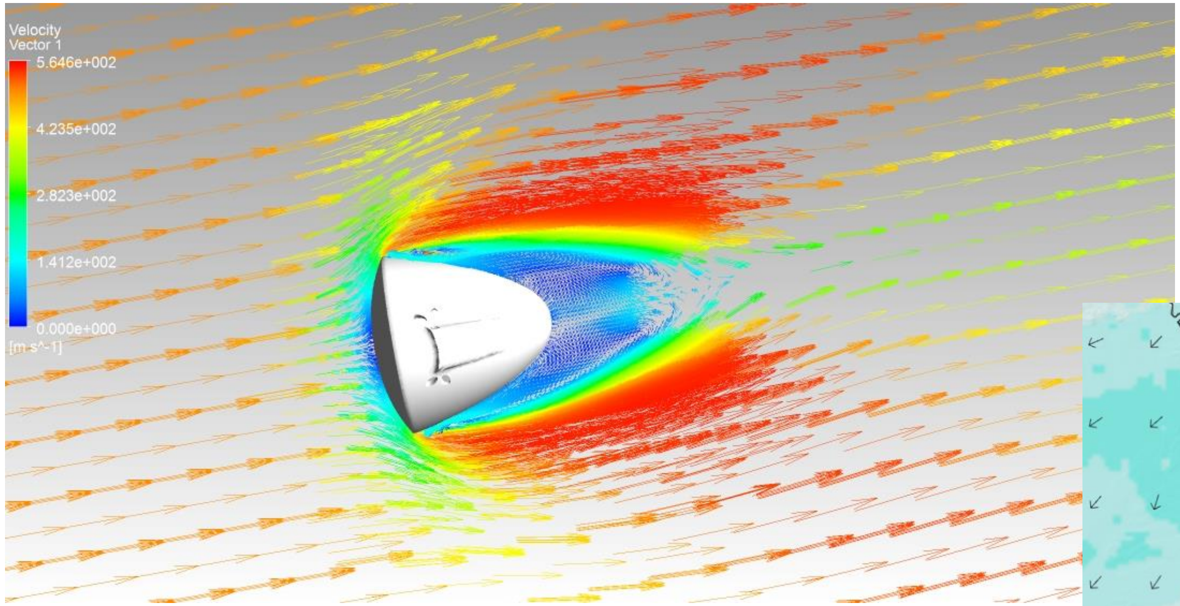
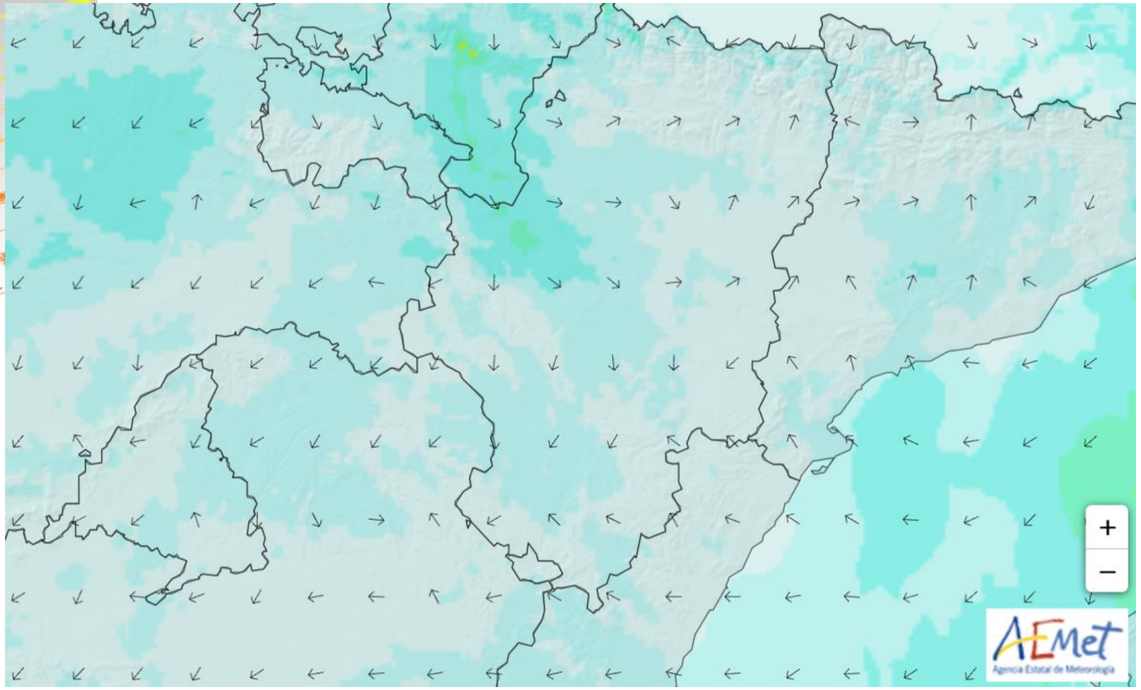
ECUACIONES FUNDAMENTALES

Mecánica de fluidos

Adrián Navas Montilla (anavas@unizar.es)

CONTENIDOS


Velocity
Vector 1
5.646e+002
4.235e+002
2.823e+002
1.412e+002
0.000e+000
[m s^-1]

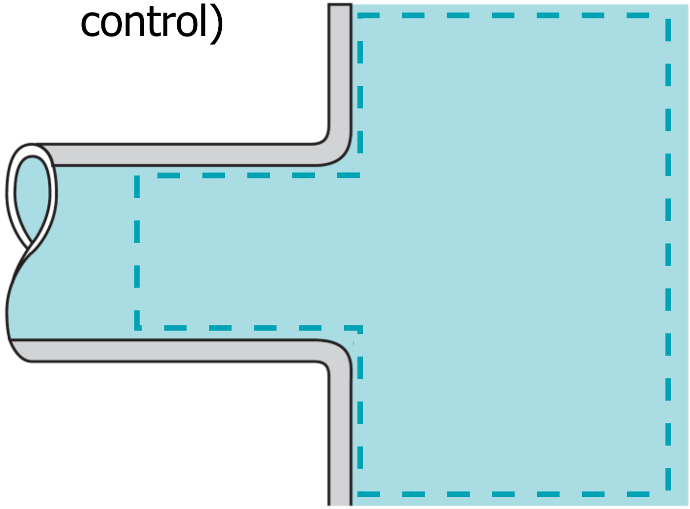

AEMet
Agencia Estatal de Meteorología

CONTENIDOS

Forma integral vs. forma diferencial de las ecuaciones

Forma integral

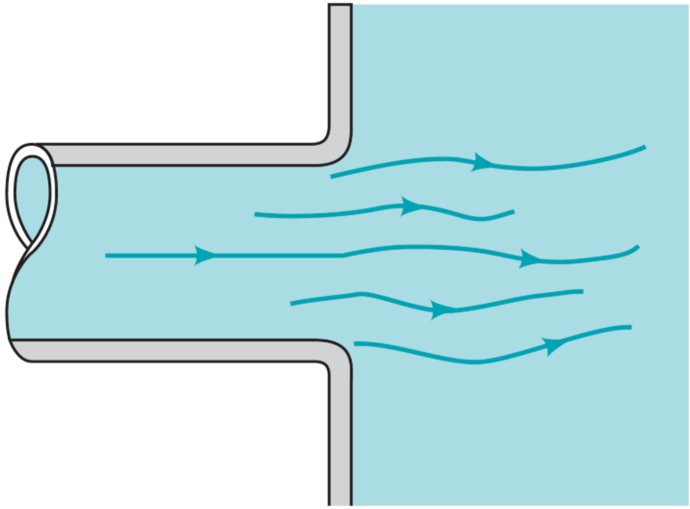
- Trabajamos con ecuaciones integrales (de balance)
- Obtenemos información global de lo que ocurre en el dominio (volumen de control)



