Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 1: Introdução a Raízes de Equações

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

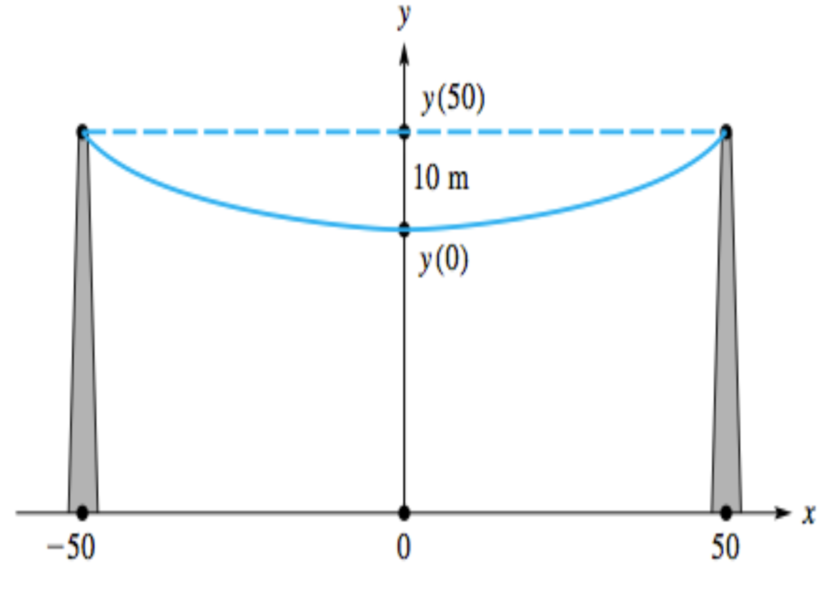
Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)
Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Nas mais diversas áreas, encontramos situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo f(x) = 0
- Exemplo: Um cabo de energia elétrica é suspenso (em pontos de mesma altura) a partir de duas torres que estão a 100 metros de distância. O cabo desce 10 metros no meio. Qual seria o comprimento do cabo?

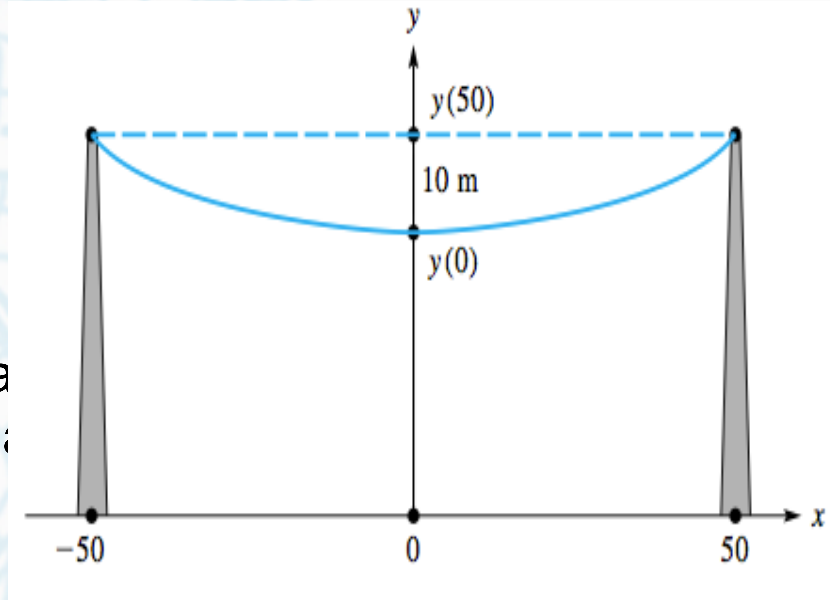


Catenária

- A catenária descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade existente
  - Quando o eixo y passa pelo ponto ma baixo, podemos assumir a equação na forma y = λ cosh (x/λ). Precisamos determinar λ nesse equação então
  - As condições do problema são que y(50) = y(0) + 10. Então obtemos que:

