Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 2: Tipos de Soluções Numéricas

Joaquim Bento Cavalcante Neto
joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)
Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Sistema de Equações

- Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

- onde: a_{ij}: coeficientes $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$
x_j: variáveis $j = 1, ..., n$
b_i: constantes $i = 1, ..., m$

Sistema de Equações

- A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j, ($j = 1,...,n$), caso eles existam, que satisfaçam as m equações do sistema simultaneamente
  - Notação matricial: **Ax = b**, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriz dos coeficientes

vetor das variáveis

vetor constante

Sistema de Equações

- x^* denotará o vetor solução para o sistema
- $\bar{x}$ é solução aproximada do sistema Ax = b
  - Por exemplo, formulação matricial do sistema linear **Ax = b** do exemplo do circuito elétrico é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & 12 & -4 & -1 \\ -6 & -4 & 19 & -9 \\ 0 & -1 & -9 & 21 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Número de Soluções

- Seja sistema linear com duas equações e duas variáveis. As seguintes situações podem ocorrer:
  - Solução única:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 - 3x_2 & = -2 \end{cases} \quad com\ x* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Infinitas soluções:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 & = 6 \end{cases}$$

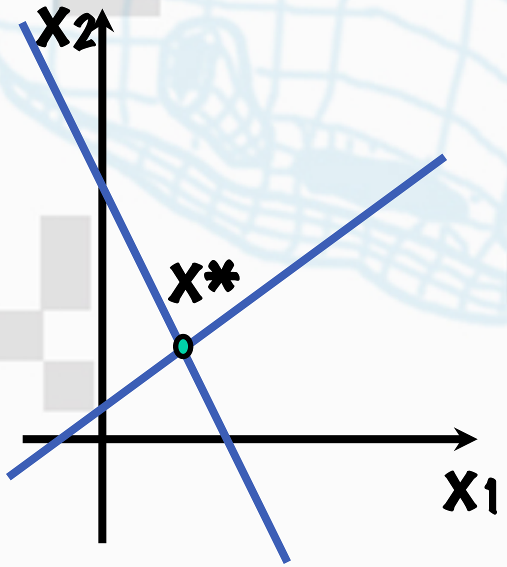
qualquer $x^* = (\boldsymbol{\alpha}, 3-2\boldsymbol{\alpha})^t$, com $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, é solução

  - Nenhuma solução:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$$

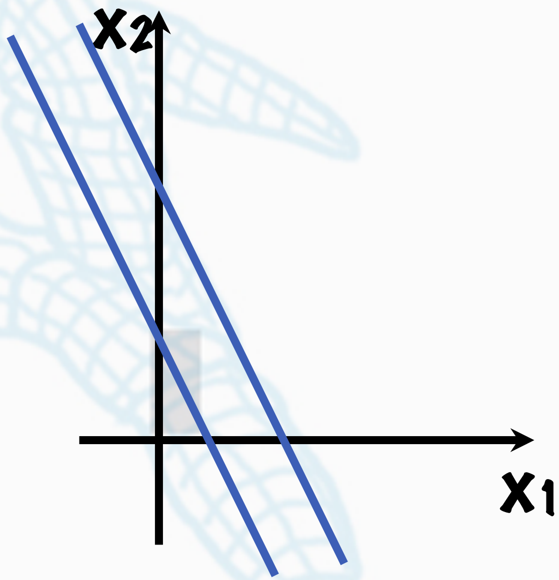
Número de Soluções

- Representação gráfica do número de soluções é:



Única solução:
retas concorrentes

Infinitas soluções:
retas coincidentes



Nenhuma solução:
retas paralelas

Número de Soluções

- Caso geral: sistema com **m** equações e **n** variáveis
  - o sistema linear tem solução única
  - o sistema linear admite infinitas soluções
  - o sistema linear não admite solução
- Considere a matriz A: m x n como função que a cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, associa vetor $b \in \mathbb{R}^m$, $b = Ax$

