

INSTALACIONES DE FLUIDOS

Mecánica de fluidos

Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS

- Flujo en conductos
 - Introducción
 - Ecuación de conservación del momento lineal y de la energía en un conducto
 - Flujo laminar en conductos: ley de Poiseuille
 - Flujo turbulento en conductos
 - Pérdidas de carga lineales y singulares
- Instalaciones de fluidos
 - Balance energético en una instalación con una turbomáquina
 - Curva de la bomba y curva de la instalación.
 - Punto de operación
 - Cálculo de instalaciones de fluidos. Instalaciones en serie y en paralelo
- Introducción al flujo en canales

Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.



Centro de bombeo de agua para consumo humano

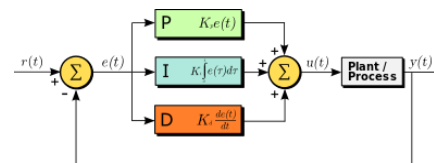
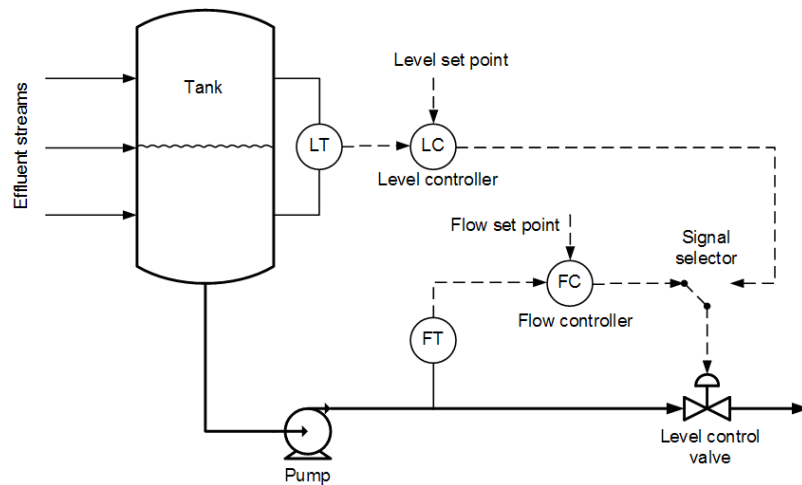


Industria química

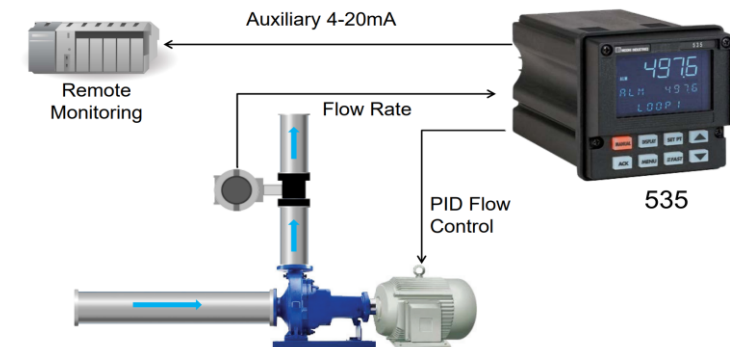
Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.

Interés para el grado: sistemas electrónicos de control de procesos industriales que involucren instalaciones de fluidos



1/4 DIN PID Controller - Flow Control

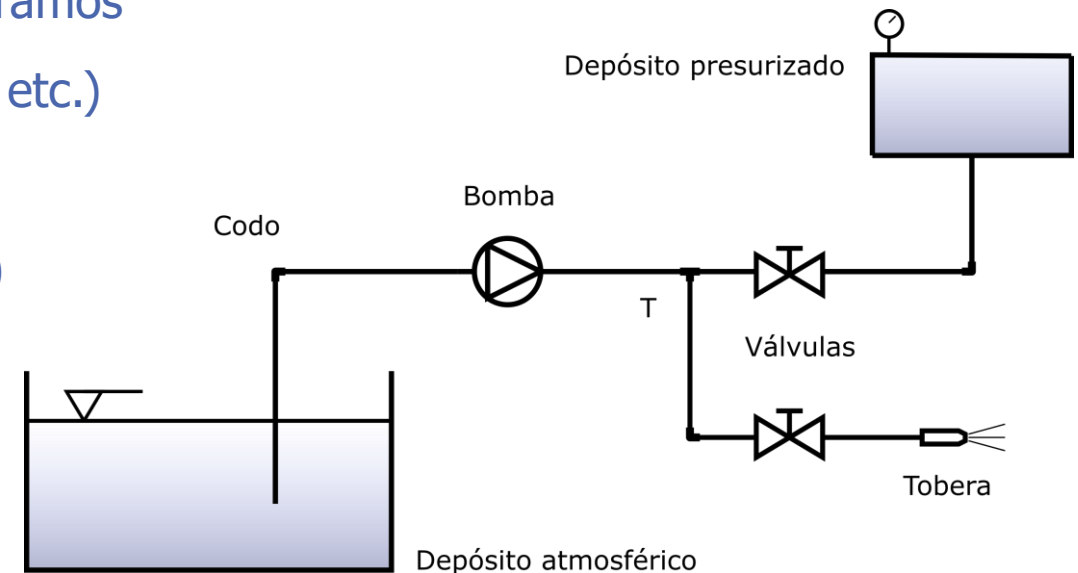


Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.

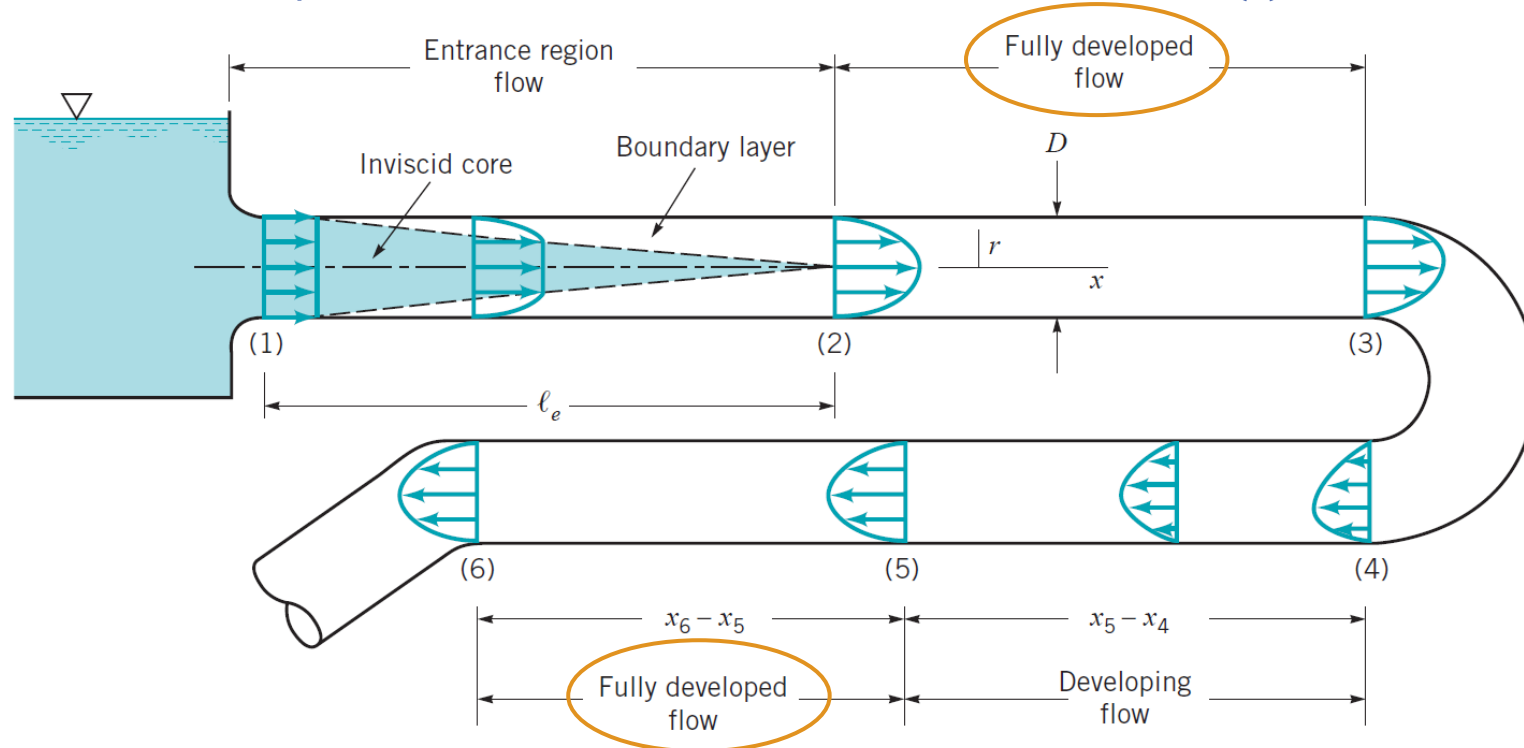
Los componentes típicos de una instalación son:

- Conductos o tuberías, también llamados líneas o tramos
- Elementos singulares (codos, cambios de sección, etc.)
- Elementos de regulación (válvulas)
- Depósitos (abiertos a la atmósfera o presurizados)
- Entradas y salidas
- **Máquinas de impulsión**



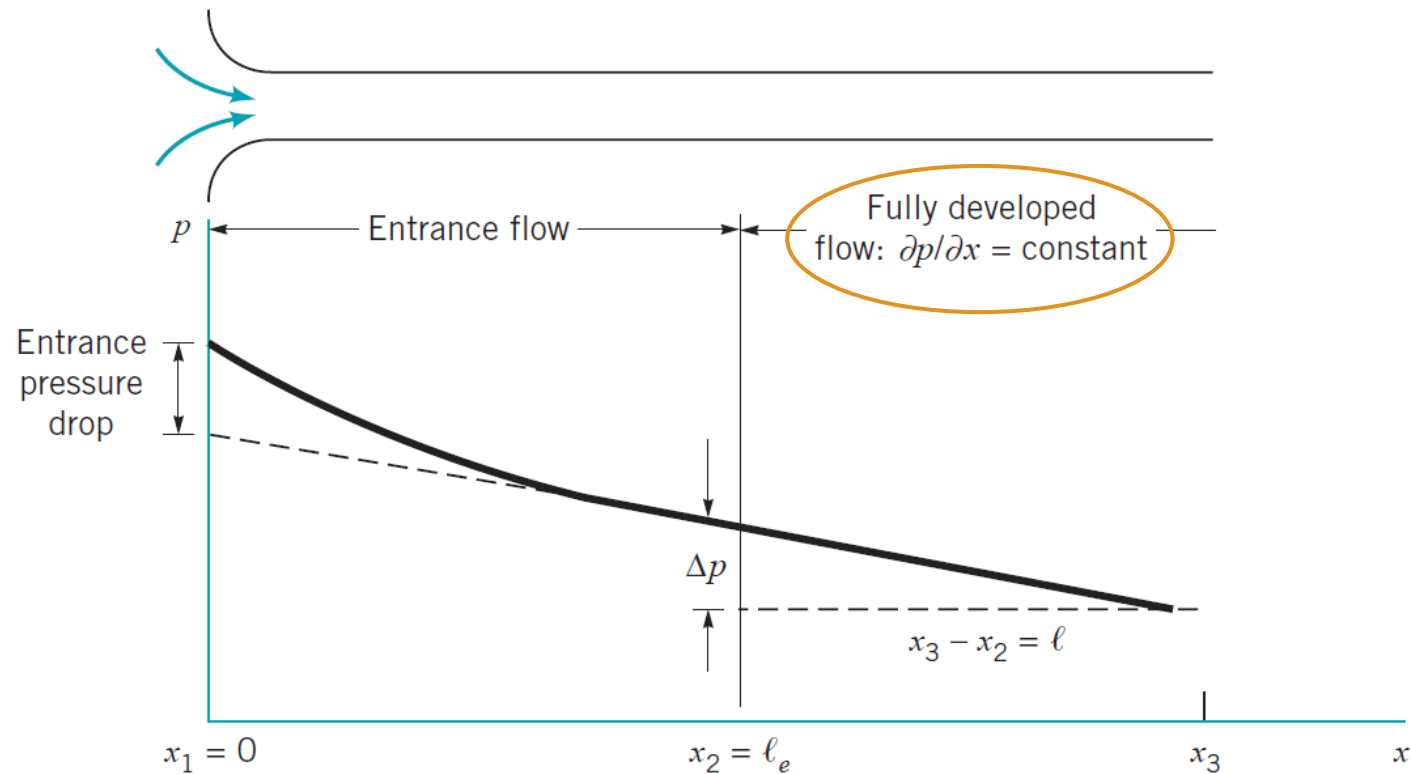
Flujo en conductos circulares: flujo desarrollado

- Condiciones:
 - Flujo estacionario, incompresible
 - Flujo unidireccional en coord. cilíndricas (r, θ, x) : $\vec{v} = (0, 0, u)$
 - Flujo **desarrollado**: El perfil de velocidad no cambia en x , es decir $u = u(r)$



Flujo en conductos circulares: flujo desarrollado

- Flujo desarrollado \Rightarrow Caída de presión constante: $\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \text{const.}$

