

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Валиев, Квантовые компьютеры и квантовые вычисления,
УФН, 2005, том 175, номер 1, 3–39

<https://www.mathnet.ru/ufn135>

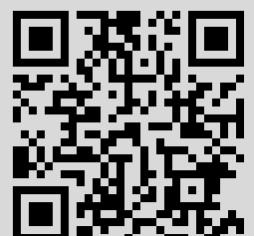
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.70.165.174

9 июля 2025 г., 13:11:35



ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантовые компьютеры и квантовые вычисления

К.А. Валиев

Обзор посвящен изложению принципов работы квантовых компьютеров и их элементов. Представлена теория идеальных компьютеров, не взаимодействующих с окружением и не подверженных процессам квантовой декогерентизации. Исследованы процессы декогерентизации в квантовых компьютерах. Рассмотрены методы коррекции ошибок в квантовых вычислениях, обусловленных декогерентизацией состояния квантового компьютера, а также возможные методы подавления процессов декогерентизации. Обзор завершается кратким перечислением предложений по реализации квантовых компьютеров.

PACS numbers: 03.65.Yz, 03.67.-a, 03.67.Lx

Содержание

1. Введение (3).
1.1. Классические и квантовые приборы. 1.2. Алгоритмы: классы их сложности.
2. Кубиты: свойства и математическое описание состояний (5).
2.1. Биты и кубиты. 2.2. Кубит в гильбертовом векторном пространстве состояний. 2.3. Кvantовая когерентность векторов состояния.
3. Принципы построения и работы идеального квантового компьютера (10).
3.1. Идеальный квантовый компьютер. 3.2. Квантовый компьютер — цифровой компьютер с аналоговым управлением. 3.3. Классическая и квантовая информация в квантовой системе. 3.4. Как реализовать квантовый алгоритм? 3.5. Универсальные наборы элементарных операций. 3.6. Осцилляция Раби между состояниями кубита и однокубитовые операции. 3.7. Кубит, управляемый рамановскими переходами А-типа.
4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем (15).
4.1. Смешанные состояния квантовых систем. 4.2. Смешанные состояния квантовых подсистем. 4.3. Запутанные состояния квантовых систем. 4.4. Преобразования запутанных состояний. 4.5. Запутанность в смешанных состояниях композитных систем. 4.6. Экспериментальные методы получения запутанных состояний.
5. Проблемы измерений состояния кубита (18).
5.1. Измерение состояния кубита. 5.2. Томография квантового состояния.
6. Квантовые алгоритмы (20).
6.1. Квантовые алгоритмы факторизации чисел и поиска в базе данных. 6.2. Алгоритм телепортации неизвестного квантового состояния. 6.3. Моделирование квантовых систем на квантовом компьютере. 6.4. Моделирование динамики квантовых систем на квантовом компьютере.
7. Процессы декогерентизации состояний кубитов и квантовых компьютеров (23).
7.1. Декогерентизация состояний квантовых систем. 7.2. Фазовая декогерентизация кубита. 7.3. Оператор декогерентизации кубита. 7.4. Микроскопическая теория процесса амплитудной декогерентизации. 7.5. Фазовая и амплитудная декогерентизация спинового кубита в случайном классическом поле. 7.6. Декогерентизация вследствие межкубитовых взаимодействий: квантовый хаос. 7.7. Декогерентизация, обусловленная ошибками управления кубитами. 7.8. Декогерентизация кубитов в многоуровневых системах. 7.9. Декогерентизация в квантовых операциях. 7.10. Зависимость скорости декогерентизации от числа кубитов в компьютере.
8. Методы преодоления эффектов декогерентизации в квантовых компьютерах (30).
8.1. Кодирование информации и коррекция ошибок в классическом канале. 8.2. Трехкубитовый квантовый код. 8.3. Коррекция фазовых ошибок. 8.4. Помехоустойчивые квантовые вычисления. 8.5. Свободные от декогерентизации состояния квантового компьютера. 8.6. Устойчивые к декогерентизации кубиты. 8.7. Методы предотвращения ошибок: квантовый эффект Зенона. 8.8. Динамические методы подавления декогерентизации. 8.9. Квантовая коррекция ошибок методом слабых непрерывных измерений и обратной связи. 8.10. Помехоустойчивые топологические квантовые вычисления. 8.11. О возможности комбинированного применения различных методов коррекции ошибок.
9. Поиски путей реализации квантовых компьютеров: экспериментальные исследования (37).
10. Заключение (38).
10.1. Квантовые компьютеры: мечта или реальность? 10.2. Что дальше? 10.3. О содержании и структуре современного курса квантовой механики.

Список литературы (38).

1. Введение

1.1. Классические и квантовые приборы

Главные технические достижения XIX века связаны с тем, что удалось понять квантовые законы строения материи.

К.А. Валиев. Физико-технологический институт РАН,
117218 Москва, Нахимовский просп. 36/1, Российской Федерации
Тел. (095) 125-77-09. Факс (095) 129-31-41
E-mail: valiev@ftian.oivta.ru

Статья поступила 15 июля 2004 г., после доработки 20 октября 2004 г.

Лазерная техника основана на знании квантовых спектров электронов в газах, полупроводниках и диэлектриках. Квантовая теория зонной структуры спектров электронов в полупроводниках служит базисом физики транзисторов. Атомная энергетика построена на понимании квантовых законов строения атомного ядра.

Хотя функционирование лазеров и транзисторов основано на использовании квантовых свойств материи, эти приборы, тем не менее, чаще всего работают в классическом режиме. Действительно, токи электронов и напряжения на электродах транзисторов являются классическими величинами, полученными в результате усреднения по большому ансамблю частиц. Аналогично, когерентное лазерное излучение описывается законами классической электродинамики.

"Классичность" лазерного излучения обеспечивается наличием большого ансамбля квантов лазерного излучения. При переходе в режим одиночных фотонов (одноатомные лазеры) лазер становится квантовым прибором в том смысле, что не только его функционирование основано на квантовых законах, но и его излучение представляет собой квантовый объект, например одиночный фотон. Транзистор в одноэлектронном режиме может стать квантовым прибором, если динамика электрона описывается квантовым уравнением Шрёдингера (так называемый баллистический режим транзистора).

Таким образом, один и тот же прибор может работать как в классическом, так и в квантовом режиме. Будем считать понятие "классический прибор" и "прибор, работающий в классическом режиме", тождественными. Функционирование классического прибора описывается уравнениями классической физики для классических переменных.

Под квантовым прибором будем понимать прибор, работающий в квантовом режиме. Квантовый режим означает, что динамика прибора описывается уравнением Шрёдингера для волновой функции. Аргументами волновой функции выступают квантовые переменные (координаты, импульсы, спины частиц). Волновая функция квантовой системы обладает квантовой когерентностью в том обычном смысле, что она способна к проявлению явлений интерференции при сложении различных компонент волновой функции. Свойство когерентности волновой функции, описывающей квантовый прибор, является его важнейшей отличительной чертой. Термин "квантовый прибор" мы используем как сокращенный вариант термина "квантово-когерентный прибор"¹.

До сих пор все машины, используемые человеком в практической деятельности, были классическими. Тем не менее техническую революцию XX века в информатике и энергетике правомерно назвать первой квантовой революцией, настолько тесно она связана с квантовой физикой. Представим себе теперь, что мы преодолели технологические и другие трудности, стоящие на пути создания квантово-когерентных приборов, и создали новое

поколение машин и технических систем, обеспечивающих использование квантовых технологий в практической деятельности. Это было бы осуществлением второй квантовой революции [1].

Законы классической и квантовой физики имеют принципиальные различия. Поэтому можно ожидать, что квантово-когерентные приборы и квантовые технологии будут иметь принципиальные отличия от классических приборов и технологий того же назначения. Было бы важно с практической точки зрения, если бы отличия квантовых приборов и технологий от классических аналогов означали их "преимущества". Иными словами, квантовая техника и технологии должны помочь преодолеть установленные для классической техники "пределы" и ограничения.

Теоретический анализ и эксперименты демонстрируют наличие именно таких возможностей. Возможно, например, преодолеть дифракционный предел разрешения в квантовой оптической микроскопии и квантовой оптической литографии [2], построить "абсолютно секретные" квантовые линии связи (квантовая криптография) [3]. В квантовой метрологии возможно увеличение чувствительности интерференционных приборов на несколько порядков величины [2, 4]. За неимением места эти интересные темы остаются за пределами нашего обзора. Обзор посвящен квантовым компьютерам и выполняемым на них квантовым вычислениям. Квантовые компьютеры обладают существенными преимуществами по сравнению с классическими компьютерами и могут обеспечить решение задач, считающихся "нерешаемыми" на классических компьютерах. Создание квантовых компьютеров сопряжено с преодолением как технологических трудностей, так и ограничений, связанных с декогерентизацией состояний квантового компьютера. Эти проблемы рассмотрены в последующих разделах обзора.

Бурный рост интереса к экспериментам по квантовой динамике частиц в последней четверти XX века связан с появлением ряда принципиально новых экспериментальных методик, дающих возможность удерживать отдельные атомы, ионы, электроны, охлаждать их до сверхнизких температур (вплоть до уровня нанокельвин), перемещать их и, главное, управлять их квантовой динамикой. Методы удержания заряженных частиц в электромагнитных ловушках позволили увеличить время удержания до многих недель, охлаждать частицы до сверхнизких температур с помощью лазерных методов охлаждения, исследовать их спектры в условиях максимальной изоляции в целях создания эталонов частоты и времени.

В ловушках Пауля были осуществлены состояния вещества, называемые одномерными ионными кристаллами [5]. В них цепочка ионов удерживается вместе внешними статическими и переменными электрическими полями от разбегания, обусловленного кулоновским отталкиванием ионов. Поля можно выбрать так, чтобы равновесное расстояние между ионами составляло несколько микрометров, что позволяет воздействовать на каждый ион отдельно, например сфокусированным лазерным лучом, управляя квантовой эволюцией состояния иона. Такая структура служит популярной моделью для экспериментов по созданию одного из прототипов квантового компьютера [6]. При создании этой модели использованы достижения тех-

¹ Здесь возникает необходимость пояснить содержание термина "прибор квантовой электроники". Этот термин не эквивалентен термину "квантовый прибор". Как показано выше, прибор квантовой электроники (лазер) может быть как классическим прибором (классический режим), так и квантовым (квантово-когерентный режим). В современной оптике описание квантово-когерентных явлений и приборов выделено в раздел "квантовая оптика".

ники сверхвысокого вакуума, оригинальных электрических ловушек, лазерного охлаждения, лазерного управления квантовой динамикой.

Похожая одномерная цепочка атомов фосфора ^{31}P может быть погружена в бесспиновый диэлектрический кристалл кремния ^{28}Si , охлажденный до температур порядка 1 мК [7]. Квантовой динамикой ядерного и электронного спинов атомов ^{31}P можно управлять методами импульсного ядерного и электронного магнитного резонанса. Селективный доступ к отдельному атому достигается настройкой его резонансных частот путем управления электронной структурой атома электрическими полями на наноэлектродах. Для построения такой структуры необходимо развивать и использовать методы так называемых нанотехнологий с атомным разрешением. Другие предложения по созданию элементов квантовых компьютеров на основе твердого тела основаны на физике низкоразмерных электронных систем в полупроводниках — двумерного электронного газа, электронов в квантовых проволоках и квантовых точках. Эти структуры изготавливаются методами молекулярной эпитаксии и нанолитографии.

1.2. Алгоритмы: классы их сложности

Чтобы решить задачу, компьютер, классический или квантовый, выполняет определенную последовательность операций (инструкций). Описание этой последовательности операций называется алгоритмом решения задачи. Задача характеризуется ее размером n , равным, например, числу разрядов двоичного числа, над которым выполняется алгоритм. Алгоритм реализуется некоторой схемой операций N_n , зависящей от n ; схема N_{n+1} получается из N_n на основе простых правил.

В теории сложности алгоритмов для классических компьютеров принято разделять алгоритмы на эффективные и неэффективные. Алгоритм относится к классу эффективных, если схема N_n состоит из полиномиального числа операций $O(n^d)$, где $d = \text{const}$, n — размер задачи. Время выполнения эффективного алгоритма возрастает с размером задачи полиномиально: $t_n \propto n^d$. В данном случае используемым для решения задачи ресурсом является время работы компьютера. К другим ресурсам относятся объем памяти компьютера и (в случае квантового компьютера) точность выполнения операций. Эффективный алгоритм должен использовать полиномиальное количество ресурсов, являющихся ограниченными. Эффективные алгоритмы называются также полиномиальными (класс Р).

Эффективным алгоритмам класса Р противопоставляются неэффективные, требующие экспоненциально больших ресурсов (времени, памяти, точности). Например, если $t_n \propto 2^n$, алгоритм причисляется к неэффективным. Примером задачи, для которой не найдено эффективного алгоритма решения на классическом компьютере, является задача о вычислении простых множителей больших n -разрядных чисел (задача о факторизации чисел)². Лучший известный вероятностный алгоритм для классических компьютеров требует $2^{x(n \log_2 n)^{1/2}}$ операций [8].

В 1994 г. Шор построил алгоритм решения этой задачи на квантовом компьютере, который оказался

полиномиальной сложности: необходимое число операций $O(n^2 \log_2 (\log_2 n \log_2 \varepsilon^{-1}))$, где ε — вероятность ошибочного результата вычислений [9]. Результат Шора был сенсационным. Он опроверг так называемый тезис (эмпирический закон) Чёрча–Тьюринга: все компьютеры эквивалентны в том смысле, что переход от одного компьютера к другому не изменяет класса сложности задачи. Тезис был сформулирован для множества классических компьютеров. Тезис нарушается, если множество включает квантовые компьютеры.

Результат не оказался неожиданным для физиков. Информация не является только математическим понятием. Она имеет физического носителя: кодируется, хранится, обрабатывается, передается, записывается, стирается путем изменения состояния носителя информации. Информация физична (*information is physical* [10]). Наличие глубокой связи между физикой и информацией обнаруживается при сопоставлении термодинамической энтропии в физике и информационной энтропии Шенонна в теории информации: они совпадают с точностью до постоянного множителя.

Принципиальные различия классических и квантовых законов физики обусловливают и принципиальные различия между классической и квантовой информацией, а также методов их обработки. Физическая теория информации включает в себя классическую и квантовую теории информации, а в более широком смысле (с включением в состав понятия соответствующих технических средств) классическую и квантовую информатику. К замечательным достижениям классической теории информации относится решение парадокса с демоном Максвелла, нарушающим второй закон термодинамики. Парадокс исчезает, если учсть свойства процесса стирания информации [10]: стирание 1 бита информации сопровождается затратой энергии $kT \ln 2$ и возрастанием энтропии на $k \ln 2$ (принцип Ландауэра, 1961).

2. Кубиты: свойства и математическое описание состояний

2.1. Биты и кубиты

Словами "бит" и "кубит" обозначают как единицы классической и квантовой информации, так и классические и квантовые системы, являющиеся носителями 1 бита (кубита) информации.

В современных классических компьютерах существуют биты памяти, хранящие информацию, и управляемые биты в "схемах", обрабатывающих информацию. В магнитной памяти ЭВМ битом является намагниченная область магнитной пленки: двум направлениям намагниченности соответствуют значения "0" и "1" бит информации. Переключение "0" → "1" или "1" → "0" требует преодоления энергетического барьера между двумя состояниями намагниченной пленки; именно наличие барьера обеспечивает надежность хранения информации.

В оперативной памяти ЭВМ носителем информации является триггерная транзисторная схема. В описанных ячейках памяти состояния "0" и "1" разделены энергетическим барьером. Более того, состояния с минимальной энергией являются атTRACTорами, к которым система эволюционирует из множества состояний, окружающих атTRACTор. Надежность хранения информации в класси-

² Доказательство того, что эффективный алгоритм этой задачи не существует, не найдено.

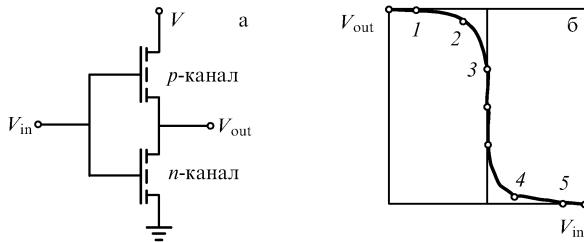


Рис. 1. Схема классического инвертора на двух полевых транзисторах (а) и передаточная характеристика инвертора (б). Состояния "0" и "1" на входе (V_{in}) и выходе (V_{out}) кодируются значениями электрического напряжения.

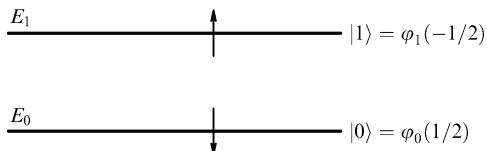


Рис. 2. Схема квантового бита — кубита. Логические состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита соответствуют собственным функциям энергии спина $I = 1/2$ или проекции I_z в постоянном магнитном поле B .

ческих компьютерах обеспечивается наличием энергетического барьера, который разделяет два атTRACTора, представляющих состояния "0" и "1".

Примером управляемого бита, используемого в системах обработки информации в ЭВМ (процессорах), является инвертор, построенный на двух транзисторах (рис. 1). В инверторе входное напряжение V_{in} "управляет" напряжением V_{out} на выходе: если V_{in} соответствует значению "0" ("1"), то V_{out} — "1" ("0"). Инвертор выполняет логическую операцию НЕ (NOT). При этом используется нелинейное функциональное соотношение

$$V_{out} = f(V_{in}),$$

определенное свойствами транзисторов и их связями в схеме.

Базовым элементом квантового компьютера (носителем квантовой информации) является квантовый бит — кубит. В системах квантовой связи информация передается путем физического переноса кубита — носителя информации или методом телепортации квантового состояния кубита.

В качестве кубита может быть избрана любая квантовая система с двумя состояниями, характеризуемыми ортонормированными волновыми функциями $|\varphi_0\rangle$ и $|\varphi_1\rangle$. Удобным примером кубита является ядерный (или электронный) спин $I = 1/2$, который в постоянном внешнем магнитном поле B имеет два уровня энергии:

$$E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\gamma B, \quad E_1 = \frac{1}{2}\hbar\gamma B,$$

соответствующих направлениям спина вдоль поля или против поля (рис. 2). Волновые функции

$$|\varphi_0\rangle = \left|I_z = \frac{1}{2}\right\rangle, \quad |\varphi_1\rangle = \left|I_z = -\frac{1}{2}\right\rangle$$

являются собственными функциями оператора полной энергии спина в магнитном поле B :

$$H = -I_z\hbar\gamma B.$$

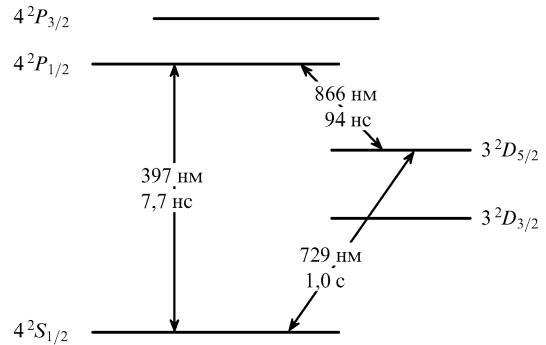


Рис. 3. Схема кубита в системе собственных значений энергии и собственных функций иона Ca^{2+} . В качестве кубитовых выбраны состояния $|4^2S_{1/2}\rangle = |0\rangle$ и $|3^2D_{5/2}\rangle = |1\rangle$. Спонтанный распад $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ происходит медленно (за время 1 с).

Другим примером кубита является ион Ca^{2+} в составе одномерного ионного кристалла. Схема уровней энергии иона Ca^{2+} приведена на рис. 3. В качестве состояния $|0\rangle$ кубита можно выбрать подуровень $4^2S_{1/2}$, в качестве $|1\rangle$ — подуровень $3^2D_{5/2}$ возбужденного метастабильного состояния иона. Между уровнями S и D запрещены дипольные и разрешены квадрупольные электрические переходы, так что время жизни иона Ca^{2+} в D -состоянии составляет 1 с.

Обратим внимание на то, что между состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубитов нет энергетического барьера: состояние $|1\rangle$ неустойчиво по отношению к переходу в состояние $|0\rangle$. Другие (кроме кубитовых) состояния иона Ca^{2+} являются вспомогательными при организации динамики кубита, например при его охлаждении и измерении состояния [5]. Переходы $4^2S_{1/2} \leftrightarrow 3^2D_{5/2}$ (динамика кубита) управляются лазерными импульсами на частоте перехода. Лазерный пучок фокусируется на отдельном ионе в ионном кристалле [5].

Есть и иные варианты выбора состояний кубита. Если основное состояние иона вырождено по спину $S = 1/2$, в постоянном магнитном поле B оно расщепляется на два спиновых подуровня $|\pm 1/2\rangle$, которые можно выбрать в качестве состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита. Управлять переходами $|+1/2\rangle \leftrightarrow |-1/2\rangle$ можно с помощью совокупного действия полей двух лазеров, настроенных для работы по так называемой рамановской схеме. Разность частот лазеров в рамановской схеме равна частоте перехода между подуровнями $|\pm 1/2\rangle$: фотон большей частоты (лазера накачки) поглощается при переходе с уровня $|0\rangle$ на промежуточный виртуальный уровень с энергией вблизи вспомогательного уровня $|2\rangle$, а на меньшей частоте стоксова лазера происходит вынужденное излучение фотона при переходе с виртуального уровня на уровень $|1\rangle$.

В других популярных реализациях состояниями кубита выбирают орбитальные состояния электрона в квантовых ямах или квантовых точках. Состояния "0" и "1" электрона в квантовых точках могут быть разделены потенциальным барьером, как в реализации классического бита. Тем не менее в квантовом случае состояние "1" сохраняет неустойчивость по отношению к распаду "1" \rightarrow "0" благодаря возможности туннельного перехода сквозь барьер. Управление динамикой кубита выполняется лазерными импульсами через возбужденные уровни энергии электрона [11].

Большой интерес вызывают реализации кубитов с использованием сверхпроводниковых структур. В зарядовом сверхпроводниковом кубите состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответствуют отсутствие и наличие заряда одной купровской пары на металлической сверхпроводящей квантовой точке [12]. Состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита в сквиде (сверхпроводниковое кольцо с переходами Джозефсона в магнитном поле) соответствуют сверхпроводниковые токи в противоположных направлениях [13].

Большое число экспериментов выполнено на кубите — одиночном фотоне. Любые два состояния фотона с ортогональными поляризациями могут быть выбраны как состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита. Возможен также выбор двух фотонных состояний, различающихся фазой π . Системы из фотонного и атомного кубитов в резонаторе составляют базисную систему для экспериментов в разделе квантовой оптики, называемой резонаторной квантовой электродинамикой (cavity QED) [14].

2.2. Кубит в гильбертовом векторном пространстве состояний

Выше приведены примеры выбора двух ортонормированных состояний различных квантовых систем в качестве базисных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита. По этому базису можно разложить любое нормированное к единице состояние $|\varphi\rangle$ кубита:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1)$$

Состояние (1) выражает принцип суперпозиции квантовой механики как линейной теории: если состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ суть решения уравнения Шредингера для системы, то любая суперпозиция этих решений также есть решение уравнения.

Множество векторов состояний $|\varphi\rangle$ образует двумерное векторное пространство Гильберта кубита. Компоненты двумерных векторов $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|\psi\rangle$ записываются в виде столбцов:

$$|0\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad |\psi\rangle = a \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ служат ортами в двумерном гильбертовом пространстве кубита. Проекции $|\psi\rangle$ на орты равны амплитудам a и b в суперпозиции:

$$\langle 0|\psi\rangle = a, \quad \langle 1|\psi\rangle = b.$$

В общем случае амплитуды a и b — некоторые комплексные числа:

$$a = |a| \exp(i\varphi_a), \quad b = |b| \exp(i\varphi_b).$$

Тогда

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi_a)[|a| + |b| \exp(i(\varphi_b - \varphi_a))].$$

Общий фазовый множитель $\exp(i\varphi_a)$ не влияет на результаты измерений состояния кубита, и фаза φ_a может иметь произвольное значение. Отсюда следует, что вектор $|\psi\rangle$ определяется двумя вещественными параметрами, например $|a|$ и $(\varphi_b - \varphi_a)$. Значения $|a|^2$ и $|b|^2 = 1 - |a|^2$ определяются путем многократного измерения в базисе $|0\rangle$, $|1\rangle$ кубитов из ансамбля, приготовленного в состоянии $|\psi\rangle$, как вероятности результатов

измерений:

$$p(|0\rangle) = |a|^2, \quad p(|1\rangle) = |b|^2.$$

Разность фаз $(\varphi_b - \varphi_a)$ амплитуд может быть определена из экспериментов интерференционного типа (см. ниже).

Преобразования вектора

$$|\psi\rangle = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

в вектор

$$|\psi'\rangle = \begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix}$$

являются однокубитовыми квантовыми операциями в квантовых вычислениях. Геометрически такое преобразование есть вращение вектора

$$|\psi\rangle = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

до совпадения с вектором

$$|\psi'\rangle = \begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix}.$$

Оператор вращения U представляет собой унитарную матрицу второго порядка 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix} = U(2 \times 2) \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}.$$

Из общего вида матрицы

$$U = \begin{pmatrix} c \exp(-i\alpha) & -t \exp(i\beta) \\ t \exp(-i\beta) & c \exp(i\alpha) \end{pmatrix},$$

где c , t , α , β — вещественные числа, следует ее унитарность, если $c^2 + t^2 = 1$.

Вращение вектора в пространстве Гильберта непрерывно: при своем вращении на конечный угол вектор $|\psi\rangle$ проходит через непрерывную последовательность промежуточных ориентаций. Матрица поворота на конечный угол представляет собой упорядоченное произведение матриц поворотов на бесконечно малые углы [15]. Непрерывность переходов является принципиальным отличием квантовой механики, положенным в основу ее аксиоматической формулировки [16].

Кубит "живет" одновременно в абстрактном двумерном векторном пространстве Гильберта и в трехмерном пространстве Евклида. (Аналогичное утверждение справедливо и в отношении квантового компьютера как совокупности кубитов.) Вычислительные операции совершаются в гильбертовом пространстве как преобразования вектора состояния:

$$|\psi'\rangle = U(2 \times 2) |\psi\rangle.$$

Одновременно, физические процессы в квантовой системе, избранной в качестве кубита, описываются в трехмерном евклидовом пространстве. Мы должны уметь выполнять физические операции в лабораторной

системе координат $Oxyz$, приводящие к необходимому преобразованию U вектора состояния кубита в гильбертовом пространстве. Этую задачу решает следующая теорема [15].

