FLUJOS CANÓNICOS

Mecánica de fluidos

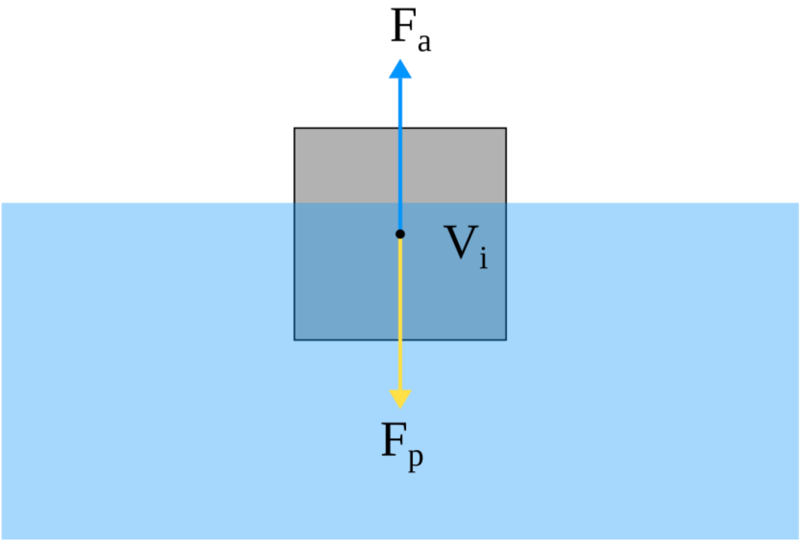
Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS

- Fluidostática
  - Ecuación fundamental de la fluidostática y ley de Pascal
  - Medidas de presión (barómetros)
  - Fuerzas y momentos sobre superficies
- Flujo ideal
- Flujo viscoso: flujo de Couette y de Hagen-Poiseuille

Motivación de la fluidostática

- La **fluidostática** estudia el comportamiento de los fluidos en reposo ($\vec{v} = 0$)
- Si no hay movimiento… ¿para qué estudiamos fluidos en reposo?
  - Cálculo de presiones
  - Cálculo de fuerzas y momentos



Recordatorio sobre esfuerzos de superficie…

- Las fuerzas de superficie se calculan como:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \int_S \vec{\boldsymbol{f}}_s dS = \int_S \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} dS$$

donde:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v$$

En reposo ($\vec{\boldsymbol{v}} = 0$) $\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v = 0$, por lo que solo tenemos esfuerzos de presión:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\tilde{\boldsymbol{I}}$$

Muy importante !!!

Principio de Pascal

El esfuerzo por unidad de superficie, $\vec{\boldsymbol{f}}_s$, <u>no depende de la orientación</u> de la superficie y siempre lleva la <u>dirección opuesta</u> a la normal de la superficie:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_s = -p\vec{\boldsymbol{n}}$$

Así pues, en un fluido en reposo la presión se puede definir como "*el esfuerzo de compresión que soporta el fluido en un punto*".

Ecuación fundamental de la fluidostática

- Aplicamos el equilibrio de fuerzas utilizando la ecuación de conservación del momento lineal (2º ley de Newton) en reposo:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \cancelto{0}{\rho\vec{\boldsymbol{v}}}\,dV}_{\text{Variación temporal de momento del fluido}} = \underbrace{\int_S \overbrace{\vec{\boldsymbol{f}}_s}^{-p\vec{\boldsymbol{n}} + \cancelto{0}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}}\,dS + \int_V \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\,dV}_{\text{Sumatorio de fuerzas (superficie y volumen)}}$$

obteniendo:

$$\int_S -p\vec{\boldsymbol{n}}\,dS + \int_V \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\,dV = 0$$

Equilibrio estático
(sumatorio de fuerzas = 0)

- Aplicamos el teorema de la divergencia: $\int_S -p\vec{\boldsymbol{n}}\,dS = \int_V -\nabla p\,dV$

$$\int_S (-\nabla p + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m)\,dV = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho\vec{\boldsymbol{f}}_m = \nabla p}$$

Ley de Pascal

De la ecuación fundamental de la fluidostática:

$$\rho \vec{\boldsymbol{f}}_m = \nabla p$$

podemos calcular p integrando, conociendo las fuerzas másicas $\vec{\boldsymbol{f}}_m$. Si ahora:

- Consideramos densidad constante, $\rho = \mathrm{cte}$.
- Consideramos fuerza másica conservativa: $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$

$$-\rho \nabla U = \nabla p \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla(p + \rho U) = 0}$$

Integrando, obtenemos: $p + \rho U = \mathrm{cte}$

Si conocemos la presión y el potencial en un punto, p_0, U_0, podemos escribir:

