Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 3: Método da Posição Falsa

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

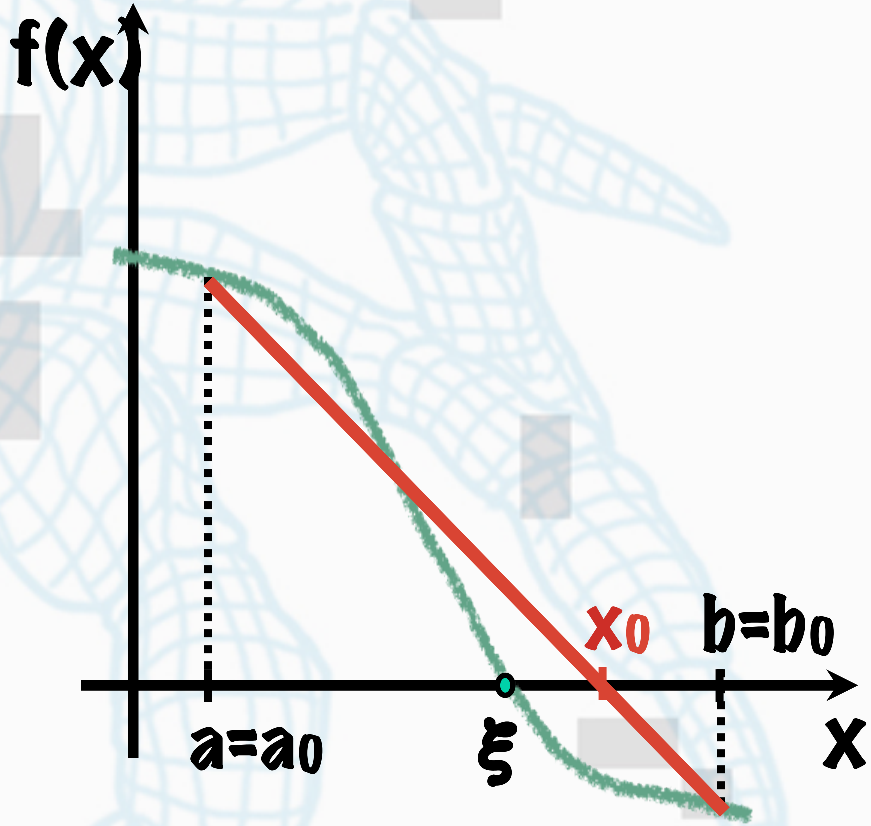
UFC

Introdução

- Métodos baseados em aproximação linear:
  - A velocidade de convergência da sequência $\{x_i\}$ para a raiz ξ de uma equação $f(x) = 0$ pode ser aumentada usando-se um esquema diferente da bisseção
  - Ao invés de selecionar o ponto médio de cada intervalo, esses métodos usam o ponto onde a reta secante intersecta o eixo das abscissas
  - Se o intervalo for pequeno, essa aproximação é válida para a maioria das funções consideradas

