Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 8: Método de Gauss-Seidel

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Mesma idéia de Gauss-Jacobi:
  - Transformar o sistema original $Ax = b$ em um sistema equivalente $x = Cx + g$
  - Resolver através de esquema iterativo:
    - $x^{(0)}$: vetor aproximação inicial
    - Calcular uma sequência $\{x^{(k)}\}$

Introdução

- Transformação do sistema original $Ax = b$
  - A: matriz dos coeficientes, n x n
  - x: vetor das variáveis, n x 1
  - b: vetor das constantes, n x 1
- Para forma equivalente $x = Cx + g$ $(x = \varphi(x))$
  - C: matriz de iteração, n x n
  - g: vetor complementar, n x 1
  - $\varphi(x) = Cx + g$ é função de iteração
    - Obs: $\varphi(x)$ é dado na forma matricial

Introdução

- Esquema iterativo (método de solução iterativo):
  - $x^{(0)}$: vetor aproximação inicial (vetor de partida)
  - $x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$ (primeira aproximação)
  - $x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$ (segunda aproximação)
  - ...
  - $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \Rightarrow x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
- A sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para a solução do sistema linear $Ax = b$ (sistema original dado):

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha, \text{ então } \alpha = C\alpha + g$$

Método de Gauss-Seidel

- Transformar sistema linear Ax = b em x = Cx + g. Seja então sistema Ax = b original dado a seguir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Supondo $a_{ii} \neq 0$, i = 1, ..., n

Método de Gauss-Seidel

- Deve-se então isolar x_i na i-ésima equação:

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 & - \dots & -a_{1n}x_n & +b_1) \\ x_2 = & \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 & - \dots & -a_{2n}x_n & +b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n = & \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 & - \dots & -a_{n,n-1}x_{n-1} & +b_n) \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- Escrevendo na forma de iteração, têm-se as equações de iterações do método de Seidel:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} & -a_{13}x_3^{(k)} & -\dots & -a_{1n}x_n^{(k)} & +b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} & -a_{23}x_3^{(k)} & -\dots & -a_{2n}x_n^{(k)} & +b_2) \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k+1)} & -a_{32}x_2^{(k+1)} & -\dots & -a_{3n}x_n^{(k)} & +b_3) \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} & -a_{n2}x_2^{(k+1)} & -\dots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} & +b_n)
\end{cases}
$$

Método de Gauss-Seidel

- As equações de iterações de Seidel podem ser dadas em uma forma matricial $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$:
  - Seja o sistema $Ax = b$:
  - Decompõe-se a matriz A:
    - $A = D + E + F$
      - **D: matriz diagonal (só os termos da diagonal)**
      - **E: matriz triangular inferior com diagonal nula**
      - **F: matriz triangular superior com diagonal nula**
  - Reescreve-se o sistema como:
    - $(D + E + F)x = b \Rightarrow (D + E)x = -Fx + b$

Método de Gauss-Seidel

- Tem-se então as seguintes relações:

$$(D+E)x = -Fx + b \qquad (\times(D+E)^{-1})$$

- Forma de iteração

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\left(-(D+E)^{-1}F\right)}_{S} x^{(k)} + \underbrace{(D+E)^{-1}b}_{d}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + d$$

- A matriz $S = -(D + E)^{-1}F$ é a matriz de iteração do método de Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Uma maneira de evitar a utilização da matriz de iteração (que utiliza inversa) é a seguinte:
  - Seja o sistema fatorado:
    - (D + E + F)x = b ⇒ (D + E)x = -Fx + b
  - Na forma de recorrência:

$$(D+E)x^{(k+1)} = -Fx^{(k)} + b \Rightarrow Dx^{(k+1)} = -Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b$$

$$Dx^{(k+1)} = -Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b$$

Método de Gauss-Seidel

- Na forma matricial tem-se então:

$$Dx^{(k+1)} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}}_{x^{(k+1)}} -$$

Método de Gauss-Seidel

- Forma matricial (continuação):

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}}_{x^{(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

