UNIVERSIDAD FIDÉLITAS

II-115 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Coordinación: Lic. Marco Corrales Chacón

mcorrales@ufidelitas.ac.cr

Elaborado por: Lic. Hernán Víquez Céspedes

Editado por: Prof. Edwin Villalobos Martínez

Índice

Contenidos **Página**

1. Inecuaciones

1.1. Inecuaciones en una variable

Definición: Inecuación Una desigualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de ellas involucra variables, recibe el nombre de inecuación, las variables involucradas en la inecuación reciben el nombre de incógnitas.

Definición: Solución de una inecuación

En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que esté contenido en el dominio de las incógnitas, y que al sustituirse por la incógnita en la inecuación hace que la desigualdad correspondiente sea verdadera, es una solución de la inecuación.

Definición: Conjunto solución de una inecuación

Dada una inecuación de una incógnita, el subconjunto S del dominio de la incógnita, cuyos elementos son las soluciones de la inecuación dada, recibe el nombre de conjunto solución

De manera similar a las ecuaciones lineales, el procedimiento para resolver una inecuación lineal, básicamente consiste en aplicar transformaciones a la desigualdad hasta despejar la incógnita.

Ejemplos: Inecuaciones lineales con una incógnita

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

a) $-5(x+3) \geq 3-(x+2)$

Solución

$-5(x+3) \geq 3-(x+2)$ Distribuimos el -5, y cambiamos de signos en el lado derecho

$-5x-15 \geq 3-x-2$ Agrupamos variables de un lado, y constantes del otro

$-5x+x \geq 3-2+15$ Sumamos y restamos términos semejantes

$-4x \geq 16$ Despejamos x, pasando a dividir el -4

$x \leq \dfrac{16}{-4}$

Al despejar x, cuando tiene un negativo el factor numérico, se invierte la desigualdad.

$x \leq -4$ Simplificamos

Expresamos el conjunto solución, que es un intervalo, finalmente:

$$\boxed{S =]-\infty, -4]}$$

b) $4 - \frac{x+3}{6} < 2 + \frac{9-2x}{3}$

Solución

$4 - \frac{x+3}{6} < 2 + \frac{9-2x}{3}$ Separamos las fracciones

$4 - \frac{x}{6} - \frac{3}{6} < 2 + \frac{9}{3} - \frac{2x}{3}$ Agrupamos variables de un lado, términos constantes del otro.

$-\frac{x}{6} + \frac{2x}{3} < 2 + \frac{9}{3} - 4 + \frac{3}{6}$ Sumamos y restamos términos semejantes

$\frac{1x}{2} < \frac{3}{2}$ Despejamos x, pasando $\frac{1}{2}$ a dividir.

$x < \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$ En esta ocasión no se invierte la desigualdad, pues es un número positivo

$x < 3$

$$\boxed{S =]-\infty, 3[}$$

c) *(Opcional)* $\dfrac{x+2}{3} < \dfrac{1+3x}{2}$

Solución

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$$

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x < \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{-7}{6}x < \frac{-1}{6}$$

$$x > \frac{\frac{-1}{6}}{\frac{-7}{6}}$$

$$x > \frac{1}{7}$$

$$\boxed{S = \left]\frac{1}{7}, -\infty\right[}$$

1.2. Inecuaciones polinomiales con una incógnita

Una inecuación polinomial en una incógnita es una desigualdad de la forma: $p(x) > 0$, $p(x) < 0$, $p(x) \geq 0$, o bien, $p(x) \leq 0$, donde $p(x)$ es un polinomio en la variable x.

1.3. Inecuaciones racionales con una incógnita

Una inecuación racional (fraccionaria) en una incógnita es una desigualdad de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \ ; \ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \ ; \ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ ; \ \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en la variable x y $Q(x) \neq 0$.

1.4. ¿Cómo resolver inecuaciones polinomiales y racionales?

Pasos a resolver: Inecuaciones Polinómicas y Racionales

a) Desigualar a 0.

b) Simplificar al máximo.

c) Factorizar.

d) Determinar la solución de cada factor.

e) Realizar la tabla.

f) Determinar la solución general.

Reglas generales para factores lineales al realizar la tabla

1) Si el número que multiplica a x es positivo, empiezo negativo.

2) Si el número que multiplica a x es negativo, empiezo positivo.

3) Si una constante positiva (no tiene x) es $+$ en todo $\mathbb{R}$

4) Si una constante negativa (no tiene x) es $-$ en todo $\mathbb{R}$

5) Si el factor está elevado a una potencia par es $+$ en todo $\mathbb{R}$

6) Si el factor está elevado a una potencia impar aplican reglas de la 1 a la 4.

7) Denominadores son siempre abiertos, por ser restricciones.

8) Si nos da un factor cuadrático ax^2+bx+c, irreducible en $\mathbb{R}$, entonces si $a > 0$ es todo $+$ y si $a < 0$ es todo $-$

Ejemplo: Inecuaciones polinomiales y racionales con una incógnita

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

Solución

$x^2 - x - 6 < 0$ El polinomio esta desigualado a cero, procedemos a factorizar.

$(x-3)(x+2) < 0$ Se busca la solución de cada factor, igualándolo a cero y despejando.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$; $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ Estos valores formarán parte de la tabla

	$]-\infty, -2[$	$]-2, 3[$	$]3, \infty[$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$+$	$-$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{S =]-2, 3[}$$

b) $4x^4 - 20x^3 + 51x^2 \geq 57x - 18$

Solución

Se desiguala a cero nuestra inecuación:

$4x^4 - 20x^3 + 51x^2 - 57x + 18 \geq 0$ Factorizamos por división sintética

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -20 & 51 & -57 & 18 \\ \frac{1}{2} & & 2 & -9 & 21 & -18 \\ \hline & 4 & -18 & 42 & -36 & 0 \end{array}$$

Volvemos aplicar división sintética.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -18 & 42 & -36 \\ \frac{3}{2} & & 6 & -18 & 36 \\ \hline & 4 & -12 & 24 & 0 \end{array}$$

Acomodamos la expresión con los factores:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^2 - 12x + 24) \geq 0$ factorizamos el término cuadrático, usando factor común: 4

$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 - 3x + 6) \geq 0$ Buscamos la solución de cada factor.

$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$x^2 - 3x + 6 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, no se puede factorizar

Construimos la tabla

	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$	$\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
4	$+$	$+$	$+$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$
$\left(x - \frac{3}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 3x + 6)$	$+$	$+$	$+$
$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 - 3x + 6)$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[}$$

c) $\dfrac{2x^2+6x}{-x^2+11x-10} \leq 0$

Solución

$$\frac{2x\left(x+3\right)}{-\left(x^2-11x+10\right)} \leq 0$$

$$\frac{2x\left(x+3\right)}{-\left(x-10\right)\left(x-1\right)} \leq 0$$

Los ceros de la inecuación son:

$2x=0 \Rightarrow x=0; x+3 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

Las restricciones (se toman del denominador) de la inecuación son:

$x-10=0 \Rightarrow x=10; x-1=0 \Rightarrow x=1$

Cuadro

	$]-\infty,-3[$	$]-3,0[$	$]0,1[$	$]1,10[$	$]10,+\infty[$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$*$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

$\boxed{S=\left]-\infty,-3\right]\bigcup\left[0,1\right[\bigcup\left]10,+\infty\right[}$

d) $\dfrac{x+1}{2-x} > 2$

Solución

$$\frac{x+1}{2-x} - 2 > 0$$

$$\frac{x+1-2\cdot(2-x)}{2-x} > 0$$

$$\frac{x+1-4+2x}{2-x} > 0$$

$$\frac{3x-3}{2-x} > 0$$

$$\frac{3\,(x-1)}{2-x} > 0$$

El cero de le inecuación es: $x-1=0 \Rightarrow x=1$. La restricción es: $2-x=0 \Rightarrow 2=x$, se construye el cuadro.

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,+\infty[$
$\mid 3$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$-$
$*$	$-$	$+$	$-$

$\boxed{S =]1,2[}$

c) $\dfrac{-2(x-5)^2(x+\sqrt{3})}{(x+1)^3(8-x)(4+5x)} \geq 0$ *Solución*

Los ceros de la inecuación son:

- $(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$
- $x+\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

Las restricciones son:

- $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $8-x = 0 \Rightarrow 8 = x$
- $4+5x = 0 \Rightarrow 5x = -4 \Rightarrow x = \dfrac{-4}{5}$

Cuadro:

	$]-\infty,-\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},-1[$	$\left]-1,\dfrac{-4}{5},\right[$	$\left]\dfrac{-4}{5},5\right[$	$]5,8[$	$]8,+\infty[$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x-5)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$8-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$4+5x$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$*$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

$$\boxed{S =]-\infty,-\sqrt{3}] \bigcup \left]-1,\dfrac{-4}{5}\right[\bigcup]8,+\infty[}$$

d) $\dfrac{-x(x+1)^2(x-4)}{(x-\sqrt{6})(x-2)^3} \leq 0$

Solución

Los ceros de la inecuación son:

- $-x = 0 \Rightarrow x = 0$
- $(x+1)^2 = 0 \rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Las restricciones de la inecuación son:

- $x - \sqrt{6} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$
- $(x-2)^3 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Cuadro

	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,2[$	$]2,\sqrt{6}[$	$]\sqrt{6},4[$	$]4,+\infty[$
$-x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+\sqrt{6}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$*$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

$\boxed{S = \,]-\infty,0] \bigcup \,]2,\sqrt{6}[\,\bigcup\, [4,+\infty[}$

1.5. Práctica Complementaria

1. Determine el conjunto solución de cada inecuación.

a) $-2(2x+1)+4x-3 > (x-1)-3(x+1)$

b) $27 - 81x + 90x^2 - 46x^3 + 11x^4 - x^5 \leq 0$

c) $36 + 36x - 7x^2 - 8x^3 - x^4 \geq 0$

d) $\dfrac{-x^3(x+1)^2(x-3)^5}{(x+1)(2-x)^3} < 0$

2. Funciones

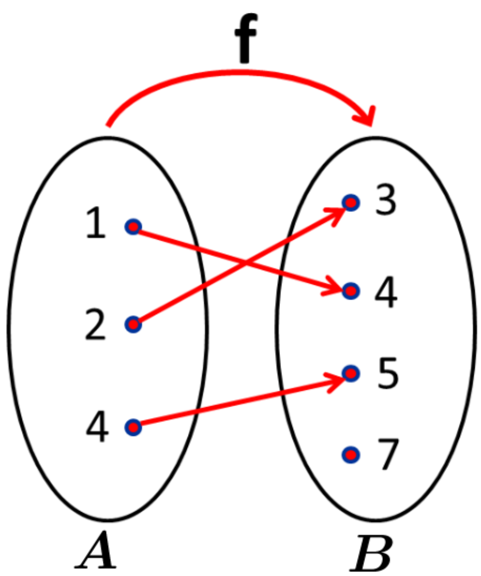
2.1. Conceptos básicos de funciones

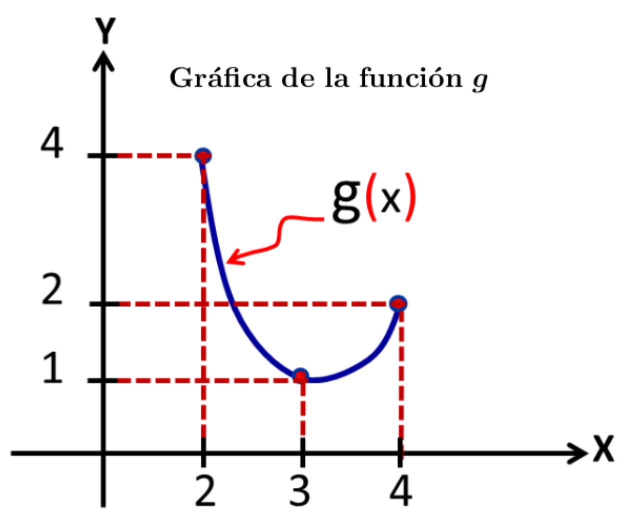
Definición: Función real de variable real

Dados dos conjuntos A y B diferentes de vacío, una función f de A en B, es una **correspondencia** que asigna **a cada** elemento $x \in A$ un **único** elemento $f(x) \in B$.

Nota: Para denotar que f es función de A en B se escribe $f : A \to B$ y para indicar que $x \in A$ está asociado con $y \in B$ se escribe $y = f(x)$, o bien (x, y).

Considere el siguiente diagrama de Venn que muestra una correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B. Note que todos los elementos del conjunto A (llamando **dominio** de la función D_f) están asociados con uno y sólo uno de los elementos de B (llamado **codominio** de la función C_f), por lo que se dice que f es función de A en B. De manera análoga, la correspondencia g es una función.





Definición: Imagen, Preimagen y Rango de una función

Si $f : A \rightarrow B$, entonces los elementos del dominio de f reciben el nombre de **preimagenes**, mientras que los elementos del codominio, que están asociados con algún elemento del dominio, reciben el nombre de **imagenes**. Ahora bien, el conjunto de imagenes de la función f recibe el nombre de **ámbito** o **rango** y se representa por R_f.

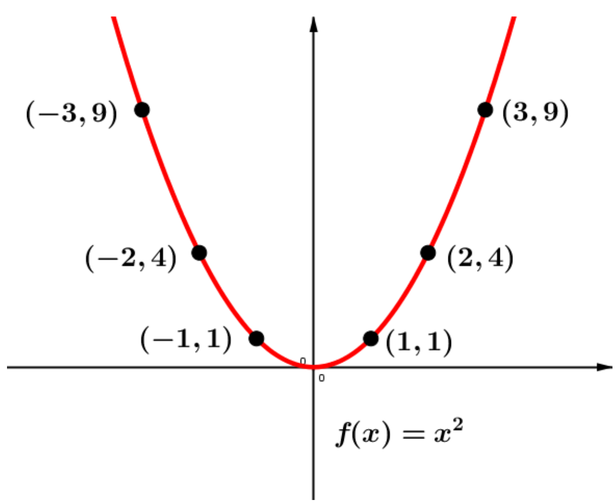
En el diagrama de Venn anterior se tiene que $D_f = \{1, 2, 4\}$, $C_f = \{3, 4, 5, 6\}$ y $R_f = \{3, 4, 5\}$. De manera análoga, se deduce que $D_g = [2, 4]$, $C_g = [1, 4]$.

Definición: Gráfico y gráfica de una función

El conjunto de pares ordenados que se obtiene a partir de la una función f recibe el nombre de gráfico y se representa de la siguiente manera:

$$G_f = \{(x, y) \,/\, x \in A\,,\, \in B\}$$

Por otro lado, la gráfica de una función en una varible, es una representación gráfica en el plano cartesiano, de todos los puntos obtenidos a partir del gráfico de la función. Un ejemplo de gáfica para una función se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo: Concepto de función

Determine cúal de las siguientes relaciones corresponde a una función, justifique su respuesta.

a) Correspondencia que asocia a cada estudiante del curso Introducción a Cálculo su peso en kilogramos.

b) Correspondencia que asocia a cada usuario de línea telefónica la empresa de telecomunicaciones que le brinda el servicio.

c) Correspondencia que asocia a todos los miembros de una familia con su edad cumplida en años.

Definición: Criterio de una función

Es la regla de correspondencia entre las preimagenes y las imagenes. En algunos casos es posible utilizar fórmulas matemáticas para describir el criterio de una función.

Ejemplo: Correspondencia con criterio

Sean $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $Y = \{4, 3, 2, 1, 0\}$ dos conjuntos, establezca una correspondencia $X \to Y$ por medio del criterio $f(x) = x^2$. ¿Corresponde este cirterio de correspondencia a una función $f : A \to B$? Justifique su respuesta por medio de un diagrama de Venn.

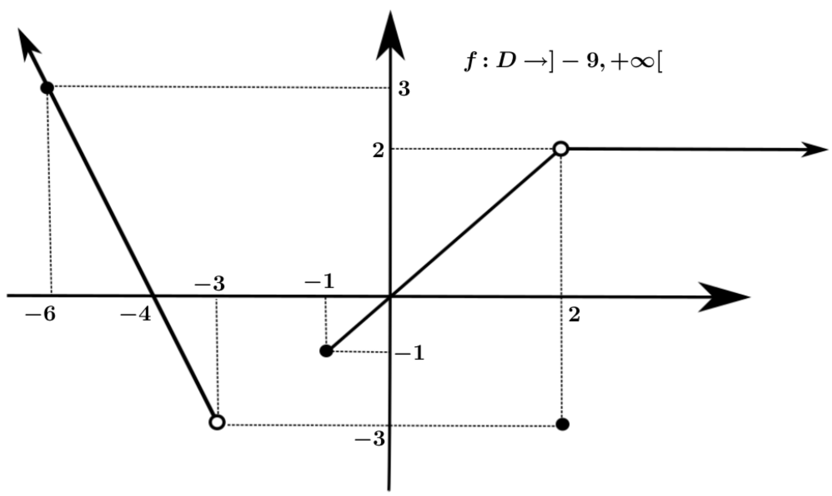
2.2. Análisis de gráficas de funciones

Dada la gráfica de una función es posible determinar ciertas características, tales como: dominio, codominio, rango, intersecciones con los ejes coordenados, signos de la función y monotonia.

