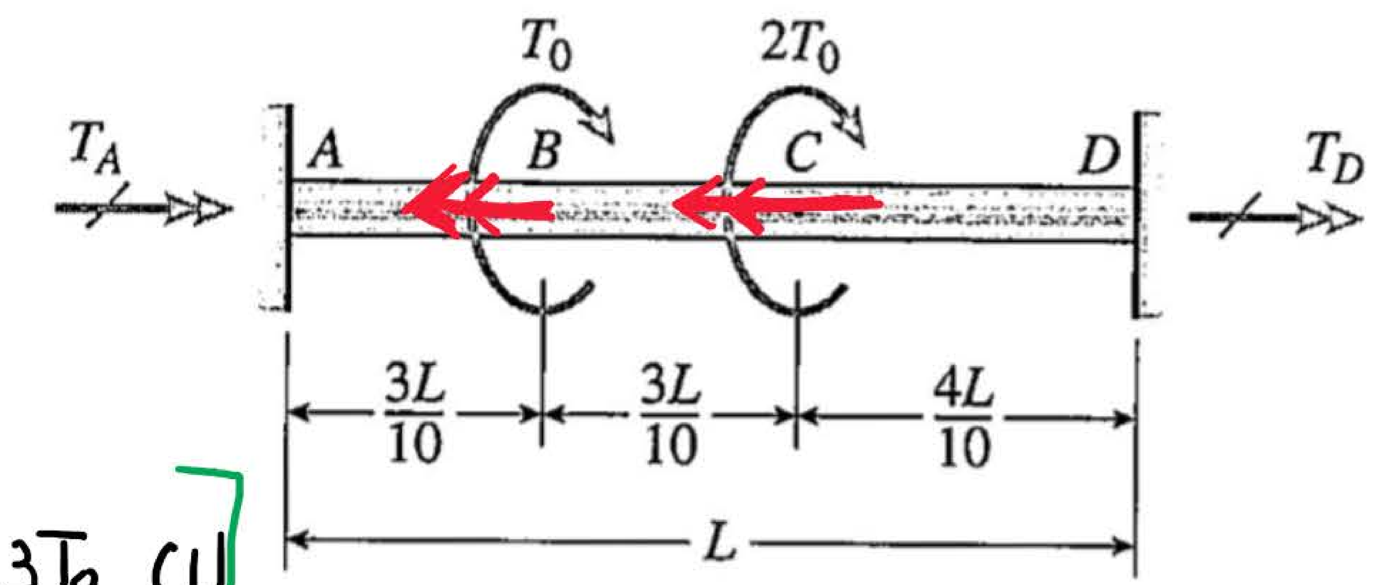
Problema 12. Una barra circular sólida ABCD con extremos fijos está sometida a los pares T_0 y $2T_0$ que actúan en las posiciones mostradas en la figura.

(a) Obtenga una fórmula para el máximo ángulo de torsión ϕ de la barra.

Solución: $\phi_{max} = \frac{3T_0 L}{5G\, I_p}$



· ESTÁTICA

$\sum \vec{M}_{ext} = 0 \quad T_A + T_D - T_0 - 2T_0 = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_D = 3T_0 \quad (1)}$

· 2 incógnitas y 1 ecu. ⇒ HIPERESTÁTICO!!

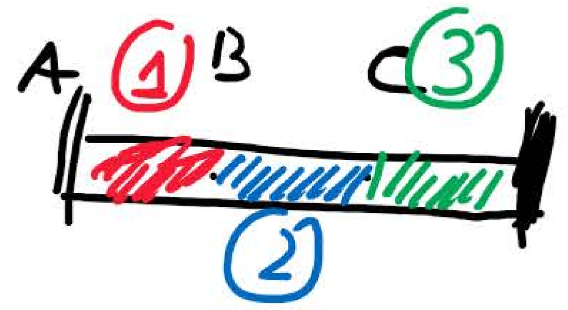
· Ecu. de compatibilidad.

A D

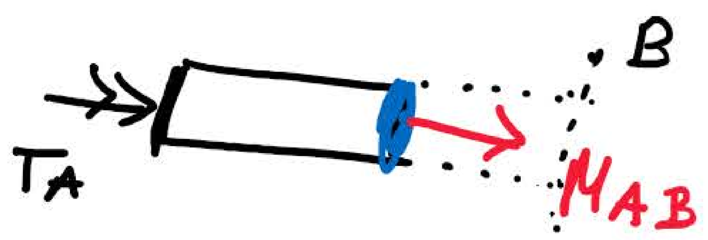
- A y D son empotramientos ⇒ $\phi(0) = \phi(L) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = 0 \quad (2)}$

· Método de las secciones.



• Tramo (1)

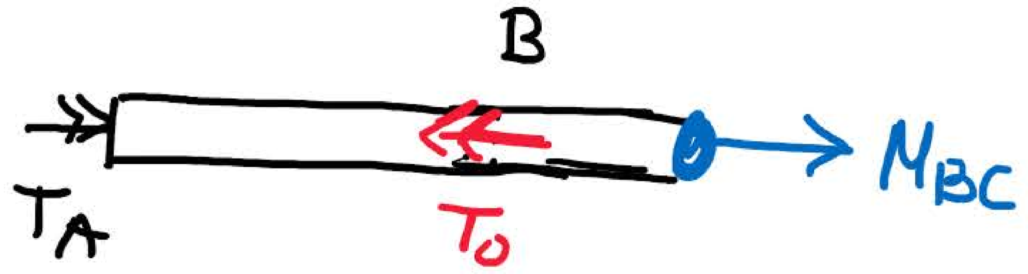


ojo!

