

Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет

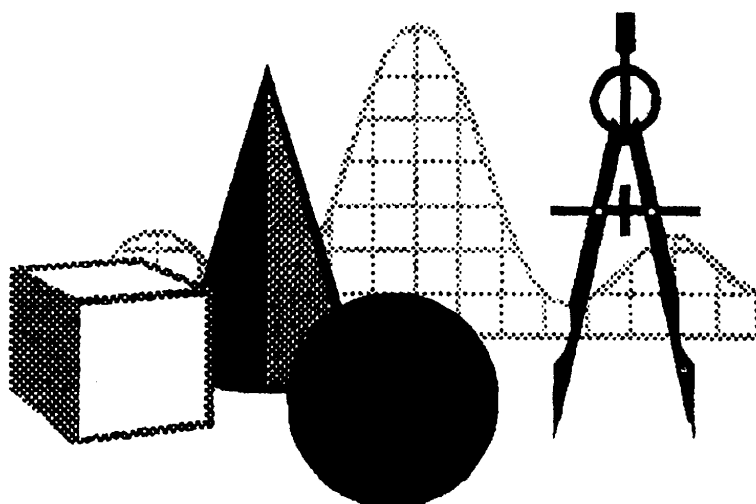
515(07)  
Д817

В.С. Дукмасова, В.А. Краснов

# **МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебное пособие

Издание шестое



Челябинск  
2006

Министерство образования Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Южно-Уральский государственный университет

Кафедра графики

515(07)  
Д817

В.С. Дукмасова, В.А. Краснов

# **МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**Учебное пособие**

Издание шестое

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2006

УДК 515(075.8)

Дукмасова В.С., Краснов В.А. Методика решения задач по начертательной геометрии: Учебное пособие/ 6-е изд. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. – 103 с.

В пособии дается классификация задач по начертательной геометрии, рассматриваются общие схемы решения каждой группы задач и излагаются принципы составления алгоритмов решения конкретных задач на основании общих схем.

Ил. 87, табл. 3, список лит. – 9 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты:

Н.К. Окунева доц., к.п.н. ЧГПУ; И.Г. Торбеев, доц., к.т.н., ЧГАУ.

ISBN 5-696-02614-1

Издательство ЮУрГУ, 2006.

## СИМВОЛИКА И ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Геометрические фигуры:

$\Phi$  (фи – прописная буква греческого алфавита) – геометрическая фигура  
 $A, B, C, \dots$  или  $1, 2, 3, \dots$  (прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры) – точки пространства.

$a, b, c, \dots$  (строчные буквы латинского алфавита) – прямые или кривые линии пространства.

$(AB)$  – прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ .

$[AB)$  – луч с началом в точке  $A$ .

$[AB]$  – отрезок прямой, ограниченный точками  $A$  и  $B$ .

$|AB|$  – длина отрезка  $[AB]$ , расстояние от точки  $A$  до точки  $B$ .

$|A, a|$  – расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$ .

$|A, \Gamma|$  – расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Gamma$ .

$\Gamma$  (гамма),  $\Delta$  (дельта),  $\Lambda$  (лямбда),  $\Sigma$  (сигма),  $\Psi$  (пси) и другие прописные буквы греческого алфавита – поверхности.

$\angle ABC$  или  $\alpha, \beta, \gamma$  (строчные буквы греческого алфавита) – углы.

$ABC$  – величина угла в градусах.

$\Pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций,

$\Pi_2$  – фронтальная плоскость проекций,

$\Pi_3$  – профильная плоскость проекций,

$\Pi_4, \Pi_5, \dots$  – остальные плоскости проекций.

$A_1, A_2, A_3$  – проекции точки  $A$  (горизонтальная, фронтальная, профильная).

$l_1, l_2, l_3$  – проекции линии  $l$  (горизонтальная, фронтальная, профильная).

$\Gamma_1(A_1, B_1, C_1), \Gamma_2(A_2, B_2, C_2), \Gamma_3(A_3, B_3, C_3)$  проекции плоскости  $\Gamma(ABC)$ , проходящей через точки  $A, B$  и  $C$  (горизонтальная, фронтальная, профильная).

$A^\infty$  – бесконечно удаленная точка,

$a^\infty$  – бесконечно удаленная прямая,

$\Gamma^\infty$  – бесконечно удаленная плоскость.

### Отношения между геометрическими фигурами:

$//$  – параллельность двух геометрических фигур,

$\perp$  – перпендикулярность,

$\_$  – скрещивающиеся прямые,

$\cap$  – пересечение геометрических фигур (множеств),

$=$  – равны, совпадают или результат пересечения геометрических фигур,

$\cong$  – конгруэнтность.

### Геометрические преобразования:

$\rightarrow$  – отображается.

Множества, операции над ними и отношения между множествами

$A, B, C, \dots$  – множества.

$\emptyset$  – пустое множество.

$a, b, c, \dots$  – элементы множества.

$\{\dots\}$  – состоит из, например:  $M = \{a, b, c\}$  –  $M$  есть множество, состоящее из элементов  $a, b, c$  (и только из них).  $M = \{a: P(a)\}$  – множество, состоящее из таких  $a$ , которые обладают свойством  $P$ , например:  $M = \{N: (ON \neq R)\}$  –  $M$  есть множество таких точек  $N$ , расстояние которых до точки  $O$  равно  $R$  (окружность на плоскости или сфера в пространстве).

$\varepsilon$  или  $\in$  – принадлежность, например:

а)  $A \in l$  – точка  $A$  принадлежит прямой  $l$ ,

б)  $b \varepsilon M$  – прямая  $b$  проходит через точку  $M$  или прямая  $b$  содержит точку  $M$ ,

$\notin$  – не принадлежит.

$\supset$  или  $\subset$  – включение (являются частью, подмножеством, содержится в..., включает, содержит в себе). Например:

а)  $a \subset \Gamma$  – прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\Gamma$  (понимается в смысле: множество точек прямой  $a$  есть подмножество множества всех точек плоскости  $\Gamma$ ),

б)  $\Gamma \supset a$  – плоскость  $\Gamma$  проходит через прямую  $a$  или плоскость  $\Gamma$  содержит в себе прямую  $a$ .

$\cup$  – объединение множеств, например,  $ABCD = [AB] [BC] [CD]$  – ломаная линия есть объединение отрезков.

$\cap$  – пересечение множеств, например:

а)  $b = \Delta \cap \Gamma$  прямая  $b$  есть пересечение  $\Delta$  и  $\Gamma$ .

б)  $l \cap m = \emptyset$  – пересечением прямых является пустое множество, т. е. прямые параллельны или скрещиваются.

### Логические операции

$\wedge$  – соответствует союзу "и".

$\vee$  – соответствует союзу "или".

$\Rightarrow$  – логическое следование, означает "если..., то"

$\Leftrightarrow$  – в том и только в том случае, если... .

## ВВЕДЕНИЕ

В курсе начертательной геометрии можно выделить три основных класса задач: позиционные, метрические и комбинированные. Задачи каждого класса имеют свои особенности и соответствующие им приемы решения.

Позиционными называются задачи, в которых определяется относительное положение или общие элементы геометрических фигур. Задачи, связанные с измерением расстояний и угловых величин, называются метрическими. К классу комбинированных относятся задачи, рассматривающие совместно в различных сочетаниях позиционные и метрические свойства геометрических фигур. В каждом классе, в свою очередь, можно выделить особую группу задач, в которых на искомое наложено два или более условий. Эти задачи называются комплексными.

Любую задачу, независимо от ее принадлежности к тому или иному классу, нужно сначала решить в пространстве – уяснить содержание и последовательность тех пространственных операций, при помощи которых определяются искомые элементы. В некоторых случаях для этого можно использовать модели или наглядные изображения. Алгоритм решения задачи в пространстве необходимо символически записать, пользуясь примерами, данными в пособии. Только после этого можно переходить к графической реализации алгоритма – решению задачи на комплексном чертеже. Для этого необходимо уметь выполнять на комплексном чертеже построения, основанные на определенных теоретических положениях курса. Они перечислены в §1 и названы элементарными задачами.

При решении задач надо иметь в виду, что начертательная геометрия оперирует не с самими геометрическими фигурами, а с их проекциями, и требование условия «построить», «определить», «найти» и т.п. означает, что нужно построить проекции (не менее двух) искомого геометрического фигур. Геометрическая фигура — любое множество точек.

## § 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ

### Задачи на принадлежность

Линия принадлежит поверхности, если все точки линии принадлежат поверхности.

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности.

Если две точки прямой линии принадлежат плоскости, то к все точки этой прямой принадлежат данной плоскости. Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат соответствующим проекциям линии и одной и той же линии связи.

1. Построить точку, принадлежащую данной прямой (рис. 1).

На рис. 1, а дано исходное условие задачи — прямая  $l$  общего положения. На рис. 1, б построена точка  $A \in l$ .

2. Построить вторую проекцию точки, принадлежащей прямой, если одна проекция точки задана.

На рис. 1, в дано исходное условие задачи — горизонталь  $h$  и фронтальная проекция  $B_2$  принадлежащей ей точки  $B$ . На рис. 1, г задача решена.

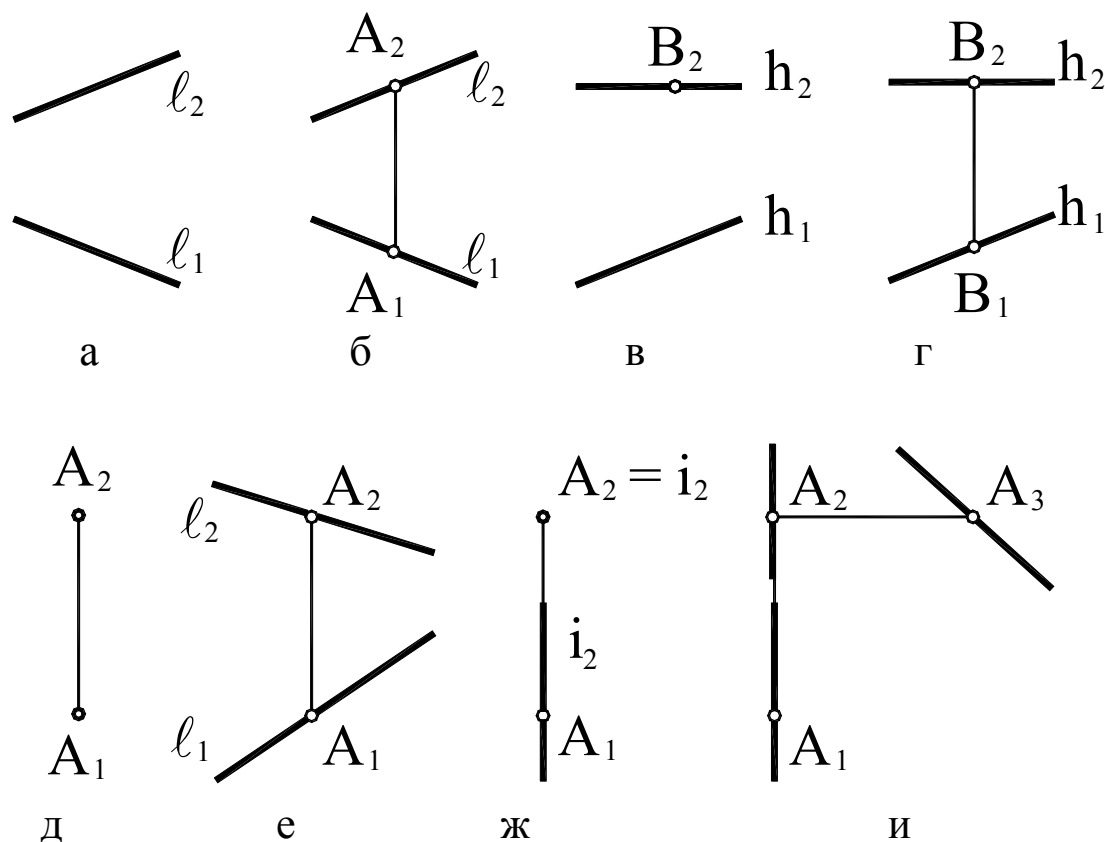


Рис. 1

3. Через данную точку провести прямую общего или частного положения.

На рис. 1, д дано исходное условие задачи — точка  $A$ . На рис. 1, е, ж, и через точку  $A$  проведены соответственно прямая  $l \in A$  общего положения, фронтально проецирующая прямая  $i \in A$ , профильная прямая  $p \in A$ .

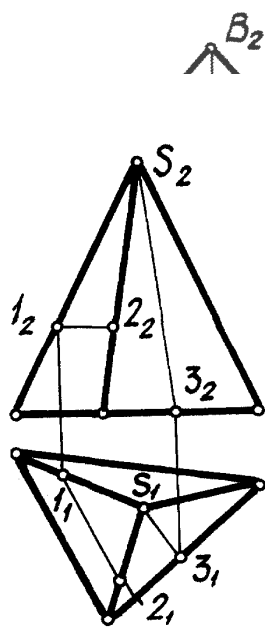
4. Построить линию, принадлежащую данной поверхности (рис. 2, 3):

1) Плоскости.

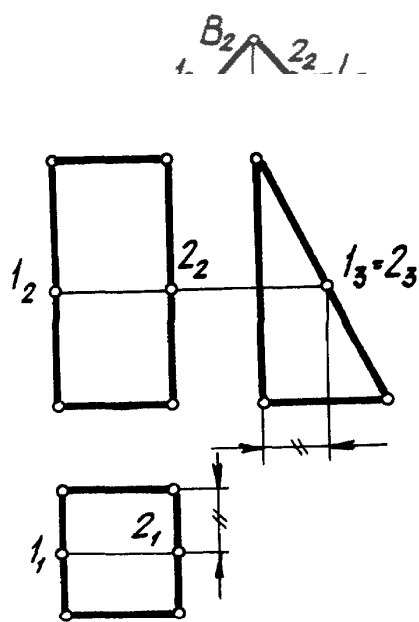
На рис. 2, а дано исходное условие задачи — плоскость  $\Gamma(ABC)$  общего положения. На рис. 2, б построены принадлежащие ей прямые  $l$  и  $m$  общего положения, каждая из которых определена двумя точками —  $l(1 - 2) \subset \Gamma$ ,  $m(3 - C) \subset \Gamma$ . На рис. 2, в построены принадлежащие плоскости  $\Gamma(ABC)$  горизонталь  $h(1 - C) \subset \Gamma$ , фронталь  $f(2 - C) \subset \Gamma$ , профильная прямая  $p(3 - 4) \subset \Gamma$ . На рис. 2, г, д, в построены прямые общего положения, принадлежащие соответственно фронтально, горизонтально и профильно проецирующим плоскостям —  $l \subset \Sigma$ ,  $m \subset \Delta$ ,  $n \subset \Theta$ .

2) Многогранной поверхности.

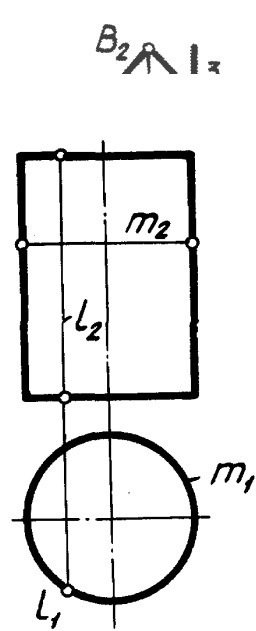
На рис. 3, а построены прямолинейные отрезки  $[1 - 2]$  и  $[5 - 3]$ , принадлежащие поверхности пирамиды, на рис. 3, б —  $[1 - 2]$ , принадлежащий поверхности призмы.



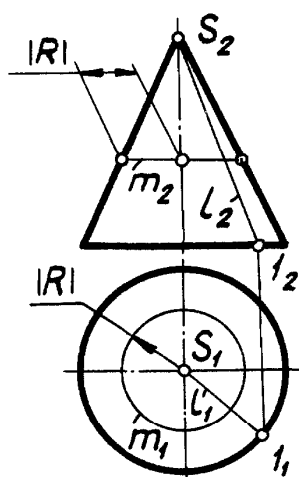
*a*



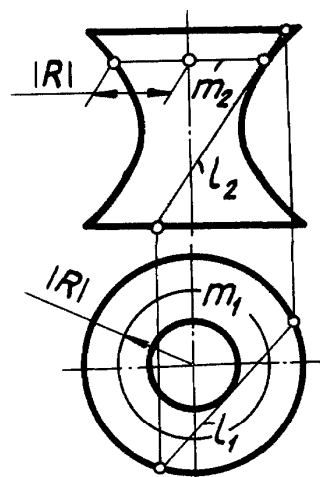
*б*



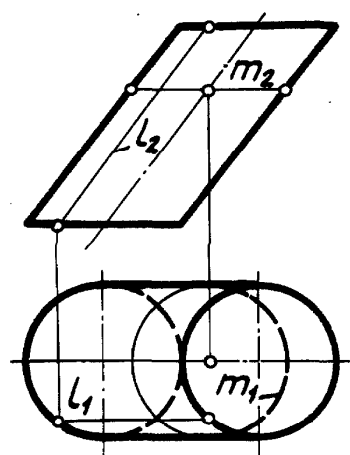
*в*



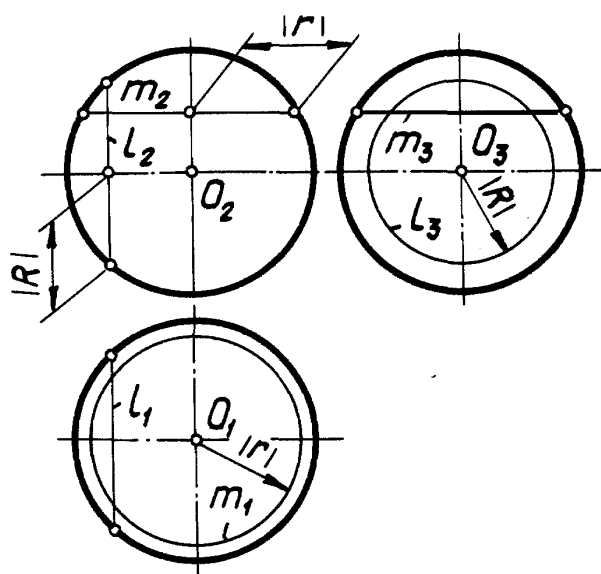
*г*



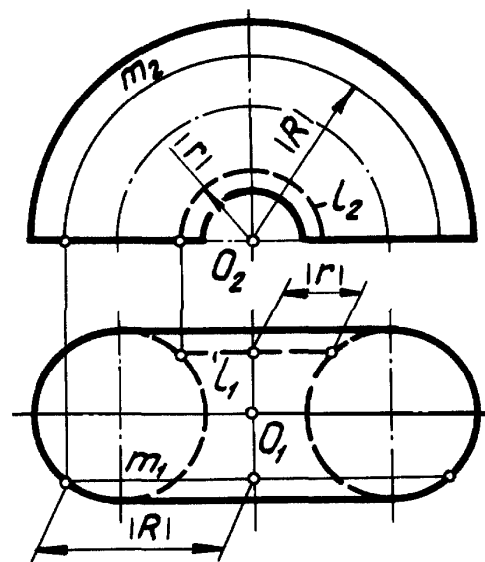
*д*



*е*



*ж*



*и*

дели  
пря-  
хно-



сти эллиптического цилиндра с круговым основанием, на рис. 3, ж, и построены параллели  $m$  и  $l$ , принадлежащие нелинейчатым поверхностям вращения.

5. Построить вторую проекцию линии, принадлежащей данной поверхности, если одна проекция линии задана (рис. 2, 4):

1) П л о с к о с т и.

На рис. 2, ж дано исходное условие задачи — плоскость  $\Gamma(a/b)$  и горизонтальная проекция  $[A_1B_1]$  принадлежащего ей отрезка  $[AB]$ . На рис. 2, м показано ее решение. На рис. 2, к дано исходное условие — горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$  и фронтальная проекция  $l_2$  принадлежащей ей прямой  $l$ . На рис. 2, л задача решена.

2) М н о г о г р а н н о й п о в е р х н о с т и.

На рис. 4, а дано исходное условие задачи — фронтальная проекция  $l_2$  линии  $l$ , принадлежащей поверхности призмы. На рис. 4, б задача решена.

3) К р и в о й п о в е р х н о с т и.

На рис. 48, в, д, ж дана одна из проекций линии, принадлежащей соответственно поверхностям конуса, сферы, тора. На рис. 4, г, е, и показано решение задачи.

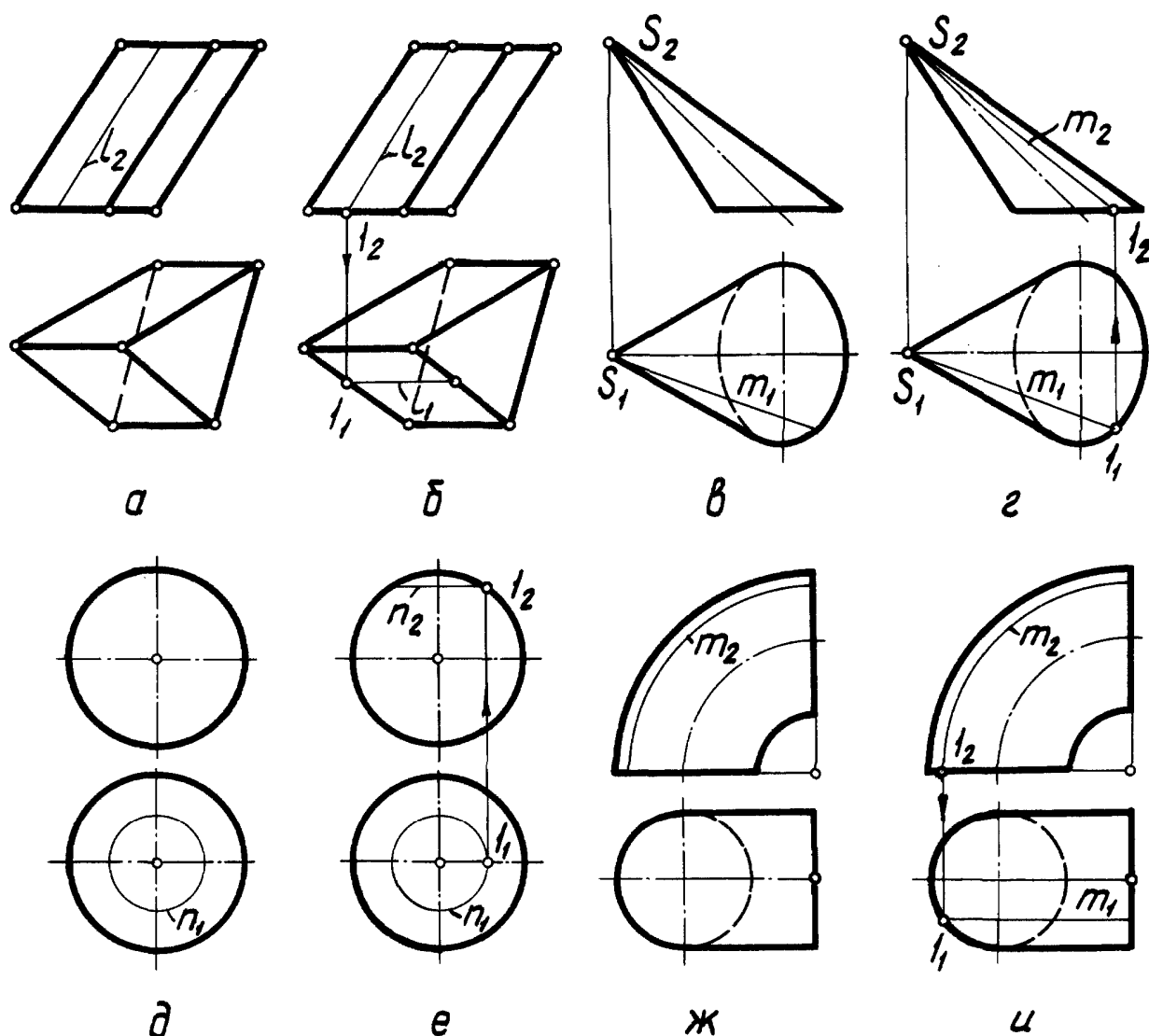


Рис. 4

6. Через данную прямую провести плоскость общего или частного положения (рис. 5).

На рис. 5, а дано исходное условие задачи — прямая  $a$ . На рис. 5, б, в, г, д соответственно проведены плоскость общего положения  $\Gamma(a \cap b) \supset a$ , фронтально проецирующая плоскость  $\Delta \supset a$ , горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma \supset a$ , профильно проецирующая плоскость  $\Theta \supset a$ .

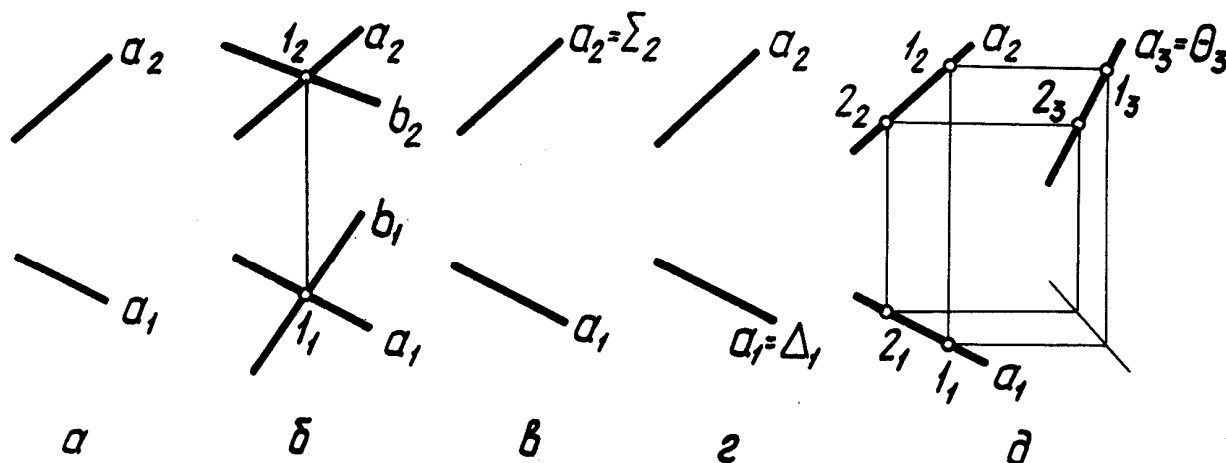


Рис. 5

7. Построить точку, принадлежащую поверхности (рис. 6):

1) П л о с к о с т и.

На рис. 6, а, б построены точки, принадлежащие соответственно плоскости общего положения и фронтально проецирующей плоскости.

2) М н о г о г р а н н о й п о в е р х н о с т и.

На рис. 6, в построена точка М, принадлежащая поверхности пирамиды SABC.

3) К р и в о й п о в е р х н о с т и.

Точки, принадлежащие поверхностям конуса, прямого геликоида, наклонного геликоида, гиперболического параболоида, построены соответственно на рис. 6, г, д, е, ж.

Примечание: Любая линия представляет собой множество точек, поэтому построение произвольной. линии, принадлежащей поверхности, основано на многократном решении рассмотренной элементарной задачи № 7. Для примера на рис. 6, и, к показано построение произвольных линий, принадлежащих соответственно поверхностям сферы и конуса.

8. Построить вторую проекцию точки, принадлежащей данной поверхности, если одна ее проекция задана (рис. 7):

1) П л о с к о с т и.

На рис. 7, а, б даны соответственно исходное условие и построение точки А, принадлежащей плоскости  $\Gamma(l \cap m)$  общего положения.

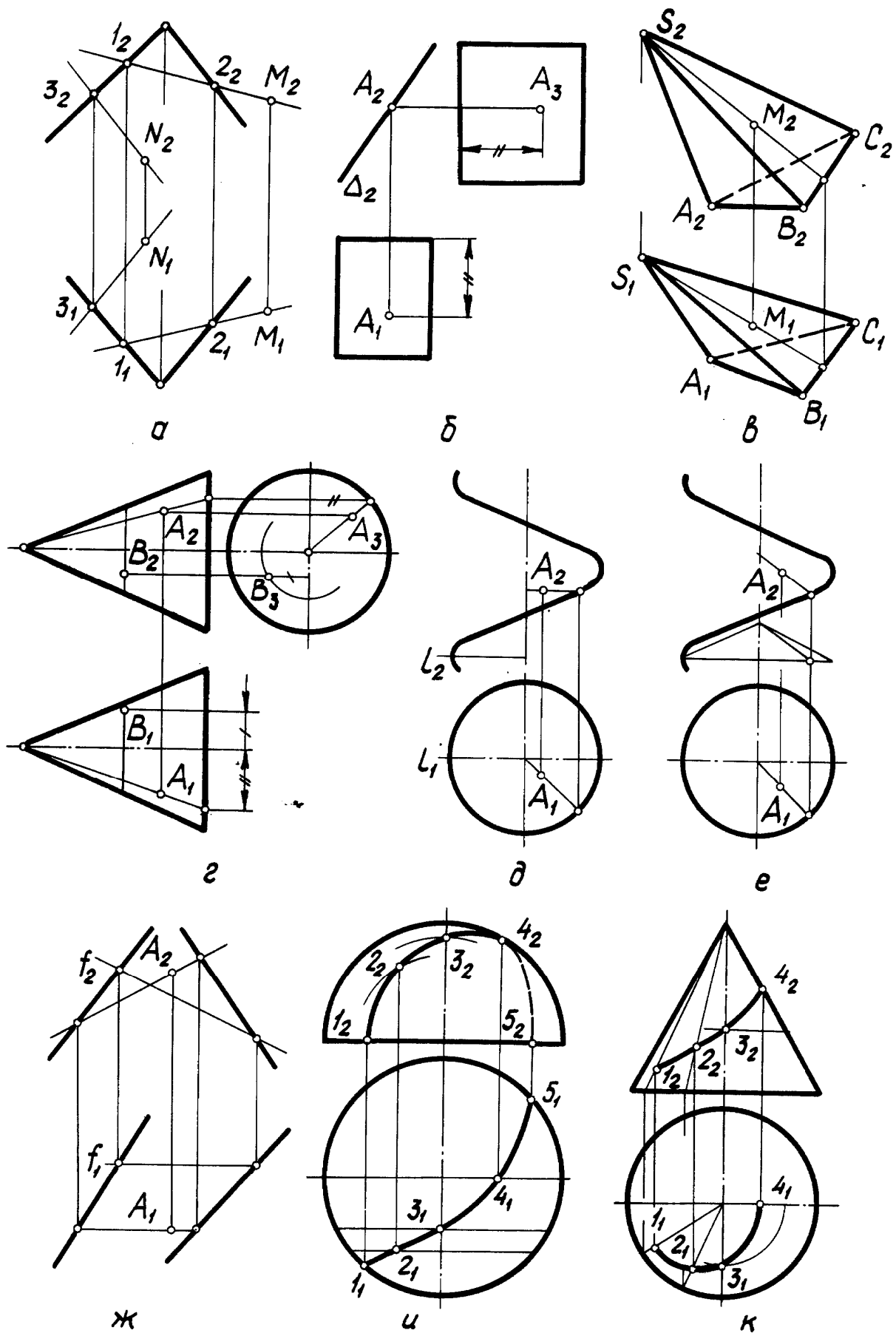


Рис. 6

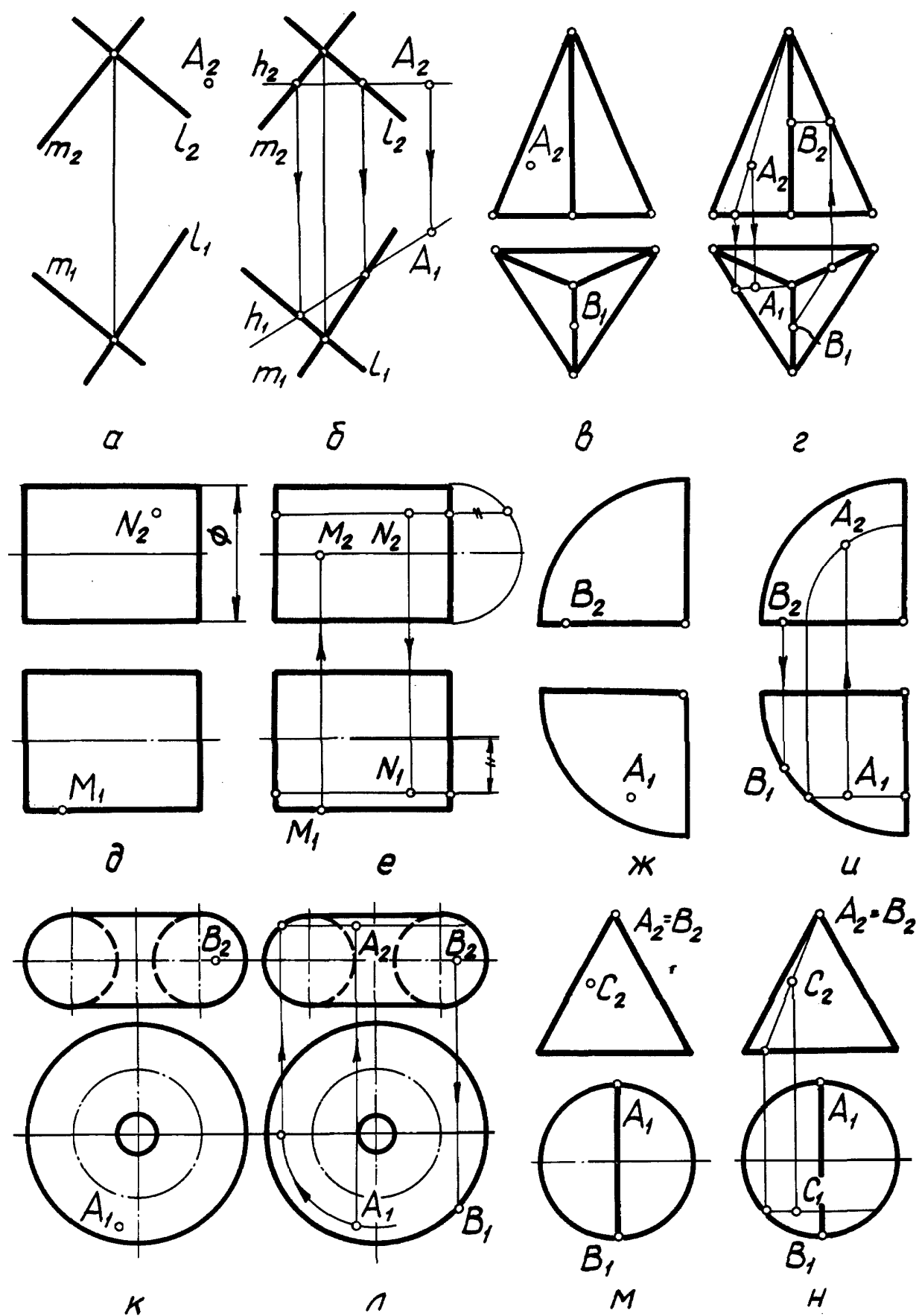


Рис. 7

## 2) Многогранной поверхности.

На рис. 7, в, г даны соответственно исходное условие и построение точек А и В, принадлежащих поверхности пирамиды.

## 3) Кривой поверхности.

На рис. 7, д, в даны соответственно исходное условие и построение точек М и N, принадлежащих поверхности цилиндра вращения, на рис. 7, ж, и — исходное условие и построение точек А и В, принадлежащих поверхности сферы, на рис. 7, к, л — исходное условие и построение точек А и В, принадлежащих поверхности тора, на рис. 7, м, н — исходное условие и построение точки С, принадлежащей поверхности коноида с плоскостью параллелизма  $\Pi_2$ .

### Задачи на относительное положение геометрических фигур

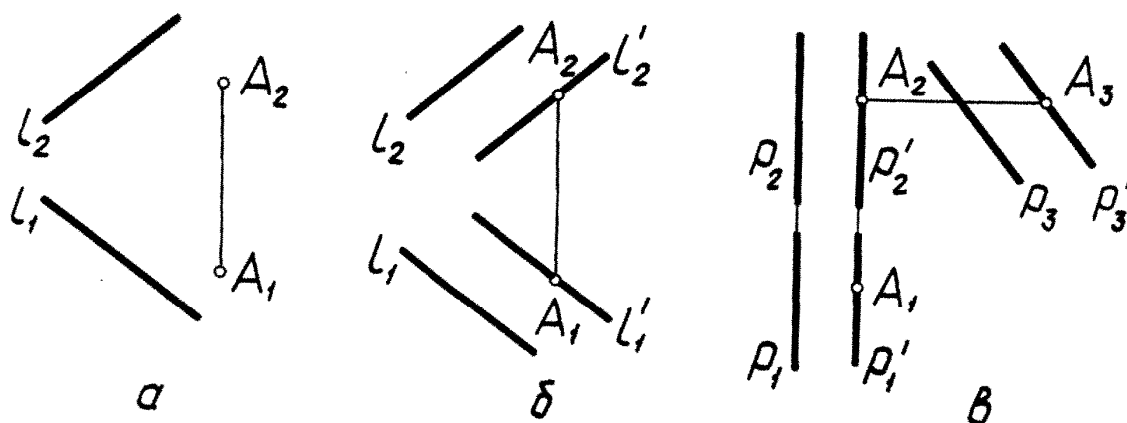


Рис. 8

#### а) Параллельность.

Если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны. Для прямых общего положения справедливо и обратное утверждение: если одноименные проекции прямых параллельны, то данные прямые параллельны. Линии уровня параллельны, если их проекции на параллельную им плоскость проекций параллельны.

Построение чертежей взаимно параллельных прямой и плоскости и двух параллельных плоскостей основано на теоремах стереометрии: если прямая параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то данные прямая и плоскость параллельны; если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

9. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой (рис. 8).

На рис. 8, а дано исходное условие задачи —  $A(A_1A_2)$  и  $l(l_1l_2)$ , а на рис. 8, б проведена прямая  $l'(A_1 \in l'_1 // l_1 \wedge A_2 \in l' // l_2)$  через точку  $A$  параллельно прямой  $l$ . На рис. 8, в через точку  $A$  проведена прямая  $p'(A_1 \in p'_1 // p_1 \wedge A_2 \in p' // p_2)$  параллельная заданной профильной прямой  $p$ .

10. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости (рис. 9).