$$p = p_0 + \rho(U_0 - U)$$

Y si consideramos solamente el potencial gravitatorio: $U = gz$

$$\boxed{p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z)}$$

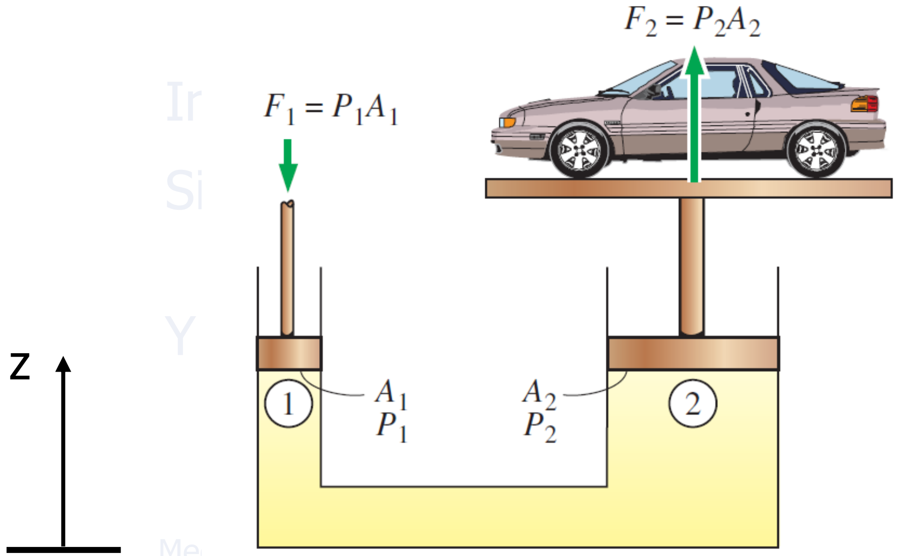
$\rho g = \gamma$ Es el peso específico

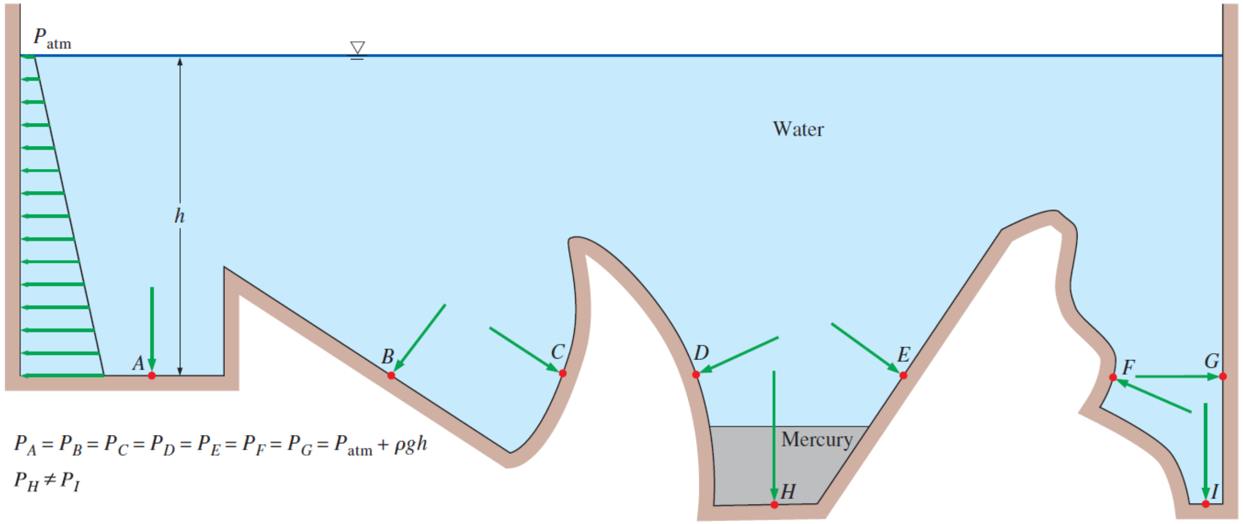
Ley de Pascal:

1. La presión en un punto es independiente de la dirección

2. La presión en un fluido en reposo se transmite por igual en todas las direcciones; las diferencias de presión entre dos puntos son solamente debidas a variaciones de profundidad

$$p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$





Aplicación a la medida de presiones (manómetros)

La ecuación fundamental de la fluidostática (con ρ constante y f. grav, ley de Pascal)

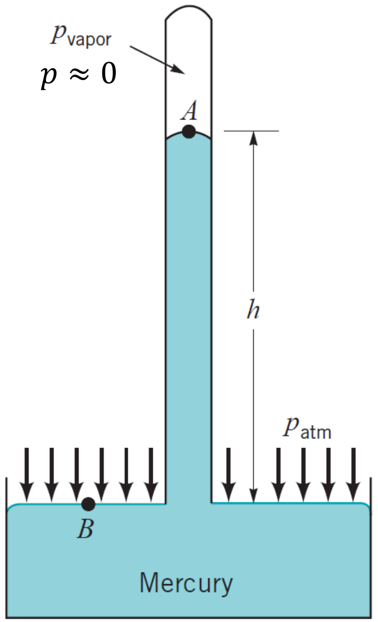
$$p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

Puede utilizarse para medir presiones a través de la medición de la altura de columna de fluido, ya que:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

Δp: Variación de presión

Δz: Altura de columna de fluido, entendida como diferencia de cota entre dos puntos



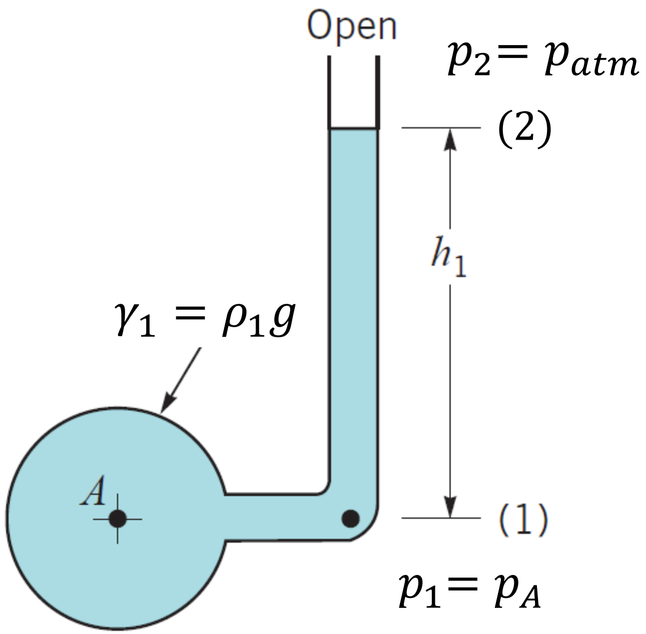
Barómetro de Torricelli:

$$p_B = p_A + \rho g(z_A - z_B) \rightarrow \quad p_{atm} = \rho g h$$

Aplicación a la medida de presiones (manómetros)

Un manómetro muy simple: el **tubo piezométrico**

Consiste en un tubo vertical por el que asciende un fluido (líquido) desde el punto de medida (en este caso, un depósito a mayor presión que p_{atm}). Tiene limitaciones ($p_A > p_{atm}$ y fluido debe ser líquido) .



$$p_1 = p_2 + \rho g (z_2 - z_1)$$

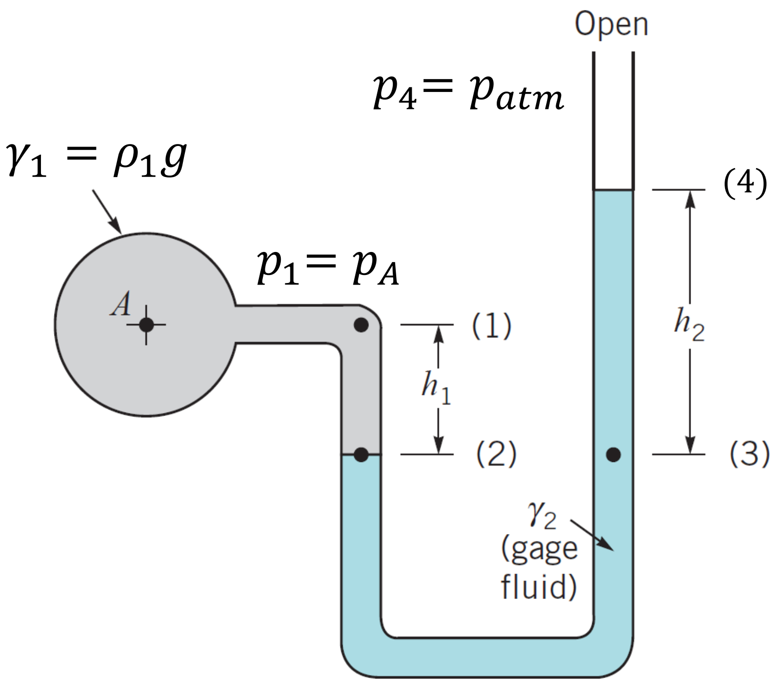
$$p_A\Big|_{\text{absoluta}} \equiv p_1 = p_{atm} + \rho g h_1$$

$$p_A\Big|_{\text{manométrica}} = \rho g h_1$$

Aplicación a la medida de presiones (manómetros)

Un manómetro más sofisticado: el **manómetro de tubo en U**

Consiste en un tubo en forma de U que contiene un fluido de medida con peso específico $\gamma_2 = \rho_2 g$. Un extremo del tubo se conecta al punto de medida (en este caso un depósito) y el otro está abierto.



