Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 4: Método do Ponto Fixo

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Descrição

- Esse método é um tipo de método aberto
  - utiliza uma fórmula para estimar a raiz
- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], contendo uma raiz da equação f(x) = 0
  - Transformação desta equação em uma equação equivalente

$$x = \varphi(x)$$

  - A partir de x_0 gerar sequência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ, até convergir à raiz

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Função de iteração

- A função φ(x) é definida da seguinte forma:

$$\varphi(x) : f(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$$

- Ao invés de tentar encontrar um zero de f(x), procura-se um ponto fixo de φ(x), onde φ(x) é conhecida como a função de iteração utilizada
- Importância do método está mais nos conceitos teóricos do que na sua eficiência computacional
  - Base para métodos muito eficientes como o de Newton-Raphson

Funções de iteração

- Reorganiza-se a equação f(x) = 0, tal que x esteja no lado esquerdo da equação usando manipulação algébrica ou simplesmente somando-se x aos dois lados da equação
  - x = φ(x)
  - Exemplo: equação $x^2 + x - 6 = 0$

$$\varphi_1(x) = 6 - x^2 \qquad \varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$$

$$\varphi_2(x) = \pm\sqrt{6 - x} \qquad \varphi_4(x) = \frac{6}{x + 1}$$

  - Podem existir infinitas funções de iteração para uma dada equação (deve-se escolher qual a adequada)

Funções de iteração

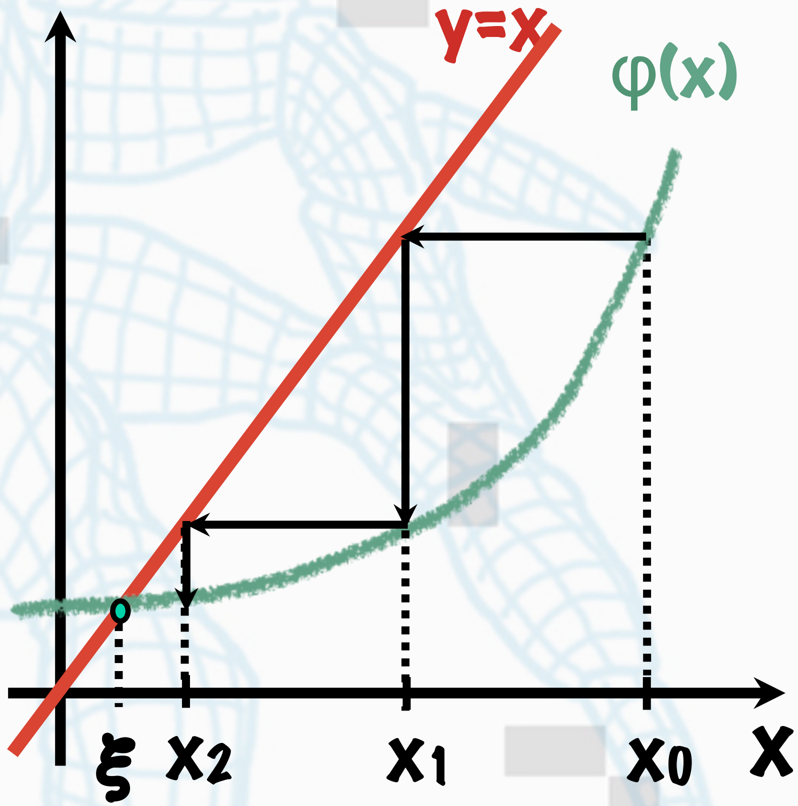
- Forma geral:
  - $\varphi(x) = x + A(x)\, f(x)$ (forma geral das funções de iteração)
  - com a condição que em ξ, ponto fixo de $\varphi(x)$, $A(\xi) \neq 0$
- $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$
  - Prova:

    ida: $f(\xi) = 0 \Rightarrow \varphi(\xi) = \xi$
    - seja ξ tal que $f(\xi) = 0$. Então $\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)\overset{0}{\cancel{f(\xi)}} \Rightarrow \varphi(\xi) = \xi$

    volta: $\varphi(\xi) = \xi \Rightarrow f(\xi) = 0$
    - se $\varphi(\xi) = \xi \Rightarrow \xi + A(\xi)\, f(\xi) = \xi \Rightarrow A(\xi)\, f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ ($A(\xi) \neq 0$).

