

FLUJOS CANÓNICOS

Mecánica de fluidos

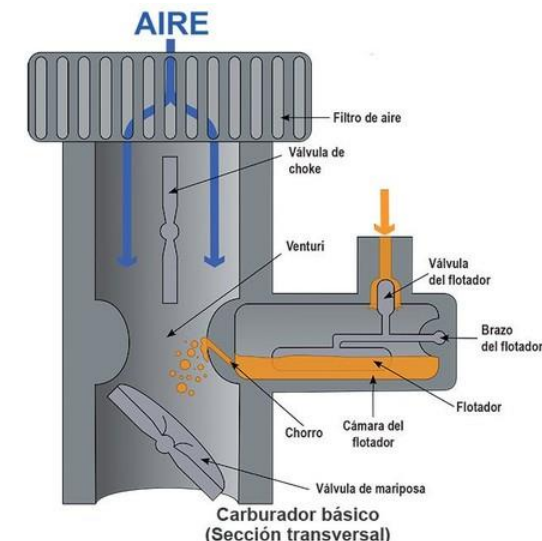
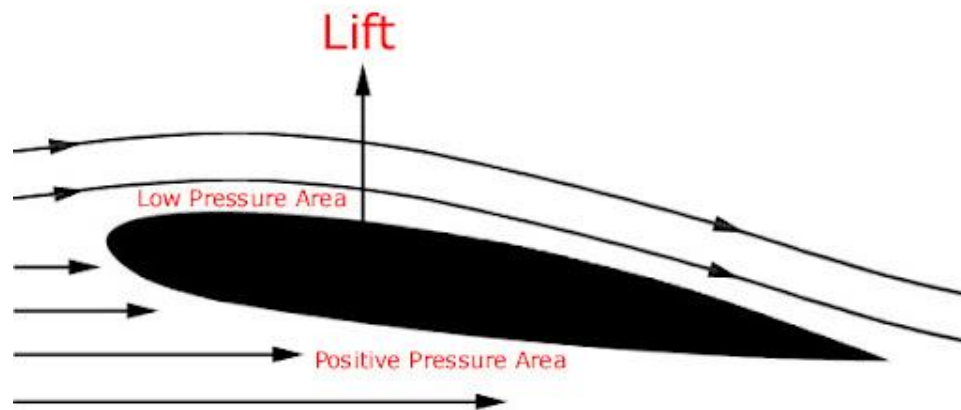
Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS

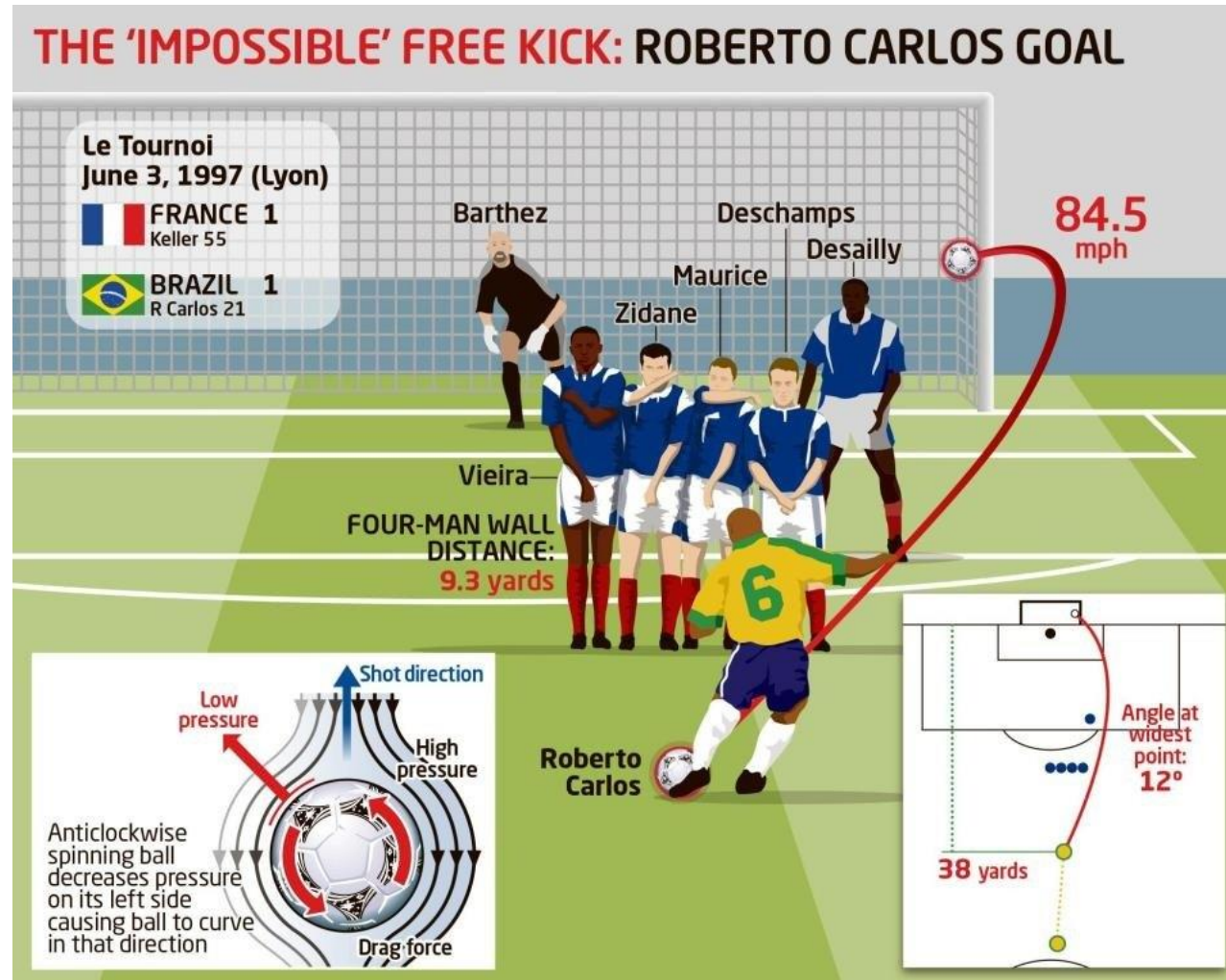
- Fluidostática
 - Ecuación fundamental de la fluidostática y ley de Pascal
 - Medidas de presión (barómetros)
 - Fuerzas y momentos sobre superficies
- **Flujo ideal**
- Flujo viscoso: flujo de Couette y de Hagen-Poiseuille

Motivación del flujo ideal... ¿qué es?

