Métodos Numéricos 1 (MN1)

Unidade 3: Sistemas de Equações
Parte 1: Introdução a Sistemas de Equações

Joaquim Bento Cavalcante Neto

joaquimb@lia.ufc.br

Grupo de Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação (CRAb)

Departamento de Computação (DC)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

CRAb

UFC

Introdução

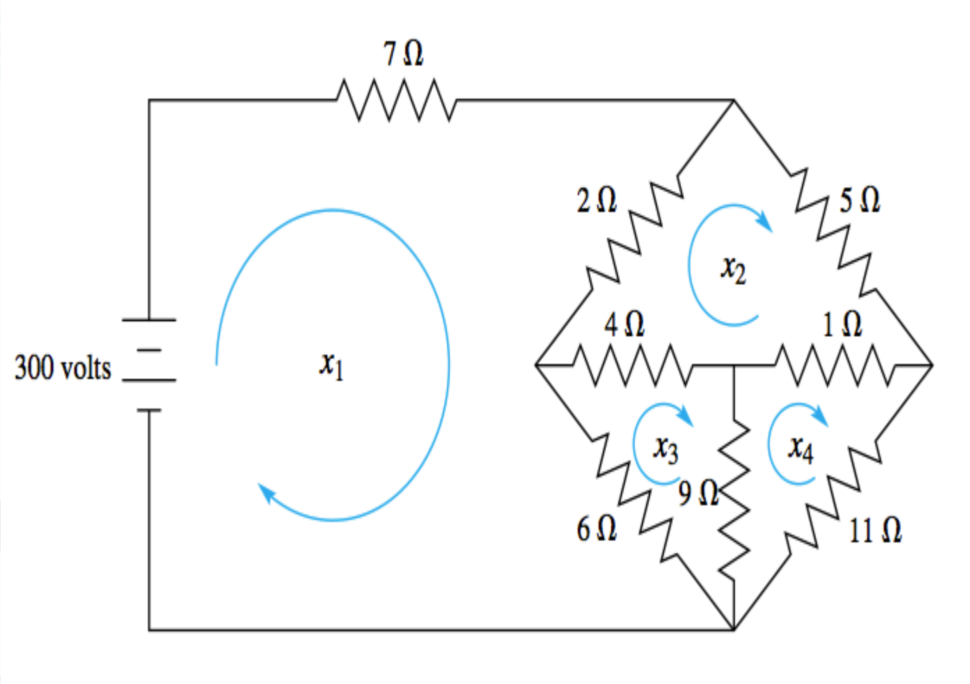
- Em raízes de equações, determinamos o valor de x que satisfazia uma única equação, f(x) = 0
- Agora, lidaremos com o caso de determinar os valores de x_1, x_2, ..., x_n que simultaneamente satisfaça um conjunto de equações agrupadas:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x1_{,}x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
\vdots \quad\quad\quad & \quad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- Sistemas podem ser lineares ou não-lineares, mas estudaremos apenas sistemas lineares

Aplicações

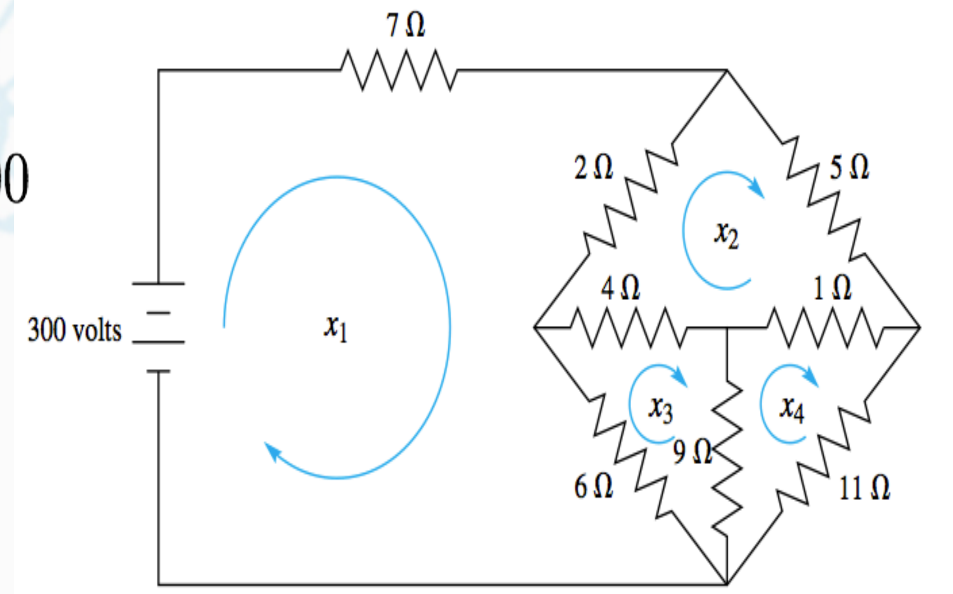
- Sistemas de equações lineares são muito usados em várias aplicações de ciências e engenharias:
  - Por exemplo, um simples circuito elétrico contém várias resistências e uma única fonte de força eletromotriz (bateria) como mostra a figura abaixo de um circuito



