FLUIDOS Y FLUIR

Mecánica de fluidos

Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS

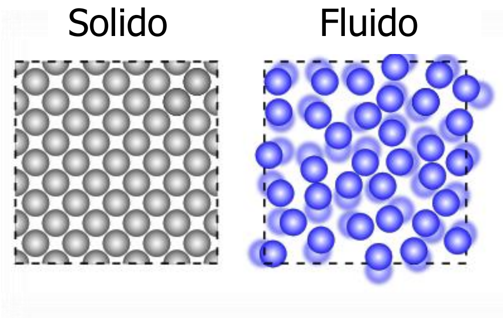
- Concepto de fluido
- Descripción matemática del campo fluido
- Representación y visualización del flujo fluido
- Fuerzas en un fluido
- Propiedades del transporte: viscosidad

Concepto de fluido

Podemos describir los fluidos desde dos puntos de vista distintos:

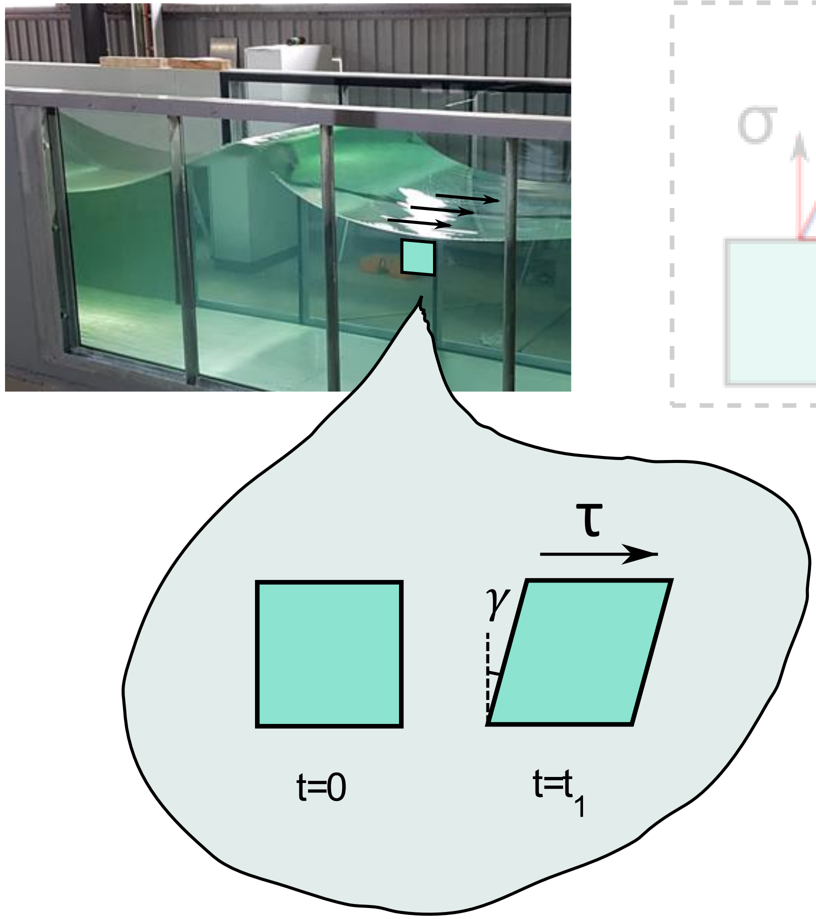
- **Macroscópico:** Descripción observacional
  - Solidos: cuesta deformarlos
  - Fluidos: es fácil deformarlos y fluyen.

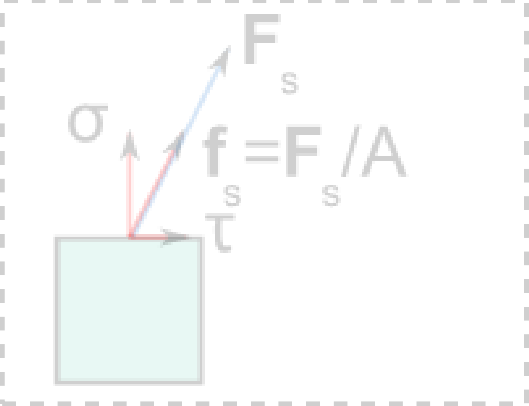
- **Microscópico**: Las propiedades de la materia vienen determinada por su estructura molecular y las fuerzas de cohesión entre las moléculas.
  - Solidos: fuerzas de cohesión muy fuertes
  - Fluidos: fuerzas de cohesión más débiles



Concepto de fluido

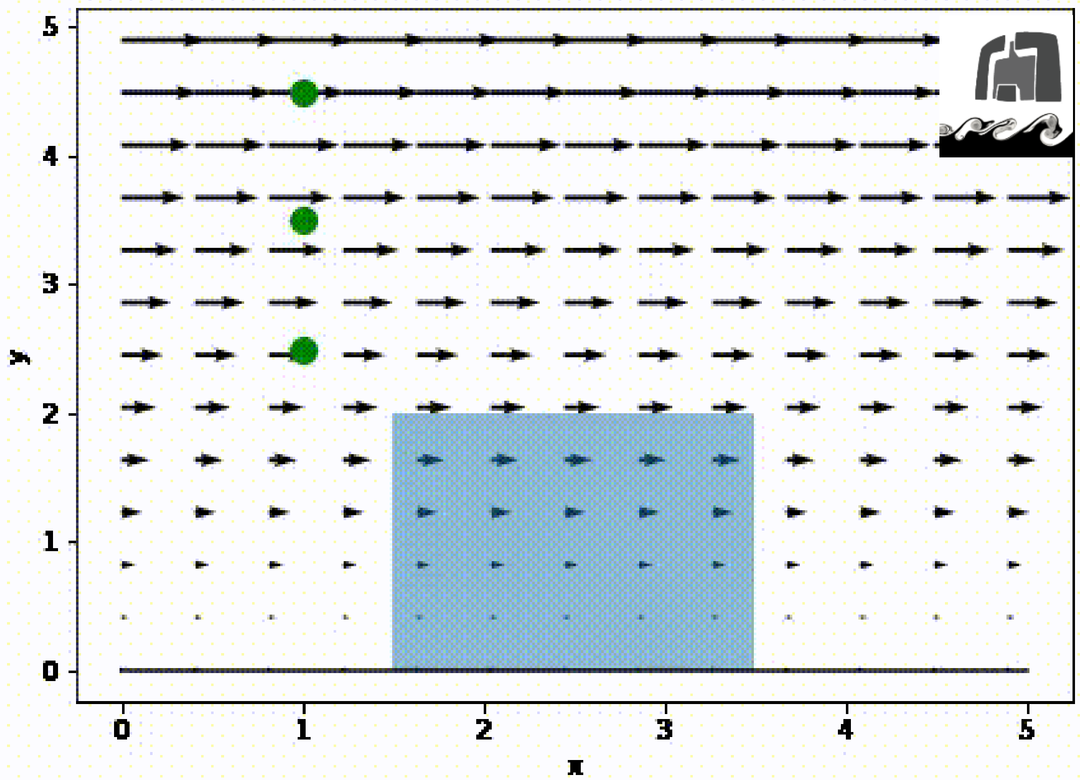
Desde un punto de vista <u>macroscópico</u>, se denomina fluido a un estado de la materia que no resiste **esfuerzos cortantes o tangenciales**, de forma que una fuerza tangencial continua aplicada sobre el fluido produce en el mismo una **velocidad de deformación** continua.



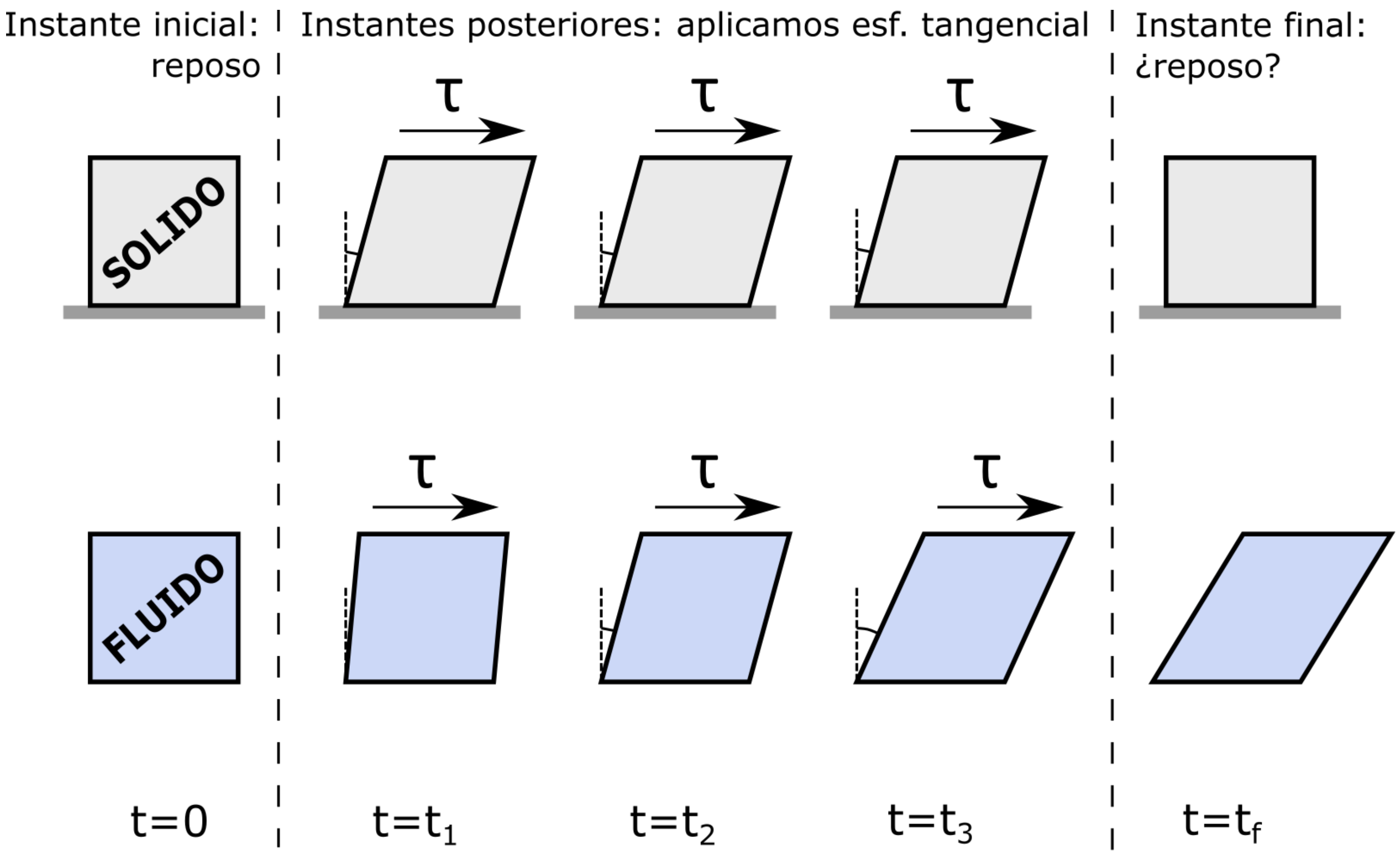


Concepto de fluido

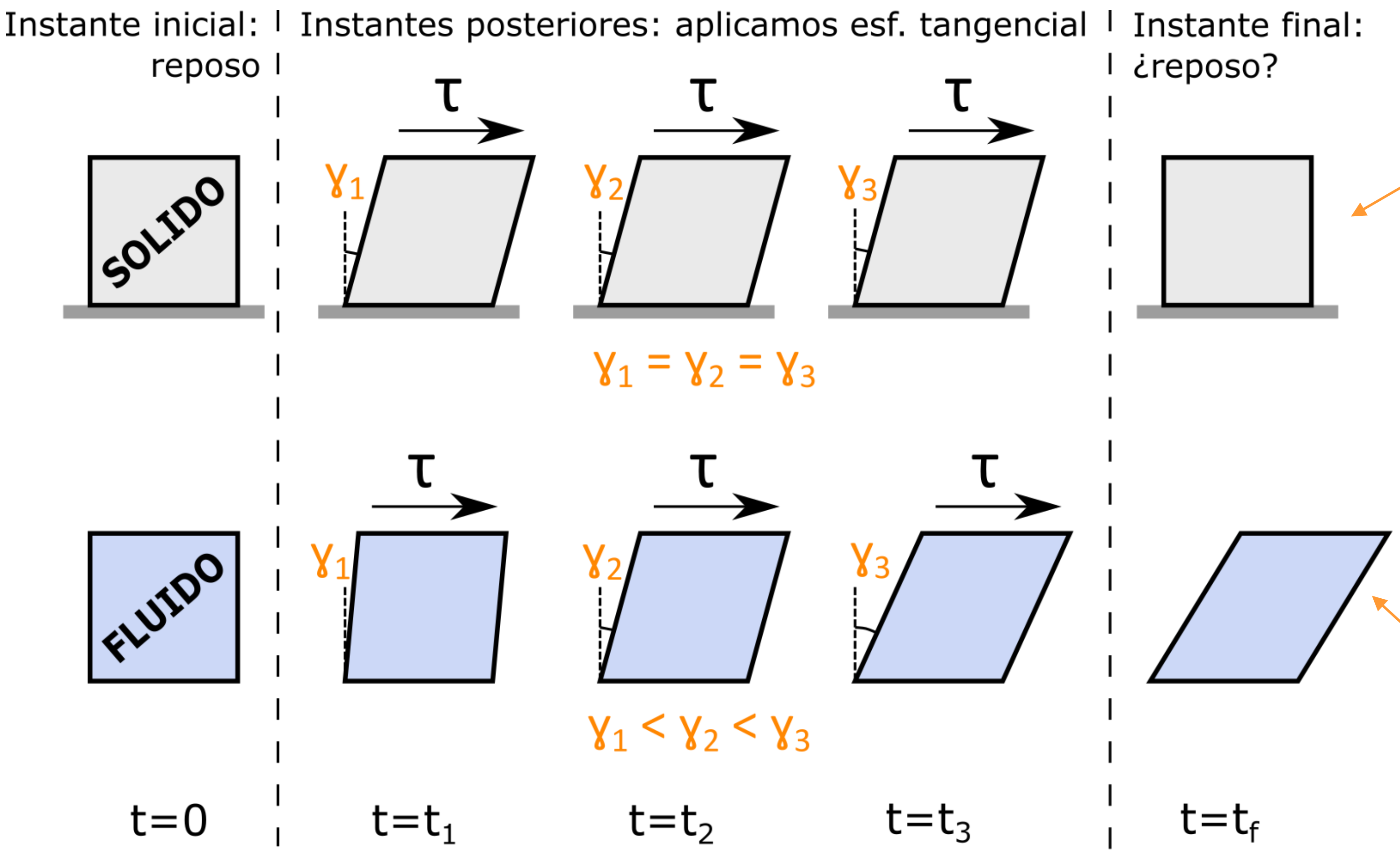
Desde un punto de vista macroscópico, se denomina fluido a un estado de la materia que no resiste **esfuerzos cortantes o tangenciales**, de forma que una fuerza tangencial continua aplicada sobre el fluido produce en el mismo una **velocidad de deformación** continua.



Concepto de fluido



Concepto de fluido



Se recupera la forma original (sup. régimen elástico)

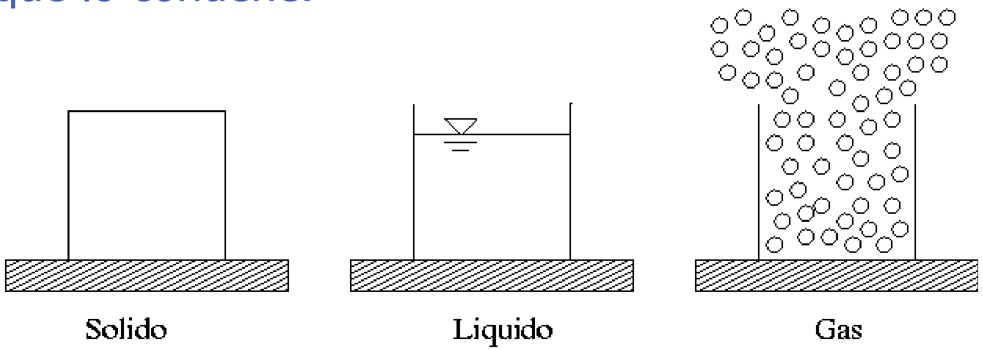
No se recupera la forma original. El esfuerzo ha producido una velocidad de deformación continua.

Descripción microscópica y estados de fluido

Desde un punto de vista microscópico, los fluidos, a diferencia de los sólidos, se caracterizan por tener unas **fuerzas de cohesión** más **débiles** que permiten el **movimiento entre moléculas**.

Dos estados de fluido son claramente diferenciables por observación:

- **Líquido**: Las fuerzas de cohesión entre moléculas son mayores y forma **superficie libre**, en contacto con un gas, bajo acción de fuerzas másicas.
- **Gas**: Las moléculas se encuentran más separadas y su cohesión es menor, siendo sus superficies límite las del recipiente que lo contiene.



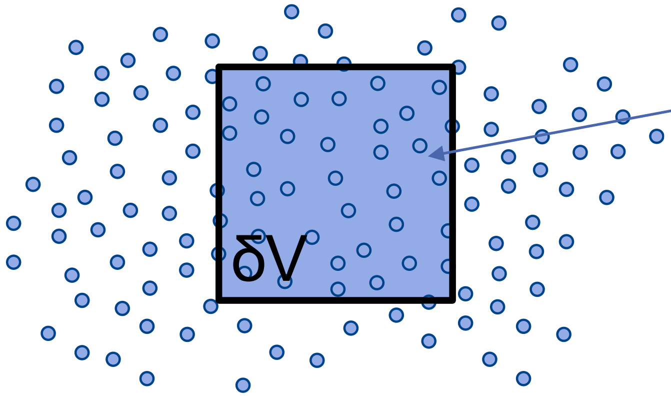
El fluido como medio continuo

- Los fluidos son **discontinuos a nivel molecular** y no son microscópicamente homogéneos: están formados por moléculas en movimiento y sus propiedades varían de un punto a otro en esas escalas. Entonces, **¿cómo podemos definir las propiedades de un fluido?**

Utilizaremos **variables promedio**, integradas en volúmenes donde haya un gran número de moléculas. Por ejemplo, la densidad se calculará como:

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V}$$

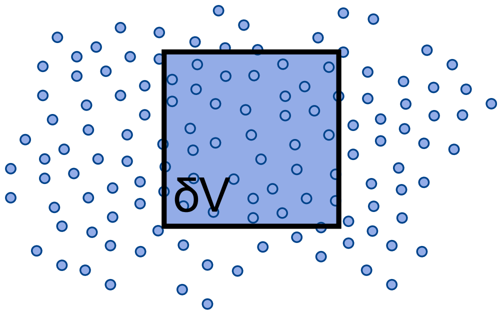
donde δm es la masa contenida en un volumen δV

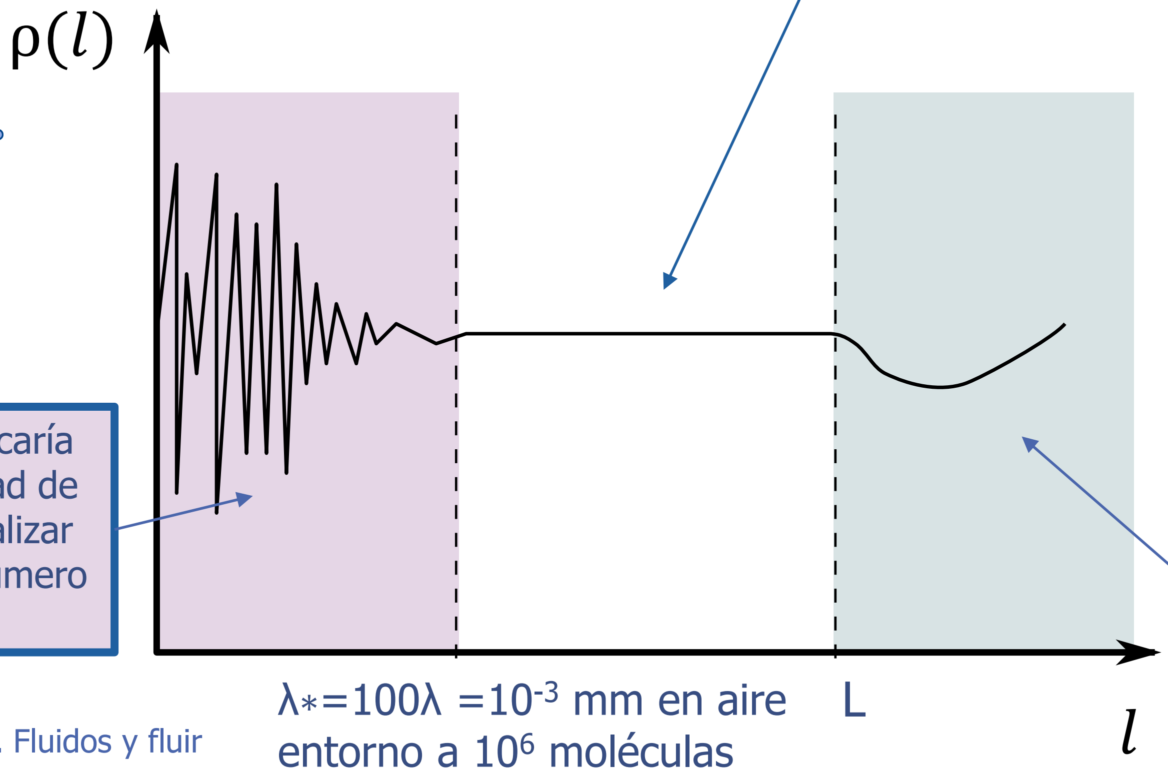


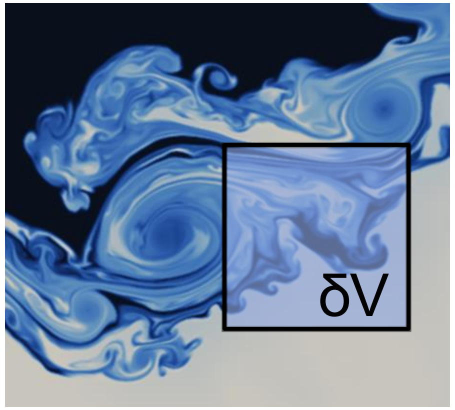
Partícula fluida: porción de volumen δV

El fluido como medio continuo

Se trabaja con volúmenes δV tales que $l = \sqrt[3]{\delta V}$ sea mucho menor que la longitud L característica asociada al problema (por ejemplo, en una tubería su diámetro), y que sea mucho mayor que el recorrido libre medio de las moléculas λ, es decir: $\boxed{\lambda \ll l \ll L}$