Método de Gauss-Seidel

- Forma matricial (continuação):
  - Pode-se também isolar $x^{(k+1)}$:

$$Dx^{(k+1)} = - Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b$$

$$\Downarrow$$

$$x^{(k+1)} = - D^{-1}Ex^{(k+1)} - D^{-1}Fx^{(k)} + D^{-1}b$$

Observações

- As equações de iterações do método de Gauss-Jacobi mostram que $x^{(k+1)}$ é então calculado usando somente valores $x_i^{(k)}$ da iteração anterior (passo anterior calculado)

- Nas equações de iterações do método de Gauss-Seidel, o vetor $x^{(k+1)}$ é obtido a partir dos elementos mais recentes, incluindo o próprio $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$ (passos atual e anterior)

Critérios de Parada

- Critérios de parada: mesmos de Gauss-Jacobi:
  - (i) O processo iterativo é interrompido quando o vetor $x^{(k)}$ estiver suficiente próximo do vetor $x^{(k-1)}$
    - Distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ calculada usando norma -∞
    - Dada uma precisão ε, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada da solução exata se $d_r^{(k)} \leq \varepsilon$ for mesmo satisfeita:

$$d_r^{(k)} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|}{\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} \right|} \leq \varepsilon$$

  - (ii) Número máximo de iterações
    - Processo é interrompido quando $k \geq k_{max}$

Escolha da aproximação inicial

- Utiliza-se a mesma escolha inicial usada no método de Gauss-Jacobi

$$x_i^{(0)} = 0 \text{ ou } x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Exemplo

- Resolver o sistema linear abaixo usando o método iterativo de solução Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 0 \end{cases}$$

- considerando ε = 0.05 e $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 5/5 \\ 6/4 \\ 0/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemplo

- Seja então o sistema dado por:

$$\begin{cases} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & =6 \\ 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & =0 \end{cases}$$

- As equações de iteração são:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{5}(-x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & +5) \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)} & -x_3^{(k)} & +6) \\ x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{6}(-3x_1^{(k+1)} & -3x_2^{(k+1)} &) \end{cases}$$

Exemplo

- Partindo-se de $x^{(0)}$ dado no problema, temos que o vetor da primeira iteração será então:

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(-x_2^{(0)} - x_3^{(0)} + 5) = \frac{1}{5}(-1.5 - 0 + 5) = 0.7 \\
x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 6) = \frac{1}{4}(-3(0.7) - 0 + 6) = 0.975 \\
x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(-3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{6}(-3(0.7) - 3(0.975)) = -0.8375
\end{cases}
$$

Exemplo

- Verifica-se, após calcular $x^{(1)}$, se aproximação encontrada já está suficientemente próxima:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.975 \\ -0.8375 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d_r^{(k)} = \frac{\max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|}{\max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 0.3$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0.525 \quad \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{0.8375}{\max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{0.8375}{0.8375} = 1 > \varepsilon$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = 0.8375$$

Exemplo

- Método prossegue com a próxima iteração (k=2):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}(-x_2^{(1)} - x_3^{(1)} + 5) = \frac{1}{5}(-0.975 + 0.8375 + 5) = 0.9725 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 6) = \frac{1}{4}(-3(0.9725) + 0.8375 + 6) = 0.98 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(-3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{6}(-3(0.9725) - 3(0.98)) = -0.97625 \end{cases}$$

Exemplo

- Verifica-se, após calcular $x^{(2)}$, se aproximação encontrada já está suficientemente próxima:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9725 \\ 0.98 \\ -0.97625 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.975 \\ -0.8375 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.2725$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.015 \quad \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.2725}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2725}{0.98} = 0.278 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1388$$

Exemplo

- Método prossegue com a próxima iteração (k=3):

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.99925 \\ 0.99463 \\ -0.996938 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9725 \\ 0.98 \\ -0.97625 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.02675$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.014625 \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.02675}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(3)}|} = \frac{0.02675}{0.99925} = 0.0268 < \varepsilon$$

$$|x_3^{(3)} - x_3(2)| = 0.020688$$

Exemplo

- Então a solução $\bar{x}$ do sistema linear do exemplo, com erro menor que 0.05, obtida por Seidel vale:

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.99925 \\ 0.99463 \\ -0.996938 \end{pmatrix}$$

Interpretação Geométrica

- Seja o seguinte sistema 2 x 2:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 = & 3 \\ x_1 & -3x_2 = & -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 3 - x_2 \\ x_2 = & \frac{1}{3}(3 + x_1) \end{cases}$$

