Actividad 2

lunes, junio 24, 2024 4:59 PM

Métodos Númericos:

Gauss - Jordan

Este método consiste en transformar un sistema de ecuaciones en una una matriz aumentada y aplicar operaciones elementales para triangularla.

1. Ejemplo eliminación:

Supongamos que tenemos el siguiente esquema de ecuaciones.

$2x+3y=7 \quad 4x-y=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Resolvemos hacia atras para obtener los valores de las variables $(x=1)$ y $(y=-1)$

2. Método de Sustitución

Se despeja una variable en una ecuacion y sustituye en las demas ecuaciones.

2.1 Ejemplo de sustitución.

Consideremos el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Despejamos x en la segunda ecuación. posteriormente despejamo x en la primera ecuación.

$(x=y+3) \rightarrow (3(y+3)+2y=10)$

Resolvemos para obtener $(y=2)$ y luego encontramos $(x=5)$.

2. Sistema de ecuaciones.

Tomando en cuenta la siguiente ecuación 3x3

$2x+y-z=5 \mid 3x-2y+2z=4 \mid x+3y-2z=7$

El primer paso para transformar a la matriz: Representamos el sistema como una mati

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right]$$

Aplicamos operaciones elementales para triangular la matriz

Ejemplo: Restamos 1.5 veces la primera fila de la segunda y 0.5 veces la primera de la tercera.

El segundo paso: $2.5y-1.5z=4.5z \rightarrow$ Despejamos z

$$z=\frac{2.5y-4.5}{1.5} \rightarrow -3.5y+3.5\left(\frac{2.5y-4.5}{1.5}\right)=-1.5$$

Resolvemos para encontrar (y): $y=2$

Una vez encontradas podremos sustituir en la primera ecuación:

$$2x+2-z=5 \longrightarrow 2x-z=3 \quad x=3+z$$

Para encontrar (z): Sustituimos $(y=2)$ y $(x=3+z)$

$$3+z+6-2z=7 \longrightarrow z=4$$

Por ultimo con $(z=4)$ encontramos $(y=2)$ y $(x=3+4=7)$

Por lo tanto la solución del sistema es $(x=7), (y=2), (z=4)$

1. Método Jacobi

Se basa en interacciones sucesivas para aproximar las soluciones.

1. Formulación del método.

Escribimos cada ecuación en términos de una variable desconocida.

$$x=\frac{5-y+z}{2} \qquad y=\frac{4-3x+2z}{2} \qquad z=\frac{7-x-3y}{2}$$

2. Establecimiento de valores iniciales.

Comenzamos con estimaciones iniciales para (x), (y) (z). Por ejemplo, $(X_0=\emptyset)$, $(y_0=\emptyset)$, $(z_0=\emptyset)$.

3. Iteracciones

Cada iteracción, actualizamos las variables:

$$X_{k+1}=\frac{5-y_k+z_k}{2}$$

$$y_{k+1}=\frac{4-3x_k+2z_k}{2}$$

$$z_{k+1}=\frac{7-x_k-3y_k}{2}$$

4. Criterio de convergencia:

Podemos usar la norma infinito (máxima diferentes absoluta entre las soluciones) para verificar la convergencia.

$$\|X_{k+1}-X_k\|_\infty<\epsilon$$

$$\|X_{k+1}-y_k\|_\infty<\epsilon$$

$$\|X_{k+1}-z_k\|_\infty<\epsilon$$

Nota: $\epsilon \rightarrow$ es una tolerancia pequeña.

5. Iterar hasta convergencia:

Repetimos los pasos 3 y 4 hasta que se cumpla el criterio de convergencia

$$x^{(k+1)}=\frac{1}{2}(5-y^{(k)}+z^{(k)})$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(4 - 3x^{(k)} + 2z^{(k)}\right)$$

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(7 - x^{(k)} - 3y^{(k)}\right)$$

La ecuacion se puede iterar n cantidad de veces.

Despues de realizar 5 interacciones con el método los valores aproximados son:

No Itera	x	y	z
1	2.500	2.0000	3.5000
2	3.2500	1.7500	-0.7500
3	1.2500	-3.6250	-0.7500
4	3.9300	-0.6250	8.3125
5	6.9687	4.4062	2.4687
6	1.5312	-5.9843	-6.5937
7	2.1953	-6.8906	11.7109
8	11.8007	10.4179	12.7382
9	3.6601	-2.9628	-18.0273
10	-5.0322	-21.5175	6.1142

Nota: Si observamos los valores nos podemos percatar que no tienen una convergencia a una solución estable (Esto se puede deber a que el sistema de ecuaciones podría no ser el adecuado).

Para mejorar la convergencia, podriamos intentar con más interacciones o probar con el método Gauss-Seidel.