γ и Σ ;

$|\Delta ABD|$ - натуральный вид треугольника ABD;

$|b^{\wedge} d|$ - величина угла между прямыми b и d.

6. Однотипные геометрические элементы, образующие ряд

$h^1, h^2, h^3, \dots, \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ - ряд однотипных элементов обозначают надстрочными индексами из натуральных чисел.

III. Обозначения геометрических элементов чертежа

1. Проекции геометрических элементов

Проекции геометрических элементов обозначаются теми же знаками, что и в пространстве, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего индексу плоскости проекций:

$A_1, A_2, A_3, \dots, 1_1, 2_2, 3_3, \dots$ - проекции точек;

$a_1, a_2, a_3, \dots, h_1, h_2, \dots$ - проекции линий;

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ - проекции проецирующих поверхностей.

2. Оси проекций на комплексном чертеже

$x_{1 \equiv 2}$ - ось проекций в системе плоскостей проекций (Π_1, Π_2);

$x_{n \equiv m}$ - ось проекций в системе плоскостей проекций (Π_n, Π_m) при задании новой плоскости проекций Π_m перпендикулярно Π_n .

3. Линии связи

(A_1, A_2) - линия связи в системе плоскостей (Π_1, Π_2) ;

(A_i, A_j) - линия связи в системе плоскостей (Π_i, Π_j) .

IV. Обозначения зависимостей и другие символы

\equiv - тождественно совпадают;

$=$ - равны, результат действия;

\parallel - параллельность;

\perp - перпендикулярность;

\cdot - скрещивающиеся (прямые);

\Downarrow - проецирование;

\cap - пересечение;

\cup - касание;

\supset, \subset - принадлежит, проходит через, включает, содержит;

$\nsubseteq, \not\subset$ - не принадлежит и т.д.;

\curvearrowright или \curvearrowleft - вращение вокруг оси;

Γ - задать, взять, построить, найти, определить, провести;

\wedge - союз “и”, ставящийся между двумя условиями;

\vee - союз “или”, ставящийся между двумя условиями;

\Rightarrow - следовательно; если ... , то ... ; поэтому.

V. Используемые на рисунках типы линий

———— - сплошная основная линия для вычерчивания заданных в условиях изображений исходных ГО и изображения (изображений) искомого ГО в решающем положении, являющимся результатом выполнения примера;

———— - менее толстая основная линия для вычерчивания осей проекций, изображений различных ГО, появляющихся по ходу решения, и проекций некоторых элементов определителя поверхности на её основном чертеже;

———— - сплошная тонкая линия для нанесения линий связи и линий-выносок;

— · — · — - штриховая линия для вычерчивания изображений невидимых контуров геометрических образов;

— · — · — - штрихпунктирная линия для вычерчивания осевых и центральных линий.

ЛЕКЦИЯ 1

КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ

1.1. Предмет и метод начертательной геометрии

Начертательная геометрия (НГ) - раздел геометрии, изучающий способы изображения пространственных образов на плоскости. В НГ рассматриваются три абстрактных геометрических образа (ГО): точка - нульмерный ГО, не имеющий измерений; линия - одномерный ГО, имеющий одно измерение; поверхность - двумерный ГО, имеющий два измерения. Договоримся точки обозначать прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами (числами), линии - строчными буквами латинского алфавита, поверхности - прописными буквами греческого алфавита. Точку, линию, поверхность и любую их совокупность в общем случае называют геометрической фигурой.

Методом НГ является метод чертежа: формы и положения геометрических фигур изучаются в НГ по чертежу - графической модели фигур, полученной посредством операции проецирования (см. ниже) и представляющей собой некое конечное множество точек и линий, нанесенных на плоскости.

НГ рассматривает общие принципы построения проекционных чертежей (прямая задача НГ) и методы восстановления оригинала по его чертежу (обратная задача НГ).

1.2. Прямая задача НГ. Операция проецирования

Прямая задача НГ заключается в получении изображения (проекции) ГО и неразрывно связана с операцией проецирования. Для реализации операции проецирования надо задать:

- объект проецирования - какую-то геометрическую фигуру;
- плоскость проекций (ПП) - плоскость, на которую проецируют фигуру (вообще-то проецировать можно на любую поверхность);
- систему проецирующих прямых определенного направления.

Суть операции проецирования: проекция точки есть точка пересечения проецирующей прямой определенного направления, проходящей через точку, с плоскостью проекций; проекция фигуры, отличной от точки, есть множество проекций всех её точек. По направлению проецирования (положению проецирующих прямых друг относительно друга и плоскости проекций) различают централь-

ное, параллельное и ортогональное проецирование.

Пусть объектом проецирования будут точки A и B , а плоскостью проекций - плоскость Π_1 . На рис. 1.1-1.3 показано получение проекций A_1 и B_1 точек A и B на ПП Π_1 при различных направлениях проецирования.

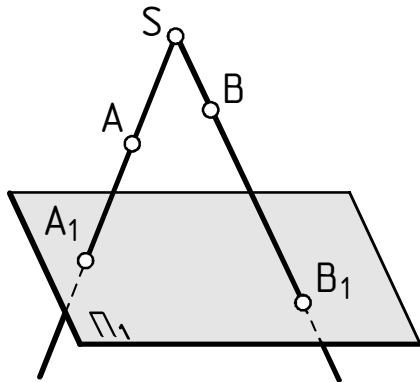


Рис. 1.1

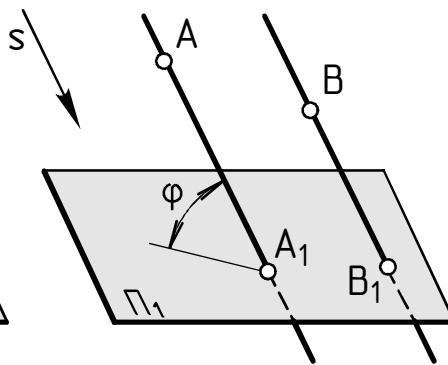


Рис. 1.2

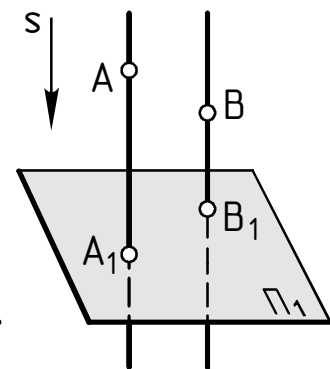


Рис. 1.3

При центральном проецировании (рис. 1.1) все проецирующие прямые проходят через центр проецирования точку S .

При параллельном проецировании все проецирующие прямые параллельны друг другу и направлению проецирования s . Если угол φ между направлением s и ПП не равен 90° (рис. 1.2), то параллельное проецирование называют косоугольным, а при $\varphi = 90^\circ$ (рис. 1.3) - ортогональным (прямоугольным). Параллельное проецирование - частный случай центрального, когда центр проецирования S удаляют в бесконечность и принимают, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Ортогональной проекцией точки является точка пересечения проецирующей прямой, проходящей через точку перпендикулярно ПП, с этой ПП. На рис. 1.3 точки A_1 и B_1 - ортогональные проекции точек A и B соответственно на ПП Π_1 .

Сформулируем ряд свойств ортогонального проецирования:

1. Точка проецируется в точку (точка A в точку A_1 на рис. 1.3).
2. В общем случае прямая проецируется в прямую (прямая b в прямую b_1 на рис. 1.4). Прямая, перпендикулярная ПП, проецируется на неё в точку (прямая d в точку d_1 на рис. 1.4).
3. В общем случае кривая проецируется в кривую, ломаная - в ломаную (кривая k в кривую k_1 , ломаная a в ломаную a_1 на рис. 1.5).

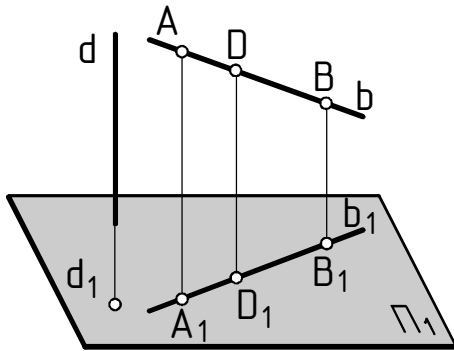


Рис. 1.4

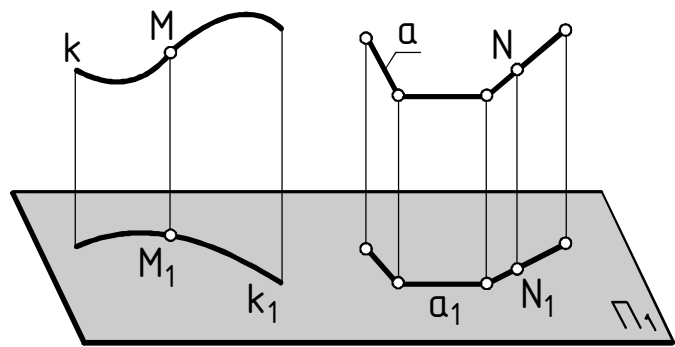


Рис. 1.5

4. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии: $D \in b \Rightarrow D_1 \in b_1$ (рис. 1.4); $M \in k \Rightarrow M_1 \in k_1$; $N \in a \Rightarrow N_1 \in a_1$ (рис. 1.5).
5. Если точка делит отрезок в каком-то отношении, то её проекция делит проекцию отрезка в том же отношении (рис. 1.4):

$$|A, D| : |D, B| = |A_1, D_1| : |D_1, B_1|.$$

6. Если прямые параллельны, то параллельны их проекции (рис. 1.6):

$$a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1.$$

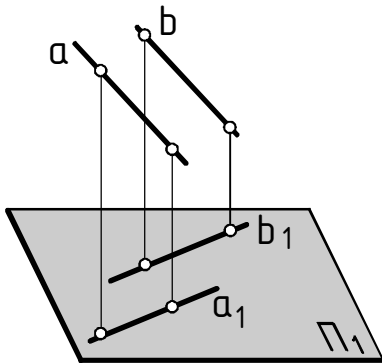


Рис. 1.6

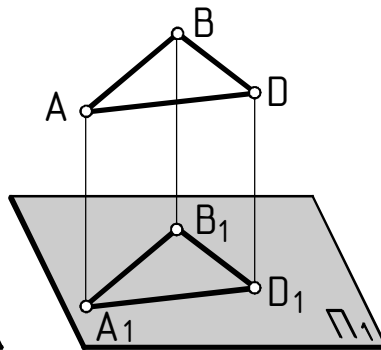


Рис. 1.7

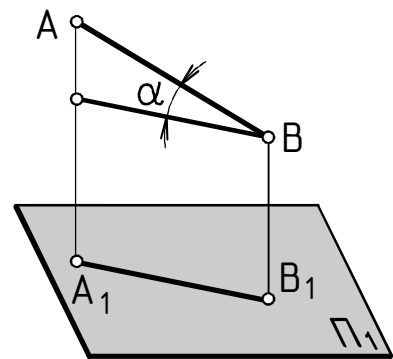


Рис. 1.8

7. Если плоскость перпендикулярна ПП, то она проецируется на неё в прямую линию (очевидно без рисунка).
8. Плоская фигура, плоскость которой параллельна ПП, проецируется на неё в натуральную величину (рис. 1.7): $|\triangle ABD| = |\triangle A_1 B_1 D_1|$.
9. Длина проекции отрезка прямой равна длине отрезка, умноженной на косинус угла наклона отрезка к ПП (рис. 1.8):

$$|A_1, B_1| = |A, B| \cos \alpha.$$

1.3. Обратная задача НГ. Обратимость чертежа

Обратная задача НГ заключается в восстановлении формы или (и) положения ГО по его чертежу. Чертеж, позволяющий решать обратную задачу НГ, называют обратимым. Обратимость - необходимое требование к чертежу.

В общем случае чертеж на одну ПП не обратим: одна проекция A_1 на ПП Π_1 не задает положения точки A в пространстве, так как отсутствует информация об удалении её от ПП и точкой A может быть любая точка проецирующей прямой s (рис. 1.9).

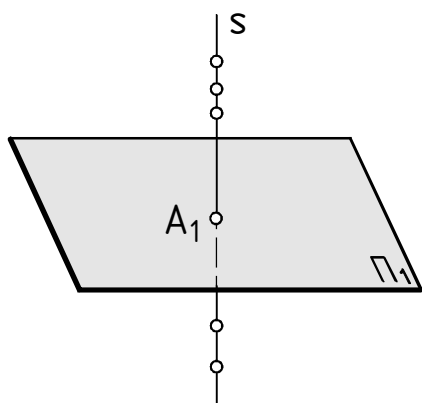


Рис. 1.9

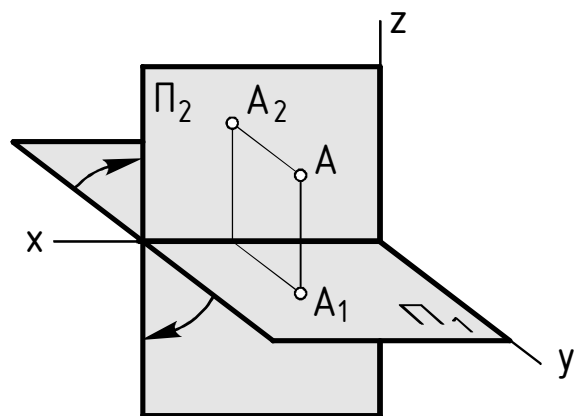


Рис. 1.10

Зададим две взаимно перпендикулярные ПП Π_1 и Π_2 и найдем ортогональные проекции A_1 и A_2 точки A на эти ПП (рис. 1.10).

Система двух взаимно перпендикулярных ПП с проекциями точек на них является обратимой: для определения положения точки A по её проекциям A_1 и A_2 достаточно через A_1 и A_2 провести проецирующие прямые к Π_1 и Π_2 соответственно и найти точку пересечения этих прямых. Покажем, что задание проекций $A_1 \in \Pi_1$ и $A_2 \in \Pi_2$ точки A равносильно заданию её трех декартовых координат. Совместим для этого с плоскостями Π_1 и Π_2 декартову систему координат так, чтобы плоскость Π_1 совпадала с координатной плоскостью xOy , а плоскость Π_2 - с плоскостью xOz . Из рис. 1.10 очевидно, что проекция A_1 определяет координаты X и Y точки A , а проекция A_2 - координаты X и Z ; расстояние от точки A до Π_1 определяется координатой Z , а до Π_2 - координатой Y .

Таким образом, для задания точки достаточно задать две её проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Вывод: в общем случае ГО задается двумя своими изображениями (проекциями) на две ПП.

Плоскость Π_1 называют горизонтальной ПП, а Π_2 - фронтальной. Проекцию A_1 точки A на Π_1 называют горизонтальной проекцией точки, а A_2 на Π_2 - фронтальной. Множество проекций всех точек пространства на ПП Π_1 образуют горизонтальное поле проекций (ему принадлежит проекция A_1), а на Π_2 - фронтальное (A_2).

1.4. Комплексный чертеж точки

На рис. 1.10 приведено изображение пространственной системы - двух взаимно перпендикулярных ПП Π_1 и Π_2 , использование которого в качестве чертежа не удобно.

Для удобства совместим плоскость Π_1 с плоскостью Π_2 , вращая Π_1 вокруг оси x . При этом передняя полуплоскость Π_1 будет совмещена с нижней полуплоскостью Π_2 (рис. 1.10). В результате получим комплексный чертеж (КЧ) точки A - изображенную на рис. 1.11 плоскость, содержащую две проекции точки на две ПП. Точка A на КЧ отсутствует.

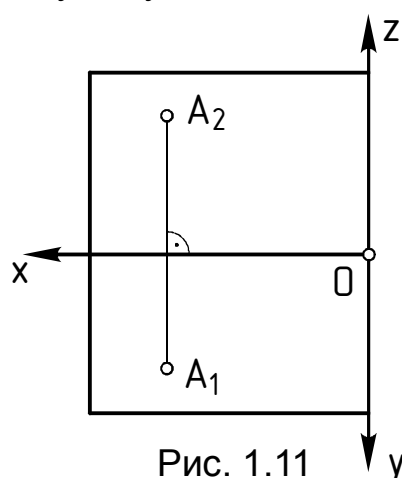


Рис. 1.11

КЧ на рис.1.11 кроме проекций A_1 и A_2 точки A содержит проекции начала отсчета и осей координат, обозначенные соответственно O , x , y , z , что позволяет на чертеже откладывать координаты точек.

Проекцию оси x - линию пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 называют осью проекций.

Проекции точек на КЧ находятся в проекционной связи, которую устанавливают линии связи - прямые, проходящие через пары проекций одной и той же точки и перпендикулярные к оси проекций (прямая (A_1, A_2) - линия связи).

Применение для получения чертежа метода ортогонального проецирования на две ПП с последующим разворотом их в плоскость чертежа было предложено французским ученым Гаспаром Монжем (1746-1818). Поэтому такой чертеж часто называют эпюром Монжа.

Так как границы ПП на рис. 1.10 условны (плоскости бесконечны), то проекции этих границ на КЧ не показывают (рис. 1.12). Обычно на КЧ не указывают направления проекций осей координат (рис. 1.12) или не показывают изображения осей y и z , задавая на

оси x только начало отсчета, которое может быть не обозначено (рис. 1.13). В случаях, показанных на рис. 1.12 и 1.13, координаты точек откладывают, учитывая положительное направление проекций координатных осей, показанное на рис. 1.11.

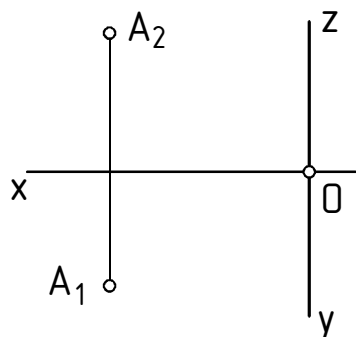


Рис. 1.12

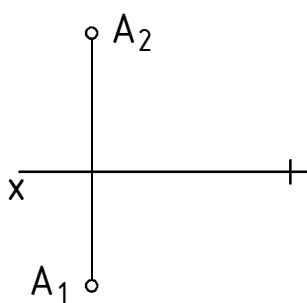


Рис. 1.13

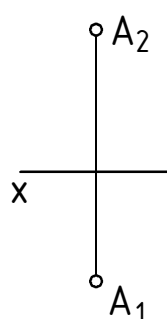


Рис. 1.14

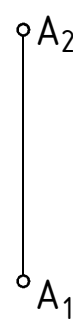


Рис. 1.15

В технической практике, как правило, не требуется определять положение изображаемого ГО относительно неподвижной системы ПП (координат). Поэтому часто на КЧ не указывают начало координат (рис. 1.14) или даже ось проекций (рис. 1.15). В последнем случае на чертеже задается хотя бы одна линия связи. Основанием для использования таких КЧ является свойство ортогонального проецирования: изображение фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

На КЧ, приведенном на рис. 1.14, ГО задается с точностью до параллельного переноса вдоль оси x , на которой при необходимости произвольно указывают начало отсчета. На КЧ, приведенном на рис. 1.15, ГО задается с точностью до параллельного переноса. При необходимости на безосном чертеже произвольно, но перпендикулярно к линиям связи наносят ось проекций.

Расположим плоскости Π_1 , Π_2 и ось x перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 1.16). Из рис. 1.16 видно, что плоскости Π_1 и Π_2 делят пространство на четыре четверти (квадранта), обозначенные I , II , III , IV . Стрелки указывают направление поворота плоскости Π_1 при совмещении её с плоскостью Π_2 . Положение проекций точки на КЧ (рис. 1.17) зависит от того, в какой четверти пространства находится точка. Так, точка B расположена во II -ой четверти и обе её проекции лежат выше оси проекций, а точка A принадлежит плоскости Π_2 и её проекция A_1 находится на оси x . В свою очередь, точка C расположена в III -ей, а точка D — в IV -ой четвертях.

В дальнейшем изображаемый ГО будет располагаться, как правило, в I -ом квадранте.

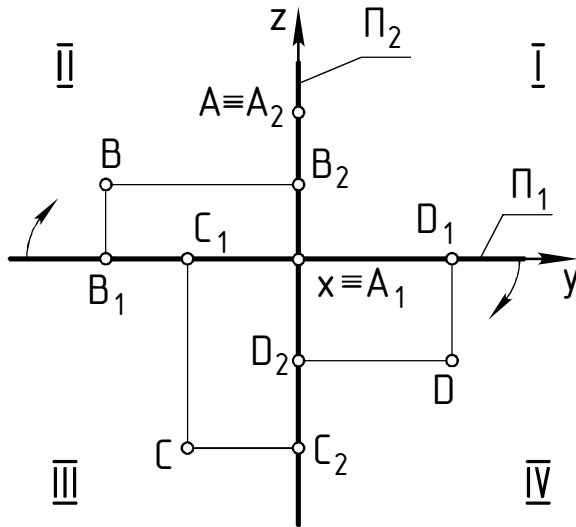


Рис. 1.16

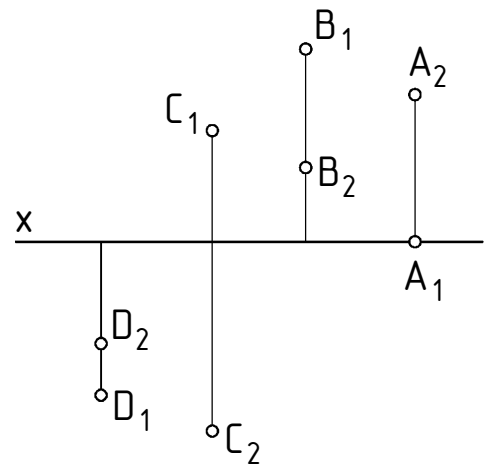


Рис. 1.17

1.5. Введение новой плоскости проекций

При решении ряда инженерно-геометрических задач удобно использовать дополнительные изображения ГО, позволяющие упростить решение задачи, сделать его более точным и т. д. Получение новой проекции (новых проекций) ГО по уже имеющимся является результатом преобразования КЧ. Из множества способов преобразования КЧ здесь рассмотрим один: способ введения (задания) новой ПП.

Суть этого способа в том, что дополнительно к ПП Π_1 и Π_2 вводится новая ПП Π_3 , проецируя на которую ГО, получают его новую проекцию. На новую ПП накладывают только одно ограничение: она должна быть перпендикулярна хотя бы одной из ПП Π_1 или Π_2 . Новое направление проецирования параллельно Π_1 , если $\Pi_3 \perp \Pi_1$, или Π_2 , если $\Pi_3 \perp \Pi_2$. Договоримся оси проекций обозначать буквой x с добавлением индексов пересекающихся взаимно перпендикулярных ПП, например, $x_{1 \equiv 2}$, $x_{1 \equiv 3}$, $x_{2 \equiv 3}$ и т. д.

Зададим $\Pi_3 \perp \Pi_1$ и найдем проекции A_1 , A_2 и A_3 точки A на ПП Π_1 , Π_2 и Π_3 (рис. 1.18). В старой системе ПП (Π_1, Π_2) точка A задавалась проекциями A_1 и A_2 , а в новой системе ПП (Π_1, Π_3) - проекциями A_1 и A_3 . Для перехода к плоскому изображению повернем Π_1 и Π_2 вокруг оси $x_{1 \equiv 2}$ ($x_{1 \equiv 2} = \Pi_1 \cap \Pi_2$) до их совпадения, а за-

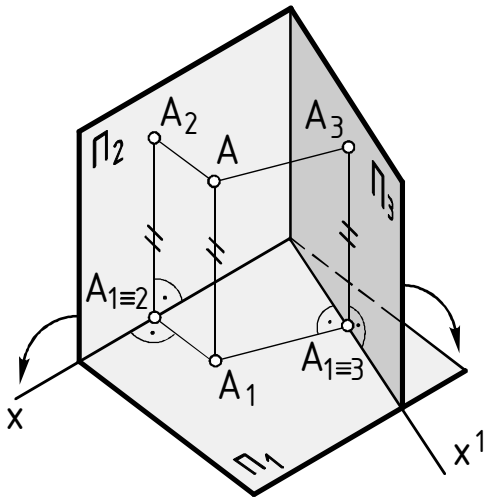


Рис. 1.18

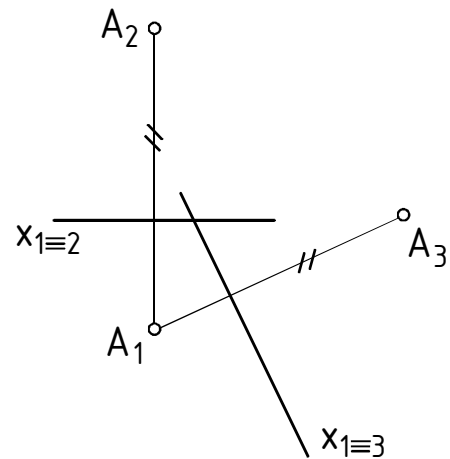


Рис. 1.19

тем повернем Π_3 вокруг $x_{1\equiv 3}$ ($x_{1\equiv 3} = \Pi_1 \cap \Pi_3$) до совпадения с Π_1 и Π_2 . В результате получим КЧ точки - плоскость, содержащую проекции точки на три ПП (рис. 1.19).

Линия связи $(A_1, A_2) \perp x_{1\equiv 2}$ на КЧ образуется линиями $(A_1, A_{1\equiv 2}) \perp x_{1\equiv 2}$ и $(A_2, A_{1\equiv 2}) \perp x_{1\equiv 2}$ при развороте ПП Π_1 и Π_2 в плоскость чертежа. Аналогично новая линия связи $(A_1, A_3) \perp x_{1\equiv 3}$ образуется линиями $(A_1, A_{1\equiv 3}) \perp x_{1\equiv 3}$ и $(A_3, A_{1\equiv 3}) \perp x_{1\equiv 3}$ при совмещении Π_3 с Π_1 и Π_2 .

Правило построения новой проекции A_3 точки по двум заданным проекциям A_1 и A_2 и новому направлению проецирования:

1. Перпендикулярно линии связи (A_1, A_2) проводят ось проекций $x_{1\equiv 2}$, если она на КЧ не задана.
2. Проводят новую ось проекций $x_{1\equiv 3}$ ($\Pi_3 \perp \Pi_1$).
3. Из A_1 ($\Pi_3 \perp \Pi_1$) проводят новую линию связи $(A_1, A_3) \perp x_{1\equiv 3}$.
4. На новой линии связи (A_1, A_3) от новой оси $x_{1\equiv 3}$ откладывают расстояние от точки A до плоскости Π_1 , так как $\Pi_3 \perp \Pi_1$ (см. отмеченные расстояния на рис. 1.18 и 1.19, равные здесь координате Z).

Аналогично можно последовательно задавать любое число новых ПП, лишь бы вновь вводимая ПП была перпендикулярна хотя бы одной из имеющихся ПП. В общем случае расстояние новой проекции точки от новой оси равно расстоянию от заменяемой проекции точки до предыдущей оси. На рис. 1.20 приведен КЧ точки A, полученный при введении новых ПП в такой последовательности:

$\Pi_3 \perp \Pi_2$, $\Pi_4 \perp \Pi_3$, $\Pi_5 \perp \Pi_1$, $\Pi_6 \perp \Pi_5$, $\Pi_7 \perp \Pi_6$ (все оси проекций задавались произвольно, а откладываемые расстояния отмечены).

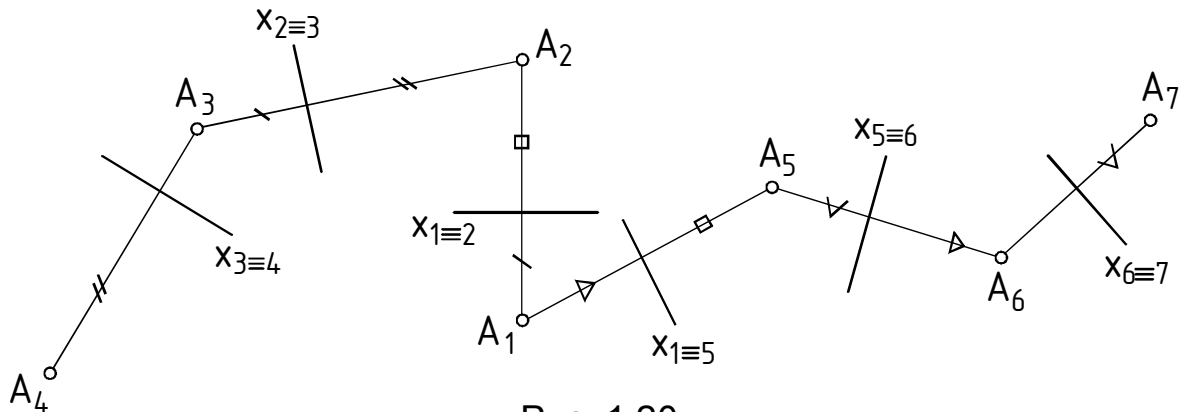


Рис. 1.20

Новую ПП задают с точностью до параллельного переноса. Уже отмечалось, что в этом случае проекция фигуры не меняется.

Наиболее часто используется профильная ПП Π_3 , перпендикулярная одновременно и к Π_1 и к Π_2 . Три взаимно перпендикулярные ПП обычно рассматривают как координатные (рис. 1.21).

При переходе к плоскому изображению мысленно разрежем систему ПП по оси y . Повернем Π_1 и Π_2 вокруг оси x до их совпадения, а затем вокруг оси z , выполняющей роль новой оси проекций, развернем Π_3 до совпадения с Π_1 и Π_2 и получим КЧ точки A (рис. 1.22). Для построения проекции A_3 из точки A_2 проведем новую линию связи перпендикулярно к оси z , после чего на ней отложим координату Y точки A , взятую с поля Π_1 .

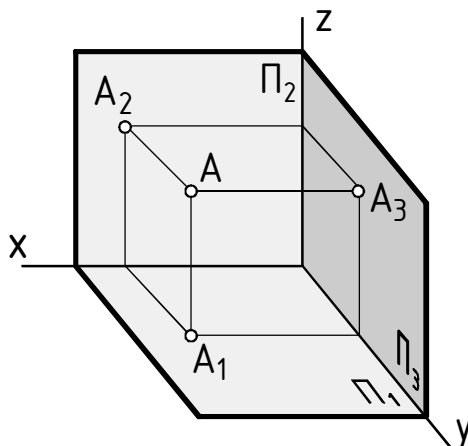


Рис. 1.21

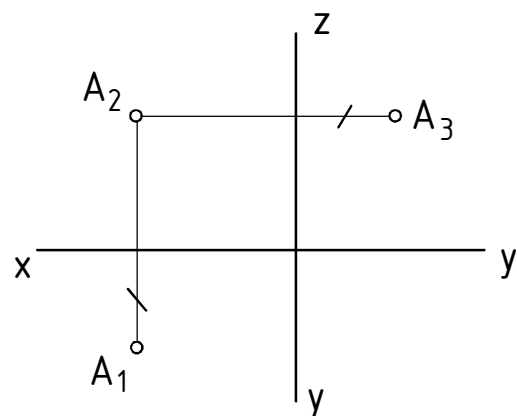


Рис. 1.22

В заключении лекции отметим, что используемые в курсе понятия “комплексный чертеж” и “чертеж” - синонимы.

ЛЕКЦИЯ 2

ЛИНИЯ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

2.1. Общие вопросы задания линии на чертеже

Линия - это одномерный ГО, имеющий одно измерение (длину) и рассматриваемый как траектория точки, двигающейся в пространстве по определенному закону.

Линии делятся на кривые, ломаные и прямые. Кривые и ломаные линии бывают плоские, если все их точки лежат в одной плоскости, и пространственные. Из плоских кривых выделяют кривые второго порядка - эллипс, его частный случай - окружность, параболу и гиперболу, а из пространственных - винтовую линию, широко используемую в технике.

При задании линии используют критерий её заданности - линия задана на чертеже, если относительно любой точки пространства можно однозначно ответить на вопрос, принадлежит точка линии или нет, и свойства 3, 4, 2 (стр. 7, 8) ортогонального проецирования.

В общем случае линия k на КЧ задается непосредственно своими проекциями (проекциями всех своих точек) на Π_1 и Π_2 (рис. 2.1). Возможность определить по чертежу, что точка M принадлежит линии k ($M \in k$), так как $M_1 \in k_1$ и $M_2 \in k_2$, а точки E и N нет ($E \notin k$, $N \notin k$), подтверждает: линия k своими проекциями k_1 и k_2 задана.

Иногда для установления однозначного проекционного соответствия точек линии помимо её проекций на КЧ необходимо задавать ещё проекции какой-то точки (каких-то точек) линии (рис. 2.2).

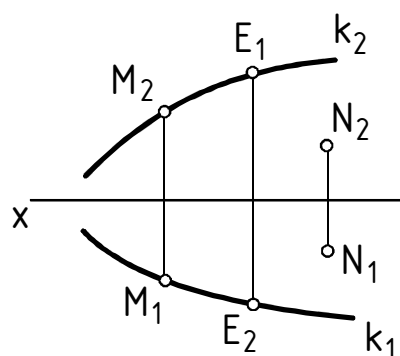


Рис. 2.1

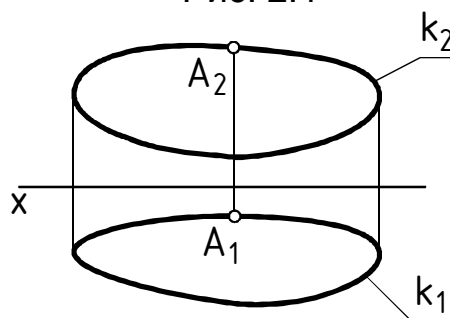


Рис. 2.2

2.2. Задание прямой линии

2.2.1. Прямая общего положения

Прямая общего положения - это прямая, не параллельная и, следовательно, не перпендикулярная ни одной из ПП (прямая a на рис. 2.3). Прямая общего положения задается на КЧ своими проекциями на Π_1 и Π_2 - прямыми, не параллельными и не перпен-

дикулярными оси проекций (a_1 и a_2 на рис. 2.4) или проекциями двух своих точек (A и B на рис. 2.5), определяющими положение проекций прямой. На рис. 2.3 α - угол наклона прямой a к Π_1 , β - к Π_2 .

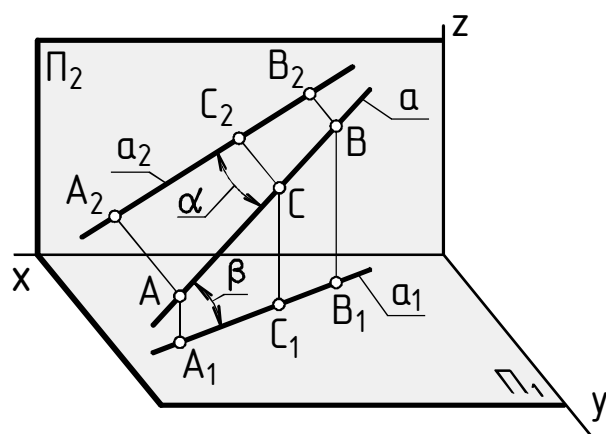


Рис. 2.3

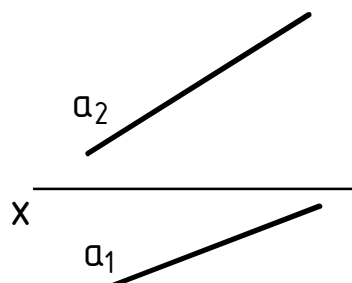


Рис. 2.4

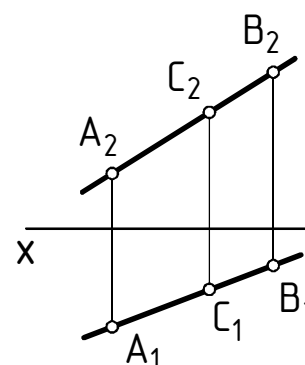


Рис. 2.5

Для трех точек A, B, C прямой (рис. 2.3, 2.5) справедливы отношения (свойство 3): $|A, C| : |C, B| = |A_1, C_1| : |C_1, B_1| = |A_2, C_2| : |C_2, B_2|$.

Длина отрезка прямой общего положения всегда больше длины его проекции: $|A, B| > |A_1, B_1|$ и $|A, B| > |A_2, B_2|$ (рис. 2.3). На КЧ (рис. 2.5) длины отрезков прямой общего положения, углов α и β наклона её к Π_1 и Π_2 не проецируются в натуральную величину. Один из способов их определения - правило прямоугольного треугольника.

Пусть заданы некая ПП Π_n , отрезок $[A, B]$ и его проекция $[A_n, B_n]$ на Π_n (рис. 2.6). Проведем $[A, D] \parallel [A_n, B_n]$ и получим прямоугольный $\triangle ABD$, в котором отрезок $[A, B]$ является гипотенузой. Из $\triangle ABD$ вытекает правило прямоугольного треугольника для решения 2ОМЗ (2ОМЗ см. лекцию 5): длина отрезка прямой общего положения равна длине гипотенузы ($|A, B|$) прямоугольного треугольника, один из катетов которого есть проекция отрезка на плоскость проекций ($|A, D| = |A_n, B_n|$), а второй - разность расстояний концов отрезка до этой ПП ($|B, D| = |B, B_n| - |A, A_n|$); угол между отрезком и ПП измеряется углом φ между отрезком и его проекцией на эту ПП.

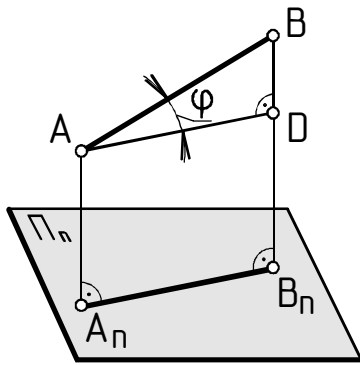


Рис. 2.6

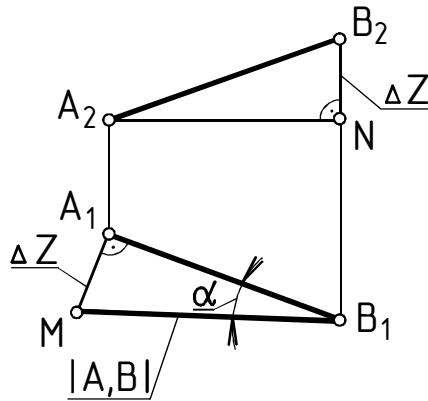


Рис. 2.7

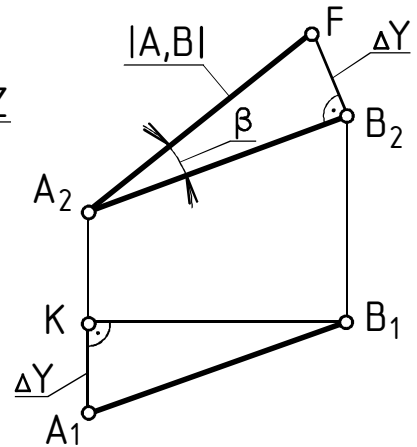


Рис. 2.8

На рис. 2.7 для определения длины отрезка $|A,B|$ в поле Π_1 по двум катетам $[A_1, B_1]$ и $[A_1, M]$ построен прямоугольный $\triangle B_1 A_1 M$. Длина катета $|A_1, M|$ определялась графически как разность ΔZ координат Z точек A и B : провели $(A_2, N) \perp (B_1, B_2)$ и нашли $|B_2, N| = \Delta Z = |A_1, M|$. Длина отрезка $|A,B|$ равна длине гипотенузы $|B_1, M|$, а угол α определяет угол между отрезком $[A,B]$ и Π_1 . Прямой угол треугольника может быть при вершине B_1 вместо A_1 . Аналогично на рис. 2.8 для определения длины отрезка $|A,B|$ и угла β наклона его к Π_2 в поле Π_2 по катетам $[A_2, B_2]$ и $[B_2, F]$ построен прямоугольный $\triangle A_2 B_2 F$, где $|B_2, F| = |A_1, K| = \Delta Y$ (ΔY - разность координат Y точек A и B).

2.2.2. Прямые частного положения

К прямым частного положения относятся прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямая уровня - это прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций. Прямую, параллельную Π_1 , называют горизонтальной прямой или горизонталью; параллельную Π_2 - фронтальной прямой или фронталью; параллельную профильной Π_P - профильной прямой. Обычно горизонталь обозначают h , фронталь - f , профильную прямую - p .

Так как $h \parallel \Pi_1$, то (рис. 2.9) $h_2 \parallel x$ (все точки горизонтали удалены от Π_1 на одинаковое расстояние и имеют одинаковые координаты Z), отрезок горизонтали проецируется на Π_1 в натуральную величину: $|A,B| = |A_1, B_1|$ и β - угол, равный углу наклона горизонтали к плоскости Π_2 (угол α наклона горизонтали к Π_1 равен 0°).