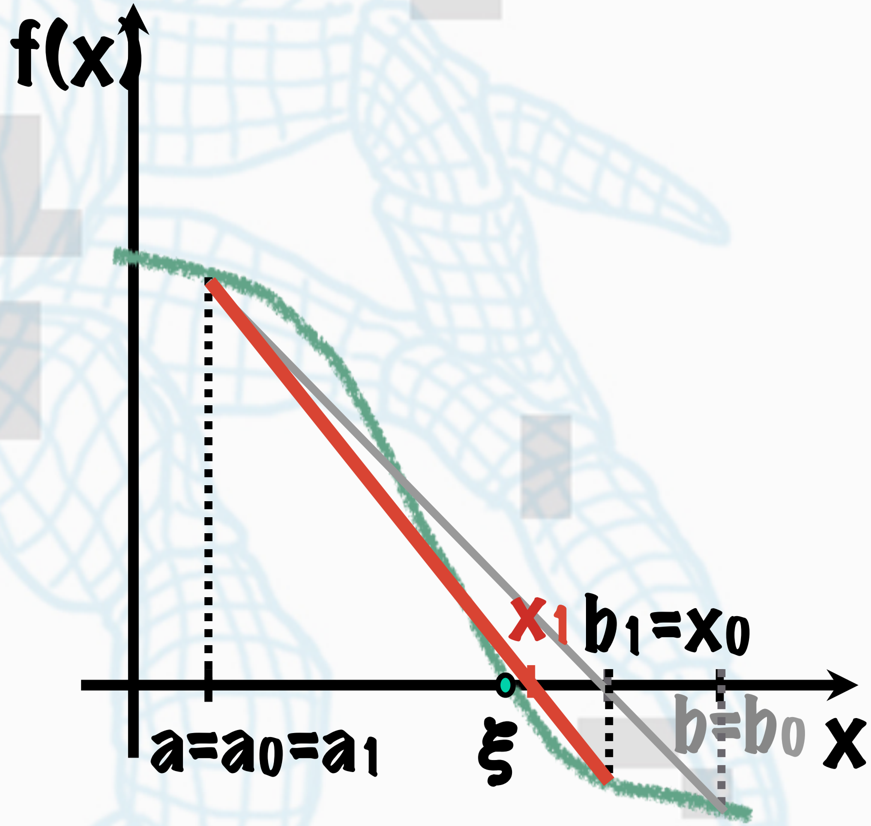
Introdução

- Métodos baseados em aproximação linear:
  - Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], sendo ξ a única raiz de f(x) = 0 neste intervalo
  - Uma estimativa da raiz ξ é tomada onde a reta secante cruza o eixo-x



Introdução

- Métodos baseados em aproximação linear:
  - Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], sendo ξ a única raiz de f(x) = 0 neste intervalo
  - Uma estimativa da raiz ξ é tomada onde a reta secante cruza o eixo-x



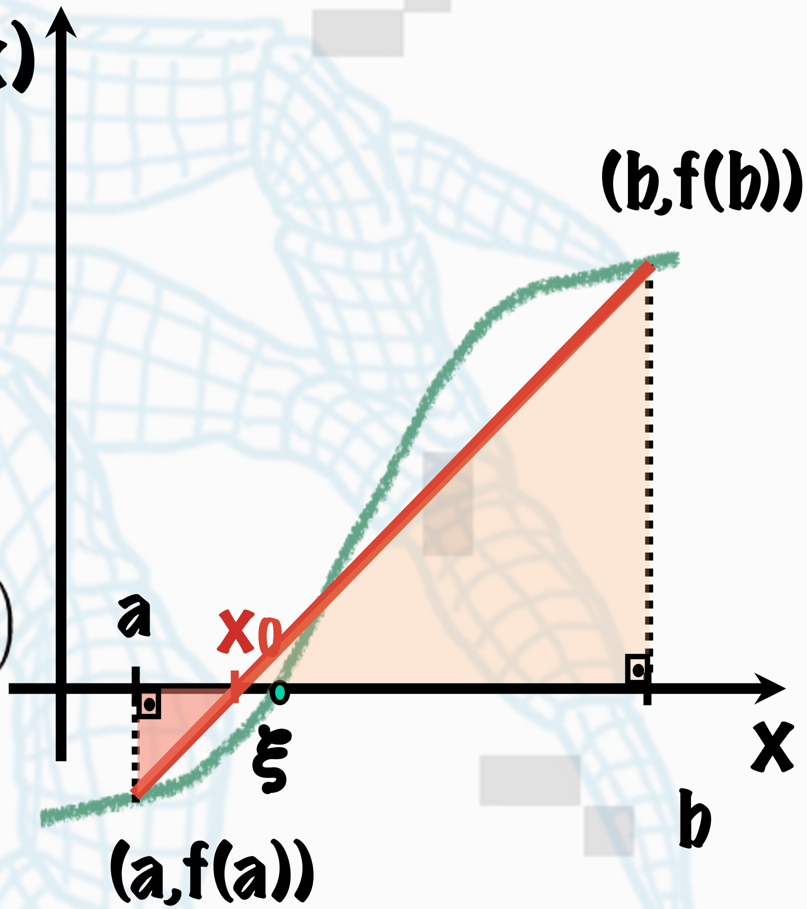
Introdução

- Equação da reta secante:
  - A equação da reta secante que passa pelos pontos de coordenadas (a, f(a)) e de coordenadas (b, f(b)) fica:

$$\frac{b - x_0}{f(b)} = \frac{x_0 - a}{-f(a)}$$

$$x_0(f(b) - f(a)) = a(f(b)) - b(f(a))$$

$$x_0 = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b) - f(a)}$$

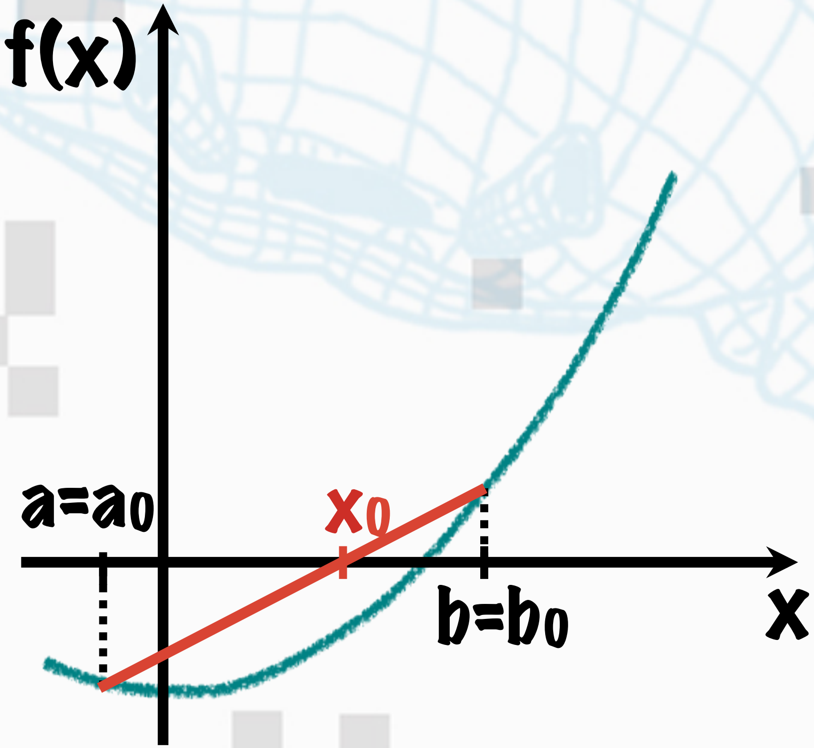


Descrição

- De maneira similar ao método da bisseção, o método da posição falsa consiste em reduzir a amplitude do intervalo [a,b] que contém a raiz
- Ao invés de usar o ponto médio do intervalo, o **método da posição falsa** usa o ponto onde a **reta secante** unindo (a_k, $f(a_k)$) e (b_k, $f(b_k)$) cruza o eixo-x e o seleciona para ser uma nova extremidade do intervalo a ser considerado