$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho dV + \int_{SC(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_c) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = 0$$

Forma diferencial

- Trabajamos con ecuaciones diferenciales
- Obtenemos información local de las variables y sus gradientes en cada punto del espacio



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0$$

Variables intensivas y extensivas

Podemos definir:

- Propiedades **extensivas,** B : Dependen de la cantidad de materia (o del volumen) del sistema. Su magnitud es proporcional al volumen del sistema Se definen como:

$$B = \int_V b dV$$

- Propiedades intensivas o **específicas,** b : No dependen de la cantidad de materia (o del volumen) del sistema. Se definen como:

$$b = \frac{dB}{dV} \equiv \left[\frac{\text{propiedad extensiva}}{\text{volumen}}\right]$$

$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{B}$
Densidad: ρ	Masa: M
Momento lineal específico: ρu	Momento lineal: P
Energía total específica: $\rho(e + \frac{1}{2}\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2)$	Energía total: E

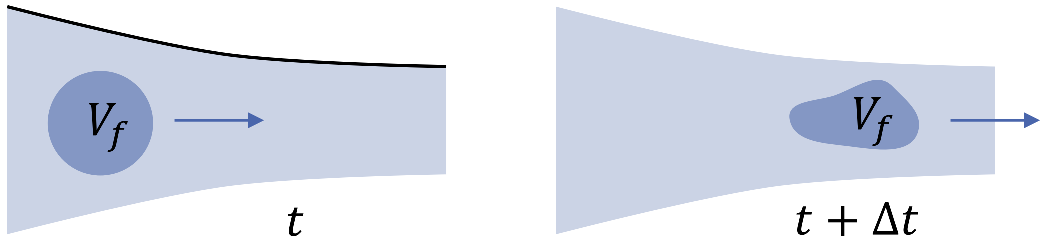
Las leyes de conservación integrales que rigen el comportamiento de los fluidos se formulan para prop. extensivas:

$$\frac{dB}{dt} = (\dots)$$

Volumen fluido y volumen de control

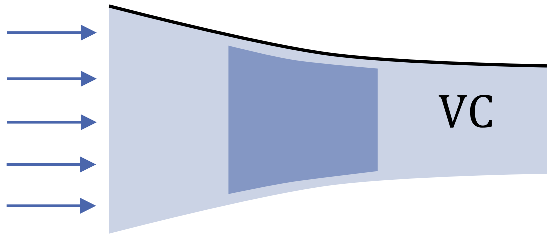
Podemos definir dos tipos de volúmenes en los que definir las variables y ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos:

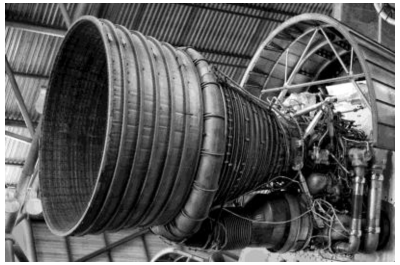
- **Volumen fluido**, $V_f(t)$: Es el volumen que contiene siempre las mismas partículas fluidas, es decir, que se mueve con la velocidad del flujo, $\vec{\boldsymbol{v}}$. <u>Para él se definirán las leyes fundamentales de conservación</u> (cons. masa, momento lineal, energía, etc…).



- **Volumen de control**, $\mathrm{VC}(t)$: Es un volumen arbitrario, que se mueve con velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}$. <u>Se utiliza para facilitar la resolución de problemas</u> y es habitual que $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}} = 0$ (ejemplo debajo).

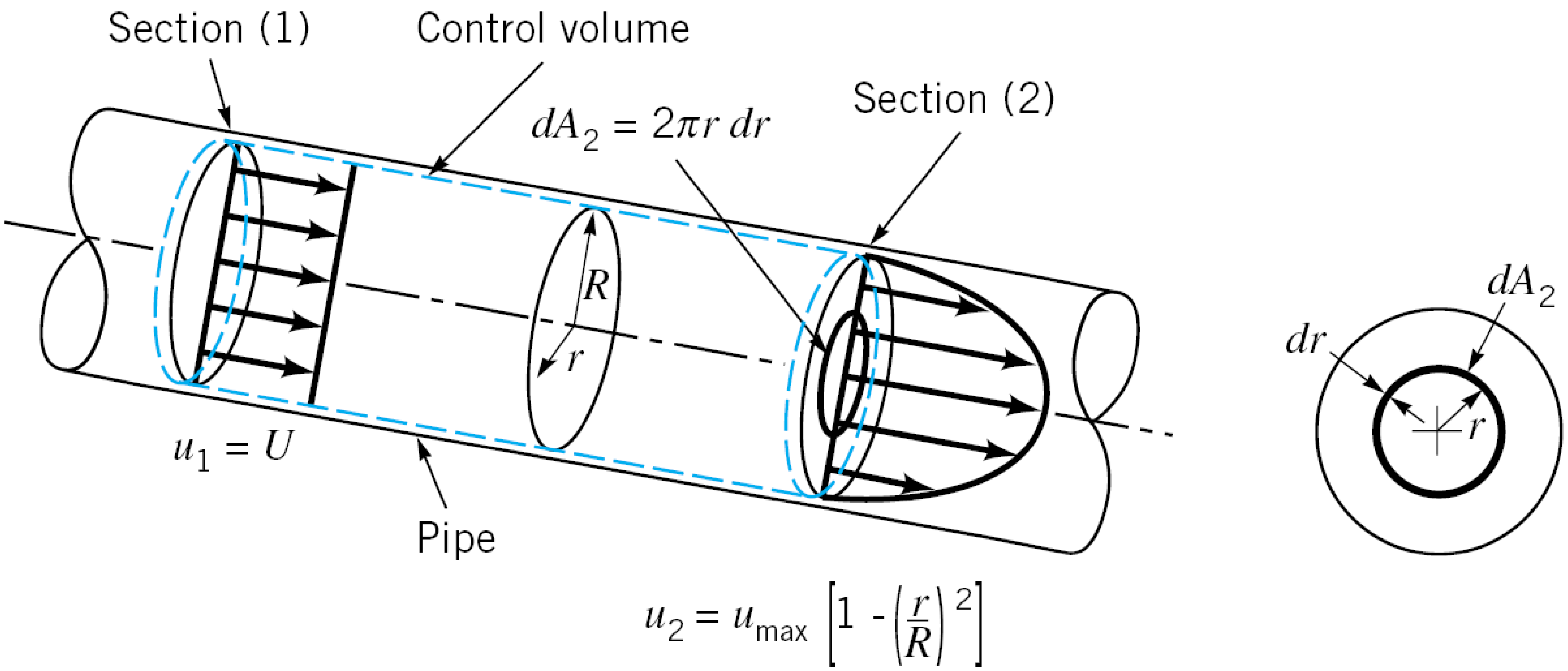
Es habitual coger un VC fijo ($\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}} = 0$) para analizar, por ejemplo, esta tobera.