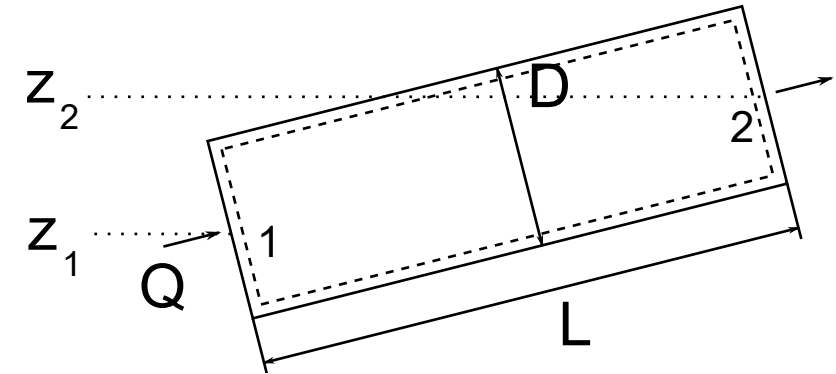


Flujo en conductos circulares: ecuación de la energía

Conservación de la energía cinética (considerando $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$):

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_{T1} + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{T2} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{T3} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{T4} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_{T5}$$

- T1=0: flujo estacionario
- T2= $\dot{M}(gz_2 - gz_1)$, la componente cinética se anula ya que flujo desarrollado
- T3= $Q(p_1 - p_2)$, la componente viscosa se anula ya que flujo desarrollado (= entrada/sal.)
- T4=0: flujo incompresible
- T5≠ 0: disipación viscosa



Recordatorio caudal másico: $\dot{M} = \rho Q$

$$\dot{M}(gz_2 - gz_1) = Q(p_2 - p_1) - \int_{VC} \phi_v dV$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_2 = H_f$$

$$H_f = \frac{1}{g\dot{M}} \int_{VC} \phi_v dV$$

Flujo en conductos circulares: ecuación de la energía

- Si el flujo es viscoso:

$$\overbrace{\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_2}^{\frac{\Delta p^*}{\rho g}} = H_f$$

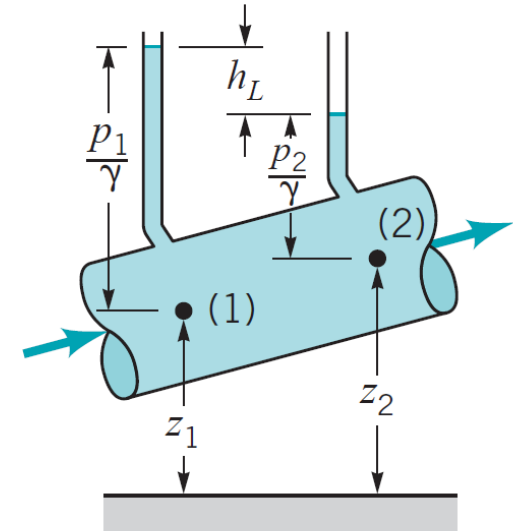
- Si el flujo es ideal:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_2 = 0$$

Observación: no aparece la velocidad ya que al ser flujo desarrollado es la misma en 1 y 2 y se cancela

Donde H_f es la disipación viscosa expresada en altura (p. ej. unidades de metros):

$$H_f = \frac{1}{g\dot{M}} \int_{VC} \phi_v dV$$



Flujo en conductos circulares: ecuación de momento lineal

Conservación del momento lineal en x (dirección longitudinal del conducto):

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho u dV}_{T1} + \underbrace{\int_{SC} \rho u [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{T2} = \underbrace{\int_{SC} -p n_x dS}_{T3} + \underbrace{\int_{SC} (\tilde{\tau}_v \cdot \hat{n})_x dS}_{T4} + \underbrace{\int_{VC} \rho f_{m,x} dV}_{T5}$$

- T1=0: flujo estacionario
- T2= 0, flujo desarrollado
- T3= $Sp_1 - Sp_2$
- T4= $-\int_{Sp} \tau_p dS$, integral de los esfuerzos viscosos en la pared (superficie de la pared: $S_p = \mathcal{P}L$)
- T5= $\rho g \sin\theta SL$, proyección en x de la fuerza de la gravedad en el volumen SL

$$0 = Sp_1 - Sp_2 - \int_{Sp} \tau_p dS + \rho g \sin\theta SL$$

Definiendo el esfuerzo promedio en la pared como: $\bar{\tau}_p = \frac{1}{S_p} \int_{S_p} \tau_p dS$ y haciendo $L \sin\theta = z_1 - z_2$

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_2 = \frac{\mathcal{P}L}{\rho g S} \bar{\tau}_p$$

Flujo en conductos circulares: comparación

- Energía:

$$\overbrace{\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_2}^{\frac{\Delta p^*}{\rho g}} = H_f$$

- Cantidad de movimiento:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z\right)_2 = \frac{\mathcal{P}L}{\rho g S} \bar{\tau}_p$$

Observación: Las pérdidas en el conducto son debidas a la disipación viscosa, y se pueden expresar en función del esfuerzo en la pared. El origen de las pérdidas es la fricción en la pared.

Iguando ambas:

$$H_f = \frac{\mathcal{P}L}{\rho g S} \bar{\tau}_p = \frac{4L}{\rho g D} \bar{\tau}_p,$$



¿Cuánto vale?

- Flujo laminar: podemos calcularlo analíticamente (Hagen-Poiseuille)
- Flujo de transición y turbulento: experimentalmente

Flujo laminar en conductos circulares (recordatorio)

Caso particular

- Condiciones:
 - Flujo estacionario, incompresible
 - Flujo unidireccional en coord. cilíndricas (r, θ, x) : $\vec{v} = (0, 0, u)$
 - Flujo desarrollado: $u = u(r)$
 - La presión motriz no es constante: $\frac{dp^*}{dx} \neq 0$
 - Condiciones de contorno paredes reposo: $u(r = R) = 0, \frac{du}{dr}(r = 0) = 0$
- La ecuación de cantidad de movimiento en dirección z (eje conducto) será:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

Recordatorio

Presión motriz: $p^* = p + \rho U$

- Integrando y aplicando las C.C. obtenemos:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2), \quad \frac{dp^*}{dx} = \frac{p^*_2 - p^*_1}{L} = -\frac{\Delta p^*}{L}$$

Observación: El movimiento del fluido en un conducto es debido a una diferencia de presión motriz (dif. de presión o de energía potencial) 2

Flujo laminar en conductos circulares

Del perfil de velocidad:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2)$$

podemos calcular:

- Esfuerzo en la pared:

$$\bar{\tau}_p = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2) \right) = \frac{D\Delta p^*}{4L}$$

con el que podemos comprobar que $H_f = \frac{4L}{\rho g D} \bar{\tau}_p = \frac{\Delta p^*}{\rho g}$

- Velocidad promedio en la sección:

$$V = \frac{1}{S} \int_S u dS = \frac{D^2 \Delta p^*}{32\mu L}$$

Observación: Para flujo laminar podemos expresar la caída de presión adimensionalizada con la presión dinámica como una función sencilla del Reynolds y la geometría.

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{64L}{\frac{\rho V D}{\mu} D} \equiv \frac{64L}{\text{Re} D}$$

$$H_f = \frac{\Delta p^*}{\rho g} = \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \frac{64}{\text{Re}}$$

¿Y si el flujo no es laminar?

Las pérdidas de carga se pueden expresar como una función de:

$$\Delta p^* = f(D, L, \varepsilon, V, \rho, \mu)$$

Rugosidad de la pared

Y a través del análisis dimensional (tema 4) podemos obtener los siguientes números:

$$\Pi_L = \frac{L}{D}, \quad \Pi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{D}, \quad \Pi_\mu = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{\text{Re}}, \quad \Pi_{\Delta p^*} = \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

dando lugar a la siguiente relación funcional entre números adimensionales:

$$\Pi_{\Delta p^*} = F(\Pi_L, \Pi_\varepsilon, \Pi_\mu) \Leftrightarrow \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V^2} = F\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \text{Re}\right)$$

Experimentalmente se observa que la dependencia con $\frac{L}{D}$ es lineal, así que podemos escribir:

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{L}{D} f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re}\right)$$

Y despejando $\frac{\Delta p^*}{\rho g}$:

$$H_f = \frac{\Delta p^*}{\rho g} = \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re}\right)$$

Factor de fricción, que depende de la rugosidad y del Reynolds -> Diagrama de Moody