- El flujo ideal es una simplificación del flujo real en el que:
 - Despreciamos los fenómenos de difusión molecular → consideraremos viscosidad nula, $\mu = 0$
 - Consideramos densidad constante, $\rho = \text{cte}$
- Si en la realidad ningún flujo tiene $\mu = 0$... ¿qué interés tienen?
 - Al quitar de las ecuaciones los términos de difusión (términos viscosos), es más sencillo trabajar con ellas y resolverlas numéricamente.
 - Muchos fenómenos de interés en ingeniería se pueden representar mediante flujo ideal



Alguna aplicación adicional...



Resumiendo... ¿de dónde venimos y a dónde vamos?

Las del
tema 2

Ecuaciones de Navier-Stokes

$\mu = 0$
(y sin fuentes de calor)

Ecuaciones de Euler

$\rho = \text{constante}$

Flujo
ideal

Ecuaciones de Euler
flujo incompresible

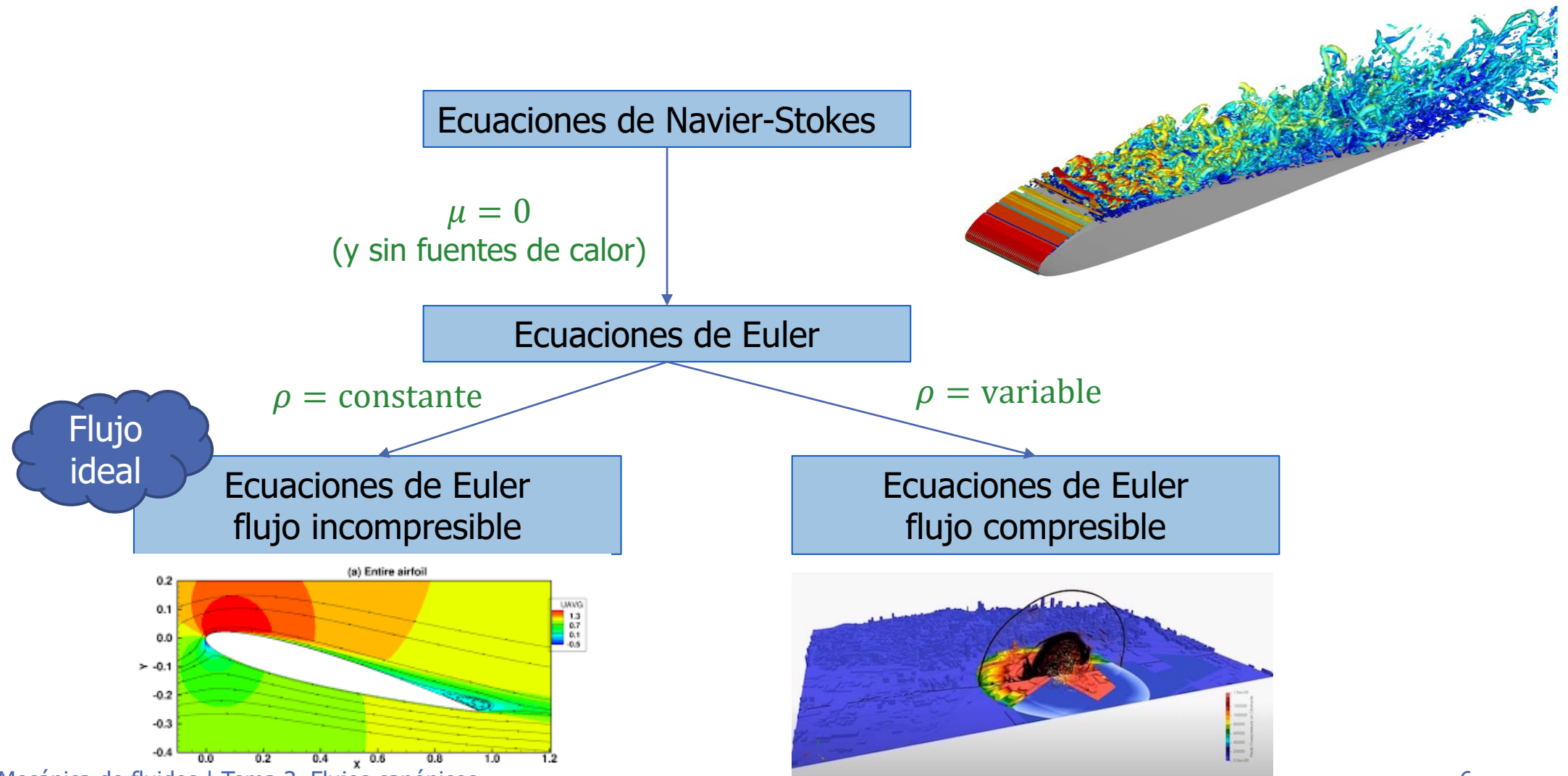
$\rho = \text{variable}$

Ecuaciones de Euler
flujo compresible

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\tau}_v + \rho \vec{f}_m \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla e \right) = \nabla \cdot \vec{q} - p \nabla \cdot \vec{v} + \phi_v + \dot{q}_v \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}_m \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} e) = 0 \end{array} \right.$$

¿Y qué podemos hacer con estas ecuaciones?



Resumiendo... ¿de dónde venimos y a dónde vamos?

Las del tema 2

¿Podemos simplificarlas aun más?

Ecuación

$\mu =$
(y sin fuente)

Ecuación

$\rho = \text{constante}$

$\rho = \text{variable}$

Flujo ideal

Ecuaciones de Euler
flujo incompresible

Ecuaciones de Euler
flujo compresible

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}_m \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}e) = 0 \end{array} \right.$$

En el tema 2 vimos cómo obtener la ecuación de Bernoulli

Consideramos la ecuación de la energía total sin viscosidad (fricción), ni transferencia de calor:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) dV + \int_{SC(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS \\ &= \int_{SC(t)} (-p\vec{n} + \cancel{\tilde{\tau}_v \cdot \vec{n}}^0) \cdot \vec{v} dS + \int_{VC(t)} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} dV + \int_{SC(t)} \cancel{-\vec{q} \cdot \vec{n}}^0 dS + \int_{VC(t)} \cancel{\dot{q}_v}^0 dV \end{aligned}$$

- Si las fuerzas másicas son conservativas (derivan de un potencial): $\vec{f}_m = -\nabla U$, podemos escribir:

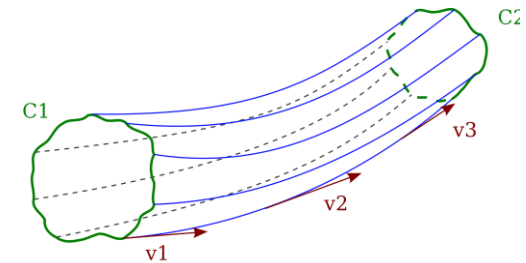
$$\frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) dV + \int_{SC(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \hat{n}] dS = \int_{SC(t)} (-p\vec{n}) \cdot \vec{v} dS$$

- Si consideramos flujo estacionario y escogemos un tubo de corriente como VC:

$$\left[\rho v S \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right]_2 - \left[\rho v S \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right]_1 = (pvS)_1 - (pvS)_2$$

ando que al ser estacionario $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dot{M}$, obtenemos:

$$\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) = \text{constante}$$



En líquidos $\delta e = 0$:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) = C$$

Recordatorio:

- Flujo estacionario
- No viscoso (sin fricción)
- Sin transferencia de calor
- A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE!

