

一、

1. The corresponding Fokker Planck equation to SDE is

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 P) \quad (1)$$

Then assume that $dX_t = V(X, t)dt$, and the P need to satisfy

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\partial}{\partial x}(VP) \quad (2)$$

from (1) (2) we have

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 P) = -\frac{\partial}{\partial x}(VP)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \left(\dot{x}P - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(g^2 P) \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(VP)$$

$$\Rightarrow \dot{x}P - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(g^2 P) = VP$$

(product rule)

$$\Rightarrow \dot{x}P - \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial}{\partial x} g^2 \right) - \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} P \right) = VP$$

(chain rule)

$$\Rightarrow V = \dot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2 - \frac{g^2}{2} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial x} P \right)$$

$$\Rightarrow V = \dot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2 - \frac{g^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log P$$

$$\therefore dX_t = \left(\dot{x}(X_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(X_t, t) - \frac{g^2(X_t, t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log P(X_t, t) \right) dt$$

二、AI 的未來能力

(1) 具體描述：高保真、雙向的神經訊號即時編解碼

這項能力是指 AI 將能作為一個「數位神經橋樑」，實現人腦與外部世界（或身體其他部位）的直接、即時、高解析度溝通。

這包含了兩個方向：

1. 讀取（解碼）：AI 能即時讀懂大腦皮層複雜的神經訊號，將其翻譯為數位指令。
2. 寫入（編碼）：AI 能將數位資訊（如影像、指令）翻譯成大腦能理解的神經電訊號語言，並精確地「寫入」特定腦區。

(2) 實際應用例子

- 恢復運動功能（神經繞道）：

內容：針對脊髓損傷或中風導致癱瘓的病患，病患「想」要握杯子，AI 透過

腦機介面(BCI)讀取其大腦運動皮質的意圖訊號，接著 AI 解碼訊號，並即時編碼生成一組健康神經本應發出的、極度複雜的時序性電訊號。最後，AI 透過功能性電刺激(FES)寫入這些訊號到病患的手臂肌肉，使其流暢地完成握杯動作。

- 恢復視覺功能（人工視覺）：

內容：針對視神經受損的失明者，AI 透過眼鏡上的攝影機讀取現實世界的影像（例如一個人的臉）。AI 解碼影像，辨識出這是一張臉，並將這張臉的視覺特徵（輪廓、五官）編碼為大腦視覺皮質能理解的神經刺激模式。最後，AI 透過植入大腦視覺皮質的電極陣列寫入這些訊號，讓病患能在「腦中」直接「看見」這張臉的輪廓。

2. 涉及的機器學習類型

(1) 監督式學習 (Supervised Learning)：

- 目的：建立「基礎翻譯模型」。
- 作法：在受控的實驗室環境中，收集大量的「成對」資料（例如：大腦訊號&對應的肌肉訊號），訓練一個深度神經網路，學習腦袋訊號→肌肉指令這個複雜的映射關係。

(2) 強化學習 (Reinforcement Learning)：

- 目的：實現「個人化適應」與「即時優化」。
- 作法：每個人的大腦都不同，且大腦具有可塑性（會學習）。監督式模型不可能 100% 準確。當病患開始使用時，AI 必須不斷微調其前段提到的映射關係，以更貼合使用者的真實意圖。

(3) 資料來源與目標訊號（以「恢復運動」為例）

- 監督式階段（訓練時）：
 - 資料來源 (X)：大量高解析度的「大腦運動皮質訊號」。
 - 目標訊號 (Y)：同步收集的「健康肌肉電訊號」或「動作捕捉系統」測得的精確肢體軌跡。
- 強化學習階段（使用時）：
 - 資料來源（狀態 S）：當前的「大腦訊號」+「環境回饋」（例如攝影機看到的目前手部位置）。
 - 目標訊號（獎勵 R）：一個「成功」或「失敗」的回饋訊號。

(4) 是否存在學習回饋或環境互動？

- 環境 (Environment)：病患的身體、要抓取的杯子、物理世界的規則。
- AI 的行動 (Action)：輸出一個特定的電刺激組合。
- 回饋 (Reward)：
 1. 外部回饋：AI 透過攝影機判斷「手是否成功握住杯子了？」(R = +10) 或是「手抖動但失敗了？」(R = -1)。
 2. 內部回饋：當使用者發現 AI「做錯了」(非我本意)時，大腦會產生一個獨特的「錯誤電位」，AI 一旦偵測到這個訊號，就給自己一個立即的負回饋，並馬上修正策略。

3. 第一步的「模型化」

- 簡化模型問題 (Model Problem)：「即時分類四種『想像的』肢體動作腦電圖訊號」(例如：在受試者頭上戴上非侵入式的 EEG 帽，要求他交替想像移動四肢)。
- 這個簡化問題如何代表最終能力？
 - 最終能力：解碼「連續、精細、高維度」的大腦意圖。
 - 簡化概念：測試了最核心的前提：「AI 能否即時且準確的區分離散、簡單的大腦意圖？」
- 它的可測試性：
 1. 實驗流程：讓受試者坐在螢幕前，螢幕隨機提示「請想像移動左手」，受試者想像 5 秒。AI 必須在這 5 秒內做出預測。
 2. 成功指標：

分類準確率：AI 預測的準確率是否顯著高於隨機猜測

反應時間：從受試者開始想像到 AI 輸出分類結果，花了多少毫秒？
- 需要哪些數學或機器學習工具來解決？
 1. 數學 / 訊號處理：

頻譜分析 (Spectral Analysis)：傅立葉轉換或小波轉換，用以提取與運動想像相關的特定腦波頻段。
 2. 機器學習工具：

特徵提取 (Feature Extraction)：共同空間模式 (Common Spatial Patterns, CSP)，這是在 EEG 運動想像領域最經典、最有效的數學

工具，用於最大化兩個類別之間的訊號變異數。

分類器 (Classifier)：

- 傳統模型：線性判別分析(LDA)或支持向量機(SVM)（計算速度快，非常適合即時系統）。
- 深度學習：卷積神經網路(CNN)（用於自動學習訊號的空間特徵）或混合的 CNN-RNN 模型（同時學習時空特徵）。

三、Unanswered question

該如何評鑑一個 SDE 是否適合某一個實務應用，且如果不適合該如何改進？