Ejemplo: Interpretación de gráficas de funciones

De acuerdo con los datos de cada una de las siguientes gráficas determine las características que se le solicitan.

a)



a) Dominio

b) Ámbito

c) Codominio

d) $f(0)$

e) $f(2)$

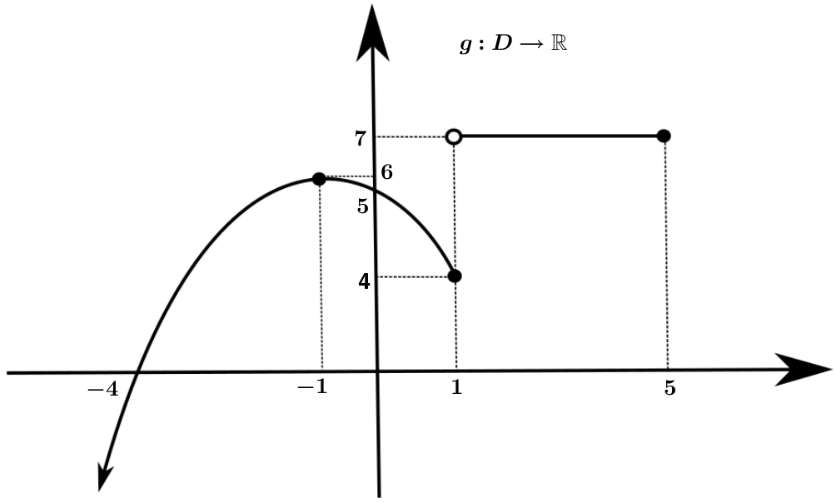
f) Intersecciones

g) Una preimagen de 0

h) Monotonía

i) Signos de la función

b)



a) Dominio

b) Ámbito

c) Codominio

d) $g(2)$

r) $g\left(\frac{11}{4}\right)$

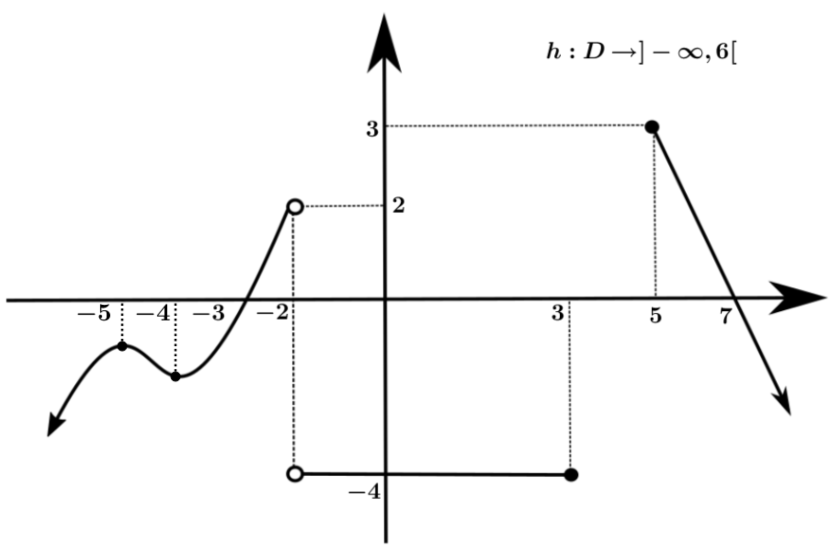
f) Intersecciones

g) Una preimagen de 4

h) Monotonía

i) Signos de la función

c)



a) Dominio

b) Ámbito

c) Codominio

d) $h(-1)$

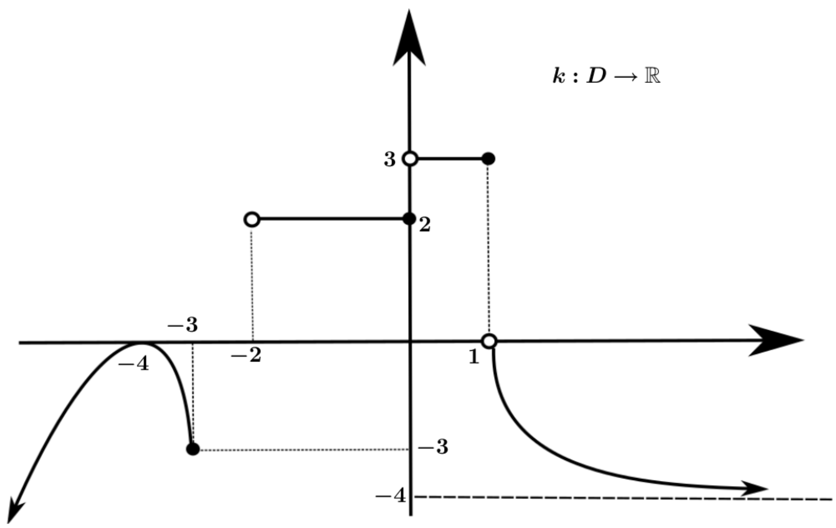
e) $h(-3)$

f) Intersecciones

g) Una preimagen de 3

h) Monotonía

i) Signos de la función

d) 

a) Dominio

b) Ámbito

c) Codominio

d) $k(1)$

e) $k(-4)$

f) Intersecciones

g) Una preimagen de -1

h) Monotonía

i) Signos de la función

2.3. Dominio máximo real

El dominio máximo real de una función f es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual una función $f(x)$ está definida. El dominio máximo de una función se calcula de acuerdo a su criterio:

a) **Función Polinomial**: Si el criterio de una función real de variable real es un polinomio de grado n, entonces su dominio máximo será $\mathbb{R}$.

b) **Función Racional**: Si el criterio de una función real de variable real es una fracción de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinimios de grado n, entonces su dominio máximo será:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) = 0\}$$

c) **Función Radical**: Si el criterio de una función real de variable real es del tipo $\sqrt[n]{p(x)}$, donde $p(x)$ es una expresión algebraica en la variable x, entonces su dominio máxmimo será:

- ⋆ *Si n es par*: $D_f : p(x) \geq 0$ el conjunto solución de la inecuación que se forma con el subradical.
- ⋆ *Si n es impar*: $D_f = \mathbb{R}$

d) **Combinación de casos**: Si el criterio de una función real de variable real es una combinación de los casos anteriores, entonces se analiza cada definición por aparte y se deduce el dominio máximo general.

Ejemplo: Cálculo de dominio máximo

Calcule el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones.

Algunos ejemplos introductorios:

(a) $f(x) = 4x^4 - 20x^3 + 51x^2 + x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

(b) $g(x) = -3x^2 + x - 1$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \dfrac{5 - 2x}{3}$ $\qquad D_h = \mathbb{R}$

Las tres funciones tienen por dominio máximo, el conjunto de los números reales, pues al ser polinomios, no se indefine en ningún valor.

(d) $h(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{3x + 1}$

Solución y explicación

En este caso que la función es racional, se iguala a 0 el denominador y se buscan las restricciones, veamos:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

El dominio máximo en esta caso son los números reales, menos el conjunto de las restricciones, es decir:

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$$

(e) $g(x) = \dfrac{3 - x}{2x^2 - 3x - 9}$

Solución

Denominador igual a 0

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

Se puede resolver en la calculadora, encontrando las restricciones $x = 3, x = \dfrac{-3}{2}$, así el dominio máximo es:

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{3, \frac{-3}{2}\right\}$$

(f) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 - x - 6}$

Solución y explicación

Al ser una función radical, de índica par, se toma el subradical mayor o igual a cero, y se resuelve la desigualdad.

$x^2 - x - 6 \geq 0$ Se factoriza por ser polinomial

$(x-3)(x+2) \geq 0$ Se buscan los ceros de cada factor.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3; x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Se construye la tabla.

	$]-\infty, -2[$	$]-2, 3[$	$]3, +\infty[$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Ahora nos va interesar siempre, por ser una función radical de índice par, la parte positiva, así que el dominio máximo es:

$$D_f =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$$

De aquí en adelante se analizarán ejemplos de criterios combinados

a) $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \dfrac{x+1}{2x^2 - 5x + 3}$

Solución y explicación

Se hace el análisis respectivo de la siguiente manera: el subradical de la raíz de índice par (en este caso raíz cuadrada) debe ser mayor o igual a 0, en el caso del denominador igualamos a 0 y buscamos restricciones, veamos:

$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$-(x-3)(x+1) \geq 0$

$x = 3, x = -1$

Se construye la tabla

	$]-\infty, -1[$	$]-1, 3[$	$]3, +\infty[$
-1	$-$	$-$	1
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	1	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$

Nuestro primer dominio es: $D_1 = [-1, 3]$

Nuestro segundo dominio va ser la parte racional, buscando las restricciones:

$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}, x = 1$

Nuestro segundo dominio es: $D_2 = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}, 1\right\}$

Finalmente el dominio máximo es la intersección de ambos:

$$D_g = [-1, 3] - \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$$

b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{5} + \dfrac{x+6\sqrt{x^3-x}}{3x^2-13x+4}$

Solución y explicación

En este caso vamos a tomar lo que está dentro de la raíz mayor o igual a 0, y el denominador igual a 0

Denominador

$3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = \dfrac{1}{3}$

$D_1 = \mathbb{R} - \left\{4, \dfrac{1}{3}\right\}$

Radical índice par

$x^3 - x \geq 0$

$x(x^2 - 1) \geq 0$

$x(x-1)(x+1) \geq 0$

$x = 0, x = 1, x = -1$

Construimos la tabla:

	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,1[$	$]1,+\infty[$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$D_2 = [-1,0] \cup [1,+\infty[$

Ahora nuestro dominio general es:

$$D_f = [-1,0] \cup [1,+\infty[- \{4\}$$

c) $h(x) = \dfrac{2x + 7\sqrt{-3x(x-2)(x+1)}}{5x^2 + 15x - 20}$

Solución

Radical índice par

$-3x(x-2)(x+1) \geq 0$ ya esta factorizado, solo encontremos los ceros, y construimos la tabla.

$x = 0, x = 2, x = -1$

	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 2[$	$]2, +\infty[$
$-3x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$D_1 =]-\infty, -1] \cup [0, 2]$

Denominador

$5x^2 + 15x - 20 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -4$

$D_2 = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$

Nuestro dominio general:

$$D_h =]-\infty, -1] \cup [0, 2] - \{-4, 1\}$$

d) *(Opcional)* $m(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x - 12} + 3x^2}{-6 + x + x^2}$

Respuesta: $D_m =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[- \{-3\}$

e) Determine el dominio máximo de la función h definida por:

$$h(x) = \frac{\sqrt[8]{x^2 - 4x}}{x^2 - 4}$$

Solución

D_{h_1} : Raíz de índica par, subradical mayor a 0

$$x^2 - 4x \geq 0$$

Factor común: x

$$x(x-4) \geq 0$$

Se determinan los ceros, para construir la tabla

$$x = 0; \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Construimos la tabla de valores

	$]\infty, 0[$	$]0, 4[$	$]4, +\infty[$
x	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$D_{h_1} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

D_{h_2} : Función Racional: Denominador = 0

$x^2 - 4 = 0$ de donde $x = 2, x = -2$

$D_{h_2} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Así: $D_h = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]4, +\infty[\, - \{2\}$

f) *(Opcional)* Determine el dominio máximo de la función h definida por:

$$h(x) = \frac{2x}{9x^2 - 3x^3} + \sqrt[6]{-x^2 + 8x - 15}$$

D_{h_1} : Función racional, denominador = 0

Basta tomar el denominador igual a 0

$$9x^2 - 3x^3 = 0$$

Factor común: $3x^2$

$$3x^2(3 - x) = 0$$

Igualamos a cero cada factor:

$$3x^2 = 0 \;\; 3 - x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \wedge 3 = x$$

De lo anterior, el dominio $D_{h_1} = \mathbb{R} - \{3, 0\}$

D_{h_2} : Función radical, índice par, subradical ≥ 0

$$-x^2 + 8x - 15 \geq 0$$

Factorice un menos a factor común

$$-\left(x^2 - 8x + 15\right) \geq 0$$

$$-(x - 5)(x - 3) \geq 0$$

Se factoriza el término cuadrático, y se encuentran los ceros de cada factor:

$$x = 5, x = 3$$

Procedemos a construir la tabla

	$]-\infty, 3[$	$]3, 5[$	$]5, +\infty[$
-1	$-$	$-$	$-$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x-3$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

$D_{h_2} : [3, 5]$

$$D_h =]3,] \Rightarrow D_h = [3, 5] - \{3\}$$

g) *(Opcional)* Determine el dominio máximo de la función h definida por:

$$h(x) = \frac{\sqrt[10]{x^2 - 3x}}{9 - x^2}$$

Solución

D_{h_1} : Raíz Par, tome subradical mayor o igual a 0

$x^2 - 3x \geq 0$ Factorizamos por factor común un x

$x\,(x-3) > 0$ Obtenemos los ceros de cada factor

$x = 0$ $x = 3$ los ceros de los factores anteriores

Construimos la tabla:

	$]-\infty, 0[$	$]0, 3[$	$]3, +\infty[$
x	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$D_{h_1} =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$$

D_{h_2} : Función racional, denominador $= 0$

$9 - x^2 = 0$ Basta con introducir los datos en la calculadora, donde $a = -1, b = 0, c = 9$, así

$x = 3, x = -3$

$D_{h_2} = \mathbb{R} - \{3, -3\}$

Finalmente el dominio de toda la función es:

$$D_h =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[- \{-3, 3\}$$

h) *(Opcional)* Determine el dominio máximo de la función h definida por:

$$f(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt[4]{-x^3 + 15x^2 - 14x}}$$

Solución

Esta es una función radical, pero con una raíz de índice par ubicada en el denominador, por lo cual el dominio máximo se determina con el subradical de la raíz mayor estricto a 0, es decir:

$$-x^3 + 15x^2 - 14x > 0$$

La anterior es una inecuación polinomial, vamos a factorizar el polinomio dado, en este caso, vamos a factorizar utilizando un factor común:

$$-x\left(x^2 - 15x + 14\right) > 0$$

$$-x\,(x - 14)\,(x - 1) > 0$$

Determinamos los ceros de cada factor:

$$-x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14;\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Construimos la tabla

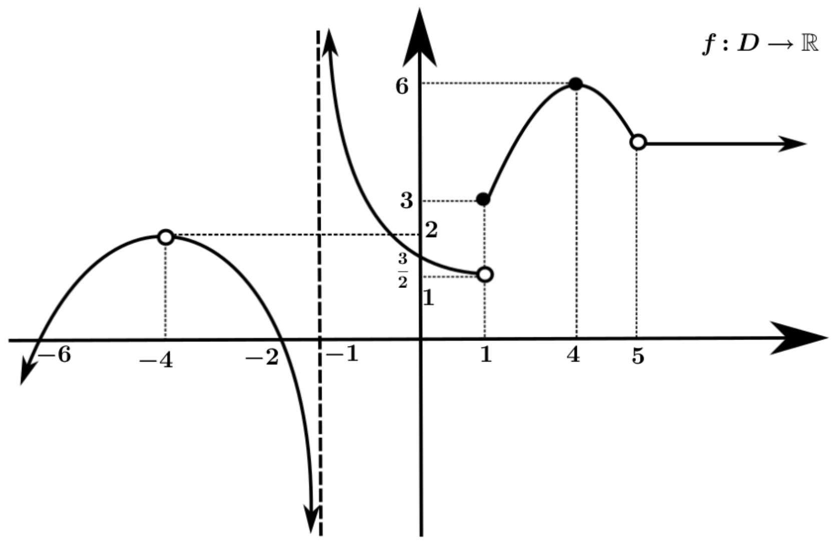
	$]-\infty, 0[$	$]0, 1[$	$]1, 14[$	$]14, +\infty[$
$-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 14$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Finalmente

$$D_f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, 14\right[$$

2.4. Práctica Complementaria

a) Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$.



a) Dominio

b) Ámbito

c) Intersecciones

d) $f(1)$

r) $f(4)$

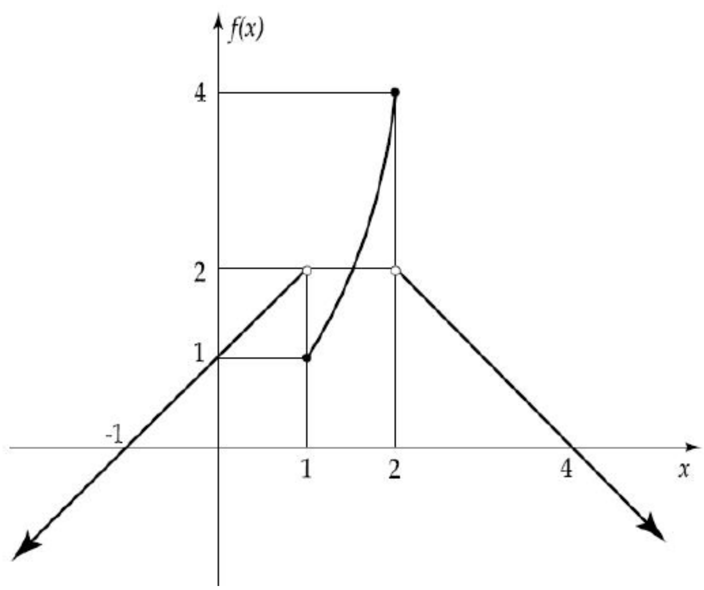
f) Intersecciones

g) Una preimagen de 3

h) Monotonía

i) Signos de la función

b) Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función f y responda lo que se le solicita.



a) Dominio

b) Ámbito

c) La preimagen de 4

d) $f(1)$

r) $f(4)$

f) Intersecciones

g) Una preimagen de 1

h) Monotonía

i) Signos de la función

- Hallar el dominio máximo de la función $a(x) = \dfrac{9-8x}{\sqrt[6]{-x^2+9}} + \dfrac{5x}{x^2+2x-3}$

- Hallar el dominio máximo de la función $a(x) = \dfrac{9-8x}{\sqrt[6]{2x^2+4x}} + \dfrac{5x+6x^3-8}{x^2-11x+28}$

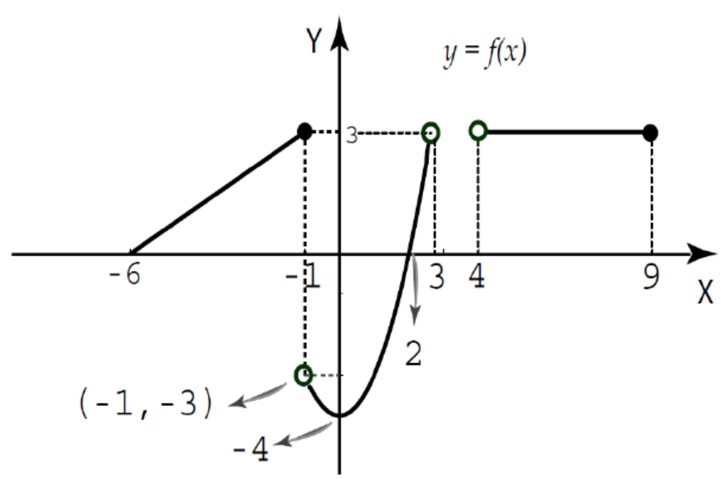
c) Hallar el dominio máximo de la función $f(x) = \sqrt[4]{2x^2+7x-15} - \dfrac{9x^2}{3x^2-x-2}$

d) Determine el dominio máximo de la función k, definida como: $k(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x-3}}{x^2-9}$

e) Determine el dominio máximo de la función w, definida por:

$$w(x) = \frac{\sqrt[6]{4x-x^3}}{-x^2+5x-4}$$

f) Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función f y responda lo que se le solicita.



a) Dominio

b) Ámbito

c) Una preimagen de 3

d) Las intersecciones con el eje x

e) Intersección con el eje y

f) La preimagen de -4

g) $f(7)$

h) La imagen de $\dfrac{15}{2}$

i) Todos los intervalos de monotonía

j) Todos los intervalos de los signos de la función

3. Función Lineal y Función Cuadrática

3.1. Función lineal

Una función lineal es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es una expresión de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales.