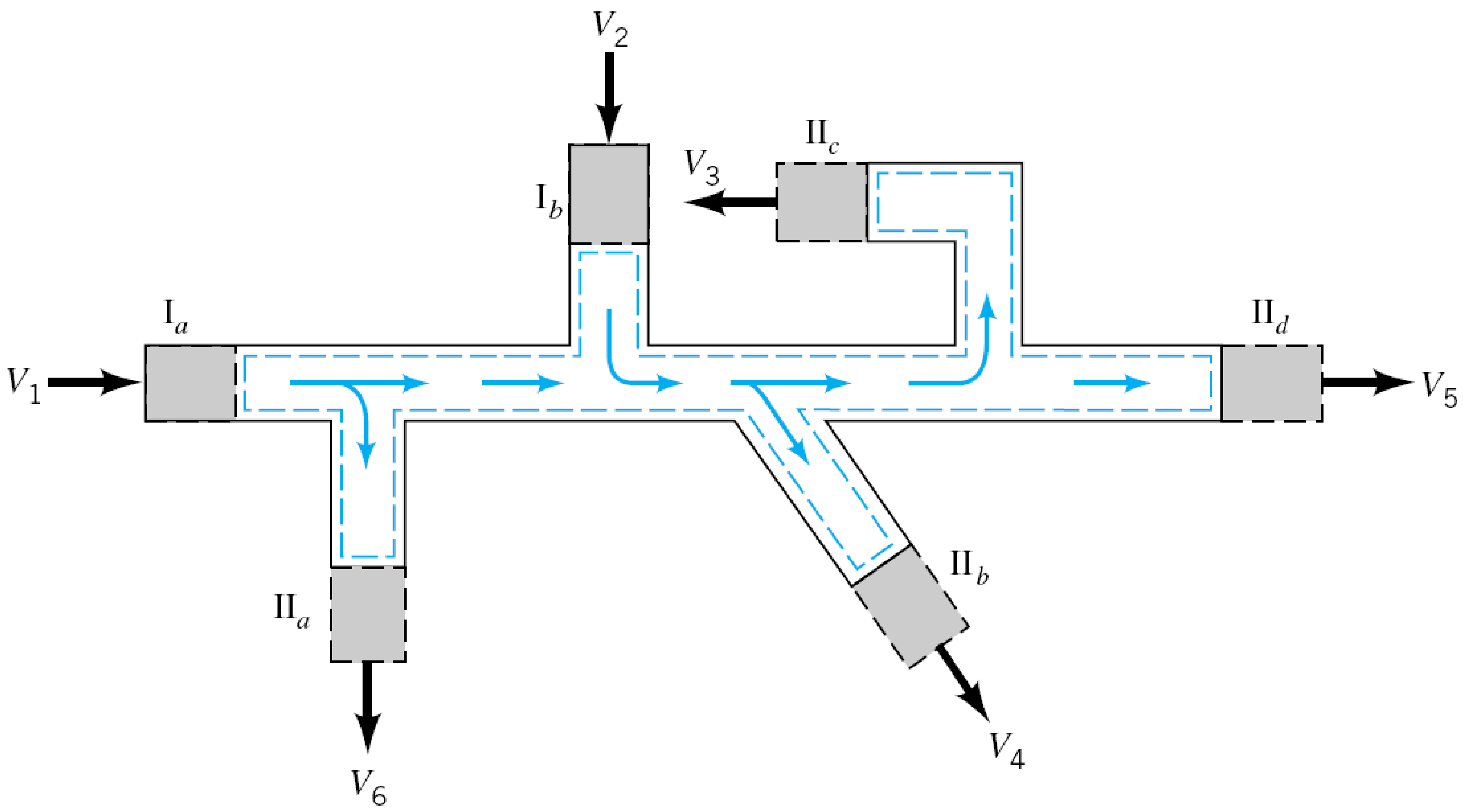
Volumen fluido y volumen de control - Ejemplos

Volumen de control FIJO



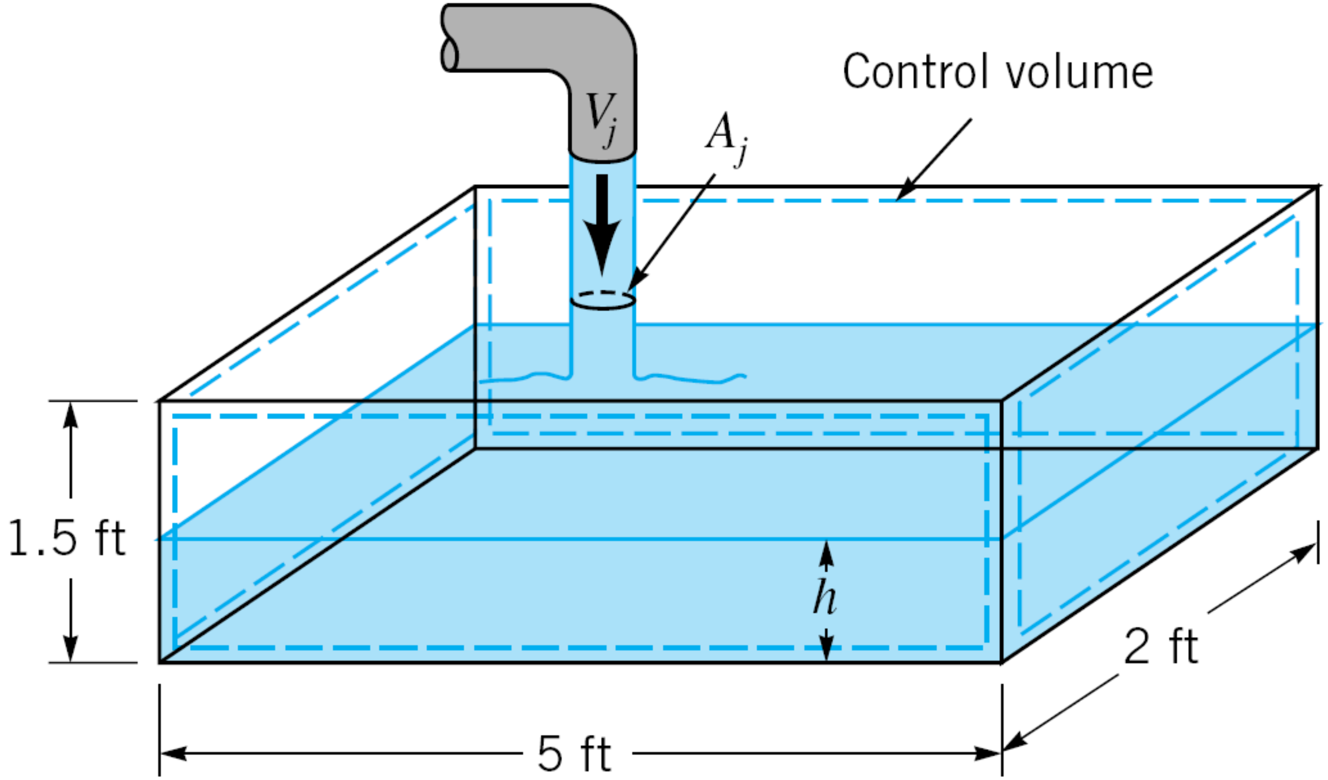
Volumen fluido y volumen de control - Ejemplos

