FLUJOS CANÓNICOS

Mecánica de fluidos

Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

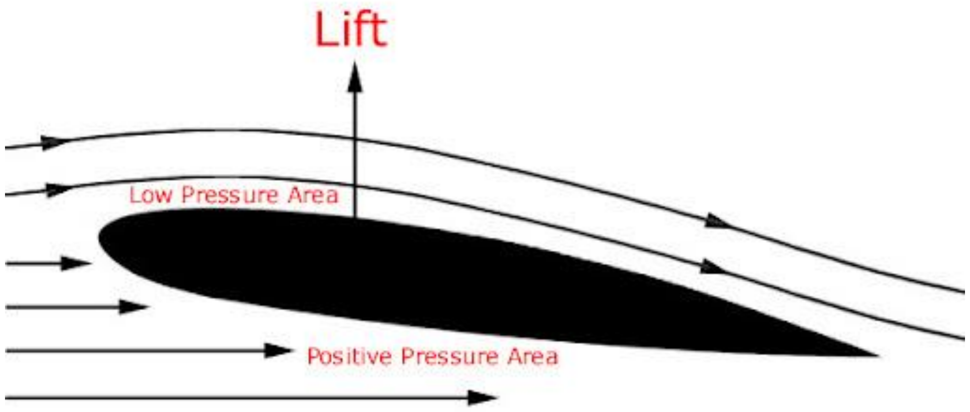
CONTENIDOS

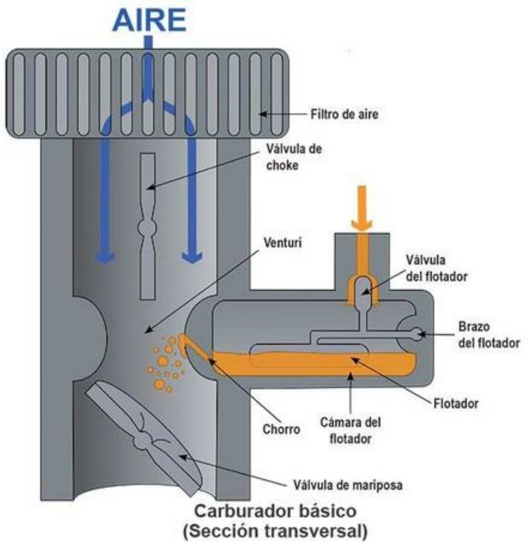
- Fluidostática
  - Ecuación fundamental de la fluidostática y ley de Pascal
  - Medidas de presión (barómetros)
  - Fuerzas y momentos sobre superficies
- **Flujo ideal**
- Flujo viscoso: flujo de Couette y de Hagen-Poiseuille

Motivación del flujo ideal… ¿qué es?

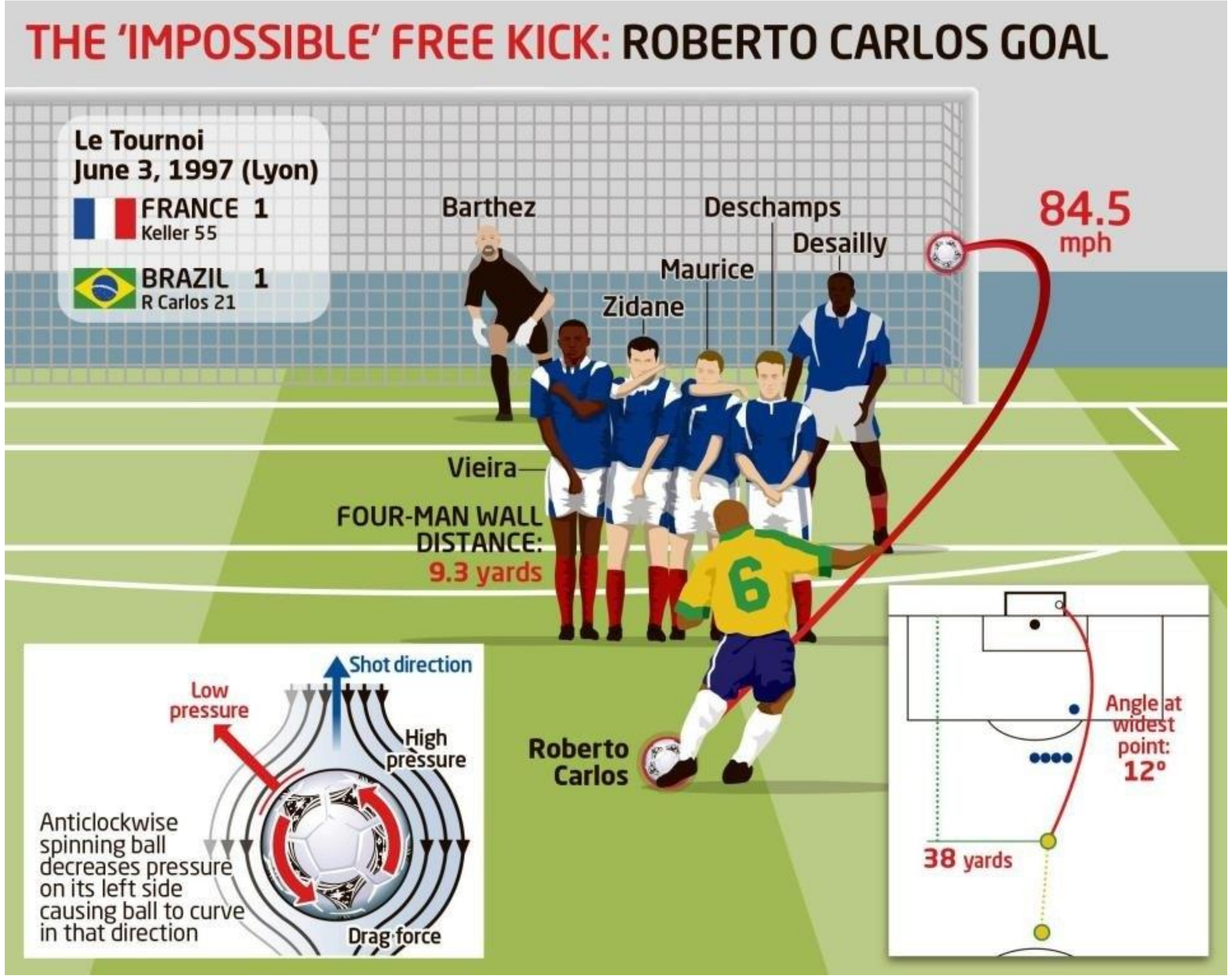
- El flujo ideal es una simplificación del flujo real en el que:
  - Despreciamos los fenómenos de difusión molecular $\rightarrow$ <u>consideraremos viscosidad nula, $\mu = 0$</u>
  - <u>Consideramos densidad constante, $\rho = \mathrm{cte}$</u>

- Si en la realidad ningún flujo tiene $\mu = 0$… ¿qué interés tienen?
  - Al quitar de las ecuaciones los términos de difusión (términos viscosos), es más sencillo trabajar con ellas y resolverlas numéricamente.
  - Muchos fenómenos de interés en ingeniería se pueden representar mediante flujo ideal





Alguna aplicación adicional…



Resumiendo… ¿de dónde venimos y a dónde vamos?