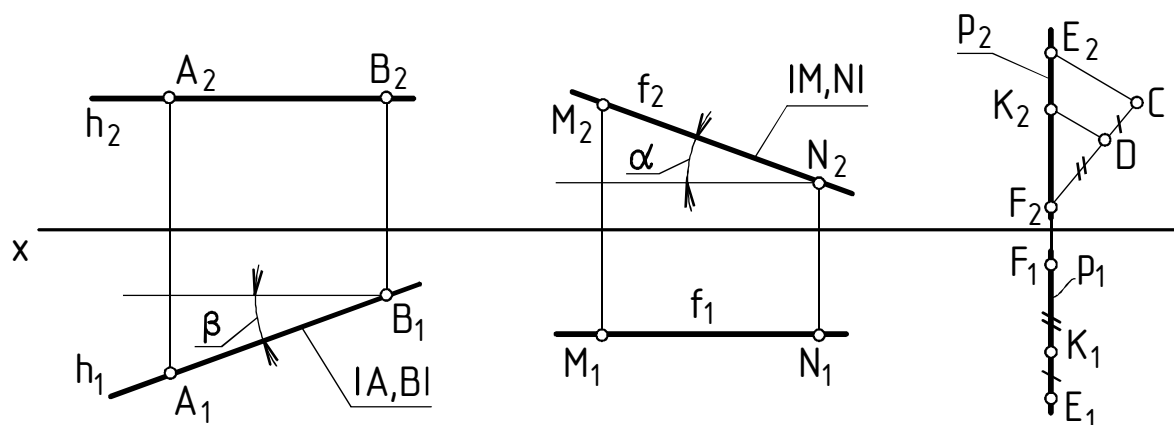


Рис. 2.9

Аналогично для фронтели (рис. 2.9) $f_1 \parallel x$, $|M, N| = |M_2, N_2|$ и α - угол, равный углу наклона фронтели к плоскости Π_1 .

Для профильной прямой p помимо проекций p_1 и p_2 надо ещё задавать проекции двух её точек (точки E и F на рис. 2.9). Чтобы построить проекцию K_2 точки $K \in p$ по заданной проекции K_1 , используют профильную ПП или отношение трех точек: $|F_1, K_1| : |K_1, E_1| = |F_2, K_2| : |K_2, E_2|$. В последнем случае из точки F_2 проводят произвольный луч, на нем откладывают расстояния $|F_2, D| = |F_1, K_1|$ и $|D, C| = |K_1, E_1|$, после чего строят $\triangle F_2CE_2$ и подобный ему $\triangle F_2DK_2$.

Проецирующая прямая - это прямая, перпендикулярная к какой-либо ПП. Прямую, перпендикулярную к Π_1 , называют горизонтально проецирующей прямой, а перпендикулярную к Π_2 - фронтально проецирующей. Прямые $a \perp \Pi_1$ и $b \perp \Pi_2$ показаны на рис. 2.10.

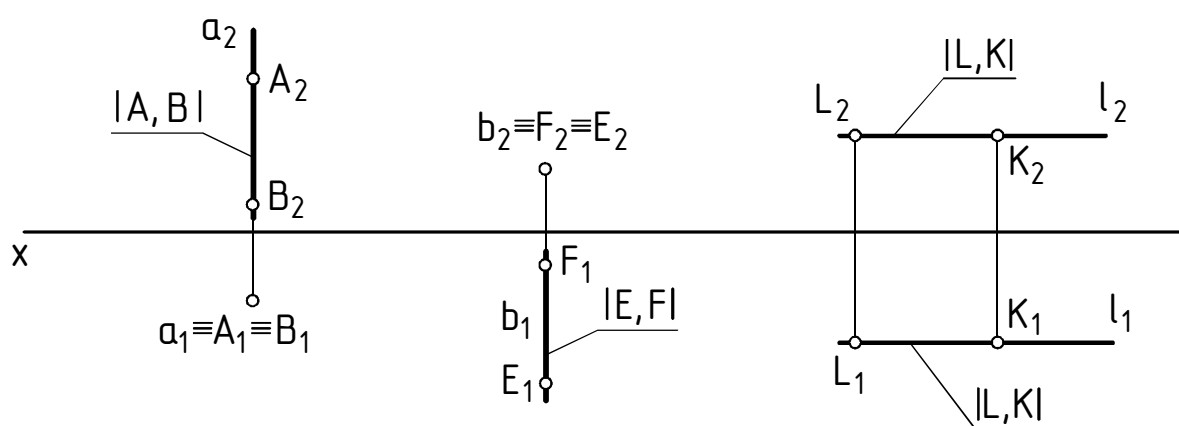


Рис. 2.10

Проецирующая прямая проецируется на ПП, к которой она перпендикулярна, в точку (a_1 и b_2), называемую основной проекцией прямой, а на вторую ПП - в прямую, перпендикулярную к оси проекций (a_2 и b_1).

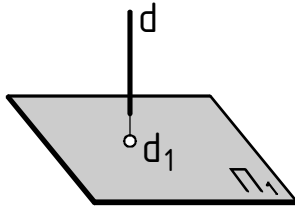


Рис. 2.11

Для задания проецирующей прямой достаточно задать её основную проекцию (рис. 2.11), которая однозначно задает её положение в пространстве - d проходит через d_1 перпендикулярно к Π_2 . Поэтому проекции a_2 и b_1 на КЧ (рис. 2.10) давать не обязательно.

Основная проекция обладает собирательным свойством: все точки проецирующей прямой проецируются в её основную проекцию ($A_1 \equiv B_1 \equiv a_1$ и $E_2 \equiv F_2 \equiv b_2$).

Горизонтально проецирующая прямая является фронталью: $a \perp \Pi_1 \Rightarrow a \parallel \Pi_2 \wedge |A, B| = |A_2, B_2|$, а фронтально проецирующая прямая - горизонталью: $b \perp \Pi_2 \Rightarrow b \parallel \Pi_1 \wedge |A, B| = |A_1, B_1|$.

На рис. 2.10 задана также профильно проецирующая прямая l , которая одновременно параллельна Π_1 и Π_2 .

Все точки проецирующей прямой являются конкурирующими в их видимости относительно той ПП, к которой прямая перпендикулярна и на которую все точки проецируются в основную проекцию. На рис. 2.10 точки прямой a конкурируют относительно Π_1 , прямой b - относительно Π_2 . Конкурирующие точки используют для определения

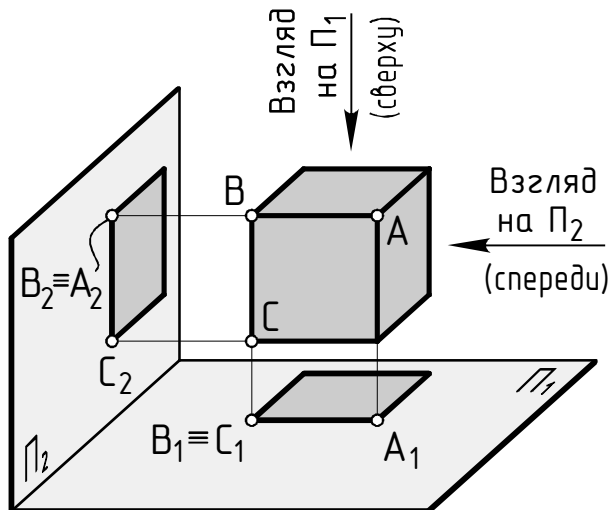


Рис. 2.12

видимости ГО и их элементов. Решая вопрос видимости, надо учитывать направление взгляда (проецирования) и то, что проецируемый ГО всегда расположен между ПП и наблюдателем (рис. 2.12). Поэтому видимой является та конкурирующая точка, которая находится дальше от ПП и ближе к наблюдателю. Так, на рис. 2.12 из двух конкурирующих относительно Π_1 точек В и С видна точка В (В выше С), а конкурирующих относительно Π_2 точек А и В - более удаленная от Π_2 точка А. Аналогично на рис. 2.10 относительно Π_1 из двух точек А и В прямой a видна точка А (А выше В, см. на проекции A_2 и B_2), относительно Π_2 из двух точек F и E прямой b видна точка E (E дальше от Π_2 , см. на проекции E_1 и F_1).

С видна точка В (В выше С), а конкурирующих относительно Π_2 точек А и В - более удаленная от Π_2 точка А. Аналогично на рис. 2.10 относительно Π_1 из двух точек А и В прямой a видна точка А (А выше В, см. на проекции A_2 и B_2), относительно Π_2 из двух точек F и E прямой b видна точка E (E дальше от Π_2 , см. на проекции E_1 и F_1).

2.3. Решение задач на преобразование прямой способом задания новой ПП

Цель преобразования чертежа - перевести объект проецирования в положение, удобное для решения задачи. Решение любой задачи с применением преобразования чертежа в конечном счете сводится к решению четырех задач, называемых основными задачами преобразования чертежа (ОЗПЧ). Рассмотрим задачи на преобразование прямой (1 и 2 ОЗПЧ) с использованием способа задания новой ПП.

Условие 1ОЗПЧ: преобразовать КЧ так, чтобы прямая α общего положения стала прямой уровня.

Для решения 1ОЗПЧ новую ПП Π_3 задают параллельно прямой α и перпендикулярно Π_1 или Π_2 ($\Pi_3 \parallel \alpha \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1 \vee \Pi_3 \perp \Pi_2$). При $\Pi_3 \perp \Pi_1$ новая ось проекций $x_{1\equiv 3} \parallel \alpha_1$, а при $\Pi_3 \perp \Pi_2$ новая ось $x_{2\equiv 3} \parallel \alpha_2$.

На рис. 2.13, а прямая α , заданная проекциями α_1 и α_2 , переведена в положение прямой уровня с использованием $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Для этого нанесли новую ось $x_{1\equiv 3} \parallel \alpha_1$, на прямой α взяли две произвольные точки $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$, нашли их проекции A_3 и B_3 (используемые для этого расстояния отмечены), через которые провели проекцию α_3 прямой α . На рис. 2.13, б та же задача решена с применением $\Pi_3 \perp \Pi_2$. Заметим, что на рис. 2.13 найдены длина отрезка $[AB]$ ($|A, B| = |A_3, B_3|$) и углы α и β наклона α к Π_1 и Π_2 соответственно.

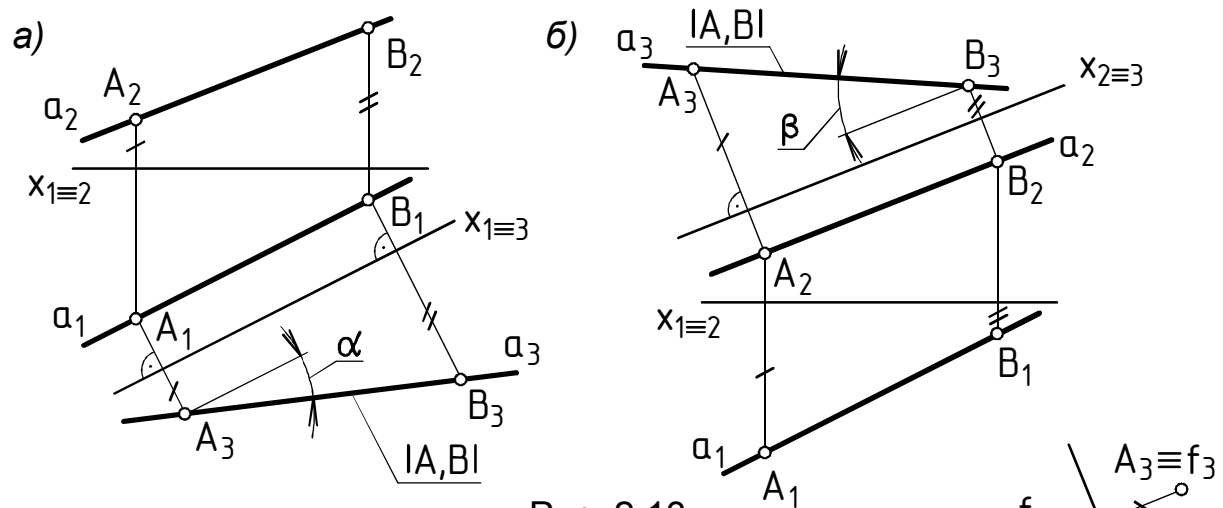


Рис. 2.13

Условие 2ОЗПЧ: прямую уровня перевести в положение проецирующей прямой.

Новую ПП задают перпендикулярно прямой уровня. Горизонталь h станет проецирующей при $\Pi_3 \perp h \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ (новая ось $x_{1\equiv 3} \perp h_1$), а фронталь f - при $\Pi_3 \perp f \wedge \Pi_3 \perp \Pi_2$

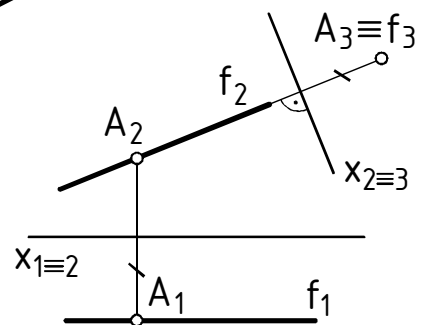


Рис. 2.14

(новая ось $x_{2\equiv 3} \perp f_2$). На рис. 2.14 фронталь f , заданная проекциями f_1 и f_2 , переведена в проецирующее положение ($\Pi_3 \perp f$). Для построения f_3 провели $x_{2\equiv 3} \perp f_2$, на фронтале взяли точку $A(A_1, A_2)$ и нашли её проекцию $A_3 \equiv f_3$.

Для перевода прямой α общего положения в проецирующее положение последовательно вводят две новые ПП (сразу задать новую ПП перпендикулярно α нельзя: такая ПП не перпендикулярна ни к Π_1 , ни к Π_2):

1. Задают $\Pi_3 \parallel \alpha$ и перпендикулярно к Π_1 (новая ось $x_{1\equiv 3} \parallel \alpha_1$) или к Π_2 (новая ось $x_{2\equiv 3} \parallel \alpha_2$) - решают 1ОЗПЧ.
2. Задают $\Pi_4 \perp \alpha \Rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_3$ (новая ось $x_{3\equiv 4} \perp \alpha_3$) - решают 2ОЗПЧ.

На рис. 2.15 (были заданы $\alpha_1, \alpha_2, x_{1\equiv 2}$) для перевода прямой α в проецирующее положение на 1-м этапе использовали $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Проекция α_3 и α_4 строили с помощью произвольных точек $A, B \in \alpha$ (откладываемые расстояния на рис. 2.15 обозначены).

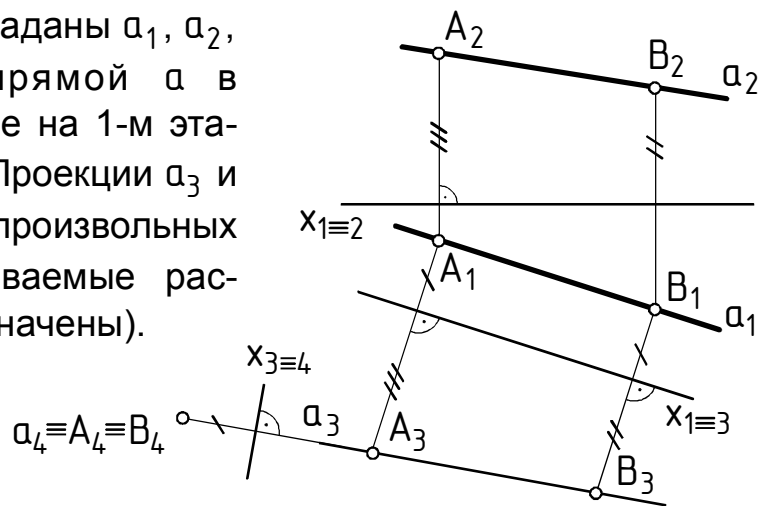


Рис. 2.15

2.4. Задание пар прямых

Прямые могут пересекаться, быть параллельными, скрещиваться.

Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноименных проекций находятся на одной линии связи. На рис. 2.16 заданы пары пересекающихся прямых $\alpha \cap b, d \cap g, l \cap t$.

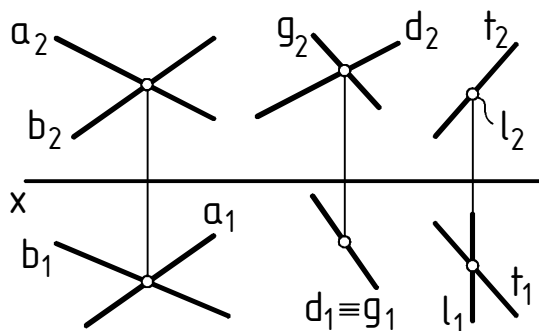


Рис. 2.16

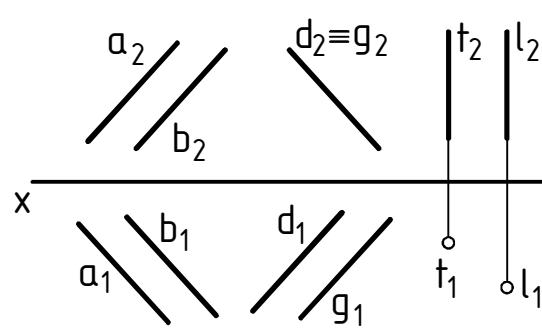


Рис. 2.17

Если прямые параллельны, то параллельны их соответствующие проекции. На рис. 2.17 $a \parallel b$ ($a_1 \parallel b_1$; $a_2 \parallel b_2$), $d \parallel g$, $l \parallel t$.

Скрещивающиеся прямые - прямые, не лежащие в одной плоскости. На рис. 2.18 приведены пары скрещивающихся прямых $a \div b$, $l \div t$, $d \div g$.

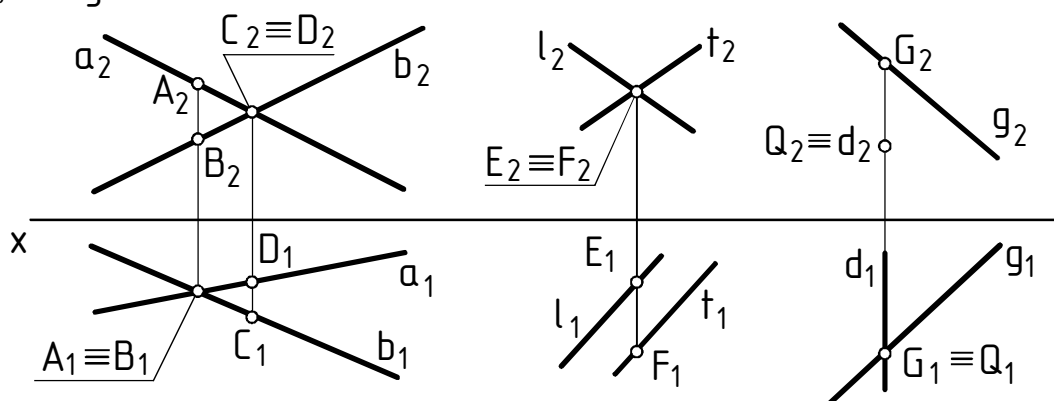


Рис. 2.18

Скрещивающиеся прямые всегда имеют одну или две пары точек, конкурирующих относительно Π_1 и Π_2 . У прямых a и b точки $A \in a$ и $B \in b$ конкурируют относительно Π_1 (видна точка A), а точки $C \in b$ и $D \in a$ - относительно Π_2 (видна точка C); у прямых l и t точки $E \in l$ и $F \in t$ конкурируют относительно Π_2 (видна точка F), у прямых g и d точки $G \in g$ и $Q \in d$ конкурируют относительно Π_1 (видна точка G).

Введем понятие угла между скрещивающимися прямыми.

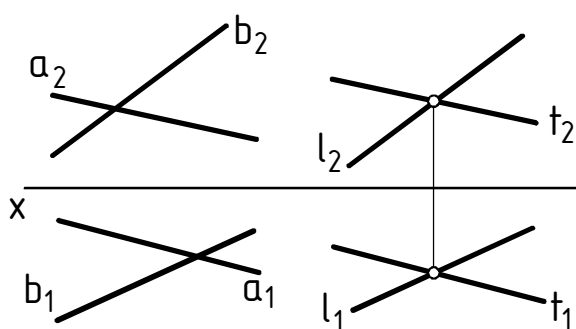


Рис. 2.19

Величина угла между скрещивающимися прямыми (a и b на рис. 2.19) равна величине угла между пересекающимися прямыми (t и l на рис. 2.19), соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым ($t \parallel a$, $l \parallel b$).

2.5. Теорема о проецировании прямого угла

В общем случае прямой угол между пересекающимися или скрещивающимися прямыми проецируется на ПП с искажением. Теорема о проецировании прямого угла выделяет частный, но важный для практики случай, когда прямой угол проецируется на ПП в натуральную величину. Так как теорема о проецировании прямого угла связывает три ГО (рис. 2.20) - прямой угол, некую плоскость

проекций (Π_n) и проекцию прямого угла на эту ПП, то можно сформулировать три теоремы:

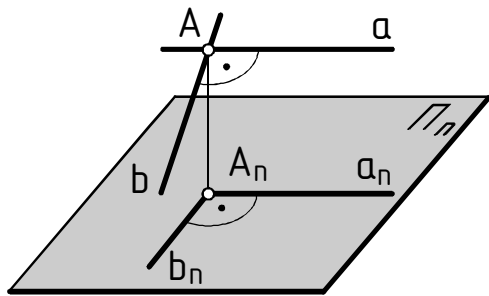


Рис. 2.20

1. Если хотя бы одна из сторон a или ($и$) b прямого угла ($a \perp b$) параллельна ПП Π_n , то прямой угол проецируется на Π_n в прямой угол ($a_n \perp b_n$).

2. Если хотя бы одна из прямых a или ($и$) b параллельна ПП Π_n , а их проекции на Π_n перпендикулярны ($a_n \perp b_n$), то данные прямые перпендикулярны ($a \perp b$).

3. Если прямые перпендикулярны ($a \perp b$) и перпендикулярны их проекции ($a_n \perp b_n$) на ПП Π_n , то хотя бы одна из данных прямых a или ($и$) b параллельна Π_n .

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести бесконечное множество прямых перпендикулярно данной прямой, но только одна из этих прямых пересекает данную, а остальные скрещиваются с ней.

ПРИМЕР 2.1. Заданы прямая a (a_1, a_2) и точка M (M_1, M_2). Через точку M провести прямую перпендикулярно прямой a (рис. 2.21).

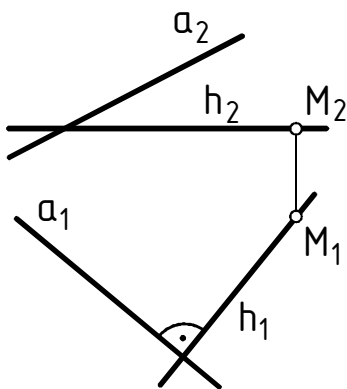


Рис. 2.21

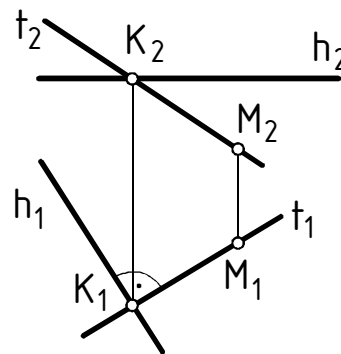


Рис. 2.22

Если дана прямая общего положения, то без дополнительных построений, используя только теорему о проецировании прямого угла, через точку можно провести лишь две прямые перпендикулярно данной прямой, причем в общем случае обе они будут скрещиваться с ней. Одна из двух прямых - горизонталь h на рис. 2.21 ($h \parallel \Pi_1 \wedge h \perp a \Rightarrow h_1 \perp a_1$), а второй прямой могла бы быть фронталь $f \perp a$ ($f_2 \perp a_2$).

ПРИМЕР 2.2. Даны точка $M (M_1, M_2)$ и горизонталь $h (h_1, h_2)$. Построить прямую t , проходящую через точку M и пересекающую h под прямым углом (рис. 2.22).

Порядок построения на рис. 2.22 был следующим:

1. $\overline{t_1} \supset M_1 \wedge t_1 \perp h_1$.
2. $\overline{K_1} = t_1 \cap h_1$.
3. $\overline{K_2} \subset h_2$.
4. $\overline{t_2} \supset M_2, K_2$.

ПРИМЕР 2.3. Даны прямая $a (a_1, a_2)$ и точка $M (M_1, M_2)$. Через точку M провести прямую l , пересекающую a под прямым углом (рис. 2.23).

Чтобы решить пример, прямую a сделали прямой уровня, задав новую ПП $\Pi_3 \parallel a \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$. Для построения проекции a_3 на прямой a взяли произвольные точки $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$, нанесли старую ось проекций $x_{1 \equiv 2} \perp (M_1, M_2)$ и новую ось проекций $x_{1 \equiv 3} \parallel a_1$ (можно было задать $x_{1 \equiv 3} \equiv a_1$), нашли проекции точек A_3, B_3 , а также M_3 и через A_3 и B_3 провели прямую a_3 . После этого в поле Π_3 применили теорему о проецировании прямого угла: через точку M_3 провели $l_3 \perp a_3$ и нашли точку $K_3 = l_3 \cap a_3$ ($K = l \cap a$ - точка пересечения прямых l и a). Проекции l_1 и l_2 определялись точками M_1, K_1 и M_2, K_2 соответственно.

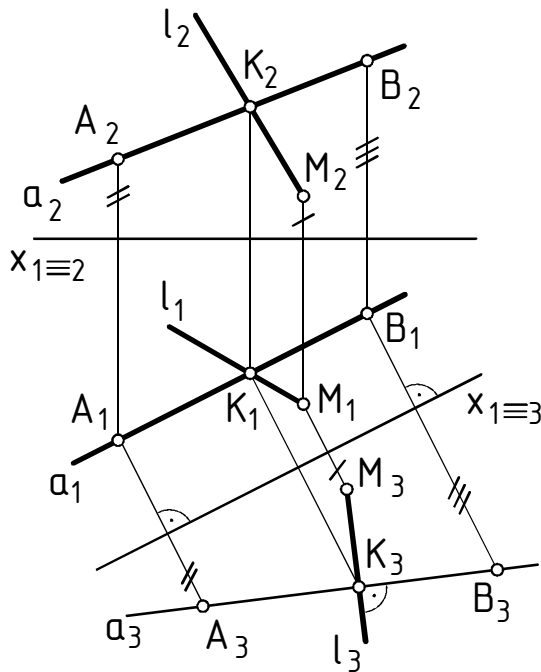


Рис. 2.23

ЛЕКЦИЯ 3

ПЛОСКОСТЬ

3.1. Задание плоскости общего положения

Плоскость относят к линейчатым поверхностям, которые могут образовываться при перемещении в пространстве прямой линии. Подробнее вопросы образования и задания поверхностей рассмотрены в лекциях 7-10. Здесь отметим только, что в общем случае плоскость и другие поверхности не задаются на чертеже, как точки и линии, своими проекциями.

Плоскость общего положения - это плоскость, не перпендикулярная и, следовательно, не параллельная ни одной из ПП. Из элементарной геометрии известно, что плоскость определяют не лежащие на одной прямой три точки - $\Sigma(A, B, D)$; две пересекающиеся прямые - $\Sigma(a \cap b)$; две параллельные прямые - $\Sigma(a \parallel b)$; прямая и не лежащая на ней точка - $\Sigma(a, A)$; треугольник - $\Sigma(A, B, D, A)$ или $\Sigma(\triangle ABD)$, реже другая плоская фигура (в скобках после обозначающей плоскость буквы Σ условно указан способ задания плоскости).

Если плоскость задана не удобно для решения задачи, то надо перейти к другому способу её задания. При этом от способа задания плоскости тремя точками всегда переходят к какому-нибудь другому способу задания, чаще всего треугольником.

3.2. Построение прямой линии в плоскости общего положения

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки плоскости или если она проходит через точку плоскости параллельно одной из прямых плоскости.

На рис. 3.1 в плоскости $\Sigma(a \parallel b)$ построена произвольная прямая l ,

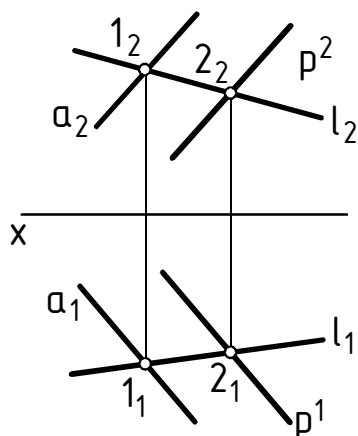


Рис. 3.1

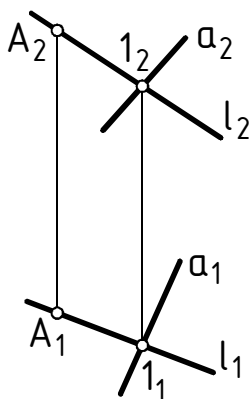


Рис. 3.2

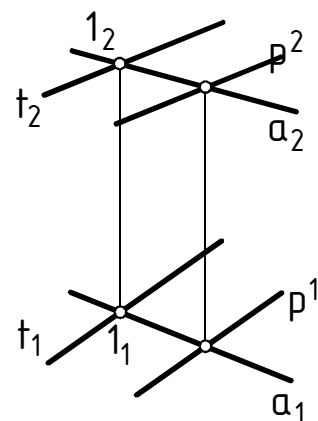


Рис. 3.3

проходящая через точку 1 прямой a и точку 2 прямой b : $1 \in a \Rightarrow 1 \in \Sigma$; $2 \in b \Rightarrow 2 \in \Sigma$; $l \supset 1 \wedge l \supset 2 \Rightarrow l \in \Sigma$. Обычно одну из проекций l_1 или l_2 проводят произвольно, а вторую строят, используя проекции точек $1 = l \cap a$ и $2 = l \cap b$. Если плоскость задана прямой и точкой (плоскость $\Sigma(a, A)$ на рис. 3.2), то прямую l целесообразно проводить через данную точку (A). На рис. 3.3 в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ построена прямая t : $1 \in a \Rightarrow 1 \in \Sigma$; $t \supset 1 \wedge t \parallel b \Rightarrow t \in \Sigma$.

Главные линии плоскости - это горизонталь плоскости, фронталь плоскости и линии наклона плоскости к плоскостям проекций. Горизонталь плоскости - прямая, параллельная Π_1 и принадлежащая плоскости. Фронталь плоскости - прямая, параллельная Π_2 и принадлежащая плоскости. Линии наклона плоскости - прямые плоскости, перпендикулярные к линиям уровня плоскости. Линию наклона плоскости к плоскости Π_1 , перпендикулярную горизонтали плоскости, называют также линией ската. Линия наклона плоскости образует с соответствующей плоскостью проекций угол, по величине равный углу наклона плоскости к этой ПП.

Горизонталь h плоскости начинают строить с проекции $h_2 \parallel x$, а фронталь f плоскости - с проекции $f_1 \parallel x$ ($h \parallel \Pi_1$, $f \parallel \Pi_2$). Проекции h_1 и f_2 строят по точкам, используя проекции h_2 и f_1 и условие принадлежности h и f плоскости. На рис. 3.4 в плоскости $\Sigma(A, B, D, A)$ построены горизонталь h и линия ската t , проходящие через вершины A и B соответственно:

1. $\overline{h_2} \supset A_2 \wedge h_2 \parallel x$ - через A_2 параллельно оси x провели h_2 .
2. $\overline{1_2} = h_2 \cap [B_2, D_2]$ - нашли точку 1_2 пересечения h_2 и $[B_2, D_2]$.
3. $\overline{1_1} \in [B_1, D_1]$ - нашли 1_1 из условия её принадлежности $[B_1, D_1]$.
4. $\overline{h_1} \supset A_1, 1_1$ - провели h_1 через точки A_1 и 1_1 .
5. $\overline{t_1} \supset B_1 \wedge t_1 \perp h_1$ - через B_1 перпендикулярно h_1 провели t_1 .
6. $\overline{2_1} = t_1 \cap [A_1, D_1]$.
7. $\overline{2_2} \in [A_2, D_2]$.
8. $\overline{f_2} \supset B_2, 2_2$.

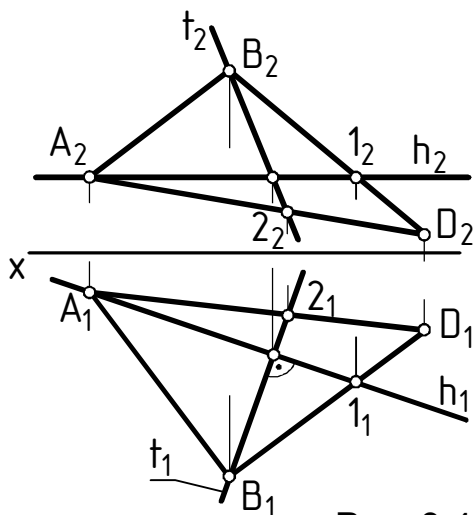


Рис. 3.4

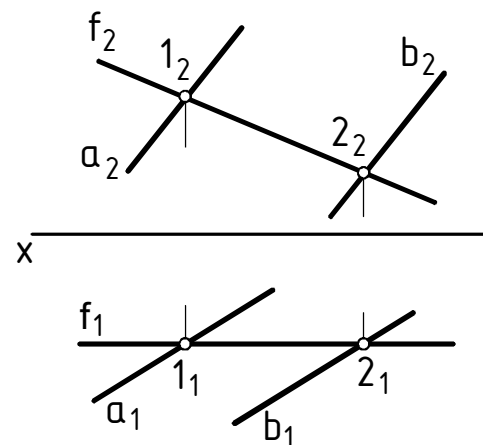


Рис. 3.5

На рис. 3.5 в плоскости $\Sigma(a \parallel b)$ построена произвольная фронталь f : $f_1 \parallel x$, а $f_2 \supset 1_2, 2_2$, где $1 = f \cap a$, $2 = f \cap b$.

Все горизонталь плоскости параллельны друг другу. Это же относится к фронталям плоскости и линиям наклона плоскости к ПП.

3.3. Принадлежность точки плоскости общего положения

Задача на принадлежность точки поверхности называется основной позиционной задачей (ОПЗ). ОПЗ является одной из ключевых задач НГ: возможность решения ОПЗ на чертеже подтверждает то, что поверхность на этом чертеже задана (лекция 7). Существуют три формулировки ОПЗ:

1. На чертеже задана поверхность. Построить проекции произвольной точки, принадлежащей поверхности.
2. На чертеже заданы поверхность и одна проекция точки, принадлежащей поверхности. Построить вторую проекцию точки.
3. На чертеже заданы поверхность и точка. Определить, принадлежит точка поверхности или нет.

Для решения ОПЗ используется условие принадлежности точки поверхности: точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии этой поверхности. Поэтому ОПЗ выполняется в соответствии с таким пространственным алгоритмом (ПА):

- I. $\overline{a} \subset \Phi$ - на поверхности Φ строится некая линия a .
- II. $\overline{M} \subset a$ - на линии a задается (ищется, берется) точка M .

В общем случае ПА решения задачи - последовательность геометрических построений в пространстве, приводящих к решению задачи. Для пояснения порядка выполнения многих задач на чертеже условными знаками будет записываться графический алгоритм (ГА) их решения - последовательность графических построений на чертеже, приводящих к решению задачи. При этом одна и та же задача обычно имеет несколько ГА её выполнения.

В плоскости точки строят с помощью прямых линий согласно ПА:
I. $\overline{l} \subset \Sigma$ - в плоскости строят прямую; II. $\overline{M} \subset l$ - на прямой берут точку M .

В дальнейшем буквами l и l будут обозначаться только прямые линии.

ПРИМЕР 3.1. Задана плоскость $\Sigma(a \cap b)$. Построить проекции M_1 и M_2 произвольной точки M , принадлежащей плоскости Σ (рис. 3.6).

Условимся, что точка считается произвольной, если она не принадлежит ГО, задающему поверхность (здесь $M \notin a \wedge M \notin b$). Точка M строилась с помощью произвольной прямой $l \subset \Sigma$ согласно ГА:

- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| I. 1. $\overline{l_1} \cap a_1 \wedge l_1 \cap b_1$. | 4. $\overline{l_2} = l_1 \cap b_1$. | II. 1. $\overline{M_2} \subset l_2$. |
| 2. $\overline{l_1} = l_1 \cap a_1$. | 5. $\overline{l_2} \subset b_2$. | 2. $\overline{M_1} \subset l_1$. |
| 3. $\overline{l_2} \subset a_2$. | 6. $\overline{l_2} \supset l_2, 2_2$. | |

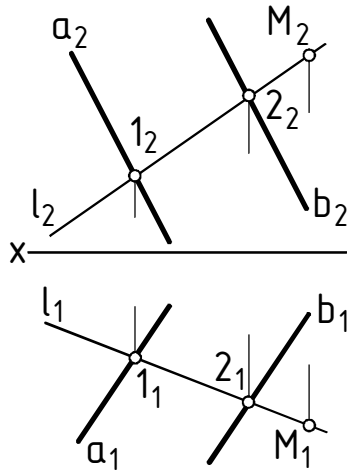


Рис. 3.6

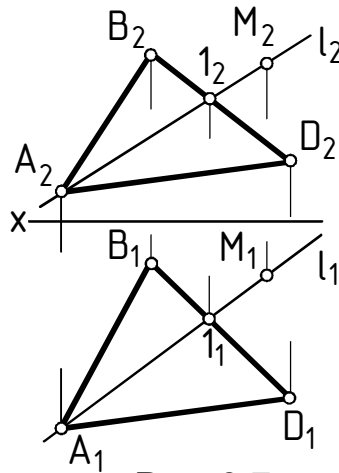


Рис. 3.7

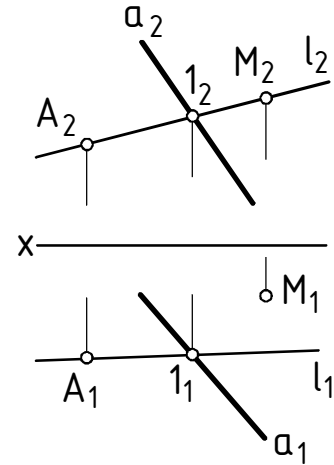


Рис. 3.8

ПРИМЕР 3.2. Заданы плоскость $\Sigma(A, B, D)$ и проекция M_2 точки M , принадлежащей плоскости (рис. 3.7). Построить M_1 .

Сначала, соединив три точки A , B и D , перешли к способу задания плоскости треугольником. Главного решения задачи с использованием прямой $l \subset \Sigma$ был такой:

1. $\overline{l_2} \supset M_2, A_2$.
2. $\overline{l_2} = l_2 \cap [B_2, D_2]$.
3. $\overline{l_1} \subset [B_1, D_1]$.
4. $\overline{l_1} \supset A_1, 1_1$.
5. $\overline{M_1} \subset l_1$.

ПРИМЕР 3.3. Заданы плоскость $\Sigma(A, a)$ и точка M (рис. 3.8). Определить, принадлежит точка M плоскости или нет.

При ответе на вопрос о принадлежности точки M плоскости делалась попытка построить в плоскости прямую, проходящую через точку M :

1. $\overline{l_2} \supset A_2, M_2$.
2. $\overline{l_2} = l_2 \cap a_2$.
3. $\overline{l_1} \subset a_1$.
4. $\overline{l_1} \supset A_1, 1_1$.

Оказалось, что $\overline{M_1} \notin l_1 \Rightarrow M \notin l \Rightarrow M \notin \Sigma$.

3.4. Плоскости частного положения

К плоскостям частного положения относят проецирующие плоскости и плоскости уровня.

Проецирующая плоскость - это плоскость, перпендикулярная к какой-либо ПП. Плоскость, перпендикулярную к Π_1 , называют горизонтально проецирующей, а перпендикулярную к Π_2 - фронтально проецирующей.

Проецирующая плоскость проецируется на ПП, к которой она перпендикулярна, в прямую линию, называемую её основной проекцией. Чтобы задать проецирующую плоскость, достаточно задать основную проекцию этой плоскости. На рис. 3.9 основной проекцией Σ_1 задана плоскость $\Sigma \perp \Pi_1$, а проекцией Δ_2 - плоскость $\Delta \perp \Pi_2$.

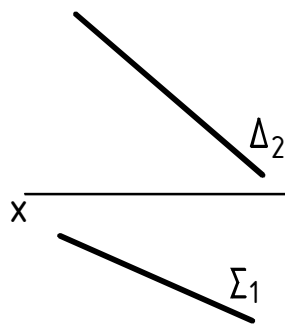


Рис. 3.9

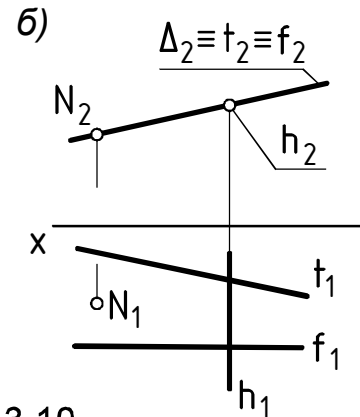
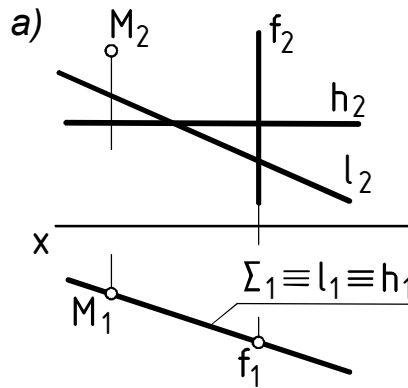


Рис. 3.10

Основная проекция обладает собирательным свойством: на ней расположены проекции всех точек и линий проецирующей плоскости. Поэтому фигура принадлежит проецирующей плоскости, если её соответствующая проекция принадлежит основной проекции этой плоскости. На рис. 3.10, а в плоскости $\Sigma \perp \Pi_1$ заданы точка M , прямая l , горизонталь h и фронталь f : $M_1 \in \Sigma_1$, $l_1 \equiv h_1 \equiv \Sigma_1$, $f_1 \in \Sigma_1$, причем фронталь горизонтально проецирующей плоскости $f \perp \Pi_1$. На рис. 3.10, б в плоскости $\Delta \perp \Pi_2$ заданы точка N , прямая t , горизонталь h ($h \perp \Pi_2$) и фронталь f .