Aplicações

- Usando as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm, podemos escrever um sistema de equações lineares que governam esse circuito fornecido
  - Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são as correntes nas malhas, então:

$$\begin{cases} 15x_1 - 2x_2 - 6x_3 & = 300 \\ -2x_1 + 12x_2 - 4x_3 - x_4 & = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 + 19x_3 - 9x_4 & = 0 \\ -x_2 - 9x_3 + 21x_4 & = 0 \end{cases}$$



Forma geral

- Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

- onde: a_{ij}: coeficientes $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$
  x_j: variáveis $j = 1, ..., n$
  b_i: constantes $i = 1, ..., m$

Forma geral

- A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j, (j = 1,...,n), caso eles existam, que satisfaçam as m equações do sistema simultaneamente
  - Notação matricial: **Ax = b**, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriz dos coeficientes

vetor das variáveis

vetor constante

Forma geral

- x* denotará o vetor solução para o sistema
- $\bar{x}$ é solução aproximada do sistema Ax = b
  - Por exemplo, formulação matricial do sistema linear **Ax = b** do exemplo do circuito elétrico é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & 12 & -4 & -1 \\ -6 & -4 & 19 & -9 \\ 0 & -1 & -9 & 21 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes e Operações Matriciais

- Antes de estudarmos a solução de sistemas de equações é preciso revisitar matriz e operações
- Matriz é um conjunto de elementos dispostos em forma retangular, os quais podem ser:
  - Números reais ou complexos
  - Expressões matemáticas
  - Até mesmo outras matrizes
- Operação matricial é qualquer operação que é realizada por matrizes. Exemplos de operações:
  - Adição, Multiplicação, etc…
  - Transposição, Inversão, etc…

Matriz

- Definição de uma matriz:
  - Tamanho ou dimensão de uma matriz:
    - Dimensão $\Longrightarrow$ número de linhas e colunas
    - Matriz com **m** linhas e **n** colunas é **m x n**
    - Se m = n $\Longrightarrow$ matriz quadrada de ordem m
  - Elementos de uma matriz são delimitados em geral, por colchetes ou por parênteses
  - Elemento é referenciado por dois índices:
    - O primeiro indica a linha e o segundo a coluna
    - Exemplo de elemento de uma matriz A dada:
    - a_{12} => primeira linha e segunda coluna de A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipos de matrizes

- Matrizes com determinados formatos e elementos possuem nomes especiais
- Matriz coluna ou vetor coluna:
  - Matriz de tamanho n x 1
- Matriz linha ou vetor linha:
  - Matriz de tamanho 1 x m

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz coluna ou vetor coluna

$$l = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_m \end{bmatrix}$$

Matriz linha ou vetor linha

Tipos de matrizes

- Matriz Diagonal:
  - Todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

$$D : d_{ij} = 0, \ \forall \ i \neq j$$

- Matriz identidade:
  - É um tipo especial de matriz diagonal, onde todos os elementos da diagonal principal são sempre iguais a 1

$$I : e_{ij} = 1, \ \forall \ i = j \text{ e } e_{ij} = 0, \ \forall \ i \neq j$$

Tipos de matrizes

- Matriz triangular:
  - Triangular inferior:
    - Todos elementos acima da diagonal principal são iguais a zero:

$$B : b_{ij} = 0, \ \forall \ i < j$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Tipos de matrizes

