



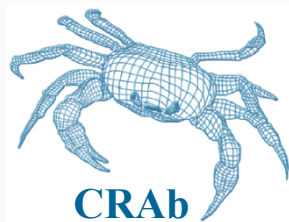
# Métodos Numéricos 1 (MN1)

## Unidade 3: Sistemas de Equações Parte 7: Método de Gauss-Jacobi

**Joaquim Bento Cavalcante Neto**

**[joaquimb@lia.ufc.br](mailto:joaquimb@lia.ufc.br)**

**Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)**



**Departamento de Computação (DC)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)**





# Introdução

- Métodos diretos:
  - Com exceção de **erros de arredondamento**, eles fornecem a **solução exata** do sistema linear, caso ela exista, após um número **finito** de operações
- Métodos iterativos:
  - Fornecem uma **sequência** de **soluções aproximadas**, em que cada solução aproximada é então obtida da anterior pela **aplicação** de um **mesmo procedimento**

# Introdução

- Revisão do Método do Ponto Fixo:

- Generalização do método do ponto fixo para raízes:

- Transformação da equação  $f(x)=0$  na equação equivalente  $x=\varphi(x)$
    - A partir de solução inicial  $x_0$ , gerar uma sequência  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$  de aproximações para  $\xi$  para se obter a raiz desejada da equação

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

- $\varphi(x)$  é chamada função de iteração (função que gera a sequência)



# Introdução

- Transformação do sistema original  $Ax = b$ 
  - A: matriz dos coeficientes,  $n \times n$
  - x: vetor das variáveis,  $n \times 1$
  - b: vetor das constantes,  $n \times 1$
- Para forma equivalente  $x = Cx + g$  ( $x = \varphi(x)$ )
  - C: matriz de iteração,  $n \times n$
  - g: vetor complementar,  $n \times 1$
  - $\varphi(x) = Cx + g$  é função de iteração
    - Obs:  $\varphi(x)$  é dado na forma matricial

# Introdução

- Esquema iterativo (método de solução iterativo):
  - $x^{(0)}$ : vetor aproximação inicial (vetor de partida)
  - $x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$  (primeira aproximação)
  - $x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$  (segunda aproximação)
  - ...
  - $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \Rightarrow x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$
- A sequência  $\{x^{(k)}\}$  converge para a solução do sistema linear  $Ax = b$  (sistema original dado):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha, \text{ então } \alpha = C\alpha + g$$

# Método de Gauss-Jacobi

- Transformar sistema linear  $Ax = b$  em  $x = Cx + g$ .  
Seja então sistema  $Ax = b$  original dado a seguir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Supondo  $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$



# Método de Gauss-Jacobi

- Deve-se então isolar  $x_i$  na  $i$ -ésima equação:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

# Método de Gauss-Jacobi

- Escrevendo na forma de iteração, têm-se as equações de iterações do método de Jacobi:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k + b_1) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^k - \dots - a_{2n}x_n^k + b_2) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^k - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n) \end{cases}$$



# Método de Gauss-Jacobi

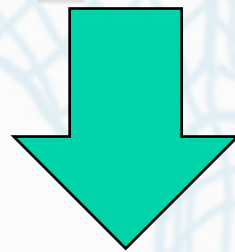
- As equações de iterações de Jacobi podem ser dadas na forma matricial  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$  abaixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}}_{x^{(k+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}}_{x^{(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_g$$

# Critério de Parada

- Processo iterativo deve ser interrompido quando o vetor  $x^{(k)}$  esteja suficiente próximo do vetor  $x^{(k-1)}$
- Como calcular então distância entre  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$ ?

Erros calculados



Norma de vetores



# Norma de vetores

- Uma norma consiste em função que associa um número real não negativo a cada vetor de um espaço vetorial de dimensão considerada
  - Intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento
- Normas canônicas:
  - Quando o espaço vetorial é  $\mathbb{R}^n$  (espaço vetorial de dimensão  $n$ ) as normas canônicas são as normas  $l_p$ , definidas pela equação:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$$



# Norma de vetores

- Exemplo: Considere  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



# Critério de Parada

- Processo iterativo deve ser interrompido quando o vetor  $x^{(k)}$  esteja suficiente próximo do vetor  $x^{(k-1)}$
- Distância  $d^{(k)}$  entre  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$  é dada por norma  $\infty$