Graficamente

Iteração 1

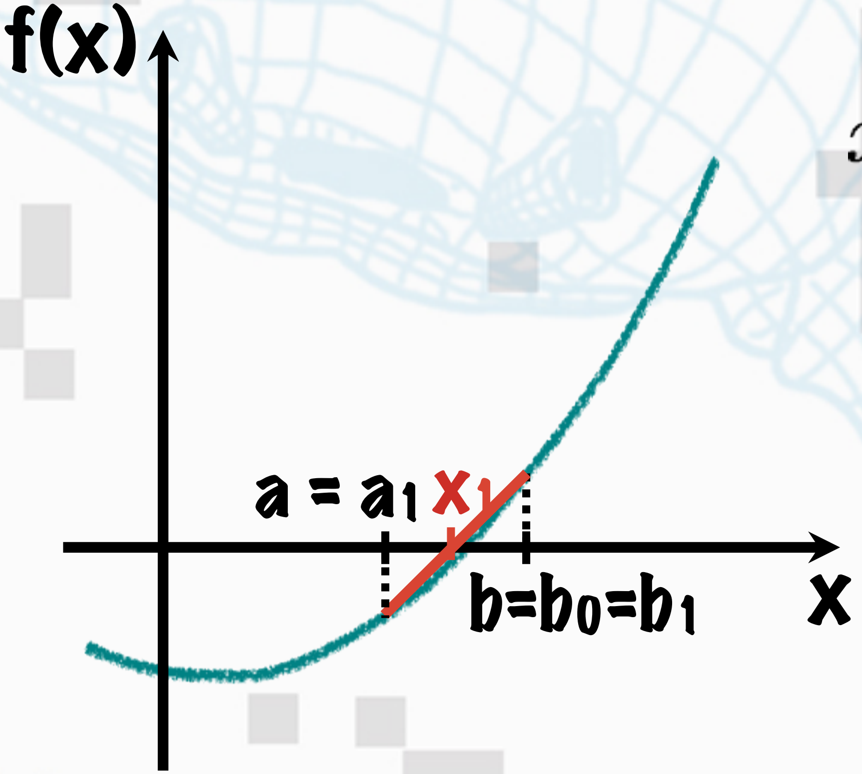


$$x_0 = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b) - f(a)}$$

$$\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_0, b_0) \\ a_1 = x_0 \\ b_1 = b_0 \end{cases}$$

Graficamente

Iteração 2



$$x_1 = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b) - f(a)}$$

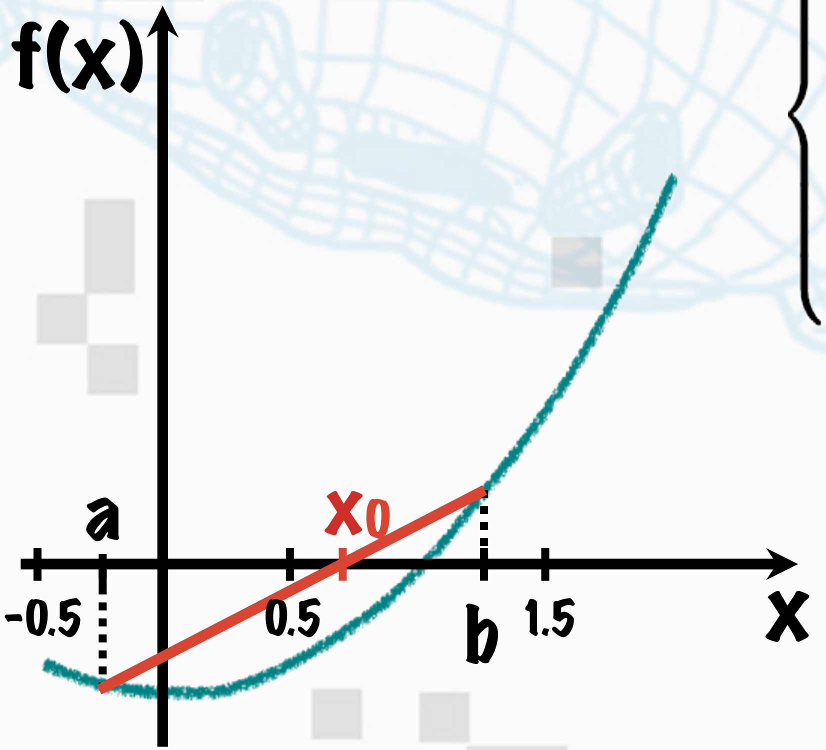
$$\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

E assim sucessivamente...