Матрица произвольного унитарного преобразования кубита U в гильбертовом пространстве может быть представлена как произведение трех матриц, описывающих вращения вектора состояния:

$$U = \exp(i\alpha) R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta),$$

где n, m — два непараллельных единичных вектора в системе координат $Oxyz$, а $R_n(\theta)$ — матрица (оператор) вращения вокруг оси n на угол θ .

В условиях реального эксперимента оси n, m удобно совместить с осями системы координат $Oxyz$. Тогда возможны zy - и xy -разложения [15]:

$$U = \exp(i\alpha) R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \quad (\text{zy-разложение}), \quad (3)$$

$$U = \exp(i\alpha) R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta) \quad (\text{xy-разложение}).$$

Матрицы вращений вокруг осей x, y, z имеют вид [15]

$$\begin{aligned} R_x(\varphi) &= \begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}, \\ R_y(\varphi) &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \\ R_z(\varphi) &= \begin{pmatrix} c + is & 0 \\ 0 & c - is \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $c = \cos(\varphi/2)$, $s = \sin(\varphi/2)$. Подставляя в zy -разложение матрицы вращений R_z, R_y и перемножая матрицы, получаем

$$U = \exp(i\alpha) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \exp\left(-i\frac{\beta+\delta}{2}\right) & -\sin \frac{\gamma}{2} \exp\left(-i\frac{\beta-\delta}{2}\right) \\ \sin \frac{\gamma}{2} \exp\left(i\frac{\beta-\delta}{2}\right) & \cos \frac{\gamma}{2} \exp\left(i\frac{\beta+\delta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если задать преобразование U в гильбертовом пространстве матрицей

$$U = \exp(i\alpha) \begin{pmatrix} a \exp(-iu) & -b \exp(iv) \\ b \exp(-iv) & a \exp(iu) \end{pmatrix} \quad (6)$$

и потребовать тождества матриц (5) и (6), то

$$a = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad b = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \delta = \frac{u+v}{2}, \quad \beta = \frac{u-v}{2}. \quad (7)$$

Таким образом, произвольное преобразование вектора состояния кубита с параметрами согласно (6) может быть выполнено как последовательные вращения этого вектора вокруг осей z, y, z лабораторной системы координат на углы δ, γ, β согласно (7).

Вращения $R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$ вектора состояния $|\varphi\rangle$ кубита рассматриваются как элементарные однокубитовые вычислительные операции. Их необходимо связать с параметрами физических полей, управляющих динамикой квантовой системы, избранной в качестве кубита. Например, в случае кубита — спина $I = 1/2$ вращение его вектора состояния в магнитном поле

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z} + B_1 \mathbf{x} \cos(\omega t)$$

$(\gamma B_0 \equiv \omega_0, \gamma B_1 = \Omega)$ описывается уравнением [15]

$$|\varphi(t)\rangle = \exp \left[i \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} Z + \Omega X \right) t \right] |\varphi(0)\rangle. \quad (8)$$

Здесь Z, X — матрицы Паули, \mathbf{z}, \mathbf{x} — орты вдоль осей z, x системы координат $Oxyz$.

Уравнение (8) соответствует вращению $|\varphi\rangle$ вокруг оси

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{z} + \lambda \mathbf{x}}{(1 + \lambda^2)^{1/2}}$$

на угол

$$\theta = \Omega t \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda = \frac{2\Omega}{\omega_0 - \omega}.$$

При точном резонансе ($\omega = \omega_0$) ось вращения \mathbf{n} вектора $|\varphi\rangle$ совпадает с осью \mathbf{x} , а угловая скорость вращения — с так называемой частотой Раби Ω (см. раздел 3.6):

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}, \quad \theta = \Omega t.$$

В качестве стандартных однокубитовых операций в квантовых вычислениях часто используют преобразования вектора состояния, выраженные матрицами Паули:

$$\begin{aligned} R_x(\pi) \equiv X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_y(\pi) \equiv Y &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_z(\pi) \equiv Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица преобразования с изменением фазы вектора состояния (фазовый вентиль) имеет вид

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а матрица преобразования Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + Z). \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$X \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix} = \text{NOT} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}, \quad Z \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ -b \end{vmatrix},$$

$$U(\varphi) \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \exp(i\varphi) \end{vmatrix},$$

$$H|0\rangle = H \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle),$$

$$H|1\rangle = H \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

С точностью до общего фазового множителя $X = \text{NOT} = R_x(\pi)$: операция отрицания НЕ (NOT) выполняется вращением (поворотом) вектора состояния кубита вокруг оси x на угол π .

Приведем также определение скалярного произведения векторов $|\varphi_i\rangle = a_i|0\rangle + b_i|1\rangle$ и $|\varphi_j\rangle = a_j|0\rangle + b_j|1\rangle$:

$$\langle \varphi_j | \varphi_i \rangle = a_j^* a_i + b_j^* b_i.$$

Геометрически оно определяет "угол" θ между векторами:

$$\cos \theta = \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle.$$

Состояние кубита $|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ может быть отображен в точку на поверхности трехмерной единичной сферы Блоха в евклидовом пространстве. Сферические координаты θ, φ точки на поверхности сферы связаны с амплитудами a, b равенствами

$$\cos \frac{\theta}{2} = a, \quad \exp(i\varphi) \sin \frac{\theta}{2} = b$$

(амплитуду a можно считать действительным числом ввиду ненаблюдаемости общей фазы). Такое взаимно однозначное соответствие означает изоморфизм групп вращений в двумерном гильбертовом и трехмерном евклидовом пространствах:

$$\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SO}(3).$$

2.3. Квантовая когерентность векторов состояния

Состояния квантовой системы, описываемые векторами состояния $|\psi\rangle$, называются чистыми. Им противопоставляются так называемые смешанные состояния, которые нельзя описать векторами состояния. Чистые и смешанные состояния квантовых систем принципиально различаются по признаку когерентности: чистые состояния когерентны, смешанные — некогерентны.

Понятие когерентности в квантовой физике определяется аналогично понятию когерентности в оптике: волновые функции (векторы состояния) квантово-когерентных систем способны к интерференции. Знаменитый эксперимент по наблюдению дифракции электронов на двух щелях по сути является экспериментом по выявлению квантовой когерентности орбитальной волновой функции $|\psi(r)\rangle$ свободного электрона. Мы продемонстрируем когерентность волновой функции одиночного фотона на интерферометре Маха–Зендера [14]. Схема интерферометра приведена на рис. 4.

Волновую функцию фотона, падающего на делитель BS_1 горизонтально (вертикально), примем за базисное

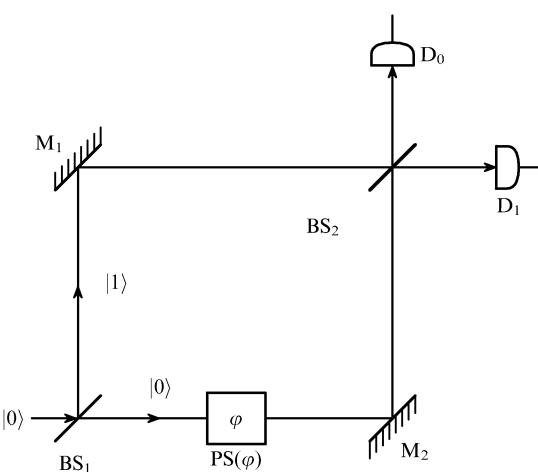


Рис. 4. Схема интерференции фотона в интерферометре Маха–Зендера: BS_1, BS_2 — делители пучка 50/50; M_1, M_2 — зеркала; $PS(\varphi)$ — фазосдвигатель; D_1, D_2 — детекторы одиночных фотонов. Интерференция выявляет квантовую когерентность состояния фотона.

состояние $|0\rangle$ ($|1\rangle$). Делитель пучка 50/50 отражает или пропускает фотоны с равными амплитудами $1/\sqrt{2}$. В интерферометре отраженный и прошедший фотоны приобретают возможность двигаться по разным путям, т.е. фотон приобретает новую степень свободы.

Введем новые базисные состояния фотона $|0\rangle$ и $|1\rangle$, соответствующие движению по двум возможным путям. С учетом разности фаз $\pi/2$ между отраженным и прошедшим волнами делитель пучка BS_1 совершает преобразования состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ на входе делителя:

$$|0\rangle \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |1\rangle \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (12)$$

эквивалентные преобразованию Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим процесс интерференции в интерферометре Маха–Зендера для входящего фотона в состоянии $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{PS(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \exp(i\varphi) + |1\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \frac{i\varphi}{2} \left[|0\rangle \exp \frac{i\varphi}{2} + |1\rangle \exp \left(-\frac{i\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Делитель BS_2 снова подвергает состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в (13) преобразованию Адамара. В результате получаем волновую функцию фотона на выходе делителя BS_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \exp \frac{i\varphi}{2} \left[\exp \frac{i\varphi}{2} (|0\rangle + |1\rangle) + \exp \left(-\frac{i\varphi}{2} \right) (|0\rangle - |1\rangle) \right] &= \\ &= \exp \frac{i\varphi}{2} \left[|0\rangle \cos \frac{\varphi}{2} + |1\rangle \sin \frac{\varphi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Интерференция когерентных волновых функций, прошедших по двум плечам интерферометра, определяет вероятности детектирования фотона на детекторах:

$$p_0 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}, \quad p_1 = \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}. \quad (15)$$

Интерференция амплитуд состояний является типичным процессом в квантовых вычислениях. Продемонстрируем это на примере простого вычисления на двух кубитах в начальном состоянии $|00\rangle$ (первый и второй нули отвечают состояниям первого и второго кубитов). Вычисления заключаются в последовательности операций $H_1 H_2 H_1 \text{NOT}_1$:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\xrightarrow{\text{NOT}_1} |10\rangle \xrightarrow{H_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle - |1_1\rangle)|0_2\rangle \xrightarrow{H_2} \\ &\xrightarrow{H_2} \frac{1}{2}(|0_1\rangle - |1_1\rangle)(|0_2\rangle + |1_2\rangle) \xrightarrow{H_1} \\ &\xrightarrow{H_1} \frac{1}{2\sqrt{2}} [|00\rangle(1 - 1) + |10\rangle(1 + 1) + \\ &+ |01\rangle(-1 + 1) + |11\rangle(1 + 1)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Суммы амплитуд при состояниях $|00\rangle$ и $|01\rangle$ равны нулю, поскольку интерференция амплитуд деструктивная, тогда как для амплитуд при $|10\rangle$ и $|11\rangle$ наблюдается конструктивная интерференция.

3. Принципы построения и работы идеального квантового компьютера

3.1. Идеальный квантовый компьютер

Схема квантового компьютера представлена на рис. 5. По существу квантовый компьютер представляет собой регистр из n кубитов, управляемых внешними (классическими) сигналами. Квантовый компьютер встроен в классическое окружение, состоящее из управляющего классического компьютера и генераторов импульсов, управляющих эволюцией кубитов, а также средствами измерений состояния кубитов. В ходе вычислений к регистру n можно добавить другие регистры, играющие вспомогательную роль (ancillas).



Рис. 5. Схема квантового компьютера.

Назовем идеальным квантовый компьютер, состояния которого всегда когерентны. Это означает, во-первых, отсутствие взаимодействия компьютера с окружением, создающим шумы и нарушающим когерентность вектора состояния компьютера (декогерентизация); во-вторых, в идеальном квантовом компьютере внешние сигналы осуществляют точное управление.

Вектор состояния $|\psi\rangle$ квантового регистра из n кубитов представляет собой разложение по 2^n базисным состояниям регистра $|i_1 \dots i_n\rangle$, $i_1, \dots, i_n = \{0, 1\}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} |i_1 \dots i_n\rangle. \quad (17)$$

Здесь суперпозиция $|\psi\rangle$ является вектором в 2^n -мерном векторном пространстве, $|i_1 \dots i_n\rangle$ — 2^n базисных векторов (ортов) этого пространства, a_{i_1, \dots, i_n} — проекции вектора $|\psi\rangle$ на направления ортов $|i_1 \dots i_n\rangle$. Все, что можно знать о физической системе, содержится в ее векторе состояния $|\psi\rangle$. Все, что можно сделать с системой, — это преобразовать ее начальный вектор состояния $|\psi_{in}\rangle$ в другой вектор: $|\psi_f\rangle$. Поэтому процесс вычислений на квантовом компьютере рассматривается как преобразование начального вектора состояния компьютера $|\psi_{in}\rangle$ в конечный вектор состояния $|\psi_f\rangle$ путем умножения вектора $|\psi_{in}\rangle$ на унитарную матрицу U размерности $2^n \times 2^n$:

$$|\psi_f\rangle = U(2^n \times 2^n) |\psi_{in}\rangle. \quad (18)$$

Удобно полагать, что в начальном состоянии компьютера все его кубиты находятся в состоянии $|0\rangle$:

$$|\psi_{in}\rangle = |0_1 \dots 0_n\rangle.$$

Эту операцию называют инициализацией. Состояние $|0_1 \dots 0_n\rangle$ можно получить охлаждением кубитов до сверхнизких температур или путем измерения и управления состоянием кубитов. Алгоритм решения задачи заключен в матрице преобразования $U(2^n \times 2^n)$. Классическая информация о решении задачи содержится в конечном векторе состояния $|\psi_f\rangle$; она должна быть получена измерением кубитов.

Для решения задачи на квантовом компьютере надо изготовить необходимое количество кубитов, инициализировать их, управлять их квантовой эволюцией, выполнить преобразование $U|\psi_{in}\rangle$ и измерить состояния кубитов, описываемых вектором $|\psi_f\rangle = U|\psi_{in}\rangle$. Этим мы займемся позже, а сейчас рассмотрим вопрос о ресурсах квантового компьютера, дающих ему преимущество по сравнению с классическим компьютером.

Анализ ресурса квантового компьютера проведем исходя из уравнения (18) работы компьютера. Введем сначала более экономные обозначения вектора состояния $|\psi\rangle$. Базисное состояние $|i_1 \dots i_n\rangle$ представляет собой n -разрядное двоичное число $|x\rangle$, разряды которого совпадают с числами $i_1, \dots, i_n = \{0, 1\}$. В этих обозначениях

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle.$$

Суперпозиция $|\psi\rangle$ содержит 2^n слагаемых, представляющих собой разложение вектора $|\psi\rangle$ по базисным функциям $|x\rangle$, $0 \leq x \leq 2^n - 1$. Ограниченный физический ресурс, т.е. небольшое количество $n \approx 10^3$ частиц (кубитов), создает экспоненциально большой $2^n = 2^{1000} \approx 10^{300}$ математический информационный ресурс квантового компьютера. Именно из этого обстоятельства вытекают основные преимущества квантового компьютера.

Следствием принципа суперпозиции является 2^n -кратный квантовый параллелизм вычислений. Действительно, изменение состояния только одного кубита перестраивает всю суперпозицию. (Поскольку набор базисных функций $|x\rangle$ постоянен, перестраиваются все 2^n проекций a_x вектора $|\psi\rangle$.)

Сравним эти факты с возможностями регистра классического компьютера. Классический регистр из n битов может находиться только в одном из 2^n состояний, поскольку он не подчиняется принципу суперпозиции. Состояние классического регистра одномерно. Изменение состояния одного бита переводит регистр в другое одномерное (близкое по значению) состояние. Ресурсы классического компьютера экспоненциально малы по сравнению с ресурсами квантового компьютера. Гильбертово пространство состояний $|\psi\rangle$ есть пространство комплексных чисел. Это означает, что амплитуды a_x в разложении $|\psi\rangle = \sum a_x |x\rangle$ являются комплексными числами:

$$a_x = |a_x| \exp(i\varphi_x).$$

При сложении векторов

$$|\psi\rangle + |\psi'\rangle = \sum (a_x + a'_x) |x\rangle$$

происходит интерференция квантовых амплитуд, которую мы демонстрировали на примере интерферометра

Маха – Зендера для одного кубита:

$$\begin{aligned} a_x + a'_x &= [(|a_x| + |a'_x|) \cos \varphi_x^- + \\ &+ i(|a_x| - |a'_x|) \sin \varphi_x^-] \exp(i\varphi_x^+), \quad (19) \\ \varphi_x^\pm &= \frac{\varphi_x \pm \varphi'_x}{2}. \end{aligned}$$

В ходе квантовых вычислений интерференция амплитуд происходит повсеместно и автоматически. Поэтому некоторые авторы представляют себе квантовый компьютер как сложный интерферометр для амплитуд вектора состояния квантового компьютера.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать явление интерференции электромагнитных волн для осуществления квантовых вычислений? Другими словами, не являются ли оптические компьютеры аналогом квантовых? Сравним суперпозицию оптических волн в оптическом компьютере с суперпозицией векторов состояния в квантовом компьютере:

$$\sum_{j=1}^l E_j = \sum_{j=1}^l a_j \sin(\omega t + \varphi_j), \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^l |\psi_j\rangle = \sum_{j=1}^l \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x^{(j)} |x\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=1}^l a_x^{(j)} \right) |x\rangle. \quad (21)$$

В оптическом компьютере происходит однократная интерференция оптических мод E_j ; в квантовом компьютере происходит 2^n -кратная интерференция амплитуд для каждого вектора $|x\rangle$, $0 \leq x \leq 2^n - 1$. Вектор состояния квантового компьютера содержит как цифровую ($|x\rangle$), так и аналоговую (a_x) информацию; оптический компьютер содержит только аналоговую (E_j) информацию. Оптический компьютер не способен моделировать квантовые вычисления, он должен быть отнесен к классу классических аналоговых компьютеров.

3.2. Квантовый компьютер — цифровой компьютер с аналоговым управлением

Анализ уравнения $|\psi_f\rangle = U|\psi_{in}\rangle$ для квантового компьютера позволяет установить принципы работы и управления квантовым компьютером. Состояние $|\psi_{in}\rangle = |0_1 \dots 0_n\rangle$ не содержит никакой информации ни о задаче, ни о способах ее решения. Всю информацию о решаемой задаче и алгоритме ее решения содержит матрица преобразования U . Наконец, конечный вектор состояния

$$|\psi_f\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x^{(f)} |x\rangle$$

содержит информацию о решении задачи. Получить эту информацию можно, измерив в базисе $|0\rangle$, $|1\rangle$ состояние каждого из n кубитов компьютера в состоянии $|\psi_f\rangle$. Выполнив измерение, мы получим любое из значений $0 \leq x \leq 2^n - 1$ с вероятностями $|a_x^{(f)}|^2$, как это следует из общих принципов квантовой физики.

Как разные числа x могут представлять решение задачи, если решение должно быть единственным? Действительно, это так; только одно значение $|s\rangle$ является решением, остальные значения $|x\rangle \neq |s\rangle$ ошибочные. Чтобы идея квантового компьютера имела реальный смысл, квантовый алгоритм должен приводить к такому состоянию $|\psi_f\rangle$, что вероятность найти правильное

решение $p_s = |a_s|^2 \simeq 1$, тогда как сумма вероятностей всех ошибочных решений мала:

$$\sum_{x \neq s} |a_x|^2 \ll 1.$$

Все придуманные к настоящему времени квантовые алгоритмы обладают описанным свойством. Итак, квантовый компьютер дает цифровое решение задачи s с определенной вероятностью, т.е. является цифровым вероятностным компьютером.

Теперь выявим способ управления квантовым компьютером. В ходе квантовых вычислений происходит преобразование начального вектора состояния $|\psi_{in}\rangle = \sum_x a_x^{(in)} |x\rangle$ в конечный вектор $|\psi_f\rangle = \sum_x a_x^{(f)} |x\rangle$ через непрерывный ряд состояний. Базисный набор состояний $|x\rangle$ сохраняется неизменным. Динамика состояния компьютера передается изменениями во времени амплитуд $a_x(t)$, которые являются аналоговыми величинами, принимающими непрерывный ряд значений в интервале $0 \leq |a_x| \leq 1$. Управлять компьютером, — значит, управлять процессами $a_x(t)$, т.е. по способу управления квантовый компьютер является аналоговым компьютером.

Такое сочетание свойств — аналоговый способ управления, вероятностный характер представления цифрового решения — не присутствует ни в одном типе классических компьютеров. Квантовый компьютер выглядит минотавром в мире компьютеров, сочетаая несовместимые в классическом мире свойства аналоговых и цифровых классических компьютеров.

На заре развития вычислительной техники (1950–1960 гг.) аналоговые (классические) компьютеры успешно дополняли цифровые ЭВМ. В последние годы они были вытеснены цифровыми ЭВМ из-за невысокой точности получаемых решений. Аналоговые переменные (токи и напряжения) удавалось контролировать с погрешностью порядка 10^{-2} . По современным оценкам параметры управляющих кубитами сигналов (импульсов) должны контролироваться с погрешностью $10^{-5} – 10^{-4}$. Такую дорогую плату должны будут заплатить создатели квантовых компьютеров за сюрприз встречи с минотавром — цифровым компьютером с аналоговым управлением. Как показано ниже, высокая точность операций необходима, чтобы справиться с проблемой декогерентизации квантовых состояний.

3.3. Классическая и квантовая информация в квантовой системе

Рассмотрим вектор состояния кубита $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ со следующей точки зрения: сколько информации и какой (классической? квантовой?) содержится в кубите, находящемся в этом состоянии?

Поставив эти вопросы, мы сталкиваемся с фундаментальными проблемами определения понятия информации (классической, квантовой) применительно к квантовым системам. Не имея возможности в данном обзоре излагать эти вопросы детально, мы предлагаем принять интуитивную форму определения классической и квантовой информации, содержащейся в кубите в состоянии $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Отнесем к классической части ту информацию, которую мы имеем в классической форме при измерении состояния кубита. Действительно, при измерении кубита в базисе $|0\rangle$, $|1\rangle$ мы получаем 0 или 1. Следовательно, неизвестное нам состояние кубита содержит максимально один бит классической информации.

Значения компонент α, β вектора $|\psi\rangle$ характеризуются тремя аналоговыми величинами: модулями $|\alpha|, |\beta|$ и разностью фаз $\varphi = \arg(\beta/\alpha)$.

Информацию, содержащуюся в амплитудах α, β можно отнести к квантовой части информации, содержащейся в кубите в состоянии $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ [18]. Квантовая часть информации не может быть получена при однократном измерении состояния кубита. Чтобы определить $|\alpha|, |\beta|$, нужно провести бесконечное количество измерений над ансамблем частиц в состоянии $|\psi\rangle$ и определить вероятности $p(0)$ и $p(1)$ результатов испытаний:

$$p(0) = |\alpha|^2, \quad p(1) = |\beta|^2.$$

Для определения разности фаз φ необходимы измерения интерференционного типа. Полное определение вектора состояния принято называть томографией квантового состояния [15].

Аналоговый характер квантовой информации имеет принципиальное значение для квантовой теории. Этим выражается тот факт, что множество квантовых состояний образует континуум: любые два состояния из этого континуума могут быть преобразованы друг в друга непрерывным образом посредством унитарного преобразования. Харди показал, что, приняв в системе аксиом теории вероятностей возможность непрерывного (continuous) преобразования состояний друг в друга (вместо скачкообразного перехода в классической теории вероятностей), можно интерпретировать квантовую механику как квантовую теорию вероятностей [16].

Из сказанного в предыдущих разделах следует, что процессы квантовых вычислений протекают в пространстве аналоговых переменных, т.е. амплитуд a_x при базисных состояниях $|x\rangle$ системы.

Квантовая теория информации строится во многом по аналогии с теорией классической информации Шеннона [15]: аналогично информационной энтропии Шеннона строится квантовая энтропия фон Неймана. Как энтропия Шеннона характеризует количество информации, содержащейся (в среднем) в одном сигнальном символе x , появляющемся с вероятностью $p(x)$, так и энтропия фон Неймана характеризует информацию в квантовых состояниях ρ_x , выступающих в качестве сигнальных символов и появляющихся с вероятностью $p(\rho_x)$ [15].

Свойства энтропии фон Неймана отличаются от свойств энтропии Шеннона, если рассматривать квантовые состояния ρ_x со свойствами, отличными от свойств классических систем, такими как неполная различимость неортогональных состояний, запутанные (entangled) состояния композитных систем и др. [15].

3.4. Как реализовать квантовый алгоритм?

Управление работой квантового компьютера с n кубитами описывает преобразование $|\psi_f\rangle = U(2^n \times 2^n)|\psi_{in}\rangle$, где $|\psi_{in}\rangle$ и $|\psi_f\rangle$ — векторы с 2^n компонентами. При значениях $n = 10^3$ умножение $U|\psi_{in}\rangle$ становится недоступным для самых быстрых (порядка 10^{12} операций в секунду) компьютеров. Еще более трудной представляется физическая реализация преобразования $|\psi_{in}\rangle \rightarrow |\psi_f\rangle$.

Путь к реализации квантовых алгоритмов обнаруживается, если рассмотреть возможность разложения мат-

рицы $U(2^n \times 2^n)$ в упорядоченное произведение матриц второго и четвертого порядков:

$$U(2^n \times 2^n) = \prod_{i,j} U_i(2 \times 2) \otimes U_j(2^2 \times 2^2). \quad (22)$$

Возможность такого разложения (с точностью, достаточной для вычислений) детально обсуждается в [15].

Матрица второго порядка

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

преобразует вектор

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

состояния одного кубита:

$$\begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix},$$

т.е. каждая матрица $U_i(2 \times 2)$ в разложении (22) описывает операцию на том или другом отдельном кубите компьютера. Матрицы $U(2^2 \times 2^2)$ преобразуют векторы состояния пар кубитов:

$$|\psi_{in}\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{11}|11\rangle \rightarrow \\ \rightarrow |\psi_f\rangle = a'_{00}|00\rangle + a'_{10}|10\rangle + a'_{01}|01\rangle + a'_{11}|11\rangle. \quad (23)$$

Следовательно, числа сомножителей второго и четвертого порядков в разложении (22) определяют число однокубитовых и двухкубитовых операций, необходимых для реализации алгоритма. Чтобы алгоритм был эффективным, необходимо, чтобы полное число операций было полиномиальным от числа "задействованных" кубитов в компьютере: $N = P(n)$. Если число операций возрастает экспоненциально с размером задачи (числом задействованных в решении задачи кубитов компьютера), то алгоритм относится к классу неэффективных.

3.5. Универсальные наборы элементарных операций

Однокубитовые операции описывают вращение отдельного кубита:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle.$$

Характер двухкубитовых операций требует дополнительных разъяснений. Двухкубитовая операция предполагает взаимозависимость состояний двух кубитов, своего рода управление (control) одного кубита (контролируемого) другим (контролирующим). Такого рода взаимозависимость требует наличия физического взаимодействия между кубитами, включаемого на время выполнения операции или существующего постоянно.