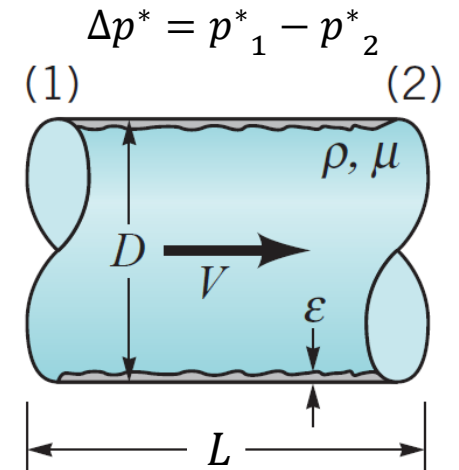


Diagrama de Moody

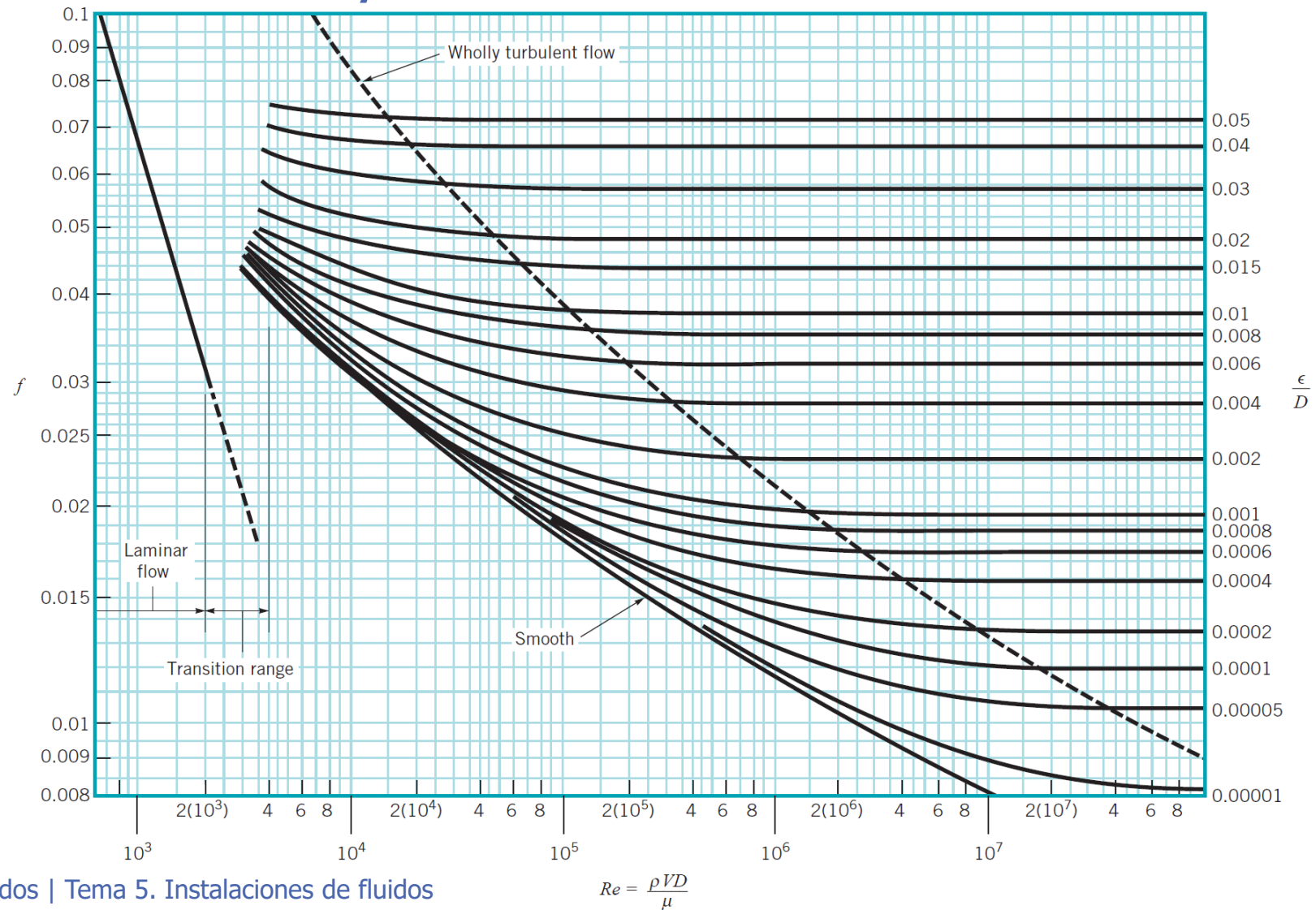


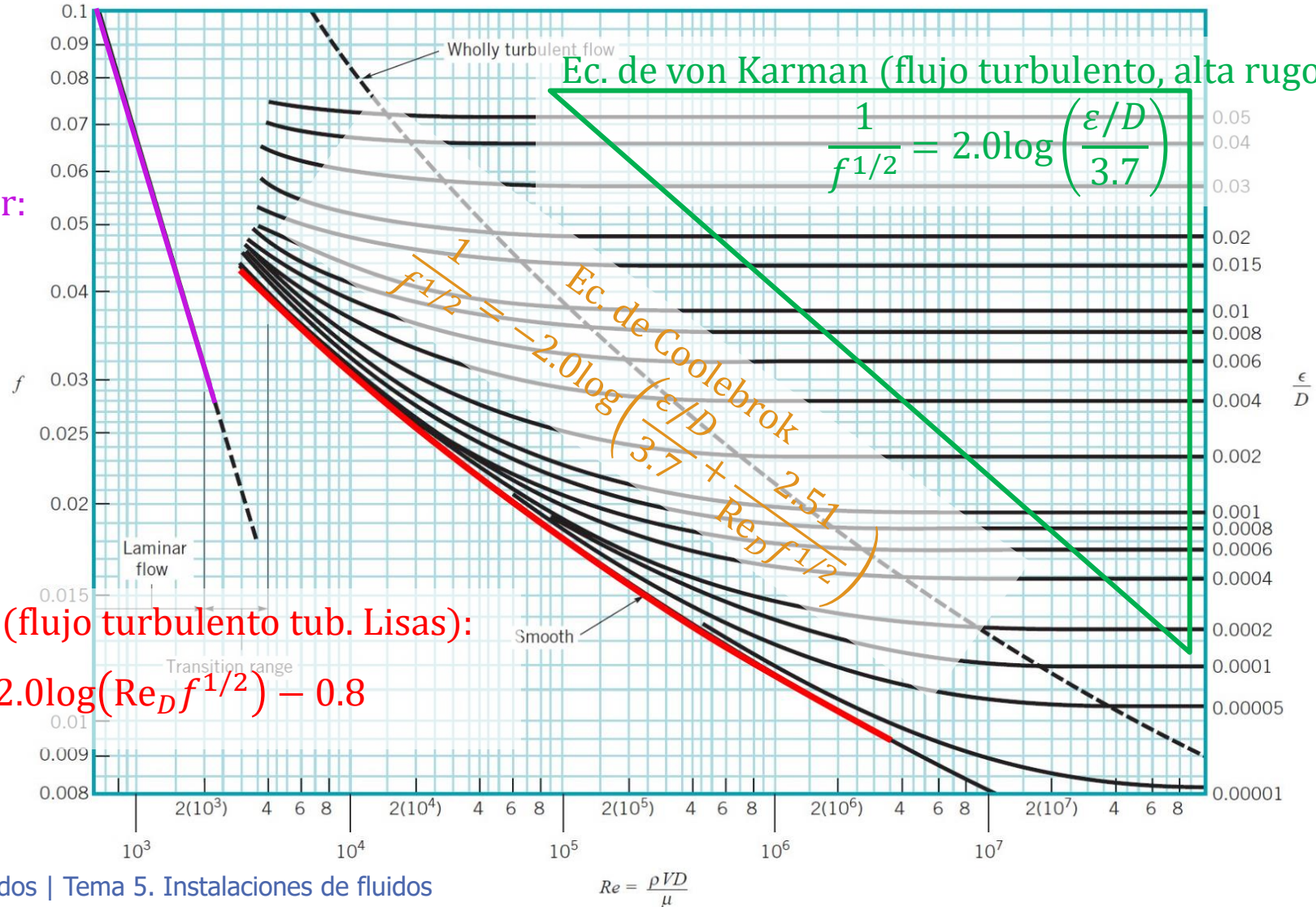
Diagrama de Moody

Flujo laminar:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Ec. de Prandtl (flujo turbulento tub. Lisas):

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2.0 \log(Re_D f^{1/2}) - 0.8$$



Resumen – Muy importante

La ecuación de conservación de la energía mecánica en un conducto es:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_2 = H_f$$

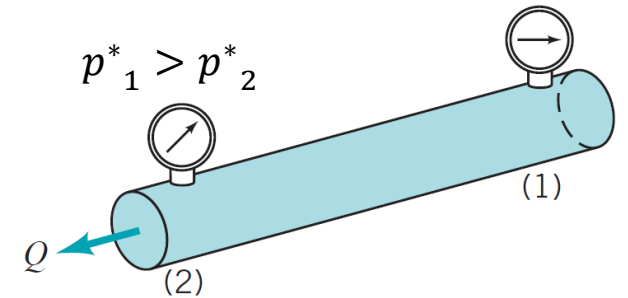
donde $H_f = \frac{\Delta p^*}{\rho g}$ es la pérdida de carga (caída de presión) expresada como una altura energética. Para una tubería de longitud L y diámetro D , con un flujo circulando a velocidad promedio $V = Q/S$, se calcula:

$$H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

con $f = f\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$ el factor de fricción que obtenemos del diagrama de Moody, o usando:

$$f = \frac{64}{Re}$$

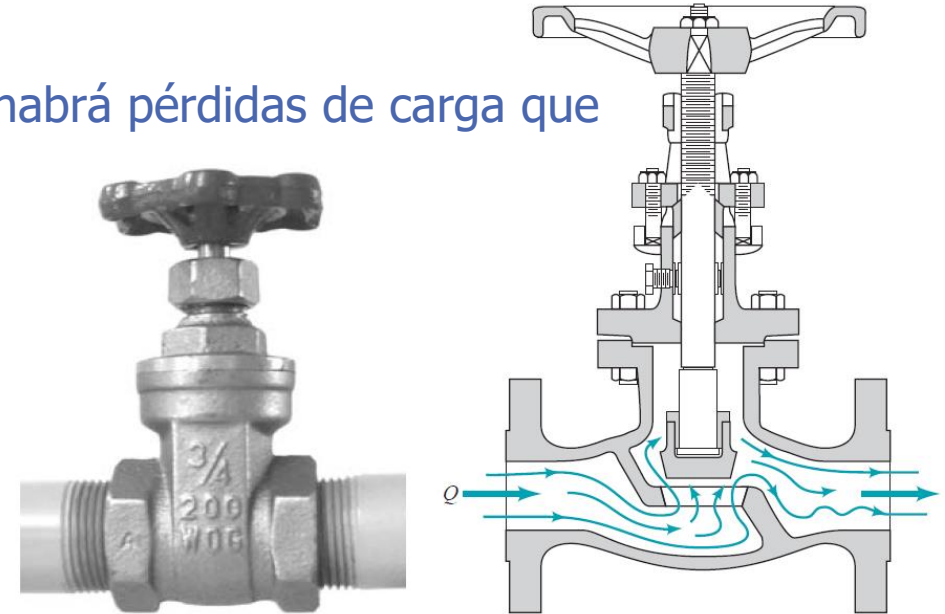
$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D f^{1/2}} \right)$$



Pérdidas singulares (menores)

En las instalaciones existen elementos singulares en los que habrá pérdidas de carga que llamaremos pérdidas menores. Estas aparecen en:

- Válvulas
- Codos
- Contracciones/expansiones
- Entradas/salidas
- Etc...

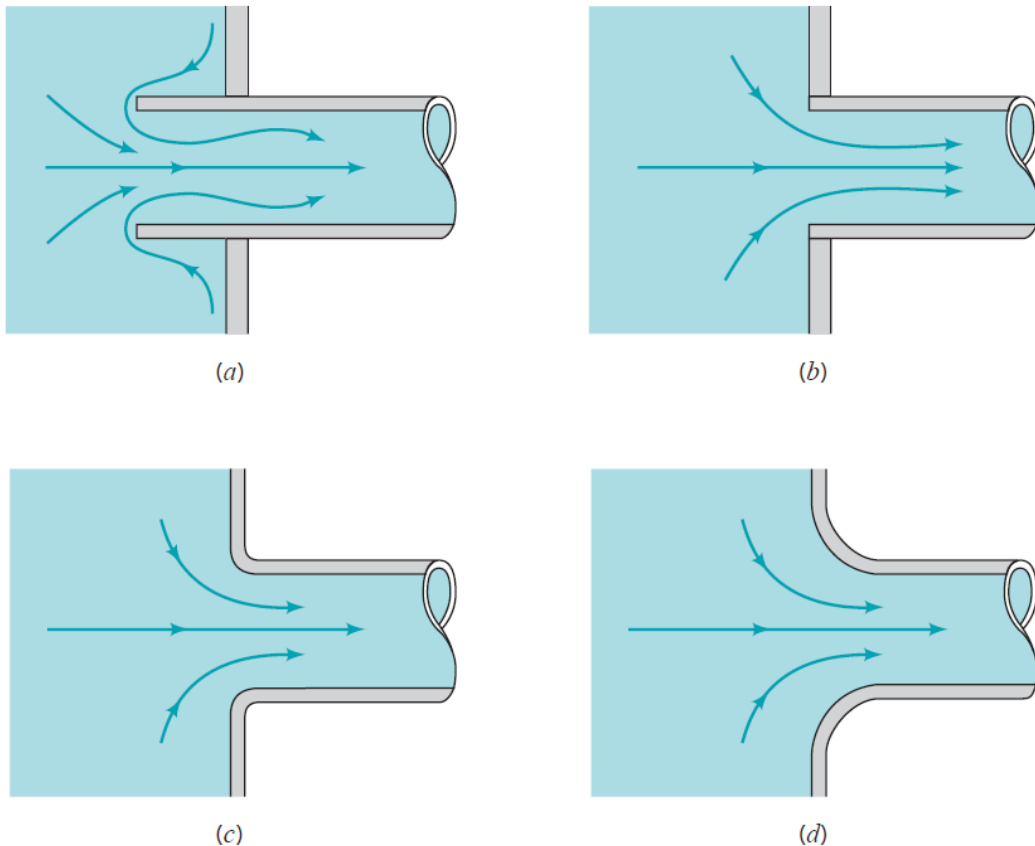


En un elemento singular con un flujo entrando con velocidad promedio $V = Q/S$, la pérdida de carga menor se calcula como:

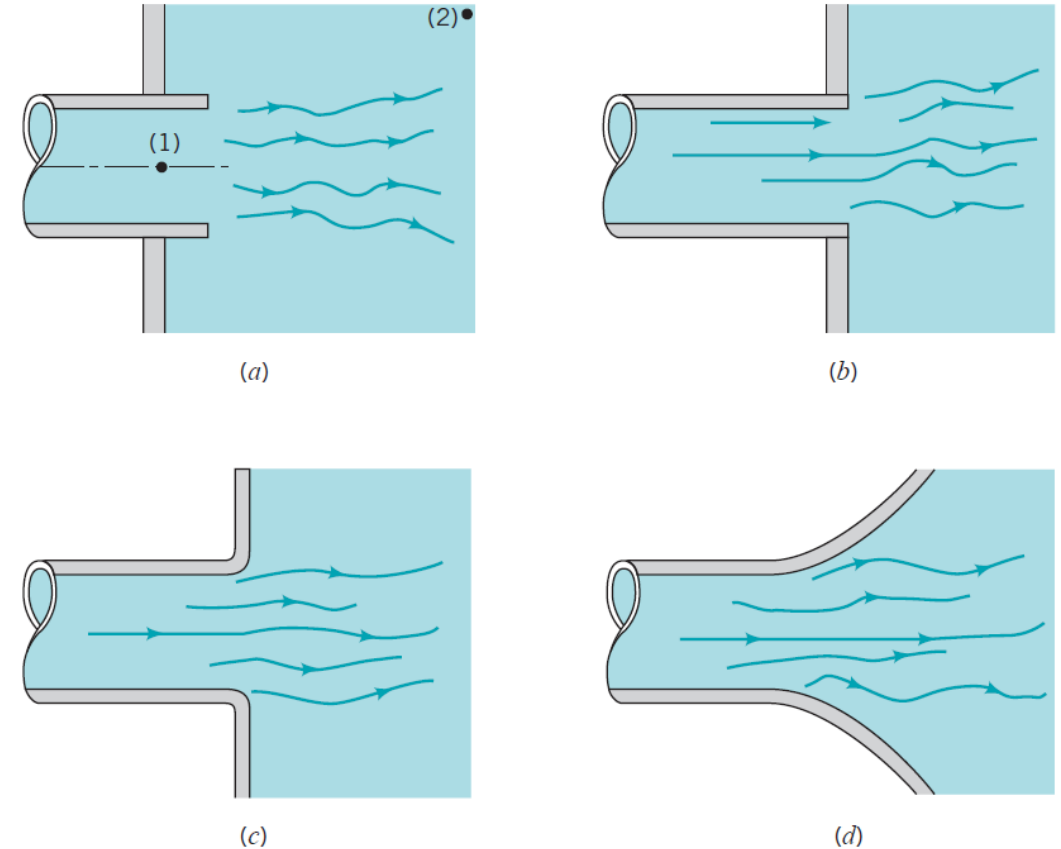
$$H_m = k_m \frac{V^2}{2g}$$

con k_m un valor proporcionado por el fabricante del elemento (tabulado)

Pérdidas singulares (menores)

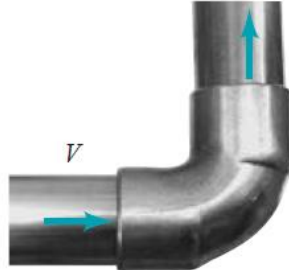

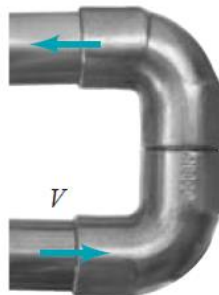


■ **FIGURE 8.22** Entrance flow conditions and loss coefficient (Refs. 28, 29). (a) Reentrant, $K_L = 0.8$, (b) sharp-edged, $K_L = 0.5$, (c) slightly rounded, $K_L = 0.2$ (see Fig. 8.24), (d) well-rounded, $K_L = 0.04$ (see Fig. 8.24).