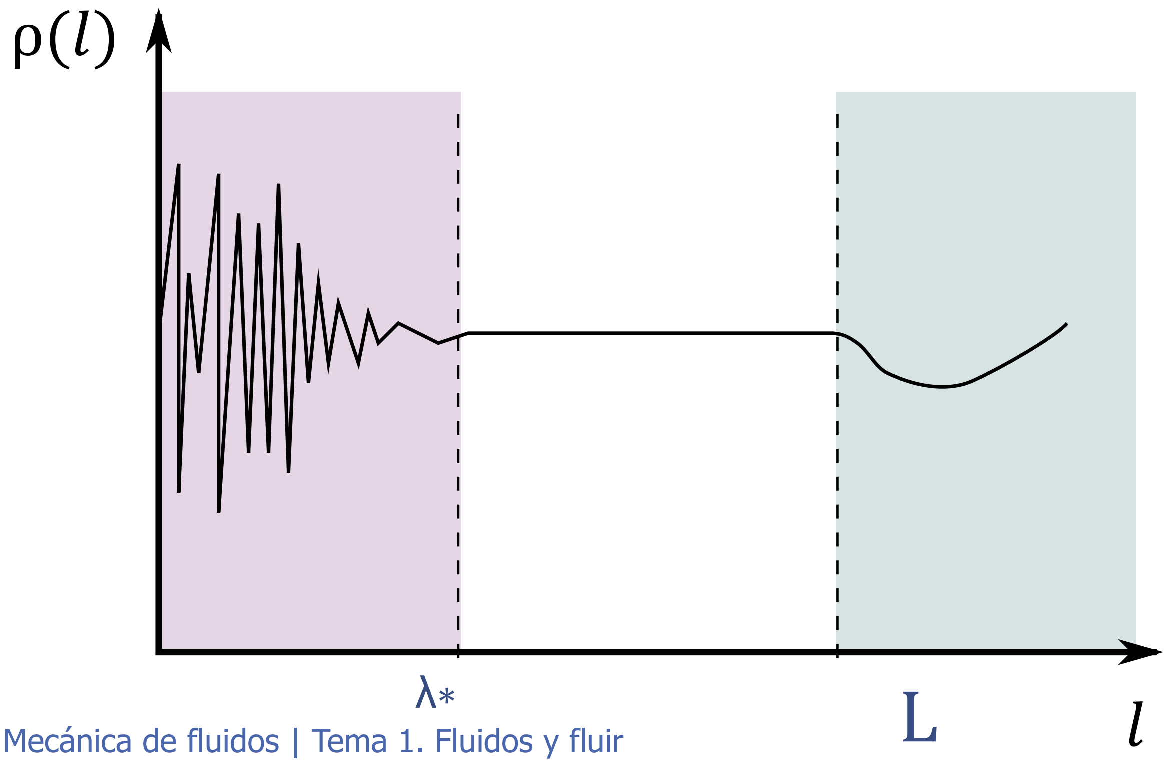


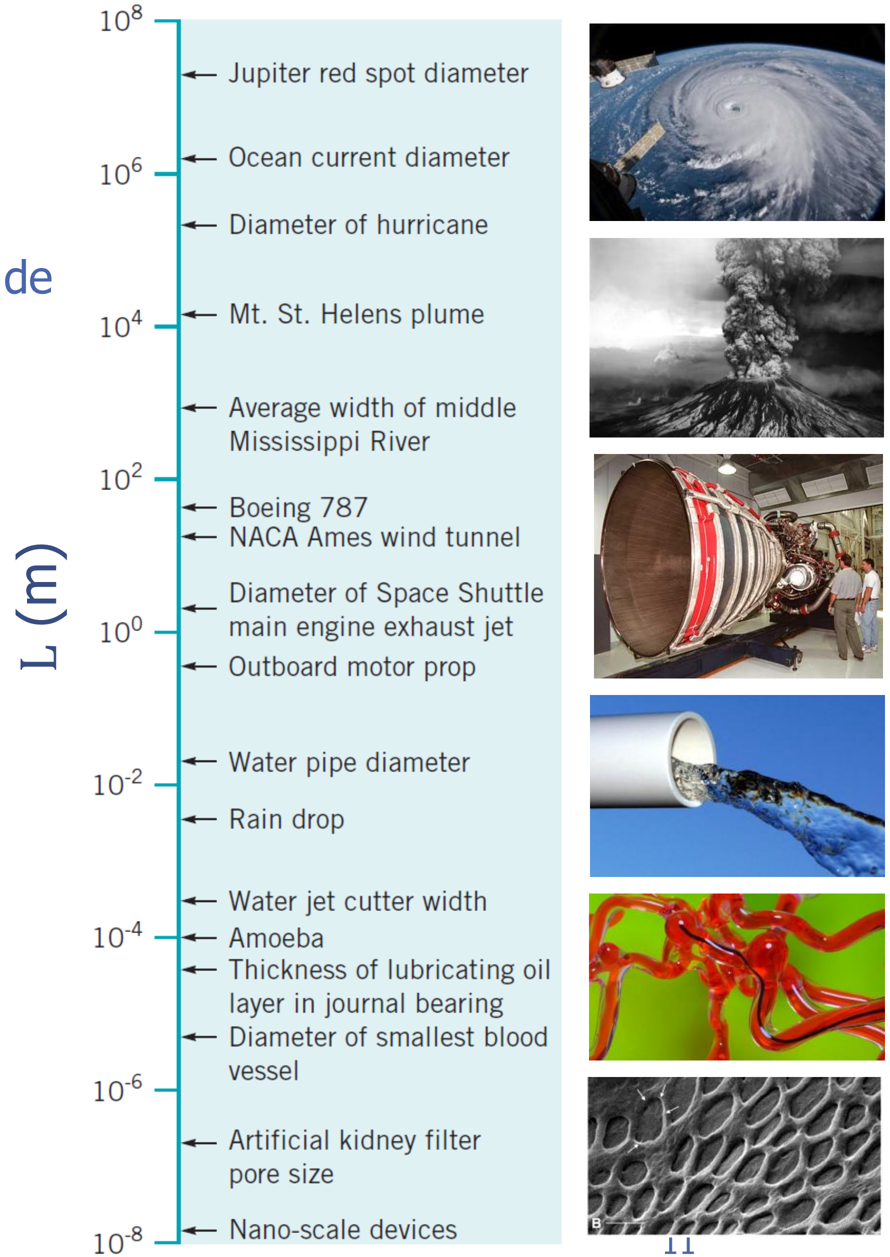
Valores más próximos a λ provocaría fluctuaciones en la homogeneidad de las propiedades medidas por realizar el promedio sobre insuficiente número de moléculas

Valores mayores nos haría perder la resolución necesaria para observar fenómenos locales.

El fluido como medio continuo

Algunos valores típicos de longitudes características, L (extraído de *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Bruce R. Munson, 2016):





Tipos de flujos

Número de fases termodinámicas

- Monofásico
- Multifásico (p.ej: líquido + gas)

Variación con el tiempo

- Estacionario (no)
- Transitorio (sí)

Variación de la densidad

- Incompresible (no)
- Compresible (sí)

Velocidad del fluido mayor o menor que velocidad del sonido?

- Subsónico (menor)
- Supersónico (mayor)
- Transónico (pasa de menor a mayor o viceversa)

Papel de la viscosidad

- Ideal (viscosidad nula)
- Viscoso (viscosidad dominante)

Tipo de fuerzas dominantes

- Laminar (fuerzas viscosas)
- Turbulento (fuerzas inerciales)

Dimensiones y unidades

- La medida por la que una variable física se expresa cuantitativamente se denomina ***dimensión*** *ó magnitud.* Es el nombre que damos a esa variable física. Por ejemplo la dimensión que permite medir el espacio entre dos puntos es la *longitud,* y se denota por L:

$$\boxed{\text{Longitud} = \text{L}}$$

- Para asignar valores cuantitativos a la variable se utiliza la ***unidad***. En el ejemplo anterior una de las posibles unidades a emplear para la magnitud *longitud* es el *metro:*

$$\boxed{\text{Longitud} = 3\ \text{metros}}$$

- Se pueden definir distintas referencias de *unidades* para las mismas *dimensiones*, si bien es preciso mantener la coherencia de unidades en su utilización. Los sistemas de unidades más utilizados son el Sistema Internacional (S.I.), el Sistema Británico (B.G.), y el Sistema Cegesimal (C.G.S).

Dimensiones y unidades

- Las dimensiones básicas son:

Primary dimension	SI unit	BG unit	Conversion factor
Mass $\{M\}$	Kilogram (kg)	Slug	1 slug = 14.5939 kg
Length $\{L\}$	Meter (m)	Foot (ft)	1 ft = 0.3048 m
Time $\{T\}$	Second (s)	Second (s)	1 s = 1 s
Temperature $\{\Theta\}$	Kelvin (K)	Rankine (°R)	1 K = 1.8°R

- El resto se derivan de las anteriores:

Secondary dimension	SI unit	BG unit	Conversion factor
Area $\{L^2\}$	m^2	ft^2	$1\ m^2 = 10.764\ ft^2$
Volume $\{L^3\}$	m^3	ft^3	$1\ m^3 = 35.315\ ft^3$
Velocity $\{LT^{-1}\}$	m/s	ft/s	1 ft/s = 0.3048 m/s
Acceleration $\{LT^{-2}\}$	m/s^2	ft/s^2	$1\ ft/s^2 = 0.3048\ m/s^2$
Pressure or stress $\{ML^{-1}T^{-2}\}$	$Pa = N/m^2$	lbf/ft^2	$1\ lbf/ft^2 = 47.88\ Pa$
Angular velocity $\{T^{-1}\}$	s^{-1}	s^{-1}	$1\ s^{-1} = 1\ s^{-1}$
Energy, heat, work $\{ML^2T^{-2}\}$	$J = N \cdot m$	$ft \cdot lbf$	$1\ ft \cdot lbf = 1.3558\ J$
Power $\{ML^2T^{-3}\}$	W = J/s	$ft \cdot lbf/s$	$1\ ft \cdot lbf/s = 1.3558\ W$
Density $\{ML^{-3}\}$	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$1\ slug/ft^3 = 515.4\ kg/m^3$
Viscosity $\{ML^{-1}T^{-1}\}$	$kg/(m \cdot s)$	$slugs/(ft \cdot s)$	$1\ slug/(ft \cdot s) = 47.88\ kg/(m \cdot s)$
Specific heat $\{L^2T^{-2}\Theta^{-1}\}$	$m^2/(s^2 \cdot K)$	$ft^2/(s^2 \cdot °R)$	$1\ m^2/(s^2 \cdot K) = 5.980\ ft^2/(s^2 \cdot °R)$

Dimensiones y unidades. Ejemplo

Ejemplo 1.1 - Comprobar si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea:

$$V = V_0 + at$$

donde *V* es la velocidad de un cuerpo en un tiempo *t* sometido a una aceleración *a* y con una velocidad inicial *V0.*

Dimensiones y unidades. Ejemplo

Ejemplo 1.1 - Comprobar si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea:

$$V = V_0 + at$$

donde *V* es la velocidad de un cuerpo en un tiempo *t* sometido a una aceleración *a* y con una velocidad inicial *V0.*

Solución:

La notación [b] indica "dimensiones de la variable "b"

Primero escribimos las variables en función de las dimensiones básicas:

$$[V] \coloneqq LT^{-1}, \qquad [V_0] \coloneqq LT^{-1}, \qquad [a] \coloneqq LT^{-2}, \qquad [t] \coloneqq T$$

Después sustituimos en la ecuación y comprobamos que las dimensiones del lado izquierdo coinciden con las del lado derecho:

$$LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-2}T \quad \rightarrow \quad LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-1}$$

Propiedades termodinámicas mas relevantes

- En un fluido, podemos considerar la existencia de un **equilibrio termodinámico local y temporal** que permite definir las variables termodinámicas y la ecuación de estado que las relaciona.
- Las propiedades termodinámicas más importantes son:
  - Densidad: ρ
  - Presión: p
  - Temperatura: T
- Otras propiedades termodinámicas son:
  - Energía interna: u
  - Entropía: s
  - Entalpía: $h = u + p/\rho$
  - Calores específicos: c_p y c_v

Propiedades termodinámicas mas relevantes

Densidad

- La densidad de un fluido se define como la **masa de una sustancia por unidad de volumen** que ocupa, cuando el volumen tiende a uno infinitesimal de referencia que no puede ser nulo por la hipótesis de continuo:

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

$[\rho] = \frac{M}{L^3}$ uds. SI: kg/m^3

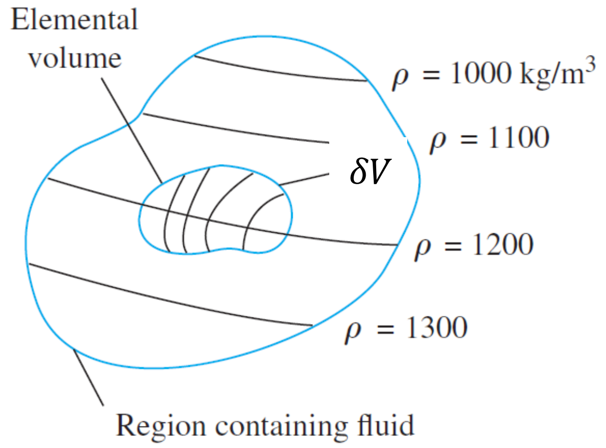
donde δV^* debe cumplir $\frac{\sqrt[3]{\delta V^*}}{\lambda} = 100$ como hemos visto en la diapositiva 9.

- La densidad es una función puntual $\rho(x, y, z)$. Si consideramos un fluido homogéneo, entonces el cálculo se simplifica a:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

donde m es la masa total y V es el volumen total.

- En gases, es función de la presión y temperatura $\rho(p, T)$; en líquidos, se considera constante.



Propiedades termodinámicas mas relevantes

Densidad. *Magnitudes derivadas*

- Volumen específico: Es el volumen por unidad de masa (la inversa de la densidad)

$$v = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{[v] = \frac{L^3}{M} \quad \text{uds. SI: } m^3/kg}$$

- Peso específico: Es el peso por unidad de volumen

$$\gamma = \rho g$$

$$\boxed{[\gamma] = \frac{M}{L^2 T^2} \quad \text{uds. SI: } kg/m^2s^2}$$

Propiedades termodinámicas mas relevantes

Presión

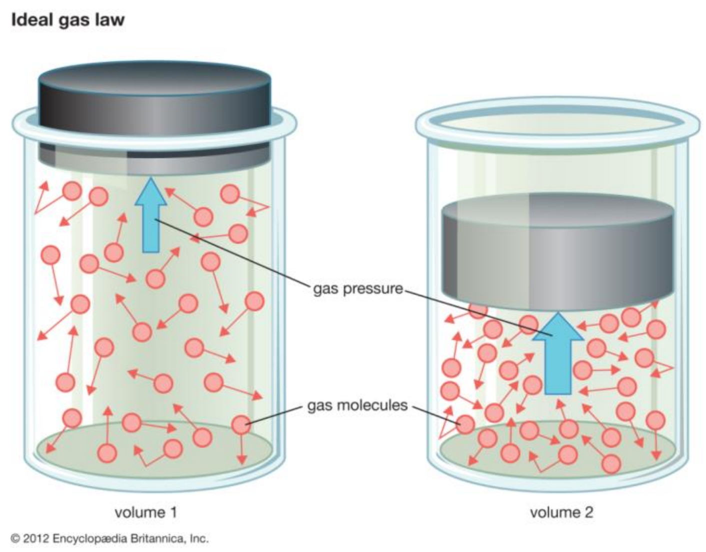
- Punto de vista microscópico → fuerza de colisión de las moléculas por unidad de superficie, actuando sobre una superficie plana imaginaria que separa dos capas de fluido.
- La presión en un punto es la **relación entre la fuerza normal y la superficie del plano sobre la que actúa la fuerza**, a medida que el área se aproxima a un valor muy pequeño que incluya sólo un punto:

$$p = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta F}{\delta S}$$

$$\boxed{[p] = \frac{M}{LT^2} \quad \text{uds. SI: N/m}^2}$$

- La presión es una función puntual $p(x, y, z)$. Si la fuerza es constante en toda la superficie, se simplifica a:

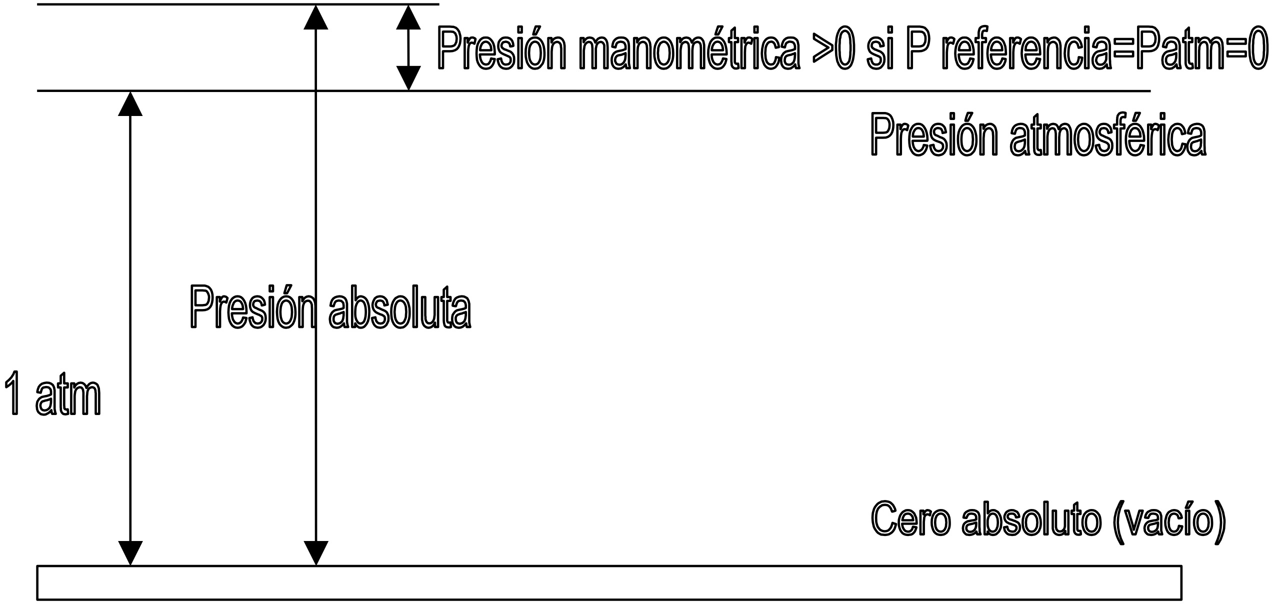
$$p = \frac{F}{S}$$



Propiedades termodinámicas mas relevantes

Presión atmosférica y manométrica

- Presión atmosférica: presión en la superficie terrestre de la columna de aire de la atmósfera
- Se define como presión manométrica la diferencia de presión respecto de la presión atmosférica: $p_{man} = p_{abs} - p_{atm}$



Propiedades termodinámicas mas relevantes

Presión. Unidades habituales

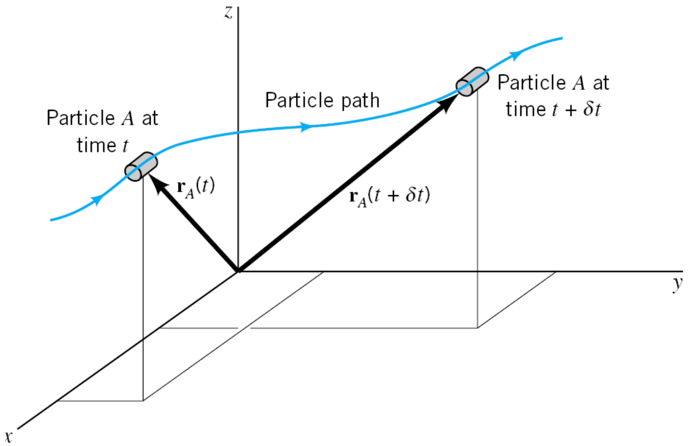
Unidad	Equivalencia
1 pascal (Pa)	1 kg m^{-1} s^{-2}
1 bar	1 x 10^5 Pa
1 atmósfera (atm)	101,325 Pa
1 torr	1 / 760 atm
760 mm Hg	1 atm
14.696 pounds per sq. in. (psi)	1 atm

Descripción del campo fluido

Siguiendo la hipótesis de medio continuo, el campo fluido se puede modelar como un conjunto de partículas fluidas que se trasladan, rotan y se deforman. Existen dos maneras distintas de describir el movimiento de un fluido:

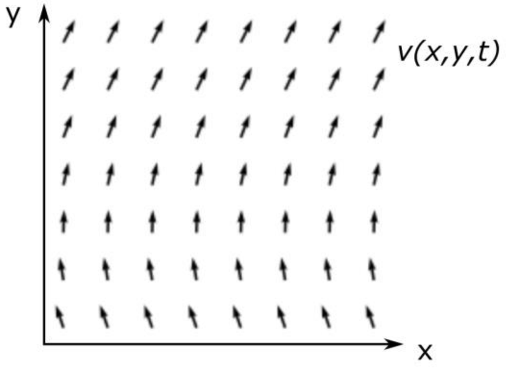
- **Descripción lagrangiana:** se identifican partículas fluidas y se sigue su movimiento en el espacio. Para cada partícula fluida, que identificamos por su posición inicial $\vec{x}_0$, la descripción lagrangiana proporciona su posición a lo largo del tiempo:

