Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 3: Método de Eliminação de Gauss

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Métodos diretos:
  - Métodos diretos analíticos:
    - Cramer, Inversa, etc… => podem ser ineficientes!

Usar métodos alternativos

  - Métodos diretos numéricos:
    - Gauss, LU, etc… => em geral são bem melhores!

Conceitos preliminares

- Antes de aprendermos o método da eliminação de Gauss propriamente dito, estudaremos dois conceitos que são muito importantes no método:
  - Sistemas triangulares
    - Inferiores
    - Superiores
  - Equivalência de sistemas
    - Operações l-elementares

Sistema triangular inferior

- Sistema triangular inferior de ordem n tem forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- A solução é obtida por substituições sucessivas
  - Ex: $a_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$

Sistema triangular inferior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \cdots - a_{n-1,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sistema triangular inferior

- Exemplo: achar a solução do sistema triangular inferior dado usando as substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

$3x_1+5x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = (1-3(2))/5 = -1$

$x_1-6x_2+8x_3 = 48 \Rightarrow x_3 = (48-(2)+6(-1))/8 = 40/8 = 5$

$-x_1+4x_2-3x_3+9x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = (6+(2)-4(-1)+3(5))/9 = 27/9 = 3$

Sistema triangular inferior

- Algoritmo:

```
Algoritmo: Substituicoes Sucessivas
Entrada: n, A, b
Saída: x
  x[1] ← b[1]/A[1][1]
  para i ← 2 até n faça:
     soma ← 0
     para j ← 1 até i–1 faça:
         soma ← soma + A[i][j] * x[j]
     fim para
     x[i] ← (b[i] – soma)/A[i][i]
  fim para
fim algoritmo
```

Sistema triangular superior

- Sistema triangular superior de ordem n tem forma

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\quad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad\;\; \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

- A solução é obtida por substituições retroativas
  - Ex: $a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \quad x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$

Sistema triangular superior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Sistema triangular superior

- Exemplo: achar a solução do sistema triangular superior dado usando as substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$2x_4 = 8 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$4x_3+5x_4 = 28 \Rightarrow x_3 = (28-5(4))/4 = 2$$

$$3x_2+7x_3-4x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = (-2-7(2)+4(4))/3 = 0$$

$$5x_1-2x_2+6x_3+x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = (1+2(0)-6(2)-(4))/5 = -15/5 = -3$$

Sistema triangular superior

- Algoritmo:

```
Algoritmo: Substituicoes Retroativas
Entrada: n, A, b
Saída: x
  x[n] ← b[n]/A[n][n]
  para i ← (n-1) até 1 faça:
     soma ← 0
     para j ← i+1 até n faça:
         soma ← soma + A[i][j] * x[j]
     fim para
     x[i] ← (b[i] - soma)/A[i][i]
  fim para
fim algoritmo
```

Sistemas equivalentes

- Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando tem mesmo vetor solução
- Exemplo:

$$A\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 8 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases} \qquad B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -2 \\ x_1 + 4x_2 & = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^A = x^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \sim B$$

- Observação: o símbolo ~ significa equivalência!!!

Sistemas equivalentes

- Operações l-elementares:
  - Sistema de equação linear pode ser transformado em um outro sistema equivalente utilizando três operações l-elementares (operações de linha)
    - a) Trocar a ordem de duas equações
    - b) Multiplicar uma equação por uma constante não nula
    - c) Somar uma equação à outra
  - Usando operações l-elementares podemos transformar um sistema linear em um outros sistema equivalente de solução mais fácil, como por exemplo em um sistema triangular superior ou em um sistema triangular inferior

Sistemas equivalentes

- Operações l-elementares (operações de linha):
  - a) Trocar a ordem de duas equações:

$$B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -2 \\ x_1 + 4x_2 & = 9 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 & = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^B = x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B \sim C$$

Sistemas equivalentes

- Operações l-elementares (operações de linha):
  - b) Multiplicar uma equação por uma constante não nula:

$$C\begin{cases} x_1 + 4x_2 &= 9 \\ 2x_1 - 2x_2 &= -2 \end{cases} \qquad D\begin{cases} x_1 + 4x_2 &= 9 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^C = x^D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C \sim D$$