Среди двухкубитовых операций выделяют операцию "контролируемое НЕ" (Controlled NOT — CNOT). Пусть контролирующий кубит будет первым, контролируемый — вторым. Тогда операция CNOT характеризуется таблицей входных и выходных состояний кубитов:

Входное состояние	$ 00\rangle$	$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
Выходное состояние	$ 00\rangle$	$ 01\rangle$	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$

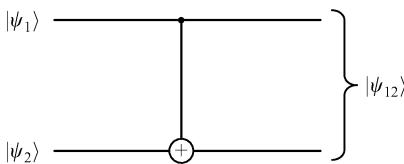


Рис. 6. Схема двухкубитовой операции CNOT. В результате этой операции состояние $|\psi_{12}\rangle$ может оказаться запутанным.

из которой видно, что в операции CNOT второй кубит инвертируется:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle,$$

если первый находится в состоянии $|1\rangle$. Диаграммный символ операции представлен на рис. 6 (горизонтальными линиями показаны оси времени, вертикальной — взаимодействие кубитов).

Если

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle,$$

то с помощью таблицы операции легко вычислить $|\psi_{12}\rangle$:

$$|\psi_{12}\rangle = \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|11\rangle + \beta_1\beta_2|10\rangle.$$

Обобщением контролируемой операции является операция C-U, где U — любая однокубитовая операция. Она выполняется над вторым кубитом, когда контролирующий кубит находится в состоянии $|1\rangle$. В частности, операция U может быть операцией изменения фазы:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{U(\varphi)} \alpha|0\rangle + \exp(i\varphi)\beta|1\rangle.$$

Однокубитовые операции (континуум вращений вектора состояния) плюс двухкубитовая операция CNOT составляют универсальный набор операций, позволяющий осуществить любое преобразование вектора состояния компьютера. С точки зрения практической реализации наличие континуума операций в наборе неудобно.

Максимальной простотой исполнения обладает некоторый дискретный набор операций. В качестве такого набора предлагается, например, набор, состоящий из однокубитовых операций: преобразования Адамара H, фазового вентиля

$$U(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv Z,$$

фазового вентиля $U(\pi/4)$ и двухкубитового вентиля CNOT [15].

Физическая реализация квантовой операции всегда сопровождается некоторой погрешностью исполнения ε . С учетом этого обстоятельства теория квантовых операций должна строиться как теория аппроксимаций.

Определим ошибку E при выполнении операции U [15]:

$$E(U, V) \equiv \max_{|\psi\rangle} \|(U - V)|\psi\rangle\|. \quad (24)$$

Здесь U — матрица идеального преобразования, V — матрица реального (с погрешностью) преобразования, $|\psi\rangle$ — пространство векторов состояний системы. Погрешности последовательности операций $U_m \dots U_1$ суммируются в смысле неравенства:

$$E(U_m \dots U_1, V_m \dots V_1) \leq \sum_{j=1}^m E(U_j, V_j). \quad (25)$$

Убедимся в универсальности дискретного набора операций $H, T \equiv U(\pi/4), U(\pi), \text{CNOT}$, показав возможность выполнения с их помощью любого однокубитового вращения U с заданной погрешностью ε . Выполним последовательно операции HTH и T , представляющие собой вращения сферы Блоха вокруг оси Ox на угол $\pi/4$ и вокруг оси Oz на угол $\pi/4$ [15]:

$$THTH = \exp\left(-i\frac{\pi}{8}Z\right) \exp\left(-i\frac{\pi}{8}X\right). \quad (26)$$

Простое вычисление показывает, что два таких вращения эквивалентны одному вращению $R_n(\theta)$ на угол θ , определенный равенством

$$\cos \frac{\theta}{2} \equiv \cos^2 \frac{\pi}{8},$$

вокруг единичного вектора

$$n\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{8}\right)^{-1/2}.$$

Во второй части доказательства убеждаемся, что любой угол вращения α вокруг оси n достигается с погрешностью не выше $\varepsilon/3$ посредством n вращений на угол θ :

$$E(R_n(\alpha), R_n^n(\theta)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (27)$$

Доказательство основано на том, что результирующие углы k вращений $\theta_k = k\theta \bmod 2\pi$ заполняют пространство углов вращения $(0, 2\pi)$ равномерно.

Наконец, произвольное унитарное преобразование U состояния можно представить тремя вращениями вокруг осей n, m, n , каждое из которых может быть аппроксимировано n_1, n_2, n_3 вращениями на дискретный угол θ :

$$E(U, R_n^{n_1}(\theta)HR_m^{n_2}(\theta)HR_n^{n_3}(\theta)) < \varepsilon. \quad (28)$$

Чтобы достичь погрешности ε в выполнении однокубитовой операции, надо затратить $O(\log_2^c \varepsilon^{-1})$ операций из дискретного набора (теорема Соловей–Китаева). За деталями вычислений мы отсылаем читателя к энциклопедической монографии [15].

Кроме однокубитовых операций, двухкубитовая операция CNOT при физическом исполнении включает в себя процесс свободной эволюции двух кубитов под воздействием гамильтонiana их взаимодействия. В процессе свободной эволюции один кубит управляет другим, при этом используется энергия взаимодействия.

В заключение отметим, что произвольное унитарное преобразование состояния требует $O(n^2 4^n)$ операций из универсального набора, т.е. число операций экспоненциально велико [15]. Чтобы считаться эффективными, квантовые алгоритмы должны исполняться полиномиальным числом операций.

3.6. Осцилляция Раби между состояниями кубита и однокубитовые операции

В качестве кубита выберем частицу со спином $I = 1/2$. Дискретные состояния спина в постоянном магнитном поле $\mathbf{B} \parallel Oz$ с энергиями $\hbar\omega_0 = -\mu B/2$ и $\hbar\omega_1 = +\mu B/2$ выберем в качестве базисных состояний кубита:

$$|0\rangle = |\psi_{1/2}\rangle, \quad |1\rangle = |\psi_{-1/2}\rangle.$$

Управление кубитом совершается с помощью линейно поляризованного переменного магнитного поля гамильтонианом

$$H_{\text{int}} = -\mu I_x h_x(t) = -\mu I_x h_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Поле $h_x(t)$ рассматривается как классическая переменная.

Решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (-\mu I_z B - \mu I_x h_0 \cos(\omega t + \varphi)) |\psi(t)\rangle \quad (29)$$

ищем в форме суперпозиции состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с переменными амплитудами $C_0(t)$ и $C_1(t)$:

$$|\psi(t)\rangle = C_0(t)|0\rangle \exp(-i\omega_0 t) + C_1(t)|1\rangle \exp(-i\omega_1 t). \quad (30)$$

Проводя стандартные вычисления, для амплитуд C_0 и C_1 получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{C}_0 &= i\Omega C_1 [\exp(-i\delta t + i\varphi) + \exp(-i(\omega + \omega_1 - \omega_0)t - i\varphi)], \\ \dot{C}_1 &= i\Omega C_0 [\exp(-i\delta t - i\varphi) + \exp(i(\omega + \omega_1 - \omega_0)t + i\varphi)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\Omega = \mu_{01} h_0 / \hbar$ — частота Раби ($\mu_{01} = \mu \langle 0 | I_x | 1 \rangle = \mu/2$ — матричный элемент перехода), $\delta = \omega - (\omega_1 - \omega_0)$ — расстройка частоты внешнего поля от резонанса. Слагаемые справа, осциллирующие на высокой частоте $\omega + \omega_1 - \omega_0 \simeq 2\omega$, обычно отбрасывают как несущественные.

При точном резонансе ($\delta = 0$) и начальных условиях $C_0(0) = 1$, $C_1(0) = 0$ решение системы уравнений (31) имеет вид

$$C_0 = \cos(\Omega t), \quad C_1 = -i \sin(\Omega t) \exp(-i\varphi). \quad (32)$$

Это решение описывает стационарные осцилляции Раби для заселенностей состояний кубита $|0\rangle$ и $|1\rangle$:

$$|C_0(t)|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\Omega t)), \quad |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\Omega t)). \quad (33)$$

Выключая в заданный момент времени управляющее поле, получаем любое заданное значение амплитуд C_0 и C_1 , а значение разности фаз амплитуд

$$\arg \frac{C_1}{C_0} = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

определяется начальной фазой управляющего поля. Полная перекачка заселенности с одного уровня на другой совершается за время $\tau = \pi/2\Omega$:

$$|C_0(\tau)| = 0, \quad |C_1(\tau)| = 1.$$

Эта операция соответствует выполнению оператора NOT:

$$\text{NOT}|0\rangle = |1\rangle.$$

При выполнении операций в квантовом компьютере стремятся уменьшить их длительность. Простой способ достичь этого — увеличить напряженность управляющего поля h_0 (частоту Раби $\Omega = \mu h_0 / 2\hbar$). В режиме сильного управления ($\Omega/\omega \leq 1$) в уравнениях (31) для амплитуд C_0 и C_1 нельзя отбрасывать быстро осциллирующие слагаемые справа. Во вращающейся с частотой ω системе координат амплитуды вектора состояния кубита имеют вид [17]

$$\begin{vmatrix} \tilde{C}_0 \\ \tilde{C}_1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i(\omega t + \varphi)) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} C_0 \\ C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_0 \\ C_1 \exp(i(\omega t + \varphi)) \end{vmatrix}. \quad (34)$$

Запишем из (31) уравнения для амплитуд \tilde{C}_0 и \tilde{C}_1 в условиях точного резонанса ($\delta = 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= (1 + \beta(t)) C_1, & \tilde{C}_1 &= i\Omega(1 + \beta^{-1}(t)) C_0, \\ \beta(t) &= \exp(-2i\omega t - 2i\varphi). \end{aligned} \quad (35)$$

Общее решение системы ищем в виде ряда по степеням $\beta(t)$:

$$\tilde{C}_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \beta^n, \quad \tilde{C}_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \beta^n. \quad (36)$$

Подставляя (36) в уравнения (35), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_n &= 2i\omega a_n + i\Omega(b_n + b_{n-1}), \\ b_n &= 2i\omega b_n + i\Omega(a_n + a_{n-1}). \end{aligned} \quad (37)$$

Малым параметром системы является отношение $\sigma = \Omega/2\omega$.

Ограничимся частью системы $|n| \leq 1$, т.е. решением системы с сохранением членов порядка σ . При начальных условиях $a_0(0) = 1$, $b_0(0) = 0$ имеем [17]

$$\begin{aligned} C_0(t) &= \cos(\Omega t) - i\sigma \sin(\Omega t) \beta(t), \\ C_1(t) &= i \exp(-i(\omega t + \varphi)) [\sin(\Omega t) + \sigma \cos(\Omega t) \beta^{-1}(t)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Более точные решения уравнений для осцилляций Раби обнаруживают высокочастотную (2ω) модуляцию заселенностей состояний кубита (глубина модуляции $\sigma = \Omega/2\omega$). Если $\sigma = \Omega/2\omega \simeq 0,1$, достижение погрешности однокубитовой операции порядка 10^{-4} требует, очевидно, контроля длительности импульсов $\Delta\tau = 1/2\omega$, что физически вряд ли осуществимо. Поэтому представляется необходимым ограничить напряженности управляющих полей условием $\Omega/2\omega \ll 1$.

3.7. Кубит, управляемый рамановскими переходами А-типа

Кубит, управляемый рамановскими переходами А-типа, обладает рядом достоинств, обеспечивающих ему популярность у экспериментаторов. Схема уровней энергии кубита приведена на рис. 7. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кубита связаны с магнитными (спиновыми) подуровнями основ-

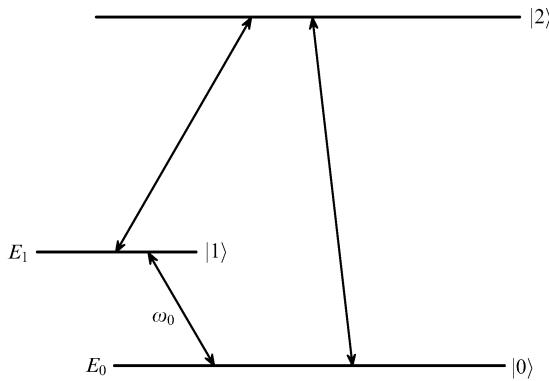


Рис. 7. Схема управления кубитом с помощью оптических переходов по рамановской схеме.

ного оптического состояния атома (иона), разделенными интервалом $E_1 - E_0$ порядка нескольких гигагерц. Переходы $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, напротив, оптически и возбуждаются лазерными импульсами с заданными поляризацией и расстройкой δ . Если частоты Раби $\Omega_{02} = \Omega_{12} = \Omega \ll \delta$, то для перехода $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ эффективная частота Раби $\Omega_{\text{eff}} = \Omega^2/\delta$. В этих условиях глубина модуляции заселенностей состояния на высокой частоте мала: $\sigma = \Omega_{\text{eff}}/2\omega_0 \ll 1$. Достижение высокой точности в управлении кубитом А-типа может оказаться его важным преимуществом в экспериментах [17].

4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.1. Смешанные состояния квантовых систем

В экспериментах часто имеют дело с ансамблями квантовых систем, приготовленных определенным способом. С точки зрения описания состояния частиц в ансамбле приготовление систем можно осуществить двумя способами: 1) с получением полной информации о состоянии квантовой системы; 2) с получением только вероятностной информации о состоянии квантовой системы. Пример таких способов приготовления приведен на рис. 8. Печь создает поток атомов (кубитов) со спином $I = 1/2$; состояния $|0\rangle$ (спин вверх) и $|1\rangle$ (спин вниз) встречаются в ансамбле атомов с вероятностями Больцмановского распределения.

В первом способе приготовления ансамбль атомов проходит через сепаратор (прибор Штерна–Герлаха), который пространственно разделяет его на два потока,

соответствующие состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Ансамбль атомов в состоянии $|1\rangle$ поглощается адсорбером; оставшийся ансамбль атомов находится в чистом состоянии $|0\rangle$. Таким образом, мы имеем полную информацию о состоянии атомов в ансамбле. Во втором способе сепаратор отсутствует; ансамбль атомов состоит из атомов в состояниях $|0\rangle$ или $|1\rangle$ с вероятностями $p_{|0\rangle}$ или $p_{|1\rangle}$. Такое состояние представляет собой смесь чистых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

Математически смешанное состояние квантовой системы можно описать только матрицей плотности

$$\rho = p_{|0\rangle}|0\rangle\langle 0| + p_{|1\rangle}|1\rangle\langle 1|. \quad (39)$$

Здесь

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— проекторы на состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Можно также сказать, что квантовая система в смешанном состоянии не обладает волновой функцией [19]. Матрица плотности не содержит информацию о фазах состояний, составляющих смесь. Это означает, что смешанные состояния не являются квантово-когерентными; они не обнаруживают явлений квантовой интерференции. Смешанные состояния можно классифицировать как близкие к классическим состояниям, поскольку их описание матрицей плотности близко к статистическому описанию классических систем.

Процессы перехода от чистых состояний к смешанным состояниям многие авторы рассматривают как процессы классификации (classicization) квантово-когерентных систем. Однако состояния, составляющие смесь, являются квантово-когерентными; в частности, они могут быть запутанными, и эта запутанность может быть извлечена из смешанного состояния (entanglement purification) и передана другой квантовой системе в чистом состоянии [14].

Процесс перехода системы от квантово-когерентного чистого состояния, описываемого волновой функцией, к некогерентному состоянию, описываемому матрицей плотности, называется также процессом декогерентизации (decoherence) системы.

4.2. Смешанные состояния квантовых подсистем

Квантовые системы часто являются композитными: они состоят из двух и более подсистем. Даже если система в целом находится в чистом состоянии (описывается волновой функцией), составляющие ее подсистемы могут находиться в смешанном состоянии и описываться матрицей плотности. Это имеет место тогда, когда чистое состояние системы представляет собой так называемое запутанное (entangled) состояние составляющих систему подсистем.

Продемонстрируем сказанное на примере композитной системы, состоящей из кубитов A и B . Проведем над этой системой два последовательных унитарных преобразования, в результате два кубита окажутся в запутанном состоянии:

$$\begin{aligned} |\psi_{AB}^{(\text{in})}\rangle &= |0_A\rangle|0_B\rangle \xrightarrow{\text{H}_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle+|1_A\rangle)|0_B\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}_{AB}} \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}_{AB}} \frac{1}{2}(|0_A\rangle|0_B\rangle+|1_A\rangle|1_B\rangle) \equiv |\psi_{AB}^{(\text{f})}\rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

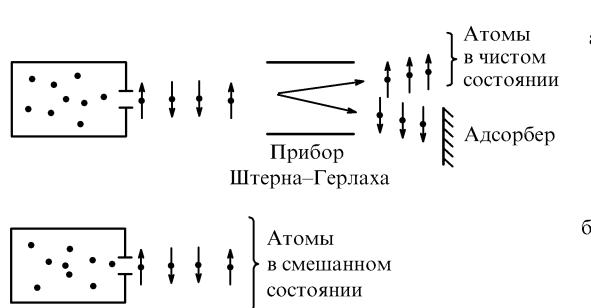


Рис. 8. Схема приготовления атомов в чистом (а) и смешанном (б) состояниях.

Конечное состояние

$$|\psi_{AB}^{(f)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle)$$

запутано, так как оно не может быть представлено в виде произведения волновых функций кубитов A и B :

$$|\psi_{AB}^{(f)}\rangle \neq |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle.$$

Нельзя подобрать такие

$$|\psi_A\rangle = \alpha_A|0\rangle + \beta_A|1\rangle, \quad |\psi_B\rangle = \alpha_B|0\rangle + \beta_B|1\rangle,$$

чтобы имело место равенство

$$|\psi_{AB}^{(f)}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle.$$

Однако можно найти матрицы плотности, описывающие в отдельности кубиты A и B . Матрица плотности композитной системы AB есть

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}^{(f)}\rangle\langle\psi_{AB}^{(f)}| = \frac{1}{2} [|0_A\rangle\langle 0_A| |0_B\rangle\langle 0_B| + |0_A\rangle\langle 0_B| |1_A\rangle\langle 1_B| + |1_A\rangle\langle 1_B| |0_A\rangle\langle 0_B| + |1_A\rangle\langle 1_B| |1_A\rangle\langle 1_B|]. \quad (41)$$

Найдем приведенную матрицу плотности для кубита A :

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \rho_{AB} \equiv \langle 0_B | \rho_{AB} | 0_B \rangle + \langle 1_B | \rho_{AB} | 1_B \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (|0_A\rangle\langle 0_A| + |1_A\rangle\langle 1_A|) = \frac{1}{2} I, \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогичный результат получаем для кубита B :

$$\rho_B = \frac{1}{2} I.$$

Состояния кубитов A и B оказываются смешанными; смесь составлена из чистых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с вероятностями $p_{|0\rangle} = p_{|1\rangle} = 1/2$.

В классической физике информации, дающая полное описание системы как целого, достаточна для полного описания и частей целого. В квантовой механике это правило не выполняется, если целое находится в так называемом запутанном состоянии: информация, дающая полное описание целого, недостаточна для полного описания частей, из которых состоит целое.

4.3. Запутанные состояния квантовых систем

Теория запутанных состояний композитных квантовых систем находится в состоянии разработки. В отношении систем, состоящих из двух частей (A и B) достигнуто более или менее полное понимание и описание запутанности. Положения теории двухчастичных систем не удается непосредственно распространить на системы, число частей которых более двух. Для таких систем получен ряд частных результатов. Некоторые из них рассмотрены ниже.

Запутанность является сердцевинным свойством квантовых систем. Из существования запутанных систем вытекает нелокальность квантового описания природы [15]. Запутанность служит важнейшим ресур-

сом в квантовой информатике: использование запутанных состояний обеспечивает выполнение протоколов квантовой телепортации, криптографии и вычислений. Поэтому явление запутанности привлекает большое внимание исследователей. Удивительно, что в стандартных учебниках квантовой механики о запутанности в квантовых системах даже не упоминается [19], хотя запутанные состояния были обнаружены еще в 1935 г. в знаменитых работах Шрёдингера [20] и Эйнштейна с сотрудниками [21].

Рассмотрим двухкомпонентную квантовую систему A и B в чистом состоянии $|\psi_{AB}\rangle$. Пусть A и B различны (нетождественные частицы³) и пусть размерности подсистем A и B равны M и N ($M \leq N$).

Вектор состояния $|\psi_{AB}\rangle$ может быть разложен по базисным функциям u_i и v_i подсистем A и B (разложение Шмидта):

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^M c_i |u_i\rangle |v_i\rangle. \quad (43)$$

Число не равных нулю коэффициентов c_i в разложении есть число Шмидта Sch. Если $\text{Sch} = 1$, состояние $|\psi_{AB}\rangle = |u\rangle|v\rangle$ не запутано, так как представляет собой произведение состояний u и v подсистем. Если $\text{Sch} \geq 2$, состояние $|\psi_{AB}\rangle$ запутано.

Для системы, описываемой матрицей плотности ρ , энтропия фон Неймана

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (44)$$

может давать меру (количество) запутанности в двухкомпонентной системе [22]. Чистое состояние $|\psi_{AB}\rangle$ определено полностью, так что $S(\rho_{AB}) = 0$. Однако состояния подсистем A и B по отдельности характеризуются с неопределенностью, выраженной вероятностями $|c_i|^2$ в матрицах плотности:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_i \langle v_i | \rho_{AB} | v_i \rangle = \sum_i |c_i|^2 |u_i\rangle \langle u_i|, \\ \rho_B &= \sum_i |c_i|^2 |v_i\rangle \langle v_i|. \end{aligned} \quad (45)$$

Значения энтропии фон Неймана для подсистем A и B положительны:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\sum_i |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2 > 0. \quad (46)$$

Неопределенность в состояниях, описываемых матрицами плотности ρ_A и ρ_B , существует до измерения состояний подсистем A и B . Чем больше эта неопределенность, тем больше запутанность в состоянии $|\psi_{AB}\rangle$ композитной системы AB . Для кубита в состоянии, описываемом матрицей плотности

$$\rho_A = |c_0|^2 |0\rangle\langle 0| + |c_1|^2 |1\rangle\langle 1|,$$

максимум $S(\rho_A) = 1$ достигается при $|c_0|^2 = |c_1|^2 = 1/2$. Это соответствует чистому состоянию

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

³ Тождественность частиц вносит новые элементы в теорию запутанности для фермионов и бозонов (см. ниже).

двухкубитовой композитной системы, имеющему максимальную запутанность в системе кубитов A и B .

Таким образом, мерой запутанности в чистом состоянии $|\psi_{AB}\rangle$ композитной системы AB служит мера неопределенности состояний подсистем A и B — энтропия фон Неймана. Для различимых подсистем вся неопределенность в ρ_A и ρ_B обусловлена запутанностью в состоянии $|\psi_{AB}\rangle$.

В случае тождественных частиц A и B в состояниях ρ_A и ρ_B возникают дополнительные неопределенности, обусловленные их тождественностью. Для фермионов со спином I разложение Шмидта ведется по антисимметризованным комбинациям базисных функций $|2i-1\rangle$ и $|2i\rangle$ [22]:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{2I+1} a_i \frac{1}{\sqrt{2}} (|2i-1\rangle_A |2i\rangle_B - |2i\rangle_A |2i-1\rangle_B). \quad (47)$$

Нетрудно найти приведенную матрицу плотности ρ_A (или ρ_B) и энтропию фон Неймана $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ в этом случае:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B (|\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|) = \\ &= \sum_i^{2I+1} \frac{1}{2} |a_i|^2 (|2i-1\rangle_A \langle 2i-1|_A + |2i\rangle_A \langle 2i|_A), \quad (48) \\ S(\rho_A) &= \text{Tr} (\rho_A \log_2 \rho_A) = -\frac{1}{2} \sum_i |a_i|^2 \log_2 |a_i|^2 = \\ &= 1 - \sum_i |a_i|^2 \log_2 |a_i|^2. \end{aligned}$$

Из (48) следует, что энтропия фон Неймана $S(\rho_A) \geq 1$ при всех $|a_i|^2 \in [0, 1]$, $\sum_i |a_i|^2 = 1$. Минимальное значение $S(\rho_A) = 1$ обусловлено неопределенностью в состоянии ρ_A , связанной с тождественностью частиц. В этом случае число Шмидта $\text{Sch} = 1$, состояние

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_A\rangle |2_B\rangle - |2_A\rangle |1_B\rangle)$$

не запутано:

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|1_A\rangle \langle 1_A| + |2_A\rangle \langle 2_A|), \quad S(\rho_A) = 1.$$

Итоговый результат для фермионов: если для состояния $|\psi_{AB}\rangle$ число Шмидта $\text{Sch} = 1$, или, что эквивалентно, $S(\rho_A) = 1$, то состояние $|\psi_{AB}\rangle$ не запутано; если же $\text{Sch} > 1$, или $S(\rho_A) > 1$, то $|\psi_{AB}\rangle$ описывает запутанное состояние фермионов.

Для бозонов получены следующие результаты [22]: состояние $|\psi_{AB}\rangle$ не запутано, если

- 1) $\text{Sch} = 1$, $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$,
- 2) $\text{Sch} = 2$, $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$;

составление $|\psi_{AB}\rangle$ запутано, если

- 1) $\text{Sch} = 2$, $S(\rho_A) = S(\rho_B) \in (0, 1)$,
- 2) $\text{Sch} > 2$, $S(\rho_A) = S(\rho_B) \in (0, \ln(2S+1))$.

Отсюда видно, что критерии запутанности состояния $|\psi_{AB}\rangle$ тождественных частиц включают как значения

числа Шмидта для $|\psi_{AB}\rangle$, так и значения энтропии фон Неймана для подсистем $S(\rho_A) = S(\rho_B)$.

4.4. Преобразования запутанных состояний

Рассматривая запутанность как ресурс, мы должны уметь ее создавать (генерировать), хранить, преобразовывать, использовать. Перейдем к вопросу о преобразованиях запутанных состояний. Пусть части A, B, C, \dots запутанной системы расположены в различных точках пространства в распоряжении субъектов S_A, S_B, S_C, \dots . Каждый из субъектов может совершать локальные операции над своей частью системы и сообщать об этом другим субъектам по классическому каналу связи LOCC (Local Operations — Classic Communications). Развитием идеи LOCC является стохастический LOCC (SLOCC), когда преобразование $|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle$ возможно с конечной вероятностью. При этом имеются в виду операции с единственной системой, а не с ансамблем систем.