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0), \qquad \vec{v}(t, \vec{x}_0) = \frac{d\vec{x}(t, \vec{x}_0)}{dt}, \qquad \vec{a}(t, \vec{x}_0) = \frac{d\vec{v}(t, \vec{x}_0)}{dt}$$



- **Descripción euleriana**: se identifican puntos fijos del espacio y se obtienen las propiedades del flujo en esos puntos. La descripción euleriana proporciona la velocidad en cualquier punto del espacio a lo largo del tiempo

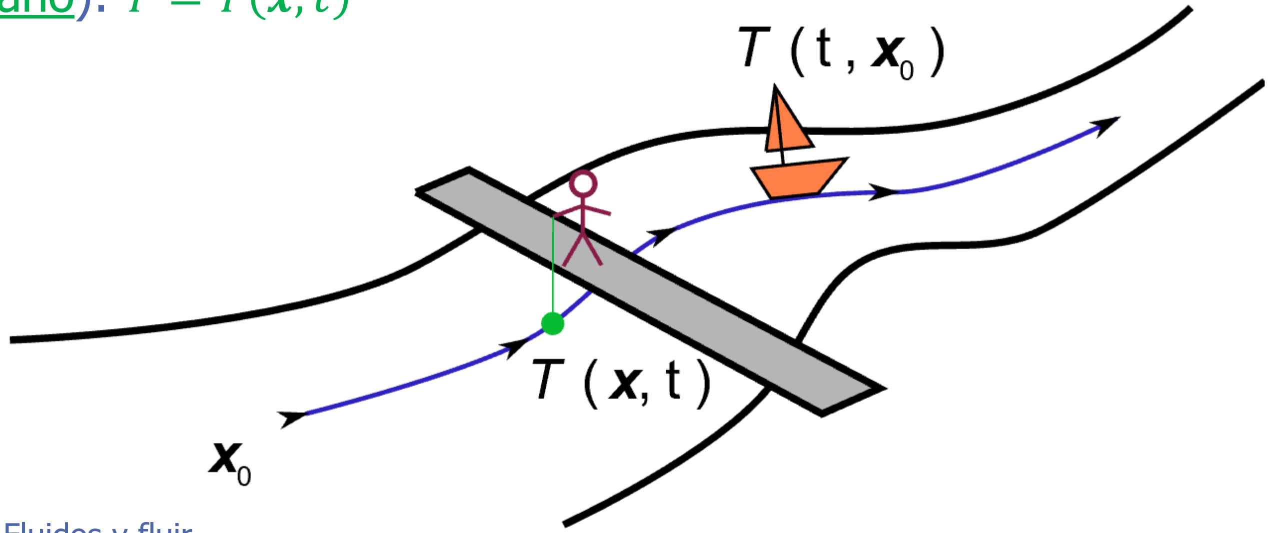
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t), \qquad \vec{a}(x, t) = \frac{D\vec{v}(\vec{x}, t)}{Dt}$$



Descripción del campo fluido – Un ejemplo

Cualquier propiedad del flujo (velocidad, temperatura, presión, densidad…) se puede expresar en un contexto lagrangiano o euleriano. Por ejemplo, si queremos conocer la temperatura en un rio, podemos hacerlo de dos maneras distintas:

- Colocar un termómetro en un pequeño barco que viaje a la velocidad del flujo solidario a una partícula fluida que ha pasado por $\vec{x}_0$, y registrar la temperatura al transportarse (contexto lagrangiano): $T = T(t, \vec{x}_0)$
- Colgar un termómetro desde un puente y registrar la temperatura en un punto fijo (contexto euleriano): $T = T(\vec{x}, t)$



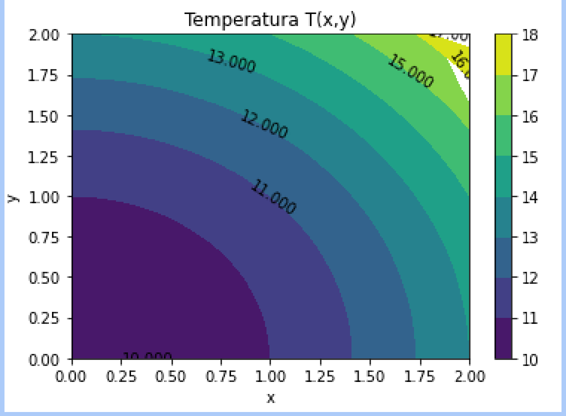
Descripción del campo fluido

¿Cómo son las variables? *(ejemplo euleriano)*

- <u>ESCALARES</u> que generalmente dependen de la posición y tiempo

$$\boxed{T = T(x, y, z, t)}$$

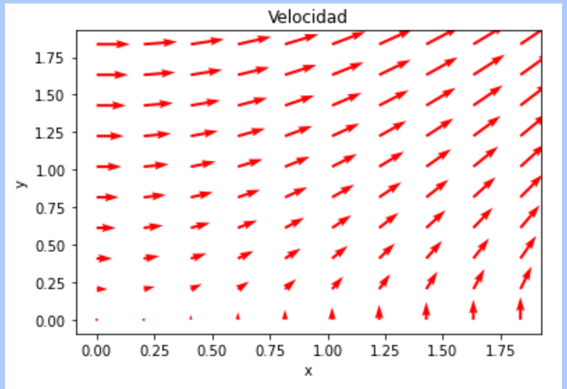
Temperatura
Presión
Concentración de un contaminante



- <u>VECTORES</u> que generalmente dependen de la posición y tiempo

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Posición
Velocidad
Aceleración
Fuerzas



<u>Notación vector</u>: en negrita y con flecha

- <u>TENSORES</u> que generalmente dependen de la posición y tiempo (lo omitimos aquí)

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}$$

Esfuerzos viscosos
Velocidades de deformación

<u>Notación tensor</u>: en negrita y con gorro

Descripción del campo fluido

¿Cómo son las variables? *(ejemplo euler*

- ESCALARES que generalmente dependen de la posic

$$\boxed{T = T(x, y, z, t)}$$

- VECTORES que generalmente dependen de la posic

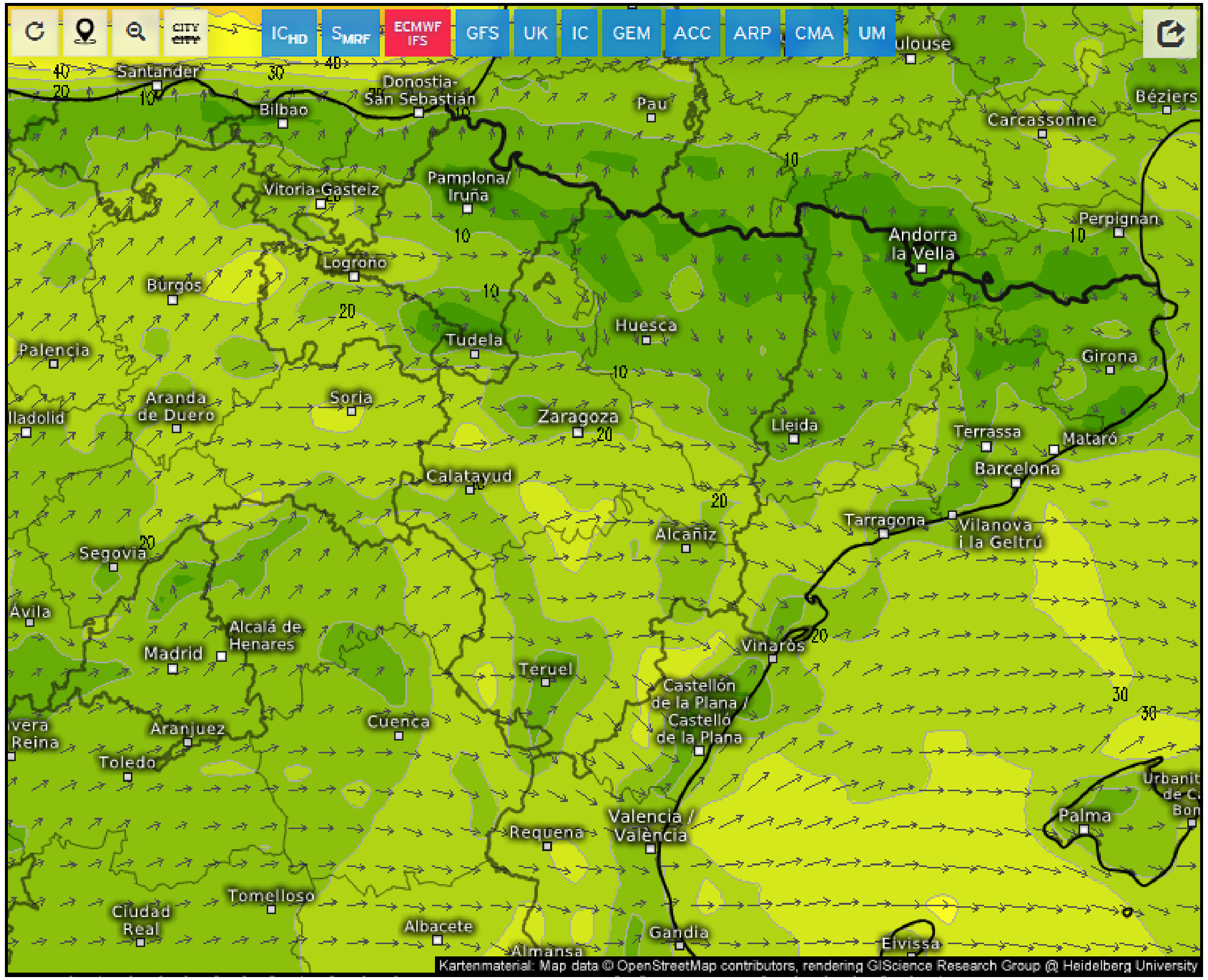
$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{pmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Notación vector: en negrita y con flecha

- TENSORES que generalmente dependen de la posic

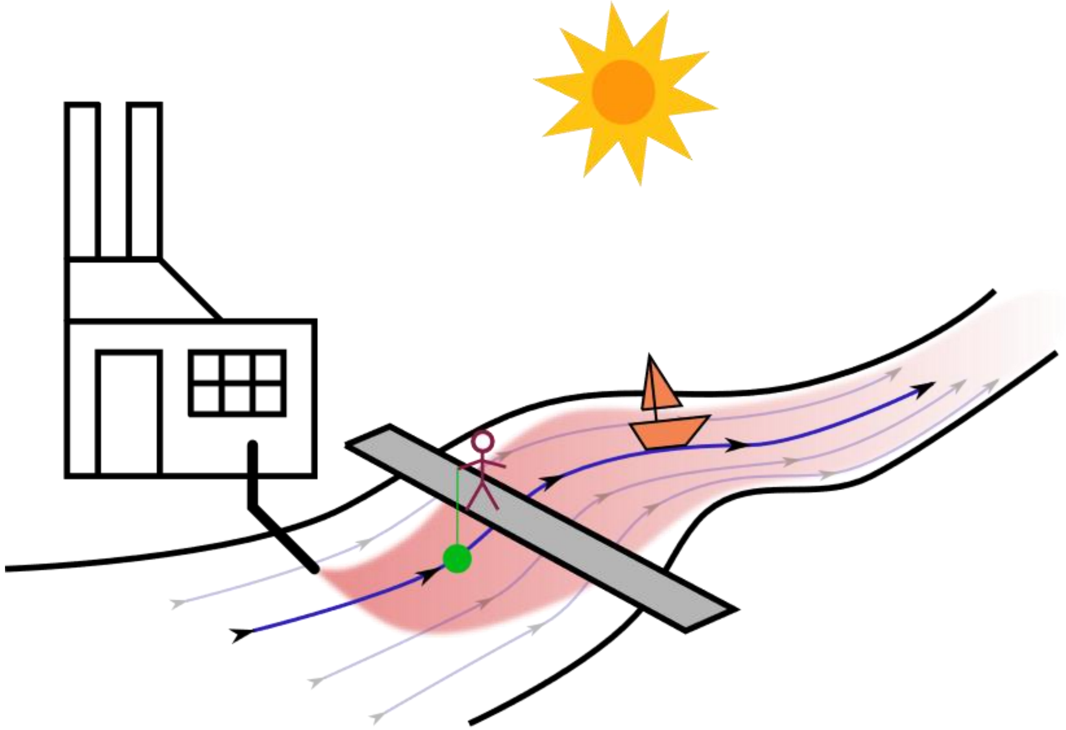
$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

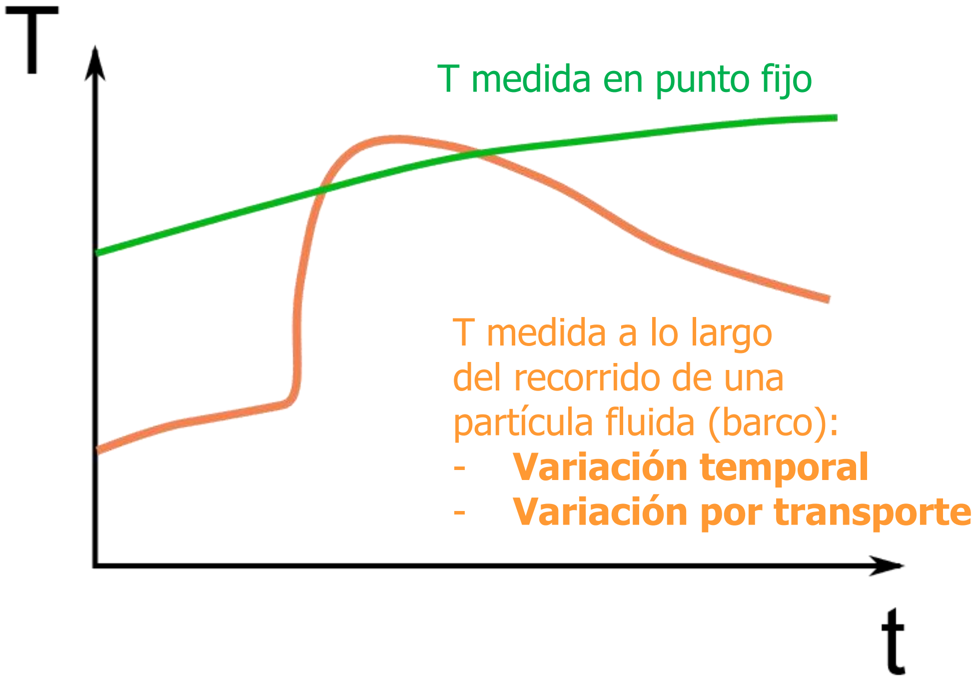
Notación tensor: en negrita y con gorro



Derivada material

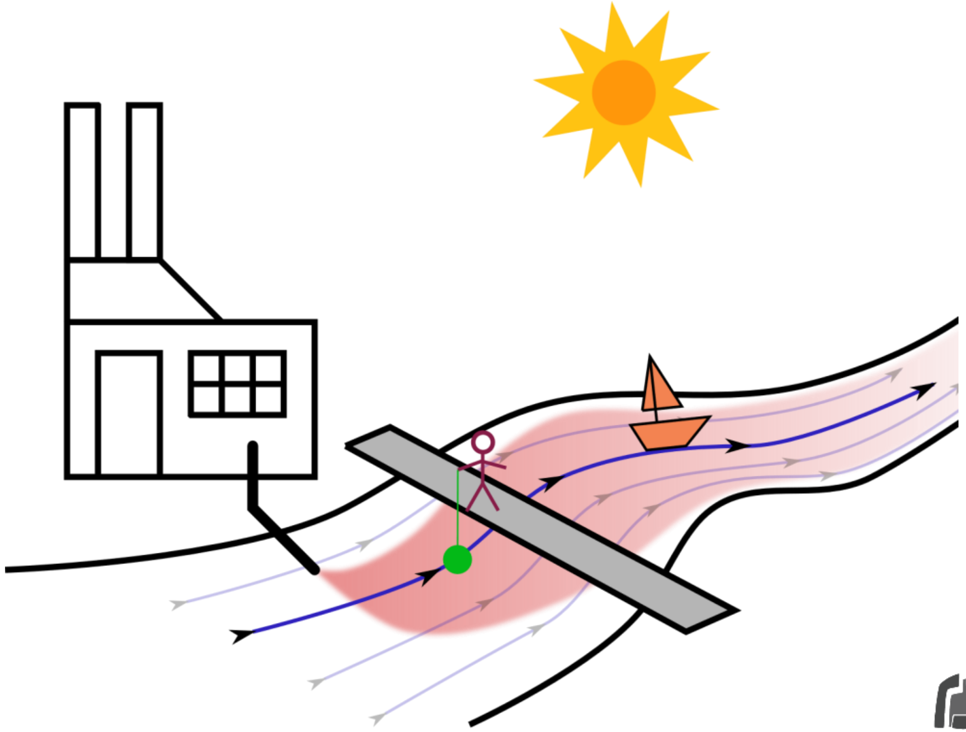
- ¿Cómo varía la temperatura cuando nos desplazamos siguiendo una partícula fluida?

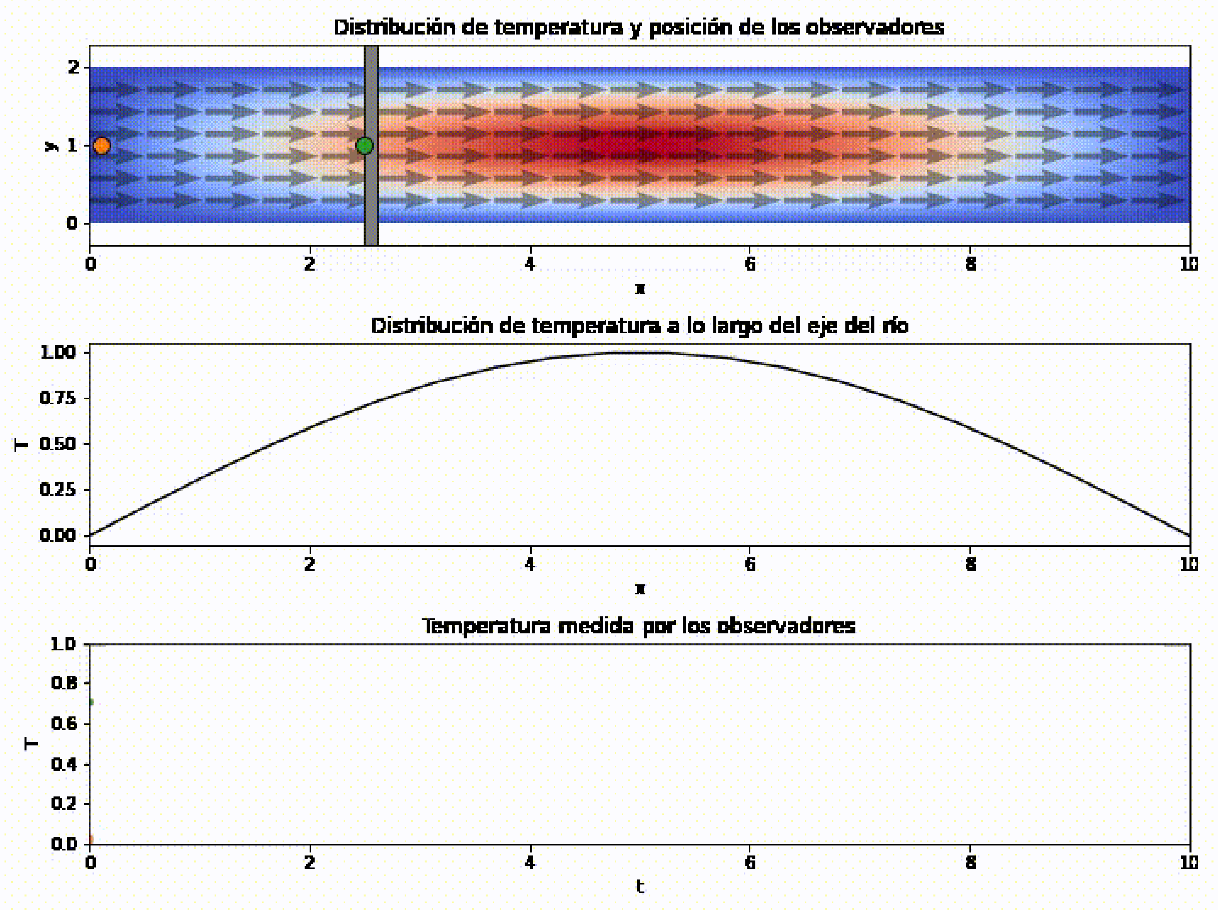




Derivada material

- ¿Cómo varía la temperatura cuando nos desplazamos siguiendo una partícula fluida?





Ejemplo sin variación temporal de T

Derivada material

- Contexto euleriano → propiedades del flujo en puntos fijos (e.g. $T = T(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$). Si queremos conocer la variación de una propiedad (e.g. temperatura T) en el tiempo, no podemos hacer simplemente la derivada $\partial T(\vec{\boldsymbol{x}}, t)/\partial t$ ya que además hay que considerar que esta propiedad cambia debido al transporte en el seno del fluido. Debemos calcular su **derivada siguiendo una partícula fluida**.

- Para ello, expresamos primero la temperatura en función de la posición de una partícula fluida: $T\left(\vec{\boldsymbol{x}}_p(t, \vec{\boldsymbol{x}}_0), t\right)$, donde $\vec{\boldsymbol{x}}_p(t, \vec{\boldsymbol{x}}_0)$ es la posición de la partícula fluida con origen en $\boldsymbol{x}_0$.

