Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 6: Raízes de Polinômios

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Polinômio de grau n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,\ a_n \neq 0$$

  - Exemplo $p_3(x) = 7x^3 + 2x^2 - x - 9$
    - Coeficientes: $a_3 = 7$, $a_2 = 2$, $a_1 = -1$, $a_0 = -9$

- Teoremas da Álgebra que fornecem informações importantes sobre equações do tipo polinomiais
  - localização e classificação dos tipos de zeros

Localização de Raízes

- Teorema Fundamental da Álgebra:

"Se $p_n(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, ou seja, $p_n(x) = a_0 + a_1x+...+a_nx_n$, com seus coeficientes a_i reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então $p_n(x)$ tem pelo menos um zero, ou seja, existe um número complexo ξ tal que $p_n(\xi) = 0$"

Localização de Raízes

- Regra de sinal de Descartes:

  - Determinar número de zeros reais com coeficientes reais

  "Dado um polinômio com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos, **p**, desse polinômio não excede o número **v** de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais, **v-p** é **inteiro, par não negativo**."

  - Exemplos:

$$p_5(x) = \underbrace{\overset{+}{2x^5} - \overset{-}{3x^4}}_{1} \underbrace{- \overset{-}{4x^3} + \overset{+}{x}}_{1} + \overset{+}{1} \Rightarrow v = 2 \Rightarrow p: \begin{cases} \text{se } v\text{-}p = 0,\ p=2 \\ \text{se } v\text{-}p = 2,\ p=0 \end{cases} \text{ou}$$

Localização de Raízes

- Exemplos:

$$p_3(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65 \quad \Rightarrow v = 3 \Rightarrow p: \begin{cases} \text{se } v\text{-}p = 0,\ p=3 \\ \text{se } v\text{-}p = 2,\ p=1 \end{cases} \text{ ou}$$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$1 \quad 1 \quad 1$

$$p_7(x) = x^7 + 1 \quad \Rightarrow v = 0 \text{ e } p: (v\text{-}p \geq 0) \Rightarrow p = 0$$

$+ \quad +$

0

Localização de Raízes

- Para se determinar o número de raízes negativas, **n**, tomamos $p_n(-x)$ e usamos a regra para raízes positivas

(Obs: não é somente trocar o sinal, tem de aplicar -x)

- Exemplos:

$p_5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$p_5(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 1 \quad \Rightarrow v = 3 \Rightarrow n: \begin{cases} \text{se } v - n = 0,\ n=3 \\ \text{se } v - n = 2,\ n=1 \end{cases}$ ou

- - + - +

1 1 1

Localização de Raízes

- Exemplos:

$p_3(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65$

$p_3(-x) = -x^3 - 9x^2 - 33x - 65 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow n: (v - n \geq 0) \Rightarrow n = 0$

$$\underbrace{-\quad -}_{0}\;\underbrace{\quad -}_{0}\;\underbrace{\quad -}_{0}$$

$p_7(x) = x^7 + 1$

$p_7(-x) = -x^7 + 1 \Rightarrow v = 1$ e $n: (v - n \geq 0) \Rightarrow n = 1$

$$\underbrace{-\quad +}_{1}$$

ou seja, $p_7(x) = 0$ não tem raiz real positiva, o zero não é raiz, tem apenas uma raiz real negativa e tem três raízes complexas conjugadas

Localização de Raízes

- Teorema: Dado um determinado polinômio $p_n(x)$ de grau n, se desenvolvermos por Taylor em torno do ponto x=**α**, fica:

$$p_n(x) = p_n(\alpha) + p_n'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p_n''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

- Fazendo x-**α**=y, encontrando o número de raízes reais de $p_n(y)=0$ que são maiores que 0, estaremos encontrando o número de raízes reais de $p_n(x)=0$ que são maiores que **α**
- Podemos usar este resultado, juntamente com a regra de sinal de Descartes para analisar as raízes de um polinômio

Localização de Raízes

- Sequências de Sturm:
  - Achar número de zeros do polinômio em intervalo [**α**,β]
  - Dado o polinômio $p_n(x)$ e um número real α, vamos definir $\tilde{v}(\alpha)$ como sendo o número de variações de sinal em $\{g_i(\boldsymbol{\alpha})\}$, onde construimos uma sequência $g_0(\boldsymbol{\alpha}), g_1(\boldsymbol{\alpha}),\ldots,g_n(\boldsymbol{\alpha})$, ignorando os zeros. Assim:

$$\begin{cases} g_0(x) = p_n(x) \\ g_1(x) = p_n'(x) \end{cases}$$

e, para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de g_{k-2} por g_{k-1}, com sinal trocado

Localização de Raízes

- Exemplo:

$p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$$\begin{cases} g_0(x) = p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p_3'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