Aplicamos la ley de Pascal a los distintos tramos:

Tramo 1-2: $p_2 = p_1 + \rho_1 g (z_1 - z_2)$

Tramo 2-3: $p_2 = p_3$

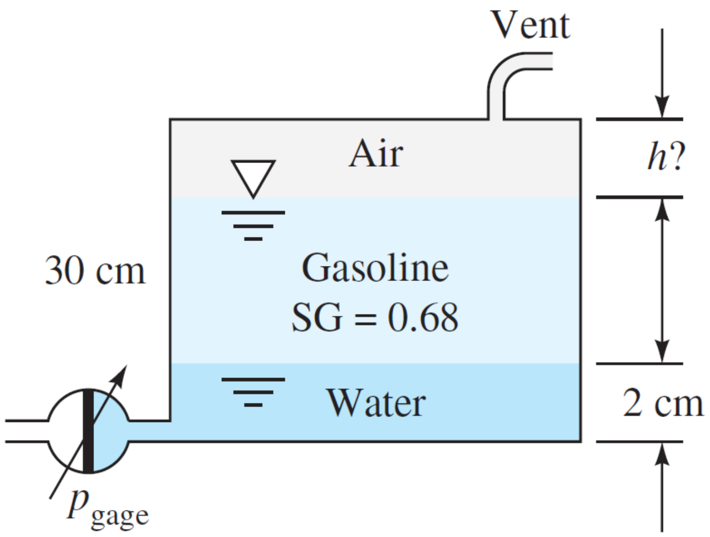
Tramo 3-4: $p_3 = p_4 + \rho_2 g (z_4 - z_3)$

Reordenando y considerando $p_1 = p_A$ y $p_4 = p_{atm}$

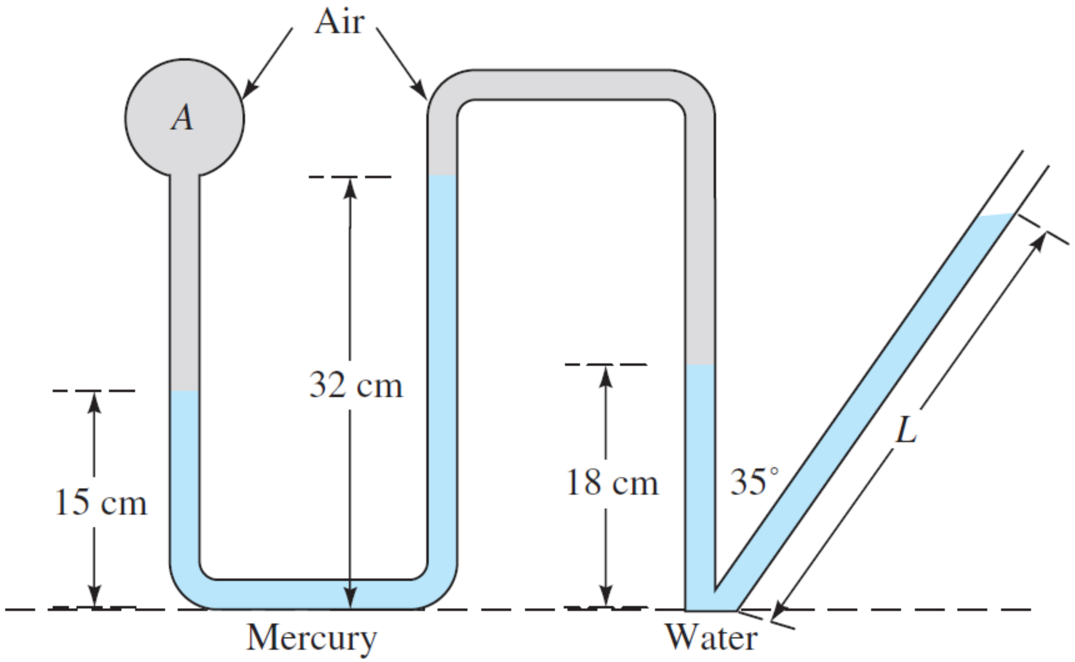
$$p_A|_{\text{absoluta}} = p_{atm} + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g\ h_1$$
$$p_A|_{\text{manométrica}} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g\ h_1$$

Aplicación a la medida de presiones – Problemas propuestos

The fuel gage for a gasoline tank in a car reads proportional to the bottom gage pressure as in Fig. P2.22. If the tank is 30 cm deep and accidentally contains 2 cm of water plus gasoline, how many centimeters of air remain at the top when the gage erroneously reads "full"?



The system in Fig. P2.48 is open to 1 atm on the right side. (*a*) If L = 120 cm, what is the air pressure in container A? (*b*) Conversely, if p_A = 135 kPa, what is the length L?

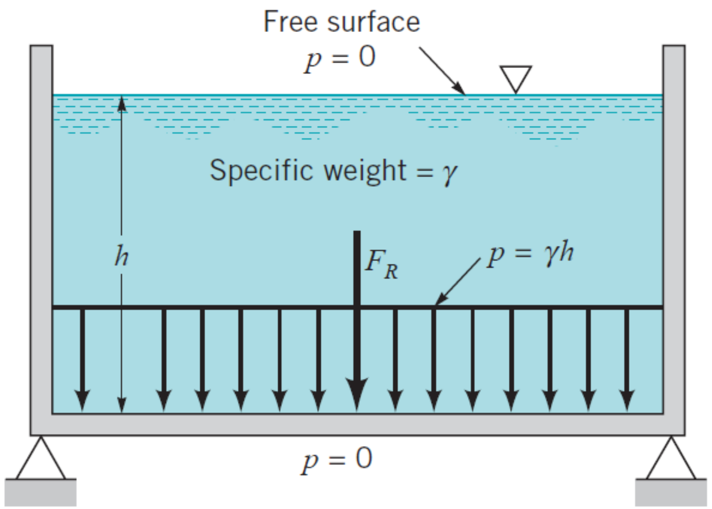


Cálculo de fuerzas y momentos en superficies

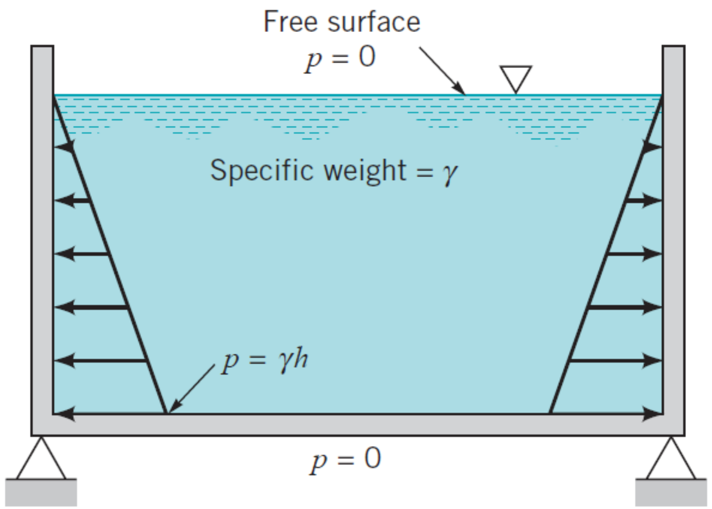
Hasta ahora hemos aprendido a calcular cómo varía la presión en un fluido, p.e. ley de Pascal:

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

¿Cómo calcularemos las fuerzas y momentos producidos por la presión?