$$\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{Ax}$$

Número de Soluções

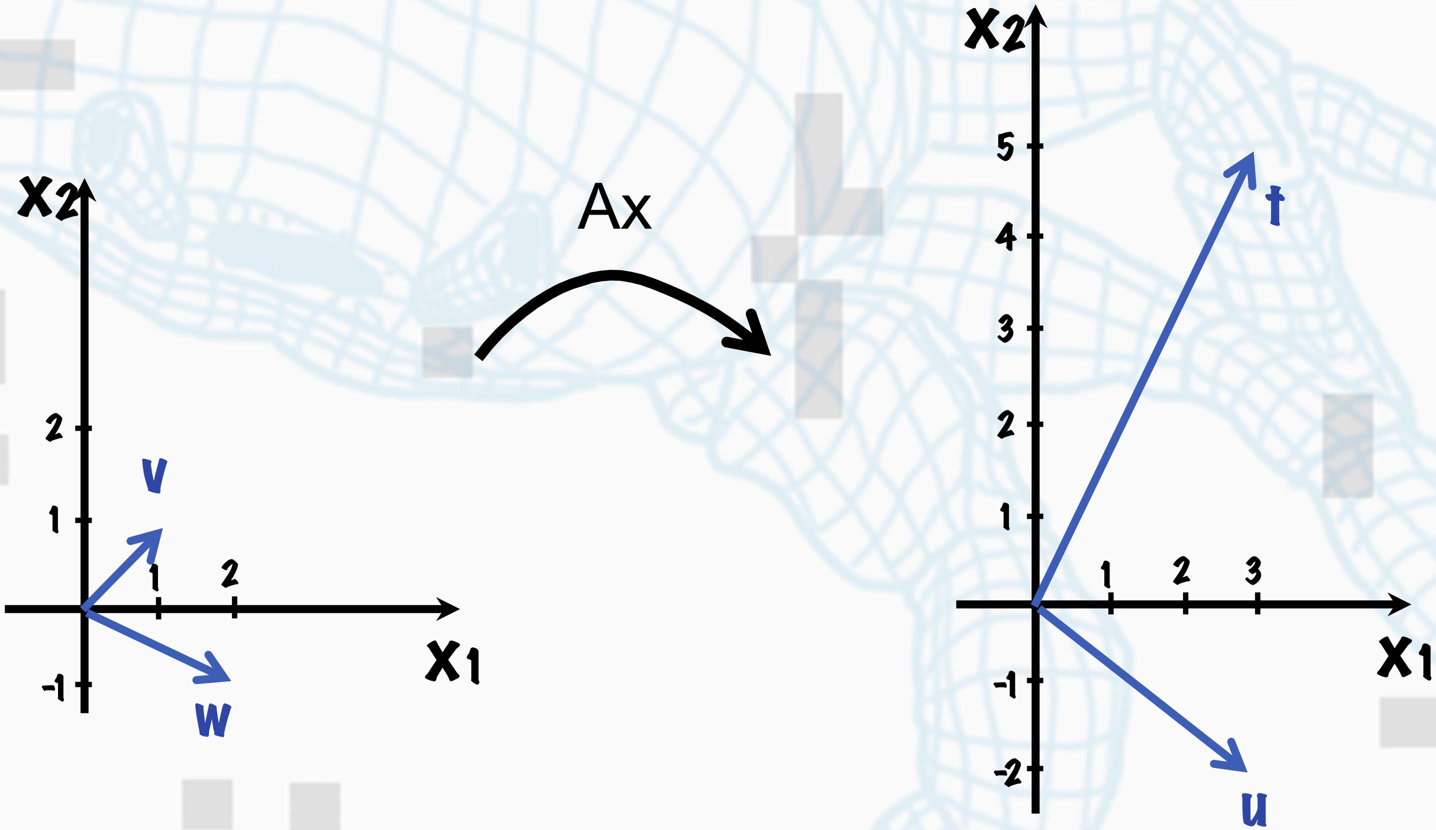
- Resolver $Ax = b$ consiste em:
  - Dado $b \in \mathbb{R}^m$ obter, caso exista:
    - $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $Ax = b$
  - Responder as questões:
    - existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$?
    - se existir solução, x^* é único?
    - como obter x^*? Qual solução?