- Ahora, calculamos la derivada temporal de esta expresión. Como la posición $\vec{\boldsymbol{x}}_p$ depende del tiempo, aplicamos la regla de la cadena. A esta derivada la denominamos ***derivada material*** (también *derivada sustancial* o *total*):

$$\frac{D}{Dt}(T(\vec{\boldsymbol{x}}, t)) := \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial T}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial T}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w} = \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla T}$$

Producto escalar: $|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\nabla T| \cdot \cos\theta$

Derivada local: $\frac{\partial T}{\partial t}$ (estacionario si $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$)

Gradiente espacial: $\nabla T = (\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$

Velocidad del flujo: $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$

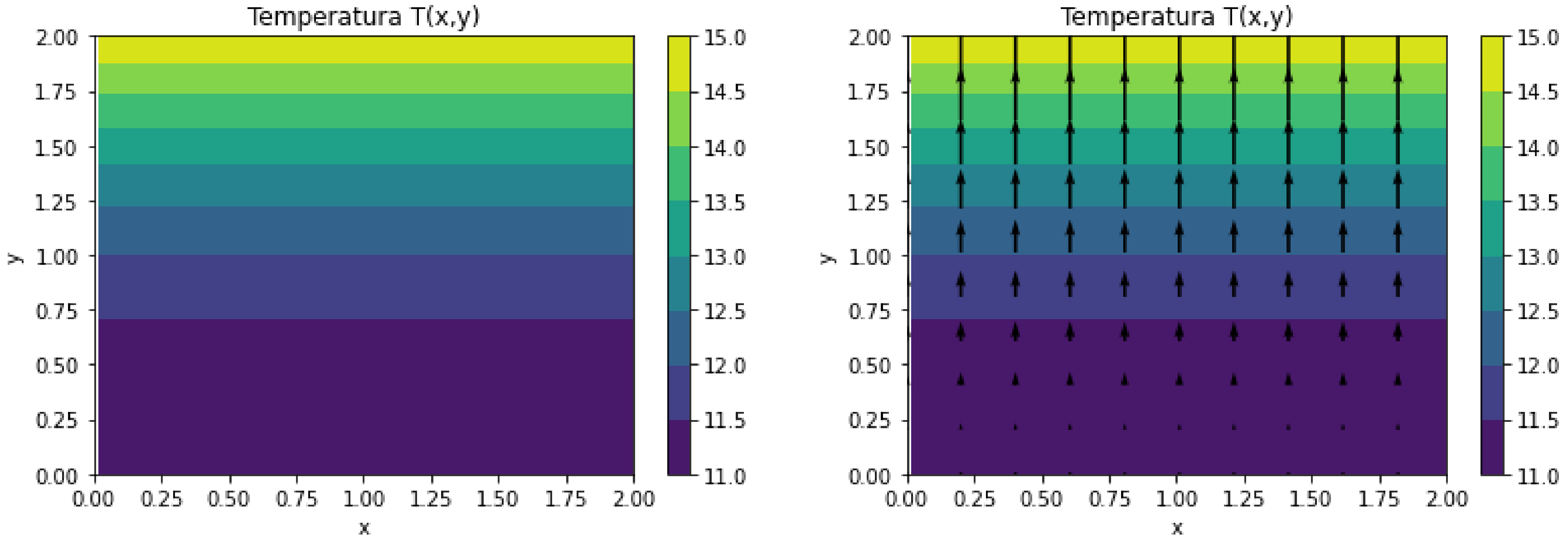
Derivada convectiva (deriv. direccional)

Recordatorio: gradiente de un escalar T

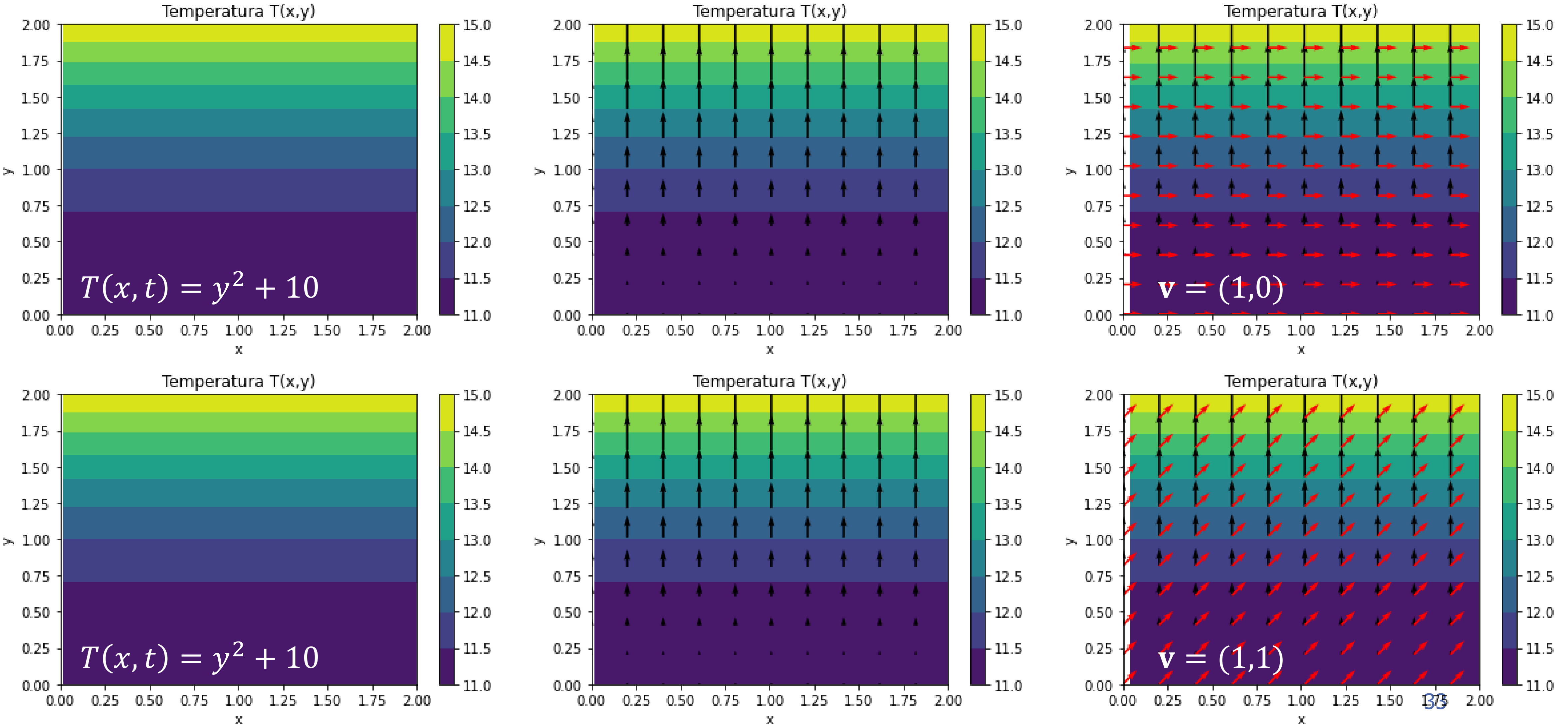
- El gradiente es un vector (campo vectorial)
- Su dirección indica la dirección de máxima variación de T en cada punto
- Es perpendicular a las isolíneas de T (curvas de nivel)
- La derivada direccional de T en la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}}$ será $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla T$

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2D

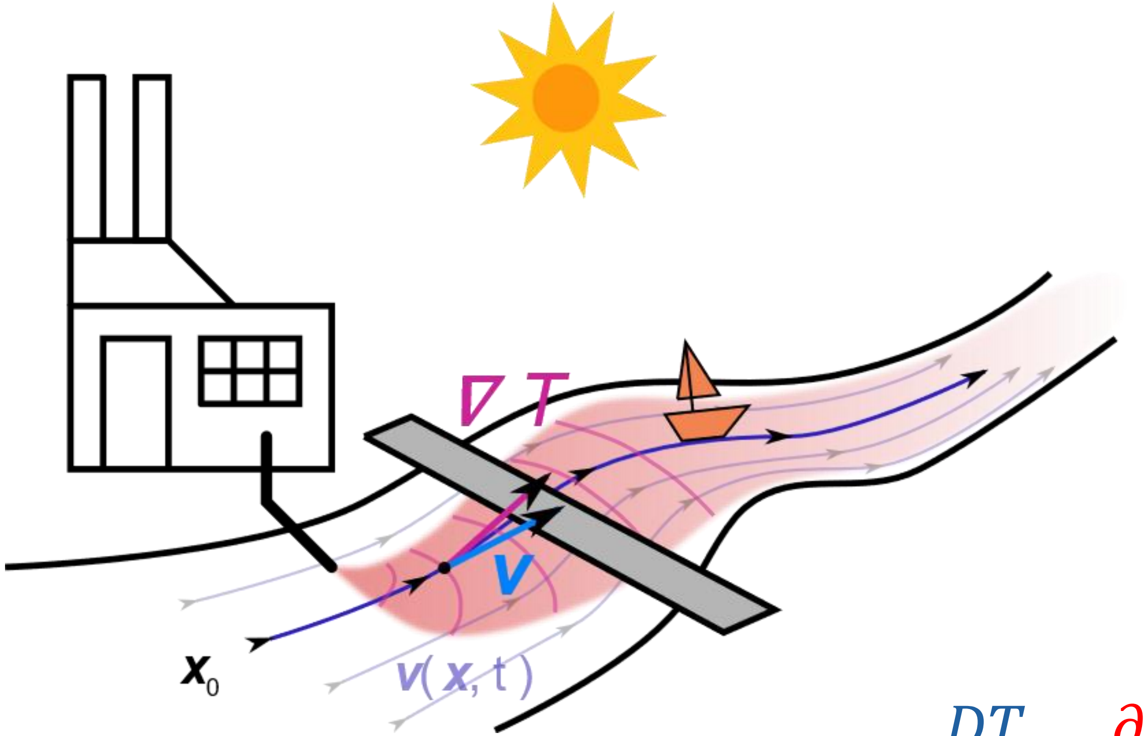


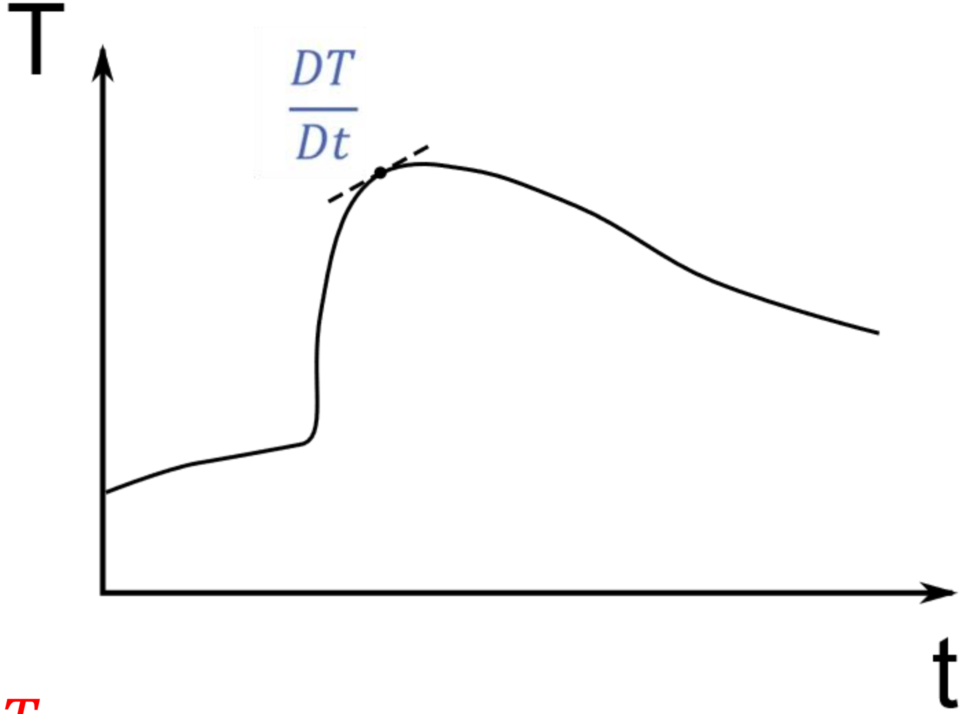
Derivada material – ¿Cuándo será cero?



Derivada material – Ejemplo

- T(x,t) varía en el **tiempo** y en el **espacio**. La derivada total de la temperatura vendrá dada por **variación temporal + variación por transporte**.





$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T$$

Derivada material – Ejemplo

- **Ejemplo 1.2** - Consideremos que el problema es 1D y que la temperatura y la velocidad vienen dadas por:

$$T(x,t) = 290 + 2x + t \ \ (\mathrm{K}), \qquad u = 3 \ \mathrm{m/s}$$

Derivada material – Ejemplo

- **Ejemplo 1.2** - Consideremos que el problema es 1D y que la temperatura y la velocidad vienen dadas por:

$$T(x,t) = 290 + 2x + t \ \ (\mathrm{K}), \qquad u = 3\ \mathrm{m/s}$$

La derivada material de la temperatura es:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 1\frac{K}{s} + 3\frac{m}{s}\cdot 2\frac{K}{m} = 7\frac{K}{s}$$

Este resultado nos indica que una partícula fluida sufre un incremento de 7 Kelvin por segundo conforme avanza a una velocidad de 3 m/s. 1 K/s es debido a la variación temporal, mientras que 6 K/s son debidos a la convección.

Derivada material – Problema propuesto

- La concentración de un soluto y la velocidad del flujo vienen dadas por:

$$C(x,t) = ax + bt, \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = (x^2, x, 0)$$

a) Calcular la expresión de la derivada material de la concentración para un punto x cualquiera.

b) Calcular la derivada material en x=0 *(ojo! Primero se opera y luego se sustituye!)*

Aceleración de una partícula fluida

- Contexto euleriano → tenemos la velocidad del flujo en puntos fijos (e.g. $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$).
- Si queremos conocer la aceleración del flujo, debemos calcular la aceleración de **una partícula fluida**.
- Es decir, la aceleración se define como la derivada total de la velocidad:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{D\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)}{Dt} := \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}}$$

donde $\vec{\boldsymbol{v}} = (u, v, w)$ es la velocidad del flujo y $\nabla \vec{\boldsymbol{v}}$ es el gradiente de la velocidad (gradiente de un vector) que es una matriz que se escribe de la siguiente manera:

$$\nabla \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Para simplificar podemos ver la ecuación vectorial anterior como 3 ecuaciones independientes, una para cada componente de la velocidad:

$$\frac{Du}{Dt} := \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{Dv}{Dt} := \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{Dw}{Dt} := \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Aceleración de una partícula fluida

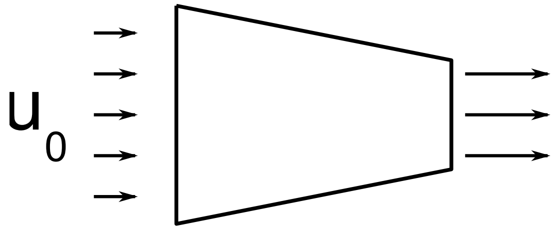
- La aceleración se compone de dos términos:

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

Aceleración local: Debida a variaciones locales de la velocidad en el tiempo.
Si $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \rightarrow$ flujo **estacionario**

Aceleración convectiva: Debida a variaciones espaciales de la velocidad
Si $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = 0 \rightarrow$ flujo espacialmente **uniforme**

- Un ejemplo de flujo estacionario con aceleración:

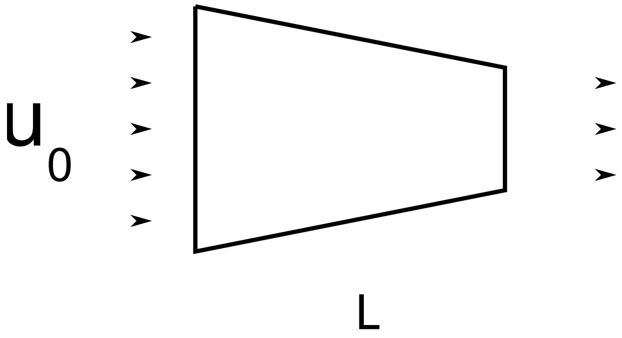


Aceleración de una partícula fluida - Ejemplo

- **Ejemplo 1.3** - Ejemplo de flujo estacionario con aceleración: Considere una tobera convergente como la de la figura, con un flujo <u>estacionario</u> (no depende de t) alineado con el eje x:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = u_0\left(1+\frac{1}{2L}x\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

calcule la aceleración del flujo:



La aceleración se calcula aplicando la derivada total de la velocidad:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla u, \qquad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla v$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla w$$

con $u = u_0\left(1+\frac{1}{2L}x\right)$, y $v = w = 0$. Nos quedamos con la primera ecuación (ya que las otras dos son cero):

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 + u_0\left(1+\frac{1}{2L}x\right)\cdot\left(\frac{u_0}{2L}\right)$$

$$a_x = \frac{{u_0}^2}{2L}\left(1+\frac{1}{2L}x\right)$$

Derivada material – Problema propuesto

- La velocidad de un flujo en rotación viene dada por:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (-ky, kx, 0)$$

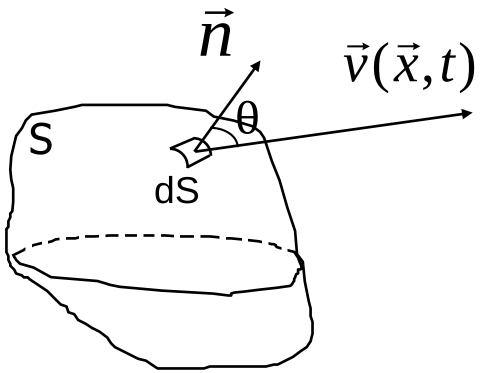
a) Calcular la expresión de la aceleración del flujo.

b) Calcular la aceleración en x=1, y=2

c) Dibujar el campo de velocidades y de aceleraciones

Caudal y flujo másico

- El *caudal* o *flujo volumétrico*, Q, a través de una superficie S es el volumen de fluido que la atraviesa dicha superficie por unidad de tiempo:



$$Q = \int_S \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$$

Dim: $\frac{L^3}{T}$
uds. SI: m³/s

Producto escalar: $|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\hat{\boldsymbol{n}}| \cdot \cos\theta$

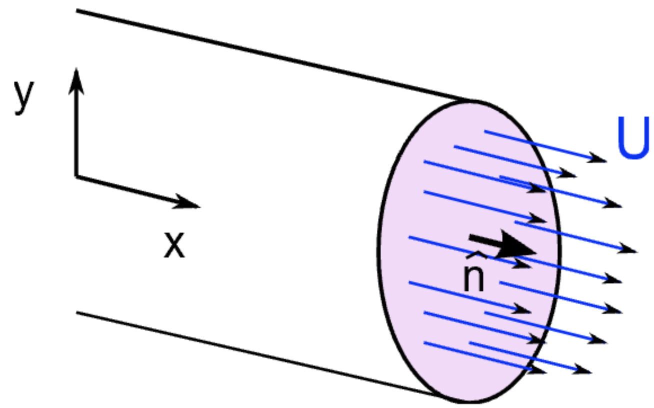
- La *velocidad media* es aquella que multiplicada por la superficie total S nos da el caudal: $v_m = Q/S$
- El *gasto* o *flujo másico*, $\dot{M}$, a través de una superficie S es la masa de fluido que atraviesa dicha superficie por unidad de tiempo:

$$\dot{M} = \int_S \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$$

Dim: $\frac{M}{T}$
uds. SI: kg/s

Caudal y flujo másico – Caso particular

- Si consideramos un conducto alineado con el eje x, con un perfil de velocidad uniforme (velocidad constante, u, en toda la sección):



$$\vec{\boldsymbol{v}} = (u, 0,0), \quad \hat{\boldsymbol{n}} = (1,0,0)$$

El flujo volumétrico que atraviesa una sección transversal S es:

$$Q = \int_S \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_S \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS = u \cdot S$$

Y la velocidad promedio en este caso coincide con la velocidad del flujo:

$$v_m = \frac{u \cdot S}{S} = u$$

Caudal y flujo másico – Problema propuesto (P1.3)

Enunciado El campo de velocidades de un fluido viene dado por la función $\vec{v} = (x^2 - 1)\vec{i} + (xy - 2)\vec{j} + x^2 z\vec{k}$. Se pide:

1. Calcule los puntos de remanso del flujo.
2. Calcule el caudal que atraviesa el rectángulo que está en el plano $z = 2$ y está limitado por las rectas $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 3$.
3. Calcule la velocidad media del fluido en la superficie del apartado anterior.
4. Si la densidad del fluido varía según la ley $\rho = 3xy^2 + z + 1$, calcule el gasto másico que atraviesa la superficie anterior.
5. En Sistema Internacional, ¿qué unidades tienen todas las magnitudes del problema?

Caudal y flujo másico – Problema propuesto (P1.4)

Enunciado El perfil de velocidades de un flujo laminar completamente desarrollado en una tubería de sección circular de radio R viene dado por la ley de Hagen-Poiseuille:

$$\vec{v}(r) = V\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\vec{e}_x + 0\vec{e}_r + 0\vec{e}_\theta.$$

Recordatorio para hacer la integral en polares:
$dS = r\,dr\,d\theta$

1. Dibuje el perfil de velocidades en la tubería.
2. Calcule el caudal Q que atraviesa una sección transversal de la tubería.
3. Calcule la velocidad media.