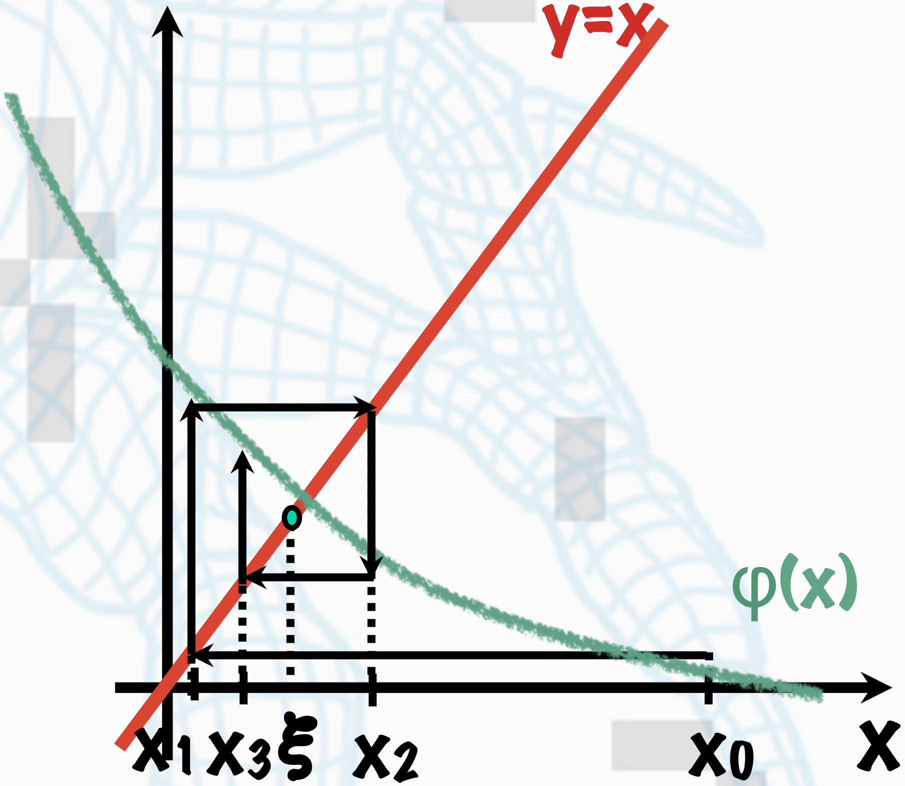
Função de iteração

- Graficamente, uma raiz ξ da equação $x = \varphi(x)$ é a abscissa do ponto de interseção da reta **y = x** e da curva **y = φ(x)**



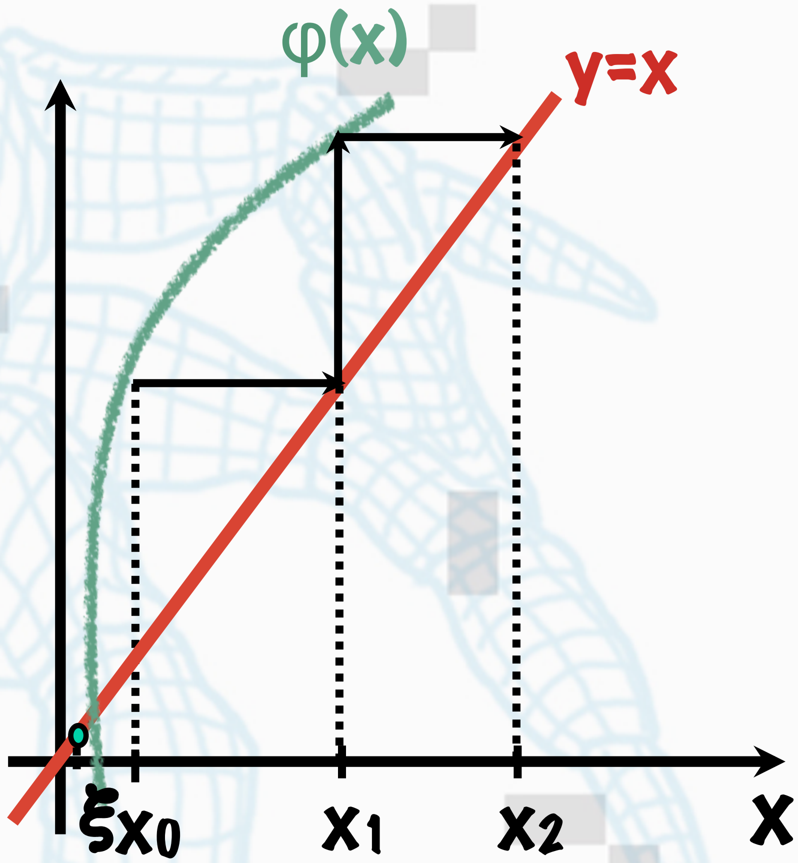
Função de iteração

- Graficamente, uma raiz ξ da equação $x = \varphi(x)$ é a abscissa do ponto de interseção da reta **y = x** e da curva **y = φ(x)**