(a) Pressure on tank bottom



(b) Pressure on tank ends

Cálculo de fuerzas y momentos en superficies

Una vez conocemos cómo varía la presión en un fluido, p.e. ley de Pascal:

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z)$$

podemos calcular:

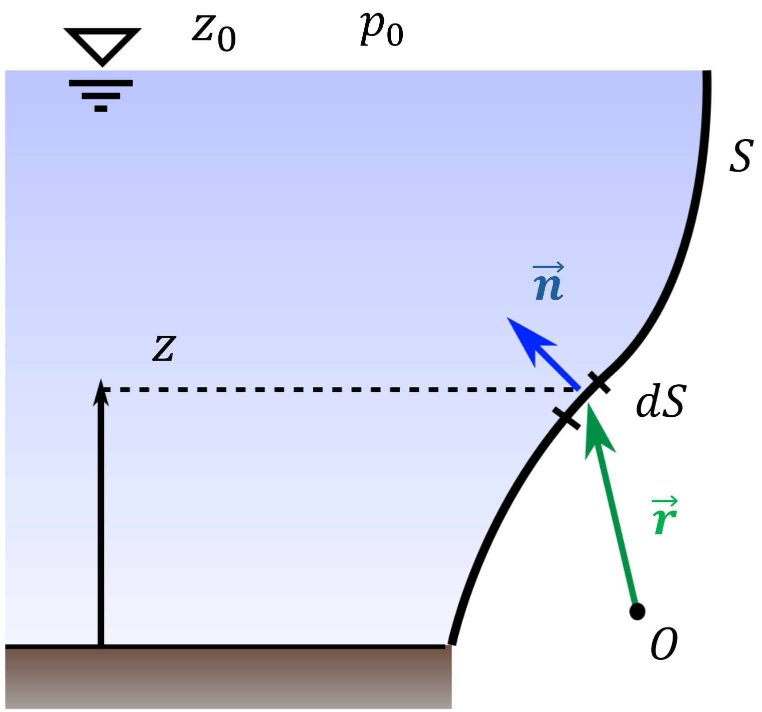
- La **fuerza** que produce la presión en una superficie S (revisar diapositiva 4):

Fluido en reposo

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \int_S \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} dS = \int_S -p\vec{\boldsymbol{n}} dS$$

- El **momento** que produce la presión en una superficie S, respecto de un punto O:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_s \Big|_O = \int_S \vec{\boldsymbol{r}} \times (-p\vec{\boldsymbol{n}}) dS$$



Cálculo de fuerzas y momentos en superficies

Una vez conocemos cómo varía la presión en un fluido, p.e. ley de Pascal:

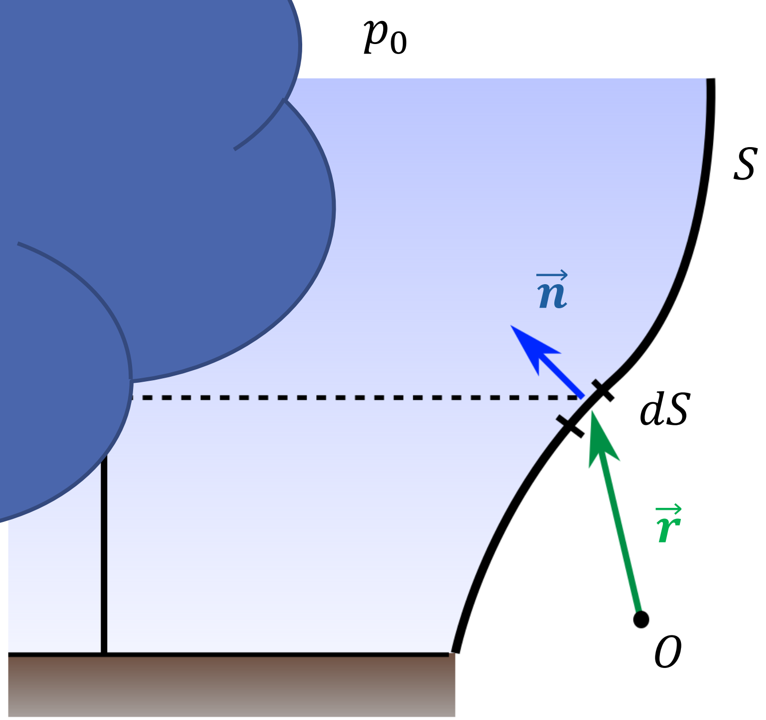
podemos calcular:

- La **fuerza** que
diapositiva

- El **momen**
respecto de

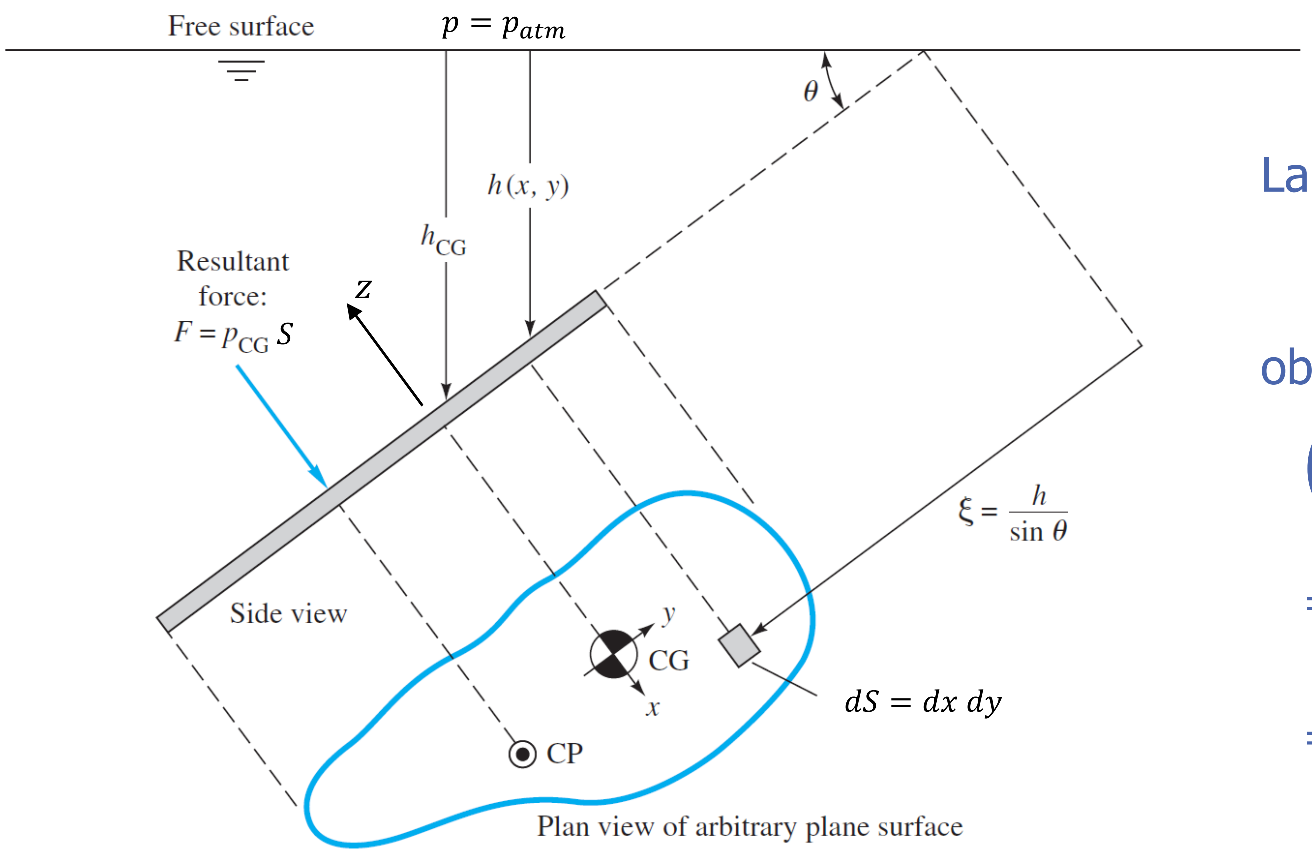
A veces las integrales pueden ser difíciles…