Las del tema 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0 \\ \rho \left(\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \\ \rho \left(\dfrac{\partial e}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla e \right) = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{q}} - p \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \phi_v + \dot{q}_v \end{cases}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

$\mu = 0$
(y sin fuentes de calor)

Ecuaciones de Euler

$\rho = \text{constante}$

$\rho = \text{variable}$

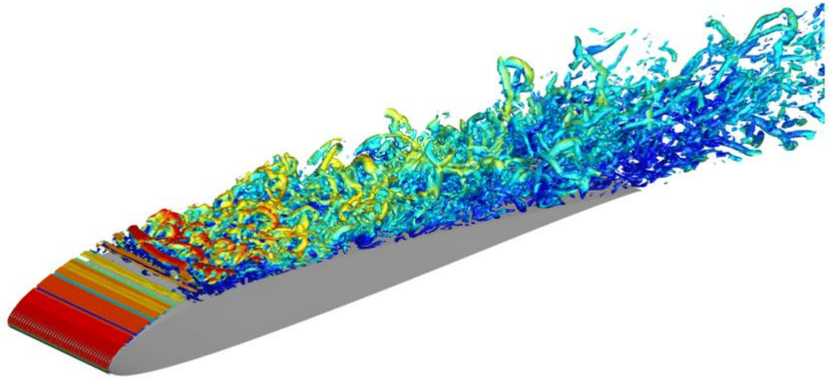
Flujo ideal

Ecuaciones de Euler flujo incompresible

Ecuaciones de Euler flujo compresible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \vec{\boldsymbol{f}}_m \\ \dfrac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} e) = 0 \end{cases}$$

¿Y qué podemos hacer con estas ecuaciones?



Ecuaciones de Navier-Stokes

$\mu = 0$
(y sin fuentes de calor)

Ecuaciones de Euler

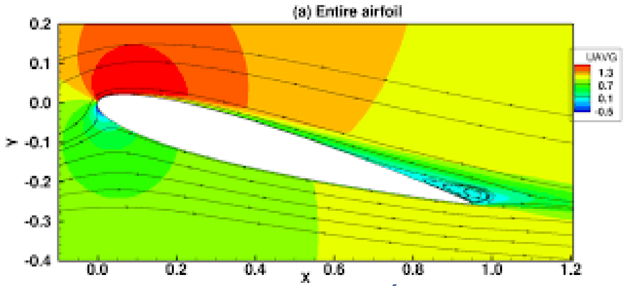
$\rho = \text{constante}$

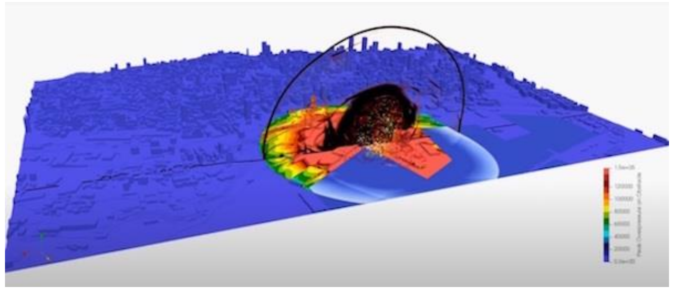
$\rho = \text{variable}$

Flujo ideal

Ecuaciones de Euler flujo incompresible

Ecuaciones de Euler flujo compresible





Resumiendo… ¿de dónde venimos y a dónde vamos?

Las del tema 2

Ecuaci…

$+ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

$+ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \Big) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\tau}_v + \rho \vec{f}_m$

$+ \vec{v} \cdot \nabla e \Big) = \nabla \cdot \dot{q} - p \nabla \cdot \vec{v} + \phi_v + \dot{q}_v$

$\mu =$ …

(y sin fuente…

¿Podemos simplificarlas aun más?

Ecua…

$\rho =$ constante

$\rho =$ variable

Flujo ideal

Ecuaciones de Euler flujo incompresible

Ecuaciones de Euler flujo compresible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}_m \\ \dfrac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} e) = 0 \end{cases}$$

En el tema 2 vimos cómo obtener la ecuación de Bernoulli

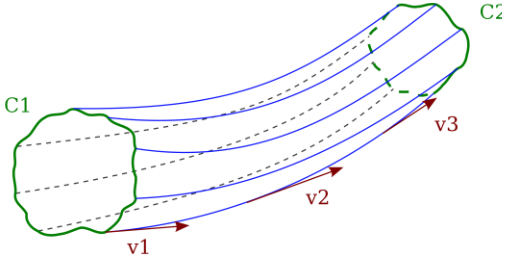
Consideramos la ecuación de la energía total sin viscosidad (fricción), ni transferencia de calor:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)\left[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right]dS$$
$$= \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}} + \cancelto{0}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,dV + \int_{SC(t)} -\cancelto{0}{\boldsymbol{q}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,dS + \int_{VC(t)} \cancelto{0}{\dot{q}_v}\,dV$$

- Si las fuerzas másicas son conservativas (derivan de un potencial): $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)\left[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right]dS = \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,dS$$

- Si consideramos flujo estacionario y escogemos un tubo de corriente como VC:



$$\left[\rho v S\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)\right]_2 - \left[\rho v S\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)\right]_1 = (p v S)_1 - (p v S)_2$$

Recordatorio:
- Flujo estacionario
- No viscoso (sin fricción)
- Sin transferencia de calor
- A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE!

ndo que al ser estacionario $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dot{M}$, obtenemos:

$$\boxed{\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right) = constante}$$

En líquidos $\delta e = 0$:
$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right) = \mathrm{C}$$

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Las ecuaciones de Euler (Navier Stokes con $\mu = 0$ y ρ constante) considerando $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$ son:

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla U$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} e) = 0$$

Si cogemos la ecuación de cantidad de movimiento (rodeada en verde) y aplicamos la identidad vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}} = \nabla \left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2} \right) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

A esta cantidad la llamamos vorticidad:
$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

obtenemos:

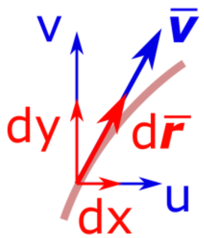
$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2} \right) + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

Si consideramos estado estacionario, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ obteniendo:

$$\boxed{\nabla \left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}}$$

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Ahora vamos a distinguir dos situaciones distintas:



$$\boxed{\nabla\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)=\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}}$$

Flujo rotacional: $\vec{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$

Proyectamos sobre una línea de corriente:

$$d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)=d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}})$$

Derivada direccional a lo largo de la línea de corriente: $d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla$

$$d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)=0$$

$d\vec{\boldsymbol{r}}$ es perpendicular a $(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}})$

Integrando…

$$\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U=\mathrm{const}$$

VALIDO ENTRE 2 PUNTOS de LINEA DE CORRIENTE

Flujo irrotacional: $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$

Directamente obtenemos:

$$\nabla\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)=0$$

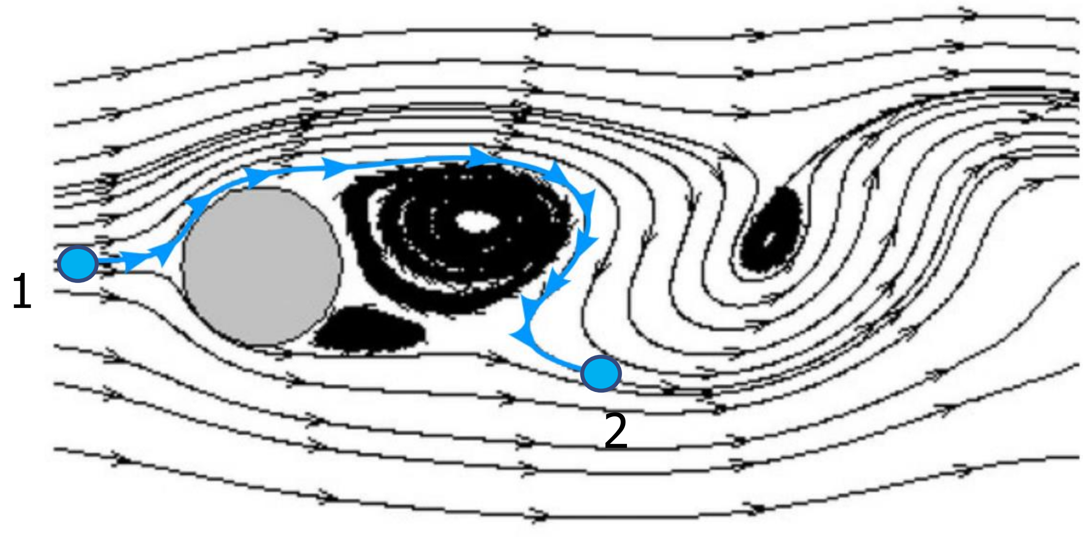
Integrando…

$$\boxed{\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U=\mathrm{const}}$$

