Galileo
UNIVERSIDAD
La Revolución en la Educación

HOJA DE TRABAJO #2

REPASO DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

MAESTRÍA EN DATA SCIENCE

ALGORITMOS EN LA CIENCIA DE DATOS

ANTONIO EVERARDO NAVAS CONTRERAS, 14003163

Guatemala, 01 de agosto de 2021

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas; en caso de ser falsas, justifique su respuesta.

   a) Dada un función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f'(c) = 0$ entonces f tiene un máximo o mínimo local en $x = c$.

   Falso, en c lo que hay es un punto crítico, pero no necesariamente va a ser un máximo o mínimo local, puede ser sí, pero no necesariamente.

   b) Suponga que la función $T = f(x, y, t)$ modela la temperatura T (en °C) en un lugar del hemisferio norte que depende de la longitud x, latitud y y el tiempo t. La derivada parcial $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ representa la tasa de cambio de T cuando x está fija.

   Falso, la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}$ representa la tasa de cambio de T cuando variamos x manteniendo y, t fijas.

   c) Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}^n$, si $\nabla f(x)^T d > 0$ entonces d es una dirección de descenso (i.e. una dirección en la cual f disminuye).

   Falso, si $\nabla f(x)^T d > 0$ entonces d es una dirección de ascenso, una dirección en la cual f aumenta.

   d) Dada la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x)$ indica la dirección del incremento más rápido de f.

   Verdadero.

   e) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es paralelo a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

   Falso, el vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.

   f) Una serie de Taylor aproxima una función f para valores cercanos a un número x_0 en el dominio de dicha función.

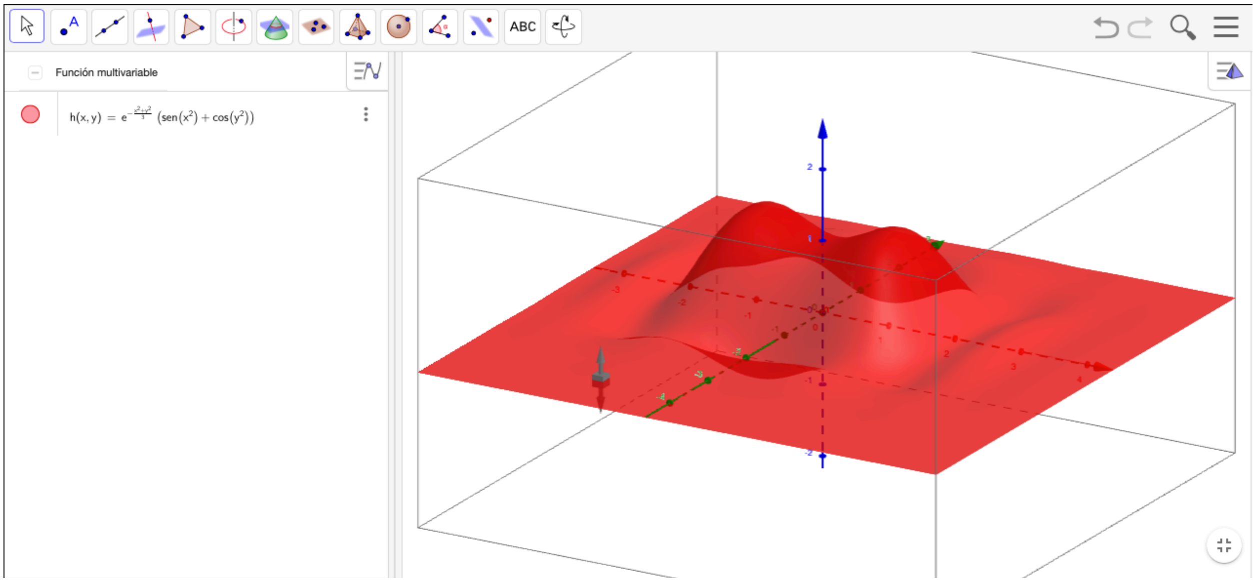
   Verdadero.