Посредством операций типа LOCC (SLOCC) можно преобразовать начальное запутанное состояние системы $|\psi\rangle$ в другое запутанное состояние $|\varphi\rangle$. Важным примером таких преобразований является процесс дистилляции запутанности, т.е. образование максимально запутанных систем из частично (не максимально) запутанных систем. Посредством операций типа LOCC выполняется протокол телепортации квантового состояния, когда в распоряжении субъектов S_A и S_B , выполняющих протокол, имеется максимально запутанная пара кубитов. Два состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ композитной системы преобразуются друг в друга посредством LOCC, если они связаны друг с другом локальной унитарной матрицей: $|\varphi\rangle = U_{\text{loc}}|\psi\rangle$.

Для двухчастичной системы AB запишем:

$$|\varphi_{AB}\rangle = U_A \otimes U_B |\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{n_\psi} \sqrt{\lambda_i} |i_A\rangle |i_B\rangle. \quad (49)$$

Здесь U_A и U_B — матрицы локальных преобразований, в правой части (49) представлено в форме разложения Шмидта, n_ψ — инвариантное в LOCC число Шмидта для вектора $|\psi_{AB}\rangle$.

Для двухчастичной системы $H_A^{(n)} \otimes H_B^{(m)}$ ($n \leq m$ — размерности подсистем A и B) значения $n_\psi = 1, \dots, n$. Это означает, что существуют n классов неэквивалентных (не преобразующихся друг в друга посредством LOCC) состояний $|\psi_{AB}\rangle$.

Система из двух кубитов ($n = m = 2$, $n_\psi = 1, 2$) имеет два неэквивалентных класса состояний:

$$\begin{aligned} n_\psi &= 1, \quad |\psi_{AB}\rangle = |1_A\rangle |1_B\rangle \quad (\text{незапутанное}), \\ n_\psi &= 2, \quad |\varphi_{AB}\rangle = \lambda_1^{1/2} |1_A\rangle |1_B\rangle + \lambda_2^{1/2} |2_A\rangle |2_B\rangle \quad (\text{запутанное}). \end{aligned}$$

Ясно, что незапутанное состояние нельзя превратить в запутанное посредством операций типа LOCC. Состояния, принадлежащие к неэквивалентным классам, могут быть связаны посредством нелокальных операций (типа CNOT) или необратимыми локальными операциями, включающими, например, измерение.

Системы, состоящие из трех частиц A, B, C , имеют шесть классов неэквивалентных состояний [23]: незапутанное состояние $|\psi_A\rangle |\psi_B\rangle |\psi_C\rangle$; классы $A - BC$, $AB - C$, $CA - B$, в которых запутаны две частицы из трех; два неэквивалентных класса состояний, в которых запутаны все три частицы. Для трех кубитов состояния можно

записать как

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle),$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle).$$

При рассмотрении запутанных состояний трех и более частиц возникает вопрос: в какой мере объект (кубит) может быть запутан одновременно с двумя (и более) другими объектами? Оказывается, что квантовая запутанность (квантовые корреляции) не может свободно возникать (создаваться) между одним объектом и многими другими (в отличие от классических корреляций). Например, в системе из трех частиц A, B, C наличие запутанности A с B ограничивает сверху запутанность A с C [24].

Обобщая состояние $|\text{GHZ}\rangle$ на случай $n \gg 1$ кубитов, получаем состояние типа "шрёдингеровского кота":

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1 \dots 0_n\rangle + |1_1 \dots 1_n\rangle),$$

являющееся моделью состояния макроскопического тела в суперпозиционном квантовом состоянии. Исследуя процессы декогерентизации состояния $|\psi_n\rangle$, удается ответить на вопрос кардинальной важности: почему макроскопические тела ведут себя как классические, тогда как по существу они квантовые (в том смысле, что нет запрета на квантовое описание тел большого размера). В разделе 7, посвященном процессам декогерентизации, дан ответ на этот вопрос.

4.5. Запутанность в смешанных состояниях композитных систем

Смешанные состояния двухчастичной системы описываются матрицей плотности вида

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^{AB} = \sum_i p_i |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}|, \quad (50)$$

где p_i — вероятность обнаружить в ансамбле систему в состоянии $\rho_i^{AB} = |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}|$. Если все ρ_i^{AB} факторизуемы ($\rho_i^{AB} = \rho_i^A \otimes \rho_i^B$), смешанное состояние не содержит запутанности. Если же некоторые из состояний ρ_i^{AB} не факторизуемы (запутаны), то и смешанное состояние ρ_{AB} в целом содержит запутанность, количество которой можно определить формулой [14]

$$E(\rho_{AB}) = \min_i \sum_i p_i S(\rho_i^A). \quad (51)$$

Здесь $S(\rho_i^A)$ — энтропия фон Неймана для подсистемы A в состоянии $\rho_i^A = \text{Tr}_B \rho_i^{AB}$.

Интерес к запутанности в смешанных состояниях связан с возможностью очистки (purification) этой запутанности и образования за ее счет максимально запутанных пар в чистом состоянии. Предложены протоколы такой очистки [14].

4.6. Экспериментальные методы получения запутанных состояний

Запутанность как ресурс является расходуемым факто-ром. Следовательно, необходимы методы "изготовления" запутанных пар. Используя унитарное двухкубитовое преобразование CNOT, из начального незапутанного

состояния двух кубитов

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle + |1_A\rangle)|0_B\rangle$$

получаем максимально запутанную пару кубитов:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|0_B\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}_{AB}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle|0_A\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle). \quad (52)$$

Такой способ можно назвать алгоритмическим, так как используемые операции взяты из универсального набора, предназначенного для выполнения квантовых алгоритмов. Алгоритмическим способом получены запутанные кубиты на ионах в ловушке [5] и ядерных спинах в ЯМР-квантовом компьютере [25].

В большинстве экспериментов с запутанностью используют пары фотонов, получаемые в результате спонтанного распада ультрафиолетового фотона накачки в нелинейном кристалле, — так называемую вниз-конверсию (down-conversion) [26]. В процессе вниз-конверсии образуются сигнальный (s) и холостой (i) фотон. Из законов сохранения следует $\mathbf{k}_{\text{ph}} = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i$, $\omega_{\text{ph}} = \omega_s + \omega_i$.

Волновая функция фотонов может быть записана как суперпозиция произведений однофотонных чистых состояний $|\omega_s\rangle_s |\omega_{\text{ph}} - \omega_s\rangle_i$ в частотном представлении с амплитудами $\Phi(\omega_{\text{ph}}, \omega_s, \omega_i)$ [27]:

$$|\psi\rangle_{\text{ph}} = M|\text{vac}\rangle_s |\text{vac}\rangle_i + \\ + \eta v \sum_{\omega_s} \Phi(\omega_{\text{ph}}, \omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle_s |\omega_{\text{ph}} - \omega_s\rangle_i, \quad (53)$$

где $\eta v \ll 1$ — коэффициент конверсии. В отсутствие накачки осцилляторы ω_s, ω_i находятся в вакуумном состоянии: $M \simeq 1$. Варьируя условия генерации, можно получить пары фотонов, запутанных по поляризации, импульсу или времени [27].

В более широком смысле распад любой частицы в синглетном состоянии на две частицы рождает запутанные по координате, импульсу или спину пары частиц:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \delta(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle_A |x_2\rangle_B + |x_1\rangle_B |x_2\rangle_A),$$

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \delta(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle_A |p_2\rangle_B + |p_1\rangle_B |p_2\rangle_A), \quad (54)$$

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |S_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle |1_B\rangle + |0_B\rangle |1_A\rangle).$$

Методы, основанные на распаде частиц в синглетном состоянии, можно назвать "физическими".

5. Проблемы измерений состояния кубита

5.1. Измерение состояния кубита

Измерение состояния кубитов в квантовом компьютере считается одной из стандартных операций. Например, инициализация кубитов квантового регистра может быть выполнена алгоритмически: каждый кубит в неизвестном состоянии регистра $|\psi\rangle = \sum_x a_x |x\rangle$ подвергается измерению в базисе $|0\rangle, |1\rangle$. Если получается $|0\rangle$, инициализация кубита завершена; если получается $|1\rangle$,

применяем операцию $\text{NOT}|1\rangle = |0\rangle$. Операция измерения выполняется в ходе процессов коррекции ошибок (чтение синдрома ошибок) и возвращения в состояние $|0\rangle$ кубитов-аннилл. Наконец, измерение всех кубитов квантового регистра в базисе $|0\rangle, |1\rangle$ выполняется по завершении вычислений в целях получения классической информации (двоичного числа $j_1, \dots, j_n = \{0, 1\}$) о решении задачи.

С теоретической точки зрения нет никаких сложностей в процедуре измерения состояния кубита в базисе $|0\rangle, |1\rangle$. Однако физическая реализация измерения кубита сопряжена с решением весьма сложных технологических проблем, связанных с преодолением трудностей измерения состояния отдельной атомной частицы: атома, иона, электрона, спина электрона или атомного ядра, фотона. По существу для каждой реализации кубита нужна разработка своего физического метода измерения его состояния. Покажем, как это можно выполнить для кубитов на оптических уровнях иона в ловушке [5].

В качестве состояния $|0\rangle$ кубита выберем подуровень основного состояния $4^2S_{1/2}$, в качестве состояния $|1\rangle$ — подуровень возбужденного метастабильного состояния $3^2D_{5/2}$ (см. рис. 3). "Опрос" иона о состоянии его кубита можно осуществить лазером с длиной волны $\lambda = 397$ нм, возбуждающим дипольные переходы $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$. Если кубит был в состоянии $|0\rangle = |4^2S_{1/2}\rangle$, то под действием лазерного излучения он перейдет в состояние $|2\rangle = |4^2P_{1/2}\rangle$. При возвращении кубита в состояние $|0\rangle$ (спонтанный переход) произойдет излучение фотона, что и дает информацию о том, что кубит в момент начала измерения находился в состоянии $|0\rangle$. Если же до измерения ион был в состоянии $|1\rangle = |3^2D_{5/2}\rangle$, излучения фотона не будет. Из состояния $4^2P_{1/2}$ ион может спонтанно перейти на метастабильный уровень $3^2D_{3/2}$. Чтобы не происходило "пленения" иона в этом состоянии, при измерении включается еще один лазер на частоте перехода $3^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$ ($\lambda = 866$ нм), предотвращающий пленение заселенности на уровне $|3^2D_{3/2}\rangle$.

Детектор спонтанно излученных фотонов имеет малый угловой размер ($\Omega \ll 4\pi$), поэтому эффективность детектирования единичного фотона $\eta \ll 1$. Пусть в результате циклических переходов $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ (под действием лазера с длиной волны $\lambda = 397$ нм) и $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ (спонтанный переход) излучается N фотонов, на детекторе зафиксируется в среднем $n = \eta N$ фотонов. Вероятность того, что из N фотонов ни один не будет зафиксирован детектором, равна $p_N(0) = (1 - \eta)^N = \exp(-n)$. При $n = 10$ вероятность $p_N(0) = 4,5 \times 10^{-5}$, т.е. при $n \gg 1$ вероятность ошибки при измерении мала (состояние $|0\rangle$ принято за $|1\rangle$).

Если кубит в момент начала измерения находится в состоянии суперпозиции $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, то в измерении будет работать заселенность $|\alpha|^2$ состояния $|0\rangle$: $N \propto |\alpha|^2$. Заселенность $|\beta|^2$ состояния $|1\rangle$ пленена на метастабильном уровне и "не активна".

Отметим статистический характер измерения и необходимость удлинения времени измерения настолько, чтобы число детектированных фотонов $n = \eta N$ стало статистически большим. К сожалению, это свойство (необходимость накопления сигнала) присуще большинству разработанных методов измерения состояния отдельных атомных частиц.

В принципе желательно, чтобы длительность измерения была сопоставимой с длительностью квантовых

операций. Тогда измерение можно было бы использовать как стандартный вычислительный прием. При длительных измерениях (методы с накоплением сигнала) должны приниматься меры для сохранения квантовой когерентности измеряемого состояния.

Не входя в детали, рассмотрим возможные методы измерения состояния кубитов на единичном спине $I = 1/2$. Активно разрабатывается теория метода с использованием магнитно-резонансного силового микроскопа [28]. Магнитное диполь-дипольное взаимодействие одиночного спина с диполем ферромагнитного зонда на конце механического резонатора-кантилевера используется для резонансного возбуждения колебаний кантилевера. При воздействии на спин периодической достаточно длинной последовательности π -импульсов возбуждаются колебания кантилевера, детектируемые оптическими методами.

Для спинов в твердом теле (спины $I = 1/2$ ядер фосфора ^{31}P в бесспиновом монокристалле кремния ^{28}Si) предложены многостадийные методы измерения состояния ядерного спина: информация о состоянии ядерного спина передается спину S электрона атома ^{31}P ; от спина S информация передается к заряду электрона e . Наличие (отсутствие) заряда одиночного электрона в окрестности нанотранзистора детектируется измерением тока через нанотранзистор [29].

Хотя каждая из перечисленных стадий измерительной "эстафеты" выглядит осуществимой, все стадии вместе еще никем не были осуществлены. В ЯМР-квантовых компьютерах, в которых используется техника импульсного магнитного резонанса на молекулярных жидкостях при комнатной температуре, детектируемый сигнал образуется макроскопическим ансамблем (порядка 10^{18}) молекул. Оценки показывают, что в технике импульсного ЯМР на твердом теле при низких температурах ($T < 0,1$ К) возможно детектирование сигнала от ансамбля порядка 10^6 атомов [30].

Измерения состояния кубитов на сверхпроводниковых мезоструктурах (квантовые точки с куперовскими парами или сквиды со сверхтоками) сводятся к электрическим измерениям с накоплением сигнала [31, 32].

Можно утверждать, что проблема измерения состояния отдельных кубитов — одна из самых трудных с точки зрения физической реализации квантового компьютера.

5.2. Томография квантового состояния

Процедура определения матрицы плотности ρ неизвестного состояния системы называется томографией квантового состояния [15]. Томография квантового состояния является существенным развитием идеи измерения состояния системы в некотором базисе. Измерение состояния $|\psi\rangle = \sum_x c_x|x\rangle$ в базисе $|x\rangle$ выполняется на единичном экземпляре системы. Результатом измерения с вероятностью $|c_x|^2$ будет некоторое базисное состояние $|x\rangle$. В единичном измерении вероятности $|c_x|^2$ остаются неизвестными.

Томография состояния означает, что нужно определить все элементы матрицы ρ или (в случае системы в чистом состоянии $|\psi\rangle = \sum_x c_x|x\rangle$) все амплитуды c_x , включая их фазы. Томография состояния есть статистическая процедура, требующая наличия (изготовления) неограниченного ансамбля частиц в состоянии ρ и выполнения измерений на частицах из этого ансамбля. Рассмотрим на примере кубита, какие измерения нужны.

Матрицу плотности ρ кубита можно разложить по стандартному набору матриц операторов преобразования кубита I, X, Y, Z:

$$\rho \equiv \text{Tr}(\mathbf{I}\rho)\mathbf{I} + \text{Tr}(\mathbf{X}\rho)\mathbf{X} + \text{Tr}(\mathbf{Y}\rho)\mathbf{Y} + \text{Tr}(\mathbf{Z}\rho)\mathbf{Z}. \quad (55)$$

Величина $\text{Tr}(\mathbf{A}\rho)$ представляет собой среднее значение наблюдаемой A.

Из уравнения (55) следует, что для определения матрицы плотности ρ неизвестного состояния необходимы статистические измерения, позволяющие найти средние значения (моменты первого порядка) наблюдаемых X, Y, Z:

$$\langle \mathbf{X} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{X}\rho) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i \right), \quad \dots \quad (56)$$

Найденные из измерений (приближенные) значения элементов матрицы ρ кубита имеют вид

$$\rho_{11} = 1 + \langle \mathbf{Z} \rangle, \quad \rho_{12} = \rho_{21}^* = \langle \mathbf{X} \rangle - i\langle \mathbf{Y} \rangle, \quad \rho_{22} = 1 - \langle \mathbf{Z} \rangle. \quad (57)$$

Распределение $\langle \mathbf{X} \rangle$ и значение среднеквадратичных отклонений $\langle \mathbf{X} \rangle$ вытекают из центральной предельной теоремы [15].

Очевидно обобщение процедуры томографии квантового состояния на системы, состоящие из n кубитов (квантовый компьютер):

$$\rho = 2^{-n} \sum \text{Tr}(\mathbf{O}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{O}_n \otimes \rho)(\mathbf{O}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{O}_n), \quad (58)$$

$$\mathbf{O} \in (\mathbf{I}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}).$$

На основе процедуры томографии квантового состояния предложена процедура "томографии квантового процесса". Например, при работе квантового компьютера кубиты подвергаются процессам декогерентизации, оператор E которых неизвестен. Идею метода томографии квантового процесса продемонстрируем на примере одного кубита. Выберем $d^2 = 4$ ($d = 2$ — размерность пространства состояний кубита) подансамбля кубитов в базисных состояниях ρ_1, \dots, ρ_4 :

$$\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \quad \dots, \quad \rho_4 = |\psi_4\rangle\langle\psi_4|.$$

В результате неизвестного процесса декогерентизации, характеризуемого оператором E, состояния ρ_i трансформируются:

$$\rho_i \rightarrow \rho'_i = \mathbf{E} \otimes \rho_i.$$

Состояния ρ_i известны, а состояния с ошибкой ρ'_i определим, используя процедуры томографии квантового состояния. Тогда равенства

$$\rho'_i = \mathbf{E} \otimes \rho_i$$

представляют собой систему уравнений для определения элементов неизвестной матрицы E. За математическими подробностями отсылаем читателя к [15].

6. Квантовые алгоритмы

6.1. Квантовые алгоритмы факторизации чисел и поиска в базе данных

К настоящему времени открыты и подробно исследованы три класса квантовых алгоритмов: 1) алгоритмы с

квантовыми скрытыми подгруппами преобразований абелевых групп (к ним относится алгоритм Шора факторизации чисел [9]); 2) алгоритмы с усилением амплитуд (их представителем является алгоритм Гровера поиска объекта в неструктурированной базе данных [33]); 3) алгоритмы для моделирования квантовых систем на квантовом компьютере [15, 34–36].

Алгоритмы классов 1) и 3) предусматривают применение дискретного фурье-преобразования. При выполнении фурье-преобразования на классическом компьютере требуется экспоненциально большое число операций. На квантовом компьютере фурье-преобразование выполняется за полиномиальное число (n^2) операций. Поэтому квантовые алгоритмы классов 1) и 3) демонстрируют экспоненциальное ускорение решения задачи по сравнению с алгоритмами, выполняемыми на классических компьютерах.

Принцип алгоритма Гровера — усиление амплитуды состояния, соответствующего искомому объекту. Пусть целое число x_s является индексом искомого объекта. Поставим ему в соответствие базисное состояние $|x_s\rangle$ в векторе состояния $|\psi\rangle = \sum c_x|x\rangle$ квантового регистра. Итерационный процесс при выполнении алгоритма Гровера построен так, что интерференция амплитуд увеличивает амплитуду c_{x_s} ; остальные амплитуды $c_{x \neq x_s}$ уменьшаются. После \sqrt{N} итераций (N — число объектов в базе данных) амплитуда c_{x_s} достигает значения $|c_{x_s}| \leq 1$.

Измерение состояния регистра после \sqrt{N} итераций (операций) с вероятностью $|c_{x_s}| \simeq 1$ определяет индекс x_s искомого объекта. Поиск объекта в классическом случае требует N операций (перебор всех объектов). Поэтому говорят, что в квантовом алгоритме Гровера достигается квадратичное ускорение задачи поиска.

Математики исследуют возможности построения новых классов эффективных квантовых алгоритмов, например, для решения так называемой проблемы изоморфизма графов [37]. Чем больше будет найдено эффективных квантовых алгоритмов, тем больше будет стимулов к реализации идеи квантовых компьютеров. Возможность эффективного решения задач квантовой физики является достаточным основанием для создания квантового компьютера.

Ниже показаны примеры квантовых алгоритмов телепортации и подходы к алгоритмам моделирования квантовых систем. Первый пример позволяет ощутить детали, из которых строятся квантовые алгоритмы; второй представляет наибольший интерес для читателя-физика.

6.2. Алгоритм телепортации неизвестного квантового состояния

Поучительным примером малоразмерного алгоритма является протокол квантовой телепортации неизвестного квантового состояния [38]. Схема протокола телепортации представлена на рис. 9. В начальный момент три участвующих в протоколе кубита находятся в точке A, их состояние не запутано:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |a_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle.$$

Здесь $|a_1\rangle = \alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle$ — неизвестное состояние кубита 1. Именно оно должно быть телепортировано в точку пространства B. События, происходящие в точках A и B, заключены на рис. 9 в соответствующие рамки.

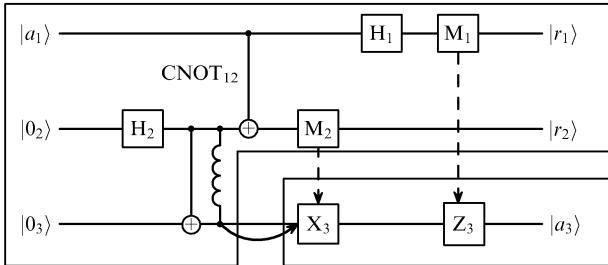


Рис. 9. Схема протокола телепортации неизвестного состояния $|a_1\rangle$ из точки A в точку B . В процессе телепортации создается запутанность, которая затем уничтожается в ходе измерений состояния кубитов. Кроме того, один из кубитов запутанной пары транспортируется из точки A в точку B .

В первой операции создается запутанность кубитов 2 и 3. Операция выполняется в два этапа: над состоянием кубита 2 выполняется преобразование Адамара H , затем — $CNOT_{23}$:

$$|0_2\rangle|0_3\rangle \xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2\rangle + |1_2\rangle)|0_3\rangle \xrightarrow{CNOT_{23}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_20_3\rangle + |1_21_3\rangle). \quad (59)$$

Запутанность кубитов 2 и 3 показана на схеме спиральной связью между линиями эволюции во времени. После генерации запутанности кубитов 2 и 3 кубит 3 транспортируется в точку B , удаленное от точки A на сколь угодно большое расстояние.

Дальнейшие операции локального типа (LOCC) совершаются над кубитами 1 и 2 в точке A , над кубитом 3 — в точке B . Штриховыми линиями показана передача в точку B классической информации о результате измерения состояния кубита в точке A . Эта информация используется для выполнения операций (X_3 или Z_3) над кубитом 3 в точке B .

Во второй операции запутанность кубитов 2 и 3 преобразуется в запутанность кубитов 1 и 3 с участием всех трех кубитов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle)(|0_20_3\rangle + |1_21_3\rangle) \xrightarrow{CNOT_{12}} \\ & \xrightarrow{CNOT_{12}} (\alpha|0_10_20_3\rangle + \alpha|0_11_21_3\rangle + \beta|1_11_20_3\rangle + \beta|1_10_21_3\rangle) \xrightarrow{M_2(|0_2\rangle)} \\ & \xrightarrow{M_2(|0_2\rangle)} (\alpha|0_10_3\rangle + \beta|1_11_3\rangle)|0_2\rangle. \end{aligned} \quad (60)$$

Если результат измерения M_2 будет $|1_2\rangle$, то информация об этом сообщается в точку B по классическому каналу и там над кубитом 3 выполняется операция $X = NOT$. Результатом этого преобразования будет

$$\xrightarrow{M_2(|1_2\rangle)} (\alpha|0_10_3\rangle + \beta|1_11_3\rangle)|1_2\rangle.$$

Обозначая состояние кубита 2 после измерения $|r_2\rangle$, запишем состояние кубитов на этом этапе:

$$|\psi\rangle = (\alpha|0_10_3\rangle + \beta|1_11_3\rangle)|r_2\rangle.$$

Кубиты 1 и 3 стали запутанными.

Измерение M_2 , произведенное над кубитом 2, освободило его от запутанности. Используем еще раз это свойство измерения, чтобы освободить от запутанности

кубит 1:

$$\begin{aligned} & (\alpha|0_10_3\rangle + \beta|1_11_3\rangle)|r_2\rangle \xrightarrow{H_1} \\ & \xrightarrow{H_1} (\alpha|(+)_10_3\rangle + \beta|(-)_11_3\rangle)|r_2\rangle \xrightarrow{M_1(|0_1\rangle)} \\ & \xrightarrow{M_1(|0_1\rangle)} (\alpha|0_3\rangle + \beta|1_3\rangle)|0_1\rangle|r_2\rangle, \end{aligned} \quad (61)$$

где $(\pm) = |0\rangle \pm |1\rangle$. Если результат измерения M_1 будет $|1_1\rangle$, то в точку B об этом передается классическая информация и там над кубитом 3 выполняется операция Z . Конечным состоянием трех кубитов будет

$$|\psi_f\rangle = (\alpha|0_3\rangle + \beta|1_3\rangle)|r_1\rangle|r_2\rangle. \quad (62)$$

Каков результат всех операций? Неизвестное состояние $|a_1\rangle = \alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle$, принадлежавшее вначале кубиту 1 в точке A , теперь принадлежит кубиту 3 в точке B — телепортация неизвестного состояния свершилась. Кубит 1 лишился состояния $|a_1\rangle$: сохранение его у кубита 1 означало бы клонирование неизвестного состояния, что запрещено no-cloning-теоремой. Конечное состояние трех кубитов не запутано. Запутанность, созданная в начале операции, израсходована на выполнение телепортации. Из формулы (62) следует, что запутанность есть расходуемый ресурс квантовой информатики.

"Чудом" здесь является телепортация именно неизвестного квантового состояния. Телепортацию известного состояния можно реализовать без квантовой запутанности, используя только методы классической физики. Пусть состояние кубита 1 известно: например, $|a_1\rangle = |0\rangle$. Передадим информацию о состоянии кубита 1 в точку B . Используя полученную информацию, оператор в точке B приведет кубит 3 в состояние $|0\rangle$. Такова схема телепортации в классическом мире: полная информация об объекте передается из точки A в точку B , где объект воссоздается.