- Esquema iterativo de Gauss-Jacobi:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k)}) \end{cases}$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

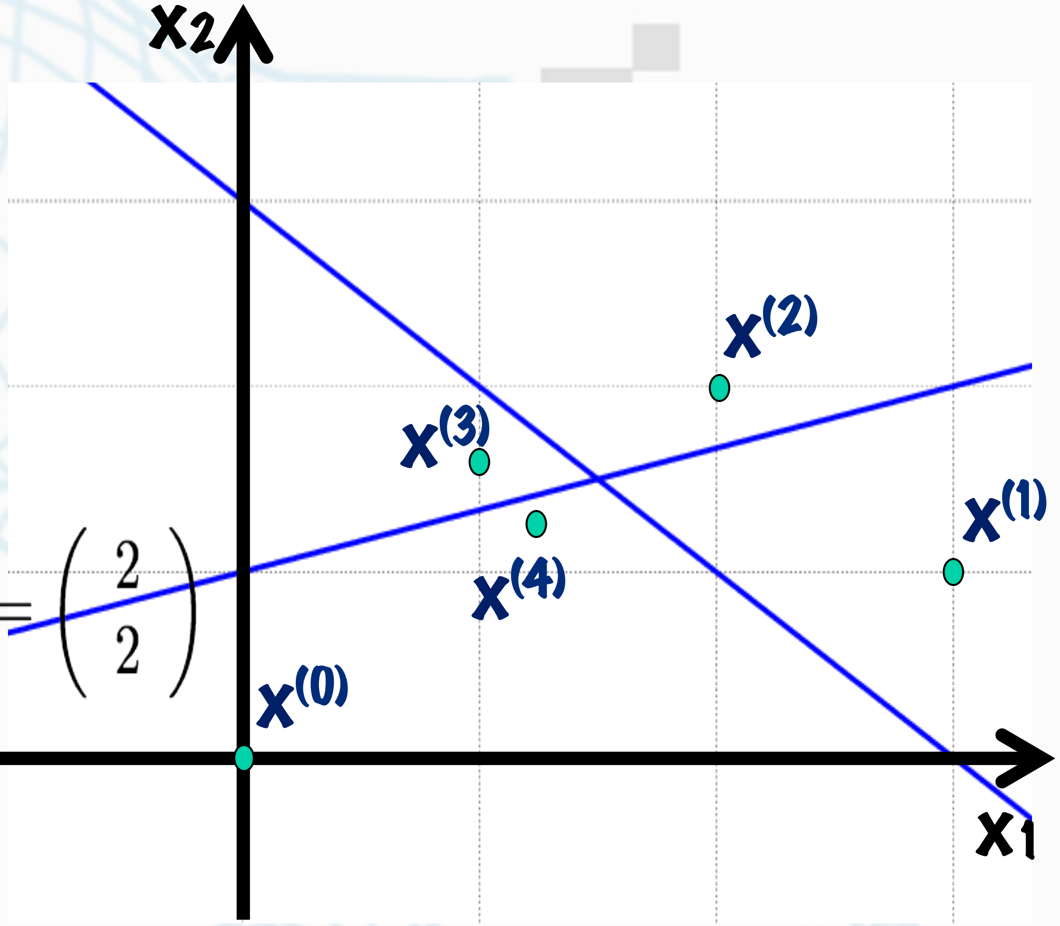
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Interpretação Geométrica

- Gauss-Jacobi:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(3 + x_1^{(k)}\right) \end{cases}$$

- Sequência $\{x^{(k)}\}$:



$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}; x^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Interpretação Geométrica