Vamos a ver algunas "recetas" para calcular fuerzas en casos particulares



Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

Consideremos la siguiente superficie plana en el plano x-y (ejes relativos a la sup.):



$$p = p_{atm} + \rho g h$$

La fuerza sobre la superficie será:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int_S -p\vec{\boldsymbol{n}}dS = \int_S -pdS\hat{\mathbf{k}}$$

observando que solo hay componente z. Esta será:

$$\left(\vec{\boldsymbol{F}}\right)_z = \int_S -pdS = \int_S -(p_{atm} + \rho g h)dS$$

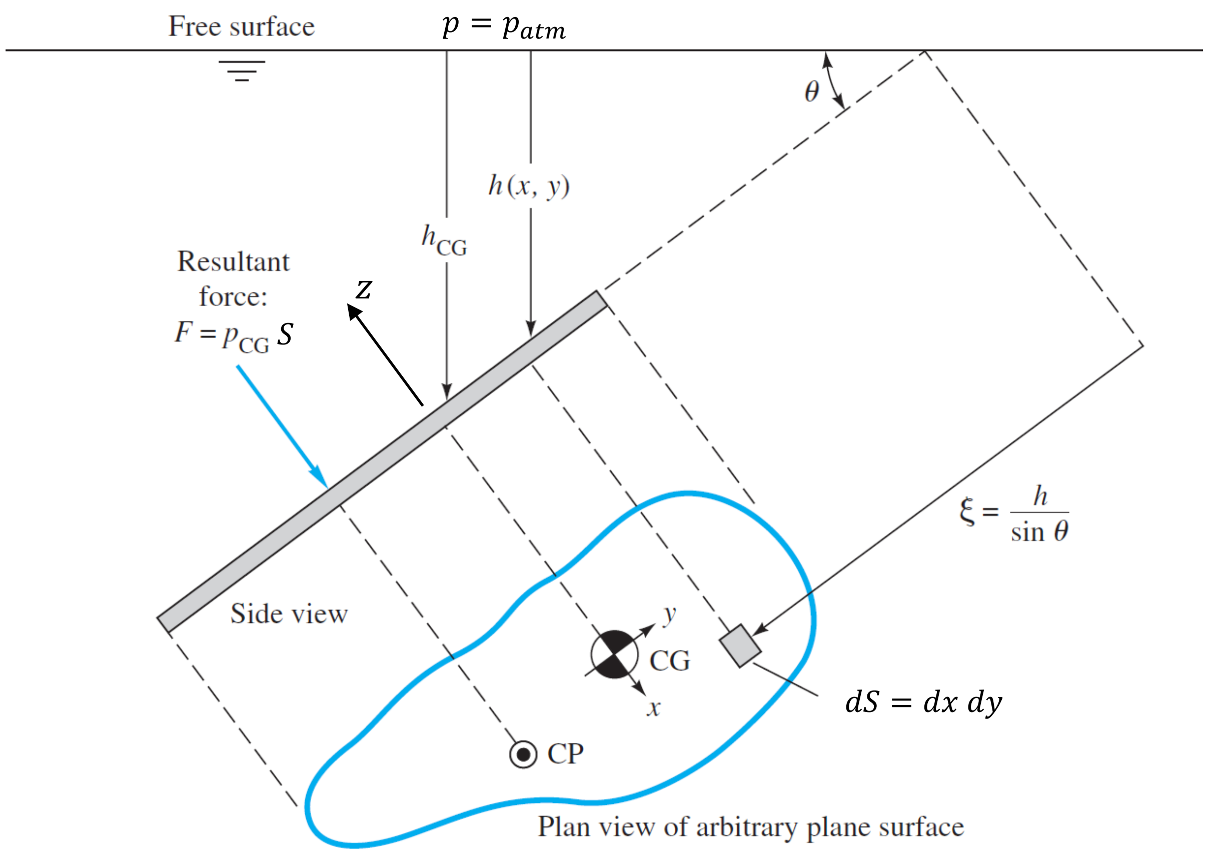
$$= \int_S -(p_{atm} + \rho g \xi \sin\theta)dS$$

$$= -p_{atm}S - \rho g \sin\theta \underbrace{\int_S \xi dS}_{\xi_{CG}S} = -(p_{atm} + \rho g h_{CG})S$$

$$= -p_{CG}S$$

Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

Consideremos la siguiente superficie plana en el plano x-y (ejes relativos a la sup.):



Para facilitar los cálculos, podemos imaginarnos que la fuerza resultante de presión (calculada antes) se concentra en un punto. Es a lo que llamamos **fuerza equivalente** (virtual) **puntual:**

$$F = (p_{atm} + \rho g h_{CG})S$$

Pero… ¿dónde debemos colocar esta fuerza equivalente puntual?