Número de Soluções

- Exemplo:
  - Matriz A: 2 x 2, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ associa a um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^2$ um outro vetor do $\mathbb{R}^2$
    - Se $v = (1\ 1)^T$ então $u = Av = (3\ {-2})^T$
    - Se $w = (2\ {-1})^T$ então $t = Aw = (3\ 5)^T$
    - Dado $b = (3\ {-2})^T$ existe um único $x^* = (1\ 1)^T$ tal que $Ax^* = b$

Número de Soluções

- Graficamente:



Conjunto Imagem

- Um conceito muito importante em sistema de equações é o conjunto imagem de uma matriz
- Seja A: m x n, conjunto Imagem de A (Im(A)) é:
  - $Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists\ x \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax\}$
- O conjunto Im(A) é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$

Conjunto Imagem

- Uma sequência de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é dita linearmente dependente se existirem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$, não todos nulos, tais que:
  - $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$
- Se a igualdade acima só se verificar com os x_i, $i=1,2,...,n$ iguais a zero, diz-se que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes

Conjunto Imagem

- Escrevendo o vetor b de $\mathbb{R}^m$ como uma combinação linear das n colunas da A

$$b = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Im(A) será todo o conjunto de vetores que podem ser construídos pela combinação linear das colunas da matriz A em questão

Conjunto Imagem

- Exemplo: No sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 - 3x_2 & = -2 \end{cases}$
- As colunas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes
  - As colunas formam uma base para o $\mathbb{R}^2$
  - Dado qualquer u $\in \mathbb{R}^2$, existem e são únicos escalares $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$ onde

$$u = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  - Im(A) = $\mathbb{R}^2$ (Imagem da matriz A é o $\mathbb{R}^2$)

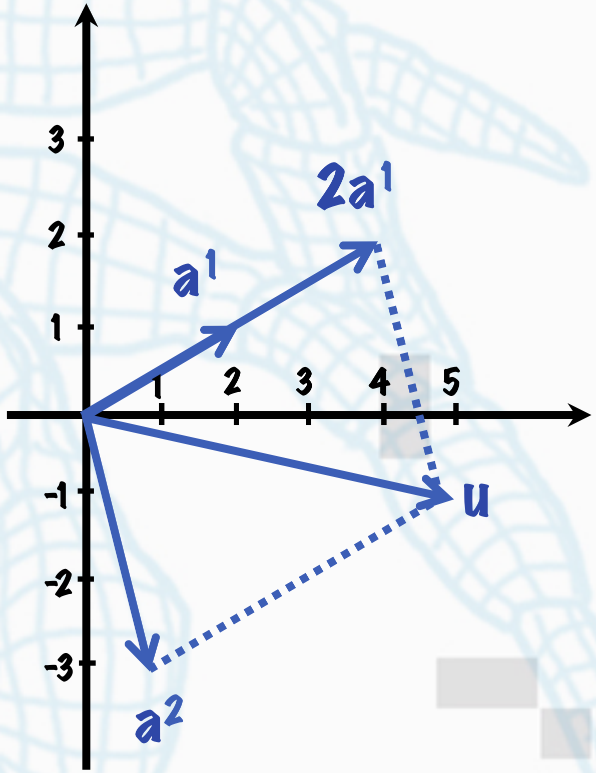
Conjunto Imagem

- Graficamente:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

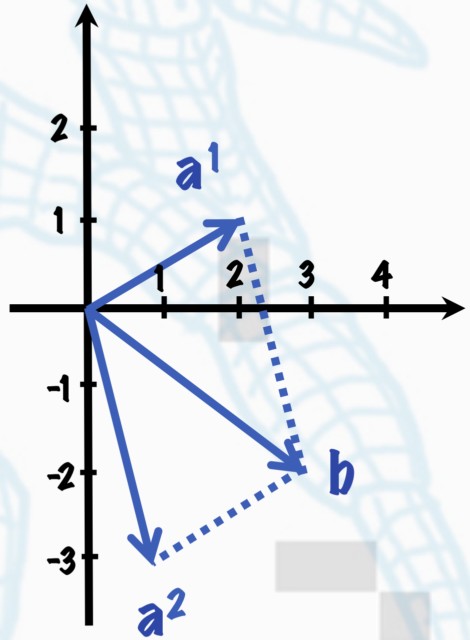
$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2a^1 + a^2$$



Posto de uma matriz

- Definição:
  - Posto de uma matriz A: m x n é o número máximo de vetores linhas ou vetores colunas de A que são linearmente independentes
  - Posto(A) = dimensão(Im(A)) = dim(Im(A))
- Exemplo:
  - i) solução única $\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \end{cases}$
    - Sabemos que Im(A) = $\mathbb{R}^2$, portanto existe um único $x^* = (1 \quad 1)^T$ tal que $b = 1a^1 + 1a^2$
    - Esse sistema é compatível determinado



Posto de uma matriz

- Outros exemplos:
  - ii) e iii) Sem solução única:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 & = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$ Posto(A) = dim(Im(A)) = 1