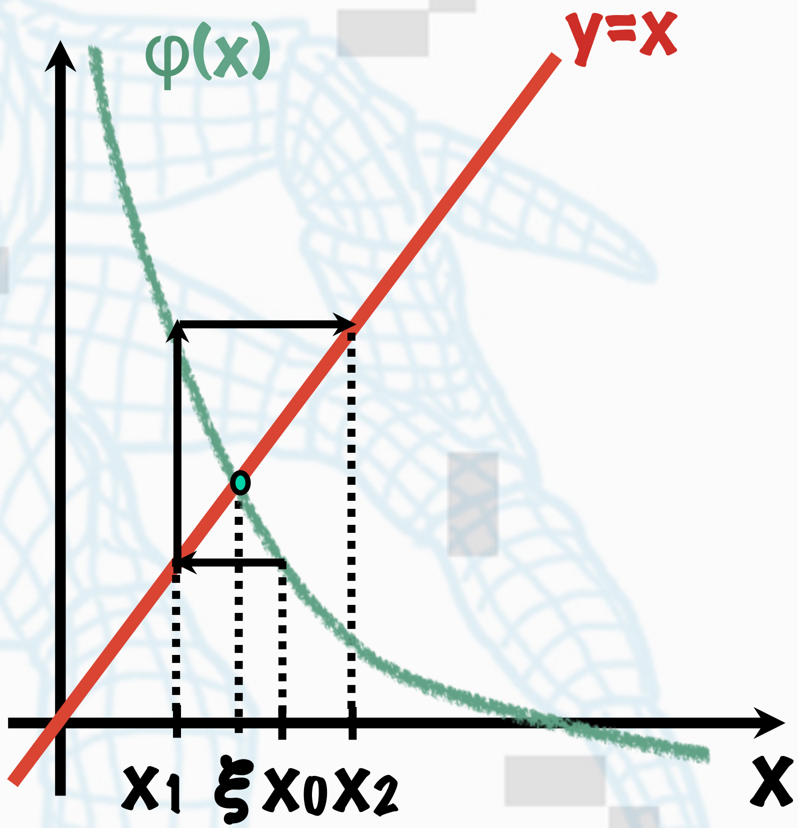
Função de iteração

- Graficamente, uma raiz ξ da equação x = φ(x) é a abscissa do ponto de interseção da reta **y = x** e da curva **y = φ(x)**
- Nem sempre uma dada sequência converge para a raiz desejada



Função de iteração

- Graficamente, uma raiz ξ da equação x = φ(x) é a abscissa do ponto de interseção da reta **y = x** e da curva **y = φ(x)**
- Nem sempre uma dada sequência converge para a raiz desejada



Algoritmo

```
Algoritmo: MPF
Entrada: x0, ε1, ε2, iterMax
Saída: raiz
  se abs(f(x0)) < ε1 então raiz ← x0; Fim.
  k ← 1
  repita
    x1 ← φ(x0)
    escreva k, x1, x0, x1−x0, f(x1)
    se abs(f(x1)) < ε1 ou abs(x1−x0) < ε2 ou k ≥ iterMax então
      raiz ← x1; Fim.
    fim se
    x0 ← x1
    k ← k+1
  fim repita
fim algoritmo
```

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $\varphi(x) = x^3/9 + 1/3$, $\xi \in (0,1)$

$x_0 = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

k	x1	x0	x1-x0	f(x1)
1	3.472222e-01	5.000000e-01	-1.527778e-01	-8.313775e-02
2	3.379847e-01	3.472222e-01	-9.237528e-03	-3.253021e-03
3	3.376232e-01	3.379847e-01	-3.614467e-04	-1.237357e-04