Плоскость уровня - это плоскость, параллельная какой-либо ПП. Плоскость, параллельную Π_1 , называют горизонтальной, а параллельную Π_2 - фронтальной. Плоскость уровня - частный случай проецирующей плоскости: если $\Sigma \parallel \Pi_1$, то $\Sigma \perp \Pi_2$, а если $\Gamma \parallel \Pi_2$, то $\Gamma \perp \Pi_1$. Поэтому плоскости уровня задаются своими основными проекциями, параллельными оси проекций: на рис. 3.11 проекцией $\Sigma_1 \parallel x$ задана плоскость $\Sigma \parallel \Pi_2$, а на рис. 3.12 проекцией $\Gamma_2 \parallel x$ - плоскость $\Gamma \parallel \Pi_1$. На рис. 3.11 также заданы прямые l , t и b плоскости Σ . Так как $\Sigma \parallel \Pi_2$, то все эти прямые фронтальны, а прямая b еще и горизонталь ($b \parallel \Pi_1 \wedge b \parallel \Pi_2$).

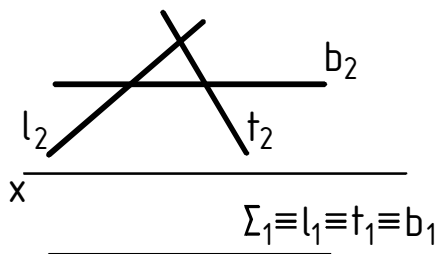


Рис. 3.11

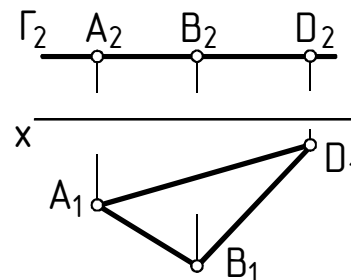


Рис. 3.12

Расположенная в плоскости уровня фигура проецируется на ПП, которой эта плоскость параллельна, в натуральную величину.

Так, расположенный в плоскости $\Gamma \triangle ABD$ проецируется на Π_1 без искажения: $|\triangle ABD| = |\triangle A_1 B_1 D_1|$ (рис. 3.12).

3.5. Параллельность прямой и плоскости и плоскостей между собой

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости. На рис. 3.13 прямая g параллельна плоскости $\Sigma(a \cap b)$, поскольку $g \parallel a$.

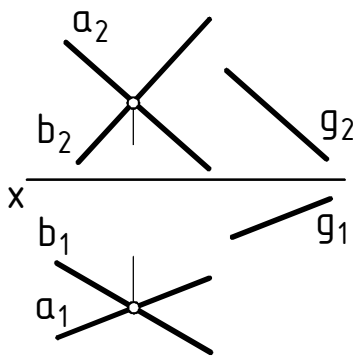


Рис. 3.13

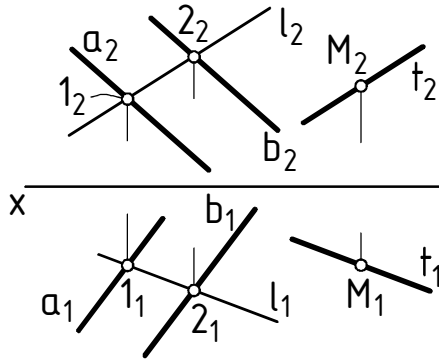


Рис. 3.14

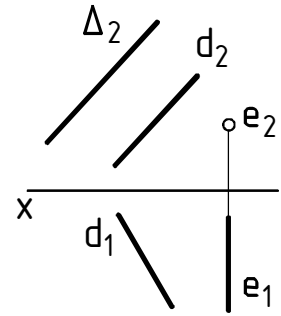


Рис. 3.15

ПРИМЕР 3.4. Заданы плоскость $\Sigma(a \parallel b)$, точка M и проекция t_1 прямой t , $t \ni M$, $t \parallel \Sigma$. Построить t_2 (рис. 3.14).

В плоскости Σ строили некую прямую $l \parallel t$:

1. $\overline{l_1} \parallel t_1 \wedge l_1 \cap a_1 \wedge l_1 \cap b_1$.
2. $\overline{l_1} = l_1 \cap a_1$, $\overline{l_1} = l_1 \cap b_1$.
3. $\overline{l_2} \subset a_2$, $\overline{l_2} \subset b_2$.
4. $\overline{l_2} \ni 1_2, 2_2$.
5. $\overline{l_2} \ni M_2 \wedge t_2 \parallel l_2$.

Проецирующая прямая параллельна проецирующей плоскости, если прямая и плоскость перпендикулярны к одной ПП. Непроецирующая прямая параллельна проецирующей плоскости, если соответствующая проекция прямой параллельна основной проекции плоскости. На рис. 3.15 $e \perp \Pi_2 \wedge \Delta \perp \Pi_2 \Rightarrow e \parallel \Delta$ и $d_2 \parallel \Delta_2 \Rightarrow d \parallel \Delta$.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой. На рис. 3.16 заданы параллельные плоскости $\Sigma(a \cap b)$ и $\Gamma(l \cap t)$, у которых $l \parallel a$ и $t \parallel b$.

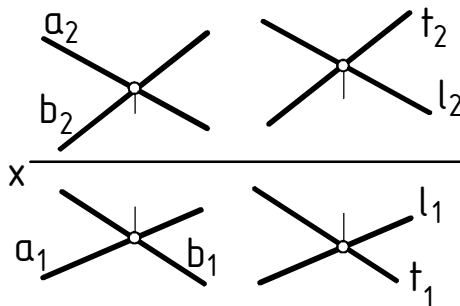


Рис. 3.16

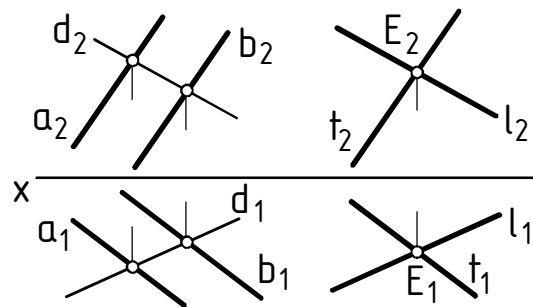


Рис. 3.17

На рис. 3.17 через точку E проведена плоскость Γ , параллельная плоскости Σ ($\alpha \parallel b$). Для этого в плоскости Σ построили произвольную прямую d и задали плоскость Γ прямыми l и t ($l \parallel d, t \parallel a$).

3.6. Решение задач на преобразование плоскости способом задания новой ПП (3 и 4 ОЗПЧ)

Условие 3ОЗПЧ: преобразовать КЧ так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей плоскостью.

Чтобы плоскость общего положения Σ стала проецирующей, новую ПП Π_3 задают перпендикулярно к горизонтали h плоскости и Π_1 (новая ось проекций $x_{1\equiv 3} \perp h_1$) или перпендикулярно к фронту f плоскости и Π_2 (новая ось проекций $x_{2\equiv 3} \perp f_2$).

В примере на рис. 3.18 в плоскости Σ ($\alpha \parallel b$) проведена произвольная горизонталь h и задана новая ПП $\Pi_3 \perp h$. Основную проекцию плоскости Σ_3 строили с использованием оси $x_{1\equiv 3} \perp h_1$ и точек 1 и 3 (3 - произвольная точка плоскости). Угол α определяет величину угла наклона плоскости Σ к Π_1 .

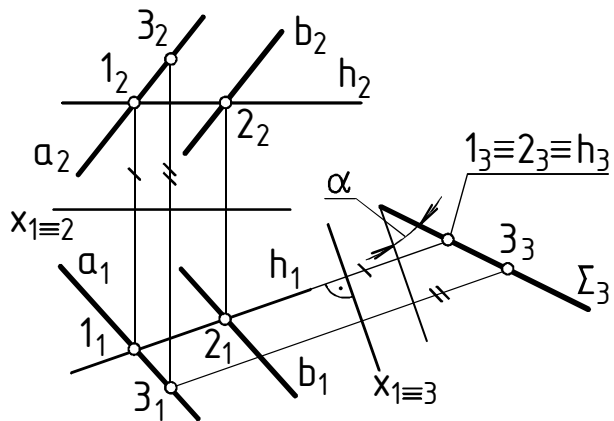


Рис. 3.18

Условие 4ОЗПЧ: преобразовать КЧ так, чтобы проецирующая плоскость стала плоскостью уровня.

Для решения 4ОЗПЧ новую ПП задают параллельно данной плоскости и перпендикулярно к той ПП, на которую данная плоскость является проецирующей (новая ось проекций параллельна основной проекции плоскости). На рис. 3.19 плоскость $\Gamma \perp \Pi_1$ заданием $\Pi_3 \parallel \Gamma \Rightarrow \Pi_3 \perp \Pi_1$ переведена в положение плоскости уровня. При этом любая фигура, лежащая в плоскости Γ , например, $\triangle ABD$ проецируется на ПП Π_3 в натуральную величину: $|\triangle A_3B_3D_3| = |\triangle ABD|$.

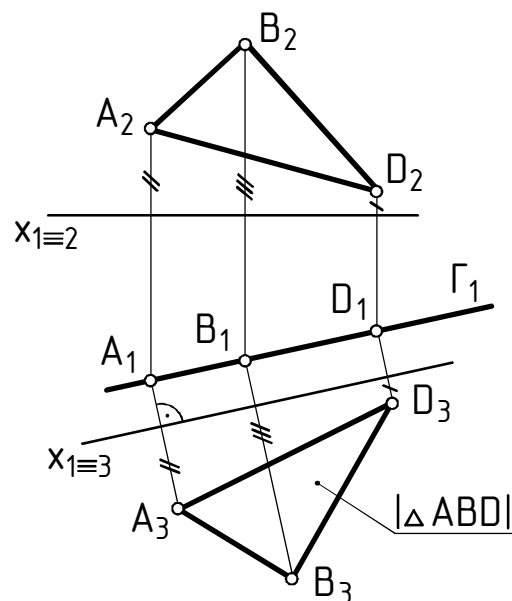


Рис. 3.19

ЛЕКЦИЯ 4

ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ГЛАВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

4.1. Основные метрические задачи

Всякая задача, в условии или в процессе решения которой встречается численная характеристика, называется метрической задачей. К метрическим задачам относят задачи на определение расстояний, углов, натурального вида фигур и т. д.

Из множества метрических задач выделяют две, лежащие в основе решения других метрических задач и называемые поэтому основными метрическими задачами (ОМЗ).

1ОМЗ - задача на перпендикулярность прямой и плоскости.

2ОМЗ - задача на определение длины отрезка или расстояния между двумя точками.

4.2. Решение 1ОМЗ

1ОМЗ имеет две возможные формулировки:

- через точку провести прямую перпендикулярно к данной плоскости (точка может принадлежать плоскости или нет);
- через точку провести плоскость перпендикулярно к данной прямой (точка может принадлежать прямой или нет).

Решение 1ОМЗ базируется на признаке перпендикулярности прямой и плоскости: прямая перпендикулярна к плоскости (ко всем прямым плоскости), если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости, и теореме о проецировании прямого угла. Эта теорема позволяет использовать при построении взаимно перпендикулярных прямой и плоскости на чертеже прямые уровня, существенно облегчая решение 1ОМЗ. Сформулируем с учетом теоремы признак перпендикулярности прямой и плоскости для чертежа:

- первая формулировка: чтобы построить прямую l , перпендикулярную к плоскости Γ , в Γ строят горизонталь h и фронталь f (если они не заданы) и проводят $l_1 \perp h_1 \wedge l_2 \perp f_2$ (в общем случае $l \nparallel h$ и $l \nparallel f$);
- вторая формулировка: плоскость Γ , перпендикулярную к прямой l , задают горизонталью h и фронталью f , проводя $h_1 \perp l_1 \wedge f_2 \perp l_2$.

На рис. 4.1 через точку M перпендикулярно к прямой a проведена плоскость Γ , заданная горизонталью $h \perp a$ ($h_1 \perp a_1$) и фронталью $f \perp a$ ($f_2 \perp a_2$). На рис. 4.2 через точку M проходит прямая l ,

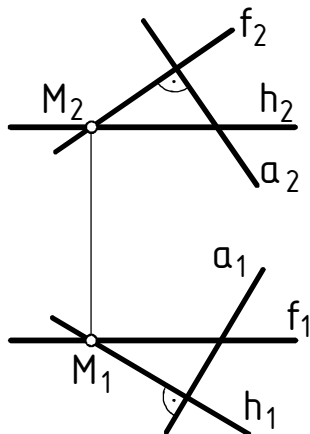


Рис. 4.1

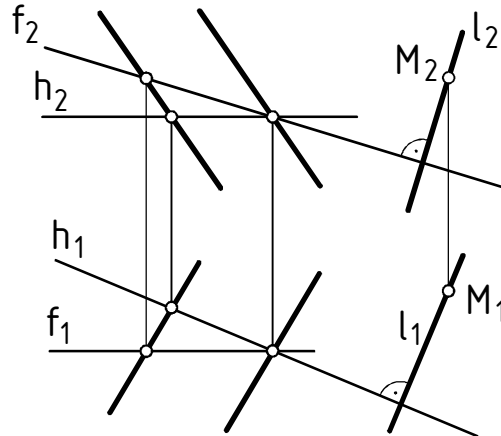


Рис. 4.2

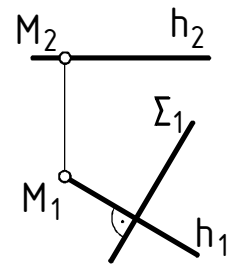


Рис. 4.3

перпендикулярная к плоскости $\Sigma(a \parallel b)$, для чего в Σ были построены горизонталь h и фронталь f , а затем проведены $l_1 \perp h_1 \wedge l_2 \perp f_2$.

Перпендикуляр к проецирующей плоскости является прямой уровня: если плоскость перпендикулярна к Π_1 , то перпендикуляр к ней является горизонталью h (на рис. 4.3 плоскость $\Sigma \perp \Pi_1 \wedge h_1 \perp \Sigma_1$), а если плоскость перпендикулярна к Π_2 , то фронталью f .

При решении задачи на перпендикулярность двух плоскостей дополнительно используют признак их перпендикулярности: две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к второй плоскости.

На рис. 4.4 через прямую a проходит плоскость Γ , перпендикулярная к плоскости $\Sigma(h \cap f)$ и заданная прямыми a и l , где l - перпендикуляр к плоскости Σ ($l_1 \perp h_1 \wedge l_2 \perp f_2$), проходящий через произвольную точку $M \in a$.

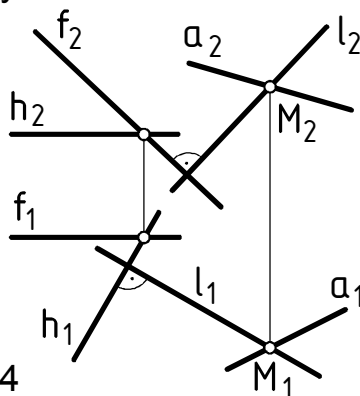


Рис. 4.4

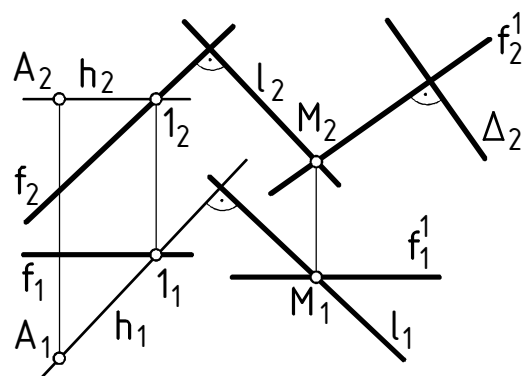


Рис. 4.5

На рис. 4.5 построена плоскость Γ , проходящая через точку M и одновременно перпендикулярная к плоскостям $\Sigma(A, f)$ и $\Delta \perp \Pi_2$. Плоскость Γ задана фронталью f^1 - перпендикуляром к плоскости Δ ($f_2^1 \perp \Delta_2$) и прямой l - перпендикуляром к плоскости Σ (в плоскости Σ построили горизонталь h и провели $l_1 \perp h_1 \wedge l_2 \perp f_2$).

4.3. Решение 2ОМЗ

Решение 2ОМЗ (определение длины отрезка) по правилу прямоугольного треугольника рассмотрено в лекции 2. Поэтому здесь приведем только несколько примеров, выполненных с использованием этого правила.

ПРИМЕР 4.1. Заданы точка $A(A_1, A_2)$, проекция $[A_1, B_1]$ отрезка $[A, B]$ и угол α наклона отрезка $[A, B]$ к ПП Π_1 . Построить $[A_2, B_2]$ (рис. 4.6).

В поле Π_1 по катету $[A_1, B_1]$ и углу α строят прямоугольный треугольник $A_1 B_1 E$: из точки B_1 проводят луч перпендикулярно к $[A_1, B_1]$, из точки A_1 - луч, составляющий с $[A_1, B_1]$ угол α , получая в точке пересечения лучей вершину E . Длина катета $|B_1, E|$ равна разности ΔZ координат Z точек A и B . Откладывая ΔZ от точки N по линии связи (B_1, B_2) , находят точку B_2 (показано одно решение).

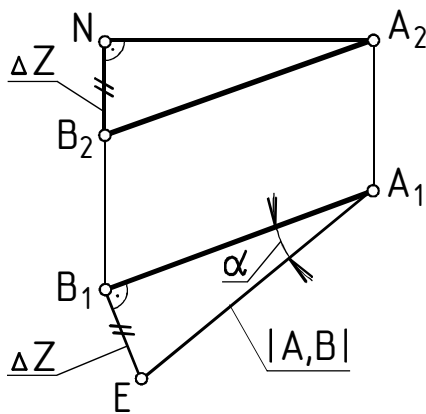


Рис. 4.6

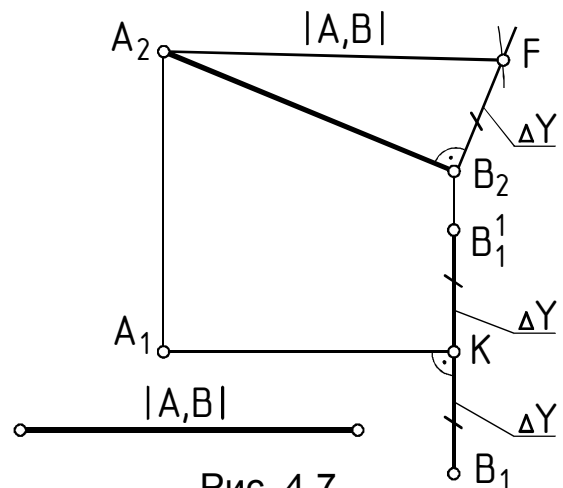


Рис. 4.7

ПРИМЕР 4.2. Заданы проекция $[A_2, B_2]$ отрезка $[A, B]$, длина $|A, B|$ этого отрезка и точка A_1 . Найти B_1 (рис. 4.7).

В поле Π_2 по катету $[A_2, B_2]$ и гипотенузе $[A_2, F]$, длина которой равна $|A, B|$, строится прямоугольный треугольник $A_2 B_2 F$, катет $[B_2, F]$ которого есть разность ΔY координат Y точек A и B . Откладывая ΔY от точки K по линии связи (B_2, B_1) , получают два решения B_1 и B_1^1 .

Прямоугольные треугольники, построенные в одном поле проекций для определения длин отрезков данной прямой, подобны. Это обстоятельство используют для откладывания на прямой отрезков заданной длины. Пусть от точки $M \in a$ на прямой a надо отложить отрезок длиной $|M, N|$ (рис. 4.8). Для этого на прямой a берут произвольную точку K и ищут, например, в поле Π_1 длину отрезка $|M, K|$,

равную $|M_1, E|$, а затем сравнивают эту длину с заданной длиной $|M, N|$. Если $|M, K| = |M, N|$, то $N \equiv K$. Если $|M, K| < |M, N|$ (как в примере), то на продолжении отрезка $[M_1, E]$ от точки M_1 откладывают отрезок $[M_1, F]$, длина которого равна $|M, N|$ и, строя $\triangle M_1 N_1 F$, подобный $\triangle M_1 K_1 E$, определяют точку N_1 . Если $|M, K| > |M, N|$, то точка N находится между точками M и K и для её определения от точки M_1 по $[M_1, E]$ откладывают отрезок длиной $|M, N|$ и строят треугольник, подобный $\triangle M_1 K_1 E$.

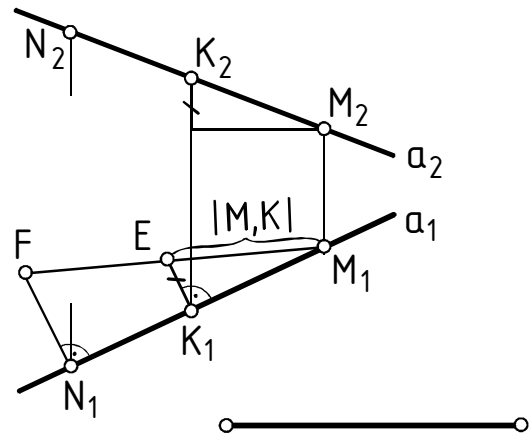


Рис. 4.8

4.4. Главные позиционные задачи для прямой и плоскости

4.4.1. Общие замечания

К позиционным задачам относятся задачи на принадлежность (принадлежность одних ГО другим - принадлежность точки линии, точки и линии поверхности и т. д.), на взаимное пересечение (пересечение линии и линии, линии и поверхности, поверхности и поверхности) и на взаимный порядок (на размещение ГО в пространстве и расположение одних ГО относительно других).

Главное содержание раздела позиционных задач составляют задачи на взаимное пересечение, называемые поэтому главными позиционными задачами (ГПЗ). Различают 1ГПЗ - задачу на пересечение линии и поверхности и 2ГПЗ - задачу на пересечение поверхностей (задача на пересечение линии и линии имеет очевидное решение, опирающееся на свойство операции проецирования).

Решение ГПЗ осуществляется согласно трем алгоритмам, соответствующим трем возможным случаям расположения пересекающихся ГО относительно плоскостей проекций. Но во всех трех случаях ключ к решению ГПЗ - задача на принадлежность точки поверхности (ОПЗ) и условие: точка пересечения и линия пересечения одновременно принадлежат каждому из пересекающихся ГО.

4.4.2. Первый случай ГПЗ (ГПЗ-1)

В первом случае ГПЗ пересекаются два проецирующих ГО. Алгоритм решения ГПЗ-1:

1. Обе проекции точки или линии пересечения заданы на КЧ.

2. Они принадлежат основным проекциям пересекающихся ГО.
3. Решение сводится к простановке обозначений.

ПРИМЕР 4.3. Дано $\alpha \perp \Pi_2$, $\Sigma \perp \Pi_1$ (рис. 4.9). $\overline{K} = \alpha \cap \Sigma$ - найти точку K пересечения прямой α и плоскости Σ .

Так как $K = \alpha \cap \Sigma$, то $K \in \alpha$ и $K \in \Sigma$. Поэтому $K_2 \equiv \alpha_2$ и $K_1 \in \Sigma_1$: решение опирается на собирательное свойство основной проекции проецирующих ГО и действительно сводится к простановке обозначений.

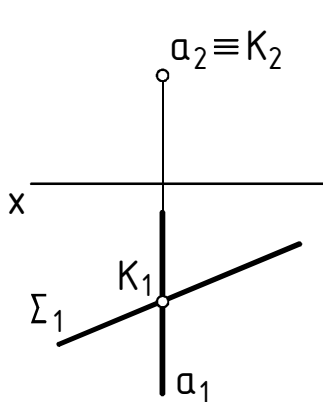


Рис. 4.9

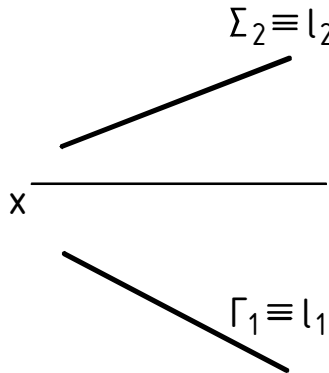


Рис. 4.10

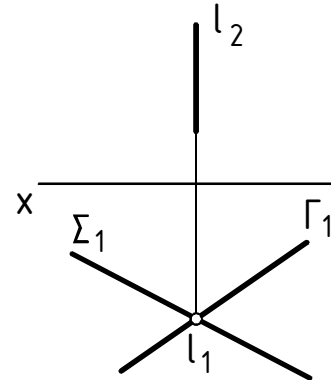


Рис. 4.11

ПРИМЕР 4.4. Дано: $\Gamma \perp \Pi_1$, $\Sigma \perp \Pi_2$ (рис. 4.10). \overline{l} (найти l) = $\Gamma \cap \Sigma$.
Пояснения к решению: $l \in \Gamma \wedge l \in \Sigma \Rightarrow l_1 \equiv \Gamma_1 \wedge l_2 \equiv \Sigma_2$.

ПРИМЕР 4.5. Дано: $\Gamma \perp \Pi_1$, $\Sigma \perp \Pi_1$ (рис. 4.11). $\overline{l} = \Gamma \cap \Sigma$.
Пояснения к решению: $l \in \Sigma \wedge l \in \Gamma \Rightarrow l_1 = \Sigma_1 \cap \Gamma_1 \Rightarrow l \perp \Pi_1 \Rightarrow l_2 \perp x$.

4.4.3. Второй случай ГПЗ (ГПЗ-2)

Во втором случае ГПЗ один пересекающийся ГО проецирующий, а второй нет. Алгоритм решения ГПЗ-2:

1. Одна проекция точки или линии пересечения задана на КЧ.
2. Она принадлежит основной проекции проецирующего ГО и её надо только обозначить.

3. Неизвестная проекция точки или линии пересечения ищется из условия принадлежности точки или линии непроецирующему ГО.

Во втором случае ГПЗ необходимо определять видимость пересекающихся ГО относительно одной из ПП.

ПРИМЕР 4.6. Дано: α , $\Sigma \perp \Pi_2$ (рис. 4.12). \overline{K} (найти K) = $\alpha \cap \Sigma$.

$K \in \Sigma \Rightarrow K_2 = \Sigma_2 \cap \alpha_2$ - обозначается известная проекция K_2 . Неизвестная проекция K_1 ищется из условия $K \in \alpha$: $K_1 = (K_2, K_1) \cap \alpha$. Точка K - граница видимости, делящая прямую α на две части, одна из которых видна относительно Π_1 , а вторая нет. Для определения

видимости прямой проекциями $1_1 \equiv 2_1$ задавались две конкурирующие относительно Π_1 точки $1 \in \Sigma$ и $2 \in a$. Так как точка 2 выше точки 1 (см. на 2_2 и 1_2), то точка 2 и вся часть прямой, на которой она находится, видна относительно Π_1 .

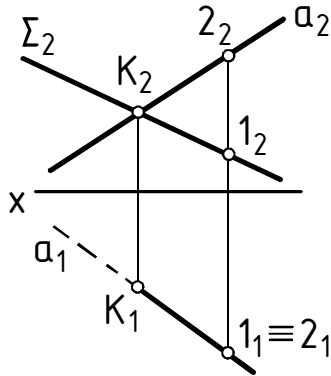


Рис. 4.12

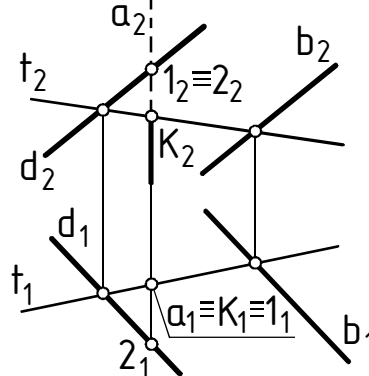


Рис. 4.13

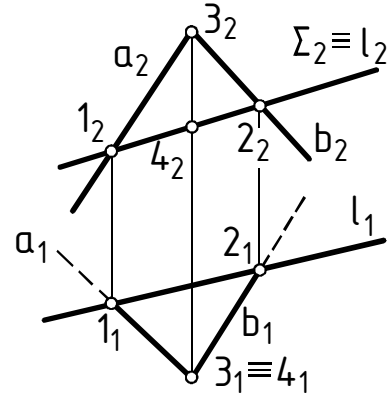


Рис. 4.14

ПРИМЕР 4.7. Дано: $a \perp \Pi_1$, $\Sigma(d \parallel b)$ (рис. 4.13). $\overline{K} = a \cap \Sigma$.

$K \in a \Rightarrow K_1 \equiv a_1$. Проекция K_2 ищется из условия $K \in \Sigma$ с помощью прямой $t \in \Sigma \wedge t \supset K$ (решается ОПЗ). Для определения видимости прямой a использовали конкурирующие относительно Π_2 точки $1 \in a$ и $2 \in d \Rightarrow 2 \in \Sigma$, задаваемые проекциями $1_2 \equiv 2_2$. Точка 2 плоскости дальше от Π_2 , чем точка 1 прямой, поэтому точка 1 и часть прямой a , на которой она находится, относительно Π_2 не видны.

ПРИМЕР 4.8. Дано: $\Sigma \perp \Pi_2$, $\Gamma(a \cap b)$ (рис. 4.14). $\overline{\Gamma}$ (найти l) = $\Sigma \cap \Gamma$.

$l \in \Sigma \Rightarrow l_2 \equiv \Sigma_2$. $l \in \Gamma$, поэтому l_1 ищут с помощью точек $1 = l \cap a$ и $2 = l \cap b$. Для определения взаимной видимости плоскостей Σ и Γ относительно Π_1 (граница видимости - прямая l) использовали конкурирующие точки $3 \in \Gamma$ и $4 \in \Sigma$. Точка 3 выше точки 4, поэтому относительно Π_1 видны точка 3 и часть плоскости Γ до границы l .

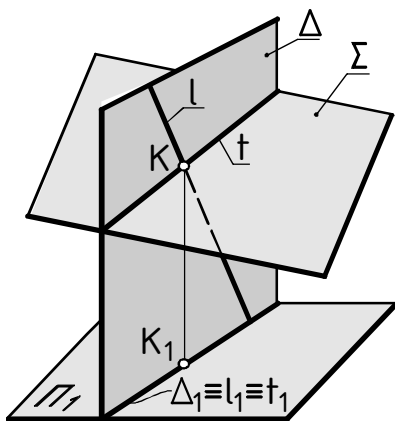


Рис. 4.15

4.4.4. Третий случай 1ГПЗ(1ГПЗ-3) для прямой и плоскости

В этом случае пересекаются непроецирующая прямая и плоскость и обе проекции точки их пересечения неизвестны. Рассмотрим ход решения задачи, используя наглядное изображение на рис. 4.15. Заданы прямая l и плоскость Σ общего положения. Надо построить точку $K = l \cap \Sigma \Rightarrow K \in l \wedge K \in \Sigma$.

Заклучим прямую l в проецирующую плоскость Δ : $\Delta \supset l$ и $\Delta \perp \Pi_1$ или $\Delta \perp \Pi_2$ (пусть для определенности $\Delta \perp \Pi_1$). Так как $K \in l$, а $l \subset \Delta$, то $K \in \Delta$. Но раз $K \in \Delta \wedge K \in \Sigma$, то точка K должна находиться на прямой $t = \Delta \cap \Sigma$ - линии пересечения плоскостей Δ и Σ , для построения которой надо решить 2ГПЗ-2. И, наконец, поскольку $K \in t \wedge K \in l$, то K есть точка пересечения прямых l и t : $K = t \cap l$. Сформулируем теперь общий алгоритм решения 1ГПЗ-3 для прямой и плоскости:

1. Прямая заключается во вспомогательную проецирующую плоскость.
2. Строится прямая линия, по которой пересекаются данная плоскость и вспомогательная проецирующая (2ГПЗ-2).
3. Искомая точка - точка пересечения данной прямой и построенной.

ПРИМЕР 4.9. Дано: $d, \Sigma(h \parallel h^1)$ (рис. 4.16). $\overline{K} = d \cap \Sigma$.

Точка $K = d \cap \Sigma$ искалась согласно алгоритму:

П.А.

I. $\overline{\Delta} \supset d \wedge \Delta \perp \Pi_2$:

II. $\overline{t} = \Sigma \cap \Delta$:

III. $\overline{K} = t \cap d$:

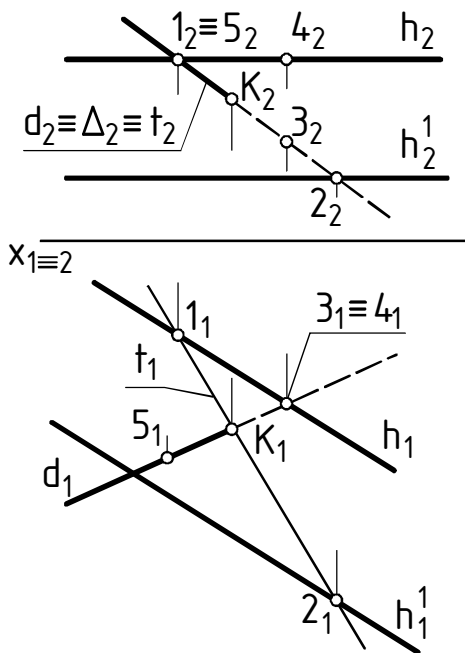


Рис. 4.16

Г.А.

I. 1. $\overline{\Delta}_2 \equiv d_2$.

II. 1. $\overline{t}_2 \equiv \Delta_2$. 4. $\overline{2}_2 = t_2 \cap h_2^1$.

2. $\overline{1}_2 = t_2 \cap h_2$. 5. $\overline{2}_1 \subset h_1^1$.

3. $\overline{1}_1 \subset h_1$. 6. $\overline{t}_1 \supset 1_1, 2_1$.

III. 1. $\overline{K}_1 = t_1 \cap d_1$. 2. $\overline{K}_2 \subset d_2$.

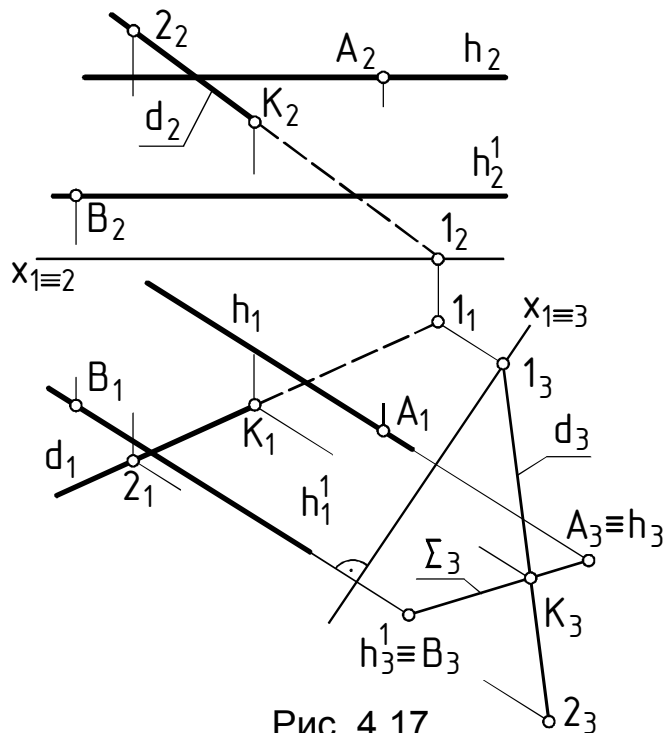


Рис. 4.17

Для определения видимости прямой относительно Π_1 использовали конкурирующие точки $3 \in \Sigma$ и $4 \in d$, а относительно Π_2 - конкурирующие точки $1 \in \Sigma$ и $5 \in d$.

На рис. 4.17 этот же пример выполнен с применением новой ПП: задавали $\Pi_3 \perp \Sigma \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ (новая ось $x_{1\equiv 3} \perp h_1$) и делали плоскость Σ проецирующей. В результате вместо решения 1ГПЗ-3 в системе ПП (Π_1, Π_2) решали 1ГПЗ-2 в системе ПП (Π_1, Π_3). Проекцию Σ_3 плоскости строили с помощью точек А и В, а проекцию d_3 прямой - с помощью точек 1 и 2.

4.4.5. Третий случай 2ГПЗ(2ГПЗ-3) для плоскостей

В этом случае пересекаются непроецирующие плоскости и обе проекции линии их пересечения неизвестны. 2ГПЗ для плоскостей общего положения решается методом вспомогательных секущих проецирующих плоскостей, основанном на том, что линии пересечения данных плоскостей со вспомогательной пересекаются в точке, лежащей на линии пересечения данных плоскостей. Поэтому алгоритм решения 2ГПЗ-3 для плоскостей формулируется так:

1. Задается вспомогательная проецирующая плоскость, пересекающая данные плоскости.
2. Строятся линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из данных.
3. Определяется точка пересечения построенных в пункте 2 прямых.
4. Задается вторая вспомогательная плоскость и все повторяется.
5. Искомая линия пересечения проходит через две построенные точки.

ПРИМЕР: 4.10. Дано: $\Gamma(A, B, D, A), \Sigma(a \parallel b)$ (рис. 4.18). $\overline{\Gamma} = \Gamma \cap \Sigma$.

При решении примера использовали вспомогательные плоскости Δ и Δ^1 , параллельные Π_1 и пересекающие плоскости Γ и Σ по горизонталям. Построения выполнялись согласно ПА:

I. $\overline{\Delta} \parallel \Pi_1$.	IV. $\overline{K} = h^\Gamma \cap h^\Sigma$.	VII. $\overline{h^{1\Sigma}} = \Delta^1 \cap \Sigma$.
II. $\overline{h^\Gamma} = \Delta \cap \Gamma$.	V. $\overline{\Delta^1} \parallel \Pi_1$.	VIII. $\overline{K^1} = h^{1\Gamma} \cap h^{1\Sigma}$.
III. $\overline{h^\Sigma} = \Delta \cap \Sigma$.	VI. $\overline{h^{1\Gamma}} = \Delta^1 \cap \Gamma$.	IX. $\overline{\Gamma} \supset K, K^1$.

В примере не рассматривался вопрос взаимной видимости плоскостей Γ и Σ относительно ПП Π_1 и Π_2 .

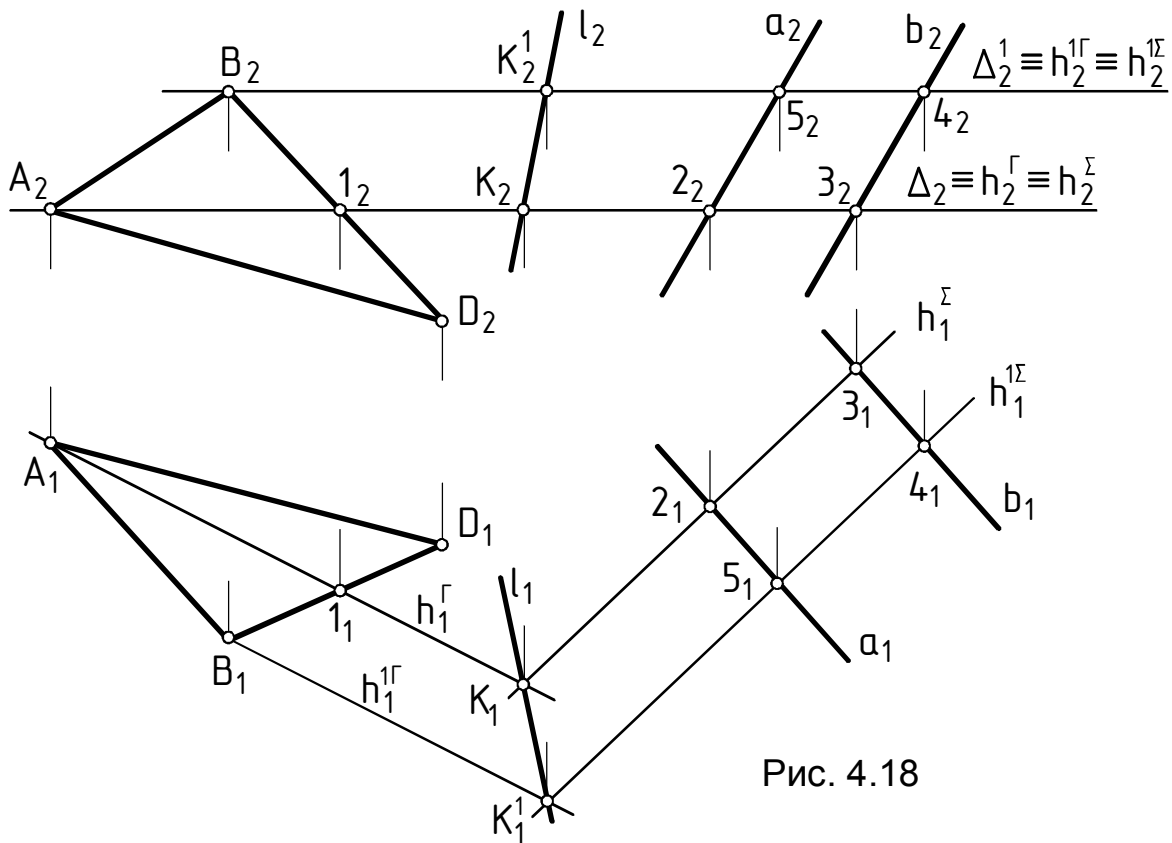


Рис. 4.18

На рис. 4.19 пересекаются треугольные отсеки $\triangle ABD$ и $\triangle EFL$. Секущие плоскости Σ и Σ^1 перпендикулярны к Π_2 , причем $\Sigma \supset [LF]$, а $\Sigma^1 \supset [LE]$. Такой прием удобен, так как нет необходимости строить линии пересечения плоскостей Σ и Σ^1 с $\triangle EFL$, пересекающих плоскость этого треугольника по $[LF]$ и $[LE]$. Поэтому определяли только линии $t = \Sigma \cap \triangle ABD$ ($t_2 \equiv \Sigma_2$; t_1 строилась по точкам 1 и 2) и $l = \Sigma^1 \cap \triangle ABD$ ($l_2 \equiv \Sigma_2^1$; l_1 строилась по точкам 3 и 4). Затем находили точки $K = t \cap [LF]$ ($K_1 = t_1 \cap [L_1F_1]$) и $M = l \cap [LE]$ ($M_1 = l_1 \cap [L_1E_1]$), задающие отрезок $[MK] = \triangle ABD \cap \triangle EFL$.