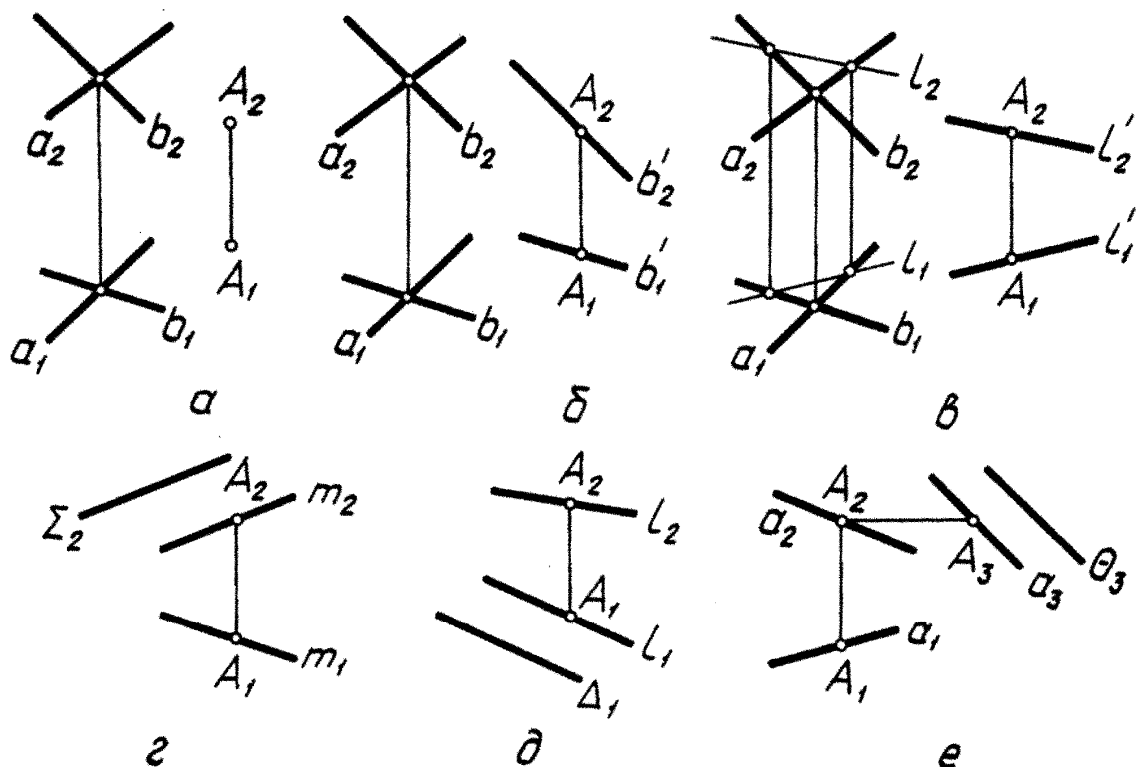


Рис. 9

На рис. 9, а дано исходное условие — плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  и точка  $A$ ; на рис. 9, б — решение задачи  $A \in b' // \Gamma$ , так как  $A_1 \in b'_1 // b_1 \wedge A_2 \in b'_2 // b_2$ , на рис. 9, л дано второе решение —  $A \in l' // \Gamma$ ,  $A \in n \perp h$  так как  $A_1 \in l'_1 // l_1 \wedge A_2 \in l'_2 // l_2$ . На рис. 9, г, д, е через заданную точку  $A$  проведены прямые, параллельные заданным проецирующим плоскостям.

11. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой. Решение задач 10 и 11 выполняется на основании одной и той же теоремы стереометрии.

12. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости (рис. 10). На рис. 10, е дано исходное условие задачи — плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  и точка  $A$ . На рис. 10, б задача решена —  $A \in \Gamma'(a \cap b) // \Gamma$ , так как  $a' // a \wedge b' // b$ . На рис. 10, в дано другое решение — новая плоскость задана горизонталью и фронталью. На рис. 10, г, д, е через заданную точку  $A$  проведены плоскости, параллельные заданным проецирующим плоскостям.

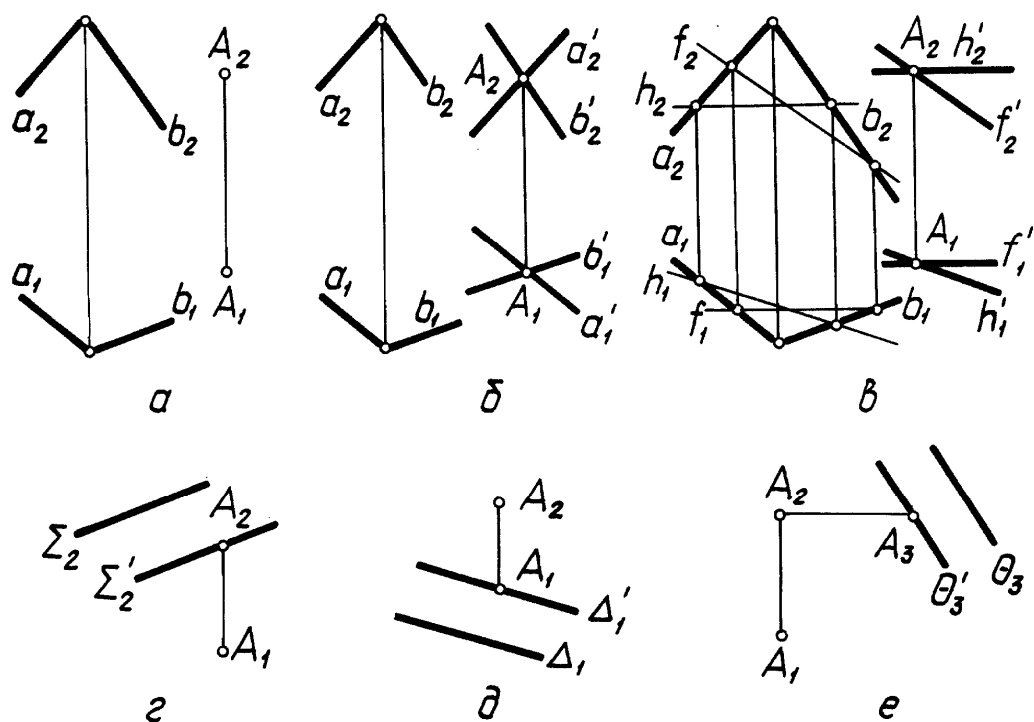


Рис. 10

б) Перпендикулярность.

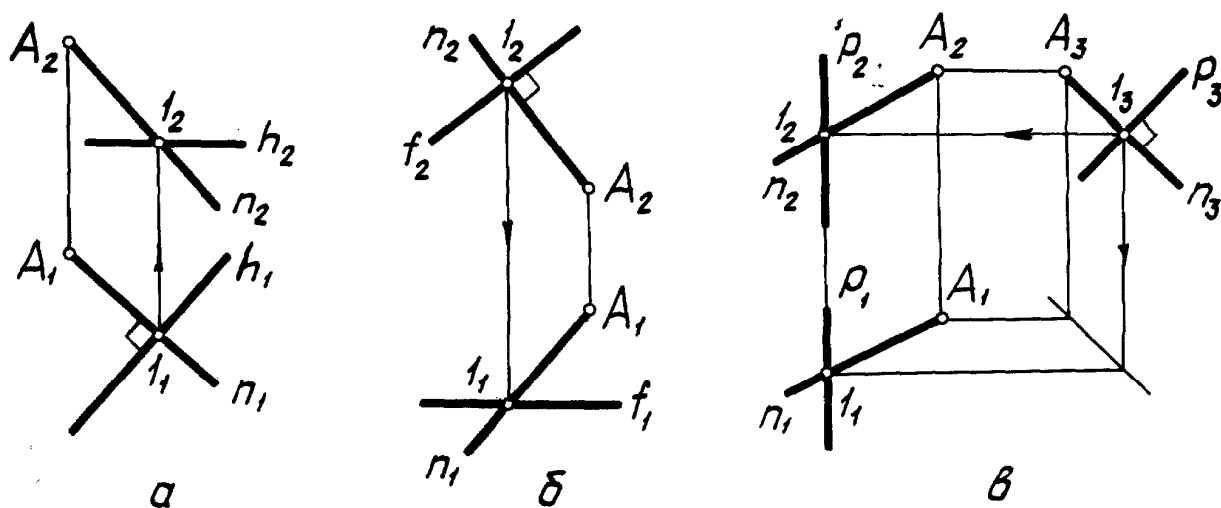


Рис. 11

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая является прямой общего положения, то прямой угол проецируется на эту плоскость проекций без искажения, то есть, – в прямой же угол. Если прямая перпендикулярна плоскости в пространстве, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а

фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали, принадлежащим этой плоскости.

13. Из точки опустить перпендикуляр на линию уровня (рис. 11).

На рис. 11 а, б, в из заданной точки  $A$  опущен перпендикуляр на заданную линию уровня соответственно:  $A \in n \perp h$ , так как  $A_1 \in n_1 \perp h_1$ ;  $A \in n \perp f$ , так как  $A_2 \in n_2 \perp f_2$ ;  $A \in n \perp p$ , так как  $A_3 \in p_3 \perp h_3$ .

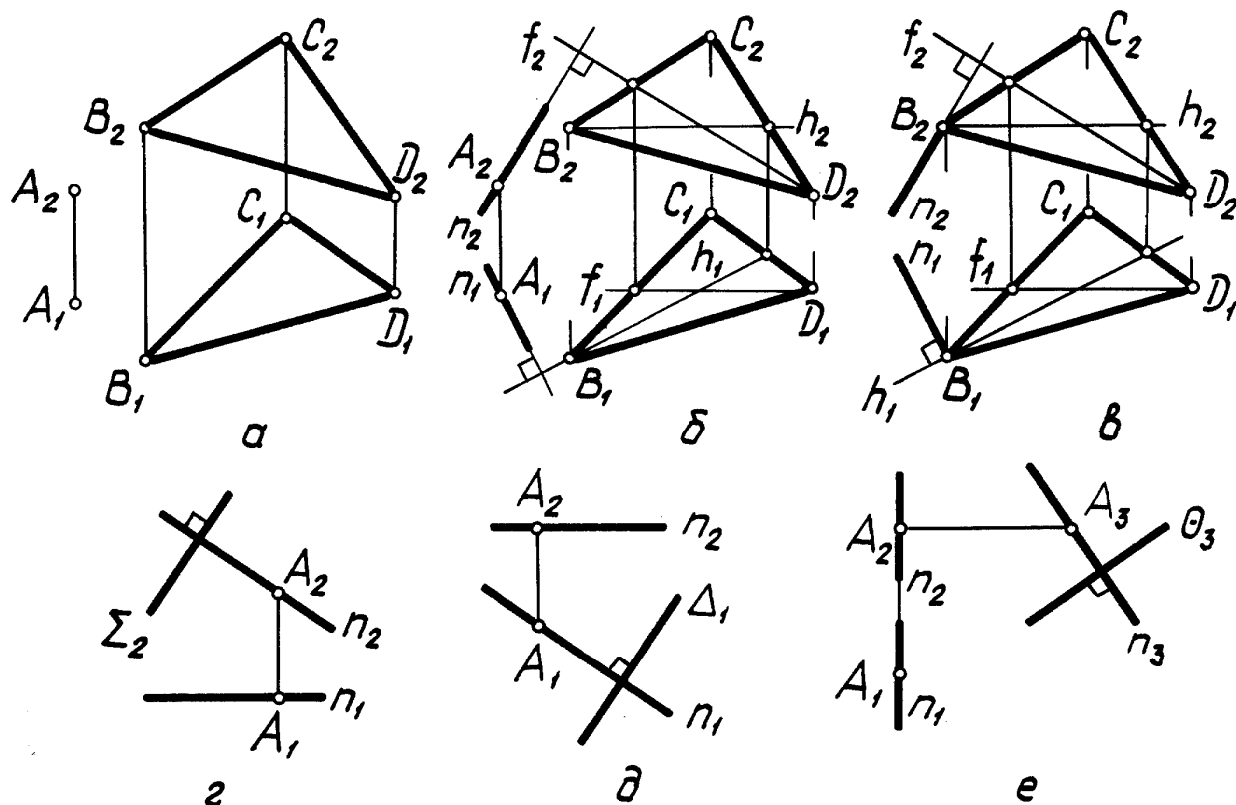


Рис. 12

14. Из точки опустить перпендикуляр на плоскость общего или частного положения (рис. 12).

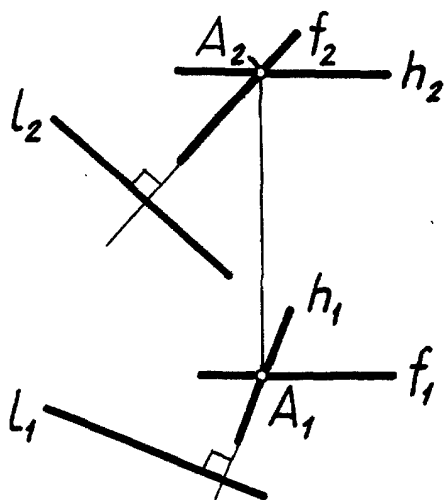


Рис. 13

На рис. 12 а дано исходное условие – плоскость  $\Gamma(BCD)$  и точка  $A$ , а на рис. 12, б – решение задачи  $A \in n \perp \Gamma$ , так как  $A_1 \in n_1 \perp h_1$  и  $A_2 \in n_2 \perp f_2$ . На рис. 12, г, д, е из заданной точки  $A$  опущены перпендикуляры на заданные проецирующие плоскости.

15. В точке, принадлежащей плоскости, восстановить перпендикуляр к этой плоскости. Решение этой задачи показано на рис. 12, в –  $B \in n \perp \Gamma(BCD)$ .

16. Через точку провести плоскость, перпендикулярную данной прямой. (рис. 13).  $A \in \Gamma(h \cap f) \perp l$ , так как  $h \perp l \wedge f \perp l$ .



17. Через точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости (рис. 14).

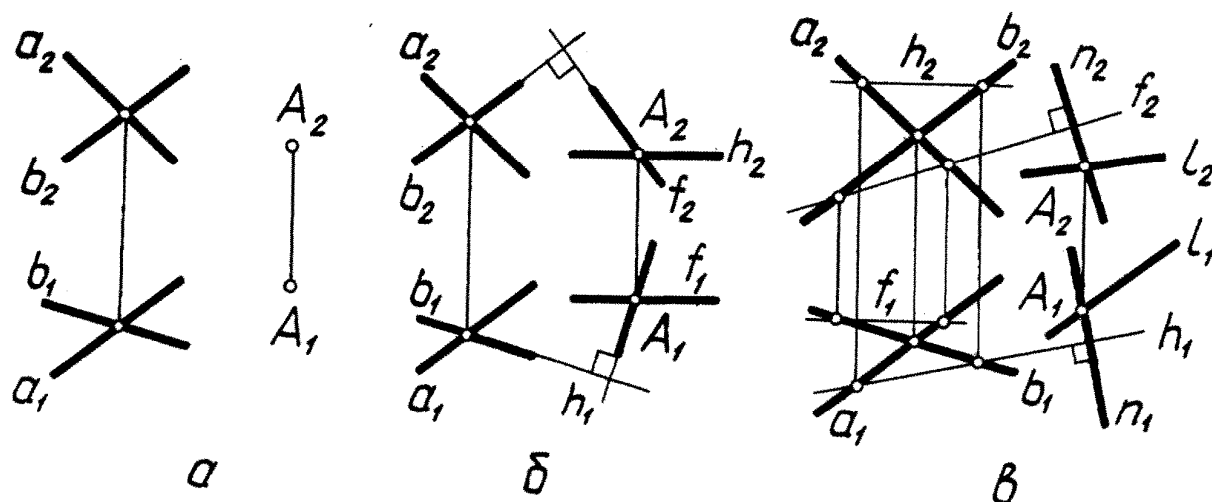


Рис. 14

На рис. 14, а дано исходное условие задачи — плоскость  $\Gamma$  ( $a \cap b$ ) и точка  $A$ , на рис. 14, б, в — соответственно два ее решения:  $A \in \Delta(h \cap f) \perp \Gamma$ , так как  $\Delta \perp b$  и  $A \in \Delta(h \cap f) \perp \Gamma$ , так как  $n \perp \Delta$ .

### Задачи на определение общих элементов геометрических фигур из условия принадлежности

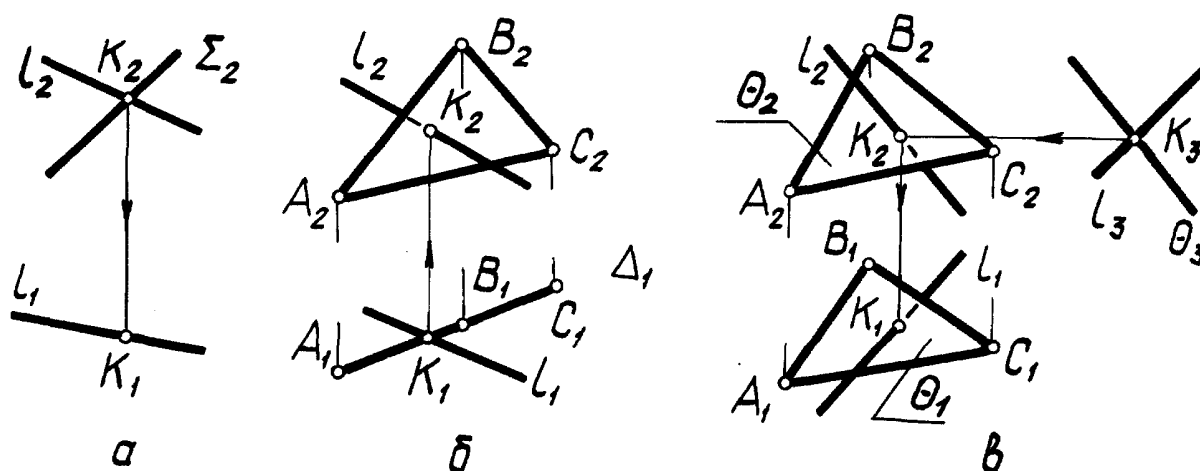


Рис. 15

При пересечении геометрических фигур с проецирующей плоскостью одна из проекций их общего элемента совпадает с проекцией проецирующей плоскости

(которая вырождается в прямую). Поэтому решение этого типа задач, в конечном счете, сводится к построению второй проекции искомой геометрической фигуры, если положение одной из них известно.

18. Построить точку пересечения прямой  $l$  с проецирующими плоскостями (рис. 15).

На рис. 15 а, б, в построена точка  $K$  пересечения прямой соответственно с фронтально проецирующей плоскостью  $\Sigma$  — ( $K=l \cap \Sigma$ ), с горизонтально проецирующей плоскостью  $\Delta$  — ( $K=l \cap \Delta$ ), с профильно проецирующей плоскостью  $\theta$  — ( $K=l \cap \theta$ ).

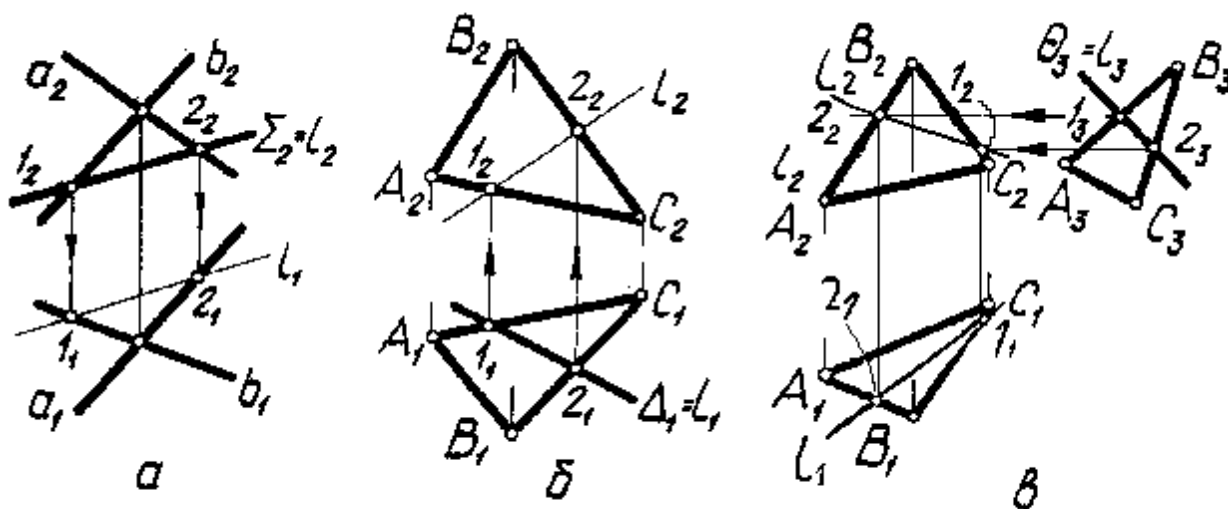


Рис. 16

19. Построить линию пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью (рис. 16).

На рис. 16, а, б, в дано соответственно решение задачи:  $l = \Gamma(a \cap b) \cap \Sigma$ ;  $l = \Lambda(ABC) \cap \Delta$ ;  $l = \Psi(ABC) \cap \theta$ .

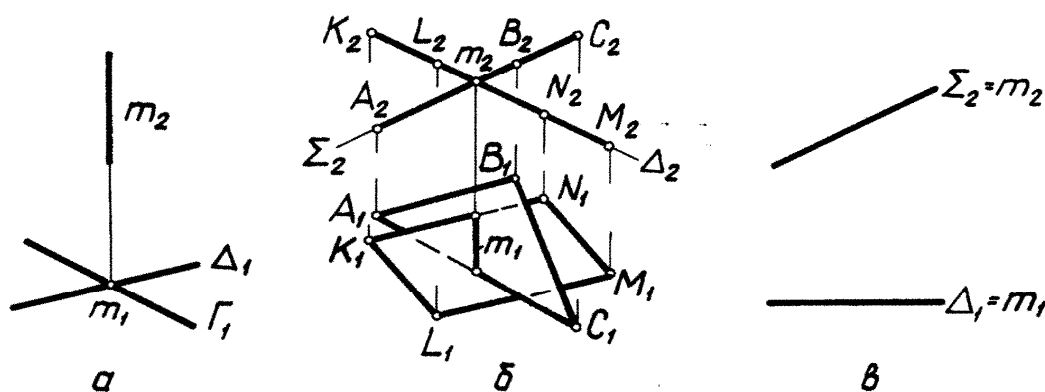


Рис. 17

20. Построить линию пересечения двух проецирующих плоскостей (рис.17).

На рис. 17, а, б, в дано соответственно построение линии пересечения двух горизонтально проецирующих плоскостей –  $m = \Delta \cap \Gamma$ , , двух фронтально проецирующих плоскостей –  $m = \Sigma(ABC) \cap \Delta(KLMN)$ , горизонтально проецирующей плоскости  $\Delta$  и фронтально проецирующей плоскости  $\Sigma$  ( $m_1 = \Delta_1 \wedge m_2 = \Sigma_2$ ).

### Способы преобразования комплексного чертежа

21. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня:

а) способом замены плоскостей проекций (рис. 18, а);

б) способом вращения вокруг проецирующей прямой (рис. 18, б).

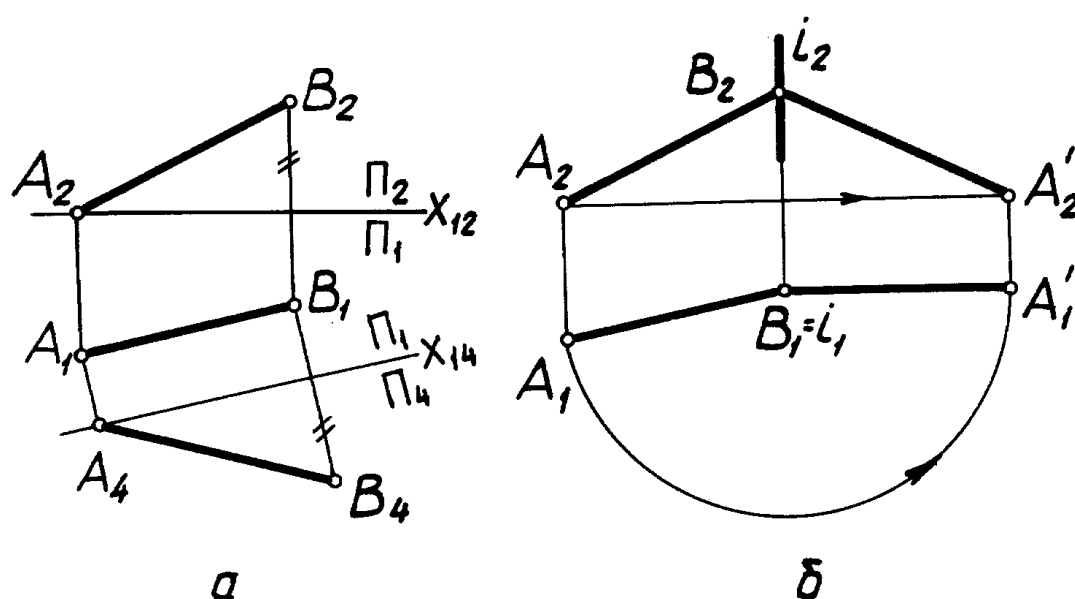


Рис. 18

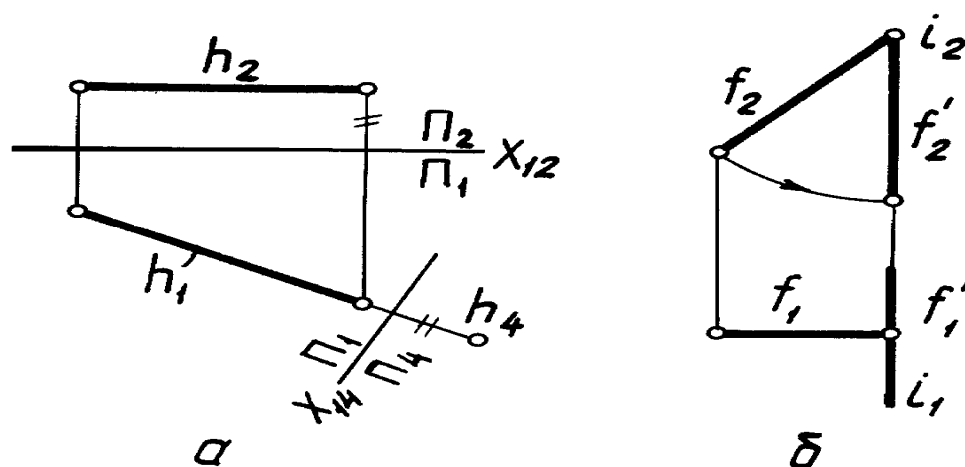


Рис.19

22. Преобразовать линию уровня в проецирующую прямую:

- а) способом замены плоскостей проекций (рис. 19, а);  
 б) способом вращения вокруг проецирующей прямой (рис. 19, б).

23. Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую:

- а) способом замены плоскостей проекций (рис. 20, а);  
 б) способом вращения вокруг проецирующей прямой (рис. 20, б).

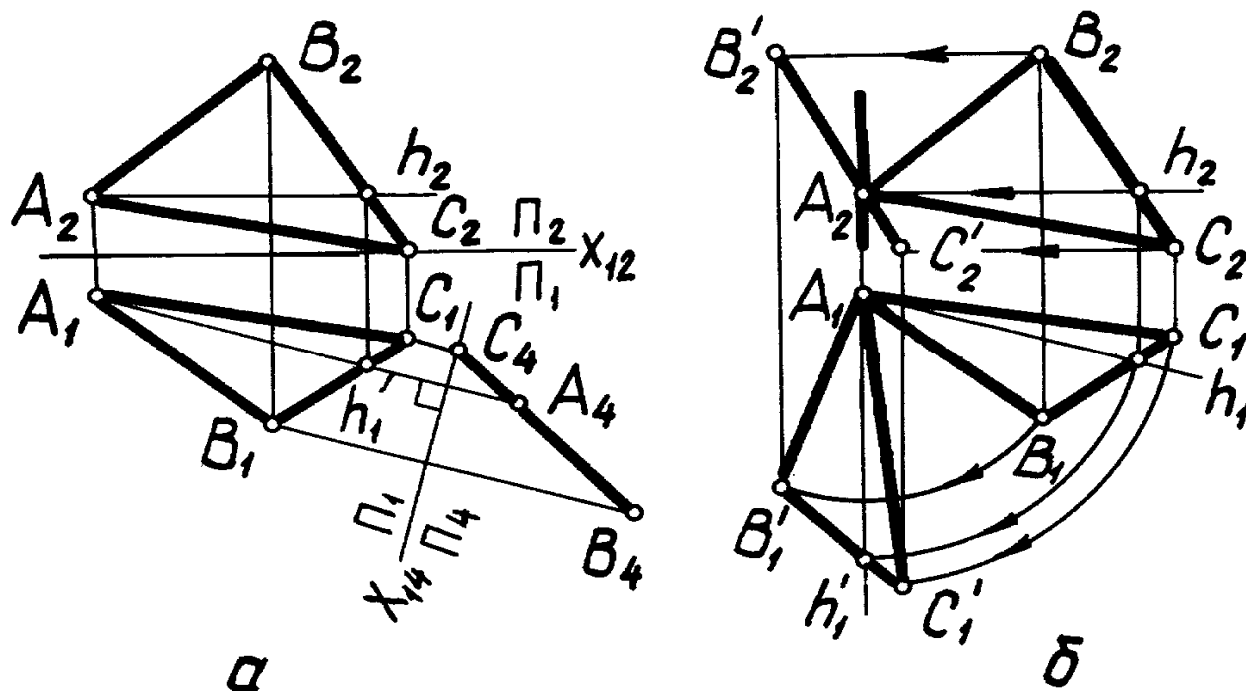


Рис. 20

24. Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня:

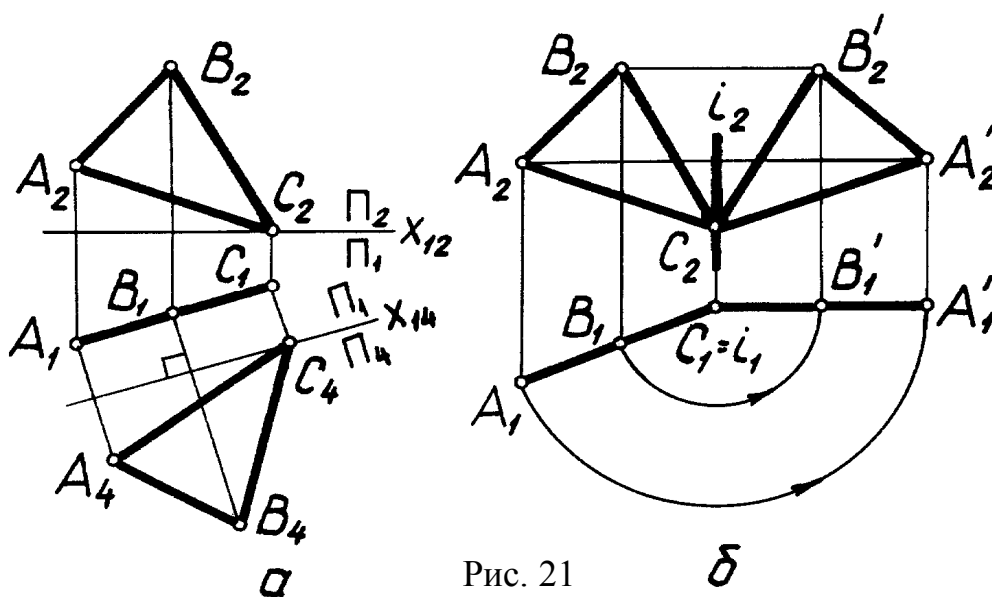


Рис. 21

- а) способом замены плоскостей проекций (рис. 21, а);  
 б) способом вращения вокруг проецирующей прямой (рис. 21, б).

25. Вращением вокруг линии уровня совместить точку с плоскостью уровня (рис. 22).

На рис. 22 вращением вокруг горизонтали точка  $A$  совмещена с горизонтальной плоскостью уровня  $\Gamma$ .

26. Определить истинную величину отрезка прямой способом прямоугольного треугольника (рис. 23).

На рис. 23 истинная величина отрезка  $[AB]$  определена дважды. Одновременно найдены углы наклона отрезка к горизонтальной (угол  $\alpha$ ) и к фронтальной (угол  $\beta$ ) плоскостям проекций.

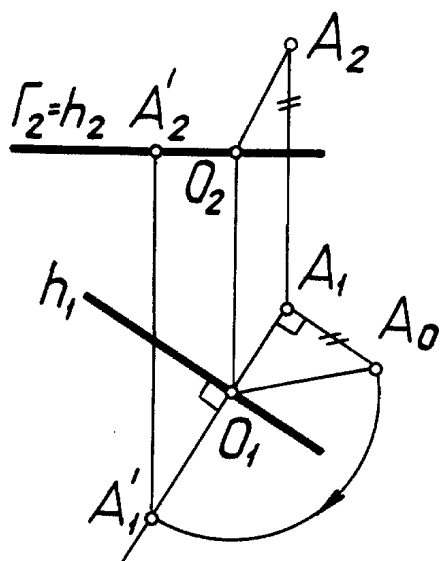


Рис. 22

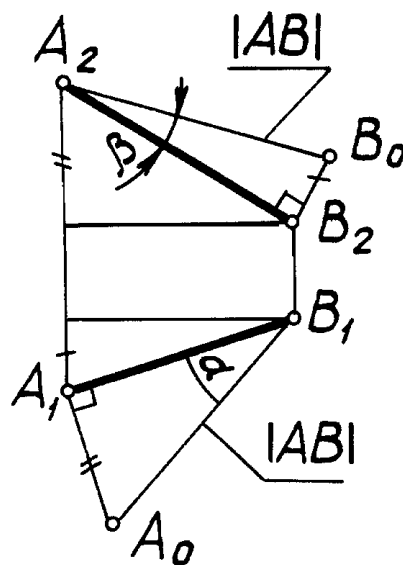


Рис. 23

## § 2. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, в которых определяется относительное положение или общие элементы геометрических фигур, называются позиционными. К ним относятся задачи на принадлежность точки некоторой линии или линии и точки какой – либо поверхности, задачи, выражающие отношения между геометрическими фигурами, задачи на определение общих элементов геометрических фигур. Элементарные задачи этого класса рассмотрены в § 1.

Позиционные задачи, в которых определяются общие элементы (точки или линии) геометрических фигур, подразделяются на первую и вторую позиционные. К первой позиционной относятся все задачи, в которых определяются точки (одна или несколько) пересечения линии и поверхности.

Ко второй позиционной — все задачи, в которых определяется линия (одна или несколько) взаимного пересечения двух поверхностей.

## 2.1. Первая позиционная задача

(построение точек пересечения линии и поверхности)

В зависимости от вида и взаимного расположения линии и поверхности точек их пересечения может быть одна или несколько. В основу их построения положен способ вспомогательных поверхностей, в соответствии, с которым построение точек пересечения линии  $l$  и поверхности  $\Phi$  (независимо от их вида) осуществляется по следующей схеме (рис. 24):

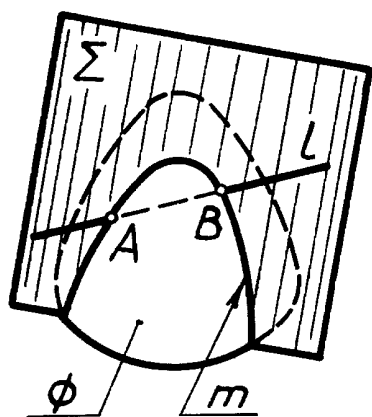


Рис. 24

1. Через данную линию  $l$  проводим вспомогательную поверхность  $\Sigma$ .

2. Определяем линию  $m$  пересечения вспомогательной  $\Sigma$  и заданной  $\Phi$  поверхностей.

3. Отмечаем точки  $A$  и  $B$  пересечения линий  $l$  и  $m$ , которые являются Искомыми.

В символической записи схема имеет вид:

1)  $l \subset \Sigma$ ;

2)  $\Sigma \cap \Phi = m$ ;

3)  $l \cap m = A \wedge l \cap m = B$ .

**Примечание.** Поскольку линии  $l$  и  $m$  принадлежат одной и той же вспомогательной поверхности, они могут пересекаться, касаться и не иметь общих точек. В первом случае линия пересекается с поверхностью, во втором — касается ее, в третьем — не имеет с ней общих точек.

Для конкретной задачи на основании общей схемы составляется алгоритм ее решения. Алгоритмом называется совокупность последовательных однозначных операций, которые необходимо выполнить для решения данной задачи. Схема преобразуется в алгоритм, если конкретизировать первый пункт, т.е. точно указать вид и положение вспомогательной поверхности, которая выбирается для определения точек пересечения заданных линии и поверхности. Только после составления алгоритма можно перейти к решению (построению) задачи на комплексном чертеже.

В качестве вспомогательных поверхностей наиболее часто применяются плоскости (общего и частного положения) и проецирующие цилиндрические поверхности. Выбор вида и положения вспомогательной поверхности определяется главным образом следующими факторами:

1. Видом заданной линии. Если, например, линия  $l$  прямая, то в качестве вспомогательной — выбирается плоскость.

2. Требованием простоты и точности построения на комплексном чертеже. Для выполнения этого требования вспомогательную поверхность следует по воз-

возможности выбирать так, чтобы проекции линии ее пересечения с заданной поверхностью были графически простыми линиями, т.е. прямолинейными отрезками или дугами окружности. Иногда для выполнения этого условия приходится прибегать к преобразованию комплексного чертежа.

Ниже рассматриваются примеры решения типовых задач на определение точек пересечения прямой линии и поверхности.

Алгоритмы их решения составлены в соответствии с общей схемой решения первой позиционной задачи, рассмотренной выше.

Задача 1. Определение точки пересечения прямой линии общего положения с плоскостью общего положения.