raiz = 3.376232e-01

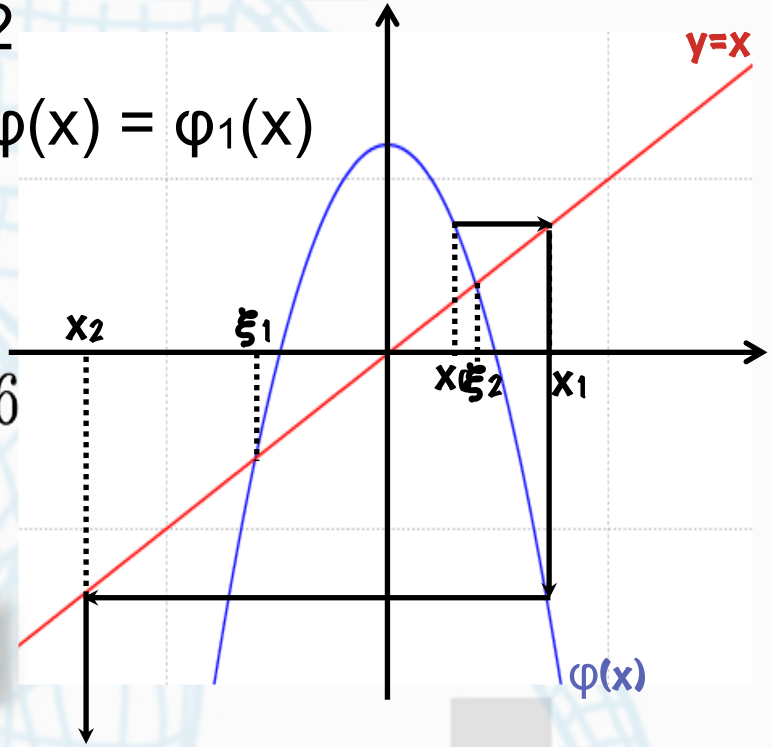
Estudo da Convergência

- Vimos que
  - Para uma dada equação $f(x) = 0$, existe mais de uma função $\varphi(x)$, tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$
  - Não é qualquer escolha de $\varphi(x)$ que o processo recursivo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ irá convergir para a raiz

Convergência: Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
  - Sejam $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ e $x_0 = 1.5$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$

$$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1.5^2 = 3.75$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - (3.75)^2 = -8.0625$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = 6 - (-8.0625)^2 = -59.003906$$
$$\vdots$$



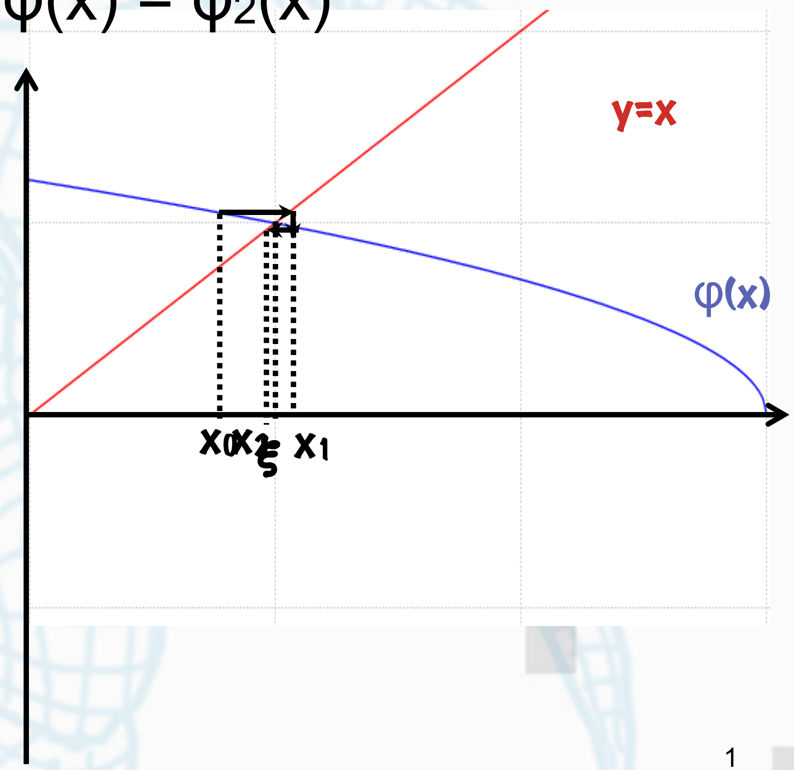
Podemos ver que $\{x_k\}$ não converge para $\xi_2 = 2$

Convergência: Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
  - Sejam $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ e $x_0 = 1.5$, $\varphi(x) = \varphi_2(x)$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6-1.5} = 2.12132$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{6-2.12132} = 1.96944$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt{6-1.96944} = 2.007623$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt{6-2.007623} = 1.99809$$

$\vdots$



Podemos ver que $\{x_k\}$ converge para $\xi_2 = 2$

Teorema para convergência

- Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrado em ξ considerado
- Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Então nesse caso se:
  - i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I
  - ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$ e
  - iii) $x_0 \in I$
- Então a sequência considerada $\{x_k\}$ que é gerada por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ

Teorema para convergência

- Demonstração em 2 partes:
  - 1) Prova-se que se $x_0 \in I$, então $x_k \in I, \forall k$
    - Parte-se de $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$ e como φ(x) é contínua e diferenciável em I, também usa-se o Teorema do Valor Médio para mostrar que a distância de x_{k+1} para ξ é sempre menor que a distância de x_k para ξ
    - Como I está centrado em ξ, se $x_k \in I$, $x_{k+1} \in I$
  - 2) Prova-se que $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$