2. Dada la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni} \;\; f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{3}} \left(\sin(x^2) + \cos(y^2)\right),$$

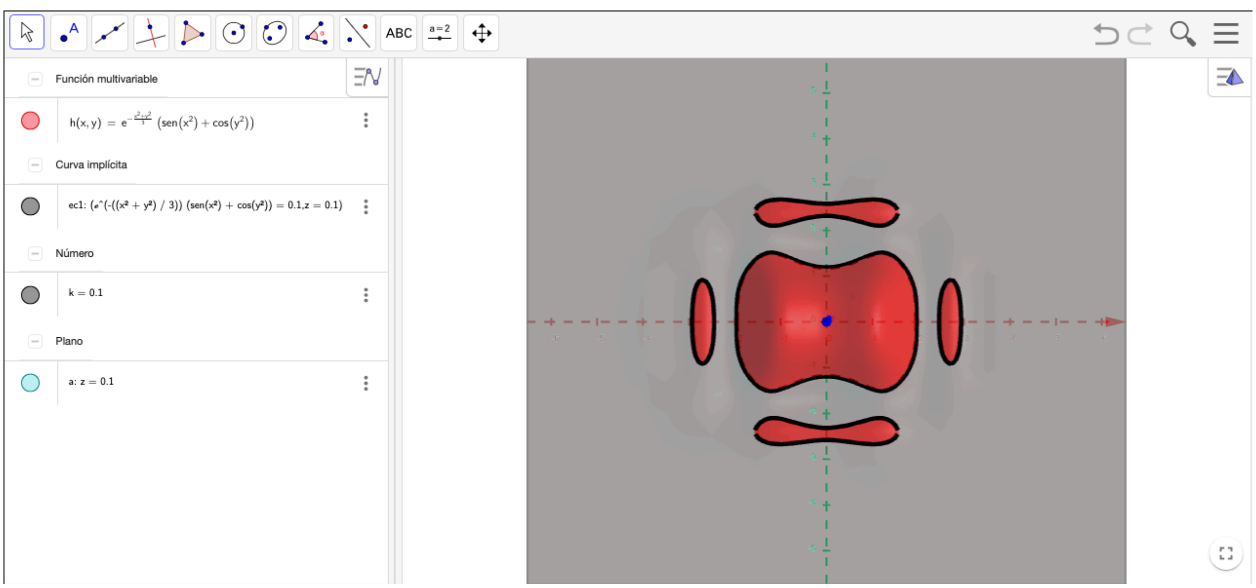
utilice cualquier software para graficar dicha función y algunas *curvas de nivel* de la misma.

Gráfica de la función:

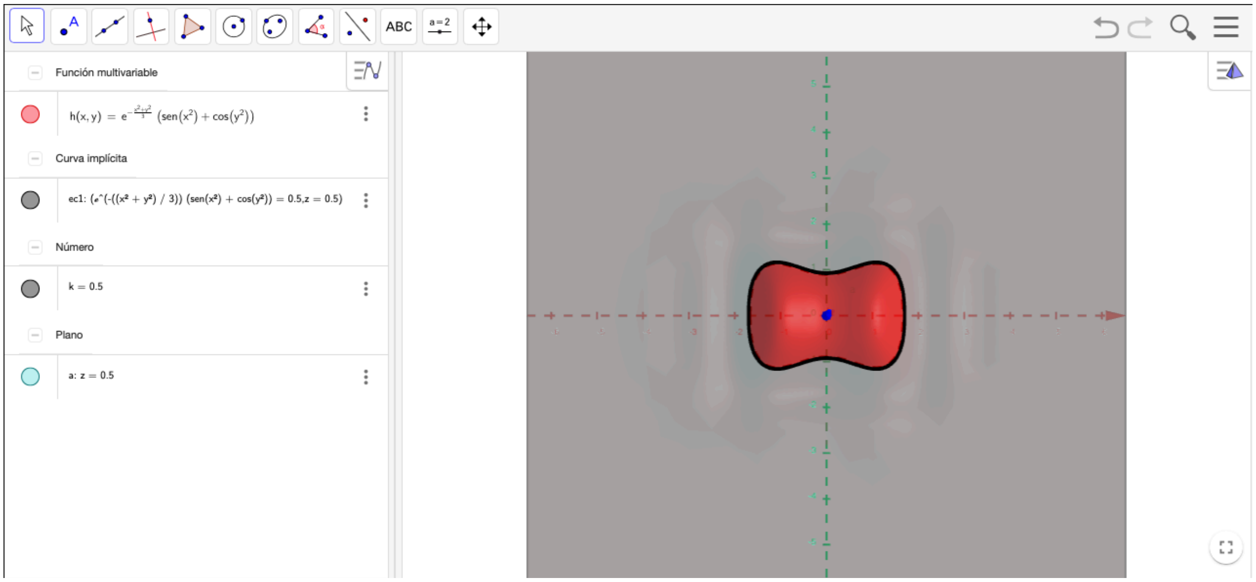


Curvas de Nivel:

$z = 0.1$

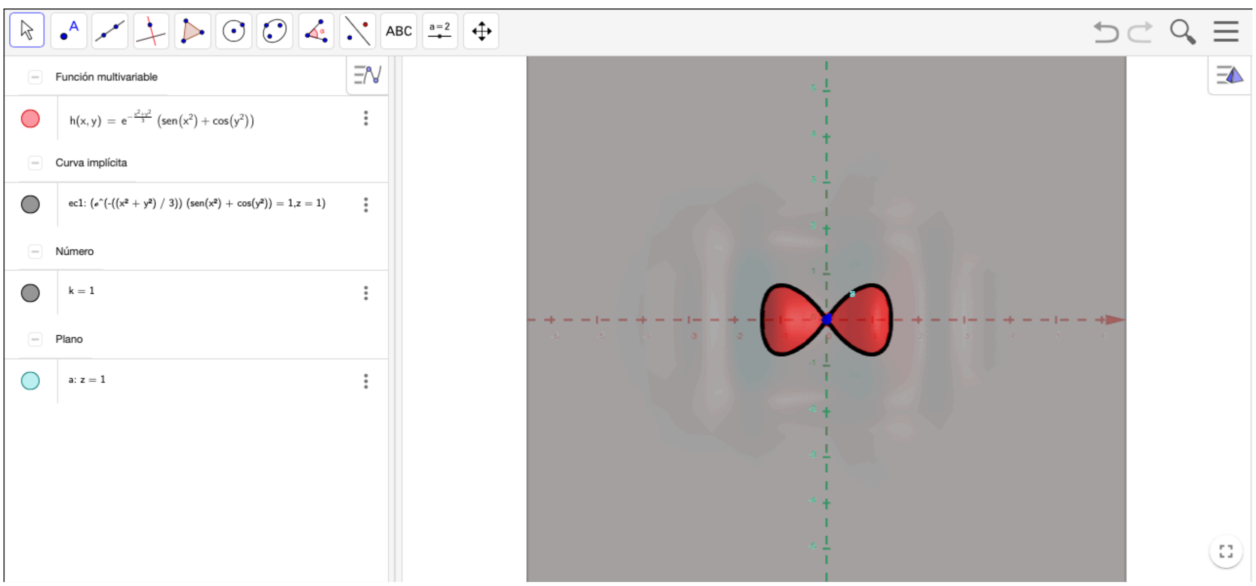


$z = 0.5$



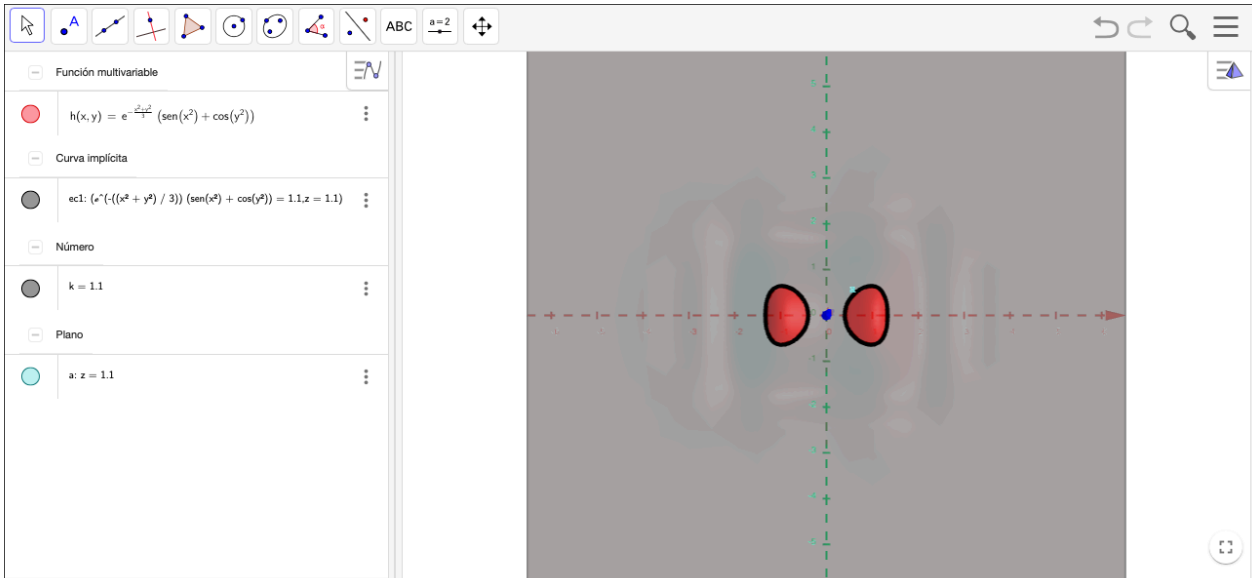
ABC
Función multivariable
Curva implícita
ec1: (e^(-((x² + y²) / 3)) (sen(x²) + cos(y²)) = 0.5,z = 0.5)
Número
k = 0.5
Plano
a: z = 0.5

$z = 1$

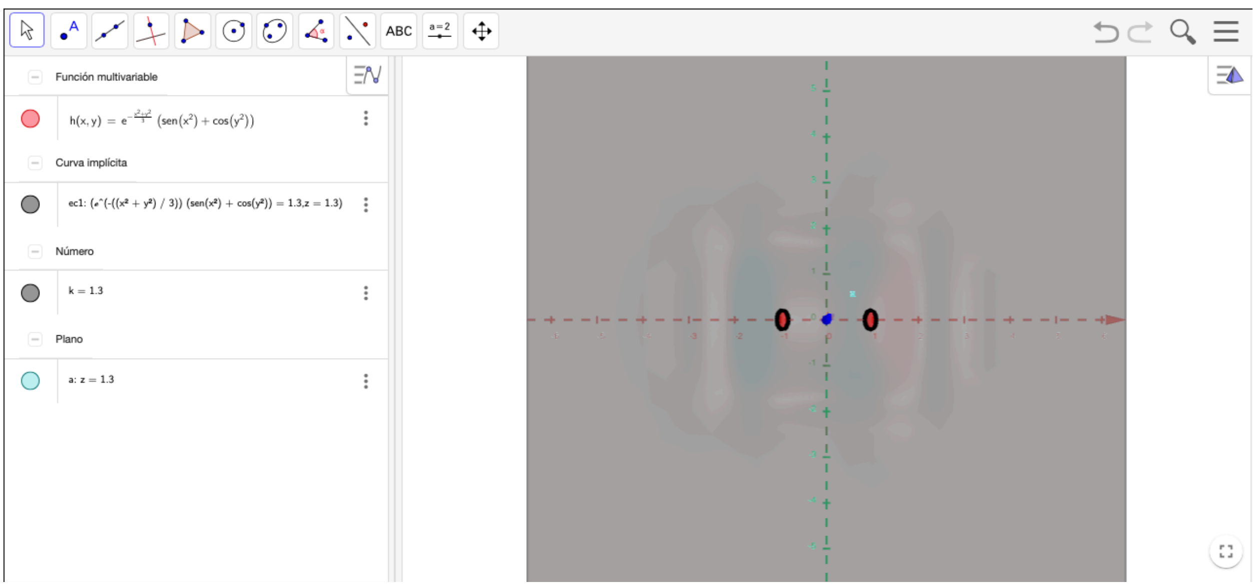


ABC
Función multivariable
Curva implícita
ec1: (e^(-((x² + y²) / 3)) (sen(x²) + cos(y²)) = 1,z = 1)
Número
k = 1
Plano
a: z = 1