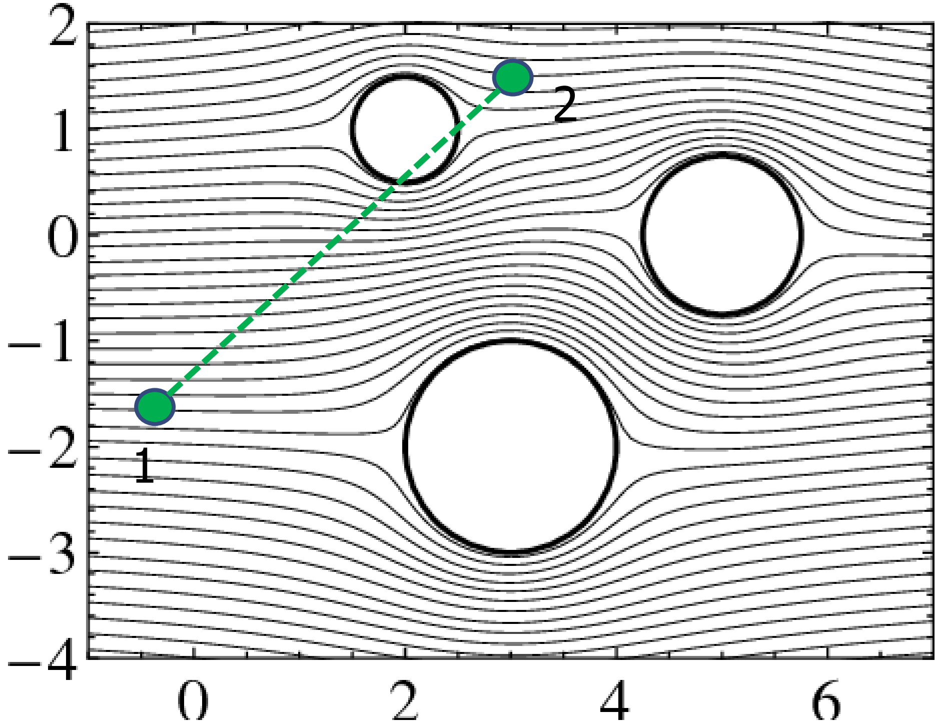
VALIDO ENTRE 2 PUNTOS CUALESQUIERA

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Ahora vamos a distinguir dos situaciones distintas:



Flujo rotacional



Flujo irrotacional

$$\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)_1=\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)_2$$

Resumen ecuación de Bernoulli

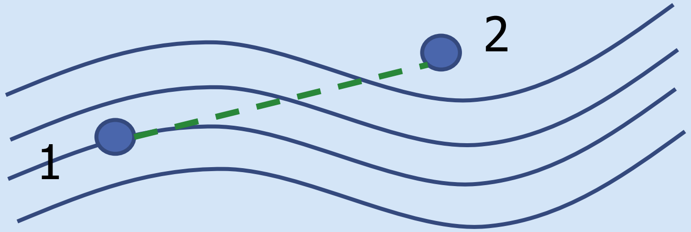
$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U\right) = constante$$

Consideraremos $U = gz$
El módulo de la velocidad lo escribiremos como V

Bajo las siguientes hipótesis:

- **Flujo estacionario**
- **No viscoso (sin fricción)**
- **Incompresible**
- Sin transferencia de calor
- Las fuerzas másicas son conservativas

En la práctica consideraremos **flujo irrotacional**, así que la podremos aplicar entre dos puntos cualesquiera (no hace falta que estén en la misma línea de corriente):



Relación entre velocidad, presión y potencial gravitatorio

Observemos la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{constante}$$

- Si $V = 0$ y $U = gz$, recuperamos la ecuación de la fluidostática:

$$p + \rho g z = \text{constante}$$

  que nos dice que *"cuando la profundidad aumenta, la presión aumenta"*

- Si $U = 0$ (en aire por ejemplo, donde la densidad es baja), obtenemos:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

  que nos dice que ***"cuando la velocidad aumenta, la presión disminuye"***

$$\boxed{\text{Si } \; V\uparrow \Rightarrow p\downarrow}$$

La presión en un punto de remanso es alta

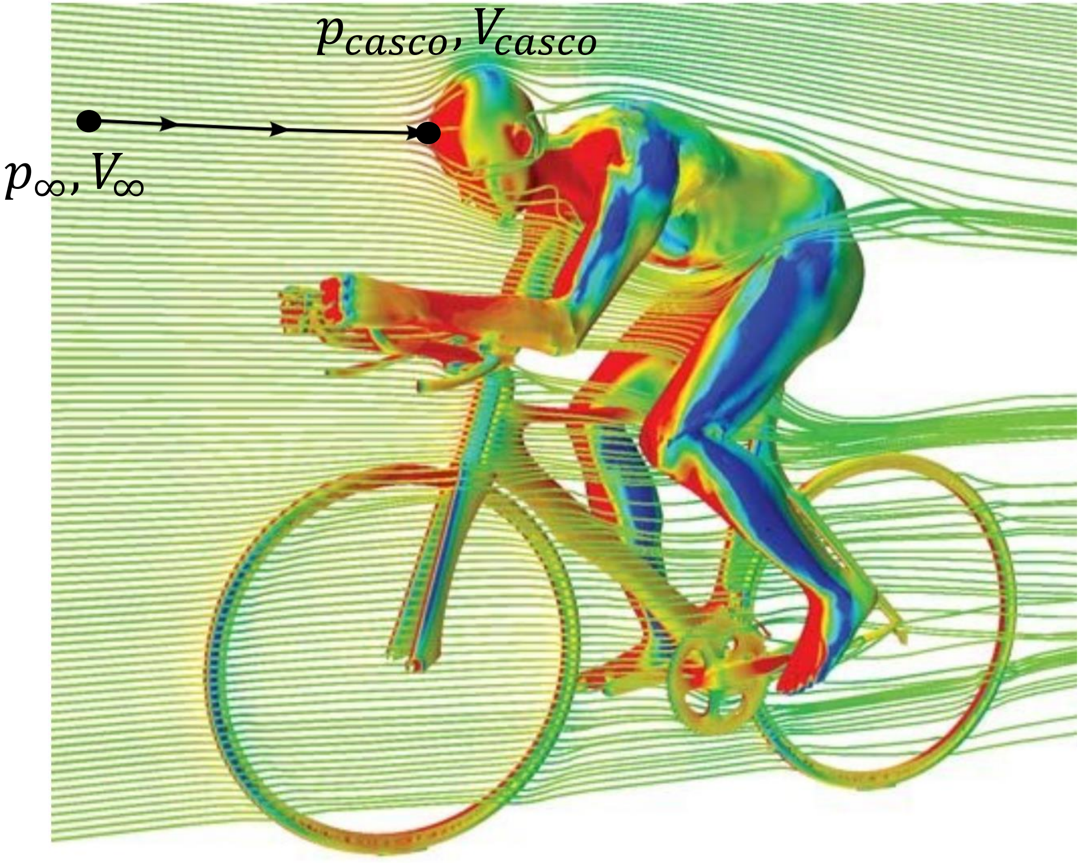
Si aplicamos la ecuación de Bernoulli tomando como referencia el ciclista (velocidades relativas al ciclista), entre un punto lejano y el casco:

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U\right)_\infty = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U\right)_{casco}$$

- Consideramos $U_\infty = U_{casco} = 0$
- El punto "∞" representa un punto lejos del ciclista:
  - $p_\infty = p_{atm}$, presión en el aire lejos del ciclista
  - V_∞ = velocidad del aire, lejos del ciclista, relativa a éste
- Como en el casco hay un punto de remanso (muere la línea de corriente) $\rightarrow V_{casco} = 0$

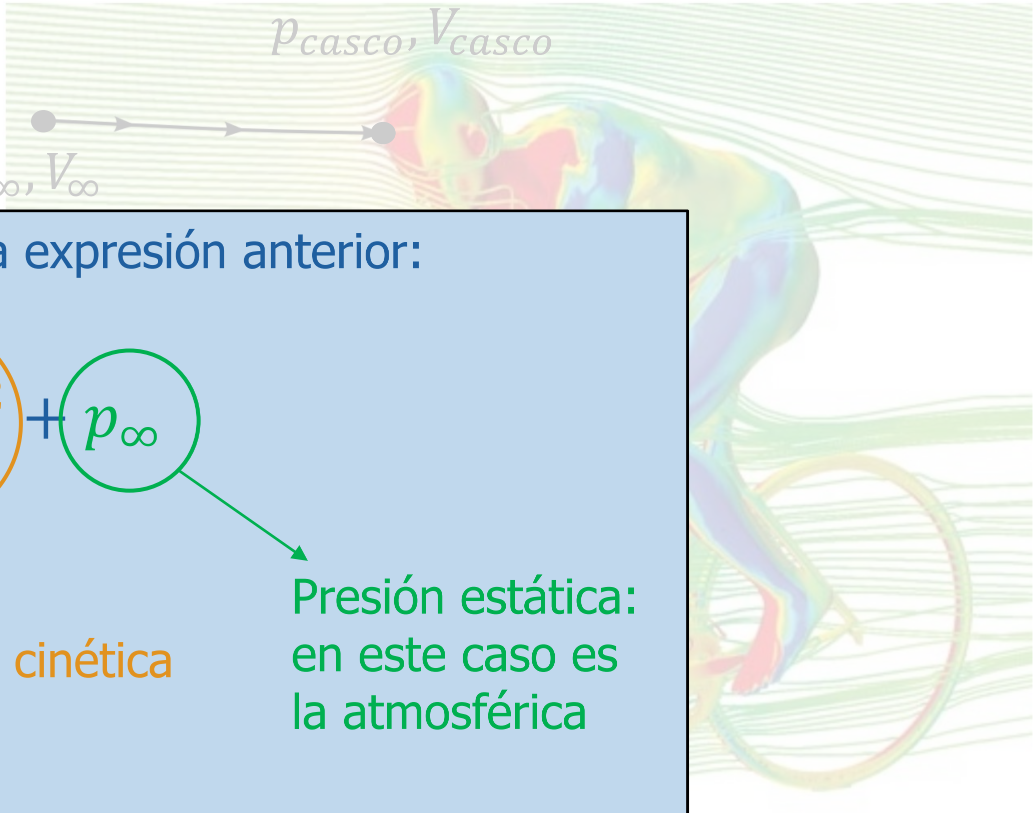
$$\frac{1}{2}{V_\infty}^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{p_{casco}}{\rho}$$

$$\boxed{p_{casco} = \frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2 + p_{atm}}$$



La presión en un punto de remanso es alta

Si aplicamos la ecuación de Bernoulli tomando como referencia el ciclista (velocidades relativas al ciclista), entre un punto lejano y el casco:



- Consid
- Consid
  - $p_{\infty} =$
  - $V_{\infty} =$
- Como
  línea d

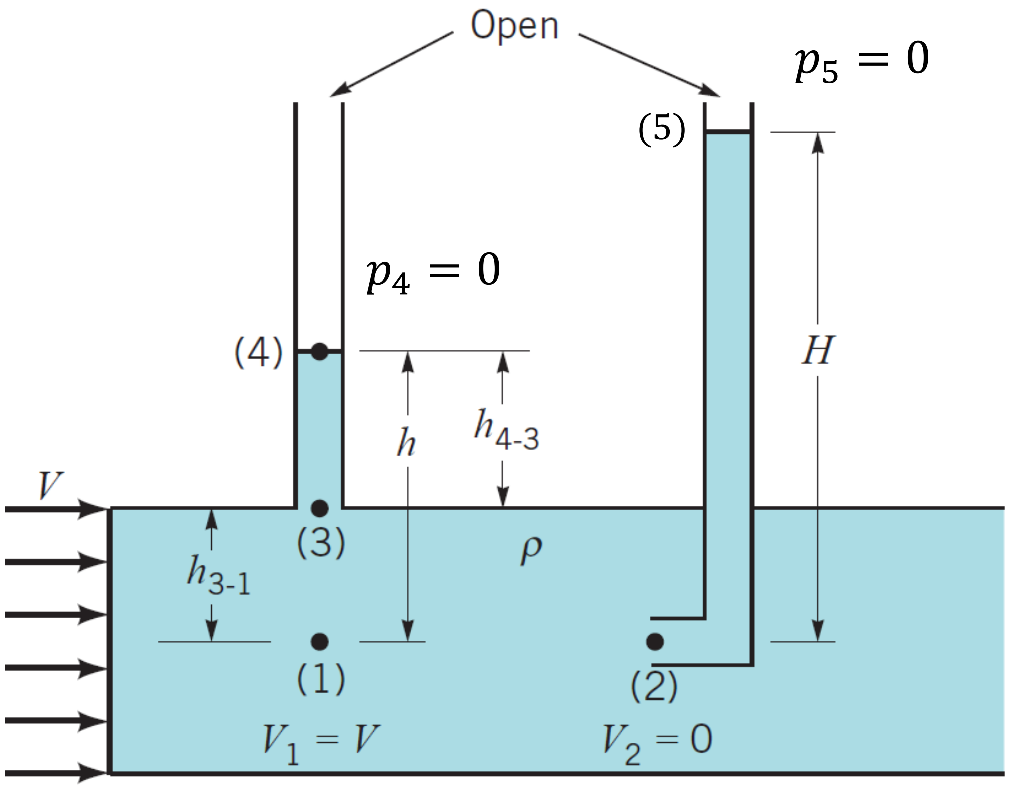
Nomenclatura de los términos de presión en la expresión anterior:

$$p_{\text{remanso}} = \frac{1}{2}\rho {V_{\infty}}^{2} + p_{\infty}$$

Presión dinámica: asociada a la energía cinética del flujo

Presión estática: en este caso es la atmosférica

Presión de remanso, presión dinámica, presión estática y presión total



Ecuación de Bernoulli se puede escribir como una presión total $p_T = constante$ que representa la conservación de la energía.

