Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 2: Raízes de Equações
Parte 5: Método de Newton/Secante

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Descrição

- Convergência do método do ponto fixo (MPF)
  - $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \ \forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz
  - A convergência vai ser mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$
- Método de Newton
  - Garantir e acelerar a convergência do MPF
  - Escolher função de iteração $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\xi)=0$

Função de iteração

- Dada f(x) = 0 e partindo da forma geral para φ(x) = x + A(x) f(x), queremos obter a função A(x) tal que φ' (ξ) = 0 $\Longrightarrow$ Newton-Raphson

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)\underbrace{f(\xi)}_{0} + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)} \Rightarrow A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

Função de iteração

- Como φ(x) = x + A(x) f(x) então φ(x) fica

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{tal que } \varphi'(\xi) = 0$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

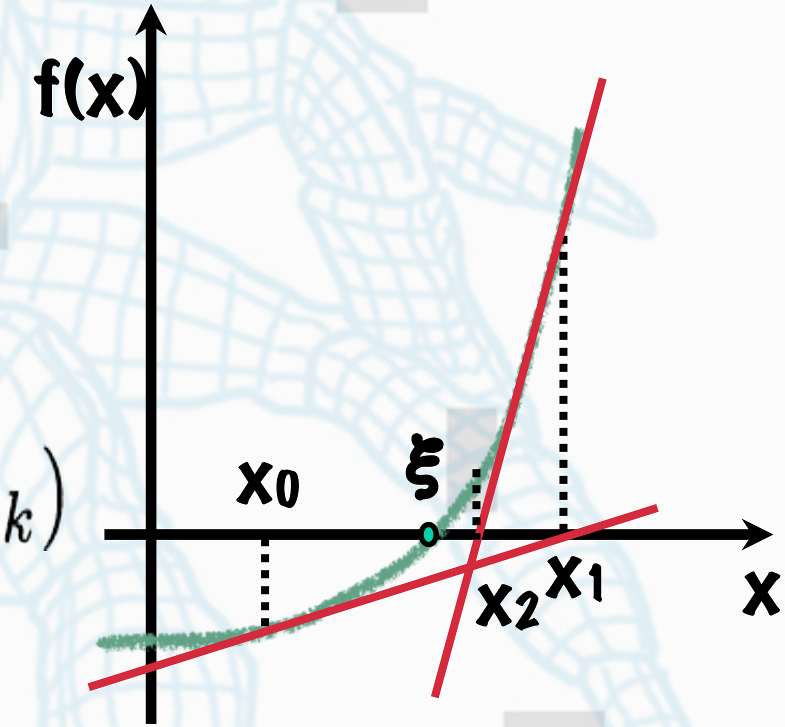
- Como f(ξ) = 0, φ' (ξ) = 0 (desde que f' (ξ) ≠ 0)

- Sequência $\{x_k\}$ fica então sendo calculada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Método de Newton Geometricamente

- Dado o ponto (x_k, $f(x_k)$) traçamos a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto dado => Newton