$z = 1.1$


ABC
a = 2
Función multivariable
h(x, y) = e^(-(x²+y²)/3) (sen(x²) + cos(y²))
Curva implícita
ec1: (e^(-((x² + y²) / 3)) (sen(x²) + cos(y²)) = 1.1,z = 1.1)
Número
k = 1.1
Plano
a: z = 1.1

$z = 1.3$


ABC
a = 2
Función multivariable
h(x, y) = e^(-(x²+y²)/3) (sen(x²) + cos(y²))
Curva implícita
ec1: (e^(-((x² + y²) / 3)) (sen(x²) + cos(y²)) = 1.3,z = 1.3)
Número
k = 1.3
Plano
a: z = 1.3

3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_\ni$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 + 5x_1x_2^3 + 2x_2^4,$$

calcular:

a) $\nabla f(x_1, x_2)$,

b) $\nabla^2 f(x_1, x_2)$,

c) Indique la *dirección de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.

d) Indique la *tasa de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.

e) Calcule la *derivada direccional* de f en el punto $P(1, -1)$ y en dirección del vector $d = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$.

ⓐ $\nabla f(x_1, x_2)$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1^3 - 6x_1^2x_2 - 8x_1x_2^2 + 5x_2^3 \\ -2x_1^3 - 8x_1^2x_2 + 15x_1x_2^2 + 8x_2^3 \end{bmatrix}$$

ⓑ $\nabla^2 f(x_1, x_2)$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36x_1^2 - 12x_1x_2 - 8x_2^2 & -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 \\ -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 & -8x_1^2 + 30x_1x_2 + 24x_2^2 \end{bmatrix}$$

ⓒ

$$-\nabla f(1,-1) = -\begin{bmatrix} 12(1)^3 - 6(1)^2(-1) - 8(1)(-1)^2 + 5(-1)^3 \\ -2(1)^3 - 8(1)^2(-1) + 15(1)(-1)^2 + 8(-1)^3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

ⓓ $$\|-\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{(-5)^2 + (-13)^2} = \sqrt{25 + 169} = \sqrt{194} \cong 13.93$$

ⓔ

$$\nabla f(x_1,x_2)^T d = \begin{bmatrix} 5 & 13 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{13}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}} \cong -5.66$$

4. Encontrar una *polinomio de Taylor* de grado 2 para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni}$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 + 5x_1x_2^3 + 2x_2^4,$$

en el punto $x_0 = [1, -1]^T$. Evalúe dicho polinomio para $p = [0.1, 0.01]^T$ y compare su resultado con el valor de $f(x_0 + p)$.

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 12x_1^3 - 6x_1^2x_2 - 8x_1x_2^2 + 5x_2^3 \\ -2x_1^3 - 8x_1^2x_2 + 15x_1x_2^2 + 8x_2^3 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla f(1,-1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 36x_1^2 - 12x_1x_2 - 8x_2^2 & -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 \\ -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 & -8x_1^2 + 30x_1x_2 + 24x_2^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f(1,-1) = \begin{bmatrix} 40 & 25 \\ 25 & -14 \end{bmatrix}$$

Polinomio de Taylor:

$$f(x_0 + p) \approx f(x_0) + p^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_0) p$$

$$x_0 = [1,-1]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$p = [0.1, 0.01]^T = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$f(1.1, -0.99) \approx f(1,-1) + [0.1 \;\; 0.01]\begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[0.1 \;\; 0.01]\begin{bmatrix} 40 & 25 \\ 25 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$f(1.1, -0.99) \approx -2 + 0.63 + 0.2243 = \underline{\underline{-1.1457}} \;/\!/$$

$$f(1.1, -0.99) = \underline{\underline{-1.13146}} \;/\!/$$

$$\text{ERROR} = \left| -1.1457 - (-1.13146) \right| = \underline{\underline{0.01424}} \;/\!/$$