Desenvolvimento das fórmulas de Gauss-Hermite / Laguerre / Chebyshev com $n=4$

Gauss-Hermite

$$H_4(x) = (-1)^4 \cdot e^{x^2} \frac{d^4}{dx^4} e^{-x^2} = \because = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Resolvendo para $H_4(x)=0$, encontramos as raízes

$x_1 = -1{,}6507$, $x_2 = -0{,}52465$, $x_3 = 0{,}52465$, $x_4 = 1{,}6507$

Com as raízes em mãos, calculamos os pesos agora

$$w_1 = \frac{2^3 \cdot 24\sqrt{\pi}}{16 \cdot (8(-1{,}6507)^3 - 12(-1{,}6507))^2} = 0.0813 = w_4$$

$$w_2 = \frac{2^3 \cdot 24\sqrt{\pi}}{16 \cdot (8 \cdot (-0.52465)^3 - 12(-0.52465))^2} = 0.80491 = w_3$$

Gauss-Laguerre

$$L_4 = \frac{e^x}{4!} \cdot \frac{d^4}{dx^4}(e^{-x}x^4) = \because = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x\ 124)$$

Resolvendo para $L_4(x)=0$, encontramos as raízes

$x_1 = 0{,}32255$, $x_2 = 1{,}7458$, $x_3 = 4{,}5366$, $x_4 = 9{,}3951$

Com as raízes em mãos, calculamos os pesos agora

$$L_5(x) = \frac{e^x}{5!} \cdot \frac{d^5}{dx^5}(e^{-x}x^5) = \dots = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$

$$w_1 = \frac{0,32255}{25 \cdot (L_5(0,32255))^2} = 0,60325$$

$$w_2 = \frac{1,7458}{25 \cdot (L_5(1,7458))^2} = 0,35742$$

$$w_3 = \frac{4,5366}{25 \cdot (L_5(4,5366))^2} = 0,03889$$

$$w_4 = \frac{9,3951}{25 \cdot (L_5(9.3952))^2} = 0,00054$$

Gauss - Chebyshev

$$T_4(x) = \frac{(-2)^4 \cdot 4!}{(2 \cdot 4)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^4}{dx^4}(1-x^2)^{4-\frac{1}{2}} = \dots = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Resolvendo para $T_4(x) = 0$, encontramos as raízes

$x_1 = -0.92387$, $x_2 = 0,38268$, $x_3 = +0,38268$, $x_4 = +0,92387$

Os pesos para a fórmula de Gauss-Chebyshev são dados por $w_n = \frac{\pi}{n}$.

portanto $w_1 = \dots = w_4 = \frac{\pi}{4}$