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Las ecuaciones de Euler (Navier Stokes con $\mu = 0$ y ρ constante) considerando $\vec{f}_m = -\nabla U$ son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla U \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} e) &= 0\end{aligned}$$

Si cogemos la ecuación de cantidad de movimiento (rodeada en verde) y aplicamos la [identidad vectorial](#):

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega}$$

A esta cantidad la llamamos vorticidad:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

obtenemos:

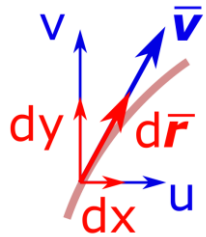
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

Si consideramos estado estacionario, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ obteniendo:

$$\nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Ahora vamos a distinguir dos situaciones distintas:



$$\nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

Flujo rotacional: $\vec{\omega} \neq 0$

Flujo irrotacional: $\vec{\omega} = 0$

Proyectamos sobre una línea de corriente:

Derivada direccional a lo largo de la línea de corriente: $d\vec{r} \cdot \nabla$

$$d\vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$$

$d\vec{r}$ es perpendicular a $(\vec{v} \times \vec{\omega})$

$$d\vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0$$

Integrando...

$$\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}$$

VALIDO ENTRE 2 PUNTOS de LINEA DE CORRIENTE

Directamente obtenemos:

$$\nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0$$

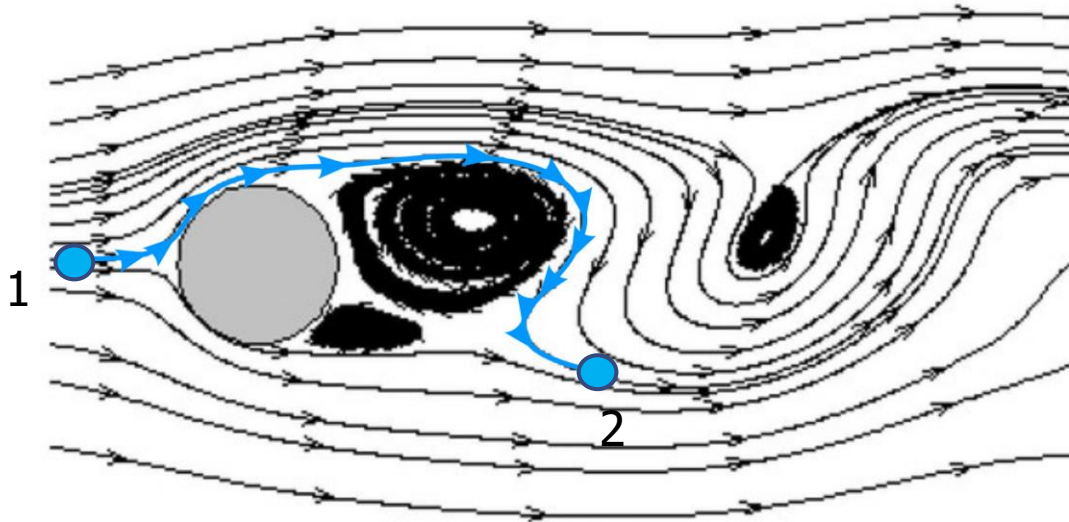
Integrando...

$$\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}$$

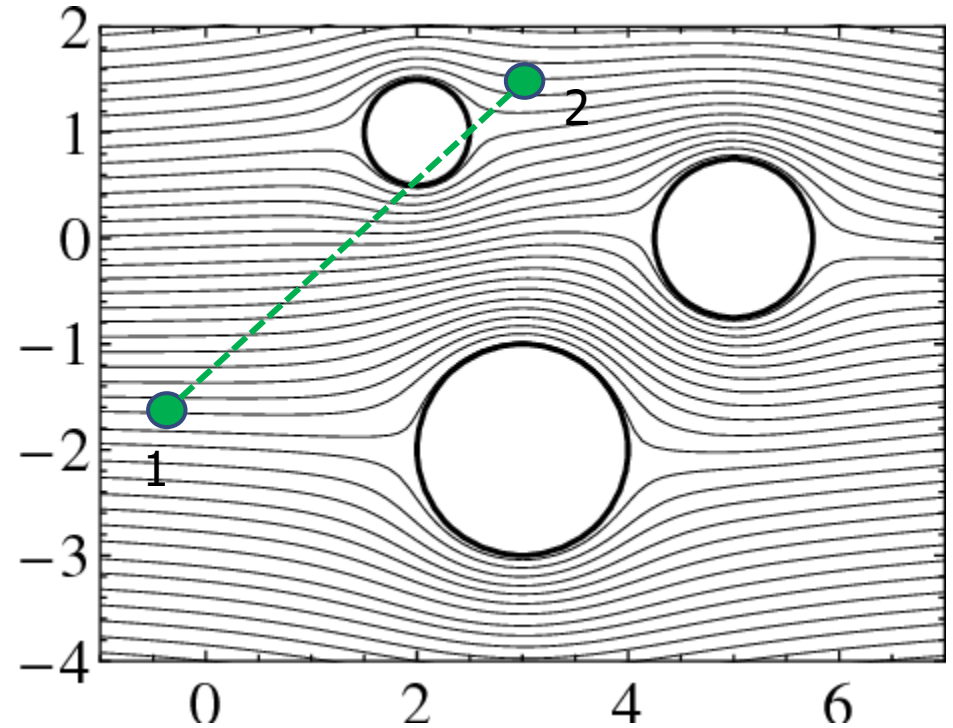
VALIDO ENTRE 2 PUNTOS CUALESQUIERA

Ecuación de Bernoulli a partir de ec. Euler (cantidad movimiento)

Ahora vamos a distinguir dos situaciones distintas:



Flujo rotacional



Flujo irrotacional

$$\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right)_1 = \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right)_2$$

Resumen ecuación de Bernoulli

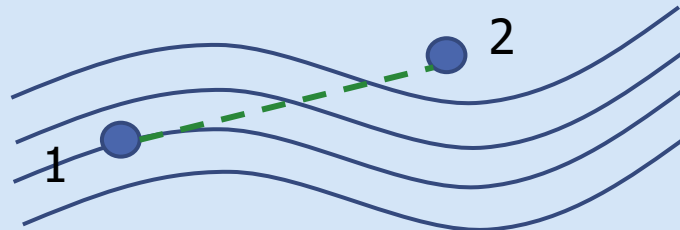
$$\left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = \text{constante}$$