Nota: La gráfica de una función lineal es una recta, por tal razón el criterio $y = mx + b$ suele llamarse *ecuación de la recta* con **pendiente** m e intersección con el eje y en el punto $(0, b)$.

Ejemplos: Criterios de funciones lineales Son ejemplos de funciones lineales los criterios siguientes.

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $3y - 4x = 5$

c) $-7x - y = 5$

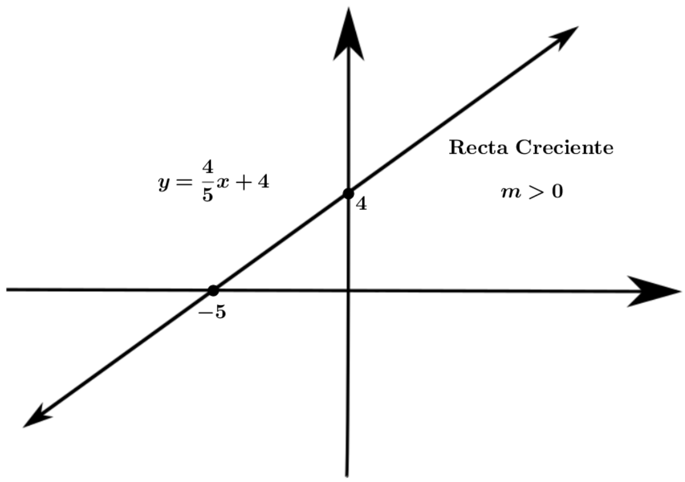
d) $g(x) = 4x$

Definición: Monotonía de la función lineal

Dado que $m \in \mathbb{R}$, entonces satisface la *ley de tricotomía* al compararlo con el número cero, es decir que existen tres posibilidades de comparación entre m y el cero, estas son: $m > 0, m < 0$ y $m = 0$. De acuerdo a estas posibilidades de comparación es que se define la monotonía de una función lineal. Una recta en el plano puede ser estrictamente **creciente** $(m > 0)$, estrictamente **decreciente** $(m < 0)$, o bien, **constante** $(m = 0)$ en todo su dominio.

Observe cada una de las siguientes gráficas que definen a una función lineal y analice las características que de ellas se derivan, especialmente en cuestión de pendiente e intersecciones con los ejes:

Gráfica de la función lineal	Características

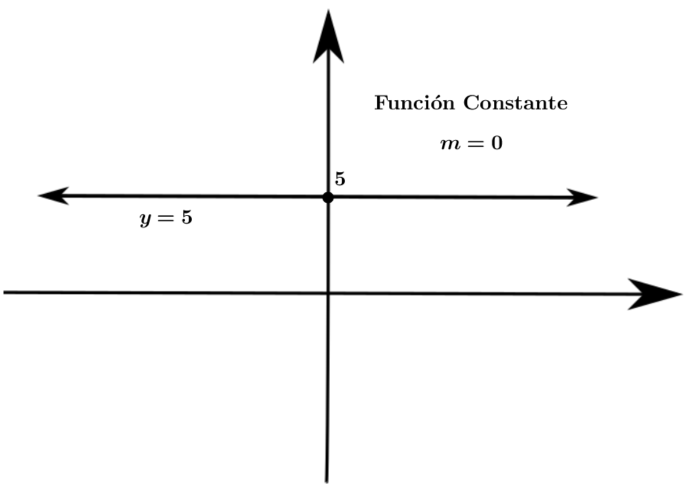


a) El valor de la pendiente es $m = \frac{4}{5}$

b) Al ser la **pendiente positiva** entonces su gráfica es escritamente **creciente** en todo su dominio.

c) El punto de intersección con el eje y es $(0, 4)$

d) El punto de intersección con el eje x es $(-5, 0)$

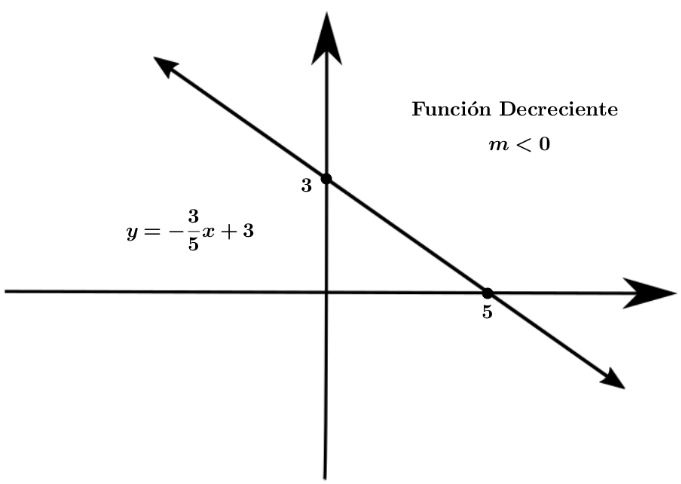


a) El valor de la pendiente es $m = 0$

b) Al ser la **pendiente nula** entonces su gráfica es constante (no crece ni decrece) en todo su dominio.

c) El punto de intersección con el eje y es $(0, 5)$

d) No existe intersección con el eje x



a) El valor de la pendiente es $m = -\frac{3}{5}$

b) Al ser la **pendiente negativa** entonces su gráfica es escritamente **decreciente** en todo su dominio.

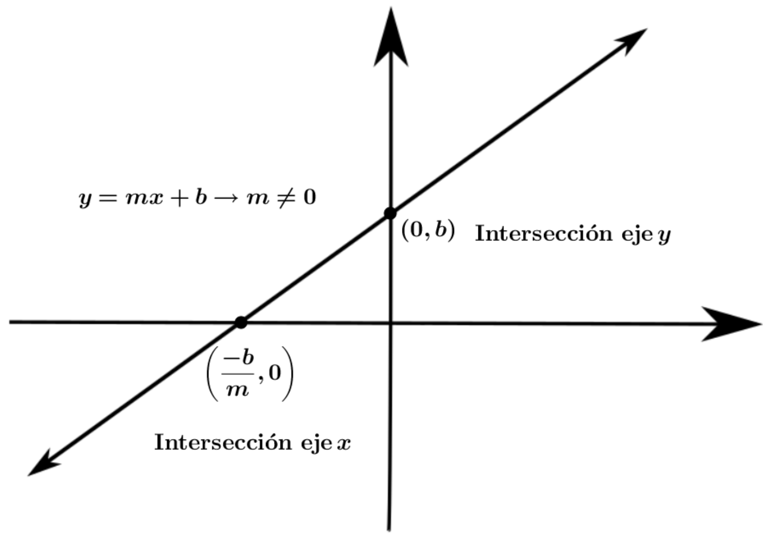
c) El punto de intersección con el eje y es $(0, 3)$

d) El punto de intersección con el eje x es $(5, 0)$

Definición: Intersecciones con los ejes de una función lineal

La gráfica de la función lineal $y = mx + b$ interseca al eje x específicamente en el punto $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$, esto es posible si y sólo si $m \neq 0$, de lo contrario (cuando la función es constante) no existe intersección con el eje x. Además, se sabe que la intersección con el eje y de la función lineal es específicaente en el punto $(0, b)$.

Observe la siguiente figura donde se muestran las intersecciones con los ejes de una función lineal en general.



Definición: Pendiente de la recta que pasa por dos puntos

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se obtiene a partir de la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre y cuando $x_2 \neq x_1$.

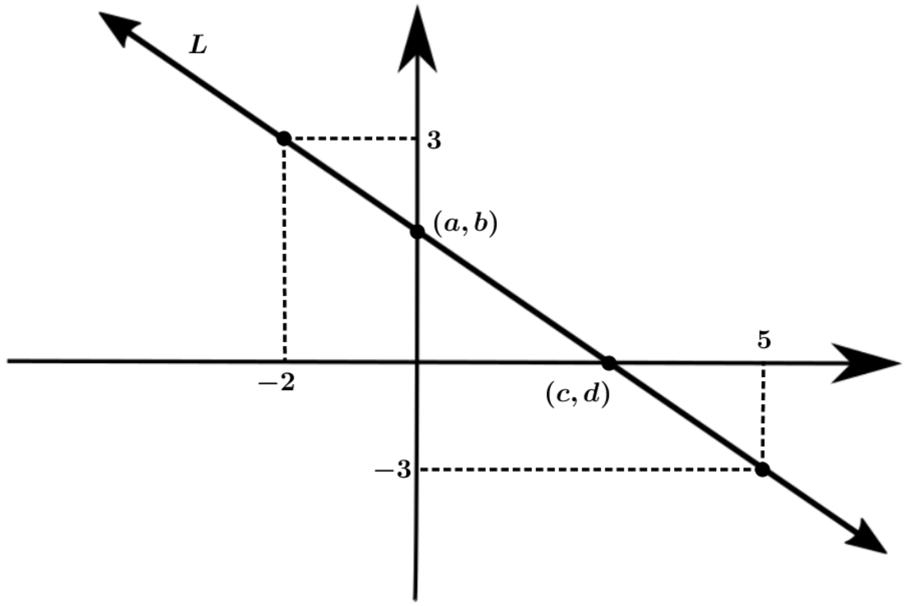
Definición: Fórmula pendiente-punto. La ecuación de la recta.

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) se obtiene a partir de la siguiente fórmula, llamada *fórmula pendiente-punto*:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplos: Ecuación de una recta

1. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función lineal.



De acuerdo con los datos de la figura anterior, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

a) Construya la ecuación de la recta L.

b) Determine las coordenadas cartesianas de los puntos (a, b) y (c, d).

Datos del problema:

Pares ordenados: $(-2, 3)$ y $(5, -3)$. La primera parte nos piden construir la ecuación de la recta, para lo cual determinamos primero el valor de m, usando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De los pares ordenados decimos que: $x_1 = -2, y_1 = 3; x_2 = 5, y_2 = -3$, así:

$$m = \frac{-3 - 3}{5 - -2} = \frac{-6}{7}$$

Ahora usamos la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación usando: $m = \frac{-6}{7}$, el par $(-2, 3)$, así:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{-6}{7}(x - -2) \Rightarrow y = \frac{-6}{7}x - \frac{12}{7} + 3 \Rightarrow y = \frac{-6}{7}x + \frac{9}{7}$$

Ahora (a, b) es el par ordenado de intersección del eje y así que:

Intersección eje y: $(a, b) = \left(0, \frac{9}{7}\right)$.

Mientras que el par ordenado (c, d) es la intersección con el eje x, así. intersección con el eje x: $(c, d) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

2. Considere la recta M que tiene pendiente $m = -\frac{3}{4}$ y que pasa por el punto $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$. Determine la ecuación de la recta M y las coordenadas rectangulares de los puntos que corresponden a las intersecciones con los ejes coordenados. Haga un bosquejo de la gráfica en el plano cartesiano.

   Datos del problema:
   $m = \frac{-3}{4}$ pendiente de la recta M, par ordenado $\left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ de donde $x_1 = \frac{-1}{2}; y_1 = \frac{7}{4}$, ahora usamos la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{7}{4} = \frac{-3}{4}\left(x - -\frac{1}{2}\right)$$

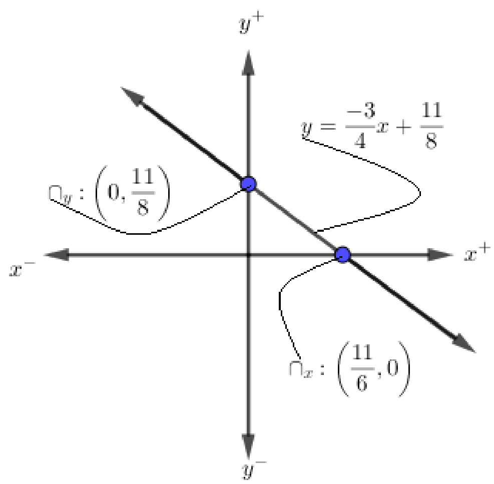
$$y = \frac{-3}{4}x - \frac{3}{8} + \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{11}{8}$$

De lo anterior $m = \frac{-3}{4}, b = \frac{11}{8}$

Buscamos las intersecciones con los ejes coordenados.

$$\cap_x : \left(\frac{-b}{m}, 0\right) = \left(\frac{\frac{-11}{8}}{\frac{-3}{4}}, 0\right) = \left(\frac{11}{6}, 0\right) \qquad \cap_y : (0, b) = \left(0, \frac{11}{8}\right)$$



3. Considere la ecuación de la recta L dada por $y - k^2x = 6 - kx$, determine el valor o los valores del parámetro k, para que la recta dada sea:

   a) Creciente en todo su dominio.

   b) Decreciente en todo su dominio.

   c) Constante en todo su dominio.

   Para este problema tome la ecuación original y despeje y:

   $y - k^2x = 6 - kx$

   $y = k^2x - kx + 6$ Factorice un x a factor común en los primeros dos términos

   $y = (k^2 - k)x + 6$ determinemos el valor de la pendiente

   $m = k^2 - k$

   Ahora analicemos la pendiente según sea el caso para la mnonotonía:

Estrictamente creciente	Estrictamente decreciente	Constante
$k^2 - k > 0$	$k^2 - k < 0$	$k^2 - k = 0$

   Para la parte estrictamente creciente y estrictamente decreciente, factorizamos y resolvemos la inecuación pertinente:

   $k(k-1)$ Factorizado, los ceros son $k = 0, k = 1$

	$]-\infty, 0[$	$]0, 1[$	$]1, +\infty[$
k	$-$	$+$	$+$
$k-1$	$-$	$-$	$+$
$k(k-1)$	$+$	$-$	$+$

   Respuestas:

   a) La recta L es creciente si $k \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

   b) La recta L es decreciente si $k \in]0, 1[$

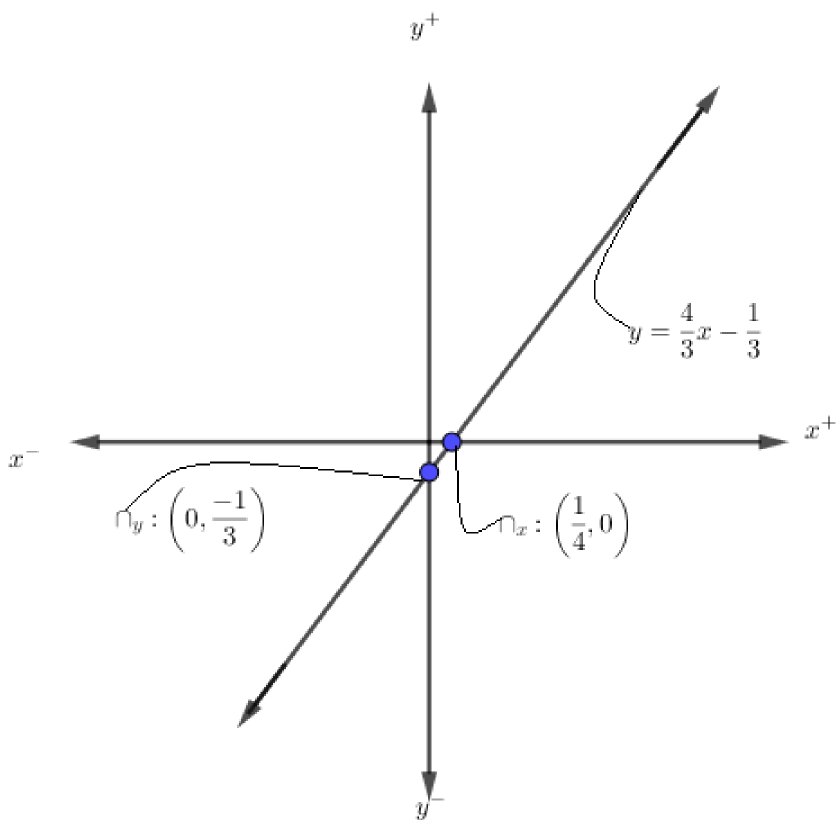
   c) La recta es constante si:

   $k^2 - k = 0 \Rightarrow k = 0, k = 1$ es decir si $k \in \{0, 1\}$

4. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función $y = \dfrac{4x-1}{3}$ en el plano cartesiano, e identificar las siguientes características: dominio, intersecciones con los ejes, monotonía y ámbito.

   Reescriba el criterio de la función como $y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{1}{3}$, de donde $m = \dfrac{4}{3} > 0$ por cual es una función estrictamente creciente, además $b = \dfrac{-1}{3}$, por otro lado:

   $$\cap_y : (0, b) \Rightarrow \cap\left(0, \frac{-1}{3}\right) \qquad \cap_x : \left(\frac{-b}{m}, 0\right) \Rightarrow \left(\frac{-\left(\frac{-1}{3}\right)}{\frac{4}{3}}, 0\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right)$$



   $D = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{R}$

3.2. Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas $L_1 : y = m_1x + b_1$ y $L_2 : y = m_2x + b_2$ son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$, es decir si sus respectivas pendientes son iguales. De la misma forma, esas dos rectas serán perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

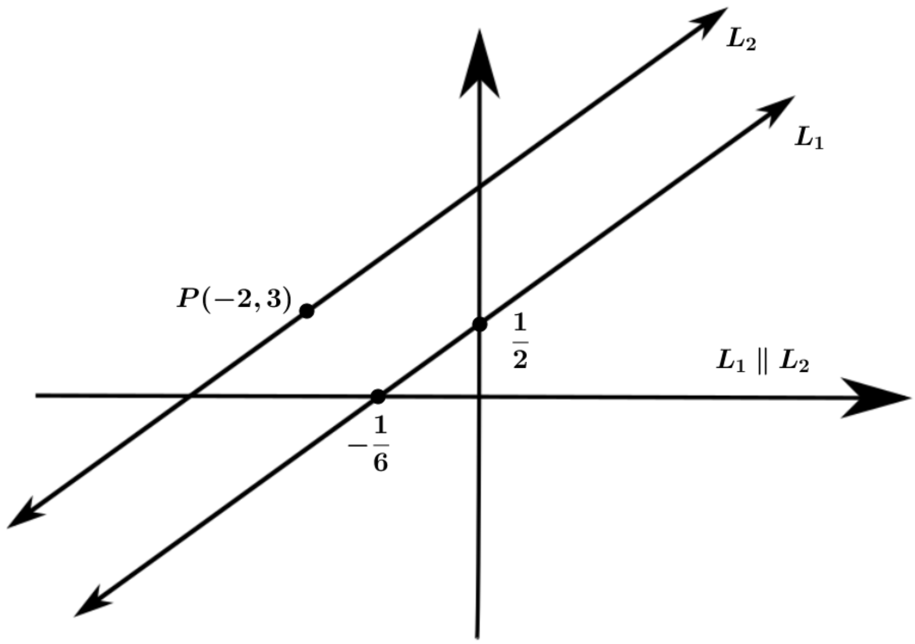
En resumen, se tiene que:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplos: Ecuación de una recta paralela o perpendicular a otra

1. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de las rectas L_1 y L_2.