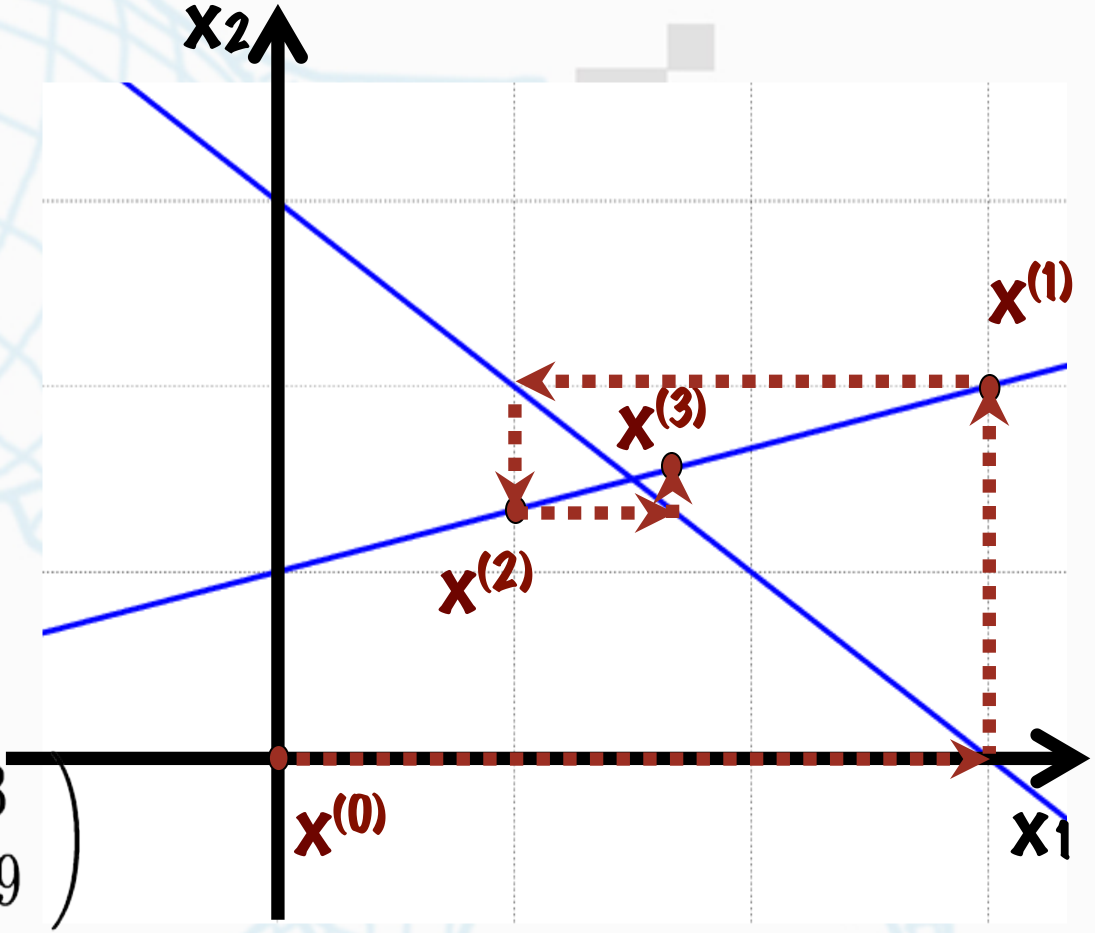
- Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

- Sequência $\{x^{(k)}\}$:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}$$



Interpretação Geométrica

- Observações:
  - Ordem das equações não altera a solução exata
  - Porém, os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel dependem da ordem das equações
  - Trocando ordem das equações do exemplo anterior

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 = & -3 \\ x_1 & +x_2 = & 3 \end{cases}$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

