FLUJOS CANÓNICOS

Mecánica de fluidos

Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS

- Fluidostática
  - Ecuación fundamental de la fluidostática y ley de Pascal
  - Medidas de presión (barómetros)
  - Fuerzas y momentos sobre superficies
- Flujo ideal
- **Flujo viscoso: flujo de Couette y de Hagen-Poiseuille**

Modelo de flujo viscoso 1D

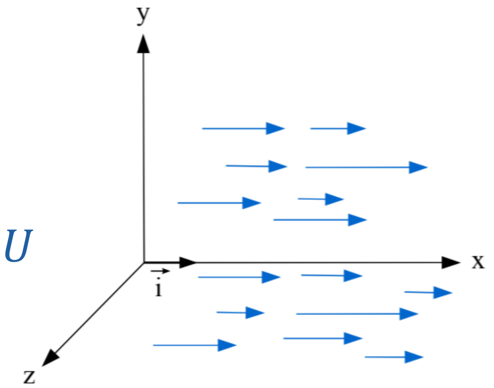
- En el modelo de flujo ideal considerábamos que la viscosidad era despreciable ($\mu = 0$).
- Ahora vamos a considerar lo contrario, que los <u>efectos viscosos son dominantes</u>. Resumiendo:

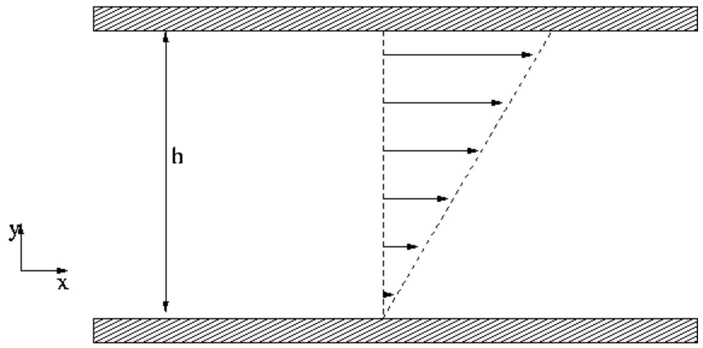
Ecuaciones de Navier-Stokes

- **Flujo ideal** (términos viscosos << términos convectivos)
- **Flujo viscoso** (términos viscosos >> términos convectivos)

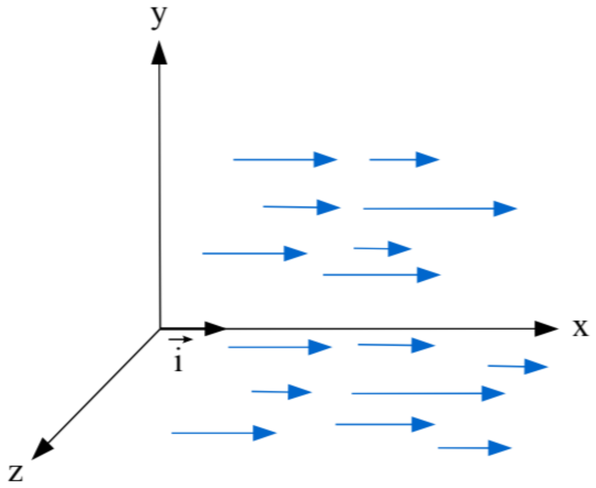
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0 \\
&\rho\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}}\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \\
&\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla e\right) = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{q}} - p \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \phi_v + \dot{q}_v
\end{aligned}
\right.
$$

- Hipótesis
  - Flujo incompresible, $\rho = \text{cte}$ y $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$
  - Flujo unidireccional, $\vec{\boldsymbol{v}} = (u, 0{,}0)$
  - Fuerzas másicas conservativas, $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$





Obtención de las ecuaciones



- Hipótesis
  - Flujo incompresible: $\rho = \text{cte}$ y $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$
  - Flujo unidireccional: $\vec{\boldsymbol{v}} = (u, 0{,}0)$,
  - Fuerzas másicas conservativas: $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$

