Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 4: Método de Gauss com Pivotação

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)
Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

- Método da eliminação de Gauss
  - Irá falhar quando um pivô for nulo
  - Irá gerar resultados imprecisos quando um pivô for muito próximo de zero
- Para evitar esses problemas, adota-se uma estratégia de pivotação ou pivoteamento
  - Pivotação Parcial
  - Pivotação Total ou Completa

Pivotação Parcial

- Descrição:

i. No início de cada etapa k, escolhe-se para pivô o elemento de maior módulo entre todos os coeficientes da coluna k, a partir da linha k

$$a_{ik}^{(k-1)}, k \leq i \leq n$$

ii. Trocam se as linhas i e k, caso tenha-se i ≠ k

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Pivotação Parcial

- Exemplo: resolver o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pivotação Parcial

- Etapa 1:
  - Escolher elemento de maior valor absoluto na coluna demarcada (coluna 1) para ser o pivô

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]}_{A \quad\quad\quad\quad b}$$

$2 = i \neq k = 1$
trocar linhas

Vetor de permutações nas linhas: $P = (p_1,p_2,p_3)$

Início:
$P=(1,2,3)$

Pivotação Parcial

- Etapa 1:
  - Executa fase de eliminação do método de Gauss original (após troca do pivô efetuada)

Eliminar elementos da área demarcada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\3\end{matrix} & \begin{matrix}3\\4\end{matrix} & \begin{matrix}3\\3\end{matrix} \end{array}\right]$$

P=(2,1,3)

Pivotação Parcial

- Etapa 2:
  - Escolher elemento de maior valor absoluto na coluna demarcada (coluna 2) para ser o pivô

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{5/3} & 3 & 5/3 \\ 0 & \boxed{3} & 4 & 3 \end{array}\right]$$

P=(2,1,3)

3 = i ≠ k = 2
trocar linhas

Pivotação Parcial

- Etapa 2:
  - Executa fase de eliminação do método de Gauss original (após troca do pivô efetuada)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{5/3} & 3 & 5/3 \end{array}\right]$$

Eliminar elementos da área demarcada

P=(2,3,1)

Pivotação Parcial

- Fim da fase de eliminação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7/9 & 0 \end{array}\right]$$

P=(2,3,1)

- Resolve-se então o sistema triangular superior por substituições retroativas:

$$x = [1,\ 1,\ 0]^T$$

Pivotação Parcial

- Observações:
  - A única diferença entre o método da eliminação de Gauss com e sem pivotação parcial está no modo de escolha do elemento pivô do processo
  - A pivotação parcial garante que o pivô seja não nulo, exceto quando a matriz dada for singular
  - Todos os fatores multiplicadores satisfazem:

$$-1 \leq m_{ij} \leq 1$$

Controle maior dos erros de arredondamento

Pivotação Parcial

- Exercício: resolver o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pivotação Total

- Descrição:

i. No início de cada etapa k, escolhe-se então para pivô o elemento de maior módulo entre todos os coeficientes da submatriz a partir da k-ésima linha e também k-ésima coluna

$$a_{ij}^{(k-1)}, k \leq i, j \leq n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ii. Trocam se as linhas i e k, se i ≠ k e as colunas j e k, se j ≠ k nesse caso

Pivotação Total

- Exemplo: resolver o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivotação total

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pivotação Total

- Etapa 1:
  - Escolher o elemento de maior valor absoluto na região demarcada (matriz toda) para ser o pivô

$3 = j \neq k = 1 \Rightarrow$ trocar colunas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$3 = i \neq k = 1$
trocar linhas

Vetor de permutações nas linhas é dada por $P = (p_1,p_2,p_3)$ e nas colunas $Q = (q_1,q_2,q_3)$

Início:
$P=(1,2,3)$ e $Q=(1,2,3)$

Pivotação Total

- Etapa 1:
  - Executa fase de eliminação do método de Gauss original (após troca do pivô efetuada)

Eliminar elementos da área demarcada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

P=(3,2,1)
Q=(3,2,1)

Pivotação Total

- Etapa 2:
  - Escolher o elemento de maior valor absoluto na coluna demarcada (submatriz) para ser o pivô

$3 = j \neq k = 2 \Rightarrow$ trocar colunas

$$2 = i = k = 2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/4 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$$

P=(3,2,1)
Q=(3,2,1)

Pivotação Total

- Etapa 2:
  - Executa fase de eliminação do método de Gauss original (após troca do pivô efetuada)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1/4 & 3/4 \end{array}\right]$$

Eliminar elementos da área demarcada

P=(3,2,1)
Q=(3,1,2)

Pivotação Total

- Fim da fase de eliminação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7/12 & -7/12 \end{array}\right]$$