Análisis diferencial del campo fluido

- **Divergencia** de la velocidad:

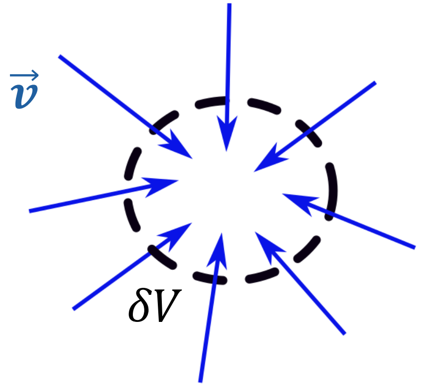
$$\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \int_{S(\delta V)} \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$$

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) := \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}$$

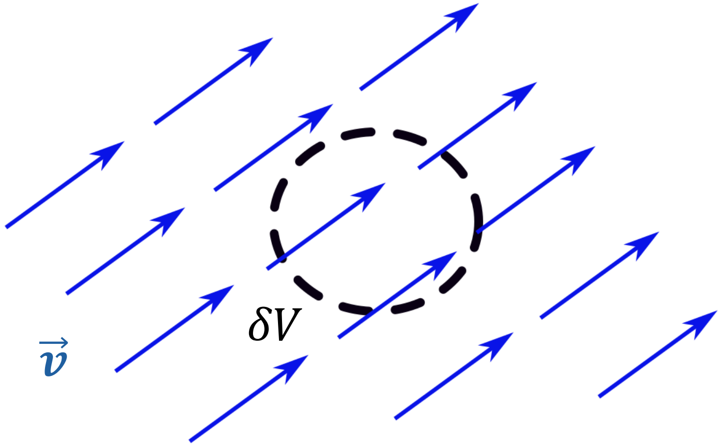
Producto escalar entre vectores
Nabla y velocidad

Teorema de Gauss:

$$\int_{S(V)} \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} dV$$

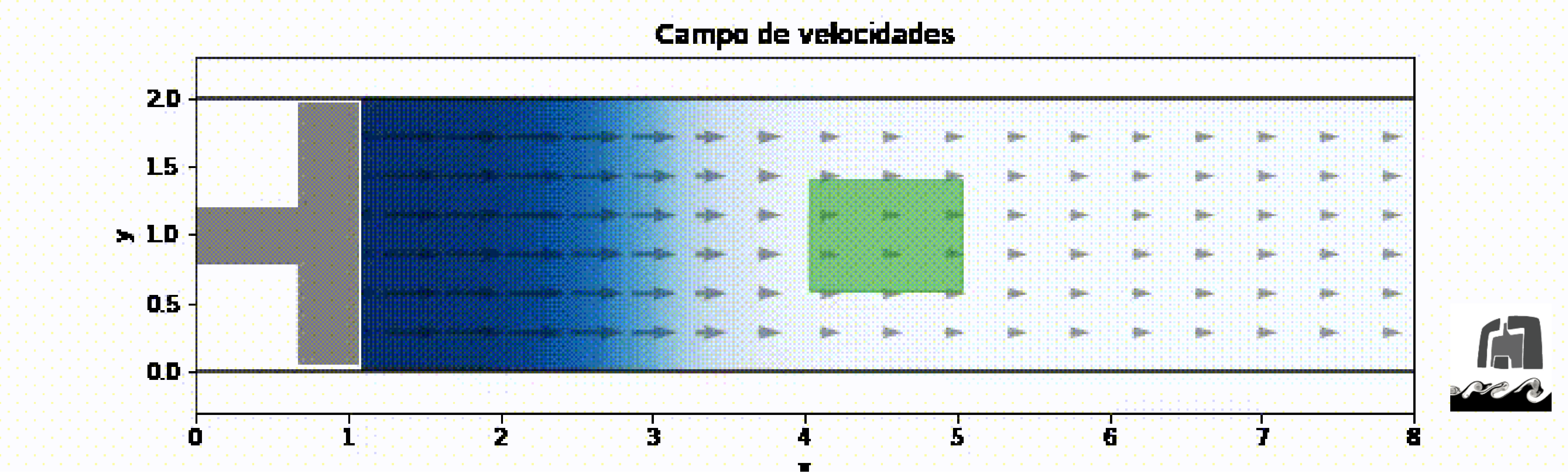


Flujo **compresible:** $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \neq 0$



Flujo **incompresible:** $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$

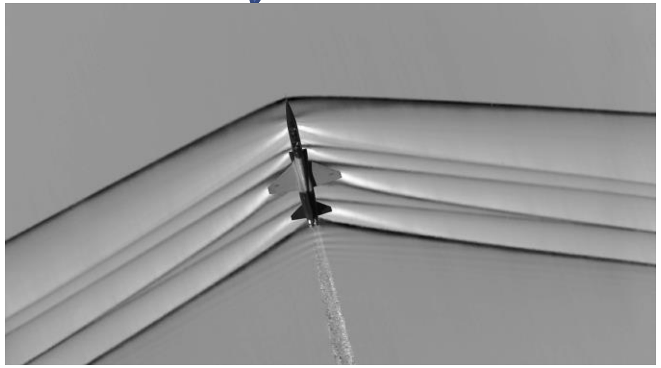
Análisis diferencial del campo fluido



Análisis diferencial del campo fluido

Ojo, hablamos de flujo y no de fluido

- Ejemplos de flujo **incompresible y compresible:**
  - Líquidos: son prácticamente incompresible -> flujo incomp.
  - Gases: son compresibles -> flujo compresible es posible



Ver video

Ver video

más velocidad

incompresible → *compresible*

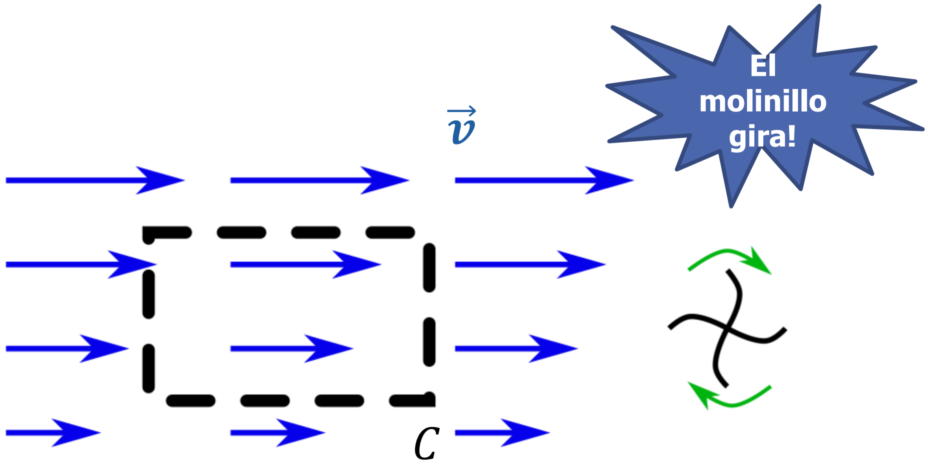
Análisis diferencial del campo fluido

- **Rotacional** de la velocidad:

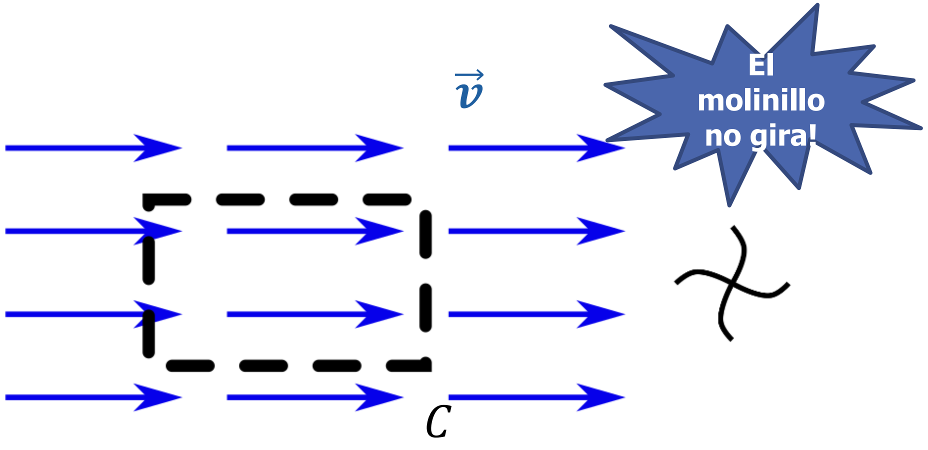
$$\mathrm{curl}(\vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{1}{\delta S} \int_C \vec{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\mathrm{curl}(\vec{\boldsymbol{v}}) := \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Producto vectorial



Flujo **rotacional:** $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{v}} \neq 0$

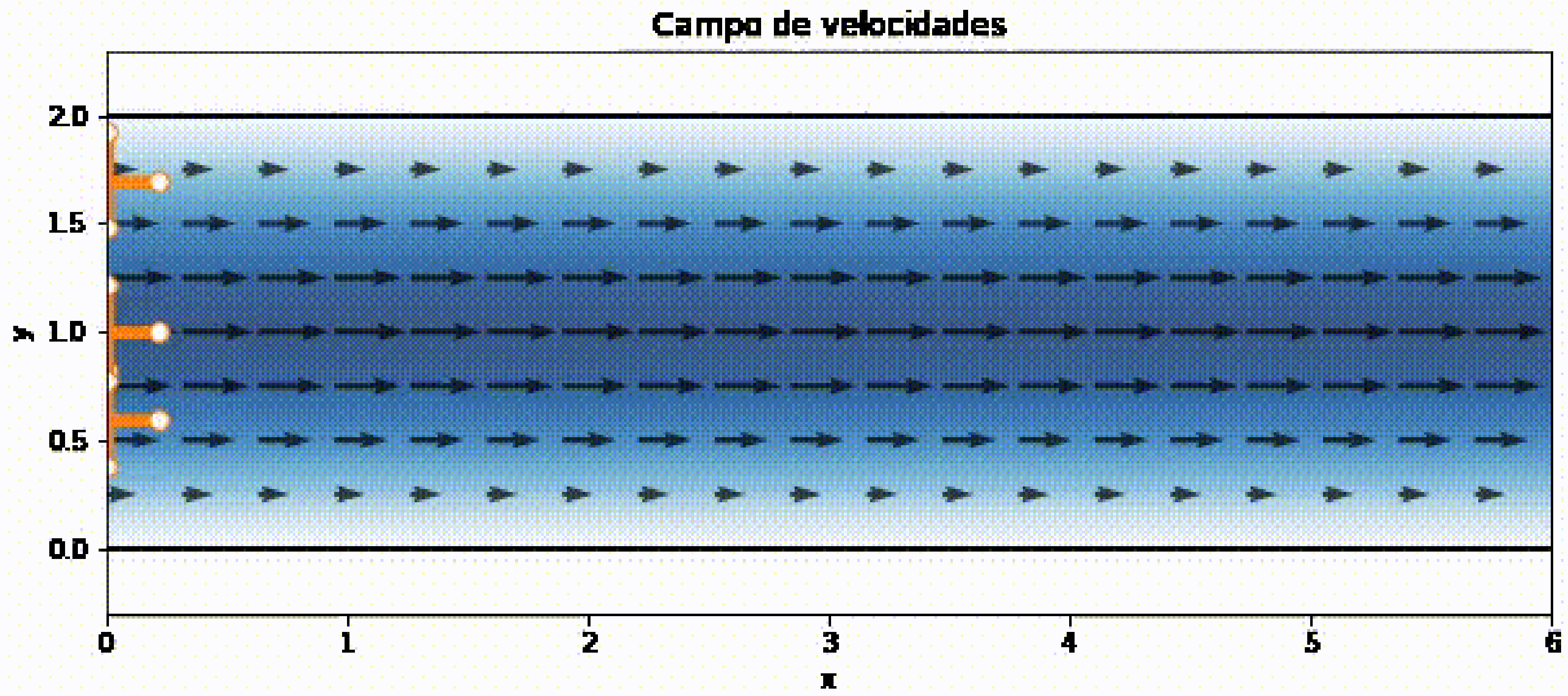


Flujo **irrotacional:** $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{v}} = 0$

Teorema de Stokes:

$$\int_{C(S)} \vec{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{v}} dS$$

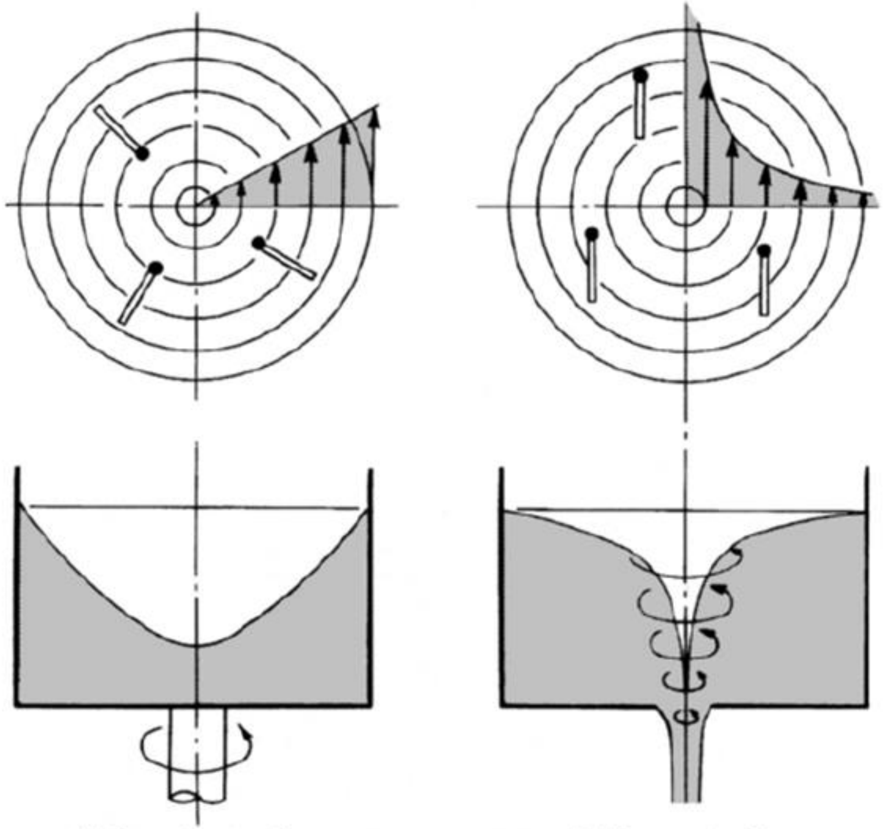
Análisis diferencial del campo fluido



Análisis diferencial del campo fluido

- Ejemplos de flujo **rotacional** e **irrotacional**

[Ver video]



(a) Forced vortex flow (b) Free vortex flow

Resumen de operaciones con Nabla – Incluye notación indicial

- **Gradiente** (sube el orden):
  - De un escalar = vector: $\nabla a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial a}{\partial x_i}$

  - De un vector = tensor: $\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

- **Divergencia** (baja el orden)
  - De un vector = escalar: $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

  - De un tensor = vector: $\nabla \cdot \tilde{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{32}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

- **Rotacional** de un vector = vector:

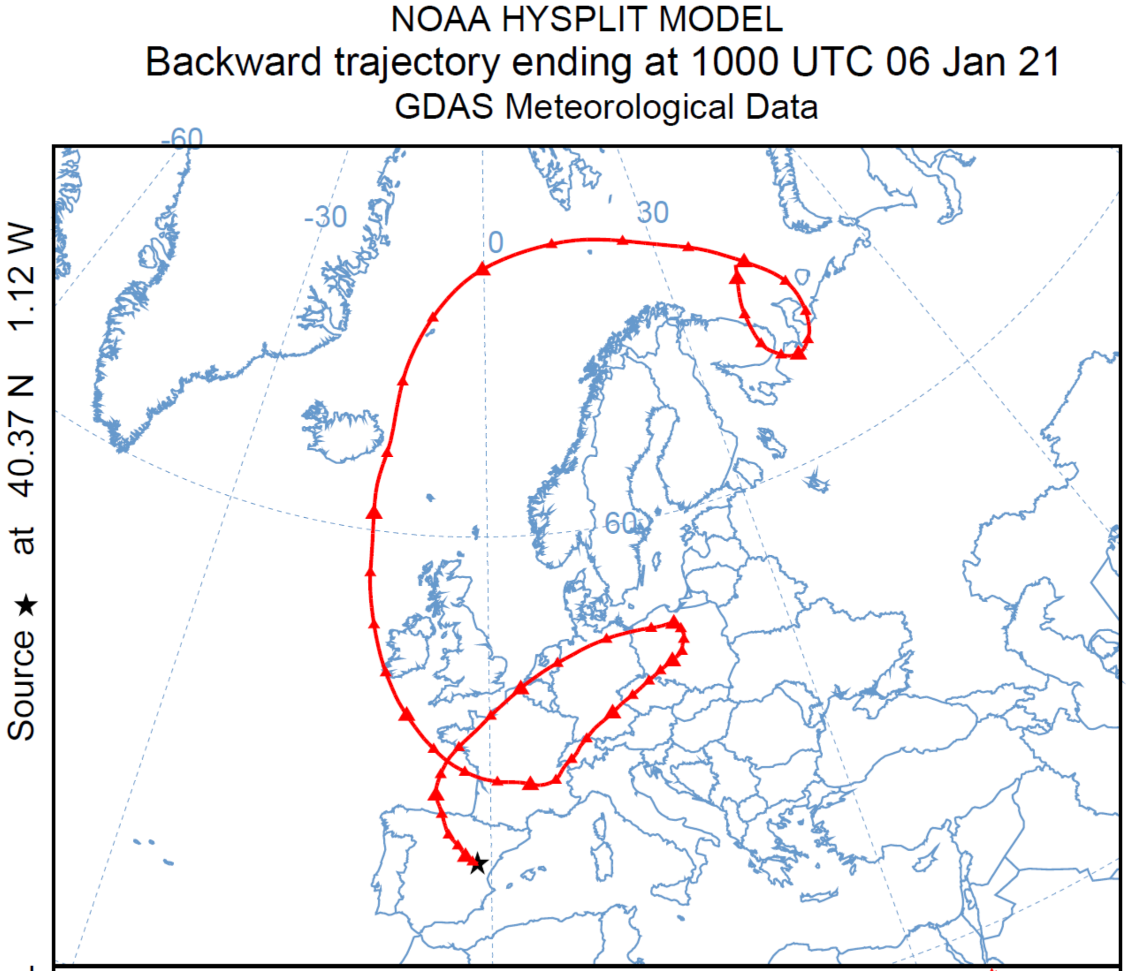
$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Líneas características del flujo

Podemos definir tres herramientas distintas para visualizar y caracterizar flujos a través de la representación de su campo de velocidad:

- **Líneas de corriente**
- **Trayectorias (sendas)**
- **Trazas**

Líneas características del flujo



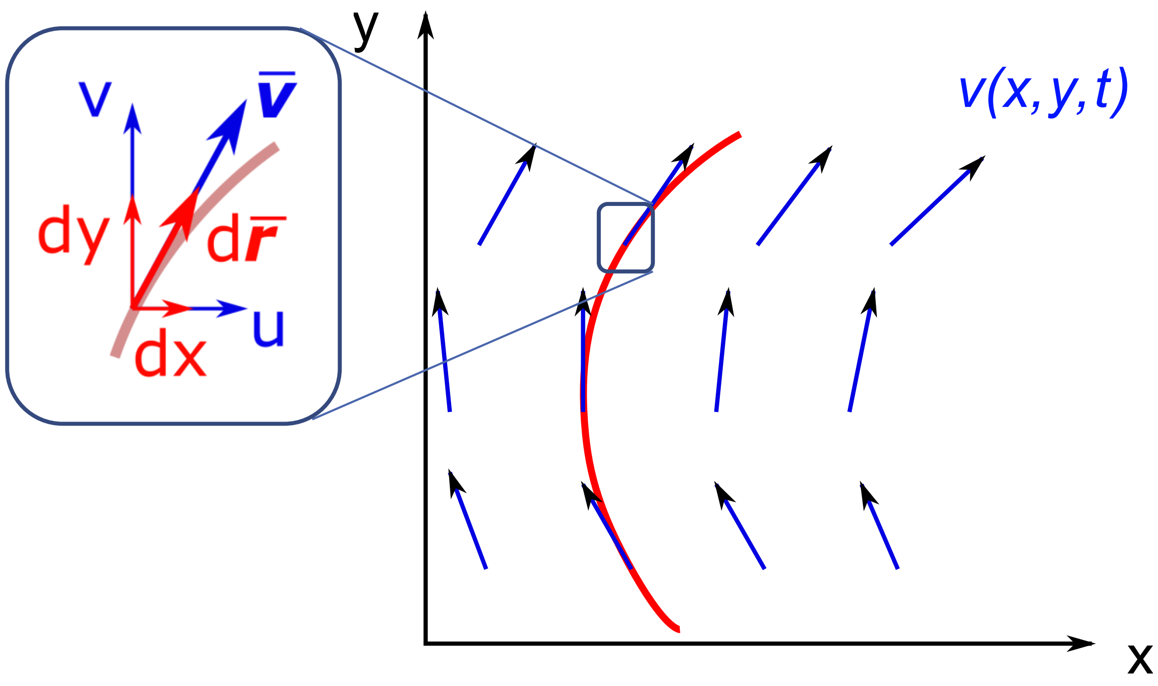
Líneas características del flujo: Línea de corriente

- Línea tangente al vector velocidad en todo punto, <u>en un instante</u> determinado en el tiempo. Información instantánea.
- Por definición:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0$$

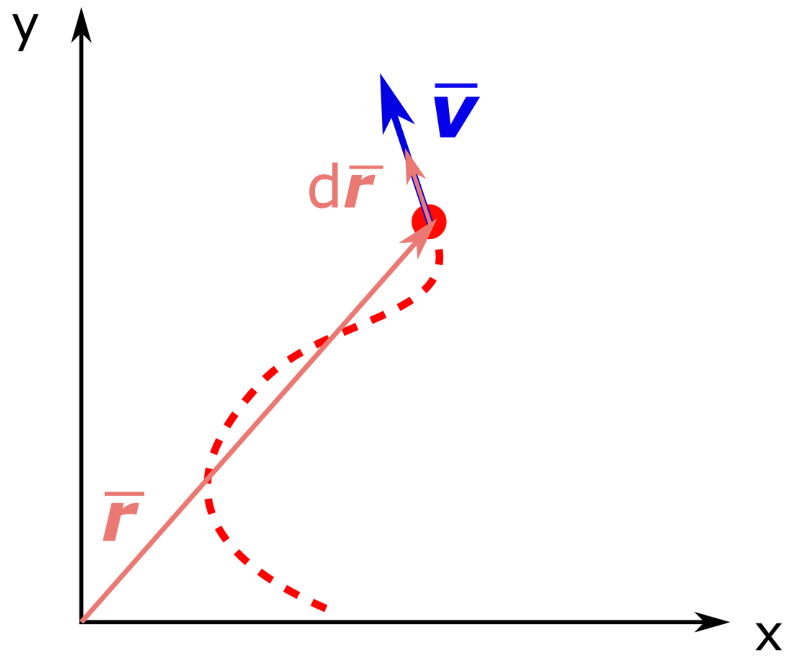
$$\boxed{\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz}}$$



Líneas características del flujo: Trayectoria

- Es el lugar geométrico de los puntos recorridos por una partícula fluida al moverse en el flujo a lo largo del tiempo. Se puede ver como la marca realizada por la partícula fluida en una fotografía de larga exposición.