De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine la ecuación de la recta L_2.

Solución y explicación

Datos del problema

Recta L_1

Pares Ordenados: $\left(\frac{-1}{6}, 0\right); \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Recta L_2

Par ordenado: $(-2, 3)$

Además; $L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2$. Se determina la pendiente de L_1, pues si se logra calcular la pendiente entonces al ser paralela a L_2, las pendientes tendrá el mismo valor, observemos: $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \frac{\frac{1}{2} - 0}{0 - \frac{-1}{6}} \Rightarrow m_1 = 3$. Así: $m_1 = m_2 \Rightarrow m_2 = 3$

Usando la ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$ usando $m_2 = 3$ y el par ordenado $(-2, 3)$: $y - 3 = 3(x - -2) \Rightarrow y = 3x + 6 + 3 \Rightarrow L_2 : y = 3x + 9$

2. Considere las rectas $L_1 : y = k - 3x + 1$ y $L_2 : y = 2x - 36 + kx$. Determine el valor o los valores del parámetro k para que las rectas dadas sean:

   a) Paralelas $m_1 = m_2$

   b) Perpendiculares $m_1 \cdot m_2 = -1$

   Ahora para cada ecuación hacemos un acomodo, para encontrar las pendientes:

   $L_1 : y = k - 3x + 1$

   $L_1 : y = -3x + 1 + k$

   $m_1 = -3$

   $L_2 : y = 2x - 36 + kx$

   $L_2 : y = (2 + k)x - 36$

   $m_2 = 2 + k$

   Ahora si $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

   Igualamos las pendientes

   $-3 = 2 + k$

   $-3 - 2 = k$

   $-5 = k$ si $L_1 \parallel L_2$

   Si $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

   Multiplicamos e igualamos a -1, las pendientes:

   $-3(2 + k) = -1$

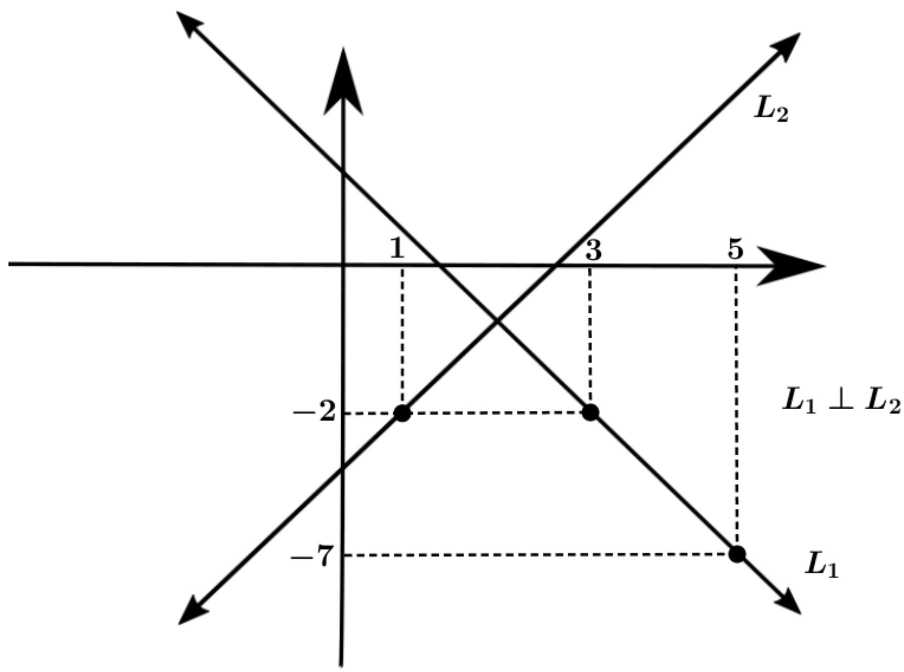
   $-6 - 3k = -1$

   $-3k = -1 + 6$

   $-3k = 5$

   $k = \frac{-5}{3}$ si $L_1 \perp L_2$

3. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de las rectas L_1 y L_2.



De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine la ecuación de la recta L_2.

Solución y explicación

Datos del problema

Recta L_1

Pares Ordenados: $(5,-7)$; $(3,-2)$

Recta L_2

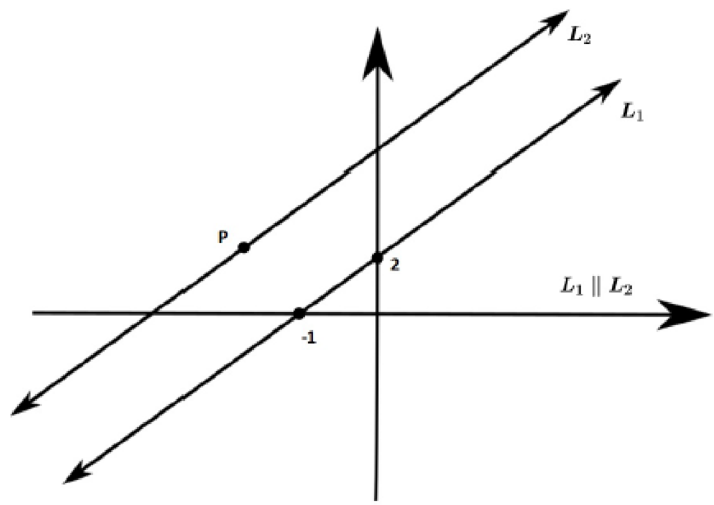
Par ordenado: $(1,-2)$

Además; $L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$. Se determina la pendiente de L_1, pues si se logra calcular la pendiente entonces al ser perpendicular a L_2, se resolvería una ecuación, observemos: $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \dfrac{-2 - -7}{3-5} \Rightarrow m_1 = \dfrac{-5}{2}$. Así: $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \dfrac{-5}{2} \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \dfrac{2}{5}$

Usando la ecuación punto-pendiente, donde $m_2 = \dfrac{2}{5}$ y $(1,-2)$, observe:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - -2 = \frac{2}{5}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} - 2 \Rightarrow L_2 : y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}$$

4. De acuerdo con los datos de la figura adjunta.



Determine

a) La ecuación de la recta L_1.

Solución

Los puntos de la recta L_1 son $(0,2)$ y $(-1,0)$, de donde $x_1 = 0, y_1 = 2, x_2 = -1, y_2 = 0$, aplicando la fórmula de m, tenemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{-1-0} \Rightarrow m = 2$$

Ahora se usa la ecuación punto-pendiente, tomando $m = 2$ y el par ordenado $(0,2)$, así:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = 2(x - 0)$$
$$L_1 : y = 2x + 2$$

b) La ecuación de la recta L_2, sabiendo que $P = \left(-2, \dfrac{7}{3}\right)$.

Solución

Aquí como $L_1 \parallel L_2$ entonces $m_1 = m_2$, así $m_2 = 2$, ahora con $P = \left(-2, \frac{7}{3}\right)$, use la ecuación punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{3} &= 2(x - -2) \\ y &= 2x + 4 + \frac{7}{3} \\ L_2 : y &= 2x + \frac{19}{3} \end{aligned}$$

c) Los puntos de intersección con los ejes cartesianos de la recta L_2.

Solución

$\cap_y : \left(0, \frac{19}{3}\right)$

$\cap_x : \left(\frac{-\frac{19}{3}}{2}, 0\right) \Rightarrow \left(\frac{-19}{6}, 0\right)$

5. Sea la recta $N : 4y + 8x - 16 = 0$, que es perpendicular a la recta E que contiene al punto $(3, -2)$. Determine la ecuación de la recta E, haga un bosquejo de ambas rectas en un mismo plano cartesiano

Solución

Recta $N : 4y + 8x - 16 = 0$

Despejamos y, de la recta N

$4y = -8x + 16$

$y = \dfrac{-8x}{4} + \dfrac{16}{4}$

$y = -2x + 4$

$m_N = -2$

Recta E : Punto $(3, -2)$

$N \perp E \Rightarrow m_N \cdot m_E = -1$

$-2 \cdot m_E = -1$

$m_E = \dfrac{-1}{-2}$

$m_E = \dfrac{1}{2}$

Ahora usando la ecuación **punto-pendiente** encontramos la ecuación de la recta E, con $m = \dfrac{1}{2}$ y el par ordenado $(3, -2)$

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1)\\
y - -2 &= \frac{1}{2}(x - 3)\\
y + 2 &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\\
y &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2\\
E : y &= \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Para graficar ambas rectas, necesitamos los puntos de intersección con el eje x y el eje y, para ambas rectas

Recta N

$m = -2$

$b = 4$

$\cap_y : (0, 4)$

$\cap_x : \left(\dfrac{-(4)}{-2}, 0\right) \Rightarrow (2, 0)$

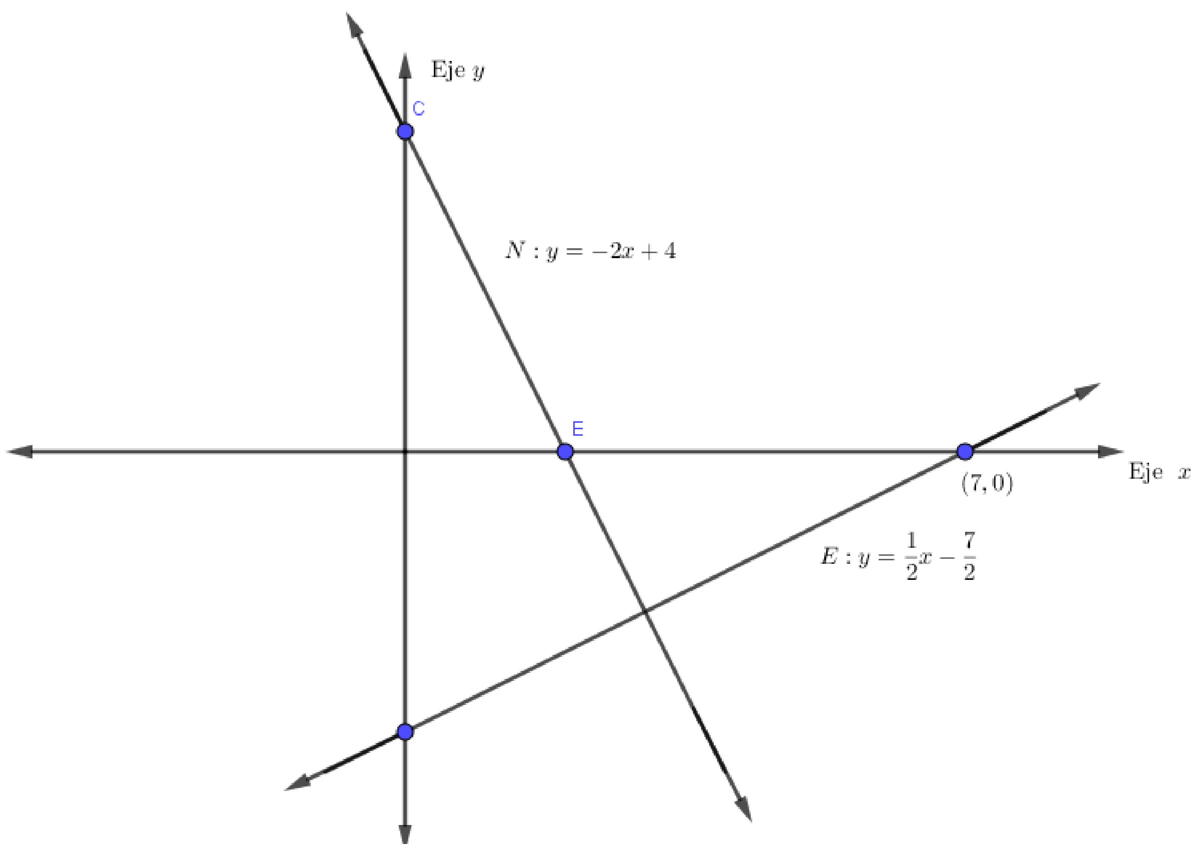
Recta E

$m = \dfrac{1}{2}$

$b = \dfrac{-7}{2}$

$\cap_y : \left(\dfrac{-7}{2}, 0\right)$

$\cap_x : \left(\dfrac{-\left(\dfrac{-7}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}}, 0\right) \Rightarrow (7, 0)$



6. Determine la ecuación de la recta G que pasa por el punto $P(2,-5)$ y que es perpendicular a la recta E cuya ecuación se define por $-2x-5y=-8$. Además realice el bosquejo de la gráfica de la función G.

Solución

De la ecuación de la recta E, podemos despejar y para expresarla de la forma $y=mx+b$, veamos:

$-2x-5y=-8$

$-2x+8=5y$

$y=\dfrac{-2x}{5}+\dfrac{8}{5}$ de donde tenemos que la pendiente es: $m_E=\dfrac{-2}{5}$

Como $G\perp E$, entonces $m_E\cdot m_G=-1$, por lo cual:

$\dfrac{-2}{5}\cdot m_G=-1 \Rightarrow m_g=\dfrac{-1}{\frac{-2}{5}} \Rightarrow m_G=\dfrac{5}{2}$

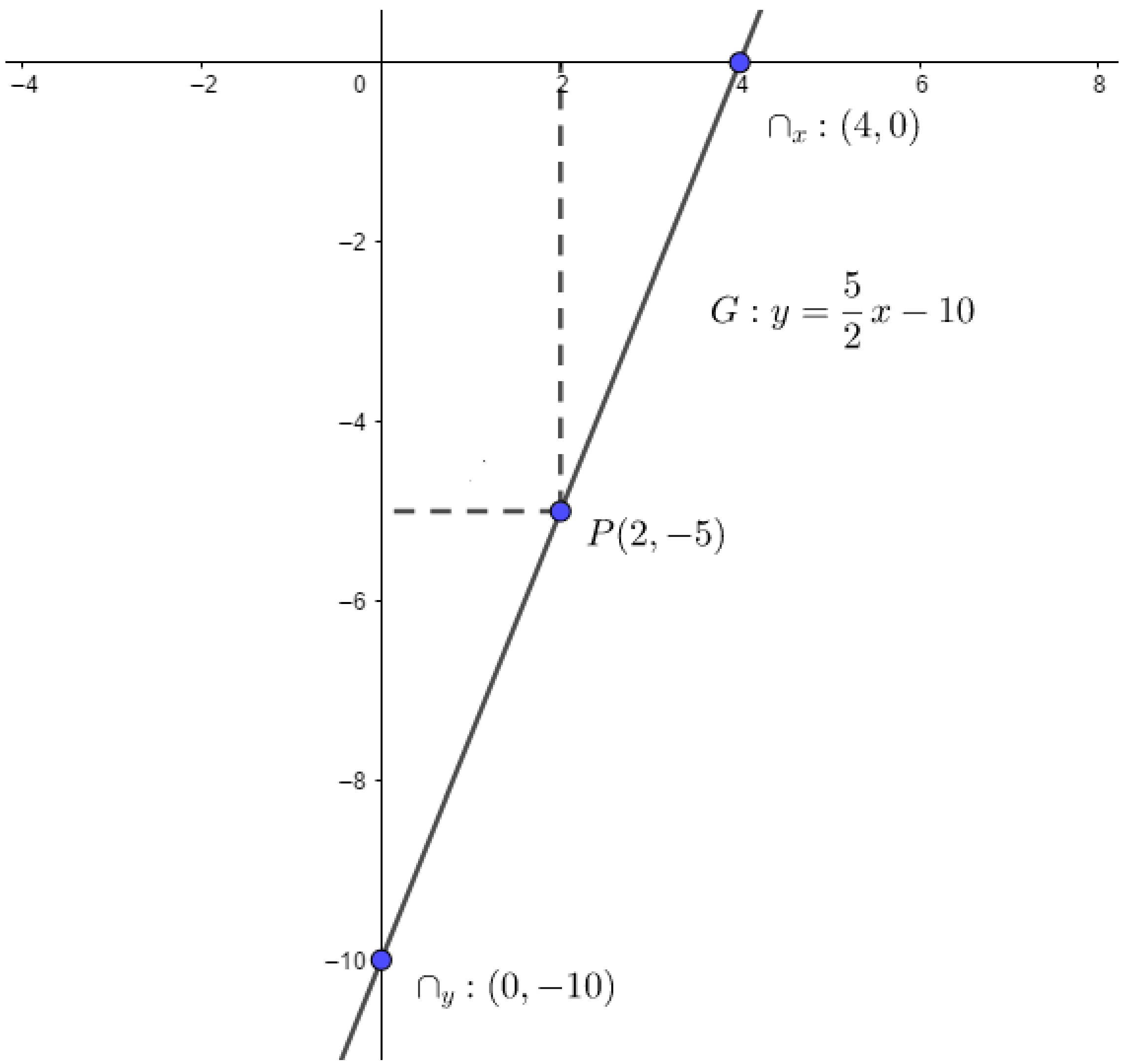
Ahora con el punto $P(2,-5), m_G=\dfrac{5}{2}$, y la ecuación punto pendiente, se construya la ecuación de la recta G, veamos:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y--5 &= \frac{5}{2}(x-2) \\ y+5 &= \frac{5}{2}x-5 \\ y &= \frac{5}{2}x-5-5 \\ G: y &= \frac{5}{2}x-10 \end{aligned}$$

Para graficar la recta G, necesitamos los pares ordenados de las intersecciones con los ejes cartesianos, así:

- $\bigcap_y : (0, b) = (0, -10)$
- $\bigcap_x : \left(\dfrac{-b}{m}, 0\right) = \left(\dfrac{--10}{\dfrac{5}{2}}, 0\right) = (4, 0)$

<u>**Gráfica de la recta G**</u>



7. Dadas las rectas

$$l_1 : -3x + 2y - 5 = 0 \quad l_2 : y = 3wx - 8$$

Determine el valor del parámetro w para que l_1 y l_2 sean perpendiculares.