- Ec. Conservación masa:

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancelto{0}{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow u(y, z, t)$$

Observación 1: La velocidad u no varía en x

- Ec. Cantidad movimiento en x:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \rho \cancelto{0}{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cancelto{0}{w} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Presión motriz: $p^* = p + \rho U$

- Ec. Cantidad movimiento en y, z:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \; p^* = p^*(x, t)$$

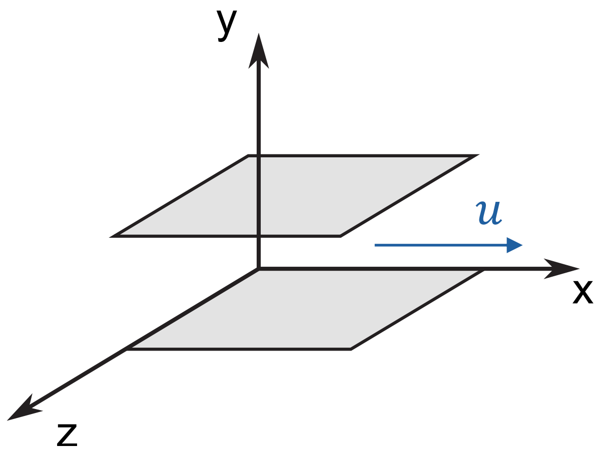
Observación 2: La presión motriz p^*no varía en y, z

Flujo viscoso estacionario entre placas paralelas

- Hipótesis adicionales a las anteriores:
  - Problema en el plano x-y: $\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0$
  - Problema estacionario: $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$
- Ec. Cantidad movimiento en x:

$$\rho \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{0} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{0} \right)$$

$$-\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}x} + \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = 0$$



- De las observaciones 1 y 2, vemos que la presión motriz sólo podría variar en la dirección x:

$$p^* = p^*(x)$$

Flujo viscoso estacionario entre placas paralelas: flujo de Couette

- Condiciones:
  - La presión motriz es constante: $p^* = cte$
  - Condiciones de contorno pared fija/movil: $u(y=0)=0,\ u(y=h)=V$
- Aplicamos ec. cantidad movimiento en x:

$$-\cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}x}} + \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

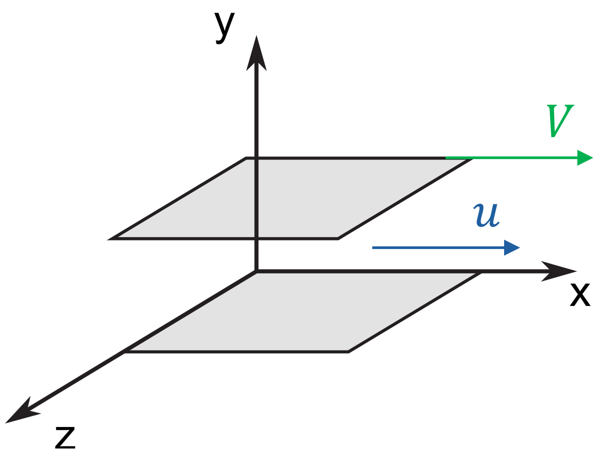
$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = 0 \xrightarrow{\text{integrando}} u(y) = Ay + B$$

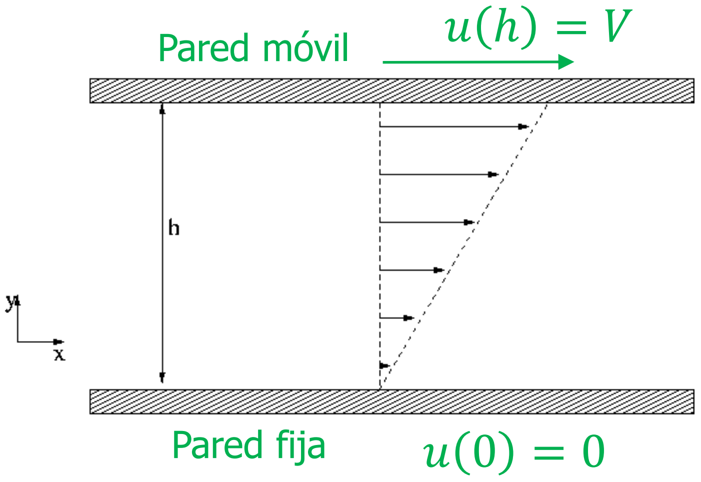
Aplicando c.c.:

$$u(y=0)=0 \quad \rightarrow \quad B=0$$
$$u(y=h)=V \quad \rightarrow \quad A = V/h$$

