

การวัดค่า k_B จากตัวต้านทาน

1 บทนำ

อนุภาคที่อยู่ในวัตถุที่มีอุณหภูมิที่มากกว่าศูนย์เคลวิน จะมีการเคลื่อนที่แบบสุ่ม (random) ซึ่งในบางกรณี การเคลื่อนที่แบบสุ่มนี้ มีผลมากพอที่จะทำให้เราสังเกตมันได้โดยไม่ต้องใช้เครื่องมือราคาแพง หรือ มีความซับซ้อนสูง

ในตัวนำไฟฟ้า การเคลื่อนที่แบบสุ่มของอิเล็กตรอน ทำให้เกิด noise หรือ สัญญาณรบกวนในวงจรไฟฟ้า ซึ่ง noise ที่เกิดจากอุณหภูมิที่ไม่เป็นศูนย์นี้ (เรียกว่า thermal noise หรือ Johnson noise) เราไม่สามารถกำจัดมันให้หมดไปได้ เพราะเป็น fundamental noise นอกเหนือจากการลดอุณหภูมิของระบบเท่านั้น นี่เป็นเหตุผลว่า ทำไมในหลายๆกรณี การลดอุณหภูมิของวงจรไฟฟ้าเป็นสิ่งที่ไม่จำเป็น เช่น การถ่ายภาพของท้องฟ้าในเวลากลางคืน ในหลายๆครั้ง เราจะลดอุณหภูมิของตัวรับแสงเพื่อลด noise ในการถ่ายภาพ

การทดลองนี้ เราจะวัด noise (สัญญาณรบกวน) ของความต่างศักย์คร่อมตัวต้านทาน โดยสัญญาณรบกวนนี้ เป็นผลเนื่องมาจากการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอิเล็กตรอนในตัวต้านทาน เราจะวัดขนาดของ noise สำหรับตัวต้านทานที่มีค่าต่างๆกัน เพื่อที่จะหาค่าคงที่ของ Boltzmann (k_B) นั้น มีค่าเท่าใด

2 รายละเอียดการทดลอง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า (อ้างอิงจาก [?] หรือหนังสือเรื่องฟิสิกส์เชิงสถิติทั่วไป) ถ้าเราวัดความต่างศักย์คร่อมตัวต้านทานที่มีความต้านทาน R เราจะวัดค่าความต่างศักย์ root-mean-square ของ noise ที่เกิดจากตัวต้านทาน ได้

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{4k_B T R \Delta f} \quad (1)$$

โดยที่ k_B คือค่าคงที่ของ Boltzmann $\approx 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K และ T คืออุณหภูมิของตัวต้านทาน ส่วนปริมาณ Δf นั้น เรียกว่า bandwidth ซึ่งเป็นช่วงของความถี่ของสัญญาณที่เราวัด มีหน่วยเดียวกันกับความถี่ สาเหตุที่มีปริมาณนี้อยู่ในสมการเป็นเพราะว่า ตอนที่เราคำนวณ noise ในระบบนั้น เราแบ่งแยกพิจารณาที่ละความถี่ของสัญญาณไฟฟ้า ในตอนท้ายสุดเราต้องรวมสัญญาณไฟฟ้าของทุกความถี่ที่เราสนใจเข้าด้วยกัน เวลาที่เราพูดถึงปริมาณที่อธิบายถึง noise โดยมากเราจะเขียนอยู่ในรูปของ ความต่างศักย์กำลังสอง ต่อช่วงความถี่ 1 Hertz หรือค่ารากที่สองของปริมาณที่ว่ามัน อย่างเช่น ในกรณีที่ $R = 1 \text{ k}\Omega$ และ $T = 300 \text{ K}$ เราจะใช้ $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ เราเขียนว่า ความต่างศักย์รบกวน (voltage noise) ของตัวต้านทาน คือ

$$V_{\text{RMS}} = 4.07 \times 10^{-9} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2)$$