P=(3,2,1)
$\boxed{Q=(3,1,2)}$

- Resolve-se então o sistema triangular superior por substituições retroativas:

$$x = [0, 1, 1]^T$$

- Trocas de colunas produzem trocas no vetor solução (vetor de permutação Q):

$$x = [1, 1, 0]^T$$

Pivotação Total

- Exercício: resolver o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivotação total

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinante

- O método da eliminação de Gauss nos permite calcular com certa facilidade o determinante da matriz dos coeficientes

Gauss $\Rightarrow$ Determinante

- Qual a relação entre os determinantes das matrizes dos sistemas equivalentes obtidos por operações l-elementares?

Propriedades de determinantes

a) Se duas linhas quaisquer de uma matriz A forem trocadas, então o determinante da nova matriz B será o da matriz A com o sinal trocado

det(B) = -det(A)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = -7$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = 7$$

Propriedades de determinantes

b) Se os elementos de uma linha de A forem multiplicados por uma constante k, então o determinante da matriz B resultante será

det(B) = k det(A)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = -7$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = -14$$

Propriedades de determinantes

c) Se um múltiplo escalar de uma linha de A for somado a outra linha, então o determinante da matriz B resultante será o mesmo da matriz A

det(B) = det(A)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = -7$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = -7$$

Propriedades de determinantes

d) Se A for uma matriz triangular ou diagonal de ordem n, então o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal

$$det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = -6$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = 18$$

Propriedades de determinantes

e) Se uma matriz A for multiplicada por uma matriz B, o determinante da matriz resultante C será o produto dos determinantes de A e B

det(C) = det(A) det(B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = 10 \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow det(C) = 30$$

Cálculo do determinante

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

- Durante o método da eliminação de Gauss:
  - As matrizes intermediárias são sempre obtidas por combinações lineares das linhas (são equivalentes)
    - Portanto elas possuem determinantes iguais (propriedade c))

$$\det(A) = \det(A_{modificada})$$

Cálculo do determinante

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

- Durante o método da eliminação de Gauss
  - Como a matriz resultante é triangular, então pela propriedade d, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal

$$\det(A) = 1 \times 2 \times -12 = -24$$

  - Obs: Caso haja troca de linhas, o sinal pode mudar! (pivotação)

Cálculo do determinante

- Exercício: calcular o determinante da matriz A do sistema dado usando o método de eliminação de Gauss (com e sem pivoteamento realizado)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \det(A) = -8$$

Cálculo do determinante

- Exercício: calcular o determinante

$$\begin{array}{r l} \text{Pivô} & \\ \text{Eliminar} & \\ \text{Eliminar} & \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{4} & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

m_{21}: $m_{21}a_{11} + a_{21} = 0 \rightarrow m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -(1)/3 = -1/3 \Rightarrow L_2' = (-1/3)L_1+L_2$

m_{31}: $m_{31}a_{11} + a_{31} = 0 \rightarrow m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -(4)/3 = -4/3 \Rightarrow L_3' = (-4/3)L_1+L_3$

Cálculo do determinante

- Exercício: calcular o determinante

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & \boxed{1/3} & -22/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

Eliminar

$m_{32}a_{22} + a_{32} = 0 \rightarrow m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -(1/3)/(1/3) = -1 \Rightarrow L_3'' = -1L'_2+L'_3$

Cálculo do determinante

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		$\underline{3}$	2	4	1	
2	$m_{21} = -(1)/3 = -1/3$	1	1	2	2	
3	$m_{31} = -(4)/3 = -4/3$	4	3	-2	3	
4		0	$\underline{1/3}$	2/3	5/3	$(-1/3)L_1 + L_2$
5	$m_{32} = -(1/3)/(1/3) = -1$	0	1/3	-22/3	5/3	$(-4/3)L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-8}$	0	$-1L_4 + L_5$

Novo sistema é formado pelas linhas L1, L4, L6.

Cálculo do determinante

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do determinante é dado pela diagonal:

Det (A) = 3 x 1/3 x -8 $\Rightarrow$ det (A) = -8

$$\det(A) = -8$$

Observações finais

- Vantagens: ☺
  - Pivotação ajuda a aumentar robustez
  - Evita que sistema fique sem solução
  - Pode minimizar os erros na solução

Observações finais

- Desvantagens: ☹
  - É mais caro computacionalmente que Gauss normal
    - Pivotação total ⇨ muitos cálculos (não é muito usado)
    - Pivotação parcial ⇨ menos cáculos (é bem mais usado)
  - Número de passos continua fixo, não pode ser menor
  - Ainda não funciona bem para as matrizes esparsas