При определении точки  $K$  пересечения прямой  $l$  общего положения с плоскостью  $\Gamma(ABC)$  общего положения (рис. 25) в качестве вспомогательной поверхности должна быть применена какая-либо проецирующая плоскость. Выберем, например, фронтально проецирующую плоскость  $\Sigma$  и составим алгоритм решения (рис. 25, а):

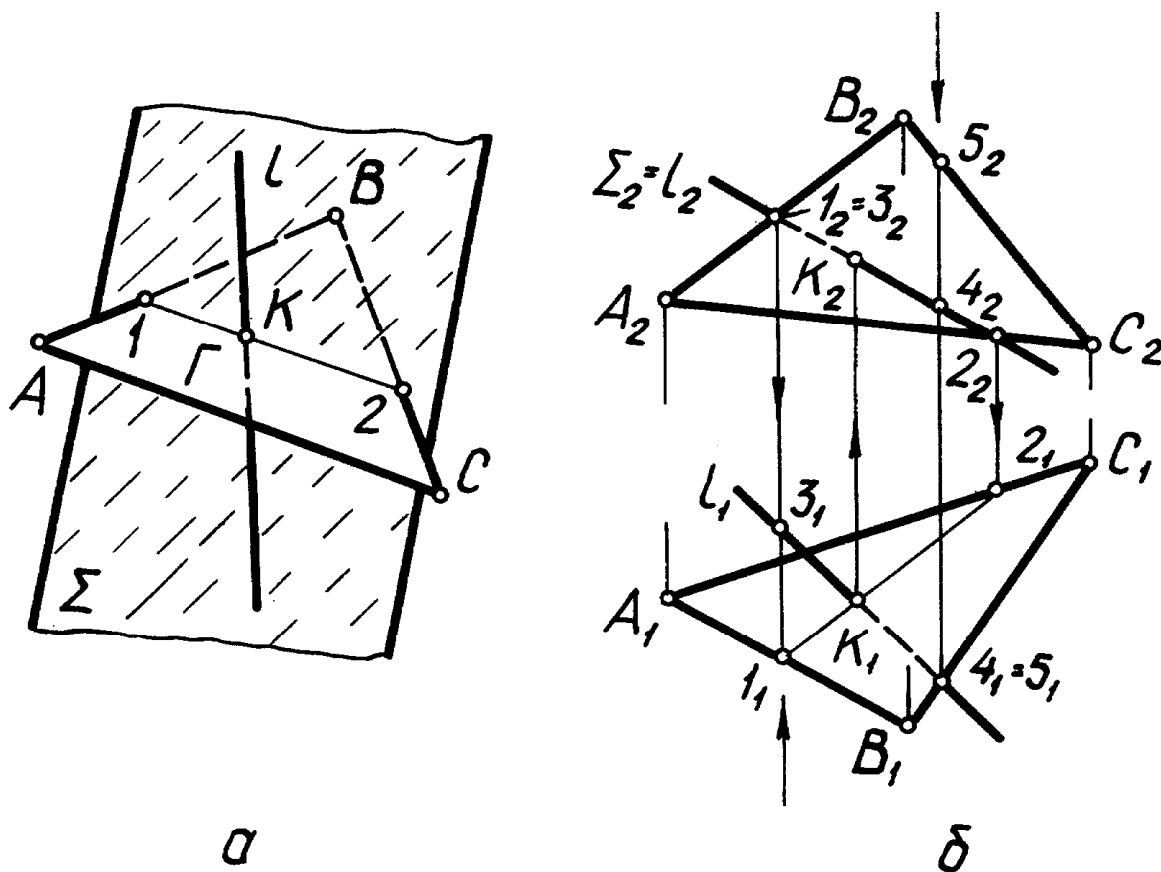


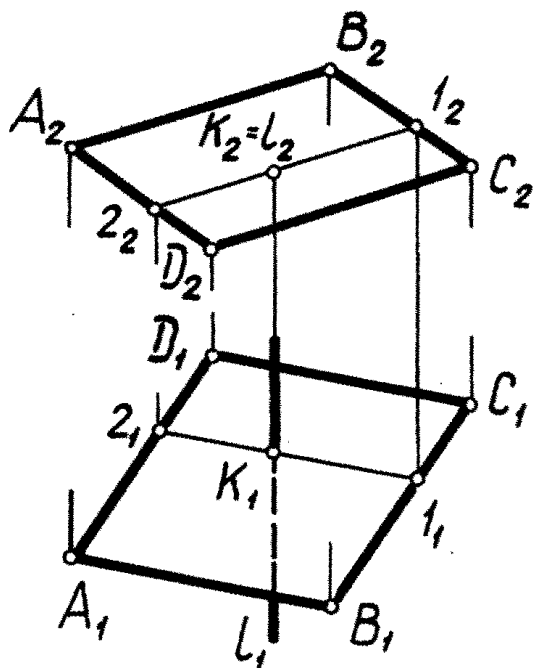
Рис. 25

- 1)  $l \subset \Sigma \perp \Pi_2$ , через прямую  $l$  проводим фронтально проецирующую плоскость  $\Sigma$ ;
- 2)  $\Gamma \cap \Sigma = (1-2)$ , определяем прямую  $(1-2)$  пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Sigma$ ;
- 3)  $(1-2) \cap l = K$ , отмечаем точку  $K$  пересечения прямых  $(1-2)$  и  $l$ , которая и является искомой.

**П о с т р о е н и е.** На рис. 25, б дана графическая реализация этого алгоритма. Первый пункт алгоритма отражается на чертеже записью  $\Sigma_2 = l_2$ , т.е. фронтальные проекции прямой и плоскости совпадают. Найдена фронтальная ( $1_2-2_2$ ) и горизонтальная ( $1_1-2_1$ ) проекции прямой (1-2). Точка  $K_1 = l_1 \cap (1_1-2_1)$  является горизонтальной проекцией искомой точки К. Ее фронтальная проекция определяется из условия принадлежности заданной прямой при помощи вертикальной линии связи ( $K_2 \in l_2$ ).

При построении последовательно решены элементарные задачи 6, 19 и 2.

Считая, что заданная плоскость  $\Gamma(ABC)$  непрозрачна, определим видимость прямой относительно плоскостей проекций по горизонтально конкурирующим точкам 4 и 5 и фронтально конкурирующим точкам 1 и 3. Из расположения фронтальных проекций ( $4_2$  и  $5_2$ ) точек 4 и 5 очевидно, что прямая справа от точки К находится под плоскостью  $\Gamma(ABC)$  и, следовательно, невидима относительно  $\Pi_1$ . Аналогично определена видимость прямой относительно  $\Pi_2$ . Рассмотренный алгоритм применим для решения любых задач на пересечение прямой с плоскостью общего положения.



В частном случае, когда прямая является проецирующей (рис. 26), можно обойтись без применения вспомогательной плоскости. Решение сводится к элементарной задаче 8.

**Задача 2.** Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью многогранника.

Решение этой задачи сводится к определению точек пересечения прямой с гранями многогранника и выполняется по алгоритму, аналогичному предыдущему.

Определение точек М и N пересечения прямой l с поверхностью пирамиды Ф показано на рис. 27.

**А л г о р и т м** (рис. 27, а):

- 1)  $l \subset \Sigma \perp \Pi_1$  (может быть выбрана  $\Sigma \perp \Pi_2$ );
- 2)  $\Phi \cap \Sigma = (1-2-3)$ ;
- 3)  $(1-2-3) \cap l = M \wedge (1-2-3) \cap l = N$ .

**П о с т р о е н и е.** Проводим через прямую l горизонтально проецирующую плоскость; на чертеже  $l_1 = \Sigma_1$ . Находим горизонтальную ( $1_1-2_1-3_1$ ) и фронтальную ( $1_2-2_2-3_2$ ) проекцию замкнутой ломаной (1–2–3) пересечения плоскости и поверхности пирамиды.



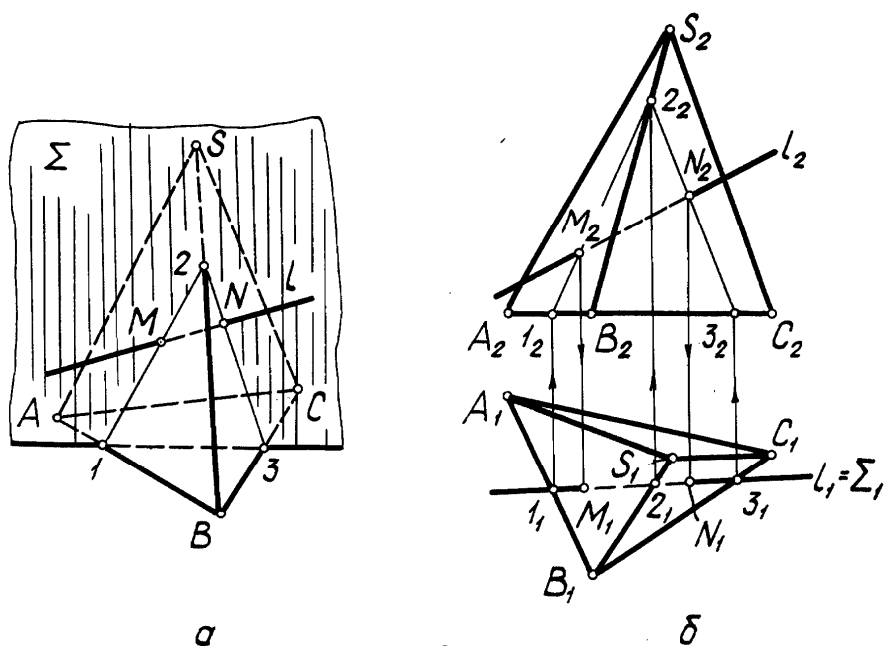


Рис. 27

Отмечаем  $M_2 = (l_2 - 2_2 - 3_2) \cap l_2$  и  $N_2 = (1_2 - 2_2 - 3_2)$  и по линиям связи находим  $M_1 \in l_1$  и  $N_1 \in l_1$ .

При построении последовательно решены элементарные задачи 6, 19 (решена дважды) и 2 (решена дважды).

Поверхность многогранника считается непрозрачной. Видимость прямой  $l$  относительно плоскостей проекций определяется по видимости граней. Рассмотр-

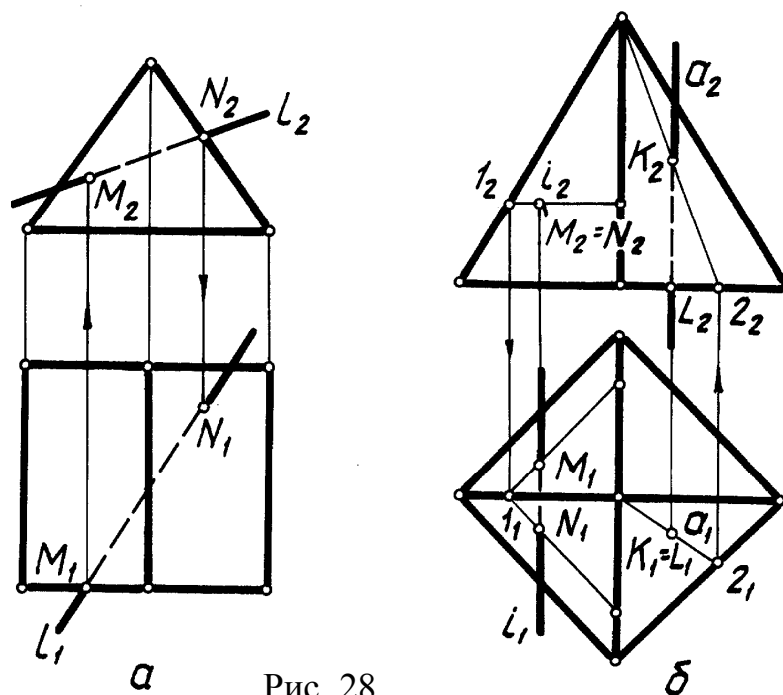


Рис. 28

енный алгоритм применим для определения точек пересечения прямой с любым многогранником.

В частных случаях, когда грани являются проецирующими плоскостями (рис. 28, а) или прямая занимает проецирующее положение (рис. 28, б), применение рассмотренного алгоритма нецелесообразно. В первом случае решение сводится к элементарной задаче 18 (на рис. 28, а решена дважды), во втором — к задаче 8.

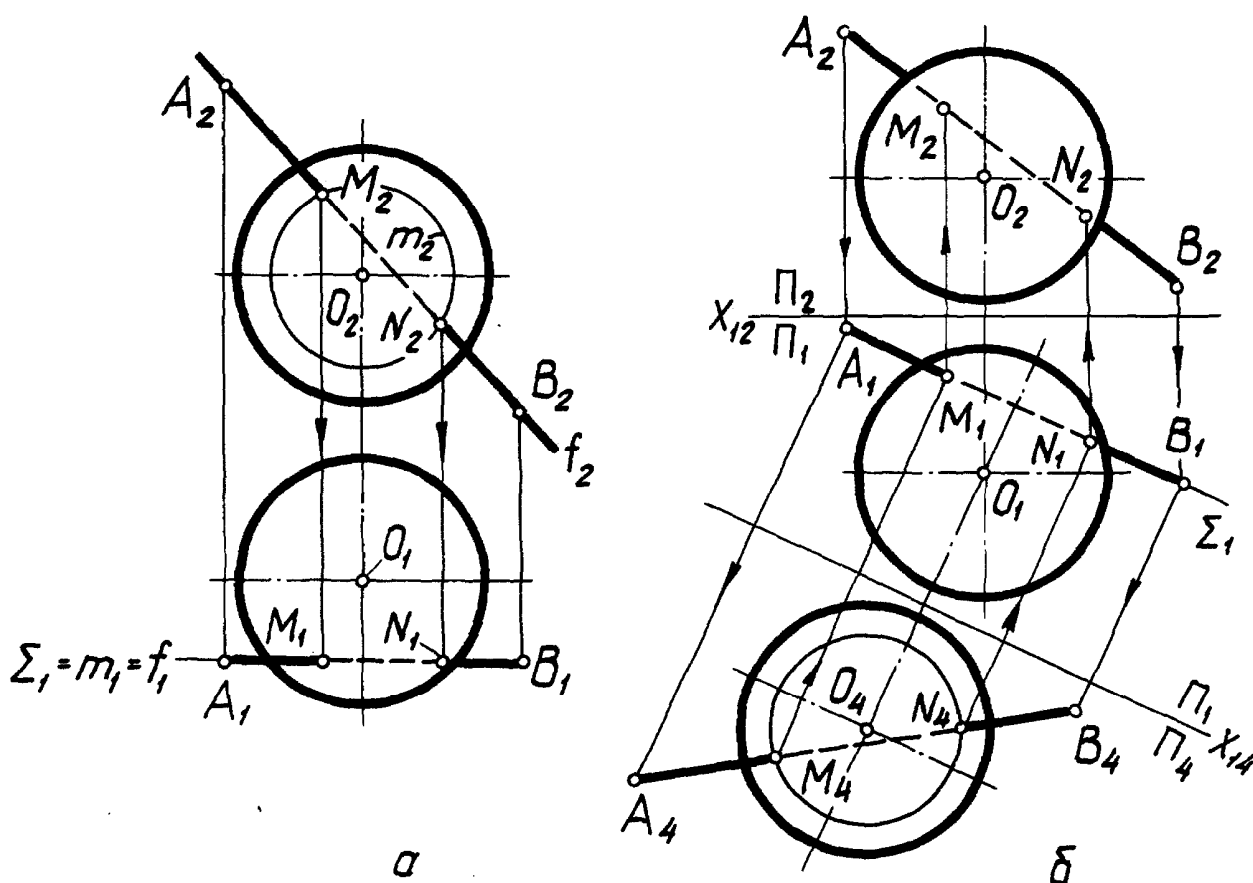
Задача 3. Определение точек пересечения прямой линии и сферы.

В задаче на рис. 29, а требуется определить точки  $M$  и  $N$  пересечения сферы  $\Phi$  с фронталью  $f(AB)$ . В качестве вспомогательной целесообразно применить фронтальную плоскость уровня  $\Sigma \supset l$ , так как окружность  $m$  сечения сферы  $\Phi$  этой плоскостью спроецируется на  $\Pi_2$  без искажения.

А л г о р и т м:

- 1)  $f \subset \Sigma // \Pi_2$ ;
- 2)  $\Phi \cap \Sigma = m$ ;
- 3)  $m \cap f = M \wedge m \cap f = N$ .

П о с т р о е н и е. Проведена  $\Sigma // \Pi_2$ : на чертеже  $\Sigma_1 = f_1$ . Построена фронтальная проекция  $m_2$  линии  $m = \Phi \cap \Sigma$ . Определены  $M_2 = m_2 \cap f_2$  и  $N_2 = m_2 \cap f_2$ , по линиям связи найдены  $M_1 \in f_1$  и  $N_1 \in f_1$ .



В задаче на рис. 29, б Рис. 29 с. 29 точки  $M$  и  $N$  пересечения сферы  $\Phi$  с прямой  $(AB)$  общего положения. В качестве вспомогательной применена го-

горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma \supset (AB)$ . Окружность сечения сферы этой плоскостью спроецируется на  $\Pi_2$  в эллипс. Во избежание построения эллипса плоскость  $\Sigma$  преобразована в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций. На  $\Pi_4$  линия сечения спроецируется в окружность, т.е. в системе плоскостей  $\Pi_1 / \Pi_4$  задача аналогична предыдущей.

Сначала найдены проекции  $M_4$  и  $N_4$  искомых точек  $M$  и  $N$ , а затем обратным преобразованием –  $M_1, N_1$  и  $M_2, N_2$ .

Задача 4. Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью конуса.

В задаче (рис. 30) требуется определить точки  $M$  и  $N$  пересечения прямой  $l$  общего положения с поверхностью  $\Phi$  конуса вращения. Применение проецирующей плоскости в качестве вспомогательной в данном случае нецелесообразно, так как в сечении получится кривая второго порядка, которую нужно строить по точкам. Плоскость же общего положения, проходящая через вершину конуса и заданную прямую, пересечет его по образующим.

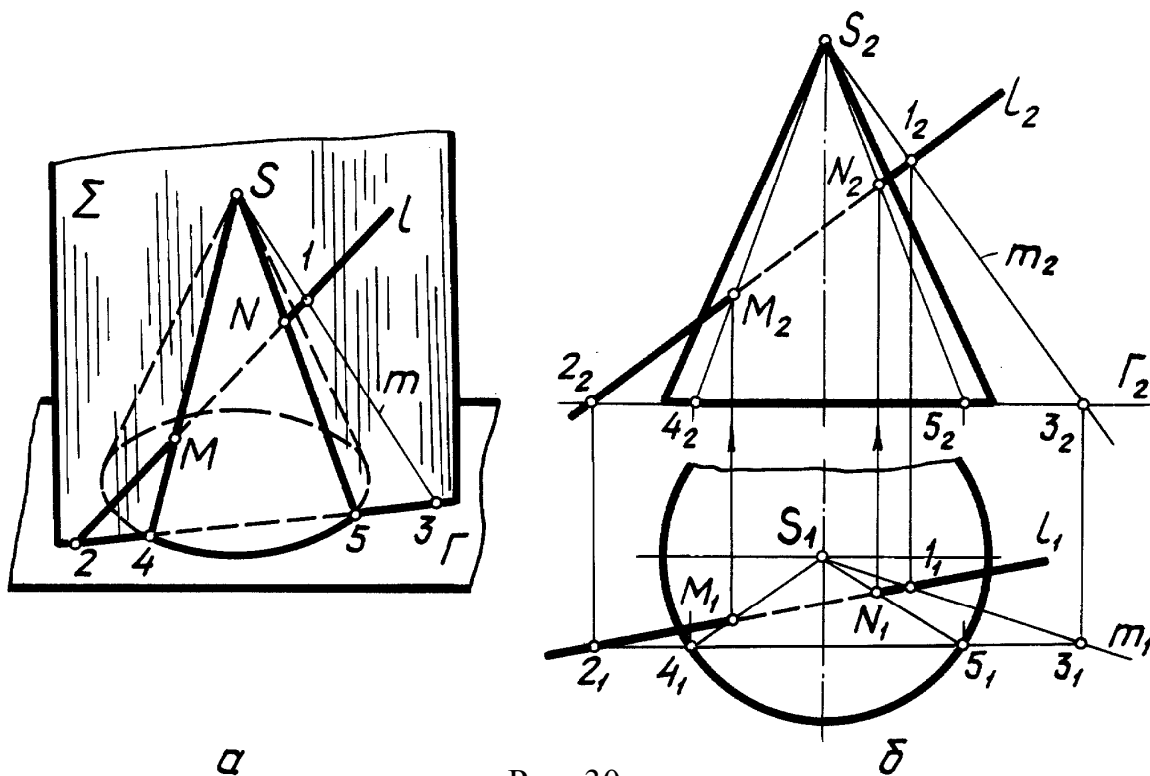


Рис. 30

А л г о р и т м (рис. 30, а):

- 1)  $S \in \Sigma(l \cap m)$
- 2)  $\Sigma \cap \Phi = (S - 4 - 5)$
- 3)  $(S-4) \cap l = M \wedge (S-5) \cap l = N$

П о с т р о е н и е (рис.30, б). Для определения образующих  $S4$  и  $S5$ , по которым плоскость пересекает поверхность конуса  $\Phi$ , предварительно построена линия  $(2 - 3)$  пересечения плоскости  $\Sigma$  с плоскостью  $\Gamma$  основания конуса. Найдены

горизонтальные проекции  $4_1$  и  $5_1$  точек 4 и 5 пересечения прямой (2 - 3) с окружностью основания конуса, затем построены горизонтальные проекции  $(S_1-4_1)$  и  $(S_1-5_1)$  образующих (S-4) и (S-5) и найдены точки  $M_1$  и  $N_1$ , а затем по линиям связи точки  $M_2$  и  $N_2$ .

На рис. 31 даны частные случаи построения точек пересечения прямой линии и кривой поверхности, когда применение рассмотренных алгоритмов нецелесообразно. При построении точек пересечения прямой  $l$  с поверхностью цилиндра (рис. 31, а) решены элементарные задачи 18 – (найдена точка  $N$ ) и 2 – (найдена точка  $M$ ). При построении точек пересечения прямых  $i$  и  $n$  с поверхностью конуса (рис. 31, б) дважды решена элементарная задача 8. При построении точек  $M$  и  $N$  пересечения горизонтально проецирующей прямой  $m$  с поверхностью тора (рис. 31, в) решена элементарная задача 8.

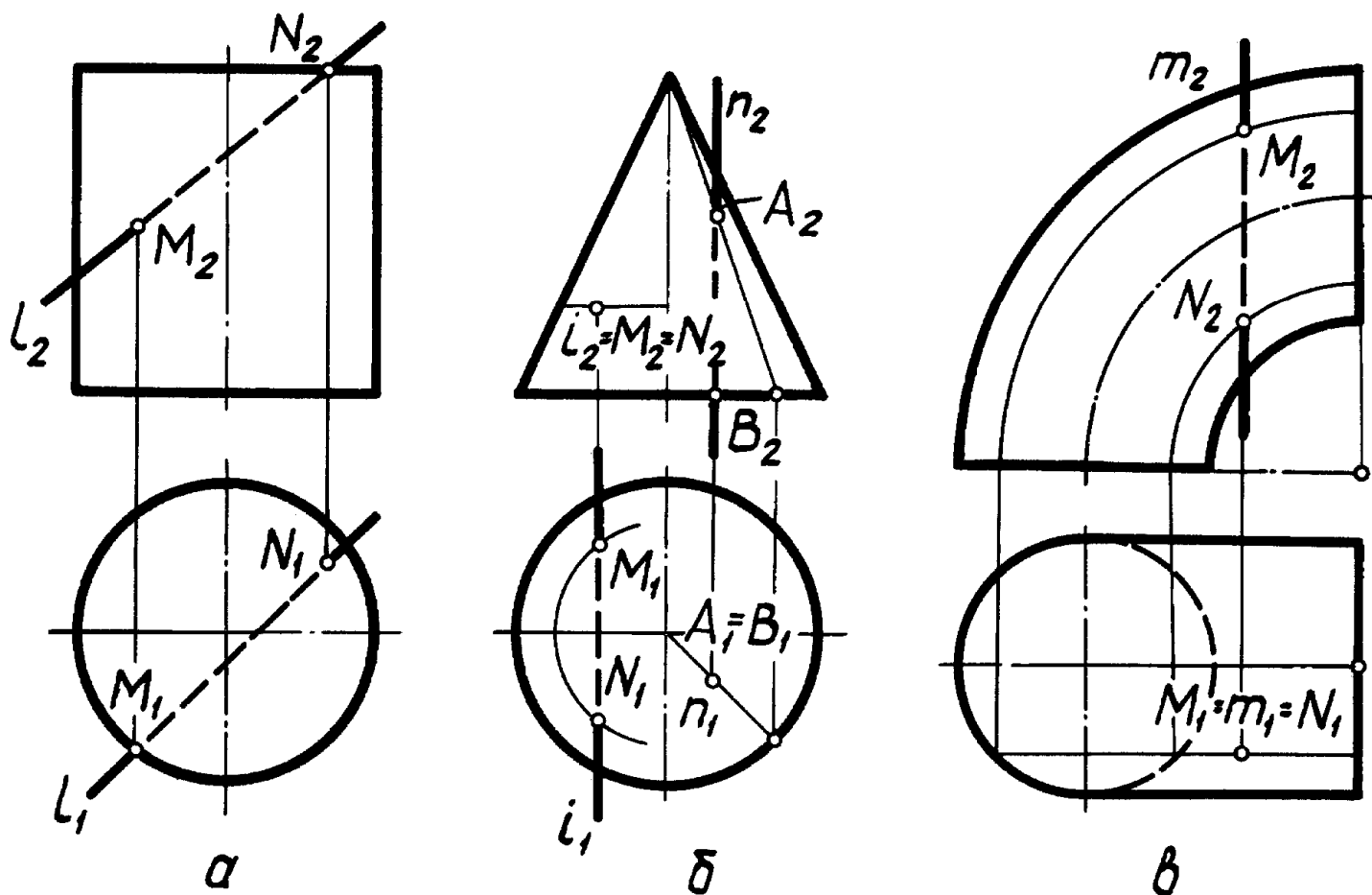


Рис. 31

## 2.2. Вторая позиционная задача

(построение линии пересечения двух поверхностей)

Две поверхности пересекаются по линии (совокупности линий), которая одновременно принадлежит каждой из них (рис. 32). В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, плоской или пространственной ломаной, плоской или пространственной кривой.

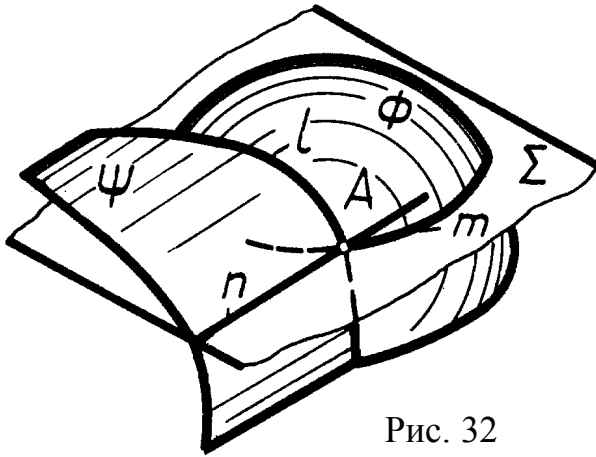


Рис. 32

Построение этой линии (независимо от ее формы) сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки в определенном порядке, будет искомой. Точки, образующие линию пересечения, делятся на опорные и промежуточные.

Опорными точками являются:

1) точки, лежащие на участ-

вующих в пересечении ребрах многогранника;

2) точки, в которых линия пересечения пересекает линию видимого контура поверхности относительно той или иной плоскости проекций. Проекция этих точек располагаются на очерковой линии соответствующей проекции поверхности и называются очерковыми. В этих точках проекция линии пересечения касается очерка проекции поверхности. В случае пересечения поверхности с плоскостью очерковые точки делят соответствующую им проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части и называются точками смены видимости. При пересечении двух поверхностей (ни одна из них не является плоскостью) не каждая из очерковых точек будет точкой смены видимости.

3) экстремальные точки, то есть самая близкая и самая дальняя точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций.

Основным способом построения точек, принадлежащих искомой линии пересечения, является способ вспомогательных поверхностей.

В соответствии с ним построение произвольной точки  $A$ , принадлежащей линии  $l$  пересечения поверхностей  $\Phi$  и  $\Psi$  (независимо от их вида) осуществляется по следующей общей схеме (рис. 32):

1. Вводится вспомогательная поверхность  $\Sigma$ , пересекающая заданные поверхности  $\Phi$  и  $\Psi$ .

2. Определяются линии  $m$  и  $n$  пересечения вспомогательной поверхности  $\Sigma$  с каждой из заданных.

3. Отмечается точка  $A$  пересечения построенных линий  $m$  и  $n$ , которая является искомой, так как одновременно принадлежит данным поверхностям  $\Phi$  и  $\Psi$  и, следовательно, линии их пересечения.

В символической записи схема имеет вид:

- 1)  $\Phi \cap \Sigma \cap \Psi$ ;
- 2)  $\Sigma \cap \Phi = m \wedge \Sigma \cap \Psi = n$ ;
- 3)  $m \cap n = A$ .

Многократное применение указанного способа позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), принадлежащих линии пересечения. При решении конкретной задачи необходимо на основании общей схемы составить алгоритмы для построения опорных и промежуточных точек линии пересечения. Схема преобразуется в алгоритм, если конкретизировать ее первый пункт, то есть точно указать вид и положение вспомогательной поверхности. В качестве вспомогательных поверхностей наиболее часто применяются плоскости (способ вспомогательных плоскостей) или сферы (способ вспомогательных сфер). Любая из введенных вспомогательных поверхностей должна пересекать каждую из заданных по таким линиям, проекции которых были бы, как правило, графически простыми линиями, то есть прямыми или окружностями. Для построения опорных точек вспомогательные поверхности должны быть выбраны так, чтобы они пересекали заданные поверхности по тем линиям, которым принадлежат опорные точки. Например, при построении очерковых точек поверхностей вращения вспомогательная плоскость должна проходить через главный меридиан или экватор. Высшую и низшую точки линии пересечения поверхности вращения с плоскостью и двух поверхностей вращения можно определить, руководствуясь тем, что они располагаются в общей плоскости симметрии для каждой пары пересекающихся поверхностей.

Следует обратить внимание на то, что при решении конкретной задачи каждая из опорных точек требует составления своего особого алгоритма построения, в то время как промежуточные точки могут быть построены на основании одного и того же алгоритма. Ниже рассматриваются примеры решения типовых задач на построение линии пересечения двух поверхностей.

Задача 1. Построение линии пересечения двух плоскостей (поверхностей первого порядка) общего положения  $\Gamma(ABC)$  и  $\Sigma(DEF)$  (рис. 33, 34).

Линия пересечения двух плоскостей является прямой и, следовательно, определяется двумя различными точками ( $M$  и  $N$ ), одновременно принадлежащими обеим плоскостям. Каждая из них определяется по алгоритму, составленному на основании общей схемы решения второй позиционной задачи. В качестве вспомогательных поверхностей выбираются плоскости частного положения (проецирующие или плоскости уровня). Возьмем, например, горизонтальную плоскость уровня и составим алгоритм в символической записи для определения точки  $M$ .

- 1)  $\Delta // \Pi_1 \wedge \Gamma(ABC) \cap \Delta \cap \Sigma(DEF)$ ;
- 2)  $\Delta \cap \Gamma(ABC) = (A - 1) \wedge \Delta \cap \Sigma(DEF) = (2 - 3)$ ;
- 3)  $(A - 1) \cap (2 - 3) = M$ .

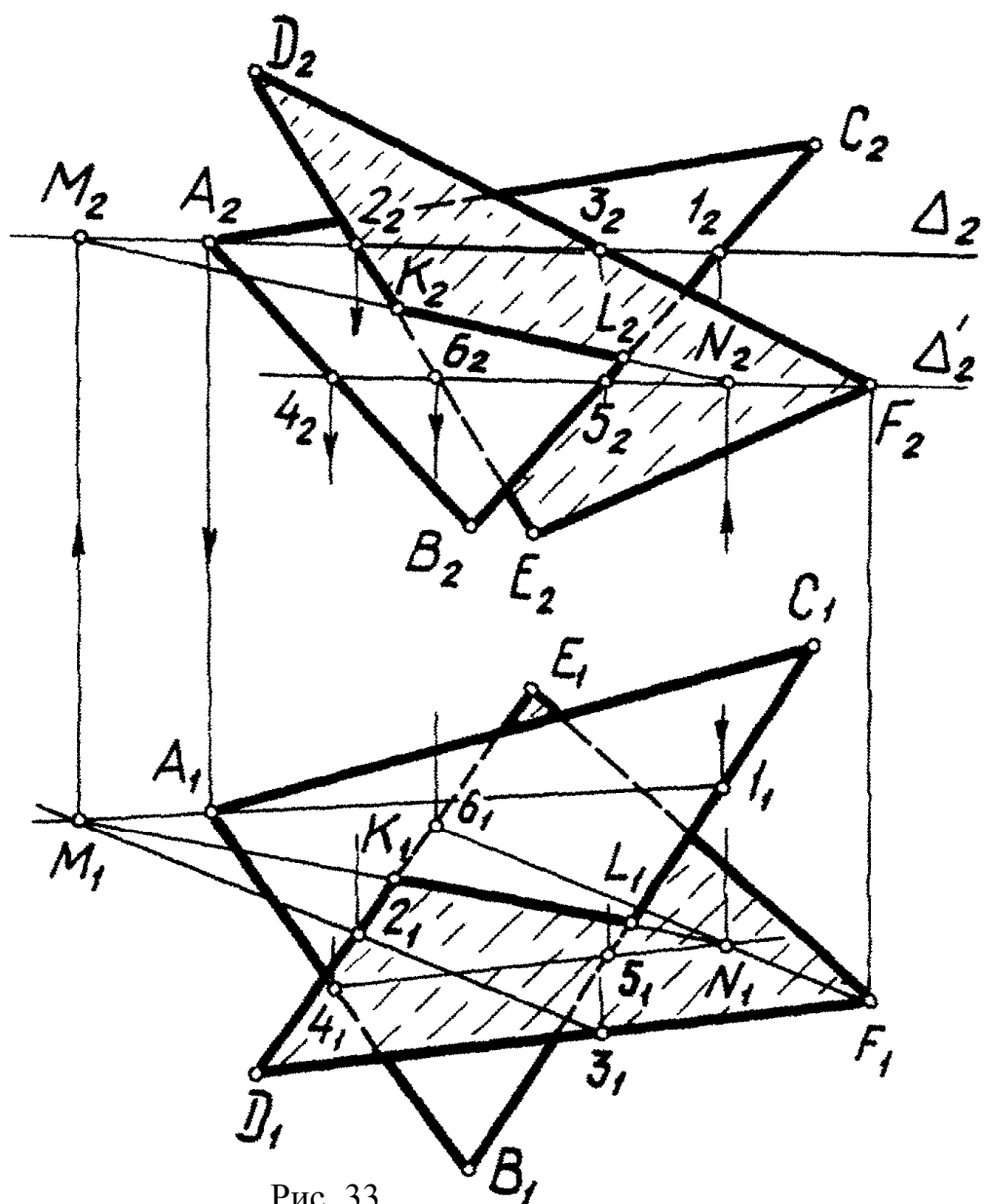


Рис. 33

Определение второй точки  $N$ , принадлежащей линии пересечения плоскостей, выполняется по аналогичному алгоритму. Прямая, соединяющая точки  $M$  и  $N$ , является искомой.

**Построение.** Графическая реализация алгоритмов определения точек  $M$  и  $N$  представлена на рис. 33, где показаны вспомогательные плоскости уровня  $\Delta$  и  $\Delta'$  и решены элементарные задачи 19 (решена четырежды) и 8 (решена дважды). При построении проекций линий пересечения плоскости  $\Delta'$  с заданными плоскостями достаточно было бы точек  $F$  и  $4$ , так как эти линии параллельны линиям пересечения плоскости  $\Delta$  с заданными плоскостями.

Так как пересекающиеся плоскости ограничены треугольниками, на чертеже выделен только отрезок  $[KL]$  линии  $(MN)$  пересечения плоскостей.

Решение этой задачи значительно упрощается, если построить не произвольные точки  $M$  и  $N$  линии пересечения, а непосредственно точки  $K$  и  $L$ , огра-

ничающие отрезок  $[KL]$ . Это решение представлено на рис. 34. Точка  $K$  найдена как точка пересечения стороны  $[DE]$  треугольника  $DEF$  с плоскостью  $\Gamma(ABC)$ , а точка  $L = [BC] \cap \Sigma(DEF)$ , то есть дважды решена первая позиционная задача.

Определение видимости проекций сторон треугольников, выполненное при помощи фронтально конкурирующих точек 1 и 6 и горизонтально конкурирующих точек 4 и 5, показано только на рис. 34.

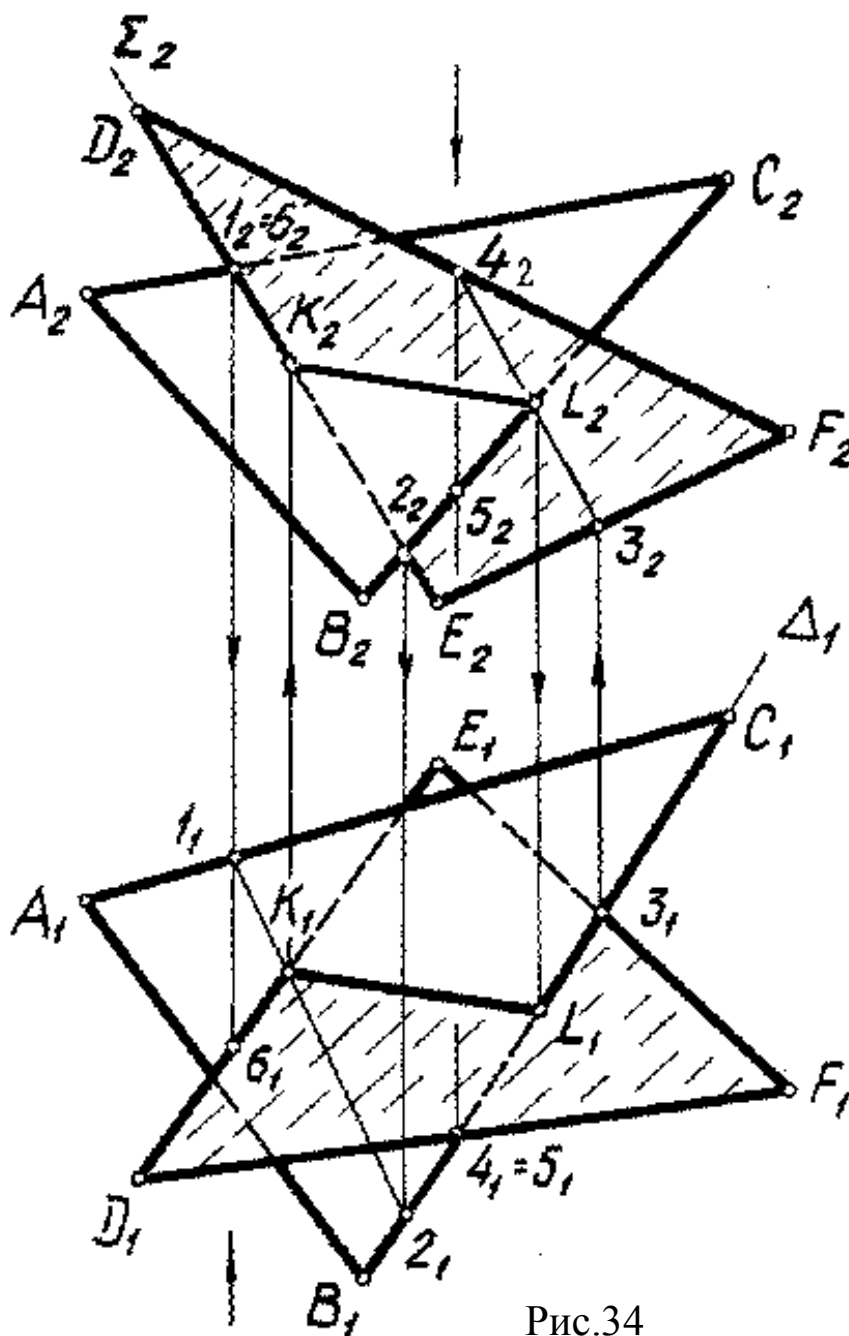


Рис.34

Задача 2. Построение линии пересечения многогранника с плоскостью.