■ **FIGURE 8.25** Exit flow conditions and loss coefficient. (a) Reentrant, $K_L = 1.0$, (b) sharp-edged, $K_L = 1.0$, (c) slightly rounded, $K_L = 1.0$, (d) well-rounded, $K_L = 1.0$.

Pérdidas singulares (menores)

Component	K_L	
a. Elbows		
Regular 90°, flanged	0.3	
Regular 90°, threaded	1.5	
Long radius 90°, flanged	0.2	
Long radius 90°, threaded	0.7	
Long radius 45°, flanged	0.2	
Regular 45°, threaded	0.4	
b. 180° return bends		
180° return bend, flanged	0.2	
180° return bend, threaded	1.5	
c. Tees		
Line flow, flanged	0.2	
Line flow, threaded	0.9	
Branch flow, flanged	1.0	
Branch flow, threaded	2.0	

Pérdidas totales en una instalación

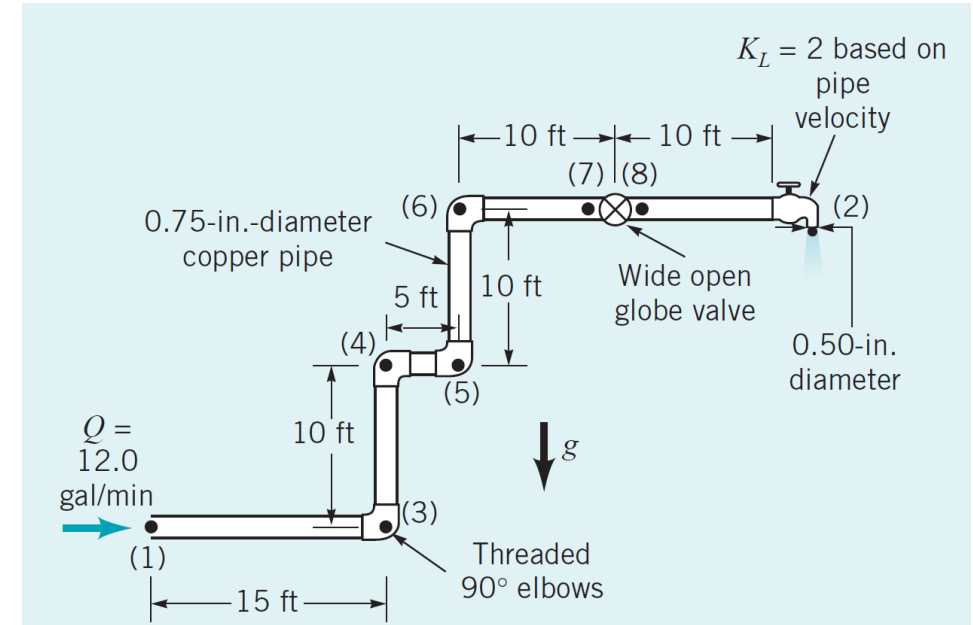
Las pérdidas totales se calcularán como la suma de:

- Pérdidas lineales totales en conductos:

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

- Pérdidas menores en N elementos, $j = 1, \dots, N$:

$$H_{m,j} = k_{m,j} \frac{V^2}{2g}$$



Es decir:

$$H_f = H_L + \sum_{j=1}^N H_{m,j} = \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^N k_{m,j} \right) \frac{V^2}{2g} = \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^N k_{m,j} \right) \frac{Q^2}{2gS^2}$$

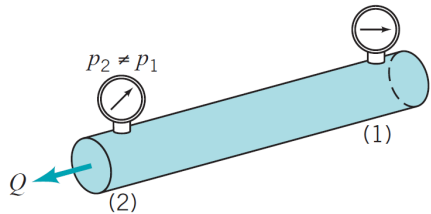
Longitud total de tuberías

Ejemplo:

- Tubería: 60 ft
- N=6 elementos singulares
 - 4 codos
 - 1 válvula
 - 1 grifo salida

Recordatorio de la clase anterior

Flujo en un conducto
1D y desarrollado $\frac{dp}{dx} = cte$



La variación de la presión motriz entre 1 y 2 es debida a la disipación viscosa

$$\frac{\Delta p^*}{\rho g} \left(\left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_2 \right) = H_f$$

$$H_f = \frac{1}{g \dot{m}} \int_{VC} \phi_v dV$$

Altura de pérdidas

$$H_f = \frac{\mathcal{P}L}{\rho g S} \bar{\tau}_p$$

Por analogía con ec. momento lineal

Flujo laminar: analítico

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2), \quad \bar{\tau}_p = \mu \frac{du}{dr}$$

$$H_f = \frac{4L}{\rho g D} \bar{\tau}_p = \frac{L V^2}{D 2g} \frac{64}{Re}$$

Flujo turbulento: análisis dimensional

$$\Delta p^* = f(D, L, \varepsilon, V, \rho, \mu) \Leftrightarrow \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V^2} = F\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$

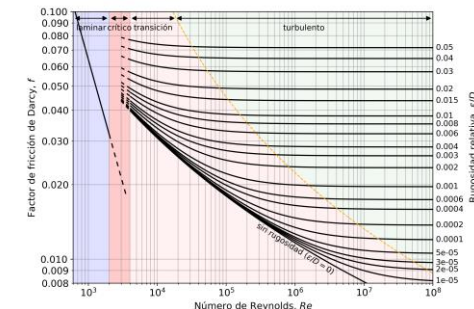
$$H_f = \frac{\Delta p^*}{\rho g} = \frac{L V^2}{D 2g} f\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$

$$H_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

Factor de fricción

$$f = f\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$



CONTENIDOS

- Flujo en conductos
 - Ecuación de conservación del momento lineal y de la energía en un conducto
 - Flujo laminar en conductos: ley de Poiseuille
 - Flujo turbulento en conductos
 - Pérdidas de carga lineales y singulares
- Instalaciones de fluidos
 - Introducción
 - Balance energético en una instalación con una turbomáquina
 - Curva de la bomba y curva de la instalación.
 - Punto de operación
 - Cálculo de instalaciones de fluidos. Instalaciones en serie y en paralelo
- Introducción al flujo en canales

Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.



Centro de bombeo de agua para consumo humano

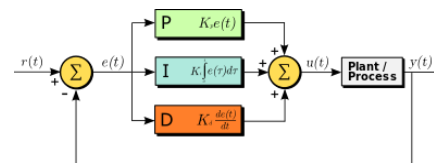
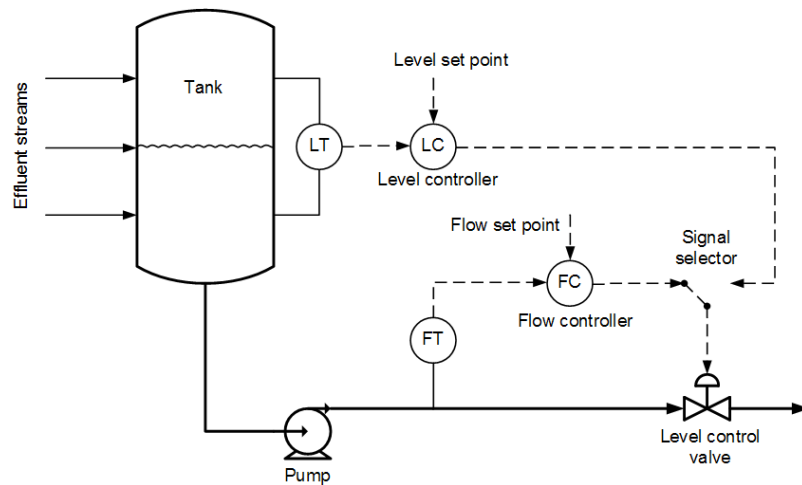


Industria química

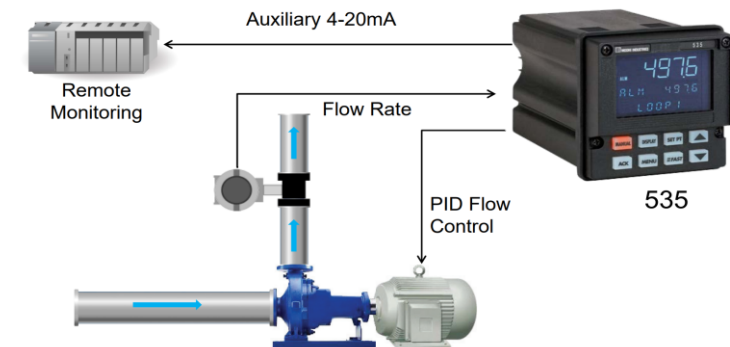
Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.

Interés para el grado: sistemas electrónicos de control de procesos industriales que involucren instalaciones de fluidos



1/4 DIN PID Controller - Flow Control

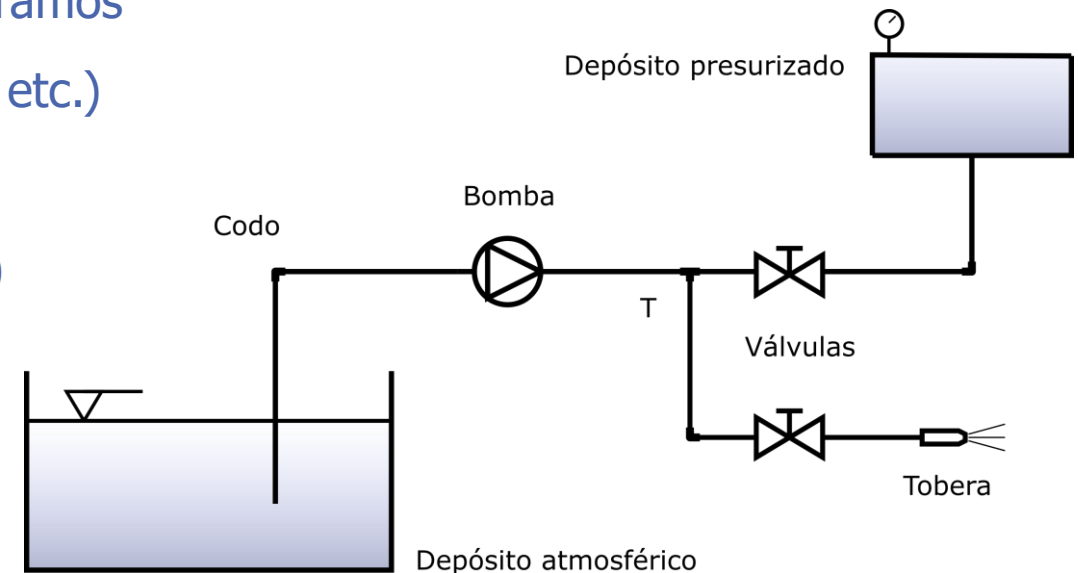


Introducción a las instalaciones de fluidos

Denominamos **instalaciones de fluidos** al conjunto de conductos, elementos singulares, máquinas de impulsión y otros elementos cuya finalidad es el **transporte y distribución de fluidos**.

Los componentes típicos de una instalación son:

- Conductos o tuberías, también llamados líneas o tramos
- Elementos singulares (codos, cambios de sección, etc.)
- Elementos de regulación (válvulas)
- Depósitos (abiertos a la atmósfera o presurizados)
- Entradas y salidas
- **Máquinas de impulsión**



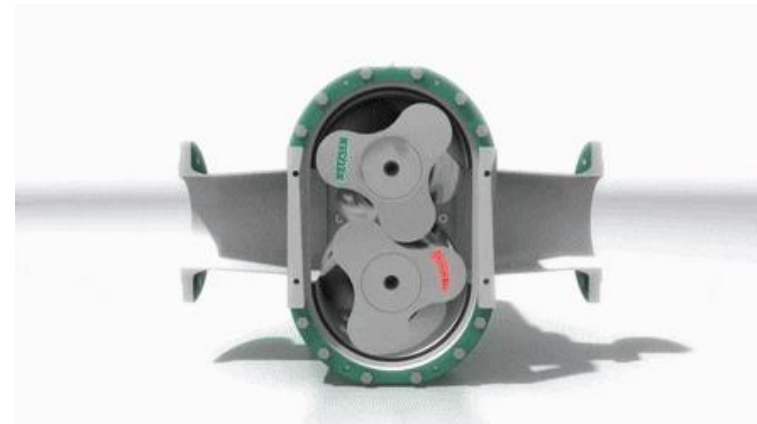
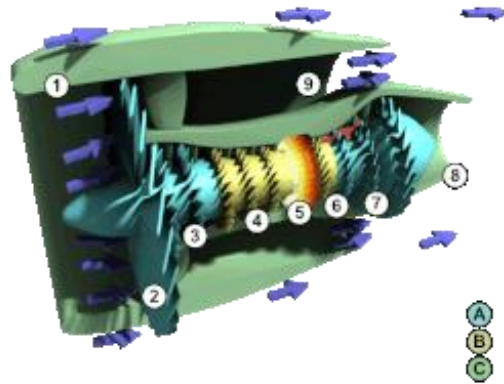
Introducción a las instalaciones de fluidos

Las **máquinas de impulsión** son elementos que proporcionan energía mecánica al fluido para vencer los gradientes de presión adversos y las pérdidas por disipación viscosa

Se engloban en dos categorías:

- Turbomáquinas: son de flujo continuo
 - Turbomáquinas térmicas: consideran flujo compresible (soplantes y compresores)
 - Turbomáquinas hidráulicas: consideran flujo incompresible (bombas y ventiladores)
- Máquinas de desplazamiento positivo: reciprocantes o rotativas