$$\lambda cosh(\frac{50}{\lambda}) = \lambda + 10$$

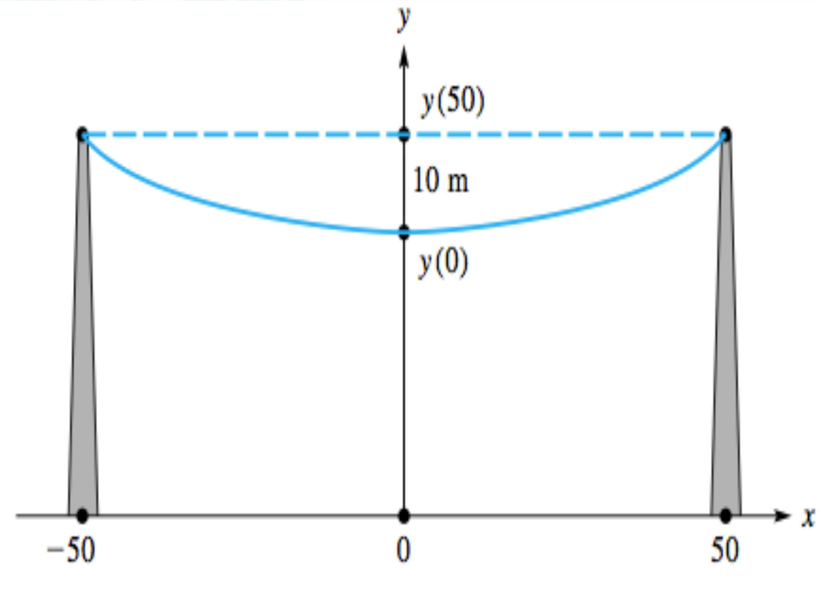
http://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária



Catenária

- Utilizando os métodos que aprenderemos ao longo desta unidade, encontraremos λ = 126.632 e substituindo λ na fórmula do comprimento do arco, veremos então que o comprimento do arco será de 102.619 metros nesse caso

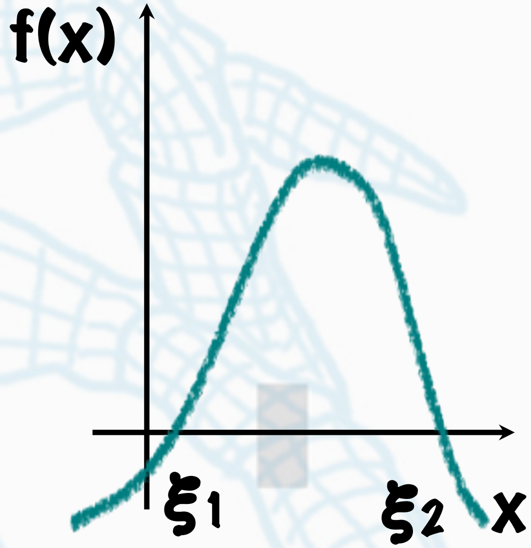
http://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária



Objetivo: Estudar métodos numéricos para resolução de equações não lineares, como por exemplo, a catenária

Raízes de Equações

- Um número real ξ é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x)=0 se f(ξ) = 0
- Dependendo de f(x), valores de ξ podem ser reais ou complexos
- Graficamente, os zeros reais são representados pelas abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x

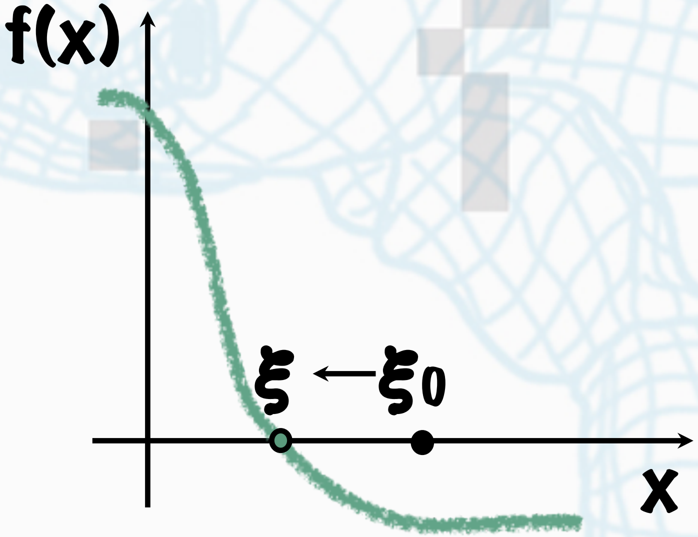


Obtenção de Raízes

- Para algumas equações, como por exemplos equações polinomiais de segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes sem precisar de aproximações
- Em outros casos, é praticamente impossível encontrar os zeros (raízes) de forma exata
  - São usadas aproximações para esses zeros (raízes), com determinada precisão definida dependendo-se do problema