Линия пересечения многогранника с плоскостью (рис. 35) является плоской ломаной линией, вершины которой — точки пересечения ребер, а стороны — ли-



нии пересечения граней многогранника с плоскостью. В соответствии с этим искомая линия может быть определена двумя частными способами, вытекающими

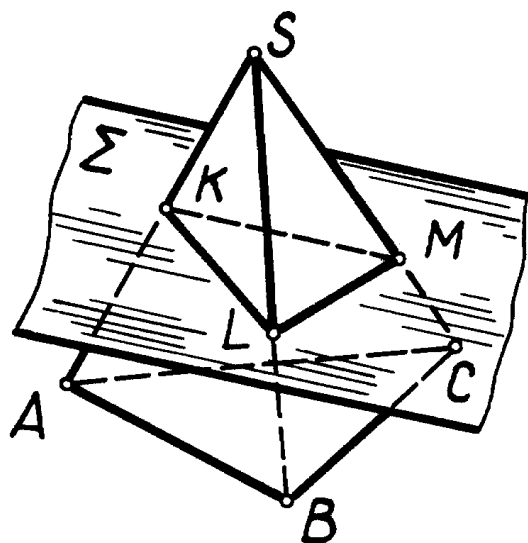


Рис. 35

из основного:

1) построением линий пересечения граней многогранника с плоскостью, т.е. многократным решением второй позиционной задачи;

2) построением точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т.е. многократным решением первой позиционной задачи.

Второй способ графически более прост. Кроме того, вершины ломаной являются опорными точками линии пересечения и их желательно получить непосредственным построением. Поэтому второй способ построения линии пересечения многогранника с плоскостью является предпочтительным.

Решение задачи о построении линии пересечения пирамиды  $SABC$  с плоскостью общего положения  $\Gamma$  показано на рис. 36. Построение вершин  $K$ ,  $L$  и  $M$  ломаной выполнено по алгоритму первой позиционной задачи. Например, алгоритм для определения точки  $K = \Gamma \cap (SA)$  имеет вид:

- 1)  $(SA) \subset \Sigma \perp \Pi_2$ ;
- 2)  $\Gamma \cap \Sigma = (1 - 2)$ ;
- 3)  $(1 - 2) \cap (SA) = K$ .

Точки  $L$  и  $M$  определены аналогично. Полученные проекции вершин соединены прямыми с учетом их видимости относительно  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

На рис. 37 показано построение линии пересечения треугольной пирамиды тремя фронтально проецирующими плоскостями  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\Delta$ . Применение общей схемы решения в данном случае нецелесообразно,

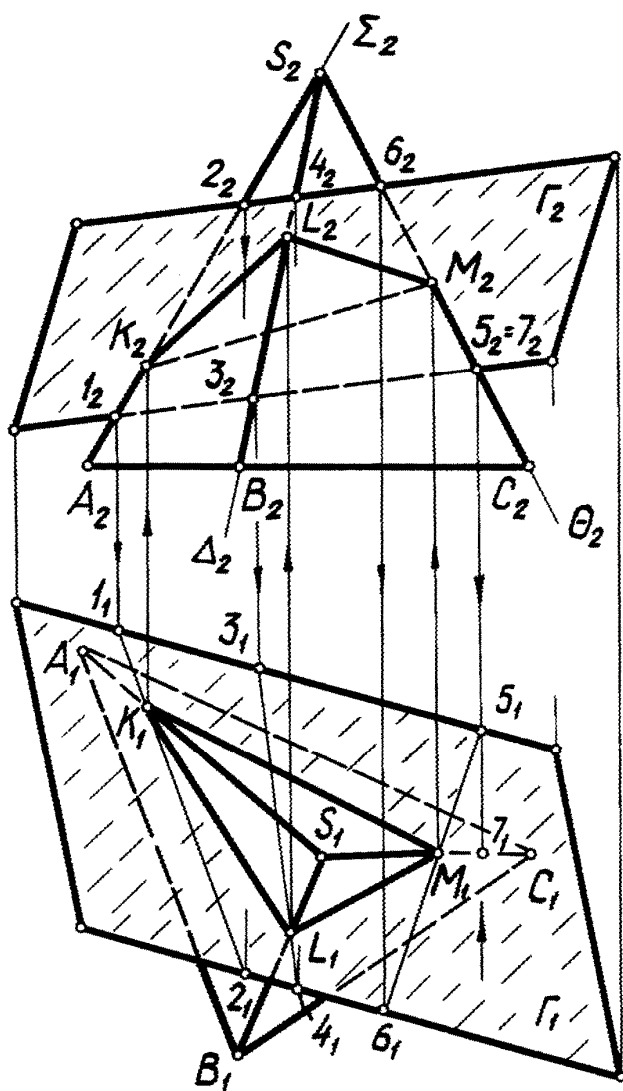


Рис. 36

решение сводится к многократному решению элементарных задач 18, 5 и 8.

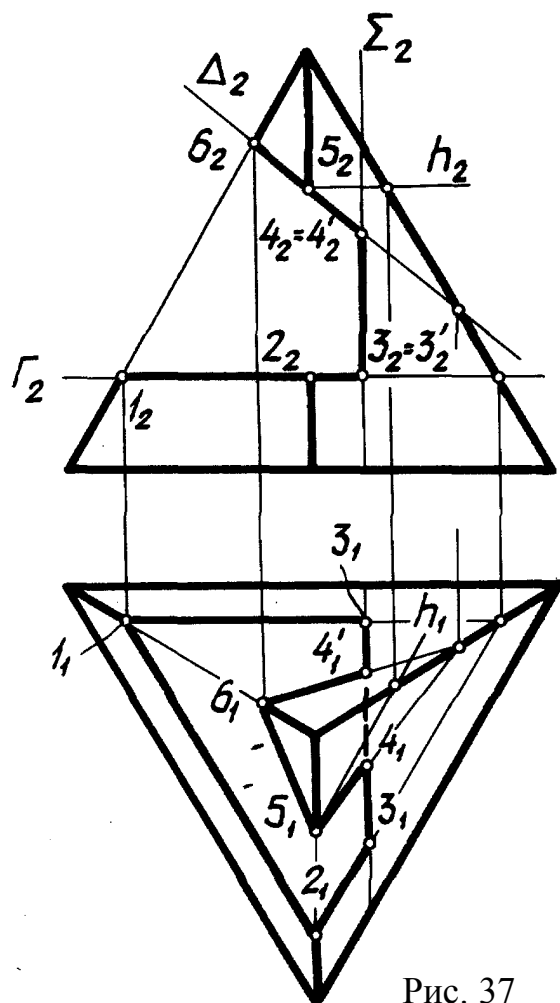


Рис. 37

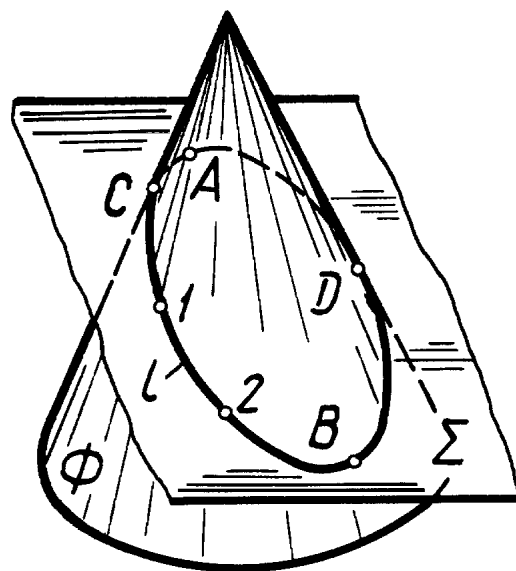


Рис. 38

Задача 3. Построение линии пересечения кривой поверхности с плоскостью.

Линия  $l$  (рис. 38) пересечения кривой поверхности  $\Phi$  с плоскостью  $\Sigma$  представляет собой плоскую кривую. Построение опорных (А, В, С и D) и промежуточных (1 и 2) точек кривой выполняется в соответствии со схемой, приведенной в начале данного параграфа. В качестве вспомогательных поверхностей выбирают плоскости, положение которых в пространстве определяется условиями, также изложенными ранее.

На рис. 39, а показано построение линии пересечения поверхности  $\Phi$  конуса вращения фронтально проецирующей плоскостью  $\Sigma$ , пересекающей все образующие конуса. Линией пересечения в данном случае является эллипс, для построения проекций которого найдены все опорные точки и ряд промежуточных.

Для построения очерковых (относительно  $\Pi_2$ ) точек выполнены следующие операции:

1) Проведена вспомогательная фронтальная плоскость уровня  $\theta$ , проходящая через ось конуса вращения.

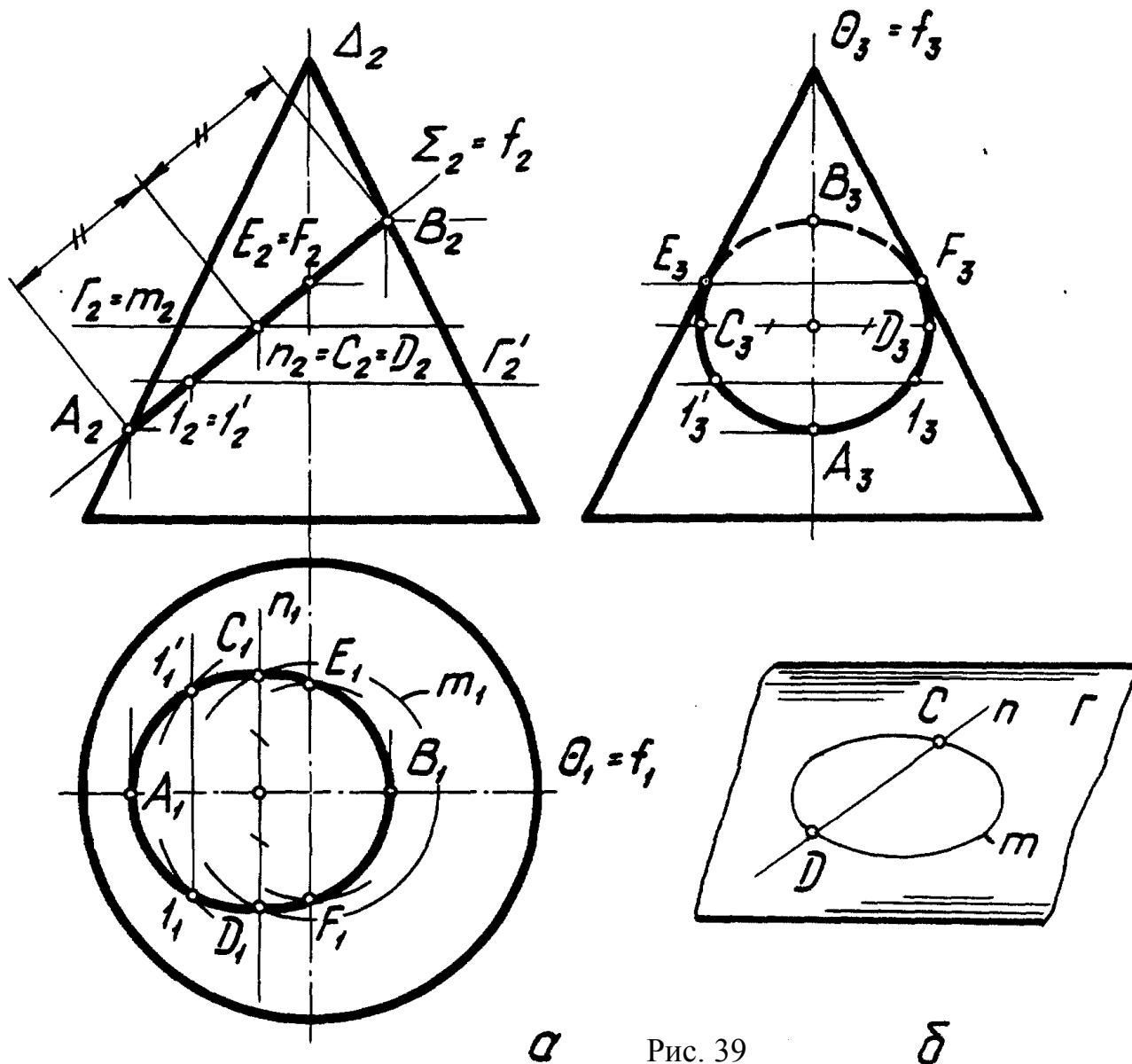


Рис. 39

2) Определены линии пересечения заданных поверхностей  $\Phi$  и  $\Sigma$  со вспомогательной плоскостью  $\theta$ . В результате пересечения  $\Phi$  и  $\theta$  получится фронтальный очерк конуса, а пересечение  $\Sigma$  и  $\theta$  происходит по фронтели  $f$ .

3) Точки  $A$  и  $B$  пересечения фронтального очерка и фронтели являются искомыми.

**П о с т р о е н и е.** Проведена вспомогательная плоскость  $\theta_1 = f_1$ . Отмечены фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  искомых точек  $A$  и  $B$  в пересечении очерка фронтальной проекции конуса (проекция главного меридиана) и фронтальной проекции  $f_2 = \Sigma_2$  фронтели  $f$ . Затем, по линиям связи найдены горизонтальные  $A_1$ ,  $B_1$  и профильные  $A_3$ ,  $B_3$  проекции точек  $A$  и  $B$  из условия принадлежности их плоскости  $\theta$ .

Точки E и F (очерковые относительно  $\Pi_3$ ) определены по аналогичному алгоритму. Они являются точками смены видимости проекции эллипса на  $\Pi_3$ .

Вспомогательная плоскость  $\theta$  является общей плоскостью симметрии для конуса  $\Phi$  и плоскости  $\Sigma$ . Поэтому найденные очерковые точки A и B являются одновременно и экстремальными — высшей и низшей относительно  $\Pi_1$ , наиболее и наименее удаленными относительно  $\Pi_3$ . Они ограничивают большую ось [AB] эллипса, которая проецируется на  $\Pi_2$  в отрезок  $[A_2B_2] \subset \Sigma_2$ . Экстремальные точки C и D (наиболее и наименее удаленные относительно  $\Pi_2$ ) ограничивают малую ось [CD] эллипса, которая является отрезком фронтально проецирующей прямой n. На  $\Pi_2$  она проецируется в точку  $n_2$ , делящую отрезок  $[A_2B_2]$  пополам. Для построения точек C и D в качестве вспомогательной выбрана горизонтальная плоскость уровня  $\Gamma \supset n$ , пересекающая конус  $\Phi$  по окружности m, а плоскость  $\Sigma$  — по прямой n.

Алгоритм в символической записи имеет вид:

- 1)  $n \subset \Gamma // \Pi_1 \wedge \Phi \cap \Gamma \cap \Sigma$ ;
- 2)  $\Gamma \cap \Sigma = n, \Gamma \cap \Phi = m$ ;
- 3)  $m \cap n = C, D$ .

Рис. 39, б иллюстрирует принцип построения точек C и D и им подобных. На чертеже (рис. 39, а) проведена  $\Gamma_2 \supset n_2$ , построены  $m_1$  и  $n_1$ , отмечены точки  $C_1 = m_1 \cap n_1$  и  $D_1 = m_1 \cap n_1$ , по линиям связи найдены  $C_2=D_2$  и  $C_3, D_3$  из условия принадлежности точек поверхности конуса.

3. Для построения промежуточных точек целесообразно использовать в качестве вспомогательных горизонтальные плоскости уровня, которые можно проводить в любом месте между низшей A и высшей B точками. Построение промежуточных точек 1 и 1', показанное на рис. 39, а, выполнено с помощью вспомогательной плоскости  $\Gamma'$  по алгоритму, аналогичному предыдущему. Составьте и запишите его самостоятельно.

Полученные проекции точек на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соединены соответственно плавными кривыми, которые являются эллипсами. На  $\Pi_2$  эллипс сечения конуса плоскостью  $\Gamma$  проецируется в отрезок [AB].

На рис. 40 показано построение другого конического сечения (гиперболы) с помощью горизонтально проецирующих плоскостей, проходящих через вершину конуса и пересекающих его по образующим.

На рис. 41 построены линии пересечения конуса тремя плоскостями  $\Gamma, \Sigma$  и  $\Delta$ , образующими сквозное отверстие. Определите вид линии пересечения каждой плоскостью.

Для определения опорных и промежуточных точек в задачах, данных на рис. 40 и 41, самостоятельно составьте алгоритмы.

На рис. 42 выполнено построение линии пересечения сферы с фронтально проецирующей плоскостью  $\Sigma$ . Сфера пересекается с плоскостью по окружности, которая в данном случае проецируется на  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  в эллипсы, а на  $\Pi_2$  в отрезок  $[A_2B_2] \subset \Sigma_2$ . Решение задачи (составление алгоритмов и построение) аналогично решению задачи, данной на рис. 39.

Примечание. Линия пересечения кривой поверхности проецирующей плоскостью (рис. 39, 40, 41 и 42) может быть построена без применения общей схемы

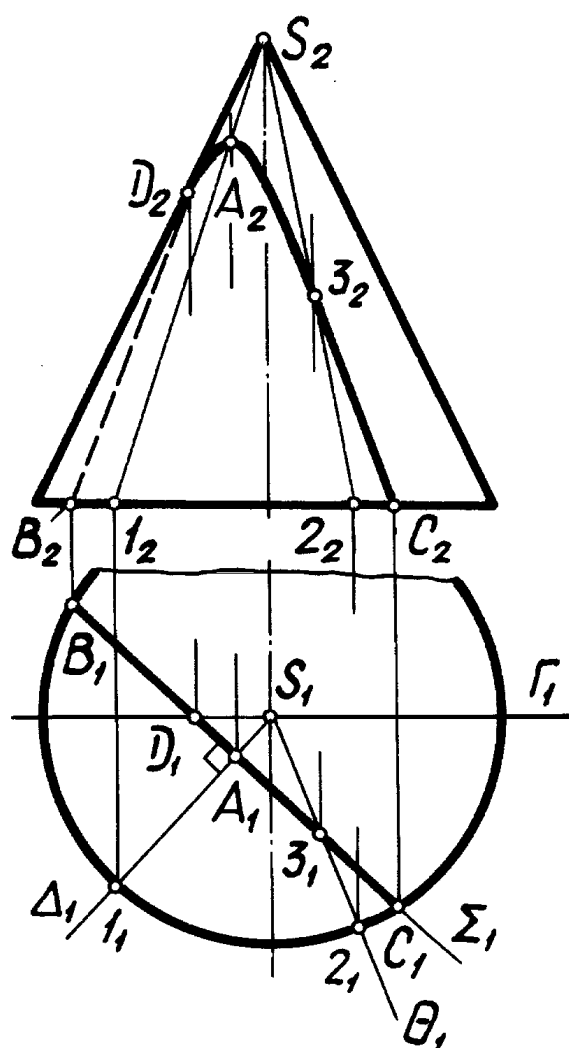


Рис 40

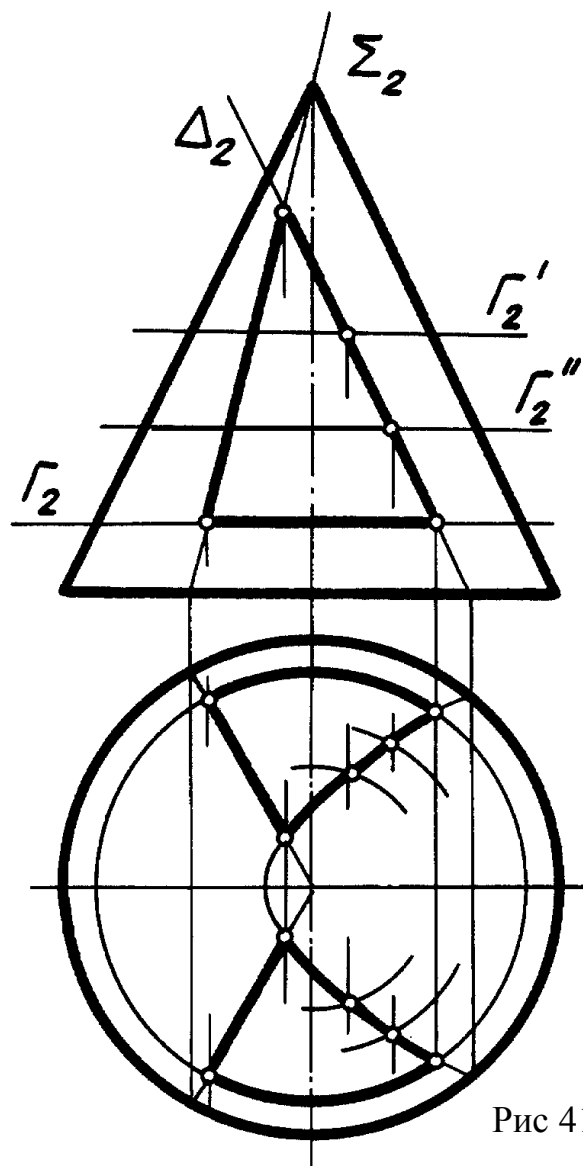


Рис 41

решения второй позиционной задачи. Опорные и промежуточные точки искомой линии можно найти на основании принадлежности их кривой поверхности, так как одна проекция линии пересечения задана.

На рис. 43 построена линия пересечения сферы  $\Phi$  плоскостью общего положения  $\Sigma(l \cap m)$ . Окружность сечения проецируется на плоскости проекций в эллипсы. Задача сведена к предыдущей (рис. 42) путем замены системы плоскостей  $\Pi_2/\Pi_1$  системой  $\Pi_4/\Pi_1$ , в которой плоскость  $\Sigma$  является проецирующей (при построении использована элементарная задача 18).

В системе  $\Pi_4/\Pi_1$  найдены экстремальные точки А и В (высшая и низшая), ограничивающие малую ось эллипса, точки С и D, ограничивающие большую ось эллипса, точки Е и F — очерковые относительно  $\Pi_1$ . Горизонтальные проекции  $E_1$  и  $F_1$  этих точек являются точками смены видимости горизонтальной проекции эллипса. В системе  $\Pi_4/\Pi_1$  показано построение промежуточных точек 5 и 6. Обрат-

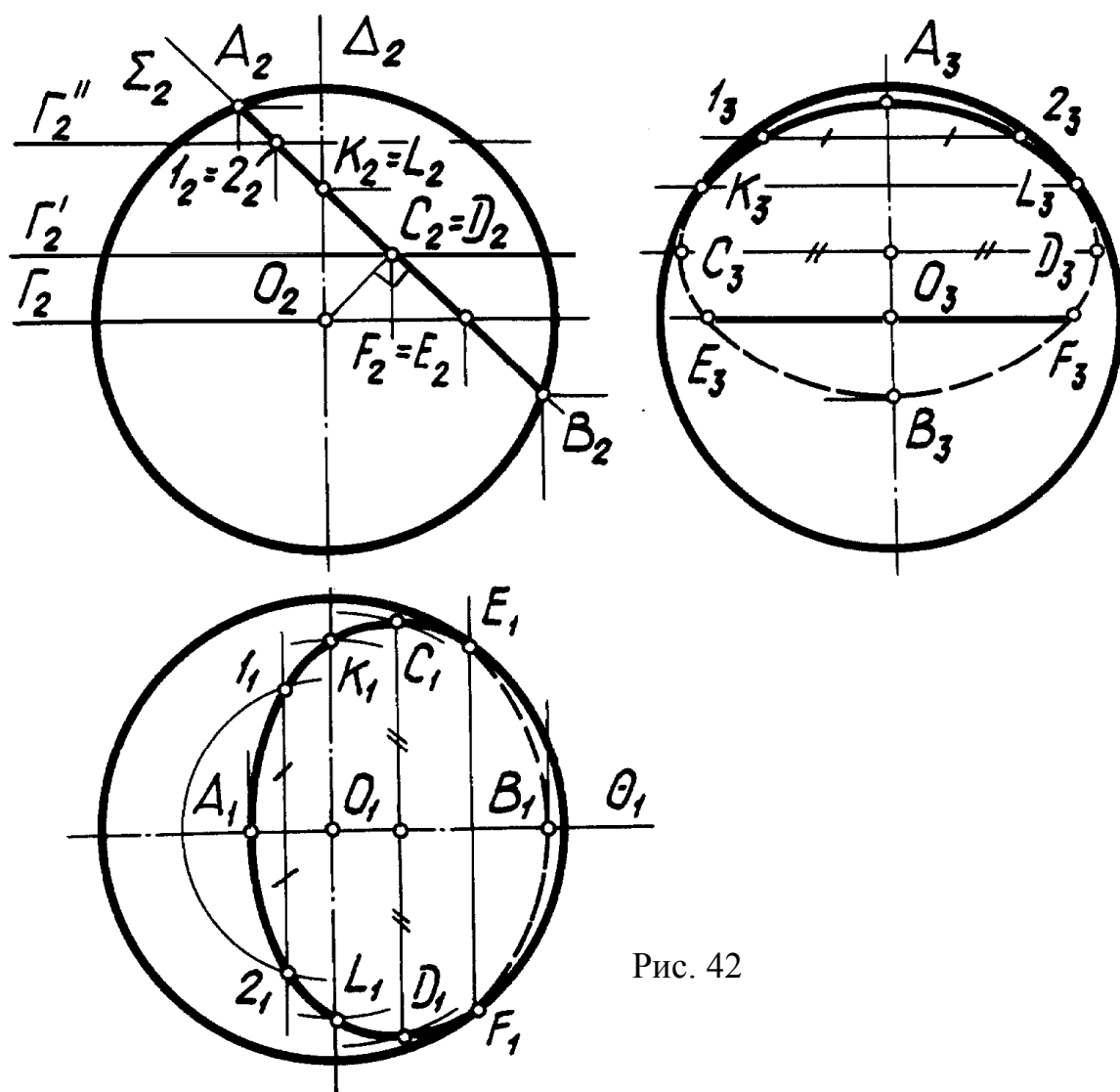


Рис. 42

ным преобразованием найдены фронтальные проекции перечисленных точек. Очерковые относительно  $\Pi_2$  точки К и L найдены в системе  $\Pi_2/\Pi_1$  с помощью фронтальной плоскости уровня  $\Delta$  по алгоритму:

- 1)  $O \in \Delta // \Pi_2 \wedge \Phi \cap \Delta \cap \Sigma$ ;
- 2)  $\Delta \cap \Sigma = f \wedge \Delta \cap \Phi = g$ ;
- 3)  $f \cap g = K, L$ .

В системе  $\Pi_2/\Pi_1$  можно найти очерковые относительно  $\Pi_1$  точки Е и F и достаточное количество промежуточных точек с помощью горизонтальных плоскостей уровня, например, точки 5 и 6 — с помощью плоскости  $\Gamma''(\Gamma''_2)$ , а систему  $\Pi_4/\Pi_1$  использовать только для построения экстремальных точек А, В, С и D. Про-

#### Задача 4. Построение линии пересечения двух многогранников.

Во всех случаях вершинами ломаной будут точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого, а сторонами — отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников. Решение задачи заключается в нахождении вершин или сторон ломаной. В первом случае задача сводится к многократному построению точки пересечения прямой (ребра) с плоскостью, во втором — к многократному построению линии пересечения двух плоскостей.

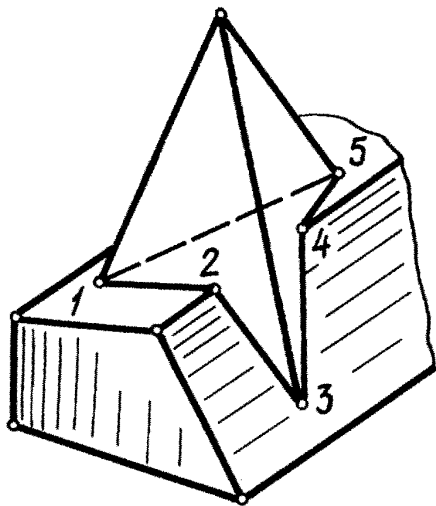


Рис. 44

В большинстве случаев при решении задачи определяют вершины ломаной (опорные точки линии пересечения), а затем соединяют отрезками прямых те пары вершин, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника и одновременно одной и той же грани второго.

На рис. 45 построена линия пересечения поверхностей пирамиды  $SABCD$  и призмы, грани которой являются профильно проецирующими плоскостями. Построение точек пересечения ребер пирамиды с гранями призмы выполнено без применения вспомо-

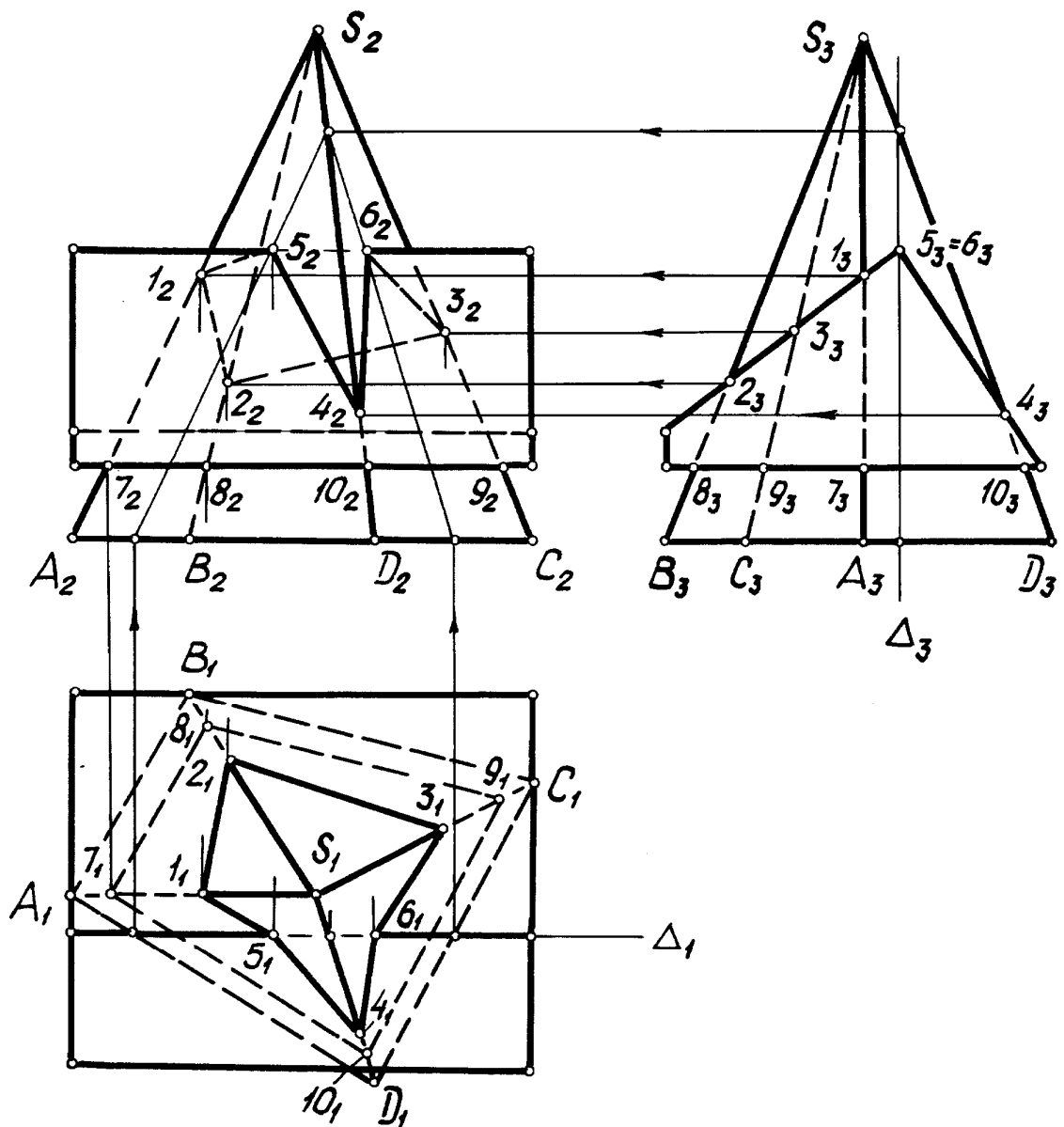
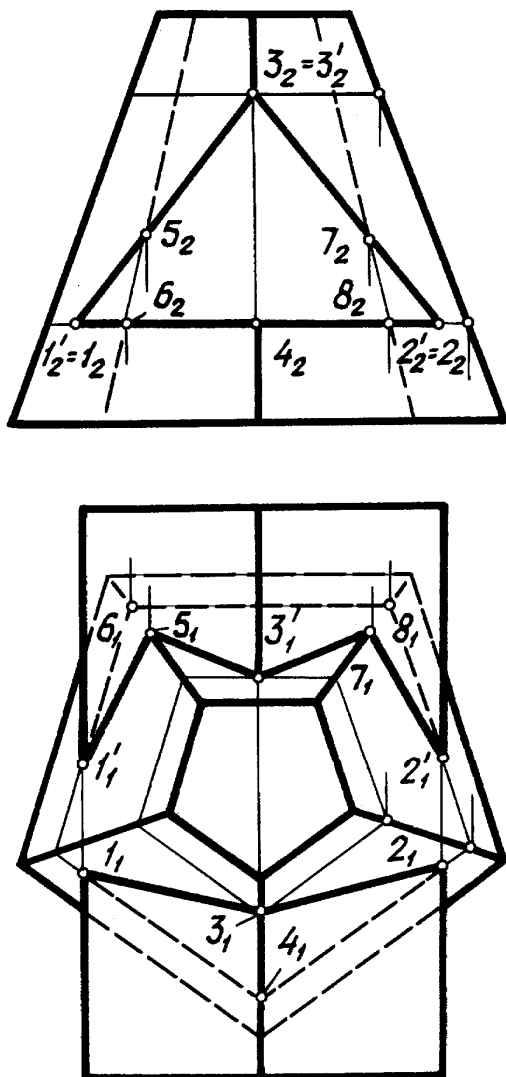


Рис. 45



гательных плоскостей – отмечены профильные проекции  $1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 7_3, 8_3, 9_3, 10_3$  искомых точек 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10 и по линиям связи найдены их фронтальные и горизонтальные проекции. Точки 5 и 6 пересечения верхнего ребра призмы с поверхностью пирамиды найдены по алгоритму первой позиционной задачи с помощью фронтальной плоскости уровня  $\Delta$  (см. задачу на рис. 27). Полу-



ченные вершины соединены в соответствии с приведенным выше правилом. Точки, принадлежащие нижней грани призмы и одновременно граням SAB, SBC, SCD, SAD последовательно соединенные отрезками прямых, образуют плоскую замкнутую ломаную линию 7–8–9–10–7. Ломаная 1–2–3–6–4–5–1 пересечения граней SAB, SBC, SCD, SAD пирамиды с гранями призмы является пространственной. Видимыми относительно какой-либо плоскости проекций являются звенья ломаной, являющиеся линиями пересечения двух видимых относительно соответствующих плоскостей проекций граней призмы и пирамиды. На основании этого видимыми относительно  $\Pi_2$  являются звенья 5–4 и 4–6, а относительно  $\Pi_1$  — все звенья ломаной, 1–2–3–6–4–5–1. Если хотя бы одна из граней любого многогранника невидима относительно какой-либо плоскости проекций, то невидимы и принадлежащие ей звенья ломаной. Поэтому невидимы относительно  $\Pi_2$  звенья 5–1–2–3–6, а относительно  $\Pi_1$  — все звенья ломаной. 7–9–10–7.

На рис. 46 построена линия пересечения пятиугольной усеченной пирамиды с треугольной призмой, грани которой являются фронтально проецирующими плоскостями. Точки 5, 6, 7, 8 пересечения ребер пирамиды с гранями призмы найдены как точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью, а точки 1, 1', 2, 2', 3, 3' пересечения ребер призмы с поверхностью пирамиды и точка 4 пересечения ребра пирамиды с поверхностью призмы — из условия принадлежности их поверхности пирамиды. Соединение вершин и определение видимости звеньев ломаных выполнено так же, как в предыдущей задаче.

Задача 5. Построение линии пересечения многогранной и кривой поверхностей.

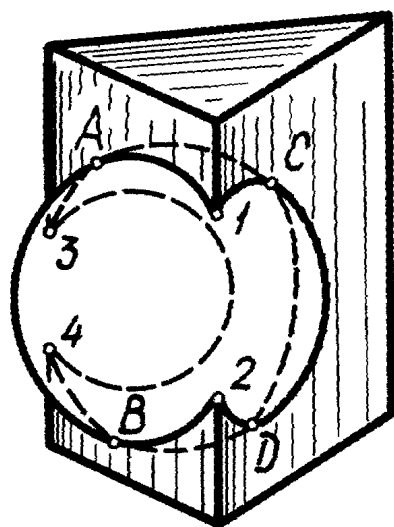


Рис. 47

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей является совокупностью нескольких плоских кривых, каждая из которых — результат пересечения кривой поверхности с одной из граней многогранника (рис. 47). Эти плоские кривые попарно пересекаются в точках пересечения ребер многогранника с кривой поверхности. В случае проникания эта совокуп-

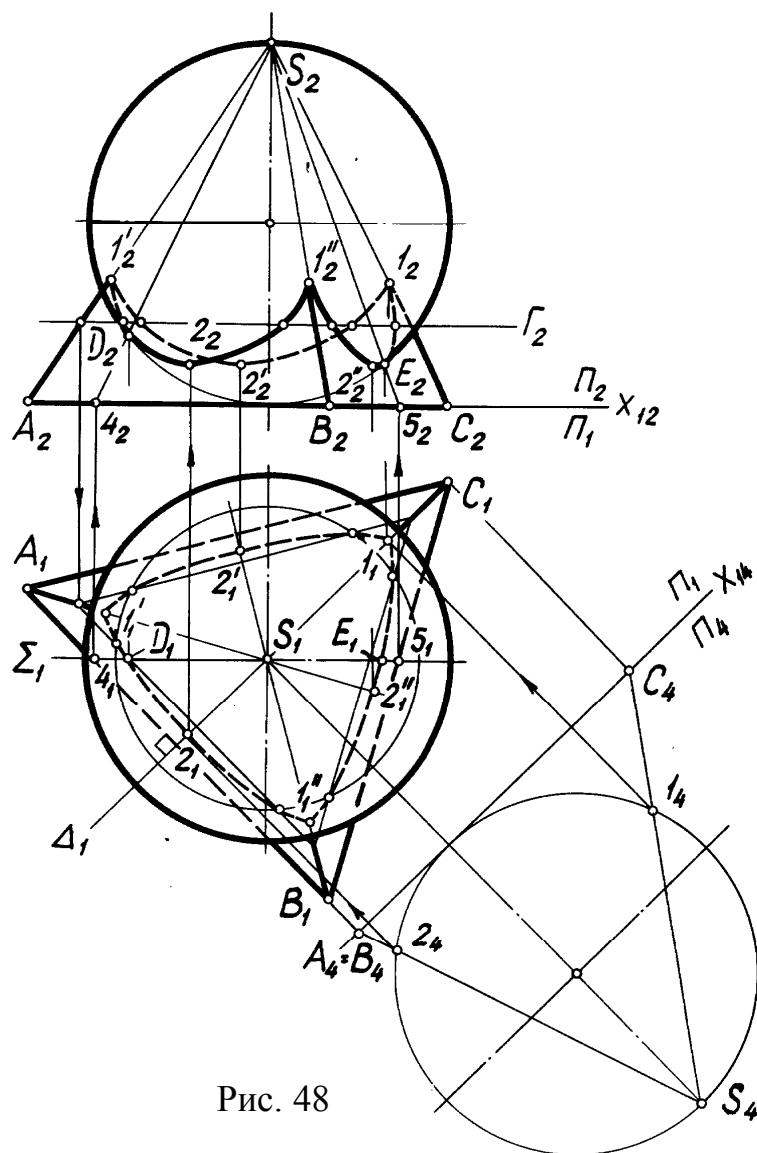


Рис. 48

ность плоских кривых распадается на две или более части. Построение каждой из этих кривых выполняется в соответствии с указаниями, данными в начале п. 2.2 данного параграфа. Алгоритмы построения опорных и промежуточных точек аналогичны рассмотренным в задачах 3 и 4, п. 2.1 и в задаче 3, п. 2.2 данного параграфа.