Sistemas equivalentes

- Operações l-elementares (operações de linha):
  - c) Somar uma equação à outra:

$$D\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = 9 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases} \qquad E\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 8 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^D = x^E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D \sim E$$

$$A \sim B \sim C \sim D \sim E = A$$

Eliminação de Gauss

- O método da eliminação de Gauss evita o cálculo direto da matriz inversa A^{-1} de A
- Consiste em transformar o sistema linear original em sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior
  - Passos determinados
  - Resolução imediata

Sistema triangular equivalente

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}
$$

- Transformação Ax = b ~ Ux = d (operações)
- Solução de Ux = d (substituições retroativas)
- Exatidão da solução calculada pode ser verificada calculando-se o vetor resíduo
  - r = b - Ax, se r = 0, a solução é exata

Exemplo

- Etapa 1: os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal devem ser eliminados, baseando-se no elemento da diagonal da primeira linha a_{11}=1 (elementos viram zero)
  - a_{11} é chamado elemento pivô e a linha que o contém, linha pivotal (base para as operações)

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 1: para eliminar $a_{21} = -2$, multiplicamos a primeira linha por um fator m_{21} e a somamos à segunda linha, onde tem-se a seguinte equação:
  - $- m_{21}a_{11} + a_{21} = 0 \rightarrow m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -(-2)/1 = 2$
- A nova linha 2 será $L_2' = 2L_1 + L_2$ (zera a_{21})

Multiplica-se a primeira linha por $m_{21} = 2$ e soma com a segunda linha, substituindo-a

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ \boxed{-2} & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Eliminar

Exemplo

- Etapa 1: para eliminar $a_{31} = 4$, multiplicamos a primeira linha por um fator m_{31} e a somamos à terceira linha, onde tem-se a seguinte equação:
  - $m_{31}a_{11} + a_{31} = 0 \rightarrow m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -(4)/1 = -4$
- A nova linha 3 será $L_3' = -4L_1 + L_3$ (zera a_{31})

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ \boxed{4} & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Eliminar

Exemplo

- Etapa 2: Os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal devem ser eliminados, baseando-se no elemento da diagonal da segunda linha $a'_{22}=2$ (mesmo processo)
  - a'_{22} será o pivô e a linha 2 será a linha pivotal

Pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{6} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Eliminar

Exemplo

- Etapa 2: para eliminar $a_{32} = 6$, multiplicamos a segunda linha por um fator m_{32} e a somamos à terceira linha, onde tem-se a seguinte equação:
  - $m_{32}a_{22} + a_{32} = 0 \rightarrow m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -(6)/2 = -3$
- A nova linha 3 será $L_3'' = -3L_2' + L_3'$ (zera a_{32})

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{6} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Eliminar

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		1	-3	2	11	
2		-2	8	-1	-15	
3		4	-6	5	29	
4		0	2	3	7	$2L_1 + L_2$
5		0	6	-3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	-12	-36	$-3L_4 + L_5$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		<u>1</u>	-3	2	11	
2	$m_{21} = -(-2)/1 = 2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31} = -(4)/1 = -4$	4	-6	5	29	
4		0	<u>2</u>	3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = -6/2 = -3$	0	6	-3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	<u>-12</u>	-36	$-3L_4 + L_5$

Novo sistema é formado pelas linhas L1, L4, L6

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

- Resolvendo o sistema triangular superior através de substituições retroativas, temos:

$$-12x_3 = -36 \Rightarrow x_3 = 3$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = (7-3(3))/2 = -1$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \Rightarrow x_1 = 11+3(-1)-2(3) = 2$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Resíduo: usando o vetor resíduo r = b - Ax para verificar a exatidão da solução, temos:

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como o vetor resíduo r é nulo, então temos que a solução pelo método de Gauss é exata

Caso geral

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Supõe-se que det(A) ≠ 0 (existe solução única)
  - É sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento $a_{11} \neq 0$, usando a operação l-elementar a) relativa a trocar duas equações do sistema fornecido