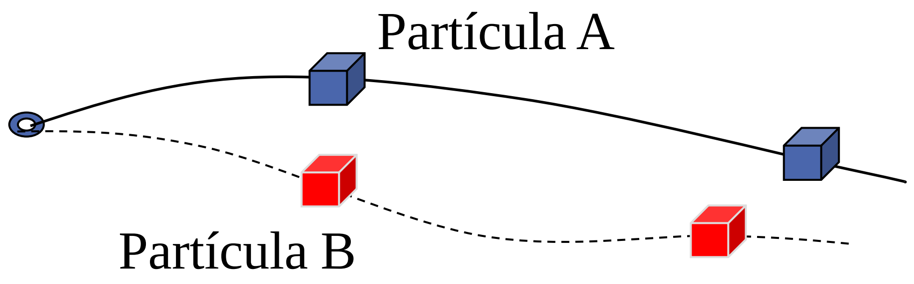
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t), t)$$



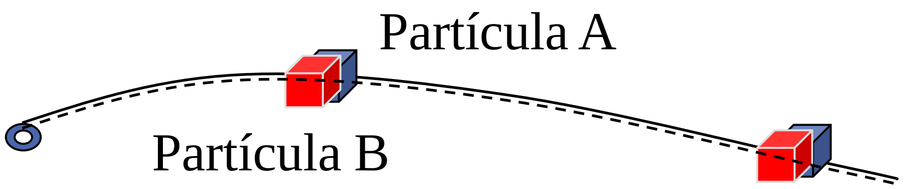
Líneas características del flujo: Trayectoria

Veamos la senda de dos partículas fluidas (A y B) que pasan por el mismo punto del espacio en diferente tiempo:

- Flujo transitorio: cada partícula tiene una trayectoria distinta

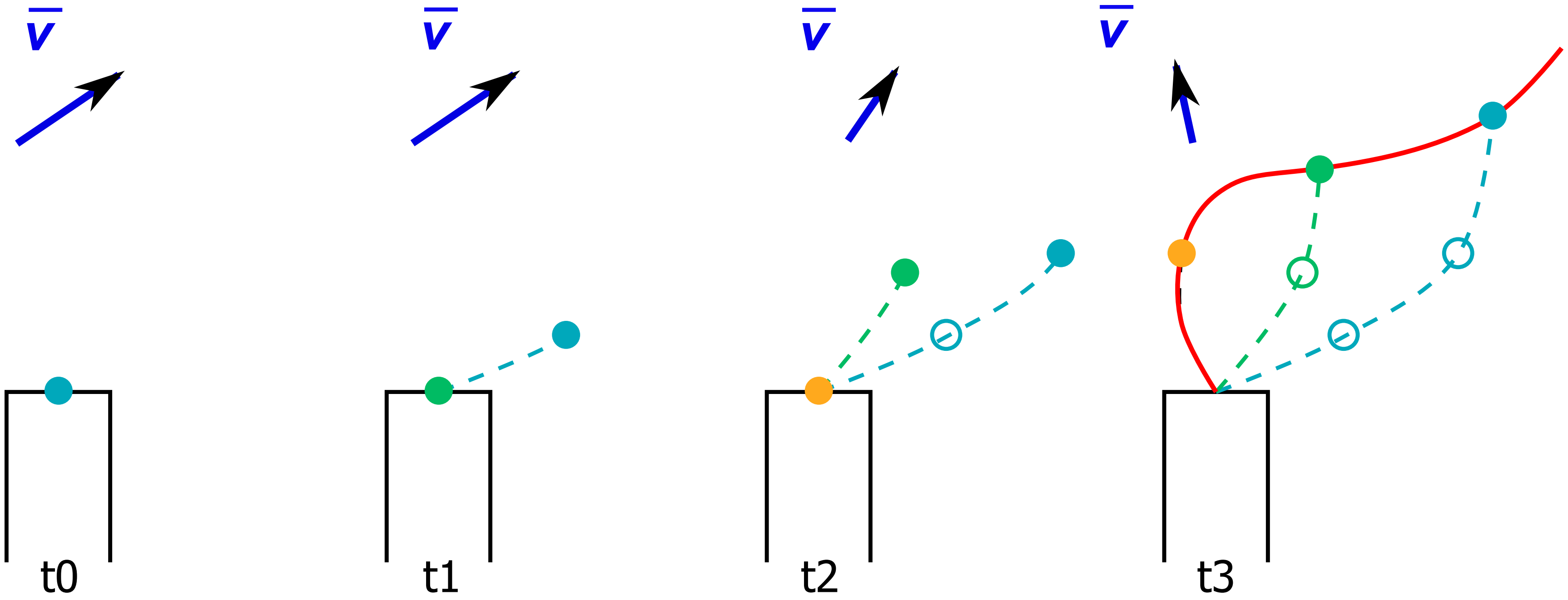


- Flujo estacionario (velocidad constante en tiempo): todas las partículas que salen del mismo punto tienen la misma trayectoria. Ésta coincide con la línea de corriente.



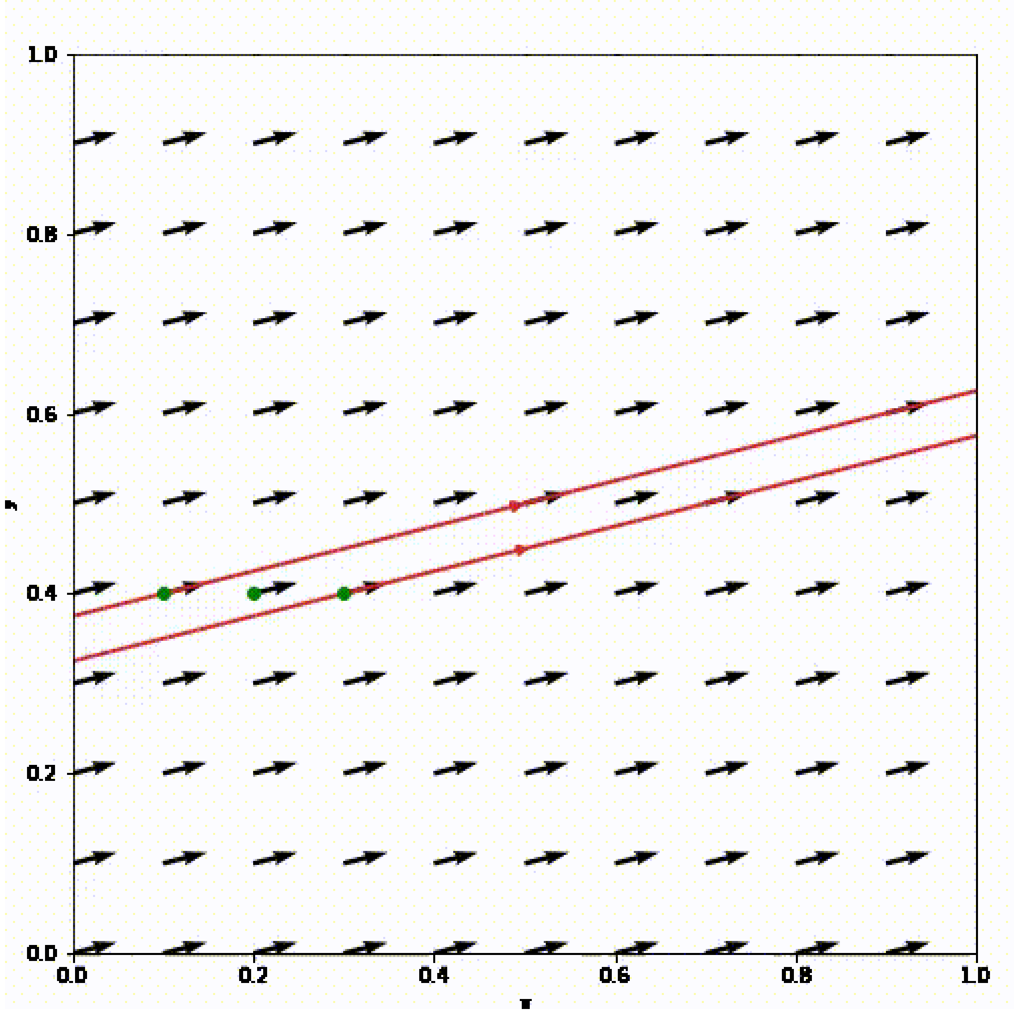
Líneas características del flujo: Traza

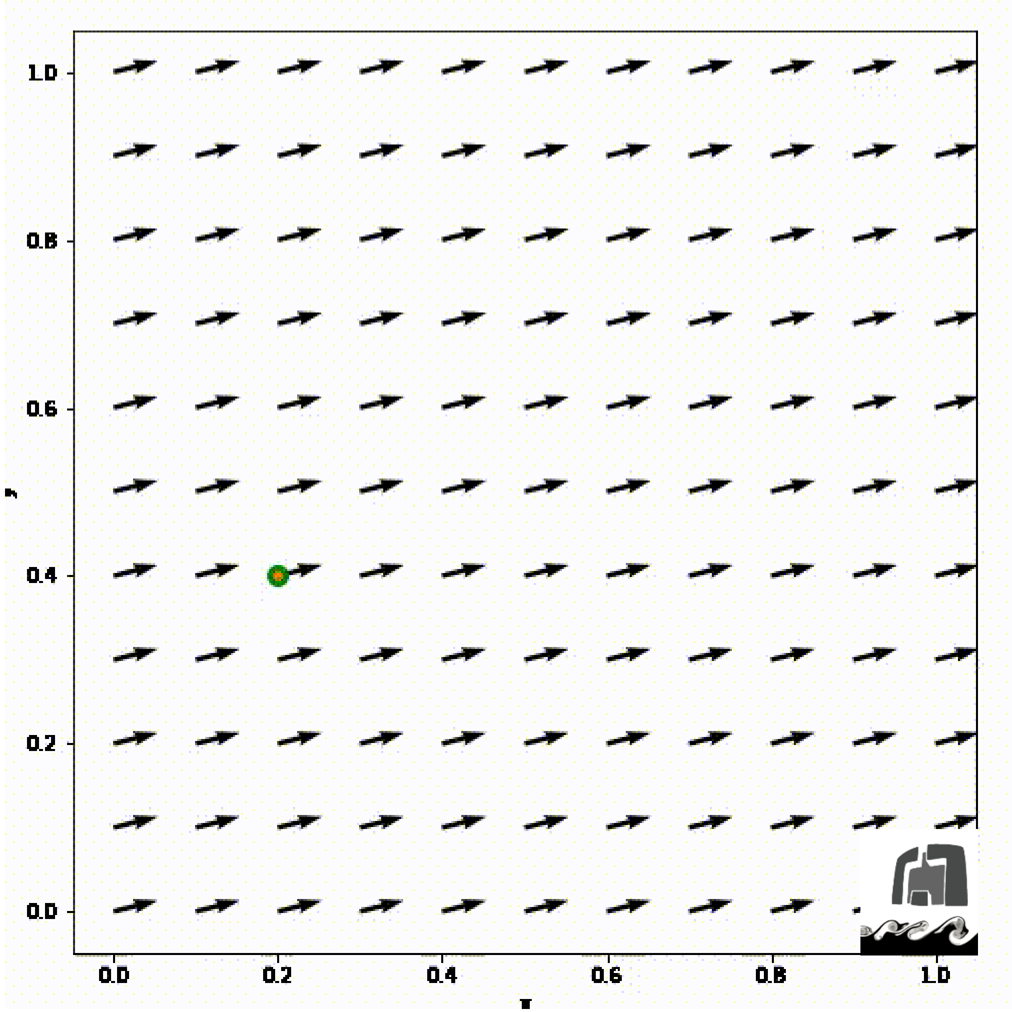
- Es el lugar geométrico instantáneo en que se encuentran las partículas fluidas que han pasado por una posición dada fija.
- Si el flujo es estacionario, coinciden con las líneas de corriente y trayectorias.



Líneas características del flujo - Ejemplo

$$\vec{\mathbf{v}}(x,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12t\cos(\pi x) + 0.5 \end{pmatrix}$$



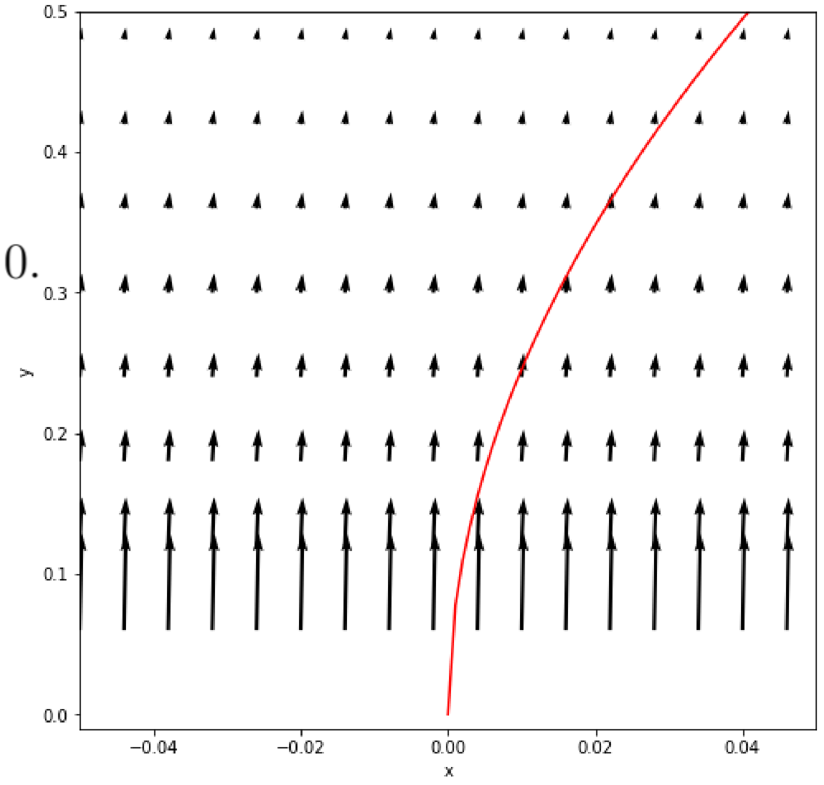


Líneas características del flujo – Problema propuesto (P1.13)

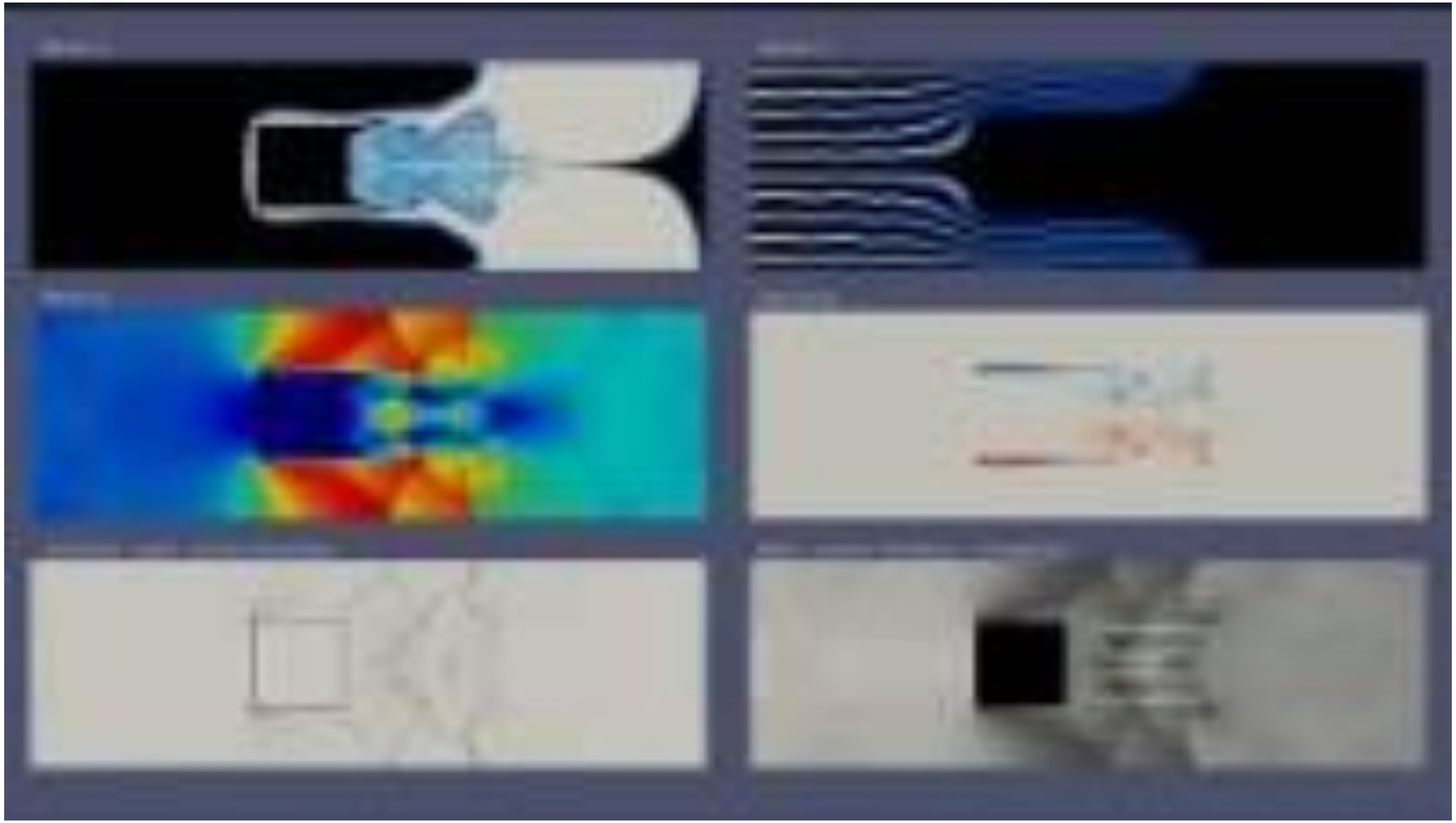
Enunciado El campo de velocidades de un flujo bidimensional viene dado por $\vec{v} = \frac{1}{x+1}\vec{i} + \frac{3}{y}\vec{j}$

Calcule las ecuaciones, libres de parámetros, de:

1. La línea de corriente que en $t = 0$ pasa por el origen.
2. La trayectoria de la partícula que pasó por el origen en $t = 0$.



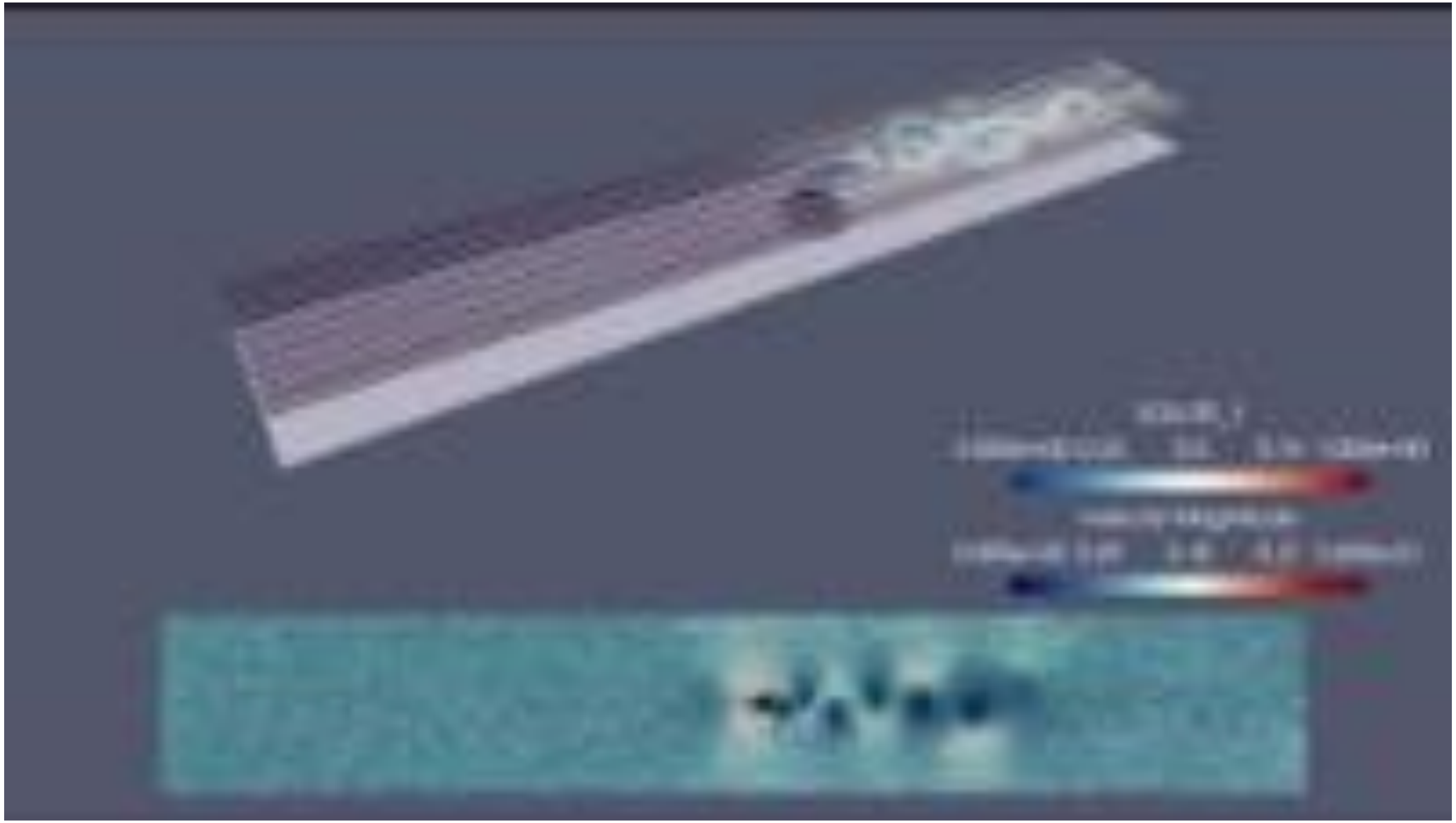
Líneas características del flujo: un ejemplo realista