На рис. 48 построена линия пересечения правильной треугольной пирамиды  $SABC$  со сферой  $\Phi$ .

Для определения очерковых относительно  $\Pi_2$  точек  $D$  и  $E$  через ось вращения сферы проведена фронтальная плоскость уровня  $\Sigma$ , пересекающая сферу по главному меридиану, а пирамиду — по треугольнику  $S-4-5$  и т.д. по схеме. Построена фронтальная проекция  $S_2-4_2-5_2$  треугольника сечения и в пересечении ее с очерком фронтальной проекции сферы (проекцией главного меридиана) получены фронтальные проекции  $D_2$  и  $E_2$  искомых точек. Их горизонтальные проекции  $D_1$  и  $E_1$  найдены по линиям связи из условия принадлежности то-

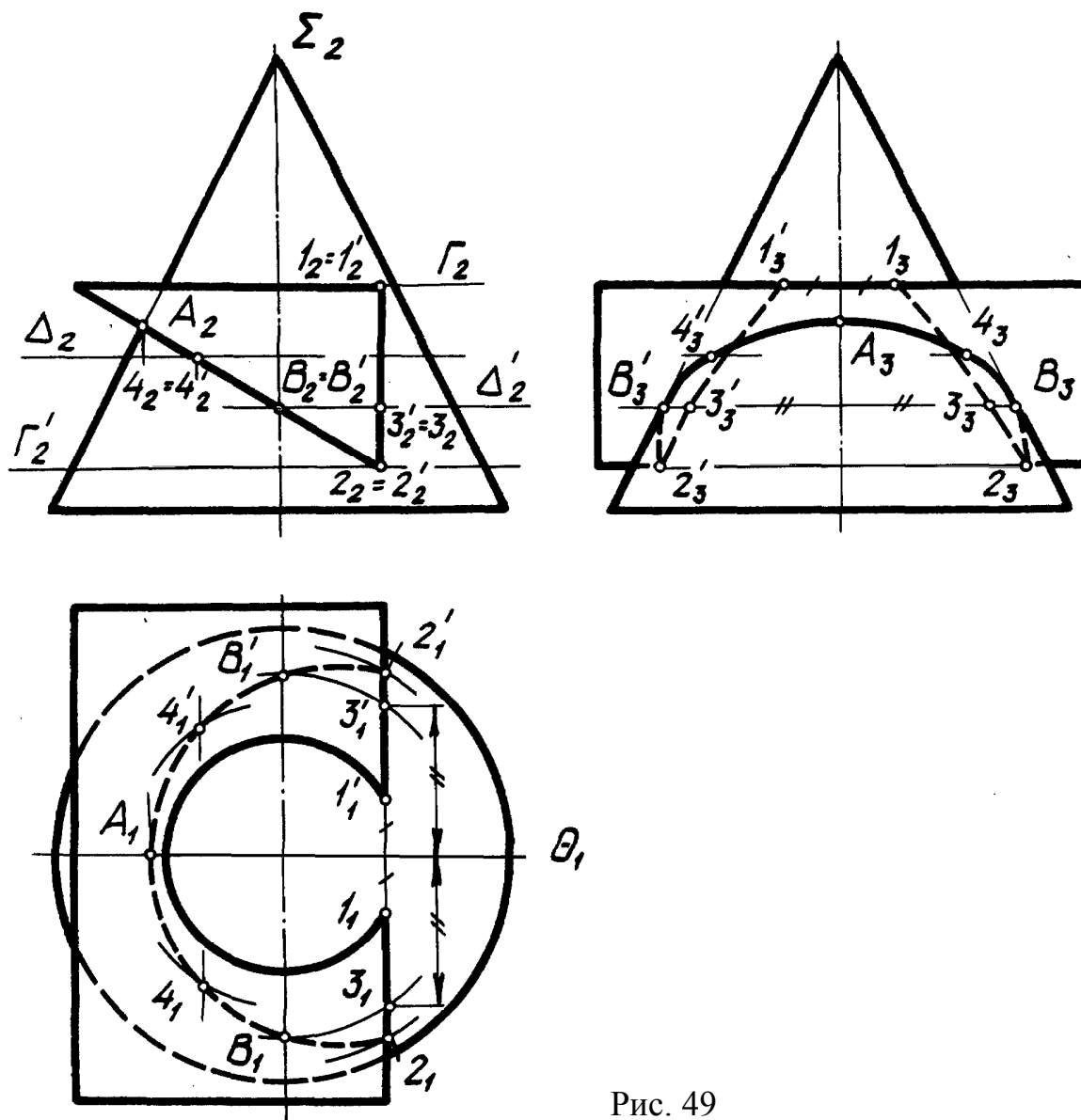


Рис. 49

чек D и E плоскости  $\Sigma$ . Точки  $D_2$  и  $E_2$  являются точками смены видимости фронтальной проекции кривой.

Построение точки 1 пересечения ребра SC пирамиды со сферой  $\Phi$  выполнено с помощью плоскости  $\Delta$ : ( $SC \subset \Delta \perp \Pi_1$ ) с использованием преобразования системы  $\Pi_2/\Pi_1$  в систему  $\Pi_4/\Pi_1$ , в которой плоскость  $\Delta$  является фронтальной плоскостью уровня (см. решение 1-й позиционной задачи 3, на рис. 29, б).

Плоскость  $\Delta$  является общей плоскостью симметрии сферы  $\Phi$  и грани SAB пирамиды. Поэтому точка  $2_4$  является проекцией на  $\Pi_4$  нижней точки 2 линии пересечения грани SAB пирамиды и сферы  $\Phi$ . Проекция  $2_1$  и  $2_2$  точки 2 построены обратным преобразованием.

Примечание. Так как пирамида SABC правильная, и ее высота проходит через центр сферы, высоты точек  $1'$  и  $1''$  равны высоте точки 1, а высоты точек  $2'$  и  $2''$  — высоте точки 2.

На чертеже показано построение промежуточных точек с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Gamma(\Gamma_2)$ , пересекающей сферу по окружности, а пирамиду по треугольнику, подобному основанию. Точки пересечения этих линий — искомые. При построении опорных и промежуточных точек линии пересечения использованы элементарные задачи 1,3, 4, 11, 19. Найденные точки соединены с учетом видимости плавными кривыми. Полученные проекции линии пересечения — совокупность частей эллипсов, являющихся проекциями трех дуг окружностей пересечения сферы с плоскостями общего положения (гранями пирамиды). Видимой относительно  $\Pi_2$  является часть кривой, расположенная перед плоскостью  $\Sigma$ , а относительно  $\Pi_1$  вся кривая невидима, так как расположена под плоскостью экватора сферы.

На рис. 49 построена линия пересечения поверхностей конуса и треугольной призмы. Эта линия состоит из совокупности дуги окружности, части гиперболы и части эллипса.

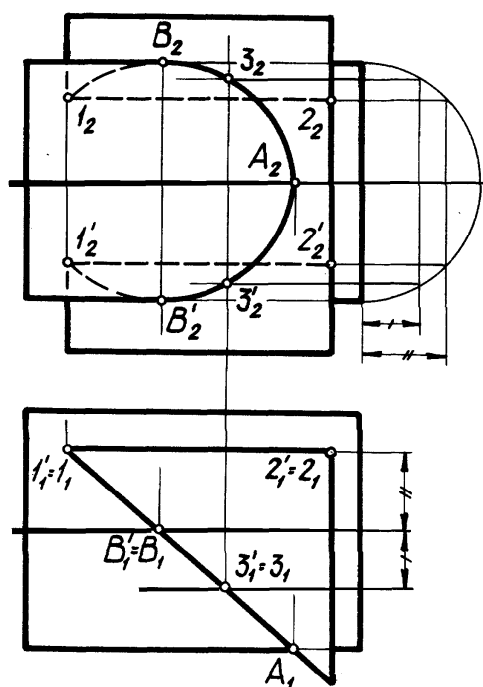


Рис. 50

Построение точек пересечения ребер призмы с поверхностью пирамиды выполнено по алгоритму первой позиционной задачи (см. п. 2.1 данного параграфа), опорные и промежуточные точки эллипса найдены так же, как в задаче на рис. 39. Построение промежуточных точек гиперболы, выполненное с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Delta'$ , ясно

из чертежа. Видимы на  $\Pi_1$  проекции линий, которые принадлежат видимым относительно  $\Pi_1$  граням, а на  $\Pi_3$  — проекции линий, принадлежащие видимым относительно  $\Pi_3$  граням призмы и расположенных слева от профильной плоскости уровня  $\Sigma$ .

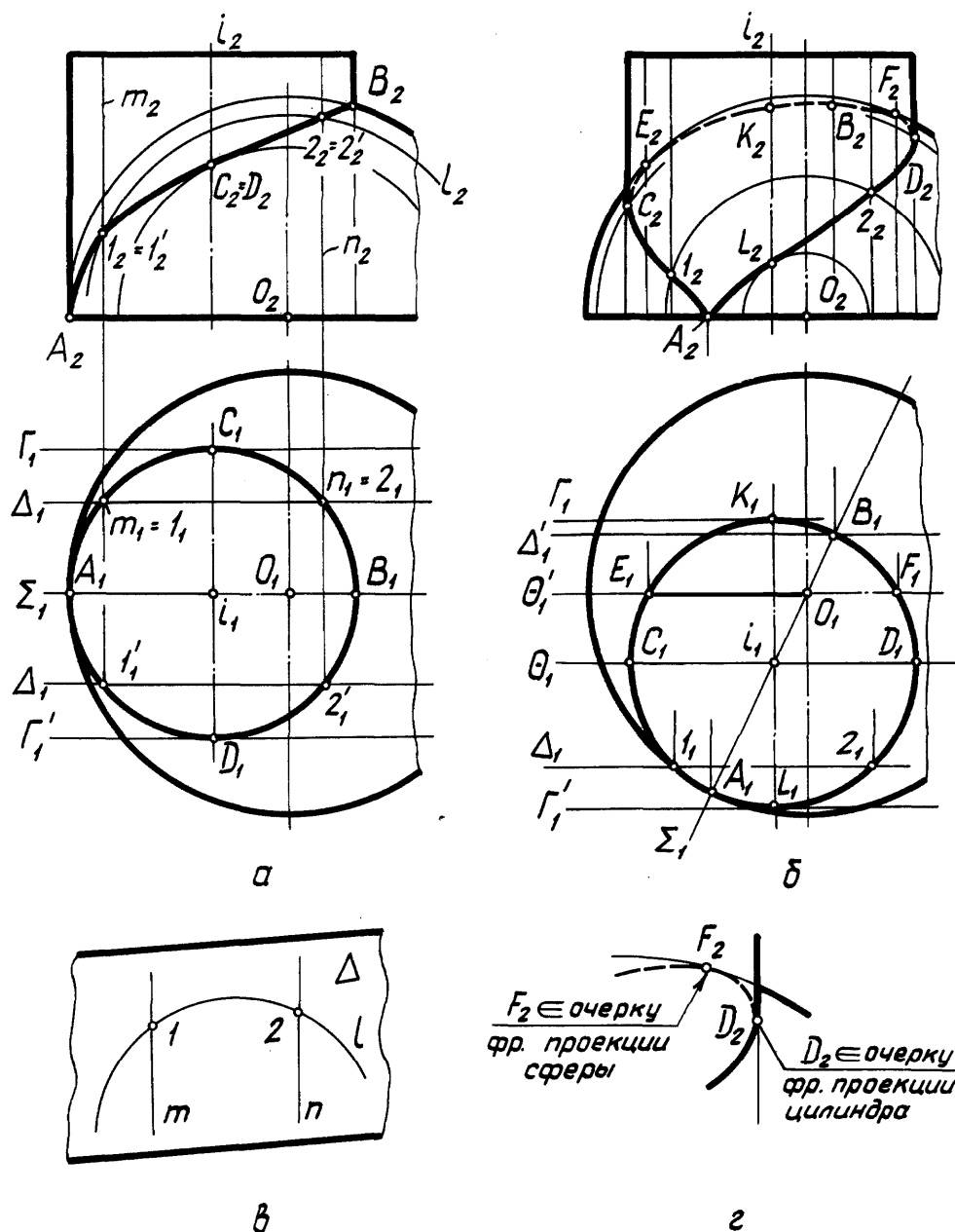


Рис. 51

Так как грани призмы являются проецирующими плоскостями, задачу можно решить на основании принадлежности точек линии пересечения граням призмы и кривой поверхности, т.е. многократно решить элементарную задачу 5.

Так выполнено построение точек линии пересечения поверхностей цилиндра и призмы (рис. 50). Линия пересечения представляет собой совокупность эллипса, окружности и пары образующих. Видимость проекции линии на  $\Pi_2$  определена на основании общих положений.

Задача 6. Построение линии пересечения двух кривых поверхностей.

Линия пересечения двух кривых поверхностей (рис. 32) в общем случае (случай врезки) представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две или более части (случай проникания.). Точки этой линии (опорные и промежуточные) определяются при помощи основного способа построения линии пересечения поверхностей, изложенного в начале п. 2.2 по схеме, приведенной там же.

На рис. 51, а построена линия пересечения сферы  $\Phi$  и цилиндра вращения  $\Psi$ . Построение опорных  $A, B, C, D$  и промежуточных  $1, 1', 2, 2'$  точек линии пересечения выполнено на основании общей схемы решения второй позиционной задачи по однотипному алгоритму (рис. 51, в):

$$1) \Delta // \Pi_2 \wedge \Phi \cap \Delta \cap \Psi;$$

$$2) \Delta \cap \Phi = l \text{ (окружность)} \wedge \Delta \cap \Psi = m, n \text{ (прямолинейные образующие)}$$

$$3) l \cap m = 1, l \cap n = 2.$$

Экстремальные (низшая и высшая) точки  $A$  и  $B$  построены с помощью плоскости  $\Sigma$  (рис. 51, а) — общей плоскости симметрии заданных поверхностей. Так как  $\Sigma // \Pi_2$ , она пересекает обе поверхности по их главным меридианам. Поэтому фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  искомых точек, полученные как точки пересечения очерков фронтальных проекций поверхностей сферы и цилиндра, являются очерковыми одновременно для обеих поверхностей. Экстремальные точки  $C$  и  $D$  (наиболее и наименее удаленные от  $\Pi_2$ ) определены с помощью плоскостей  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ . Так как кривая  $A-1-C-2-B'-2'-D-1'-A$  симметрична относительно плоскости  $\Sigma$ , фронтальные проекции ее видимой и невидимой частей совпадают ( $C_2 = D_2, 1_2 = 1_2', 2_2 = 2_2'$ ).

Задача, на рис. 51, б, отличается от предыдущей только тем, что общая плоскость симметрии  $\Sigma$  заданных поверхностей, проходящая через их оси вращения, не параллельна  $\Pi_2$ . Горизонтальные проекции  $A_1$  и  $B_1$  низшей и высшей точек линии пересечения найдены из условия принадлежности их плоскости  $\Sigma$  и поверхности цилиндра, фронтальная проекция  $A_2$  — из условия принадлежности точки  $A$  поверхности сферы. Построение всех остальных точек (в том числе и высшей точки  $B$ ) аналогично рассмотренному в задаче на рис. 51 а.

Очерковые точки  $C, D, E$  и  $F$ , принадлежащие соответственно главным меридианам цилиндра и сферы, построены с помощью плоскостей  $\theta$  и  $\theta'$ . Точки  $C_2$  и  $D_2$  являются точками смены видимости фронтальной проекции кривой. Видимой относительно  $\Pi_2$  является часть кривой, расположенная перед плоскостью  $\theta$ . На рис. 51, г в увеличенном масштабе показано расположение очерковых точек  $F_2$  и  $D_2$  и видимость проекции кривой и очерков фронтальных проекций поверхностей.

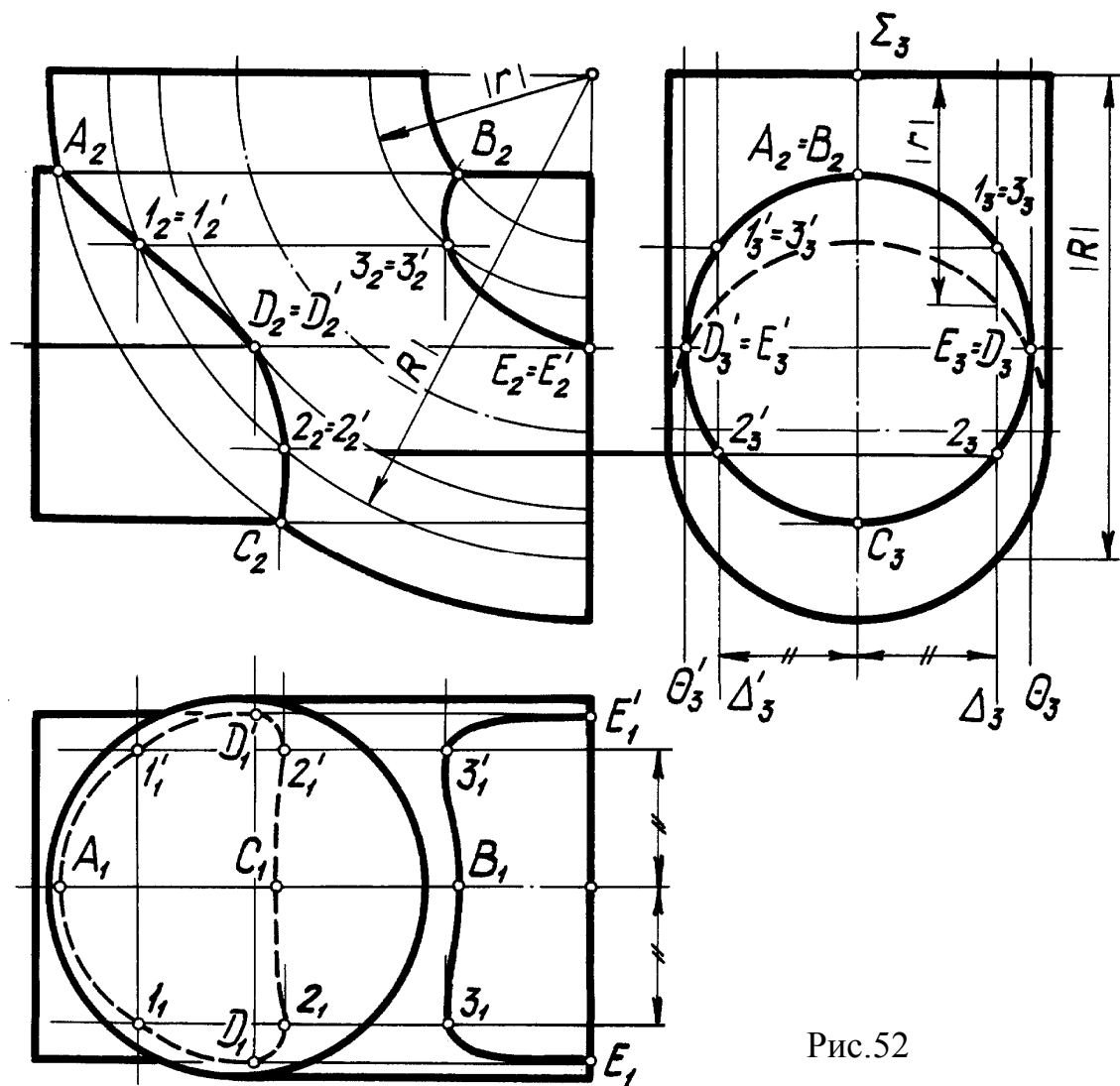


Рис.52

В задаче на рис. 52 решение выполнено с помощью фронтальных плоскостей уровня  $\Sigma(\Sigma_3)$ ,  $\Delta(\Delta_3)$ ,  $\Delta'(\Delta'_3)$ ,  $\theta(\theta_3)$ ,  $\theta'(\theta'_3)$  на основании общей схемы решения второй позиционной задачи. Алгоритм определения опорных и промежуточных точек составьте самостоятельно.

Задача на рис. 53 решена на основании принадлежности точек линии пересечения поверхностям цилиндра и конуса, т.е. сведена к многократному решению элементарной задачи 8, так как горизонтальная проекция линии пересечения задана т. е. совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

На рис. 54 показано построение линии пересечения поверхностей конуса вращения  $\theta$  и наклонного цилиндра вращения  $\psi$  способом концентрических сфер.

Очерковые относительно  $\Pi_2$  точки А и В (они же высшая и низшая) определены с помощью общей, плоскости симметрии  $\Sigma // \Pi_2$ . Применение вспомогательных плоскостей для построения других точек не дает графически простого решения.

Так как оси заданных поверхностей вращения пересекаются и параллельны  $\Pi_2$  (принадлежат общей плоскости симметрии  $\Sigma$ ), качестве вспомогательных

поверхностей могут быть выбраны сферы с общим центром в точке  $O$  пересечения осей заданных поверхностей. Эти сферы соосны с каждой из поверхностей и пересекаются с ними по окружностям. Построение выполняется на основании общей схемы решения второй позиционной задачи по однотипному алгоритму:

- 1)  $\Phi(O, R_{\min} < R < R_{\max})$ ,  $\Phi$  – сфера;
- 2)  $\Phi \cap \theta = m \wedge \Phi \cap \Psi = k$ , –  $m$ ,  $k$  – окружности;
- 3)  $m \cap k = 1, 1'$ .

Графическая реализация алгоритма показана на рис. 54. Окружности  $m$  и  $k$  проецируются на  $\Pi_2$  в виде отрезков прямых  $[m_2]$  и  $[k_2]$ , так как плоскости этих окружностей перпендикулярны осям поверхностей вращения. Точки  $1_2 = 1'_2$  пересечения отрезков  $[m_2]$  и  $[k_2]$  являются совпавшими фронтальными проекциями искомых точек  $1, 1'$ . Горизонтальные проекции  $1_1$  и  $1'_1$  этих точек располагаются на горизонтальной проекции  $m_1$  окружности  $m$ . Точки  $C$  и  $D$  смены видимости кривой относительно  $\Pi_1$  определены как точки пересечения образующих  $n$  и  $n'$  цилиндра с линией пересечения ( $A - 3 - 1 - 2 - B - 2' - 1' - 3 - A$ ).

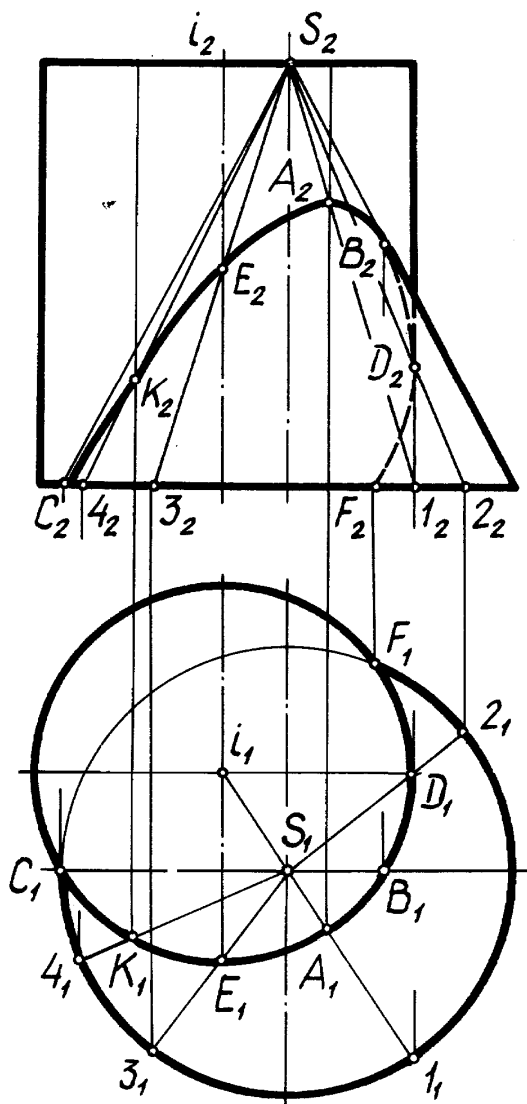


Рис.53

А).

Построение линии пересечения поверхности конуса вращения  $\Psi$  и части тора  $\theta$  способом эксцентрических сфер изображено на рис. 55. Очерковые относительно  $\Pi_2$  точки  $A$  и  $B$  определены с помощью фронтальной плоскости уровня  $\Delta$ . Применение вспомогательных плоскостей для определения остальных точек здесь, как и в предыдущем примере, не дает графически простого решения. Так как оси заданных поверхностей не пересекаются, то не могут быть применены в качестве вспомогательных поверхностей и концентрические сферы. Но заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии  $\Delta$ , семейства окружностей, и могут быть построены сферы, пересекающие одновременно обе поверхности по этим окружностям. Такие сферы с центрами  $(O', O'', \dots)$ , расположенными в различных точках оси конуса и использованы в качестве вспомогательных поверхностей для дальнейшего решения задачи.



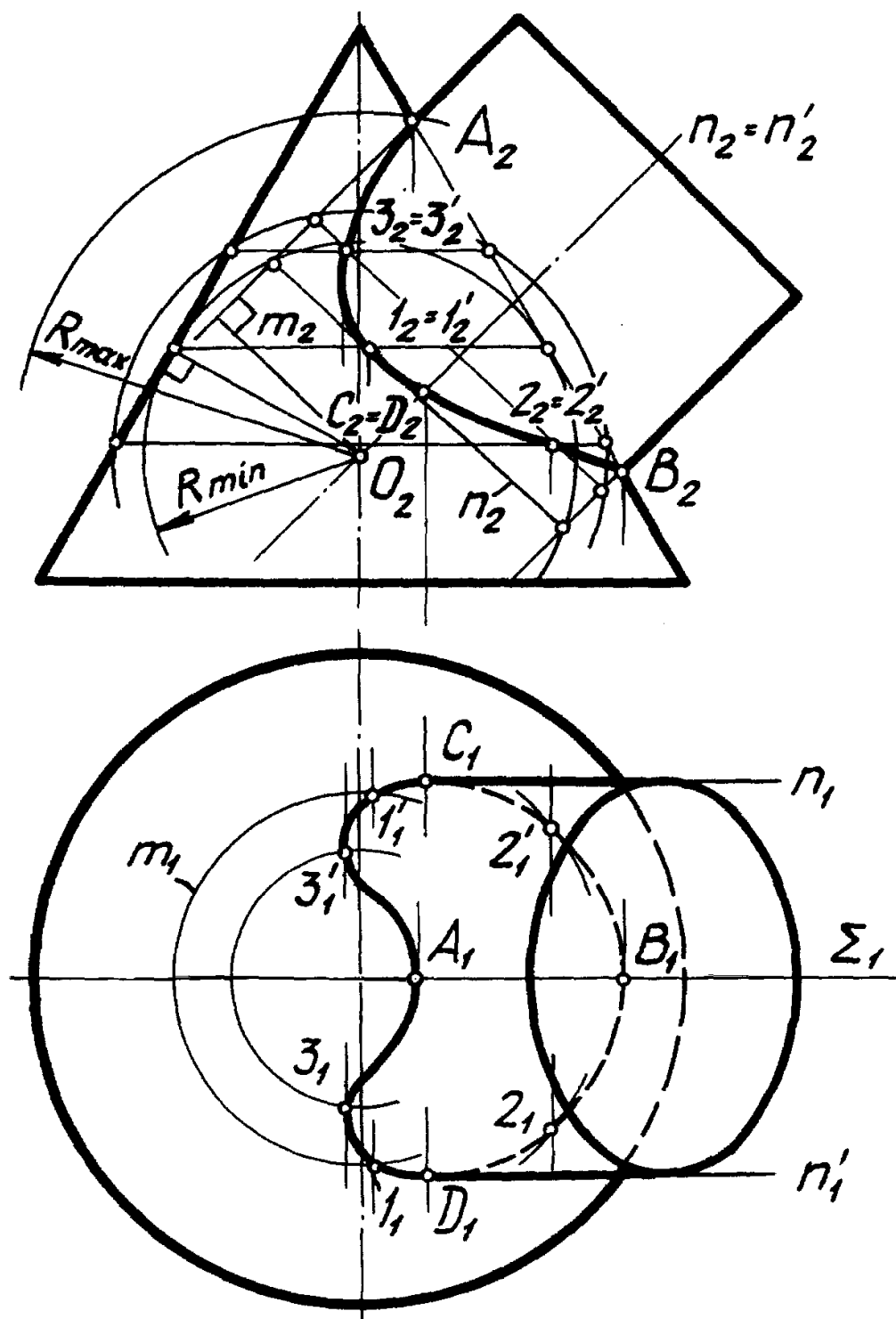


Рис.54

Для нахождения центров вспомогательных сфер отмечены фронтальные проекции  $[1_2-2_2]$ ,  $[5_2-6_2]$  окружностей  $m$ ,  $n$  сечения тора плоскостями  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , проходящими через ось тора. Искомые центры находятся в точках, например,  $O$ , пересечения перпендикуляров к плоскостям этих окружностей, проведенных через их центры, например, через  $O'$ , с осью конуса вращения. Построение всех промежуточных точек выполняется по однотипному алгоритму.

- 1)  $\Phi(O', R)$  — сфера;
  - 2)  $\Phi \cap \theta = m$ ,  $\Phi \cap \Psi = n$ ,  $m$  и  $n$  — окружности;
  - 3)  $m \cap n = D, D'$ .
- Дальнейшее ясно из чертежа.

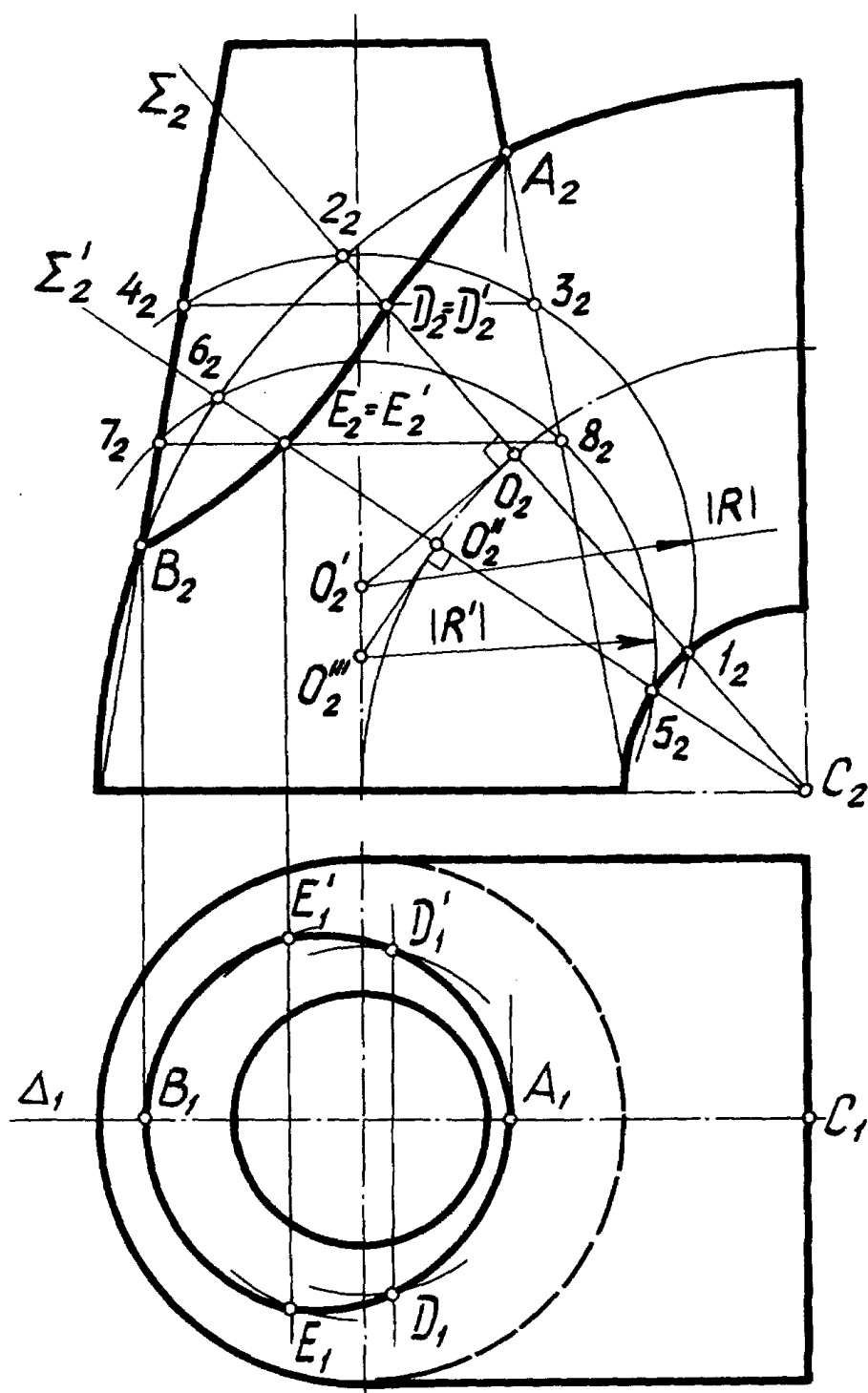


Рис.55

На рис. 56 показано применение способа эксцентрических сфер для построения линии пересечения эллиптического конуса и конуса вращения. Предварительно с помощью сферы, имеющей двойное прикосновение с поверхностью эллиптического конуса, определено направление плоскостей, пересекающих последний по окружностям. Дальнейшее решение аналогично решению предыдущей задачи.

