

HOJA DE TRABAJO #1

INTRODUCCIÓN A OPTIMIZACIÓN

MAESTRÍA EN DATA SCIENCE
ALGORITMOS EN LA CIENCIA DE DATOS

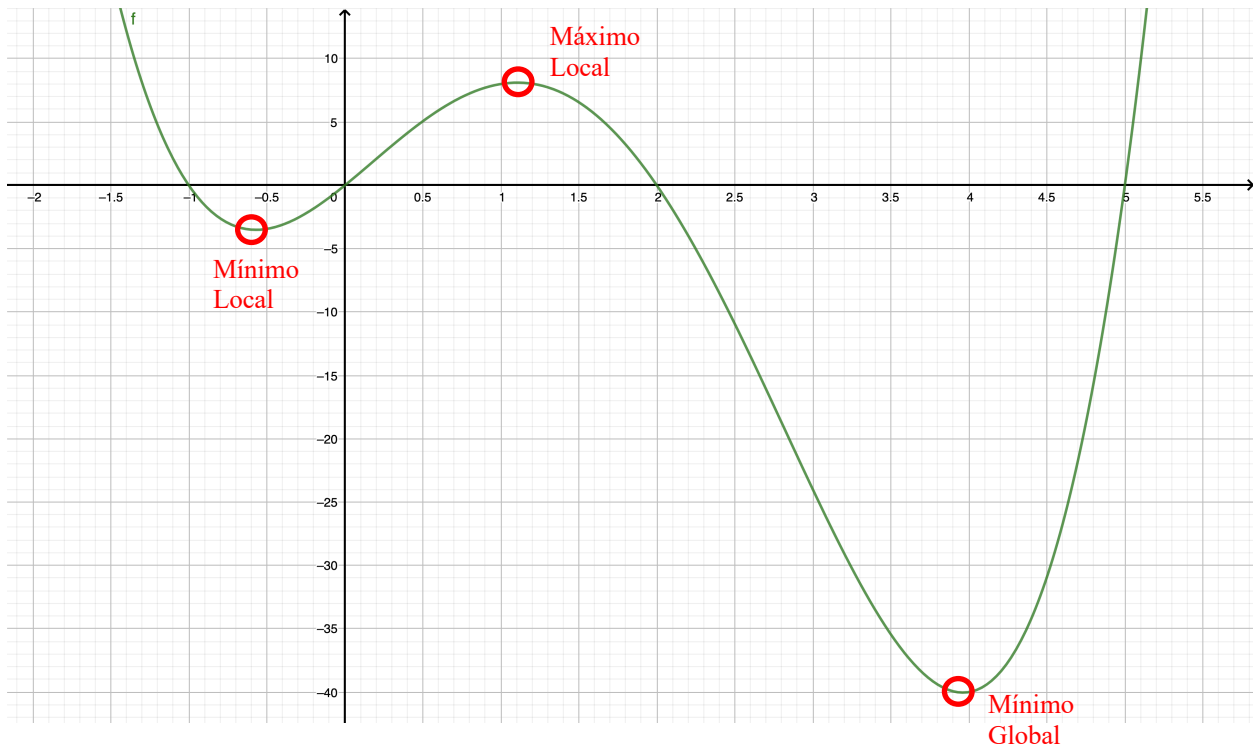
ANTONIO EVERARDO NAVAS CONTRERAS, 14003163

Guatemala, 21 de julio de 2021

1. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\mathbb{D}$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x.$$