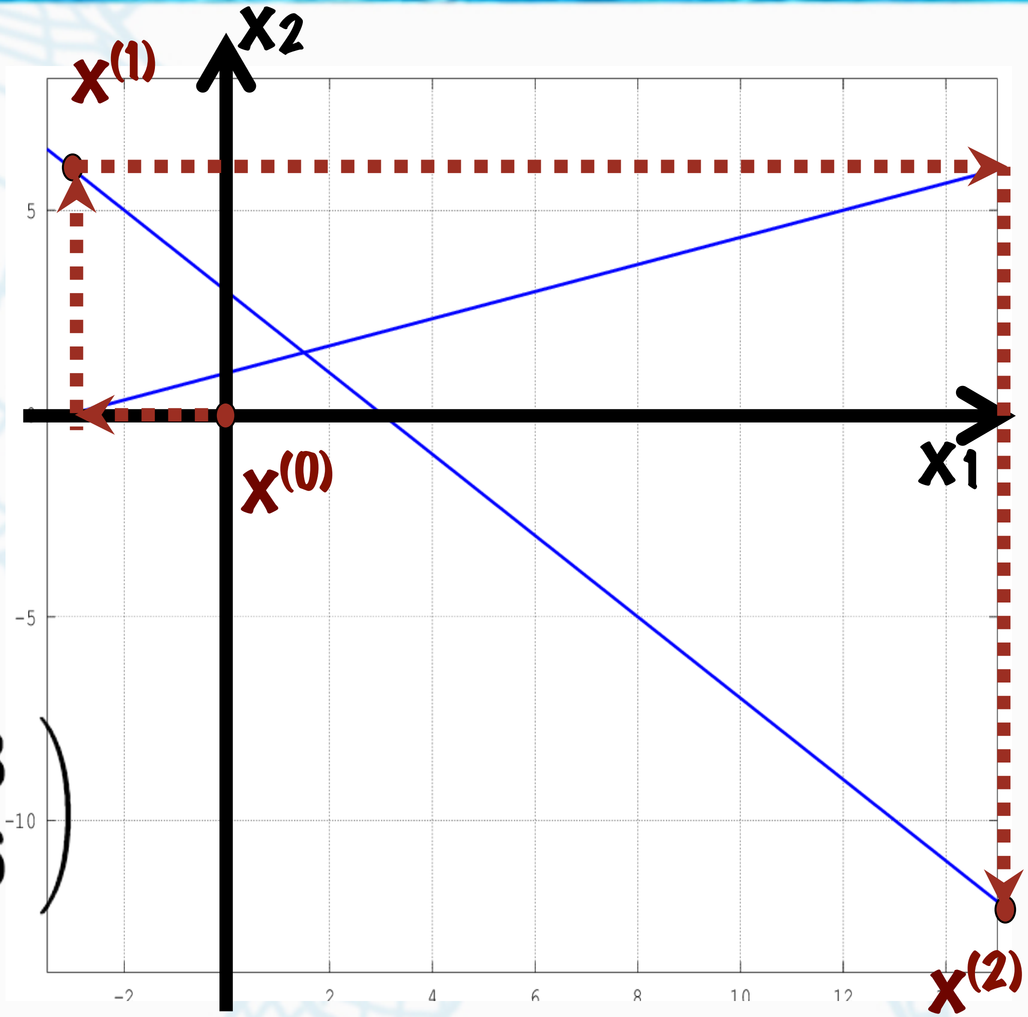
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = & 3 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

Interpretação Geométrica

- Observações:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

- Sequência $\{x^{(k)}\}$: (fica divergente)



$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Critérios de convergência

- Para o método de Gauss-Seidel temos 2 critérios de convergência:
  - Critério de Sassenfeld
  - Critério das Linhas

Critério de Sassenfeld

- Sejam:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\text{e } \beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{j,j-1}|\beta_{j-1} + |a_{j,j+1}| + \cdots + a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

$$\text{E seja } \beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\}$$

- Se β < 1, então o método de Gauss-Seidel convergirá. E quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

Obs: Detalhes em [Ruggiero & Lopes, 2000]

Exemplo 1

- Verificar o critério de Sassenfeld para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +0.5x_2 & -0.1x_3 & +0.1x_4 & = 0.2 \\ 0.2x_1 & +x_2 & -0.2x_3 & -0.1x_4 & = -2.6 \\ -0.1x_1 & -0.2x_2 & +x_3 & +0.2x_4 & = 1.0 \\ 0.1x_1 & +0.3x_2 & +0.2x_3 & +x_4 & = -2.5 \end{cases}$$

Exemplo 1

$$\begin{cases} x_1 & +0.5x_2 & -0.1x_3 & +0.1x_4 & = 0.2 \\ 0.2x_1 & +x_2 & -0.2x_3 & -0.1x_4 & = -2.6 \\ -0.1x_1 & -0.2x_2 & +x_3 & +0.2x_4 & = 1.0 \\ 0.1x_1 & +0.3x_2 & +0.2x_3 & +x_4 & = -2.5 \end{cases}$$

$$\beta_1 = (0.5 + 0.1 + 0.1)/1 = 0.7$$
$$\beta_2 = ((0.2)(0.7) + 0.2 + 0.1)/1 = 0.44$$
$$\beta_3 = ((0.1)(0.7) + (0.2)(0.44) + 0.2)/1 = 0.358$$
$$\beta_4 = ((0.1)(0.7) + (0.3)(0.44) + (0.2)(0.358))/1 = 0.2736$$

$$\Rightarrow \beta = \max_{1 \leq j \leq 4} \{\beta_j\} = 0.7 < 1$$

✓ O método de Gauss-Seidel convergirá.