Volumen de control con múltiples ENTRADAS Y SALIDAS



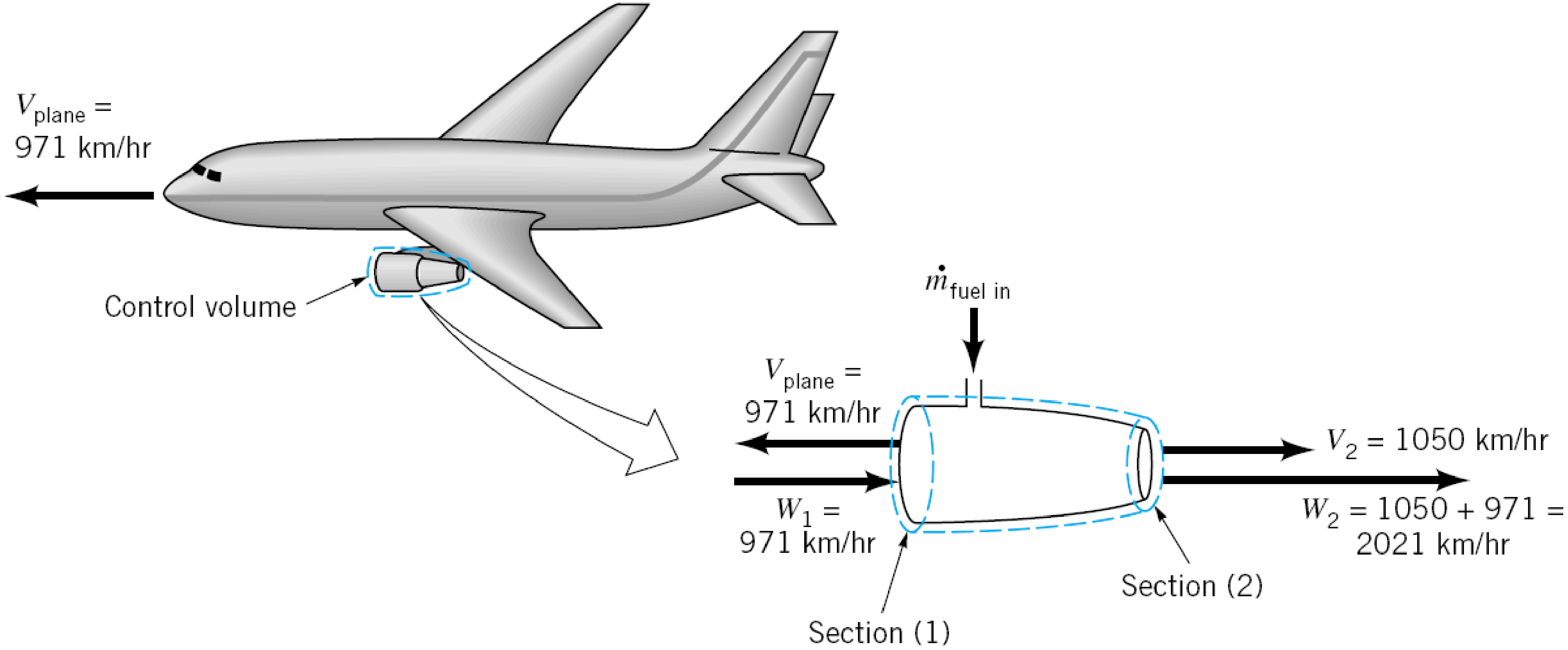
Volumen fluido y volumen de control - Ejemplos

Volumen de control DEFORMABLE



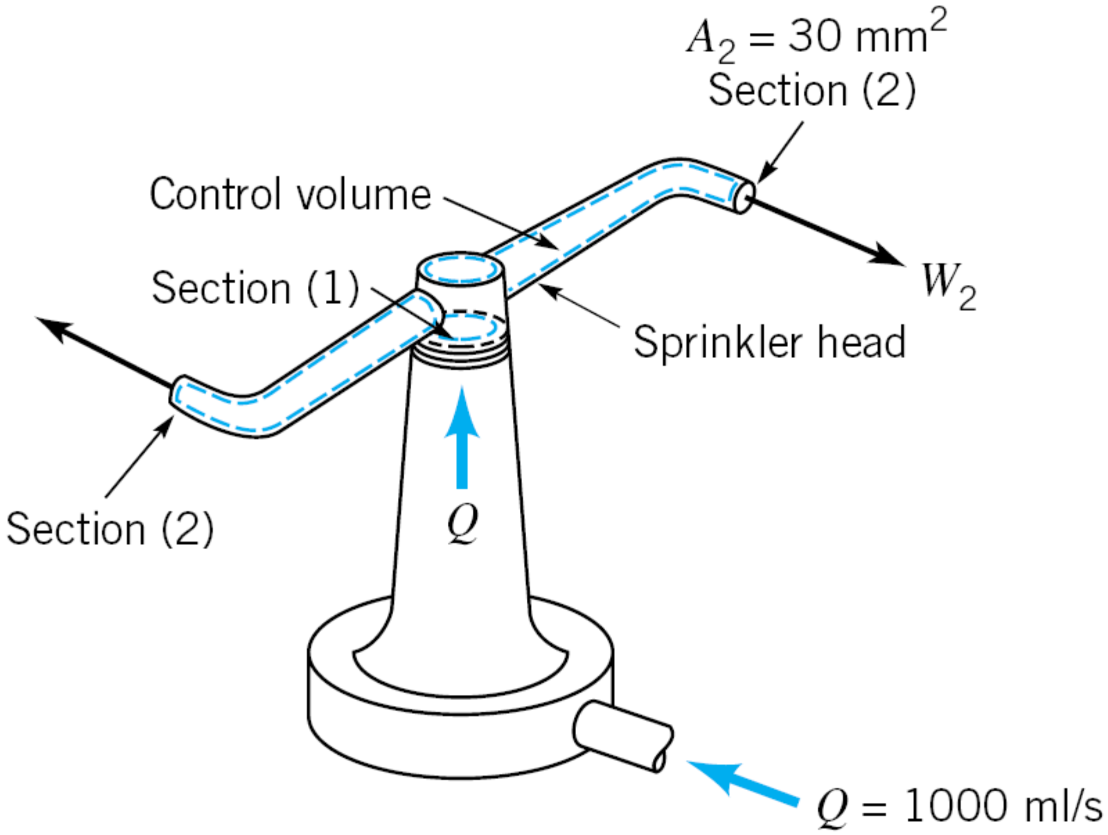
Volumen fluido y volumen de control - Ejemplos

Volumen de control MÓVIL



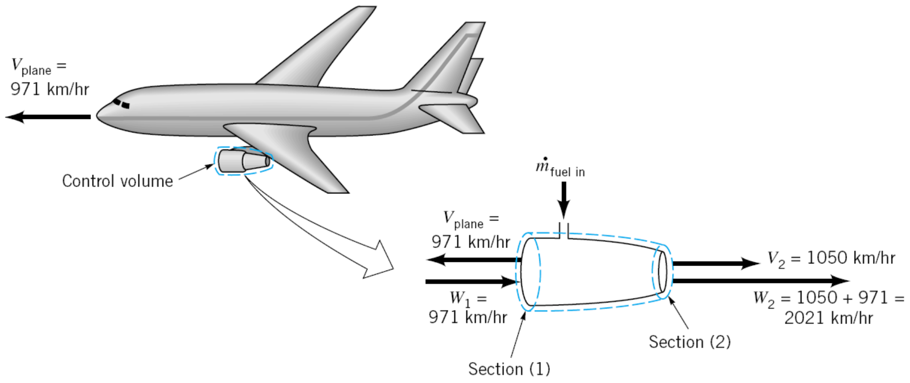
Volumen fluido y volumen de control - Ejemplos

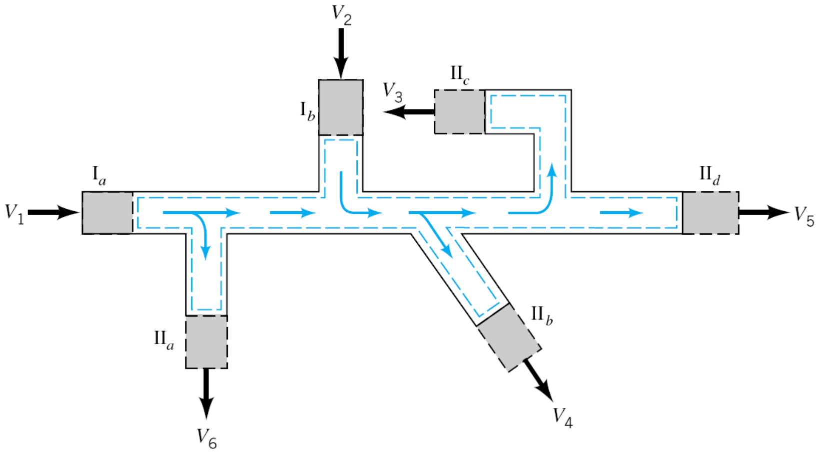
Volumen de control MÓVIL



Relación entre volumen fluido y volumen de control

- El uso de **volúmenes de control** nos facilitará la resolución de problemas, ya que podemos adaptarlos a la geometría del problema:





- Sin embargo, las leyes físicas de conservación se enuncian para un **volumen fluido:**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathrm{Masa}\bigg|_{Vf} = 0}$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\mathrm{Masa}\bigg|_{VC} = 0}$$

¿Cómo relacionamos las variaciones (d/dt) de las variables en un volumen de control con aquellas en un volumen fluido?