$g_2(x) = ?$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - x + 1 & 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline -x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 & \\ -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & \\ \hline -\frac{8}{9}x + \frac{10}{9} & \end{array}$$

$$\Rightarrow g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$$

Localização de Raízes

- Exemplo:

$p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$$\begin{cases} g_0(x) = p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p_3'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \end{cases}$$

$g_3(x) = ?$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x - 1 & \frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \\ \hline -3x^2 + \frac{15}{4}x & \frac{27}{8}x + \frac{207}{32} \\ \hline \frac{23}{4}x - 1 & \\ -\frac{23}{4}x + \frac{115}{16} & \\ \hline \frac{99}{16} & \end{array}$$

$$\Rightarrow g_3(x) = -\frac{99}{16}$$

Localização de Raízes

- Exemplo:

$p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$$\begin{cases} g_0(x) = p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p_3'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \\ g_3(x) = -\frac{99}{16} \end{cases}$$

Por exemplo, se $\boldsymbol{\alpha} = 2$, temos:

$$\begin{cases} g_0(\alpha) = 11 > 0 \\ g_1(\alpha) = 15 > 0 \\ g_2(\alpha) = \frac{2}{3} > 0 & + \\ g_3(\alpha) = -\frac{99}{16} < 0 & - \end{cases} \quad 1 \qquad \Rightarrow \tilde{v}(\alpha) = \tilde{v}(2) = 1$$

Localização de Raízes

- Teorema de Sturm:

  - Se $p_n(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ e $p_n(\beta) \neq 0$, então o número de raízes distintas $p_n(x)=0$ no intervalo $\boldsymbol{\alpha} \leq x \leq \beta$ é $\tilde{v}(\alpha) - \tilde{v}(\beta)$

  - Exemplo:

Sejam $p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $\boldsymbol{\alpha}=2$ e $\beta=3$:

$$\begin{cases} g_0(\beta) = 34 > 0 \\ g_1(\beta) = 32 > 0 \\ g_2(\beta) = \frac{14}{9} > 0 \quad + \\ g_3(\beta) = -\frac{99}{16} < 0 \quad - \end{cases} \quad 1 \quad \Rightarrow \tilde{v}(\beta) = \tilde{v}(3) = 1$$

Então $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ não possui raízes reais no intervalo [2,3], pois $\tilde{v}(2) - \tilde{v}(3) = 1 - 1 = 0$

Localização de Raízes

- Teorema 1 da Localização no Círculo:
  - Se $p_n(x)$ é um polinômio com coeficientes a_k, k=0,1,...,n, então $p_n(x)$ tem pelo menos um zero na região do plano determinado pelo interior de um determinado círculo centrado na origem e de raio igual a min $\{\rho_1,\rho_n\}$, onde:

$$\rho_1 = n\frac{|a_0|}{|a_1|} \quad \rho_n = \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}$$

Localização de Raízes

- Exemplo: $p_5(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x - 6.8$
  - $n=5$, $a_5=1$, $a_0=-6.8$, $a_1=-10.8$. Logo:

$$\rho_1 = 5(\frac{6.8}{10.8}) = 3.1481\ldots \quad \rho_5 = \sqrt[5]{\frac{6.8}{1}} = 1.4672\ldots$$

Então $p_5(x)$ tem pelo menos um zero (real ou complexo) no círculo de raio 1.4672..., ou seja, $|x| \leq 1.4672\ldots$

Localização de Raízes

- Teorema 2 da Localização no Círculo:
  - Se $p_n(x)$ é um polinômio com coeficientes a_k, k=0,1,...,n,

    e se $r \approx 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}$ então cada zero de $p_n(x)$ estará

    em uma região de forma circular definidad por $|x| \leq r$

Localização de Raízes

- Exemplo: $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
  - $n=3$, $a_3=1$, $a_2=-1$, $a_1=1$, $a_0=-1$. Logo:

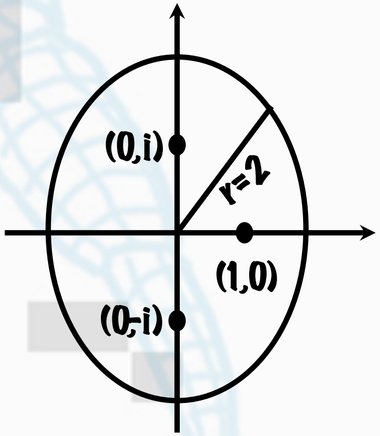
$$\frac{|a_0|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{|a_1|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{|a_2|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\max_{0 \leq k \leq 2} \frac{|a_k|}{|a_3|} = \max\{1, 1, 1\} = 1$$

Logo $r = 1+1 = 2$. Então todos os zeros de $p_3(x)$ se encontram no disco centrado na origem e com raio 2

Zeros de $p_3(x)$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = i \\ x_3 = -i \end{cases}$$