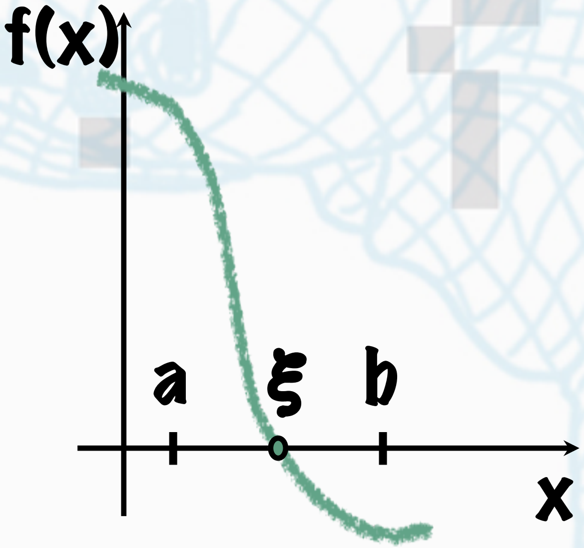
Idéia central

- Partir de uma aproximação inicial para a raiz, e depois refinar essa aproximação através de método iterativo



Idéia central

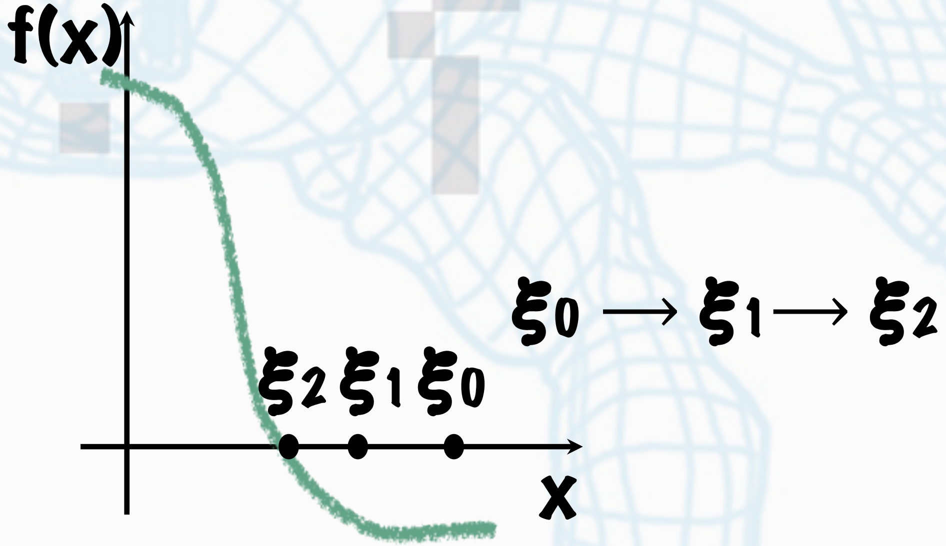
- **FASE I: Localização ou Isolamento de Raízes**
  - Obter um intervalo que contém a raiz desejada da equação



$$\xi \in [a; b]$$

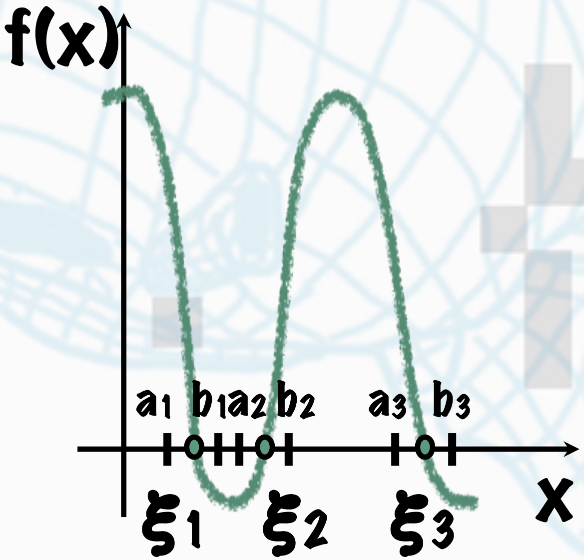
Idéia central

- **FASE II: Refinamento das Raízes**
  - Melhorar sucessivamente as aproximações encontradas na FASE I, até obter-se aproximação para a raiz dentro de precisão prefixada