- Presión total:

Presión dinámica (energía cinética) Presión estática (energía de presión) Presión hidrostática (energía potencial)

$$p_T = \frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = \text{const}$$

se conserva entre 2 puntos cualesquiera del espacio.

- Presión de remanso: Sobrepresión en (2) debida a que el flujo se frena:

Presión dinámica

$$(\text{Bernoulli } 1-2){:}\ \frac{1}{2}\rho V^2 + p_1 = p_2$$

- Presión estática: Es la presión termodinámica, es aquella que veríamos si nos moviéramos con el fluido y lo viéramos estático. Se mide mediante un orificio paralelo al flujo (3).

$$(\text{Bernoulli } 1-3){:}\ p_1 = p_3 + \rho g h_{3-1}$$
$$(\text{L. Pascal } 3-4){:}\ \cancel{p_3} = \cancel{p_4} + \rho g h_{4-3}$$
$$p_1 = \cancel{p_4} + \rho g h$$
$$(\text{L. Pascal } 2-5){:}\ p_2 = \cancel{p_5} + \rho g H$$

Presión dinámica: $p_2 - p_1 = \rho g (H - h)$

Combinando:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 - p_1 \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}} \Rightarrow V = \sqrt{2g(H-h)}$$

Medición de velocidad aerodinámica: tubo de Pitot

Si aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y (2):

$$\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+U\right)_\infty=\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+U\right)_2$$

- Consideramos aire $U_\infty = U_2 = U_3 = 0$
- Consideramos
  - $p_\infty = p_{atm}$
  - $V_\infty =$ velocidad del aire relativa al tubo de Pitot (lejos)
- Como en (2) hay un punto de remanso $\rightarrow V_2 = 0$

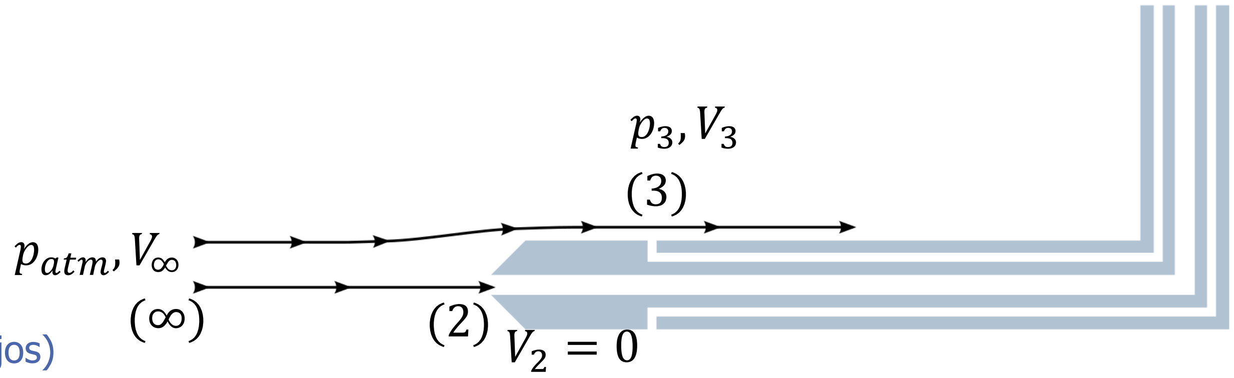
$$p_2=\frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2+p_\infty$$

Si ahora aplicamos la ec. de Bernoulli entre (∞) y (3)

$$p_3 = p_\infty$$

Combinando ambas:

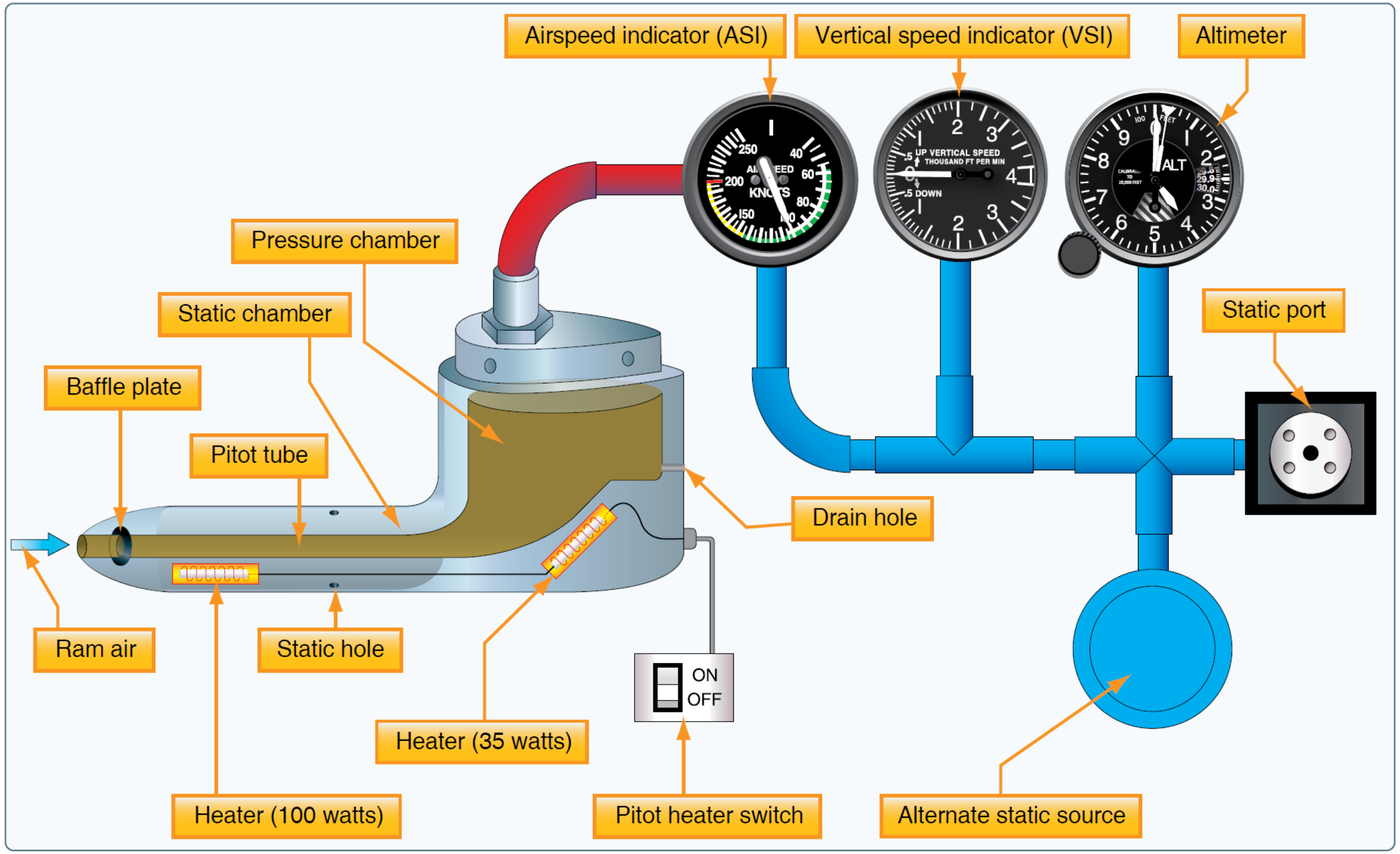
$$V=\sqrt{\frac{2(p_2-p_3)}{\rho}}$$



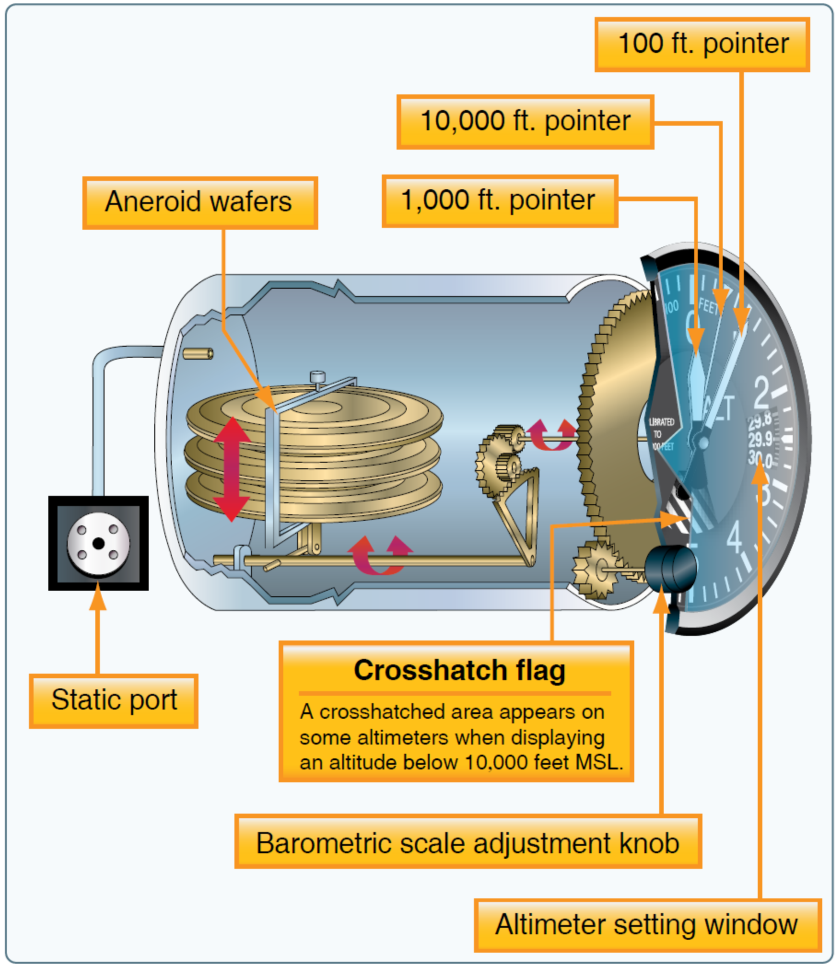
Sistema Pitot-estático en aeronaves

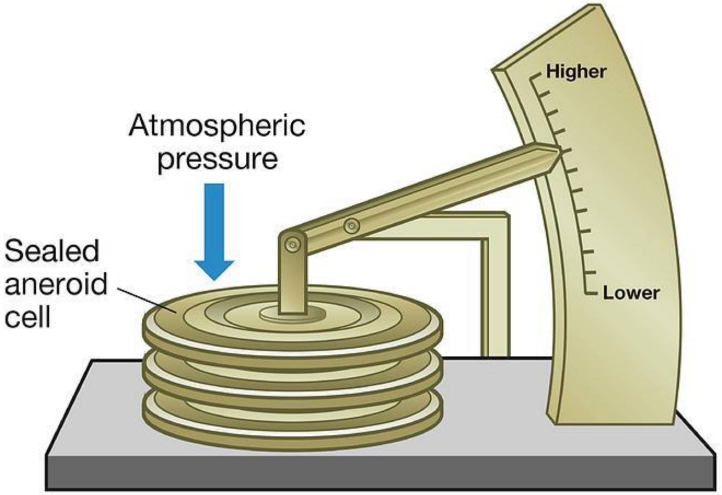
Estos tres instrumentos son fundamentales en la navegación y se basan en medidas de presión estática y dinámica mediante un tubo de Pitot