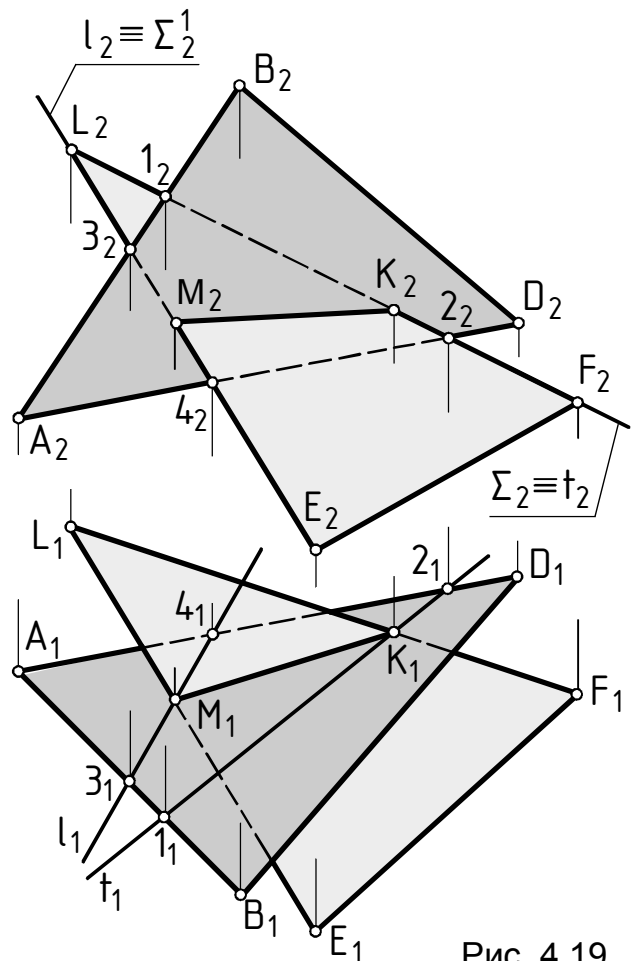


Рис. 4.19

ЛЕКЦИЯ 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОЗИЦИОННО-МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

5.1. Общие замечания

Комплексные позиционно-метрические задачи составляют важнейший раздел курса, связанный с решением обратной задачи НГ. Эти задачи получили свое название в силу того, что для выполнения большинства из них необходимо последовательно решать определенные позиционные и метрические задачи.

Рассматриваемые комплексные задачи можно условно разбить на четыре группы, выделив в каждой группе ключевую задачу, на базе которой решаются остальные задачи группы. Сформулируем эти ключевые задачи:

1. Определение расстояния от точки до плоскости.
2. Определение расстояния от точки до прямой линии.
3. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми.
4. Определение натурального вида треугольника.

Комплексные позиционно-метрические задачи могут решаться без преобразования КЧ с использованием основных метрических и главных позиционных задач или с преобразованием КЧ с использованием четырех ОЗПЧ и свойств прямых и плоскостей частного положения.

5.2. Определение расстояния от точки до плоскости

Расстояние от точки M до плоскости Σ равно длине отрезка $|MK|$ перпендикуляра l , опущенного из точки на плоскость (рис. 5.1). Задача решается согласно ПА (не зависит от способа решения):

1. Через точку M проводят перпендикуляр l к плоскости Σ - 1ОМЗ.
2. Ищут точку K пересечения перпендикуляра l и плоскости Σ - 1ГПЗ.
3. Определяют длину отрезка $|MK|$ перпендикуляра l - 2ОМЗ.

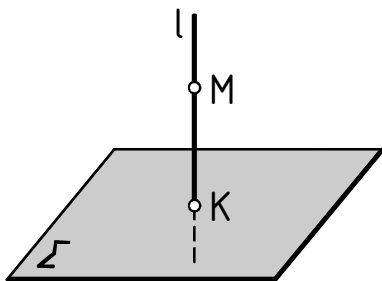


Рис. 5.1

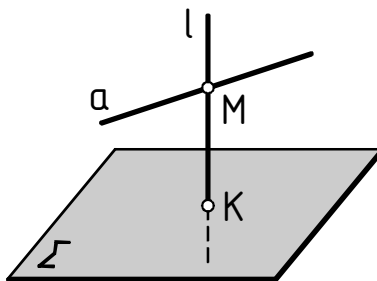


Рис. 5.2

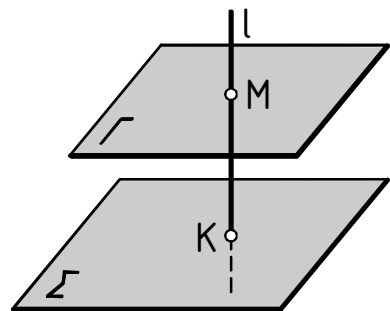


Рис. 5.3

Рассматриваемая задача является ключевой для группы задач, в которую, в частности, входят задачи: определить расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью; определить

расстояние между параллельными плоскостями; через точку плоскости провести к плоскости отрезок перпендикуляра заданной длины; построить плоскость, параллельную данной плоскости и удаленную от неё на указанное расстояние.

Расстояние от прямой α до параллельной ей плоскости Σ определяется длиной отрезка $|M,K|$ перпендикуляра l , опущенного из произвольной точки M прямой на плоскость (рис. 5.2). Поэтому, чтобы найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости, достаточно на прямой взять точку и найти расстояние от неё до плоскости, то есть решить ключевую задачу. Расстояние между параллельными плоскостями Γ и Σ измеряется длиной отрезка $|M,K|$ перпендикуляра l , опущенного из произвольной точки M одной плоскости на другую (рис. 5.3). Следовательно, чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, достаточно в одной из плоскостей взять точку и найти расстояние от неё до второй плоскости, то есть опять же решить ключевую задачу.

ПРИМЕР 5.1. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и плоскость $\Sigma(A, \alpha)$ (рис. 5.4). $\overline{|M, \Sigma|}$ - найти расстояние от точки M до плоскости Σ без преобразования КЧ.

Пояснения к решению: 1. $\overline{l \supset M \wedge l \perp \Sigma}$ - через точку M провели перпендикуляр l к плоскости Σ : в Σ построили горизонталь h (h_1, h_2) и фронталь f (f_1, f_2) и провели $l_1 \supset M_1 \wedge l_1 \perp h_1$; $l_2 \supset M_2 \wedge l_2 \perp f_2$.

2. $\overline{K = l \cap \Sigma}$ - нашли точку K пересечения перпендикуляра l и плоскости Σ , для чего заключили l в плоскость $\Gamma \perp \Pi_2$, построили прямую $t = \Gamma \cap \Sigma$, а затем точку $K = t \cap l$. 3. $\overline{|M, \Sigma| = |M, K|}$ - из прямоугольного $\triangle M_1 K_1 D$ нашли длину отрезка $|M, K| = |M_1, D|$, равную искомому расстоянию.

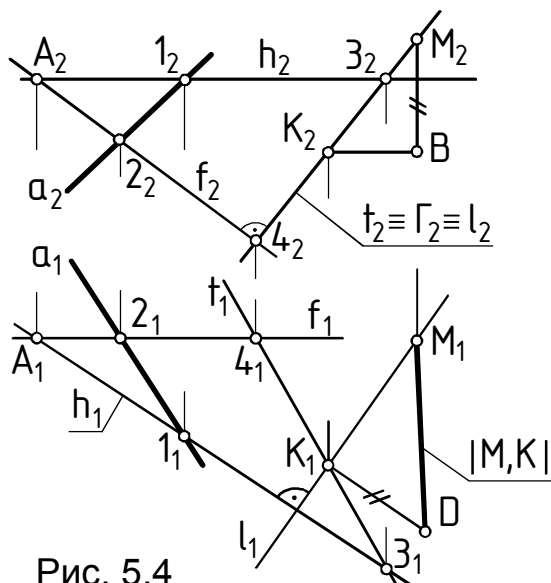


Рис. 5.4

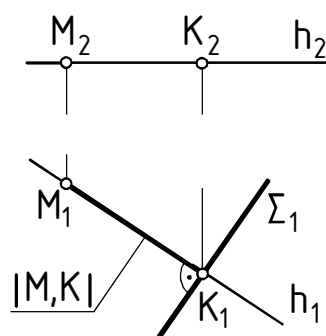


Рис. 5.5

ПРИМЕР 5.2. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и плоскость $\Sigma(\Sigma_1) \perp \Pi_1$ (рис. 5.5). $|\overline{M, \Sigma}|$ - найти расстояние от точки M до плоскости Σ .

Пояснения к решению: 1. $\overline{h} \ni M \wedge h \perp \Sigma$ - так как $\Sigma \perp \Pi_1$, то перпендикуляр к Σ является горизонталью h ($h_1 \perp \Sigma_1$). 2. $\overline{K} = h \cap \Sigma$ - поскольку $\Sigma \perp \Pi_1$, то $K_1 = h_1 \cap \Sigma_1$, а $K_2 \in l_2$. 3. $|\overline{M, \Sigma}| = |M, K|$ - $[M, K] \subset h \wedge h \parallel \Pi_1 \Rightarrow |M, K| = |M_1, K_1|$.

Таким образом, если плоскость проецирующая, то отрезок перпендикуляра, определяющий расстояние от точки до плоскости, строится сразу, так как он параллелен одной из ПП. Поэтому при нахождении расстояния от точки до плоскости общего положения часто применяют преобразование чертежа, решая 3ОЗПЧ и переводя плоскость в проецирующее положение (см. пример 5.3).

ПРИМЕР 5.3. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и плоскость $\Sigma(a \cap b)$ (рис. 5.6). Используя способ введения новой ПП, найти $|M, \Sigma|$ - расстояние от точки M до плоскости Σ .

Прямая t на рис. 5.6 отношения к примеру 5.3 не имеет.

В основе решения примера - 3ОЗПЧ и пример 5.2 (рис. 5.5).

Пояснения к решению: 1. $\overline{\Pi_3} \perp \Sigma \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ - задали новую ПП и сделали плоскость Σ проецирующей, получив её проекцию Σ_3 и проекцию точки M_3 . Для этого в плоскости построили произвольную горизонталь h , нанесли старую $x_{1 \equiv 2} \perp (M_1, M_2)$ и новую $x_{1 \equiv 3} \perp h_1$ оси проекций и через проекции 1_3 и 3_3 точек 1 и 3 плоскости провели её проекцию Σ_3 .

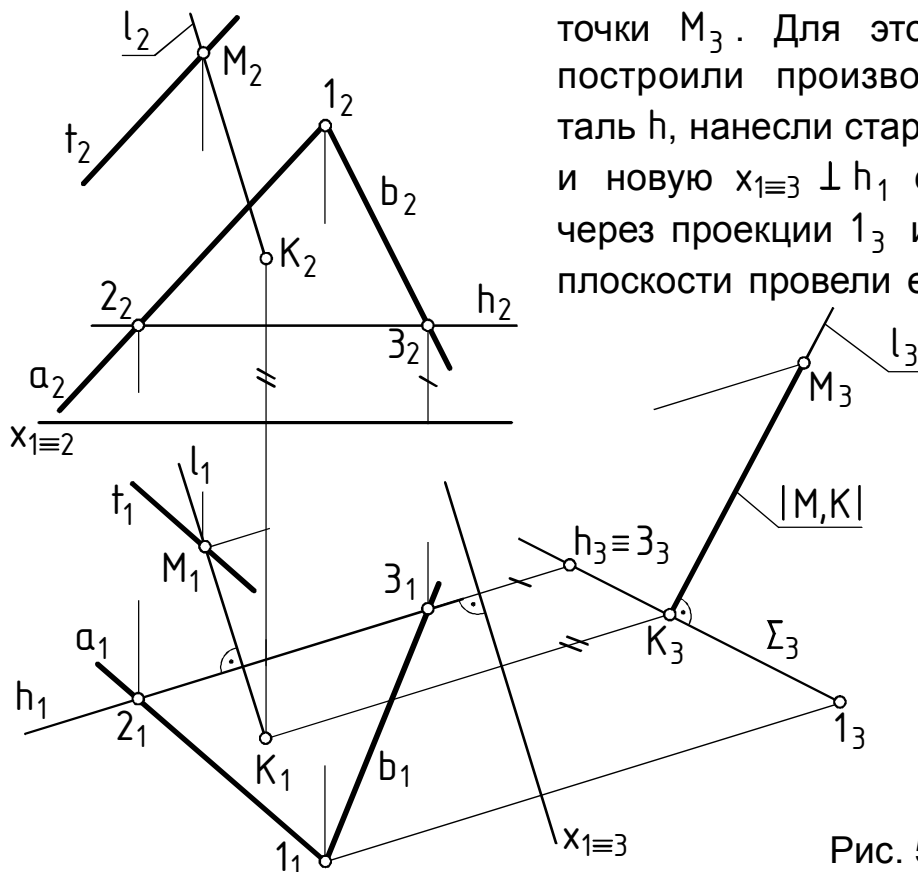


Рис. 5.6

2. $\overline{\Gamma \supset M \wedge l \perp \Sigma}$ - построили проекции l_1 и l_3 перпендикуляра l к плоскости Σ , проходящего через точку M : а) $l \perp \Sigma \wedge h \subset \Sigma \Rightarrow l \perp h$, поэтому $l_1 \perp h_1$; б) $\Sigma \perp \Pi_3 \wedge l \perp \Sigma \Rightarrow l \parallel \Pi_3$, поэтому $l_3 \perp \Sigma_3$. 3. $\overline{K = l \cap \Sigma}$ - нашли проекции точки пересечения l и Σ : $K \subset l \wedge K \subset \Sigma$, но $\Sigma \perp \Pi_3 \Rightarrow K_3 = l_3 \cap \Sigma_3 \wedge K_1 \subset l_1$. Для получения K_2 из K_1 построили линию связи $(K_1, K_2) \perp x_{1 \equiv 2}$ и отложили от $x_{1 \equiv 2}$ по линии связи расстояние, равное расстоянию от точки K_3 до оси $x_{1 \equiv 3}$. Через K_2 и M_2 проходит l_2 . 4. $\overline{|\overline{M, \Sigma}| = |\overline{M, K}|}$ - искомое расстояние равно длине отрезка $|\overline{M, K}|$: $|\overline{M, K}| \subset l \wedge l \parallel \Pi_3 \Rightarrow |\overline{M, K}| = |\overline{M_3, K_3}|$.

ПРИМЕР 5.4. Заданы параллельные прямая \dagger и плоскость $\Sigma(a \cap b)$ (рис. 5.6). $|\overline{\dagger, \Sigma}|$ - найти расстояние от прямой до плоскости.

Для выполнения примера 5.4 достаточно на прямой \dagger взять произвольную точку M и найти расстояние от неё до плоскости Σ с использованием новой ПП, как в примере 5.3, или без преобразования КЧ, как в примере 5.1.

Для определения расстояния между плоскостями $\Sigma(a \cap b) \parallel \Gamma(d \cap g)$ (рис. 5.7) достаточно найти расстояние от какой-то точки $M \subset \Gamma$, например $M = d \cap g$, до плоскости Σ так, как это сделано в примерах 5.1 или 5.3.

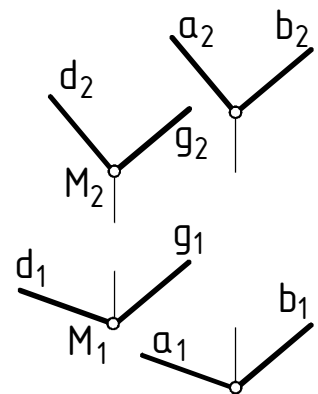


Рис. 5.7

ПРИМЕР 5.5. Задана плоскость $\Sigma(a \parallel b)$ (рис. 5.8). Построить плоскость Γ , параллельную плоскости Σ и удаленную от неё на 20 мм.

Для выполнения примера надо через какую-то точку плоскости Σ провести к Σ отрезок перпендикуляра длиной 20 мм, а затем задать плоскость $\Gamma \parallel \Sigma$, проходящую через конец отрезка.

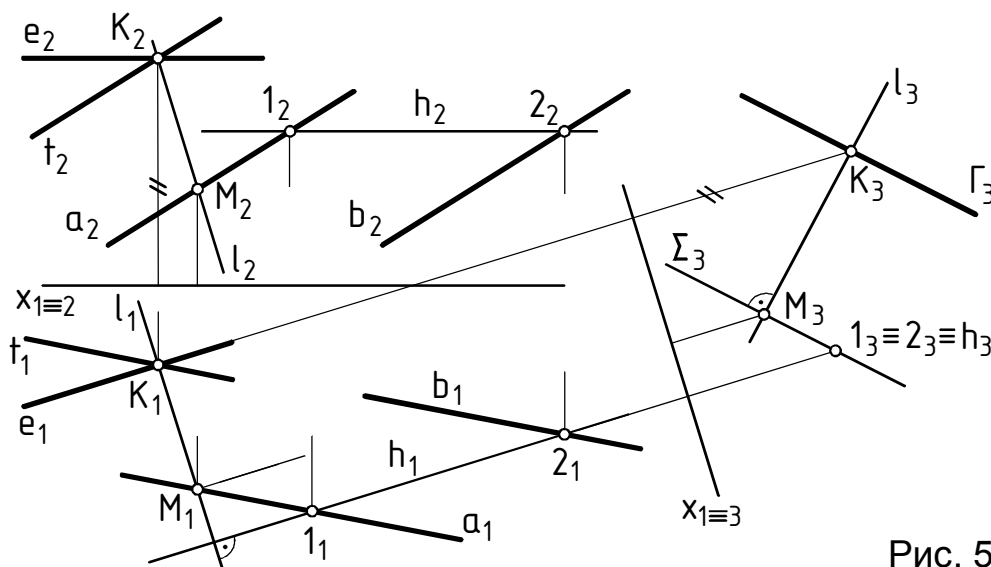


Рис. 5.8

Пояснения к решению: 1. $\overline{M \in \alpha}$ - в Σ взяли произвольную точку M . 2. Плоскость Σ сделали проецирующей, задав $\Pi_3 \perp h$ (h - произвольная горизонталь плоскости) и построив её проекцию Σ_3 , используя точки $1, M \in \Sigma$. 3. Через точку M провели $l \perp \Sigma$, при этом $l_1 \perp h_1$ ($l \perp \Sigma \wedge h \in \Sigma \Rightarrow l \perp h$), а $l_3 \perp \Sigma_3$ ($l \perp \Sigma \wedge \Sigma \perp \Pi_3 \Rightarrow l \parallel \Pi_3$). 4. Так как $l \parallel \Pi_3$, то от M_3 по l_3 отложили отрезок длиной 20 мм и получили точку K_3 . Точка $K_1 = (K_3, K_1) \cap l_1$. Точку K_2 нашли на линии связи, проведенной из K_1 перпендикулярно оси $x_{1 \equiv 2}$, с использованием расстояния от точки K_3 до оси $x_{1 \equiv 3}$. 5. $\overline{\Gamma \supset K \cap \Gamma \parallel \Sigma}$ - в поле Π_3 провели $\Gamma_3 \parallel \Sigma_3$, а в полях Π_1 и Π_2 плоскость Γ задали пересекающимися прямыми t и e ($t \parallel \alpha \wedge e \parallel h$).

5.3. Определение расстояния от точки до прямой линии

Расстояние от точки до прямой линии равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние между параллельными прямыми равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую прямую. Поэтому для определения расстояния между параллельными прямыми достаточно на одной из них взять какую-то точку и решить ключевую задачу - найти расстояние от этой точки до второй прямой.

ПРИМЕР 5.6. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и прямая $\alpha(a_1, a_2) \perp \Pi_1$ (рис. 5.9). $\overline{M, \alpha}$ - найти расстояние от точки до прямой.

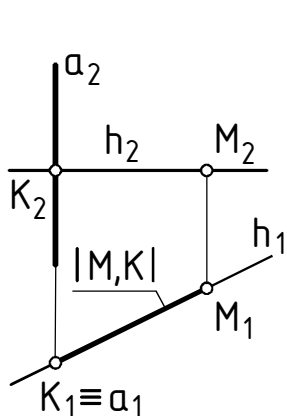


Рис. 5.9

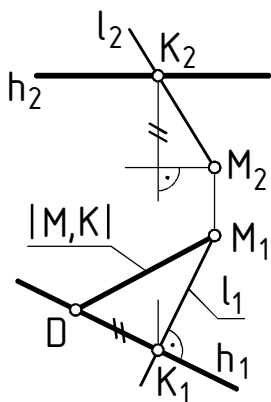


Рис. 5.10

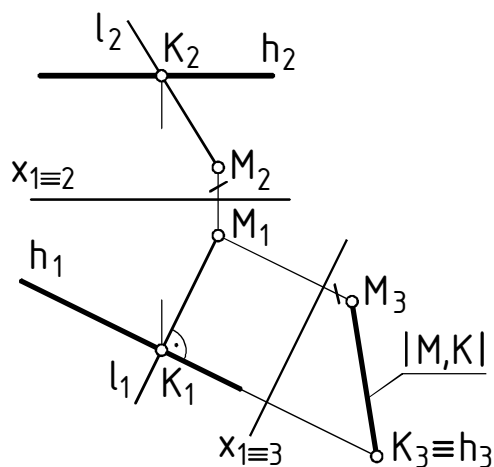


Рис. 5.11

Пояснения к решению: 1. $\overline{h \supset M \wedge h \perp \alpha}$: так как $\alpha \perp \Pi_1$, то перпендикуляр к α параллелен Π_1 . 2. $\overline{K = h \cap \alpha}$: $K_1 \equiv a_1 \wedge K_2 = h_2 \cap a_2$. 3. $\overline{|M, \alpha| = |M, K| = |M_1, K_1|}$: поскольку $[M, K] \subset h \wedge h \parallel \Pi_1$, то отрезок $[M, K]$ проецируется на Π_1 в натуральную величину.

Таким образом, если прямая является проецирующей, то перпендикуляр к ней параллелен одной из ПП и расстояние от точки до прямой ищется с использованием простейших свойств прямых частного положения.

ПРИМЕР 5.7. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и прямая $h(h_1, h_2) \parallel \Pi_1$.
 $\overline{PM, h}$ - найти расстояние от точки M до прямой h без преобразования КЧ (рис. 5.10) и с преобразованием КЧ (рис. 5.11).

Пояснения к решению на рис. 5.10: **1.** Через точку М провели прямую l , пересекающую прямую h под прямым углом: построили $l_1 \supset M_1 \wedge l_1 \perp h_1$, нашли $K_1 = l_1 \cap h_1 \wedge K_2 \in h_2$ и провели $l_2 \supset M_2, K_2$. **2.** $||M, h|| = |M, K|$ – длина отрезка $|M, K|$ прямой l найдена по правилу прямоугольного треугольника $(\triangle M_1 K_1 D)$, построенного в поле Π_1 .

Пояснения к решению на рис. 5.11: **1.** См. пункт 1 пояснений к рис. 5.10. **2.** Чтобы отрезок $[M, K]$ прямой общего положения проецировался на ПП в натуральную величину, надо чтобы эта ПП была параллельна отрезку и, следовательно, перпендикулярна к h : $\overline{\Pi_3 \perp h \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1}$ - нанесли $x_{1\equiv 2} \perp (M_1, M_2)$ и $x_{1\equiv 3} \perp h_1$, построили M_3 и $K_3 \equiv h_3$ и получили $|M_3, K_3| = |M, K|$.

ПРИМЕР 5.8. Заданы прямая a и точка M (рис. 5.12). Без преобразования КЧ найти расстояние от точки M до прямой a .

Прямая b на рис. 5.12 отношения к примеру 5.8 не имеет.

Пример выполнялся согласно такому ПА (первые два пункта ПА нужны для получения отрезка, определяющего искомое расстояние):

1. $\lceil \Sigma \supset M \wedge \Sigma \perp a$ (1ОМЗ) - горизонталью $h \supset M \wedge h \perp a$ ($h_1 \perp a_1$) и фронталью $f \supset M \wedge f \perp a$ ($f_2 \perp a_2$) задали плоскость $\Sigma \perp a$, содержащую множество всех прямых, проходящих через точку M перпендикулярно к прямой a .

2. $\overline{K} = \Sigma \cap \alpha$ (1ГПЗ) - для нахождения точки K использовались построения: 1. $\overline{\Gamma} \supseteq \alpha \perp \Pi_2$; 2. $\overline{f} = \Gamma \cap \Sigma$; 3. $\overline{K} = \overline{f} \cap \alpha$. Через точку K пересечения прямой α с плоскостью Σ проходит определяющий искомое расстояние отрезок $[M, K]$

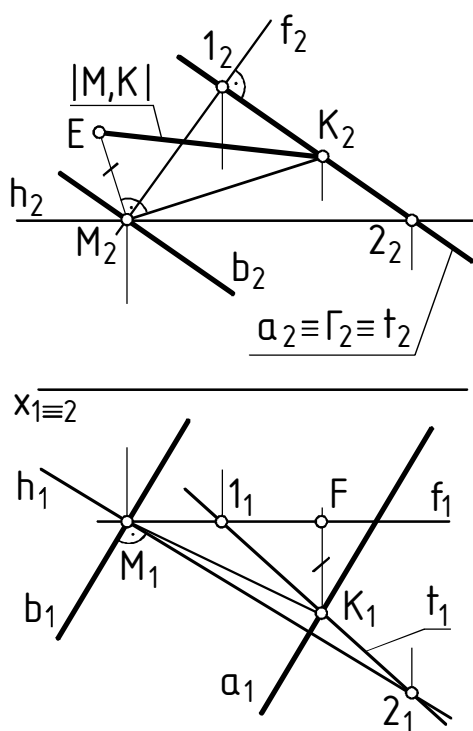


Рис. 5.12

перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a .

3. $\overline{IM, a} = IM, K$ (2ОМЗ): искомое расстояние - длину отрезка IM, K = IE, K_2 нашли из $\Delta K_2 M_2 E$, в котором IE, M_2 = IK_1, F .

ПРИМЕР 5.9. Заданы точка $M(M_1, M_2)$ и прямая $a(a_1, a_2)$ (рис. 5.13). Используя способ введения новой ПП, найти IM, a - расстояние от точки M до прямой a .

Прямая b на рис. 5.13 отношения к примеру 5.9 не имеет.

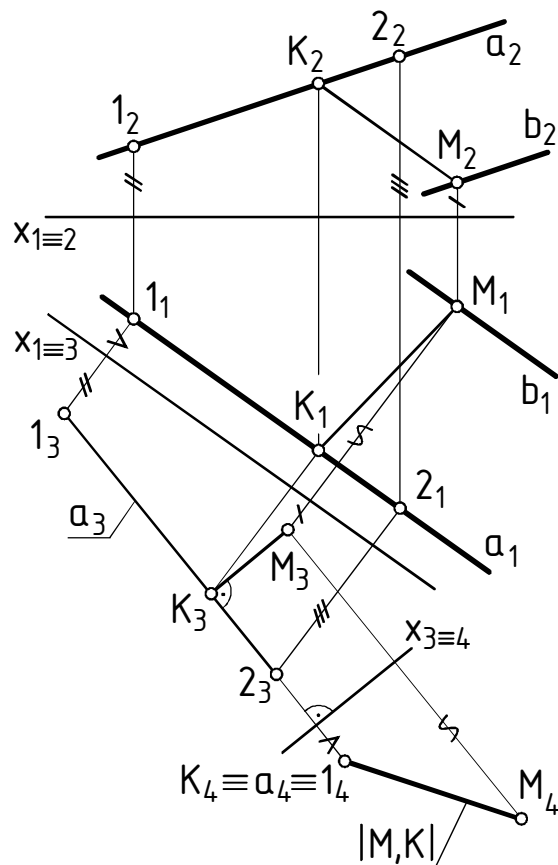


Рис. 5.13

Цель введения новой ПП в примере - сделать прямую a общего положения проецирующей, чтобы несущий искомое расстояние отрезок $[M, K]$ перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a , проецировался на ПП в натуральную величину. Для этого на прямой a взяли произвольные точки 1, 2 и последовательно задали две новые ПП:

1. $\overline{\Pi_3} \parallel a \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ - решали 1ОЗПЧ, задавая $x_{1 \equiv 3} \parallel a_1$ и строя $a_3 \supset 1_3, 2_3$;
2. $\overline{\Pi_4} \perp a \Rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_3$ - решали 2ОЗПЧ, задавая $x_{3 \equiv 4} \perp a_3$ и строя $a_4 \equiv 1_4$.

Так как $a \perp \Pi_4 \wedge [M, K] \perp a$, то $[M, K] \parallel \Pi_4$ и $IM, K = IM, a = IM_4, K_4$. Точка K_3 искалась из условия $[M_3, K_3] \perp a_3$ (теорема о проецировании прямого угла).

ПРИМЕР 5.10. Заданы прямые $a \parallel b$ (рис. 5.12 и 5.13). Найти расстояние между этими прямыми.

Для нахождения расстояния между параллельными прямыми a и b на прямой b берут произвольную точку M и ищут расстояние от неё до прямой a без преобразования КЧ (см. пример 5.8 и рис. 5.12) или с использованием новой ПП (см. пример 5.9 и рис. 5.13).

5.4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми определяется длиной отрезка общего перпендикуляра, проведенного к обеим прямым. В учебном курсе это расстояние определяется с использованием способа введения новой ПП.

ПРИМЕР 5.11. Заданы скрещивающиеся прямые $a \perp \Pi_2$ и b (рис. 5.14). $\overline{[a, b]}$ - найти расстояние между прямыми a и b .

Пусть l - перпендикуляр к прямым a и b , пересекающий a в точке M и b в точке K ($[M, K] \subset l$). Тогда искомое расстояние равно длине отрезка $[M, K]$. Так как $a \perp \Pi_2$, то $M_2 \equiv a_2$. Поскольку $a \perp \Pi_2 \wedge l \perp a$, то $l \parallel \Pi_2$ - перпендикуляр l к прямым a и b является фронталью. Про-

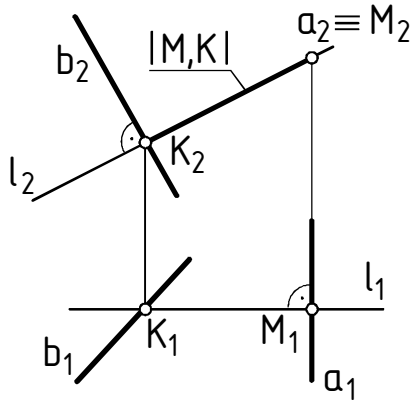


Рис. 5.14

ведем через M_2 проекцию $l_2 \perp b_2$ (теорема о проецировании прямого угла), найдем $K_2 = l_2 \cap b_2$ и с помощью линии связи $K_1 \subset b_1$. Через точку K_1 перпендикулярно к a_1 пройдет проекция l_1 перпендикуляра l . Точка $M_1 = l_1 \cap a_1$. Отрезок $[M, K] \parallel \Pi_2$, поэтому его длина $|M, K| = |M_2, K_2|$.

Таким образом для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми одну из них целесообразно сделать проецирующей, чтобы отрезок перпендикуляра, определяющий искомое расстояние, был параллелен плоскости проекций.

ПРИМЕР 5.12. Заданы скрещивающиеся прямые a и b (рис. 5.15). $\overline{[a, b]}$ - найти расстояние между этими прямыми.

Согласно приведенной выше рекомендации прямую a сделали проецирующей, последовательно задав две новые ПП:

1. $\Pi_3 \parallel a \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ (новая ось проекций $x_{1 \equiv 3} \equiv a_1$). 2. $\Pi_4 \perp a \Rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_3$ (новая ось проекций $x_{3 \equiv 4} \perp a_3$).



Рис. 5.15

Для построения новых проекций прямых на каждой из них взяли две произвольные точки (A и B на a , C и D на b).

Так как $a \perp \Pi_4$, то отрезок $[M, K]$ - отрезок общего перпендикуляра к прямым a и b (пусть $M \in a$, $K \in b$) параллелен Π_4 . Поэтому из M_4 ($M_4 \equiv a_4$) провели $[M_4, K_4] \perp b_4$ и нашли искомое расстояние: $|a, b| = |M, K| = |M_4, K_4|$. Так как $K \in b \Rightarrow K_3 \in b_3$, $K_1 \in b_1$, $K_2 \in b_2$. Для нахождения M_3 , а затем $M_1 \in a_1$ и $M_2 \in a_2$ из K_3 , используя теорему о проецировании прямого угла, опустили перпендикуляр на a_3 ($a \parallel \Pi_3$).

ПРИМЕР 5.13. Заданы скрещивающиеся прямые a и b (рис. 5.16). $|\overline{a, b}|$ - найти расстояние между прямыми a и b .

В примере $b \parallel \Pi_2$, поэтому проецирующей делали прямую b , используя новую ПП $\Pi_3 \perp b$ (новая ось проекций $x_{2 \equiv 3} \perp b_2$). Для построения проекций a_3 и b_3 на прямых брали точки: $A, B \in a$ и $D \in b$. Расстояние $|a, b|$ равно длине отрезка $[M, K]$ прямой l , где $l \perp a$, $M = l \cap a$, $l \perp b$, $K = l \cap b$ ($l \supset M, K$).

Пояснения к решению :

1. В поле Π_3 : $b \perp \Pi_3 \Rightarrow K_3 \equiv b_3$;
 $b \perp \Pi_3 \wedge l \perp b \Rightarrow l \parallel \Pi_3 \wedge l_3 \perp a_3$
 ($l_3 \supset K_3$); $M_3 = l_3 \cap a_3$; $l \parallel \Pi_3 \wedge$
 $\wedge [M, K] \subset l \Rightarrow |M, K| = |M_3, K_3|$.

2. В поле Π_2 : $M_2 \in a_2$, $l_2 \supset M_2 \wedge l_2 \perp b_2$
 ($l \perp b \wedge b \parallel \Pi_2$), $K_2 = l_2 \cap b_2$. **В поле Π_1 :**
 $M_1 \in a_1$, $K_1 \in b_1$, $l_1 \supset M_1, K_1$.

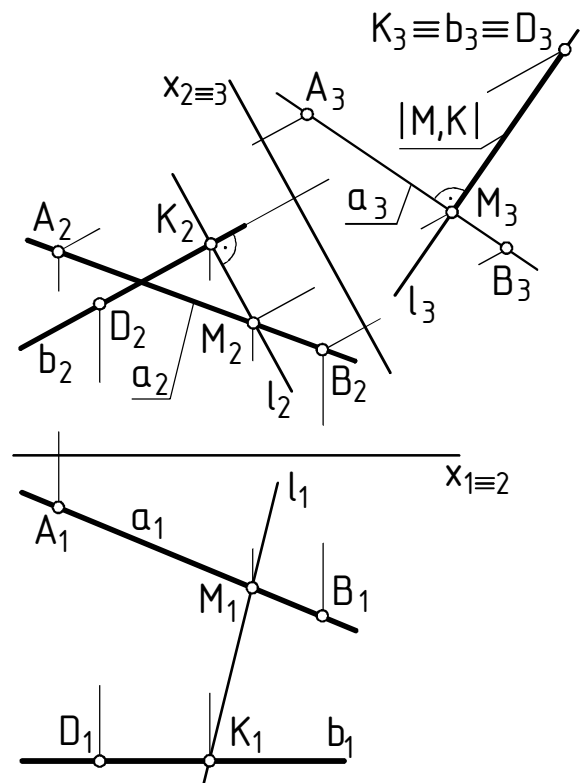


Рис. 5.16

5.5. Определение натурального вида треугольника

Задача на определение натурального вида треугольника - ключевая задача для группы задач, в которую, в частности, входят задачи на определение натурального вида других плоских фигур, на построение биссектрисы угла между пересекающимися прямыми, центра окружности, вписанной в треугольник или описанной вокруг него, плоских фигур по заданным условиям.

В разделе 5.5 решение ключевой задачи осуществляется только с использованием способа введения новой ПП.

Плоская фигура проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если плоскость фигуры параллельна этой ПП.

Если плоская фигура расположена в проецирующей плоскости, то для определения натурального вида фигуры достаточно решить 4ОЗПЧ, используя одну новую ПП (рис. 3.19 и пояснения к нему).

Если плоская фигура расположена в плоскости общего положения Σ , то для того, чтобы плоскость Σ стала параллельна плоскости проекций (стала плоскостью уровня), надо последовательно задать две новые ПП (сразу задать ПП параллельно плоскости Σ нельзя, так как эта ПП не будет перпендикулярна ни Π_1 , ни Π_2):

1. Задают Π_3 перпендикулярно горизонтали h (новая ось $x_{1\equiv 3} \perp h_1$) или фронтали f (новая ось $x_{2\equiv 3} \perp f_2$) плоскости Σ , решая 3ОЗПЧ и делая Σ проецирующей.

2. Задают $\Pi_4 \parallel \Sigma \Rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_3$ (новая ось $x_{3\equiv 4} \parallel \Sigma_3$, где Σ_3 - основная проекция плоскости Σ), решая 4ОЗПЧ.

ПРИМЕР 5.14. Задан $\triangle ABD$ (рис. 5.17), расположенный в плоскости общего положения Σ . $|\triangle ABD|$ - найти натуральный вид $\triangle ABD$.

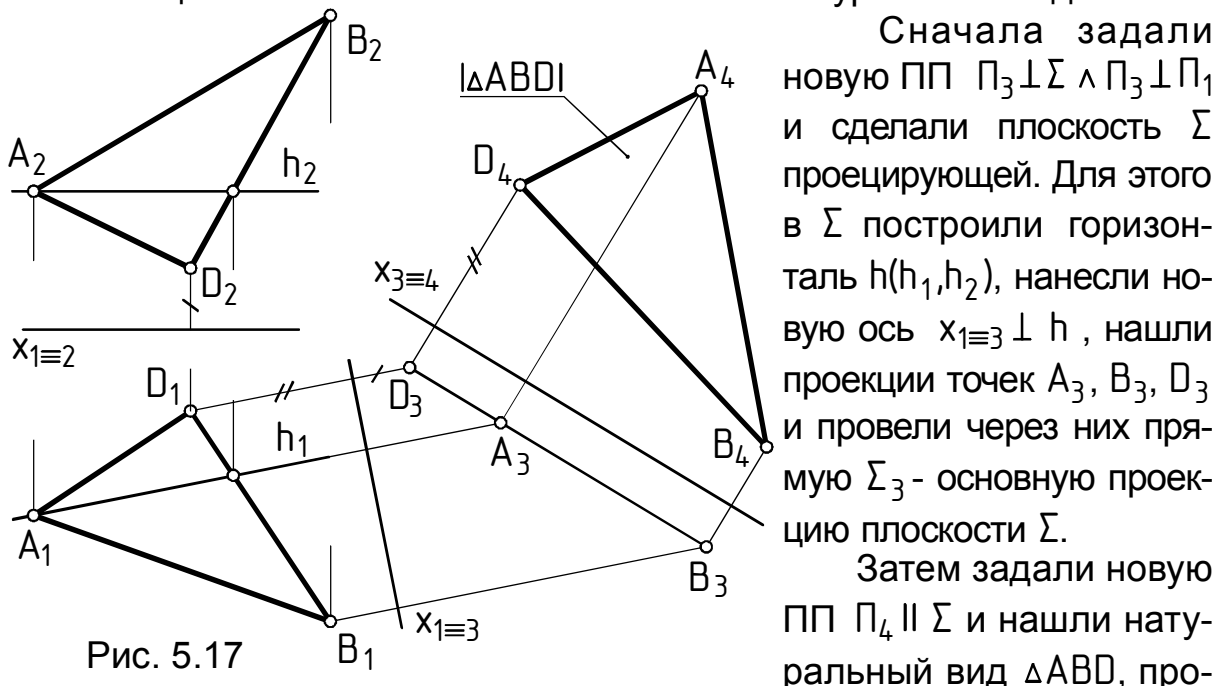


Рис. 5.17

Сначала задали новую ПП $\Pi_3 \perp \Sigma \wedge \Pi_3 \perp \Pi_1$ и сделали плоскость Σ проецирующей. Для этого в Σ построили горизонталь $h(h_1, h_2)$, нанесли новую ось $x_{1\equiv 3} \perp h$, нашли проекции точек A_3, B_3, D_3 и провели через них прямую Σ_3 - основную проекцию плоскости Σ .