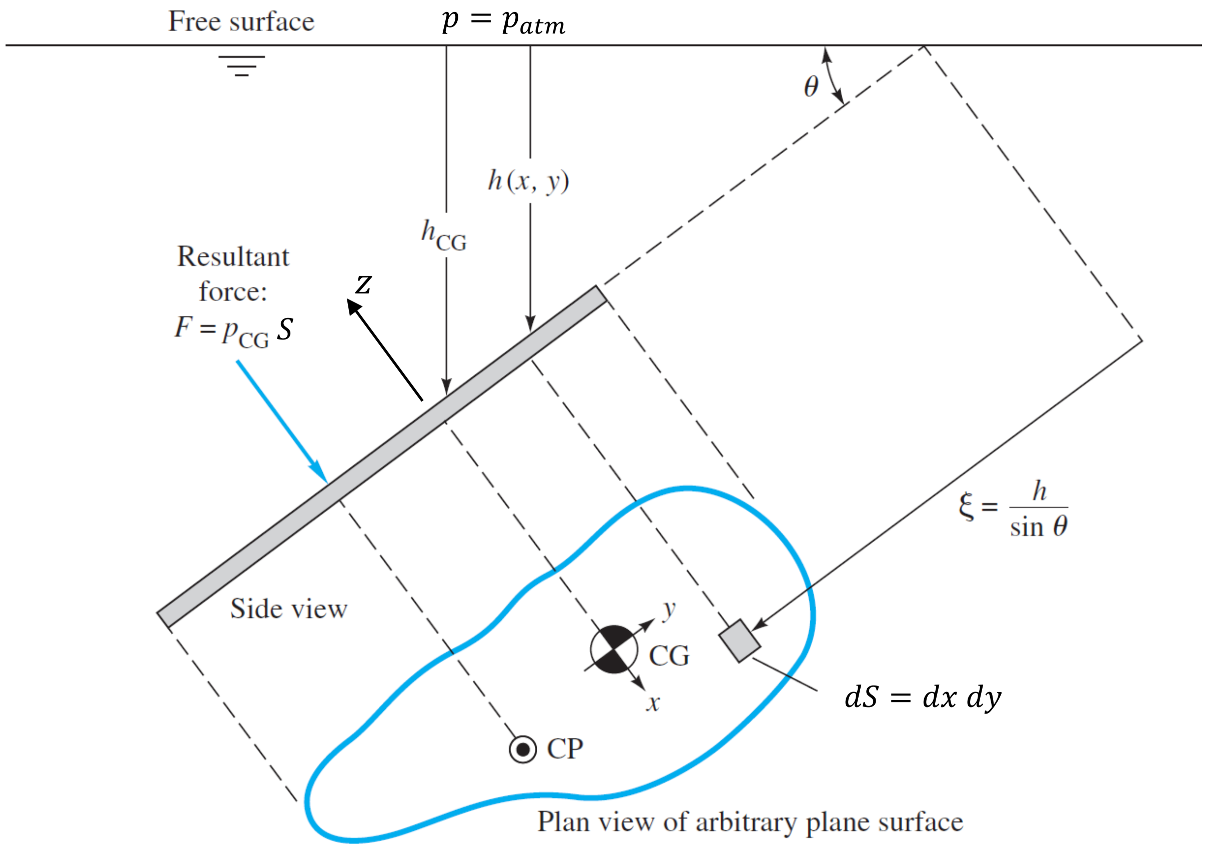
En un punto tal que produzca el mismo momento que la distribución de presiones original -> este punto es el denominado centro de presiones (CP)

- Momento en eje x: $F y_{CP} = \int_S \; y p dS$
- Momento en eje y: $F x_{CP} = \int_S \; x p dS$

$$y_{CP} = \frac{\int_S \; y p dS}{\int_S \; p dS}, \qquad x_{CP} = \frac{\int_S \; x p dS}{\int_S \; p dS}$$

Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

Consideremos la siguiente superficie plana en el plano x-y (ejes relativos a la sup.):



Las expresiones:

$$y_{CP} = \frac{\int_S ypdS}{\int_S pdS}, \qquad x_{CP} = \frac{\int_S xpdS}{\int_S pdS}$$

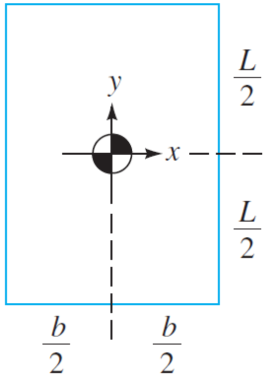
se pueden escribir de la siguiente manera:

$$y_{CP} = \frac{-\rho g \sin\theta\, I_{xx}}{p_{CG} S}, \qquad x_{CP} = \frac{-\rho g \sin\theta\, I_{xy}}{p_{CG} S}$$

con los productos de inercia:

$$I_{xx} = \int_S y^2 dS, \qquad I_{xy} = \int_S xydS$$

Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

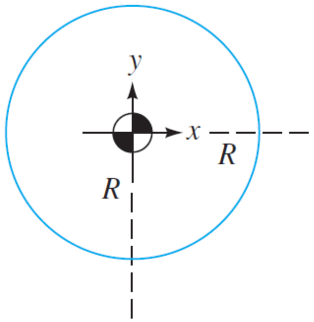


$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

(*a*)

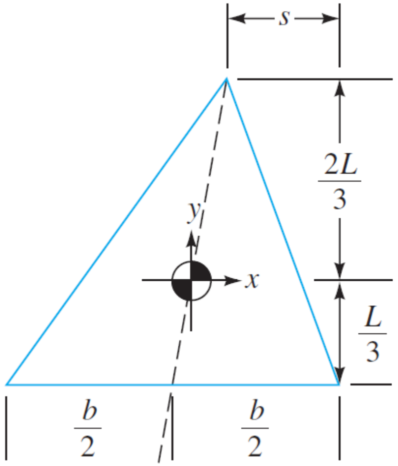


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

(*b*)

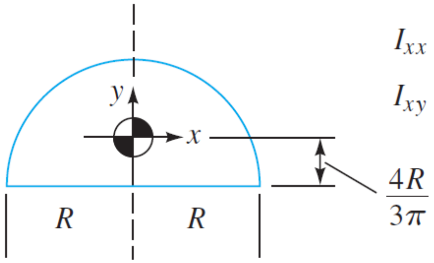


$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$

(*c*)



$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

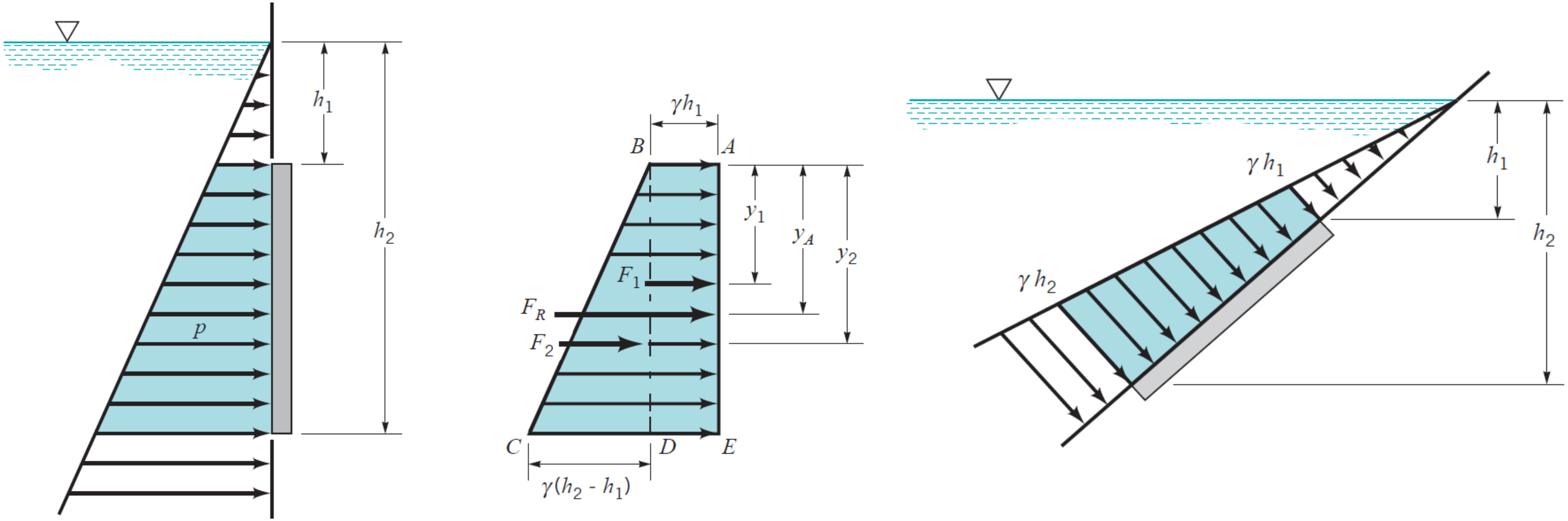
$$I_{xx} = 0.10976R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