Link

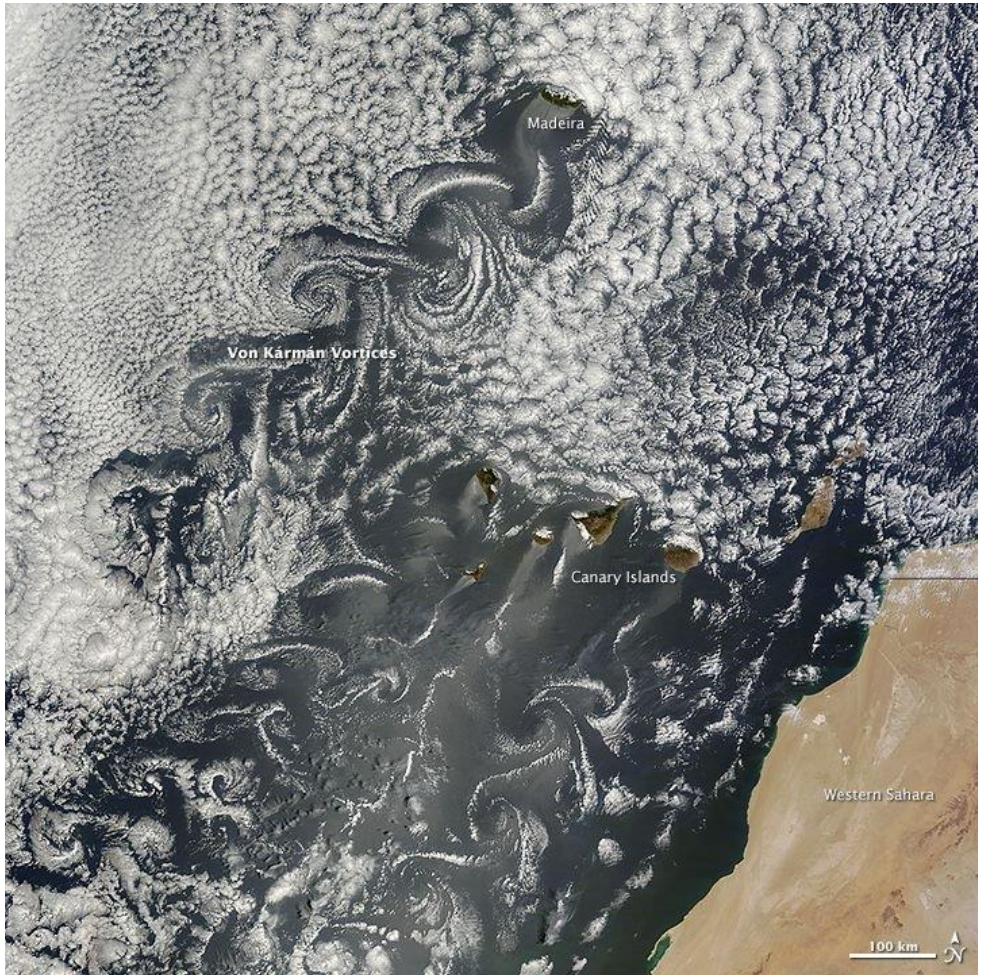
Líneas características del flujo: un ejemplo realista

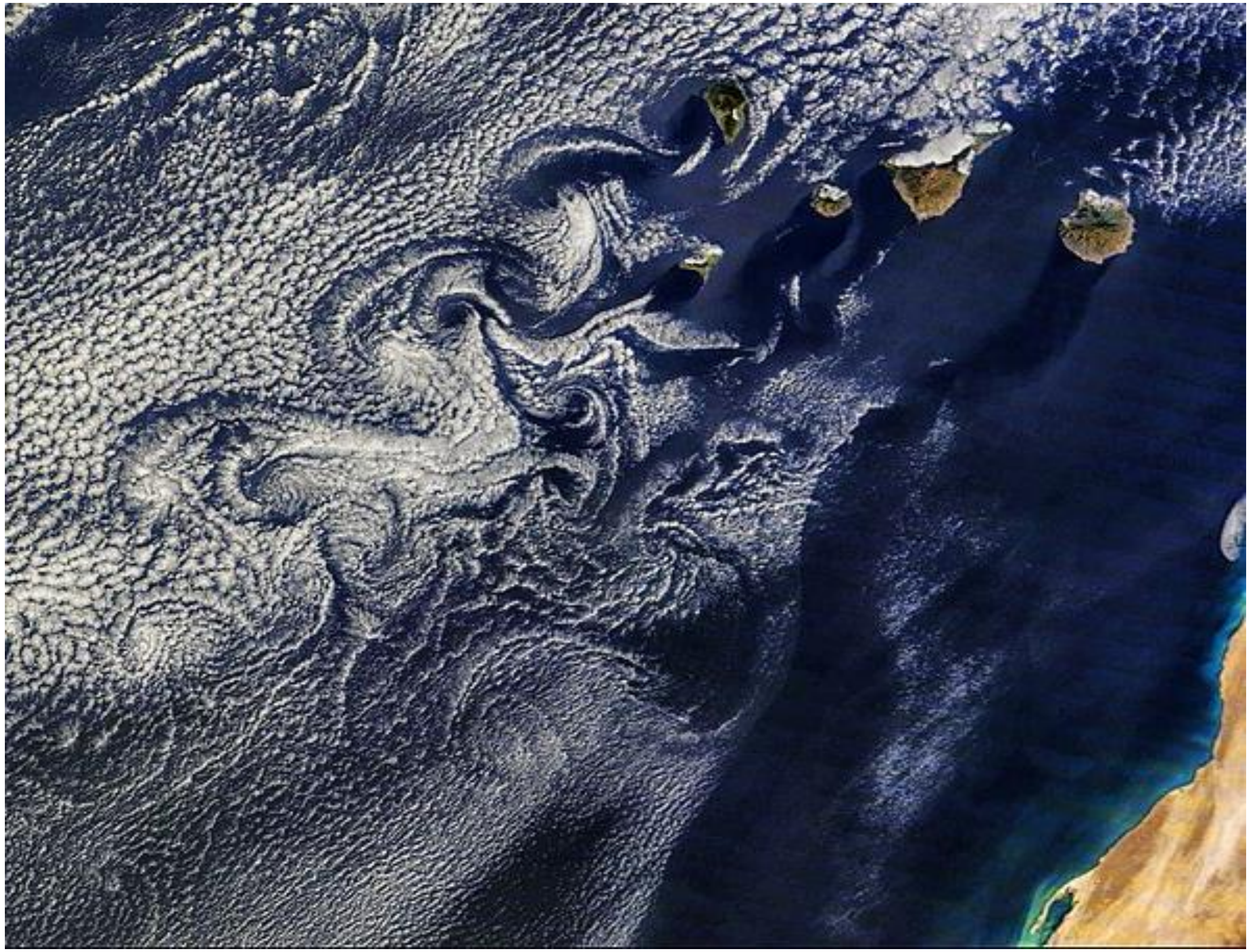
Líneas características del flujo: un ejemplo realista



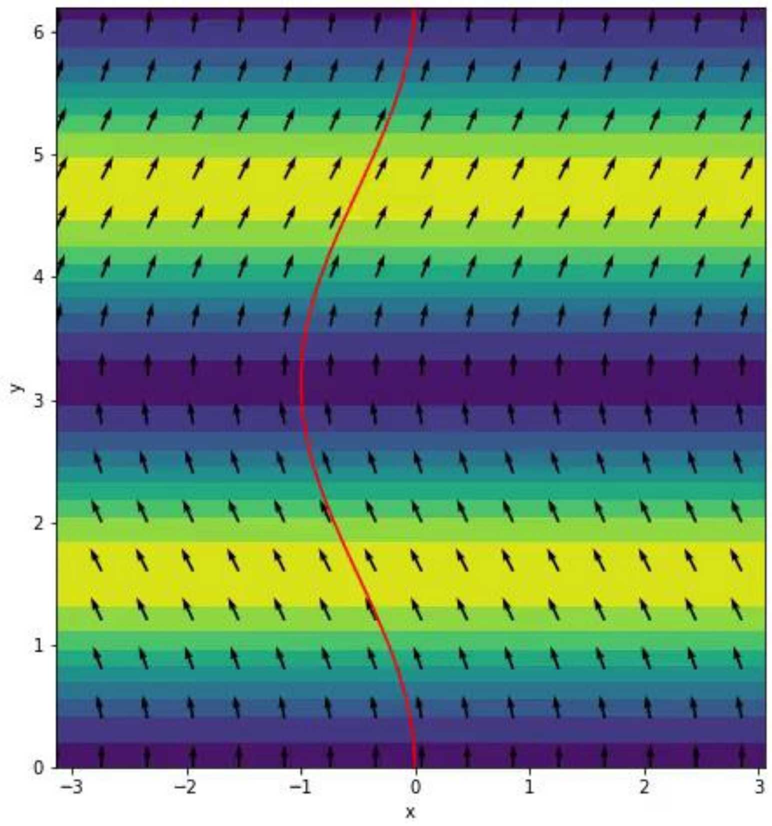
Link

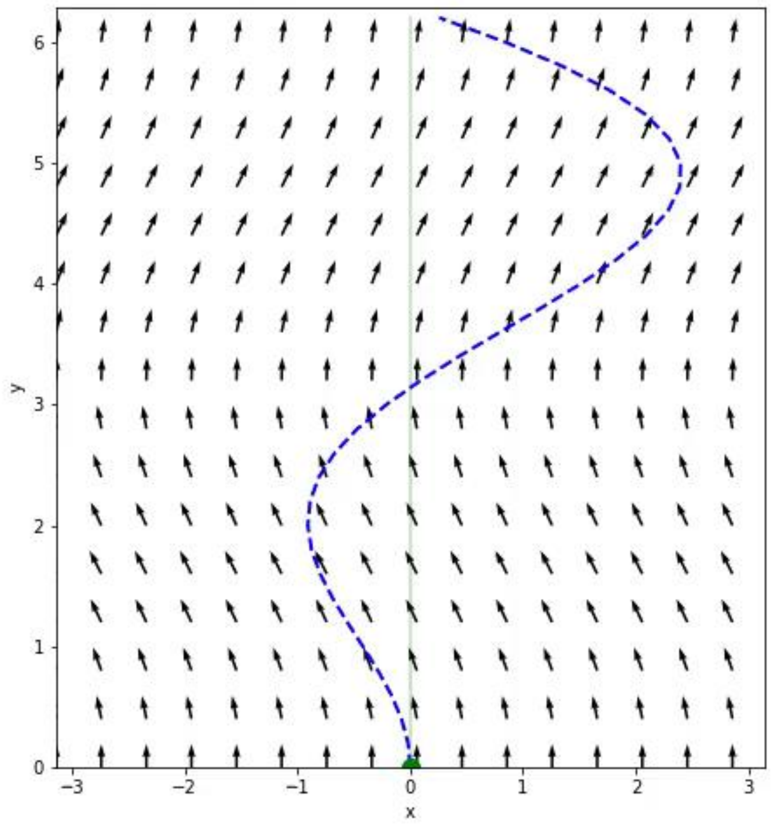
Líneas características del flujo: un ejemplo realista

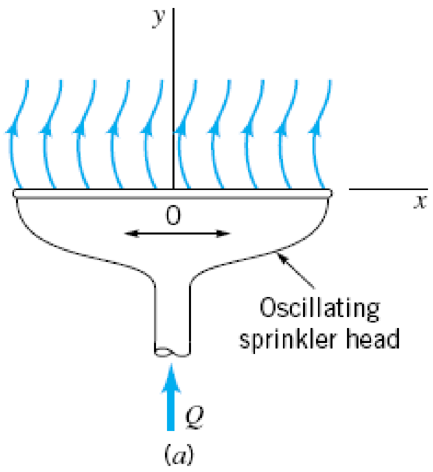




Líneas características del flujo: Ejemplo transitorio (P1.15)







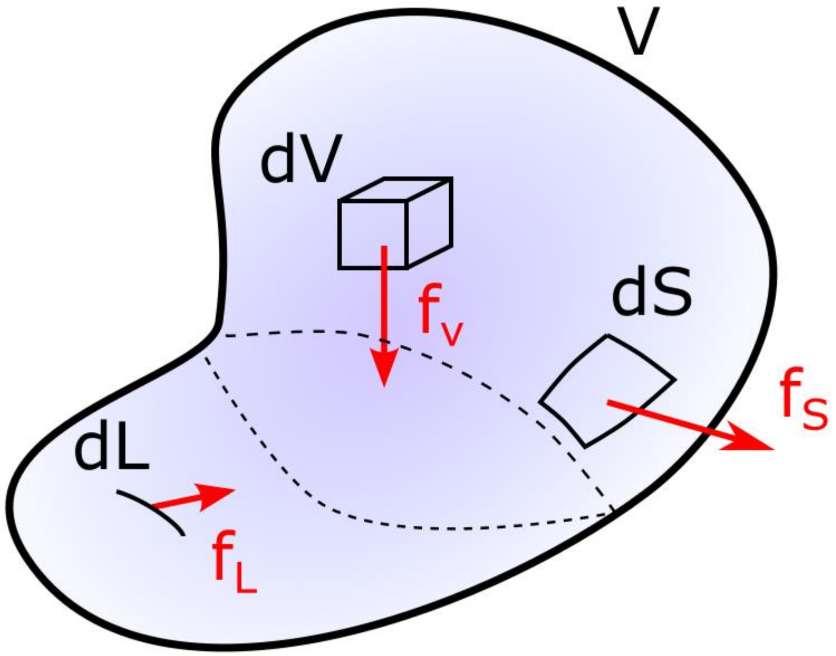
Fuerzas sobre un fluido

El movimiento de las partículas fluidas se produce por la acción de fuerzas externas $\vec{\boldsymbol{F}}$. Para una partícula fluida de masa m se cumple la segunda ley de Newton:

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \Sigma\vec{\boldsymbol{F}}$$

Podemos identificar 3 tipos de fuerzas:

- **Fuerzas de volumen**
- **Fuerzas de superficie**
- **Fuerzas de línea**



Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de volumen

Características principales:

- Actúan a distancia, sin contacto (p. ej. gravedad, fuerza electromagnética…)
- Actúan por unidad de volumen.

En cada punto podemos definir:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_v \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{volumen}} \quad \text{o} \quad \vec{\boldsymbol{f}}_m \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{masa}}$$

con $\vec{\boldsymbol{f}}_v = \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m$ tal que la fuerza total sobre un volumen V es:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_v = \int_V \vec{\boldsymbol{f}}_v dV = \int_V \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m dV$$

Dim: $\frac{[ML]}{[T^2]}$
uds. SI: N=kg·m/s^2

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de volumen

Si las fuerzas de volumen son conservativas, entonces se pueden expresar como el gradiente de un potencial U:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_v = -\nabla U$$

Lo que da lugar a:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_v = \int_V \vec{\boldsymbol{f}}_v dV = -\int_V \nabla U dV = -\int_S U\vec{\boldsymbol{n}} dS$$

Ejemplo:

- Fuerza de la gravedad: $\vec{\boldsymbol{f}}_v = \rho\vec{\boldsymbol{g}}$ con $U = -\vec{\boldsymbol{g}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}$

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

Características principales:

- Actúan por contacto (p. ej. fricción, presión…)
- Actúan en las superficies de las partículas fluidas o volumen fluido considerado.

En cada punto podemos definir:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_s \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}}$$

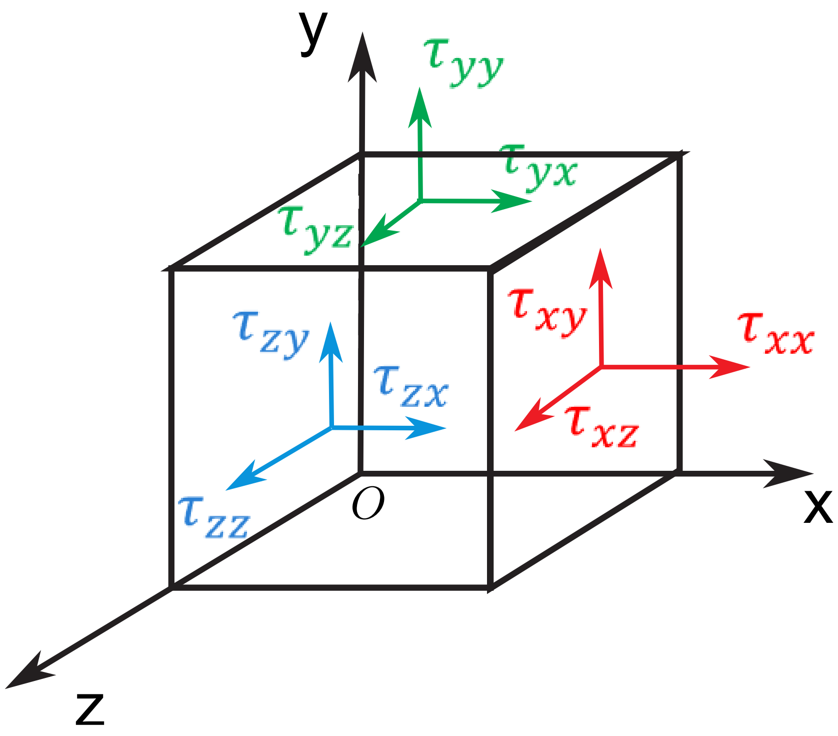
que tiene unidades de ***tensión*** o ***esfuerzo***, tal que la fuerza total sobre una superficie S es:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \int_S \vec{\boldsymbol{f}}_s dS$$

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

Si consideramos un diferencial de volumen (partícula fluida) como la de la figura, observamos que pueden existir esfuerzos (y por tanto fuerzas superficiales) en todas las caras. Estos esfuerzos los agrupamos en el **tensor de tensiones** o **esfuerzos**:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \tau_{ij} \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{superfcie}}$$



donde i=cara, j=eje. Es simétrico, con:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

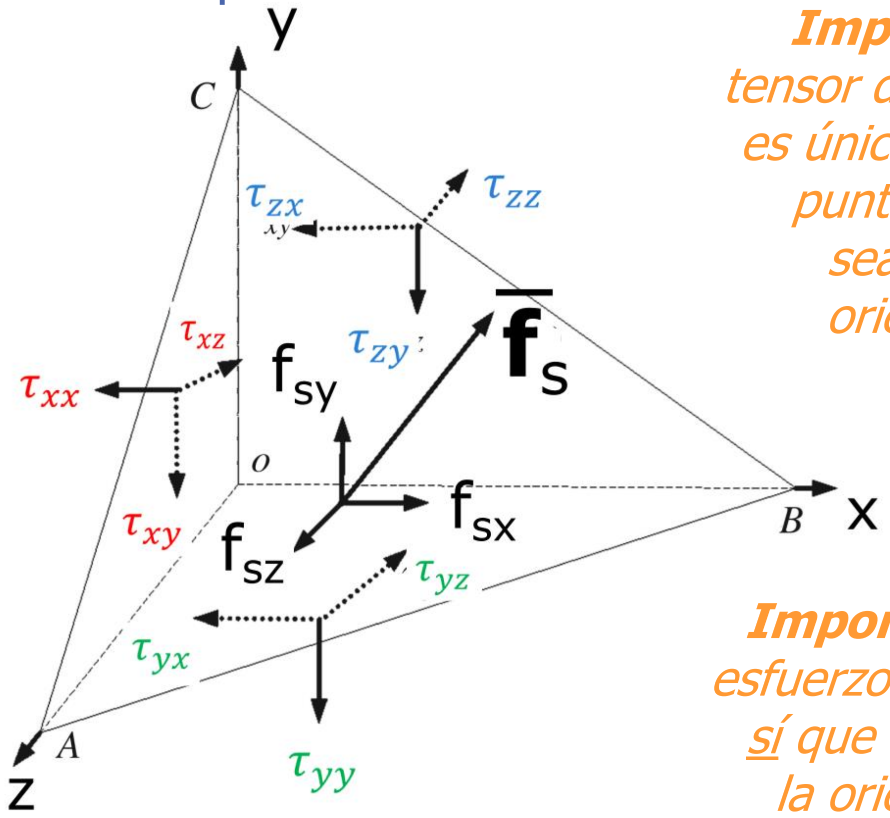
Para calcular la fuerza por unidad de superficie $\vec{f}_s$ en una superficie de un plano determinado por su vector normal $\vec{n}$ utilizaremos la expresión:

$$\vec{f}_s = \tilde{\tau} \cdot \vec{n}$$

$$\begin{pmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto:

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{f}_s dS = \int_S \tilde{\tau} \cdot \vec{n} dS$$



Importante: *El tensor de esfuerzos es único para cada punto del fluido, sea cual sea la orientación del plano*

Importante 2: *El esfuerzo en el plano sí que depende de la orientación del plano*

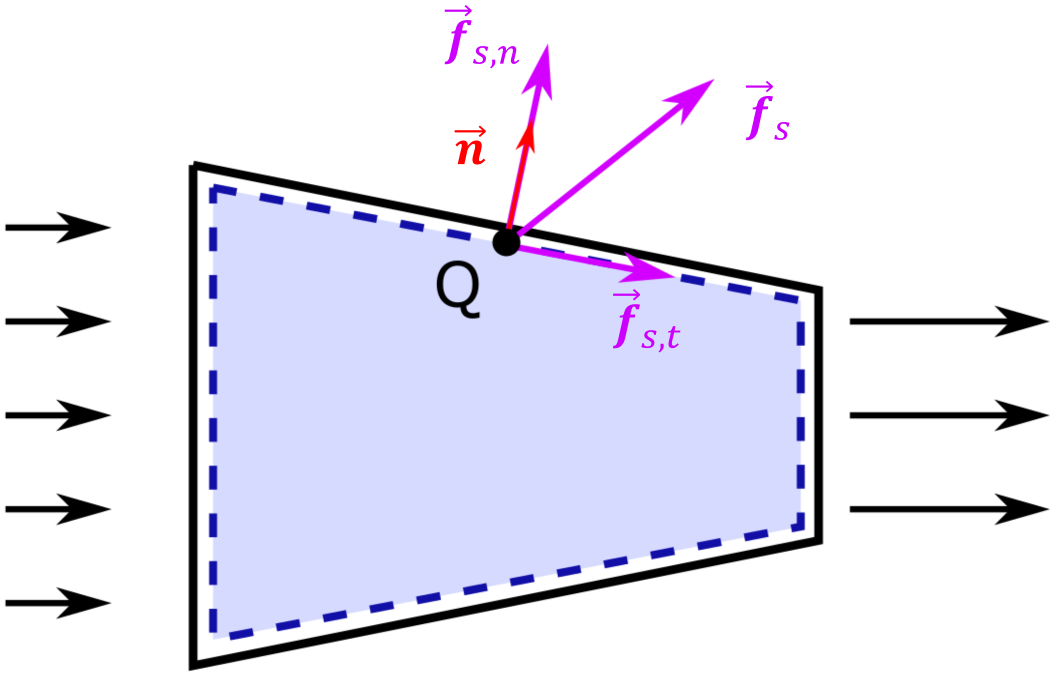
Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

Por ejemplo, si queremos calcular la fuerza por unidad de superficie $\vec{f}_s$ sobre el fluido en el punto Q, cogeremos la normal $\vec{n}$ con sentido saliente y haremos:

$$\vec{f}_s = \tilde{\tau} \cdot \vec{n}$$

Debemos darnos cuenta de que $\vec{f}_s$ es un vector. Lo podemos descomponer en su componentes:

- Normal: $\vec{f}_{s,n} = \left(\vec{f}_s \cdot \vec{n}\right)\vec{n}$
- Tangencial/cortante: $\vec{f}_{s,t} = \vec{f}_s - \vec{f}_{s,n}$



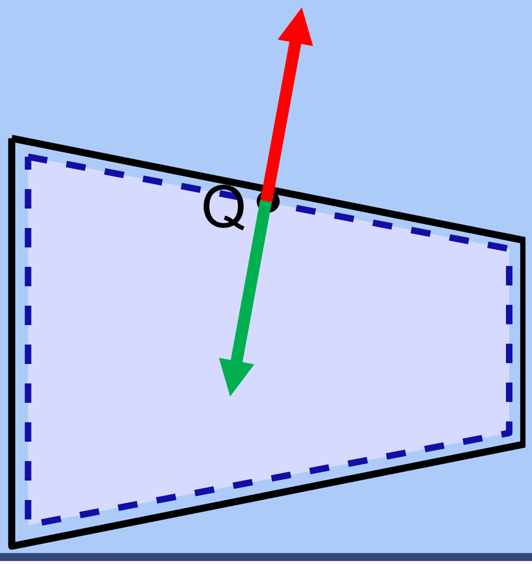
Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

Pero… ¿siempre pintamos las normales salientes?