$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

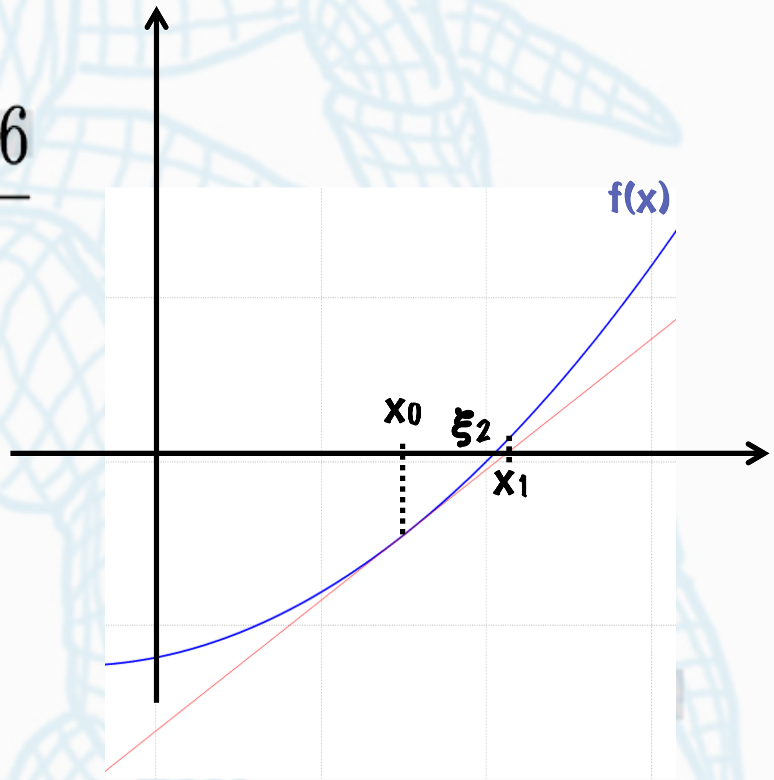
$$x_{k+1} = x$$

Exemplo

- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_2 = 2$ e $x_0 = 1.5$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.5 \\ x_1 &= \varphi(x_0) = 2.0625 \\ x_2 &= \varphi(x_1) = 2.00076 \\ x_3 &= \varphi(x_2) = 2.00000 \end{aligned}$$



Algoritmo

Algoritmo: Newton-Raphson
Entrada: x_0, ε_1, ε_2, iterMax
Saída: raiz

```
se abs(f(x0)) < ε1 então raiz ← x0; Fim.
k ← 1
repita
   x1 ← x0 – f(x0)/f' (x0)
   escreva k, x1, f(x1)
   se abs(f(x1)) < ε1 ou abs(x1–x0) < ε2 ou k ≥ iterMax então
     raiz ← x1; Fim.
   fim se
   x0 ← x1
   k ← k+1
fim repita
fim algoritmo
```

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $x_0 = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$, $\xi \in (0,1)$

k	x	f(x)
0	0.5	-1.375000e+00
1	0.333333	3.703704e-02
2	0.337607	1.834089e-05

raiz = 3.376068e-01

Convergência: Teorema do Método de Newton

- Dadas f(x), f'(x) e f''(x) contínuas num intervalo I que contém a raiz x = ξ de f(x) = 0 e f'(ξ) ≠ 0
- Então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula abaixo convergirá para a raiz desejada

Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Teorema do Método de Newton: Observações

- Método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido “suficientemente próximo” da raiz ξ
  - Pois para pontos suficientemente próximos de ξ, as hipóteses do teorema da convergência do MPF estão satisfeitas (convergência)
- A escolha cuidadosa de x_0 é, em geral, essencial para o bom desempenho do método de Newton

Convergência: Exemplo

- $x^3 - 9x + 3 = 0$, onde $x_0 = 1.5$ e o isolamento dá $\xi_1 \in I_1 = (-4,-3)$, $\xi_2 \in I_2 = (0,1)$ e $\xi_3 \in I_3 = (2,3)$

k	x	f(x)
1	-1.666667	1.337037e+01
2	18.388889	6.055725e+03
3	12.366010	1.782694e+03
4	8.402307	5.205717e+02
5	5.835338	1.491821e+02

k	x	f(x)
6	4.233874	4.079022e+01
7	3.322911	9.784511e+00
8	2.917339	1.573032e+00
9	2.822192	7.837066e-02
10	2.816930	2.342636e-04

No início x não converge para a região das raízes, mas a partir de k=7, valores se aproximam cada vez mais da raiz ξ_3

Isso porque x_0 está próximo de $\sqrt{3}$ que é um zero de f' (x) e x_1 está próximo de $-\sqrt{3}$ que é outro zero

Ordem de Convergência

- Como o método de Newton é baseado em um MPF, poderíamos dizer que esse método tem no caso ordem de convergência linear (p=1)
- Como a função de iteração é tal que $\varphi'(\xi) = 0$, pode-se mostrar que a ordem de convergência do método de Newton é de fato quadrática (p=2)
- Demonstração é feita desenvolvendo f(x) em série de Taylor até os termos de 2a. ordem, em torno de x_k e depois substituindo x por ξ no final

Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

Exemplo: $x^2 - 2 = 0$

Desejamos calcular $\sqrt{2}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