Teoremas del transporte de Reynolds - Preliminares

- Consideremos un volumen $V(t)$ que se mueve a velocidad $\vec{\boldsymbol{w}}$ en el que se existe un fluido para el que se define una propiedad específica $b(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ y su propiedad equivalente extensiva, $B(t)$, que se calcula como:

$$B(t) = \int_{V(t)} b(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV$$

- Las leyes de fundamentales de conservación que rigen el comportamiento de los fluidos son de la forma (siempre con $V(t)= V_f(t)$) :

$$\frac{d}{dt}B(t) \equiv \frac{d}{dt}\int_{V(t)} b(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV$$

El dominio de integración depende del tiempo!!! -> Difícil

- Aplicando la regla de Leibnitz para la derivación bajo el símbolo integral se puede expresar:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} b(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV = \int_{V(t)} \frac{\partial b(\vec{\boldsymbol{x}},t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} b(\vec{\boldsymbol{x}},t)\vec{\boldsymbol{w}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS$$

Superficie que delimita el volumen

Teoremas del transporte de Reynolds

- Primer Teorema del Transporte de Reynolds. **Volumen fluido** $V(t) = V_f(t)$, con $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} b dV = \int_{V_f(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{S_f(t)} b\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$$

- Segundo Teorema del Transporte de Reynolds. **Volumen de control** $V(t) = VC(t)$, con $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}_c$:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} b dV = \int_{VC(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{SC(t)} b\vec{\boldsymbol{v}}_c \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$$

- Tercer Teorema del Transporte de Reynolds, el que usaremos para resolver problemas. **Relaciona la variación en un volumen fluido con la de un volumen de control**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} b dV = \frac{d}{dt}\int_{VC(t)} b dV + \int_{SC(t)} b(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_c) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS}$$

Tercer Teorema del transporte de Reynolds

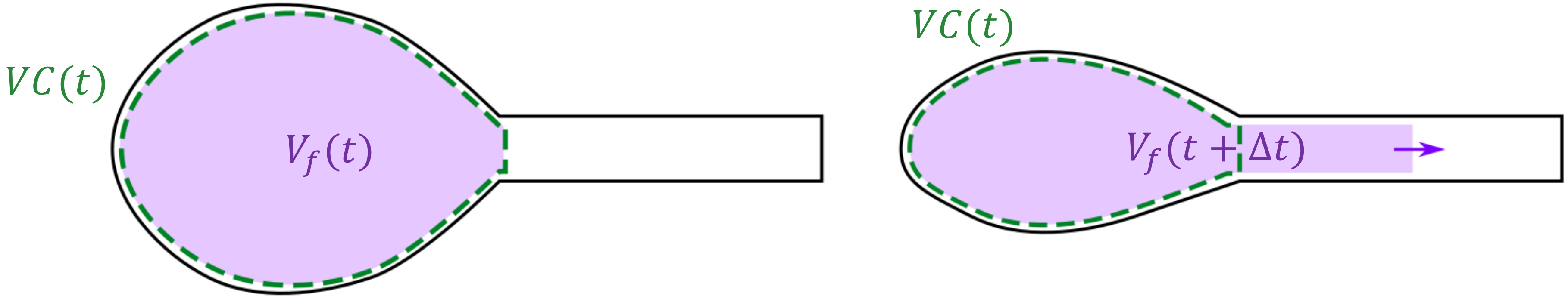
- Tercer Teorema del Transporte de Reynolds. **Relaciona la variación en un volumen fluido con la de un volumen de control**:

Este término no sabemos calcularlo pero es necesario para formular las leyes de conservación

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} b dV}_{\text{Variación de b(x,t) en el volumen fluido (Vf)}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} b dV}_{\text{Variación de b(x,t) en el volumen de control (VC)}} + \underbrace{\int_{SC(t)} b(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS}_{\text{Flujo de b(x,t) a través de la superficie del volumen de control (SC)}}$$

Estas integrales <u>si</u> sabemos calcularlas ya que el VC lo definimos nosotros

Ejemplo globo que se deshincha:

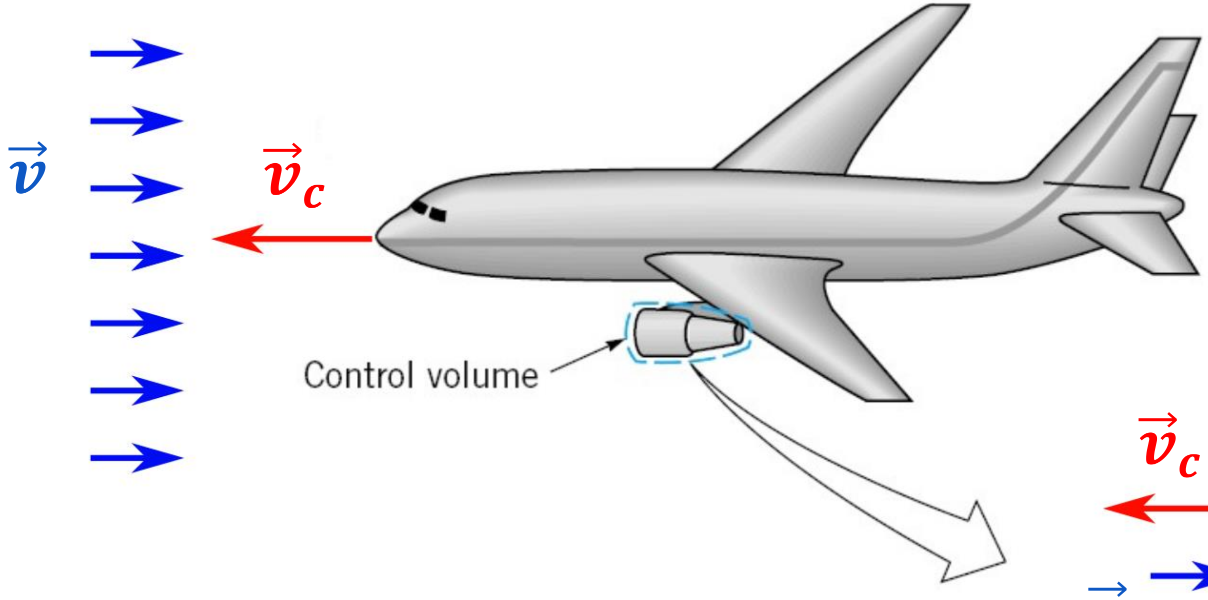


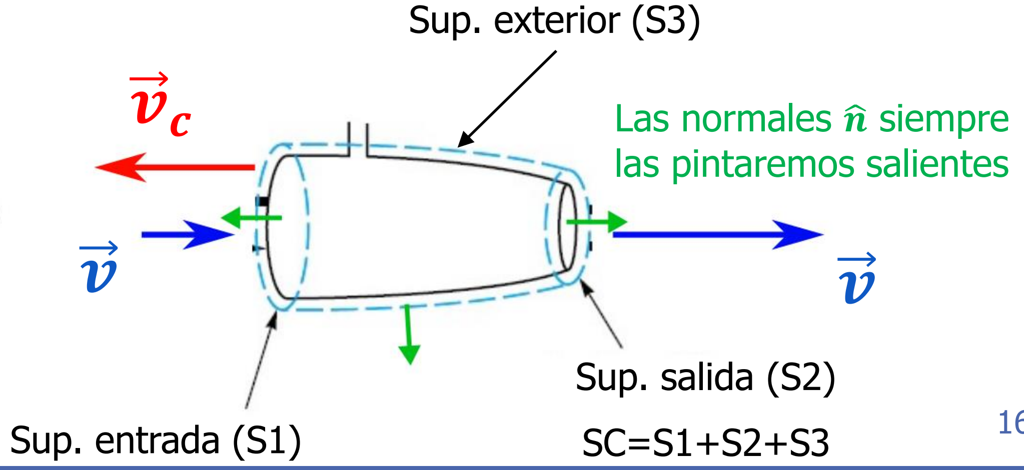
t $\qquad$ $t + \Delta t$

Tercer Teorema del transporte de Reynolds

- **Importante.** Velocidad del flujo ($\vec{v}$), velocidad del VC ($\vec{v}_c$) y cálculo de la integral del flujo en la SC:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} b\,dV = \frac{d}{dt}\int_{VC(t)} b\,dV + \boxed{\int_{SC(t)} b\underbrace{(\vec{v}-\vec{v}_c)}_{\text{Velocidad relativa del flujo respecto a la superficie del volumen de control}}\cdot\hat{n}\,dS}$$