Depende de si queremos calcular la fuerza de una superficie sobre el fluido o la fuerza del fluido sobre una superficie:

- **Normal saliente**: obtenemos fuerzas sobre el fluido
- **Normal entrante**: obtenemos fuerzas que ejerce el fluido

* Cuando planteemos las ecuaciones fundamentales de los fluidos en el TEMA 2 cogeremos normales salientes



r unidad de superficie $\vec{f}_s$ sobre el fluido*
ntido saliente y haremos:

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

¿Cómo es el tensor de esfuerzos? Lo podemos escribir como suma de dos tensores:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v$$

Donde:

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p \equiv$ **tensor de esfuerzos de presión**

- Existe siempre
- Es un tensor esférico (ley de Pascal):

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\tilde{\boldsymbol{I}}$$

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \equiv$ **tensor de esfuerzos viscosos**

- Existe solo cuando hay movimiento
- Si el fluido es newtoniano incompresible:

Qué significa esto?

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \approx 2\mu\tilde{\boldsymbol{e}}$$

Qué es esto?

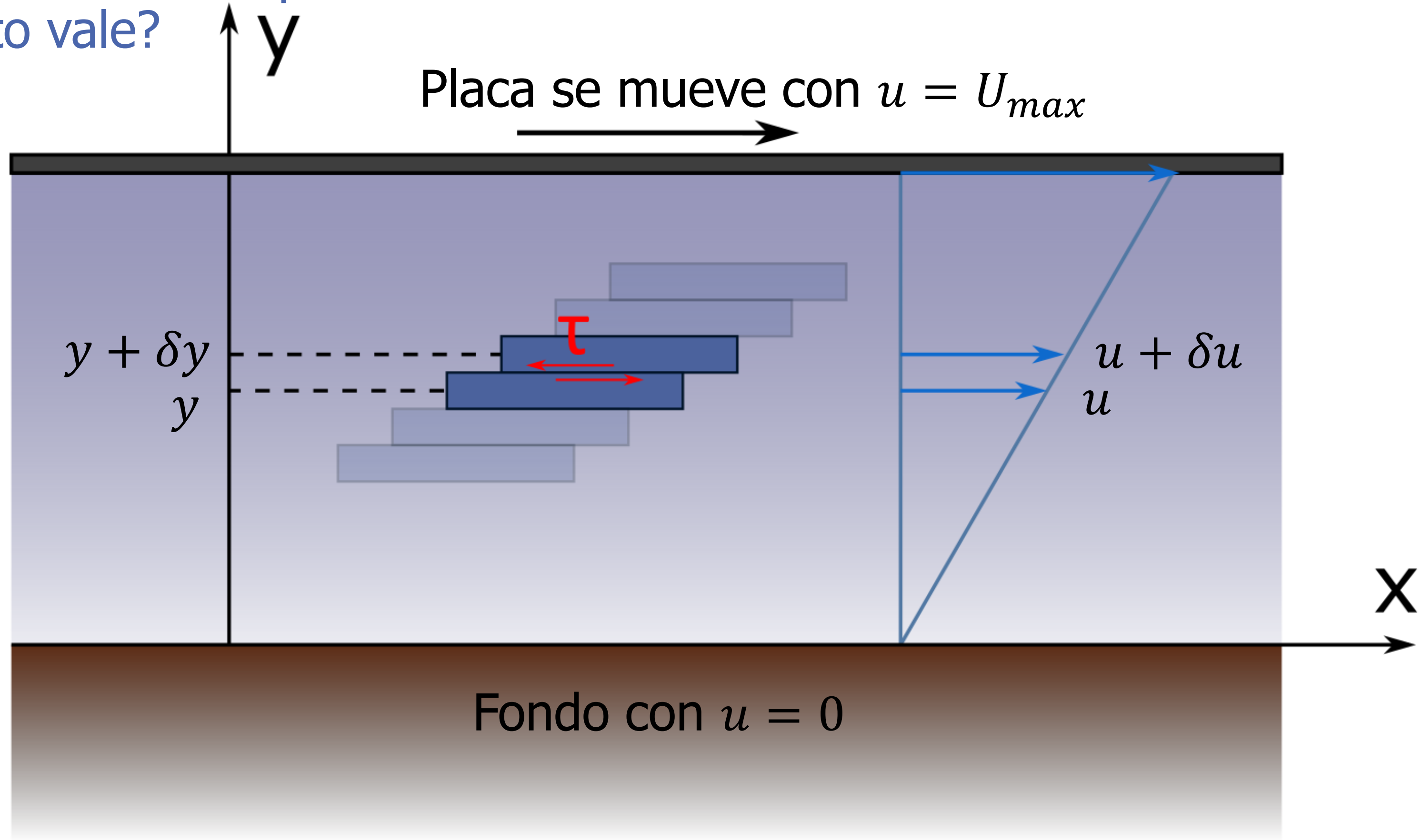
…y esto?

Y por tanto:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_s = \vec{\boldsymbol{f}}_p + \vec{\boldsymbol{f}}_v = -p\vec{\boldsymbol{n}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

Ley de Newton - Viscosidad

- Entre dos “capas” de fluido que se mueven a distinta velocidad existe un esfuerzo cortante, ¿cuánto vale?



Ley de Newton - Viscosidad

- El **esfuerzo** (tensión) **tangencial es proporcional a la velocidad de deformación** del elemento diferencial:

$$\tau \propto \frac{\delta\gamma}{\delta t}$$

- Para ángulos pequeños $\tan(\delta\gamma) \approx \delta\gamma$:

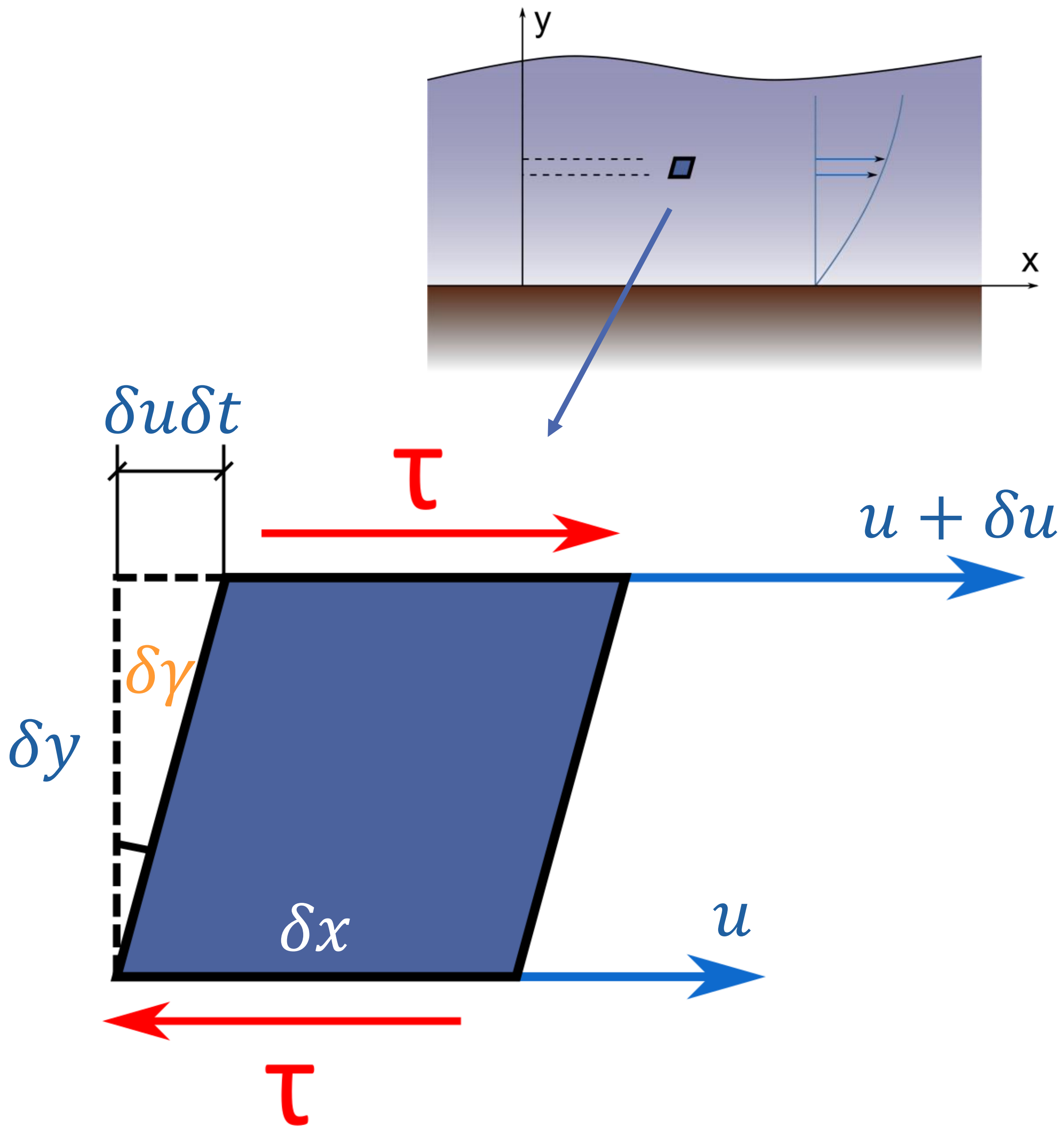
$$\delta\gamma = \frac{\delta u \delta t}{\delta y}$$

Lo que nos permite expresar:

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

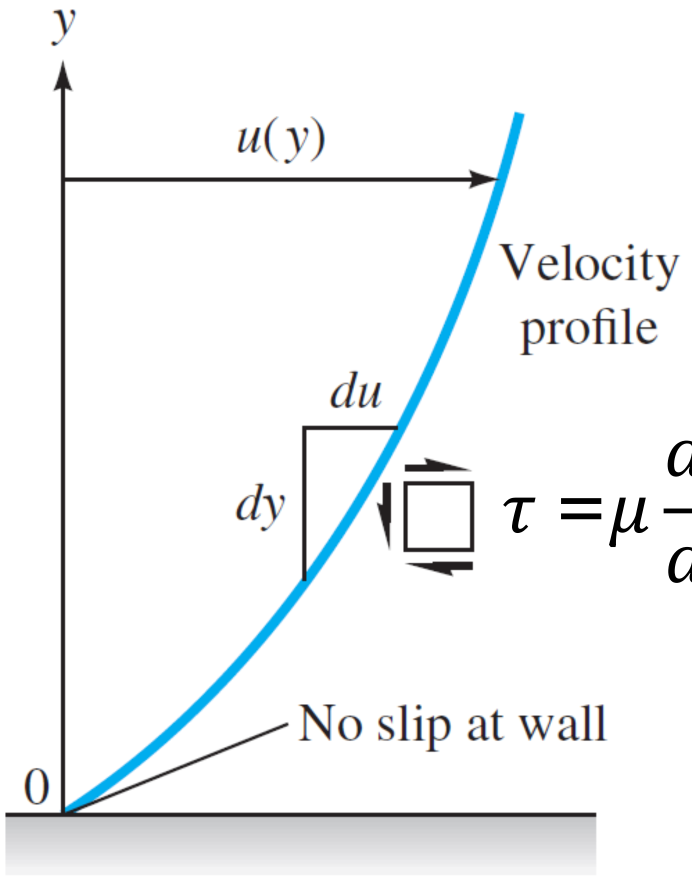
Siendo la **viscosidad** μ la cte. de proporcionalidad:

$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$



Ley de Newton - Viscosidad

- Perfil de velocidades y su relación con la tensión tangencial:



$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Ley de Newton - Viscosidad

- Vamos a ver las unidades que tiene la **viscosidad dinámica**. Por definición:

$$\mu := \left[\frac{\tau}{\frac{du}{dy}}\right] = \left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}}\right] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right], \qquad \text{Unidades SI: } \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}$$

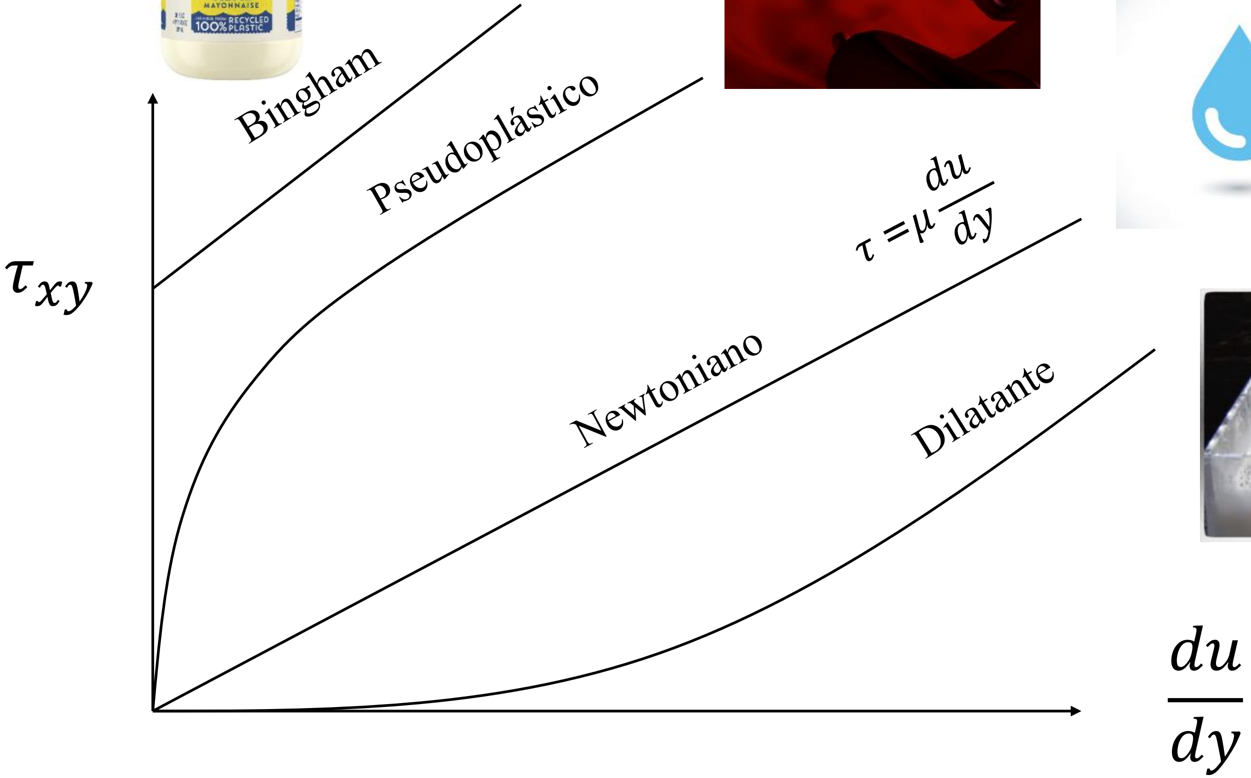
- También podemos definir la **viscosidad cinemática**:

$$\nu := \left[\frac{\mu}{\rho}\right] = \left[\frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}}\right] = \left[L^{2}T^{-1}\right], \qquad \text{Unidades SI: } \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

También se usan:	P (g cm^{-1} s^{-1})	(Poise)
	St (cm^2 s^{-1})	(Stokes)
Y sus submúltiplos	cP=10^{-2} P	(CentiPoise)
	cSt= 10^{-2} St	(CentiStokes)

Ley de Newton - Viscosidad

- Tipos de fluidos:



Video

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de superficie

Volviendo a esta diapositiva…

El tensor de esfuerzos viscosos viene dado por la Ley de Navier-Poisson:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v = 2\mu\tilde{\boldsymbol{e}} + \left(\mu_V - \frac{2}{3}\mu\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{I}}$$

μ = viscosidad dinámica del fluido (diap. anteriores)
μ_V = visc. volumétrica, solemos despreciarla $\mu_V \ll \mu$
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$ = div. de la velocidad, cero si es incompresible

Si fluido <u>newtoniano incompresible</u>:

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \approx 2\mu\tilde{\boldsymbol{e}}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

escribir como suma de dos tensores:
$\tilde{\tau}_v$

$\tilde{\tau}_v \equiv$ **tensor de esfuerzos viscosos**

Existe <u>solo</u> cuando hay movimiento
Si el fluido es newtoniano e incomp.:

Qué significa esto?

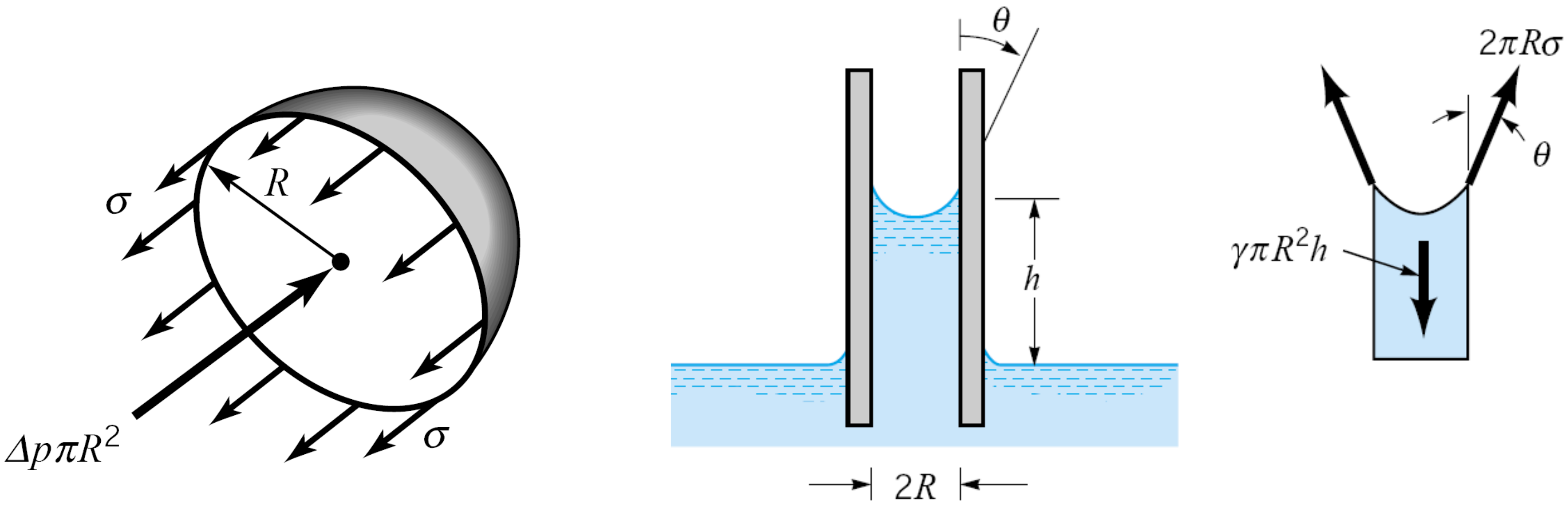
$\tilde{\tau}_v \approx 2\mu\tilde{e}$

Los esfuerzos viscosos son proporcionales a las velocidades de deformación en las distintas direcciones

Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de línea

- Actúan en las entre-fases de fluidos inmiscibles
- Actúan por unidad de longitud

Ejemplo: Tensión superficial, capilaridad



Fuerzas sobre un fluido: fuerzas de línea