Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 2: Método da Bisseção

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

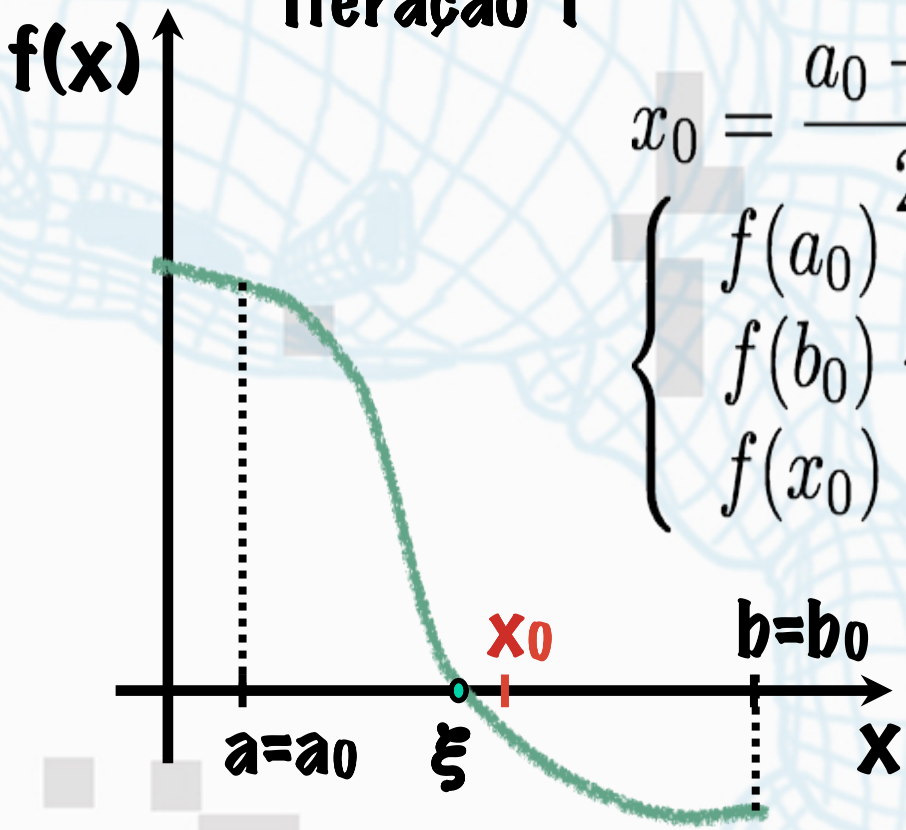
Descrição

- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], sendo ξ a única raiz de $f(x) = 0$ neste intervalo

- O **método da bisseção** consiste em reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz [a,b] até que se atinja uma precisão requerida: $(b-a) < \varepsilon$, subdividindo o intervalo ao meio a cada iteração