Затем задали новую ПП $\Pi_4 \parallel \Sigma$ и нашли натуральный вид $\triangle ABD$, проводя новую ось $x_{3\equiv 4} \parallel \Sigma_3$ и построив проекции вершин A_4, B_4, D_4 : $|\triangle A_4 B_4 D_4| = |\triangle ABD|$. На рис. 5.17 отмечены расстояния, откладываемые при построении проекций точки D .

Натуральный вид треугольника может быть найден без преобразования чертежа определением длин его сторон по правилу прямоугольного треугольника (см. рис. 6.9 и пояснения к нему).

ЛЕКЦИЯ 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА ВРАЩЕНИЕМ ОРИГИНАЛА ВОКРУГ ОСИ

6.1. Общие замечания

Как уже отмечалось, целью любого преобразования КЧ является получение новых изображений (проекций) ГО.

При задании новой ПП эта плоскость является носителем новой проекции ГО, который при этом остается неподвижным (см. лекцию 1). При вращении ГО вокруг неподвижной оси он перемещается относительно Π_1 и Π_2 до тех пор, пока интересующий нас элемент ГО не займет нужное нам частное относительно них положение, после чего ГО проецируется на Π_1 и Π_2 . Таким образом, при вращении ГО каждая из ПП Π_1 и Π_2 будет являться носителем двух полей проекций - старых и новых.

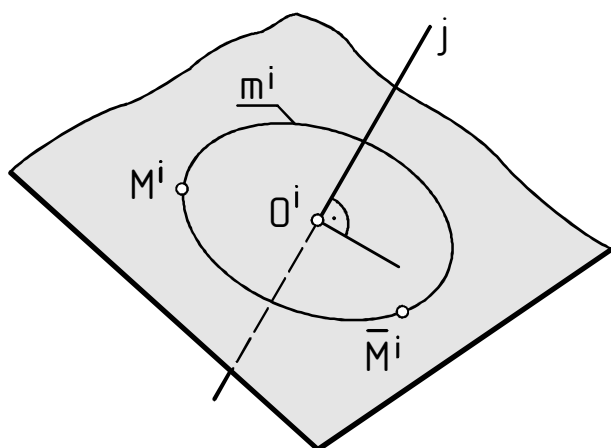


Рис. 6.1

При вращении (повороте) в том или ином направлении ГО вокруг оси j его точки M^i вращаются вокруг j по окружностям m^i до занятия этими точками требуемого положения \bar{M}^i (рис. 6.1). Плоскости окружностей m^i перпендикулярны оси j , их центры O^i находятся на оси j . Договоримся над обозначением повернутого ГО наносить черту,

а при вращении вокруг двух осей - две черты.

Точки ГО, расположенные на оси j , при вращении неподвижны. В общем случае для поворота прямой достаточно повернуть две её точки, а для поворота плоскости - три её точки.

6.2. Способ вращения оригинала вокруг проецирующей оси

Суть способа вращения вокруг проецирующей оси: ГО поворачивают вокруг оси j , перпендикулярной к Π_1 или Π_2 , до тех пор, пока ГО не займет нужного положения относительно Π_2 или Π_1 . При вращении ГО проекции его точек на плоскости проекций, перпендикулярной к оси вращения, перемещаются по concentric окружностям, а на другой плоскости проекций - по отрезкам,

перпендикулярным к проекции оси j . На рис. 6.2 ось $j \perp \Pi_1$, траектория перемещения проекции M_2 - отрезок $m_2 \perp j_2$, проекции M_1 - окружность m_1 , причем радиус вращения точки M и угол её поворота φ , проецируются на Π_1 в натуральную величину ($|O, M| = |O_1, M_1|$; $|\varphi| = \varphi_1$). Поэтому при вращении ГО его проекция на ПП, к которой ось вращения перпендикулярна, меняет только свое положение, не меняя формы и размеров.

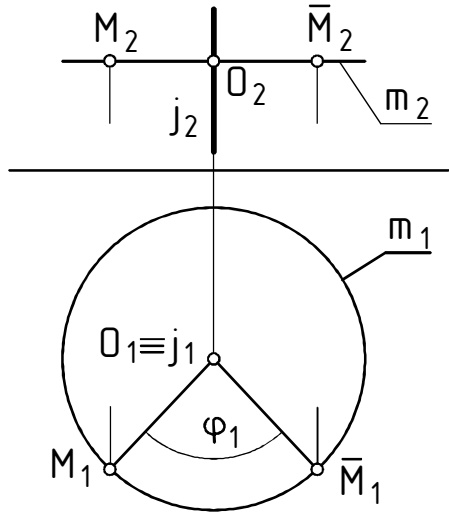


Рис. 6.2

ПРИМЕР 6.1. Вращением вокруг проецирующей оси перевести прямую \bar{t} (t_1, t_2) общего положения в положение горизонтали.

При решении 1ОЗПЧ для перевода прямой в положение горизонтали прямую вращают вокруг оси $j \perp \Pi_2$, для перевода в положение фронтали - вокруг оси $j \perp \Pi_1$.

Чтобы перевести прямую \bar{t} в положение горизонтали (рис. 6.3), возьмем на \bar{t} две точки A, B и зададим проходящую через точку B ось $j \perp \Pi_2$: $j_1 \supset B_1 \wedge j_1 \perp x_{1 \equiv 2}$; $j_2 \equiv B_2$. При вращении точка $B \in j$ будет неподвижна ($\bar{B} \equiv B \Rightarrow \bar{B}_1 \equiv B_1 \wedge \bar{B}_2 \equiv B_2$), поэтому для поворота \bar{t} достаточно повернуть точку A . Так как прямая \bar{t}

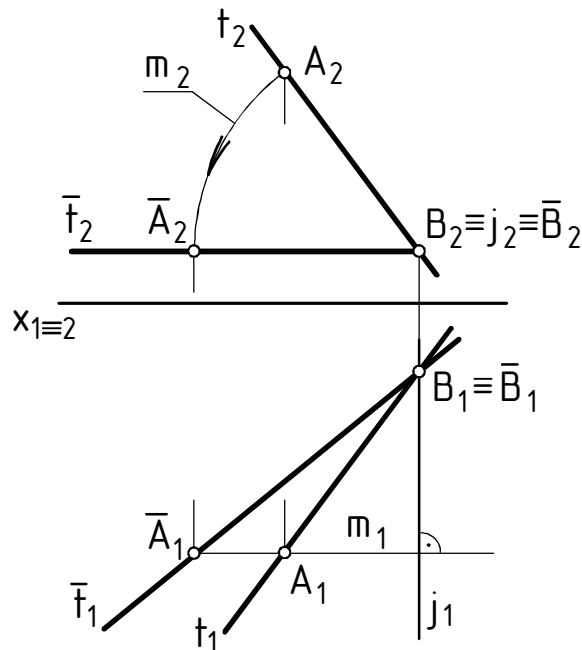


Рис. 6.3

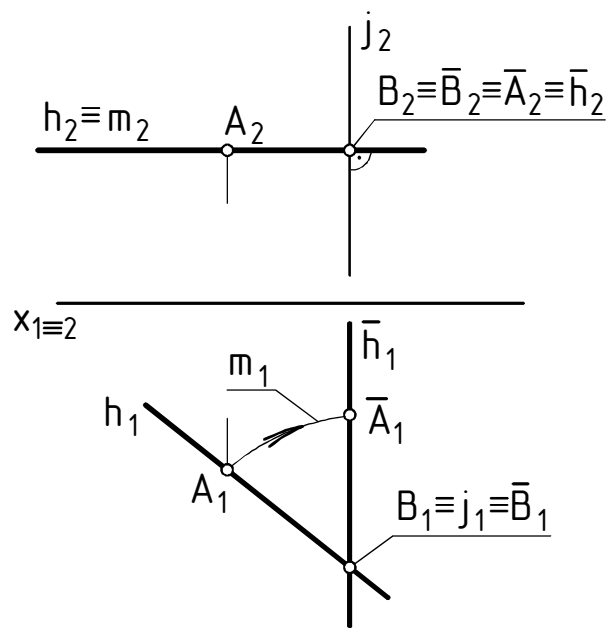


Рис. 6.4

должна занять положение $\bar{t} \parallel \Pi_1$, проведем через \bar{B}_2 проекцию $\bar{t}_2 \parallel x_{1 \equiv 2}$ и найдем $\bar{A}_2 = m_2 \cap \bar{t}_2$, где m_2 - дуга, по которой двигается проекция A_2 точки A . Проекция A_1 перемещается по отрезку m_1 : $m_1 \supset B_1 \wedge m_1 \parallel x_{1 \equiv 2}$. Проекцию \bar{A}_1 повернутой точки \bar{A} определим на отрезке m_1 с помощью проведенной из \bar{A}_2 линии связи. Проекция \bar{t}_1 повернутой прямой $\bar{t} \parallel \Pi_1$ пройдет через точки \bar{B}_1 и \bar{A}_1 . Заметим, что $|\bar{A}_1, \bar{B}_1|$ - длина отрезка $[A, B]$.

На рис. 6.4 решена 2ОЗПЧ: горизонталь h переведена в положение фронтально проецирующей прямой $\bar{h} \perp \Pi_2$. Для этого на h взяли точки A, B и задали ось j , проходящую через точку B перпендикулярно к Π_1 : $j_1 \equiv B_1$; $j_2 \supset B_2 \wedge j_2 \perp x_{1 \equiv 2}$; $\bar{B}_1 \equiv B_1$; $\bar{B}_2 \equiv B_2$. При $\bar{h} \perp \Pi_2$ в поле Π_1 проекция $\bar{h}_1 \supset \bar{B}_1 \wedge \bar{h}_1 \perp x_{1 \equiv 2}$, точка $\bar{A}_1 = m_1 \cap \bar{h}_1$. В поле Π_2 проекция \bar{A}_2 ищется на $m_2 \perp j_2$ с помощью линии связи, проведенной из \bar{A}_1 . Поэтому $\bar{A}_2 \equiv \bar{B}_2 \equiv h_2$.

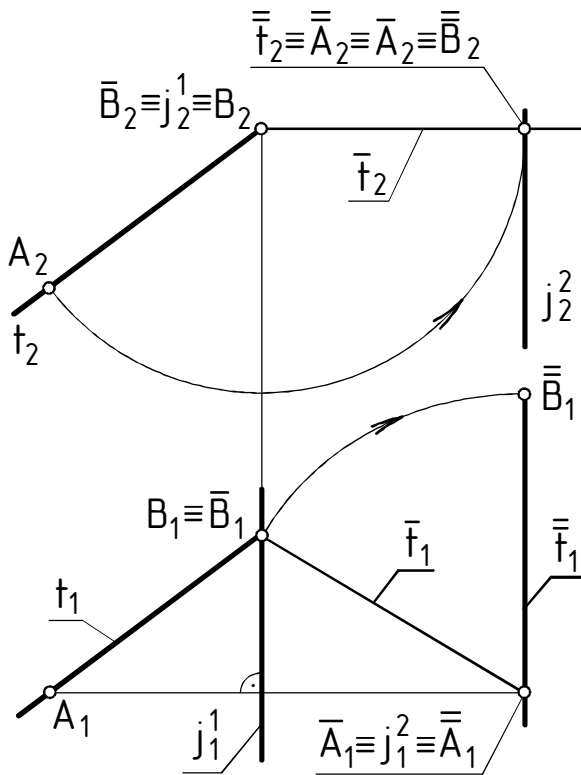


Рис. 6.5

На рис. 6.5 прямая t общего положения вращением вокруг проецирующих осей переведена в проецирующее положение $\bar{t} \perp \Pi_2$. Для поворота прямой t на ней взяли точки A, B и последовательно вращали t вокруг двух проецирующих осей. Сначала задали ось $j^1 \supset B \wedge j^1 \perp \Pi_2$ и вращением вокруг j^1 перевели в положение $\bar{t} \parallel \Pi_1$. Затем задали ось $j^2 \supset A \wedge j^2 \perp \Pi_1$ и повернули прямую $\bar{t} \parallel \Pi_1$ в положение $\bar{t} \perp \Pi_2$.

На рис. 6.6 плоскость общего положения $\Sigma(\triangle ABD)$ вращением вокруг проецирующей оси j ($j \supset D \wedge j \perp \Pi_1$) переведена в положение $\bar{\Sigma} \perp \Pi_2$. Точка D при

вращении неподвижна ($\bar{D} \equiv D$), поэтому поворот плоскости Σ сводится к повороту двух её точек A и B .

Так как у фронтально проецирующей плоскости горизонталь $h \perp \Pi_2$, то через точку D в Σ провели горизонталь h и повернули её

вокруг оси j до положения $\bar{h} \perp \Pi_2$ ($\bar{h}_2 \equiv \bar{D}_2$, $\bar{h} \supset \bar{D}_1 \wedge \bar{h}_1 \perp x_{1 \equiv 2}$).

Для поворота плоскости Σ использовали точку $E = h \cap [A, B]$. $E_1 = m_1 \cap \bar{h}_1$ и $\bar{E}_2 \equiv \bar{D}_2 \equiv \bar{h}_2$ - её проекции в повернутом положении. Поскольку $j \perp \Pi_1$, то $|\Delta D_1 B_1 E_1| = |\Delta \bar{D}_1 \bar{B}_1 \bar{E}_1|$. Точку \bar{B}_1 строили из условия равенства этих треугольников ($\Delta \bar{D}_1 \bar{B}_1 \bar{E}_1$ строился по трем сторонам). Затем на прямой (\bar{B}_1, \bar{E}_1) от точки \bar{E}_1 отложили отрезок $[E_1, A_1]$ ($|E_1, A_1| = |\bar{E}_1, \bar{A}_1|$) и нашли проекцию \bar{A}_1 . Точка \bar{B}_2 есть точка пересечения линии связи, проведенной из \bar{B}_1 , и перпендикуляра к j_2 из точки B_2 . На $\bar{\Sigma}_2 \supset \bar{B}_2, \bar{D}_2$ находится проекция \bar{A}_2 .

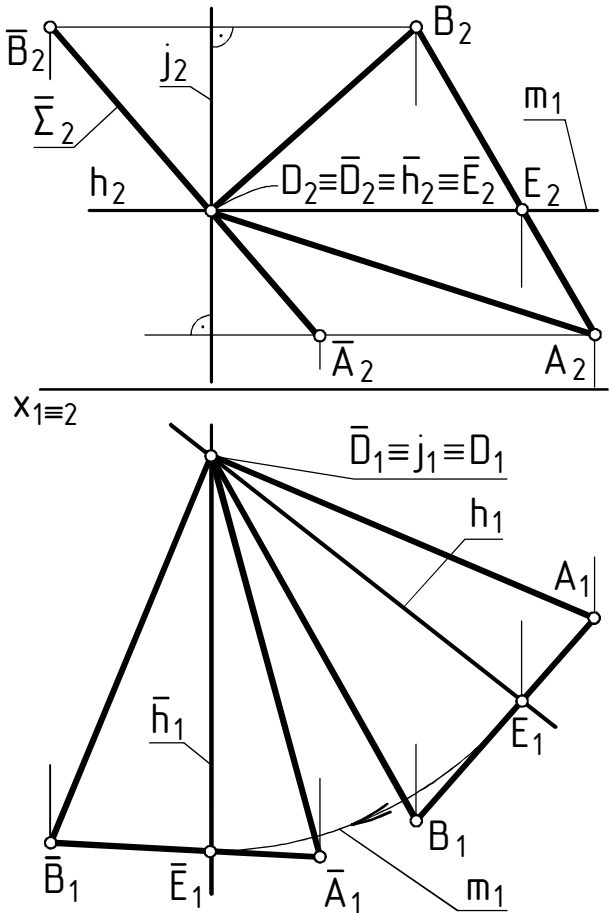


Рис. 6.6

6.3. Способ вращения оригинала вокруг линии уровня

Способ вращения ГО вокруг линии уровня целесообразно применять для определения натурального вида плоской фигуры, лежащей в плоскости общего положения, путем перевода её в положение плоскости уровня.

Так, вращая плоскость общего положения вокруг её горизонтали h , плоскость можно перевести в горизонтальное положение, при котором фигуры, расположенные в этой плоскости, на Π_1 проецируются в натуральную величину, а на Π_2 - в отрезки, параллельные оси проекций $x_{1 \equiv 2}$. Точки вращаемой вокруг горизонтали фигуры перемещаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны к горизонтали и к Π_1 . Поэтому горизонтальные проекции точек вращаемой фигуры перемещаются по отрезкам, перпендикулярным проекции h_1 горизонтали.

ПРИМЕР 6.2. Используя вращение вокруг линии уровня, найти величину угла между пересекающимися прямыми a и b (рис. 6.7).

Прямые a и b задают плоскость общего положения $\Sigma(a \cap b)$.

Построим её горизонталь h и получим $\triangle ABD$, угол при вершине B которого является искомым. Решение примера сводится к определению натурального вида этого треугольника.

При повороте плоскости Σ вокруг горизонтали h до положения $\bar{\Sigma} \parallel \Pi_1$ горизонталь h остается неподвижной: $\bar{h} \equiv h$; $\bar{A} \equiv A$; $\bar{D} \equiv D$. Поэтому для поворота плоскости Σ достаточно повернуть её точку B . Зададим плоскость Δ^B , в которой вращается точка B . Так как $\Delta^B \perp h$, то $\Delta^B \perp \Pi_1$ и Δ^B задаётся своей основной проекцией $\Delta_1^B \supset B_1 \wedge \Delta_1^B \perp h_1$.

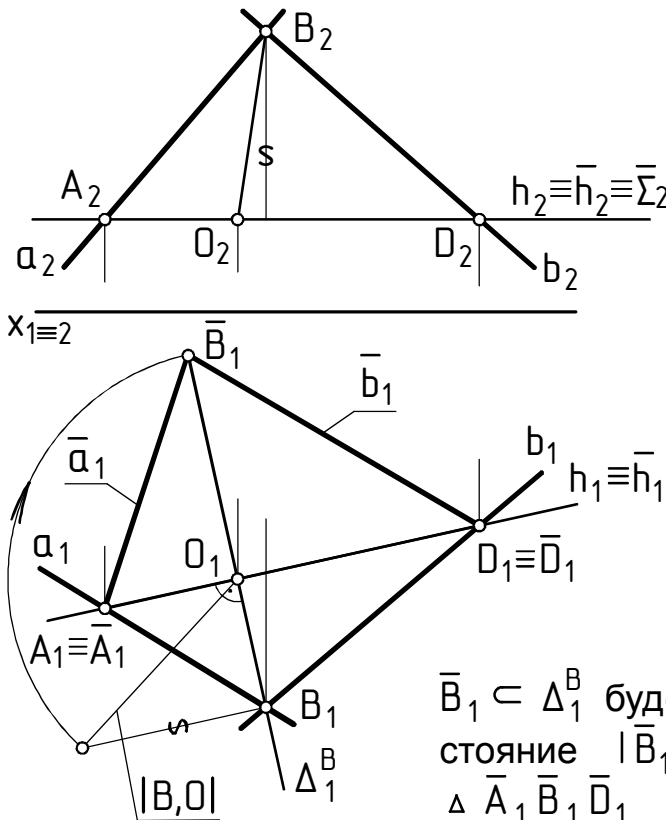


Рис. 6.7

Найдем центр вращения точки B точку O : $O = h \cap \Delta^B$ и определим по правилу прямоугольного треугольника величину радиуса вращения $|B, O|$ точки B . Один катет этого треугольника - отрезок $[B_1, O_1]$, а второй, отмеченный знаком "s", брался в поле Π_2 .

Плоскость Σ займет положение $\bar{\Sigma} \parallel \Pi_1$, когда радиус вращения точки B будет проецироваться на Π_1 в натуральную величину и проекция $\bar{B}_1 \in \Delta_1^B$ будет удалена от $h_1 \equiv \bar{h}_1$ на расстояние $|\bar{B}_1, O_1| = |B_1, O_1|$. Построенный $\triangle \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{D}_1$ соответствует натуральному виду $\triangle ABD$, а величина угла при вершине \bar{B}_1 - величине угла между прямыми a и b .

6.4. Определение углов

6.4.1. Угол между пересекающимися прямыми

Угол между пересекающимися прямыми - плоская фигура, натуральный вид которой в общем случае ищут одним из трех способов:

- вращением вокруг линии уровня (см. ПРИМЕР 6.2);
- без преобразования КЧ (см. рис. 6.9.);
- способом задания новой ПП (см. ПРИМЕР 5.14).

6.4.2. Угол между прямой линией и плоскостью

Угол между прямой линией \dagger и плоскостью Σ измеряется углом φ между прямой \dagger и её проекцией \dagger_Σ на плоскость Σ (рис. 6.8).

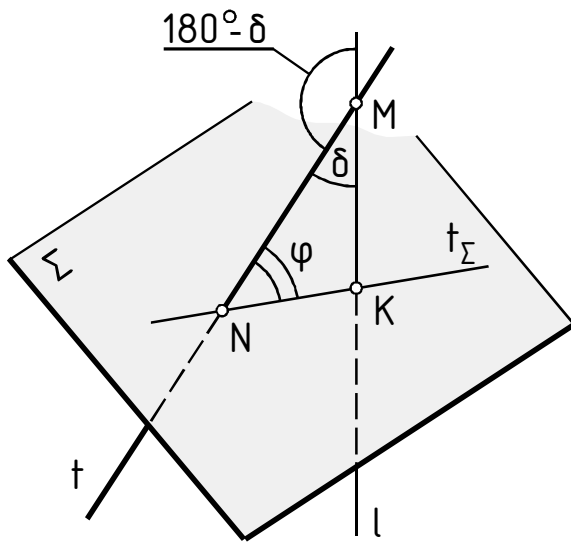


Рис.6.8

Для построения угла φ надо найти на плоскости Σ проекцию t_Σ прямой t , проходящую через точки $N = t \cap \Sigma$ и $K = l \cap \Sigma$ (l - перпендикуляр к плоскости Σ , проведенный через произвольную точку $M \in t$). Прямые t и t_Σ пересекаются в точке N под углом φ , который можно найти одним из способов определения угла между пересекающимися прямыми (см. раздел 6.4.1).

Если необходимо узнать только величину угла φ , не строя сам угол, то величину угла φ обычно

ищут в такой последовательности (рис. 6.8):

1. На прямой t берется произвольная точка M .
2. Через точку M проводят перпендикуляр l к плоскости Σ .
3. Ищут острый угол δ между пересекающимися прямыми l и t .
4. Величину угла φ находят из условия $\varphi = 90^\circ - \delta$.

На рис. 6.9 и 6.10 ищется величина угла φ между прямой t и плоскостью $\Sigma(a \cap b)$. Для этого на обоих рисунках через произвольную точку $M \in t$ провели прямую $l \perp \Sigma$ (в плоскости Σ строили горизонталь h , фронталь f и проводили $l_1 \perp h_1$ и $l_2 \perp f_2$), определили угол δ между прямыми t и l , а затем угол $\varphi = 90^\circ - \delta$. В обоих случаях при определении величины угла δ искали натуральный вид $\triangle AMB$, образованного при пересечении прямых l и t какой-то горизонталью $h^1 \subset \Gamma(l \cap t)$.

На рис. 6.9 треугольник $\triangle AMB$ с углом δ при вершине M построен по трем сторонам. Сторона $[A, B] \subset h^1$ и её длина $|A, B| = |A_1, B_1|$, длину $|A, M|$ стороны $[A, M]$ определили по правилу прямоугольного треугольника из $\triangle A_1 M_1 F$, а длину $|M, B|$ стороны $[M, B]$ - из $\triangle B_1 M_1 E$. На рис. 6.10 натуральный вид $\triangle AMB$, как в ПРИМЕРЕ 6.2, найден в результате вращения $\triangle AMB$ вокруг горизонтали h^1 : $|\triangle AMB| = |\triangle \bar{A}_1 \bar{M}_1 \bar{B}_1|$. На обоих рисунках $\varphi = 90^\circ - \delta$.

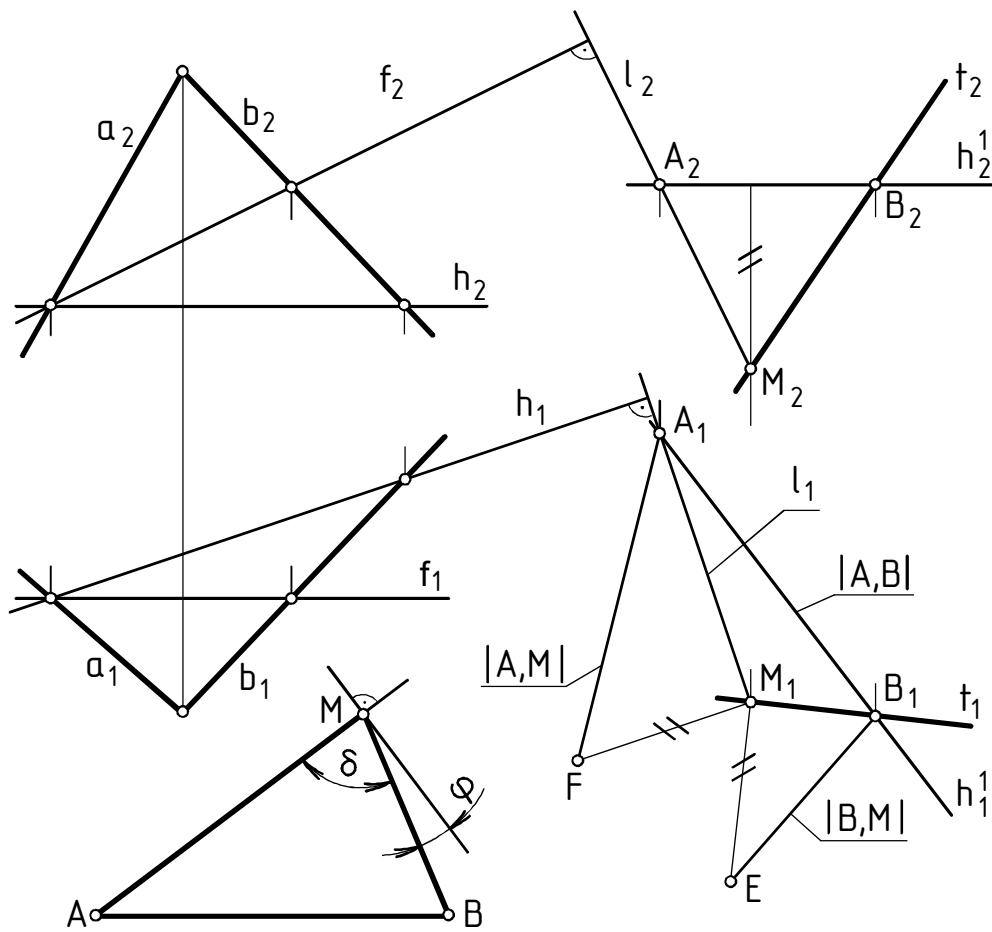


Рис. 6.9

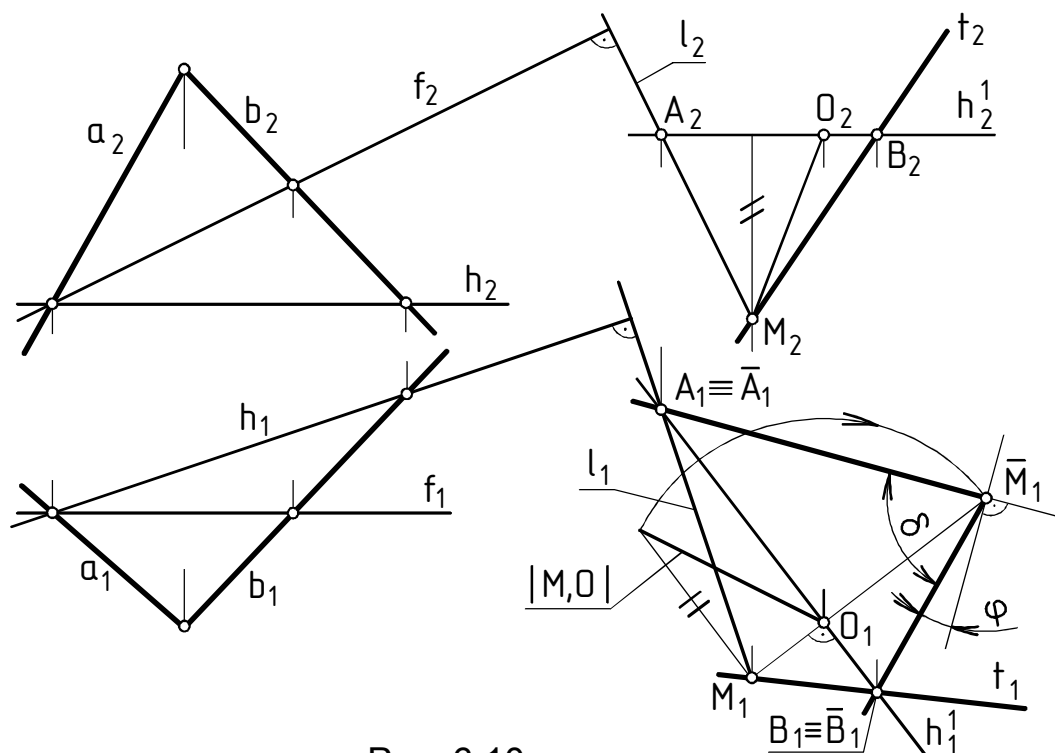


Рис. 6.10

6.4.3. Угол между скрещивающимися прямыми

Угол между скрещивающимися прямыми линиями (лекция 2) измеряется углом между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

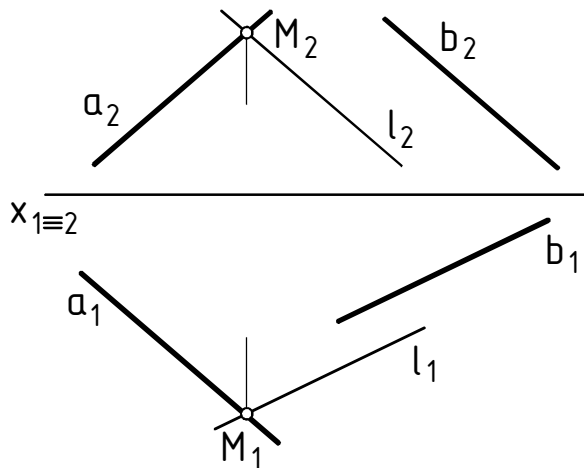


Рис. 6.11

Обычно при определении угла между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 6.11) на одной из них, например на a , берут произвольную точку M , проводят через M прямую l , параллельную второй прямой (на рис. 6.11 прямой b), и любым способом находят угол между пересекающимися прямыми a и l , равный искомому.

6.4.4. Угол между плоскостями

Две пересекающиеся плоскости Σ и Γ образуют четыре попарно равных двугранных угла. Двугранные углы между плоскостями измеряются линейными углами φ и δ между

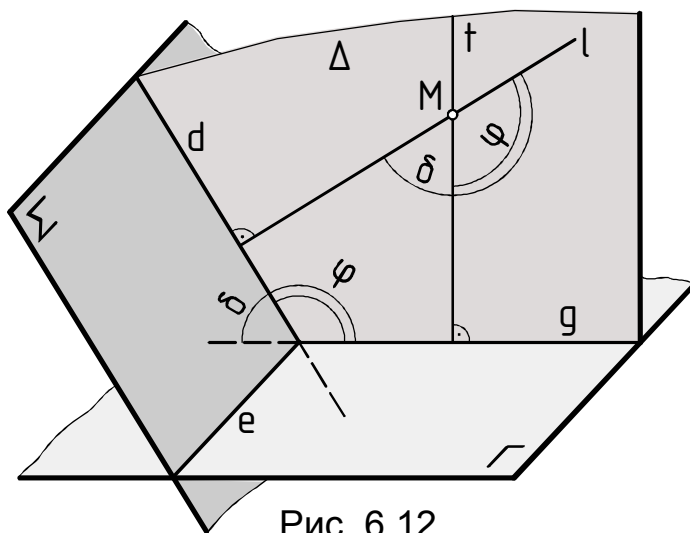


Рис. 6.12

прямыми d и g , по которым плоскость Δ , перпендикулярная к плоскостям Σ и Γ , пересекает эти плоскости (рис. 6.12).

Обычно, если линия e пересечения плоскостей Σ и Γ неизвестна, для построения углов φ и δ из произ-

вольной точки M пространства проводят перпендикуляры $l \perp \Sigma$ и $t \perp \Gamma$, углы между которыми равны искомому (рис. 6.12). На рис. 6.13 построены проекции перпендикуляров l и t , проведенных из некой точки M к плоскостям $\Sigma(a \parallel b)$ и $\Gamma(A, B, D, A)$. Для определения величины углов φ и δ между плоскостями Σ и Γ остается только одним из известных способов найти углы между пересекающимися прямыми l и t .

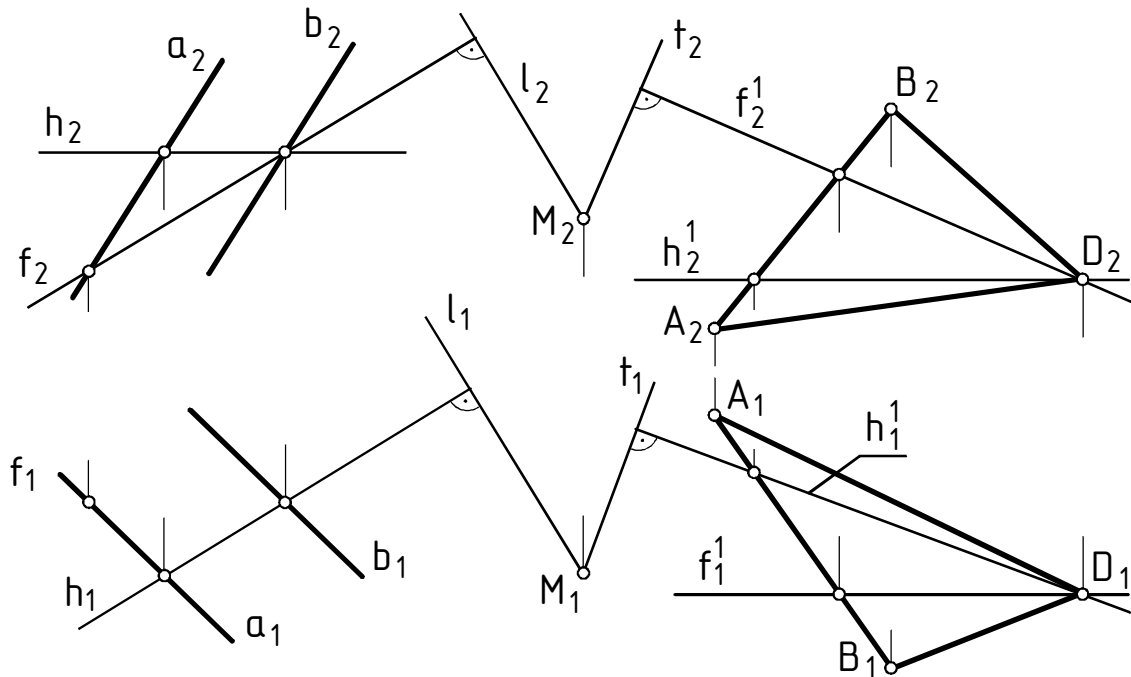


Рис. 6.13

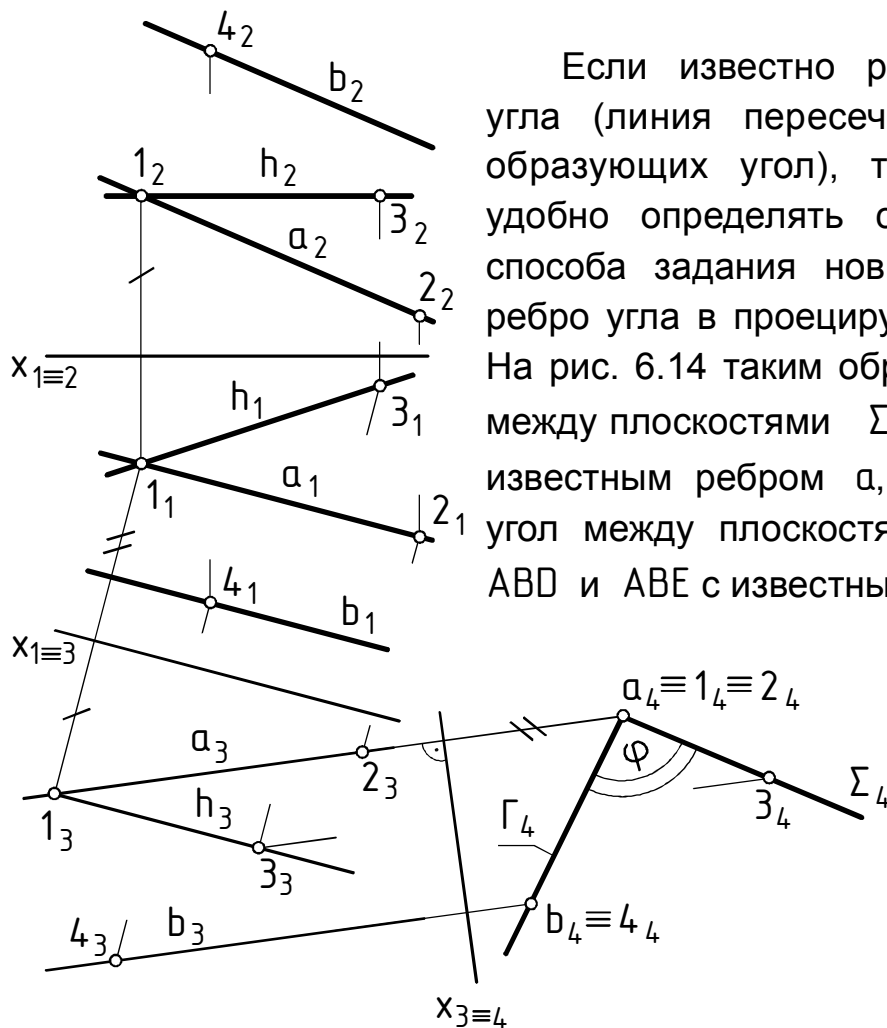


Рис. 6.14

Если известно ребро двугранного угла (линия пересечения плоскостей, образующих угол), то величину угла удобно определять с использованием способа задания новых ПП, переводя ребро угла в проецирующее положение. На рис. 6.14 таким образом найден угол между плоскостями $\Sigma(a \cap h)$ и $\Gamma(a \parallel b)$ с известным ребром a , а на рис. 6.15 - угол между плоскостями треугольников ABD и ABE с известным ребром AB .