FASE I: Isolamento

- Análise **teórica** e **gráfica** da função f(x)



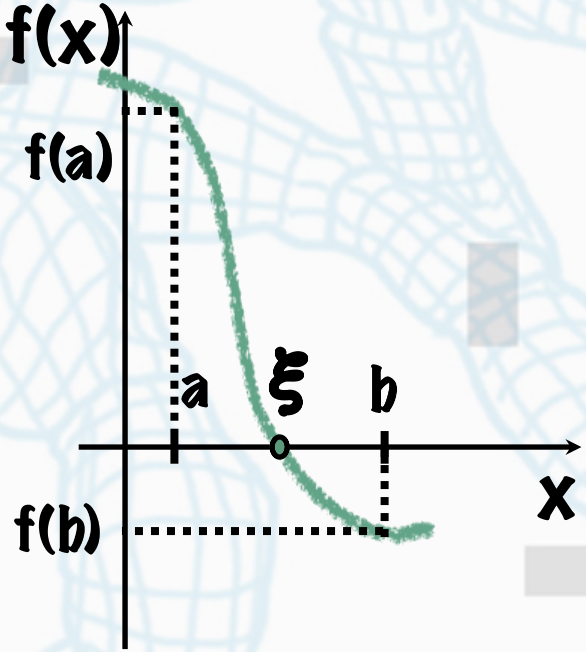
$$\xi_1 \in [a_1; b_1]$$
$$\xi_2 \in [a_2; b_2]$$
$$\xi_3 \in [a_3; b_3]$$

Atenção: O sucesso da FASE II depende fortemente da precisão desta análise

FASE I: Isolamento

- **Análise teórica**
  - Teorema dos Sinais
    - Teorema:

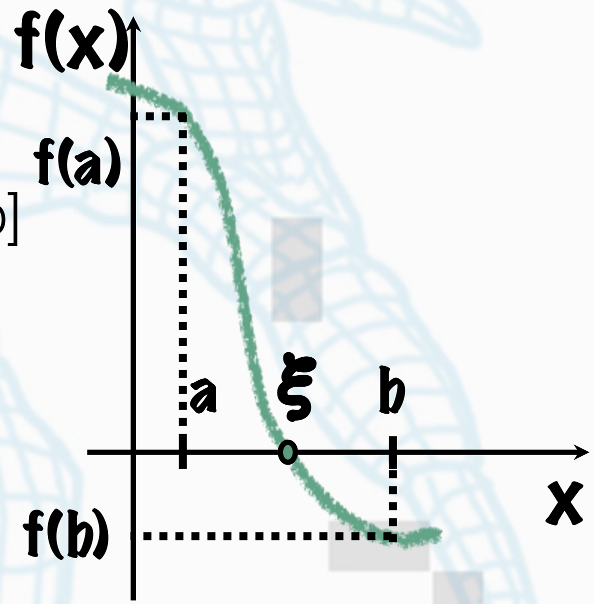
$$f(a) \times f(b) < 0 \rightarrow \xi \in [a;b]$$



FASE I: Isolamento

- **Análise teórica**
  - Teorema dos Sinais
    - Corolário:

$$f'(x) > 0, \forall x \in [a;b] \ ou \quad \longrightarrow \xi \text{ é única em } [a;b]$$
$$f'(x) < 0, \forall x \in [a;b]$$