- Matriz triangular:
  - Triangular superior:
    - Todos elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero:

$C : c_{ij} = 0, \forall\ i > j$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Tipos de matrizes

- Densa:
  - Uma matriz é dita densa quando a maior parte dos seus elementos forem não nulos
- Esparsa:
  - A maioria dos elementos é igual a zero
- Simétrica:
  - Há simetria dos elementos em relação à diagonal principal, isto é, $m_{ij} = m_{ji}, \ \forall\ i,j$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Transposição:
  - Transposta de uma matriz A, representada por A^T, é uma matriz obtida trocando-se as suas linhas por suas colunas, de modo que a linha i torna-se a coluna i e a coluna j torna-se a linha j
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Adição e subtração:
  - Se A e B forem matrizes com uma dimensão m x n, então C = A + B também será matriz m x n, tal que:

    $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall \ i, j$

  - Apenas matrizes com o mesmo tamanho (a mesma dimensão) podem ser somadas ou subtraídas

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Multiplicação:
  - O produto de uma matriz A: m x n, por um escalar k resulta em uma matriz B = kA de mesma dimensão m x n, tal que:

$$b_{ij} = ka_{ij},\ \forall\ i, j$$

  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Multiplicação:
  - O produto de uma matriz A: m x p, por uma matriz B: p x n resulta em matriz C = AB: m x n, tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, i = 1, 2, \ldots, m \quad e \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Multiplicação:
  - A pré-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D tem o efeito de multiplicar cada linha de A pelo correspondente elemento da matriz diagonal D

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & d_{11}a_{13} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & d_{22}a_{23} \\ d_{33}a_{31} & d_{33}a_{32} & d_{33}a_{33} \end{bmatrix}$$

Operações matriciais

- Multiplicação:
  - A pós-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D tem o efeito de multiplicar cada coluna de A pelo correspondente elemento da matriz diagonal D

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} & a_{13}d_{33} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} & a_{23}d_{33} \\ a_{31}d_{11} & a_{32}d_{22} & a_{33}d_{33} \end{bmatrix}$$

  - Normalmente AB ≠ BA (Não é uma operação comutativa)

Operações matriciais

- Determinante:
  - Uma matriz quadrada de ordem n tem um número associado a ela que é denominado determinante e cujo valor pode ser obtido pela fórmula de recorrência

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}det(M_{1n})$$

  onde
    - M_{ij} é a matriz de ordem n-1 resultante da da operação de remoção da linha i e da remoção da coluna j da matriz A
  - O determinante de uma matriz 1 x 1 é igual a esse único elemento, isto é, igual ao único elemento dessa matriz

Operações matriciais

- Determinante:

$$A = [a_{11}] \rightarrow det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Operações matriciais

- Determinante:
  - det(A) = 0, A é dita singular
  - det(A) ≠ 0, A é dita não singular
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = 2 \times 5 - 4 \times 1 = 6$$

Operações matriciais

- Determinante:
  - Exercício:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = -8$$

Operações matriciais

- Uma sequência de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é dita **linearmente dependente** se existirem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$, não todos nulos onde:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

- Se a igualdade acima só se verificar com os x_i, i=1,2,...,n iguais a zero, diz-se que vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são **linearmente independentes**
- Posto de uma matriz A: m x n => Posto(A):
  - Número máximo de vetores linhas ou colunas de A linearmente independentes => Posto(A) ≤ min{m,n}

Operações matriciais

- Posto(A):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- As linhas 2 e 4 da matriz A são obtidas pela combinação linear das linhas 1 e 3:
  - linha 2 = linha 1 + linha 3
  - linha 4 = 2(linha 1) - linha 3
- Como as linhas 1 e 3 são aqui linearmente independentes, então tem-se posto(A) = 2

Operações matriciais

- Traço:
  - O traço de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal
    - **traço(A) =** $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

traço(A) = 5 + 3 + 9 = 17

Operações matriciais

- Inversa:
  - A inversa de uma matriz quadrada A de ordem n é representada por A^{-1} e definida de tal maneira que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

    - onde I_n é a matriz identidade de ordem n
  - A lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa, ou seja, o resultado é o mesmo nesse caso

Operações matriciais

- Operações com transposta e inversa:
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$
  - Se $A = BCD$, então $A^T = D^TC^TB^T$ e $A^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$