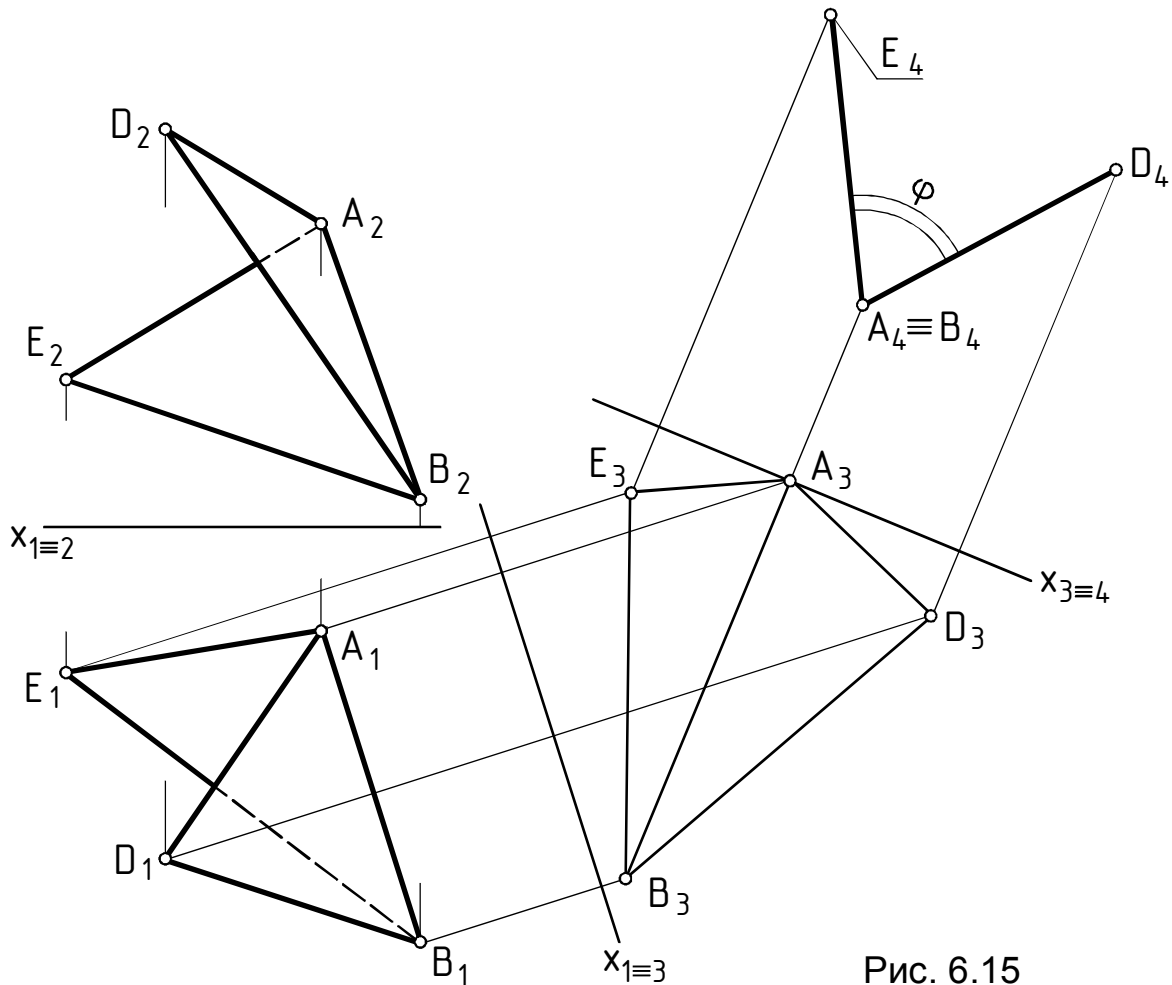


Рис. 6.15

ЛЕКЦИЯ 7

ПОВЕРХНОСТИ

7.1. Образование поверхности

В НГ поверхность обычно рассматривают как результат движения в пространстве линии, перемещающейся по какому-либо закону.

Линия, перемещающаяся в пространстве и образующая при этом поверхность, называется образующей поверхности, а закон её перемещения - законом образования поверхности.

На рис. 7.1 приведен пример образования конической поверхности общего вида. Эта поверхность может быть образована прямой линией l (образующей), двигающейся по закону $(l^i \cap k, l^i \supset T)$, согласно которому в любом i -м положении образующая l^i пересекает заданную линию k и проходит через заданную точку T (вершину).

Всё многообразие поверхностей определяется разнообразием форм образующих линий и законов образования поверхностей.

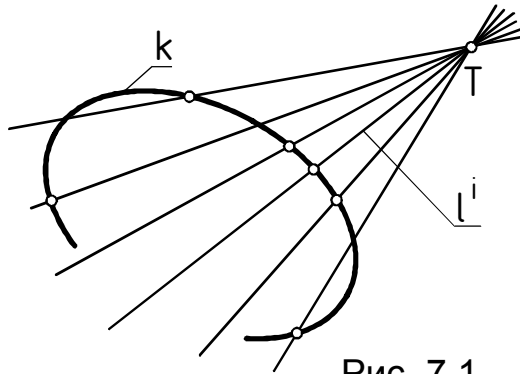


Рис. 7.1

Так как при образовании поверхности образующая движется непрерывно, то поверхность рассматривают как непрерывное множество имеющих один закон построения образующих линий, называемое непрерывным каркасом поверхности. Непрерывный каркас линий покрывает всю поверхность или отсек поверхности - часть

поверхности. Непрерывный каркас поверхности состоит из бесконечного числа линий и не может быть изображен на чертеже принципиально, хотя бы потому, что каждая линия на чертеже имеет определенную толщину. Поэтому на рис. 7.1 приведен дискретный каркас поверхности, в то время как её образующая l перемещается непрерывно.

Изучаемые в курсе поверхности условно разделены на линейчатые поверхности, образованные перемещением прямой линии; линейчатые винтовые поверхности (геликоиды); циклические поверхности, образованные перемещением окружности или её дуги, и поверхности вращения.

Всякая классификация поверхностей условна, поскольку одна и та же поверхность может нести на себе каркасы самых различных линий, т. е. может быть получена с помощью различных образующих линий, перемещающихся по соответствующим законам. При этом образующие в процессе движения могут закономерно менять свои размеры и форму.

Так, коническая поверхность вращения, показанная на рис. 7.2, может быть образована вращением прямой t вокруг оси j ; перемещением окружности m^i переменного радиуса, имеющей центр на оси j , пересекающей прямую t и расположенной в плоскости, перпендикулярной j ; перемещением эллипса, гиперболы, параболы или любой другой линии, принадлежащей конической поверхности. Окружности m^1 и m^2 на рис. 7.2 являются границами поверхности, а окружность m^i может быть использована для построения на поверхности произвольной точки M .

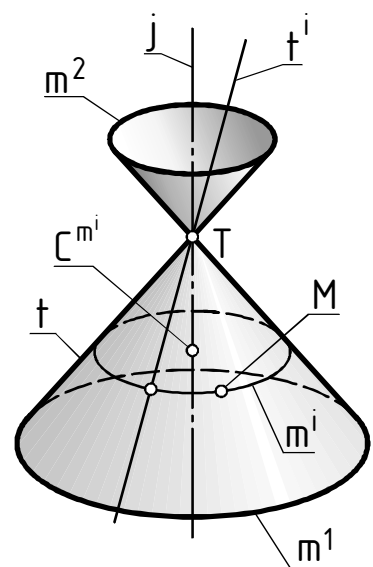


Рис. 7.2

7.2. Определитель поверхности

Важнейшую роль в формировании и задании поверхностей играет определитель поверхности - совокупность геометрических образов, одинаково связанных с каждой образующей поверхности и позволяющих строить любую образующую поверхности по закону её образования. Определителем конической поверхности вращения при образовании её вращением прямой t вокруг оси j (рис. 7.2) является образующая t , ось j и уточняющее условие $t \cap j$. Определителем конической поверхности общего вида (рис. 7.1) при образовании её перемещением прямой l по закону $l^i \supset T, l^i \cap k$ являются точка T и кривая k .

Входящие в определитель линии и точки, которые пересекают все образующие поверхности, называют направляющими поверхностями (в последнем примере это кривая k и точка T).

Различают поверхности закономерные и незакономерные. У закономерных поверхностей информация об образующей, изменении её формы при движении, положении и форме направляющих и законе перемещения образующей выражена аналитически или четко сформулирована словесно. Отсутствие хотя бы одного из указанных условий делает поверхность незакономерной. Как правило, информация о такой поверхности задается графически или в словесной форме.

Обычно для закономерных поверхностей используют формулу поверхности - знаковую запись, в которой указаны образующая, определитель и закон образования поверхности. Формула поверхности имеет определенную структуру:



Примеры формул: $\Phi \{ t(t, j; t \cap j)(t^i = t \cap j) \}$ - коническая поверхность вращения; $\Phi \{ l(T, a)(l^i \supset T, l^i \cap a) \}$ - коническая поверхность общего вида.

7.3. Задание поверхности на комплексном чертеже

Поверхности в отличие от точек и линий в общем случае не задаются на чертеже своими проекциями. Дело в том, что чертеж есть некая конечная совокупность точек и линий, изображенных на плоскости. Проекция же поверхности есть совокупность проекций

всех её точек, являющаяся в общем случае бесконечным множеством точек, задавать на чертеже которую бессмысленно и затруднительно.

Существует критерий заданности поверхности: поверхность задана на чертеже, если он позволяет однозначно решать задачу на принадлежность точки поверхности (ОПЗ) в любой её формулировке. В свою очередь, согласно условию принадлежности точки поверхности точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии этой поверхности; сначала на поверхности строят линию, а затем на ней задают точку.

Следовательно, чертеж поверхности должен позволять выделять и строить линии и точки, принадлежащие поверхности. Поэтому для задания поверхности достаточно было задать на чертеже непрерывный каркас её образующих линий, которые проходили бы через каждую точку поверхности, позволяя строить любую её точку. Однако уже отмечалось, что непрерывный каркас на чертеже задать невозможно. Поэтому для задания поверхности на чертеже используют другие способы.

Заметим, что условие принадлежности точки поверхности выражает ПА решения задачи на принадлежность точки (М) поверхности (Ф):

1. $\overline{g} \subset \Phi$ - на поверхности Φ строят линию g .
2. $\overline{M} \subset \Phi$ - на g берут точку M , которая будет принадлежать Φ .

7.3.1. Задание поверхности элементарным чертежом

Комплексный чертеж определителя поверхности называют элементарным чертежом поверхности при условии, что известен закон её образования. Имея чертеж определителя поверхности и зная закон её образования, принципиально можно построить проекции любой образующей линии поверхности, а следовательно, проекции любой точки поверхности.

На рис. 7.3 задан чертеж определителя конической поверхности $\Phi\{l(k,T)(l^i \cap k, l^i \supset T)\}$. Докажем, что этот чертеж является чертежом поверхности, для чего решим на нем задачу на принадлежность точки поверхности, построив проекции произвольной точки $M \subset \Phi$ (рис. 7.4).

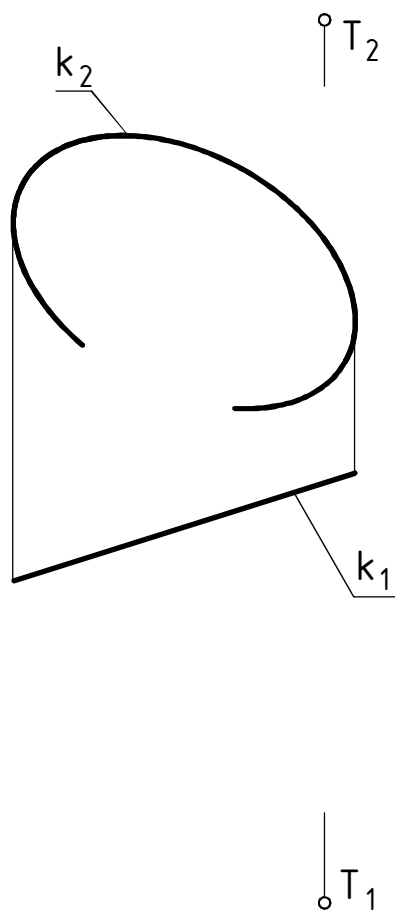


Рис. 7.3

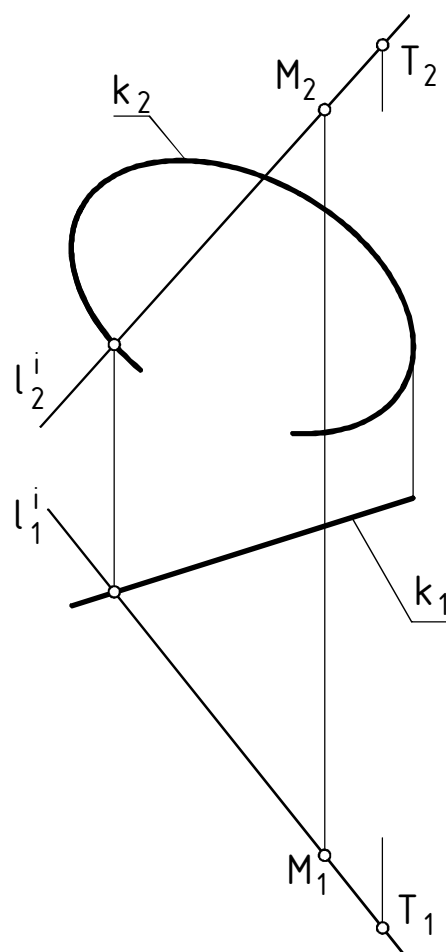


Рис. 7.4

Задача решалась согласно ПА:

- І. $\overline{l^i} \subset \Phi$ - на поверхности Φ строится некая образующая l^i .
- ІІ. $\overline{M} \subset l^i$ - произвольную точку M берут на образующей l^i .

ГА построения проекций точки M на рис. 7.4:

1. $\overline{l_2^i} \supset T_2$; $l_2^i \cap k_2$; - через точку T_2 проводят проекцию l_2^i , пересекающую k_2 .
2. $\overline{1_2} = l_2^i \cap k_2$ - ищут точку 1_2 пересечения проекций l_2^i и k_2 .
3. $\overline{1_1} = (1_2, 1_1) \cap k_1$ - на k_1 с помощью линии связи находят точку 1_1 .
4. $\overline{l_1^i} \supset T_1, 1_1$ - через точки T_1 и 1_1 проводят проекцию l_1^i образующей.
5. $\overline{M_1} \subset l_1^i$ - на прямой l_1^i произвольно задают проекцию M_1 точки M .
6. $\overline{M_2} = (M_1, M_2) \cap l_2^i$ - на прямой l_2^i находят проекцию M_2 точки M .

7.3.2. Основной чертеж поверхности

Элементарный чертеж поверхности - самый простой чертеж поверхности, обратимый и метрически определенный, позволяющий решать любую задачу с поверхностью. Но у него отсутствует наглядность: по нему сложно представить форму заданной поверхности. Более наглядным является основной чертеж поверхности.

Основным чертежом поверхности или её отсека (части поверхности) называют элементарный чертеж поверхности, дополненный проекциями контурных линий.

К контурным линиям относят линии точек касания поверхности проецирующими прямыми, линии обреза или границы отсеков поверхности, ребра гранных поверхностей (призматических и пирамидальных) и т. д. Следует помнить, что контурные линии находятся на поверхности, а на чертеже показывают их проекции.

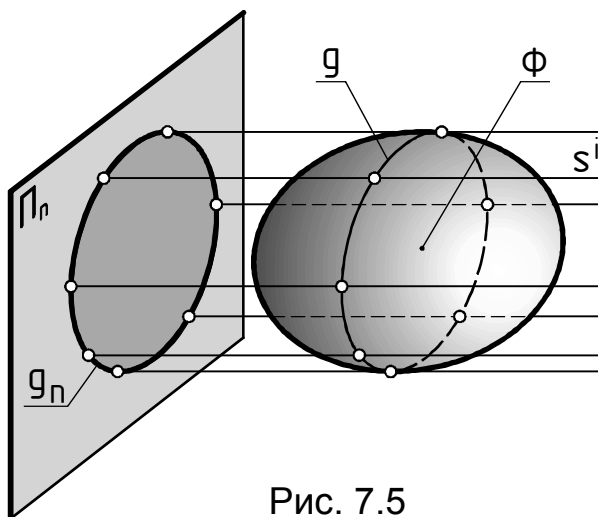


Рис. 7.5

Линия точек касания поверхности проецирующими прямыми может быть только на гладкой поверхности и является для неё линией видимости, отделяющей видимую часть поверхности от невидимой. На рис. 7.5 линия видимости g образована точками касания поверхности Φ проецирующими относительно Π_n прямыми s^i .

На рис. 7.6 приведен основной чертеж отсека конической поверхности общего вида $\Phi\{l(T,k)(l^i \supset T; l^i \cap k)\}$, элементарный чертеж которой дан на рис. 7.3. Границами отсека служат линия k и точка T .

Контурными линиями отсека относительно Π_1 являются линии k, l^1, l^2, l^5, l^6 и точка T , относительно Π_2 - линии k, l^3, l^4, l^5, l^6 и точка T . Контурные образующие l^5 и l^6 проходят через точки A и B - точки разрыва направляющей k . Образующие l^1 и l^2 есть линии точек касания поверхности проецирующими прямыми, перпендикулярными Π_1 , образующие l^3 и l^4 - перпендикулярными Π_2 . Положение и форма линий точек касания проецирующими прямыми (линий видимости) зависят от направления проецирования (взгляда).

Так, линии l^1 и l^2 являются линиями видимости относительно Π_1 и обычными образующими относительно Π_2 . Аналогично обстоят дела с линиями l^3 и l^4 .

Поверхность считается тончайшей непрозрачной оболочкой, что следует учитывать при определении видимости контурных линий. По этой причине относительно Π_2 через вырез поверхности между образующими l^5 и l^6 видна дуга \bar{I} кривой k .

Из множества контурных линий выделяют крайние контурные линии - контурные линии или их части, все точки которых обладают свойством: проецирующая прямая, проведенная через точку линии, не имеет больше общих точек с поверхностью. Исключение - конкурирующие контурные линии, расположенные в проецирующих поверхностях.

Какие контурные линии поверхности являются крайними, также зависит от направления взгляда: на рис. 7.6 крайними контурными линиями отсека поверхности относительно Π_1 являются точка T и линии l^1 , k (исключение), l^2 , а относительно Π_2 - точка T , линия l^3 , дуга CA кривой k , отрезок AE образующей l^5 , упомянутая выше дуга \bar{I} кривой k , отрезок FB образующей l^6 , дуга BD кривой k , линия l^4 .

Крайние контурные линии всегда видны и составляют в совокупности замкнутую линию. Линия видимости для гладкой поверхности является крайней контурной линией (линия g на рис. 7.5) или частью крайних контурных линий (линии l^1 , l^2 , l^3 , l^4 на рис. 7.6). Проекции крайних контурных линий образуют очерк поверхности. Очерк поверхности - замкнутая линия на чертеже.

Точки на поверхности строят одинаково, не зависимо от того, задана она основным чертежом или элементарным. Для иллюстрации этого на рис. 7.6 показано построение проекций произвольной точки M конической поверхности с помощью произвольной образующей l^i , которое полностью аналогично построению проекций точки M на элементарном чертеже поверхности (рис. 7.4).

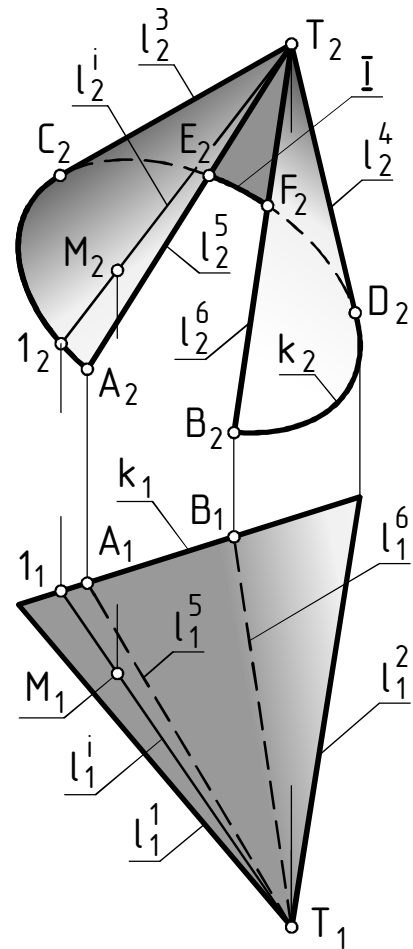


Рис. 7.6

7.3.3. Задание поверхности дискретным каркасом

На рис. 7.7 дискретным каркасом, элементами которого являются концентрические окружности $m^1, \dots, m^i, \dots, m^2$, задан отсек конической поверхности вращения, наглядное изображение которого показано на рис. 7.2.

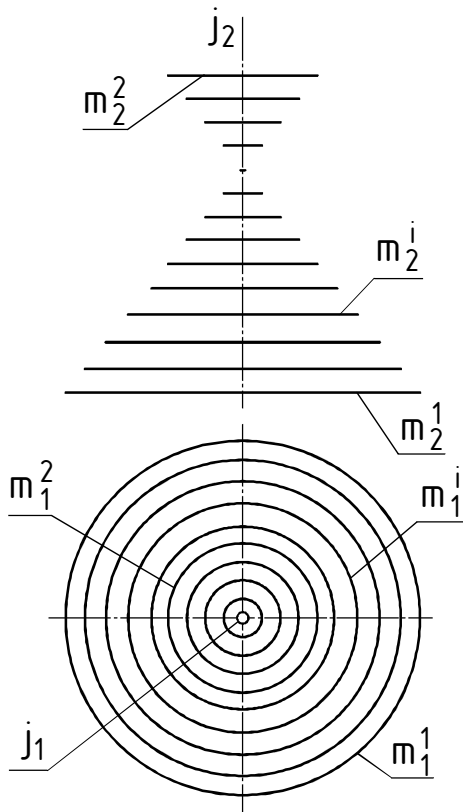


Рис. 7.7

Поверхность, задаваемая дискретным каркасом, не вполне определена: поверхности могут иметь один и тот же дискретный каркас, но несколько отличаться друг от друга, а не лежащие на линиях каркаса точки таких поверхностей строятся приближенно. Поэтому закономерные поверхности обычно задаются элементарным и основным чертежами.

А вот незакономерные поверхности, иногда называемые каркасными, можно задать только дискретным каркасом - некоторым числом принадлежащих им линий. Примерами поверхностей, задаваемых каркасами, являются поверхности корпусов летательных аппаратов и автомобилей, топографические поверхности, раскрывающие рельеф земной коры, и т. д. Заметим, что часто

при постройке крыши сначала выполняют её каркас - обрешетку, которую затем покрывают кровельным материалом.

В нашем курсе способ задания поверхности каркасом не рассматривают.

ЛЕКЦИЯ 8

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатой будем называть поверхность, которая может быть образована перемещением прямой линии и точки, на которой удобно строить с помощью образующих прямых. Проекции последних, в свою очередь, строят согласно закону образования поверхности.

Напомним, что буквами l и l^i обозначают только прямые линии, а буквой m - только окружности и их дуги. Тогда ПА построения точки M на линейчатой поверхности Φ можно записать так:

1. $\overline{l^i} \subset \Phi$ - на поверхности Φ строится её образующая l^i .
2. $\overline{M} \subset l^i$ - на образующей l^i задается (ищется) точка $M \subset \Phi$.

К линейчатым поверхностям относится подробно рассмотренная в предыдущих лекциях плоскость. Поэтому здесь напомним только, что основными определителями плоскости, которыми она задаётся на чертеже, являются три точки, любая плоская фигура, две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямая и точка. Для трех последних определителей формулы плоскости можно записать соответственно так:

$$\Gamma\{l(a, b; a \cap b)(l^i \cap a, l^i \cap b)\};$$

$$\Delta\{l(a, b; a \parallel b)(l^i \cap a, l^i \cap b)\};$$

$$\Sigma\{l(a, A)(l^i \cap a, l^i \supset A)\}, \text{ где } a \text{ и } b - \text{ прямые линии.}$$

8.1. Коническая и пирамидальная поверхности

Обобщенная формула конической поверхности имеет вид:

$$\Phi\{l(a, T)(l^i \cap a, l^i \supset T)\}.$$

Если a кривая линия, то это формула собственно конической поверхности; если a ломаная линия, то пирамидальной (в обоих случаях a и точка T не лежат в одной плоскости); если a прямая линия, то это формула плоскости.

Элементарный чертеж некой конической поверхности Φ приведен на рис. 7.3, основной чертеж отсека этой поверхности - на рис. 7.6, построение произвольной точки $M \subset \Phi$ показано на рис. 7.4 и 7.6.

На рис. 8.1 изображен элементарный чертеж пирамидальной поверхности Φ , на котором заданы элементы определителя: ломаная a - треугольник ABD и точка T , на рис. 8.2 - основной чертеж отсека той же пирамидальной поверхности. Контурными линиями отсека являются точка T и ломаная a - границы отсека и ребра AT , BT , DT .

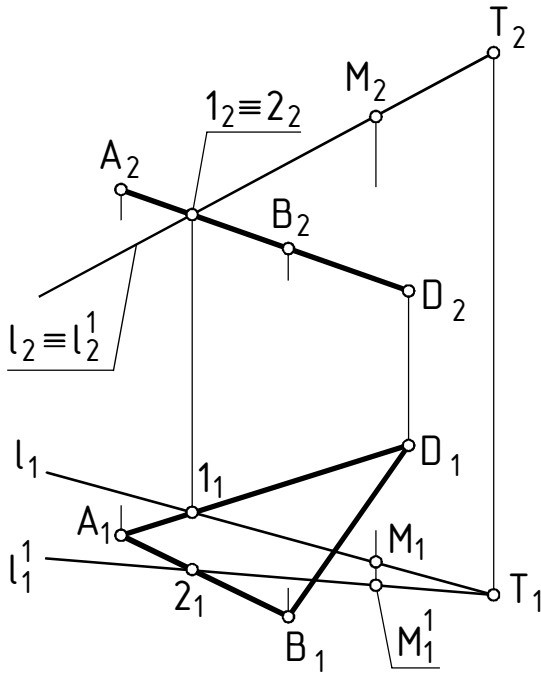


Рис. 8.1

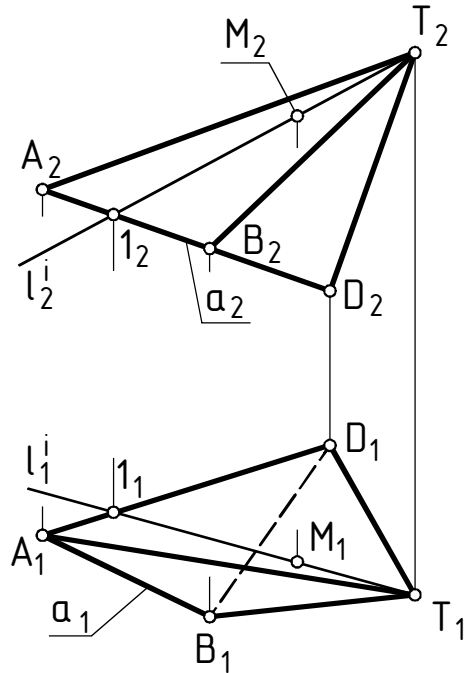


Рис. 8.2

В общем случае коническая и пирамидальная поверхности имеют две полости, простирающиеся от вершины T в обе стороны. На рис. 7.6 и 8.2 показано только по одной “нижней” полости поверхностей.

На рис. 8.1 показано построение проекции M_1 точки M пирамидальной поверхности по заданной проекции M_2 , осуществляемое в соответствии с ГА:

1. $\overline{l_2} \supset T_2, M_2$.
2. $\overline{l_2} = l_2 \cap a_2$.
3. $\overline{l_1} \subset a_1$.
4. $\overline{l_1} \supset T_1, 1_1$.
5. $\overline{M_1} \subset l_1$.

Заметим, что проекцией M_2 на пирамидальной поверхности заданы две точки $M(M_1, M_2)$ и $M^1(M_1^1, M_2)$. Точка M^1 находится на образующей l^1 , конкурирующей с образующей l относительно плоскости Π_1 и пересекающей треугольник a в точке $2(2_1, 2_2)$.

На рис. 8.2 с помощью образующей l^i построены проекции M_1 и M_2 произвольной точки M пирамидальной поверхности.

На рис. 8.3, а показан основной чертеж отсека пирамидальной поверхности $F\{l(a, T)(l^i \cap a, l^i \supset T)\}$, $a[A, B, D, A]$, а на рис. 8.3, б - наглядное изображение этого отсека. Границами отсека являются

треугольник α и линия b , расположенная в плоскости $\Sigma \perp \Pi_2$. Контурными линиями отсека также являются части ребер поверхности, заключенные между линиями α и b . Линия b представляет собой треугольник, проецирующийся на Π_2 в отрезок b_2 , а на Π_1 - в треугольник b_1 , построенный с помощью точек A^1, B^1 и D^1 пересечения ребер с плоскостью Σ . Обращаем внимание на видимость контурной линии $[B, D]$ отсека относительно плоскости Π_1 : часть этой линии видна, так как поверхность - тончайшая оболочка.

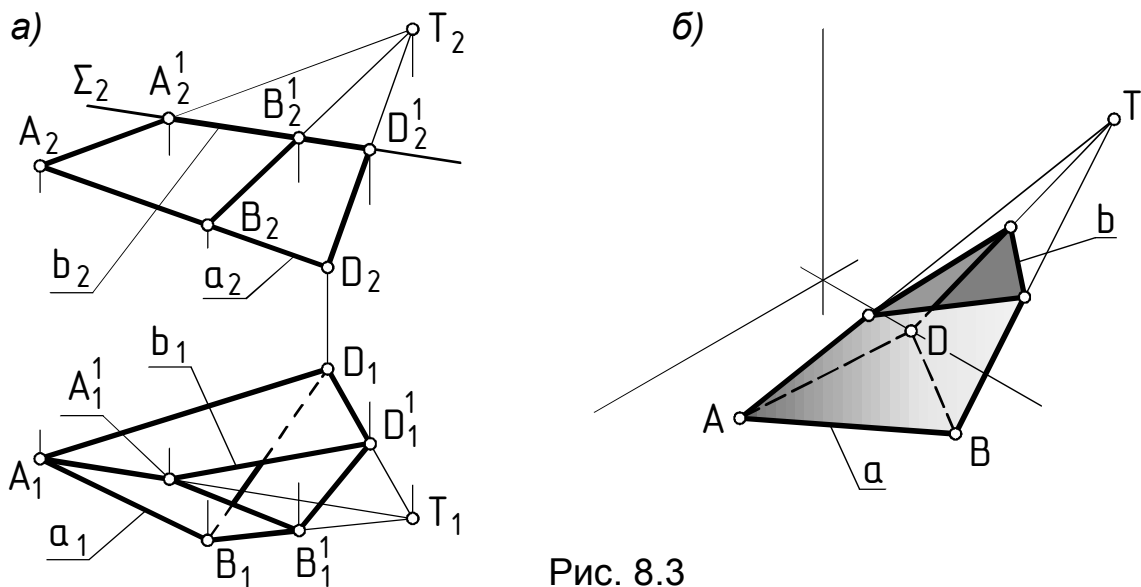


Рис. 8.3

8.2. Цилиндрическая и призматическая поверхности

Обобщенная формула цилиндрической поверхности имеет вид:

$$\Phi \{ l(\alpha, l) (l^i \cap \alpha, l^i \parallel l) \}.$$

Если α кривая линия, формула представляет собственно цилиндрическую поверхность; если α ломаная линия - призматическую (в обоих случаях направляющая α и образующая l не лежат в одной плоскости); если α прямая линия, формула представляет плоскость.

На рис. 8.4 приведен элементарный чертеж произвольной цилиндрической поверхности (изображены только проекции элементов её определителя), а на рис. 8.5 - основной чертеж отсека той же поверхности. Линии α, α^1, l^1 и l^2 - линии обреза, а линия g - линия, по которой проецирующие лучи, перпендикулярные Π_1 и Π_2 , касаются поверхности.

На рис. 8.6 изображен элементарный чертеж призматической поверхности, на рис. 8.7 - основной чертеж её отска. Контурными линиями отска являются ломаные α и α^1 (границы отска) и ребра l^1, l^2, l^3 .

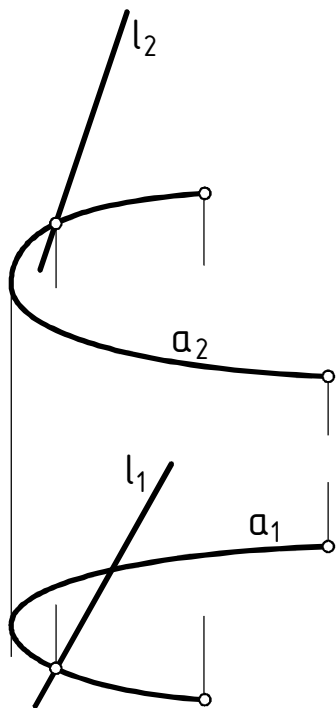


Рис. 8.4

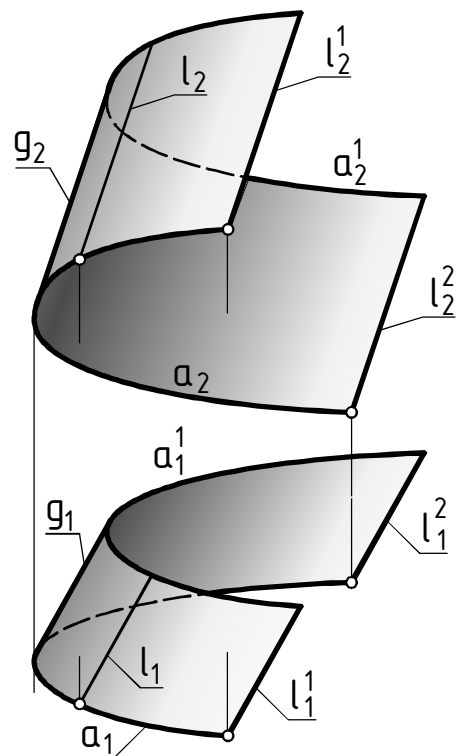


Рис. 8.5

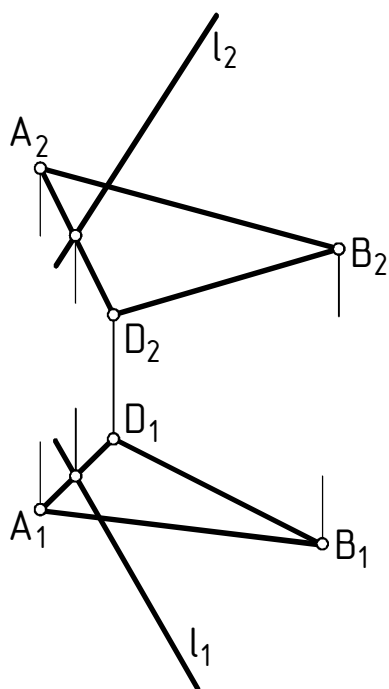


Рис. 8.6

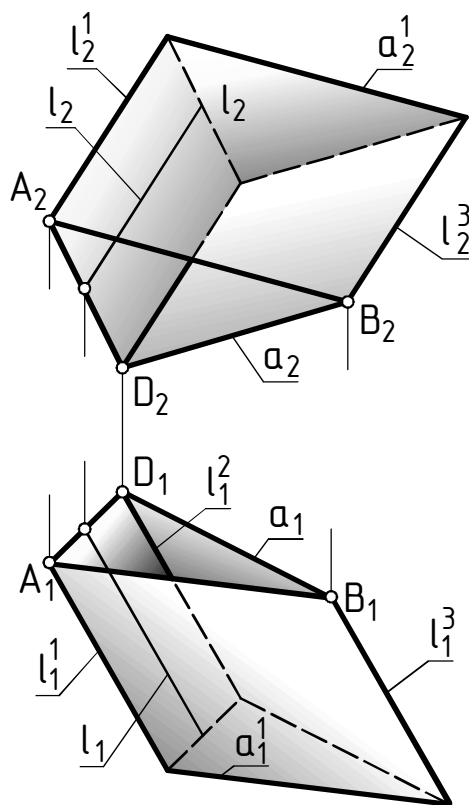


Рис. 8.7

ПРИМЕР 8.1. Задана призматическая поверхность $\Phi(l(l, a)(l^i \cap a, l^i \parallel l))$, a - ломаная (рис. 8.8). 1. Построить проекции произвольной точки M , принадлежащей Φ . 2. Построить проекцию N_2 точки $N \in \Phi$ по известной проекции N_1 . 3. Определить, принадлежит ли поверхности Φ заданная точка F .

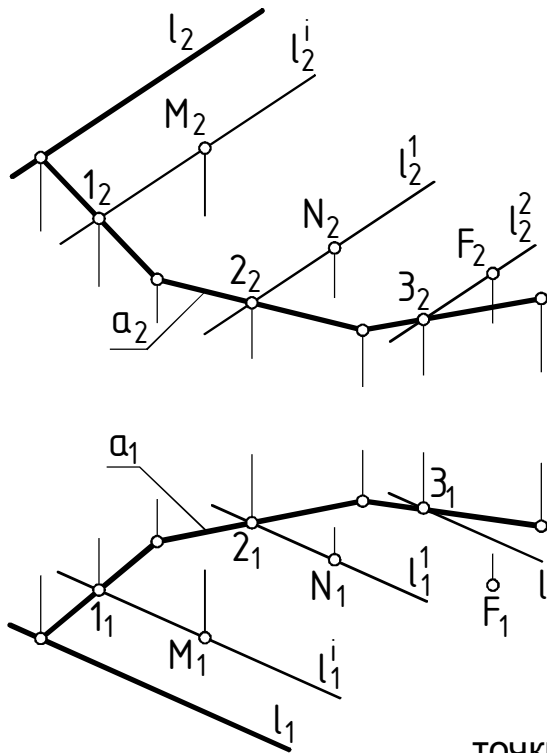


Рис. 8.8

Произвольную точку M строили с помощью произвольной образующей l^i :

1. $\overline{l_1^i} \parallel l_1 \wedge l_1^i \cap a_1$.
2. $\overline{l_1^i} = l_1^i \cap a_1$.
3. $\overline{l_2^i} \subset a_2$.
4. $\overline{l_2^i} \parallel l_2 \wedge l_2^i \supset 1_2$.
5. $\overline{M_1} \subset l_1^i$.
6. $\overline{M_2} \subset l_2^i$.

Проекцию N_2 точки N искали с использованием образующей l^1 , проходящей через точку N :

1. $\overline{l_1^1} \parallel l_1 \wedge l_1^1 \supset N_1$.
2. $\overline{l_2^1} = l_1^1 \cap a_1$.
3. $\overline{l_2^1} \subset a_2$.
4. $\overline{l_2^1} \parallel l_2 \wedge l_2^1 \supset 2_2$.
5. $\overline{N_2} \subset l_2^1$.

Для определения принадлежности точки F поверхности Φ делалась попытка построить образующую l^2 , проходящую через точку F :

1. $\overline{l_2^2} \parallel l_2 \wedge l_2^2 \supset F_2$.
2. $\overline{l_2^2} = l_2^2 \cap a_2$.
3. $\overline{l_1^2} \subset a_1$.
4. $\overline{l_1^2} \parallel l_1 \wedge l_1^2 \supset 3_1$.

Вывод: $F_1 \notin l_1^1 \Rightarrow F \notin l^2 \Rightarrow F \notin \Phi$.

ПРИМЕР 8.2. Построить основной чертеж отсека цилиндрической поверхности $\Phi(t(m, t)(t \cap m, t^i \parallel t))$, границами которого являются направляющая m , образующие t^1 и t^2 , пересекающие m в точках A и B , и линия k , лежащая в плоскости $\Sigma \perp \Pi_1$ (рис. 8.9, а), если заданы элементарный чертеж поверхности (m, t) , точки $A, B \subset m$ и плоскость Σ .

Проведем проекции образующих $t^1 \supset A$ и $t^2 \supset B$ - линий обреза отсека, а также контурных образующих отсека относительно Π_1 (t^3 и t^4) и Π_2 (t^5). Так как $\Sigma \perp \Pi_1$ и $k \subset \Sigma$, то на Π_1 линия k проецируется

в отрезок $k_1 \subset \Sigma_1$, расположенный между точками 3_1 и 4_1 ($3_1 = t_1^3 \cap \Sigma_1$; $4_1 = t_1^4 \cap \Sigma_1$). Проекция k_2 эллипса k строилась с использованием проекции k_1 по точкам M^i , ГА построения одной из которых имеет вид:

- | | |
|---|---|
| 1. $\overline{M_1^i} \subset k_1$. | 4. $\overline{N_2} \subset m_2$. |
| 2. $\overline{t_1^i} \supset M_1^i$, $t_1^i \parallel t_1$. | 5. $\overline{t_2^i} \supset N_2$, $t_2^i \parallel t_2$. |
| 3. $\overline{N_1} = m_1 \cap t_1^i$. | 6. $\overline{M_2^i} \subset t_2^i$. |

Проекции 1_2-5_2 характерных точек 1-5, лежащих на контурных образующих отсека, определялись по горизонтальным проекциям точек 1_1-5_1 на уже построенных проекциях образующих $t_1-t_1^5$.

На рис. 8.9, б показано наглядное изображение отсека (уменьшенное).