Solución

Debemos despejar la ecuación de l_1, veamos $2y = 3x + 5$, despejamos $y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$, de donde $m_1 = \frac{3}{2}$, ahora la pendiente $m_2 = 3w$, como son perpendiculares entonces $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 3w = -1 \Rightarrow \frac{9}{2}w = -1 \rightarrow w = \frac{-2}{9}$

8. Dadas la recta L_1 que pasa por el punto $P(-2,4)$ y que es paralela a la recta $Q(-1,3)$ y $R(3,5)$. Determine la ecuación de la recta L_1 y L_2

Solución

Recta L_2

Datos: $Q(-1,3)$ y $R(3,5)$, calculamos la pendiente:

$$m_2 = \frac{5-3}{3--1}$$

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación de L_2

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - -1)$$

$$L_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Recta L_1

Como $L_1 \parallel L_2$ entonces $m_1 = m_2$ asi: $m_1 = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de L_1

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - -2)$$

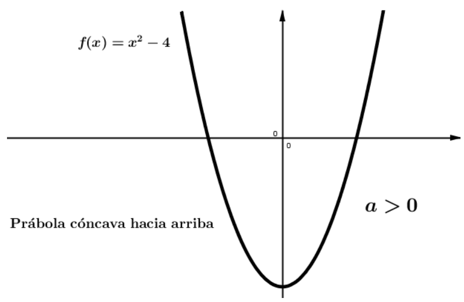
$$L_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

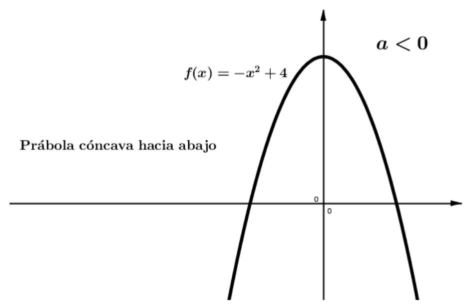
3.3. Función Cuadrática

Definición: Función Cuadrática

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, se estudia las siguientes características

1. Concavidad





Si $a > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

Si $a < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

2. Intersecciones

   a) **Intersección con el eje y:** La intersección con el eje y de la gráfica de una función cuadrática es en el punto $(0, c)$, donde c es el término independiente del criterio de dicha función.

   b) **Intersección con el eje x:** Para la intersección con el eje x, se estudia el discriminante:

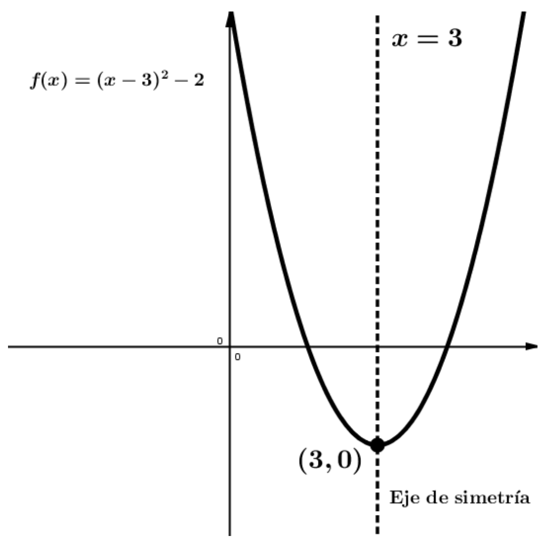
$$\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

   Se consideran los siguientes casos:

   - Si $\triangle > 0$: la función tiene dos intersecciones distintas, con el eje x, que son $(x_1, 0); (x_2, 0)$
   - Si $\triangle = 0$: la función tiene una única intersección con el eje x, que es $(x, 0)$
   - Si $\triangle < 0$: la función no interseca al eje x.

Para obtener la intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x, se plantea y resuelve la siguiente ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. La intersección puede ser en dos puntos, en uno o en ninguno, todo depende del signo que presente el discriminante.

3. **Eje de simetría y Vértice**



El eje de simetría es una recta vertical (paralela al eje y) que divide la parábola en dos mitades congruentes, esta recta siempre pasa a través del vértice.

La coordenada x del vértice es la ecuación del eje de simetría en la parábola, y se obtiene a partir de la fórmula $x = \dfrac{-b}{2a}$, por lo tanto las coordenadas cartesianas del vértice son:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$$

Nota: Observe que si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{-\triangle}{4a}$, por lo que la coordenada y del vértice se puede calcular simplemente con la imagen de $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Considere que:

- Si $a > 0$ el vértice, se llama punto mínimo.
- Si $a < 0$ el vértice, se llama punto máximo.

4. **Monotonía, ámbito y signos de la función:** Estos elementos a estudiar, aunque presentan fórmulas, no es buena idea memorizarlas, por lo cual es mejor, realizar una representación gráfica, y estudiar a partir dichos elementos a partir de ella.

Ejemplos:

Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determine: discriminante, concavidad, intersecciones con los ejes coordenados, eje de simetría, vértice, monotonía, ámbito, signos de la función. Además, realice un bosquejo de la gráfica resultante

1. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

   a) Considere que $a = 1, b = -4, c = -5$

   b) Concavidad: $a = 1 > 0$, entonces f es una parábola cóncava hacia arriba.

   c) Intersecciones:

      c.1) $\cap_y : (0, -5)$

      c.2) Se estudia el discriminante: $\triangle = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 36 > 0$, así la función interseca al eje x en dos puntos distintos, para obtenerlos:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 5$$

$$\therefore \cap_x : (-1, 0) ; (5, 0)$$

   d) Eje de simetría y Vértice:

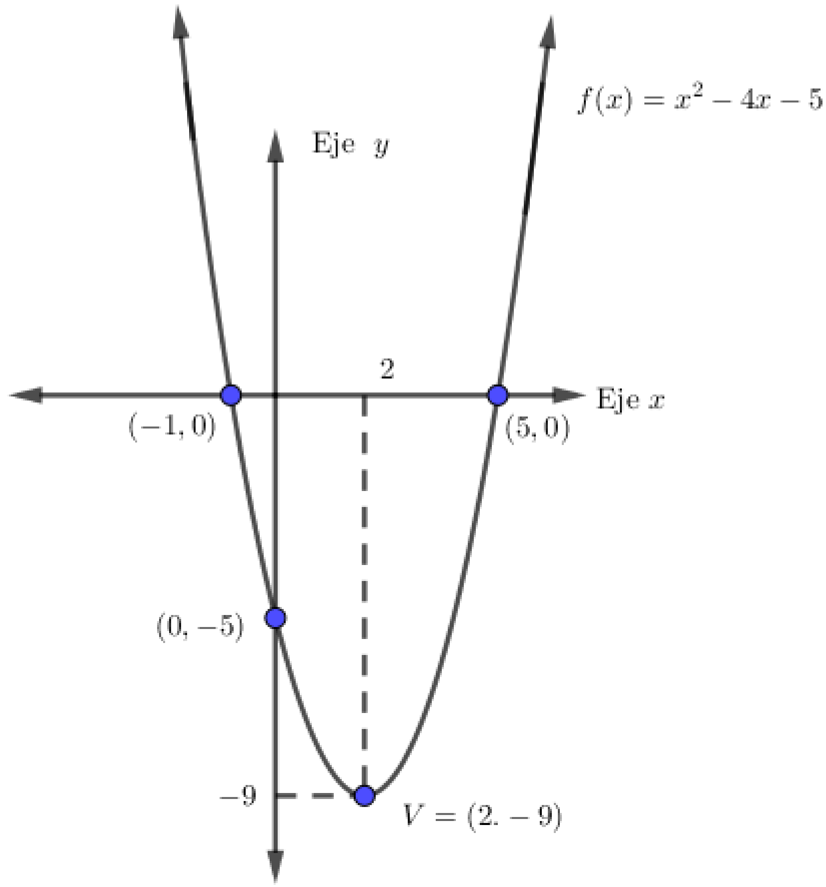
      d.1) Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 2$

      d.2) Vértice: como $a = 1 > 0$, entonces el vértice es punto mínimo.

$$V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{-\triangle}{4 \cdot a} \right) = \left(\frac{-(-4)}{2 \cdot 1}, \frac{-(36)}{4 \cdot 4} \right)$$

$$V = (2, -9)$$

e) Representación gráfica



f) Ámbito: $A_f = [-9, +\infty[$

g) Monotonía:

g.1 Estrictamente creciente: $]2, +\infty[$

g.2 Estrictamente decreciente: $]-\infty, 2[$

h) Signos de la función

h.1 $f(x) > 0$: $]-\infty, -1[$; $]5, +\infty[$

h.2 $f(x) < 0$: $]-1, 5[$

h.3 $f(x) = 0$: $\{-1, 5\}$

2. $g(x) = 4 - (x-3)^2$.

Primero se desarrolla la fórmula notable, luego cambio de signos, y finalmente, resta de términos semejantes para lograr la forma general de una función cuadrática:

$g(x) = 4 - (x^2 - 6x + 9) \Rightarrow g(x) = 4 - x^2 + 6x - 9$

$$\boxed{g(x) = -x^2 + 6x - 5}$$

a) $a = -1, b = 6, c = -5$

b) Concavidad: $a = -1 < 0$, g cóncava hacia abajo.

c) Intersecciones

c.1) $\cap_y : (0, -5)$

c.2) Intersección con el eje x, estudiamos el discriminante:

$$\triangle = (6)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -5 \Rightarrow \triangle = 16 > 0$$

De lo anterior, g tiene dos puntos de intersecciones con el eje x, se obtiene con $-x^2 + 6x - 5 = 0$

Así, $\cap_x : (5, 0)\,; (1, 0)$

d) **Eje de simetría y Vértice**

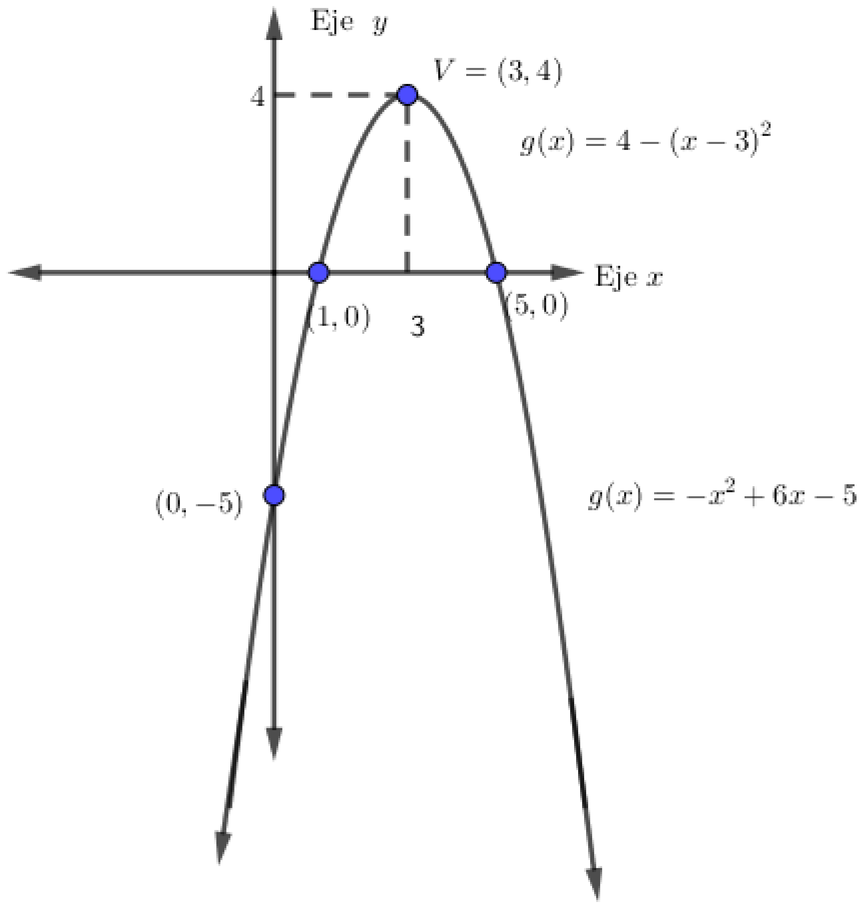
d.1) Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \dfrac{-(6)}{2 \cdot -1} \Rightarrow x = 3$

d.2) Vértice: como $a = -1 < 0$, el vértice es punto máximo.

$V = \left(\dfrac{-b}{2 \cdot a}, \dfrac{-\triangle}{4 \cdot a}\right) = \left(\dfrac{-(6)}{2 \cdot -1}, \dfrac{-(16)}{4 \cdot -1}\right)$

$$V = (3, 4)$$

e) Representación gráfica:



f) **Ámbito:** A_g **:** $]-\infty, 4]$

g) **Monotonía:**

g.1 Estrictamente creciente: $]-\infty, 3[$

g.2 Estrictamente decreciente: $]3, +\infty[$

h) Signos de la función

h.1 $g(x) > 0$: $]1, 5[$

h.2 $g(x) < 0$: $]-\infty, 1[$; $]5, +\infty[$

h.3 $f(x) = 0$: $\{1, 5\}$

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -4 + 5x - x^2$, determine:

   a) Concavidad e intersecciones con los ejes cartesianos

   Solución

   Concavidad $a = -1 < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo

   Intersecciones: $\bigcap_y : (0, c) = (0, -4)$

   $\bigcap_x$: tomamos $-4 + 5x - x^2 = 0$, así $x_1 = 4.x_2 = 1$, finalmente $\bigcap_x : (4, 0), (1, 0)$

   b) Eje de simetría y vértice

   Solución

   Teniendo $a = -1, b = 5, c = -4$

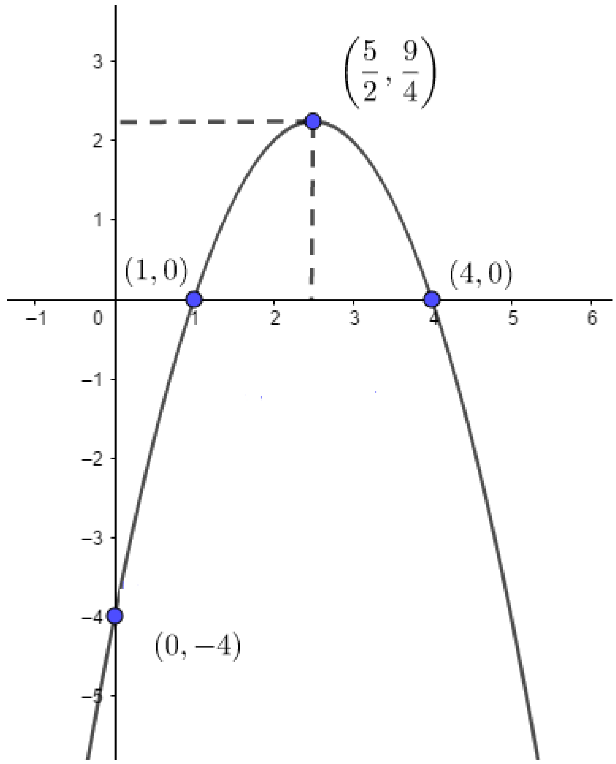
   Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-(5)}{2 \cdot -1} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

   Ahora $\triangle = b^2 - 4ac \Rightarrow \triangle = (5)^2 - 4(-1)(-4) = 9$, así

$$V = \left(\frac{5}{2}, \frac{-9}{4 \cdot -1}\right)$$

$$V = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

c) Bosquejo de la gráfica de la función f.



d) Ámbito e intervalos de monotonía

Solución

$A_f = \left]-\infty, \frac{9}{4}\right]$

f creciente: $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$

f decreciente $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

4. Dada la función cuadrática $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$k(x) = x^2 - 10x + 9$$

Realice el estudio completo, guiado de la siguiente manera:

a) Concavidad

b) Intersecciones con los ejes cartesianos.

c) Eje de simetría y vértice.

d) Bosquejo de la gráfica.

e) Ámbito de la función

f) Intervalos de monotonía

a) Como $a = 1 > 0$, k es cóncava hacia arriba.

b) $\cap_y : (0, 9)$

$\cap_x$: primero interpretamos el discriminante, donde $\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$$\triangle = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$\triangle = 64 > 0$ se interseca al eje x en dos puntos distintos

Se iguala la función a cero, y se resuelve la ecuación:

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x_1 = 9; x_2 = 1$$

$$\cap_x : (9, 0); (1, 0)$$

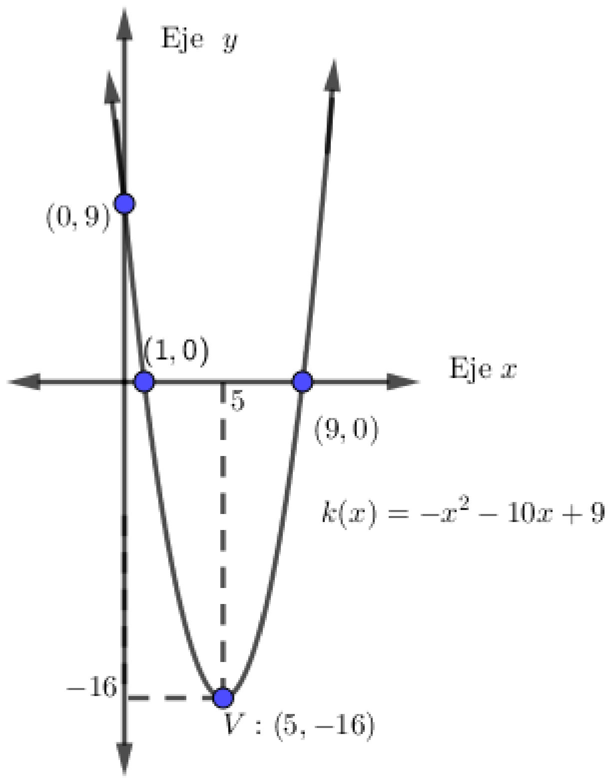
c) Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = -\dfrac{-(-10)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 5$

Como $a = 1 > 0$, el vértice es un punto mínimo, calculamos:

$\dfrac{-\triangle}{4 \cdot a} = \dfrac{-(64)}{4 \cdot 1} = -16$

$$V = (5, -16)$$

d) Bosquejo



e) Ámbito: $[-16, +\infty[$

f) Intervalos de monotonía

- Creciente: $]5, +\infty[$
- Decreciente: $]-\infty, 5[$

5. Dada la función cuadrática $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$k(x) = -4x - 2x^2$$

Realice el estudio completo, guiado de la siguiente manera:

a) Concavidad

b) Intersecciones con los ejes cartesianos.

c) Eje de simetría y vértice.

d) Bosquejo de la gráfica.

e) Ámbito de la función

f) Intervalos de monotonía

g) Un intervalo donde $k(x) > 0$

h) Un intervalos donde $k(x) < 0$

a) $a = -2 < 0$, k es cóncava hacia abajo

b) $\cap_y : (0,0)$ pues $c = 0$

$\cap_x :$ Analizamos el discriminante:

$$a = -2, b = -4, c = 0$$

$c = 0$. por esta ausente

$$\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\triangle = (-4)^2 - 4 \cdot -2 \cdot 0$$

$\triangle = 16 > 0$, esto concluye que la gráfica interseca al eje x en dos puntos.