Exemplo: $f(x) = x^2 - 1$

Sejam a = -0.25 e b = 1.25

- Iteração 1

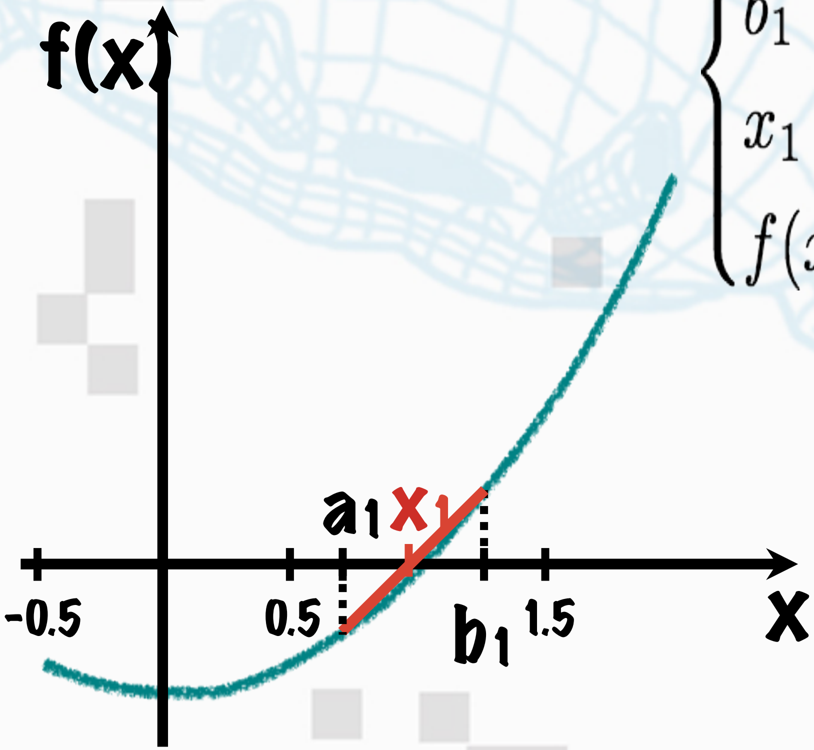


$$\begin{cases} a_0 = a = -0.25; f(-0.25) = -0.9375 \\ b_0 = b = 1.25; f(1.25) = 0.5625 \\ x_0 = \frac{-0.25\times 0.5625 - 1.25\times(-0.9375)}{0.5625-(-0.9375)} = 0.6875 \\ f(x_0) = f(0.6875) = -0.5273 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_0, b_0) \\ a_1 = x_0 \\ b_1 = b_0 \end{cases}$$

Exemplo: $f(x) = x^2 - 1$

- Iteração 2



$$\begin{cases} a_1 = 0.6875; f(0.6875) = -0.5273 \\ b_1 = 1.25; f(1.25) = 0.5625 \\ x_1 = \frac{0.6875\times 0.5625 - 1.25\times(-0.5273)}{0.5625-(-0.5273)} = 0.959677 \\ f(x_1) = f(0.959677) = -0.0790 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

E assim sucessivamente...

Algoritmo

```
Algoritmo: Posição Falsa
Entrada: a, b, ε1, ε2, iterMax
Saída: raiz
 Fa ← f(a); Fb ← f(b)
 se Fa * Fb > 0 então
   escreva "Erro: função não muda de sinal entre a e b"
   sair()
 fimse
 intervX ← abs(b−a);
 se intervX < ε1 então raiz ← escolha(a,b); Fim.
 se abs(Fa) < ε2 então raiz ← a; Fim.
 se abs(Fb) < ε2 então raiz ← b; Fim.
 k ← 0
 .
 :
```

Algoritmo (cont.)

```
 .
 :
 repita
    x ← (aFb – bFa)/(Fb–Fa); Fx ← f(x)
    escreva k, a, Fa, b, Fb, x, Fx, intervX
    se abs(f(x)) < ε2 ou k ≥ iterMax então raiz ← x;
Fim.
    se Fa * Fx > 0 então a ← x; Fa ← Fx
    senão b ← x; Fb ← Fx
    intervX ← abs(b–a)
    se intervX ≤ ε1 então
       raiz ← escolha(a,b); Fim.
    fim se
    k ← k+1
 fim repita
fim algoritmo
```