ความคุ้นเคยต่อการเขียน noise โดยที่หน่วยเป็นปริมาณบางอย่าง ต่อ $\sqrt{\text{Hz}}$ แบบนี้เป็นสิ่งที่สำคัญมากๆ เพราะเราต้องเข้าใจว่าเวลาที่บอกว่า noise = $4.1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ ไม่ได้แปลว่า ตอนที่เรเอามัลติมิเตอร์ไปวัดความต่างศักย์คร่อมตัวต้านทานแล้วเราจะวัดได้ 4.1 nV แต่ว่าเราต้องกำหนดก่อนว่า เราจะรวม noise ตั้งแต่ความถี่เท่าไรถึงความถี่เท่าไรก่อน สมมุติว่า เราสนใจ noise ตั้งแต่ $f = 0 \text{ Hz}$ ถึง 1 kHz ปริมาณของ noise ทั้งหมด จะคิดได้โดยแทน $\Delta f = 1 \text{ kHz}$ ในสมการที่ (1)

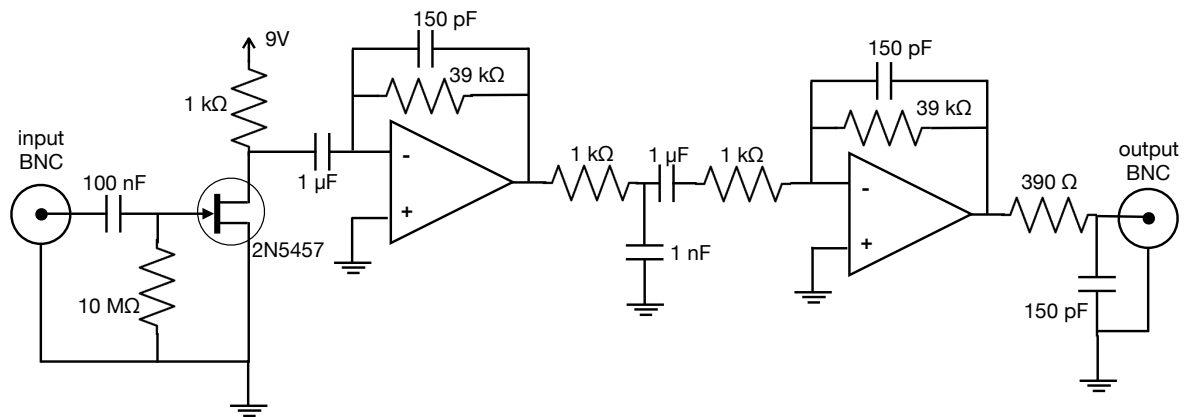
สมการที่ (1) นั้น เป็นผลที่ได้จากการประมาณในกรณีที่ ค่าความต้านทานไม่สูงจนเกินไป เพราะในความเป็นจริงแล้ว ต้องคิดถึงค่าความจุไฟฟ้า (capacitance) ของตัวต้านทานด้วย

2.2 การทดลอง

2.2.1 บทนำการทดลอง

จากผลที่ได้ในสมการที่ (2) เราจะเห็นได้ว่า ค่าความต่างศักย์ที่เกิดจาก thermal noise นั้นมีค่าน้อยมากๆ อยู่ในระดับ nV เลยทีเดียว เครื่องมือวัดทั่วไปที่เราใช้ในห้องทดลองที่วัดความต่างศักย์ได้ ก็จะมีมัลติมิเตอร์ หรือ ออสซิลโลสโคป (เรียกย่อๆว่า สโคป) โดยเครื่องมือสองประเภทนี้ วัดค่าความต่างศักย์ได้อย่างน้อยที่สุดก็อยู่ในระดับ mV ดังนั้น การที่เราจะวัดค่าความต่างศักย์ของ thermal noise เราต้องมิวจรขยายสัญญาณจาก nV มาอยู่ที่ระดับ mV

วงจรขยายสัญญาณที่เราใช้นั้น มีต้นแบบมาจาก [?] โดยที่ตัววงจรนั้นแสดงอยู่ในรูปที่ (1) เราไม่จำเป็นต้องเข้าใจการทำงานของวงจรทั้งหมด แต่เราต้องทราบว่า วงจรขยายของเรานั้นมีอัตราขยาย (gain) เท่าไร และ มีการตอบสนองเชิงความถี่เท่าไร ในความเป็น



รูปที่ 1: วงจรขยายสัญญาณที่ใช้ในการทดลองโดยปรับเปลี่ยนจากวงจรต้นแบบใน [?] ตัวต้านทานในส่วนที่เป็น input BNC เป็นตัวกำเนิดสัญญาณ noise ที่เราต้องการวัด