Graficamente

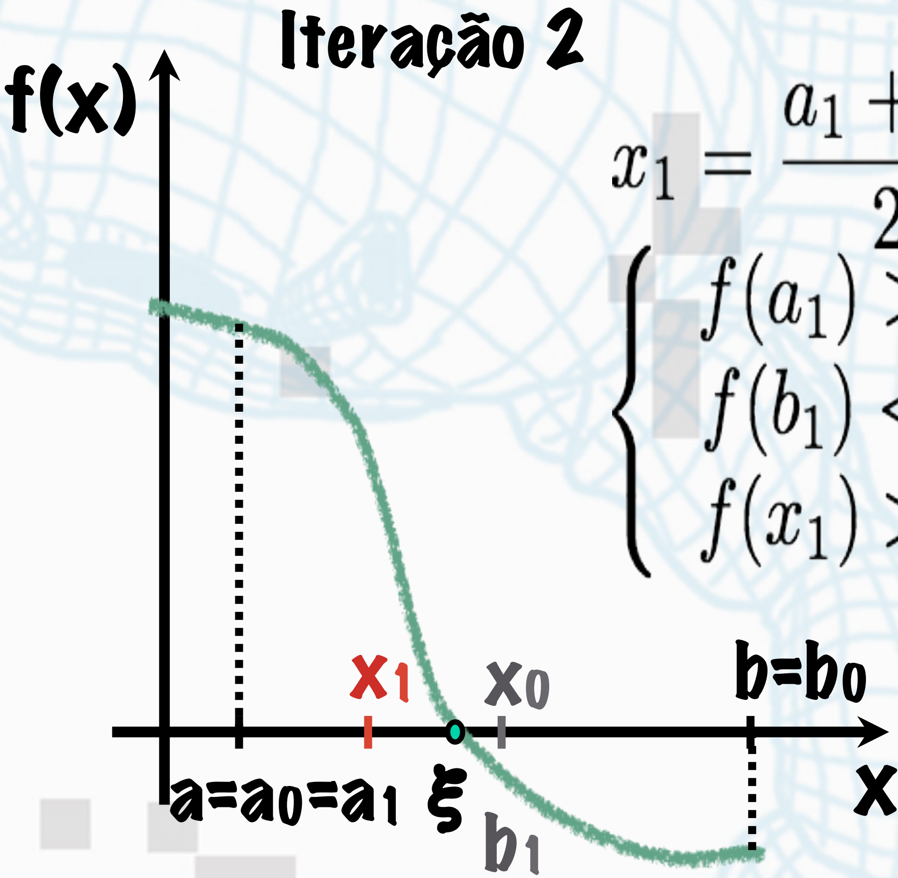
Iteração 1



$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a_0) > 0 \\ f(b_0) < 0 \\ f(x_0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{array} \right.$$

Graficamente

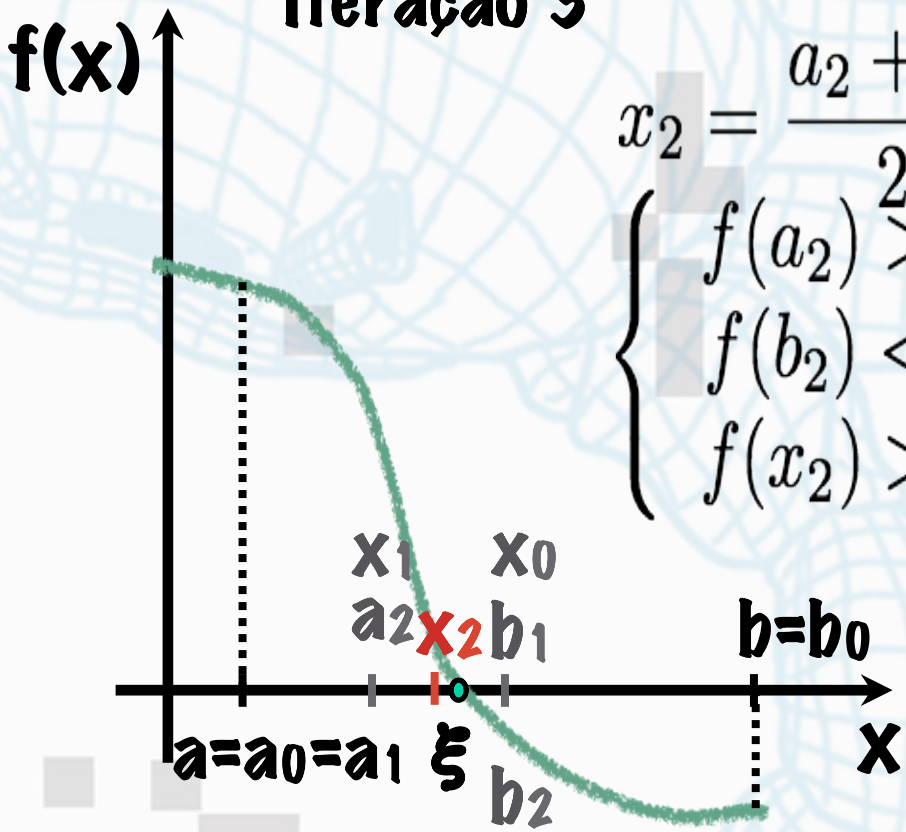


$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(a_1) > 0 \\ f(b_1) < 0 \\ f(x_1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{array}\right.$$