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5 \times 10^{-3}$

I	a	fa	b	fb	x	fx	intervX
0	0.000000e+00	3.000000e+00	1.000000e+00	-5.000000e+00	3.750000e-01	-3.222656e-01	1.000000+00
1	0.000000e+00	3.000000e+00	3.750000e-01	-3.222656e-01	3.386243e-01	-8.790199e-03	3.750000e-01
2	0.000000e+00	3.000000e+00	3.386243e-01	-8.790199e-03	3.376350e-01	-2.258842e-04	3.386243e-01

raiz = 3.376350e-01

Estudo da Convergência

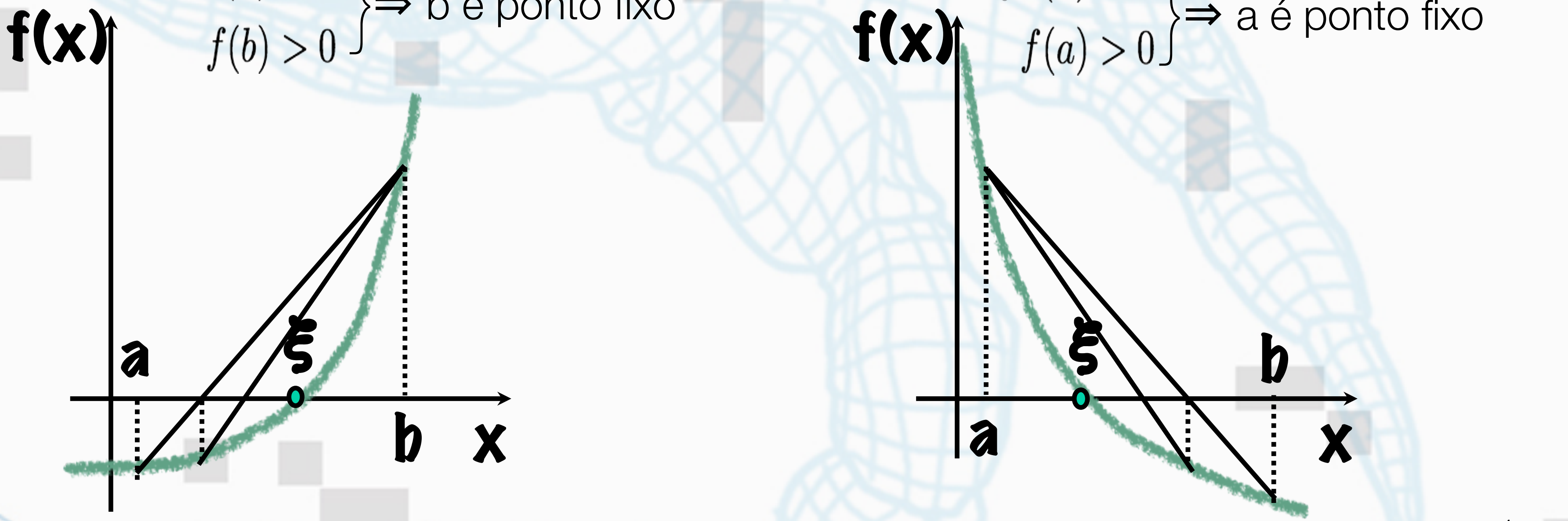
- (Young & Gregory, 1972) demonstram o seguinte resultado para esse método:
  - Se f(x) é contínua no intervalo [a,b] com f(a) f(b) < 0 então o método da posição falsa gera uma sequência convergente para o problema considerado
- A demonstração baseia-se na mesma ideia utilizada na demonstração da convergência do método da bisseção, como visto antes:
  - usam-se as sequências $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{x_k\}$