Las que vamos a considerar en este tema



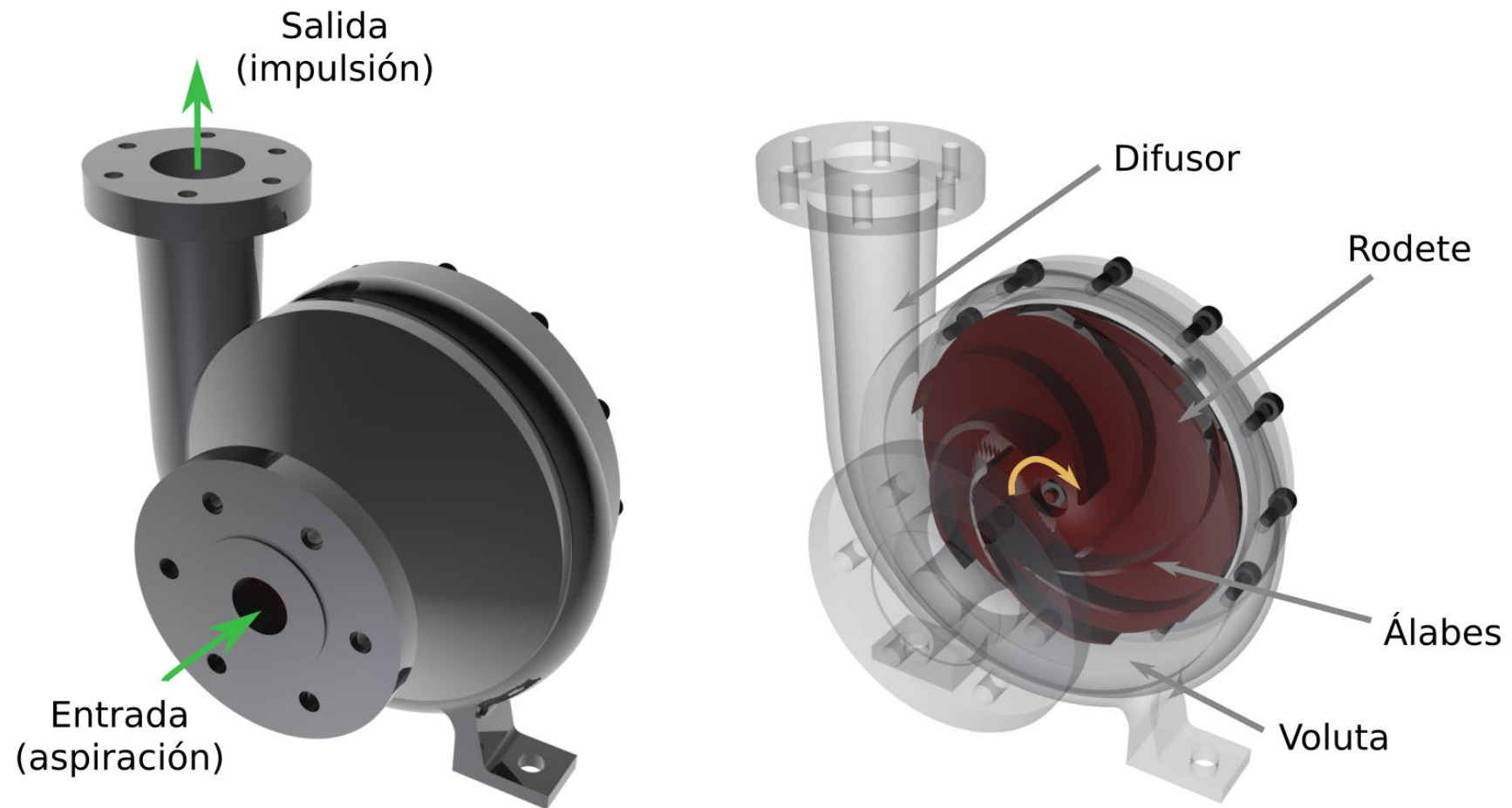
Bombas y ventiladores

Vamos a considerar:

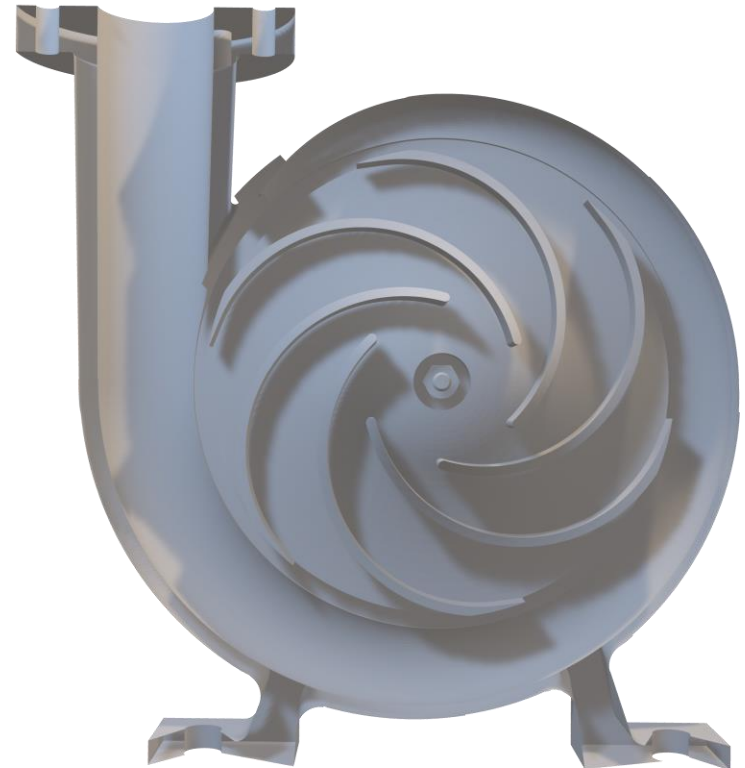
- Bombas: impulsan líquidos en instalaciones de bombeo
- Ventiladores: impulsan aire en instalaciones de ventilación



Componentes de una bomba hidráulica



Componentes de una bomba hidráulica

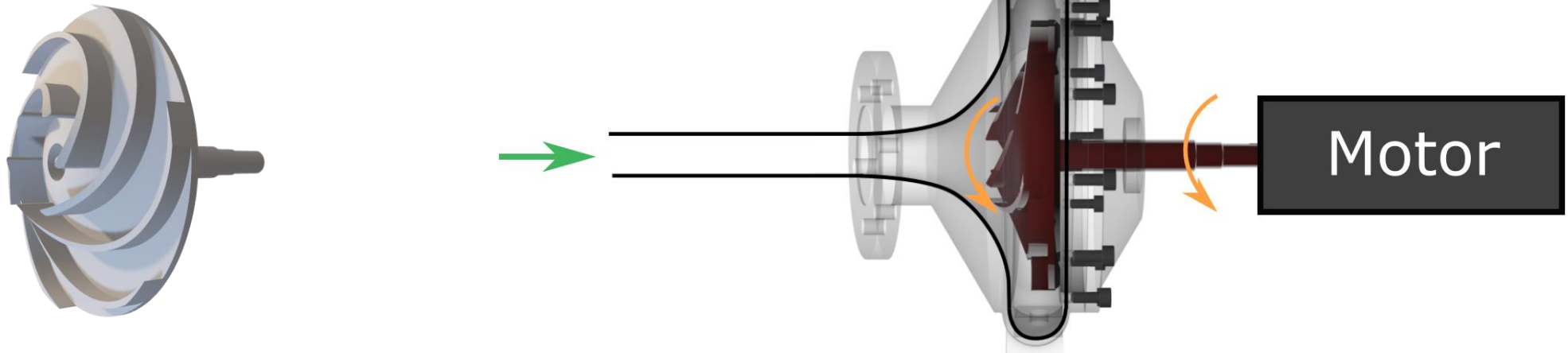


Principio de funcionamiento de una bomba hidráulica

La **transferencia de energía** al fluido se producen el rodete, mediante la interacción superficial entre los álabes y el fluido:

$$\dot{W}_{maquina \rightarrow fluido} = \int_{S_a} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS$$

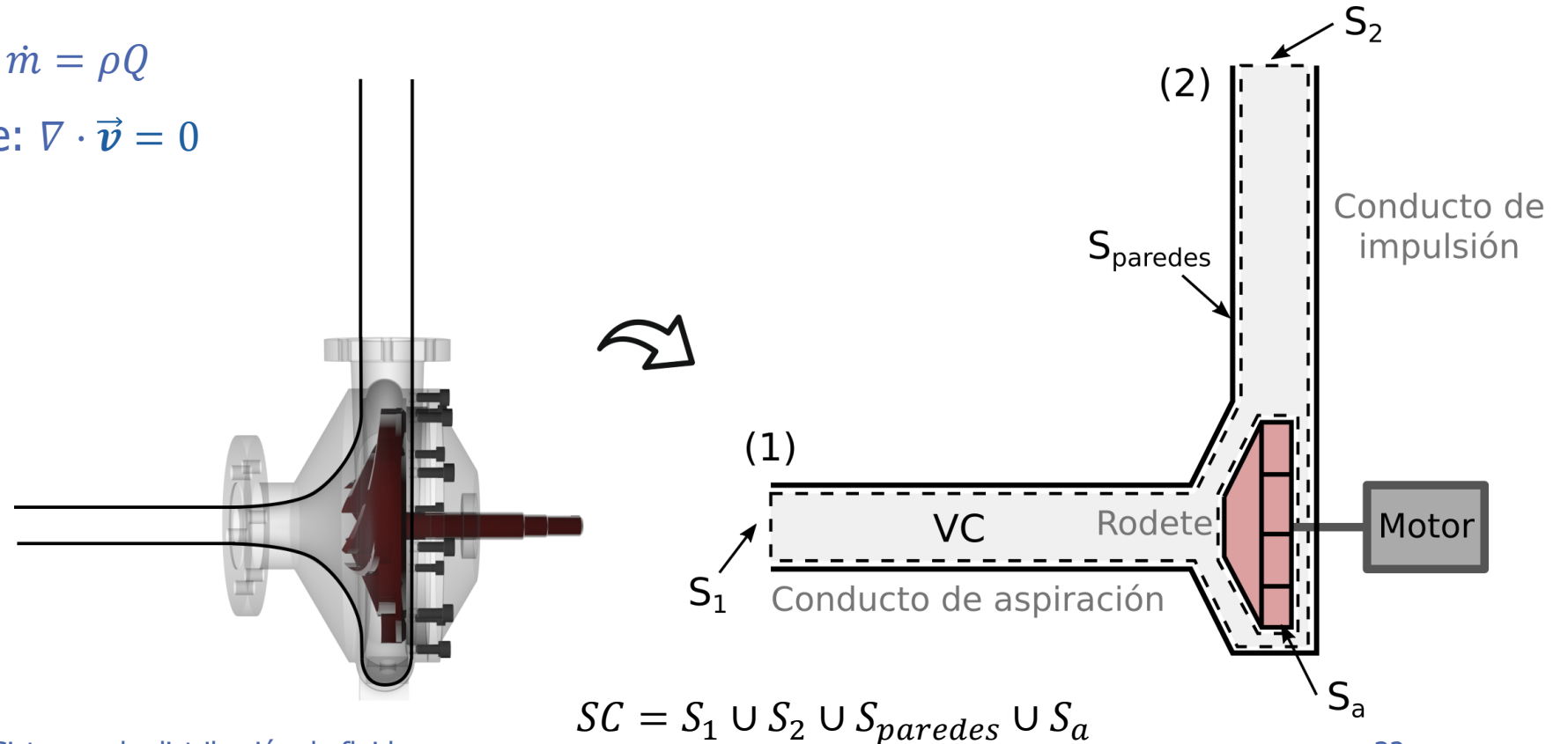
$$F_{maquina \rightarrow fluido} = \int_{S_a} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) dS$$



Balance de energía en instalaciones con máquinas

Para plantear el balance de energía en instalaciones de bombeo, vamos a considerar como VC una instalación compuesta por dos conductos y una bomba como se muestra en la figura, con las siguientes hipótesis:

- Flujo estacionario: $\dot{m} = \rho Q$
- Flujo incompresible: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$



Balance de masa en el VC

Conservación de la masa:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n} dS}_{II} = 0$$