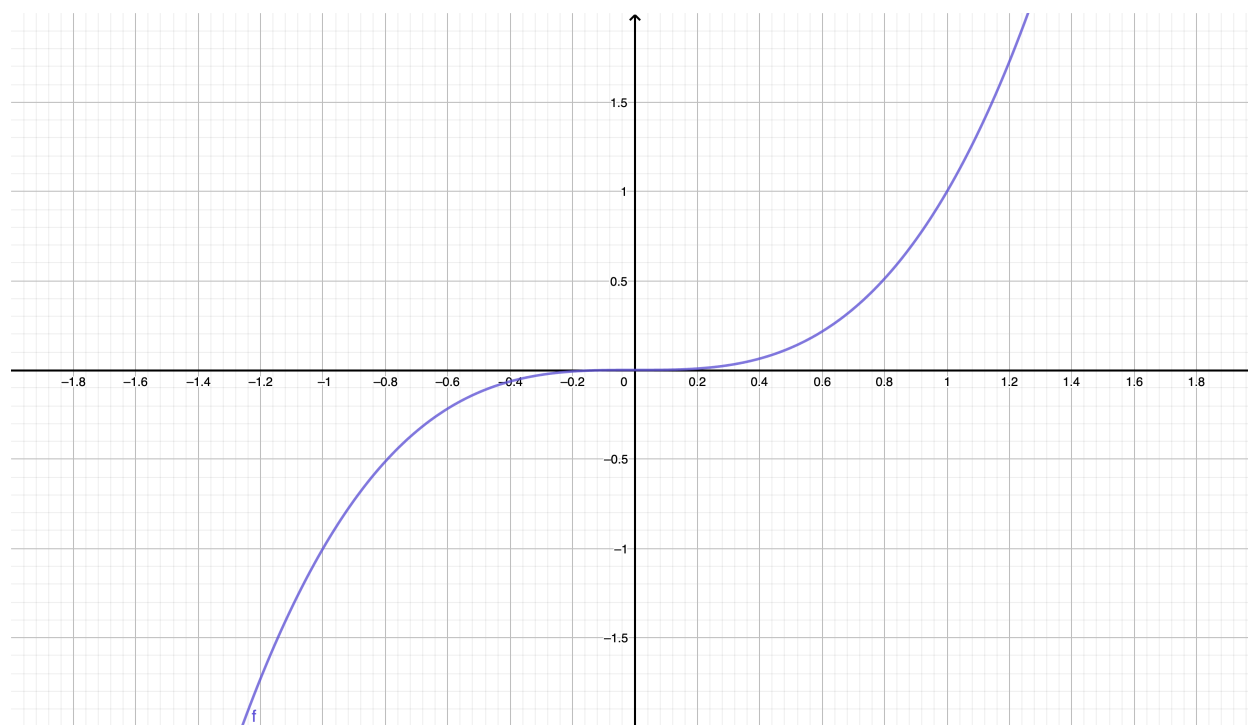
- a) Utilice cualquier software para graficar dicha función.
- b) Localice los *máximos* y *mínimos locales*, si los hay.
- c) ¿Existe un mínimo global? ¿y un máximo global? *justifique su respuesta.*



- c) Sí existe un mínimo global (identificado en la gráfica). Máximo global no hay, debido a que la función sigue creciendo hasta ∞ , si se delimitara la región factible o el rango de valores en el eje x entonces si se pudiera tener un máximo global.

2. Construya un ejemplo de una función (de una variable real) que *no* tenga mínimo global *ni* máximo global.

$$f(x) = x^3$$



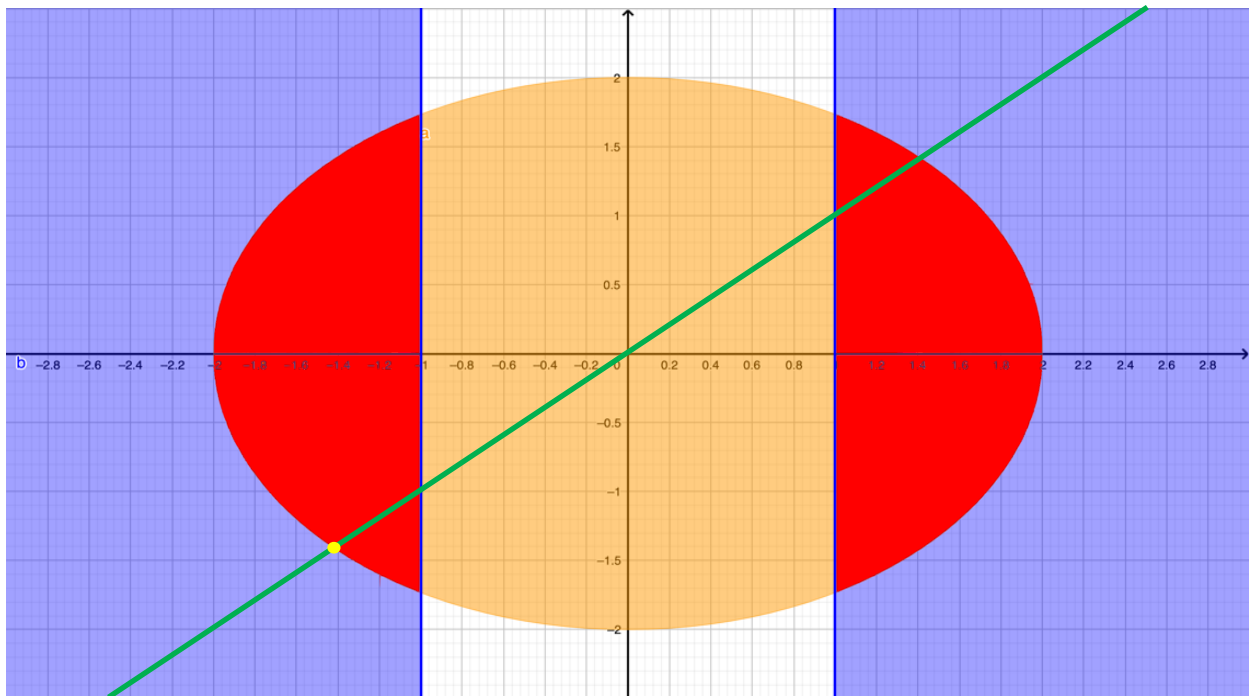
3. Considere el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x, y) = x \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x^2 \geq 1. \end{aligned}$$