Obtenemos:

$$u(y) = V\frac{y}{h}$$



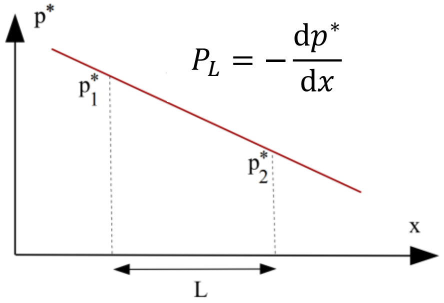


Flujo viscoso estacionario entre placas paralelas: flujo de Hagen-Poiseuille

- Condiciones:
  - La presión motriz no es constante: $\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}x} \neq 0$
  - Condiciones de contorno paredes reposo: $u(y=0)=0,\ u(y=h)=0$
- Aplicamos ec. cantidad movimiento en x:

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}x}$$

Esta igualdad solo es posible si ambos términos son constantes. Llamaremos a esta constante:
P_L= gradiente de presión motriz, y lo ponemos con signo negativo:



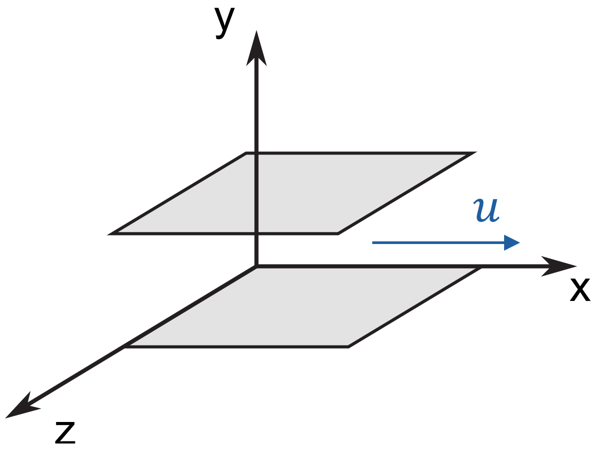
Reescribimos la ec. anterior como:

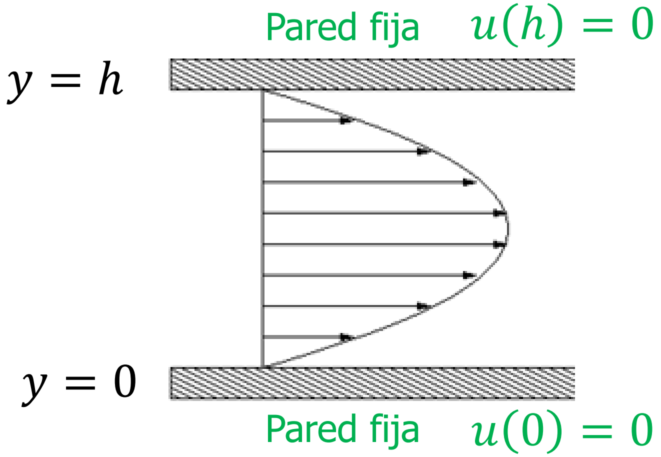
$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = -P_L$$

Integrando y aplicando c.c.:

$$u(y) = \frac{P_L}{2\mu} y(h-y)$$

$$p^*(x) = P_0 - P_L x$$





Algunas cantidades relevantes (I)