FASE I: Isolamento
Análise teórica: Exemplo

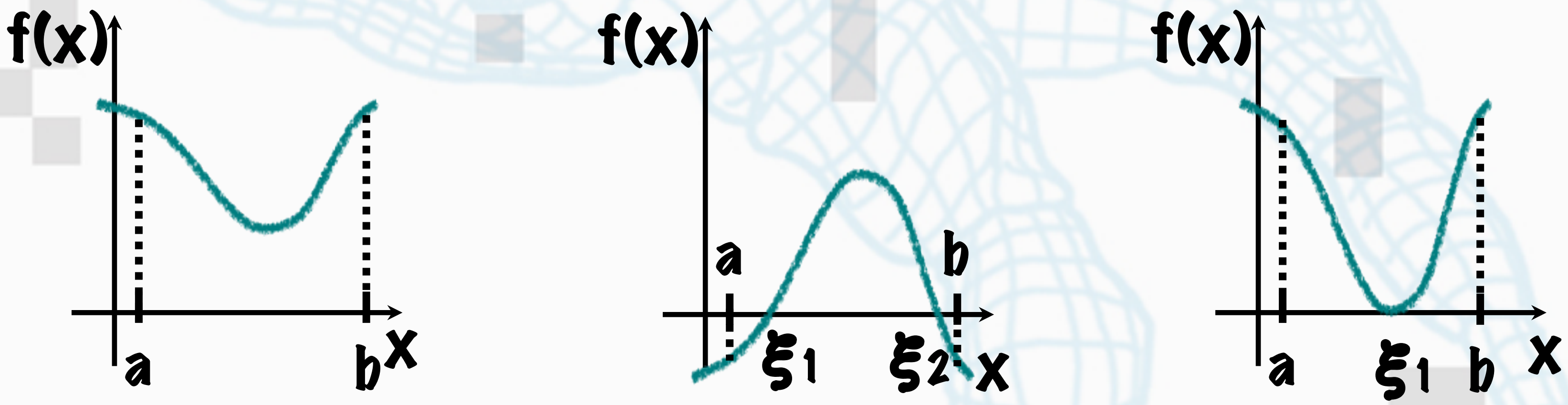
- $f(x) = x^3 - 9x + 3$
  - Tabela:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

  - Análise:
    - $I_1 = [-5;-3] \longrightarrow \xi_1$
    - $I_2 = [0;1] \longrightarrow \xi_2$
    - $I_3 = [2;3] \longrightarrow \xi_3$
  - Conclusão:
    - f(x) é um polinômio de 3º grau então as raízes são únicas

FASE I: Isolamento
Análise teórica

- E se f(a) x f(b) > 0?
  - nenhuma raiz
  - mais de uma raiz
  - somente uma raiz

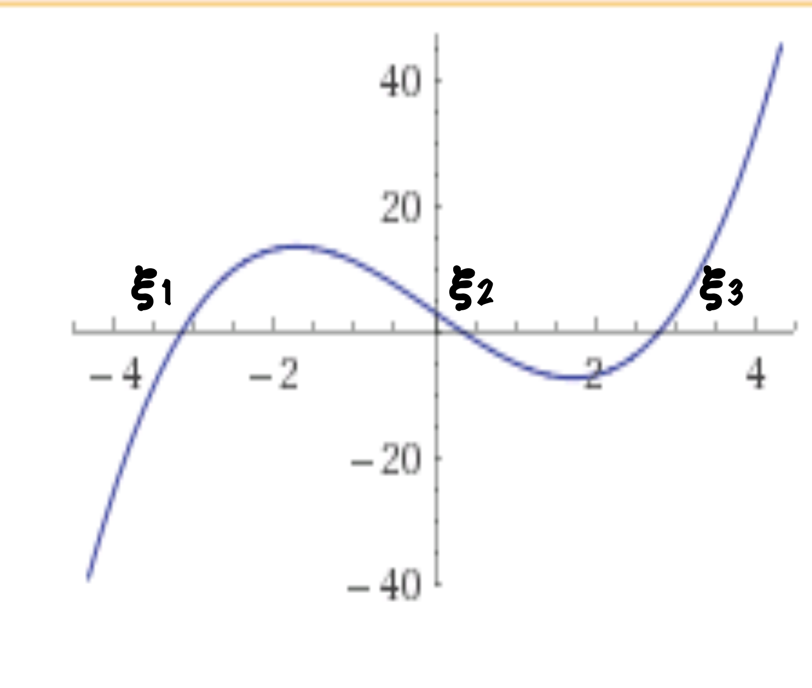


FASE I: Isolamento

- **Análise gráfica**
  - Duas maneiras possíveis:
    - a) Esboçar gráfico de $f(x) \rightarrow$ achar intervalos
      - **Mais preciso => sem interseção**
      - **Mais difícil => funcão complexa**
    - b) $f(x) = 0 \rightarrow h(x) = g(x) \rightarrow$ achar intervalos
      - **Menos preciso => usa interseção**
      - **Mais fácil => funções mais simples**