- a) ¿Es este problema de optimización *lineal*? justifique su respuesta.
- b) Grafique la *región factible* para dicho problema.
- c) Utilice la gráfica del inciso (a) para determinar la *solución* del problema de optimización.

a) Sí es un problema de optimización lineal, debido a que la función objetivo es una función lineal de dos variables, la cual representa un plano, y está sujeta a 2 restricciones que son desigualdades, únicamente hay que multiplicar por -1 a la primera restricción para que quede de la forma estándar $-x^2 - y^2 \geq -4$.

b) La región factible está marcada con color rojo.



c) La solución al problema de optimización utilizando la gráfica es: -1.4.

4. A continuación se le presentan un conjunto de datos, se desea construir un *modelo de regresión lineal* para predecir la Presión Arterial Sistólica en función del Peso y la Edad a partir de un conjunto de 7 personas seleccionadas aleatoriamente.

j	Observación	1	2	3	4	5	6	7
α_j	Edad (en años)	16	25	39	45	49	64	70
	Peso (en lb)	140	149	165	170	165	159	144
y_j	Presión Arterial Sistólica (en mm Hg)	125	129	127	150	161	144	132

- Escriba el conjunto de datos en la forma $D = \{(\alpha_j, y_j) \mid j = 1, \dots, m\}$, identificando claramente cada uno de sus elementos.
- Plantee un *problema de optimización* que le permita resolver la situación planteada. Escriba la función objetivo L_D en forma matricial.
- Utilizando cualquier software, *revuelva* el problema de optimización planteado en el inciso anterior. ¿Qué tipo de solución (global o local) encontró? **justifique su respuesta.**
- Escriba la función $\phi(\alpha)$ que utilizará para realizar las predicciones.

a)

$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, y_1)$	(16, 140, 125)
$(\alpha_{21}, \alpha_{22}, y_2)$	(25, 149, 129)
$(\alpha_{31}, \alpha_{32}, y_3)$	(39, 165, 127)
$(\alpha_{41}, \alpha_{42}, y_4)$	(45, 170, 150)
$(\alpha_{51}, \alpha_{52}, y_5)$	(49, 165, 161)
$(\alpha_{61}, \alpha_{62}, y_6)$	(64, 159, 144)
$(\alpha_{71}, \alpha_{72}, y_7)$	(70, 144, 132)

b)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m (\alpha_j^T x - y_j)^2 = \frac{1}{2m} \|Ax - y\|^2$$

Donde

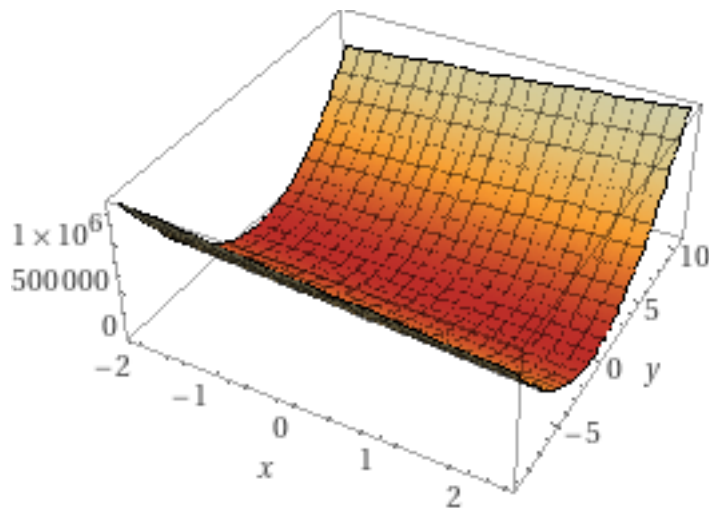
$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \\ \alpha_{71} & \alpha_{72} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}$$

$$Ax - y = \begin{bmatrix} 16 & 140 \\ 25 & 149 \\ 39 & 165 \\ 45 & 170 \\ 49 & 165 \\ 64 & 159 \\ 70 & 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 125 \\ 129 \\ 127 \\ 150 \\ 161 \\ 144 \\ 132 \end{bmatrix}$$

c)

$$\frac{1}{2m} \|Ax - y\|^2 = (7912x_1^2 + 48391x_1x_2 - 43273x_1 + 85584x_2^2 + 67488 - 151645x_2) / 7$$



Es un mínimo global el encontrado, ya que es un paraboloide elíptico.
Puntos $x_1 = 0.187$ y $x_2 = 0.833$.

d)

$$\phi(\alpha) = \alpha^T x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.187 \\ 0.833 \end{bmatrix}$$