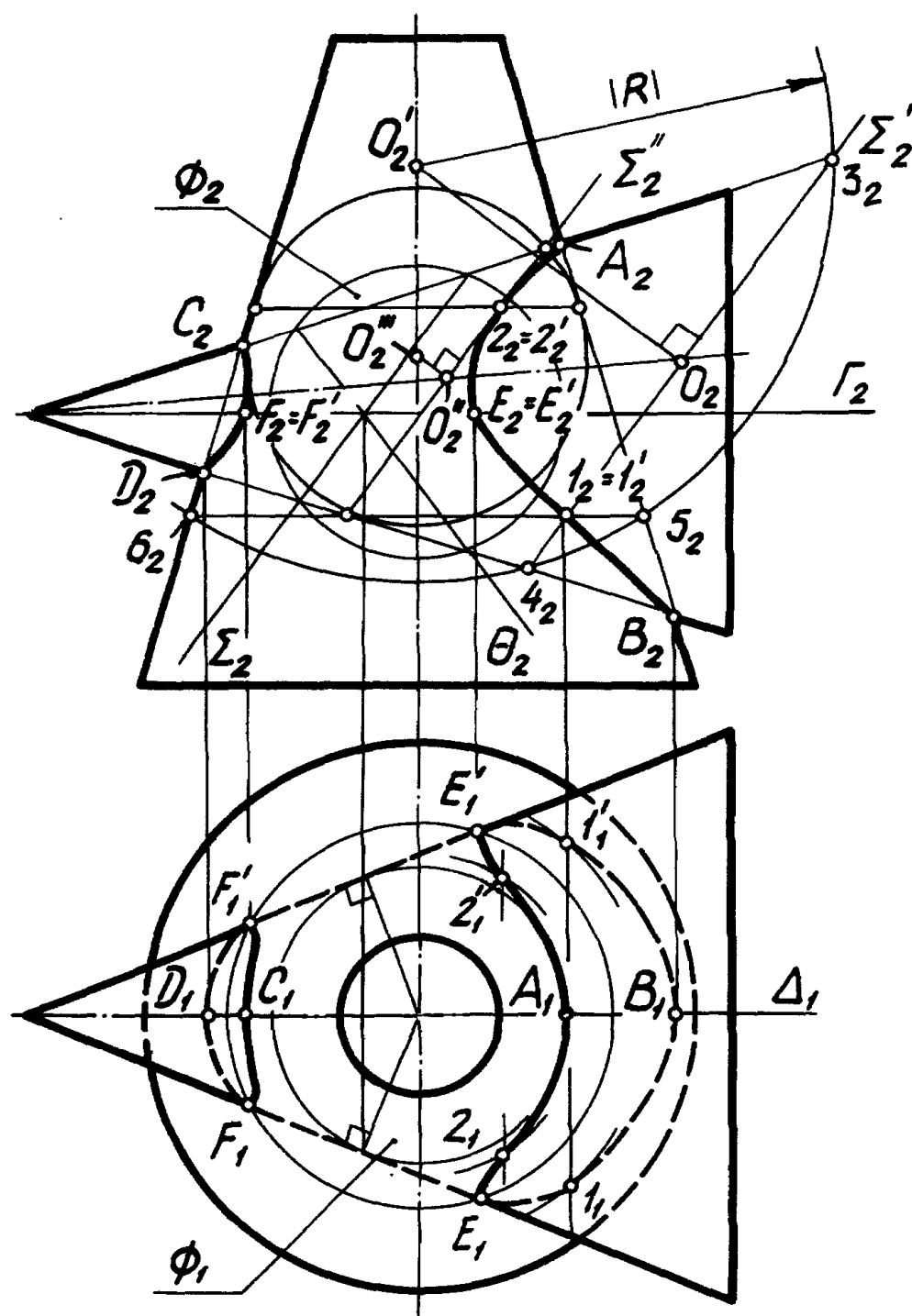


Рис.56

На рис. 57 построена линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра, описанных около одной и той же сферы. На основании теоремы Монжа искомая

линия пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых должны проходить через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Экстремальные (они же очерковые относительно  $\Pi_2$ ) точки  $A$  и  $B$  построены с помощью общей плоскости симметрии  $\Sigma \parallel \Pi_2$ . Построены фронтальные проекции  $[1_2-2_2]$  и  $[3_2-4_2]$  окружностей касания сферы соответственно поверхностей конуса и цилиндра, отмечены фронтальные проекции  $5_2=5'_2$  точек  $5$  и  $5'$  пересечения окружностей. Прямая  $(5-5')$ , соединяющая точки  $5$  и  $5'$  пересечения линий касания, является фронтально проецирующей, плоскости искомых кривых, проходящие через прямую  $(5-5')$  — фронтально проецирующие, и, следовательно, искомые кривые (в данном случае части эллипсов) проециру-

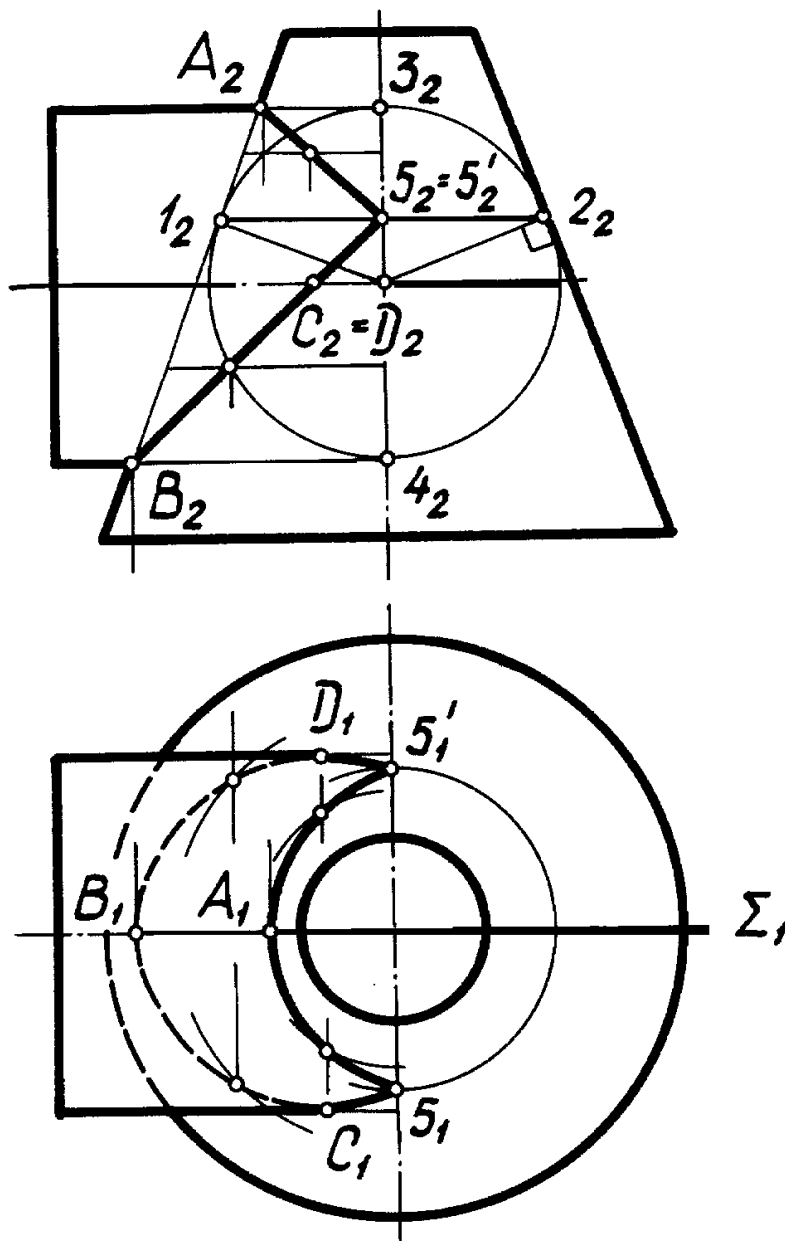


Рис.57

ются на  $\Pi_2$  в отрезки прямых  $[A_2-5_2]$  и  $[B_2-5_2]$ . Дальнейшее построение ясно из чертежа.

### § 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими называются задачи, связанные с измерением расстояний и угловых величин. В них определяются действительные величины и форма геометрических фигур, расстояния между ними и другие характеристики по их метрически искаженным проекциям. Решение метрических задач основано на том, что любая плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в конгруэнтную фигуру.

Поэтому при решении метрических задач широко используются способы преобразования комплексного чертежа, а также теоретические положения, изложенные в теме “Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости”.

В данном параграфе рассматриваются три группы метрических задач. К первой относятся задачи, в которых требуется найти расстояние между двумя геометрическими фигурами; ко второй — задачи на определение действительных величин плоских фигур и углов; к третьей группе принадлежат задачи, связанные с построением в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам.

#### 3.1. Задачи на определение расстояния между геометрическими фигурами

Искомое расстояние во всех задачах этой группы измеряется длиной отрезка, заключенного между заданными геометрическими фигурами и перпендикулярного к одной из них (задачи 1 и 4) или одновременно к обеим (задачи 2, 3 и 5). Этот отрезок проецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекцией, которая будет перпендикулярна одной (задачи 1, 3 и 4) или обеим (задачи 2 и 5) геометрическим фигурам, между которыми определяется расстояние. Отсюда вытекает общая схема решения задач этой группы.

1. Одним из способов преобразования комплексного чертежа привести обе заданные геометрические фигуры (или одну из них) в положение, перпендикулярное какой — либо плоскости проекций.

2. Построить проекцию искомого отрезка на этой плоскости.

На основании этой схемы составляется алгоритм решения каждой конкретной задачи этой группы.

Выбирая способ преобразования комплексного чертежа при составлении алгоритма, следует исходить из требований компактности чертежа, четкости и простоты графических операций.

Примеры.

Задача 1. Определение расстояния от точки  $M$  до прямой общего положения  $l$  (рис. 56).

Искомое расстояние измеряется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $l$ . Отрезок  $[MN]$  спроецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскости проекций, перпендикулярную прямой  $l$ . Пользуясь схемой, составляем алгоритм решения.

1. Преобразовать прямую в проецирующую прямую способом замены плоскостей проекций.

2. Построить проекцию отрезка на плоскость  $\Pi_5 \perp l$ , длина которого определяет искомое расстояние.

**П о с т р о е н и е.** Для преобразования прямой  $l$  общего положения в проецирующую выполнены две последовательные замены плоскостей проекций: вначале прямая преобразована в линию уровня, а затем линия уровня преобразована в проецирующую прямую, т.е. последовательно решены элементарные задачи 21 и 22. Построены проекции  $M_4$  и  $M_5$  точки  $M$  в системе  $\Pi_4/\Pi_5$ . Отрезок  $[M_5N_5]$  является искомым:  $[M_5N_5] \cong [MN]$ . На рис. 58 показано построение проекций  $[M_4N_4]$ ,  $[M_1N_1]$ ,  $[M_2N_2]$  отрезка  $[MN]$  обратным преобразованием.

**Задача 2.** Определение расстояния между параллельными прямыми  $l$  и  $m$  (рис. 59).

Расстояние между двумя параллельными прямыми  $l$  и  $m$  определяется длиной отрезка, перпендикулярного к ним. Алгоритм этой задачи аналогичен предыдущему.

**Задача 3.** Определение расстояния между скрещивающимися прямыми  $l$  и  $m$  (рис. 60).

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми  $l$  и  $m$  определяется длиной отрезка  $[MN]$ , одновременно перпендикулярного к обеим прямым. На плоскость, перпендикулярную к одной из них, этот отрезок спроецируется в истинную величину. Отсюда вытекает алгоритм решения:

1. Преобразовать прямую  $m$  (или  $l$ ) в проецирующую прямую способом замены плоскостей проекций.

2. Построить проекцию  $[M_5N_5]$  отрезка  $[MN]$  на плоскость  $\Pi_5 \perp m$ , длина которой определяет искомое расстояние.

**П о с т р о е н и е.** При помощи двойной замены плоскостей проекций прямая  $m$  преобразована в проецирующую, построены проекции  $l_4$  и  $l_5$  прямой  $l$  и проекция  $[M_5N_5]$  отрезка  $[MN]$ . Величина  $[M_5N_5]$  является искомым расстоянием. На рис. 60 показано построение проекций этого отрезка в системе  $\Pi_2/\Pi_1$ .

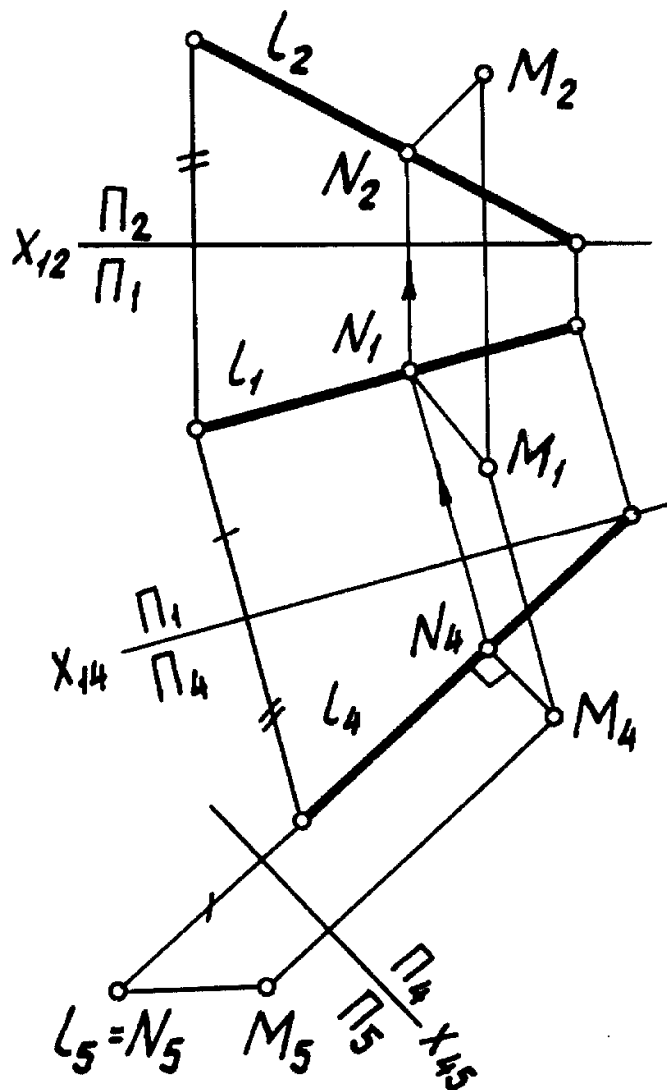
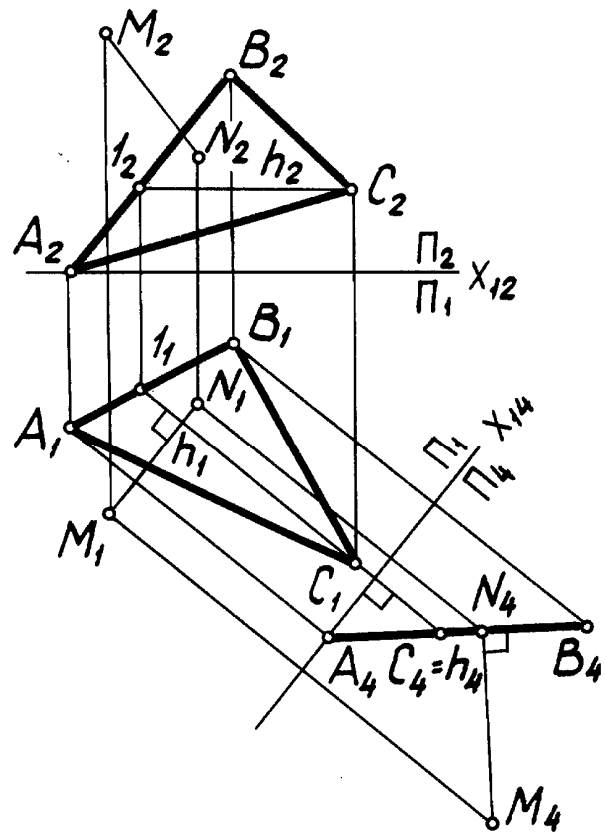
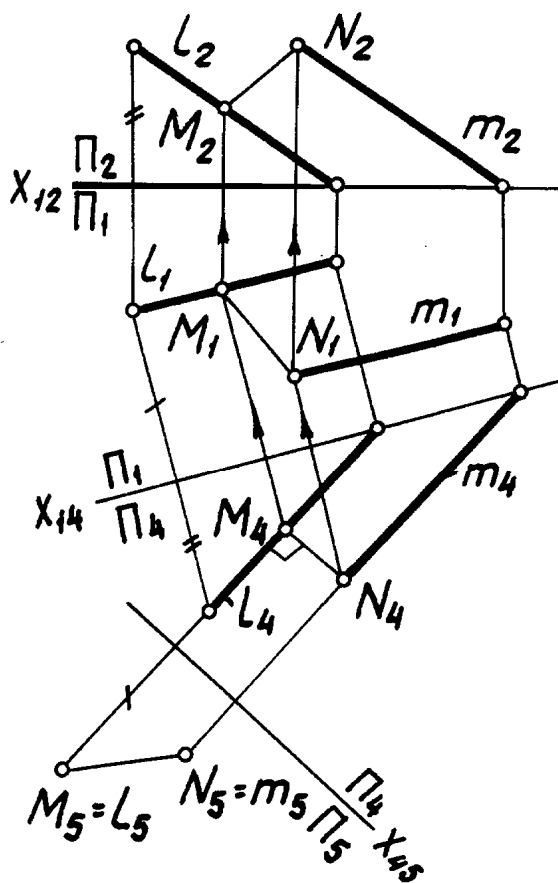


Рис. 58



Задача 4. Определение расстояния от точки М до плоскости общего положения  $\Gamma(ABC)$ .

Расстояние от точки до плоскости  $\Gamma(ABC)$  измеряется длиной отрезка  $[MN]$ , перпендикулярного к плоскости  $\Gamma(ABC)$ .

Алгоритм решения:

1. Преобразовать плоскость  $\Gamma$  в проецирующую способом замены плоскостей проекций.

2. Построить проекцию  $[M_4N_4]$  отрезка  $[MN]$  на плоскость  $\Pi_4$ .

П о с т р о е н и е. Последовательно решены элементарные задачи Рис. 62 и 14. Длиной  $|M_4N_4|$  определяется искомое расстояние. Обратным преобразованием построены проекции  $[M_1N_1]$ ,  $[M_2N_2]$  отрезка  $[MN]$ .

Задача 5. Определение расстояния

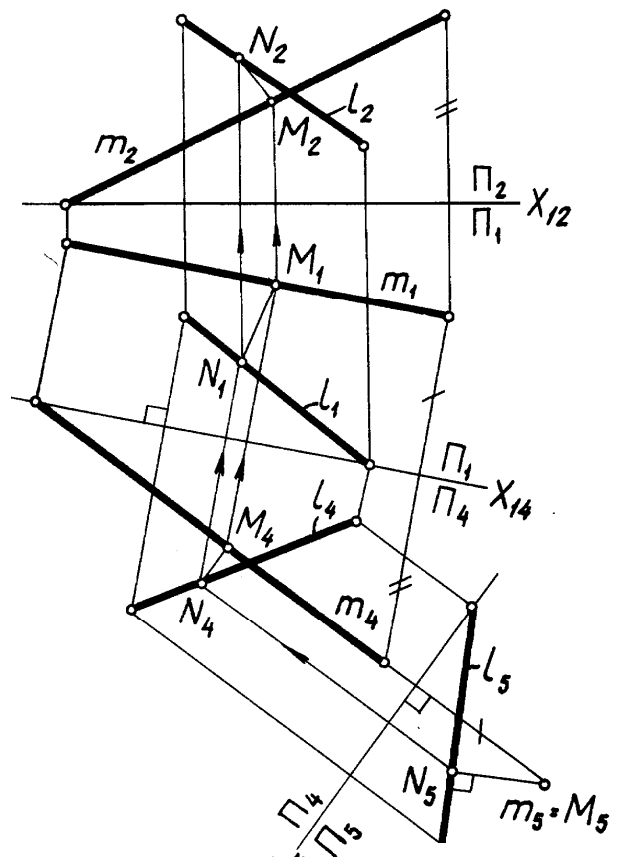


Рис. 61 Рис. 61





ству. В этом смысле способ вращения вокруг линии уровня является наиболее целесообразным для решения большинства задач данной группы, так как дает решение путем одного преобразования комплексного чертежа.

Примеры.

Задача 1. Определение действительной величины плоской фигуры.

На рис. 63 показано определение действительной величины треугольника ABC способом вращения вокруг линии уровня. Плоскость треугольника ABC вращением вокруг горизонтали  $h$  повернута до совмещения с горизонтальной плоскостью уровня  $\Gamma$  (см. элементарные задачи 4 и 25).

На рис. 64 решение аналогичной задачи выполнено способом замены плоскостей проекций (см. элементарные задачи 4, 23 и 24).

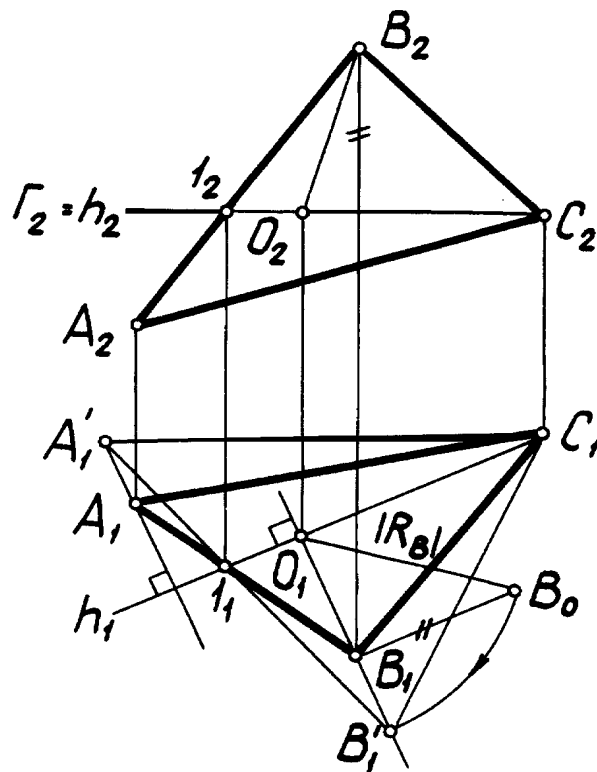


Рис. 63

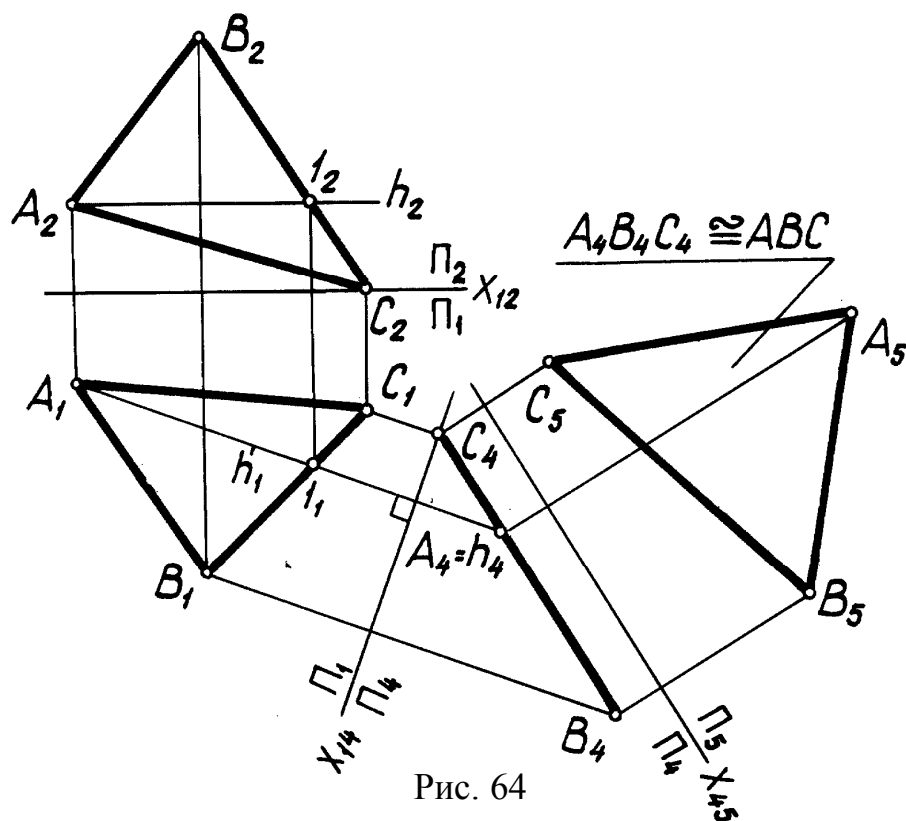


Рис. 64

Задача 2. Определение величины угла, образованного двумя пересекающимися прямыми. Задачу решите самостоятельно аналогично предыдущей.

Задача 3. Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью (рис. 65, 66).

Величина угла  $\alpha$  наклона прямой  $l$  к плоскости  $\Sigma$  (рис. 65) измеряется величиной линейного угла, образованного этой прямой и ее прямоугольной проекцией на данную плоскость. Для определения угла  $\alpha$ , следовательно, необходимо:

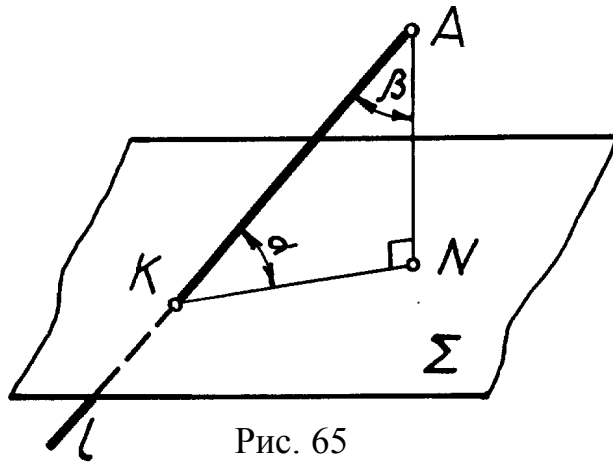


Рис. 65

1. Из произвольной точки  $A$  прямой  $l$  опустить перпендикуляр на плоскость  $\Sigma$ .

2. Определить точки  $K$  и  $N$  пересечения соответственно прямой  $l$  и построенного перпендикуляра с плоскостью  $\Sigma$ .

3. Определить истинную величину угла  $\alpha$  одним из способов преобразования чертежа.

Задача становится проще (можно избежать выполнения пункта 2), если вместо угла  $\alpha$  определить угол  $\beta$ , дополнительный к углу  $\alpha$ , а затем найти  $\alpha$  из соотношения  $\alpha = 90^\circ - \beta$ . Тогда алгоритм будет выглядеть так:

1. Из точки  $A$  прямой  $l$  опустить перпендикуляр  $n$  на плоскость  $\Sigma$ .

2. Преобразовать плоскость угла  $\Gamma(l \cap n)$  в плоскость уровня для определения истинной величины угла  $\beta$ . Решение задачи выполните самостоятельно.

На рис. 66 дано другое решение аналогичной задачи. Величина угла  $\alpha$  ме-

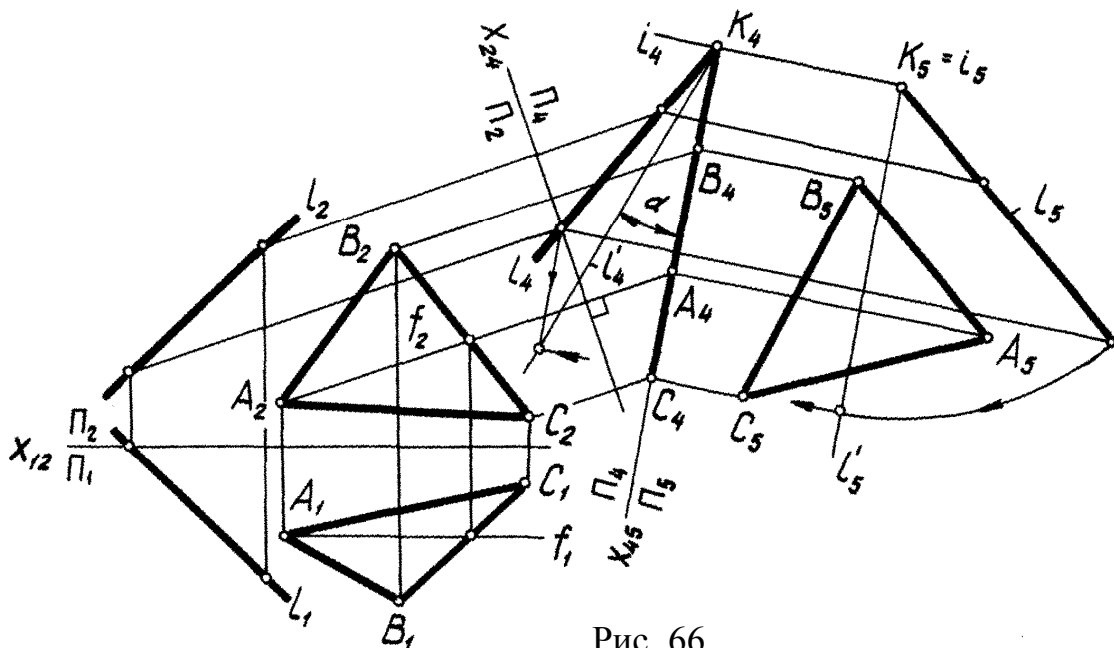


Рис. 66

жду прямой  $l$  и плоскостью  $\Lambda(ABC)$  определена путем трех преобразований чертежа.

Алгоритм:

1. Преобразовать плоскость  $\Lambda(ABC)$  в проецирующую. Построить проекцию  $l_4$  прямой  $l$ .

2. Преобразовать полученную проецирующую плоскость в плоскость уровня. Построить проекцию  $l_5$  прямой  $l$ .

3. Вращением вокруг прямой, перпендикулярной плоскости уровня и соответствующей плоскости проекций, повернуть прямую  $l$  до положения, параллельного второй плоскости проекций.

П о с т р о е н и е. На рис. 66 первые два пункта выполнены способом замены системы плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_1$  на  $\Pi_4/\Pi_5$ , определена точка  $K$  пересечения  $l$  и  $\Lambda$ . Вращением вокруг оси  $i \perp \Pi_5$  (причем  $i \in K$ ) прямая  $l$  приведена в положение, параллельное  $\Pi_4$ . Угол  $\alpha$  – искомый.

Задача 4. Определение величины угла между двумя плоскостями (рис. 67, 68).

Угол между плоскостями  $\Gamma$  и  $\Delta$  (рис. 67) измеряется одним из его линейных углов, обычно острым, полученным при пересечении этих плоскостей третьей, перпендикулярной к ним.

Если линия пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Delta$  (ребро двугранного угла) не задана, то прямой путь определения искомого угла требует ряда дополнительных построений.

Их можно избежать, определяя угол  $\beta$ , заключенный между перпендикулярами  $m$  и  $n$ , опущенными из произвольной точки  $N$  на заданные плоскости  $\Gamma$  и  $\Delta$ . Найденный угол  $\beta$  является искомым, если он острый; если же угол  $\beta$  тупой, то искомый угол  $\alpha$  определяется из соотношения  $\alpha = 180^\circ - \beta$ .

Тогда алгоритм будет иметь вид:

1. Из точки  $N$  провести прямые  $m \perp \Gamma$  и  $n \perp \Delta$ .

2. Преобразовать плоскость  $\Sigma(m \cap n)$  угла  $\beta$  в плоскость уровня.

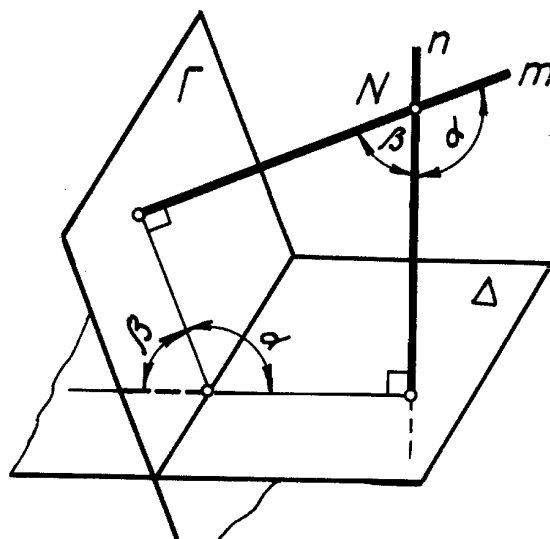


Рис. 67

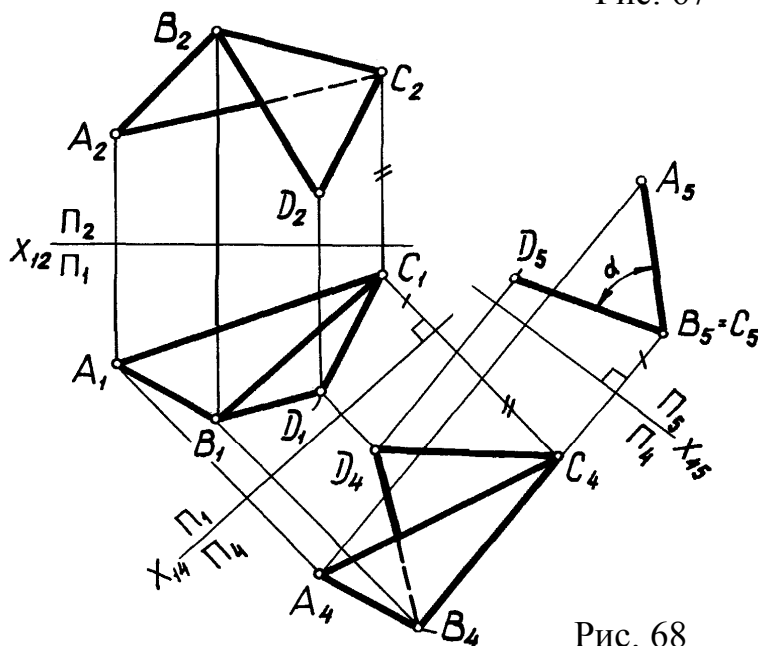


Рис. 68

Построение по этому алгоритму выполните самостоятельно.

На рис. 68 показано определение двугранного угла, образованного плоскостями  $\Gamma(ABC)$  и  $\Delta(BCD)$ , когда ребро  $(BC)$  искомого угла задано. Задача решена преобразованием ребра  $(BC)$  в проецирующую прямую. При построении использован способ замены плоскостей проекций.

### 3.3. Задачи на построение в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам

Общей схемой решения задач этой группы является:

- 1) преобразование заданной плоскости общего положения в плоскость уровня;
- 2) решение в плоскости уровня заданной метрической задачи;
- 3) перенесение решения на исходные проекции обратным преобразованием.

Наиболее целесообразным оказывается применение способа замены плоскостей проекций или вращения вокруг линии уровня.

Задача. В плоскости  $\Gamma(a \cap b)$  построить равносторонний треугольник  $ABC$ , если радиус описанной окружности равен  $R$  (рис. 69).

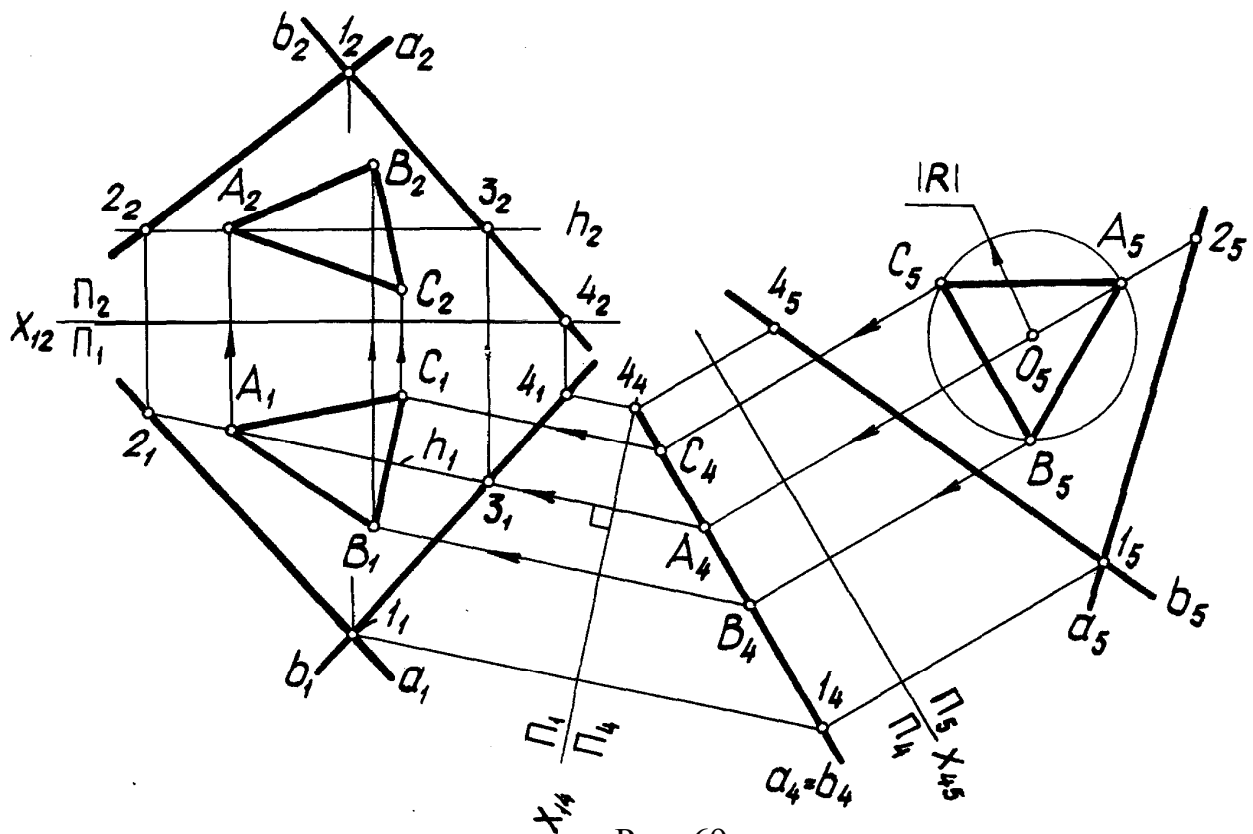


Рис. 69

Алгоритм:

1. Преобразовать плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  в плоскость уровня.
2. Построить в плоскости уровня равносторонний треугольник  $ABC$ .
3. Обратным преобразованием построить проекции  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  треугольника  $ABC$ .

**П о с т р о е н и е.** Плоскость  $\Gamma(a \cap b)$  преобразована в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций, построены проекции треугольника ABC в системе плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_1$ , а затем обратным преобразованием решение перенесено в исходную систему плоскостей проекций.

#### § 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

Комплексными называются задачи, в которых на искомое накладывается два или более условий. Решение таких задач выполняется по следующей общей схеме:

1) вводятся вспомогательные геометрические фигуры (множества), каждая из которых в отдельности удовлетворяет одному из условий, наложенных на искомое;

2) искомое определяется как результат пересечения введенных в задачу вспомогательных множеств.

При решении конкретной комплексной задачи первый пункт приведенной выше общей схемы необходимо расшифровать, т.е. точно указать, сколько и какие именно, вспомогательные множества (по виду и положению) должны быть введены для определения искомого. Этот вопрос может быть решен только после проведения анализа условий задачи.

Анализ является первым этапом решения задачи. Он преследует следующие цели:

а) изучить заданные геометрические фигуры и представить их пространственное расположение, выявить искомое; иногда искомым является сложная фигура, но для ее построения бывает достаточно найти точку, прямую или кривую линию и искомая фигура будет определена, т.е. в основной части задачи искомым будет не вся фигура, а только ее часть;

б) установить взаимосвязь искомого с каждой из заданных геометрических фигур, т.е. определить условия, которым он должен удовлетворять; каждое выявленное условие должно быть однозначным, например, искомая прямая должна проходить через заданную точку и пересекать заданную прямую;

в) выявить геометрические фигуры, каждая из которых является множеством элементов, удовлетворяющих одному из условий наложенных на искомое. Например, через заданную точку можно провести множество прямых, пересекающих заданную прямую, множество таких прямых есть плоскость.

Таким образом, анализ позволяет наметить содержание и последовательность пространственных операций, необходимых для определения искомого, т.е. составить алгоритм решения задачи. В алгоритме следует задать выявленные в анализе фигуры так, чтобы можно было решать задачу методами начертательной геометрии. В каждом конкретном случае задание фигур и выбор способа построения их пересечения определяется формой геометрических фигур, положением их в пространстве и условием, что при введении вспомогательных по-

верхностей линии пресечения должны быть по возможности простыми (прямыми или окружностями).

Исследование проводится с целью выявления условий существования решения и количества решений. При этом заданным фигурам придаются различные положения в пространстве относительно друг друга и выявляется количество решений при различных вариантах расположения фигур.

Только после составления алгоритма и исследования задачи можно приступать к построению на комплексном чертеже, т.е. к графической реализации алгоритма. При этом следует выполнить в установленной алгоритмом последовательности известные из предыдущих разделов курса элементарные построения, не задумываясь уже над расположением заданных и возникающих в пространстве геометрических фигур.

Решая конкретную задачу на комплексном чертеже, нужно выбрать такой путь, который позволит найти искомое при наименьшем количестве графических построений. Решение в этом смысле, как правило, будет и более точным. Выбор рационального пути не зависит от алгоритма решения задачи и является вопросом, связанным только с построением.

При решении комплексных задач приходится пользоваться множествами, наиболее употребительные из которых приведены ниже.

1. Множество всех точек плоскости, находящихся на положительном расстоянии от данной точки плоскости, есть окружность.

2. Множество точек плоскости угла, равноудаленных от его сторон, есть биссектриса этого угла.

3. Множество точек пространства, находящихся на положительном расстоянии от данной точки, есть сфера.

4. Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, проходящая через середину отрезка соединяющего данные точки, и к нему перпендикулярная.