FASE I: Isolamento
Análise gráfica: Exemplo

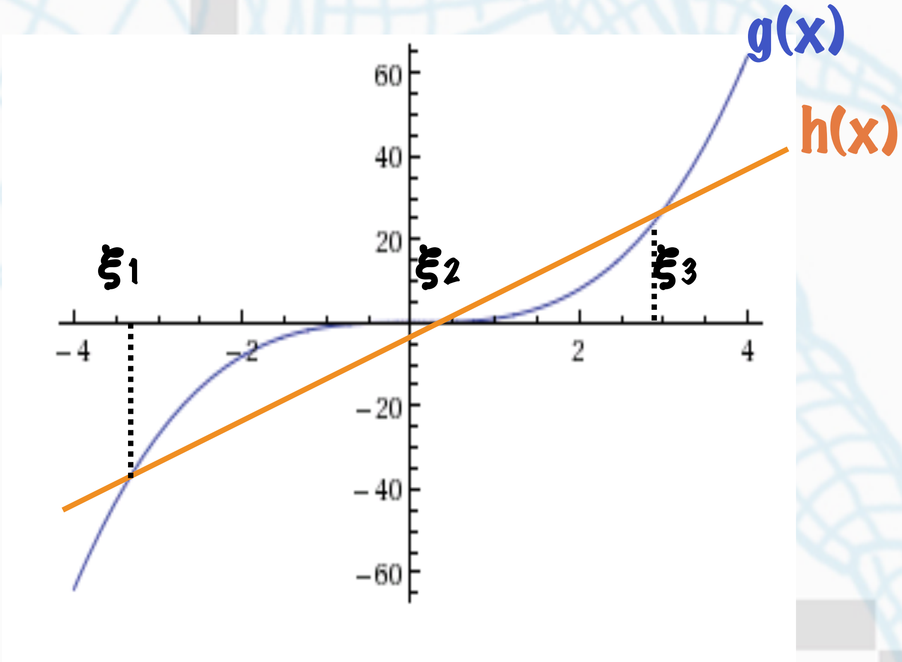
- $f(x) = x^3 - 9x + 3$
  - a) Esboçar o gráfico



- $I_1 = [-4;-3] \longrightarrow \xi_1$
- $I_2 = [0;1] \longrightarrow \xi_2$
- $I_3 = [2;3] \longrightarrow \xi_3$

FASE I: Isolamento
Análise gráfica: Exemplo

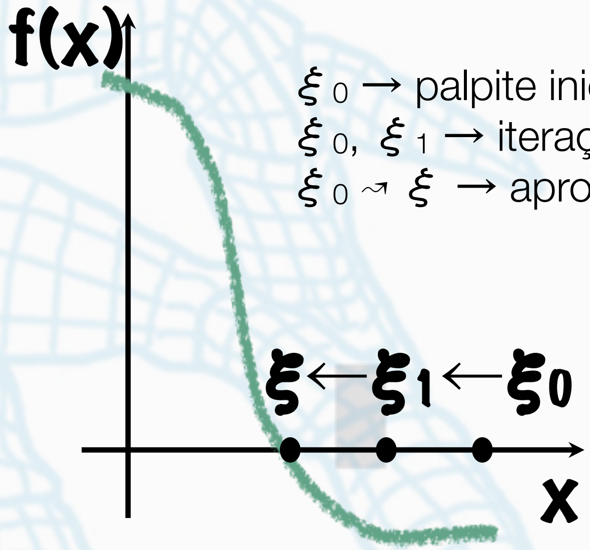
- $f(x) = x^3 - 9x + 3$ g(x) h(x)
  - b) $f(x) = 0$: $x^3 - 9x + 3 = 0 \rightarrow x^3 = 9x - 3$



- $I_1 = [-4;-3] \longrightarrow \xi_1$
- $I_2 = [0;1] \longrightarrow \xi_2$
- $I_3 = [2;3] \longrightarrow \xi_3$