จริง แทนที่จะใช้ปริมาณ Δf ในสมการที่ (1) โดยตรง เราจะคำนวณปริมาณที่เรียกว่า effective gain bandwidth ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\Delta f' = \int_0^\infty [G(f)]^2 df \quad (3)$$

โดยที่ $G(f)$ เป็นอัตราขยายของวงจรขยายที่ขึ้นอยู่กับความถี่ ดังนั้น ความต่างศักย์ของ noise ที่เกิดจากตัวต้านทานหลังจากที่ผ่านวงจรขยายแล้ว มีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{4k_B T R \int_0^\infty [G(f)]^2 df} \quad (4)$$

จุดมุ่งหมายของการทดลองนี้คือ เราจะทำการวัดความต่างศักย์ของ noise ของตัวต้านทานที่มีค่าต่างกัน เพื่อที่จะดูว่า มีความสัมพันธ์แบบ $V_{\text{RMS}} \propto \sqrt{R}$ อย่างที่แสดงในสมการที่ (1) หรือไม่ จากนั้นเราจะคำนวณจากการทดลองของเราเพื่อดูว่าค่าคงที่ของ Boltzmann k_B ที่เราวัดได้จากการทดลอง มีค่าเท่าไรเทียบกับค่าจริง

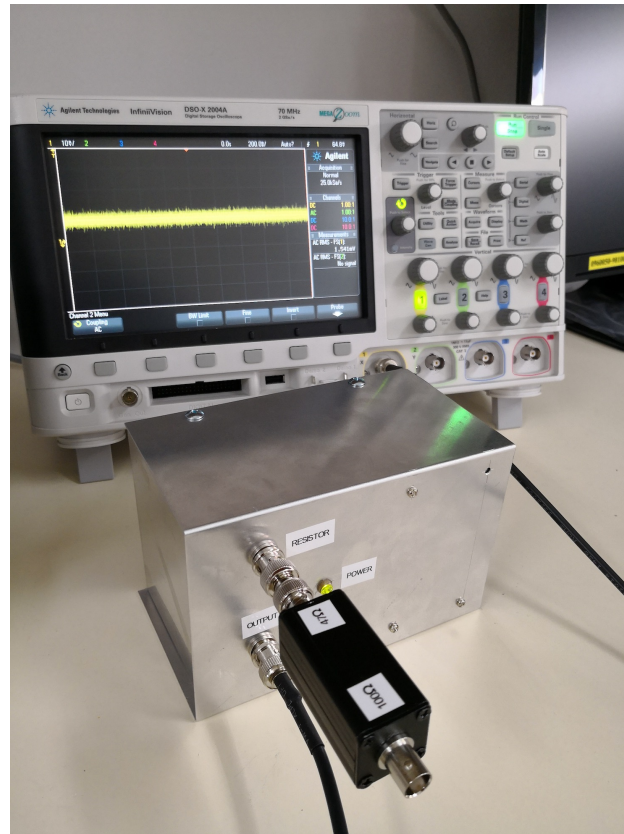
2.3 ขั้นตอนการทดลอง

2.3.1 วัดการตอบสนองเชิงความถี่และอัตราการขยายของวงจรขยายสัญญาณ

ในขั้นตอนแรก เราจะวัดการตอบสนองเชิงความถี่ของวงจรขยายโดยการใส่สัญญาณคลื่น sine ที่เราทราบค่าแอมพลิจูดที่แน่นอนจาก function generator ไปยัง input ของเครื่องขยายสัญญาณ แล้วดูสัญญาณหลังจากที่ขยายแล้วโดยใช้สโคป