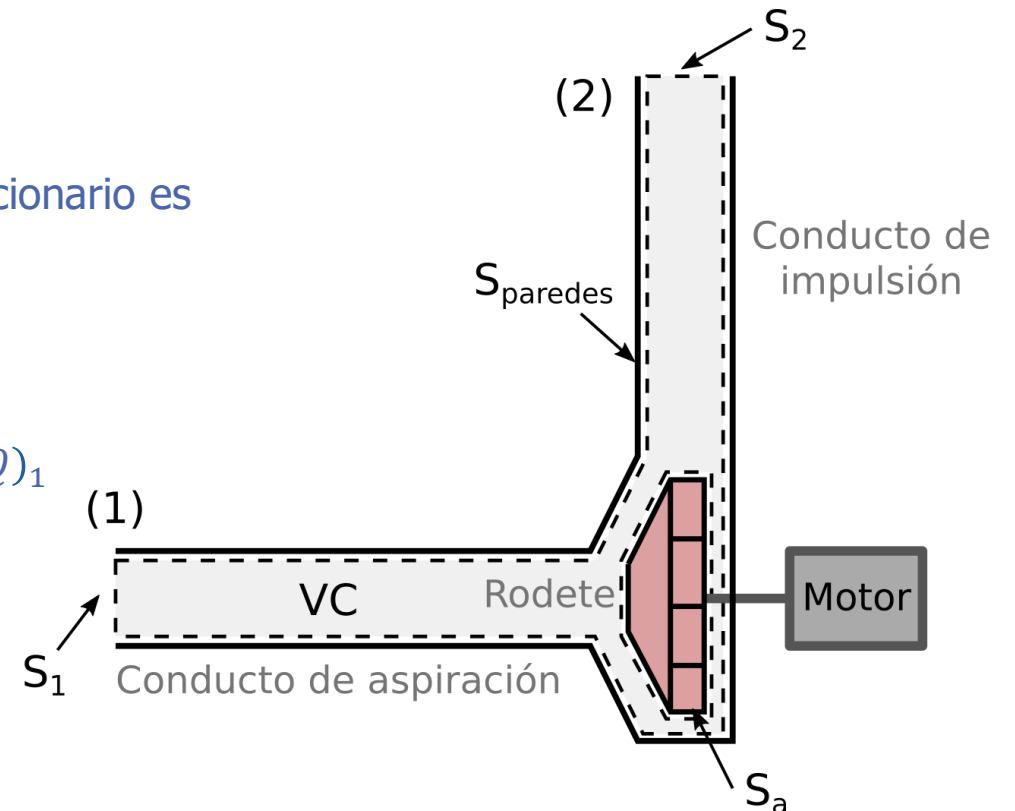
- I: Es la variación temporal de la masa en el VC, que en estacionario es

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = 0$$

- II: Son los flujos máscicos de entrada y salida

$$\int_{SC} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} \rho \vec{v} dS - \int_{S_1} \rho \vec{v} dS = (\rho Q)_2 - (\rho Q)_1$$

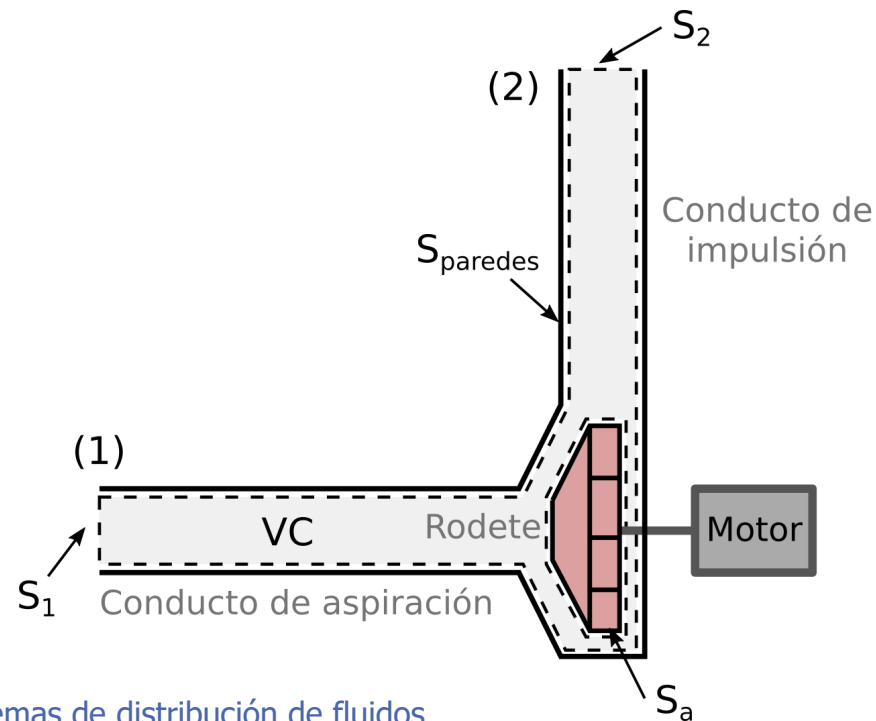
$$\begin{aligned} \dot{m}_2 &= \dot{m}_1 \\ Q_2 &= Q_1 \end{aligned}$$



Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \Phi_v dV}_V$$



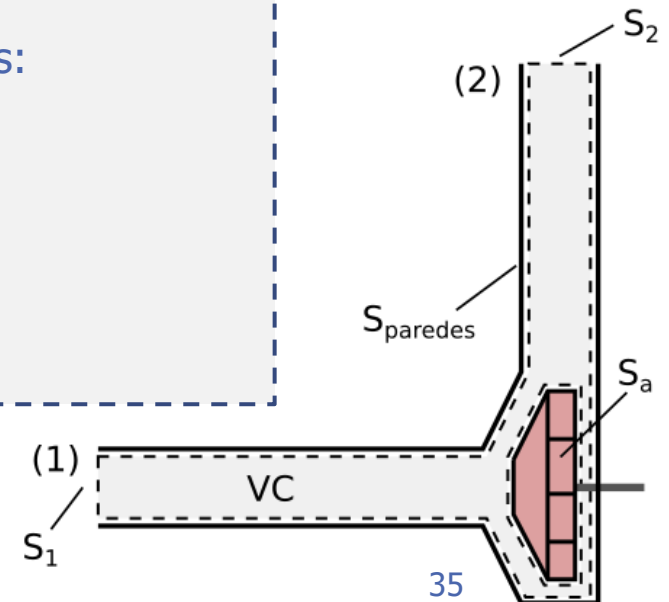
Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

I: Es la variación temporal de la energía en el VC, que en estacionario es:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV = 0$$



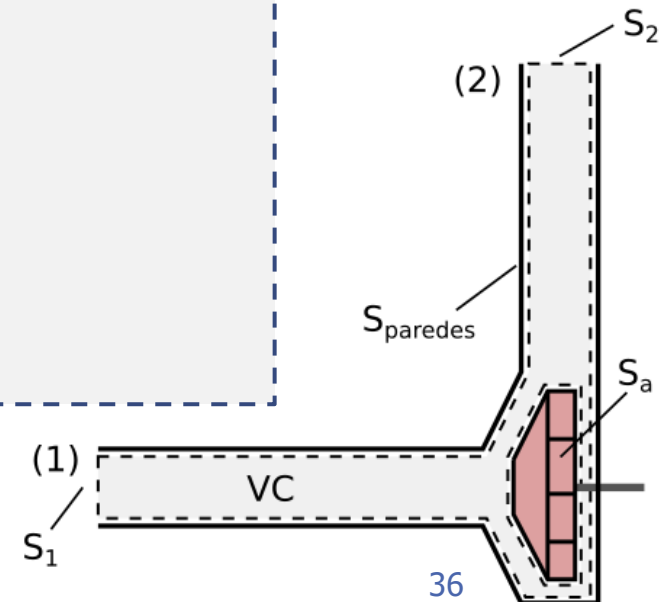
Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

II: Son los flujos entrada y salida de energía:

$$\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS = \rho Q \left[\left(\frac{V^2}{2} + gz \right)_2 - \left(\frac{V^2}{2} + gz \right)_1 \right]$$



Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

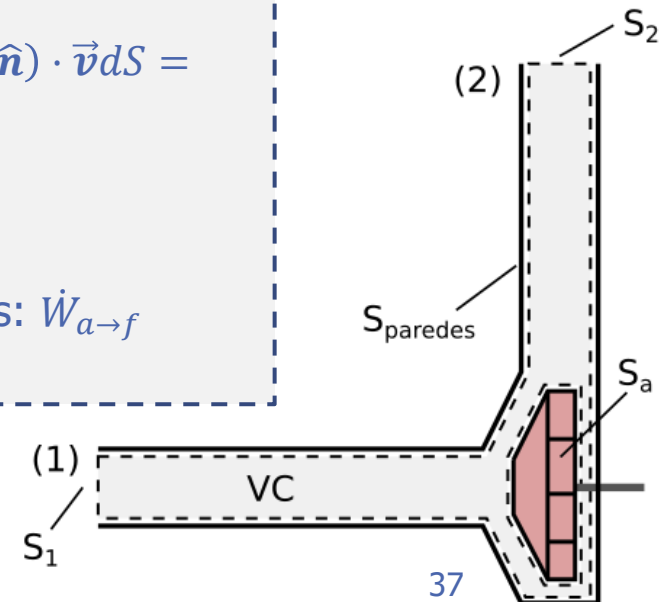
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

III: Es la potencia de las fuerzas de superficie sobre el fluido

$$\begin{aligned} \int_{SC} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS &= \int_{S_1} -p\vec{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S_2} -p\vec{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S_a} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS = \\ &= (pQ)_2 - (pQ)_1 + \dot{W}_{a \rightarrow f} \end{aligned}$$

Donde distinguimos:

- Potencia asociada al *trabajo de flujo*: $(pQ)_2 - (pQ)_1$
- Potencia asociada al *trabajo externo*, transferida al fluido por los álabes: $\dot{W}_{a \rightarrow f}$



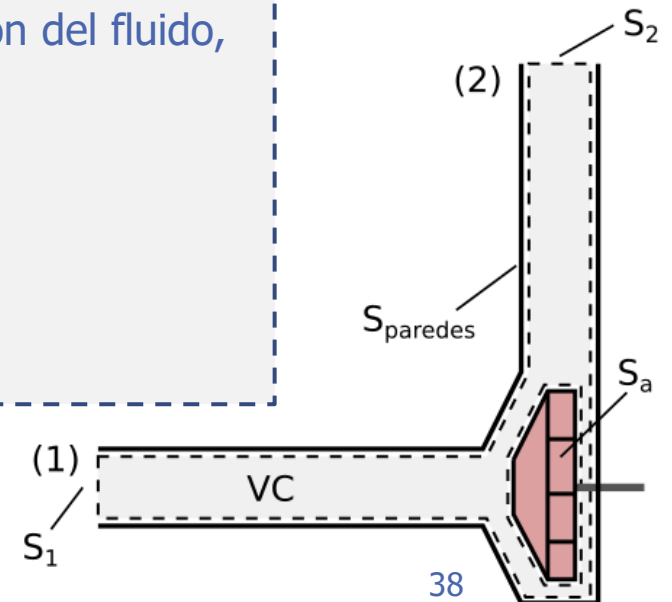
Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

IV: Es la potencia de las fuerzas de presión en la expansión o compresión del fluido, que en el caso de flujo incompresible es nula

$$\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV = 0$$



Balance de energía mecánica en el VC

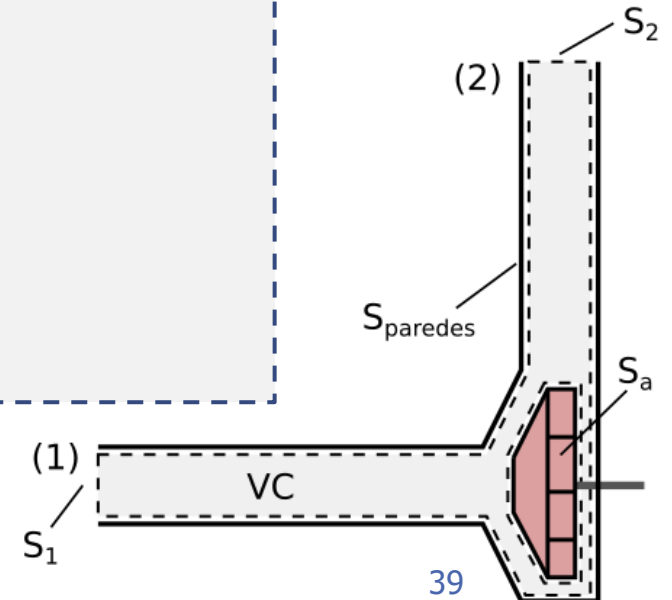
Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

V: Es la potencia de disipación viscosa

$$\int_{VC} \phi_v dV \geq 0$$

donde $\phi_v = \tilde{\tau}_v : \vec{v}$ es la función de disipación de Rayleigh



Balance de energía mecánica en el VC

Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

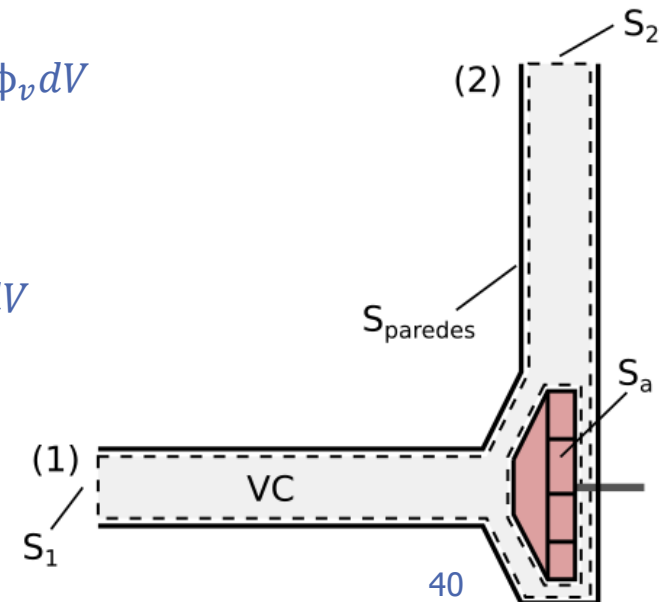
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \phi_v dV}_V$$

Sustituyendo los resultados anteriores ($I + II = III + IV + V$) se obtiene

$$\rho Q \left(\frac{V^2}{2} + gz \right)_2 - \rho Q \left(\frac{V^2}{2} + gz \right)_1 = (pQ)_2 - (pQ)_1 + \dot{W}_{a \rightarrow f} - \int_{VC} \phi_v dV$$