$f(x) = x^2-2$, $x_0 = 1.0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2= 1 \times 10^{-9}$

k	x1	f(x1)
1	1.500000000	2.500000e-01
2	1.<u>41</u>6666667	6.944444e-03
3	1.<u>41421</u>5686	6.007305e-06
4	1.<u>414213562</u>	4.510614e-12

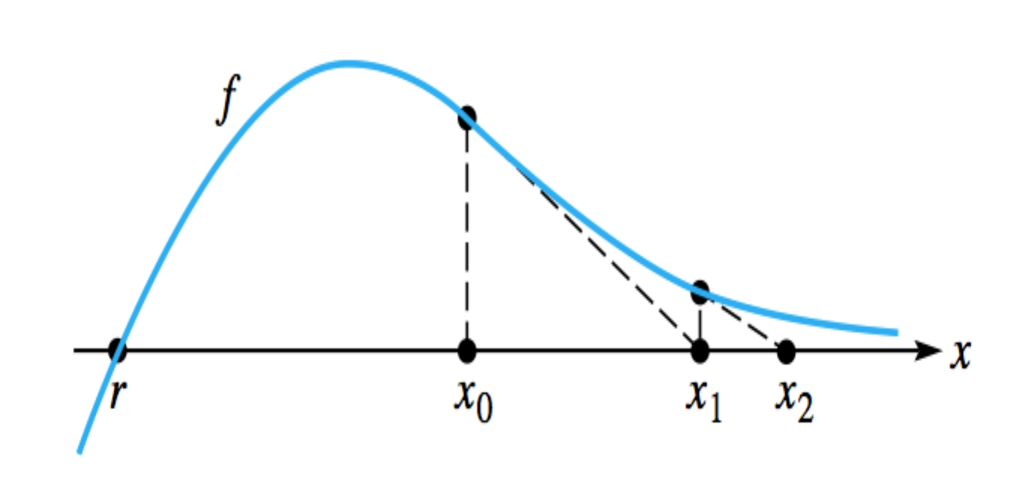
raiz = 1.414213562

Os dígitos sublinhados são todos os dígitos decimais corretos de cada x_k

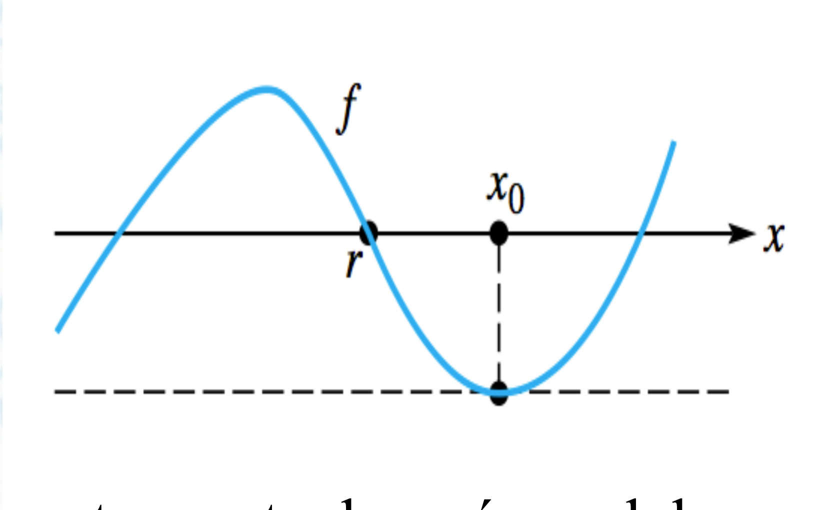
Eles começam a surgir com x_2 e a partir dele, a quantidade de dígitos corretos praticamente vai duplicar

Observações

- Apesar do método de Newton ser um método bem eficiente, sua convergência depende de hipóteses que são difíceis de verificar a priori