6.3. Моделирование квантовых систем на квантовом компьютере

Рассмотрим задачу о моделировании на квантовом компьютере квантовой системы, заданной гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Статическая задача заключается в определении собственных значений E энергии и собственных функций $|u\rangle$ системы согласно уравнению

$$H|u\rangle = E|u\rangle.$$

Динамическая задача заключается в изучении динамики системы согласно уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

(постоянная \hbar включена в гамильтониан H). Используя оператор эволюции $U(t) = \exp(-iHt)$, уравнение динамики можно свести к преобразованию вектора состояния системы:

$$|\psi(x, t)\rangle = U(t) |\psi(x, 0)\rangle. \quad (63)$$

Если задача о собственных значениях решена, то E и $|u\rangle$ известны и

$$|u(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)|u(0)\rangle.$$

Для моделирования квантовой системы на квантовом компьютере необходимо "ввести" вектор состояния (волновую функцию) системы в квантовый регистр, состоящий из кубитов [15]. Пусть функция $\psi(x)$ определена в интервале $-d \leq x \leq d$. Дискретизируем непрерывную переменную x с шагом Δ :

$$x_k = k\Delta, \quad -\frac{d}{\Delta} \leq k \leq \frac{d}{\Delta}.$$

Дискретная функция состояния $|\tilde{\psi}(x_k)\rangle$, заданная в $2d/\Delta + 1$ точках, представляет собой вектор с $2d/\Delta + 1$ комплексными компонентами, которые можно отождествить с компонентами c_k вектора состояния

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k |k\rangle, \quad n = \log_2\left(2\frac{d}{\Delta} + 1\right),$$

n -кубитового регистра квантового компьютера. Точность представления $|\psi(x)\rangle$ зависит от числа кубитов в регистре: шаг дискретизации экспоненциально мал благодаря экспоненциальному большому числу измерений состояния квантового регистра. Квантовые системы с дискретным набором состояний также нетрудно отобразить в состояния регистра из кубитов.

Перейдем к задаче вычисления на квантовом компьютере собственных значений E гамильтониана квантовой системы. Оператор эволюции $U = \exp(-iHt)$ — унитарный оператор, его собственные значения $|\exp(i\varphi)| = 1$, поэтому

$$U|u\rangle = \exp(i\varphi)|u\rangle. \quad (64)$$

С учетом равенства

$$\langle u|\exp(-iHt)|u\rangle = \exp(-i\omega t), \quad E = \varphi \frac{\hbar}{t},$$

рассмотрим алгоритм определения фазы φ (phase estimation) квантовой системы на квантовом компьютере. Выделим в компьютере два регистра из кубитов:

$$|\psi_{in}\rangle = |0\rangle|u\rangle.$$

Кубиты первого регистра все инициализированы (все в состоянии $|0\rangle$), во второй регистр отображено собственное состояние $|u\rangle$ исследуемой квантовой системы.

Следующей операцией является квантовое фурье-преобразование QFT состояния первого регистра. QFT-преобразование идентично дискретному фурье-преобразованию. Фурье-образ N -мерного вектора (x_0, \dots, x_{N-1}) с комплексными компонентами x_j есть N -мерный комплексный вектор (y_0, \dots, y_{N-1}) с компонентами [15]

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right) x_j. \quad (65)$$

Выполняемое в квантовых регистрах QFT-преобразование отображает вектор состояния

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle$$

в его фурье-образ:

$$QFT|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle,$$

где y_k заданы равенством (65). Подставляя в $QFT|\psi\rangle$ справа y_k согласно (65), находим выражение для QFT-преобразования базисных состояний:

$$QFT|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right) |k\rangle, \quad N = 2^n. \quad (66)$$

Фаза $\varphi_{jk} = 2\pi jk/N$ слагаемого $|k\rangle$ определяется комбинацией значений j и k базисных состояний $|j\rangle$ и $|k\rangle$.

Определив QFT, вернемся к нашей задаче. Выполним QFT-преобразование состояния $|0\rangle$ первого регистра:

$$|0_1\rangle|u_2\rangle \xrightarrow{QFT_1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle|u\rangle. \quad (67)$$

Сумма в (67) распадается на произведение суперпозиций $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$ для каждого из n кубитов первого регистра:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1\rangle + |1_1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_2\rangle + |1_2\rangle) \cdots \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_n\rangle + |1_n\rangle). \end{aligned} \quad (68)$$

Под контролем кубитов первого регистра (последовательно кубитов $1, 2, \dots, n$) действуем оператором U на второй регистр $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ раз соответственно. Преобразования

$$U^{2^0}|u\rangle, U^{2^1}|u\rangle, \dots, U^{2^{n-1}}|u\rangle$$

выделяют фазовые множители

$$\exp(i\varphi), \exp(2^1 i\varphi), \dots, \exp(2^{n-1} i\varphi),$$

присоединенные к состояниям $|1\rangle$ контролирующих кубитов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle + \exp(2^{n-1} \cdot 2\pi i\varphi)|1\rangle) (|0\rangle + \exp(2^{n-2} \cdot 2\pi i\varphi)|1\rangle) \cdots \\ \cdots (|0\rangle + \exp(2^0 \cdot 2\pi i\varphi)|1\rangle) &\equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi i\varphi k) |k\rangle. \end{aligned} \quad (69)$$

Обратное QFT-преобразование над первым регистром возвращает его в состояние $|\varphi\rangle$. Проводя измерение состояния первого регистра, получаем значение искомой фазы φ в n -кубитовом представлении.

Выше предполагалось, что собственная функция $|u\rangle$ оператора U известна. Однако на практике мы можем иметь некоторую аппроксимацию $|u\rangle$, полученную,

например, из приближенных вычислений на классическом компьютере. Назовем это приближение пробной функцией $|u_p\rangle$. Если приближение $|u_p\rangle$ не слишком плохо, то произведение $\langle u_p|u\rangle$ не будет экспоненциально мало.

Повторим вычисления по определению фазы, вводя во второй регистр $|u_p\rangle$ вместо $|u\rangle$. Если представить $|u_p\rangle$ в виде разложения по $|u\rangle$:

$$|u_p\rangle = \sum_s c_s |u_s\rangle,$$

то все проведенные выше вычисления можно повторить без изменений. Единственным изменением будет состояние второго регистра: вместо $|u_s\rangle$ будет суперпозиция $\sum_s c_s |u_s\rangle$. Измерив состояние второго регистра, с вероятностью $|c_s|^2$ мы придем к решению $|u_s\rangle$ [39].

6.4. Моделирование динамики квантовых систем на квантовом компьютере

Квантовую динамику системы можно представить как преобразование начального вектора состояния системы $|\psi(x, 0)\rangle$ оператором квантовой эволюции $U = \exp(-iHt) = \exp(-iHt)|\psi(x, 0)\rangle$.

$$|\psi(x, t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi(x, 0)\rangle. \quad (70)$$

Первая проблема, которая возникает в этом преобразовании, наличие в H некоммутирующих частей; например, в случае одномерного движения частицы:

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad H_1 = V(x),$$

операторы кинетической и потенциальной энергии частицы не коммутируют.

Чтобы представить оператор эволюции как произведение операторов эволюции, можно воспользоваться одним из следующих приближений [15]:

$$\exp(i(A + B)\Delta t) = \exp(iA\Delta t)\exp(iB\Delta t) + O(\Delta t^2), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \exp(i(A + B)\Delta t) &= \exp(iA\Delta t)\exp(iB\Delta t) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\Delta t^2\right) + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\exp(i(A + B)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(i\frac{At}{n}\right) \exp\left(i\frac{Bt}{n}\right) \right)^n. \quad (73)$$

В нашем примере одномерного движения частицы можно воспользоваться приближением (71).

7. Процессы декогерентизации состояний кубитов и квантовых компьютеров

7.1. Декогерентизация состояний квантовых систем

В изложенной выше теории идеального квантового компьютера считалось, что квантовые суперпозиции $|\psi\rangle = \sum c_x|x\rangle$, описывающие состояние регистра из L кубитов, остаются когерентными в процессе вычислений сколь угодно долго. Однако взаимодействие регистра с неконтролируемым окружением, неточности в значениях параметров управляющих импульсов, а также неконтролируемое взаимодействие кубитов между собой являются источниками декогерентизации квантового

состояния $|\psi\rangle = \sum_x c_x|x\rangle$. Декогерентизация означает, что когерентное состояние системы превращается в смешанное, описываемое матрицей плотности

$$\rho = \sum_x |c_x|^2 |x\rangle\langle x|.$$

В описании системы матрицей плотности нет информации о фазах базисных состояний, что лишает систему свойств интерферировать и запутываться. По сути декогерентизация состояния квантовой системы означает ее классификацию, т.е. переход в состояние, описываемое законами классической физики.

Важным параметром квантовой системы является время декогерентизации τ_{dc} ее состояний. Ниже мы рассмотрим τ_{dc} для одного кубита и τ_{dc}^L для регистра из L кубитов. Мы покажем, что регистр из L кубитов теряет когерентность состояния быстрее:

$$\tau_{dc}^L = \frac{\tau_{dc}}{L^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Время декогерентизации необходимо сравнивать со средним временем выполнения вычислительной операции τ_{op} : отношение $N_{op} = \tau_{dc}^L/\tau_{op}$ показывает, сколько вычислительных операций удастся выполнить, пока квантовый компьютер сохраняет когерентность состояния. С учетом соотношения $\tau_{dc}^L = \tau_{dc}/L^\alpha$ имеем

$$N_{op} = \frac{\tau_{dc}}{\tau_{op} L^\alpha}. \quad (74)$$

Значения τ_{dc} , τ_{op} могут сильно различаться для различных реализаций кубита, но их отношение мало зависит от реализации: $\tau_{dc}/\tau_{op} = 10^3 - 10^6$.

Из формулы (74) следует, что на компьютере, содержащем $L = 10^3$ кубитов, за время декогерентизации удастся выполнить лишь небольшое число вычислительных операций. Например, алгоритм Шора факторизации L -разрядных чисел требует L^3 операций. Необходимая длительность вычислений превышает время когерентности компьютера на много порядков величины:

$$\frac{\tau_{Shor}}{\tau_{dc}^L} = \frac{\tau_{op} L^3}{\tau_{dc}/L^\alpha} = \frac{\tau_{op}}{\tau_{dc}} L^{(3+\alpha)}. \quad (75)$$

При $L = 10^3$, $\tau_{op}/\tau_{dc} = 10^{-5}$, $\alpha = 1$ получаем $\tau_{Shor}/\tau_{dc}^L \simeq 10^7$.

Из приведенных оценок следует, что процессы декогерентизации квантовых состояний компьютера "запрещают" существование полномасштабного (способного решать большие задачи) квантового компьютера. Где выход из ситуации? Есть очевидные предложения, следующие из формулы (75): 1) необходимо сократить время операции τ_{op} ; 2) необходимо увеличить время декогерентизации τ_{dc} кубита.

Уменьшать время τ_{op} можно, увеличивая интенсивность (напряженность) управляющих полей. Однако напряженности управляющих полей ограничены сверху возбуждением нерезонансных переходов и возникновением других нелинейных эффектов. Увеличение времени τ_{dc} требует тщательного изучения всех возможных механизмов декогерентизации кубита в данной конкретной реализации и разработки конкретных мер по изоляции кубита от окружения, увеличения точности управляющих сигналов и т.п.

Однако все эти меры могут оказаться недостаточными для обеспечения необходимого времени вычислений. По существу необходимы способы стабилизации когерентного состояния компьютера на сколь угодно длительное время, чтобы можно было завершить вычисления любой задачи с "большим" (но полиномиальным) алгоритмом вычислений. Таким методом является метод квантовой коррекции ошибок.

Метод предполагает периодическую "очистку" состояния квантового компьютера от малых ошибок, возникших векторе состояния в результате процессов декогерентизации за время после последней очистки. Предложены также "активные" методы подавления процессов декогерентизации. Однако квантовый метод коррекции ошибок представляет собой главную надежду исследователей на возможность построения полномасштабного квантового компьютера, работающего в когерентном состоянии сколь угодно длительное время. Последующие разделы обзора посвящены процессам декогерентизации и методам коррекции ошибок.

Исследования декогерентизации квантовых систем являются естественным развитием исследований релаксационных процессов в многочастичных системах, активно развивавшихся в течение XX века. Процессы спин-спиновой и спин-решеточной релаксации по сути совпадают с процессами фазовой и амплитудной декогерентизации спиновых кубитов. Физики, знакомые с литературой по процессам релаксации, в теории декогерентизации обнаружат много знакомых элементов. Декогерентизацию можно понимать как релаксацию когерентности: в процессе декогерентизации система движется от неравновесного (когерентного) состояния к равновесному (смешанному); процесс сопровождается возрастанием энтропии системы.

Процессы декогерентизации квантовых систем исследуются в различных приближениях и моделях. Наиболее адекватной является модель, где окружение системы (кубита, регистра) описывается квантово: декогерентизация возникает как следствие запутывания состояний системы с состояниями окружения. Более просты модели, где окружение описывается как флуктуирующие классические поля. В этих моделях запутанность с окружением в явном виде не возникает, но упрощение в описании окружения позволяет описать декогерентизацию в процессе квантовых вычислений (операций) [40].

7.2. Фазовая декогерентизация кубита

Элементы квантовой теории декогерентизации выявляются при рассмотрении простейшей системы, состоящей из двух кубитов: кубит q — квантовая система, кубит e — квантовое окружение системы. Пусть кубит q в суперпозиционном состоянии $|\psi\rangle = \alpha|0_q\rangle + \beta|1_q\rangle$ взаимодействует с окружением e в состоянии $|0_e\rangle$ и запутывается в результате операции CNOT_{qe} :

$$(\alpha|0_q\rangle + \beta|1_q\rangle)|0_e\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}_{qe}} \alpha|0_q\rangle|0_e\rangle + \beta|1_q\rangle|1_e\rangle \equiv |\psi_{qe}\rangle. \quad (76)$$

Вычислим приведенную матрицу плотности кубита q (квантовой системы), усреднив ρ_{qe} по состоянию окружения:

$$\rho_q = \langle 0_e | \rho_{qe} | 0_e \rangle + \langle 1_e | \rho_{qe} | 1_e \rangle = |\alpha|^2|0_q\rangle\langle 0_q| + |\beta|^2|1_q\rangle\langle 1_q|. \quad (77)$$

Запутывание с ортонормированными состояниями окружения привело к полной декогерентизации кубит-системы: теперь его состояние описывается диагональной матрицей плотности; недиагональные элементы (когерентности) равны нулю. Хотя состояние $|\psi_{qe}\rangle$ системы qe в (76) когерентно, подсистема q находится в смешанном состоянии. В изложененной упрощенной трактовке декогерентизация появляется как бы внезапно, отсутствует описание декогерентизации как процесса. На самом деле процесс спрятан внутри операции CNOT_{qe} , выполняемой за конечное время, в течение которого кубиты q и e взаимодействуют. Когда операция CNOT_{qe} завершается, завершается и процесс декогерентизации кубита q .

Несколько расширим модель декогерентизации кубита q в квантовом окружении e . В начальный момент $t = 0$ кубит q и окружение e не запутаны:

$$|\psi_{qe}(0)\rangle = (\alpha|0_q\rangle + \beta|1_q\rangle)|e(0)\rangle.$$

Включим взаимодействие. По истечении времени t кубит и окружение запутываются:

$$|\psi_{qe}(t)\rangle = \alpha|0_q\rangle|e_0(t)\rangle + \beta|1_q\rangle|e_1(t)\rangle.$$

Если $t < t_{de}$, состояния $|e_0(t)\rangle$ и $|e_1(t)\rangle$ нормированы, но не ортогональны:

$$\langle e_0(t)|e_0(t)\rangle = \langle e_1(t)|e_1(t)\rangle = 1, \quad \langle e_0(t)|e_1(t)\rangle = \cos \theta.$$

"Угол" θ между векторами состояния окружения характеризует процесс декогерентизации. При $t = 0$ состояния окружения $|e_0(0)\rangle = |e_1(0)\rangle = |e(0)\rangle$, $\langle e_0(0)|e_1(0)\rangle = 1$. В процессе декогерентизации $\cos \theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$, т.е. векторы $|e_0(t)\rangle$ и $|e_1(t)\rangle$ ортогонализуются.

Введем вектор $|e_0^\perp(t)\rangle$, ортогональный относительно $|e_0(t)\rangle$; выберем векторы $|e_0(t)\rangle$, $|e_0^\perp(t)\rangle$ в качестве базиса. Если $\langle e_0(t)|e_1(t)\rangle = \cos \theta$, то $\langle e_0^\perp(t)|e_1(t)\rangle = \sin \theta$. Представляя матрицу плотности системы и окружения как $\rho_{qe}(t) = |\psi_{qe}(t)\rangle\langle\psi_{qe}(t)|$, по формуле

$$\rho_q(t) = \langle e_0(t)|\rho_{qe}|e_0(t)\rangle + \langle e_0^\perp(t)|\rho_{qe}|e_0^\perp(t)\rangle$$

находим приведенную матрицу плотности кубита:

$$\rho_q(t) = |\alpha|^2|0_q\rangle\langle 0_q| + \alpha\beta^*|1_q\rangle\langle 0_q|\cos \theta + \alpha^*\beta|0_q\rangle\langle 1_q|\cos \theta + |\beta|^2|1_q\rangle\langle 1_q|,$$

или в матричной форме:

$$\rho_q(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \cos \theta(t) \\ \alpha^*\beta \cos \theta(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Недиагональные матричные элементы приведенной матрицы плотности называются когерентностями. С течением времени $\cos \theta(t) \rightarrow 0$ и когерентности исчезают. Термин "декогерентизация" приобретает буквальный смысл: это процесс исчезновения когерентностей в приведенной матрице плотности кубита. Другой особенностью процесса, описываемого матрицей плотности (78), является инвариантность модулей амплитуд α , β ; изменяются только их фазы. Поэтому матрица (78) описывает так называемую фазовую декогерентизацию кубита.

7.3. Оператор декогерентизации кубита

В модель декогерентизации кубита q в квантовом окружении e можно включить и амплитудную декогерентацию, получив совместное описание процессов фазовой и амплитудной декогерентизации, протекающих одновременно:

$$|\psi_{qe}(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|e\rangle \xrightarrow{\text{dc}} \xrightarrow{\text{dc}} \alpha|0\rangle|e_{00}\rangle + \alpha|1\rangle|e_{01}\rangle + \beta|1\rangle|e_{11}\rangle + \beta|0\rangle|e_{10}\rangle. \quad (79)$$

Амплитуда $|e_{01}\rangle$ описывает переход из состояния кубита $\alpha|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$; за счет этого начальная амплитуда α состояния $|0\rangle$ уменьшается до значения $\alpha|e_{00}\rangle$. Смысл амплитуд $\beta|e_{10}\rangle$ и $\beta|e_{11}\rangle$ аналогичен.

Запишем преобразование (79) в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \alpha|0\rangle \\ \beta|1\rangle \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |e_{00}\rangle & |e_{01}\rangle \\ |e_{10}\rangle & |e_{11}\rangle \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha|0\rangle \\ \beta|1\rangle \end{vmatrix}. \quad (80)$$

Разложение матрицы декогерентизации ($|e_{ij}\rangle$) по матрицам Паули σ_i назовем оператором декогерентизации E :

$$E = \begin{pmatrix} |e_{00}\rangle & |e_{01}\rangle \\ |e_{10}\rangle & |e_{11}\rangle \end{pmatrix} \equiv |e_0\rangle\sigma_0 + |e_1\rangle\sigma_x + i|e_2\rangle\sigma_y + |e_3\rangle\sigma_z, \quad (81)$$

$$|e_{0,1}\rangle = \frac{1}{2}(|e_{00}\rangle \pm |e_{11}\rangle), \quad |e_{2,3}\rangle = \frac{1}{2}(|e_{01}\rangle \pm |e_{10}\rangle). \quad (82)$$

Преобразование

$$E|\psi\rangle|e\rangle = \sum_{j=0}^3 |e_j\rangle\sigma_j|\psi\rangle \quad (83)$$

описывает в обобщенной форме процесс декогерентизации как сумму операций undo (тождественное преобразование σ_0), переворачивание кубита ($\sigma_x = \text{NOT}$, $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$), изменение фазы (σ_z , $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$), переворот с изменением фазы ($i\sigma_y$).

Насколько сильно декогерентизованное состояние

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^3 |e_j\rangle\sigma_j|\psi(0)\rangle$$

отличается от начального состояния $|\psi(0)\rangle$, передается параметром соответствия (fidelity)

$$F_\psi(t) = \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle = \sum_{i,j} \langle\psi(0)|\sigma_j|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\sigma_i|\psi(0)\rangle\langle e_j(t)|e_i(t)\rangle. \quad (84)$$

Параметр $F_\psi(t)$ зависит от начального состояния $|\psi(0)\rangle$, что отмечено индексом ψ . Более представительные значения $F(t)$ получаются как средние по некоторому набору состояний ψ_s :

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n F_{\psi_s}(t). \quad (85)$$

Введенные выше понятия и операторы легко обобщаются на случай n кубитов (квантовый компьютер). Параметры, характеризующие время декогерентизации (скорость декогерентизации $\gamma = \tau_{dc}^{-1}$), должны быть получены либо из эксперимента, либо путем расчета на основе микроскопических моделей. Пример такого расчета приведен в разделе 7.4.

7.4. Микроскопическая теория

процесса амплитудной декогерентизации

Наглядное и полное описание процесса амплитудной декогерентизации можно получить, решая уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

для системы с гамильтонианом $H = H_q + H_e + H_{qe}$. Здесь гамильтониан $H_q = \hbar\omega_0|1\rangle\langle 1|$ описывает кубит с энергиями уровней $E_0 = 0$ и $E_1 = \hbar\omega_0$, $H_e = \sum_m \hbar\omega_m a_m^* a_m$ — гамильтониан системы осцилляторов окружения, гамильтониан взаимодействия

$$H_{qe} = \sum_m \lambda_m |0\rangle\langle 1| a_m^* + \lambda_m^* |1\rangle\langle 0| a_m$$

описывает переходы с обменом энергией между кубитом и окружением:

$$|0\rangle|n_m\rangle \rightarrow |1\rangle|n_m-1\rangle, \quad |1\rangle|n_m-1\rangle \rightarrow |0\rangle|n_m\rangle.$$

Зададим начальные условия: при $t = 0$ кубит находится в состоянии $|1_q\rangle$, т.е. $c_1(0) = 1$, осцилляторы окружения — в вакуумном состоянии $|0_1 \dots 1_l \dots 0_m\rangle$. Благодаря взаимодействию H_{qe} при $t > 0$ возникает состояние

$$|\psi_l\rangle = |0_q\rangle|0_1 \dots 1_l \dots 0_m\rangle, \quad l = 1, \dots, m,$$

с ненулевой амплитудой $c_l(t)$.

Искомое решение представляет собой запутанное состояние кубита и окружения:

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) \exp(i\omega_0 t) |1\rangle + \sum_{l=1}^m c_l(t) \exp(i\omega_l t) |\psi_l\rangle, \quad (86)$$

$$c_1(0) = 1, \quad c_l(0) = 0.$$

После стандартных вычислений из уравнения Шредингера получаем уравнения для амплитуд $c_1(t)$ и $c_l(t)$:

$$i\hbar \dot{c}_1 = \sum_{l=1}^m \lambda_l^* c_l \exp(-i(\omega_l - \omega_0)t), \quad (87)$$

$$i\hbar \dot{c}_l = \lambda_l c_1 \exp(i(\omega_l - \omega_0)t). \quad (88)$$

Исключая из (87) $c_l(t)$, приходим к уравнению для $c_1(t)$:

$$\dot{c}_1(t) = \int_0^t c_1(t') k(t-t') dt', \quad (89)$$

где

$$k(t-t') = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{l=1}^m |\lambda_l|^2 \exp(-i(\omega_l - \omega_0)(t-t')). \quad (90)$$

Для времен $t \leq 2\pi/(\omega_l - \omega_0)$, таких что

$$\exp(-i(\omega_l - \omega_0)t) \simeq 1,$$

принимая $c_1(t') = c_1(0) = 1$, имеем

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{l=1}^m |\lambda_l|^2 t^2, \quad t^2 \ll \hbar^2 \left(\sum_{l=1}^m |\lambda_l|^2 \right)^{-1}. \quad (91)$$

Результат (91) интересен с физической точки зрения: в начальном периоде процесса амплитуда начального состояния убывает только квадратично по малой вели-

чине t^2 . Позже мы воспользуемся этим результатом при объяснении так называемого квантового эффекта Зенона.

Перепишем соотношение (89) в виде

$$\dot{c}_1(t) \simeq -c_1(t)\Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau. \quad (92)$$

Основной вклад в интеграл $\Gamma(t)$ дает слагаемое $\omega_l = \omega_0$. Это позволяет распространить интегрирование по τ до ∞ и получить (см. [41])

$$\frac{\gamma}{2} \equiv \Gamma(\infty) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\lambda(\omega_0)|^2, \quad (93)$$

$$c_1(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right), \quad (94)$$

$$c_l(t) = \frac{\lambda_l}{\hbar} \frac{1 - \exp(i(\omega_l - \omega'_0 + i\gamma/2)t)}{\omega_l - \omega'_0 + i\gamma/2}, \quad (95)$$

где

$$\omega'_0 = \omega_0 + \delta, \quad \delta = P \sum_{l=1}^m \frac{|\lambda_l|^2}{\omega_0 - \omega_l}.$$

7.5. Фазовая и амплитудная декогерентизация спинового кубита в случайному классическом поле

Для спинового кубита — частицы со спином $S = 1/2$ в постоянном внешнем магнитном поле $\mathbf{B}(0, 0, B_z)$ решение уравнения Шредингера при начальных условиях $|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |\psi(0)\rangle = \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_0 t\right) \left[\alpha|0\rangle + \beta \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t\right) |1\rangle \right], \end{aligned} \quad (96)$$

где $E_0 = -\hbar\omega/2$ и $E_1 = \hbar\omega/2$ — уровни энергии спина, соответствующие состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$ спинового кубита.

В условиях магнитного резонанса в жидкостях к постоянному полю $\mathbf{B}(0, 0, B_z)$ добавляется случайное внутреннее магнитное поле $\Delta\mathbf{B}(\Delta\mathbf{B}_\perp, \Delta B_z)$, созданное, например, спинами всех других частиц, окружающих спиновый кубит. Броуновское движение частиц в системе (поступательная и вращательная диффузия) делает $\Delta\mathbf{B}$ случайной функцией времени со временем корреляции τ_c .

Продольная компонента случайного поля ΔB_z дает вклад $\Delta E = g\beta \Delta B_z$ в разность энергий между уровнями спинового кубита и случайное приращение фазы $\Delta\phi(t) = \Delta Et$. Случайные приращения фазы $\Delta\phi(t)$ обуславливают фазовую декогерентизацию спинового кубита. Аналогично, поперечная компонента случайного поля $\mathbf{B}_\perp(t)$ приводит к амплитудной (диссипативной) декогерентизации спинового кубита. Изложенная модель позволяет дать простое описание этих важных процессов.