Tercer Teorema del transporte de Reynolds

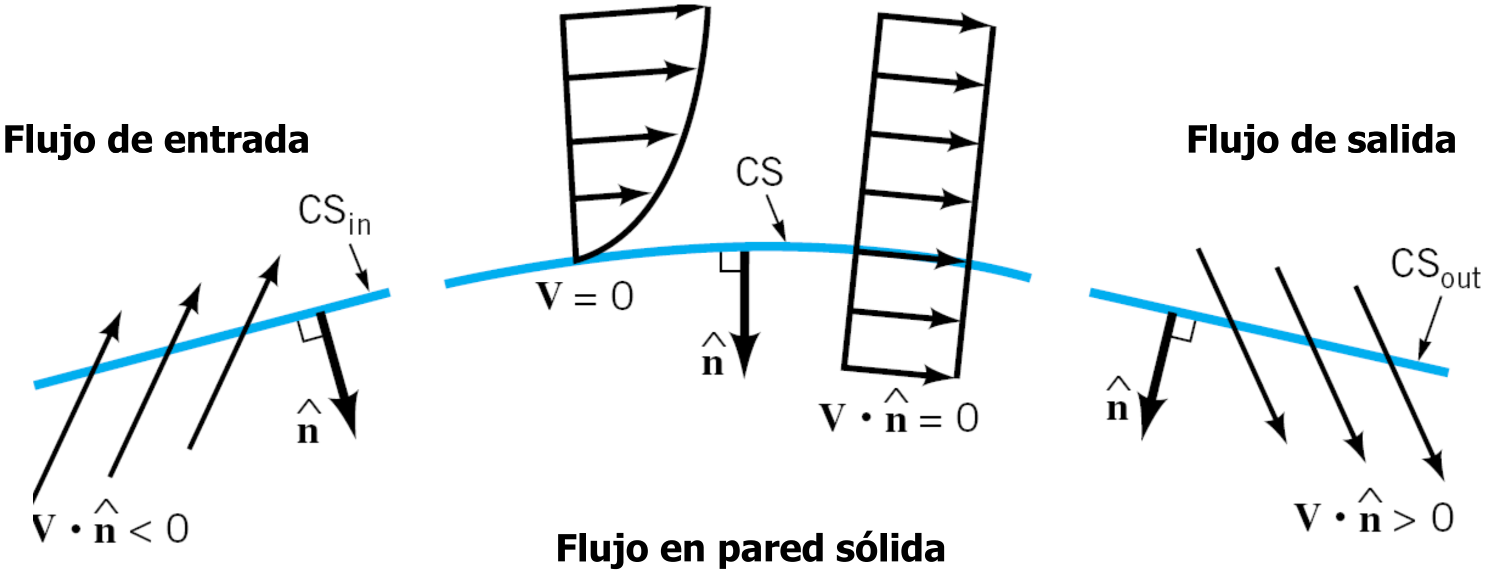
- **Importante.** Cálculo de la integral del flujo en la SC:

$$\int_{SC} b\underbrace{(\vec{v} - \vec{v}_c)}_{} \cdot \hat{n} dS$$

Velocidad relativa (V en el esquema inferior)

<u>Recordatorio</u>

Producto escalar: $\vec{v} \cdot \hat{n} = |\vec{v}| \cdot |\hat{n}| \cdot \cos\theta$



Conservación de la masa

- Consideremos un volumen fluido $V_f(t)$ con la densidad del fluido denotada por $\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$. La **masa** del **volumen fluido** es:

$$M = \int_{V_f(t)} \rho dV$$

- El principio de conservación de la masa establece que: **la masa contenida en un <u>volumen fluido</u>* es constante**:

$$\frac{d}{dt} M = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho dV = 0}$$

- Aplicando el tercer teorema del transporte de Reynolds con $b = \rho$ podemos expresar la derivada de la masa en el volumen fluido en función de integrales en un VC, obteniendo:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \rho dV + \int_{SC(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = 0}$$

*<u>**Recordatorio**</u>: <u>El volumen fluido contiene siempre las mismas partículas de fluido, se mueve "con el fluido"</u>

Conservación de la masa (forma compacta)

- Reordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho dV}_{\text{Variación de la masa en el VC}} = \underbrace{-\int_{SC(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS}_{\text{Flujo másico neto}}}$$

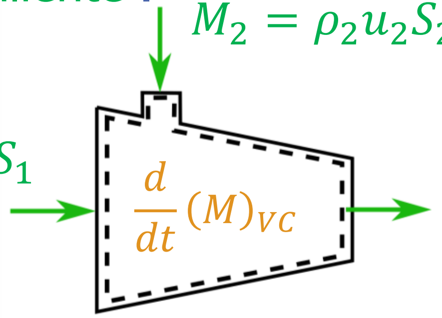
- Podemos considerar que el flujo másico neto será la diferencia entre el flujo entrante y el saliente (*ojo con el signo menos!*), y escribir:

$$\frac{d}{dt}(M)_{VC} = \dot{M}_{in} - \dot{M}_{out}$$

que indica que "la variación de la masa en el volumen de control es igual al flujo másico total entrante menos el flujo másico total saliente".

$$\dot{M}_2 = \rho_2 u_2 S_2$$

$$\dot{M}_1 = \rho_1 u_1 S_1$$



$$\dot{M}_3 = \rho_3 u_3 S_3$$

$$\dot{M}_{in} = \dot{M}_1 + \dot{M}_2$$

$$\dot{M}_{out} = \dot{M}_3$$

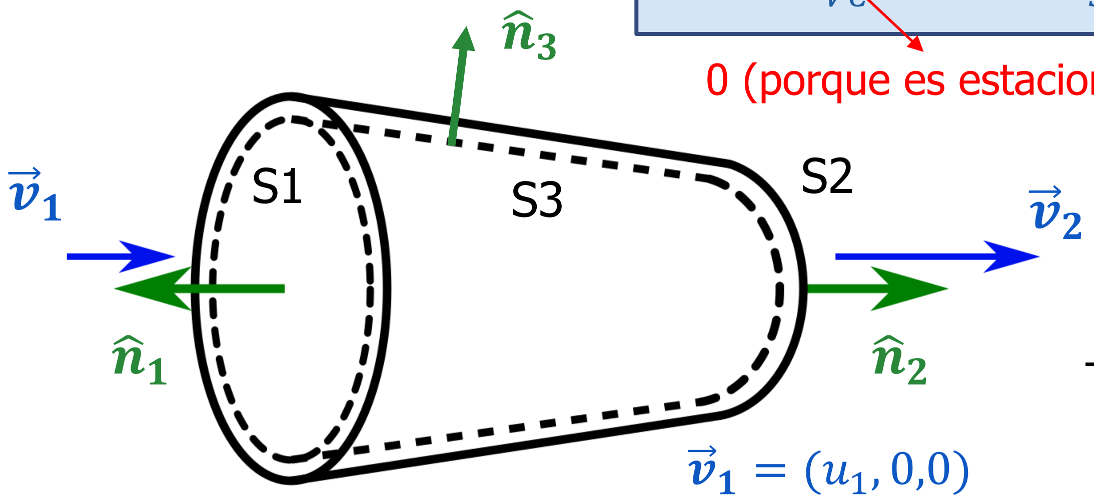
Conservación de la masa – Un ejemplo

- Flujo **estacionario** en una tobera convergente con ρ constante. Calcular u_2 conocida u_1:

$$\boxed{\cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho dV} = -\int_{SC}\rho(\vec{v}-\cancel{\vec{v}_c})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS}$$

