Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 6: Método por Fatoração LU

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Métodos de decomposição:
  - A ideia básica dos métodos de decomposição:
    - Decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de duas ou mais matrizes (decompor a matriz A em outras)
    - Em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que ao final produzirá a solução do sistema original dado

$$Ax = b, \text{ fazendo } A = CD, \text{ temos:}$$
$$CDx = b, \text{ se } y = Dx, \text{ temos:}$$
$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Cy = b \\ Dx = y \end{cases}$$

Introdução

- Método de fatoração LU:
  - Quando o sistema linear possui matriz dos coeficientes triangular vimos que a solução é obtida de uma maneira mais simples
    - Sistema triangular superior: substituições retroativas
    - Sistema triangular inferior: substituições sucessivas
  - Fatoração A = LU:
    - L é uma matriz triangular inferior unitária ($l_{ii}=1, \forall i$)
    - U é uma matriz triangular superior normal ($c_{ij}=0, \forall i > j$)

Introdução

- Método de fatoração LU:

L U A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Introdução

- Método de fatoração LU:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b, \text{ fazendo Ux=y}$$
$$Ly = b$$

- A solução y do sistema triangular inferior Ly=b é dada por substituições sucessivas
- O vetor y calculado é então usado como termo independente do sistema triangular superior Ux=y, cuja solução x (desejada) é calculada por substituições retroativas

Fatores L e U

- Cálculo dos fatores:
  - Uma matriz A pode ser fatorada de duas formas:
    - Usando-se fórmulas para os elementos l_{ij} e u_{ij}
    - Usando-se o método de eliminação de Gauss
  - A matriz triangular superior U é a mesma matriz U dada pelo método de eliminação de Gauss normal
  - A matriz triangular inferior unitária L é obtida por:

$$l_{ii} = 1,\ l_{ij} = 0,\ i < j$$

$$l_{ij} = -m_{ij} = a_{ij}/a_{jj},\ i > j$$

Exemplo

- Decompor a matriz dos coeficientes do sistema abaixo em dois fatores L e U

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 1 do método de eliminação de Gauss:
  - Eliminar a coluna abaixo do pivô, utilizando as operações l-elementares (sistema equivalente)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ \boxed{-2} & 8 & -1 \\ \boxed{4} & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L'_2 = L_2 + 2L_1 \\ L'_3 = L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$-m_{21} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$-m_{31} = \frac{4}{1} = 4$$

Exemplo

- Ao final da etapa 1 da eliminação de Gauss:
  - Obtém-se as matrizes parciais A e os multiplicadores

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

m_{21}

m_{31}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = M^{(0)} A^{(0)} = A^{(1)}$$

Exemplo

- Etapa 2 do método de eliminação de Gauss:
  - Eliminar a coluna abaixo do pivô, utilizando as operações l-elementares (sistema equivalente)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{6} & -3 \end{bmatrix} \quad L'_3 = L_3 - 3L_2$$

$$-m_{32} = \frac{6}{2} = 3$$

Exemplo

- Ao final da etapa 2 da eliminação de Gauss:
  - Obtém-se as matrizes parciais A e os multiplicadores

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

m32

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = M^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)}$$

Exemplo

- No final da eliminação completa temos que:

$$M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)} \quad (A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)})$$

$$\Rightarrow M^{(1)}M^{(0)}A^{(0)} = A^{(2)} \; (A^{(0)} = A)$$

$$\Rightarrow M^{(1)}M^{(0)}A = A^{(2)}$$

$A^{(2)}$ é triangular superior = U

Exemplo

- No final da eliminação completa temos que:

$$M^{(1)}M^{(0)}A = A^{(2)}$$

- Multiplicando à esquerda os lados da equação por $(M^{(1)})^{-1}$

$$(M^{(1)})^{-1}M^{(1)}M^{(0)}A = (M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

$$M^{(0)}A = (M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

- Multiplicando à esquerda os lados da equação por $(M^{(0)})^{-1}$

$$(M^{(0)})^{-1}M^{(0)}A = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

$$A = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

Exemplo

- Verifica-se então que temos:

$-m_{21}$

$$(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (M^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-m_{32}$ $-m_{31}$

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

onde: $-m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Exemplo

- Então:

$$A = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = LU$$

onde:

$$-m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

Teorema

- Fatoração LU:
  - Dada uma matriz quadrada A de ordem n (matriz $n \times n$)
  - Seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e k colunas de A (A_k = submatriz obtida tendo com base k)
  - Se $\det(A_k) \neq 0$ para k = 1, 2, ..., n-1, então existem:
    - Uma única matriz triangular inferior $L = (m_{ij})$, com $m_{ii}=1$, $1 \leq i \leq n$
    - Uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ com cij=0, $i > j$
  - Tais que LU = A (fatoração da matriz A em L e U)
  - Além disso, tem-se: $\det(A) = \det(U) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$

Resolução de Ax=b usando LU

- Seja Ax=b tem-se então pela fatoração LU:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b, \text{ seja } y = Ux$$
$$Ly = b$$

- A solução do sistema linear dado pode ser obtida resolvendo dois sistemas triangulares
  - 1) Ly = b
  - 2) Ux = y

y?