Ahora para averiguar los puntos, basta con tomar la función e igualarla a cero y resolver la ecuación:

$$-4x - 2x^2 = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -2$$

$$\cap_x : (0,0)\,;(-2,0)$$

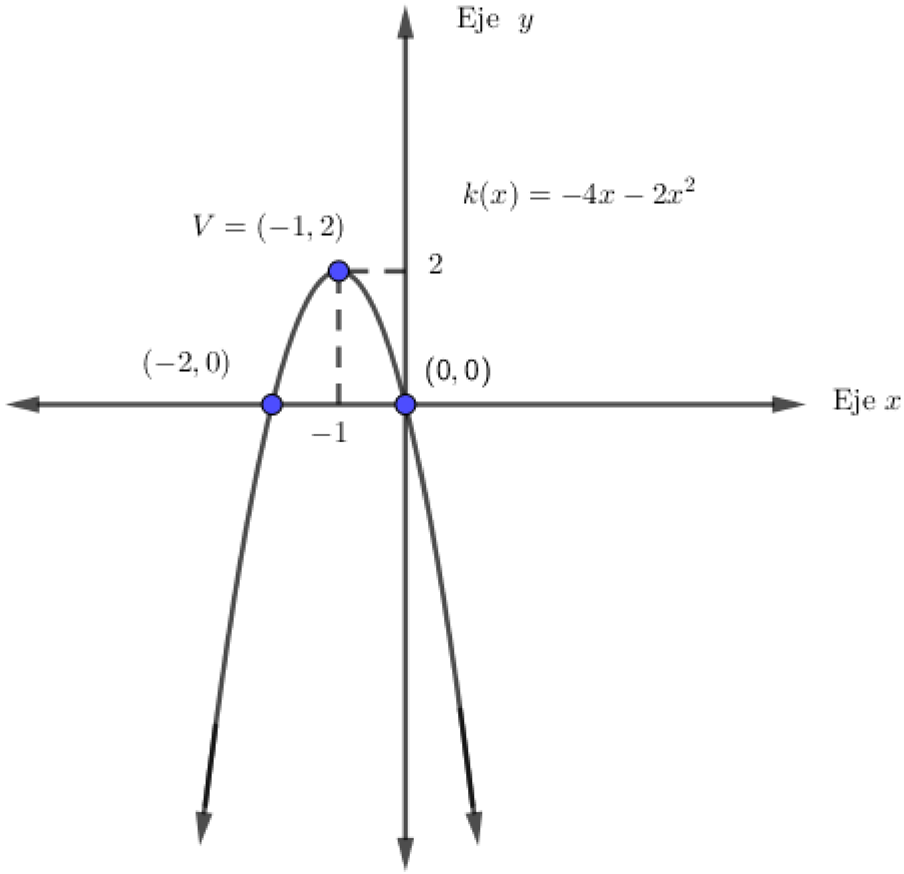
c) $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot -2} \Rightarrow x = -1$

$a = -2 < 0$, el vértice es un punto máximo

Calculamos: $\dfrac{-\triangle}{4 \cdot a} = \dfrac{-(16)}{4 \cdot -2} = 2$

$V = (-1, 2)$

d) Bosquejo de la gráfica:



e) Ámbito: $A_k =]-\infty, 2]$

f) Intervalos de monotonía:

- Creciente: $]-\infty, -1[$
- Decreciente: $]-1, +\infty[$

g) $k(x) > 0 :\ ]-2, 0[$

h) $k(x) < 0 :\ ]-\infty, -2[\ ;\ ]0, +\infty[$

6. Dada la función cuadrática $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$k(x) = -x^2 + 4x - 4$$

Realice el estudio completo, guiado de la siguiente manera:

a) Concavidad

b) Intersecciones con los ejes cartesianos.

c) Eje de simetría y vértice.

d) Bosquejo de la gráfica.

e) Ámbito de la función

f) Intervalos de monotonía

a) $a = -1 < 0$, de donde k es cóncava hacia abajo.

b) $\cap_y : (0, -4)$, recuerde $c = -4$

$\cap_x$ estudie el discriminante, de donde $\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \to \triangle \ (4)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -4 \Rightarrow \triangle = 0$, por lo cual k interseca al eje x en un único punto, se obtiene igualando la función a 0, así

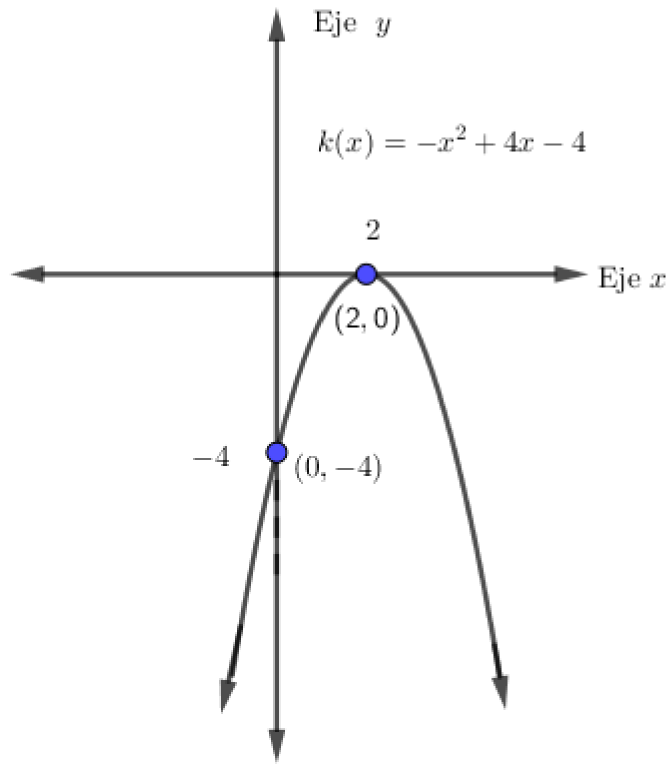
$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\cap_x : (2, 0)$$

c) Eje de simetría $x = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \dfrac{-(4)}{2 \cdot -1} \Rightarrow x = 2$

Vértice: $V = \left(\dfrac{-(4)}{2 \cdot -1}, \dfrac{0}{4 \cdot -1} \right) \Rightarrow V = (2, 0)$, de donde $a = -1 < 0$, el vértice es punto mínimo.

d) Bosquejo



e) Ámbito: $]-\infty, 0]$

f) Monotonía: creciente: $]-\infty, 2[$, decreciente: $]2, +\infty[$

3.4. Intersección entre curvas

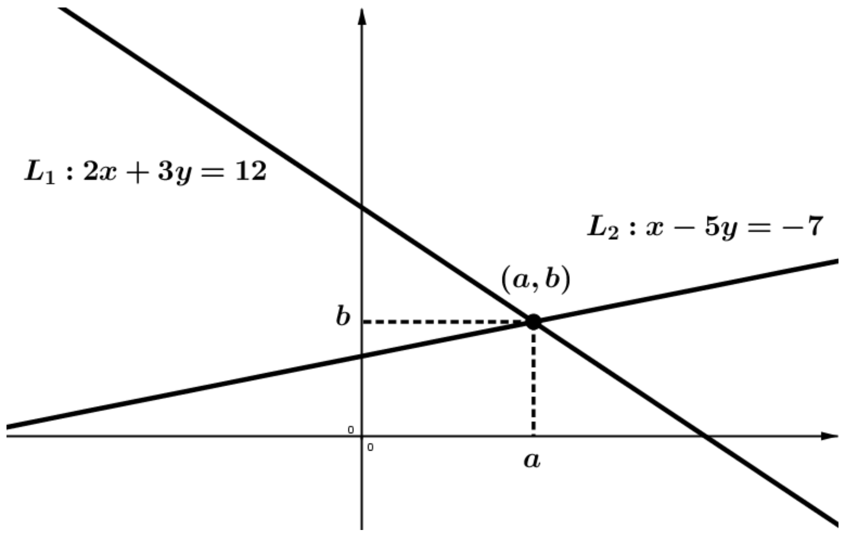
Los puntos que tienen en común (llamados puntos de intersección) las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, se obtienen al igualar los criterios de ambas funciones, es decir planteando y resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$. Las soluciones que se obtienen al resolver la ecuación anterior, determinan los puntos donde las dos curvas se cortan.

Pasos a seguir:

1. Ambas ecuaciones tienen que estar en la forma $y = f(x); y = g(x)$.
2. Igualar ambas ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$.
3. Resolver la ecuación pertinente (puede ser lineal, cuadrática o polinomial).
4. Encontrar el (los) valor(es) de x que satisfagan la ecuación anterior.
5. Con los valores anteriormente encontrados, sustituir en cualquiera de las dos funciones originales, para encontrar los puntos de intersección de la forma (x, y).
6. En caso de ser necesario graficar, estudiar las respectivas características de cada función.

Ejemplo: Intersecciones entre curvas

a) Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de las rectas L_1 y L_2 en el plano.



De acuerdo con los datos de la figura anterior determine las coordenadas rectangulares del punto (a, b) que es la intersección de las rectas L_1 y L_2.

Solución

Paso 1 : Despejar cada ecuación de la forma $y = mx + b$

$$L_1 : 2x + 3y = 12$$
$$3y = -2x + 12$$
$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{12}{3}$$
$$L_1 : y = \frac{-2x}{3} + 4$$

$$L_2 : x - 5y = -7$$
$$x + 7 = 5y$$
$$L_2 : y = \frac{x}{5} + \frac{7}{5}$$

Paso 2 : Iguale ambas ecuaciones entre sí, resuelva la ecuación pertinente.

$$\frac{-2x}{3} + 4 = \frac{x}{5} + \frac{7}{5}$$
$$\frac{-2x}{3} - \frac{x}{5} = \frac{7}{5} - 4$$
$$\frac{-13}{15}x = \frac{-13}{5}$$

$$x = \frac{\frac{-13}{5}}{\frac{-13}{15}}$$
$$x = 3$$

Paso 3 : Sustituya el valor encontrado en la ecuación que desee, en este caso en la ecuación de L_1, claramente en la despejada.

$$x = 3; L_1 : y = \frac{-2x}{3} + 4$$
$$y = \frac{-2 \cdot 3}{3} + 4$$
$$y = 2$$

El punto de intersección entre L_1 y L_2 es:

$$L_1 \cap L_2 = (3, 2)$$

b) Hallar el o los puntos de intersección entre la parábola $y = (x-1)^2 - 3$ y la recta $x - y = 2$. Haga un bosquejo de la dos gráficas en el mismo plano y señale los puntos encontrados.

Solución

Paso 1 En la ecuación de la parábola, elabore la fórmula notable, en la ecuación de la recta despeje y, observe

$y = (x-1)^2 - 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x - 2$

$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$

Paso 2 Igualamos ambos criterios y resolvemos la ecuación

$$x^2 - 2x - 2 = x - 2 \rightarrow \text{Ecuación Cuadrática}$$

$$\text{Iguale a } 0$$

$$x^2 - 2x - 2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 3; x = 0$$

Paso 3 Sustituya en la ecuación que guste, para encontrar los puntos de intersección.

x	$y = x^2 - 2x - 2$	Par Ordenado (x, y)
0	$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 2 \rightarrow y = -2$	$(0, -2)$
3	$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 \rightarrow y = 1$	$(3, 1)$

Paso 4 Determine los puntos de intersección para la parábola y para la recta.

Parábola $y = x^2 - 2x - 2$

$\cap_x : \left(1 + \sqrt{3}, 0\right) : \left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$

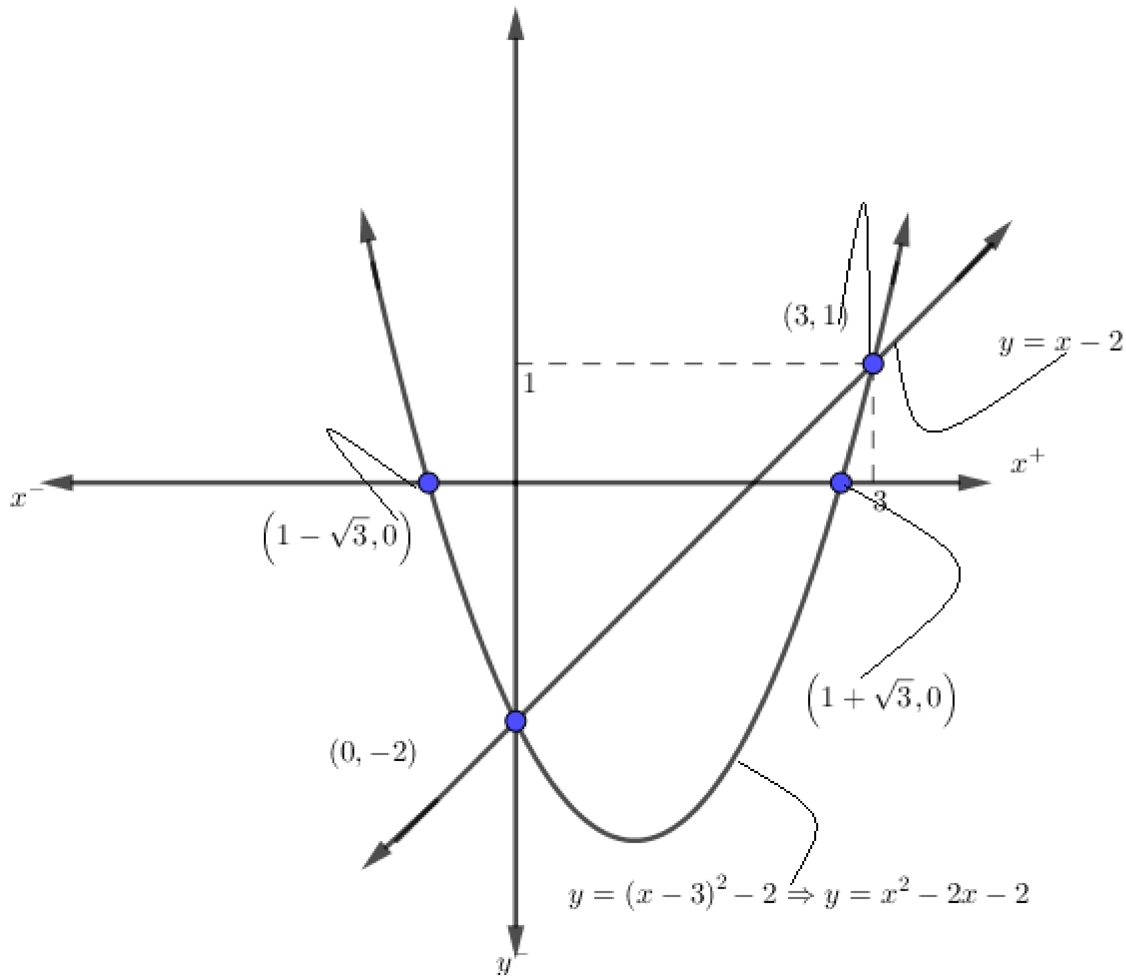
$\cap_y : (0, -2)$

Recta $y = x - 2$

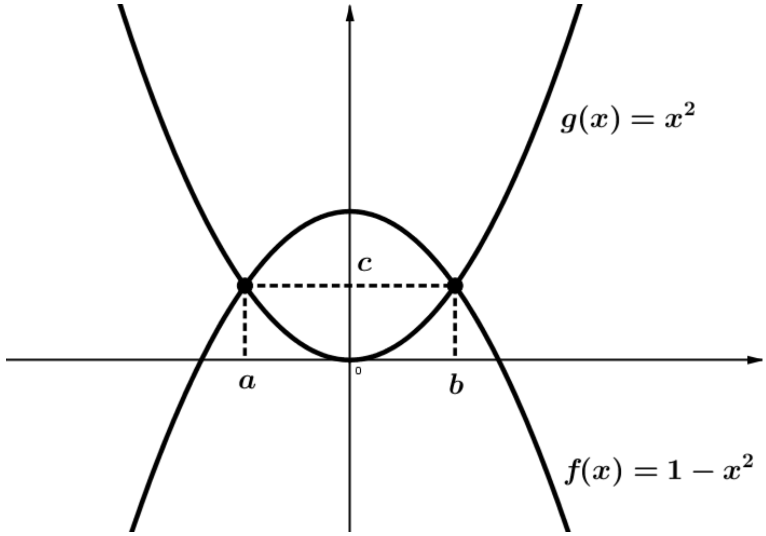
$\cap_x : (2, 0)$

$\cap_y : (0, -2)$

Paso 5 Grafique ambas curvas en el mismo plano



c) Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de las parábolas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x^2$



De acuerdo con los datos de la figura anterior determine las coordenadas rectangulares de los puntos (a, c) y (b, c).

Solución

Recordando que $f(x) = y$, $g(x) = y$, tenemos que $y = 1 - x^2; y = x^2$, igualamos ambos criterios:

$$1 - x^2 = x^2$$

$$1 - x^2 - x^2 = 0$$

$$1 - 2x^2 = 0, \text{ teniendo que } a = -2, b = 0, c = 1$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Sustituya en la ecuación que guste, para encontrar los puntos de intersección.

x	$y = x^2$	Par Ordenado (x, y)
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \to y = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$y = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \to y = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) Determine el o los puntos de intersección entre la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = 2x + 1$. Grafique ambas funciones en el mismo plano cartesiano.

Solución

Igualamos ambos criterios y resolvemos la ecuación pertinente:

$$x^2 + 1 = 2x + 1 \rightarrow \text{Ecuación cuadrática}$$

Igualamos a 0

$$x^2 + 1 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Calculamos los puntos de intersección:

Sustituya en la ecuación que guste, para encontrar los puntos de intersección.

x	$y = x^2 + 1$	Par Ordenado (x, y)
0	$y = 0^2 + 1 \rightarrow y = 1$	$(0, 1)$
2	$y = 2^2 + 1 \rightarrow y = 5$	$(2, 5)$

Encontramos los puntos de intersección y características principales de las funciones involucradas.

Parábola $y = x^2 + 1$

$\cap_x$: No interseca

$\cap_y : (0, 1)$

Vértice: $(0, 1)$

La parábola es cóncava hacia arriba.