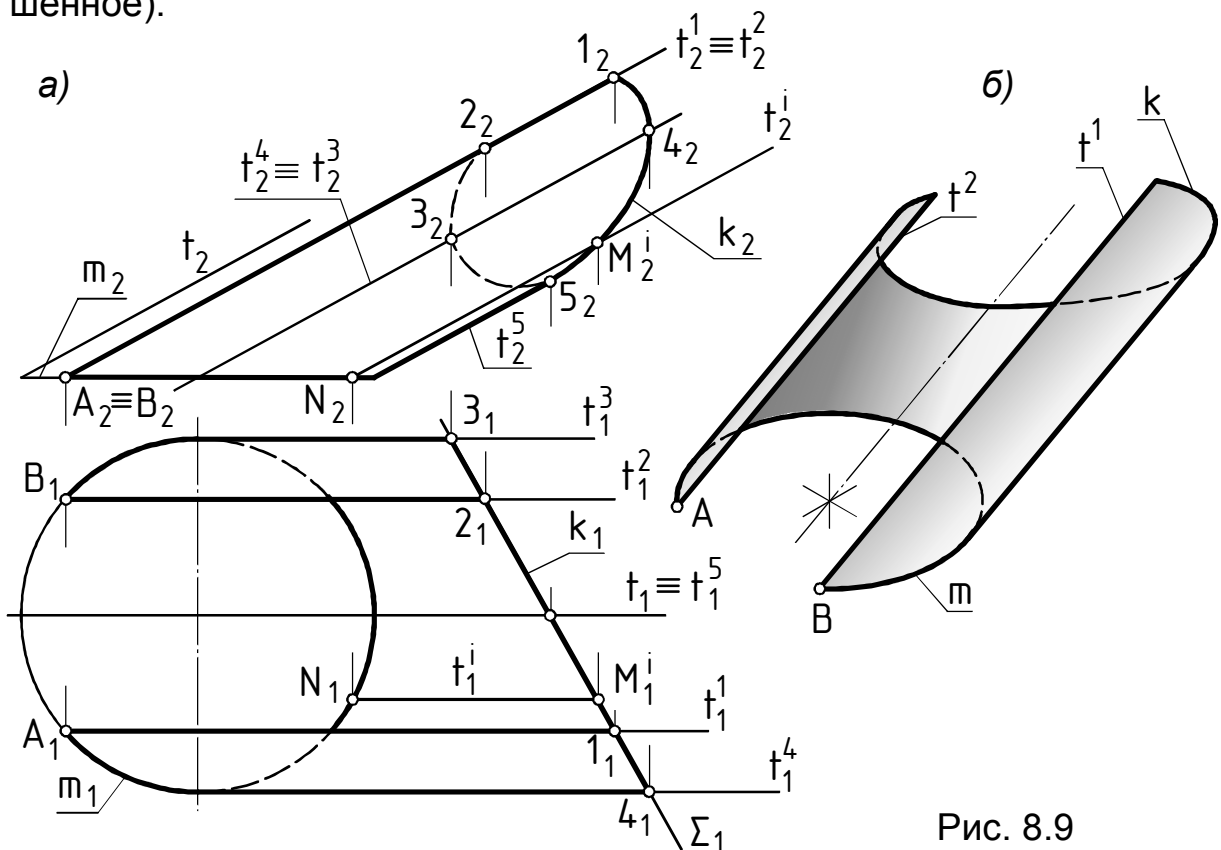


Рис. 8.9

8.3. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

Формула линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) имеет вид: $\Phi\{(a,b,\Sigma)(l^i \cap a, l^i \cap b, l^i \parallel \Sigma)\}$. Все образующие этих поверхностей пересекают две направляющие и параллельны плоскости параллелизма.

Если направляющие a и b скрещивающиеся прямые, то поверхность называют гиперболическим параболоидом или косой плоскостью; если одна из направляющих прямая линия, а вторая кривая линия, то поверхность называют коноидом; если обе направляющие кривые линии, то поверхность называют цилиндроидом. Элементарные чертежи гиперболического параболоида, коноида и цилиндриоида приведены соответственно на рис. 8.10 - 8.12.

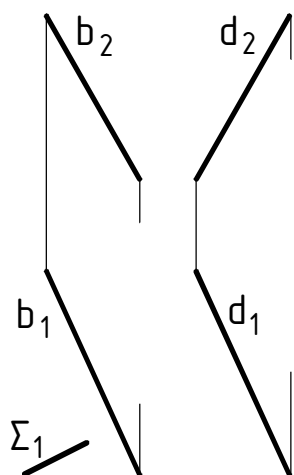


Рис. 8.10

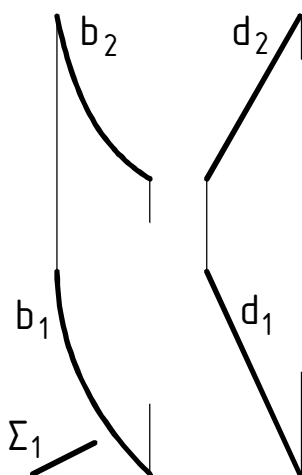


Рис. 8.11

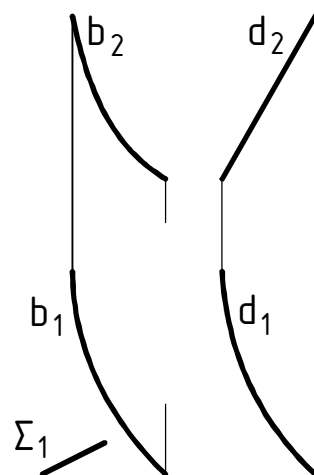


Рис. 8.12

Гиперболический параболоид и коноид называют прямыми, если прямолинейная направляющая перпендикулярна плоскости параллелизма. На рис. 8.13 и рис. 8.14 для прямого коноида Φ решается ОПЗ в постановке, когда требуется определить, принадлежит ли поверхности Φ точка $M(M_1, M_2)$. При этом на рис. 8.13 поверхность Φ задана элементарным чертежом (заданы направляющие a и b , плоскость параллелизма Σ , причем $b \perp \Sigma$), а на рис. 8.14 задан основной чертеж отсека коноида, ограниченный линиями a , b и образующими l^1, l^2 . В результате выполненных на рис. 8.13 и 8.14 построений оказалось, что точка M принадлежит образующей l поверхности Φ , поэтому $M \in \Phi$. Проекция образующей l строилась согласно ГА:

$$1. \overline{l_2} \supset M_2; l_2 \parallel \Sigma_2.$$

$$2. \overline{l_2} = a_2 \cap b_2.$$

$$3. \overline{l_1} \subset a_1.$$

$$4. \overline{l_1} \supset l_1, b_1.$$

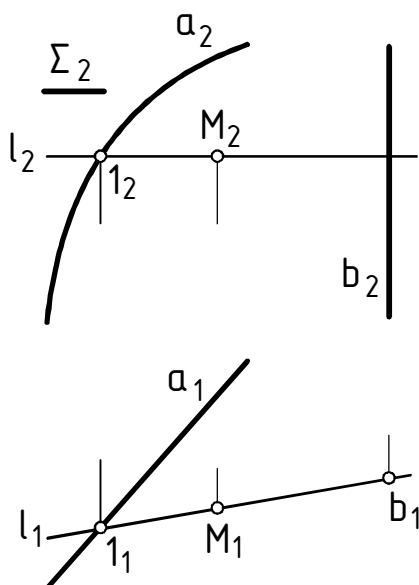


Рис. 8.13

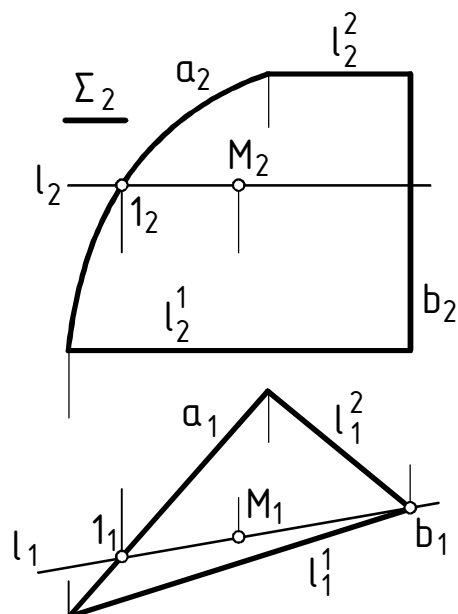


Рис. 8.14

ПРИМЕР 8.3. Построить основной чертеж отсека коноида $\Phi\{t(m, b, \Sigma)(t^i \cap m, t^i \cap b, t^i \parallel \Sigma)\}$, заданного элементарным чертежом (заданы m , b и $\Sigma \parallel \Pi_1$, а также $1, 2 \subset m$), если границами отсека являются линия m , образующие t^1 , t^2 ($t^1 \supset 1$; $t^2 \supset 2$) и линия $k \subset \Delta$, $\Delta \parallel \Pi_2$ (рис. 8.15, а).

На 1-м этапе строился достаточно плотный каркас образующих t^i , включая линии обреза t^1 и t^2 , а также линию t^3 видимости поверхности относительно Π_2 ($t^3 = \Phi \cup s^i \perp \Pi_2$). Образующие t^i строились согласно ГА:

1. $\overline{N_2^i} \subset m_2$. 2. $\overline{N_1^i} \subset m_1$. 3. $\overline{t_2^i} \supset N_2^i$, $t_2^i \parallel \Sigma_2$.
4. $\overline{B_2^i} = b_2 \cap t_2^i$. 5. $\overline{B_1^i} \subset b_1$. 6. $\overline{t_1^i} \supset N_1^i, B_1^i$.

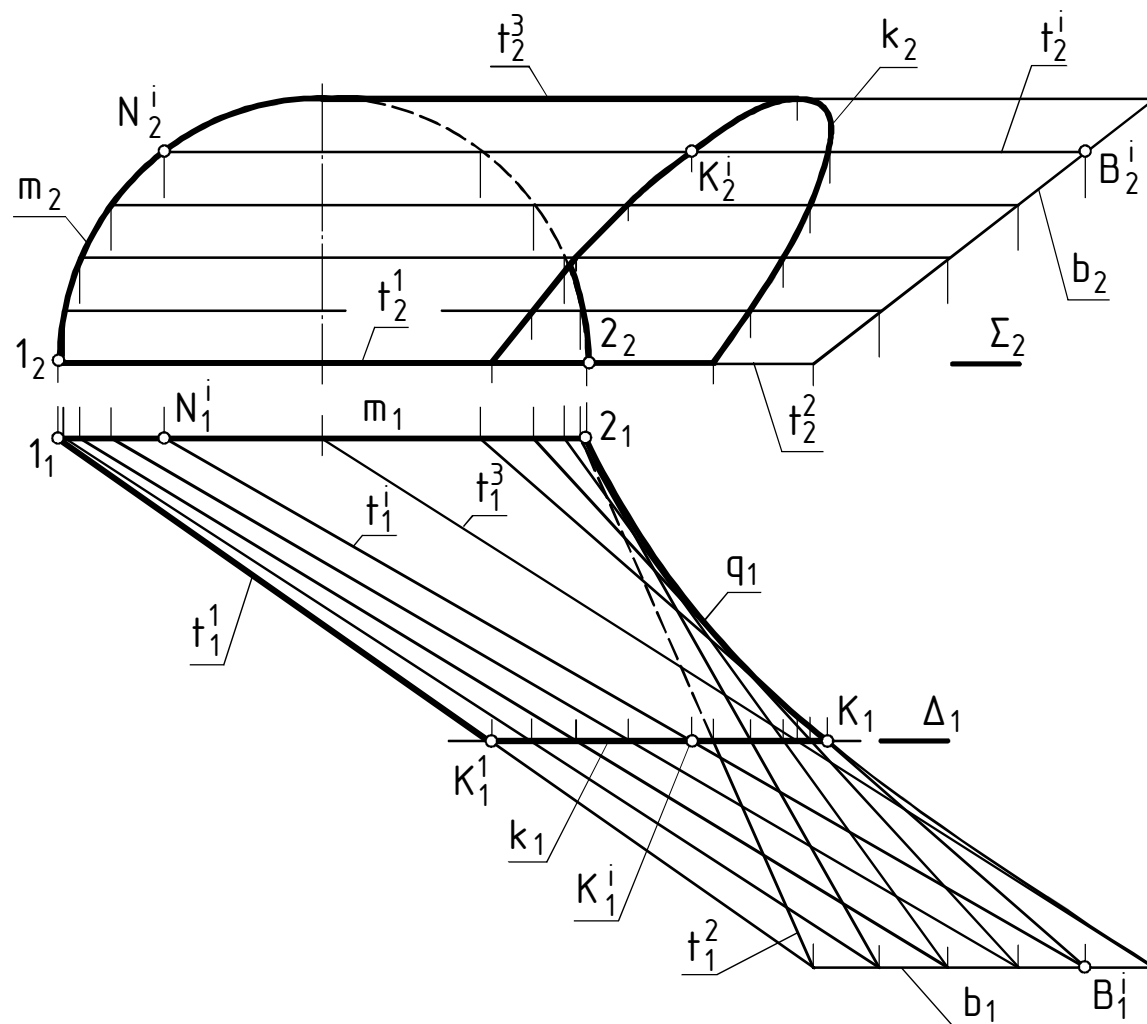
На 2-м этапе строилась линия q_1 - проекция линии q видимости поверхности относительно Π_1 : $q = \Phi \cup s^i \perp \Pi_1$. Она является огибающей проекций t_1^i образующих t .

Далее были найдены проекции k_1 и k_2 линии обреза $k \subset \Delta$. Так как $\Delta \parallel \Pi_2$, то $k_1 \subset \Delta_1$ и k_1 представляет собой отрезок, ограниченный точками K_1 и K_1^1 . Проекция k_2 строилась приближенно по точкам K^i с использованием проекции k_1 и проекций образующих t^i по ГА: 1. $\overline{K_1^i} = k_1 \cap t_1^i$. 2. $\overline{K_2^i} \subset t_2^i$.

При определении видимости контурных линий отсека использовался метод конкурирующих точек и учитывалось, что крайние относительно плоскости проекций контурные линии видны всегда, а поверхность является оболочкой (рис. 8.15, а).

На рис. 8.15, б дано наглядное изображение построенного отсека.

а)



б)

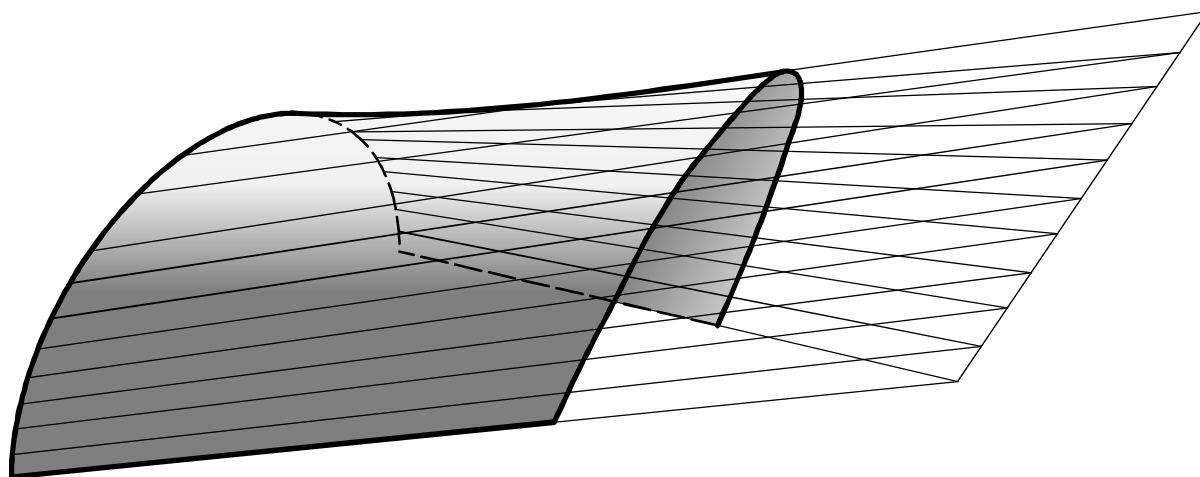


Рис. 8.15

На рис. 8.16 приведен основной чертеж отсека гиперболического параболоида $\Phi\{t(a, b, \Sigma \parallel \Pi_2)(t^i \cap a \wedge b; t^i \parallel \Sigma)\}$, границами которого являются линии a, b и образующие t^1 и t^2 , проходящие соответственно через точки $A, B \in a$. Для получения чертежа сначала строят достаточно плотный дискретный каркас образующих t^i , включая образующие $t^1 \ni A$ и $t^2 \ni B$. В результате определяют отрезки линий обреза отсека: $[A, B] \subset a$, $[D, E] \subset b$, $[A, D] \subset t^1$, $[B, E] \subset t^2$ и получают возможность провести проекцию p_2 параболы p как огибающую проекций t_2^i образующих t^i . Парабола p - линия касания поверхности гиперболического параболоида проецирующими лучами, перпендикулярными Π_2 .

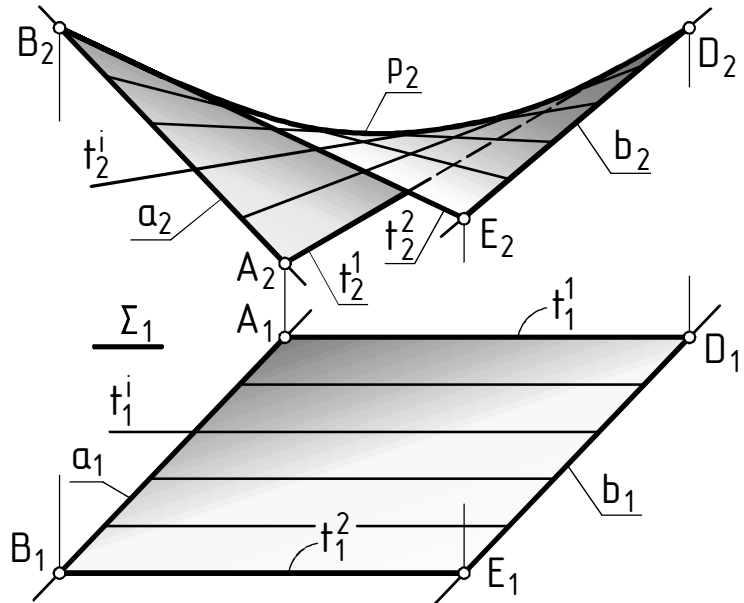


Рис. 8.16

8.4. Линейчатая поверхность с тремя направляющими

В самом общем случае линейчатая поверхность задается тремя направляющими линиями:

$$\Phi\{l(a, b, d)(l^i \cap a, l^i \cap b, l^i \cap d)\}.$$

Если две или три направляющие являются кривыми линиями, необходимо проводить дополнительные исследования на предмет существования линейчатой поверхности. Если же кривой линией является только одна направляющая, то линейчатая поверхность существует всегда.

Если все три направляющие прямые линии, то в общем случае образуется однополостный гиперboloид, а в частном случае, когда направляющие расположены в параллельных плоскостях, - гиперболический параболоид.

На рис. 8.17 элементарным чертежом задана линейчатая поверхность с тремя направляющими a, b, d , причем одна из них (b) является проецирующей прямой, и показано построение проекций произвольной точки M , принадлежащей поверхности. Для этого строились проекции образующей l , начиная с $l_2 \ni b_2$.

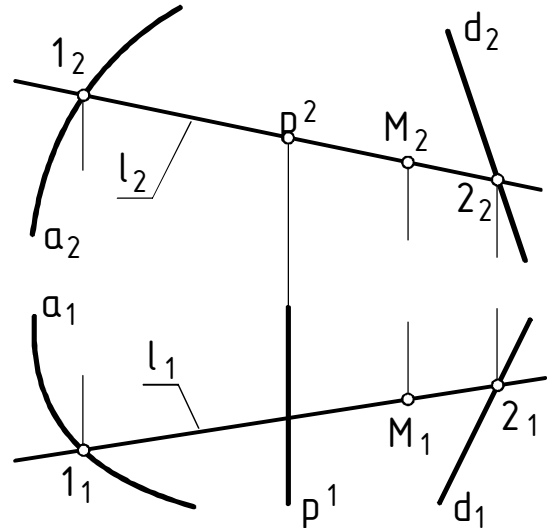


Рис. 8.17

ЛЕКЦИЯ 9

ВИНТОВЫЕ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

9.1. Винтовые поверхности

В учебном курсе будут рассматриваться только линейчатые винтовые поверхности - геликоиды. Их формула имеет вид:

$$\Phi\{t(j, k, \varphi)(t^i \cap k, t^i \cap j; |t^i \wedge j = \varphi|)\},$$

где k - цилиндрическая винтовая линия; j - прямая, ось винтовой линии и геликоида; φ - постоянный угол наклона образующей t^i к оси j . Задавая геликоид, необходимо указать направление винтовой линии (геликоида). Если при вращении точки вокруг оси по часовой стрелке, точка удаляется от наблюдателя, то винтовая линия называется правой, а если приближается, то левой. Обычно ось j располагают перпендикулярно одной из ПП. В этом случае винтовая линия k проецируется на эту ПП в окружность, а на другую - в синусоиду.

Если угол φ наклона образующей к оси равен 90° , то геликоид называют прямым, а если $\varphi \neq 90^\circ$, то наклонным. Формулу прямого геликоида можно записать так: $\Phi\{t(k, j)(t^i \cap k, t^i \cap j; t^i \perp j)\}$.

Точки на геликоидах, как поверхностях линейчатых, строятся с помощью их образующих прямых.

На рис. 9.1, а приведен элементарный чертеж прямого геликоида - заданы проекции оси j , винтовой линии k , а также

точка A и направление вращения, определяющие направление винтовой линии (на рис. 9.1, а она правая). На рис. 9.1, б дано наглядное изображение отсека этой поверхности, на котором для большей выразительности показан дискретный каркас образующих линий. На рис. 9.1, а в соответствии с приведенными ниже ПА и ГА построены проекции произвольной точки M прямого геликоида:

$$\begin{array}{lll} \text{ПА: } \text{I. } \overline{t^i} \subset \Phi. & \text{ГА: } \text{I. } 1. \overline{1_1} \subset k_1. & \text{II. } 1. \overline{M_1} \subset t_1^i. \\ & & 2. \overline{1_2} = (1_1, 1_2) \cap k_2. & 2. \overline{M_2} = (M_1, M_2) \cap t_2^i. \\ & & 3. \overline{t_1^i} \supset j_1, 1_1. & \\ & & 4. \overline{t_2^i} \supset 1_2; t_2^i \perp j_2. & \end{array}$$

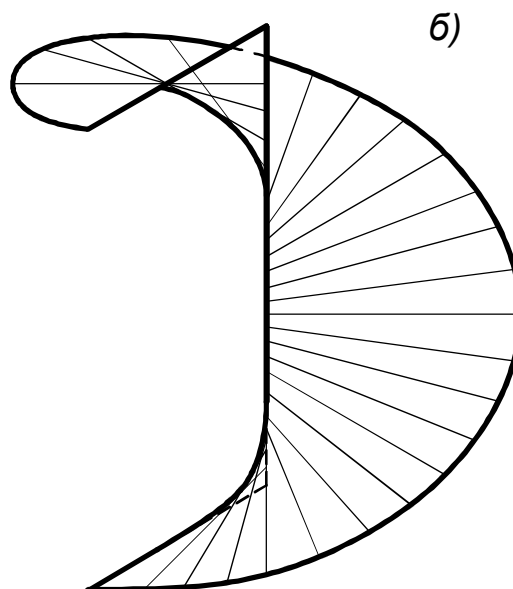
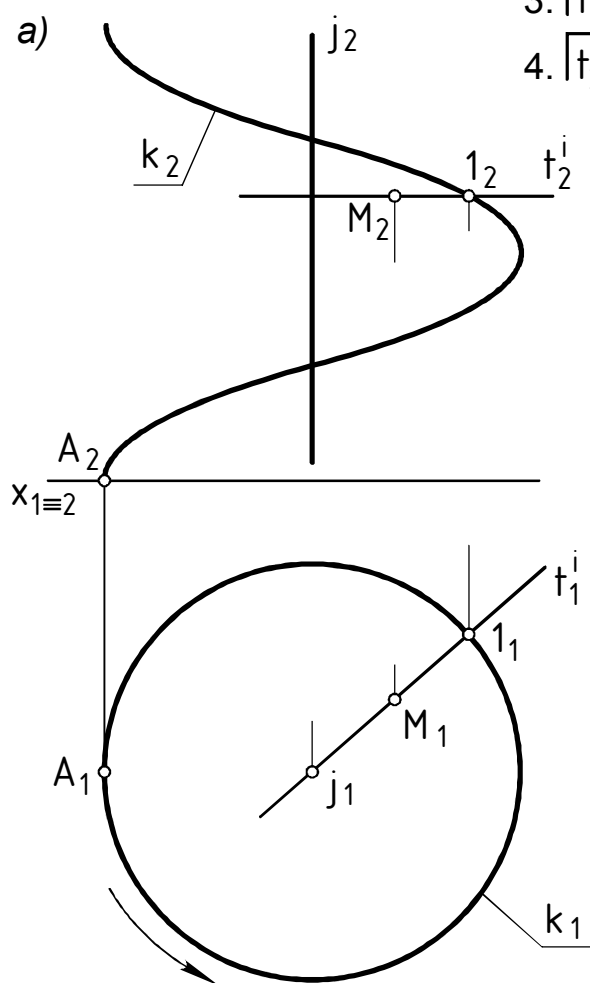


Рис. 9.1

На рис. 9.2, а представлен элементарный чертеж наклонного геликоида Φ , а на рис. 9.2, б - наглядное изображение отсека этой поверхности.

Элементарный чертеж включает в себя проекции винтовой линии k , её оси j , а также точки $A \in k$, определяющей направление винтовой линии (на рис. 9.2, а винтовая линия левая). Однако этих образов не достаточно для построения проекций образующих t^i

наклонного геликоида, так как угол φ их наклона к оси j искажается, причем для каждой образующей различным образом (исключение - углы наклона контурных образующих).

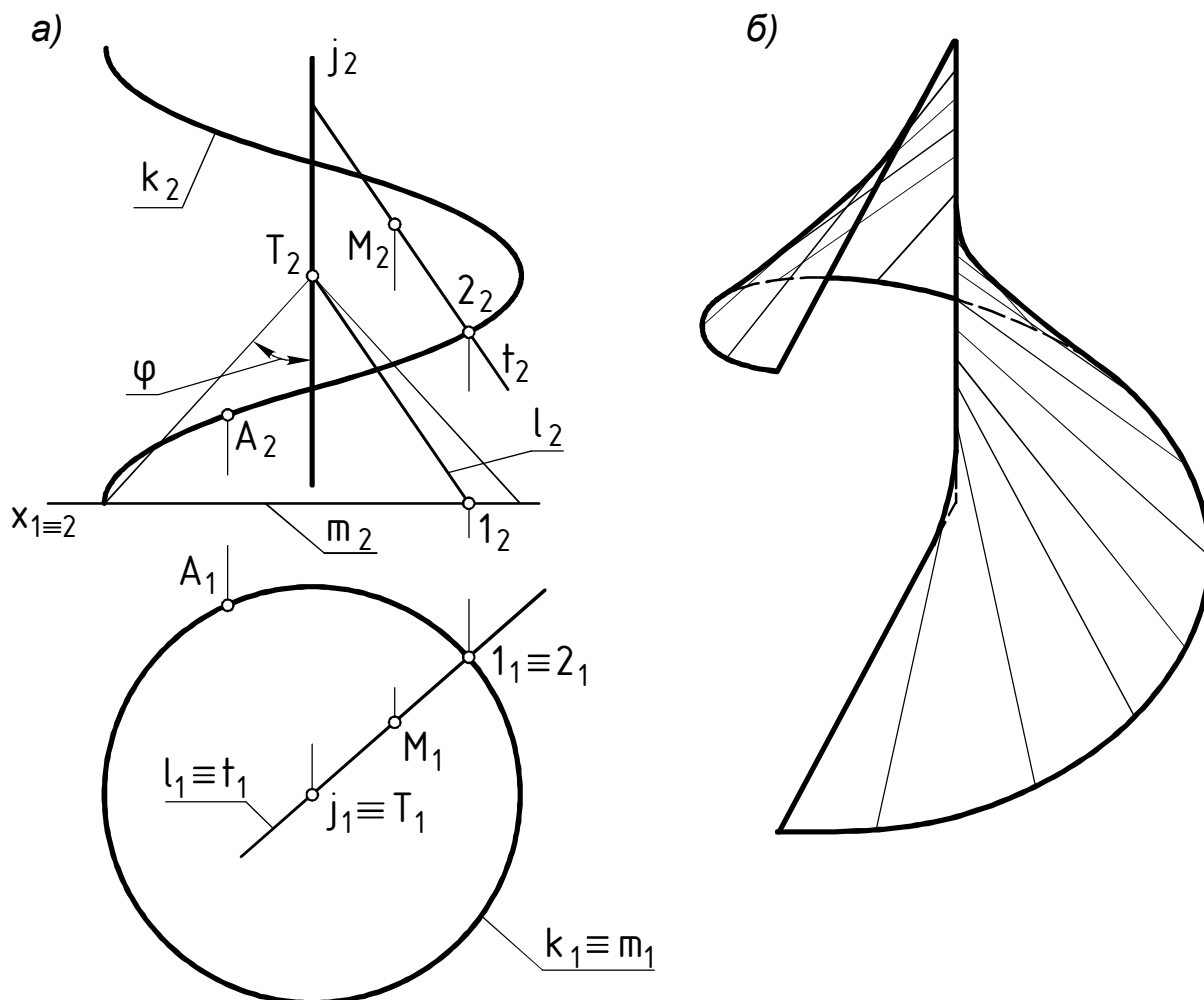


Рис. 9.2

При построении образующих наклонного геликоида принимают, что любая его образующая t^i параллельна соответствующей образующей l^i конической поверхности вращения, образующие которой наклонены к оси вращения под тем же углом φ . Для упрощения построений оси конической поверхности и геликоида совмещают, а отсек конической поверхности, ограниченный вершиной T и окружностью m , задают так, чтобы проекции m и винтовой линии k на плоскость проекций, перпендикулярную оси j , совпадали, а вторая проекция окружности m находилась на оси проекций (на рис. 9.2, а $m_1 \equiv k_1$ и $m_2 \equiv x_{1 \equiv 2}$). Перед построением образующей t геликоида строят параллельную ей образующую l конической поверхности.

На рис. 9.2, а показано построение проекции M_2 точки M , принадлежащей геликоиду, по заданной проекции M_1 . Сначала строили горизонтальную l_1 , а затем фронтальную l_2 проекции образующей l конической поверхности: l_1 провели через точки j_1 и M_1 , а l_2 - через точки 1_2 и T_2 (точка $1 = l \cap m$). Так как ось $j \perp \Pi_1$ и $m_1 \equiv k_1$, то горизонтальная проекция t_1 образующей t геликоида, проходящей через точку M , совпадает с проекцией l_1 , а точка $2_1 = t_1 \cap k_1$ - с точкой 1_1 : $t_1 \equiv l_1$ и $2_1 \equiv 1_1$ (вообще точка 2 - точка пересечения образующей t с винтовой линией k). Проекцию t_2 проводили через точку $2_2 \in k_2$ параллельно l_2 . Точка $M_2 \in t_2$.

Винтовые поверхности широко используются в технике: резьбы, резьбовые изделия, сверла, пружины и многое другое изготовлено с использованием этих поверхностей.

9.2. Циклические поверхности

Циклическими называют поверхности, которые могут быть образованы перемещением окружности m переменного или постоянного радиуса. Все многообразие этих поверхностей определяется многообразием законов движения окружности в пространстве и законов изменения её радиуса. Точки на циклической поверхности Φ обычно строят с помощью образующих окружностей m согласно ПА: I. $\overline{m^i} \subset F$. II. $\overline{m^i} \subset m$.

На рис. 9.3 представлен элементарный чертеж циклической поверхности $\Phi\{m(a,b,\Sigma)(m \cap a, \overline{m^i} \subset b, m^i \subset \Delta^i \parallel \Sigma)\}$, на которой заданы плоскость параллелизма Σ , линия центров b и направляющая a .

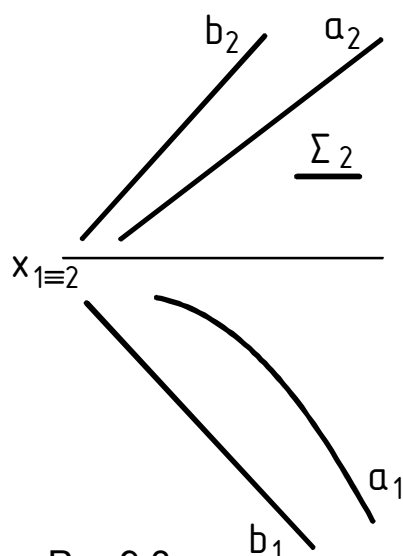


Рис.9.3

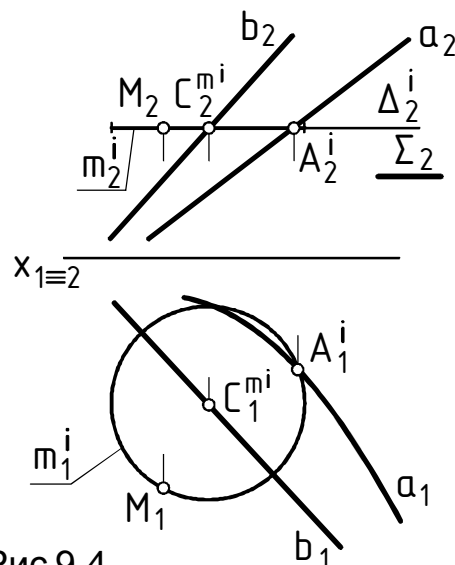


Рис.9.4

Согласно закону образования плоскости всех образующих m параллельны плоскости Σ , центры всех образующих расположены на b и все образующие m пересекают a . На рис. 9.4 с помощью произвольной образующей m^i согласно приведенному ниже ГА построены проекции произвольной точки $M \in \Phi$:

1. $\overline{\Delta_2^i} \parallel \Sigma_2; m_2^i \subset \Delta_2^i$. 2. $\overline{A_2^i} = a_2 \cap m_2^i$. 3. $\overline{A_1^i} \subset a_1$.
4. $\overline{C_2^{m^i}} = m_2^i \cap b_2$. 5. $\overline{C_1^{m^i}} \subset b_1$. 6. $\overline{m_1^i} \supset A_1^i, R_1^{m^i} = |A_1^i, C_1^{m^i}|$.
7. $\overline{M_1} \subset m_1^i$. 8. $\overline{M_2} \subset m_2^i$.

В рассмотренном примере $\Sigma \parallel \Pi_1$ и $m^i \subset \Delta^i \parallel \Sigma$, поэтому образующие m^i на Π_1 проецируются в окружности, а на Π_2 - в отрезки.

На рис. 9.5 построен основной чертеж отсека той же поверхности Φ , линиями обреза которого являются образующие $m^1 \supset A^1$, $m^2 \supset A^2$ ($A^1, A^2 \subset a$) и линии k, k^1 , лежащие в плоскости $\Gamma \perp \Pi_2$ (исходные данные примера - элементарный чертеж поверхности, т. е. a, b и Σ , а также точки A^1, A^2 и проекция Γ_2 плоскости Γ).

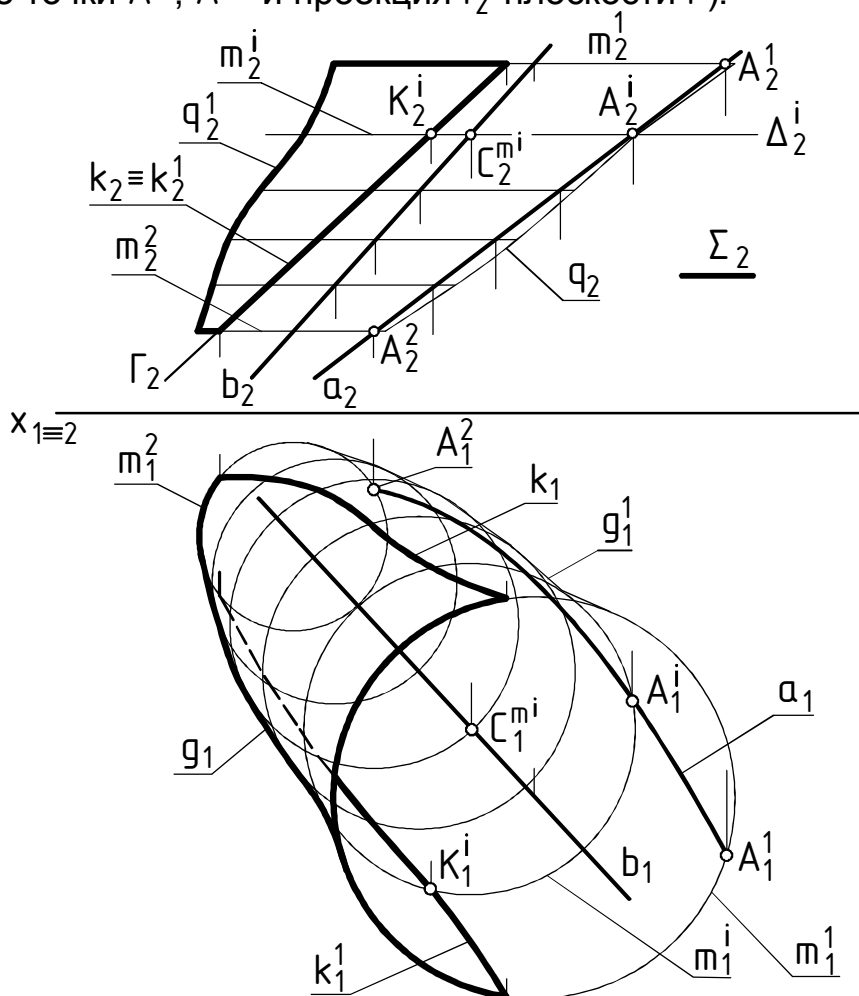


Рис. 9.5

На 1-ом этапе строились проекции m_1^i и m_2^i довольно плотного каркаса образующих m^i (см. ГА к рис. 9.4), в том числе и проекции $m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2$ границ отсека m^1 и m^2 .

Для построения проекций q_2 и q_2^1 линий видимости (контура) q и q^1 отсека поверхности относительно Π_2 соединяли соответственно правые и левые концы проекций m_2^i . Проекции g_1 и g_1^1 линий видимости (контура) g и g^1 отсека поверхности относительно Π_1 строились как огибающие окружностей m_1^i (напомним, что линии q и q^1 образованы множеством точек касания отсека поверхности проецирующими лучами, перпендикулярными Π_2 , а g и g^1 - перпендикулярными Π_1).

Так как линии обреза $k, k^1 \subset \Gamma \perp \Pi_2$, то проекции k_2 и k_2^1 известны: $k_2, k_2^1 \subset \Gamma_2$. Проекции k_1 и k_1^1 строились приближенно по точкам $K^i = \Gamma \cap m^i$: 1. $\overline{K_2^i} = \Gamma_2 \cap m_2^i$; 2. $K_1^i \subset m_1^i$.

На рис. 9.5 показано одно из двух возможных решений - выделен отсек поверхности Φ , расположенный "выше" плоскости Γ (2-ое решение - отсек поверхности Φ , лежащий "ниже" Γ).

На рис. 9.6 показан элементарный чертеж циклической поверхности с тремя направляющими и плоскостью параллелизма

$$\Phi\{m(b,d,q,\Sigma)(m^i \cap b, m^i \cap d, m^i \cap q, m^i \subset \Sigma^i \parallel \Sigma)\},$$

(заданы проекции трех направляющих и основная проекция плоскости параллелизма). На рис. 9.6 решена также ОПЗ в постановке, когда требуется установить, принадлежит ли данная точка M поверхности или нет. Решение выполнялось в соответствии с ГА:

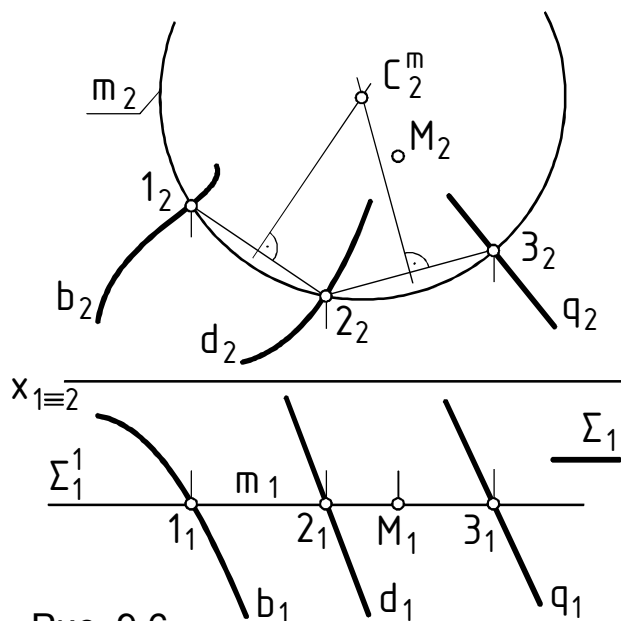


Рис. 9.6

1. $\overline{\Sigma_1} \supset M_1, \Sigma_1^1 \parallel \Sigma_1; m_1 \subset \Sigma_1$.
2. $\overline{1_1} = \Sigma_1^1 \cap b_1; \overline{2_1} = \Sigma_1^1 \cap d_1; \overline{3_1} = \Sigma_1^1 \cap q_1$.
3. $\overline{1_2} \subset b_2; \overline{2_2} \subset d_2; \overline{3_2} \subset q_2$.
4. $\overline{m_2} \supset 1_2, 2_2, 3_2$.

Так как $M_2 \notin m_2$, то $M \notin m$ и $M \notin \Phi$.

В курсе также рассматриваются следующие поверхности:

1. Циклическая поверхность с плоскостью параллелизма (Σ) линией центров (b) и образующей окружностью постоянного радиуса (m): $\Phi\{m(m, \Sigma, b)(m^i \subset \Sigma^i \parallel \Sigma; \zeta^{m^i} \subset b; R^{m^i} = R^m)\}$ (элементарный чертеж см. рис. 9.7).