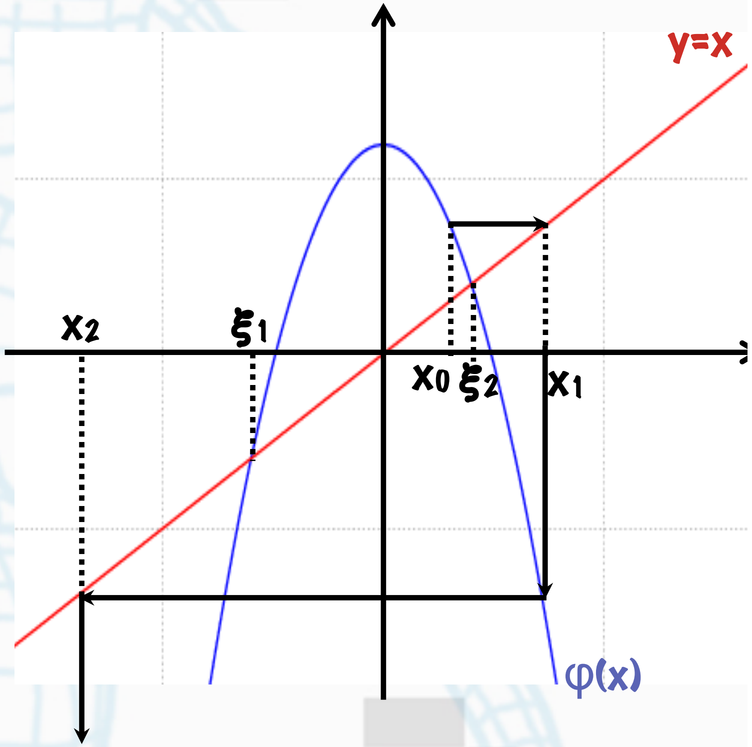
Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

Convergência: Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$:
  - Sejam $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ e $\varphi_1'(x) = -2x$
    - $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$
    - $|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
  - Então não existe intervalo I centrado em $\xi_2 = 2$, tal que

$$|\varphi'(x)| < 1, \ \forall x \in I$$

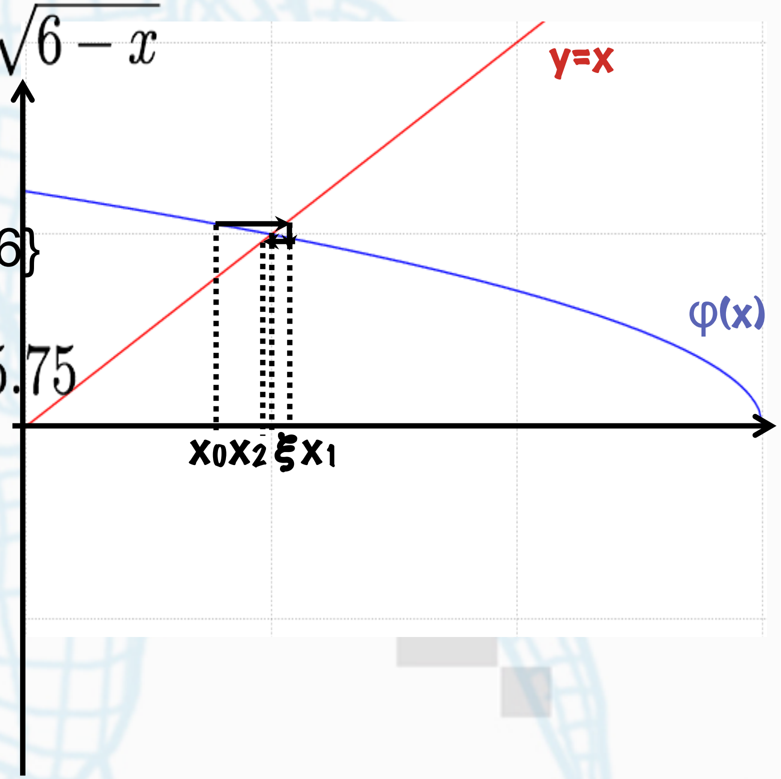
  - Portanto condição ii) não satisfeita



Convergência: Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$:
  - Sejam $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ e $\varphi_2'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}$
    - $\varphi_2(x)$ é contínua em $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$
    - $\varphi_2'(x)$ é contínua em $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$
    - $|\varphi_2'(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 5.75$
  - Então existe um intervalo I centrado em $\xi_2 = 2$, tal que