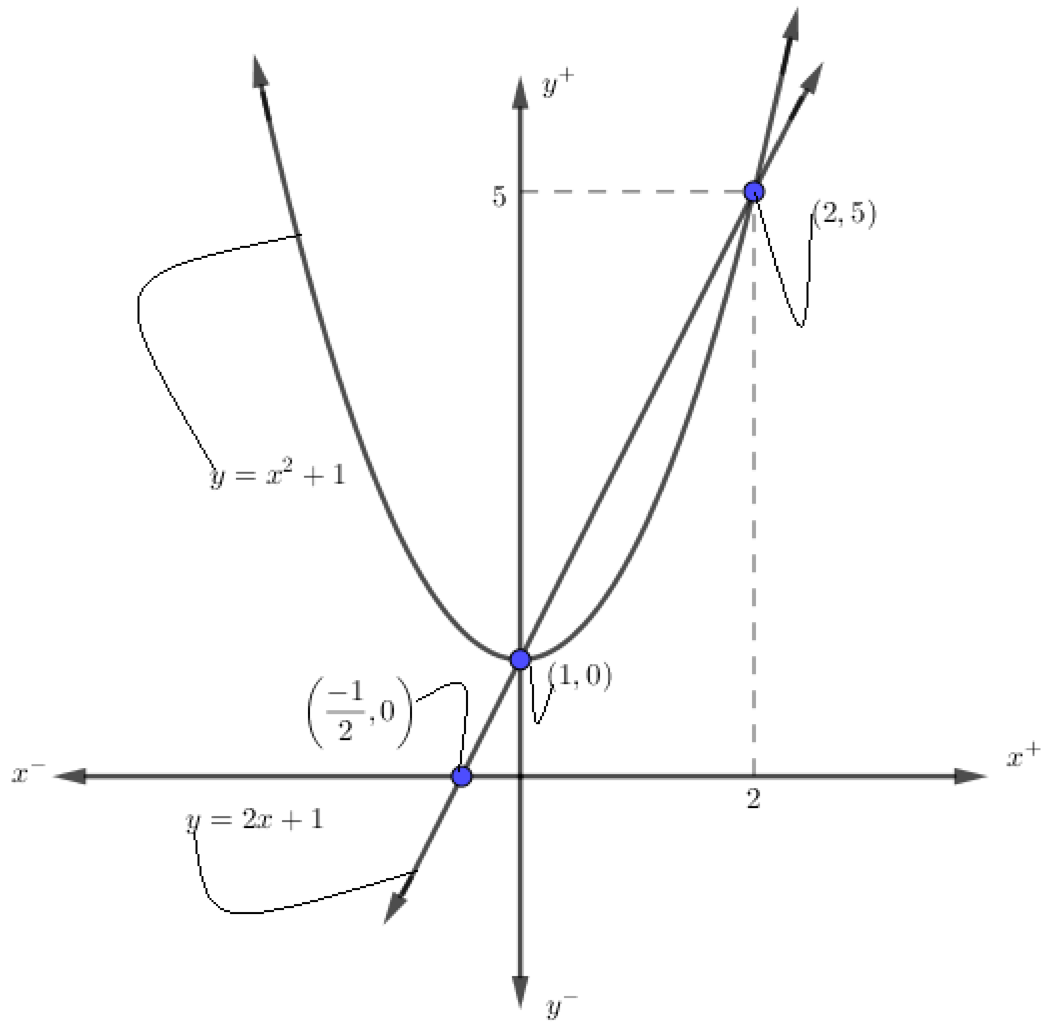
Recta $y = 2x + 1$

$m = 2; b = 1$

$m = 2 > 0$ la recta es estrictamente creciente

$\cap_y : (0, 1)$

$\cap_x : \left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$


y^+
5
$(2,5)$
$y = x^2 + 1$
$(1,0)$
$\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$
x^-
x^+
2
$y = 2x + 1$
y^-

e) Hallar el o los puntos de intersección entre la parábola $y = (x-2)^2 - 3$ y la recta $x + y = 5$. Haga un bosquejo de la dos gráficas en el mismo plano y señale los puntos encontrados.

Solución

Trabajamos un poco la ecuación de la parábola, desarrollando la fórmula notable y simplificando términos semejantes. En la recta despejamos fácilmente, para lograr la forma $y = mx + b$

$y = (x-2)^2 - 3$

$y = x^2 - 4x + 4 - 3$

$y = x^2 - 4x + 1$

$x + y = 5$

$y = 5 - x$

Ahora procedemos a igualar ambas ecuaciones:

$5 - x = x^2 - 4x + 1$

Igualamos a 0

$0 = x^2 - 4x + 1 + x - 5$

Simplificamos términos semejantes

$0 = x^2 - 3x - 4$

Con el apoyo e la calculadora, se tiene que

$x = 4, x = -1$

Teniendo los valores de x, podemos sustituir en la ecuación que mejor nos resulte, en este caso la recta para determinar los pares ordenados:

x	Ecuación	Par ordenado (x, y)
-1	$y = 5 - -1 = 6$	$(-1, 6)$
4	$y = 5 - 4 = 1$	$(1, 4)$

Los puntos de intersección son $(-1, 6)$ y $(1, 4)$

Para graficar, vamos a estudiar ambas funciones:

Recta: $y = 5 - x$

$m = -1, b = 5$

$m = -1 < 0$, recta decreciente

$\cap_y : (0, 5)$

$\cap_x : (5, 0)$

$y = x^2 - 4x + 1$

$a = 1 > 0$ parábola cóncava hacia arriba

$b = -4, c = 1$

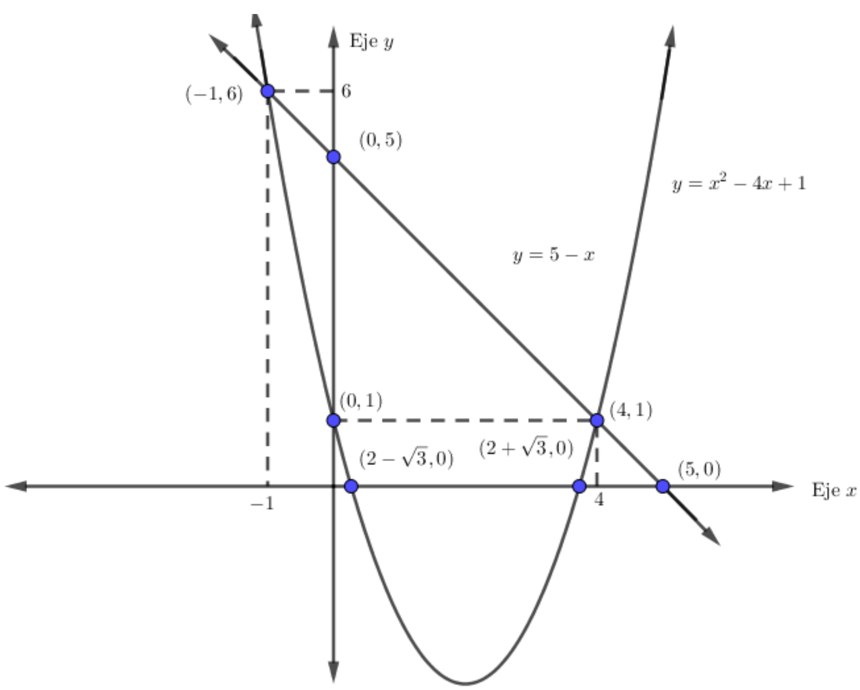
$\cap_y : (0, 1)$

$\triangle = (-4)^2 - 4 \cdot 1, \cdot 3 > 0$

La gráfica interseca al eje x en dos puntos-

$\cap_x : \left(2 + \sqrt{3}, 0\right), \left(2 - \sqrt{3}, 0\right)$

Vértice: $(2, -3)$, el vértice es un punto mínimo



3.5. Práctica Complementaria

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,6)$. Haga un bosquejo de la gráfica e identifique la monotonía y los puntos de intersección con los ejes coordenados.

2. Contruya la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = -\dfrac{2}{3}$ y que pasa por el punto $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$. Haga un bosquejo de la gráfica e identifique los puntos de intersección con los ejes coordenados.

3. Considere la ecuación de la recta $L : y = (k^3 - k)x + 7$ y determine el valor o los valores de la constante k, para que la recta sea:

   a) Creciente

   b) Decreciente

   c) Constante

4. Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P(-1,0)$ y que es paralela a la recta de ecuación $L_2 : 3y - 5x = 2$. Haga un bosquejo de ambas rectas en el plano cartesiano.

5. Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P(-2,4)$ y es perpendicular a la recta que contiene los puntos $Q(-1,3)$ y $R(3,5)$.

6. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determine: discriminante, concavidad, intersecciones con los ejes coordenados, eje de simetría, vértice, monotonía, ámbito. Además, realice un bosquejo de la gráfica resultante.

   a) $f(x) = 7 - (x+1)^2$

   b) $g(x) = x^2 - 4x + 4$

7. Considere la recta L_1 que contiene pasa por los puntos $(1,-2)$ y $(-1,1)$, determine:

   a) La ecuación de la recta L_1

   b) Los puntos de intersección con los ejes cartesianos

   c) La ecuación de la recta L_2 que pasa por el punto $(2,2)$ y es perpendicular a la recta L_1

   d) Realice un bosquejo de las rectas L_1 y L_2 en un mismo plano cartesiano.

8. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=3x^2-9x$, determine:

   a) Intersecciones con los ejes cartesianos y concavidad

   b) Vértice y eje de simetría

   c) Bosquejo de la gráfica de la función f

   d) Ámbito e intervalos de monotonía

9. Determine el dominio máximo real de la función $f(x)$, dada por:

$$f(x)=\sqrt{\frac{(2-x)(x+\sqrt{3})}{x(x-1)^5}}$$

10. Considere la recta L que pasa por los puntos $(-4,1)$ y $(-1,-5)$

    a) Determine la ecuación de la recta L y sus puntos de intersección con los ejes cartesianos.

    b) Determine la ecuación de la recta M que pasa por el punto $(1,1)$ y que es paralela a L. Además, determine los puntos de intersección con los ejes cartesianos de la recta M

    c) Grafique ambas rectas en un mismo plano cartesiano.

11. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 6x - 2x^2$, determine:

    a) Concavidad e intersecciones con los ejes cartesianos.

    b) Vértice y Eje de simetría

    c) Bosquejo de la gráfica de la función g

    d) Ámbito e intervalos de monotonía

12. Considere las rectas $L_1 : y = -3kx + 4$ y $L_2 : y = \left(k - \frac{2}{3}\right)x + 6k$. Determine los valores del parámetro k para que las rectas sean perpendiculares.

13. Hallar el o los puntos de intersección entre la parábola $y = 3x^2 - 5x + 4$ y la recta $x + y = 4$. Haga un bosquejo de la dos gráficas en el mismo plano y señale los puntos encontrados.

4. Práctica para el segundo parcial

Inecuaciones en una variable

1. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{1}{x+2}$ R/ $S =]-2,1[\ \cup\ ]-\infty,-5[$

b) $\dfrac{(x+2)(3x-4x^2)}{(-x^2+x-11)(3x-7)} \leq 0$ R/ $S = [-2,0]\ \cup\ [\frac{3}{4},\frac{7}{3}[$

c) $\dfrac{4m^2+2m}{4m^2-9} - \dfrac{2}{2m+3} \geq 0$ R/ $]-\infty,-\frac{3}{2}[\ \cup\ ]\frac{3}{2},+\infty[$

d) $\dfrac{x}{x-1} \leqslant \dfrac{x^2}{x^2-1} - \dfrac{x}{x+1}$ R/ $]-1,1[$

e) $\dfrac{-5x^2+14x+3}{x^2-4x} \geqslant 0$ R/ $[3,4[\ \cup\ [-\frac{1}{5},0[$

f) $(m^2+4)(5-m) > 4m(5-m)$ R/ $]2,5[\ \cup\ ]-\infty,2[$

g) $\dfrac{6x}{x^2-4x+3} - \dfrac{2x}{12-4x} \leqslant 0$ R/ $]1,3[\ \cup\ [-11,0]$

h) $\dfrac{-2x^3-54}{x^2-3x+2} \geqslant 0$ R/ $]-\infty,-3[\ \cup\ ]1,2[$

i) $-24-16x-4x^2+x^3+x^4 > 0$ R/ $]-\infty,-2[\ \cup\ ]3,+\infty$

j) $-27-3x+10x^2 < 0$ R/ $]-\frac{3}{2},\frac{9}{5}[$

k) $-9-3x+5x^2+8x^3+3x^4-5x^5+x^6 \leq 0$ R/ $[-1,1]$

l) $\dfrac{-(x-3)(2-x)(x-1)^3}{(x+1)^2(3+x)} \geq 0$ R/ $]-\infty,-3[\ \cup\ [1,2]\ \cup\ [3,+\infty[$

m) $\dfrac{(x+\sqrt{3})(2-x)(x+5)}{(x-1)^2(x-2)} \leq 0$ R/ $]-\infty,-5]\ \cup\ [-\sqrt{3},1[\ \cup\ ]1,2[\ \cup\ ]2,+\infty[$

n) $\dfrac{(x-3)^2(x+3)^2}{x(x-2)} \leq 0$ R/ $]-\infty,-3]\ \cup\ ]0,2[$

o) $(x-2)(x+3)(1-x) > 0$ R/ $]-\infty,-3[\ \cup\ ]1,2[$

Ecuaciones, inecuaciones y parámetros

2. Determine el valor o valores del parámetro k para que la ecuación cuadrática $4x^2-5kx+1=0$ posea una única solución real. R/ $k=\pm\frac{4}{5}$

3. ¿Cuál debe ser el valor del parámetro k para que $x=-3$ sea un cero del polinomo definido por $P(x)=(k+1)^2x^2+7kx+2x-9$? R/ $k=-\frac{2}{3}, k=1$

4. Hallar el valor del parámetro k para que la ecuación $x^2-kx+4=0$ tenga dos soluciones reales e iguales. R/ $k=\pm 4$

5. Para cada una de las siguientes ecuaciones determine el valor del parámetro k para que la recta descrita sea: creciente, decreciente o constante.

   a) $y-4+8x=k^3x-2$
   b) $y=(k^2-16)x+3$
   c) $y-3=(k^2-2k+1)x$

6. Determine el valor o los valores del parámetro k para que la ecuación cuadrática $x^2-5x+k=0$ tenga dos soluciones reales y distintas. R/ $k\in\left]-\infty,\frac{25}{4}\right[$

7. Determine el valor o los valores del parámetro k para que la ecuación cuadrática descrita por $x^2+(k-1)x+(k-2)=0$ no tenga solución real. R/ No existe tal $k\in\mathbb{R}$

8. Determine el valor o los valores del parámetro k para que la siguiente ecuación $25x^2+kx+1=0$ tenga solución vacía. R/ $k\in\left]-10,10\right[$

9. Determinar el valor de la constante k para que la ecuación descrita por $4x^2-8kx+9=0$ tenga:

   a) Un única raíz real
   b) Dos raíces reales y distintas.
   c) No tenga raíces reales.

10. Determine el valor de la constante k en la función lineal $3x-6y+k=0$ si se sabe que el punto $(3,-4)$ está en su gráfica. R/ $k=-33$

Concepto de función

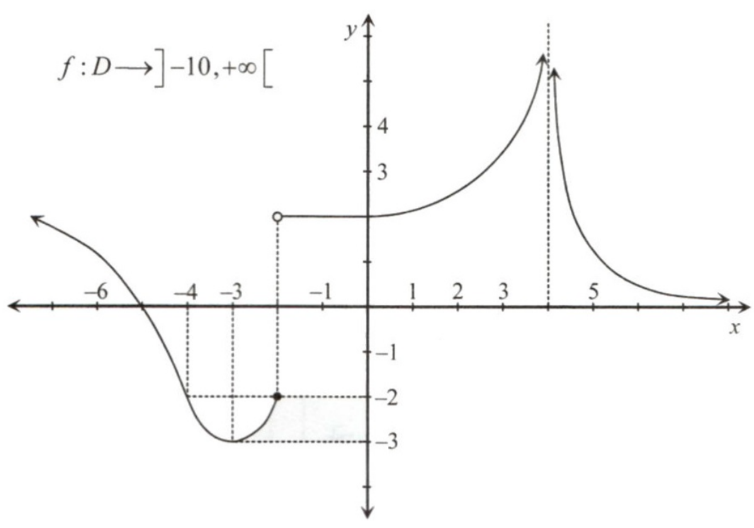
11. Indique cuáles de las siguientes relaciones corresponden a una función, justifique su respuesta.

    a) A cada mascota se le asigna su peso en kilogramos. R/ Sí es función
    b) A cada cantón se le asigna la provincia a la cual pertenece. R/ Sí es función
    c) A cada estudiante se le asigna sus materias preferidas. R/ No es función
    d) A cada persona le asigna los carros que posee. R/ No es función
    e) A cada canción se le asigna el nombre de su intérprete. R/ No es función
    f) A cada jugador de fútbol se le asigna los equipos para los cuales juega. R/ No es función

Interpretación de gráficas de funciones

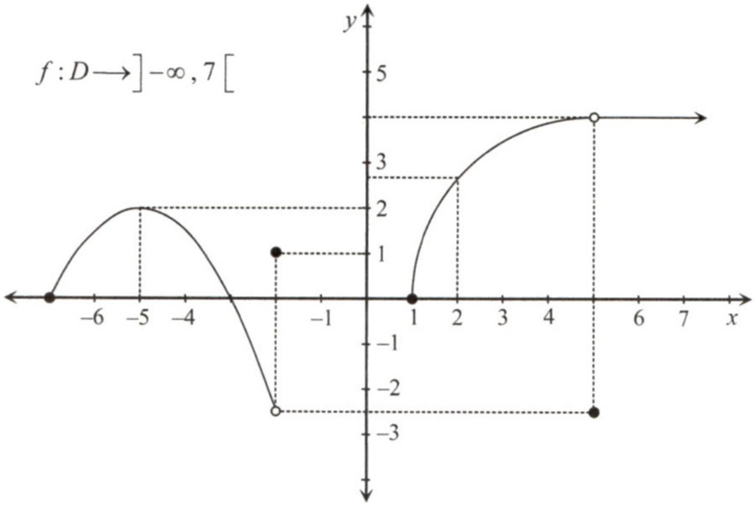
12. De acuerdo con los datos de cada una de las siguientes gráficas determine las características que se le solicitan.

a)



a) Dominio
b) Ámbito
c) Codominio
d) $f(0)$
e) $f(-2)$
f) Intersecciones
g) Una preimagen de -3
h) Monotonía
i) Signos de la función

b)



a) Dominio

b) Codominio

c) Ámbito

d) $f(5)$

e) $f(-2)$

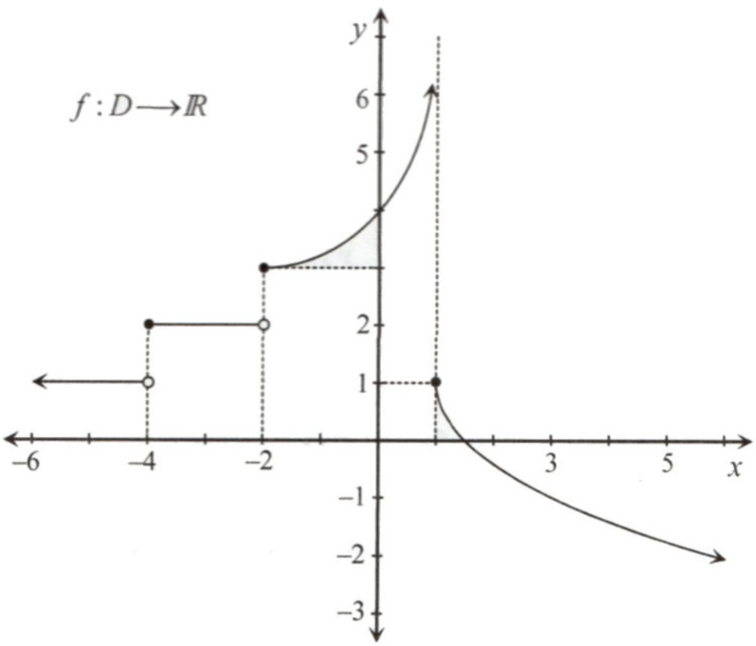
f) Intersecciones

g) Una preimagen de 2

h) Monotonía

i) Signos de la función

c)



a) Dominio

b) Codominio

c) Ámbito

d) $f(-3)$

e) $f\left(-\frac{11}{2}\right)$

f) Intersecciones

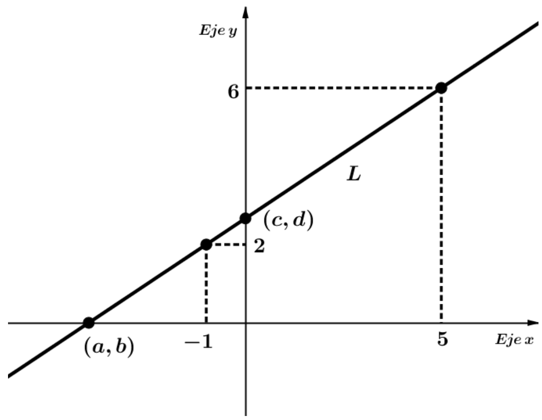
g) Una preimagen de 3

h) Monotonía

i) Signos de la función

Función Lineal

13. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una recta en el plano.