Exemplo 2

- Verificar o critério de Sassenfeld para o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 9 \\ & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \end{cases}$$

$$\beta_1 = (1+3)/2 = 2 > 1$$

O método de Gauss-Seidel não convergirá. Tentaremos trocar linhas e verificar o critério novamente.

Exemplo 2

- Trocando a 1ª equação pela 3ª, temos:

$$\begin{cases} x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 9 \end{cases}$$

$$\beta_1 = (0+3)/1 = 3 > 1$$

O método de Gauss-Seidel não convergirá. Tentaremos trocar colunas e verificar o critério novamente.

Exemplo 2

- A partir da configuração anterior e trocando a 1ª coluna pela 3ª, temos:

$$\begin{cases} 3x_3 & & +x_1 & = 3 \\ x_3 & -x_2 & & = 1 \\ 3x_3 & +x_2 & +2x_1 & = 9 \end{cases}$$

$$\beta_1 = (0+1)/3 = 1/3$$
$$\beta_2 = ((1)(1/3)+0)/1 = 1/3$$
$$\beta_3 = ((3)(1/3)+(1)(1/3))/2 = 2/3$$
$$\Rightarrow \beta = \max_{1 \leq j \leq 3} \{\beta_j\} = 2/3 < 1$$

O método de Gauss-Seidel convergirá.

Critérios de convergência

- O critério das linhas, visto para o método de Gauss-Jacobi, também pode ser usado para o método de Gauss-Seidel da mesma maneira:

Seja o sistema linear Ax=b. O método iterativo de Gauss-Seidel convergirá se a matriz dos coeficientes A for diagonal estritamente dominante, ou seja

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Critérios de convergência

- Se o critério das linhas for satisfeito, então automaticamente o de Sassenfeld também é, mas o de Sassenfeld pode ser e de linhas não
- Tanto o critério de Sassenfeld quanto o critério das linhas são apenas suficientes, ou seja, pode ser que o método convirja sem que os critérios sejam satisfeitos (não são critérios necessários)
- Exemplo: $$\begin{cases} x_1 & +x_2 = & 3 \\ x_1 & -3x_2 = & -3 \end{cases}$$

Critérios de convergência

- Outro critério que pode ser utilizado para garantir a sua convergência é o seguinte:
  - Método iterativo converge com qualquer valor inicial $x^{(0)}$ se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M
  - Porém calcular raio espectral da matriz de iteração pode custar mais caro computacionalmente que a própria solução do sistema Ax=b (usa autovalores)
  - Por esse motivo, os outros critérios (Sassenfeld e linhas) são utilizados com muito mais frequência!!!

Algoritmo

```
Algoritmo: Gauss_Seidel
Entrada: n, A, b, ε, iterMax
Saída: x, k
  {construção da matriz e do vetor de iterações}
  para i ← 1 até n faça:
    r ← 1/A[i][i]
      para j ← 1 até n faça:
        se i ≠ j então:
           A[i][j] ← A[i][j] ∗ r
        fim se
    fim para
    b[i] ← b[i] ∗ r
    x[i] ← b[i]
  fim para
  ...
```

```
  k ← 0
  {iterações de Gauss-Seidel}
  repita
    k ← k + 1
    para i ← 1 até n faça:
      soma ← 0
      para j ← 1 até n faça:
        se i ≠ j então:
            soma ← soma + A[i][j] ∗ x[j]
        fim se
      fim para
      v[i] ← x[i]; x[i] ← b[i] − soma
    fim para
    norma ← calcula_norma(n,v,x)
    escreva k, x, norma
    se norma ≤ ε ou k ≥ iterMax então:
       interrompa
    fim se
  fim repita
fim algoritmo
```