5. Множество точек пространства, равноудаленных от данной прямой, есть поверхность кругового цилиндра, осью которого является данная прямая.

6. Множество точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованных прямыми, и перпендикулярные к плоскости, определяемой прямыми.

7. Множество точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть плоскость, проходящая через середину общего перпендикуляра к прямым и перпендикулярная к нему.

8. Множество точек пространства, равноудаленных от данной плоскости, есть две плоскости, параллельные данной плоскости и расположенные по разные от нее стороны на данном расстоянии.

9. Множество точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, есть две биссекторные плоскости двугранных углов, образованных этими плоскостями.

10. Множество прямых, параллельных плоскости и удаленных от нее на заданное расстояние, есть плоскость, параллельная заданной и удаленная на то же расстояние.

11. Множество прямых, перпендикулярных к прямой и проходящих через заданную точку, есть плоскость, перпендикулярная к прямой и проходящая через эту точку.

12. Множество прямых, проходящих через данную точку и пересекающих данную прямую, есть плоскость, определяемая данной точкой и данной прямой.

13. Множество прямых, проходящих через данную точку и составляющих угол  $\alpha$  с заданной плоскостью, есть поверхность прямого кругового конуса, вершина которого принадлежит данной точке, а образующие составляют угол  $\alpha$  с данной плоскостью.

14. Множество прямых, проходящих через определенную точку на данной прямой и наклоненных к последней под заданным углом  $\alpha$  есть поверхность прямого кругового конуса, осью которого является данная прямая.

Примеры решения комплексных задач

Задача 1. Построить высоту  $[BD]$  треугольника  $ABC$  (рис. 70).

Анализ.

1. Искомым является отрезок  $[BD]$  некоторой прямой, которую назовем  $m$ .

2. Прямая  $m$  должна проходить через точку  $B$  и быть перпендикулярной стороне  $(AC)$  треугольника  $ABC$ .

Этому условию соответствует множество прямых, проходящих через точку  $B$  и перпендикулярных прямой  $(AC)$ . Множество, состоящее из таких прямых есть плоскость  $\Delta$ , проходящая через точку  $B$  и перпендикулярная прямой  $(AC)$ .

3. Прямая  $m$  должна проходить через точку  $B$  и пересекать прямую  $(AC)$ .

Этому условию соответствует множество прямых, проходящих через точку  $B$  и пересекающих прямую  $(AC)$ .

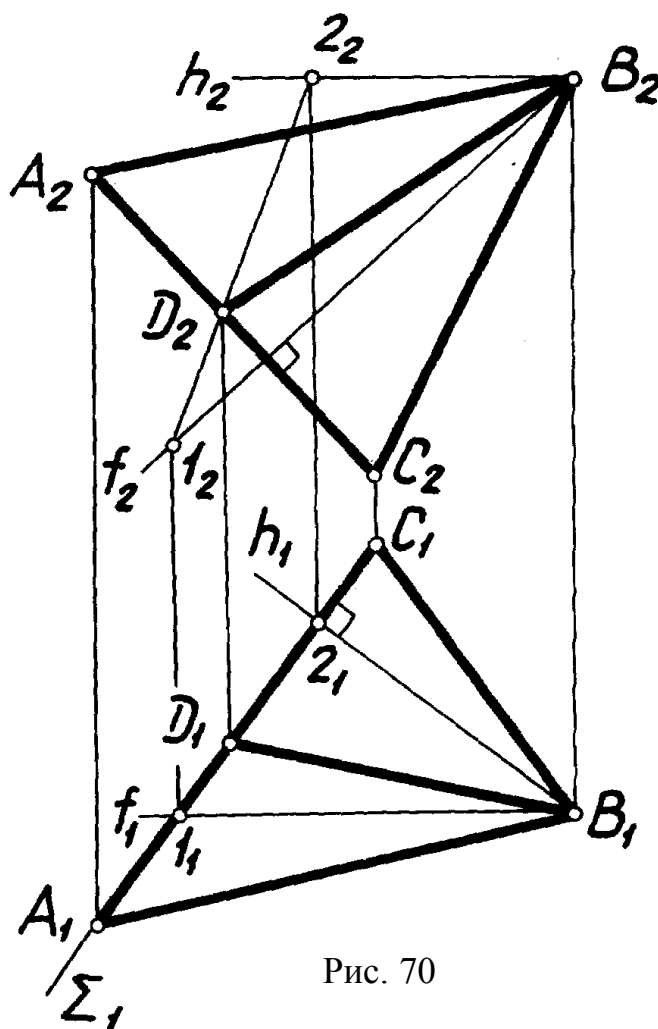


Рис. 70

В символической записи анализ примет следующий вид.

1. Искомое — прямая  $m$ ;
2.  $\{m: (B \in m \perp (AC))\} = \Delta$ ;
3.  $\{m: (B \in m \cap (AC))\} = \Gamma$ .

На основании анализа и общей схемы, данной в начале параграфа, составляем алгоритм решения задачи:

- 1)  $B \in \Delta(h \cap f) \perp (AC)$ ;
- 2)  $\Gamma(ABC)$  – задана;
- 3)  $\Delta \cap \Gamma = m(BD)$

**И с с л е д о в а н и е.** Задача имеет единственное решение, так как две плоскости пересекаются по прямой (собственной или несобственной).

**П о с т р о е н и е.** Графическое выполнение алгоритма видно из чертежа: плоскость  $\Delta$  проходит через точку  $B$  и перпендикулярна  $(AC)$ , так как  $h \perp (AC)$  и  $f \perp (AC)$ . При определении линии пересечения плоскостей найдена только одна точка искомой линии, так как вторая точка  $B$ , общая обеим плоскостям, задана. Точка  $D$  определена как точка пересечения прямой  $(AC)$  с плоскостью  $\Delta$ . Таким образом, решение задачи на комплексном чертеже сведено к последовательному решению элементарных задач 16, 6, 19, 2, затем проведены проекции искомой прямой:  $(B_1D_1)$  и  $(B_2D_2)$ .

В качестве искомого, в этой задаче можно рассматривать точку  $D$ , положение, которой определяется условиями: а) точка  $D$  должна принадлежать прямой  $(AC)$  и б) точка  $D$  должна принадлежать прямой  $m$ , проходящей через  $B$  и перпендикулярной той же прямой  $(AC)$ .  $B \in m \perp (AC)$ .

**Анализ.**

- 1) Искомое — точка  $D$ ,
- 2)  $\{D: (D \in (AC))\} = (AC)$ ,
- 3)  $\{D: (D \in m \wedge B \in m \perp (AC))\} = \Delta$ .

**Алгоритм.**

- 1)  $(AC)$  — задана,
- 2)  $B \in \Delta(h \cap f) \perp (AC)$ ,
- 3)  $(AC) \cap \Delta = D$ .

**Задача 2.** Через точку  $A$  провести прямую  $l$ , перпендикулярную прямой  $m$  и параллельную плоскости  $\Gamma(a \cap b)$  (рис. 71).

**Анализ.**

- 1) Искомое — прямая  $l$ ,
- 2)  $\{l: (A \in l \perp m)\} = \Sigma \perp m$ ,
- 3)  $\{l: (A \in l \parallel \Gamma)\} = \Gamma' \parallel \Gamma$ .

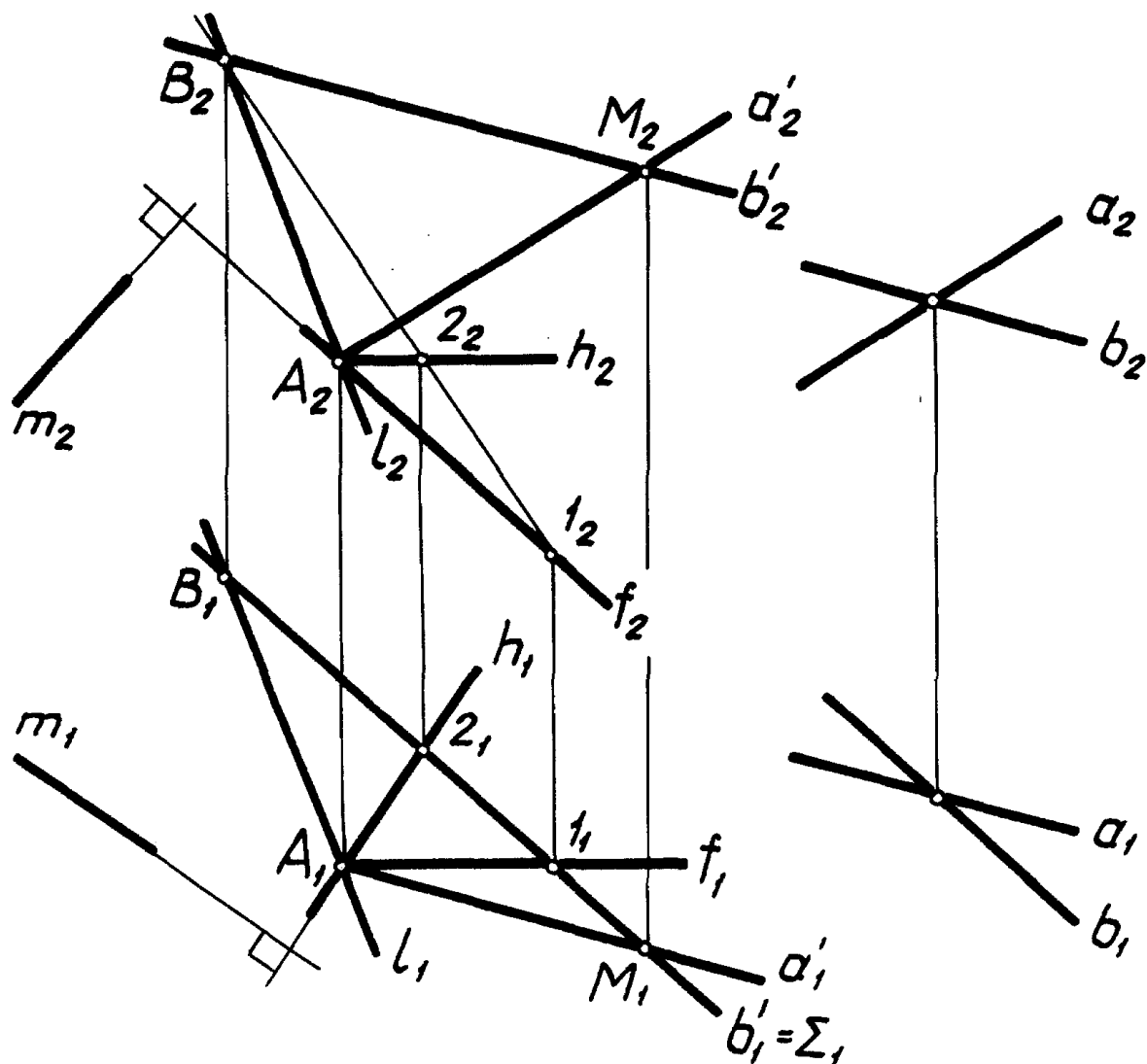
**Алгоритм.**

- 1)  $A \in \Sigma(h \cap f) \perp m$ ,
- 2)  $A \in \Gamma'(a' \cap b') \parallel \Gamma$ ,
- 3)  $\Sigma \cap \Gamma' = l$ .

**Исследование.** Так как обе геометрические фигуры, выявленные при анализе, являются плоскостями, задача имеет одно решение (две плоскости пересекаются по прямой линии собственной или несобственной).

**Построение.** Точка  $A$  — общая для плоскостей  $\Sigma \cap \Gamma'$ . Вторая общая точка  $B$  определена как точка пересечения прямой  $b'$  плоскости  $\Gamma'$  с плоскостью  $\Sigma$ . (рис. 71).





Задача 3. На прямой Рис. 71

точку  $C$ , равноудаленную от сторон  $m$  и  $n$  линейного угла (рис. 72).

Анализ.

- 1) Искомое — точка  $C$ ,
- 2)  $\{C: (C \in (AB))\} = (AB)$ ,
- 3)  $\{C: (|C, m| = |C, n|)\} = \Sigma \ni l$  — биссектриса.

Алгоритм.

- 1)  $(AB)$  — задана,
- 2)  $l \in \Sigma \perp \Gamma(m \cap n)$
- 3)  $(AB) \cap \Sigma = C$ .

Исследование. Задача имеет одно решение, так как прямая пересекается с плоскостью в одной точке.

Построение. В общем случае биссектриса угла не проецируется в биссектрису его проекции. Поэтому способом замены плоскостей проекций плоскость  $\Gamma(m \cap n)$  угла преобразована в плоскость уровня, построены проекции  $(A_4B_4)$  и  $(A_5B_5)$  прямой  $(AB)$  и задача решена в системе  $\Pi_4/\Pi_5$ : построена  $l_5$  — проекция биссектрисы  $l$  на  $\Pi_5$ , проведена  $\Sigma_5 = l_5$ , определены проекции  $C_5$  и  $C_4$  и найдены проекции  $C_1$  и  $C_2$  точки  $C$ .

Задача 4. Построить прямую  $s$ , параллельную прямым  $a$  и  $b$  и удаленную от прямой  $a$  на расстояние  $r_1$ , а от прямой  $b$  на расстояние  $r_2$  (рис. 73).

Анализ.

- 1) Искомое — прямая  $s$ ,
- 2)  $\{s: (|s, a| = r_1)\} = \Phi$  — цилиндр,

Алгоритм.

- 1)  $\Phi(a, r_1)$ ,  $a$  — ось,  $r_1$  — радиус,
- 2)  $\Phi'(b, r_2)$ ,  $b$  — ось,  $r_2$  — радиус,

3)  $\{c: (|c, b| = r_2)\} = \Phi'$  – цилиндр.

3)  $\Phi \cap \Phi' = c \wedge c'$ .

Исследование.

1)  $|a, b| > (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 0$ ,

2)  $|a, b| = (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 1$ ,

3)  $|a, b| < (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 2$ .

Построение. Прямые  $a$  и  $b$  преобразованы в проецирующие. Тогда цилиндры на плоскость  $\Pi_5$  проецируются в окружности радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . На  $\Pi_5$  получены проекции  $c_5$  и  $c'_5$  искомых прямых  $c$  и  $c'$  как точки пересечения окружностей. Обратным преобразованием построены проекции прямых  $c$  и  $c'$  в системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_1$  (рис. 73).

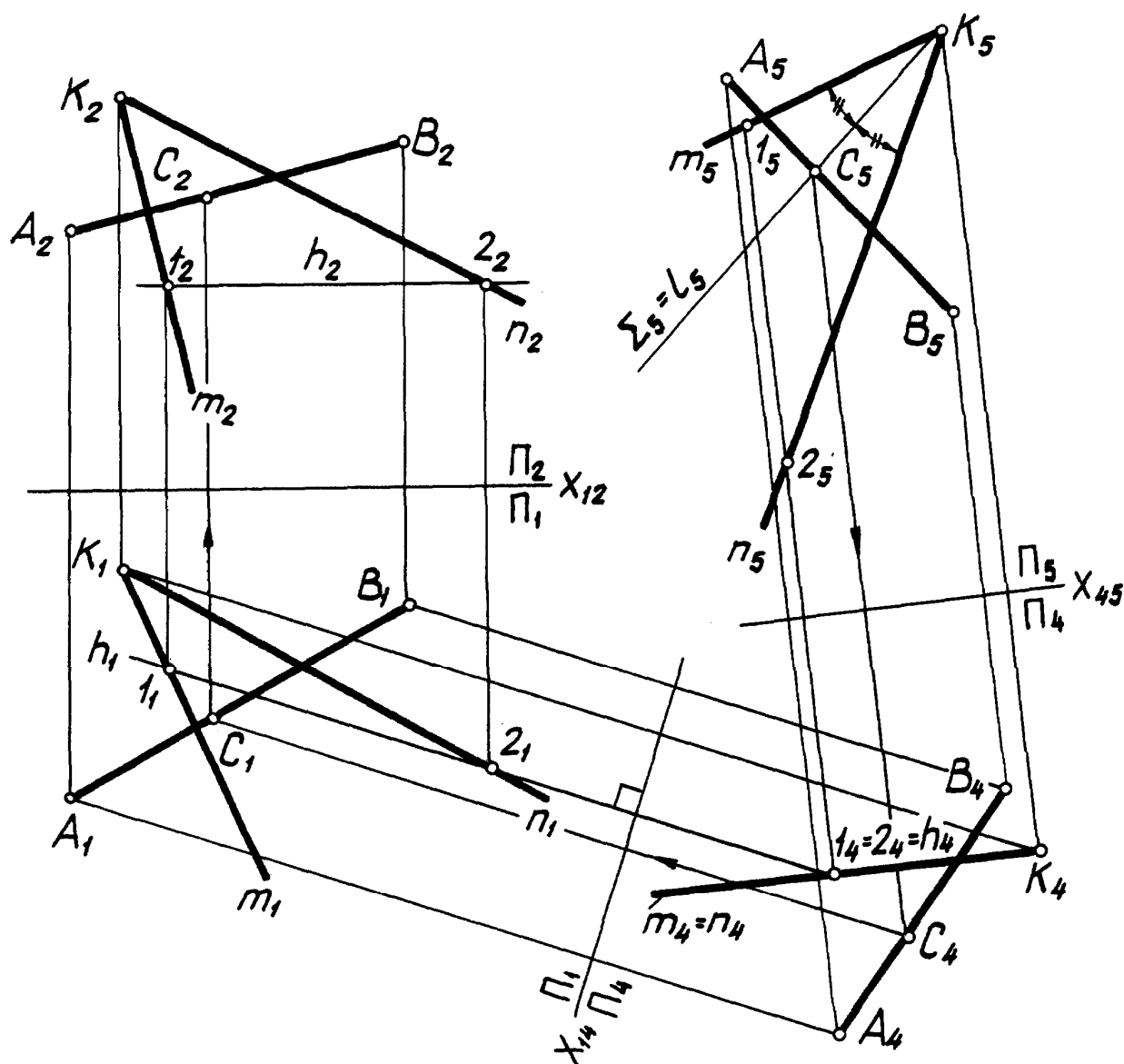


Рис. 72

Последовательно решены элементарные задачи 21 и 22, выполнено решение на плоскости проекций  $\Pi_5$  и перенесено на исходный чертеж.

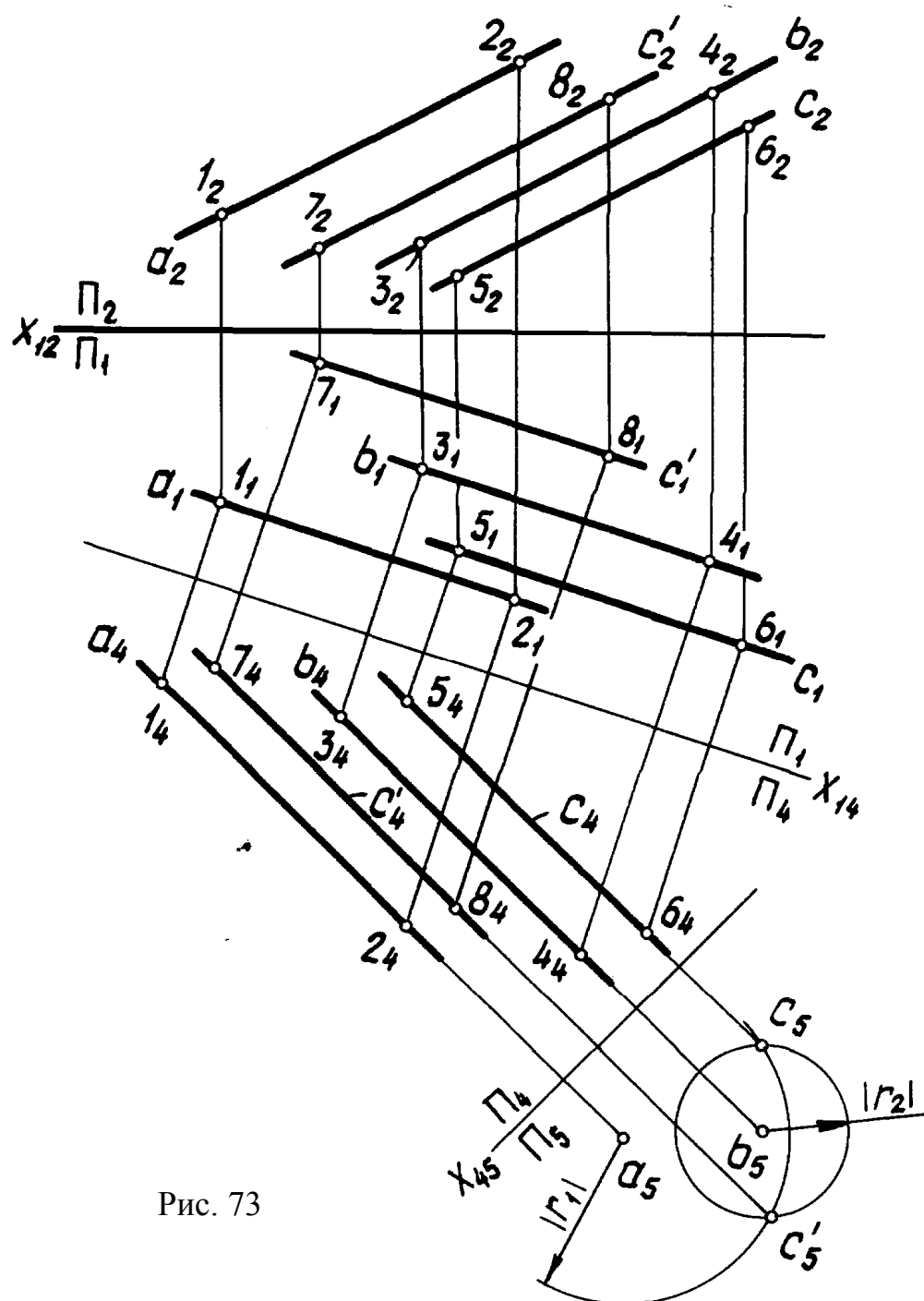


Рис. 73

Задача 5. Точки А, В, С принадлежат фронтально проецирующей плоскости  $\Sigma$ . Через точку А провести прямую  $m$ , удаленную от точки В на  $r_1 = 25$  мм, а от точки С на  $r_2 = 20$  мм (рис. 74).

Анализ.

- 1) Искомое — прямая  $m$ ,
- 2)  $\{m: (m \in A \wedge |m, B| = r_1)\} = \Phi$ ,
- 3)  $\{m: (m \in A \wedge |m, C| = r_2)\} = \Phi'$ .

Алгоритм.

- 1)  $\Phi((AB), \Psi(B, r_1 = 25 \text{ мм}))$
- 2)  $\Phi'((AC), \Psi'(C, r_2 = 20 \text{ мм}))$
- 3)  $\Phi \cap \Phi' = m \wedge m'$

$\Phi$  и  $\Phi'$  – конусы с вершиной в точке  $A$ , описанные вокруг сфер  $\Psi$  и  $\Psi'$  с центрами в точках  $B$  и  $C$  и радиусами  $r_1 = 25$  мм и  $r_2 = 20$  мм – соответственно.

Исследование.

- 1)  $|BC| < (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 2$ ,
- 2)  $|BC| = (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 1$ ,
- 3)  $|BC| > (r_1 + r_2) \Rightarrow Q = 0$ .

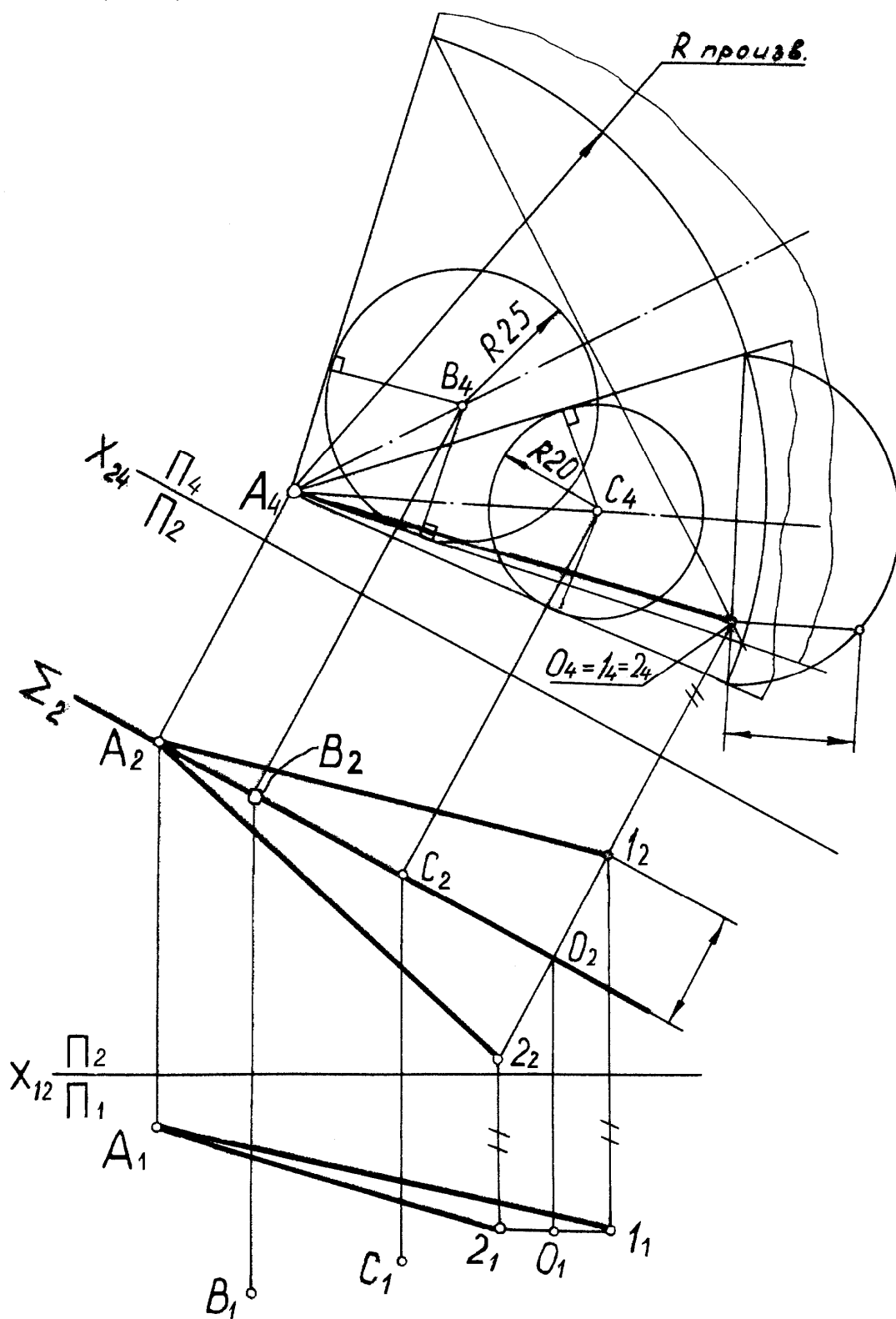


Рис. 74

П о с т р о е н и е. Построение конусов  $\Phi((AB), \Psi(B, r_1 = 25 \text{ мм}))$  и  $\Phi'((AC), \Psi'(C, r_2 = 20 \text{ мм}))$  . понятны из чертежа (рис. 74). Линии (А–1) и (А–2) пересечения вспомогательных конусов .  $\Phi$  и  $\Phi'$  построены с помощью вспомогательной сферы с центром в точке А, пересекающей заданные конуса по окружностям.

Задача 6. В треугольнике ABC найти точку К, отстоящую от прямой (BC) на расстоянии  $l$  и от прямой  $q$  на расстоянии  $r$  (рис. 75).

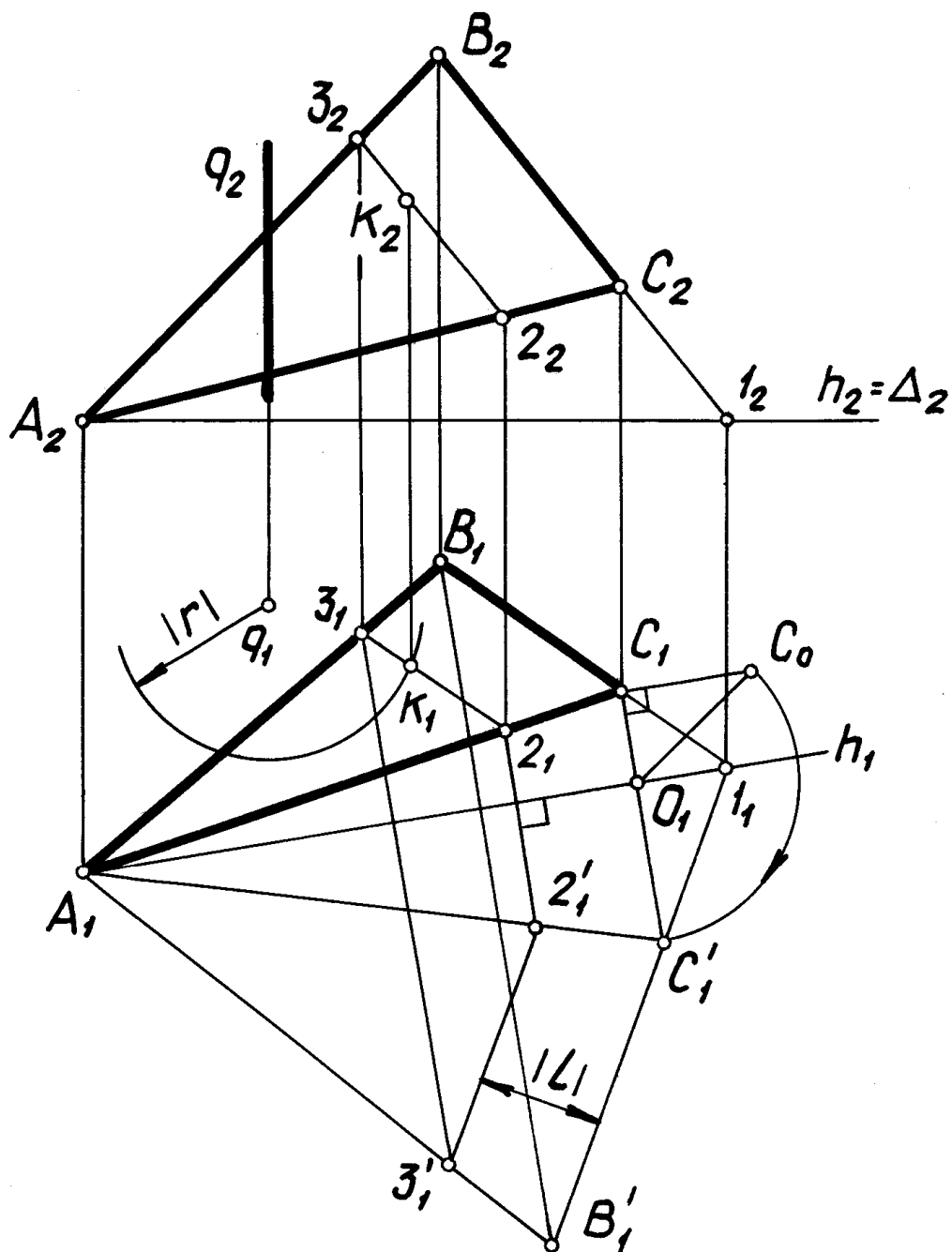


Рис. 75

Анализ.

- 1) Искомое – точка К,
- 2)  $\{K: (K \in \Gamma(ABC) \wedge |K, (BC)| = l)\} = m \parallel (BC)$  – прямая,

3)  $\{K: (|K, q| = r)\} = \Phi$  – цилиндр.

Алгоритм.

1)  $\Gamma(ABC) \supset m // (BC)$ ,

2)  $\Phi(q, R=r)$ ,

3)  $m \cap \Phi = K$ .

И с с л е д о в а н и е.

$|m, q| < r \Rightarrow Q = 2$ ,

$|m, q| = r \Rightarrow Q = 1$ ,

$|m, q| > r \Rightarrow Q = 0$ .

**П о с т р о е н и е.** На рис. 75 дано решение задачи на комплексном чертеже. Для построения прямой  $m(2-3)$ , параллельной  $(BC)$  на расстоянии  $l$  от нее, плоскость  $\Gamma(ABC)$  вращением вокруг горизонтали  $h$  преобразована в плоскость уровня. Построена проекция  $m'_1(2'_1-3'_1)$ , а затем обратным преобразованием – проекции  $m_1(2_1-3_1)$  и  $m_2(2_2-3_2)$ . Поверхность цилиндра является горизонтально проецирующей, на  $\Pi_1$  она проецируется в виде окружности с центром в точке  $q_1$  и радиусом  $r$ . Точка пересечения этой окружности с прямой  $m_1(2_1-3_1)$  даст горизонтальную проекцию  $K_1$  искомой точки  $K$ . Фронтальная проекция  $K_2$  определена по линиям связи из условия принадлежности.

**Задача 7.** Через точку  $A$  прямой  $(AB)$  провести прямую  $l$ , пересекающую прямую  $(CD)$  и образующую с прямой  $(AB)$  угол  $\alpha$  (рис. 76).

Анализ:

1) Искомое – прямая  $l$ ;

2)  $\{l: (A \in l \cap (CD))\} = \Gamma$  – плоскость;

3)  $\{l: (A \in l \wedge (AB) = \alpha)\} = \Phi$  – конус.

Алгоритм:

1)  $A \in \Gamma(A, (CD))$ ;

2)  $A \in \Phi((AB), \alpha)$ ;

3)  $\Gamma \cap \Phi = l, l'$ .

И с с л е д о в а н и е.

$(AB)^\wedge \Gamma > \alpha \Rightarrow Q = 0$ ;

$(AB)^\wedge \Gamma = \alpha \Rightarrow Q = 1$ ;

$(AB)^\wedge \Gamma < \alpha \Rightarrow Q = 2$

**П о с т р о е н и е.**

Для упрощения построений на комплексном чертеже система плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  преобразована способом замены плоскостей проекций в систему  $\Pi_4/\Pi_5$  так, чтобы в новой системе прямая  $(AB)$  стала проецирующей. Построены проекции прямого кругового конуса  $\Phi((AB), \alpha)$  в системе  $\Pi_4/\Pi_5$ , найдены проекции  $l_5, l'_5$  и  $l_4, l'_4$  искомых прямых, как линии пересечения конуса и плоскости. Отмечены проекции  $5_5, 6_5$  и  $5_4, 6_4$  точек 5 и 6 пересечения прямых  $l$  и  $l'$  с прямой  $(CD)$ . Все построения, выполненные в системе  $\Pi_4/\Pi_5$ , аналогичны рассмотренным в задаче 4 п. 2.1 § 2 (рис. 30). Обратным преобразованием найдены проекции  $5_1, 6_1$  и  $5_2, 6_2$  точек 5 и 6, построены проекции  $l_1, l'_1$  и  $l_2, l'_2$  искомых прямых.

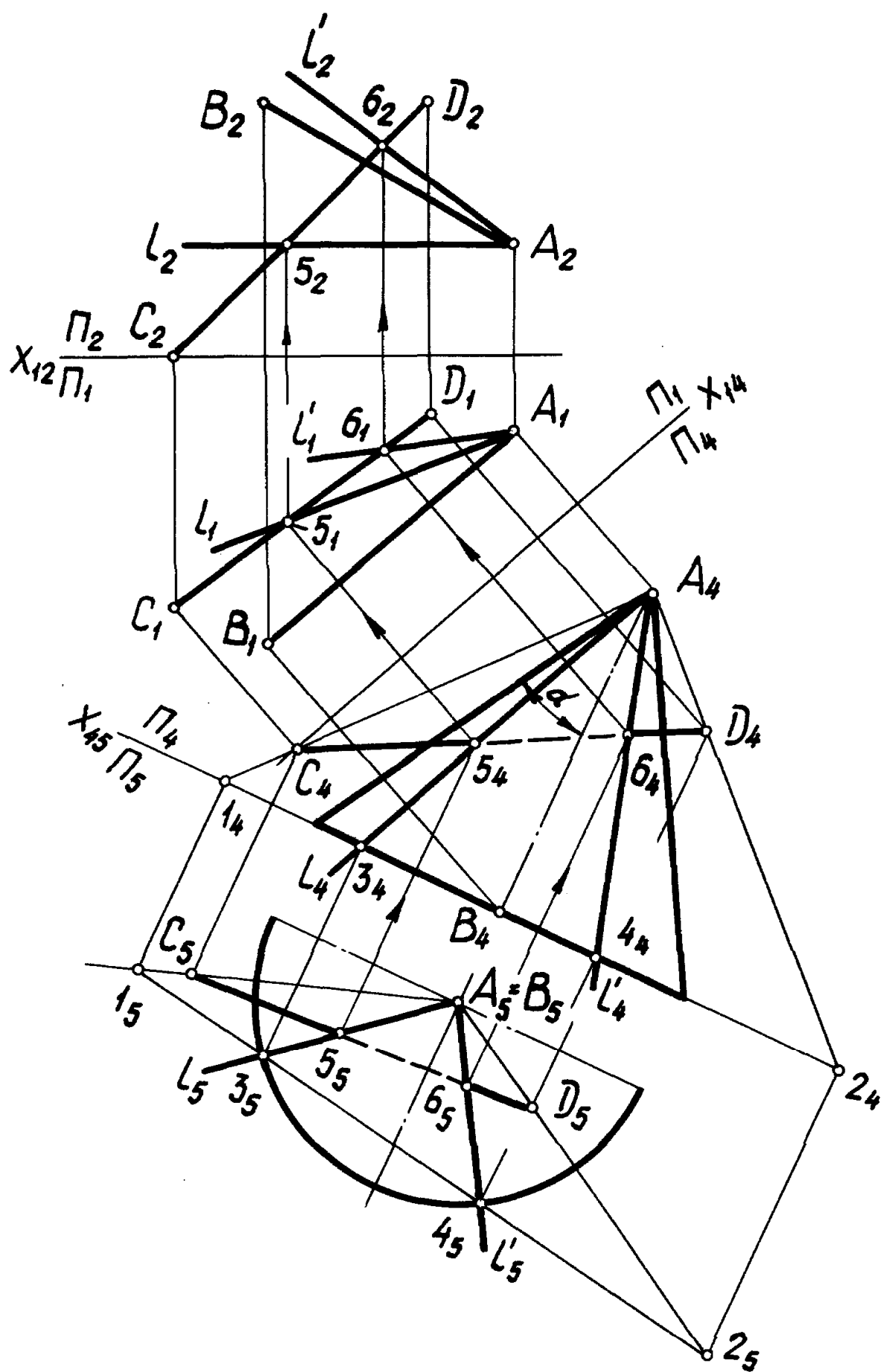


Рис. 76

## § 5. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, помещенные в данном параграфе, состоят из сочетаний элементарных, позиционных и метрических задач. Поэтому при их решении нужно использовать опыт, приобретенный при чтении пособия и решении типовых задач всех параграфов.