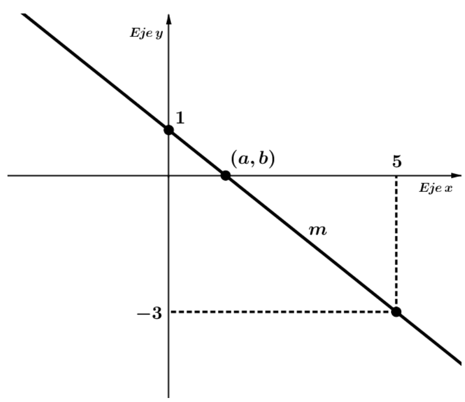


De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine lo que se le solicita.

a) Las coordenadas rectangulares de los puntos (a, b) y (c, d). R/ $(-4, 0)$ y $\left(0, \dfrac{8}{3}\right)$

b) La ecuación de la recta L. R/ $2x - 3y = -8$

14. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de la recta m

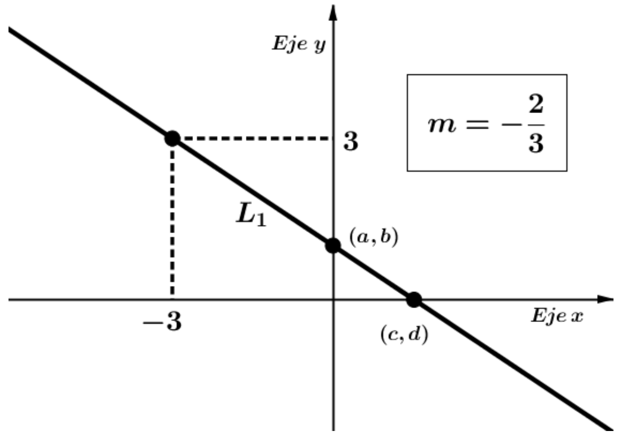


De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine lo que se le solicita.

a) Las coordenadas rectangulares del punto (a, b). R/ $\left(\dfrac{5}{4}, 0\right)$

b) La ecuación de la recta m. R/ $4x + 5y = 5$

15. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de la recta L_1



De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine la ecuacón de la recta L_1 y las coordenadas rectangulares de los puntos (a, b) y (c, d). R/ $2x + 3y = 3$ y $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$; $(0, 1)$

16. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{-4}{3}, \frac{-3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{2}\right)$. Además, calcule la intersección de la recta con los ejes coordenados, la monotonía y realice un bosquejo de la gráfica en el plano cartesiano.

Rectas paralelas y perpendiculares

17. Determine la ecuación de la recta contiene al punto por el punto $(-6, 5)$ y que es paralela a recta de ecuación $y = 8x - 7$. R/ $y = 8x + 53$

18. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$ y que es perpendicular a recta de ecuación $y = \frac{3x}{2} + 2$. R/ $y = \frac{-2x}{3} - \frac{-14}{3}$

19. Sean $A = (2, 0)$ y $B = (3, -1)$ dos puntos, r y s dos rectas en el mismo plano. Con base en esa información:

    a) Determine la ecuación de la recta r, cuya pendiente es 6 y que pasa por el punto A.

    R/ $y = 6x - 12$

    b) Determine la ecuación de la recta s, que pasa por el punto B y que es perpendicular a la recta anterior. R/ $y = \frac{-x}{6} - \frac{1}{2}$

Dominio Máximo de Funciones

20. Determine el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones reales de variable real.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 36}}$ R/ $]-\infty, -6[\ \cup\ ]6, +\infty[$

b) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{4 - x^2}}$ R/ $]-2, 2[$

c) $f(x) = x + \dfrac{-6}{\sqrt[8]{x^2 - x}}$ R/ $]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, +\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{2x + 4}{\sqrt[10]{x^2 + 6x + 9}}$ R/ $\mathbb{R} - \{-3\}$

e) $f(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{3x^2 - x + 1}}$ R/ $\mathbb{R}$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2}}$ R/ $]-1, 1[\ \cup\ ]2, +\infty[$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 1}$ R/ $[-2, +\infty[-\{1\}$

h) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x}$ R/ $[0, 1]\ \cup\ [3, +\infty[$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x^2 - 5x + 6}}$ R/ $[-4, 2[\ \cup\ ]3, +\infty[$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ R/ $[-4, 2[\ \cup\ ]3, +\infty[$

Función Cuadrática

21. Considere las siguientes funciones reales de variable real. Realice el estudio completo para cada una que incluya las intersecciones con los ejes, el vértice, los intervalos de monotonía, el ámbito y la gráfica.

a) $f(x) = x^2 + 9$

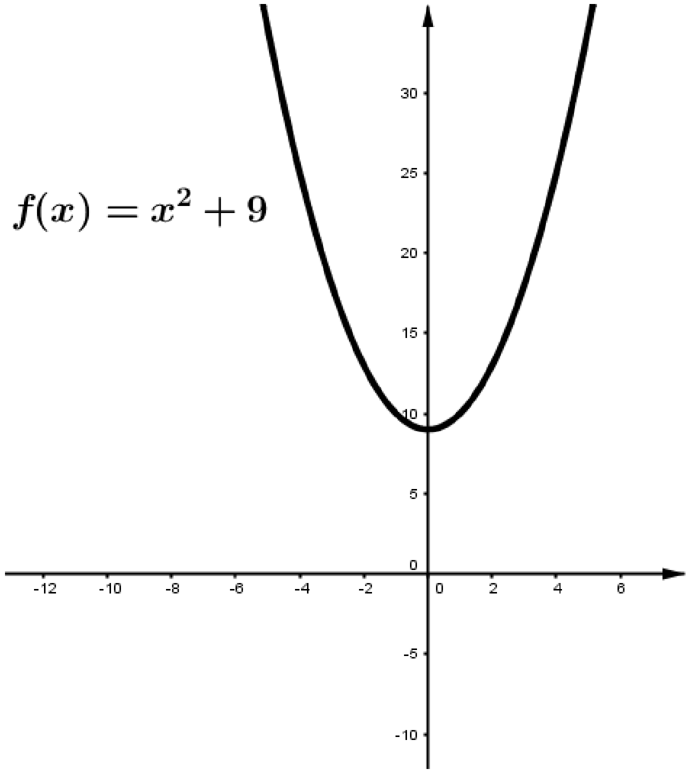
b) $h(x) = 2x^2 - 10x + 8$

c) $j(x) = -3x^2 + 15x$

d) $z(x) = -2x^2 - 2x - 2$

Desarrollo de las respuestas: Función Cuadrática

a)



Características

a) I_x : No hay

b) $I_y : (0, 9)$

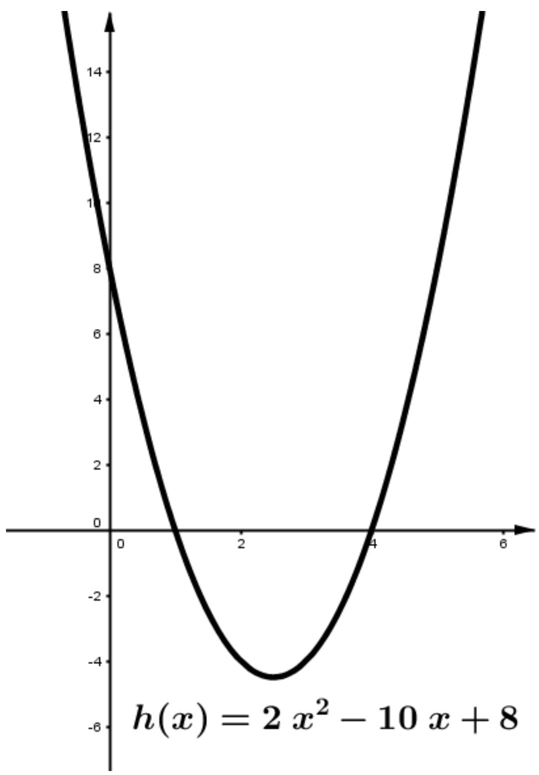
c) Vértice: $(0, 9)$

d) $\nearrow :]0, +\infty[$

e) $\searrow :]-\infty, 0[$

f) Ámbito: $[9, +\infty[$

b)



Características

a) $I_x : (1, 0)\ (4, 0)$

b) $I_y : (0, 8)$

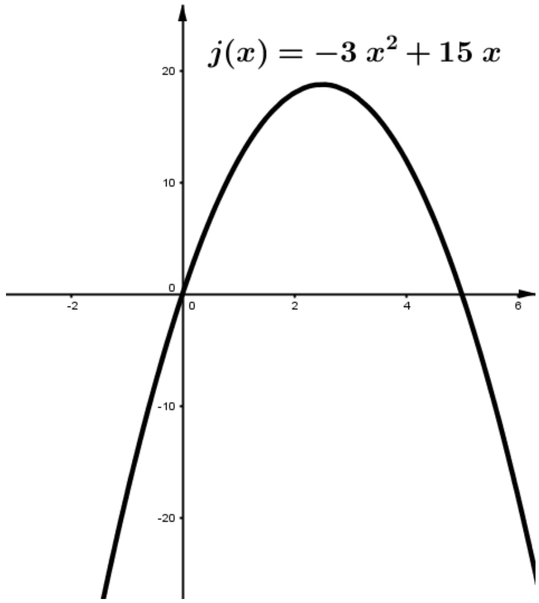
c) Vértice: $\left(\frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

d) $\nearrow : \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

e) $\searrow : \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$

f) Ámbito: $\left[\frac{-9}{2}, +\infty\right[$

c)



Características

a) I_x : $(0,0)$ $(5,0)$

b) I_y : $(0,0)$

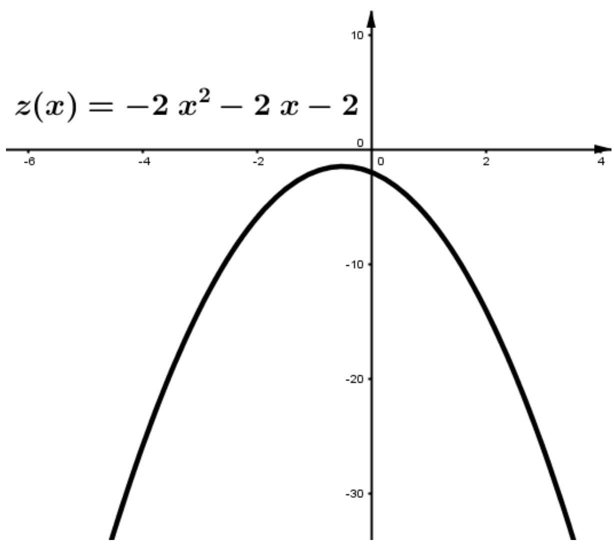
c) Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{75}{4}\right)$

d) $\nearrow$: $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$

e) $\searrow$: $\left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

f) Ámbito: $\left]-\infty, \dfrac{75}{4}\right]$

d)



Características

a) I_x : No hay

b) I_y : $(0,-2)$

c) Vértice: $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$

d) $\nearrow$: $\left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right[$

e) $\searrow$: $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$

f) Ámbito: $\left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$

Intersección entre curvas

22. Determine el o los puntos de intersección entre las curvas cuyas ecuaciones están dadas por:

    a) $y = x^2 + x \ ; \ y = -x^2 - x + 12$ R/ $(2,6) \ ; \ (-3,6)$
    b) $2x + 3y = 5 \ ; \ 4x + 2y = 8$ R/ $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$
    c) $y = -x^2 + 5x - 7 \ ; \ y + x = 1$ R/ $(4,-3) \ ; \ (2,-1)$
    d) $y = x^2 + 5x + 6 \ ; \ y + x = 1$ R/ $(-1,2) \ ; \ (-5,6)$
    e) $y = x^2 + 3x - 10 \ ; \ -2x + y = -8$ R/ $(1,-6) \ ; \ (-2,-12)$
    f) $y = -12 + \frac{5x}{2} \ ; \ -2x + y = -8$ R/ $(8,8)$

23. Determine el dominio máximo de la función w, dada por: $w(x) = \dfrac{3x-9}{49x - x^3} - \sqrt[4]{x^2 - 11x + 28}$

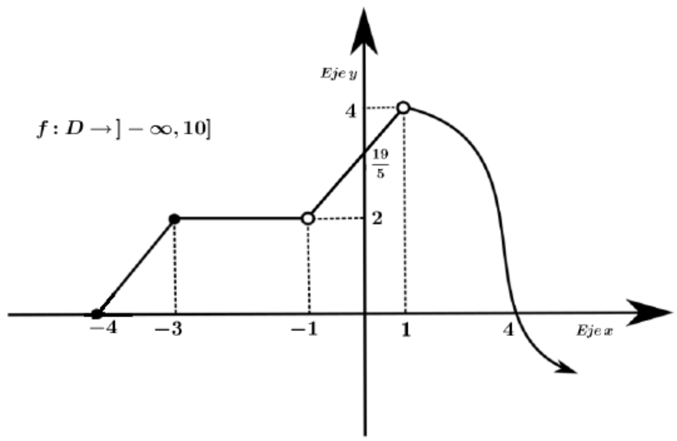
24. Determine la ecuación de la recta G que pasa por el punto $P(2,-5)$ y que es perpendicular a la recta E cuya ecuación se define por $-2x - 5y = -8$. Además realice el bosquejo de la gráfica de la función G.

25. Dadas las rectas, $l_1 : -3x + 2y - 5 = 0 \quad l_2 : y = 3wx - 8$. Determine el valor del parámetro w para que l_1 y l_2 sean perpendiculares.

26. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -4 + 5x - x^2$, determine:

    a) Concavidad e intersecciones con los ejes cartesianos
    b) Eje de simetría y vértice
    c) Bosquejo de la gráfica de la función f
    d) Ámbito e intervalos de monotonía

27. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función f y responda lo que se le solicita.



a) Dominio

b) Ámbito

c) $f(-2)$

d) Intersección con los ejes cartesianos

e) La preimagen de $\frac{19}{5}$

f) $f\left(\frac{-3}{2}\right)$

g) Un intervalo donde f es decreciente

h) Un intervalo donde $f(x) < 0$

28. Determine el dominio máximo de la función h definida por:

$$h(x) = \frac{2x}{9x^2 - 3x^3} + \sqrt[6]{-x^2 + 8x - 15}$$

29. Sea la recta $N : 4y + 8x - 16 = 0$, que es perpendicular a la recta E que contiene al punto $(3, -2)$. Determine la ecuación de la recta E, haga un bosquejo de ambas rectas en un mismo plano cartesiano

30. Dada la función cuadrática $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$k(x) = -4x - 2x^2$$

Realice el estudio completo, guiado de la siguiente manera:

a) Concavidad

b) Intersecciones con los ejes cartesianos.

c) Eje de simetría y vértice.

d) Bosquejo de la gráfica.

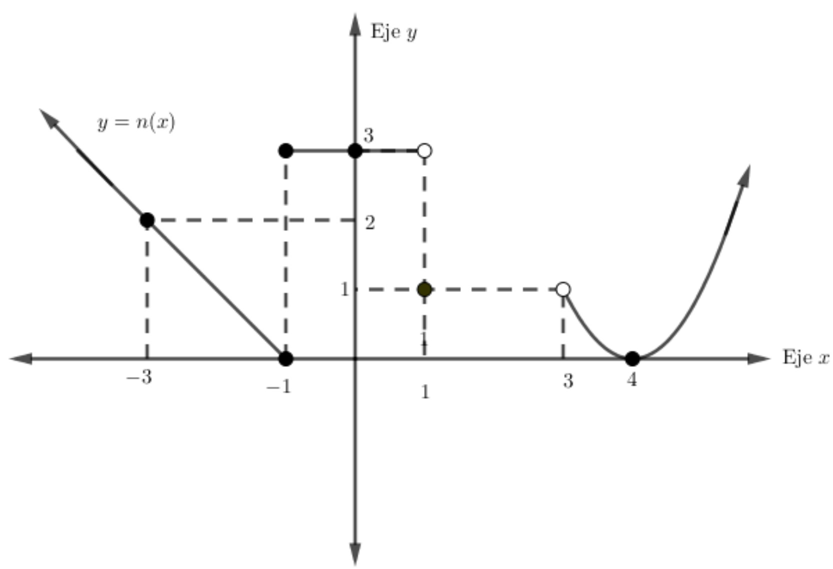
e) Ámbito de la función

f) Intervalos de monotonía

g) Un intervalo donde $k(x) > 0$

h) Un intervalos donde $k(x) < 0$

31. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de la función n y responda lo que se le solicita.



a) Dominio: D_n

b) Ámbito: A_n

c) Intersección con el eje y

d) Intersecciones con el eje x

e) $n(-3)$

f) Preimagen de 1

g) Imagen de 1

h) Un intervalo donde $n(x) > 0$

i) Un intervalo donde n es decreciente

j) Un intervalo donde n es creciente