- Onde $a^1 = 2a^2$ (colunas são relacionadas)
- Colunas não são linearmente independentes
- Elas não formam uma base para o $\mathbb{R}^2$

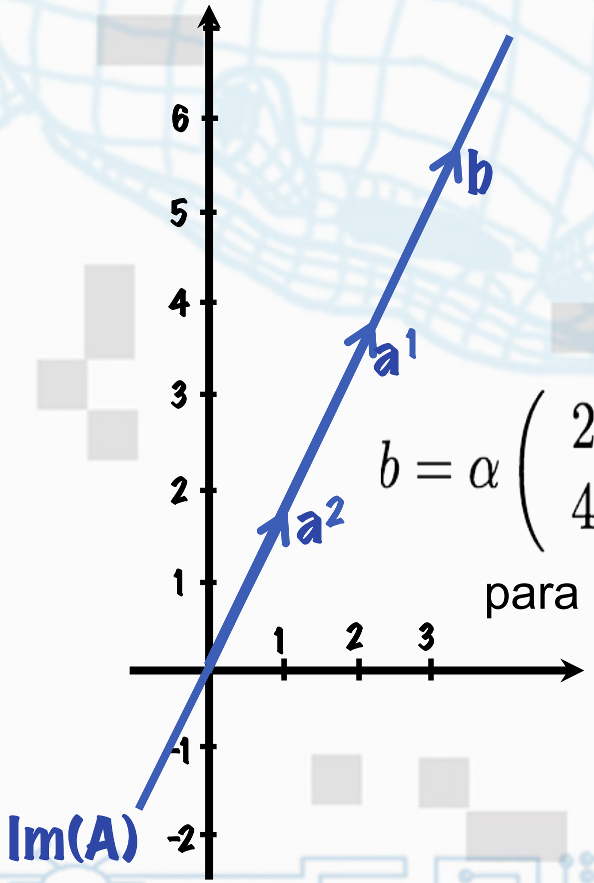
Posto de uma matriz

- Imagem x Solução:
  - Dado um vetor $b \in \mathbb{R}^2$ então:
    - Se $b \in Im(A)$:
      – **Ax = b admite infinitas soluções**
      – **Sistema é compatível indeterminado**
    - Se $b \notin Im(A)$:
      – **Ax = b não admite solução**
      – **Sistema é incompatível**

Posto de uma matriz

- Exemplos:

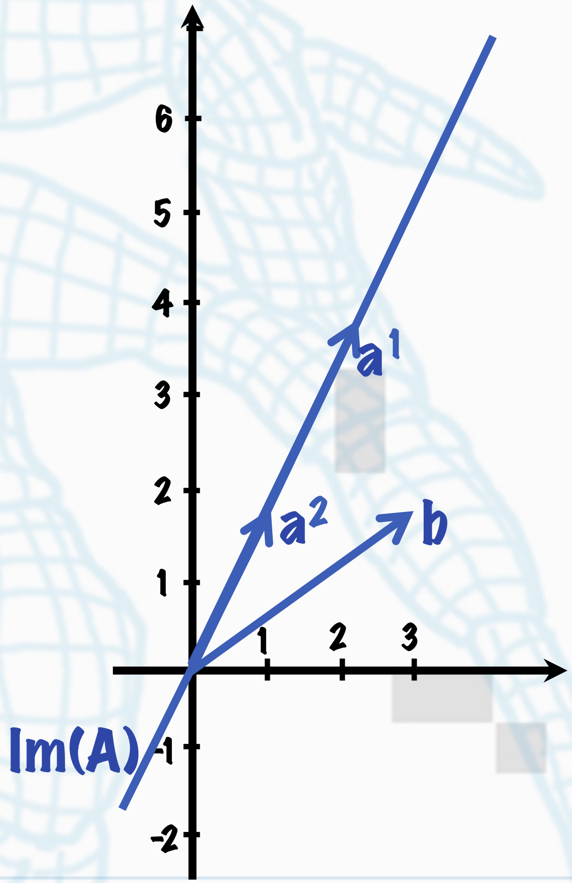
Caso ii) $b = [3\ 6]^T \in \mathrm{Im}(A)$:



$$b = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (3 - 2\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$

Caso iii) $b = [3\ 2]^T \notin \mathrm{Im}(A)$:



Posto de uma matriz

- Observações:
  - Nos casos em que $m \neq n$:
    - i) posto(A) $\leq$ min{m,n}
    - ii) se $m < n$, o sistema linear $Ax = b$ nunca poderá ter solução única pois posto(A) $< n$
    - iii) se $m > n$, mesmo que posto(A) $= n$ o sistema pode não ter solução pois a situação $b \notin Im(A)$ ocorre com uma frequência acentuada

Posto de uma matriz

- Observações:
  - Exemplo: (m < n)

$$\begin{cases} -x_1 + \quad 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad\qquad x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

– **Isolando x_2 na segunda equação e substituindo x_2 na primeira equação, obtemos $x_1 = 12 + x_3$**

– **Infinitas soluções:**

- **S = {x ∈ $\mathbb{R}^3$ tais que x = $(12+x_3 \;\; 9-x_3 \;\; x_3)^T$} =**

$$= \{x \in \mathbb{R} \; tais \; que \; x = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

- **posto(A) = m = 2 < n = 3**
- **Sistema é compatível indeterminado**

Resumo

Matriz A		m=n	m < n	m > n
Posto completo posto(A) = min{m,n}		posto(A)=n Compatível determinado	posto(A)=m Infinitas soluções	posto(A)=n b ∈ Im(A), solução única b ∉ Im(A), incompatível
Posto Deficiente posto(A) < min{m,n}	b ∈ Im(A)	Infinitas soluções	Infinitas soluções	Infinitas soluções
	b ∉ Im(A)	Incompatível	Incompatível	Incompatível

Tipos de soluções

- Os sistemas podem ter dois tipos de solução:
  - Analítica e Numérica
- Os métodos analíticos em geral são diretos:
  - São métodos que resolvem sistema diretamente
- Os métodos numéricos são de dois tipos:
  - Diretos:
    - Com exceção de erros de arredondamento, eles fornecem a solução exata do sistema linear, caso exista, após número finito de operações
  - Iterativos:
    - Geram sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$
    - Sob certas condições a sequência converge para solução x^*, caso exista

Solução Analítica

- Métodos diretos analíticos:
  - Regra de Cramer:
    - Sistema n x n $\Longrightarrow$ tem (n + 1) determinantes de ordem n
    - Aproximadamente (n+1)! multiplicações (não é eficiente)
  - Uso da inversa:
    - Sistema n x n $\Rightarrow$ vetor solução x* (solução única do sistema)

$$Ax^* = b$$

$$A^{-1}Ax^* = A^{-1}b$$

$$x^* = A^{-1}b$$

    - Calcular explicitamente a matrix A^{-1} e depois o produto $A^{-1}b$ envolve muitas operações (também não é eficiente)

Regra de Cramer

- Definição:
  - A regra de Cramer é um teorema da Álgebra Linear que dá a solução de um sistema de equações lineares em termos de determinantes. Recebe esse nome em homenagem ao matemático suíço chamado Gabriel Cramer (1704-1752).
  - Seja *[A]{x}={b}* um sistema nxn. A solução x_j do sistema é:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad 1 \leq j \leq n$$

onde A_j é a matriz que se obtém da matriz A substituindo coluna j pela coluna dos termos independentes (vetor {b})

Regra de Cramer

- Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9x3 - 13x1}{3x3 - 2x1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13x3 - 9x2}{3x3 - 2x1} = 3$$

Regra de Cramer

- Exercício:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Regra de Cramer

- Exercício:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24+12-12-6+8}{-6+12+16-16-18+4} = \frac{24}{-8} = -3$$

Regra de Cramer

- Exercício:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-12+12+8-32-18+2}{-6+12+16-16-18+4} = \frac{-40}{-8} = 5$$

Regra de Cramer

- Exercício:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{9+16+3-4-18-6}{-6+12+16-16-18+4} = \frac{0}{-8} = 0$$

Observações

- Métodos diretos:
  - Métodos diretos analíticos:
    - Podem ser muito ineficientes

Usar métodos alternativos

  - Métodos diretos numéricos:
    - Método de Eliminação de Gauss
    - Método de Gauss-Jordan
    - Método de Fatoração por LU

Solução Numérica

- Métodos numéricos para sistemas
- Em geral usados em sistemas n x n
- Métodos diretos:
  - Com exceção de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso exista, após número finito de operações
- Métodos iterativos:
  - Geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$
  - Sob certas condições esta sequência converge para solução x^*, caso exista