Consideraremos $U = gz$
El módulo de la velocidad lo
escribiremos como V

Bajo las siguientes hipótesis:

- **Flujo estacionario**
- **No viscoso (sin fricción)**
 - **Incompresible**
- Sin transferencia de calor
- Las fuerzas másicas son conservativas

En la práctica consideraremos **flujo irrotacional**, así que la podremos aplicar entre dos puntos cualesquiera (no hace falta que estén en la misma línea de corriente):



Relación entre velocidad, presión y potencial gravitatorio

Observemos la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{constante}$$

- Si $V = 0$ y $U = gz$, recuperamos la ecuación de la fluidostática:

$$p + \rho gz = \text{constante}$$

que nos dice que *"cuando la profundidad aumenta, la presión aumenta"*

- Si $U = 0$ (en aire por ejemplo, donde la densidad es baja), obtenemos:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

que nos dice que **"cuando la velocidad aumenta, la presión disminuye"**

$$\text{Si } V \uparrow \Rightarrow p \downarrow$$

La presión en un punto de remanso es alta

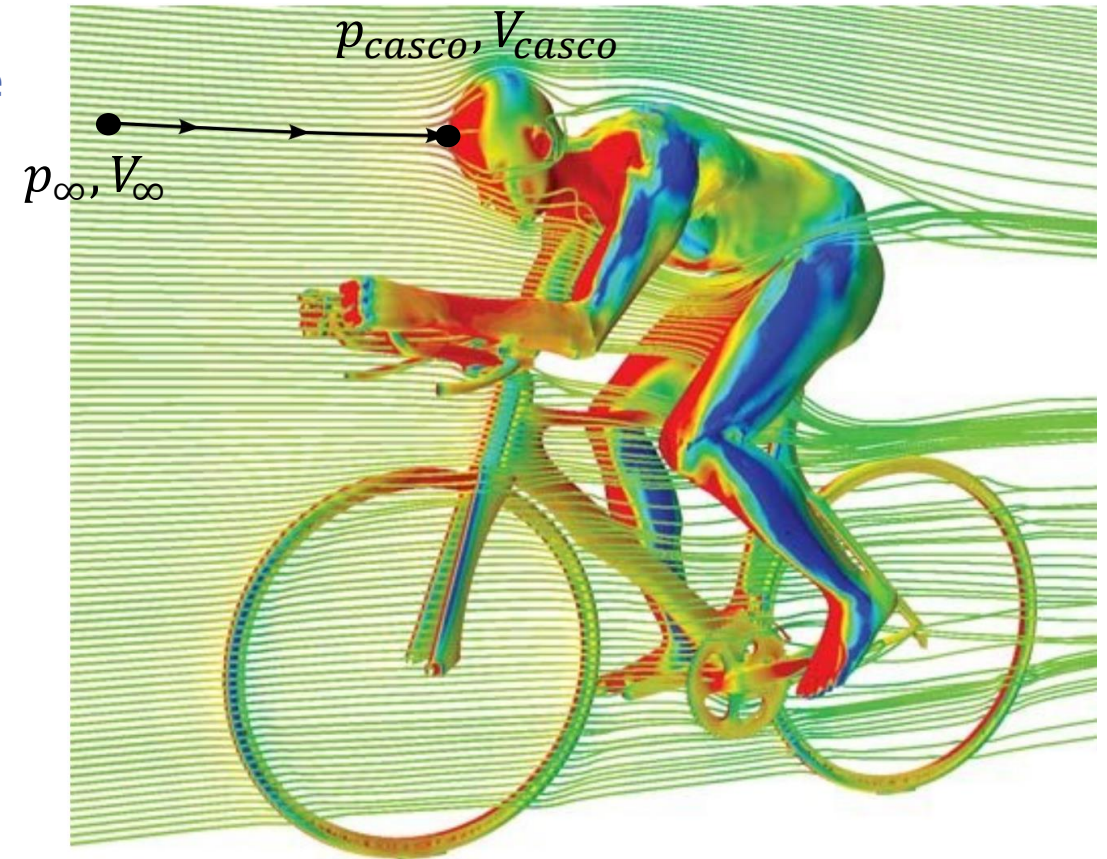
Si aplicamos la ecuación de Bernoulli tomando como referencia el ciclista (velocidades relativas al ciclista), entre un punto lejano y el casco:

$$\left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + U \right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + U \right)_{casco}$$

- Consideramos $U_{\infty} = U_{casco} = 0$
- El punto " ∞ " representa un punto lejos del ciclista:
 - $p_{\infty} = p_{atm}$, presión en el aire lejos del ciclista
 - V_{∞} = velocidad del aire, lejos del ciclista, relativa a éste
- Como en el casco hay un punto de remanso (muere la línea de corriente) $\rightarrow V_{casco} = 0$

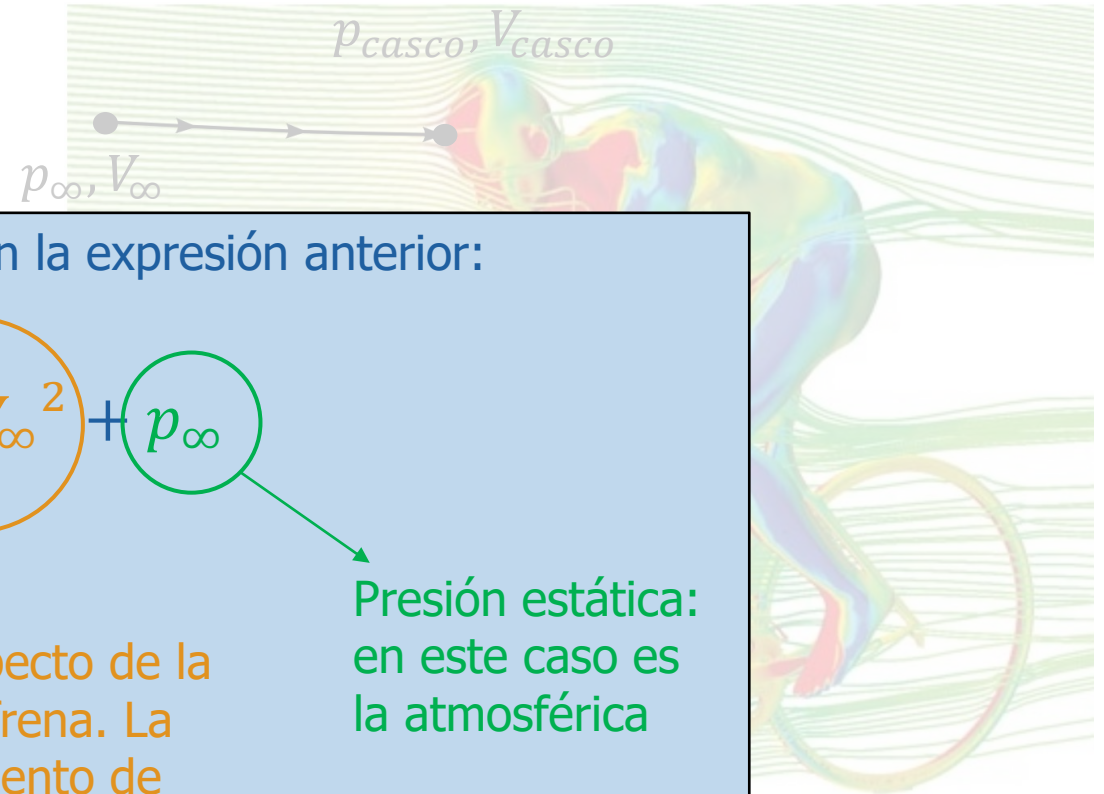
$$\frac{1}{2} V_{\infty}^2 + \frac{p_{\infty}}{\rho} = \frac{p_{casco}}{\rho}$$