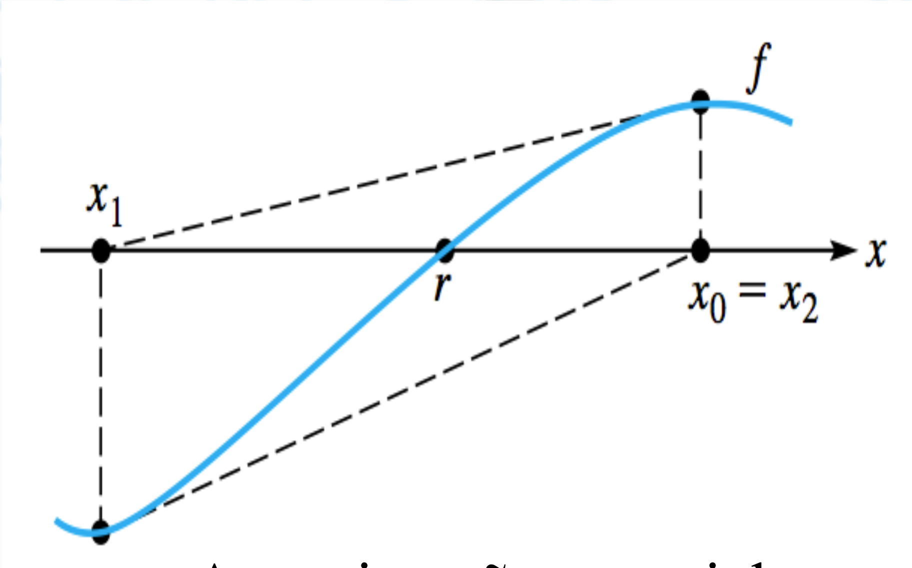
x_0 não é suficientemente próximo da raiz



tangente de x_0 é paralela ao eixo-x e $x_1 = \pm\infty$

Observações

- Apesar do método de Newton ser um método bem eficiente, sua convergência depende de hipóteses que são difíceis de verificar a priori



Aproximações em ciclo, $x_0=x_2$

Newton x Secante

- Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter f' (x) e calcular seu valor numérico a cada iteração (pode ser difícil)
- Idéia do método da Secante seria aproximar o cálculo da derivada pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- Assim:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

Descrição

- Desenvolvendo o método da Secante temos:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

$$\Rightarrow \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

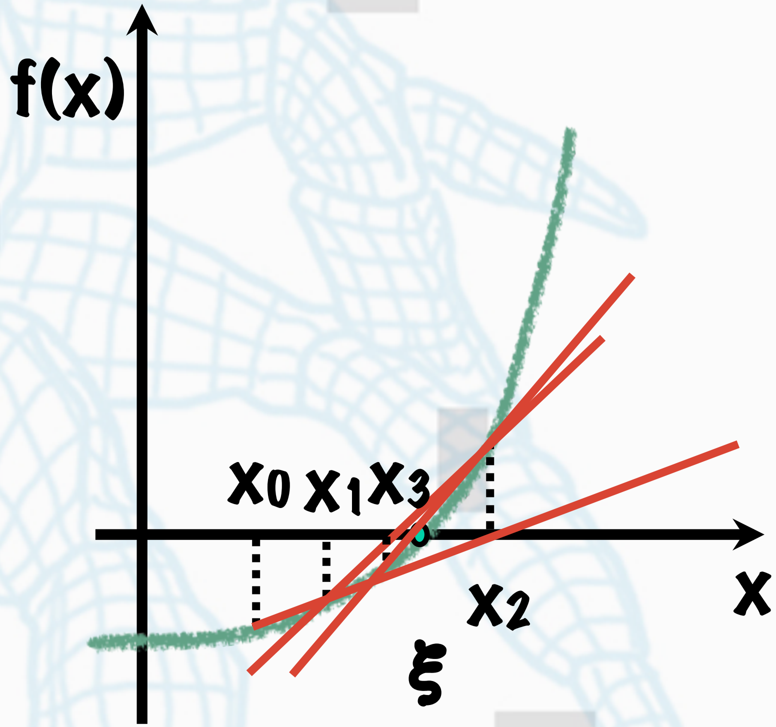
$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow \varphi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Observe que precisamos de duas aproximações x_{k-1} e x_k para iniciar o método

Interpretação geométrica

- A partir de **duas aproximações** x_{k-1} e x_k, o ponto x_{k+1} é obtido como sendo a interseção da reta secante que passa pelo ponto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e por $(x_k, f(x_k))$ com o eixo das abscissas