Sistema Pitot-estático en aeronaves

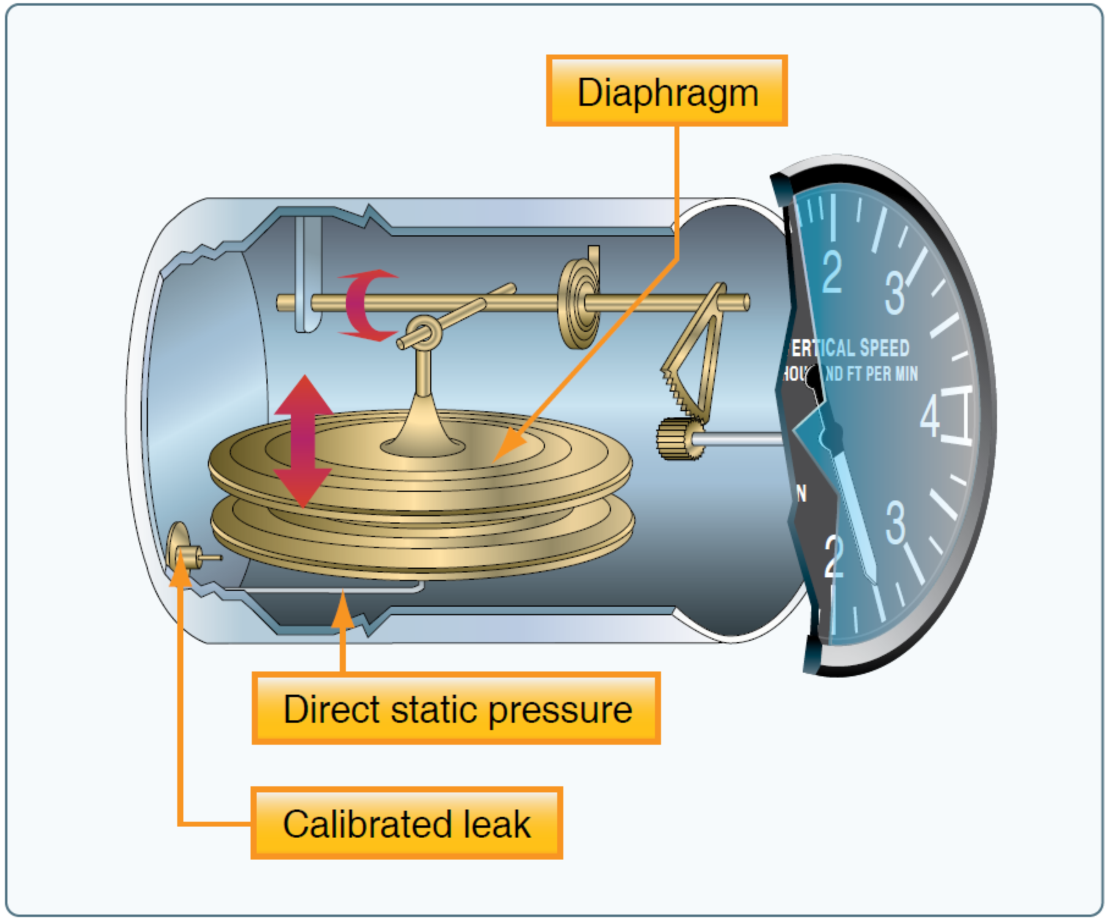


Sistema Pitot-estático en aeronaves - Altímetro

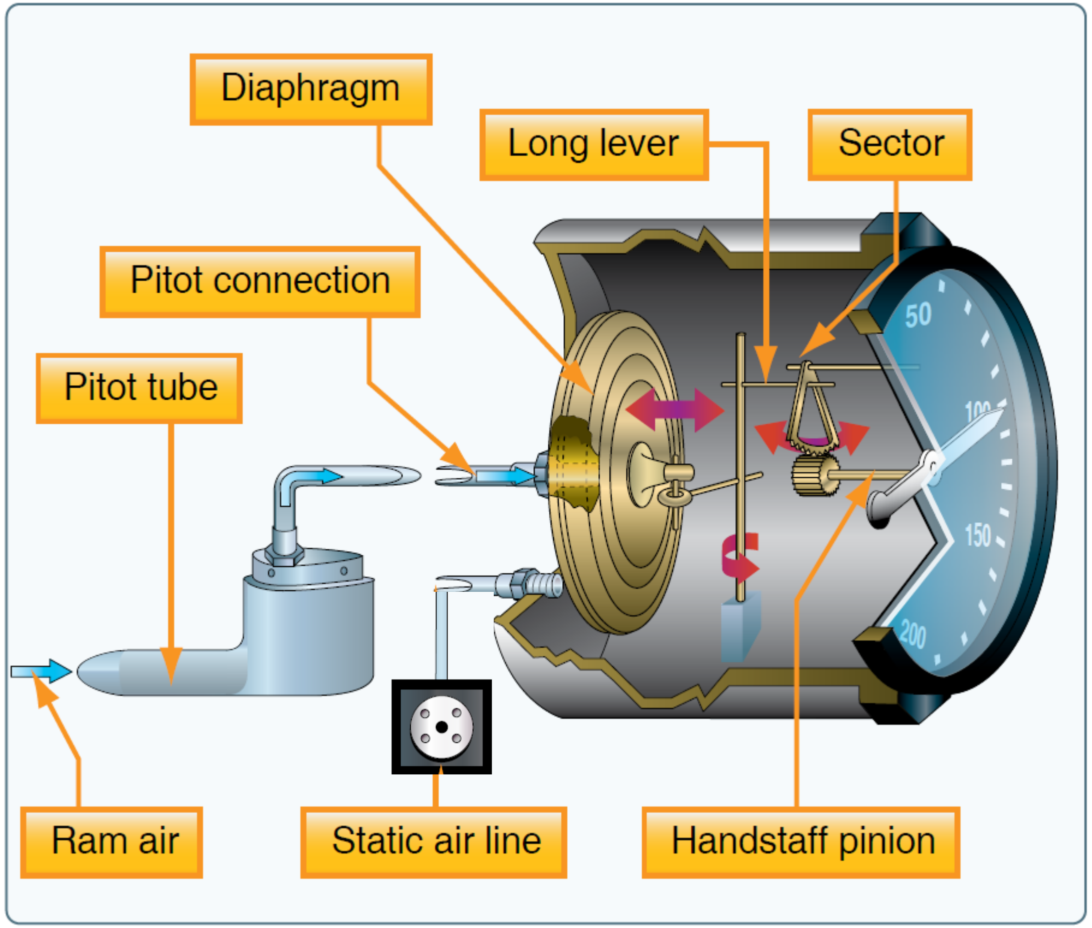




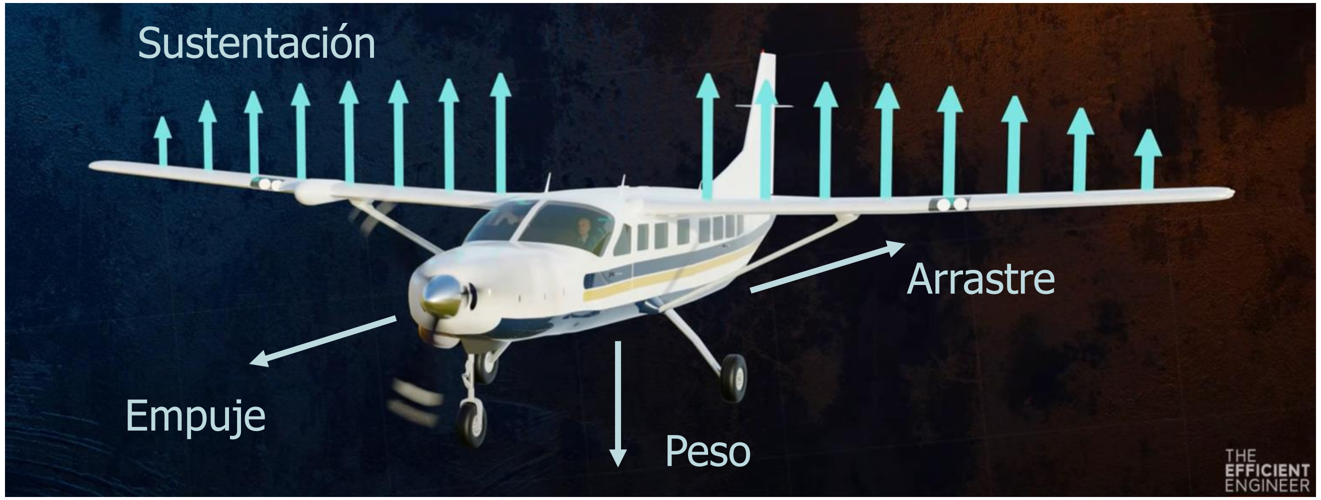
Sistema Pitot-estático en aeronaves – Indicador velocidad vertical