$$p_{casco} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 + p_{atm}$$



La presión en un punto de remanso es alta

Si aplicamos la ecuación de Bernoulli tomando como referencia el ciclista (velocidades relativas al ciclista), entre un punto lejano y el casco:



Nomenclatura de los términos de presión en la expresión anterior:

$$p_{\text{remanso}} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 + p_{\infty}$$

Presión dinámica: sobrepresión, respecto de la p. estática, debido a que el flujo se frena. La energía cinética se convierte en aumento de presión

Presión estática: en este caso es la atmosférica

Mecánica de fluidos | Tema 1. Fluidos y fluid



- Presión de remanso: Sobrepresión en (2) debida a que el flujo se frena:
 - ◀ Presión dinámica

- Presión estática: Es la presión termodinámica, es aquella que veríamos si nos moviéramos con el fluido y lo viéramos estático. Se mide mediante un orificio paralelo al flujo (3).

Presión
dinámica:
 $p_2 - p_1 = \rho g(H - h)$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 - p_1 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \Rightarrow V = \sqrt{2g(H - h)}$$

Medición de velocidad aerodinámica: tubo de Pitot

Si aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y (2):

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + U\right)_2$$

- Consideramos aire $U_{\infty} = U_2 = U_3 = 0$
- Consideramos
 - $p_{\infty} = p_{atm}$
 - V_{∞} = velocidad del aire relativa al tubo de Pitot (lejos)

- Como en (2) hay un punto de remanso $\rightarrow V_2 = 0$

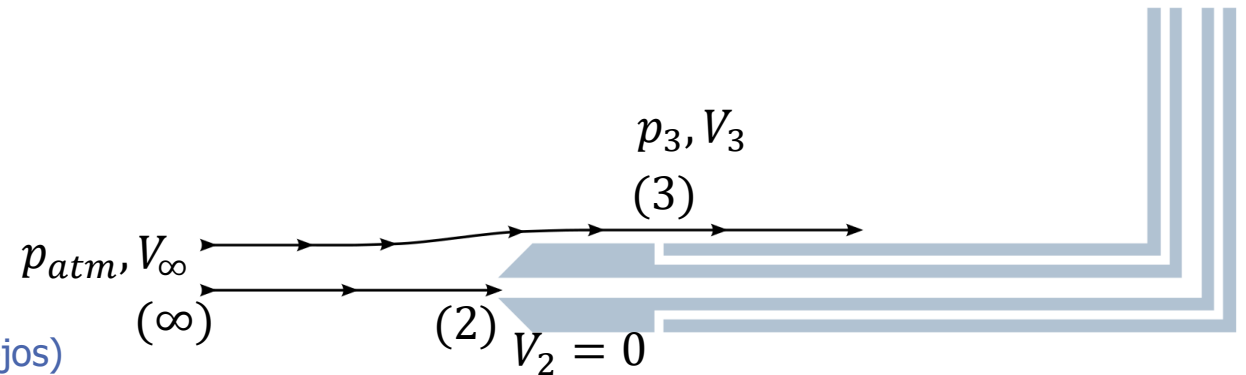
$$p_2 = \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 + p_{\infty}$$

Si ahora aplicamos la ec. de Bernoulli entre (∞) y (3)

$$p_3 = p_{\infty}$$

Combinando ambas:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_3)}{\rho}}$$