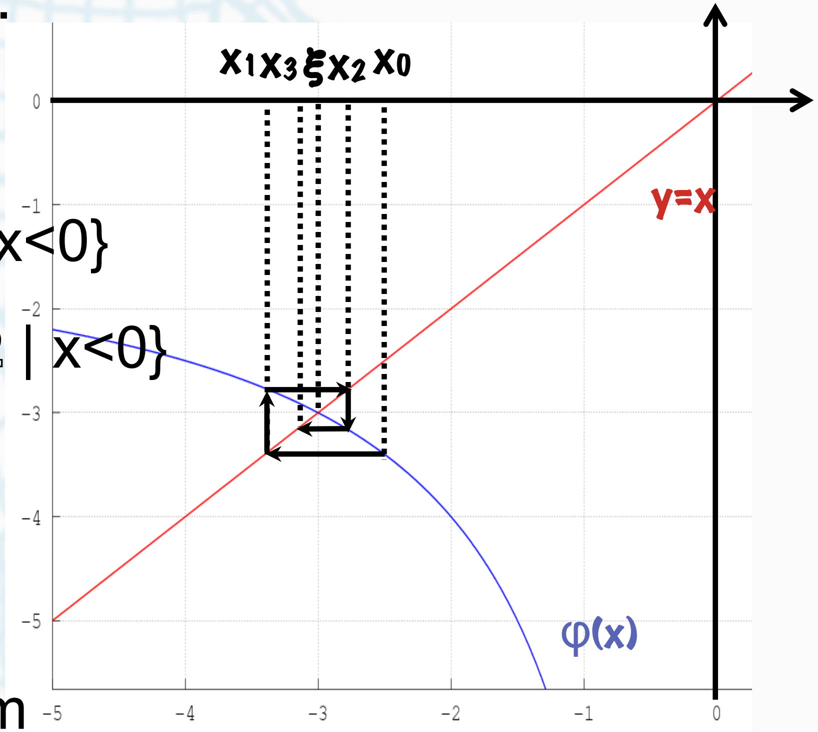
    $|\varphi'(x)| < 1, \ \forall x \in I$
  - Portanto condição ii) é satisfeita



Convergência: Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$:
  - Sejam $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$ e $\varphi_3\text{'}(x) = \frac{-6}{x^2}$
    - $\varphi_3(x)$ é contínua em $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}$
    - $\varphi_3\text{'}(x)$ é contínua em $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}$
    - $|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow |\frac{-6}{x^2}| < 1 \Leftrightarrow x^2 > 6$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{6}\, ou\, x > \sqrt{6}$$



  - Então existe intervalo I centrado em $\xi_1 = -3$, tal que $|\varphi_3'(x)| < 1$, $\forall x \in I$ e portanto condição ii) também é satisfeita