Graficamente

Iteração 3



$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

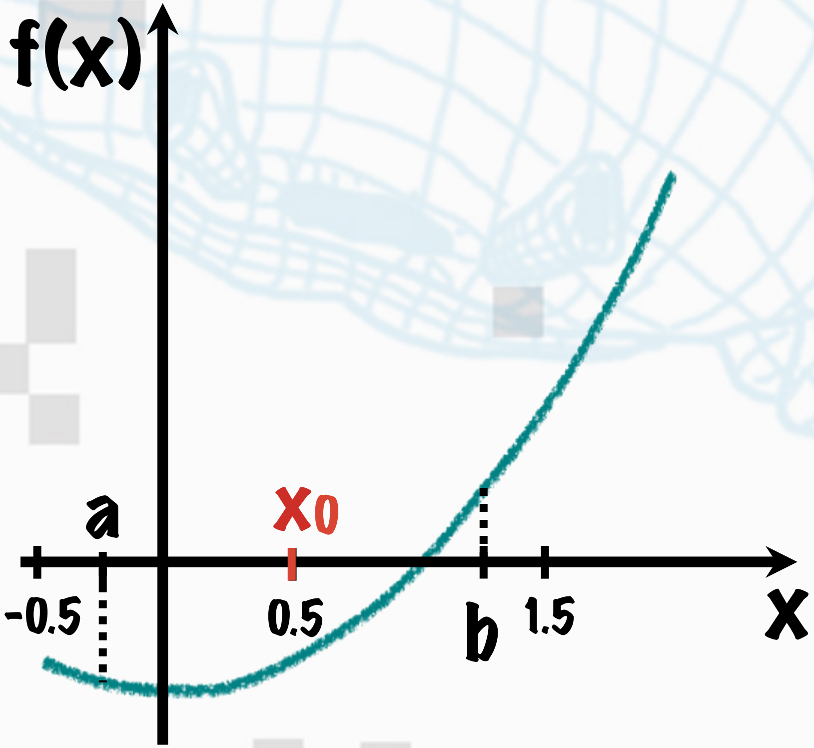
$$\left\{ \begin{array}{l} f(a_2) > 0 \\ f(b_2) < 0 \\ f(x_2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{array} \right.$$

E assim sucessivamente até que $(b_k - a_k) < \varepsilon$

Exemplo: $f(x) = x^2 - 1$

Sejam a = -0.25 e b = 1.25:

- Iteração 1

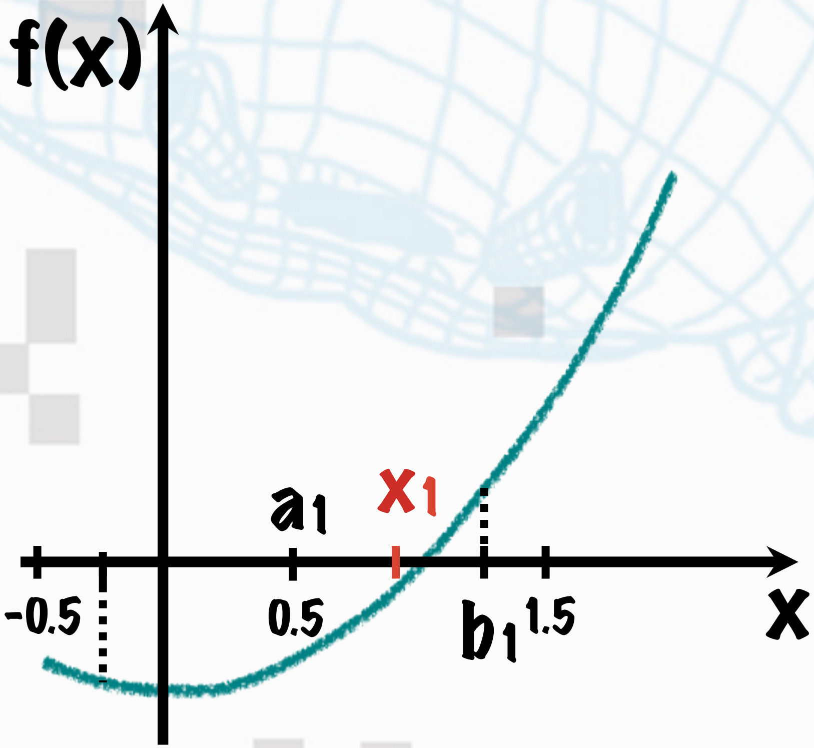


$$\begin{cases} a_0 = a = -0.25 \\ b_0 = b = 1.25 \\ x_0 = \frac{-0.25+1.25}{2} = 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a_0) = f(-0.25) = -0.9375 < 0 \\ f(b_0) = f(1.25) = 0.5625 > 0 \\ f(x_0) = f(0.5) = -0.75 < 0 \end{cases}$$

Exemplo: $f(x) = x^2 - 1$

- Iteração 2



$$\begin{cases} a_1 = x_0 = 0.5 \\ b_1 = b_0 = 1.25 \\ x_1 = \frac{0.5+1.25}{2} = 0.875 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0 \\ f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0 \\ f(x_1) = f(0.875) = -0.234375 < 0 \end{cases}$$

E assim sucessivamente...

Algoritmo

```
Algoritmo: Bisseção
Entrada: a, b, ε, maxIter
Saída: raiz
  Fa ← f(a); Fb ← f(b)
  se Fa * Fb > 0 então
    escreva "Erro: função não muda de sinal entre a e b"
    sair()
  fimse
  intervX ← abs(b−a); k ← 0
  repita
    x ← (a+b)/2; Fx ← f(x)
    escreva k, a, Fa, b, Fb, x, Fx, intervX
    se intervX ≤ ε ou k ≥ iterMax então
        interrompa
    fim se
    se Fa * Fx > 0 então a ← x; Fa ← Fx
    senão b ← x; Fb ← Fx
    intervX ← intervX/2; k ← k+1
  fim repita
  raiz ← x
fim algoritmo
```

Obs.: O teste do módulo da função também pode ser adicionado como critério de parada: $|f(x)| < \varepsilon$

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.001$

k	a	fa	b	fb	x	fx	intervX
0	0.000000e+00	3.000000e+00	1.000000e+00	-5.000000e+00	5.000000e-01	-1.375000e+00	1.000000e+00
1	0.000000e+00	3.000000e+00	5.000000e-01	-1.375000e+00	2.500000e-01	7.656250e-01	5.000000e-01
2	2.500000e-01	7.656250e-01	5.000000e-01	-1.375000e+00	3.750000e-01	-3.222656e-01	2.500000e-01
3	2.500000e-01	7.656250e-01	3.750000e-01	-3.222656e-01	3.125000e-01	2.180176e-01	1.250000e-01
4	3.125000e-01	2.180176e-01	3.750000e-01	-3.222656e-01	3.437500e-01	-5.313110e-02	6.250000e-02
5	3.125000e-01	2.180176e-01	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.281250e-01	8.220291e-02	3.125000e-02
6	3.281250e-01	8.220291e-02	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.359375e-01	1.447439e-02	1.562500e-02
7	3.359375e-01	1.447439e-02	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.398438e-01	-1.934391e-02	7.812500e-03
8	3.359375e-01	1.447439e-02	3.398438e-01	-1.934391e-02	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.906250e-03
9	3.359375e-01	1.447439e-02	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.369141e-01	6.016918e-03	1.953125e-03
10	3.369141e-01	6.016918e-03	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.374023e-01	1.788904e-03	9.765625e-04

raiz = 3.374023e-01

Estudo da Convergência

- Convergência garantida se:
  - f(x) é contínua no intervalo [a,b]
  - f(a) f(b) < 0 (teorema dos sinais)