Случайный процесс $\Delta\phi(t) = \Delta\omega(t)t$ можно представить ступенчатым с характерным временным интервалом τ_c :

$$\Delta\phi_i(\tau_c) = \Delta\omega_i \tau_c, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\Delta\omega_i$ — постоянный в течение времени τ_c сдвиг частоты резонанса кубита. Тогда

$$\Delta\phi(t) = \Delta\phi(n\tau_c) = \sum_{i=1}^n \Delta\phi_i = \left(\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i \right) \tau_c.$$

Для знакопеременного процесса

$$\sum_i \Delta\phi_i = 0, \quad \sum_i \Delta\omega_i = 0,$$

однако $\overline{\Delta\phi^2} = \tau_c^2 n \overline{\Delta\omega_i^2} \equiv \overline{\Delta\omega_i^2} \tau_c t$. Черта сверху означает усреднение:

$$\overline{\Delta\omega_i^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i^2.$$

Среднеквадратичное приращение фазы кубита пропорционально длительности случайного процесса.

Определим время фазовой декогерентизации $t_{dc,ph}$ кубита как время, необходимое, чтобы достичь $\overline{\Delta\phi^2} = 1$ рад 2 . Тогда из равенства $\overline{\Delta\phi^2} = \overline{\Delta\omega_i^2} \tau_c t_{dc,ph} = 1$ получаем время фазовой декогерентизации:

$$t_{dc,ph} = \frac{1}{\overline{\Delta\omega^2} \tau_c}. \quad (97)$$

В случае $\overline{\Delta\omega^2}$, определяемого диполь-дипольным взаимодействием одинаковых спинов, разделенных расстоянием r , имеем

$$\overline{\Delta\omega^2} = \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\hbar^2 r^6} \equiv \frac{3}{2} \frac{\gamma^4 \hbar^2}{r^6}.$$

С учетом этого из соотношения (97) следует, что

$$\frac{1}{t_{dc,ph}} = \frac{3}{2} \frac{\gamma^4 \hbar^2}{r^6} \tau_c.$$

Для ядерных спинов в молекулярных жидкостях значение $t_{dc,ph} \simeq 1$ с.

Рассмотрим теперь в модели случайных полей амплитудную декогерентизацию кубита. В состоянии $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \exp(i\phi)\beta|1\rangle$ намагниченность спинового кубита

$$M_z = \gamma\hbar \sum_{S_z=-1/2}^{+1/2} p_{S_z} S_z = \frac{1}{2} \gamma\hbar (|\beta|^2 - |\alpha|^2). \quad (98)$$

Из равенства (98) следует, что любой процесс, изменяющий намагниченность M_z , является амплитудным процессом, изменяющим амплитуды $|\alpha|, |\beta|$.

Покажем, что наличие поперечного случайного магнитного поля $\Delta\mathbf{B}_\perp$ приводит к случайным приращениям намагниченности $M_z(t)$ и, значит, к случайным изменениям амплитуд.

Введем две системы координат: Oxz с осью z вдоль постоянного поля \mathbf{B} и $Ox'z'$ с осью z' вдоль поля $\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}_\perp$ (рис. 10). Угол θ между осями Oz и Oz' определяется равенством $\tan \theta = \Delta B_\perp / B \ll 1$. В момент времени $t = 0$ проекции намагниченности на оси Oz', Ox' определяются как

$$M_{z'}(0) = M_z(0) \cos \theta, \quad (99)$$

$$M_{x'}(0) = -M_z(0) \sin \theta.$$

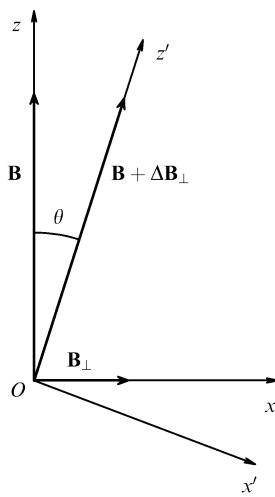


Рис. 10. Системы координат, связанные с внешним постоянным (\mathbf{B}) и полным ($\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}_\perp$) полями.

В момент времени $t = \tau_c$ эти же проекции имеют вид

$$\begin{aligned} M_{z'}(\tau_c) &= M_z(0) \cos \theta, \\ M_{x'}(\tau_c) &= -M_z(0) \cos(\omega_0 \tau_c) \sin \theta. \end{aligned} \quad (100)$$

Множитель $\cos(\omega_0 \tau_c)$ обусловлен прецессией $M_{x'}$ вокруг оси Oz' с частотой ω_0 . В течение времени τ_c случайное поле $\Delta\mathbf{B}_\perp$ считается постоянным (ступенчатый процесс).

Найдем $M_z(\tau_c)$:

$$\begin{aligned} M_z(\tau_c) &= M_{z'}(\tau_c) \cos \theta - M_{x'}(\tau_c) \sin \theta = \\ &= M_z(0) [1 - \sin^2 \theta (1 - \cos(\omega_0 \tau_c))]. \end{aligned} \quad (101)$$

Принимая $\omega_0 \tau_c \ll 1$ и заменяя в (101) $\sin \theta$ с учетом $\tan \theta = \Delta B_\perp / B$, получаем

$$\frac{M_z(\tau_c)}{M_z(0)} = 1 - \frac{\Delta B_\perp^2}{B^2} \frac{\omega_0^2 \tau_c^2}{2}. \quad (102)$$

Из (102) следует уравнение для релаксации продольной намагниченности M_z (амплитуд $|\alpha|, |\beta|$):

$$\frac{M_z(\tau_c) - M_z(0)}{\tau_c M_z(0)} = \frac{d}{dt} \frac{M_z}{M_z(0)} = -\frac{1}{t_{M_z}} = -\frac{\Delta B_\perp^2 \gamma^2 \tau_c}{2}. \quad (103)$$

Релаксационный процесс для продольной намагниченности спина

$$M_z(t) = M_z(0) \exp\left(-\frac{t}{t_{M_z}}\right) + M_z^B, \quad (104)$$

ведет к значению намагниченности M_z^B при бульмановском распределении заселенностей уровней энергии кубита. Время релаксации продольной намагниченности спина одновременно есть время амплитудной декогерентизации кубита:

$$t_{dc, amp} = t_{M_z} = \frac{2}{\Delta B_\perp^2 \gamma^2 \tau_c}.$$

Для диполь-дипольного взаимодействия двух одинаковых спинов, разделенных расстоянием r , имеем

$$\frac{1}{t_{dc, amp}} = \frac{3}{2} \frac{\gamma^4 \hbar^2}{r^6} \tau_c.$$

В маловязких жидкостях времена $t_{dc, amp}$ и $t_{dc, ph}$ совпадают [42].

7.6. Декогерентизация вследствие межкубитовых взаимодействий: квантовый хаос

С точки зрения работы квантового компьютера идеальной была бы ситуация, когда взаимодействие между парой кубитов i и j включается только в момент выполнения двухкубитовой операции типа

$$(\text{Control})_{ij} - U_{ij};$$

в течение всего остального времени взаимодействие между кубитами отсутствует. В реальных ситуациях некоторое остаточное взаимодействие H_{ij} между кубитами i и j существует всегда, т.е. во время выполнения однокубитовых операций и свободной эволюции (простаивания) компьютера.

В разделе 7.4 показано, что, если выделить один кубит и рассматривать его декогерентацию вследствие взаимодействия с другим, этот процесс аналогичен процессу декогерентизации кубита, обусловленному его взаимодействием с квантовым окружением. Здесь мы рассмотрим динамику квантового компьютера, состоящего из большого числа взаимодействующих кубитов [43]:

$$H = \sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)}. \quad (105)$$

Резонансные частоты ω_i кубитов и параметр J_{ij} взаимодействия распределены равномерно в интервалах $[0,5\Delta_0, 1,5\Delta_0]$ и $[-J, J]$ соответственно. Среднее расстояние между уровнями энергии компьютера $\Delta_n = n\Delta_0/2^n$, где 2^n — число базисных состояний компьютера из n кубитов. Среднее расстояние Δ_n экспоненциально мало, так что $\Delta_n \ll J$. Сильные межкубитовые взаимодействия в компьютере соответствуют условию

$$\frac{J}{\Delta_0/n} > 1.$$

В этом случае компьютерное моделирование выявляет хаотическую динамику квантового компьютера.

При малых значениях энергии взаимодействия:

$$\frac{J}{\Delta_0/n} \ll 1,$$

наблюдается детерминированная динамика компьютера. В детерминированной динамике вектор состояния содержит малое число базисных функций. В хаотической динамике суперпозиция состоит из большого числа базисных состояний с малыми весами. При переходе от системы с детерминированной динамикой к системе с хаотической динамикой изменяется статистика интервалов s между уровнями энергии системы: происходит переход от пуассоновского

$$P_P(s) = \exp(-s)$$

к вигнер-дайсоновскому

$$P_{WD} = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right)$$

распределению.

Результаты теории квантового хаоса позволяют оценить предложенные реализации квантового компьютера с точки зрения их отдаленности от квантового хаоса. Чтобы в компьютере не возникла квантовая хаотическая динамика, взаимодействие между кубитами J должно быть меньше порогового значения J_c [43]:

$$J \ll J_c = \frac{A_0}{n}.$$

7.7. Декогерентизация, обусловленная ошибками управления кубитами

Гамильтониан управляемого внешним классическим полем $\mathbf{h}(t)$ кубита можно записать как

$$H(t) = \omega_0 \sigma_z + \sigma(\mathbf{h}(t) + \delta\mathbf{h}(t)), \quad (106)$$

где $\mathbf{h}(t)$ — часть управляющего поля, обеспечивающая желаемое идеальное управление, а $\delta\mathbf{h}(t)$ — ошибка управления, вызванная тем, что поле контролируется с некоторой экспериментальной погрешностью $\delta h/h$. Ошибки управления рассматривают как еще один источник ошибок в квантовых вычислениях наряду со взаимодействием кубитов с окружением и между собой.

Оценим влияние ошибок управления с помощью параметра соответствия (fidelity) квантового вычисления. Конечные состояния компьютера в случаях идеального и реального управления вычислениями имеют вид

$$|\psi^{(id)}(t)\rangle = U^{(id)}|\psi(0)\rangle, \quad (107)$$

$$|\psi^{(re)}(t)\rangle = U^{(re)}|\psi(0)\rangle. \quad (108)$$

Проекции $|\psi(t)\rangle$ на базисные состояния квантового компьютера определяются равенствами

$$c_x^{(id)} = \langle x | \psi^{(id)}(t) \rangle, \quad c_x^{(re)} = \langle x | \psi^{(re)}(t) \rangle. \quad (109)$$

Из условия нормировки имеем

$$\sum_x |c_x^{(id)}|^2 = \sum_x |c_x^{(re)}|^2 = 1.$$

В качестве критерия точности квантового вычисления выберем усредненную норму скалярного произведения 2^L -мерных векторов $c_x^{(id)}$ и $c_x^{(re)}$:

$$F = \left\langle \left| \sum_{x=0}^{2^L-1} c_x^{(id)} c_x^{(re)*} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \langle U^{(id)}\psi(0) | \psi^{(re)*}(0) U^{(re)*} \rangle \right|^2 \right\rangle. \quad (110)$$

Внешнее усреднение производится по распределению случайных приращений, отличающих $c_x^{(re)}$ от $c_x^{(id)}$. Если вычисление идеально, то $c_x^{(re)} = c_x^{(id)}$ и $F = 1$.

Представим $U^{(re)}$ в виде упорядоченного произведения M матриц: $U^{(re)} = U_1^{(re)} \dots U_M^{(re)}$, каждая из которых содержит ошибки ξ_k, Φ_k :

$$U_k^{(re)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k + \xi_k) & \exp(i(\varphi_k + \Phi_k)) \sin(\theta_k + \xi_k) \\ -i \exp(-i(\varphi_k + \Phi_k)) \sin(\theta_k + \xi_k) & \cos(\theta_k + \xi_k) \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Разлагая $U_k^{(re)}$ по малым приращениям ξ_k, Φ_k , имеем

$$F = 1 - \left\langle \sum_{k=1}^M [c_k^{(\xi\xi)} \xi_k^2 + c_k^{(\xi\Phi)} \xi_k \Phi_k + c_k^{(\Phi\Phi)} \Phi_k^2] \right\rangle.$$

Для некоррелированных ξ_k, Φ_k можно записать

$$F = 1 - M(F^{(\xi\xi)} \xi^2 + F^{(\xi\Phi)} \xi \Phi + F^{(\Phi\Phi)} \Phi^2), \quad (112)$$

$$F^{(ij)} = \langle c^{(ij)} \rangle.$$

Формула (112) свидетельствует об аккумулировании ошибок управления: ошибки в вычислениях растут пропорционально числу M элементарных вычислительных операций.

Принимая в качестве требования к качеству квантовых вычислений некоторое числовое значение F , получаем соотношение

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{M} (1 - F)$$

между допустимыми ошибками управления $\langle \xi^2 \rangle$ и числом возможных вычислительных операций M . Пусть, например, $F = 0,99$, $\langle \xi^2 \rangle^{1/2} = 10^{-2}$, тогда число операций $M = 10^2$. При уменьшении погрешности контроля до $\langle \xi^2 \rangle^{1/2} = 10^{-4}$ (0,01 %) число операций $M = 10^6$.

Таким образом, высокий уровень точности контроля является необходимым условием реализации квантовых компьютеров. В импульсной технике с высокой степенью точности контролируются частоты генераторов; в будущем необходимо повысить точность контроля амплитуд управляющих полей.

7.8. Декогерентизация кубитов в многоуровневых системах

Часто в качестве кубита выбирают два "подходящих" по свойствам состояния многоуровневой системы. Например, при работе с ионами в ловушке в качестве кубитовых можно выбрать основной и возбужденный оптические уровни энергии иона [5, 44]. Наличие других уровней дает дополнительные возможности: их можно использовать в качестве вспомогательных при выполнении логических операций и измерении состояния кубита.

Вместе с тем "некубитовые" уровни энергии могут образовать дополнительный канал декогерентизации, обусловленный "утечкой" квантовой информации (заселенности) с кубитовых уровней при выполнении логических операций. Переходы с кубитовых уровней на некубитовые уровни осуществляются как нерезонансные переходы, вероятность которых возрастает при увеличении напряженности управляющих кубитом резонансных полей. Некубитовые уровни энергии выступают как бы в качестве дополнительного "окружения", вызывающего декогерентизацию кубита. Возможные способы подавления декогерентизации описанного типа предложены в [45].

7.9. Декогерентизация в квантовых операциях

При вычислениях управляющие сигналы изменяют состояния кубитов. Поскольку процесс декогерентизации $E|\psi\rangle$ зависит от состояния системы $|\psi\rangle$, получается, что процесс вычислений сам влияет на процесс декогерентизации. Поэтому следует рассмотреть вопрос о декогерентизации в ходе квантовых операций. В качестве примера рассмотрим, как протекает декогерентиза-

ция при выполнении двухкубитовой операции CNOT [40, 47].

Представим гамильтониан системы из кубитов a и b в виде

$$H(t) = \sum [(\omega_n + \delta\omega_n)\sigma_z^{(n)} + (J_n + \delta J_n)\sigma_x^{(n)}] + \\ + (g + \delta g)(\sigma_+^{(a)}\sigma_-^{(b)} + \sigma_-^{(a)}\sigma_+^{(b)}), \quad n = a, b. \quad (113)$$

Флуктуирующие части гамильтониана $\delta\omega_n\sigma_z^{(n)}$, $\delta J_n\sigma_x^{(n)}$ могут описывать фазовую и амплитудную декогерентизацию, обусловленную как взаимодействием с окружением, так и неточностью управляющих сигналов ω_n и J_n . Третий член суммы учитывает взаимодействие кубитов, способное вызвать переходы типа flip-flop.

Для максимального упрощения вычислений примем, что средние значения флуктуаций равны нулю и δ -коррелированы:

$$\langle \delta\omega_n(t) \rangle = \langle \delta J_n(t) \rangle = \langle \delta g(t) \rangle = 0, \\ \langle \delta\omega_n(t) \delta\omega_m(t') \rangle = \gamma_0 \delta_{nm} \delta(t - t'), \\ \langle \delta J_n(t) \delta J_m(t') \rangle = \gamma_1 \delta_{nm} \delta(t - t'), \\ \langle \delta g(t) \delta g(t') \rangle = \gamma_2 \delta(t - t').$$

Значения параметров γ_0 , γ_1 , γ_2 для конкретной системы определяются из измерений или вычисляются с помощью микроскопических моделей взаимодействий.

Хотя операция CNOT является элементарной квантовой операцией, входящей в состав универсального набора операций, она выполняется с помощью последовательности вращений $U_z(\alpha)$, $U_x(\alpha)$ вектора состояния одного кубита вокруг осей z и x на угол α и двухкубитовой операции $U_j(\alpha)$ типа flip-flop на угол α [40]:

$$U_{\text{CNOT}} = U_x^{(b)}\left(\frac{\pi}{2}\right) U_z^{(b)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) U_x^{(b)}(-\pi) U_j\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times U_x^{(a)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) U_j\left(\frac{\pi}{2}\right) U_z^{(b)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) U_z^{(a)}\left(-\frac{\pi}{2}\right). \quad (114)$$

В формуле (114) введены обозначения:

$$U_z^{(n)}(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_z^{(n)}\right), \\ U_x^{(n)}(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_x^{(n)}\right), \\ U_j(\alpha) = \exp\left(i\alpha(\sigma_+^{(a)}\sigma_-^{(b)} + \sigma_-^{(a)}\sigma_+^{(b)})\right).$$

Операция $U_z^{(n)}(\alpha)$ выполняется включением $\omega_n = -\varepsilon_0 \text{sign } \alpha$ на время $\tau = \alpha/2\varepsilon_0$, операция $U_x^{(n)}(\alpha)$ — включением $J_n = -J_0 \text{sign } \alpha$ на время $\tau = \alpha/2J_0$, операция $U_j(\alpha)$ — включением $g = -g_0 \text{sign } \alpha$ на время $\tau = \alpha/g_0$. При этом $\text{sign } \alpha = 1$, если $\alpha > 0$, $\text{sign } \alpha = -1$, если $\alpha < 0$. Полное время выполнения операции CNOT есть

$$\tau_{\text{CNOT}} = \frac{\pi}{2\varepsilon_0} + \frac{\pi}{J_0} + \frac{\pi}{g_0}.$$

Параметр качества выполнения операции CNOT определяется как

$$F(|\psi(0)\rangle) = \langle\psi(t)|\rho_{\text{CNOT}}|\psi(t)\rangle. \quad (115)$$

Здесь

$$|\psi(t)\rangle = U_{\text{CNOT}}^{(\text{id})}|\psi(0)\rangle, \\ \rho_{\text{CNOT}}(t) = U_{\text{CNOT}}|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|U_{\text{CNOT}}^*,$$

U_{CNOT} — матрицы, содержащие неточности, обусловленные флуктуациями в гамильтониане (113).

Параметр $F(|\psi(0)\rangle)$ является функцией начального состояния системы $|\psi(0)\rangle$. Более представительный результат получается путем усреднения $F(|\psi(0)\rangle)$ по некоторому набору начальных состояний $|\psi_{ij}(0)\rangle$:

$$F = \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{4} F(|\psi_{ij}(0)\rangle).$$

В работе [40] выбран следующий набор начальных состояний для первого кубита:

$$|\psi_1(0)\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2(0)\rangle = |1\rangle, \\ |\psi_3(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |\psi_4(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

(аналогично при $j = 1, \dots, 4$ для второго кубита).

Методом компьютерного моделирования получены графики зависимости ошибки $E(\gamma) = 1 - F(\gamma)$ при выполнении квантовой операции CNOT от среднеквадратичных значений флуктаций γ . При $\omega_0 = J_0 = g_0 = 1$ линейная зависимость $E \propto \gamma$ простирается до значений $\gamma \simeq 0,05$ (режим слабых шумов). Наблюдается аддитивность эффекта в режиме слабых шумов [40]:

$$E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = E(\gamma_0, 0, 0) + E(0, \gamma_1, 0) + E(0, 0, \gamma_2). \quad (116)$$

Ошибка $E(\gamma)$ достигает значения 0,75 в режиме сильных шумов, когда состояние системы становится смешанным.

7.10. Зависимость скорости декогерентизации от числа кубитов в компьютере

В разделе 7.9 мы вычислили скорость γ_1 декогерентизации состояния одного отдельного кубита. Полномасштабный квантовый компьютер состоит из более чем тысячи кубитов. Зависит ли скорость декогерентизации γ_n состояний компьютера от числа n кубитов в нем? Ответ положителен. Если окружения разных кубитов не коррелированы (не когерентны), то $\max \gamma_n = n\gamma_1$. Если все кубиты погружены в одно и то же (когерентное) окружение, то $\max \gamma_n = n^2\gamma_1$.

Строгое доказательство этих утверждений получено в [48] для модели кубита в окружении осцилляторов. Приведем здесь доказательство на основе представлений, развитых выше для единичного кубита.

Начальное незапутанное состояние компьютера и окружения есть

$$|\psi(0)\rangle = \left(\sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle \right) |E(0)\rangle. \quad (117)$$

В результате взаимодействия компьютера с окружением их состояния запутываются:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle |E_x(x)\rangle. \quad (118)$$

Недиагональные матричные элементы приведенной матрицы плотности $\text{Tr}_E(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$ имеют вид

$$\rho_{x,x'}(t) = c_x c_{x'}^* \langle E_x(t) | E_{x'}(t) \rangle. \quad (119)$$

Декогерентизация заключается в затухании (исчезновении) недиагональных матричных элементов матрицы плотности $\rho_{x,x'}(t)$ (когерентностей $c_x c_{x'}^*$) в результате ортогонализации состояний окружения $E_x(t)$ и $E_{x'}(t)$, соответствующих различным базисным состояниям $|x\rangle$ и $|x'\rangle$ компьютера. Если окружения различных кубитов в компьютере не коррелированы, то

$$\begin{aligned} \langle E_x(t) | E_{x'}(t) \rangle &= \langle e_1^x e_2^x \dots e_n^x | e_1^{x'} e_2^{x'} \dots e_n^{x'} \rangle = \\ &= \langle e_1^x | e_1^{x'} \rangle \langle e_2^x | e_2^{x'} \rangle \dots \langle e_n^x | e_n^{x'} \rangle = \\ &= \langle e_0 | e_1 \rangle^d \langle e_s | e_s \rangle^{n-d} = \langle e_0 | e_1 \rangle^d. \end{aligned} \quad (120)$$

В формуле (120) мы предположили, что состояния d кубитов в $|x\rangle = |i_1 \dots i_n\rangle$ и $|x'\rangle = |j_1 \dots j_n\rangle$ различны ($i_s \neq j_s$), а для $n - d$ кубитов они совпадают: $i_s = j_s$ (d — расстояние Хемминга между базисными состояниями $|x\rangle$ и $|x'\rangle$ компьютера). Для единичного кубита $\langle e_0 | e_1 \rangle = \exp(-\gamma_1 t)$, поэтому

$$\langle E_x(t) | E_{x'}(t) \rangle = \exp(-d\gamma_1 t).$$

Поскольку $\max d = n$, то $\max \gamma_n = n\gamma_1$.

В более общей форме результаты работы [48] для систем с некогерентным и когерентным окружением имеют вид

$$\rho_{x,x'}(t) = \rho_{x,x'}(0) \exp \left(- \sum_{s=1}^n |i_s - j_s| \gamma_1 t \right), \quad (121)$$

$$\rho_{x,x'}(t) = \rho_{x,x'}(0) \exp \left(- \left| \sum_{s=1}^n (i_s - j_s) \right|^2 \gamma_1 t \right). \quad (122)$$

Для системы с когерентным окружением состояния типа "шрёдингеровского кота" $|0\dots 0_n\rangle \pm |1\dots 1_n\rangle$ подвергаются максимально быстрой декогерентизации:

$$\gamma_n = \left| \sum_s (i_s - j_s) \right|^2 \gamma_1, \quad \gamma_n = n^2 \gamma_1.$$

В то же время обнаруживаются свободные от декогерентизации (decoherence free) состояния. Таковы состояния, в которых для одной половины кубитов $i_s = 0, j_s = 1$, а для другой половины $i_s = 1, j_s = 0$ (n четное); тогда

$$\sum_s (i_s - j_s) = 0, \quad \gamma_n = 0.$$

Примером таких состояний являются состояния Белла $|01\rangle \pm |10\rangle$ для двух кубитов.

Обнаруженное с ростом числа кубитов в компьютере по закону $\gamma_n = n\gamma$ (или $\gamma_n = n^2\gamma$) ускорение декогерентизации является, пожалуй, самым главным препятствием к построению полномасштабного квантового компьютера. Если выполнение некоторого вычисления (алгоритма) на квантовом компьютере требует времени t , то вероятность получения правильного результата вычислений убывает с числом n экспоненциально:

$$P = \exp(-\alpha n), \quad \alpha = \gamma t.$$

Чтобы получить хотя бы один раз правильное решение, вычисления надо повторить $k = \exp(\alpha n)$ раз.

В условиях быстрой декогерентизации квантовый алгоритм не может выполняться эффективно, т.е. за

полиномиальное время. Выполнение алгоритма Шора факторизации n -разрядных чисел требует времени $n^3 \tau_{\text{оп}}$, которое должно быть меньше времени декогерентизации состояний n -кубитового компьютера τ_1/n :

$$n^3 \tau_{\text{оп}} < \frac{\tau_1}{n},$$

где τ_1 — время декогерентизации одного кубита. Отсюда вытекает условие успешного выполнения алгоритма:

$$\frac{\tau_1}{\tau_{\text{оп}}} > n^4.$$

При $n = 10^3$ необходимо обеспечить выполнение неравенства $\tau_1/\tau_{\text{оп}} > 10^{12}$, что на много порядков больше значения $\tau_1/\tau_{\text{оп}} \simeq 10^3 - 10^5$ в практически исследуемых случаях. По существу сказанное означает, что мы должны найти способы стабилизации когерентного состояния квантового компьютера в течение любого заданного времени, достаточного для выполнения вычисления по заданному алгоритму полиномиальной сложности. К таким методам относятся квантовые методы коррекции ошибок. Предложены также различные активные методы подавления процессов декогерентизации. Этим методам посвящены последующие разделы обзора.

В заключение настоящего раздела отметим важнейшую роль декогерентизации в появлении у тел классических свойств. Приведем классификацию тел по числу частиц, размерам и времени декогерентизации состояний орбитального движения электронов, вычисленного по правилу $\tau_n = \tau_1/n$:

Масштаб системы	Число частиц	Объем, см ³	Время декогерентизации, с
Атомный	1	10^{-23}	10^{-9}
Мезоскопический	10^3	10^{-20}	10^{-12}
Микроскопический	10^{12}	10^{-12}	10^{-21}
Макроскопический	10^{23}	1	10^{-32}

Время существования когерентных состояний атомных и мезоскопических систем ($10^{-9} - 10^{-12}$ с) позволяет наблюдать квантовые когерентные состояния современными экспериментальными методами. Времена существования микро- и макроскопических тел в квантово-когерентных состояниях ($10^{-21} - 10^{-32}$ с) таковы, что эти состояния не могут быть наблюдены в современных экспериментах. С точки зрения физики качественной разницы между атомами и макроскопическими телами нет, поскольку и те и другие подчиняются законам квантовой механики. Разница чисто количественная: для наблюдения макроскопических тел в квантово-когерентных состояниях нужны экспериментальные методы с временным разрешением $10^{-20} - 10^{-30}$ с. Таких методов пока нет.