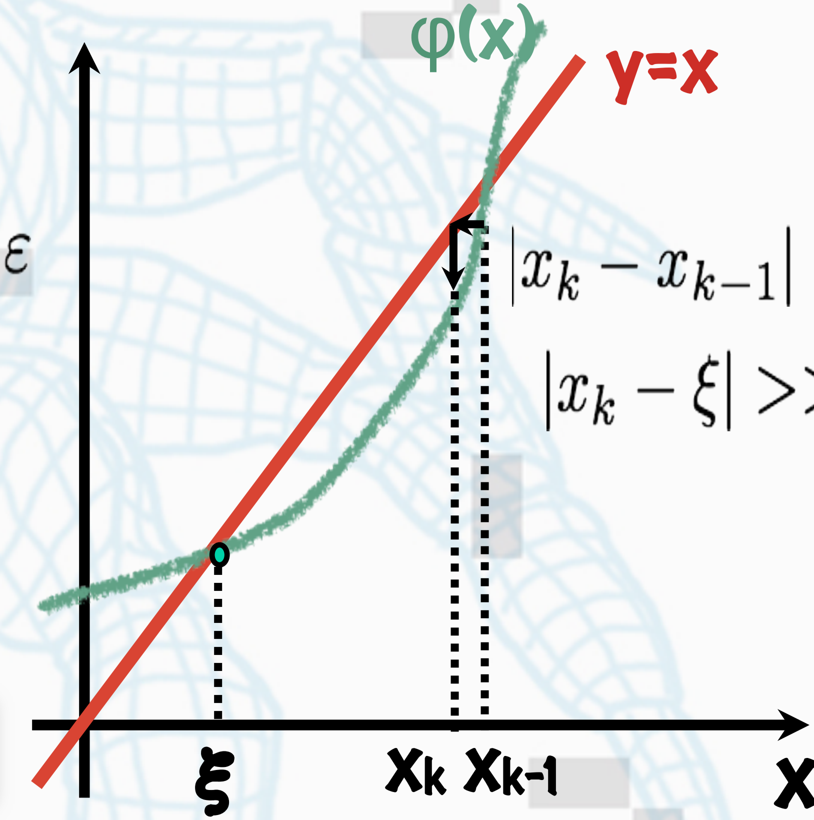
Critérios de Parada

- Escolhe-se x_k como raiz aproximada de ξ caso

$$|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$$

ou

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$



$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

$$|x_k - \xi| >> \varepsilon$$

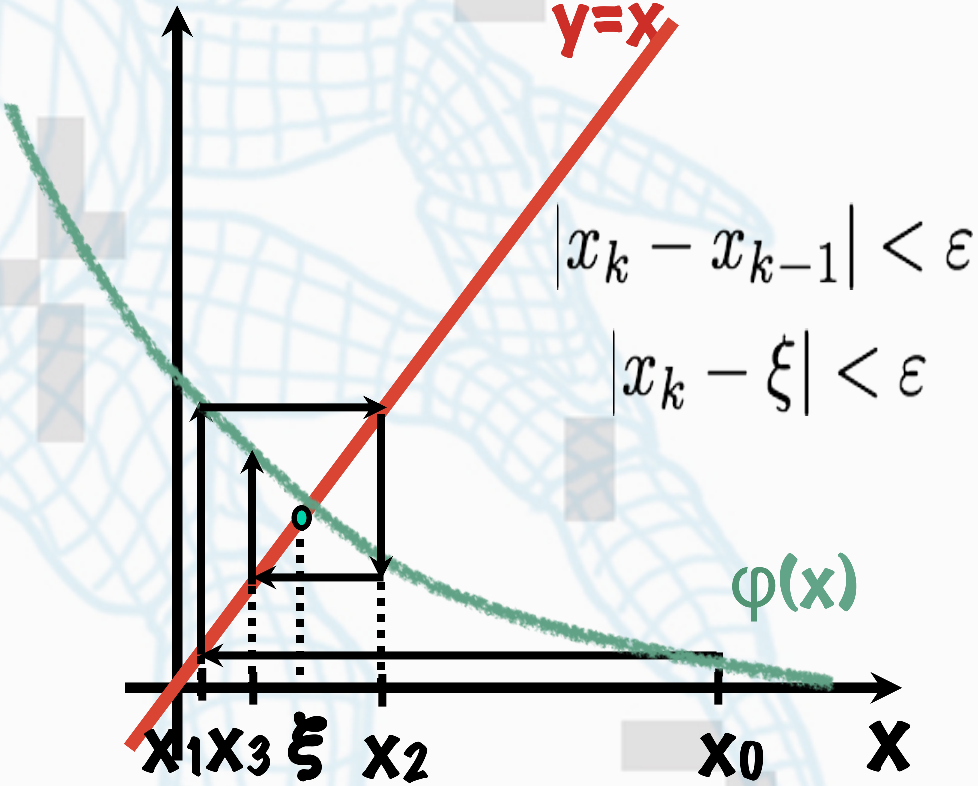
Atenção: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \nRightarrow |x_k - \xi| < \varepsilon$

Critérios de Parada

- No entanto se $\varphi'(x) < 0$ em I, a sequência $\{x_k\}$ será oscilante em torno de ξ e:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \Rightarrow |x_k - \xi| < \varepsilon$$

- Pois $|x_k - \xi| < |x_k - x_{k-1}|$



Ordem de Convergência

- A ordem de convergência de método iterativo informa a rapidez de convergência do processo
- Seja $\{x_k\}$ uma sequência que converge para um número ξ e seja $e_k = x_k - \xi$ o erro na iteração k
  - Se existir um número $p > 1$ e uma constante $C > 0$, tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

  - Então p é chamada de **ordem de convergência** da sequência $\{x_k\}$ e C é a **constante assintótica de erro**

Ordem de Convergência

- Convergência linear:
  - p = 1 e 0 ≤ *C* <1 $$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C \qquad (0 \le C < 1)$$
- Convergência de método iterativo:

$$|e_{k+1}| \approx C|e_k|^p \text{ para } k \to \infty$$

  - Se $\{x_k\}$ converge, $e_k \to 0$ quando $k \to \infty$
  - $\uparrow p \Rightarrow C\ |e_k|^p$ será mais próximo de 0
    - (independente do valor de C)
    - $\uparrow p \Rightarrow$ convergência mais rápida