Estudo da Convergência

- Graficamente:
  - Quando f é derivável duas vezes em [a, b] e f ”(x) não muda de sinal nesse intervalo, a convergência pode ser verificada graficamente, como se pode observar abaixo:

$$\left.\begin{matrix} f''(x) > 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{b é ponto fixo}$$

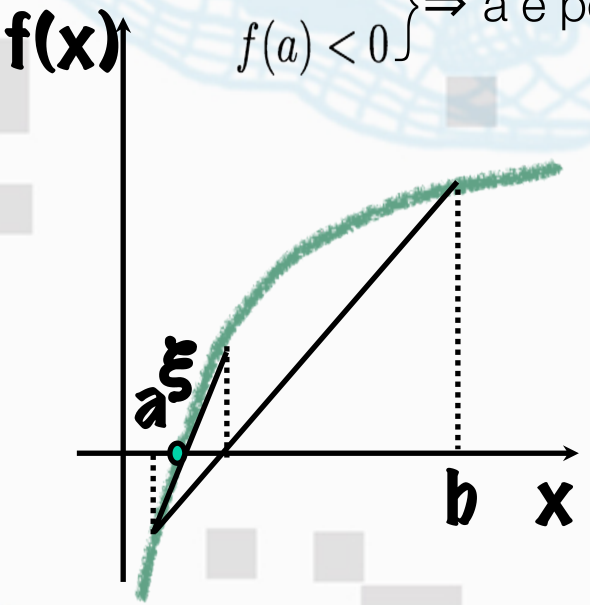
$$\left.\begin{matrix} f''(x) > 0 \\ f(a) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{a é ponto fixo}$$



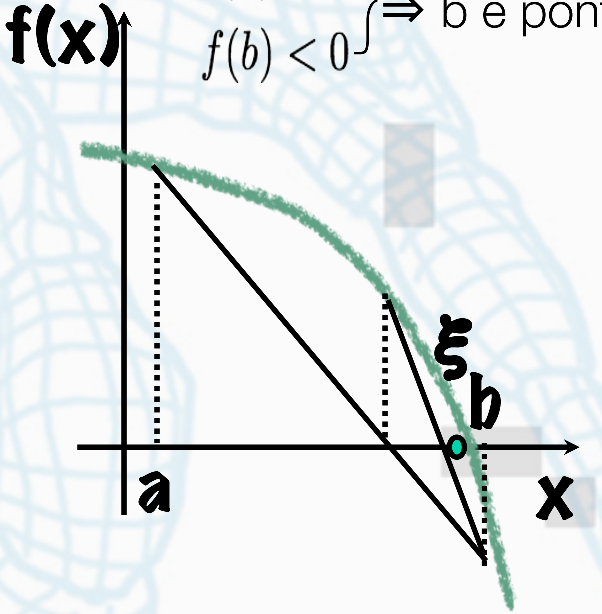
Estudo da Convergência

- Graficamente:
  - Quando f é derivável duas vezes em [a, b] e f ”(x) não muda de sinal nesse intervalo, a convergência pode ser verificada graficamente, como se pode observar abaixo:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \\ f(a) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{a é ponto fixo}$$



$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \\ f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{b é ponto fixo}$$



Estudo da Convergência

- Em todos os casos anteriores mostrados, os elementos de $\{x_k\}$ se encontram na parte do intervalo que fica entre a raiz e o extremo não-fixo do intervalo e $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$
- Em geral, o método da posição falsa obtém como raiz aproximada um ponto calculado x_k, no qual $|f(x_k)| < \varepsilon$, sem que intervalo $[a_k,b_k]$ seja pequeno suficiente
  - Exigindo-se os dois critérios de parada satisfeitos simultaneamente, pode-se usar mais iterações

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Em geral o método também converge
  - É método também bem robusto
  - Converge mais rápido que bisseção

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Ainda não é eficiente computacionalmente (em geral)
- O método da posição falsa também é usado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método numérico que possua uma convergência mais rápida