### Примеры.

Задача 1. Построить плоскость, параллельную заданной плоскости  $\Gamma(ABC)$  и отстоящую от нее на расстоянии  $l = 50$  мм. Новую плоскость задать треугольником  $A'B'C'$ , конгруэнтным заданному. Задачу решить без использования способов преобразования комплексного чертежа (рис. 77).

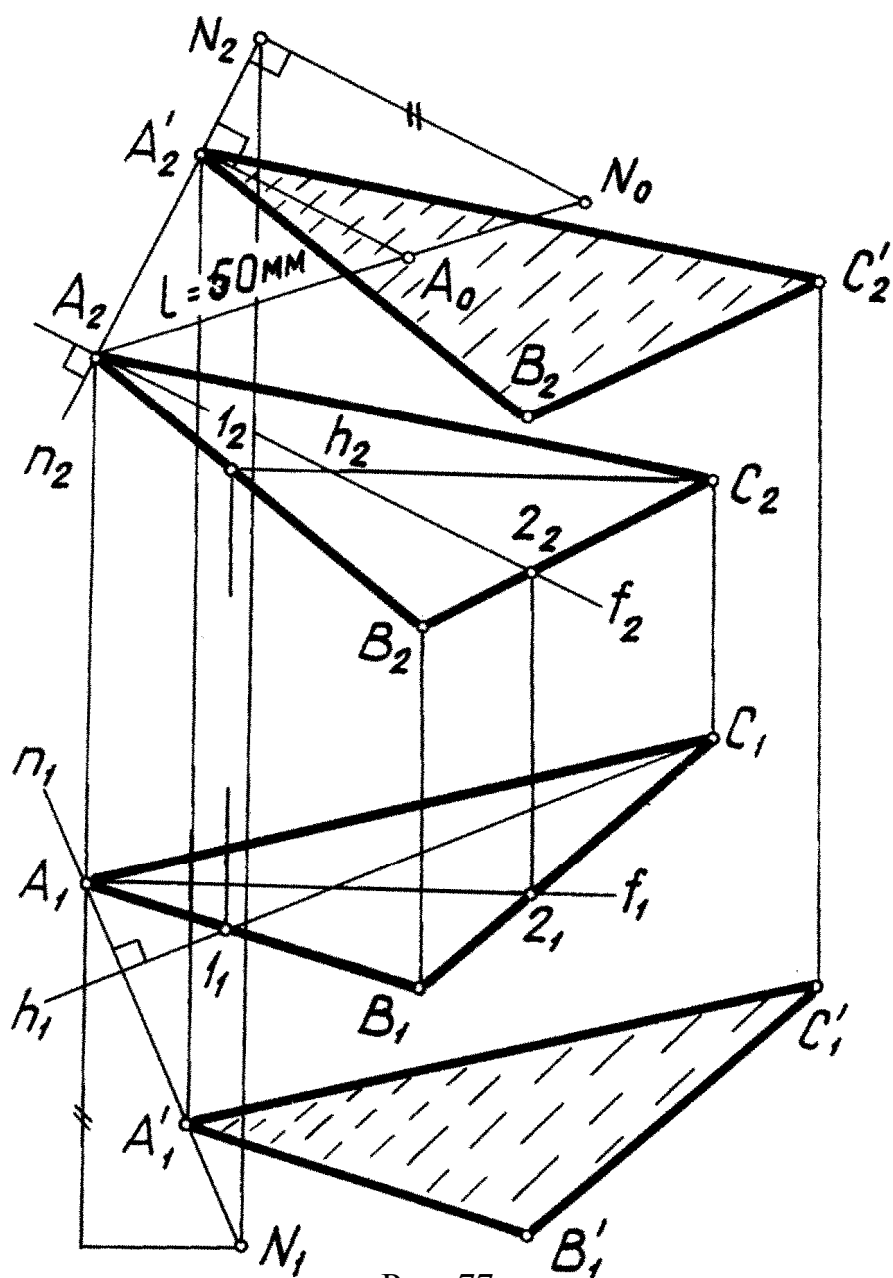


Рис. 77



На основании задачи 5 п. 3.1 § 3 составляем алгоритм:

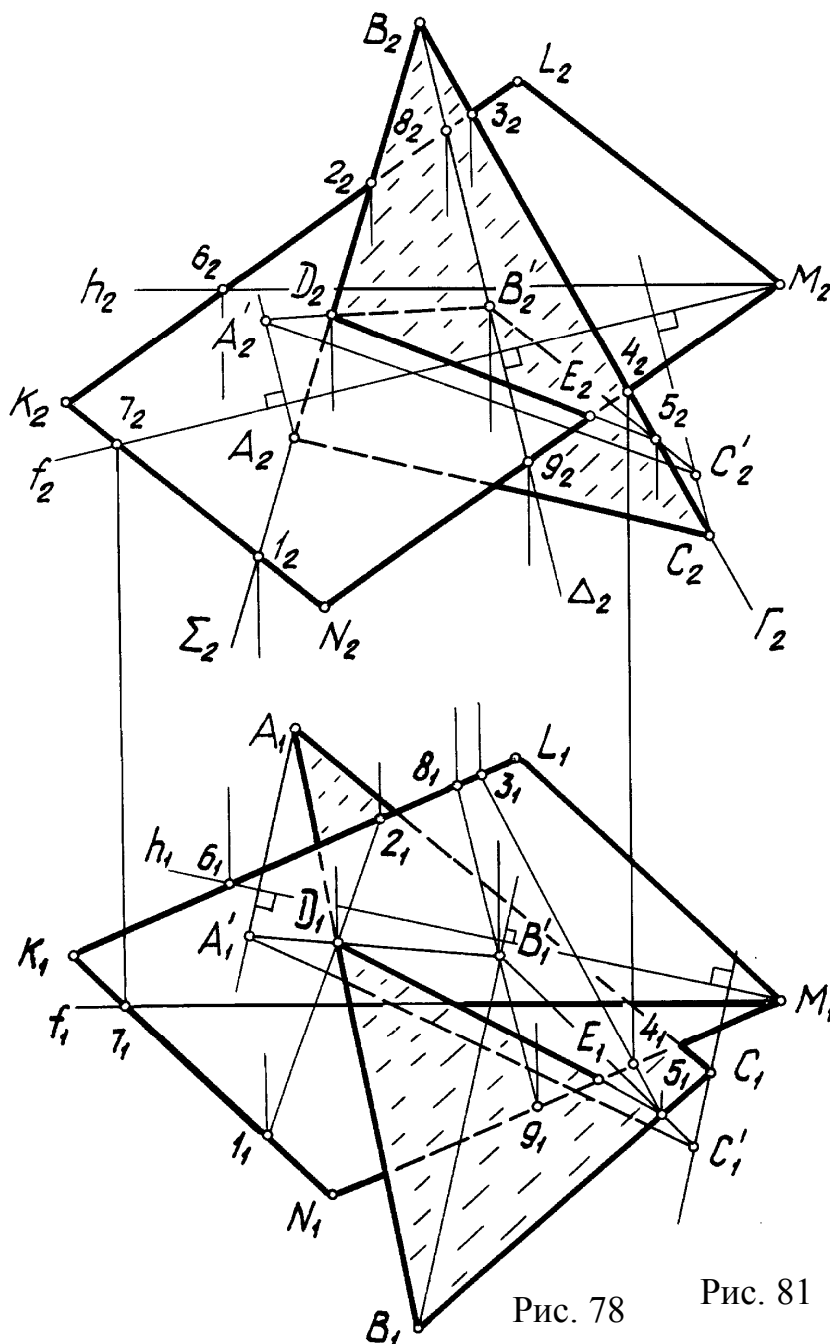
1. Через точку  $A$  проводим прямую  $n$ , перпендикулярную плоскости  $\Gamma(ABC)$ .

2. На прямой  $n$  находим точку  $A$ , расположенную на расстоянии  $l = 50$  мм от точки  $A$  и, следовательно, от плоскости  $\Gamma$ .

3. Строим плоскость  $\Gamma'(A'B'C') \parallel \Gamma \wedge \Gamma' \ni A'$ .

Построение. Для нахождения точки  $A$ , расположенной на расстоянии  $l = 50$  мм от плоскости, предварительно определена истинная величина произвольного отрезка перпендикуляра. Дальнейшее решение ясно из чертежа. Конгруэнтность треугольников  $A'B'C'$  и  $ABC$  достигается равенством их сторон.

Задача 2. Построить: а) линию  $(DE)$  пересечения плоскостей  $\theta(ABC)$  и  $\Delta(KLMN)$ ; б) ортогональную проекцию треугольника  $ABC$  на плоскость параллелограмма  $KLMN$  (рис. 78).



I. Задача 2 а представляет собой вторую позиционную задачу. Ее решение рассмотрено в § 2 данного пособия (см. задачу 1, рис. 33, 34).

II. Ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость  $\Delta(KLMN)$ , которую требуется построить в задаче 2 б, определяется ортогональной проекцией на эту плоскость трех его вершин. Поэтому, необходимо:

1. Из точек A, B и C опустить на плоскость  $\Delta$  перпендикуляры.
2. Определить точки пересечения каждого из них с плоскостью. Алгоритм решения пункта 2 составляется на основании положений пункта 2.1 § 2.

Построение. После того как построены проекции перпендикуляров, опущенных из вершин треугольника на плоскость параллелограмма, определяется точка пересечения  $B'$  перпендикуляра, опущенного из точки B с плоскостью  $\Delta$ . Точки пересечения двух других перпендикуляров с плоскостью параллелограмма определены из условия, что ортогональные проекции сторон треугольника на плоскость параллелограмма должны проходить через точки пересечения этих сторон с плоскостью параллелограмма. Эти точки определяются как точки пересечения линии пересечения треугольника и параллелограмма со сторонами треугольника. Поэтому проекция ( $A'B'$ ) стороны (AB) на плоскость параллелограмма проходит через точку D, а проекция ( $B'C'$ ) стороны (BC) – через точку E.

Задача 3. Построить ромб ABCD, если диагональ BD принадлежит прямой  $m$ , вершина A принадлежит прямой  $l$  и  $AC = 2BD$  (рис. 79).

План решения в пространстве:

1. Выбираем на прямой  $l$  произвольную точку A( $A_1A_2$ ).
2.  $A \in \theta(h \cap f) \perp m$ .
3.  $K = \theta \cap m$ .
4.  $K \in (AC) \perp m \wedge |AK| = |KC|$ . Почему?
5. Определяем истинные величины отрезков  $|AK|$  и  $|KC|$  способом прямоугольного треугольника.
6. На прямой  $m$  от точки K откладываем отрезки  $|KB| = |KD| = |AK| / 2$ , используя способ прямоугольного треугольника.
7. Прямые (AC) и (BC) перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам, следовательно, являются диагоналями искомого ромба.

Графическая реализация алгоритма на чертеже основана на умении решать элементарные задачи, рассмотренные ранее и понятна из чертежа.

Задача имеет множество решений. Почему?

Задача 4. Построить проекции и истинный вид сечения данной комплексной поверхности  $\Phi$  плоскостью общего положения  $\Gamma(l \cap m)$  (рис. 80).

1. Заданная комплексная поверхность из полусферы, конуса и призмы, т.е. необходимо решить задачи 2 и 3 пункта 2.2 параграфа 2. Алгоритмы решения должны быть составлены в соответствии с положениями параграфа 2.

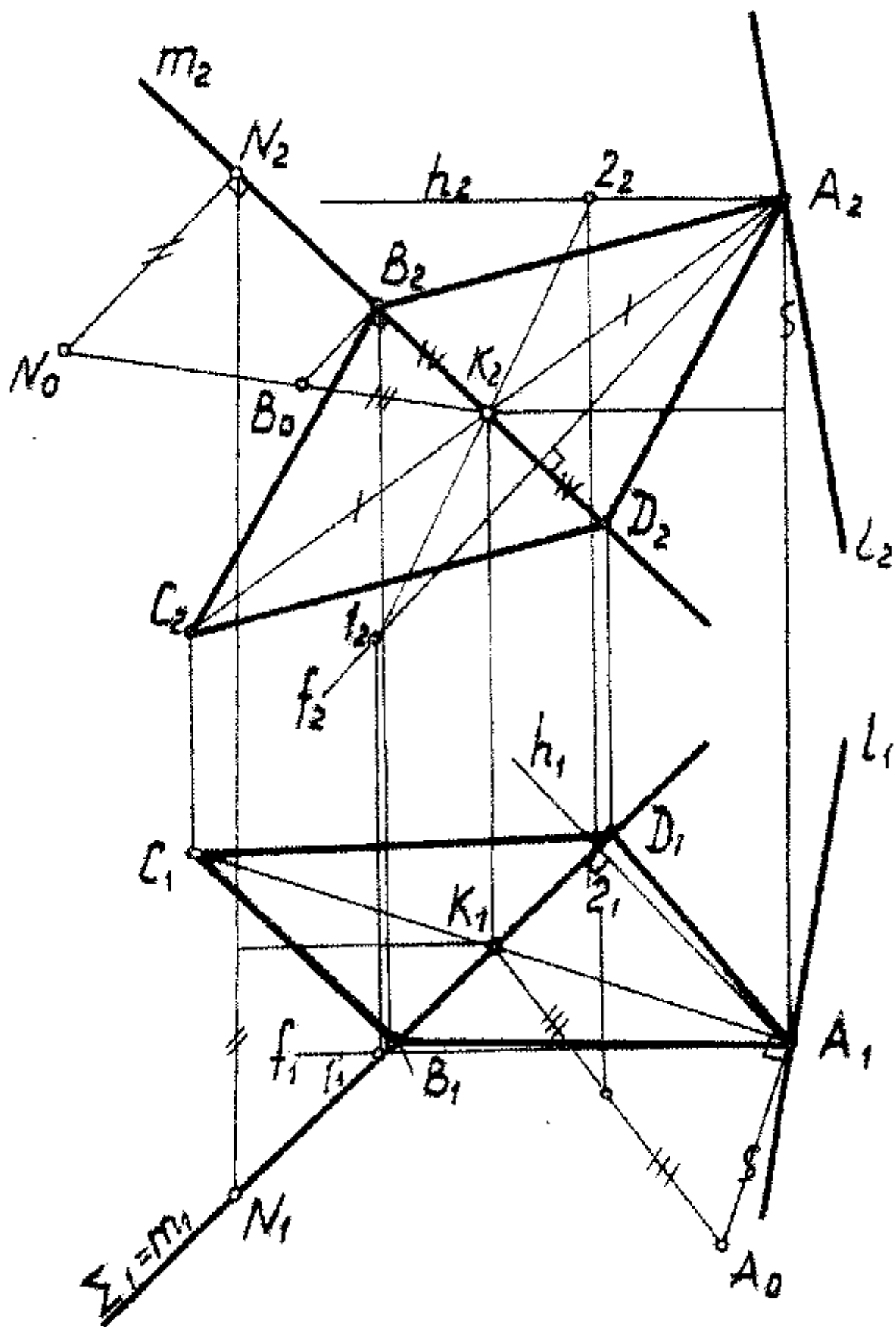


Рис. 79

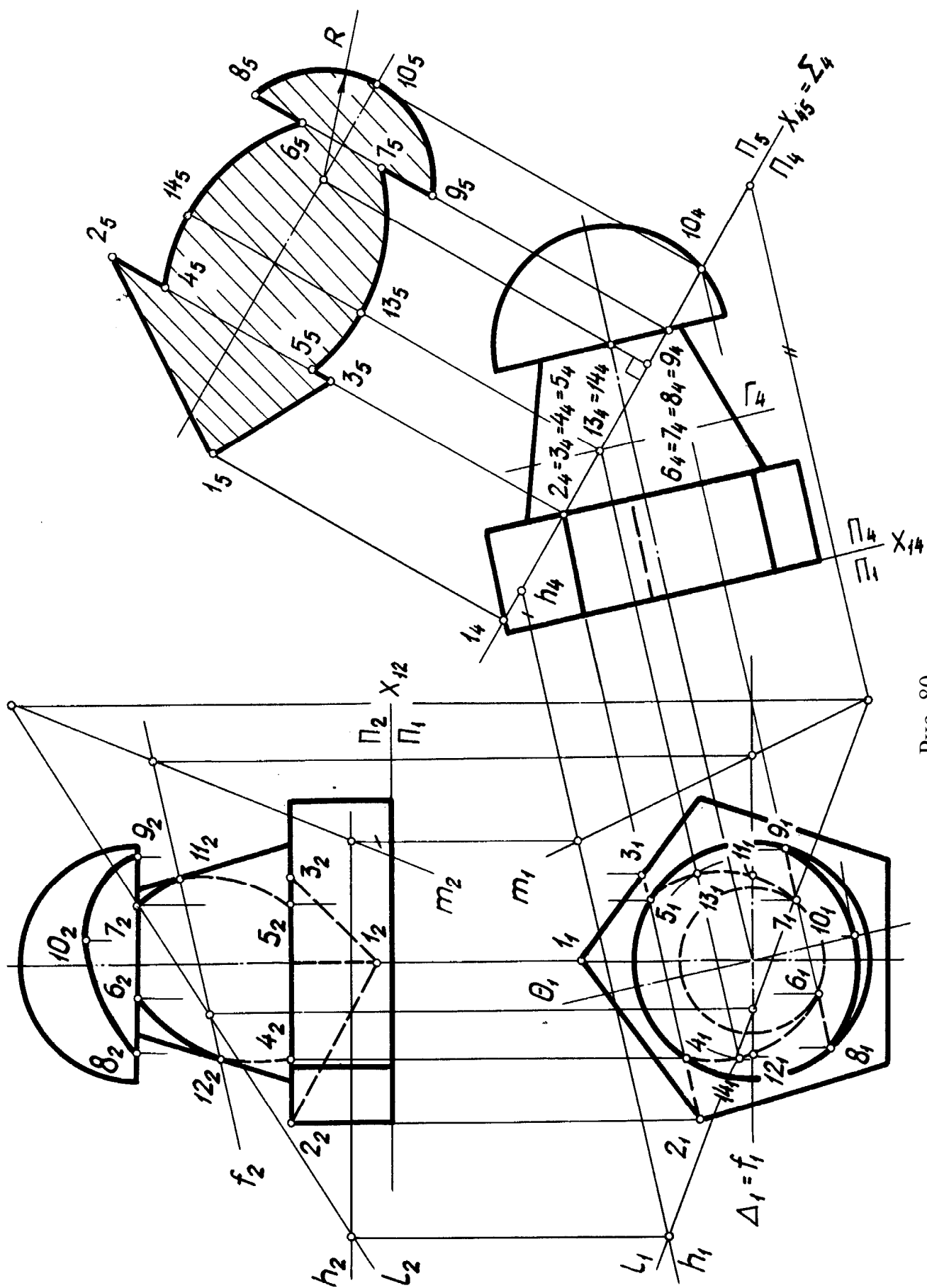


Рис. 80

Построение. Для упрощения графических операций плоскость  $\Gamma$  преобразована в проецирующую, задача решена в системе плоскостей проекций  $P_4/P_1$ , а затем обратным преобразованием построена фронтальная проекция сечения. Вторая часть задачи — метрическая задача № 1 пункта 3.2 параграфа 3. В соответствии положениями этого раздела истинный вид сечения определен способом замены плоскостей проекций.

Задача 5. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы, б) истинный вид сечения А-А (рис. 81).

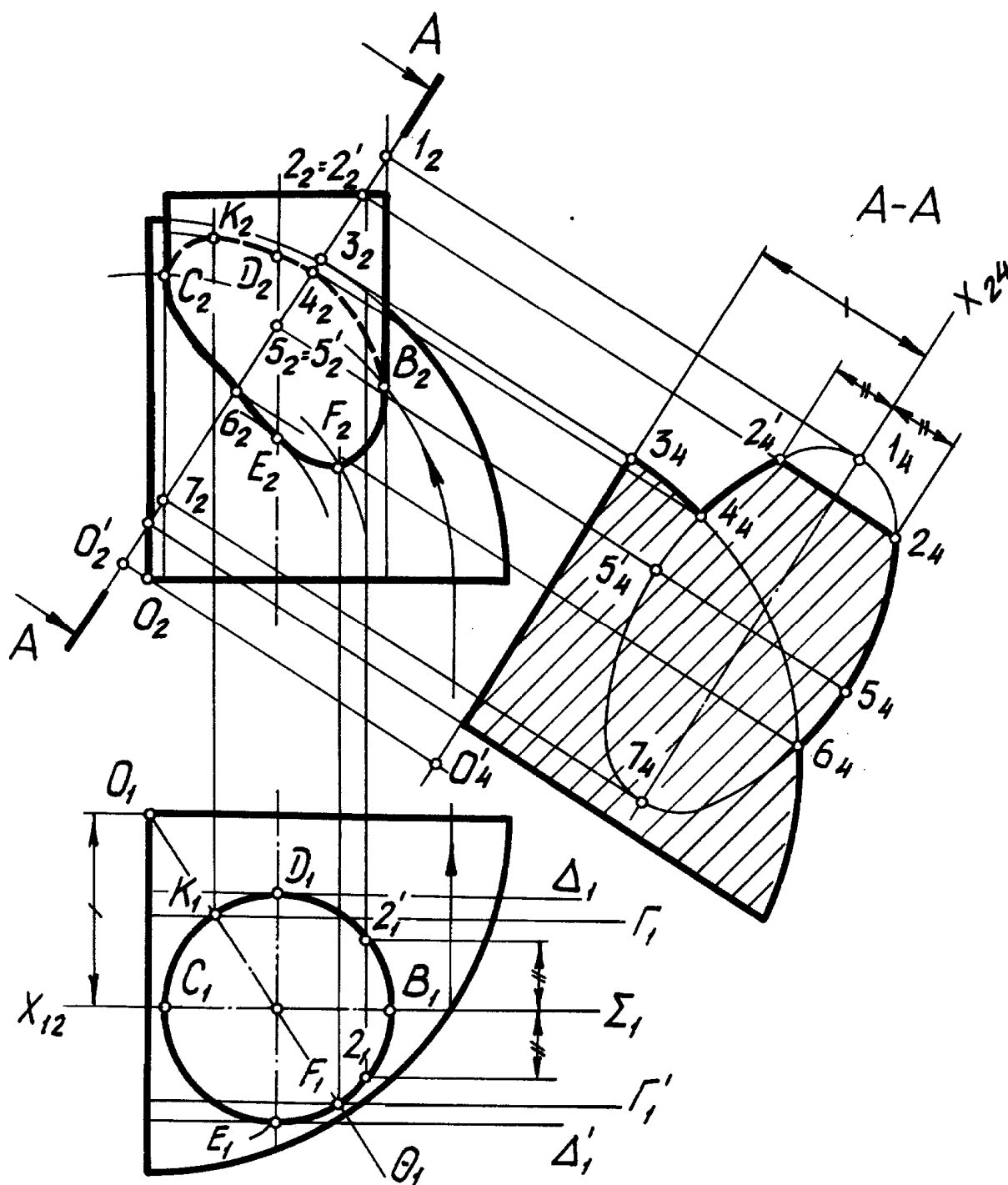


Рис. 81

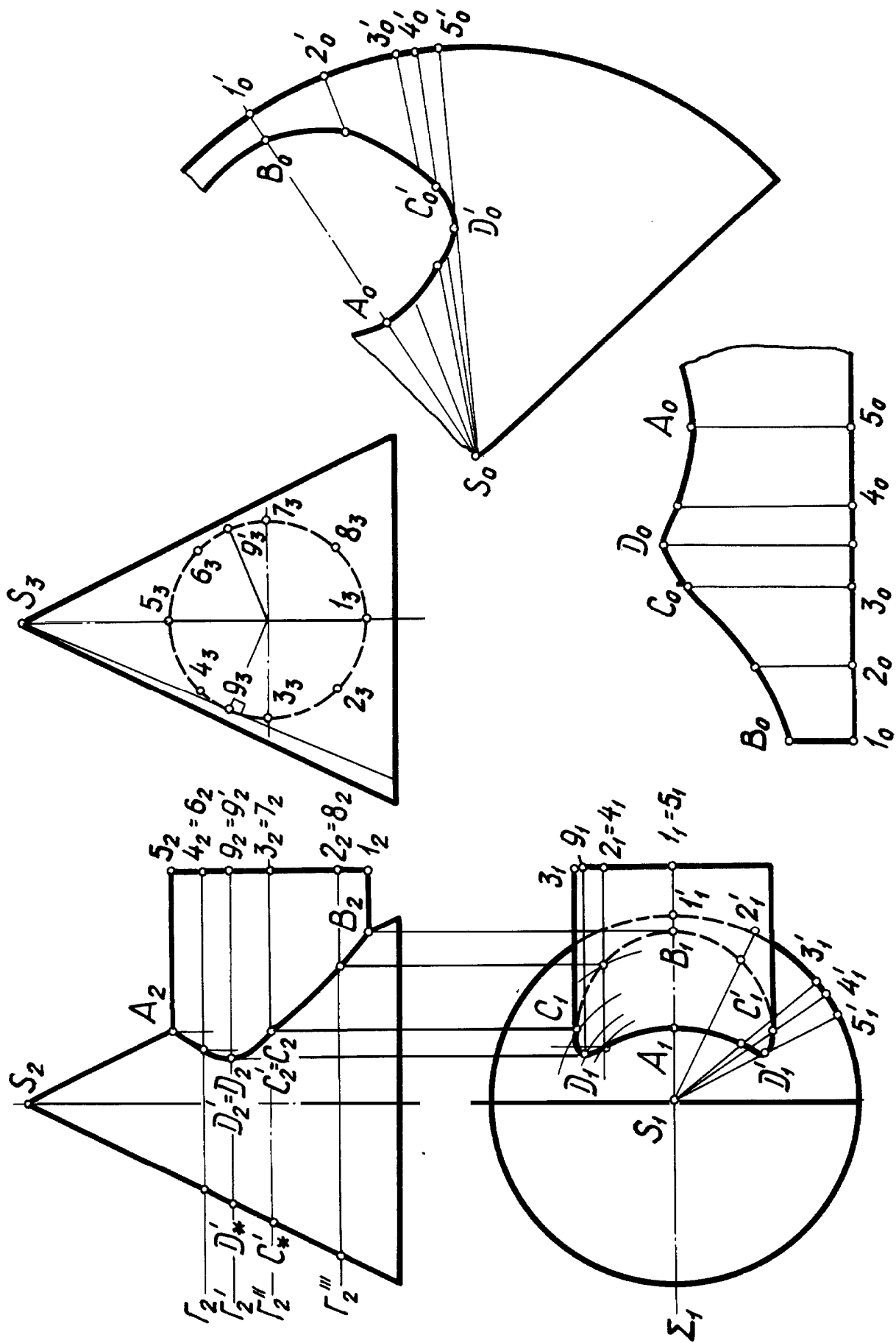


Рис. 82

I. Задача 5 а является второй позиционной задачей и решена в соответствии с положениями пункта 2.2, § 2. В качестве вспомогательных поверхностей применены фронтальные плоскости уровня.

II. Задача 5 б — метрическая задача 1 пункта 3.2, § 3 и решена в соответствии с положениями этого параграфа способом замены плоскостей проекций.

При построении действительного вида сечения А-А сначала построено сечение части сферы, ограниченное дугой окружности радиуса  $|O'_4 3'_4|$  и двумя отрезками прямых (см. чертеж). Затем построено сечение части цилиндра, ограниченное эллипсом и отрезком  $[2'_4 2_4]$ .

Задача 6. Построить: а) линию пересечения цилиндра и конуса; б) развертки их боковых поверхностей (рис 82).

1. Задача 6 а является второй позиционной задачей и решена в соответствии с положениями пункта 2.2, § 2. В качестве вспомогательных поверхностей выбраны фронтальная плоскость  $\Sigma$  и горизонтальные плоскости  $\Gamma$ . На рис. 82 обозначены только характерные точки А и В — очерковые относительно  $\Pi_2$ , они же являются высшей и низшей точками; С и С' — точки, принадлежащие очерковому относительно  $\Pi_1$  образующим цилиндра, они же являются экстремальными относительно  $\Pi_2$  и точками смены видимости кривой относительно  $\Pi_1$ ; D и D' — самые левые точки относительно  $\Pi_3$ .

Для построения развертки боковой поверхности цилиндра на произвольной прямой нанесены точки  $1_0, 2_0$ , и т.д. — произведено спрямление дуг окружности основания цилиндра способом малых хорд. В точках  $1_0, 2_0, \dots$  восстановлены перпендикуляры к прямой и на них отложены отрезки соответствующих образующих. Натуральные величины этих отрезков замерены на  $\Pi_2$ . Полученные точки  $B_0, C_0, D_0, A_0$  (и необозначенные) соединены плавной кривой. Так как цилиндр имеет плоскость симметрии  $\Sigma$ , на чертеже построена только половина развертки. Развертка боковой поверхности прямого конуса вращения представляет собой круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конуса, а длина дуги сектора — длине окружности основания конуса (угол при вершине сектора  $\alpha = r \cdot 360^\circ / l$ , где  $r$  — радиус окружности основания конуса,  $l$  — длина образующей конуса). Для нанесения на развертку линии пересечения конуса и цилиндра построены образующие  $(S_0-1'_0), (S_0-2'_0), (S_0-3'_0)$  т.д., проходящие через точки линии пересечения. Положение точек  $1'_0, 2'_0, 3'_0, 4'_0, 5'_0$  найдено путем разгибания дуги окружности основания конуса по способу хорд. Положение точек  $D'_0, C'_0$  и других найдено путем определения истинных величин соответствующих отрезков способом вращения вокруг оси конуса (например,  $|S_0 D'_0| = |S_0 D'_*|$ ,  $|S_0 C'_0| = |S_0 C'_*|$  и т.д.). Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии, на чертеже построена половина развертки.

Задача 7. На поверхности данного цилиндра вращения с эллиптическими основаниями провести геодезическую линию между точками А и В (рис. 83).

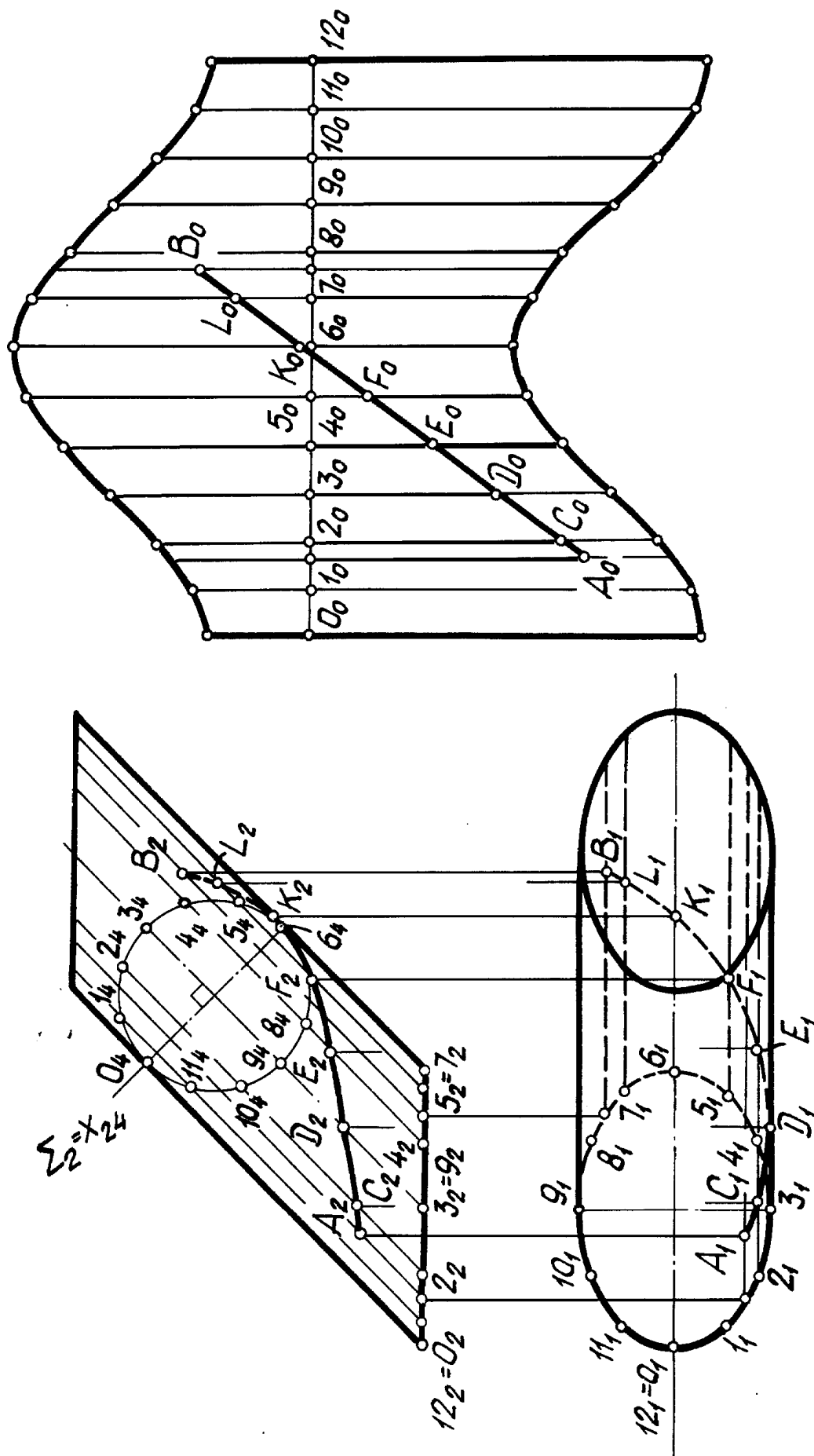


Рис. 83



Для проведения искомой линии необходимо построить развертку боковой поверхности цилиндра. На рис. 83 она построена по способу нормального сечения. При помощи образующих цилиндра, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , на развертке найдены соответствующие им точки  $A_0$  и  $B_0$ , которые затем соединены отрезком прямой. На развертке отмечены точки  $C_0, D_0$  и т.д. пересечения отрезка прямой  $[A_0B_0]$  с образующими цилиндра, проходящими через точки  $2_0, 3_0$  и т.д. При помощи точек  $C_0, D_0, E_0, F_0$  и т.д. построены проекции искомой геодезической линии.

Примечание. Геодезическая линия является кратчайшей из всех линий, которые можно провести на поверхности между двумя ее точками, и поэтому на развертке она преобразуется в прямую.

Задача 8. Определить длину и проекции кратчайшего пути между точками  $A$  и  $B$ , принадлежащими поверхности пирамиды  $SKLM$  (рис. 84).

Эта задача решена также с помощью развертки боковой поверхности пирамиды. Длины ребер пирамиды определены способом прямоугольного треугольника; с помощью прямых  $(S-2)$  и  $(S-1)$  на развертку нанесены точки  $A_0$  и  $B_0$ , которые затем соединены отрезком прямой. С помощью точки  $C_0$  пересечения отрезка  $[AB]$  с ребром  $[S_0K_0]$  построены проекции  $A_2C_2B_2$  и  $A_1C_1B_1$  ломаной  $ACB$ , которая является искомой.

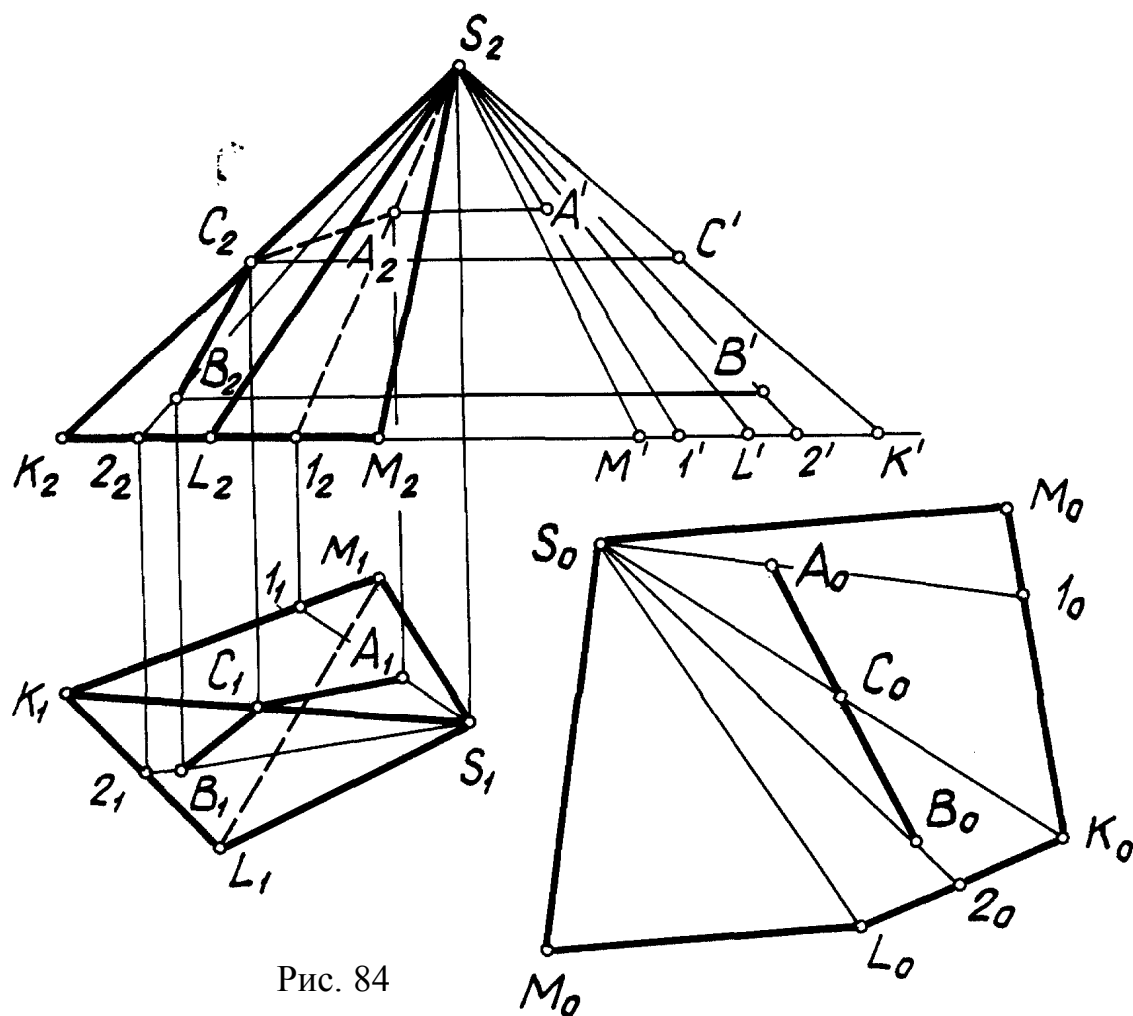


Рис. 84