Resolução de Ax=b usando LU

- O cálculo de y é obtido baseando-se em:

$$Ly = b$$

- Multiplicando à esquerda os lados da equação por L^{-1}

$$y = L^{-1}b$$

$$L = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} \Rightarrow L^{-1} = M^{(1)}M^{(0)}$$

$$y = M^{(1)}M^{(0)}b^{(0)}, \text{ onde } b^{(0)} = b$$

Resolução de Ax=b usando LU

- Então temos que:

$$M^{(0)}b^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ b_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} + m_{21}b_1^{(0)} \\ b_3^{(0)} + m_{31}b_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} = b^{(1)}$$

- O produto $M^{(0)}b^{(0)}$ é o mesmo vetor do lado direito obtido após a etapa 1 do processo da Eliminação de Gauss

Resolução de Ax=b usando LU

- Então temos que:

$$y = M^{(1)}M^{(0)}b^{(0)} \Rightarrow y = M^{(1)}b^{(1)}$$

$$M^{(1)}b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} + m_{32}b_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix} = b^{(2)}$$

- O produto $M^{(1)}b^{(1)}$ é o mesmo vetor do lado direito obtido após a etapa 2 do processo da Eliminação de Gauss

Exemplo

- Resolver o sistema linear usando fatoração LU:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

- Já mostramos antes que L e U são dados por:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- A solução do sistema linear L(Ux) = b pode ser obtida resolvendo dois sistemas triangulares:
  - 1) Ly = b por substituições sucessivas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$y_1=11$

$y_2=-15+2(11)=7$

$y_3=29-4(11)-3(7)=-36$

  - 2) Ux = y por substituições retroativas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

$x_1=11+3(-1)-2(3)=2$

$x_2=(7-3(3))/2=-1$

$x_3=3$

Exercício

- Exercício: resolver o sistema dado usando o método de fatoração LU

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

LU com Pivotação

- Por que utilizar uma estratégia de pivotação parcial na fatoração LU?
- Pelos mesmos motivos em Gauss:
  - Evitar um pivô nulo (fica sem solução)
  - Evitar que os multiplicadores m_{ij} tenham valores muito grandes (arrendondamento)

Gauss com Pivotação Parcial

- Revisão:

i. No início de cada etapa k, escolhe-se para pivô o elemento de maior módulo entre todos os coeficientes da coluna k, a partir da linha k

$$a_{ik}^{(k-1)}, k \leq i \leq n$$

ii. Trocam se as linhas i e k, caso tenha-se i ≠ k

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Gauss com Pivotação Parcial

- Exemplo:
  - Etapa 1:
    - Escolher o elemento de maior valor absoluto na coluna demarcada (coluna 1) para ser o pivô

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c} \quad & A & \quad & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$2 = i \neq k = 1$
trocar linhas

Vetor de permutações nas linhas: $P = (p_1, p_2, p_3)$

Início Etapa 1:
P=(1,2,3)

Final Etapa 1:
P=(2,1,3)

Matriz de Permutação

- Conceito:
  - Matriz de permutação é uma matriz quadrada de ordem n que se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas (ou colunas)
  - Pré-multiplicando-se uma matriz A por uma matriz de permutação P obtém-se a matriz PA com as suas linhas permutadas (PA é a matriz A com permutação)
  - A permutação de linhas em A dada pela matriz PA é a mesma efetuada na matriz identidade para obter P

Matriz de Permutação

- Exemplo:
  - Trocar as linhas 1 e 3 de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

  - Cria-se a matriz P trocando-se as linhas 1 e 3 da matriz identidade:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Permutação

- Exemplo:
  - Depois pré-multiplica-se P por A:

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU com pivotação parcial

- Conceitos:
  - Seja o sistema linear Ax = b dado e sejam os fatores (matrizes) L e U obtidos pelo processo de eliminação de Gauss com pivotação parcial
  - Seja A' = PA (Matriz A obtida por permutação)
    - A' é a matriz A com as linhas permutadas pela matriz P
  - L e U são os fatores da matriz A' calculados
  - As mesmas permutações aplicadas à matriz A devem ser também aplicadas ao vetor b, isto é, após as permutações em b obtem-se b' = Pb

Fatoração LU com pivotação parcial

- Conceitos:
  - Sistema linear A' x = b' é equivalente ao original Ax = b:

$$A'x = b' \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$$

  - Fazendo Ux = y, resolvemos os sistemas triangulares:
    - 1) Ly = Pb
    - 2) Ux = y
  - Para obtermos a solução do sistema linear original

Exemplo

- Resolva o seguinte sistema utilizando fatoração LU com pivotação parcial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Início etapa 1, matriz $A^{(0)}$

permutar linhas 1 e 3

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'^{(0)} = P^{(0)} A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 1 fase de eliminação em matriz $A'^{(0)}$

$$-m_{21} = \frac{1}{4} \qquad -m_{31} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{1} & 2 & 2 \\ \boxed{3} & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$L'_2 = L_2 - (1/4)L_1$