(*d*)

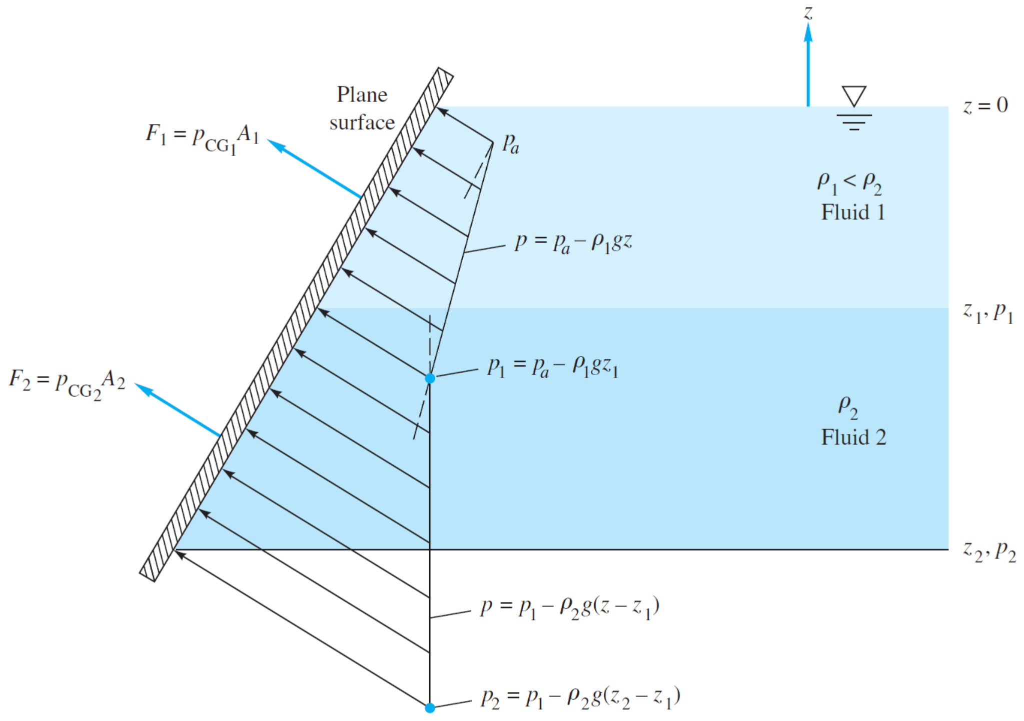
Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

- Caso particular: superficie plana rectangular



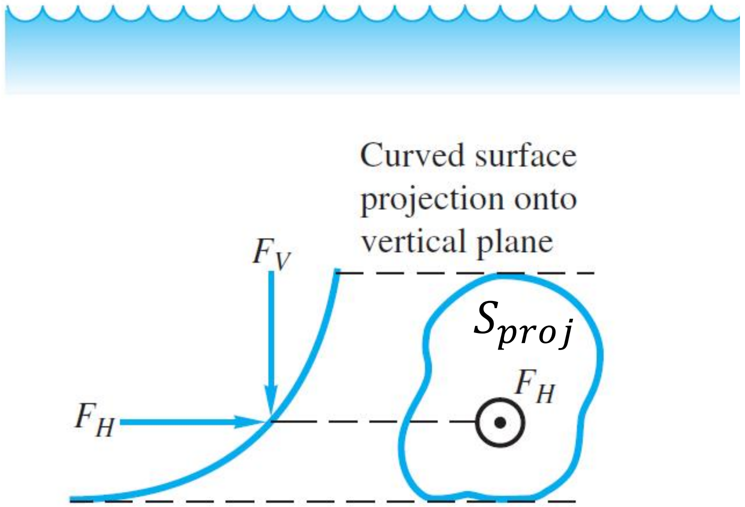
Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies planas

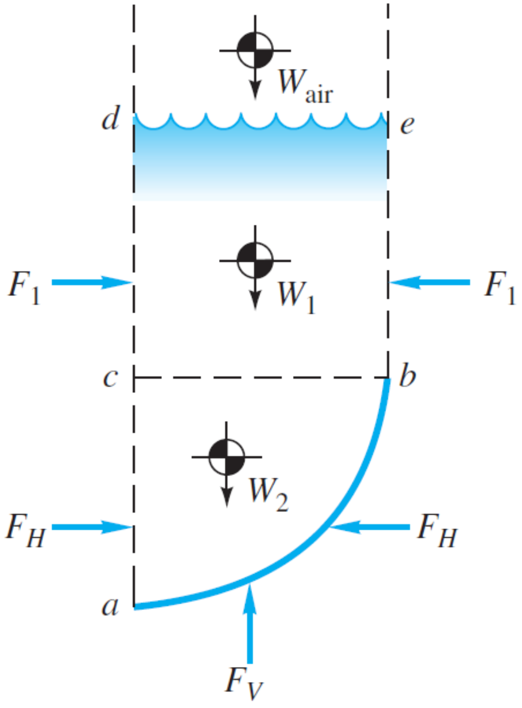
- Caso particular: superficie plana rectangular con varios fluidos



Cálculo de fuerzas y momentos – Superficies curvas

Consideremos la siguiente superficie curva y hagamos el diagrama de sólido libre a la columna de fluido que hay sobre ella, separando la componente x e y de la fuerza:





Observaciones relevantes:

- La fuerza horizontal sobre la superficie curva es igual a la fuerza horizontal que ejerce el fluido sobre la proyección de dicha superficie en el plano vertical. Su magnitud es:

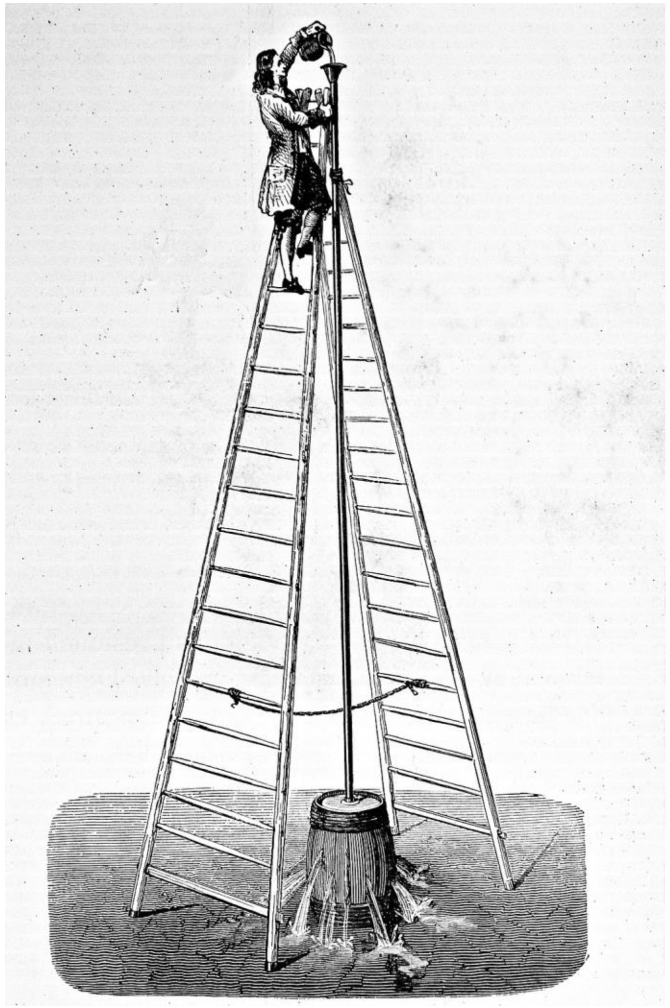
$$F_H = (p_{atm} + \rho g h_{CG}) S_{proj}$$

- La fuerza vertical sobre la superficie curva es igual al peso total de la columna de fluido sobre ésta. Su magnitud es:

$$F_V = W_1 + W_2 + W_{air} = \rho g (V_1 + V_2) + p_{atm}\, S_{sup}$$

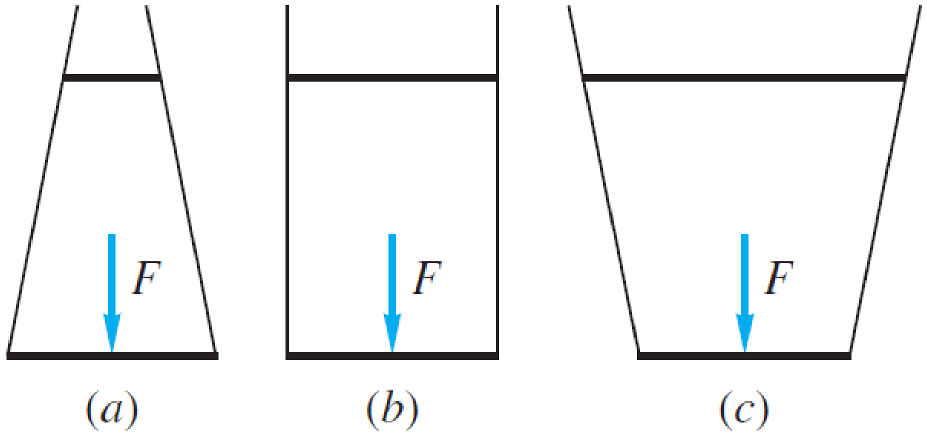
Cálculo de fuerzas y momentos – Paradoja de Pascal

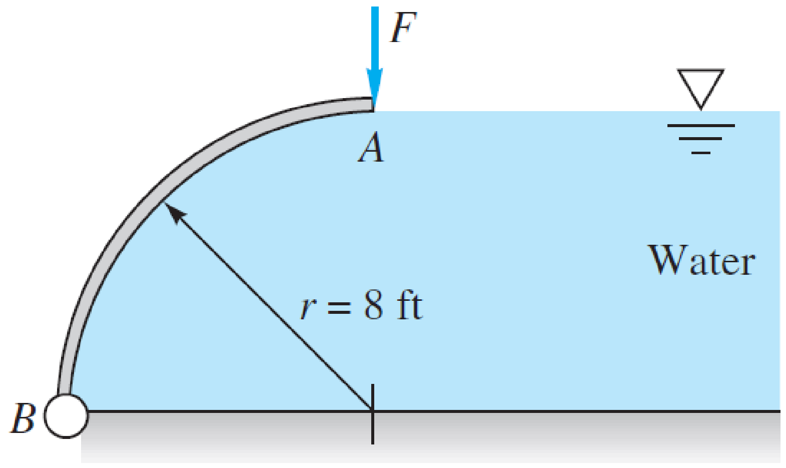
"Un barril de madera, lleno de agua, coronado por un tubo hueco abierto por sus extremos, puede estallar si se vierte agua en el tubo a una altura suficiente cualquiera que sea la sección del tubo, incluso aunque sea muy pequeña".



Cálculo de fuerzas y momentos – Paradoja de Pascal

Casos particulares: en estos casos tenemos que imaginar un “volumen virtual” sobre la superficie.



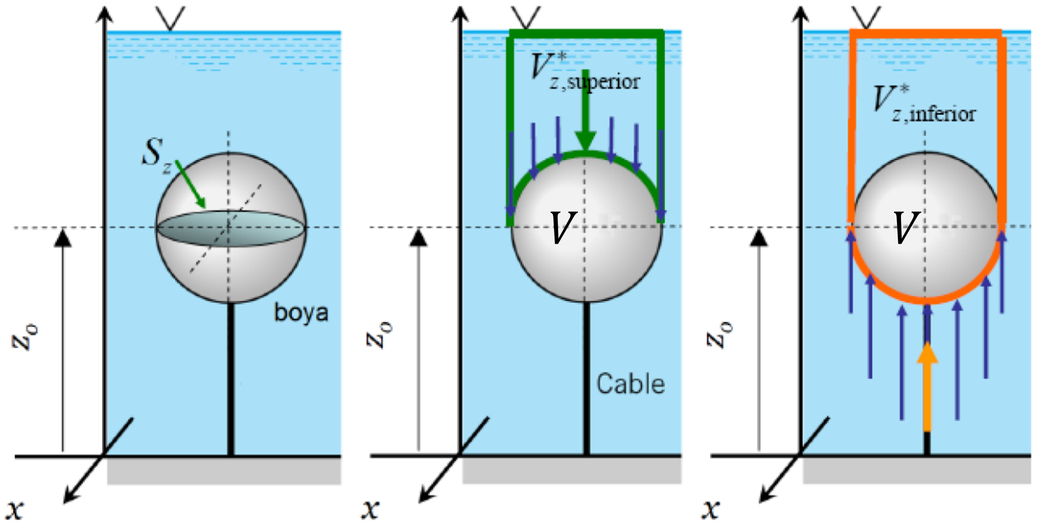


Cálculo de fuerzas y momentos – Principio de arquímedes

Enunciado popular:

"Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del volumen de fluido desalojado"

¿Por qué?



$$F_{V,sup} = -\rho g V_{sup}$$

$$F_{V,inf} = \rho g V_{inf}$$

$$\boxed{F_{flotación} = \rho g (V_{inf} - V_{sup}) = \rho g V}$$

Demostración (utilizando T. Gauss):

$$F_{flotación} = \oint_{S(V)} -p\vec{\boldsymbol{n}}dS = -\int_V \nabla p dV$$

$$= \int_V \rho g dV = \rho g V$$