Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 5: Método de Gauss-Jordan

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Método da eliminação de Gauss:
  - Consiste em transformar sistema linear original em um sistema equivalente com a matriz dos coeficientes triangular superior
- Método de Gauss-Jordan:
  - Consiste em transformar sistema linear original em um sistema equivalente no qual a matriz dos coeficientes seja a matriz identidade

Obs: Pode ser também matriz diagonal

Eliminação de Gauss

- Consiste em transformar o sistema linear original em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior

$$Ax = b \sim Ux = d$$

- Solução $Ux = d$ ⇨ substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan

- Consiste em transformar o sistema linear original em um sistema equivalente onde matriz dos coeficientes é a matriz identidade

$$Ax = b \sim Ix = e$$

- Solução Ix = e ⇨ próprio vetor e calculado

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 1:
  - Transformar o pivô em 1: divide a primeira linha pelo pivô

Pivô

Divide-se a primeira linha por $a_{11} = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Etapa 1:
  - Eliminar a coluna abaixo (e acima) do pivô, utilizando operações l-elementares (gerar sistema equivalente)

Pivô

Eliminar

Eliminar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 1/3 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{4} & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

- $m_{21} = -a_{21} = -1 \Rightarrow L_2' = L_2+(-1)L_1$
- $m_{31} = -a_{31} = -4 \Rightarrow L_3' = L_3+(-4)L_1$

Exemplo

- Etapa 2:
  - Transformar o pivô em 1: divide a segunda linha pelo pivô

Transformar o pivô em 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 2 por 1/3

Exemplo

- Etapa 2:
  - Eliminar a coluna abaixo (e acima) do pivô, utilizando operações l-elementares (gerar sistema equivalente)

$$\begin{array}{l} \text{Eliminar} \\ \\ \text{Eliminar} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2/3} & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{1/3} & -22/3 & 5/3 \end{array}\right]$$

- $m_{12} = -a_{12} = -(2/3) \Rightarrow L_1'' = -2/3L'_2+L'_1$
- $m_{32} = -a_{32} = -(1/3) \Rightarrow L_3'' = -1/3L'_2+L'_3$

Exemplo

- Etapa 3:
  - Transformar o pivô em 1: divide a terceira linha pelo pivô

Transformar o pivô em 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 3 por -8

Exemplo

- Etapa 3:
  - Eliminar a coluna abaixo (e acima) do pivô, utilizando operações l-elementares (gerar sistema equivalente)

$$\begin{array}{r} \text{Eliminar} \\ \text{Eliminar} \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{0} & -3 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- $m_{13} = -a_{13} = 0 \Rightarrow L'''_1 = L''_1$
- $m_{23} = -a_{23} = -2 \Rightarrow L'''_2 = -2L''_3+L''_2$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- O vetor solução é o vetor mais à direita da matriz aumentada

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso geral

- Estratégia:
  - Eliminação por colunas
  - Etapa k: fase para remover a coluna k
    - Divide a linha k por a_{kk}
    - Eliminam-se elementos acima e abaixo do pivô
    - Atualizam-se a matriz A e do vetor b

Caso geral

- Etapa k: Transformar pivô em 1 e eliminar coluna k

$$
\begin{array}{l}
\text{Eliminar} \\ \\ \\ \text{Pivô} \\ \text{Eliminar} \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} & & b_1^{(k-1)} \\
0 & 1 & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} & & b_2^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} & & b_k^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} & & b_n^{(k-1)}
\end{array}\right]
$$

Caso geral

- Etapa k:

$$b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

- Divide a linha k por $a^{(k-1)}_{kk}$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, j = k+1, \ldots, n.$$

- Elimina os elementos acima e abaixo de $a^{(k)}_{kk}$

- Linhas i, onde i ≠ k

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= -a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} + a_{ij}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= -a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} + b_i^{(k-1)} \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, n, i \neq k; \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Algoritmo

```
Algoritmo:Gauss Jordan
Entrada: n, A, b
Saída: x
  para k ← 1 até n faça:
    para j ← k+1 até n faça:
      A[k][j] ← A[k][j]/A[k][k]
    fim para
    b[k] ← b[k]/A[k]k]
    A[k][k] ← 1
    para i ← 1 até n faça:
      se i ≠ k então:
        para j ← k+1 até n faça:
          A[i][j] ← A[i][j] – A[i][k]*A[k][j]
        fim para
        b[i] ← b[i] –A[i][k]*b[k]
        A[i][k] ← 0
    fim para
  fim para
  x ← b
fim algoritmo
```

Exercício

- Resolva o sistema linear abaixo usando o método de eliminação de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matriz inversa

- O método de eliminação de Gauss-Jordan nos permite calcular a matriz inversa ao mesmo tempo que calculamos a matriz identidade ⇨ propriedade importante!!!

- Aplicam-se na matriz identidade as mesmas operações elementares executadas na matriz dos coeficientes

Cálculo da matriz inversa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Exemplo

- Usando o método de Gauss-Jordan, determine a matriz inversa de A dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Inicialmente constrói-se a matriz aumentada (A, I)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

Transformar o pivô em 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 1 por 2

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L'_2 = L_2 \\ L'_3 = L_3 - L_1 \end{array}$$

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

Transformar o pivô em 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 2 por -1

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1/2} & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L'_1 = L_1 - (1/2)L_2$

$L'_3 = L_3 + (1/2)L_2$

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{2} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$L'_1 = L_1 - (2)L_3$

$L'_2 = L_2 + L_3$

Exemplo

- Depois aplica-se passos do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & -2 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

- Usando método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a matriz inversa de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & -5 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

- Modifique o algoritmo de Gauss-Jordan tal que receba uma matriz como entrada e calcule a sua inversa (inversa de A)

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Evita uso da retro-substituição no cálculo
  - Permite calcular a matriz inversa de [A]
  - Mantém as mesmas vantagens de Gauss

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - É mais caro computacionalmente que Gauss normal
    - Faz mais eliminações para chegar na matriz [I]
  - Número de passos continua fixo, não pode ser menor
  - Ainda não funciona bem para as matrizes esparsas