Algoritmo auxiliar

```
Algoritmo: calcula_norma
Entrada: n, x, v
Saída: norma
  normaNum ← 0
  normaDen ← 0
  para i ← 1 até n faça:
    t ← abs(v[i] – x[i])
    se t > normaNum então normaNum ← t
    se abs(v[i]) > normaDen então normaDen ←
abs(v[i])
    {vetor x é atualizado com o vetor v}
    x[i] ← v[i]  fim para
  norma ← normaNum/normaDenfim algoritmo
```

Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Seidel considerando $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$ e $x^{\{0\}} = \{0\ 0\ 0\}^T$
  - Antes de resolver sistema, utilize os critérios de convergência para dizer se processo convergirá

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 28 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.074 \\ 2.11 \end{Bmatrix}$$

Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Seidel considerando $\varepsilon = 5x10^{-1}$ e $x^{\{0\}} = \{0\ 0\ 0\}^T$
  - 1a iteração:

$$\left\{x^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 2.8 \\ 0.42 \\ 1.97 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{d^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} |2.8-0| = 2.8 \\ |0.42-0| = 0.42 \\ |1.97-0| = 1.97 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{d_r^{(1)}\right\} = \{2.8/2.8 = 1\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{d_r^{(1)} \geq \varepsilon\right\}$$

Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Seidel considerando $\varepsilon = 5x10^{-1}$ e $x^{\{0\}} = \{0\ 0\ 0\}^T$
  - 2a iteração:

$$\left\{x^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.074 \\ 2.11 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{d^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} |2.32 - 2.8| = 0.48 \\ |0.074 - 0.42| = 0.35 \\ |2.11 - 1.97| = 0.14 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{d_r^{(2)}\right\} = \{0.48 / 2.32 = 0.21\}$$

$$\left\{d_r^{(2)} \leq \varepsilon\right\}$$

Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Seidel considerando $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$ e $x^{\{0\}} = \{0\ 0\ 0\}^T$
  - Conclusão:

$$\{\bar{x}\} = \left\{x^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.074 \\ 2.11 \end{Bmatrix}$$

Comparação entre os métodos

- Convergência:
  - Métodos diretos são processos finitos e sempre vão encontrar uma solução exata para qualquer sistema não singular de equações (são robustos)
  - Métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições garantidas:
    - O método de Gauss-Jacobi converge mais lentamente, mas é mais estável. Já o de Gauss-Seidel é mais rápido em geral.

Comparação entre os métodos

- Matrizes esparsas (matrizes com muitos elementos nulos espalhados dentro dela):
  - Métodos diretos (Eliminação de Gauss, etc) se aplicados a sistemas esparsos provocam preenchimentos na matriz A, reduzindo sua eficiência (os zeros existentes são eliminados)
  - Existem métodos adaptados especialmente para matrizes esparsas (métodos especiais)
  - Quando métodos diretos não são possíveis de ser aplicados, métodos iterativos são aplicados:
    - Eles não alteram a estrutura da matriz dos coeficientes

Comparação entre os métodos

- Erros de arredondamento:
  - Métodos diretos podem apresentar sérios problemas com erros de arredondamento:
    - Adotam-se estratégias de pivotação para amenizar o problema do erro calculado (pivotação parcial e total)
  - Métodos iterativos têm bem menos erros de arredondamento (pela própria estruturação):
    - A convergência independe da aproximação inicial

Comparação entre os métodos

- Número de operações:
  - Métodos diretos são, em geral, bem mais caros computacionalmente (operações de ordem n^3)
  - Métodos iterativos são da ordem de kn^2, onde k é o número de iterações (de uma forma geral)
  - Para sistemas muito grandes, torna-se inviável utilizar um método direto (muitas operações!!!)

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Número de passos não é mais fixo, pode ser menor
  - Complexidade computacional é menor que de Gauss
  - Funcionamento independe de ser matrizes esparsas
  - É mais rápido que Gauss-Jacobi mas mais instável

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - Sua convergência não é garantida sempre
  - Precisa usar 2 critérios para convergência
    - Condições são somente suficientes

      (Critérios de Sassenfeld e das Linhas)
  - Não é possível estimar número de passos