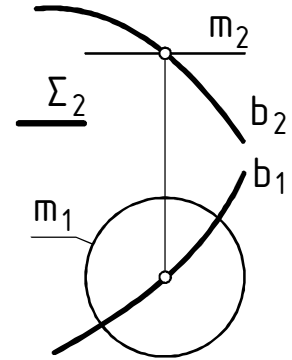


Рис. 9.7

2. Каналовая поверхность $\Phi\{m(a, b)(m^i \cap a, \zeta^{m^i} \subset b; m^i \subset \Sigma^i \perp b)\}$.

3. Трубчатая поверхность $\Phi\{m(b, R=\text{const})(\zeta^{m^i} \subset b, m^i \subset \Sigma^i \perp b, R^{m^i} = R)\}$, являющаяся частным случаем каналовой поверхности.

ЛЕКЦИЯ 10

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. ПРОЕКЦИРУЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

10.1. Образование поверхностей вращения

Поверхностью вращения будем называть поверхность, которая может быть получена при вращении какой-то образующей линии a вокруг неподвижной оси j : $\Phi\{a(a, j)(a^i = a \not\subset j)\}$ (рис. 10.1). Напомним, что вращение может обозначаться знаками Φ или \odot .

Все многообразие поверхностей вращения определяется различием форм образующей a (это может быть любая линия) и её положением относительно оси j .

При вращении образующей a вокруг оси j все точки линии a вращаются вокруг j по окружностям, называемым параллелями (кроме точек, в которых a и j пересекаются). Так, при вращении точки $K^i \subset a$ (рис. 10.1) образуется параллель q^i . Таким образом, любая поверхность вращения несёт на себе непрерывный каркас окружностей q^i (параллелей) и является циклической поверхностью. Плоскости параллелей перпендикулярны оси вращения. Поэтому на ПП, перпендикулярную

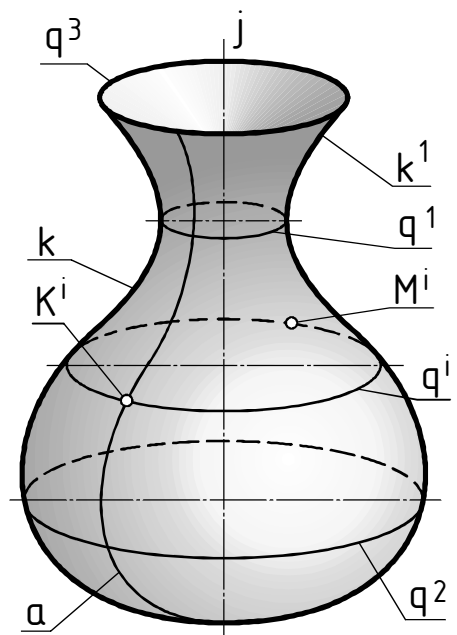


Рис. 10.1

оси, параллели проецируются в окружности, а на другую ПП - в отрезки прямых. В этой связи точку М на поверхности вращения Φ обычно строят с помощью параллелей (окружностей) q^i согласно ПА:

1. $\overline{q^i} \subset \Phi$.
2. $\overline{M} \subset q^i$.

Параллель наименьшего радиуса (рис. 10.1) называют горлом (q^1), а наибольшего - экватором (q^2). Параллель q^3 - граница или линия обреза отсека поверхности. Кривая линия, расположенная в плоскости, проходящей через ось вращения (на рис. 10.1 это контурные кривые k и k^1), называется меридианом поверхности. Меридиан, лежащий в плоскости, параллельной ПП, называют главным. При задании поверхностей вращения элементарным чертежом удобно, чтобы её образующая была главным меридианом.

10.2. Поверхность вращения общего вида

Поверхность вращения общего вида образуется при вращении вокруг оси произвольной кривой k . Формула поверхности: $\Phi\{k(k,j)(k^i=k\Phi j)\}$. На рис. 10.2 задан элементарный чертеж поверхности вращения общего вида, а на рис. 10.4 - основной чертеж отсека этой поверхности с границами m^1 и m^2 . На основном чертеже главные мериди-

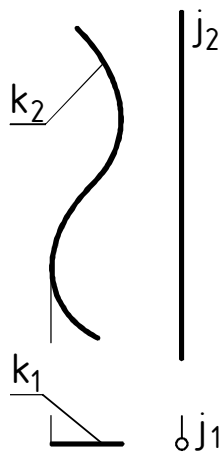


Рис. 10.2

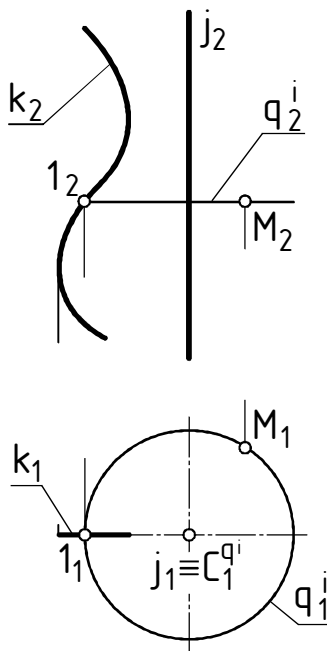


Рис. 10.3

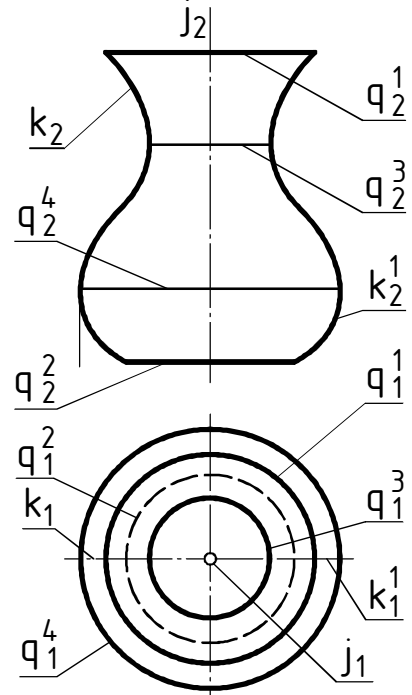


Рис. 10.4

аны k и k^1 являются линиями касания поверхности проецирующими лучами, перпендикулярными Π_2 , а горло q^3 и экватор q^4 - перпендикулярными Π_1 (проекции q_2^3 и q_2^4 обычно не показывают, так как относительно Π_2 линии q^3 и q^4 не являются контурными линиями).

На рис. 10.3 решается ОПЗ: определяют, принадлежит ли рассматриваемой поверхности точка $M(M_1, M_2)$. Для этого делалась попытка построить параллель q поверхности, на которой может располагаться точка M :

$$1. \overline{q_1} \supset M_1, \zeta_1^q \equiv j_1. \quad 2. \overline{l_1} = q_1 \cap k_1. \quad 3. \overline{l_2} \subset k_2. \quad 4. \overline{q_2} \supset l_2, q_2 \perp j_2.$$

$$\text{Вывод: } M_1 \subset q_1 \wedge M_2 \subset q_2 \Rightarrow M \subset q; M \subset q \wedge q \subset \Phi \Rightarrow M \subset \Phi.$$

10.3. Линейчатые поверхности вращения

Линейчатая поверхность вращения Φ образуется при вращении вокруг оси j прямой $t: \Phi \{t(t, j)(t^i = t \odot j)\}$. Если $t \parallel j$, то образуется цилиндрическая поверхность вращения, если $t \cap j$ - коническая поверхность вращения, если $t \dot{\cap} j$ - однополостный гиперболоид вращения. Уточняющие условия $t \parallel j$; $t \cap j$; $t \dot{\cap} j$ могут быть указаны в первой круглой скобке формулы.

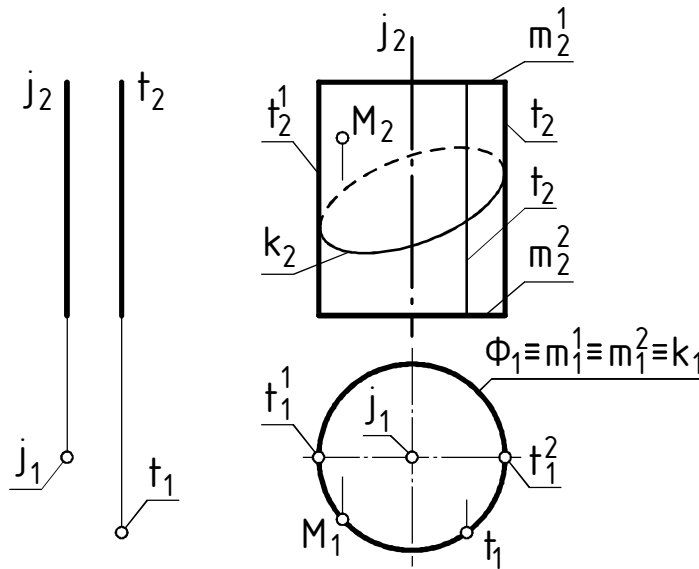


Рис. 10.5

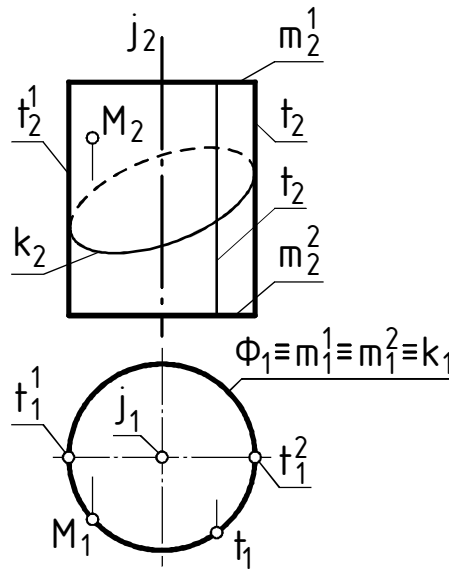


Рис. 10.6

На рис. 10.5 приведен элементарный чертеж цилиндрической поверхности вращения $\Phi\{t(t, j, t \parallel j)(t^i = t \odot j)\}$, на рис. 10.6 - основной чертеж отсека этой поверхности, ограниченного окружностями m^1 и m^2 (t^1 и t^2 - линии касания поверхности проецирующими лучами, перпендикулярными Π_2).

На рис. 10.7 элементарным чертежом задана коническая поверхность вращения $\Phi\{t(t, j, t \cap j)(t^i = t \odot j)\}$, а на рис. 10.8 решается ОПЗ, в которой определяется принадлежит ли заданная точка M конической поверхности. Для этого построены проекции окружности $m \subset \Phi$, на которой может располагаться точка M :

$$1. \overline{m_1} \supset M_1, m_1 \perp j_1.$$

$$3. \overline{l_2} = (l_1, l_2) \cap t_2.$$

$$2. \overline{l_1} = m_1 \cap t_1.$$

$$4. \overline{m_2} \supset l_2, \zeta_2^m \equiv j_2.$$

Так как $M_2 \notin m_2$, то $M \notin m$ и $M \notin \Phi$.

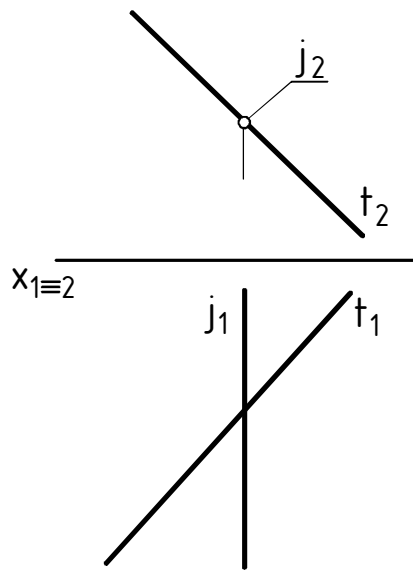


Рис.10.7

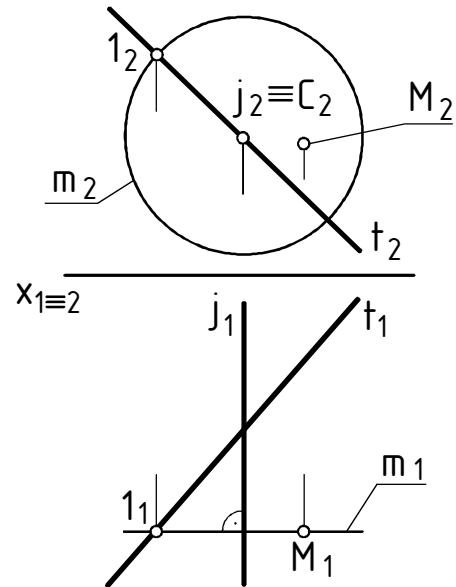


Рис. 10.8

На рис. 7.2 представлено наглядное изображение отсека конической поверхности вращения, а на рис. 10.9 построен основной чертеж этого отсека, ограниченного параллелями m^1 и m^2 , образованными вращением точек $A, B \in t$. Крайней контурной линией отсека относительно Π_2 является окружность m^1 , крайними контурными линиями относительно Π_1 - окружности m^1, m^2 и контурные образующие t^1, t^2 . Кроме того, на рис. 10.9 с помощью проекций m_1 и m_2 произвольной окружности $m \subset \Phi$ построены проекции произвольной точки M конической поверхности.

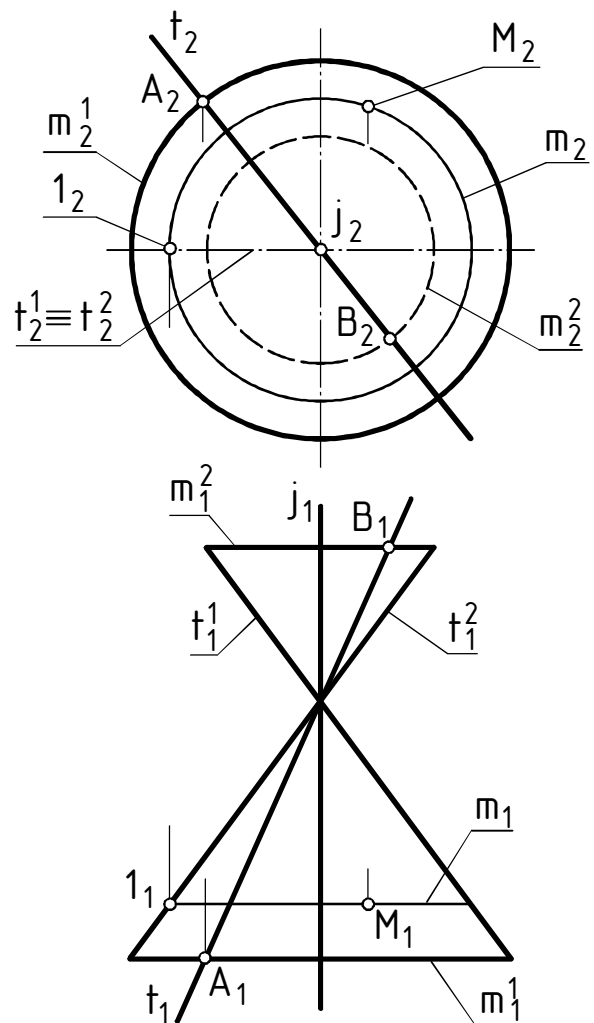


Рис. 10.9

На рис. 10.10 элементарным чертежом задан однополостный гиперболоид вращения $\Phi\{t(t, j; t \pm j)(t^i = t \neq j)\}$, а на рис. 10.11 построен основной чертеж отсека этой поверхности. Границами отсека являются параллели $m^1 \supset A$ и $m^2 \supset B$ (точки $A, B \in t$), а также кривые k^1 и k^2 , расположенные в плоскости $\Sigma \parallel \Pi_1$. Изначально на рис. 10.11 были заданы $t, j, A \in t, B \in t, \Sigma$.

Сначала на рис. 10.11 строился достаточно плотный каркас параллелей $m^i \subset \Phi$ согласно ГА:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $\overline{E_1^i} \subset t_1$. | 3. $\overline{m_1^i} \supset E_1^i; m_1^i \perp j_1$. |
| 2. $\overline{E_2^i} \subset t_2$. | 4. $\overline{m_2^i} \supset E_2^i; \subset m_2^i \equiv j_2$. |

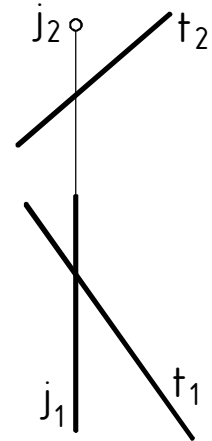


Рис. 10.10

При этом обязательно должны строиться проекции границ m^1 и m^2 , горла m^3 и параллелей m^4 и m^5 , касающихся плоскости Σ . В примере горло m^3 - это линия, образованная точками касания поверхности Φ проецирующими лучами s^i , перпендикулярными к Π_2 :

$$m^3 = \Phi \cup s^i \perp \Pi_2.$$

На 2-ом этапе строились проекции g_1^1 и g_1^2 ветвей гиперболы g , через точки которой проходят проецирующие относительно Π_1 прямые s , касающиеся отсека поверхности:

$$g = \Phi \cup s^i \perp \Pi_2.$$

Линии g_1^1 и g_1^2 были получены как линии, соединяющие соответственно левые и правые крайние точки проекций m_1^i параллелей m^i .

В заключение определяли проекции границ k^1 и k^2 отсека, являющихся ветвями гиперболы $k \subset \Sigma$. Так как $\Sigma \perp \Pi_2$, то проекции k_2^1 и k_2^2 известны: $k_2^1, k_2^2 \subset \Sigma_2$. Неизвестные проекции k_1^1 и k_1^2 приближенно проводили через проекции K_1^i точек $K^i = \Sigma \cap m^i$:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $\overline{K_2^i} = \Sigma_2 \cap m_2^i$. | 2. $\overline{K_1^i} \subset m_1^i$. |
|---|---------------------------------------|

Параллели m^4 и m^5 использовались для построения проекций вершин ветвей гиперболы k .

На рис. 10.12 дано наглядное изображение построенного отсека однополостного гиперболоида вращения.

Однополостный гиперболоид вращения можно получить также вращением гиперболы вокруг её мнимой оси. Эта поверхность

широко используется в инженерной практике: телевизионная башня известного ученого и инженера Шухова В.Г. на Шаболовке сооружена из каркасов однополостных гиперboloидов, такую форму имеют градирни (трубы) ТЭЦ и т. д.

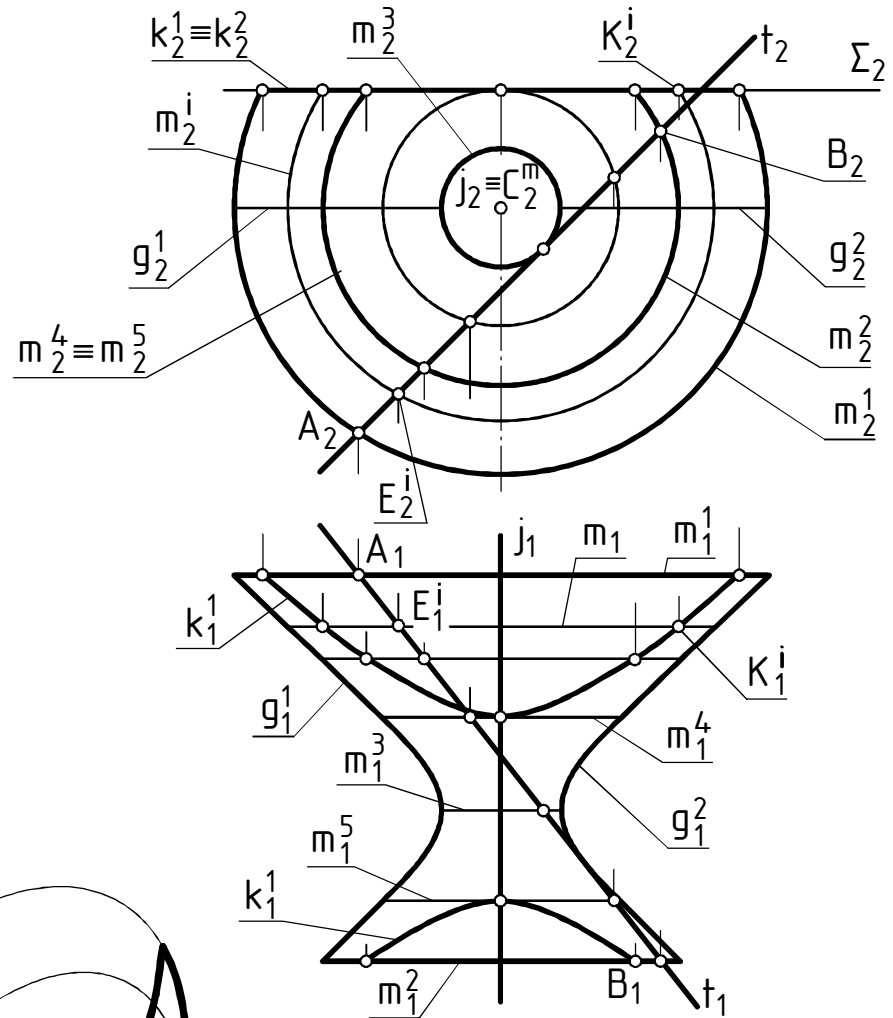


Рис. 10.11

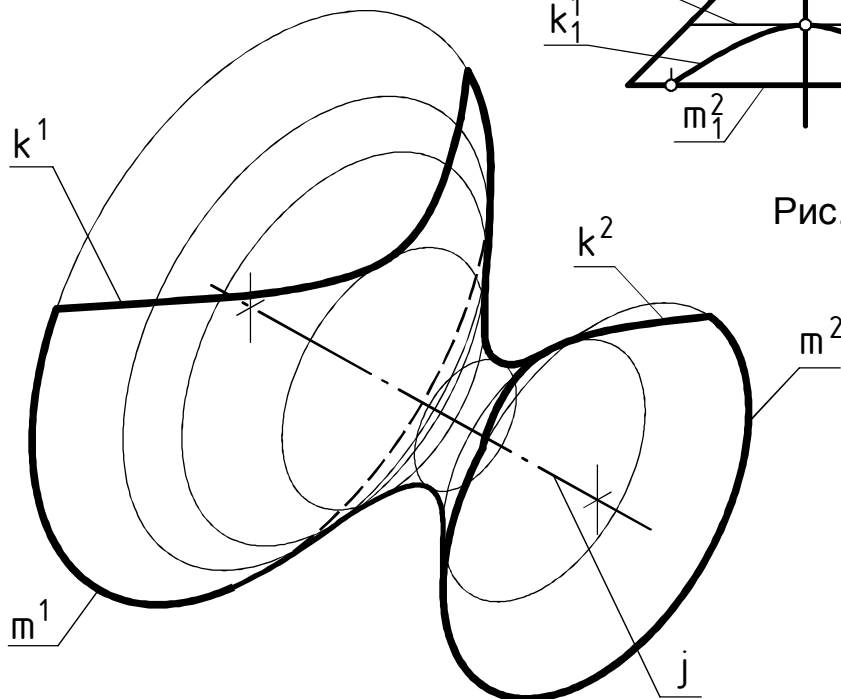


Рис. 10.12

10.4. Циклические поверхности вращения

Из циклических поверхностей вращения в курсе рассматриваются только торы. Тор - поверхность, которая может быть образована при вращении вокруг оси окружности m или её дуги, причем у тора ось вращения и образующая окружность расположены в одной плоскости.

В зависимости от взаимного положения образующей окружности m и оси j различают три вида тора:

1. Открытый тор или кольцо $\Phi\{m(m, j; m \nparallel j) (m = m \cap j)\}$ - окружность m и ось j не имеют общих точек.

2. Закрытый тор с одной конической точкой $\Phi\{m(m, j; m \cup j) (m = m \cap j)\}$ - окружность m и ось j касаются.

3. Пересекающийся тор или закрытый тор с двумя коническими точками $\Phi\{m(m, j; m \cap j) (m = m \cap j)\}$ - окружность m и ось j пересекаются.

Элементарные чертежи этих торов изображены соответственно на рис. 10.13 - рис. 10.15.

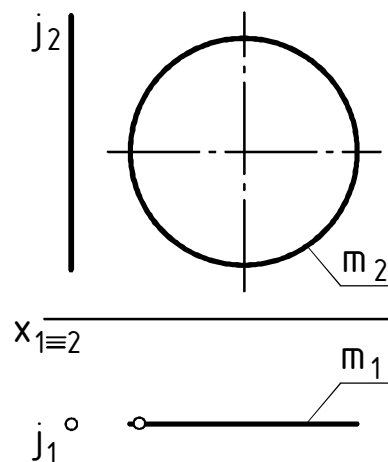


Рис. 10.13

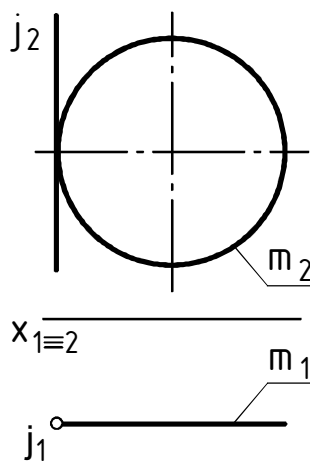


Рис. 10.14

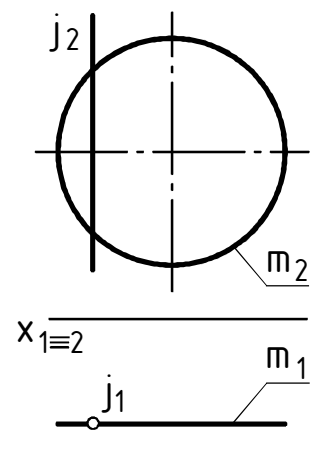


Рис. 10.15

На рис. 10.16 показан основной чертеж открытого тора. Очерк горизонтальной проекции тора составляют две окружности q_1^1 (проекция экватора) и q_1^2 (проекция горла), а фронтальной - отрезки q_2^3 и q_2^4 (проекции параллелей q^3 и q^4) и дуги окружностей m_2 и m_2^1 , в которые проецируются на Π_2 видимые относительно ПП дуги образующих m и m^1 .

На рис. 10.17 приведен основной чертеж пересекающегося тора Φ . Эта поверхность может быть условно разделена на две части - внешнюю и внутреннюю. Окружность (параллель) q на рис. 10.17 используется для построения проекций произвольной точки $M \in \Phi$.

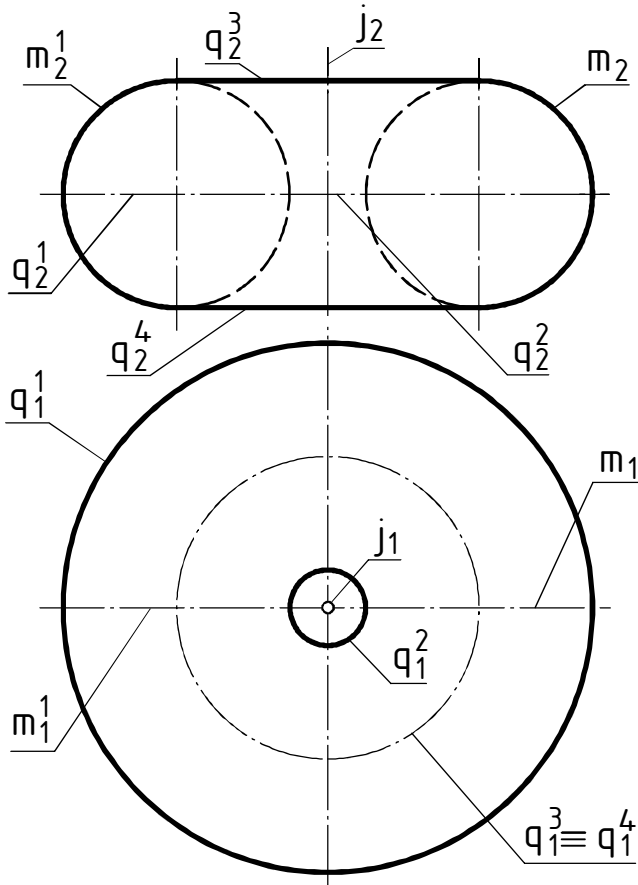


Рис. 10.16

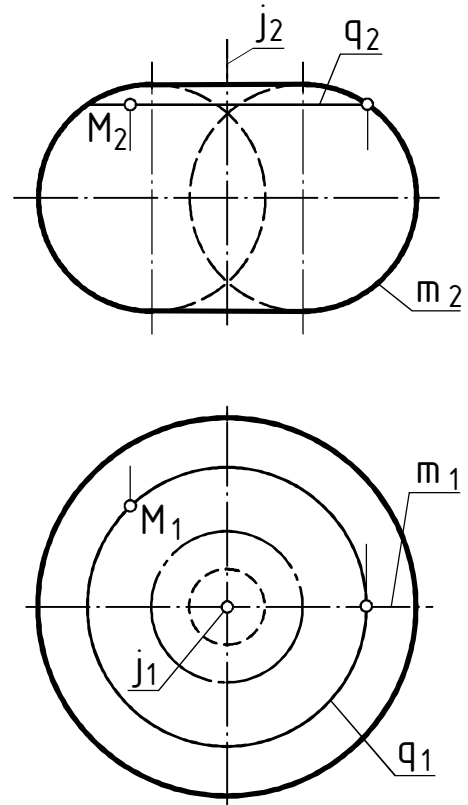


Рис. 10.17

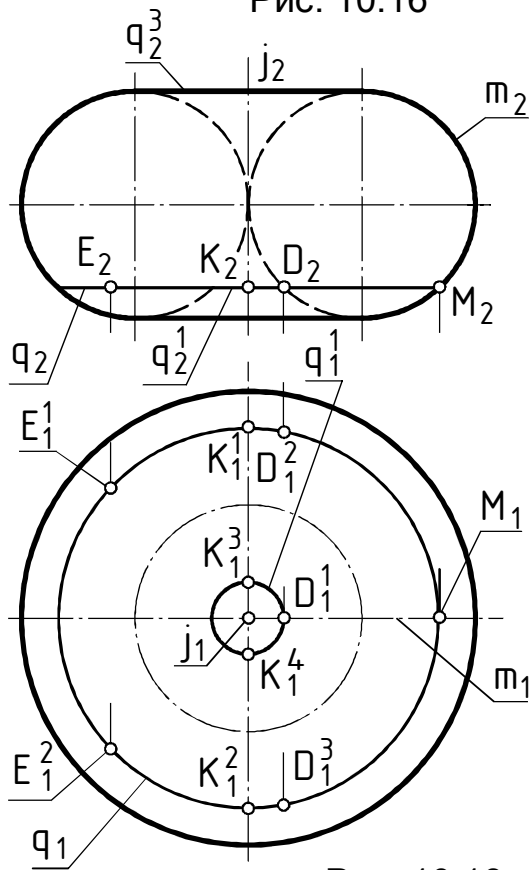


Рис. 10.18

На рис. 10.18 показано построение горизонтальных проекций точек M , E , D и K , принадлежащих закрытому тору, по заданным проекциям M_2 , E_2 , D_2 , K_2 . Точка M_1 ищется из условия $M \subset m \Rightarrow M_1 \subset m_1$. Точка E расположена на параллели q , образованной вращением точки M , и поэтому задача имеет два решения E_1^1 и E_1^2 . Точка D может принадлежать образующей m (D_1^1) или параллели q (D_1^2, D_1^3). И, наконец, точка K может лежать на параллели q (K_1^1, K_1^2) или параллели q^1 (K_1^3, K_1^4), образованной вращением точки $D^1 \subset m$. Таким образом, на торе одной проекцией может задаваться от одной до четырех точек.

Частным случаем пересекающегося тора, у которого центр ζ^m образующей окружности расположен на оси вращения, является сфера. Формула сферы может иметь вид: $\Phi\{m(m, j; \zeta^m \in j)(m^i = m \cap j)\}$. На рис. 10.19 и на рис. 10.20 показаны её соответственно элементарный и основной чертежи. На рис. 10.20 образующая m - главный меридиан, а g - экватор сферы.

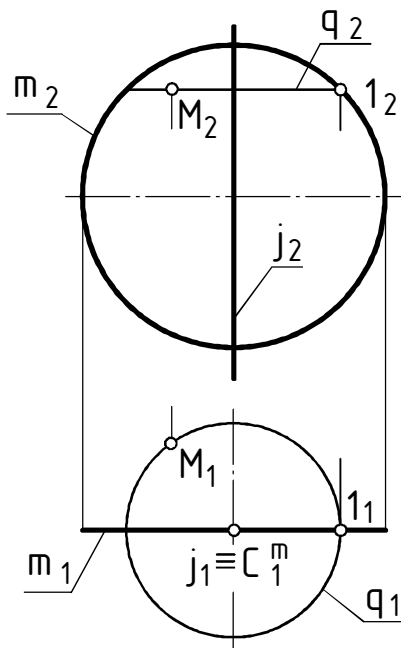


Рис. 10.19

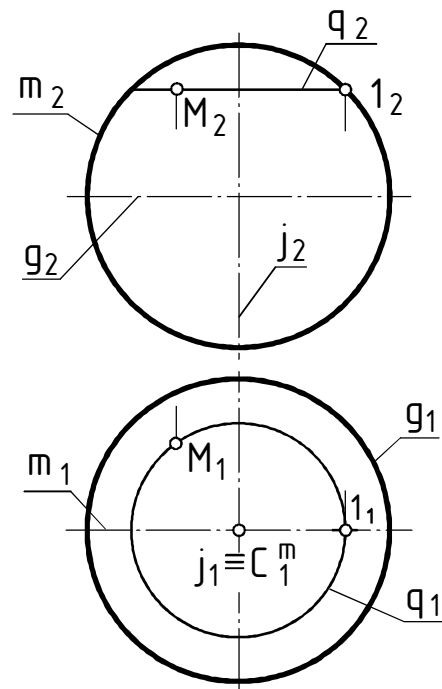


Рис. 10.20

На рис. 10.19 и рис. 10.20 показано построение проекций произвольной точки M , принадлежащей сфере Φ , для чего использовались проекции q_1 и q_2 произвольной параллели $q \subset \Phi$. Ещё раз отметим, что точки на поверхности вращения, не зависимо от того задана она элементарным или основным чертежом, строятся одинаково.

10.5. Проецирующие поверхности

Поверхность называется проецирующей относительно ПП, если она проецируется на эту ПП в линию, называемую основной проекцией поверхности. При ортогональном проецировании проецирующими могут быть только поверхности, несущие на себе каркас параллельных прямых: плоскость (см. лекцию 3), цилиндрическая и призматическая поверхности. Эти поверхности являются проецирующими на ПП, если их образующие перпендикулярны данной ПП. Основная проекция проецирующей поверхности

обладает “собирательным” свойством - в неё проецируются все точки и линии проецирующей поверхности.

На рис. 10.5 проецирующая цилиндрическая поверхность задана элементарным чертежом, а на рис. 10.6 - основным. Образующая поверхности $l \perp \Pi_1$, поэтому поверхность является проецирующей относительно Π_1 . Окружность Φ_1 - основная проекция рассматриваемой поверхности - в Φ на Π_1 проецируются все точки и линии поверхности: $M \in \Phi \Rightarrow M_1 \in \Phi_1$; $k, m^1, m^2 \in \Phi \Rightarrow k_1, m_1^1, m_1^2 \in (\equiv) \Phi_1$.

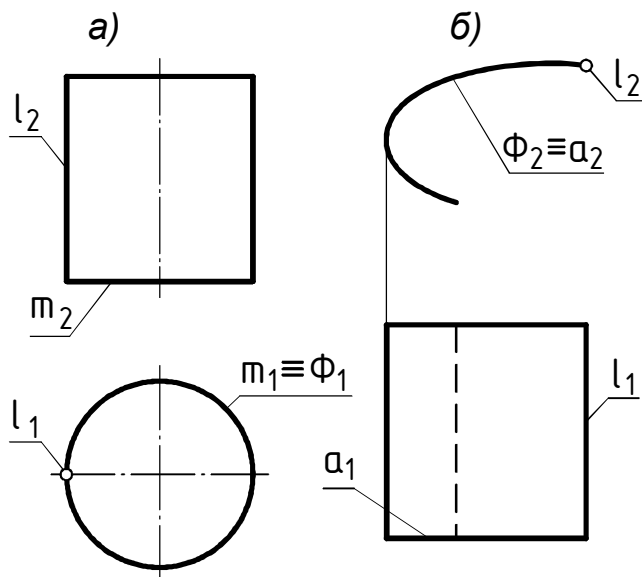


Рис. 10.21

На рис. 10.5 и 10.6 проецирующая цилиндрическая поверхность представлена как поверхность вращения, что не является обязательным. Так, на рис. 10.21, а та же поверхность рассматривается как чисто линейчатая поверхность $F\{l(m,l)(l^i \cap m, l^i \parallel l)\}$, а на рис. 10.21, б изображена проецирующая цилиндрическая поверхность $F\{l(a,l)(l^i \cap a, l^i \parallel l)\}$, направляющая a которой есть произвольная кривая.

На рис. 10.22 изображена проецирующая на Π_2 призматическая поверхность $\Psi\{t(t,a)(t^i \parallel t; t^i \cap a)\}$, $a[A,B,D,A]$, так как $t \perp \Pi_2$. На Π_2 все точки и линии этой поверхности проецируются в её основную проекцию треугольник Ψ_2 : $M, a, g \in \Psi \Rightarrow M_2, a_2, g_2 \in (\equiv) \Psi_2$.

Заметим, что для задания проецирующих цилиндрической и призматической поверхностей достаточно было задать только их основные проекции.

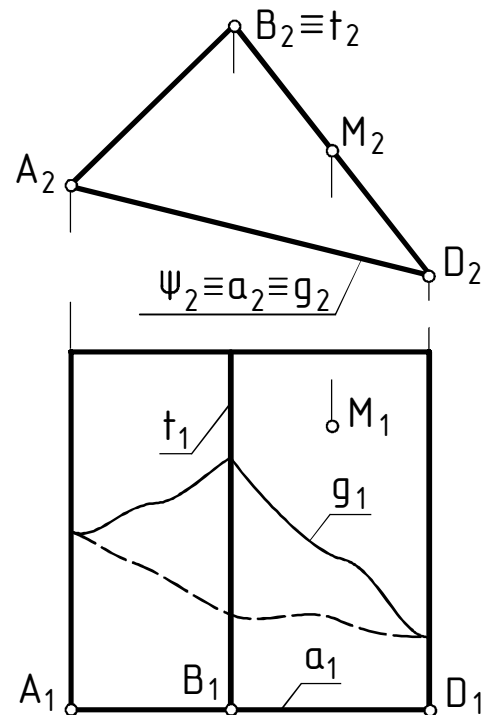


Рис. 10.22

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии : учеб. для втузов.-3-е изд., испр.-М.: Высш.шк., 1999.-136с.
2. Кузнецов, Н.С. Начертательная геометрия : учеб. для втузов.-2-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк., 1981.-262с.
3. Нартова, Л.Г. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Л.Г. Нартова, В.И.Якунин.-М.: Дрофа, 2003.-208с.
4. Фролов, С.А. Начертательная геометрия : учеб. для втузов.-2-е изд., перераб. и доп.-М.: Машиностроение., 1983.-240с.
5. Оганесов, О.А. Курс лекций по начертательной геометрии : учебное пособие для студентов механических специальностей / МАДИ(ГТУ). Часть 1. -М., 2002.-101с.
6. Оганесов, О.А. Курс лекций по начертательной геометрии : учебное пособие для студентов механических специальностей / МАДИ(ГТУ). Часть 2. -М., 2002.-79с.
7. Оганесов, О.А. Пересечение поверхностей. Методическое пособие к выполнению расчетно-графической работы для студентов механических специальностей / МАДИ / О.А.Оганесов, Н.Н.Кузенева / -М., 2002. -79с.
8. Оганесов, О.А. Инженерная графика. Справочные материалы : учебное пособие. Часть 1 / О.А.Оганесов, Н.Н.Кузенева / МАДИ; -М., 2006. -94с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятая система сокращений и обозначений. Используемые типы линий.....	3
Лекция 1. Комплексный чертеж точки	6
Лекция 2. Линия на комплексном чертеже	15
Лекция 3. Плоскость	24
Лекция 4. Основные метрические задачи. Главные позиционные задачи для прямой и плоскости	32
Лекция 5. Комплексные позиционно-метрические задачи	41
Лекция 6. Преобразование комплексного чертежа вращением оригинала вокруг оси.....	51
Лекция 7. Поверхности	60
Лекция 8. Линейчатые поверхности	67
Лекция 9. Винтовые и циклические поверхности.....	78
Лекция 10. Поверхности вращения. Проецирующие поверхности	84
Список рекомендуемой литературы	94

Учебное издание

Олег Авакович ОГАНЕСОВ, Павел Ростиславович ДОБРОГАЕВ,
Наталья Николаевна КУЗЕНЕВА

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
Учебное пособие для студентов механических специальностей
Часть 1

Редактор Ю.К.Фетисова

Тем. план 2011г., п. 22

Подписано в печать

Печать офсетная.

Тираж 1500 экз.

Усл.печ.л. 6,0

Заказ

Формат 60x84/16

Уч.-изд.л. 5,0

Цена 60 р.

Ротапринт МАДИ. 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64