Caso geral

- Estratégia:
  - Eliminação por colunas da matriz A
  - Etapa k: fase para remover a coluna k
    - Cálculo do fator m (multiplicador)
    - Atualização da matriz A e do vetor b
    - Elementos ao final de cada etapa k:
      - **Elemento da matriz A na linha i coluna j:** $\Rightarrow a_{ij}^{(k)}$
      - **Elemento do vetor b na linha i:** $\Downarrow b_i^{(k)}$

Caso geral

- Etapa 1: Eliminar coluna 1

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Cálculo do fator m_{i1}

$m_{21} = -a_{21}/a_{11}$

$m_{31} = -a_{31}/a_{11}$

...

$m_{n1} = -a_{n1}/a_{11}$

$$\Rightarrow m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

Caso geral

- Etapa 1: Atualização da matriz A e do vetor b

Pivô

Eliminar

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Linha 1 permanece igual:

$a^{(1)}_{11} = a_{11}$

$a^{(1)}_{12} = a_{12}$

...

$a^{(1)}_{1n} = a_{1n}$

$$\Rightarrow a_{1j}^{(1)} = a_{1j}, j = 1, \ldots, n.$$

Caso geral

- Etapa 1: Atualização da matriz A e do vetor b

Pivô

Eliminar

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, \dots, n.$$

- Linha 1:

$$\left.\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j} \\ b_1^{(1)} &= b_1 \end{aligned}\right\}, j = 1, \dots, n$$

- Linha 2: $a^{(1)}_{21} = m_{21}a_{11} + a_{21}$

$a^{(1)}_{22} = m_{21}a_{12} + a_{22}$

...

$a^{(1)}_{2n} = m_{21}a_{1n} + a_{2n}$

$b^{(1)}_{2} = m_{21}b_{1} + b_{2}$

Caso geral

- Etapa 1: Atualização da matriz A e do vetor b

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

- Linha 1:

$$\left.\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j} \\ b_1^{(1)} &= b_1 \end{aligned}\right\}, j = 1, \ldots, n$$

- Linha 2:

$a^{(1)}_{2j} = m_{21}a_{1j} + a_{2j}$

$b^{(1)}_2 = m_{21}b_1 + b_2$

- Linha n:

$a^{(1)}_{nj} = m_{n1}a_{1j} + a_{nj}$

$b^{(1)}_n = m_{n1}b_1 + b_n$

Caso geral

- Etapa 1: Atualização da matriz A e do vetor b

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

- Linha 1:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1j}^{(1)} = a_{1j} \\ b_1^{(1)} = b_1 \end{array}\right\}, j = 1, \ldots, n$$

- Linha i > 1:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}^{(1)} = m_{i1}a_{1j} + a_{ij} \\ b_i^{(1)} = m_{i1}b_1 + b_i \end{array}\right\}, i = 2, \ldots, n \quad e \quad j = 1, \ldots, n$$

Caso geral

- Etapa 2:

Eliminar coluna 2

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

- Cálculo do fator m_{i2}:

$$\Rightarrow m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, i = 3, \dots, n.$$

Caso geral

- Etapa 2:

Atualização de A e b

Pivô

Eliminar

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

- Linhas 1 e 2 permancem iguais:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} \end{aligned}\right\} , i = 1,2 \quad e \quad j = i, i+1, \dots, n$$

Caso geral

- Etapa 2:

Atualização de A e b

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Pivô

Eliminar

- Linha i, onde i > 2:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= m_{i2}a_{2j}^{(1)} + a_{ij}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= m_{i2}b_2^{(1)} + b_i^{(1)} \end{aligned}\right\} , i = 3, \dots, n \quad e \quad j = 2, \dots, n$$

Caso geral

- Etapa k: Eliminar coluna k

Pivô

Eliminar

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \cdots & a_{1k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1n}^{(k-1)} \\
0 & a_{22}^{(k-1)} & \cdots & a_{2k}^{(k-1)} & \cdots & a_{2n}^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(k-1)} \\ b_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{bmatrix}
$$