0 (porque es estacionario)

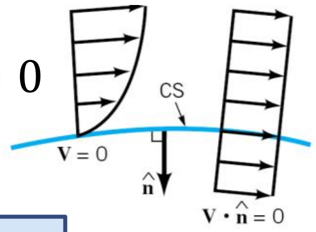
0



$$-\int_{SC}\rho(\vec{v}-\cancel{\vec{v}_c})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS$$

0

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_{S1}\rho\vec{\boldsymbol{v}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1 dS = \underbrace{\rho u_1 S_1}_{\dot{M}_{in}} \\ \qquad + \\ -\displaystyle\int_{S2}\rho\vec{\boldsymbol{v}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2 dS = -\underbrace{\rho u_2 S_2}_{\dot{M}_{out}} \\ \qquad + \\ -\displaystyle\int_{S3}\rho\vec{\boldsymbol{v}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_3 dS = 0 \end{array}\right.$$



$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (u_1, 0{,}0)$
$\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (u_2, 0{,}0)$
$\hat{\boldsymbol{n}}_1 = (-1{,}0{,}0)$
$\hat{\boldsymbol{n}}_2 = (1{,}0{,}0)$
$\vec{\boldsymbol{v}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_3 = 0$
$\vec{\boldsymbol{v}}_c = 0$

SC = S1(entrada) + S2(salida) + S3(lateral)

$$0 = \rho u_1 S_1 - \rho u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2}$$

$$(0 = \dot{M}_{in} - \dot{M}_{out})$$

Forma diferencial de la ecuación de la masa

- Para obtener la forma diferencial de la ecuación de conservación de la masa aplicaremos el primer teorema del transporte de Reynolds a:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho dV = 0$$

obteniendo:

$$\int_{V_f(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_f(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} dS = 0$$

- Ahora aplicaremos el teorema de la divergencia: $\boxed{\int_{S_f(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} dS = \int_{V_f(t)} \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) dV}$

y sustituiremos en la ecuación anterior:

$$\int_{V_f(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_f(t)} \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) dV = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{V_f(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) \right) dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0}$$

Para una partícula fluida

Conservación del momento lineal - 2ª ley de Newton

- Consideremos un volumen fluido $V_f(t)$. El **momento lineal** del **volumen fluido** es:

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \int_{V_f(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV$$

- El principio de conservación del momento establece que: **la variación del momento lineal del volumen fluido es igual al sumatorio de fuerzas externas (2ª ley Newton)**:

$$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{P}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV = \sum_{V_f(t)} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}}$$

Fuerzas de superficie

Fuerzas de volumen

- Aplicando el tercer teorema del transporte de Reynolds con $b = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$ podemos escribir:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV}_{\text{Variación temporal de momento en el VC}} + \underbrace{\int_{SC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{v}}[(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}] dS}_{\text{Flujo de momento a través de la superficie del VC}} = \underbrace{\int_{SC(t)} -p\hat{\boldsymbol{n}} dS + \int_{SC(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS}_{\text{Fuerzas de superficie sobre la superficie del VC}} + \underbrace{\int_{VC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m dV}_{\text{Fuerzas de volumen sobre el VC}}}$$

Ojo! Son fuerzas SOBRE el fluido así que cogeré normal saliente!

Conservación del momento lineal (forma compacta)

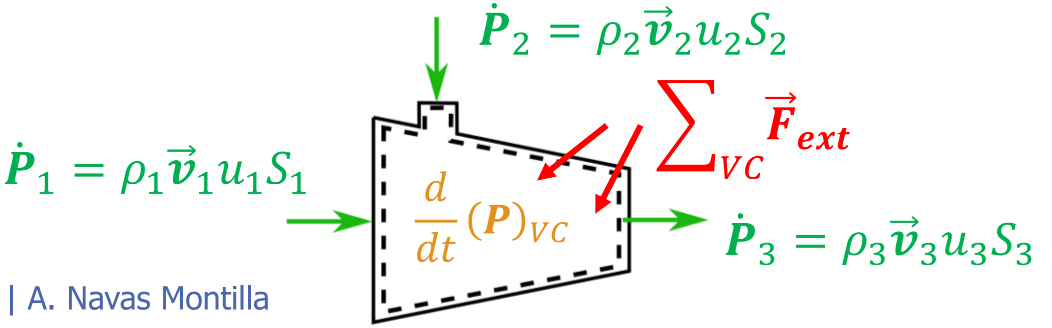
- Reordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}dV = -\int_{SC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS + \int_{SC(t)} -p\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{SC(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m dV}$$

- Podemos considerar que el flujo de momento neto será la diferencia entre el flujo entrante y el saliente y escribir:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P})_{VC} = \dot{\boldsymbol{P}}_{in} - \dot{\boldsymbol{P}}_{out} + \sum_{VC}\vec{\boldsymbol{F}}_{ext}$$

que indica que "la variación del momento lineal en el volumen de control es igual al flujo de momento total entrante menos el flujo de momento total saliente más las fuerzas externas".



$\dot{\boldsymbol{P}}_{in} = \dot{\boldsymbol{P}}_1 + \dot{\boldsymbol{P}}_2$

$\dot{\boldsymbol{P}}_{out} = \dot{\boldsymbol{P}}_3$

Conservación del momento lineal – Fuerzas externas

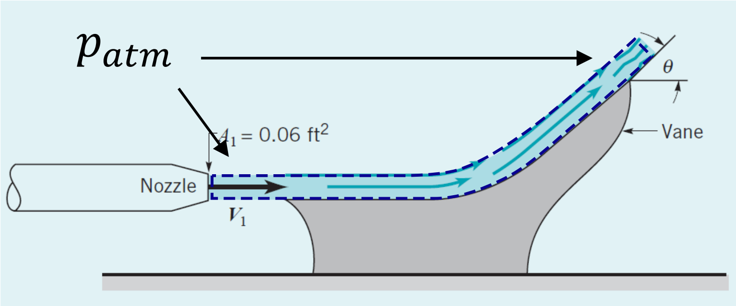
- Fuerza de presión:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\vec{v}dV = -\int_{SC(t)} \rho\vec{v}[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\hat{n}]dS + \int_{SC(t)} -p\hat{\mathbf{n}}dS + \int_{SC(t)} \tilde{\tau}_v \cdot \vec{n}dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{f}_m dV$$

- Se calcula como la suma de las integrales en las superficies que componen la SC:

$$\int_{SC(t)} -p\hat{\mathbf{n}}dS = \sum_{i=1}^{N\,superficies} \int_{S_i} -p\hat{\mathbf{n}}dS$$

- Siempre llevará la **dirección contraria a la normal** de la superficie.
- En un **chorro libre**, la presión en cualquier sección del mismo será igual a la **presión atmosférica**.



Conservación del momento lineal – Fuerzas externas

- Fuerzas viscosas:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)}\rho\vec{v}dV = -\int_{SC(t)}\rho\vec{v}[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\hat{n}]dS + \int_{SC(t)}-p\vec{n}dS + \int_{SC(t)}\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)}\rho\vec{f}_m dV$$

- Se calcula como la suma de las integrales en las superficies que componen la SC:

$$\int_{SC(t)}\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS = \sum_{i=1}^{N\,superficies}\int_{S_i}\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS$$

- Recordamos que si tenemos un fluido newtoniano incompresible, el tensor de esfuerzos viscosos se expresa como:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \approx 2\mu\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Aunque **cuando se utilizan ecuaciones integrales no trabajaremos con esta expresión** ya que no conocemos la velocidad en todos los puntos. Solo necesitaremos saber dónde existen esf.