$T_A + M_{AB} = 0 \Rightarrow M_{AB} = -T_A \Rightarrow \phi^{AB}_{max} = \frac{-\frac{3L}{10}(T_A)}{G I_p} = \frac{-3L}{10 G I_p} \cdot \frac{3T_0}{2}$

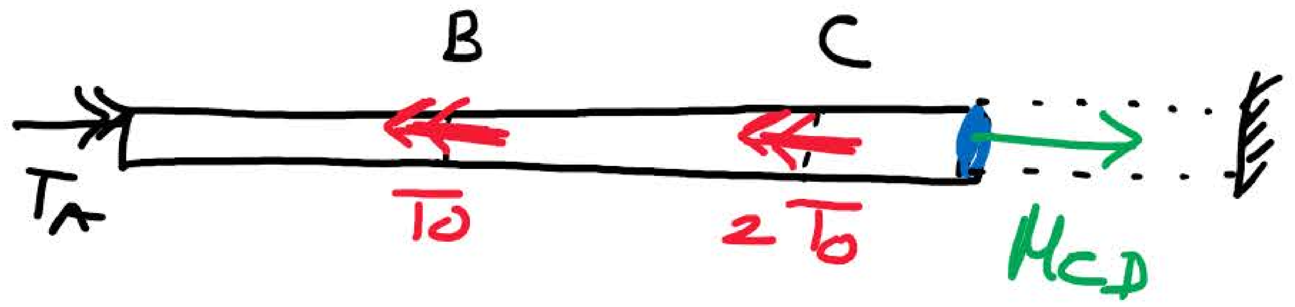
$-\frac{9}{2} \frac{L T_0}{10 G I_p}$ //

• Tramo (2)



$T_A + M_{BC} - T_0 = 0 \quad M_{BC} = T_0 - T_A \Rightarrow \phi^{BC}_{max} = \frac{\frac{3L}{10}(T_0 - T_A)}{G I_p} = \frac{3L}{10 G I_p} \cdot \frac{-T_0}{2} = -\frac{3}{2} \frac{L T_0}{10 G I_p}$

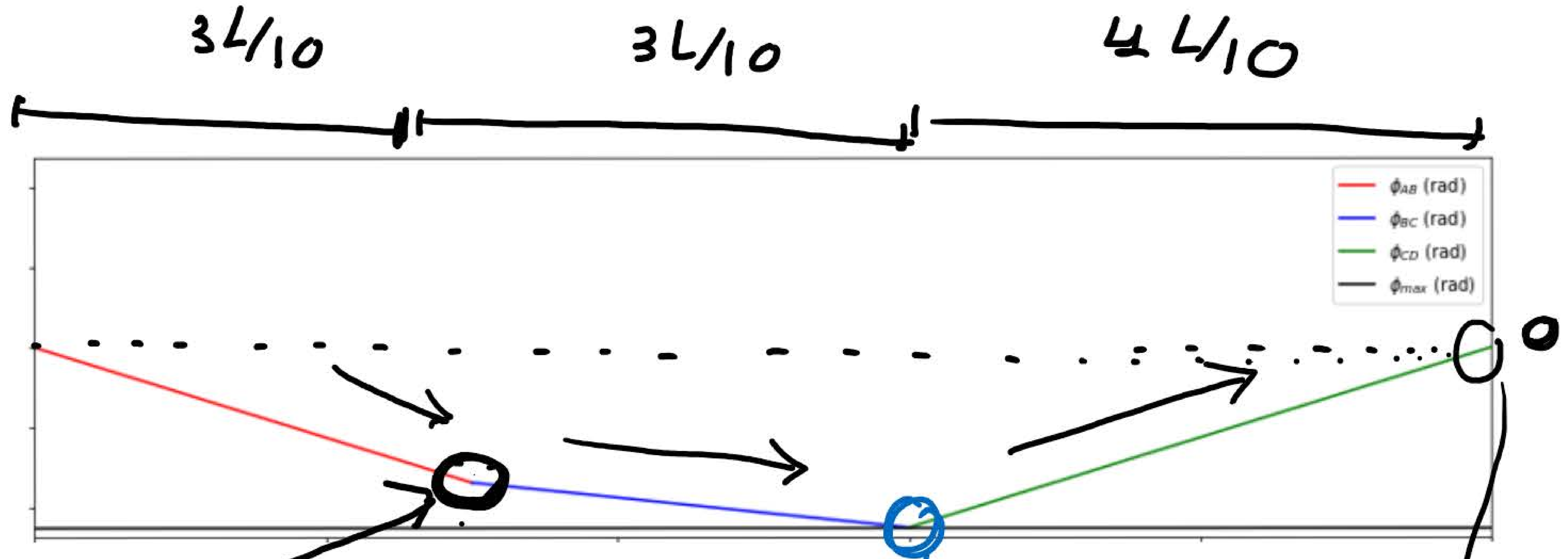
• Tramo (3)



$T_A - 3T_0 + M_{CD} = 0 \quad M_{CD} = 3T_0 - T_A \Rightarrow \phi^{CD}_{max} = \frac{\frac{4L}{10}(3T_0 - T_A)}{G I_p} = 6 \frac{L T_0}{10 G I_p}$

+ + $= 0$!

... unas pocas cuentas después → $\boxed{T_A = \frac{3}{2} T_0 = T_D}$!!!



$\phi(x)$

$\phi < 0$

x

$\phi^{max}_{AB} + \phi^{max}_{BC}$

$\phi^{max}_{AB} + \phi^{max}_{BC} + \phi^{max}_{CD} = 0$!

Finalmente: ¿ϕ_{max}?

$\phi_{max} = \phi^{max}_{AB} + \phi^{max}_{BC} = \frac{3}{5} \frac{L T_0}{G I_p}$