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

- Dada precisão  $\varepsilon$ , vetor  $x^{(k)}$  será escolhido como  $\bar{x}$ , solução aproximada da solução exata, se  $d^{(k)} < \varepsilon$

# Critério de Parada

- Outros critérios de parada:

- Erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} \leq \varepsilon$$

- Número máximo de iterações:

- Processo é interrompido quando  $k \geq k_{\max}$



## Exemplo

- Resolver o sistema linear abaixo usando o método iterativo de solução Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

- considerando  $\varepsilon = 0.05$  e  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$

# Exemplo

- Seja então o sistema dado por:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

- As equações de iteração são:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 6) \end{cases}$$

# Exemplo

- Partindo-se de  $x^{(0)}$  dado no problema, temos que o vetor da primeira iteração será então:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(-2x_2^{(0)} - x_3^{(0)} + 7) = \frac{1}{10}(-2(-1.6) - 0.6 + 7) = 0.96 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(0)} - x_3^{(0)} - 8) = \frac{1}{5}(-0.7 - 0.6 - 8) = -1.86 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)} + 6) = \frac{1}{10}(-2(0.7) - 3(-1.6) + 6) = 0.94 \end{cases}$$



# Exemplo

- Verifica-se, após calcular  $x^{(1)}$ , se aproximação encontrada já está suficientemente próxima:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix} \quad d_r^{(k)} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26 \quad \Rightarrow \quad d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

# Exemplo

- Método prossegue com a próxima iteração (k=2):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(-2x_2^{(1)} - x_3^{(1)} + 7) = \frac{1}{10}(-2(-1.86) - 0.94 + 7) = 0.978 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(1)} - x_3^{(1)} - 8) = \frac{1}{5}(-0.96 - 0.94 - 8) = -1.98 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 6) = \frac{1}{10}(-2(0.96) - 3(-1.86) + 6) = 0.966 \end{cases}$$

## Exemplo

- Verifica-se, após calcular  $x^{(2)}$ , se aproximação encontrada já está suficientemente próxima:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.018$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.12 \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.12}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.026$$



# Exemplo

- Método prossegue com a próxima iteração (k=3):

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.0214$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.0088 \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.0324}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(3)}|} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.0324$$

## Exemplo

- Então a solução  $\bar{x}$  do sistema linear do exemplo, com erro menor que 0.05, obtida por Jacobi vale:

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$$



# Escolha da aproximação inicial

- Uma das vantagens dos métodos iterativos é que a convergência **independe** do valor inicial  $x^{(0)}$ . Entretanto, normalmente  $x^{(0)}$  é usado como:
  - Uma estimativa conhecida (se disponível)
  - Ou um valor qualquer (um valor arbitrário)





# Escolha da aproximação inicial

- Normalmente, faz-se  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ , mas se usarmos esse valor nas equações de iterações tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)} + b_1) = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)} + b_2) = \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(0)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)} + b_n) = \frac{b_n}{a_{nn}} \end{array} \right.$$

- Por isso, outra opção é usar  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}_i / \mathbf{a}_{ii}$  então.

# Escolha da aproximação inicial

- No exemplo anterior teria-se então:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 = 7/10 \\ -1.6 = -8/5 \\ 0.6 = 6/10 \end{pmatrix}$$



# Critério de convergência

- Uma condição **suficiente** para convergência do método de Gauss-Jacobi é dada por um teorema chamado de **Critério das Linhas**:

Seja o sistema linear  $Ax=b$ . O método iterativo de Gauss-Jacobi convergirá se a matriz dos coeficientes  $A$  for **diagonal estritamente dominante**, ou seja

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n.$$







# Critério de convergência

- Exemplo: Verificar o critério de convergência para o método de Gauss-Jacobi do sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & \checkmark 10 > 2 + 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 & \checkmark 5 > 1 + 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 & \checkmark 10 > 2 + 3 \end{cases}$$

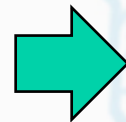
**✓ Pelo critério das linhas, temos garantia de convergência para o método de Gauss-Jacobi**

# Critério de convergência

- O **Critério das Linhas** pode ser visto também de outra forma, com os mesmos resultados:

Seja o sistema linear  $Ax=b$ . O método iterativo de Gauss-Jacobi convergirá se a matriz dos coeficientes  $A$  for **diagonal estritamente dominante**, ou seja

$$\alpha_k = \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$$



$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$$

# Critério de convergência

- O critério das linhas é apenas **suficiente**, ou seja, pode ser que o método de Gauss-Jacobi convirja sem que critério seja satisfeito (não é **necessário**)
- Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & \times \quad 1 > 1 \\ x_1 - 3x_2 = -3 & \checkmark \quad 3 > 1 \end{cases}$$

Convergir para a solução  $x = [1.5007, 1.5007]^T$

com  $\varepsilon = 0.001$  após 13 iterações



# Algoritmo

## Algoritmo: Gauss Jacobi

Entrada:  $n$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$ , iterMax

Saída:  $x$ ,  $k$

{construção da matriz e do vetor de iterações}

para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça:

$r \leftarrow 1/A[i][i]$

    para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça:

        se  $i \neq j$  então:

$A[i][j] \leftarrow A[i][j] * r$

        fim se

    fim para

$b[i] \leftarrow b[i] * r$

$x[i] \leftarrow b[i]$

fim para

...

$k \leftarrow 0$

{iterações de Jacobi}

repita

$k \leftarrow k + 1$

    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça:

        soma  $\leftarrow 0$

        para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça:

            se  $i \neq j$  então:

                soma  $\leftarrow$  soma +  $A[i][j] * x[j]$

        fim se

    fim para

$v[i] \leftarrow b[i] -$  soma

fim para

norma  $\leftarrow$  calcula\_norma( $n, x, v$ )

escreva  $k$ ,  $x$ , norma

se norma  $\leq \varepsilon$  ou  $k \geq$  iterMax então:

    interrompa

fim se

fim repita

fim algoritmo

# Algoritmo auxiliar

Algoritmo: calcula norma

Entrada: n, x, v

Saída: norma

normaNum  $\leftarrow$  0

normaDen  $\leftarrow$  0

para i  $\leftarrow$  1 até n faça:

    t  $\leftarrow$  abs(v[i] - x[i])

    se t > normaNum então normaNum  $\leftarrow$  t

    se abs(v[i]) > normaDen então normaDen  $\leftarrow$  abs(v[i])

    {vetor x é atualizado com o vetor v}

    x[i]  $\leftarrow$  v[i]

fim para

norma  $\leftarrow$  normaNum/normaDen

fim algoritmo

## Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Jacobi considerando  $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$  e  $x^{(0)} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$ 
  - Antes de resolver o sistema, utilize o critério das linhas para dizer se processo convergirá ou não

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 28 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.08 \\ 1.77 \end{Bmatrix}$$



## Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Jacobi considerando  $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$  e  $x^{(0)} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$

- 1a iteração:

$$\{x^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 2.8 \\ 0.7 \\ 1.7 \end{Bmatrix}$$

$$\{d^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} |2.8 - 0| = 2.8 \\ |0.7 - 0| = 0.7 \\ |1.7 - 0| = 1.7 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_r^{(1)}\} = \{2.8 / 2.8 = 1\}$$

↓

$$\{d_r^{(1)} \geq \varepsilon\}$$


## Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Jacobi considerando  $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$  e  $x^{(0)} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$

- 2a iteração:

$$\{x^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.08 \\ 1.77 \end{Bmatrix}$$

$$\{d^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} |2.32 - 2.8| = 0.48 \\ |0.08 - 0.7| = 0.62 \\ |1.77 - 1.7| = 0.07 \end{Bmatrix} \quad \{d_r^{(2)}\} = \{0.62 / 2.32 = 0.27\}$$



$$\{d_r^{(2)} \leq \varepsilon\}$$

## Exercício

- Resolver sistema dado por Gauss-Jacobi considerando  $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$  e  $x^{\{0\}} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$ 
  - Conclusão:

$$\{\bar{x}\} = \{x^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 2.32 \\ 0.08 \\ 1.77 \end{Bmatrix}$$



# Observações finais

- Vantagens: 😊

- Número de passos não é mais fixo, pode ser menor
- Complexidade computacional é menor que de Gauss
- Funcionamento independe de ser matrizes esparsas

# Observações finais

- Desvantagens: ☹️

- A convergência não é garantida sempre
- Precisa usar critérios para convergência
  - A condição é somente suficiente
- Não é possível estimar número de passos