Determinação das Raízes

- Após a localização das raízes, o próximo passo é a determinação das raízes reais
- Pode-se aplicar qualquer um dos métodos numéricos estudados anteriormente para a determinação das raízes reais do polinômio
- Deve-se buscar uma maneira eficiente para calcular o valor numérico de um polinômio:
  - Dependendo do método utilizado, este cálculo deve ser feito uma ou mais vezes por iteração

Avaliação de um polinômio

- Para obter o valor de um polinômio de grau n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em um dado ponto x=c, normalmente se faz:

$$p_n(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$$

- Exemplo:

Avaliar $p_5(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ em x=2

$p_5(2) = 3 \times 2^5 - 2 \times 2^4 + 5 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 127$

foram necessárias (5+4+3+2+1=**15**) multiplicações e **5** adições

- Dessa forma, para avaliar $p_n(x)$ em c tem-se:
  - **n+(n-1)+...+2+1 = n(n+1)/2** multiplicações
  - $\underbrace{\mathbf{1+1+\ldots+1}}_{n}$ **= n** adições

Método de Horner

- Maneira mais eficiente de avaliar um polinômio, evitando potências (número alto de operações)
- Reescreve-se o polinômio da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) =& a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\
& (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1)x + a_0, \\
& ((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0, \\
\vdots \\
p_n(x) =& (\underbrace{\ldots}_{\text{n-1}}(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0
\end{aligned}
$$

Método de Horner

- Requer então apenas **n** multiplicações e **n** adições para avaliar o polinômio de grau n

(Forma dos parênteses encaixados)

- Exemplo:

Avaliar $p_5(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ em $x=2$

$p_5(x) = ((((3x - 2)x + 5)x + 7)x - 3)x + 1$

$p_5(2) = ((((3 \times 2 - 2) \times 2 + 5) \times 2 + 7) \times 2 - 3) \times 2 + 1 = 127$

foram necessárias **5** multiplicações e **5** adições

Método de Horner

- Então no caso de n = 4:

$$p_4(x) = \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{a_4}_{b_4} x + a_3)}_{b_3} x + a_2)}_{b_2} x + a_1)}_{b_1} x + a_0$$

$$\underbrace{(((a_4 x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0}_{b_0}$$

$p_4(x)$ em $x = c$:

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_3 + b_4 c$$

$$b_2 = a_2 + b_3 c$$

$$b_1 = a_1 + b_2 c$$

$$b_0 = a_0 + b_1 c$$

$$\boxed{\Rightarrow p(c) = b_0}$$

Método de Horner

- Caso geral:

Calculam-se b_j, $j = n, n-1,...,1, 0$, sucessivamente:

- $b_n = a_n$

  $b_j = a_j + b_{j+1}c, \quad j = n-1, n-2, ..., 1,0$

- e b_0 será o valor de $p_n(x)$ para $x = c$

Cálculo de $p_n'(x)$

- Usa-se valores de b_j no cálculo de $p_n'(x)$
- Exemplo n=4: $p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\Rightarrow p_4'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

já sabemos!

$$\begin{aligned}
b_4 &= a_4 & &\Rightarrow a_4 = b_4 \\
b_3 &= a_3 + b_4c & &\Rightarrow a_3 = b_3 - b_4c \\
b_2 &= a_2 + b_3c & &\Rightarrow a_2 = b_2 - b_3c \\
b_1 &= a_1 + b_2c & &\Rightarrow a_1 = b_1 - b_2c \\
b_0 &= a_0 + b_1c & &\Rightarrow a_0 = b_0 - b_1c
\end{aligned}$$

Cálculo de $p_n'(x)$

$$p_4'(c) = 4a_4c^3 + 3a_3c^2 + 2a_2c + a_1$$
$$= 4b_4c^3 + 3(b_3 - b_4c)c^2 + 2(b_2 - b_3c)c + (b_1 - b_2c)$$
$$= 4b_4c^3 - 3b_4c^3 + 3b_3c^2 - 2b_3c^2 + 2b_2c + b_1 - b_2c$$
$$\Rightarrow p_4'(c) = b_4c^3 + b_3c^2 + b_2c + b_1$$

- Aplicando o mesmo esquema anterior:

$$c_4 = b_4$$
$$c_3 = b_3 + c_4c$$
$$c_2 = b_2 + c_3c$$
$$c_1 = b_1 + c_2c \quad \boxed{\Rightarrow p'(c) = c_1}$$

Cálculo de $p_n'(x)$

- Caso geral:

Calculam-se c_j, $j = n, n-1, \ldots, 1$, sucessivamente:

- $c_n = b_n$

  $c_j = b_j + c_{j+1}c, \quad j = n-1, n-2, \ldots, 1$

- e c_1 será o valor de $p_n'(x)$ para $x = c$

Método de Newton para zeros de polinômios

- Sejam $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
  e x_0 uma aproximação inicial para a raiz
- Método de Newton para polinômios:
  - Aproximar ξ a partir da iteração $x_{k+1} = x_k - \dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)}$
- Utilizaremos as observações anteriores para construir um algoritmo especializado em achar raízes de polinômios usando método de Newton

Algoritmo

```
Algoritmo: Newton Polinômios
Entrada: n, coeficientes a0, ..., an, x, ε1, ε2, iterMax
Saída: raiz
  deltax = x
  para k = 1 até iterMax faça:
     b = an
     c = b
     para i = (n−1) até 1 faça:
         b = ai + bx
         c = b + cx
     fim para
     b = a0 + bx
     se abs(b) < ε1 então raiz ← x; Fim.
     deltax = b/c
     x = x – deltax
     se abs(deltax) < ε2 então raiz ← x; Fim.
  fim para
  raiz ← x; escreva "Erro: algoritmo não convergiu após ", iterMax, " iterações."
fim algoritmo
```

Exemplo

- Ache a raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ pelo método de Newton, considerando $\varepsilon=10^{-3}$
  - Utilizando a regra de sinal de Descartes, tem-se:
    - Em p(x), v = 1, p = 1 (uma raiz positiva)
    - Em p(-x), v = 2, n = 2 ou n = 0 (0 ou 2 raízes negativas)
  - Utilizando o teorema 2 da localização no círculo:
    - r = 1 + max{2,1,2} = 3 (então todas as raízes estão em |r| < 3)

$$r \approx 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}$$

Exemplo

- Ache a raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ pelo método de Newton, considerando $\varepsilon=10^{-3}$
  - Sabemos que existe uma raiz positiva entre [0,3]
    - Executando o método de Newton para polinômios, com aproximação inicial x=2

raiz = 1.000

k	x	p(x)
1	2.0000	1.200000e+01
2	1.3684	2.939204e+00
3	1.0771	4.932089e-01
4	1.0045	2.722323e-02
5	1.0000	1.015792e-04

E se quiséssemos saber se as outras duas raízes são reais?

Exemplo

- Ache a raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ pelo método de Newton, considerando $\varepsilon=10^{-3}$
  - Construiremos as sequências de Sturm para saber ao certo quantas raízes reais estarão em [-3,0]:

$$g_0(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$g_1(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

$$g_2(x) = ?$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 - x - 2 & 3x^2 + 4x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 & \\
-\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{2}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{14}{9}x - \frac{16}{9} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow g_2(x) = \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$$

Exemplo

- Ache a raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ pelo método de Newton, considerando $\varepsilon=10^{-3}$
  - Construiremos as sequências de Sturm para saber ao certo quantas raízes reais estarão em [-3,0]:

$$g_0(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$g_1(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

$$g_2(x) = \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$$

$$g_3(x) = ?$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 + 4x - 1 & \frac{14}{9}x + \frac{16}{9} \\ \hline
-3x^2 - \frac{24}{7}x & \frac{27}{14}x + \frac{18}{49} \\ \hline
\frac{4}{7}x - 1 & \\
-\frac{4}{7}x - \frac{32}{49} & \\ \hline
-\frac{81}{49} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow g_3(x) = \frac{81}{49}$$

Exemplo

- Ache a raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ pelo método de Newton, considerando $\varepsilon=10^{-3}$
  - Construiremos as sequências de Sturm para saber ao certo quantas raízes reais estarão em [-3,0]:

$$g_0(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$g_1(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

$$g_2(x) = \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$$

$$g_3(x) = \frac{81}{49}$$

$$g_0(-3) = -8 < 0 \qquad g_0(0) = -2 < 0$$

$$g_1(-3) = 14 > 0 \qquad g_1(0) = -1 < 0$$

$$g_2(-3) = -2.88 < 0 \qquad g_2(0) = 1.77 > 0$$

$$g_3(-3) = \frac{81}{49} > 0 \qquad g_3(0) = \frac{81}{49} > 0$$

$$\tilde{v}(-3) - \tilde{v}(0) = 3 - 1 = 2$$

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $x_0 = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$, $\xi \in (0,1)$

$a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = -9$, $a_0 = 3$

k	p(x)	p'(x)	x	f(x)
0	-	-	0.5	-1.375000e+00
1	-1,3750	-8,2500	0.333333	3.703704e-02
2	0,0373	-8,6667	0.337603	5.156714e-05

raiz = 3.37603e-01

Obs: Newton-Rapson normal (k=2) ⇨ raiz = 3.376068e-01

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - O método continua eficiente
  - Não precisa calcular derivada
  - É um método bastante simples

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Convergência também não é assegurada
  - Faz mais cálculos que o Newton normal
  - Só funciona para as funções polinomiais