Y reordenando:

$$\rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_2 - \rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_1 = \dot{W}_{a \rightarrow f} - \int_{VC} \phi_v dV$$



Balance de energía mecánica en el VC

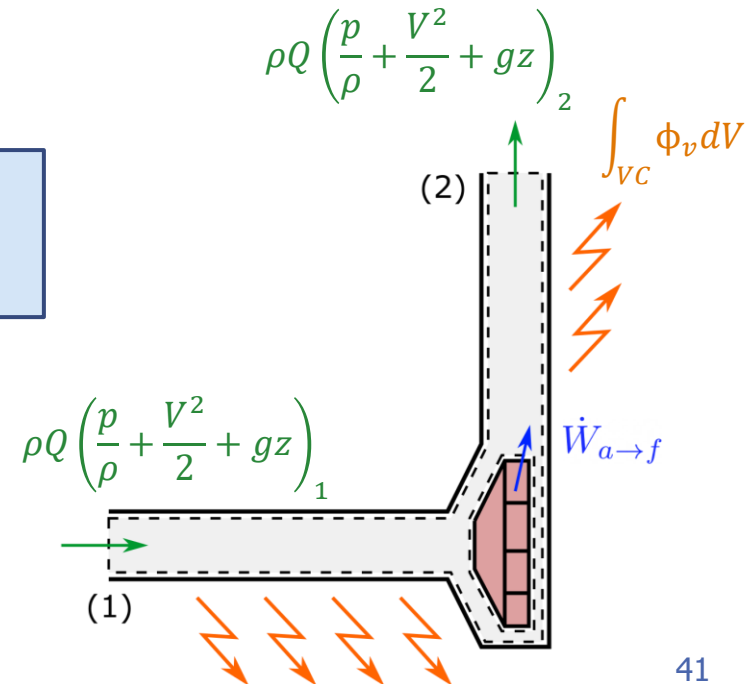
Conservación de la energía mecánica, con $\vec{f}_m = -\nabla(gz)$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV}_I + \underbrace{\int_{SC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS}_{II} = \underbrace{\int_{SC} (-p\vec{n} + \vec{\tau}_v \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} dS}_{III} + \underbrace{\int_{VC} p \nabla \cdot \vec{v} dV}_{IV} - \underbrace{\int_{VC} \Phi_v dV}_V$$

Se obtiene

$$\rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_2 - \rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_1 = \dot{W}_{a \rightarrow f} - \int_{VC} \Phi_v dV$$

La tasa de incremento de energía entre la salida (2) y la entrada (1) es igual a la potencia proporcionada por la máquina menos la potencia de disipación viscosa



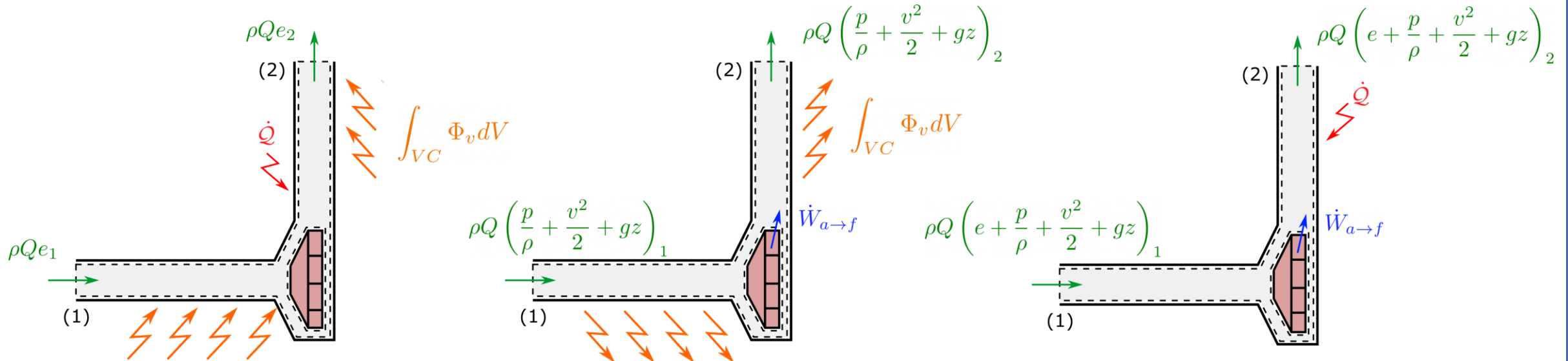
Resumen de las ecuaciones de la energía obtenidas

E. Interna: $\rho Q e_2 - \rho Q e_1 = \int_{VC} \Phi_v dV + \dot{Q}$

E. Mecánica: $\rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_2 - \rho Q \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_1 = \dot{W}_{a \rightarrow f} - \int_{VC} \Phi_v dV$

E. Total: $\rho Q \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_2 - \rho Q \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_1 = \dot{W}_{a \rightarrow f} + \dot{Q}$

Ecuación	Energía específica	Fuentes de energía		
		Calor	Impulsión	Disipación
Interna	e	\dot{Q}	0	$\int_{VC} \Phi_v dV$
Mecánica	$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$	0	$\dot{W}_{a \rightarrow f}$	$-\int_{VC} \Phi_v dV$
Total	$e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$	\dot{Q}	$\dot{W}_{a \rightarrow f}$	0



Ecuación de la instalación

Si dividimos la **ecuación de la energía mecánica** entre $\rho g Q$ se obtiene la misma ecuación en términos de alturas energéticas :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = \frac{\dot{W}_{a \rightarrow f}}{\rho g Q} - \frac{\int_{VC} \Phi_v dV}{\rho g Q}$$

Ecuación de la instalación

Si dividimos la **ecuación de la energía mecánica** entre $\rho g Q$ se obtiene la misma ecuación en términos de alturas energéticas :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = \frac{\dot{W}_{a \rightarrow f}}{\rho g Q} - \frac{\int_{VC} \Phi_v dV}{\rho g Q}$$

Altura energética a la salida:

$$H_2 = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

Altura energética a la entrada:

$$H_1 = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1$$

Ecuación de la instalación

Si dividimos la **ecuación de la energía mecánica** entre $\rho g Q$ se obtiene la misma ecuación en términos de alturas energéticas :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = \frac{\dot{W}_{a \rightarrow f}}{\rho g Q} - \frac{\int_{VC} \Phi_v dV}{\rho g Q}$$

Altura energética a la salida:

$$H_2 = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

Altura energética a la entrada:

$$H_1 = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1$$

Altura energética de pérdidas:

$$H_f = \frac{\int_{VC} \Phi_v dV}{\rho g Q}$$

Altura energética de la bomba:

$$H_B = \frac{\dot{W}_{a \rightarrow f}}{\rho g Q}$$

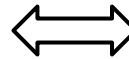
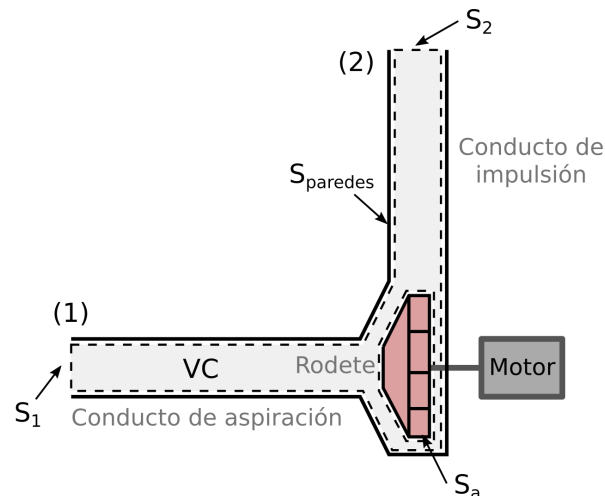
Ecuación de la instalación

La **ecuación de la instalación** es la ecuación de la energía mecánica en términos de alturas:

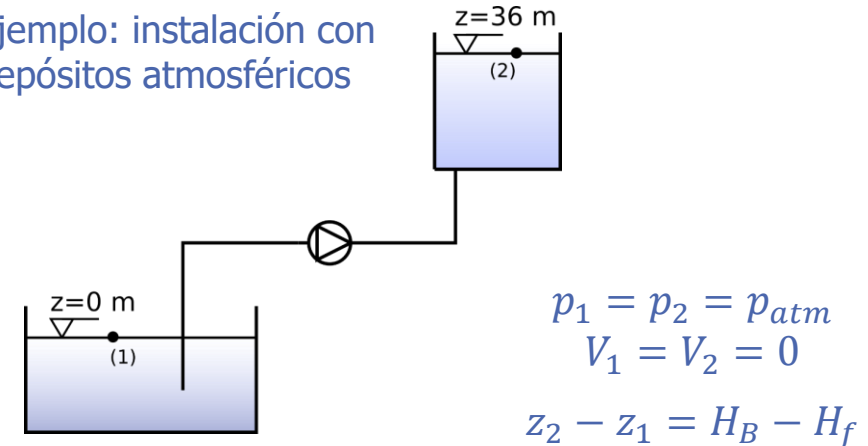
$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = H_B - H_f$$

$$H_f = \frac{\int_{VC} \phi_v dV}{\rho g Q}$$
$$H_B = \frac{W_{a \rightarrow f}}{\rho g Q}$$

La diferencia de alturas energéticas entre la salida (2) y la entrada (1) es igual a la diferencia entre la altura de la bomba y la altura de pérdidas



Ejemplo: instalación con depósitos atmosféricos



Ecuación de la instalación

Pero... cómo utilizamos esta ecuación para “calcular” una instalación?

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = H_B - H_f$$

$$H_B = H_B(Q)$$

$$H_f = H_f(Q)$$

Calcular la instalación significa resolver la ecuación anterior, es decir, **obtener el valor de caudal Q que satisface la ecuación**

Ecuación de la instalación

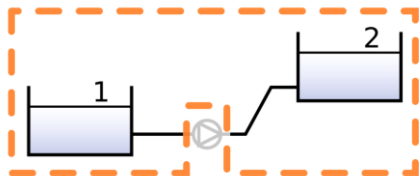
Vamos a reordenar la ecuación de la instalación de la siguiente manera:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f(Q) = H_B(Q)$$

Ecuación de la instalación

Vamos a reordenar la ecuación de la instalación de la siguiente manera:

$$\underbrace{\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f(Q)}_{H_I(Q)} = H_B(Q)$$



$H_I(Q)$

Altura de la instalación:

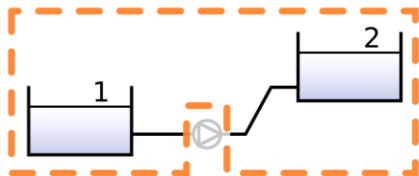
energía requerida para mover Q

Depende de la instalación (entrada, salida, conductos, elementos singulares...)

Ecuación de la instalación

Vamos a reordenar la ecuación de la instalación de la siguiente manera:

$$\underbrace{\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f(Q)}_{H_I(Q)} = \underbrace{H_B(Q)}$$



$H_I(Q)$
Altura de la instalación:
energía requerida para mover Q
Depende de la instalación (entrada, salida,
conductos, elementos singulares...)

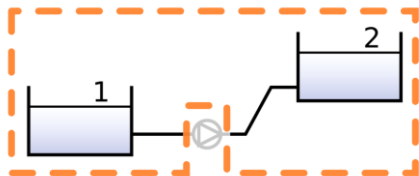
$H_B(Q)$
Altura de la bomba
energía aportada para mover Q
Depende de la bomba,
proporcionada por el fabricante



Ecuación de la instalación

Vamos a reordenar la ecuación de la instalación de la siguiente manera:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f(Q) = H_B(Q)$$



$H_I(Q)$

Altura de la instalación:

energía requerida para mover Q

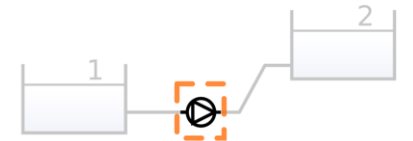
Depende de la instalación (entrada, salida, conductos, elementos singulares...)

$H_B(Q)$

Altura de la bomba

energía aportada para mover Q

Depende de la bomba, proporcionada por el fabricante



Calcular la instalación significa resolver la ecuación anterior, es decir, obtener el valor de caudal Q (y las correspondientes alturas) que satisface el balance de energía $H_I(Q) = H_B(Q)$... que significa:

La ***energía aportada*** por la bomba (altura de la bomba) debe ser igual a la ***energía requerida*** para hacer circular el fluido en la instalación (diferencia de alturas entre salida y entrada más la altura de pérdidas por disipación)

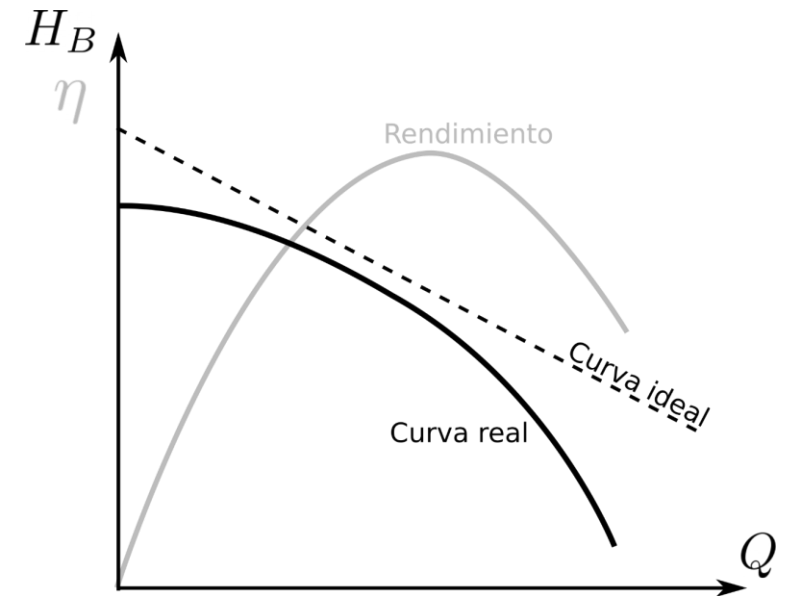
Curvas de la bomba

Llamamos **curva de la bomba** a la representación gráfica de la altura de la bomba frente al caudal, es decir $H_B(Q)$, que la proporciona el fabricante.