  $\Rightarrow$ $\{x_k\}$ converge para a raiz

- A demonstração baseia-se no uso das sequências $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{x_k\}$ pelo método:
  - $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_k\}$: sequência monotônica não decrescente (limitada por b_0)
  - $\{b_0, b_1, b_2, ..., b_k\}$: sequência monotônica não crescente (limitada por a_0)
  - $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$: dada pela expressão ($x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$) ($a_k < x_k < b_k, \ \forall k$)

Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

Estimativa do número de iterações

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a, b], é possível saber, a priori, quantas iterações serão efetuadas até que $(b_k-a_k)<\varepsilon$:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \Rightarrow \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow k\,log(2) > log(b_0 - a_0) - log(\varepsilon)$$

$$k > \frac{log(b_0 - a_0) - log(\varepsilon)}{log(2)}$$

Estimativa do número de iterações

- Exemplo: Calcular a estimativa do número de iterações de $f(x)=x^3-9x+3$, onde $a=0$, $b=1$, $\varepsilon= 0.001$

$$k > \frac{log(b_0 - a_0) - log(\varepsilon)}{log(2)}$$

$$k > \frac{log(1-0) - log(10^{-3})}{log(2)} = \frac{log(1) + 3\,log(10)}{log(2)} = \frac{3}{0.3010} \approx 9.96$$

$$\Rightarrow k = 10$$

Exemplo: $f(x) = x^3-9x+3$

a = 0, b = 1, epsilon = 0.001

k	a	fa	b	fb	x	fx	intervX
0	0.000000e+00	3.000000e+00	1.000000e+00	-5.000000e+00	5.000000e-01	-1.375000e+00	1.000000e+00
1	0.000000e+00	3.000000e+00	5.000000e-01	-1.375000e+00	2.500000e-01	7.656250e-01	5.000000e-01
2	2.500000e-01	7.656250e-01	5.000000e-01	-1.375000e+00	3.750000e-01	-3.222656e-01	2.500000e-01
3	2.500000e-01	7.656250e-01	3.750000e-01	-3.222656e-01	3.125000e-01	2.180176e-01	1.250000e-01
4	3.125000e-01	2.180176e-01	3.750000e-01	-3.222656e-01	3.437500e-01	-5.313110e-02	6.250000e-02
5	3.125000e-01	2.180176e-01	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.281250e-01	8.220291e-02	3.125000e-02
6	3.281250e-01	8.220291e-02	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.359375e-01	1.447439e-02	1.562500e-02
7	3.359375e-01	1.447439e-02	3.437500e-01	-5.313110e-02	3.398438e-01	-1.934391e-02	7.812500e-03
8	3.359375e-01	1.447439e-02	3.398438e-01	-1.934391e-02	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.906250e-03
9	3.359375e-01	1.447439e-02	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.369141e-01	6.016918e-03	1.953125e-03
10	3.369141e-01	6.016918e-03	3.378906e-01	-2.438627e-03	3.374023e-01	1.788904e-03	9.765625e-04

raiz = 3.374023e-01

Observações finais

- Seja uma **função f(x) contínua** no intervalo [a,b], sendo **ξ a única raiz** de f(x) = 0 neste intervalo, o método da bisseção convergirá
  - Sempre é possível obter intervalo que contém a raiz da equação e que a amplitude do intervalo satisfaz a precisão requerida
- Se o teste do módulo da função for adicionado como critério de parada ao algoritmo, a estimativa do númerode iterações pode aumentar

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Tem convergência garantida
  - É método bastante robusto
  - É possível, a priori, determinar o número de iterações necessárias para calcular a raiz com uma precisão ε

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Não é eficiente computacionalmente devido sua convergência lenta
    - f(x) não decresce monotonicamente
    - isso ocorre porque somente o sinal de $f(x_{k-1})$ é usado para o cálculo do próximo x_k, sem levar em consideração o seu valor
  - É necessário o isolamento prévio de cada raiz em um intervalo [a,b]
- O método da bisseção é mais usado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método numérico que possua uma convergência que seja mais rápida