Ordem de Convergência

- O MPF em geral tem convergência linear

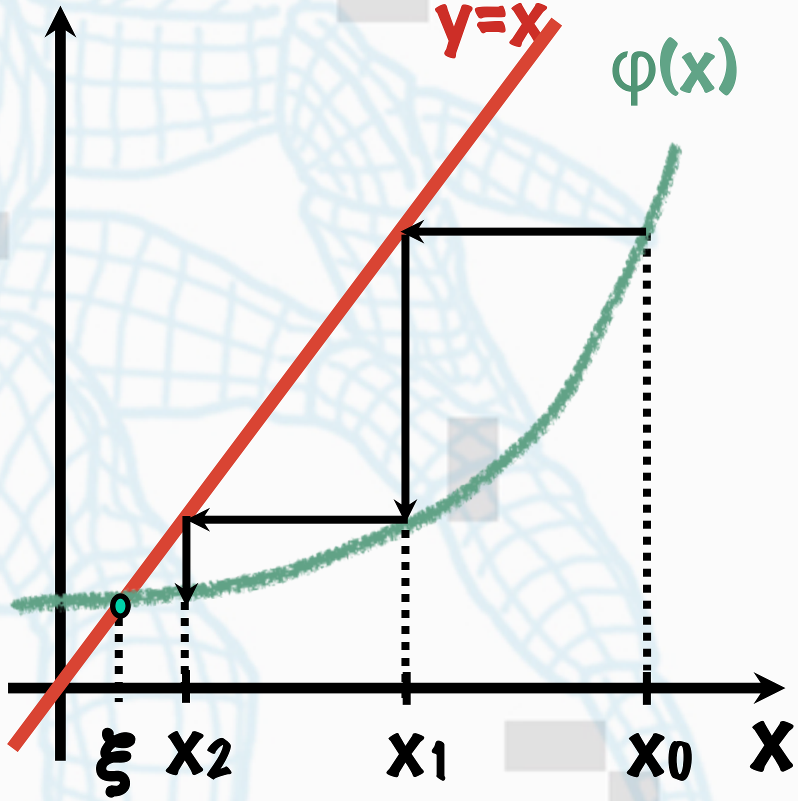
$$e_{k+1} = \varphi'(\xi)e_k$$

- Para grandes valores de k o erro em qualquer iteração é proporcional ao erro na iteração anterior por um fator de $\varphi'(\xi)$
- A convergência do método do ponto fixo será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$

Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

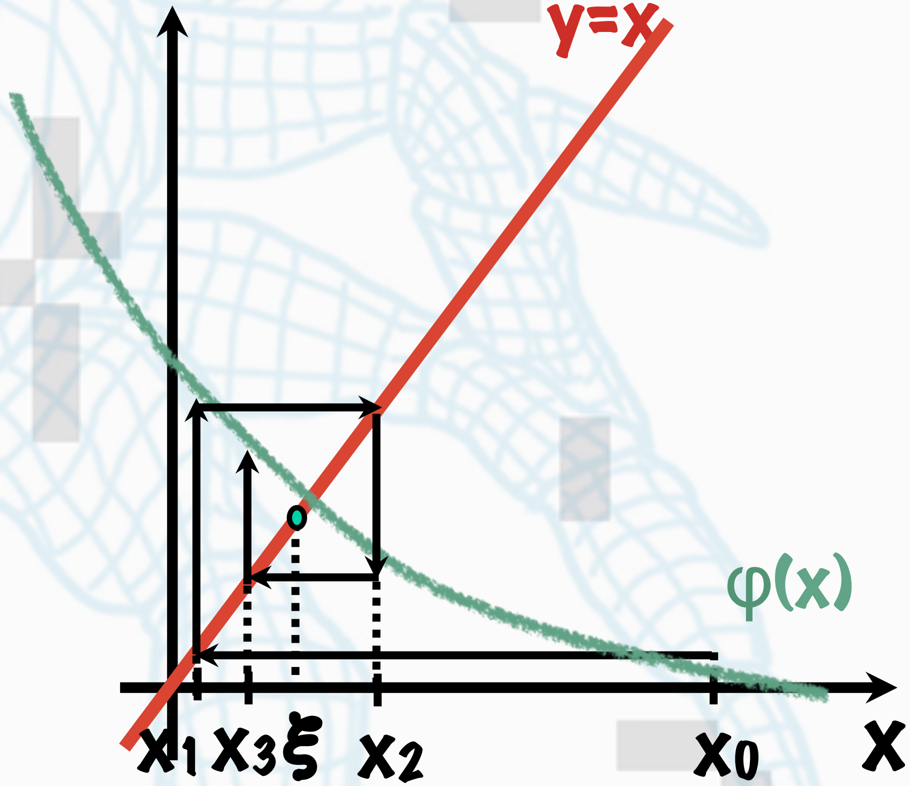
Observações sobre Erros

- Se φ' (ξ) for positiva, os erros terão sempre o mesmo sinal de x_0-ξ



Observações sobre Erros

- Se φ’ (ξ) for negativa, os erros mudarão de sinal em cada iteração



Observações finais

- Vantagens: ☺
  - O método é bastante simples
  - É muito fácil de implementar
  - Converge mais rápido que bisseção

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - A convergência não é mais assegurada
  - Pode ser difícil se achar função de iteração
  - A convergência do método é somente linear
- O método da ponto fixo funciona bem e converge rapidamente para equações onde se encontra de maneira fácil e eficiente boas funções de iteração