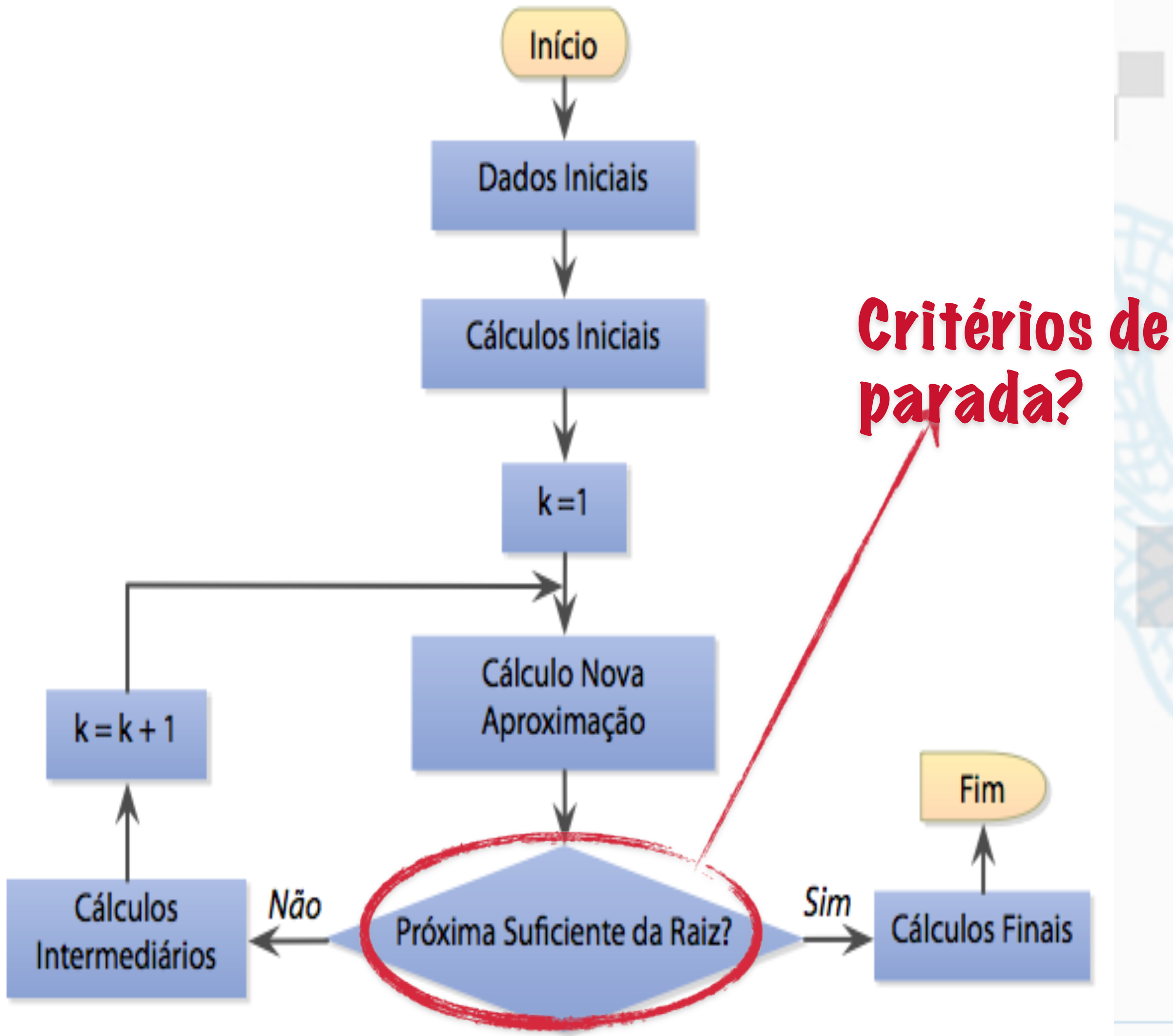
FASE II: Refinamento

- Método iterativo
  - Sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos
  - Iteração
    - Execução de um ciclo
    - Utiliza resultados das iterações anteriores (para os seguintes)



$\xi_0 \rightarrow$ palpite inicial
$\xi_0, \ \xi_1 \rightarrow$ iteração
$\xi_0 \nearrow \xi \rightarrow$ aproximado

FASE II: Refinamento



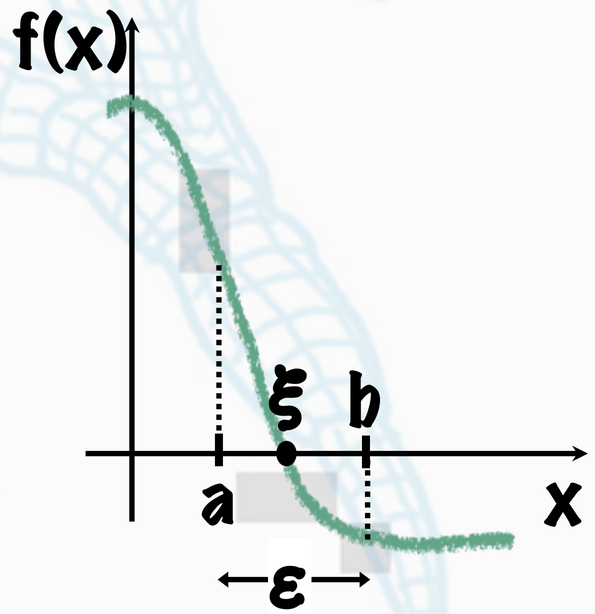
FASE II: Refinamento
Critérios de Parada