Caso geral

- Etapa k: Eliminar coluna k

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k-1)} \\ b_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

- Cálculo do fator m_{ik}

$$\Rightarrow m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, i = k+1, \dots, n.$$

- Linhas 1 a k permanecem iguais:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} \end{aligned}\right\}, i = 1, .., k \quad e \quad j = i, i+1, \dots, n$$

Caso geral

- Etapa k: Eliminar coluna k

- Cálculo do fator m_{ik}

$$\Rightarrow m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, i = k+1, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \ldots & a_{1k}^{(k-1)} & \ldots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \ldots & a_{2k}^{(k-1)} & \ldots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nk}^{(k-1)} & \ldots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k-1)} \\ b_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

- Linhas i, onde i > k:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= m_{ik} a_{kj}^{(k-1)} + a_{ij}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= m_{ik} b_k^{(k-1)} + b_i^{(k-1)} \end{aligned}\right\}, i = k+1, \ldots, n \quad e \quad j = k+1, \ldots, n$$

Algoritmo

Nº. de operações: $(4n^3+9n^2+7n)/6$
É preciso garantir que A[k][k] ≠ 0 antes de cada iteração

Erros de arredondamento
Pivôs muito próximos de zero geram fatores muito grandes, causando erros maiores de arredondamento

```
Algoritmo: Eliminação de Gauss
Entrada: n, A, b
Saída: x
  para k ← 1 até n−1 faça:
    para i ← k+1 até n faça:
      m ← −A[i][k]/A[k][k]
      A[i][k] ← 0
      para j ← k+1 até n faça:
        A[i][j] ← A[i][j] +m*A[k][j]
      fim para
      b[i] ← b[i] + m*b[k]
    fim para
  fim para
  x ← Substituicoes_Retroativas(n,A,b)
fim algoritmo
```

Exercício

- Resolva o sistema linear usando método de eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exercício

- Resolver sistema pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

Pivô

Eliminar

Eliminar

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{4} & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

m_{21}: $m_{21}a_{11} + a_{21} = 0 \rightarrow m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -(1)/3 = -1/3 \Rightarrow L_2' = (-1/3)L_1+L_2$

m_{31}: $m_{31}a_{11} + a_{31} = 0 \rightarrow m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -(4)/3 = -4/3 \Rightarrow L_3' = (-4/3)L_1+L_3$

Exercício

- Resolver sistema pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & \boxed{1/3} & -22/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

Eliminar

$m_{32}a_{22} + a_{32} = 0 \rightarrow m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -(1/3)/(1/3) = -1 \Rightarrow L_3'' = -1L'_2+L'_3$

Exercício

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		<u>3</u>	2	4	1	
2	m_{21} = -(1)/3 = -1/3	1	1	2	2	
3	m_{31} = -(4)/3 = -4/3	4	3	-2	3	
4		0	<u>1/3</u>	2/3	5/3	(-1/3)L_1 + L_2
5	m_{32} = -(1/3)/(1/3) = -1	0	1/3	-22/3	5/3	(-4/3)L_1 + L_3
6		0	0	<u>-8</u>	0	-1L_4 + L_5

Novo sistema é formado pelas linhas L1, L4, L6.

Exercício

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Resolvendo o sistema triangular superior através de substituições retroativas, temos:

$$-8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$(1/3)x_2+(2/3)x_3 = 5/3 \Rightarrow x_2 = (5/3 - (2/3)0)/(1/3) = 5$$

$$3x_1+2x_2+4x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = (1 - 2(5) -4(0))/3 = -3$$

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício

- Resíduo: usando o vetor resíduo r = b - Ax para verificar a exatidão da solução, temos:

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como o vetor resíduo r é nulo, então temos que a solução pelo método de Gauss é exata

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Em geral o método também converge
  - É um método também bem robusto
  - Sabe-se exatamente número de passos

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - O pivô pode ser nulo (precisar de pivotação)
  - Número de passos é fixo, não pode ser menor
  - Não funciona bem para as matrizes esparsas
  - É caro computacionalmente → $O(n^3)$