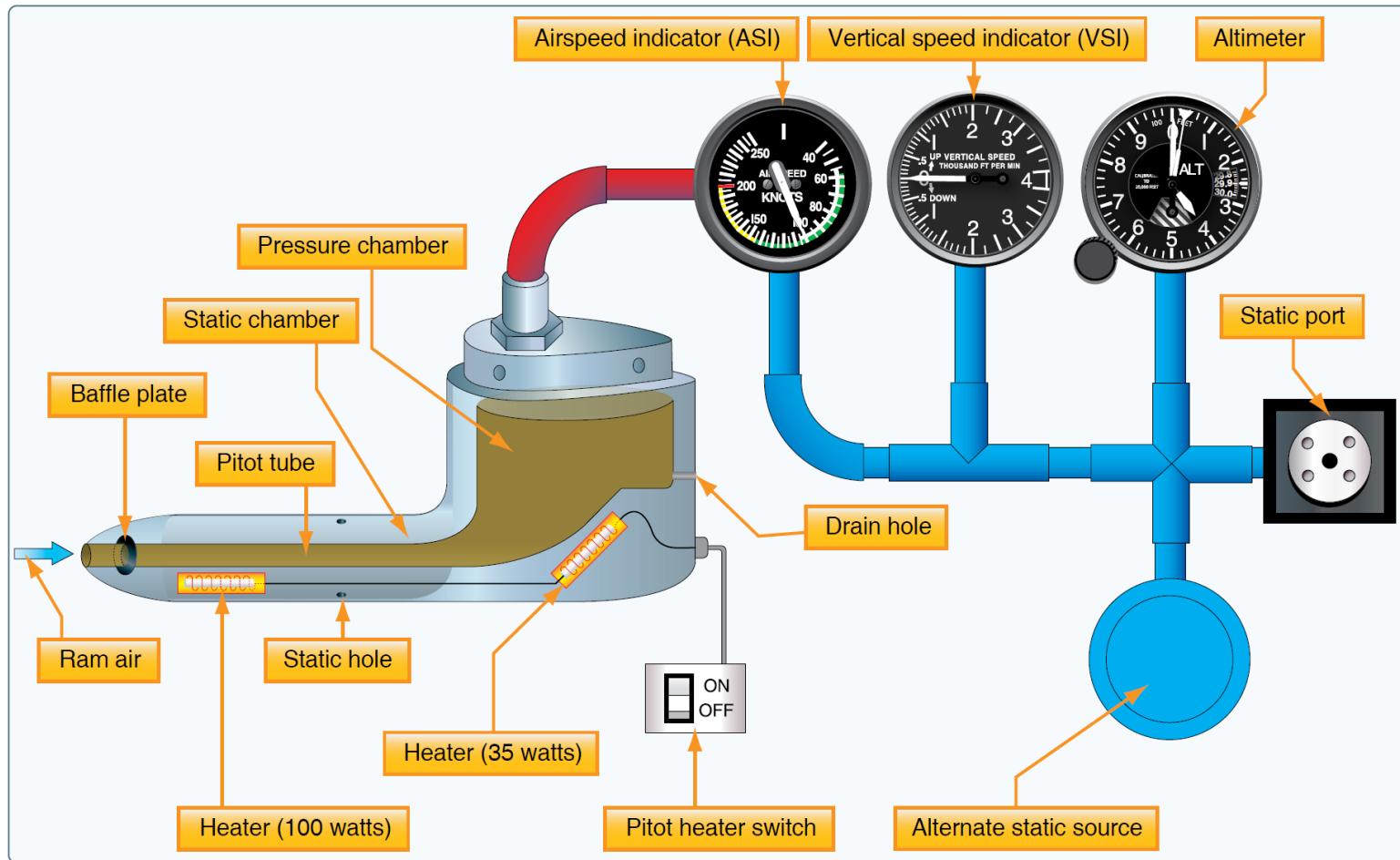
Sistema Pitot-estático en aeronaves



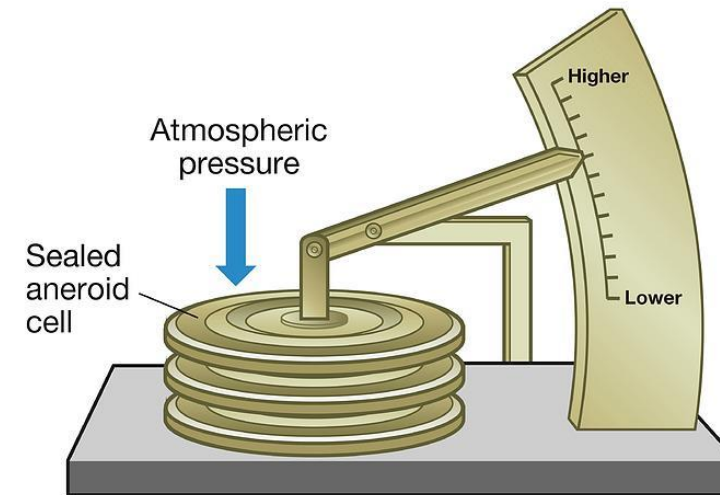
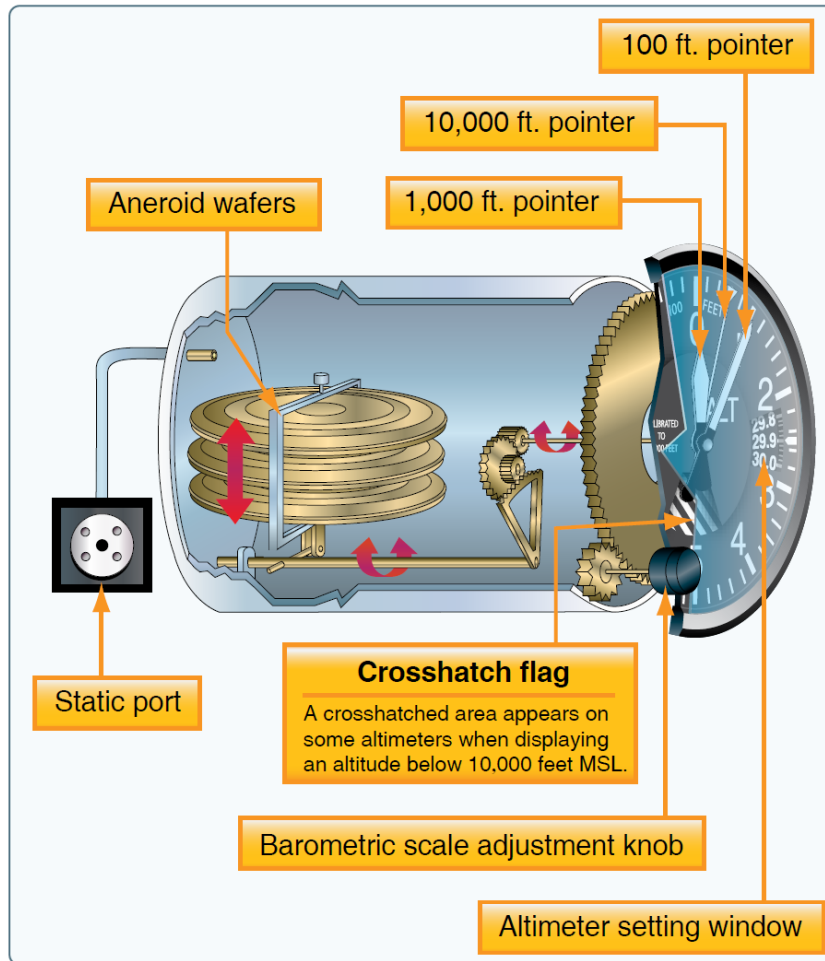
Estos tres instrumentos son fundamentales en la navegación y se basan en medidas de presión estática y dinámica mediante un tubo de Pitot