8. Методы преодоления эффектов декогерентизации в квантовых компьютерах

8.1. Кодирование информации и коррекция ошибок в классическом канале

Методы кодирования и коррекции ошибок в квантовом компьютере являются развитием методов, разработан-

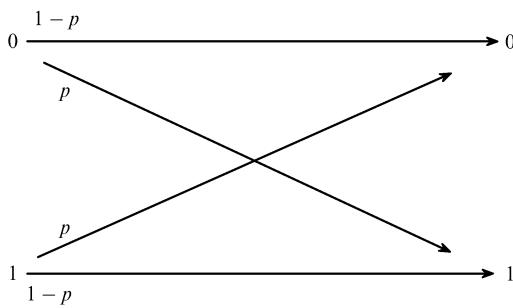


Рис. 11. Схема классического бинарного симметричного канала с вероятностью ошибки p .

ных в целях коррекции ошибок при передаче классической информации по классическому каналу. Суть этого метода покажем кратко на примере классического бинарного симметричного канала, свойства которого показаны на рис. 11. Схема описывает также хранение информации: в этом случае начальное и конечное состояния разделены только временем хранения.

Классический трехбитовый мажоритарный код позволяет обнаруживать и корректировать одну ошибку в трех битах, возникающую при передаче по каналу. Пусть необходимо передать значение бита "0". Возьмем еще два бита из резерва и закодируем "0" в трех битах, составив кодовое слово "000". При передаче кодового слова по каналу с ошибками каждый из трех битов может инвертироваться с вероятностью p . Предположим, что инвертируется третий бит. Это означает, что на приемный конец канала биты придут в состоянии "001". Измерением всех трех битов обнаруживаем ошибку в третьем бите (по мажоритарному принципу). Корректируем ошибку, инвертируя третий бит. Декодируя исправленное кодовое слово "000", получаем правильное состояние "0". Аналогично происходит коррекция ошибок при передаче бита в состоянии 1.

Видно, что кодирование одного бита информации в трех физических битах (трехкратное резервирование) позволяет обнаружить и удалить одну ошибку в трех битах. Таким кодом не обнаруживаются и не корректируются две (три) ошибки. Вероятность ошибки при передаче одного бита информации для данного кода равна $p_{\text{er}} = 3p^2 + p^3$, $p_{\text{er}} \ll p$ (ошибки в битах 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3, 1, 2, 3). Отношение p/p_{er} показывает, во сколько раз уменьшается вероятность ошибки при использовании приведенного кода.

8.2. Трехкубитовый квантовый код

Попробуем применить способ классического кодирования состояния одного кубита в состояние трех кубитов:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\psi_c\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle.$$

Это легко выполнить, применяя операции CNOT_{1,2} и CNOT_{1,3}. Передадим кодовое слово $|\psi_c\rangle$ по каналу с ошибками. По предположению, пусть инвертируется третий кубит. В результате на приемный конец канала придет кодовое слово $|\psi_c^{(\text{cr})}\rangle = \alpha|001\rangle + \beta|110\rangle$. Измеряя кубиты в базисе $|0\rangle, |1\rangle$, находим "001" (с вероятностью $|\alpha|^2$) или "110" (с вероятностью $|\beta|^2$). Хотя наличие ошибки в третьем бите удается установить, при измерении безвозвратно теряются значения α и β и тем самым теряется пересылаемое слово $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

В наиболее близкой к классической форме процедура квантовой коррекции ошибок QEC (Quantum Error Correction) включает восемь этапов:

1. Задается n -разрядное число $|x\rangle$, которое необходимо передать по каналу с амплитудными и фазовыми ошибками. Число $|x\rangle$ может быть суперпозицией базисных состояний, например для одного кубита $|x\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

2. Кодирование n -разрядного квантового состояния $|x\rangle$ в состояние $(n+k)$ -разрядного регистра выполняется кодирующим оператором С:

$$C|x\rangle|0\dots0\rangle = |C(x)\rangle. \quad (123)$$

3. Кодовое слово $|C(x)\rangle$ передается с ошибками по каналу, который характеризуется оператором ошибок $E = \sum_i E_i$, действующим на кодовое слово:

$$\left(\sum_i E_i\right)|C(x)\rangle = \sum_i |E_i C(x)\rangle. \quad (124)$$

4. Синдром ошибки E_i извлекается действием оператора S синдрома ошибки:

$$S \sum_i |E_i C(x)\rangle|0\dots0\rangle = \sum_i |E_i C(x)\rangle|i\rangle. \quad (125)$$

При этом во вспомогательный регистр в состоянии $|0\dots0\rangle$ записываются индексы i операторов E_i ошибки. Состояния $|i\rangle$ регистра синдрома ошибок и состояния $|E_i C(x)\rangle$ регистра, хранящего кодовое слово с ошибками, становятся запутанными.

5. В вычислительном базисе измеряются состояния кубитов регистра, хранящего синдромы i ошибок E_i :

$$\sum_i |E_i C(x)\rangle|i\rangle \rightarrow |E_s C(x)\rangle|s\rangle. \quad (126)$$

Измерение идентифицирует ошибку, произошедшую в канале (индекс ошибки s , оператор E_s).

6. Найденная из измерений ошибка в кодовом слове ликвидируется действием на регистр в состоянии $|E_s C(x)\rangle$ обратного оператора ошибки E_s^{-1} :

$$E_s^{-1} |E_s C(x)\rangle|s\rangle \rightarrow |C(x)\rangle|s\rangle. \quad (127)$$

Тем самым кодовое слово освобождается от внесенных каналом ошибок.

7. Выполняется декодирование:

$$C^{-1}|C(x)\rangle|s\rangle \rightarrow |x\rangle|s\rangle.$$

8. Вспомогательный регистр $|s\rangle$ возвращается в исходное состояние $|0\dots0\rangle$ действием на каждый из кубитов регистра оператором, который преобразует $|s_i\rangle \rightarrow |0_i\rangle$.

Сказанное выше выглядит несколько абстрактно и туманно. Простой пример с передачей кубита в произвольном состоянии по каналу с амплитудными ошибками позволяет ощутить смысл процедур на всех этапах протокола квантовой коррекции ошибок.

1. В качестве "числа" $|x\rangle$ выберем суперпозицию $|x\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ состояний одного кубита ($n = 1$).

2. Закодируем состояние $|x\rangle$ одного "логического" кубита в состояние $|C(x)\rangle$ трех ($n+k=3$) "физических" кубитов. Для этого к кубиту $|x\rangle$ добавим два вспомогательных (ancilla) кубита в состоянии $|00\rangle$:

$$|x\rangle|00\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle.$$

Выполняя над состоянием $|x\rangle|00\rangle$ унитарные преобразования CNOT_{1,2} CNOT_{1,3}, означающие кодирование состояния $C|x\rangle$, получаем кодовое состояние $|\psi_c\rangle$ регистра из трех физических кубитов:

$$|\psi_c\rangle \equiv |C(x)\rangle = \text{CNOT}_{1,3} \text{CNOT}_{1,2}(\alpha|000\rangle + \beta|100\rangle) = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle. \quad (128)$$

Процесс кодирования "числа" $|x\rangle$ в состояние $|\psi_c\rangle$ трех кубитов завершен.

3. Запишем в явном виде оператор ошибки $E = \sum_i E_i$, характеризующий канал. Допустим, что ошибки, вносимые каналом, заключаются в перевороте одного из трех кубитов (амплитудная декогерентизация). Тогда оператор ошибки

$$E = \sum_{i=0}^3 E_i = e_0(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_1(t) \sigma_x^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_2(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_3(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_x^{(3)}. \quad (129)$$

Здесь $\sigma_i^{(k)}$ — компоненты оператора Паули, относящиеся к кубиту k , оператор $\sigma_x^{(k)}$ переворачивает соответствующий кубит, $\sigma_0^{(k)}$ — единичная матрица, $\sum_{i=0}^3 |e_i|^2 = 1$. Выпишем явно кодовое слово с ошибками:

$$E|\psi_c\rangle = e_0(t)|\psi_c\rangle + e_1(t)(\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle) + e_2(t)(\alpha|010\rangle + \beta|101\rangle) + e_3(t)(\alpha|001\rangle + \beta|110\rangle). \quad (130)$$

Если время t мало по сравнению со временем декогерентизации состояния кубита в канале τ_{dc} , то $|e_1|, |e_2|, |e_3| \ll 1$, $|e_0| \simeq 1$. В суперпозиции (130) все состояния $|x_1 x_2 x_3\rangle$, кроме $|\psi_c\rangle$, содержат одну амплитудную ошибку.

4. Добавим к трем кубитам в состоянии $E|\psi_c\rangle$ еще три вспомогательных кубита в состоянии $|000\rangle$: $E|\psi_c\rangle \rightarrow E|\psi_c\rangle|000\rangle$. Оператор S извлечения синдрома ошибок определим равенством

$$S|x_1 x_2 x_3 000\rangle = |x_1 x_2 x_3 \text{CNOT}_{x_1, x_2} \text{CNOT}_{x_1, x_3} \text{CNOT}_{x_2, x_3}\rangle. \quad (131)$$

Оператор S предписывает сравнивать попарно (вычисляя CNOT) значения переменных x_1 и x_2 , x_1 и x_3 , x_2 и x_3 в каждом из слагаемых суперпозиции $E|\psi_c\rangle$ и записать результат вычислений $\text{CNOT}_{x_i, x_j} = x_i \oplus x_j$ в состояния кубитов регистра синдрома ошибок. Если, например, $|x_1 x_2 x_3\rangle = |100\rangle$, то $S|100000\rangle = |100110\rangle$. Это означает, что амплитудная ошибка в первом кубите (1 вместо 0) имеет синдром $|110\rangle$ в регистре, хранящем синдром. Синдромы различных ошибок, вычисленные согласно (131), представим в виде таблицы:

E_i	$E_i 000\rangle$	$SE_i 000000\rangle$	$E_i 111\rangle$	$SE_i 111000\rangle$
E_0	$ 000\rangle$	$ 000000\rangle$	$ 111\rangle$	$ 111000\rangle$
E_1	$ 100\rangle$	$ 100110\rangle$	$ 011\rangle$	$ 011110\rangle$
E_2	$ 010\rangle$	$ 010101\rangle$	$ 101\rangle$	$ 101101\rangle$
E_3	$ 001\rangle$	$ 001011\rangle$	$ 110\rangle$	$ 110011\rangle$

5. Выполним измерение состояний трех последних кубитов, несущих информацию о синдроме ошибок, в регистре из шести кубитов в состоянии $SE|\psi_c\rangle$. При их



Рис. 12. Схема протокола коррекции квантовой амплитудной ошибки.

измерении получим одно из четырех возможных значений синдрома $y_1 y_2 y_3$: 000, 110, 101, 011, с вероятностями $|e_0|^2, |e_1|^2, |e_2|^2, |e_3|^2$ соответственно. Результат измерения определяет, какой из операторов E_s создает ошибку.

6. Проведем коррекцию найденной ошибки:

$$E_s^{-1} E_s |\psi_c\rangle = |\psi_c\rangle |y_1 y_2 y_3\rangle.$$

7. Декодируем кодовое слово:

$$C^{-1} |\psi_c\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

8. Вернем кубиты, в которых записан синдром, в состояние $|000\rangle$, действуя оператором σ_x на кубиты, имеющие состояние $y_i = 1$.

В процессе коррекции ошибок в одном кубите можно не прибегать к дополнительным кубитам для записи синдрома ошибки. Схема протокола приведена на рис. 12. Предписанные схемой преобразования начального состояния трех кубитов

$$|\psi(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle|0\rangle \quad (132)$$

приведут к конечному состоянию

$$|\psi(t)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)[e_0(t)|00\rangle + e_1(t)|11\rangle + e_2(t)|10\rangle + e_3(t)|01\rangle]. \quad (133)$$

Декодирующее преобразование CNOT_{23,1} освободило первый кубит от амплитудной ошибки и от запутанности со вторым и третьим кубитами. Внесенные оператором E ошибки "собраны" в конечном запутанном состоянии второго и третьего кубитов: к их начальному состоянию $|00\rangle$ добавлены состояния $|11\rangle$, $|10\rangle$ и $|01\rangle$, содержащие ошибки. Определив состояние этих кубитов измерением, следует вернуть их в начальное состояние $|00\rangle$.

8.3. Коррекция фазовых ошибок

В разделе 8.2 представлены протоколы коррекции амплитудных ошибок в состоянии кубита, внесенных оператором (129). Теперь рассмотрим фазовые ошибки, вносимые оператором

$$E = e_0(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_1(t) \sigma_z^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_2(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_0^{(3)} + e_3(t) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_z^{(3)}. \quad (134)$$

Оператор фазовой ошибки отличается от оператора амплитудной ошибки заменой $\sigma_x^{(k)} \rightarrow \sigma_z^{(k)}$. Фазовые ошибки являются чисто квантовым явлением и отсутствуют в классических вычислениях.

Протокол коррекции фазовых ошибок в состоянии кубита в трехкубитовом коде представлен схемой на рис. 13. К предыдущей схеме кодирования состояния



Рис. 13. Схема протокола коррекции квантовой фазовой ошибки.

первого кубита в состояние трех кубитов добавились преобразования Адамара H на каждом кубите. Результатом кодирования будет кодовое состояние

$$|\psi_c\rangle = \alpha|+++rangle + \beta|---rangle, \quad (135)$$

$$|+\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (136)$$

$$|-rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (137)$$

$$H|-\rangle = |1\rangle, \quad H|+\rangle = |0\rangle.$$

Операторы фазовых ошибок $\sigma_z^{(k)}$ в базисе $|+\rangle, |-\rangle$ выступают как амплитудные операторы, инвертирующие состояния $|+\rangle, |-\rangle$:

$$\sigma_z|+\rangle = |-\rangle, \quad \sigma_z|-\rangle = |+\rangle.$$

С учетом этих свойств преобразований легко показать, что приведенная на рис. 13 схема преобразует начальное состояние трех кубитов

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$

в конечное состояние

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(e_0|00\rangle + e_1|11\rangle + e_2|10\rangle + e_3|01\rangle).$$

Если в компьютере возникают и амплитудные и фазовые ошибки так, что $E = E_{amp} + E_{ph}$, протокол коррекции ошибок должен предусматривать выполнение протоколов по схемам, представленным на рис. 12 и 13.

Для простоты изложения мы демонстрировали принципы построения протоколов квантовой коррекции ошибок на примере простейшего трехкубитового кода. Такой код позволяет определить и удалить одну ошибку (амплитудную или фазовую) в трех кубитах. Разработаны коды на пяти и семи кубитах, позволяющие корректировать любую ошибку (амплитудную или фазовую) в одном кубите [49, 50]. Код Шора на девяти кубитах позволяет корректировать две ошибки — фазовую и амплитудную [15].

8.4. Помехоустойчивые квантовые вычисления

Из анализа квантового метода коррекции ошибок следует его универсальность по отношению к любым источникам ошибок. Все ошибки подразделяются на амплитудные и фазовые; оба вида ошибок корректируются квантовыми методами коррекции ошибок.

При выполнении протоколов квантовой коррекции ошибок применяются те же элементарные операции, что и при квантовых вычислениях. Квантовый компьютер должен работать, перемежая вычисления и протоколы коррекции ошибок.

Возможности метода коррекции ошибок определяются выбранным кодом: код позволяет корректировать только те ошибки, для коррекции которых он сконструирован. Например, трехкубитовый код позволяет корректировать одну ошибку в трех кубитах. Две ошибки в трех кубитах не могут быть корректированы этим кодом. Код должен быть избран на основе изучения источников ошибок (механизмов декогерентизации) в квантовом компьютере.

Коды, используемые в квантовых методах коррекции ошибок, требуют дополнительных ресурсов: увеличения числа кубитов (резервирование) и числа квантовых операций. При одноступенчатом кодировании число необходимых кубитов увеличивается примерно в 10 раз. При многоступенчатом кодировании (concatenated codes) число кубитов возрастает примерно в 10^t раз, где t — число ступеней кодирования [55]. Так же быстро возрастает число квантовых операций, используемых в протоколах квантовой коррекции ошибок. Вопрос состоит в том: удастся ли стабилизировать квантово-когерентное состояние компьютера при практически приемлемых "расходах" кубитов и операций в целях коррекции ошибок?

Операции по коррекции ошибок сами вносят дополнительные ошибки как вследствие неточностей в исполнении квантовых операций, так и в результате процессов декогерентизации в квантовом компьютере.

Квантовые вычисления называются помехоустойчивыми (fault-tolerant), если они обеспечивают надежный результат вычислений при указанных выше ограничениях методов коррекции ошибок. Вычисления будут помехоустойчивыми, если процедуры коррекции ошибок удаляют из компьютера больше ошибок, чем привносят. Особое внимание уделяется тому, чтобы не происходило размножения ошибок, вносимых в процедурах коррекции. Периодичность процедур коррекции должна быть такой, чтобы ошибка, накопленная между двумя процедурами QEC, не превышала уровня корректируемых ошибок.

По сути помехоустойчивость вычислений означает стабилизацию квантово-когерентного состояния компьютера в течение времени, необходимого для выполнения полиномиального алгоритма. Условия помехоустойчивых вычислений на квантовом компьютере формулируются в настоящее время следующим образом: квантовый компьютер может работать сколь угодно долго, если вероятность ошибки ε в одной элементарной квантовой операции меньше порогового значения ε_{th} . Числовое значение ε_{th} оценивается методами математического моделирования работы квантового компьютера; современные оценки дают значения $\varepsilon_{th} \leq 10^{-5} - 10^{-4}$ [52].

8.5. Свободные от декогерентизации состояния квантового компьютера

В литературе активно обсуждается возможность использования в квантовых вычислениях так называемых свободных от декогерентизации состояний (decoherence free states) квантового компьютера. Допустим, что известен механизм декогерентизации кубитов, действующий в компьютере: пусть, например, он задан оператором

$$E = |e_0\rangle\sigma_0^{(1)}\sigma_0^{(2)} + |e_1\rangle\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}.$$

Если закодировать состояния логического кубита $|0\rangle_L$, $|1\rangle_L$ в симметричные состояния двух физических кубитов:

$$|0\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (138)$$

то такие состояния окажутся инвариантными при действии оператора ошибки E .

Очевидна ограниченность приведенного выше способа освободиться от декогерентизации. Кодовое подпространство состояний свободно от декогерентизации только по одному механизму; в реальных физических системах таких механизмов несколько. Наконец, всегда присутствует механизм, связанный с каналом управления кубитами: ошибки управления.

8.6. Устойчивые к декогерентизации кубиты

В работе [53] предложено конструировать кубит таким образом, чтобы декогерентизация была запрещена по энергетическим соображениям ("суперкогерентный кубит"). Рассмотрим систему спинов $S = 1/2$, попарно связанных обменным взаимодействием

$$H^{(n)} = \frac{\Delta}{2} \left[\sum_{i,j=1}^n (S^{(i)} S^{(j)}) + \frac{3}{4} nI \right]. \quad (139)$$

Гамильтониан (139) можно представить как

$$H^{(n)} = \frac{\Delta}{2} S^{(n)2},$$

где $S^{(n)} = \sum_{i=1}^n S^{(i)}$ — суммарный спин системы. Собственные значения и собственные функции $H^{(n)}$ при четном n имеют вид

$$E_{J_n} = \frac{\Delta}{2} J_n (J_n + 1), \quad J_n = 0, \dots, \frac{n}{2}, \quad (140)$$

$$|\psi_{J_n}\rangle = |\lambda, J_n, m\rangle \quad (141)$$

(λ — вырождение состояния).

Основной уровень $E_0 = 0$ системы при $n = 4$ двукратно вырожден ($\lambda = 2$); состояния этого дублета предлагаются избрать в качестве кубитовых. Необходимо некоторое дополнительное взаимодействие в системе, чтобы снять вырождение и сделать состояния кубитов различимыми. Ближайший к основному возбужденный уровень E_1 системы имеет энергию $E_1 = \Delta$. Оператор декогерентизации общего вида

$$E = e_0 \sigma_0 + e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z,$$

действующий на спин отдельной частицы в системе $H^{(n)}$, вызывает переходы по правилу отбора $\Delta J_n = 1$ с основного уровня, т.е. переходы $E_0 \rightarrow E_1$. При низких температурах ($kT \ll \Delta$) вероятность таких переходов экспоненциально мала:

$$w_{0 \rightarrow 1} \propto \exp\left(-\frac{\Delta}{kT}\right).$$

При всей привлекательности идеи о "суперкогерентном кубите" очевидно существование других, кроме упомянутых выше, каналов декогерентизации кубита. Поскольку в систему вводится взаимодействие, расщепляющее основной двукратно вырожденный уровень энергии системы, шум, сопровождающий это взаимодействие, составит новый канал декогерентизации. Для

выполнения одно- и двухкубитовых операций мы должны открыть каналы управления отдельными кубитами и взаимодействием между ними. Это означает открытие новых каналов декогерентизации из-за флуктуаций сигналов управления. С учетом сказанного можно заключить, что "суперкогерентный кубит" может быть свободен только от части каналов декогерентизации; другие каналы сохраняются.

8.7. Методы предотвращения ошибок: квантовый эффект Зенона

В работах [54, 55] предложен так называемый протокол предотвращения ошибок. По существу это слегка видоизмененный протокол квантовой коррекции ошибок. Выпишем снова состояние системы на этапе извлечения синдрома ошибки:

$$S \sum_i |E_i C(x)\rangle |0 \dots 0\rangle = \sum_i |E_i C(x)\rangle |i\rangle. \quad (142)$$

На этом этапе состояния системы $|E_i C(x)\rangle$ запускаются с состояниями $|i\rangle$ регистра синдромов ошибки.

Оператор ошибок $E = \sum_i E_i$ представляется как сумма $E = \sum_i e_i(t) E_i$. Здесь E_i — собственно операторы ошибок, $e_i(t)$ — амплитуды вероятности, зависящие от времени t действия оператора E на систему. В сумме выделяется слагаемое $e_0(t) E_0$, где E_0 — оператор идентичности, а амплитуда

$$e_0(t), \quad e_0(0) = 1,$$

определяет вероятность выживания системы в начальном (без ошибок) состоянии $C(x)$:

$$p_{\text{surv}}(t) = |e_0(t)|^2, \quad p_{\text{surv}}(0) = |e_0(0)|^2 = 1.$$

Напротив, амплитуды

$$e_{i \neq 0}(t), \quad e_{i \neq 0}(0) = 0,$$

возрастают со временем t действия операторов $E_{i \neq 0}$ на систему.

С учетом сказанного

$$|SE C(x)\rangle |0 \dots 0\rangle = \sum_i e_i(t) |E_i C(x)\rangle |i\rangle. \quad (143)$$

При измерении состояния кубитов регистра синдрома ошибок $|i\rangle$ запутанное состояние (143) редуцируется в одно из незапутанных состояний $|E_s C(x)\rangle |s\rangle$. Вероятность соответствующего результата равна $|e_s(t)|^2$. Если время t мало настолько, что

$$|e_0(t)|^2 \ll 1, \quad |e_i(t)|^2 \ll 1, \quad i \neq 0,$$

то в результате измерения состояния регистра $|i\rangle$ с вероятностью, близкой к единице, будет получено начальное, свободное от ошибок, состояние $E_0 |C(x)\rangle = |C(x)\rangle$. Этим завершается протокол предотвращения ошибок. (Необходимо только вернуть регистр $|i\rangle$ в исходное состояние $|0 \dots 0\rangle$.) Поскольку стадии коррекции ошибок в протоколе нет, разрядность регистра $|i\rangle$ может быть снижена до минимума; имеет место экономия числа необходимых кубитов [55].

Протокол предотвращения ошибок близко соответствует квантовому эффекту Зенона, которому посвящена обширная литература [54–59]. Квантовый эффект Зенона относится к так называемым активным методам подавления декогерентизации: экспериментатор выполняет

прямое измерение состояния системы, чтобы подавить декогерентизацию.

Решая уравнение Шрёдингера (см. раздел 7.4), мы получили для вероятности выживания начального состояния $|e_0(t)|$ два различных выражения:

$$|e_0(t)|^2 = 1 - at^2, \quad t \ll \frac{2\pi}{\omega_l - \omega_0}, \quad \hbar \left(\sum_l |\lambda_l|^2 \right)^{-2}, \quad (144)$$

$$|e_0(t)|^2 = \exp(-\gamma t) \simeq 1 - \gamma t, \quad t \gg \frac{2\pi}{\omega_l - \omega_0}, \quad \hbar \left(\sum_l |\lambda_l|^2 \right)^{-2}, \quad (145)$$

где

$$a = \hbar^{-2} \left(\sum_l |\lambda_l|^2 \right)^2.$$

Параболическая зависимость $p_{\text{surv}}(t) = 1 - at^2$, характерная для очень коротких времен t , является необходимым условием наблюдения квантового эффекта Зенона: периодическое измерение состояния сигнала системы с интервалами t , удовлетворяющими неравенствам в (144), сохраняет систему в начальном состоянии.

Действительно, выберем произвольно большое время T и с интервалами t произведем над системой T/t измерений. Тогда вероятность выживания начального состояния системы

$$p_{\text{surv}}(T) = (1 - at^2)^{T/t} = 1 - aTt, \quad \lim_{t \rightarrow 0} p_{\text{surv}}(T) = 1. \quad (146)$$

Напротив, если произвести измерения через интервалы t , такие что эволюция системы происходит по условиям (145), эффект Зенона отсутствует:

$$p_{\text{surv}}(T) = (1 - \gamma t)^{T/t} \simeq 1 - \gamma T \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \frac{1}{\gamma}. \quad (147)$$

Очевидны ограничения возможностей реализации эффекта Зенона в квантовых компьютерах. Длительности измерений τ , повторяемых через промежутки времени t , должны удовлетворять условию $\tau \ll t$. Параметры коротких импульсов очень трудно контролировать; флуктуации параметров импульсов образуют новый канал декогерентизации. Во многих сочетаниях параметров возникает именно ускорение декогерентизации (антизенон-эффект) [59]. Не ясна возможность проведения вычислительных унитарных операций на фоне периодических измерений состояния системы. Эффект Зенона был бы полезен как метод хранения информации в квантовой памяти компьютера, если бы он был действительно реализован.