- Caudal unitario (por ud. de anchura): consideramos anchura unitaria e integramos en y:

$$Q = \int_S udS = \int_0^h u(y)dy$$

  - Couette: $Q = V\frac{h}{2}$
  - Hagen-Poiseuille: $Q = P_L \frac{h^3}{12\mu}$

- Velocidad media:
  - Couette: $Q = V/2$
  - Hagen-Poiseuille: $Q = P_L \frac{h^2}{12\mu}$

- Presión:
  - Couette: $p^* = cte \ \rightarrow p(y) = p^* - \rho g y \ \rightarrow$ La presión motriz es constante, la presión estática cambia con y.
  - Hagen-Poiseuille: $p^* = p^*(x) \rightarrow p(x, y) = p^*(x) - \rho g y \ \rightarrow$ La presión motriz varia en x, la presión estática cambia con x, y.

Algunas cantidades relevantes (II)

- <u>Fuerzas superficiales</u>:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \int_S \vec{\boldsymbol{f}}_s dS = \int_S -p\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_S \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}}dS$$

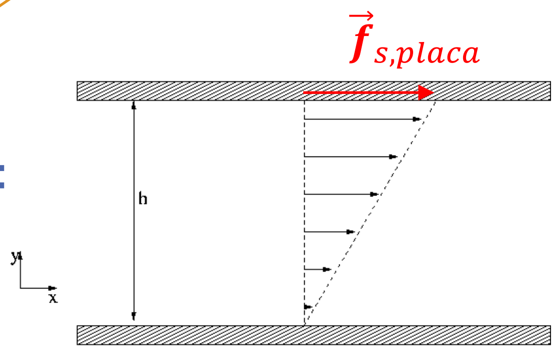
  - Con la presión p calculada en la diapositiva anterior
  - Con $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \approx 2\mu\tilde{\boldsymbol{e}}$ donde

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: flujo de Couette, fuerza viscosa que ejerce la placa móvil (superior) <u>sobre</u> el fluido:

Es un esfuerzo en x!

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{V}{h} \\ \frac{V}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}_{s,v,placa} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{V}{h} \\ \frac{V}{h} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \frac{V}{h} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Potencia por ud. de superficie requerida en la placa móvil (potencia transferida al flujo):

$$\dot{w}_{placa} = f \cdot V = \mu \frac{V^2}{h}$$

Algunas cantidades relevantes (III)

- Disipación viscosa:

$$\Phi = \int_V \phi_v dV$$

Producto doblemente contraído (ver Tema 2)

con

$$\phi_v = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v : \nabla\vec{\boldsymbol{v}} = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)^2$$

En un flujo unidireccional con $u = u(y)$, se reduce a:

$$\phi_v = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Ejemplo: Flujo de Couette, con $u(y) = V\frac{y}{h}$

Cálculo por unidad de superficie, $dV = dy \cdot 1 \cdot 1$

$$\phi_v = \mu\left(\frac{V}{h}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int_V \phi_v dV = \int_0^h \mu\left(\frac{V}{h}\right)^2 dy = \mu\frac{V^2}{h} \equiv \dot{w}_{placa}$$

Corolario: Toda la potencia comunicada por la placa móvil se disipa por efectos viscosos (disipación viscosa)

Algunas cantidades relevantes (IV)

- <u>Disipación viscosa</u>:

Ejemplo: Flujo de Hagen-Poiseuille, con $u(y) = \frac{P_L}{2\mu} y(h-y)$

$$\phi_v = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{{P_L}^2}{4\mu^2}(h^2 + 4y^2 - 4hy)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \int_V \phi_v dV = \int_0^h \frac{{P_L}^2}{4\mu^2}(h^2 + 4y^2 - 4hy)\, dy = \frac{{P_L}^2 h^3}{12\mu}$$

Cálculo por unidad de superficie, $dV = dy \cdot 1 \cdot 1$

$$\Phi = \frac{{P_L}^2 h^3}{12\mu} = P_L Q$$

Potencia requerida para mover el caudal

Corolario: La potencia invertida en mover el caudal, $P_L Q$
, se disipa por efectos viscosos (dispación viscosa).