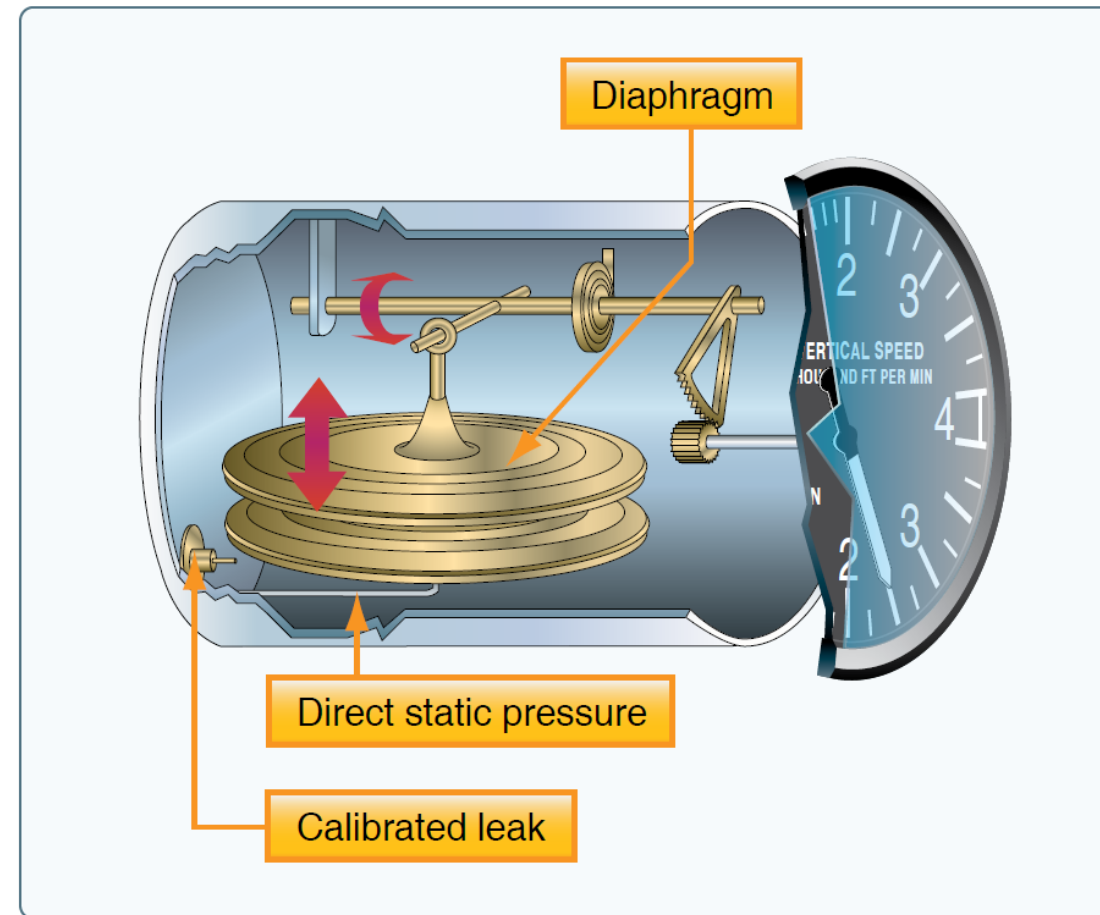
Sistema Pitot-estático en aeronaves



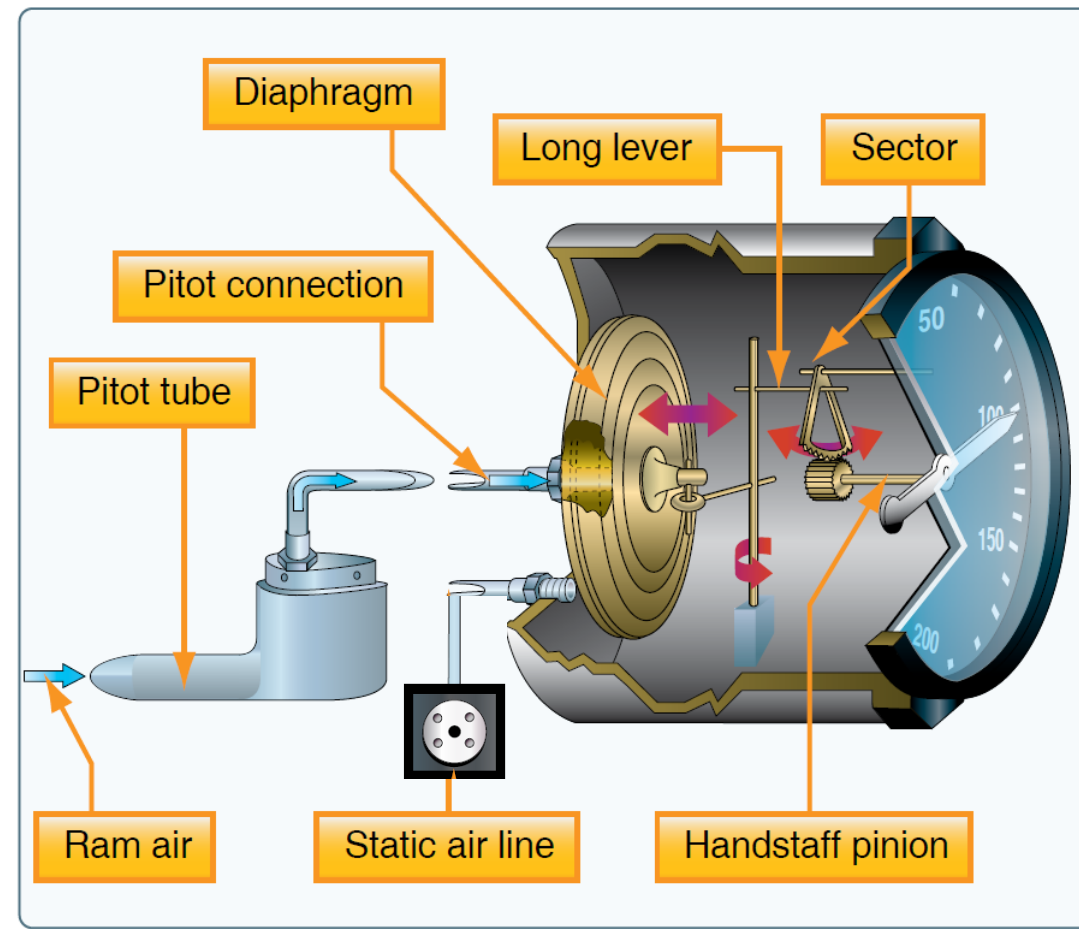
Sistema Pitot-estático en aeronaves - Altímetro



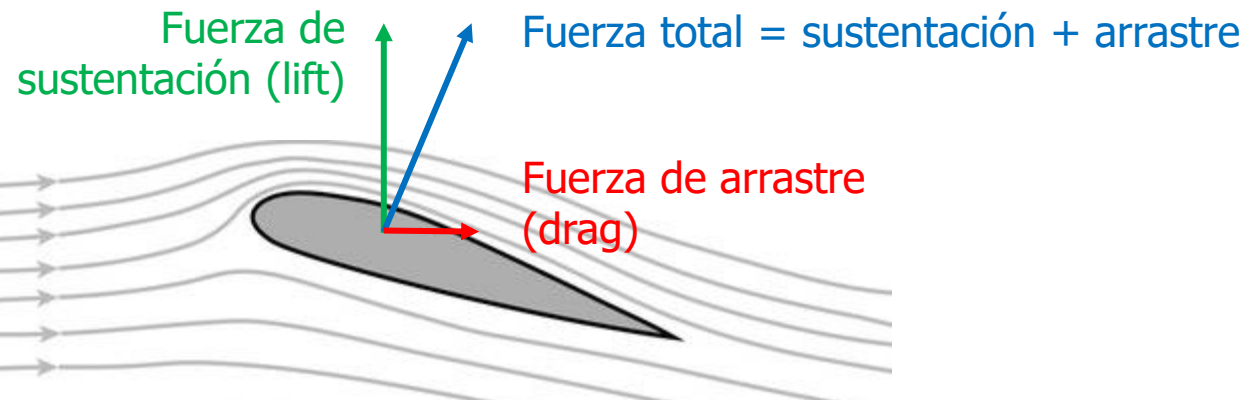
Sistema Pitot-estático en aeronaves – Indicador velocidad vertical