ขั้นตอนคร่าวๆมีดังนี้

- สร้างความคุ้นเคยในการใช้งานเครื่อง function generator โดยการต่อสัญญาณเข้ากับสโคปโดยตรง ดูว่า ค่าความถี่ที่ปรับได้ อยู่ในช่วงไหน แอมพลิจูดที่เราปรับได้ อยู่ในระดับกี่ V
- ลองทำความเข้าใจกับฟังก์ชันการวัดค่า RMS ของสโคป โดยการกดปุ่ม measure บนสโคป
- ขั้นตอนต่อไปเราจะใส่สัญญาณคลื่น sine จาก function generator เข้าไปใน input ของวงจรขยาย และใช้ สโคปวัด output ของวงจรขยาย เพื่อที่จะวัดอัตราขยายของวงจร โดยที่วงจรขยายของเรานั้น ใช้ถ่านไฟฉาย 9V สองก้อนเป็น แหล่งกำเนิดไฟฟ้า ดังนั้น สัญญาณ output สุดท้ายของวงจรนั้น จะไม่สามารถมีค่าสูงไปกว่า $\pm 9 \text{ V}$ หรือ $18 \text{ V}_{\text{p-p}}$ อัตราขยายของวงจรของเราจะอยู่ที่ประมาณ 3,000 ให้ลองพิจารณาดูว่า แอมพลิจูดของสัญญาณที่เราใส่เข้าไปใน input ของวงจรขยายควรจะมีความไม่มากกว่าเท่าใด
- เมื่อเราปรับแอมพลิจูดที่ใส่ใน input ของวงจรขยายให้พอเหมาะแล้ว ลองดู output ของวงจรขยายโดยใช้สโคป (ระวังไม่ให้ output มีค่ามากเกินไปจนทำให้สัญญาณถูกขลิบออก ในกรณีสัญญาณ output จะมีหน้าตาเหมือน square wave แทนที่จะเป็น sine wave) แล้วลองปรับความถี่ของคลื่นดู แอมพลิจูดของ output ควรจะคงที่จนถึงค่าความถี่ค่านึงแล้วจะลดลงเรื่อยๆจนเข้าใกล้ศูนย์ อย่าลืมบันทึกว่า ขนาดของสัญญาณ input มีค่าเท่าใด เพราะจะต้องใช้ในการคำนวณหาอัตราขยาย



รูปที่ 2: ตัวอย่างการวัด

- บันทึกค่าแอมพลิจูดของ output ที่ค่าความถี่ต่างๆ ช่วงความถี่ที่ควรจะวัดควรครอบคลุมระหว่าง 0 Hz ถึงประมาณ 100 kHz เนื่องจากช่วงความถี่ที่วัดมีค่าค่อนข้างกว้าง ค่าแนะนำคือให้วัดที่ประมาณ 10, 20, 40, 70, 100, 200, 400, 700, 1000 Hz ไปตามลำดับ จนกว่าจะถึง 100 kHz หรือ 200 kHz
- พล็อตกราฟค่าอัตราขยาย (gain = output / input) และความถี่ โดยที่ให้แกนนอน เป็น scale แบบ logarithm
- คำนวณหา effective gain bandwidth โดยคร่าวๆด้วยการหาพื้นที่ใต้กราฟระหว่างอัตราขยายยกกำลังสอง และความถี่ หรืออีกนัยหนึ่งคือการคำนวณหา $\int_0^\infty [G(f)]^2 df$ นั่นเอง

2.3.2 วัดค่าความต่างศักย์ที่เกิดจาก noise ของตัวต้านทาน

ในขั้นตอนนี้ เราจะวัด noise จากตัวต้านทานจริงๆ (ตัวอย่างในรูปที่ (2) และ (3)) โดยตัวต้านทานค่าต่างๆนั้น ได้ใส่อยู่ในกล่องสีดำอย่างที่เราแสดงในรูปที่ (4)

- เริ่มต้นด้วยการใส่ $R = 0 \Omega$ (ดังที่แสดงในรูปที่ (5)) ที่ input ของเครื่อง แล้ว วัด output ของวงจรขยายโดยใช้สโคป เราจะเห็นว่า noise จะไม่เป็นศูนย์ (ทำไม?) ให้เราวัดค่าความต่างศักย์ RMS โดยใช้ฟังก์ชันการวัด V_{RMS} ของสโคปโดยตรง ค่านี้นจะเป็นสิ่งที่เรียกว่า background noise (V_{bg}) ที่เราจะต้องลบออกสำหรับ noise ที่ความต้านทานค่าอื่นๆ
- วัดค่า noise สำหรับตัวต้านทานให้ครบทุกค่า

2.3.3 การวิเคราะห์ข้อมูล

หลังจากที่เสร็จสิ้นการวัดแล้ว ที่เหลือเป็นการวิเคราะห์ข้อมูล สิ่งที่เราควรจะทำ(อย่างน้อย) คือ