- Idealmente (sin considerar pérdidas), $H_B(Q)$ decrece linealmente con el caudal.
- En la realidad, debido a pérdidas de energía por fricción (kQ^2), fugas y otros fenómenos, $H_B(Q)$ muestra un comportamiento no lineal. Una aproximación habitual para $H_B(Q)$ es:

$$H_B(Q) = a - bQ - cQ^2$$

donde a y b son constantes.

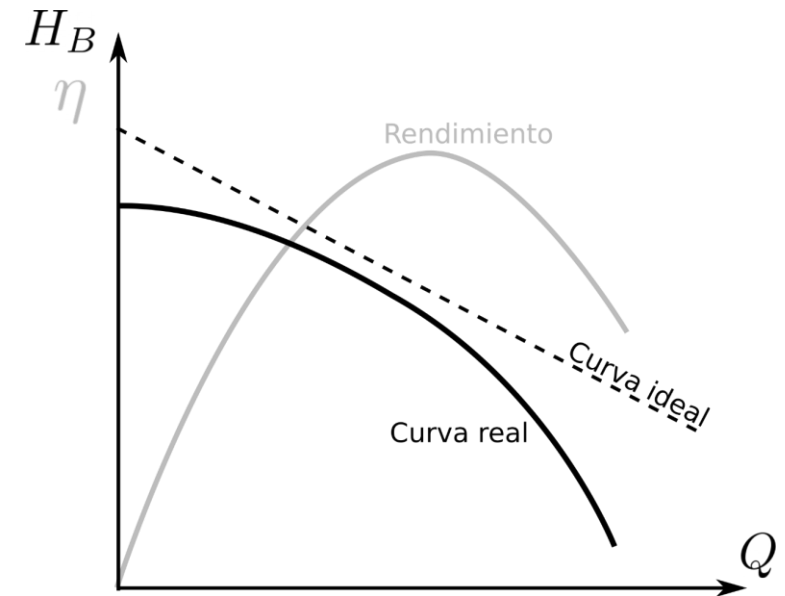


Curvas de la bomba

El **rendimiento de la bomba** se define como la relación entre la potencia transmitida al fluido y la potencia en el eje:

$$\eta = \frac{\text{pot. suministrada al fluido}}{\text{pot. de accionamiento en el eje}} = \frac{\dot{W}_{a \rightarrow f}}{\dot{W}_{eje}} = \frac{\rho g Q H_B}{T \omega}$$

- El rendimiento también es función del caudal $\eta = \eta(Q)$, por lo que podemos representar la curva de rendimiento, cuyo máximo indica el punto óptimo de operación.



Curva de la instalación

Llamamos **curva de la instalación** a la representación gráfica de la altura de la instalación frente al caudal, es decir $H_I(Q)$, que calcularemos de la siguiente manera:

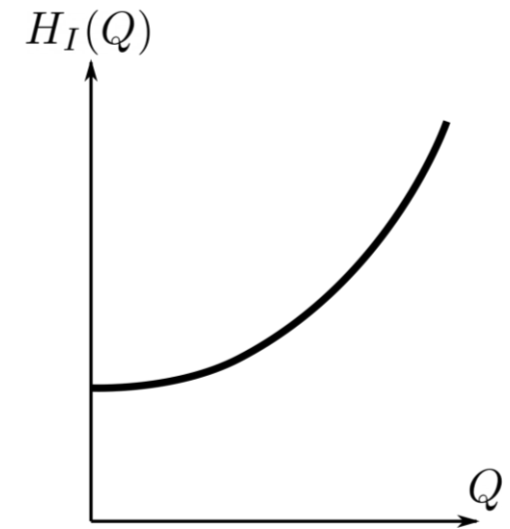
$$H_I(Q) = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f$$

donde las pérdidas por fricción se calculan como:

$$H_f = H_L + \sum_{j=1}^N H_{m,j} = \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^N k_{m,j} \right) \frac{V^2}{2g} = \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^N k_{m,j} \right) \frac{Q^2}{2gS^2}$$

Por lo que $H_I(Q)$ se puede expresar de forma general como:

$$H_I(Q) = a + cQ^2$$



Curva de la instalación: un ejemplo

Supongamos una instalación compuesta por dos depósitos atmosféricos, sin pérdidas menores. La curva de la instalación es

$$H_I(Q) = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gS^2}$$

y como $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $V_1 = V_2 = 0$, se obtiene:

$$H_I(Q) = \underbrace{z_2 - z_1}_a + \underbrace{\frac{fL}{2DgS^2}}_c Q^2$$

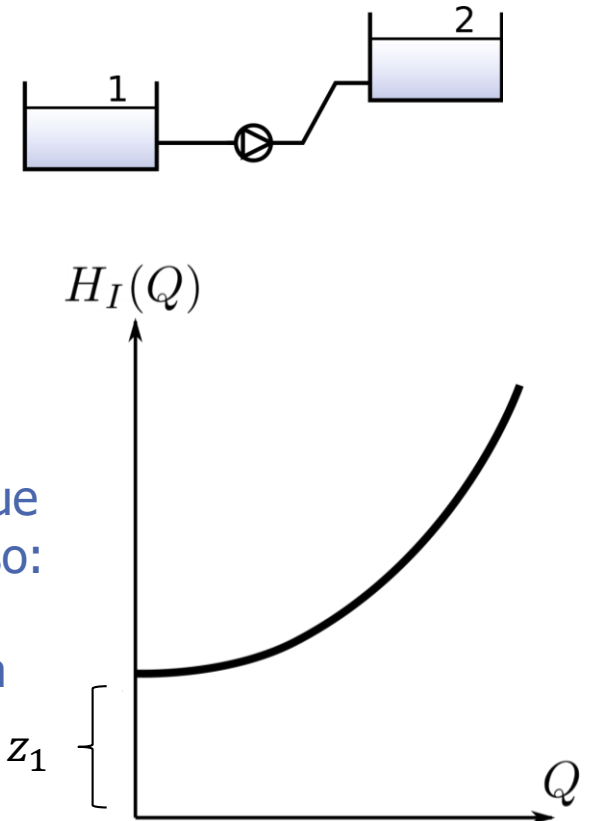
Representación gráfica:

- a es la ordenada en el origen, que representa la altura energética que se debe proporcionar a la instalación para mantener el flujo en reposo:

$$H_I(0) = z_2 - z_1 \equiv a$$

- c es la curvatura, cuanto mayor sea, más rápido aumentará la altura energética requerida al aumentar el caudal.

$$a = z_2 - z_1$$



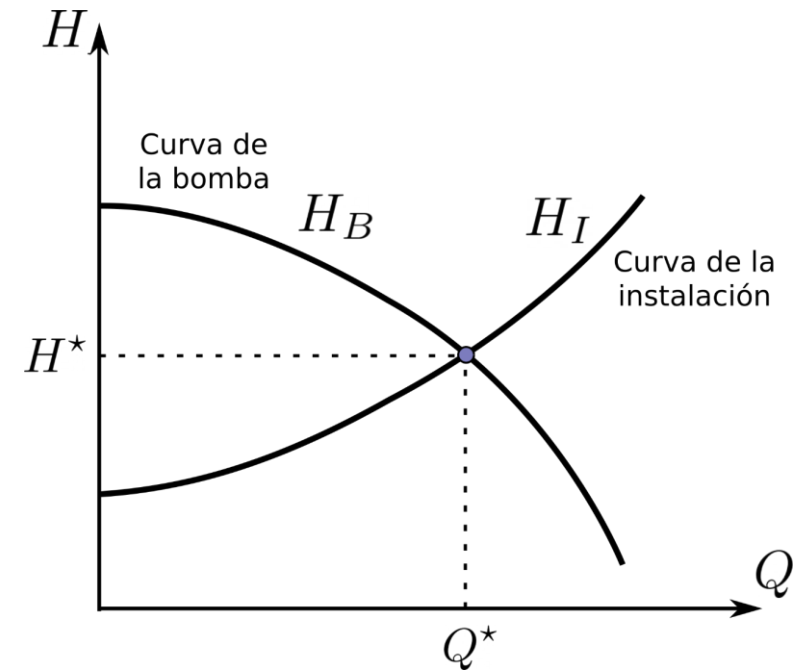
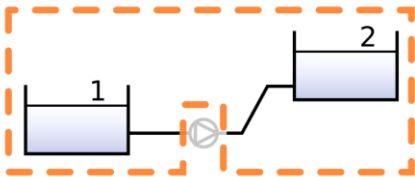
Punto de operación de la instalación

Se denomina **punto de operación** de la instalación a la **intersección de la curva de la instalación $H_I(Q)$ con la curva de la bomba $H_B(Q)$** , es decir:

$$\underbrace{\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + H_f}_{H_I(Q)} = \underbrace{H_B}_{H_B(Q)}$$

Curva de la instalación:
energía requerida para cierto Q

Curva de la bomba:
energía aportada para cierto Q



Instalaciones en serie y en paralelo

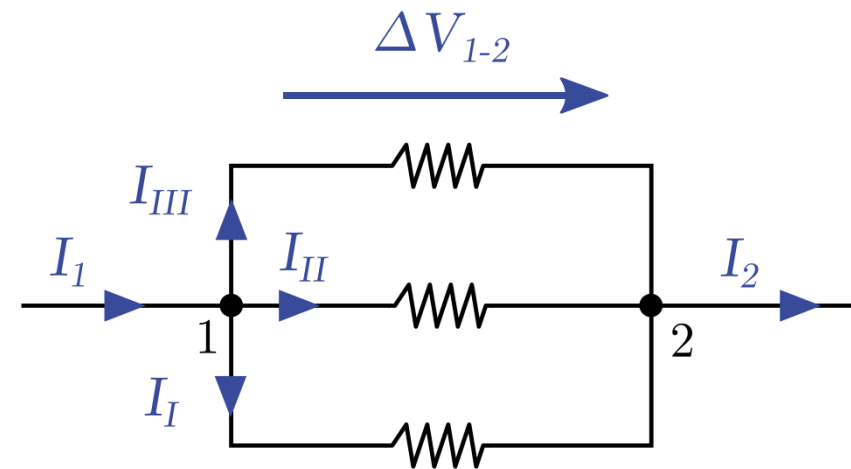
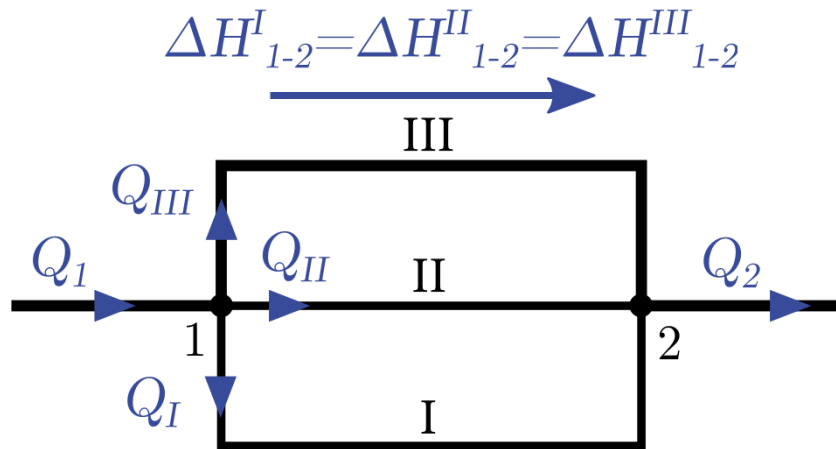
Podemos usar la analogía eléctrica y aplicar las leyes de Kirchhoff

- Instalaciones en paralelo:

$$Q_1 = Q_I + Q_{II} + Q_{III} = Q_2$$

$$H_1 - H_2 = \Delta H_{1-2}^I = \Delta H_{1-2}^{II} = \Delta H_{1-2}^{III}$$

Eléctrico	Hidráulico
Carga (C)	Volumen (V)
Intensidad (I)	Caudal (Q)
Potencial eléctrico (V)	Altura energética (H)



Instalaciones en serie y en paralelo

Podemos usar la analogía eléctrica y aplicar las leyes de Kirchhoff

- Instalaciones en serie:

$$Q_1 = Q_I = Q_{II} = Q_2$$

$$H_1 - H_3 = \Delta H_{1-2}^I + \Delta H_{2-3}^{II}$$

Eléctrico	Hidráulico
Carga (C)	Volumen (V)
Intensidad (I)	Caudal (Q)
Potencial eléctrico (V)	Altura energética (H)