8.8. Динамические методы подавления декогерентизации

Динамический метод подавления декогерентизации, близкий по технике исполнения к методу квантового эффекта Зенона, предложен в работе [60]. Частые измерения состояния системы в методе Зенона здесь заменены частыми управляющими импульсами, мощность (площадь) которых выбрана так, что каждый импульс инвертирует состояние кубита (спина, квазиспина). Этот способ эффективен при фазовой декогерентизации кубита, когда энергия взаимодействия с окружением

3*

имеет форму

$$H_{\text{int}} = \hbar \sigma_z B,$$

где σ_z — квазиспин кубита, B — переменные окружения. При инверсиях квазиспина кубита σ_z энергия взаимодействия H_{int} изменяет знак, так что среднее по времени значение $\langle H_{\text{int}} \rangle = 0$, т.е. многократное инвертирование спина изолирует кубит от окружения.

Возможна другая трактовка этого эффекта: изменение знака энергии взаимодействия эквивалентно изменению знака времени в эволюционном операторе $U(t) = \exp(-iH_{\text{int}}t)$; в двух промежутках времени, следующих за двумя инвертирующими спин импульсами, эволюция идет в противоположных направлениях, компенсируя друг друга. Предложенный метод является прямым развитием методов спинового эха и методов рефокусировки, развитых в ЯМР-спектроскопии.

Теория позволяет установить критерии применения метода: отсоединение кубита от окружения происходит асимптотически, когда число импульсов $N = T/\Delta t \rightarrow \infty$, где Δt — интервал времени между импульсами. В пределе быстрых переворотов спина декогерентизация последнего подавляется при любой температуре и спектре осцилляторов окружения, если $\Delta t \leq \tau_c$, где τ_c — время корреляции переменных окружения. Вообще говоря, условие $\Delta t \leq \tau_c$ трудно осуществимо в практических случаях. Достоинством метода является отсутствие необходимости дополнительного числа кубитов.

8.9. Квантовая коррекция ошибок методом слабых непрерывных измерений и обратной связи

В работах Мильбурна с сотрудниками исследуется протокол квантовой коррекции ошибок, основанный на слабых непрерывных измерениях и управлении состоянием кубитов при помощи сигналов обратной связи [61, 62]. В классических системах схемы управления с обратной связью обнаруживают высокую эффективность; поэтому целесообразно исследовать такие схемы и для квантовых систем.

Как и в описанных выше протоколах с дискретными сильными измерениями, состояние n кубитов кодируется в состояние $m > n$ кубитов в кодовом подпространстве C . Из операторов Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ составляются стабилизирующие генераторы $g = \prod \sigma_i^{(a)} \sigma_j^{(b)}$, такие что $g|\psi_c\rangle = |\psi_c\rangle$. Дискретные сильные измерения g используются для определения синдромов ошибки.

Ходный протокол коррекции ошибок с помощью слабых непрерывных измерений стабилизирующих генераторов и обратной связи включает следующие процедуры:

- 1) кодирование состояния n кубитов $|\psi\rangle$ в состояние $m > n$ кубитов $|\psi_c\rangle$;
- 2) непрерывные слабые измерения g ;
- 3) фильтрацию токов измерения с помощью фильтра низких частот в целях уменьшения шумов в измерительном сигнале;
- 4) определение знака "+" или "-" сглаженного сигнального тока и выработку сигнала обратной связи для каждого кубита с учетом информации о знаках сигнала;
- 5) применение сигнала обратной связи к каждому кубиту.

Математическое моделирование, выполненное для трехкубитового кода ($n = 1, m = 3$) показало, что исследуемый протокол эффективен при малых уровнях шума

$(\gamma \leq 0,1)$. При больших уровнях шума ($\gamma > 0,3$) метод неэффективен. Более того, в условиях сильного шума протокол приводит к более быстрому, чем в отсутствие процедуры, спаду параметра качества $F(t)$. Дискретные методы коррекции ошибок более эффективны, чем методы с непрерывными слабыми измерениями и обратной связью, при частом повторении процедур: $\Delta t \ll \gamma^{-1}$. При $\Delta t > \gamma^{-1}$ метод с дискретными измерениями также неэффективен.

Протоколы с непрерывными измерениями могут оказаться полезными для хранения состояний кубитов в системах памяти квантовых компьютеров. Можно ли совместить непрерывные измерения с вычислительными унитарными преобразованиями, пока неизвестно.

8.10. Помехоустойчивые топологические квантовые вычисления

Используя геометрические свойства пространства состояний квантовых систем, можно построить универсальный набор квантовых операций, устойчивых по отношению к ошибкам управления [64]. Эти свойства наглядно проявляются при описании состояний кубита матрицей плотности

$$\rho(s) = \frac{1}{4} \left(I + \sum_i s_i \sigma_i \right), \quad i = x, y, z. \quad (148)$$

Чистые состояния кубита определены единичным вектором Блоха \mathbf{s} с реальными компонентами s_x, s_y, s_z .

Правила перехода от параметров s_x, s_y, s_z к параметрам $|a|, |b|, |\varphi|$ в векторе состояния

$$|\psi\rangle = \begin{vmatrix} |a| \\ |b| \exp(i\varphi) \end{vmatrix}$$

устанавливаются из равенства

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4} \left(I + \sum_i s_i \sigma_i \right)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} 1 + s_z &= 2|a|^2, & s_x + is_y &= 2ab^*, \\ 1 - s_z &= 2|b|^2, & s_x - is_y &= 2a^*b. \end{aligned} \quad (149)$$

В состоянии

$$|0\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

соответствующем вектору Блоха $\mathbf{s}(0, 0, 1)$, фаза остается неопределенной; ей можно придать любое значение $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поверхность единичной сферы $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ есть искривленное (неплоское) пространство чистых состояний кубита. Кривизна пространства $k = r^{-2} = 1$.

Искривленность пространства состояний обуславливает возникновение так называемой геометрической фазы при циклических (замкнутых) траекториях в пространстве состояний. Выберем, например, траекторию от северного полюса сферы Блоха вниз до экватора по меридиану в плоскости Oyz , вдоль экватора до плоскости Oxz и вверх по меридиану до северного полюса (рис. 14):

$$\mathbf{s}(0, 0, 1) \rightarrow \mathbf{s}(0, 1, 0) \rightarrow \mathbf{s}(1, 0, 0) \rightarrow \mathbf{s}(0, 0, 1).$$

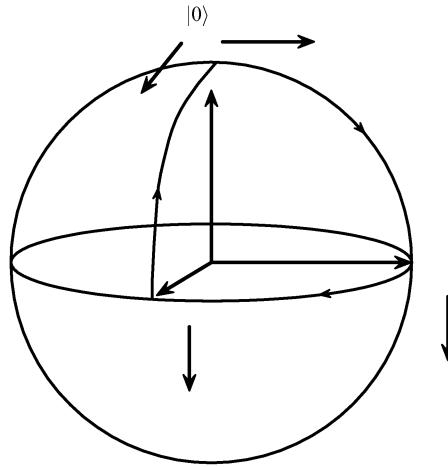


Рис. 14. Схема возникновения геометрической разности фаз в квантовом состоянии кубита, обусловленной кривизной пространства состояний кубита.

Вектор фазы начального состояния выберем как единичный вектор в плоскости рисунка вдоль касательной (в точке северного полюса). В ходе циклического процесса совершается параллельный перенос вектора фазы: вектор продолжает сохранять направление по касательной в каждой из точек траектории. Вернувшись в начальную точку, мы находим вектор фазы кубита повернутым на угол $\gamma = \pi/2$ по отношению к первоначальной ориентации. Первопричиной возникшей разности фаз является геометрическое свойство пространства состояний: его кривизна (искривленность); отсюда название возникшей фазы: геометрическая фаза.

В общем случае $\gamma = k\Omega$, где Ω — телесный угол внутри замкнутой траектории, k — кривизна поверхности состояний. В нашем случае $k = 1$, $\Omega = \pi/2$, $\gamma = \pi/2$. Фазу γ удобно представить как

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a \exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\right) \\ b \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix}.$$

В адиабатическом процессе, впервые рассмотренном Берри [65], фаза

$$\gamma = \int_s \left\langle \psi(s) \left| \frac{d}{ds} \right| \psi(s) \right\rangle ds. \quad (150)$$

Здесь s — параметр системы, который используется для управления адиабатическим циклическим процессом. Значение геометрической фазы можно вычислить по формуле Панчараттама:

$$\gamma = \arg \{ \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \varphi_2 | \varphi_3 \rangle \dots \langle \varphi_4 | \varphi_1 \rangle \},$$

если цикл задан состояниями в дискретных точках [64].

Соотношение $\gamma = k\Omega$ означает, что в принципе геометрическая фаза зависит от формы траектории системы в пространстве состояний. Помехоустойчивость фазовых вентилей (операций) с использованием геометрической фазы заключается в том, что флуктуации формы траектории (из-за ошибок управления) усредняются к нулю при сохранении значения телесного угла Ω [64].

Идею более сильного ("топологического") иммунитета фазового вентиля к ошибкам управления легко пояснить на примере фазового вентиля с использованием разности фаз Ааронова – Бома. Если электронная волновая функция обтекает магнитный поток Φ , замкнутый в тонкий соленоид, то разность фаз между двумя частями волновой функции равна $\gamma = e\Phi/\hbar c$ и не зависит от формы обтекающих компонент волновой функции электрона. Это топологическое свойство делает фазовый вентиль помехоустойчивым по отношению к ошибкам управления.

Коммутирующие ($\exp(i\gamma_1) \exp(i\gamma_2) = \exp(i\gamma_2) \exp(i\gamma_1)$) геометрические фазы называются абелевыми. Чтобы построить универсальные топологические вычисления, устойчивые к ошибкам управления, необходимо иметь фазовые операции неабелевого типа (некоммутирующие). Предложены способы построения неабелевых фазовых операций с использованием дробного эффекта Холла (анионы) [66]. Рассматривались также возможности построения фазовых операций с геометрической фазой на ионах в ловушках [67].

8.11. О возможности комбинированного применения различных методов коррекции ошибок

Важным вопросом в теории методов коррекции ошибок в квантовых компьютерах является возможность комбинированного применения этих методов в реальных ситуациях, поскольку нет уверенности, что какой-либо один из них, взятый в отдельности, сможет обеспечить долговременную стабилизацию вычислений. Нет также ясности в вопросе о возможности применения тех или иных процедур подавления декогерентизации одновременно с вычислениями. С точки зрения ускорения вычислений желательно, чтобы процедуры подавления декогерентизации шли одновременно с вычислениями. Очевидно, что это не всегда возможно.

Выше мы видели, что в процедурах квантовой коррекции ошибок используются те же элементарные вычислительные операции и те же устройства управления кубитами, что и в собственно квантовых вычислениях. В этих условиях процедуры квантовой коррекции ошибок и вычисления выполняются в различные промежутки времени, но попеременно. В работе [68] исследованы условия одновременного применения методов квантовой коррекции ошибок и динамических методов с короткими импульсами, изолирующими кубиты от окружения. Актуальной задачей является определение условий применения других сочетаний методов коррекции ошибок и подавления декогерентизации.

9. Поиски путей реализации квантовых компьютеров: экспериментальные исследования

В рамках данного обзора нет возможности дать изложение экспериментальных результатов по поиску путей реализации идеи квантовых компьютеров. Укажем в качестве экспериментальных работ монографии [14, 30] и обзоры по отдельным направлениям поиска [5, 25, 44]. Здесь же ограничимся перечислением направлений поиска с краткими комментариями.

Метод ядерного магнитного резонанса в жидкостях при комнатной температуре дал возможность демонстрации экспериментального выполнения основных

квантовых алгоритмов и методов коррекции ошибок с использованием до семи кубитов в ансамблевом квантовом компьютере [25]. Однако после установления факта, что число кубитов в ЯМР-квантовом компьютере в жидкостях при комнатной температуре ограничено числом порядка 10, усилия по развитию этого направления, по-видимому, ослабли.

Большое число экспериментов по реализации квантовых вычислительных операций выполнено на ионах в одномерном ионном кристалле в ловушке Пауля [5, 44]. Однако и в этом варианте квантового компьютера обнаружились серьезные препятствия к увеличению числа кубитов (ионов в одномерном кристалле) из-за неустойчивости одномерного ионного кристалла. Обнаруженные ограничения числа кубитов могут быть преодолены, если использовать ансамбль многих ловушек. В этом случае необходимо разработать методы быстрой (за время, сравнимое с временем квантовых операций) транспортировки ионов из одной ловушки в другую. Показана принципиальная выполнимость транспортировки ионов [69].

Сходная с ионными кристаллами архитектура расположения кубитов может быть реализована в полупроводниковых кристаллах бесспинового монозотопного кристалла кремния ^{28}Si , в котором атомы фосфора ^{31}P (кубиты) расположены в линейной цепочке (модель Кейна [7]). Кубитом служит ядерный ($I = 1/2$) или электронный ($S = 1/2$) спин атома фосфора ^{31}P . Число кубитов, "изготовленных" в такой архитектуре, не ограничено. Темп развития этого направления, признаваемого всеми весьма перспективным, определяется темпом нанотехнологических разработок, необходимых для создания структур с необходимыми параметрами. Трудным вопросом в такой реализации квантового компьютера является измерение состояния одиночного спинового кубита. Проблема измерения состояния кубита облегчается, если прибегнуть, как это предложено нами, к ансамблевому варианту кубита [30].

Идет активная экспериментальная работа по созданию кубитов на электронах в полупроводниковых квантовых точках [70, 71]. В качестве кубитовых исследуются орбитальные или спиновые состояния одиночного электрона в квантовой точке. В этом методе число кубитов (квантовых точек с одиночным электроном) также не ограничено.

Изготовлены и исследованы кубиты на сверхпроводниковых мезоструктурах [71]. Здесь созданы два варианта кубитов: в первом варианте квантовая информация кодируется числом сверхпроводящих пар в квантовой точке, во втором — направлением сверхпроводящего тока в сквиде. Для изготовления структур кубитов используется имеющийся арсенал технологических методов микроэлектроники. Число изготавливаемых кубитов на "чипе" в принципе не ограничено. В данном направлении поиска путей реализации квантового компьютера наблюдается большая активность экспериментаторов и постоянный прогресс.

Большое количество экспериментов по реализации квантовых операций выполнено на одиночных атомах в микрорезонаторах (cavity quantum electrodynamics). Моделью квантовой системы выступает двухуровневый атом-кубит, связанный с осциллятором-фотоном в одной из мод колебаний резонатора. Изложение экспериментальных работ имеется в монографии [14]. К

сожалению, в этом методе не ясно, как можно увеличить число кубитов. Возможно, этот метод окажется полезным при разработке способов транспортировки атомных и фотонных кубитов, а также при передаче квантовой информации от атомных кубитов к фотонным, и обратно (атом-фотонный квантовый интерфейс).

Интересна возможность реализации квантовых операций с помощью линейных оптических элементов ("оптический квантовый компьютер") [72]. В этом методе число оптических элементов возрастает экспоненциально с числом кубитов в компьютере. Эксперименты в этом направлении реализации квантового компьютера, по сути, сливаются с экспериментами в области квантовой оптики [73].

Перечисленные выше направления поиска путей реализации квантовых компьютеров опираются на развитые с иными целями технологии (технологии построения стандартов времени, микроэлектронные, кванто-оптические технологии). Выдвинуты также другие перспективные идеи, требующие, возможно, развития существенно новых технологий. Перечислим некоторые из них:

1) двумерный электронный кристалл в потенциальной ловушке (яме) вблизи поверхности жидкого гелия [74] (физика этих кристаллов хорошо изучена, кубитами могут служить спины одиночных электронов в кристалле);

2) двумерная решетка атомов в оптической ловушке, образованной стоячей волной интерферирующих лазерных пучков [75];

3) анионы в двумерном электронном газе в полупроводниках в условиях дробного квантового эффекта Холла [66];

4) квантовые клеточные автоматы в ферромагнитных (антиферромагнитных) структурах в кристаллах [76].

Успехи последних лет в экспериментах с бозе-эйнштейновскими конденсатами предоставляют возможность поиска квантовых операций с использованием этих новых квантовых систем [77].

10. Заключение

10.1. Квантовые компьютеры: мечта или реальность?

Современный этап исследований в области квантовых компьютеров и квантовых вычислений является этапом разработки фундаментальных проблем. Итогом этого этапа должен быть выбор одного из путей реализации квантового компьютера как главного. Вероятнее всего, придется создать несколько прототипов квантовых компьютеров по разным технологиям, сравнить их и выбрать один для дальнейшего развития.

Пока же в отношении будущего квантовых компьютеров существует широкий диапазон мнений — от предсказаний грядущей (неминуемо) квантовой технической революции до пасмурного скептицизма. В концентрированном виде мнения "pro" и "contra" высказывались, например, в дебатах участников конференции по квантовым вычислениям (июнь 2003 г.) [46]. Перечислим аргументы "contra".

1. Квантовый компьютер не нужен: нет задач, стоящих того, чтобы делать и сделать квантовый компьютер. За истекшее время найдены только два эффективных квантовых алгоритма (Шора и Гровера). Не стоит

делать квантовый компьютер только ради того, чтобы взломать современную популярную крипtosистему RSA: она сама уйдет в небытие ко времени создания квантового компьютера.

2. Квантовый компьютер — аналоговая машина специализированного типа, которую трудно реализовать.

3. Природа не избрала квантовый метод вычислений — в мозге нет квантовых операций.

Мы не воспроизведим аргументы "pro", полагая, что весь наш обзор служит аргументацией "pro".

10.2. Что дальше?

Допустим, придет время, когда будет освоена квантовая динамика систем на атомном уровне и построена квантовая информационная техника. Что дальше? Какие новые ресурсы природы могут быть использованы для создания новых поколений информационной техники? Степени свободы систем в меньших, чем атом, объемах (атомные ядра, элементарные частицы) связаны с большими энергиями, что затрудняет их использование для кодирования информации. Означает ли это, что на атомном уровне будут исчерпаны информационные ресурсы природы?

10.3. О содержании и структуре современного курса квантовой механики

Если сравнить стандартные учебники классической механики и квантовой механики, то легко увидеть различия в их содержании и структуре. Курс классической механики разделен на статику и динамику, тогда как в курсе квантовой механики такого разделения нет. В нем доминирует статика (задачи о собственных значениях и собственных функциях систем); динамика занимает малый удельный вес (задачи о взаимодействии атома с излучением и рассеянием частиц). Между тем в современных исследованиях квантовых систем доминирует квантовая динамика, как это видно из изложения теории квантовых информационных систем. По-видимому, целесообразно строить современный курс квантовой механики из двух полноценных томов, посвященных квантовой статике и квантовой динамике. Можно думать, что такой курс квантовой механики появится в недалеком будущем.

Список литературы

- Dowling J P, Milburn G J, quant-ph/0206091
- Boto A N et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733 (2000)
- Bennett C H, Brassard G, in *Proc. of the Intern. IEEE Conf. on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India, 1984* (New York: IEEE Press, 1984) p. 175
- Dowling J P *Phys. Rev. A* **57** 4736 (1998)
- Wineland D J et al. *Rev. Mod. Phys.* **71** 253 (1999)
- Nägerl H C et al. *Phys. Rev. A* **60** 145 (1999)
- Kane B E *Nature* **393** 133 (1998)
- Ekert A, Hayden P, Inamori H, quant-ph/0011013
- Shor P W, in *Proc. of the 35th Annual Symp. on the Foundation of Computer Science, Los Alamitos, CA, USA* (New York: IEEE Press, 1994) p. 124
- Plenio M B, Vitelli V *Contemp. Phys.* **42** 25 (2001); quant-ph/0103108
- Makhlin Y, Schön G, Shnirman A *Rev. Mod. Phys.* **73** 357 (2001)
- Nakamura Y, Pashkin Yu A, Tsai J S *Nature* **398** 786 (1999)
- Orlando T P et al. *Phys. Rev. B* **60** 15398 (1999)
- Bouwmeester D, Ekert A K, Zeilinger A (Eds) *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer, 2000)

15. Nielsen M A, Chuang I L *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
16. Hardy L, quant-ph/0101012; de Muynck W M quant-ph/0307235
17. Pradhan P et al., quant-ph/0402122
18. Galvao E F, Ph.D. Thesis (Oxford: Univ. of Oxford, 2002); quant-ph/0212124
19. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Физматгиз, 1963)
20. Schrödinger E *Naturwissenschaften* **23** 807 (1935)
21. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935)
22. Ghirardi G C, Marinatto L *Phys. Rev. A* **70** 012109 (2004); quant-ph/0401065
23. Dür W, Vidal G, Cirac J I *Phys. Rev. A* **62** 062314 (2000)
24. Coffman V, Kundu J, Wootters W K *Phys. Rev. A* **61** 052306 (2000)
25. Vandersypen L M K, Ph.D. Thesis (Stanford, Calif.: Stanford Univ., 2001); quant-ph/0205193
26. Клышко Д Н *Фотоны и нелинейная оптика* (М.: Наука, 1980)
27. Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) (Перевод на русский язык: Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000))
28. Mamin H J et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 207604 (2003)
29. Devoret M H, Schoelkopf R J *Nature* **406** 1039 (2000); Kane B E et al. *Phys. Rev. B* **61** 2961 (2000)
30. Kokin A A, Valiev K A, quant-ph/0201083; quant-ph/0306005
31. Lupascu A et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 177006 (2004); cond-mat/0311510
32. Vion D et al. *Science* **296** 886 (2002); cond-mat/0205343
33. Grover L, in *Proc. of the 28th Annual ACM Symp. on Theory of Computation* (New York: ACM Press, 1996) p. 212
34. Манин Ю И *Вычислимое и невычислимое* (М.: Сов. радио, 1980)
35. Feynman R P *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467 (1982)
36. Abrams D S, Lloyd S *Phys. Rev. Lett.* **79** 2586 (1997)
37. Kempe J, Shalev A, quant-ph/0406046
38. Bennett C H et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895 (1993); Yimsiriwat-tana A, Lomonaco S J (Jr), quant-ph/0402148
39. Abrams D S, Lloyd S *Phys. Rev. Lett.* **83** 5162 (1999)
40. Cheng Y C, Silbey R J, quant-ph/0312053; *Phys. Rev. A* (submitted)
41. Ekert A, Macchiavello C *Acta Phys. Pol. A* **93** 63 (1998); quant-ph/9904070
42. McConnell J *The Theory of Nuclear Magnetic Relaxation in Liquids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987)
43. Georgeot B, Shepelyansky D L, quant-ph/9909074
44. Wineland D J et al. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech.* **103** (3) 259 (1998)
45. Byrd M S, Wu L-A, Lidar D A, quant-ph/0402098
46. Abbott D, quant-ph/0310130
47. Thorwart M, Hägggi P *Phys. Rev. A* **65** 012309 (2002)
48. Palma G M, Suominen K-A, Ekert A K *Proc. R. Soc. London Ser. A* **452** 567 (1996); quant-ph/9702001
49. Bennett C H et al. *Phys. Rev. A* **54** 3824 (1996)
50. Steane A M *Phys. Rev. Lett.* **77** 793 (1995)
51. Shor P W, quant-ph/9605011
52. Steane A M, quant-ph/0207119
53. Bacon D, Brown K R, Whaley K B *Phys. Rev. Lett.* **87** 247902 (2001); quant-ph/0012018
54. Vaidman L, Goldenberg L, Wiesner S *Phys. Rev. A* **54** R1745 (1996)
55. Erez N et al., quant-ph/0309162
56. Facchini P, Lidar D A, Pascazio S *Phys. Rev. A* **69** 032314 (2004); quant-ph/0303132
57. Hotta M, Morikawa M, quant-ph/0401164
58. Facchini P, Nakazato N, Pascazio S *Phys. Rev. Lett.* **86** 2699 (2001)
59. Tasaki S et al. *Int. J. Quantum Chem.* **98** 160 (2004); quant-ph/0210129
60. Viola L, Lloyd S *Phys. Rev. A* **58** 2733 (1998)
61. Ahn C, Wiseman H M, Milburn G J *Phys. Rev. A* **67** 052310 (2003)
62. Sarovar M et al. *Phys. Rev. A* **69** 052324 (2004); quant-ph/0402017
63. Ahn C, Doherty A C, Landahl A J *Phys. Rev. A* **65** 042301 (2002)
64. Vedral V, quant-ph/0212133
65. Berry M V *Proc. R. Soc. London Ser. A* **329** 45 (1984)
66. Freedman M H et al. *Bull. Am. Mat. Soc.* **40** 31 (2002)
67. Unanyan R G, Shore B W, Bergmann K *Phys. Rev. A* **59** 2910 (1999)
68. Byrd M S, Lidar D A *J. Mod. Opt.* **50** 1285 (2003); quant-ph/0210072
69. Kielpinski D, Monroe C, Wineland D J *Nature* **417** 709 (2002); Cirac J I, Zoller P *Nature* **404** 579 (2000)
70. Loss D, DiVincenzo D P *Phys. Rev. A* **57** 120 (1998); Hollenberg L C L et al., cond-mat/0306235
71. Makhlis Yu, Schön G, Shnirman A *Rev. Mod. Phys.* **73** 357 (2001); cond-mat/0011269
72. Dowling J P et al., quant-ph/0402090; Pittman T B, Jacobs B C, Franson J D, quant-ph/0406192; quant-ph/0404059
73. Cirac J I, Duan L M, Zoller P, quant-ph/0405030
74. Dykman M I, Platzman P M, quant-ph/0109030
75. Brennen G K, Deutsch I H, Jessen P S, quant-ph/9910031
76. Kokin A A, quant-ph/0002034; Benjamin S C, Bose S, quant-ph/0210157
77. Корнелл Э А, Виман К Э УФН **173** 1320 (2003); Кеттерле В УФН **173** 1339 (2003)

Quantum computers and quantum computing

K.A. Valiev

*Institute of Physics and Technology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36/1, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 125-77 09. Fax (7-095) 129-31 41
E-mail: valiev@ftian.oivta.ru*

Operation principles of quantum computers and their elements are reviewed. The theory of ideal — i.e., environment-insensitive and hence decoherence-free — computers is presented. Decoherence processes in quantum computers are discussed. Methods for correcting decoherence-induced quantum computing errors and methods for suppressing decoherence processes are considered. A brief listing of proposed quantum computer realizations is given in conclusion.

PACS numbers: 03.65.Yz, 03.67.-a, 03.67.Lx

Bibliography — 77 references

Received 15 July 2004, revised 20 October 2004

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (1) 3–39 (2005)

Physics – Uspekhi **48** (1) (2005)