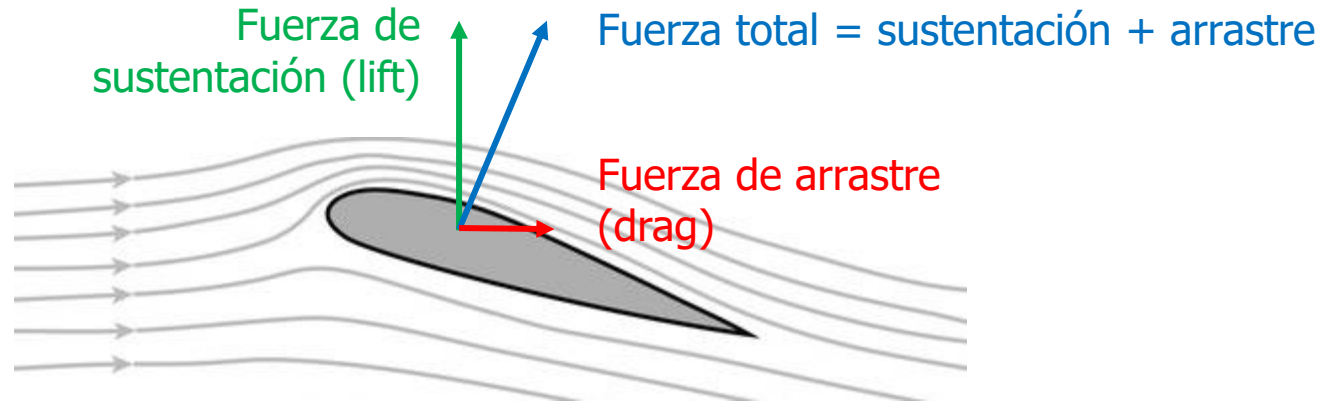
Sistema Pitot-estático en aeronaves – Indicador velocidad aerodinámica



¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica



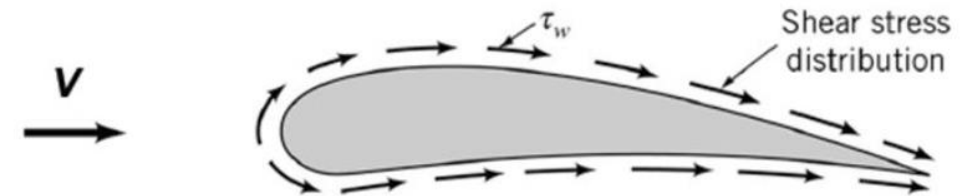
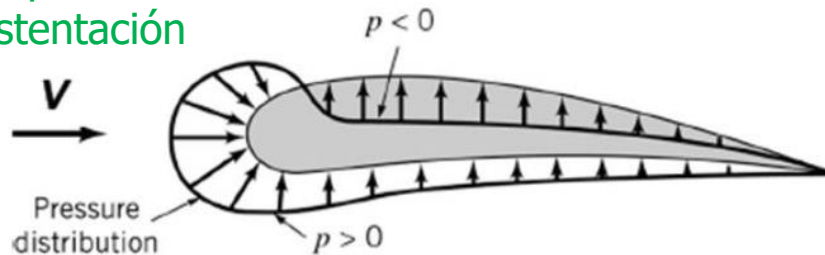
¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica



¿A qué se deben estas fuerzas? La fuerza total es la resultante de la integral de fuerzas de superficie:

$$\int_{SC(t)} -p\hat{n}dS + \int_{SC(t)} \tilde{\tau}_v \cdot \hat{n}dS$$

Es la más importante
para la sustentación



¿Por qué vuelan los aviones?: la sustentación aerodinámica

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y arriba (1):

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_1$$

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y abajo (2):

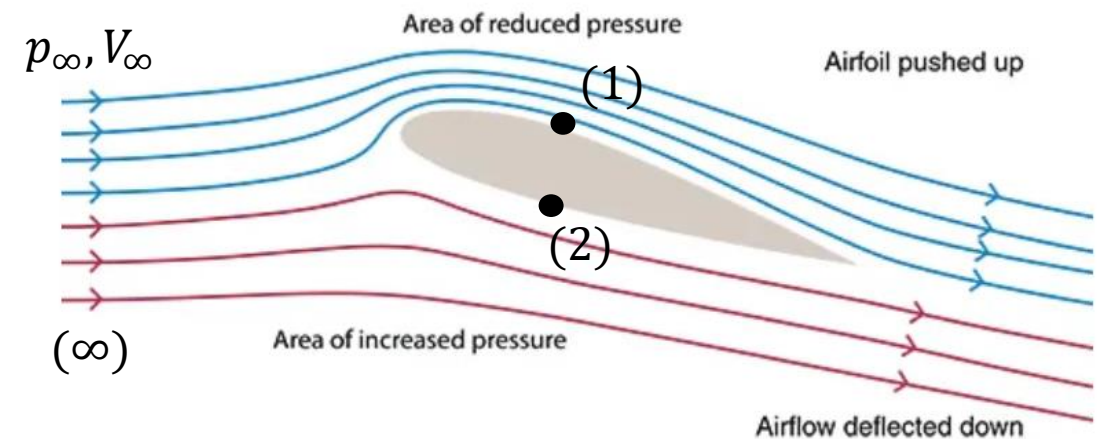
$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_2$$

Igualando ambas:

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Como $V_1 > V_2$ entonces $p_2 > p_1$ lo cual genera una fuerza hacia arriba (fuerza de sustentación, o *lift* en inglés)

[Ver video](#)



Efecto Magnus

Debido a la rotación del balón, el aire se acelera en la zona en la que el giro es favorable al flujo (arriba) y se decelera en la zona contraria (abajo).

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y arriba (1):

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_1$$

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre (∞) y abajo (2):

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right)_2$$

Iguando ambas:

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Como $V_1 > V_2$ entonces $p_2 > p_1$ lo cual genera una fuerza en dirección (2)->(1) que modifica la trayectoria del balón

"Impossible free-kick, Brazil, 1997"

Mecánica de fluidos | Tema 1. Fluidos y fluid