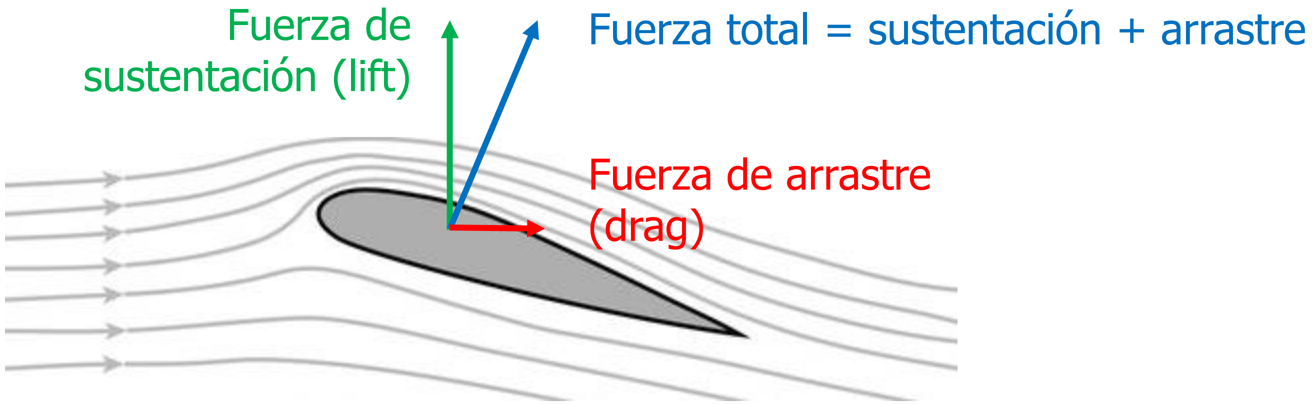


Sistema Pitot-estático en aeronaves – Indicador velocidad aerodinámica

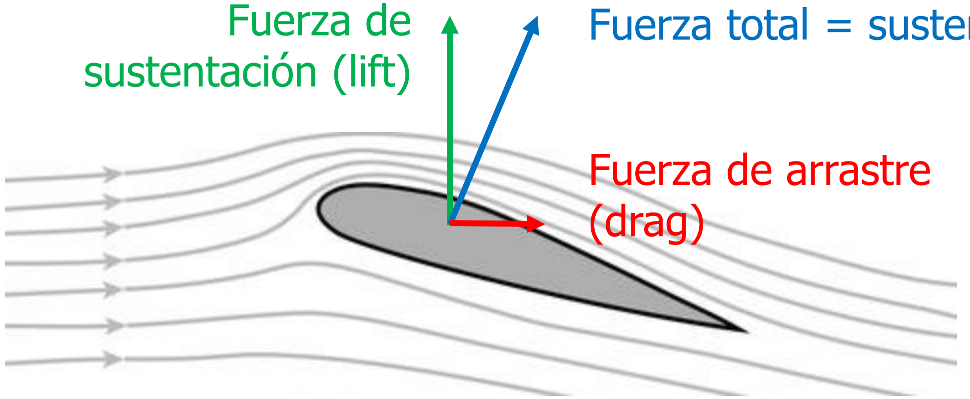


¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica





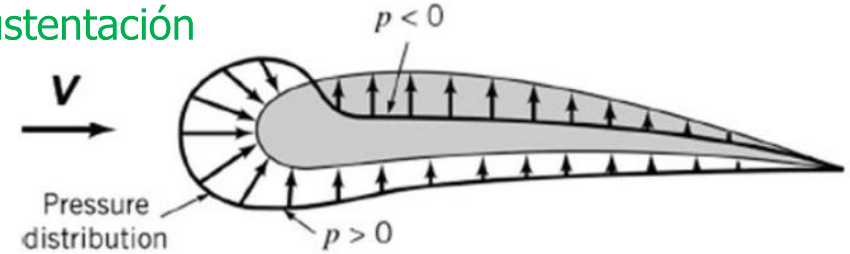
¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica

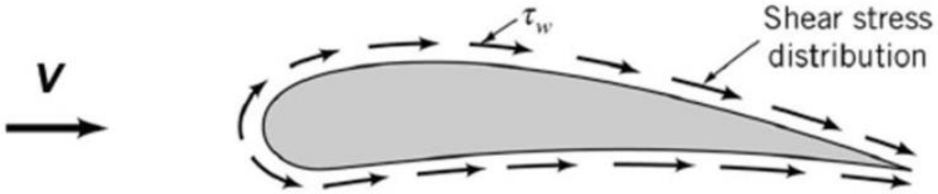


¿A qué se deben estas fuerzas? La fuerza total es la resultante de la integral de fuerzas de superficie:

$$\int_{SC(t)} -p\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{SC(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}}dS$$

Es la más importante para la sustentación





¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y arriba (1):

$$\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}\right)_\infty=\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}\right)_1$$

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y abajo (2):

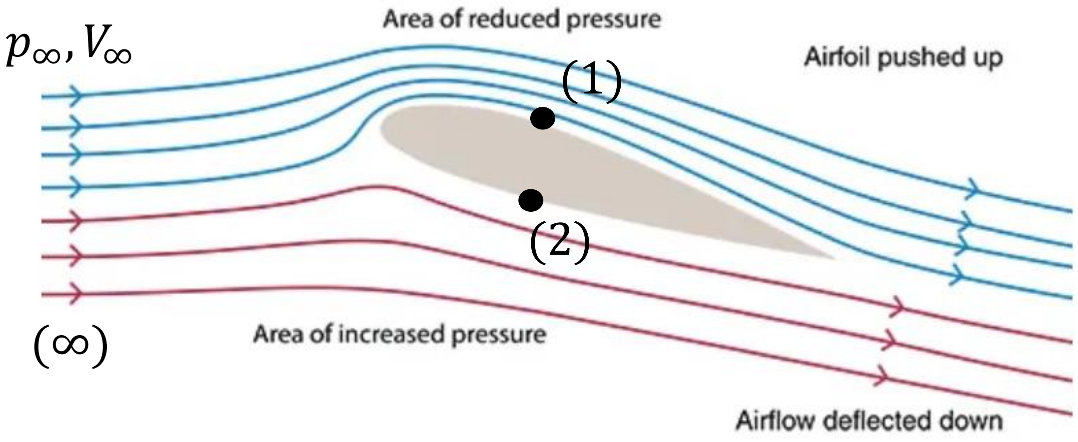
$$\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}\right)_\infty=\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}\right)_2$$

Igualando ambas:

$$\frac{1}{2}{V_1}^2+\frac{p_1}{\rho}=\frac{1}{2}{V_2}^2+\frac{p_2}{\rho}$$

Como $V_1>V_2$ entonces $p_2>p_1$ lo cual genera una fuerza hacia arriba (fuerza de sustentación, o *lift* en inglés)

Ver video



Efecto Magnus

Debido a la rotación del balón, el aire se acelera en la zona en la que el giro es favorable al flujo (arriba) y se decelera en la zona contraria (abajo).

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y arriba (1):

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_\infty = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_1$$

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y abajo (2):

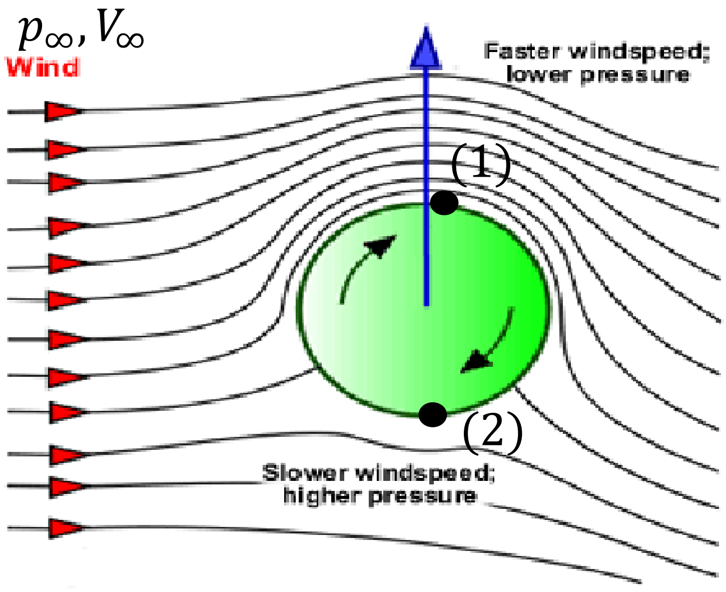
$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_\infty = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_2$$

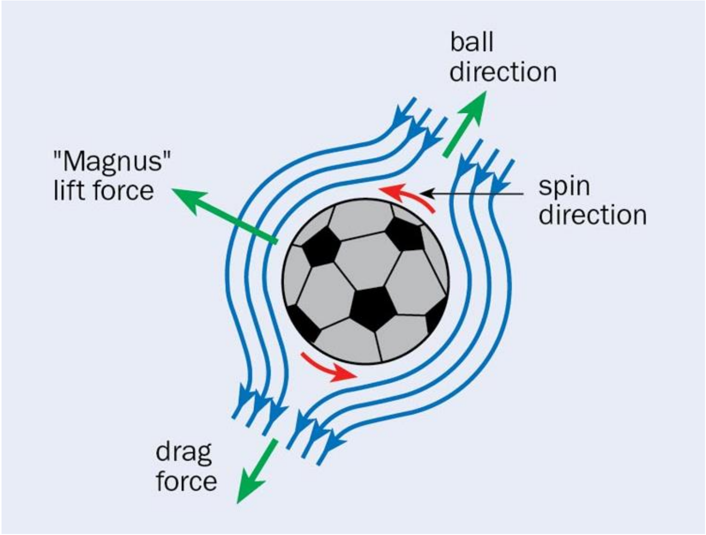
Igualando ambas:

$$\frac{1}{2}{V_1}^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}{V_2}^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Como $V_1 > V_2$ entonces $p_2 > p_1$ lo cual genera una fuerza en dirección (2)->(1) que modifica la trayectoria del balón

"Impossible free-kick, Brazil, 1997"





Efecto Magnus