- พล็อตกราฟระหว่าง V_{RMS}^2 และ R (อย่าลืมลบ V_{bg}^2 ออกจาก V_{RMS}^2 เพื่อแสดง noise ที่มาจากตัวต้านทานจริงๆ) นักศึกษาควรจะพล็อตกราฟโดยใช้ scale แบบ logarithm ทั้งสองแกน เนื่องจากข้อมูลที่เรามี อยู่ในช่วงที่กว้างมาก
- จาก effective gain bandwidth ที่คำนวณได้ในขั้นตอนแรก ให้วิเคราะห์หาค่าคงที่ของ Boltzmann ที่เราวัดได้มีค่าเท่าไร และมีค่าความคลาดเคลื่อนเท่าไร



รูปที่ 3: ตัวอย่างการวัด

2.4 คำแนะนำทั่วไปและข้อควรระวัง

- วงจรขยายนั่น มีสวิตช์เปิดปิดอยู่ ตอนที่เปิด หลอด LED สีเหลืองจะติด ถ้าเกิด หลอด LED ไม่ติด ให้ลองเปลี่ยนถ่านดู ให้ปิดสวิตช์ไว้ตอนที่ไม่ใช่วงจรเพื่อประหยัดถ่าน
- กล่องโลหะของวงจรขยายมีไว้เพื่อกักไม่ให้คลื่นรบกวนจากภายนอกมีผลต่อสัญญาณที่เราจะวัด ดังนั้นถ้าเป็นไปได้ ให้ปิดกล่องให้เรียบร้อยในขณะที่วัด
- ในเมื่อค่าความต้านทานที่เราใช้วัดมีค่าตั้งแต่ $100\ \Omega$ ถึง $100\ \text{k}\Omega$ การพล็อตกราฟระหว่างค่าความต่างศักย์ของ noise กับ ค่าความต้านทานนั้น ไม่ควรจะใช้สเกลที่เป็นเชิงเส้น เพราะจะทำให้ข้อมูลยาก
- สังเกตดูสัญญาณที่วัดได้บนสโคปว่าขึ้นกับอะไรบ้าง เช่น ตำแหน่งของมือเราว่าได้แตะกล่องของตัวขยายสัญญาณหรือไม่ พยายามทำให้การวางของอุปกรณ์หรือเงื่อนไขต่างๆคงเดิมเวลาที่เปลี่ยนตัวต้านทาน

3 คำถามก่อนการทดลอง

1. ค่าคงที่มูลฐานที่เราจะวัดในการทดลองคืออะไร มีค่าประมาณเท่าใด
2. V_{RMS} มีนิยามว่าอะไร ทำไมเราถึง V_{RMS} ของ noise แทนที่จะวัดค่าความต่างศักย์เฉลี่ยของ noise
3. จากสมการ (1) เราควรจะพล็อตกราฟระหว่างปริมาณใดเพื่อที่จะหาค่า k_B

4 คำถามเพิ่มเติม

- อ้างอิงจากสมการที่ (1) ตอนที่เราไม่ได้ต่อตัวต้านทานใดๆไปที่ input ของวงจรขยาย หมายความว่า $R = \infty$ ซึ่งแปลว่า noise ก็ควรจะมีความเป็นอนันต์เหมือนกัน (แล้วควรจะเกิดระเบิดอย่างรุนแรง) ทำไมเราถึงไม่ได้วัดค่า noise เป็นอนันต์
- ตอนที่เรา short input โดยใช้ตัวต้านทาน $R = 0$ เราก็กังเห็น noise ที่วัดได้บนสโคปอยู่ noise พวกนี้มาจากไหน
- เราสามารถใช้การทดลองนี้ หาค่าอุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์ (absolute zero) ได้อย่างไร



รูปที่ 4: กล่องใส่ตัวต้านทาน

5 Checklist

5.1 เมื่อเสร็จสิ้นสัปดาห์ที่ 1

- เก็บข้อมูลอัตราขยาย (gain) สำหรับสัญญาณ input ที่ความถี่ต่างๆ

5.2 เมื่อเสร็จสิ้นสัปดาห์ที่ 2

- เก็บข้อมูล noise สำหรับตัวต้านทานทุกตัวเสร็จ



รูปที่ 5: ตัวต้านทาน $R = 0 \, \Omega$