$L'_3 = L_3 - (3/4)L_1$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 11/4 \\ 0 & -4 & 13/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Início etapa 2, matriz $A^{(1)}$

permutar linhas 2 e 3

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 11/4 \\ 0 & \boxed{-4} & 13/4 \end{bmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'^{(1)} = P^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 2 & 11/4 \end{bmatrix} \quad M'^{(1)} = P^{(1)} M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 2 fase de eliminação em matriz A' (1)

$$-m_{32} = -\frac{1}{2} \longleftarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & \boxed{2} & 11/4 \end{bmatrix} \quad L'_3 = L_3 + (1/2)L_2$$

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Os fatores L e U são:

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Fazendo-se A' = PA:

$$P = P^{(1)}P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Resolvendo o sistema:

$$A'x = b' \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$$

- Fazendo Ux = y, resolvemos então os sistemas triangulares:

i) Ly = Pb

$$Pb = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ly = Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$y_1=-2$

$y_2=21/2$

$y_3=35/4$

Exemplo

- Resolvendo o sistema:

$$A'x = b' \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$$

- Fazendo Ux = y, resolvemos então os sistemas triangulares:

ii) Ux = y

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$x_1=1$
$x_2=-1$
$x_3=2$

Observações

- No caso de uma matriz geral de ordem n, se A é não singular, então podemos sempre encontrar um elemento não nulo para ser o pivô em uma dada etapa k (sempre existirá um possível pivô)
- Consequentemente, sempre iremos encontrar os fatores L e U da matriz PA e eles serão únicos
- Representa-se a matriz de permutação obtida através de um vetor p (da mesma forma usada no método de Gauss com pivotação parcial)
  - p(k) = i se na etapa k a linha i da matriz original A for a linha pivotal

Observações

- Por exemplo, no exemplo anterior:
  - Inicialmente temos p = (1,2,3) (sem permutação)
  - No início da etapa 1, trocamos as linhas 1 e 3:

    p = (3,2,1)

    - p(1) = 3, a linha 3 é a linha pivotal na etapa 1
  - No início da etapa 2, trocamos as linhas 2 e 3:

    p = (3,1,2)

    - p(2) = 1, a linha 1 é a linha pivotal na etapa 2

Algoritmo

```
Algoritmo: LU Pivotacao Parcial
Entrada: n, A, b
Saída: x
  {inicialização do vetor de permutações}
  para i ← 1 até n faça:
    p[i] = i
  fim para
  para k ← 1 até n-1 faça:
    pv,r ← escolhe_pivo(A,k)
```

```
    se pv = 0 então pare! {matriz é singular}
    se r ≠ k então:
      permuta(p, A, k, r)
    fim se
    {guarda fatores m em A}
    para i ← k+1 até n faça:
      m ← A[i][k]/A[k][k]
      A[i][k] ← m
      para j ← k+1 até n faça:
        A[i][j] ← A[i][j] - m*A[k][j]
      fim para
   fim para
  fim para
  ..
```

Algoritmo

```
  {aplica permutações em b}
  para i ← 1 até n faça:
    r ← p[i]
    blin[i] ← b[r]
  fim para
  y ← subst_sucessivas_mod(n,A,blin)
  x ← substituicoes_retroativas(n,A,y)
fim algoritmo
```

Algoritmos auxiliares

```
Algoritmo: escolhe_pivo
Entrada: A, k
Saída: pv, r
  pv ← abs(A[k][k])
  r ← k
  para i ← k+1 até n faça:
    se abs(A[i][k]) > pv
    então:
      pv ← abs(A[i][k])
      r ← i
    fim se
  fim para
fim algoritmo
```

```
Algoritmo: permuta
Entrada: p, A, k, r
Saída:
  aux ← p[k]
  p[k] ← p[r]
  p[r] ← aux
  para j ← 1 até n faça:
    aux ← A[k][j]
    A[k][j] ← A[r][j]
    A[r][j] ← aux
  fim para
fim algoritmo
```

Algoritmos auxiliares

Algoritmo de substituições sucessivas modificado para matriz triangular inferior unitária

```
Algoritmo: subst_sucessivas_mod
Entrada: n, A, b
Saída: x
  para i ← 1 até n faça:
    soma ← 0
    para j ← 1 até i-1 faça:
     soma ← soma + A[i][j]*x[j]
    fim para
    x[i] = b[i] - soma
  fim para
fim algoritmo
```

Exercício

- Exercício: resolver o sistema dado usando o método de fatoração LU usando um pivoteamento parcial

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - O vetor b só é considerado no final
    - Mudando b, solução Ax=b é direta
  - Evita que sistema fique sem solução
  - Pode ajudar a simplificar os cálculos

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Existem agora 2 substituições para serem resolvidas
  - Complexidade computacional igual a Gauss (é caro)
  - Número de passos continua fixo, não pode ser menor
  - Ainda não funciona bem para as matrizes esparsas