Exemplo

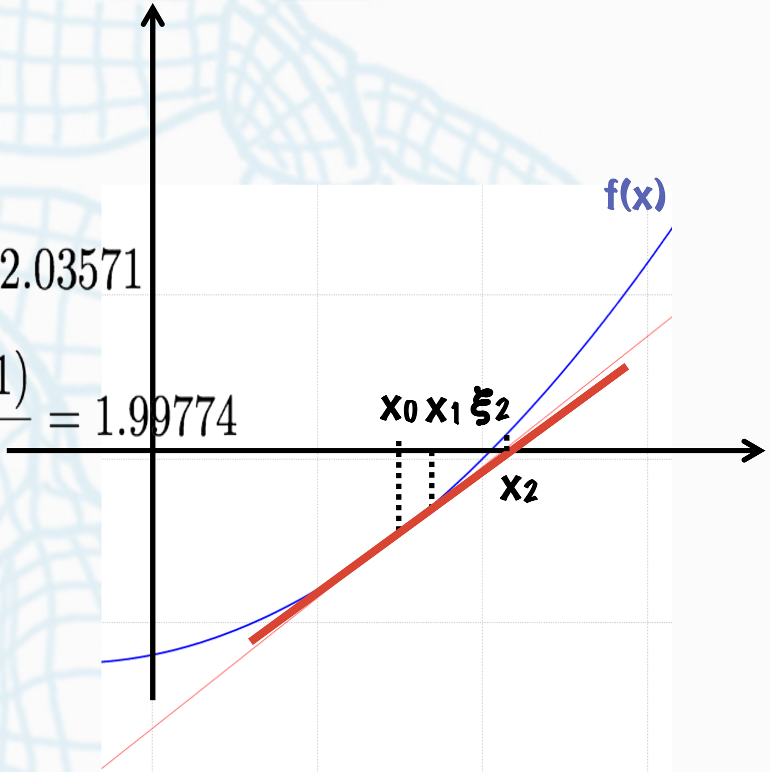
- $x^2 + x - 6 = 0$, onde $\xi_2 = 2$ (usando $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.7$)

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1.5(-1.41) - 1.7(-2.25)}{-1.41 + 2.25} = 2.03571$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1.7(0.17983) - 2.03571(-1.41)}{0.17983 + 1.41} = 1.99774$$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.99999$$

$$\vdots$$



Algoritmo

<u>Algoritmo: Secante</u>
<u>Entrada</u>: x_0, x_1, ε_1, ε_2, iterMax
<u>Saída</u>: raiz

```
 se abs(f(x0)) < ε1 então raiz ← x0; Fim.
 se abs(f(x1)) < ε1 ou abs(x1−x0) < ε2 então raiz ← x1; Fim.
 k ← 1
 repita
    x2 ← x1 – f(x1)/(f(x1) – f(x0)) * (x1−x0)
    escreva k, x2, f(x2)
    se abs(f(x2)) < ε1 ou abs(x2−x1) < ε2 ou k ≥ iterMax então
      raiz ← x2; Fim.
    fim se
    x0 ← x1
    x1 ← x2
    k ← k+1
 fim repita
fim algoritmo
```

Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

k	x	f(x)
1	0.375000000	-3.222656e-01
2	0.331941545	4.910114e-02
3	0.337634621	-2.222064e-04

raiz = 0.337634621

Convergência

- Como método da Secante é modificação do método de Newton, suas condições de convergência são parecidas, mas sua convergência não será mais quadrática
- Quando $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$, método pode divergir
- A ordem de convergência do método da secante não é quadrática e nem linear, sendo na verdade entre elas (p=1.618)

Obs: Detalhes em [Conte & Boor, 1981]

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Newton:
    - O método é muito eficiente
    - Convergência é quadrática
  - Secante:
    - O método é também eficiente
    - Não precisa calcular derivada

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Newton:
    - Convergência não é assegurada
    - Implementação pode ser complexa
    - Precisa do cálculo da derivada
  - Secante:
    - Convergência não é assegurada
    - Precisa de 2 aproximações iniciais
    - Não tem convergência quadrática