- Duas interpretações
  - c1) $|\overline{x} - \xi| < \varepsilon$
  - c2) $|f(\overline{x})| < \varepsilon$

Como realizar c1), se não conhecemos ξ?

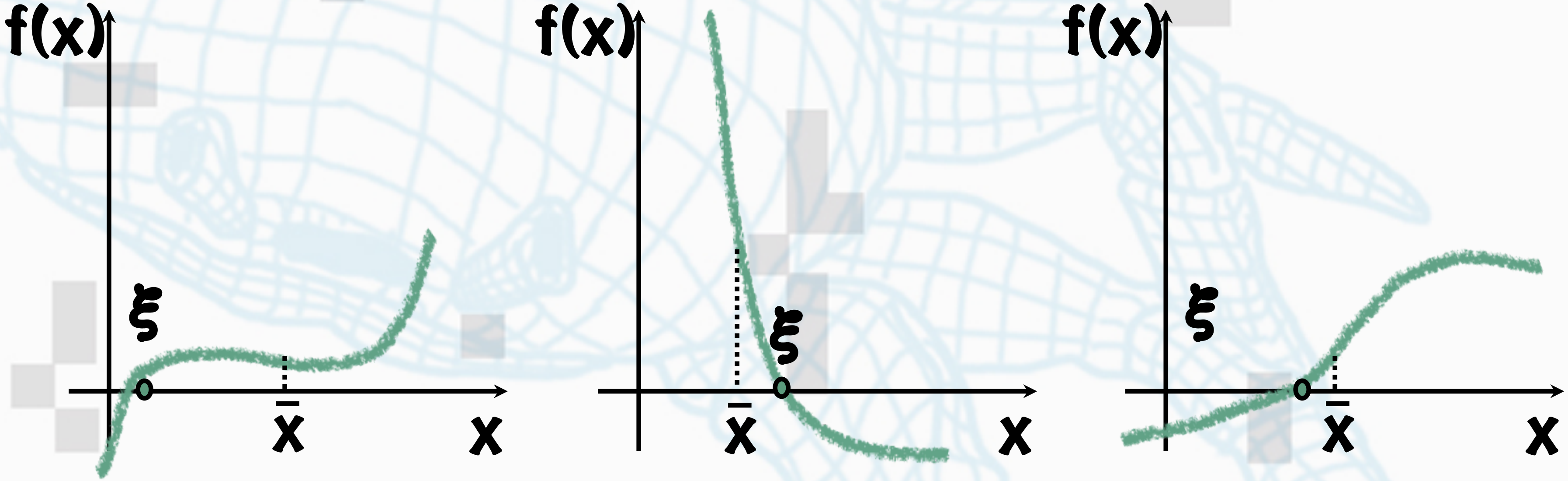
Reduzir intervalo a cada iteração:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi \in [a,b] & \text{(isolamento)} \\ |b - a| < \varepsilon & \text{(refinamento)} \end{array}\right\} \forall x \in [a,b],\ |x - \xi| < \varepsilon,\ \overline{x} \rightarrow x$$



FASE II: Refinamento
Critérios de Parada

- Silmutaneidade



$$|\bar{x} - \xi| >> \varepsilon$$ ✘

$$|f(\bar{x})| < \varepsilon$$ ✔

$$|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$$ ✔

$$|f(\bar{x})| >> \varepsilon$$ ✘

$$|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$$ ✔

$$|f(\bar{x})| < \varepsilon$$ ✔

FASE II: Refinamento
Critérios de Parada

- Limitante
  - Usar teste do erro relativo

$$\frac{|f(\bar{x})|}{L} < \varepsilon \text{ , onde } L \approx |f(\bar{x})|$$

- Número de iterações
  - Número de iterações > Número máximo de iterações