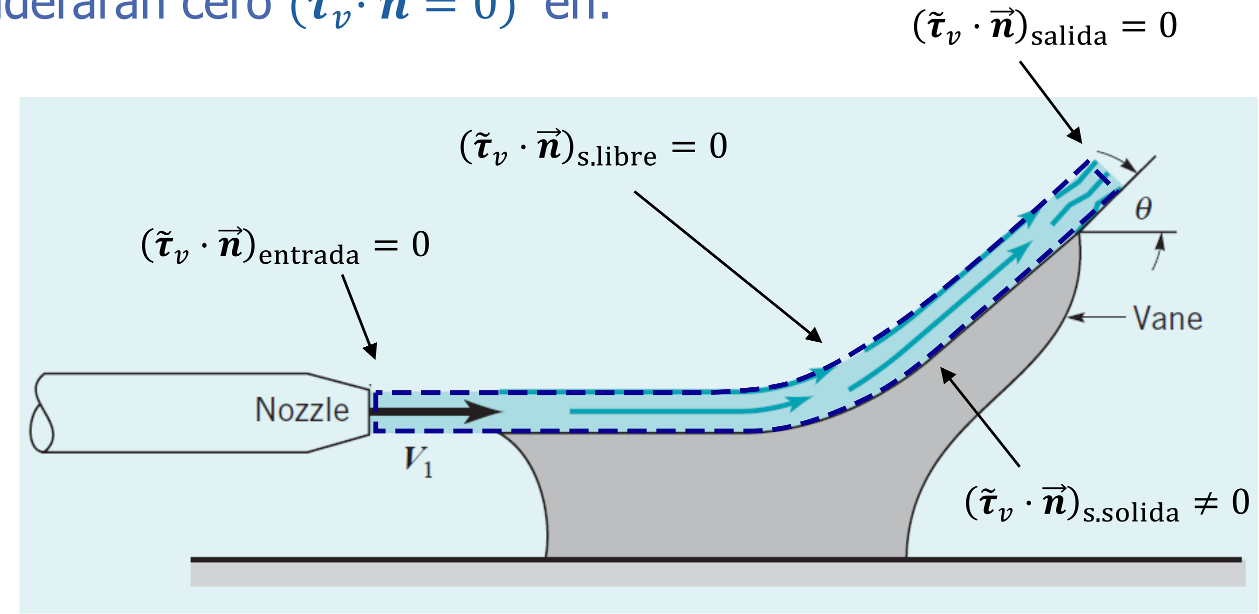
Conservación del momento lineal – Fuerzas externas

- Fuerzas viscosas:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\vec{v}dV = -\int_{SC(t)} \rho\vec{v}[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\hat{n}]dS + \int_{SC(t)} -p\vec{n}dS + \int_{SC(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{f}_m dV$$

- Los esfuerzos viscosos se considerarán cero $(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0)$ en:
  - Superficies de entrada/salida
  - Superficie libre

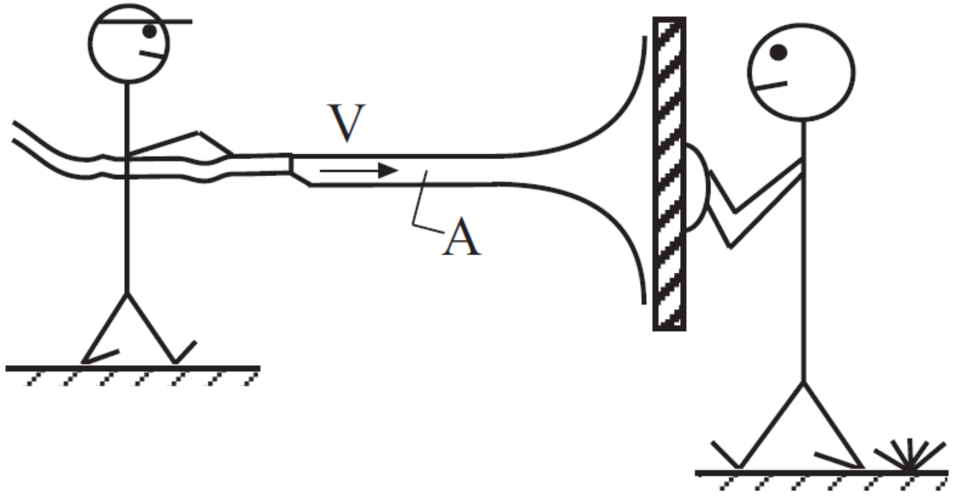
Ejemplo:
SC = S entrada + S salida + S libre + S solida

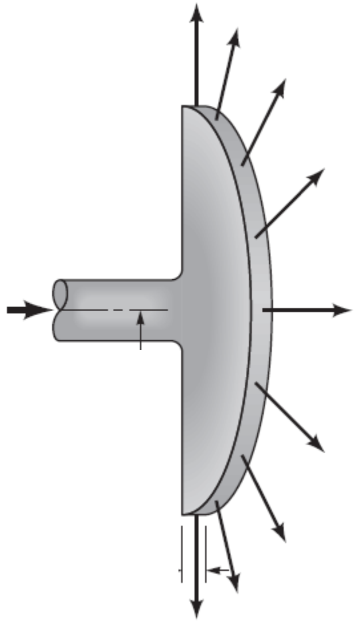


Conservación del momento lineal – Un ejemplo

Un policía dispersa a un manifestante con un chorro de agua, con velocidad V y sección A.

- a) Calcular la fuerza que tiene que hacer el manifestante para no ser arrastrado por el chorro, suponiendo que se protege con una tapa circular de un contenedor de basura.
- b) ¿Y si la tapa es rectangular?
- c) Repetir los cálculos suponiendo que el manifestante se aleja del policía con velocidad U.





Forma diferencial de la ecuación del momento lineal

- Para obtener la forma diferencial de la ecuación de conservación de la masa aplicaremos el primer teorema del transporte de Reynolds a:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}dV = \sum\nolimits_{V_f(t)} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}$$

obteniendo:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}dV + \int_{S_f(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}[\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS = \int_{S_f(t)} -p\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{S_f(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{V_f(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m dV$$

- Ahora aplicaremos el teorema de Gauss:

$$\boxed{\int_{S_f(t)} \rho\vec{\boldsymbol{v}}[\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS = \int_{V_f(t)} \nabla\cdot(\rho\vec{\boldsymbol{v}}\otimes\vec{\boldsymbol{v}})dV}$$

Producto diádico

$$\boxed{\int_{S_f(t)} -p\hat{\boldsymbol{n}}dS = \int_{V_f(t)} -\nabla p dV}$$

$$\boxed{\int_{S_f(t)} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS = \int_{V_f(t)} \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v dV}$$

y sustituiremos en la ecuación anterior, obteniendo:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\vec{\boldsymbol{v}})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{\boldsymbol{v}}\otimes\vec{\boldsymbol{v}}) = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m}$$

Forma diferencial de la ecuación del momento lineal

- La ecuación de la página anterior aun se puede simplificar más. Si partimos de:

$$\frac{\partial(\rho\vec{\boldsymbol{v}})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{\boldsymbol{v}}\otimes\vec{\boldsymbol{v}}) = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m$$

Y reordenamos los términos del lado izquierdo (haciendo la derivada de un producto) obtenemos:

$$\vec{\boldsymbol{v}}\underbrace{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{\boldsymbol{v}})\right)}}_{\text{ec. conservacion masa}} + \rho\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{v}}\right)}_{\frac{D\vec{\boldsymbol{v}}}{Dt}} = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m$$

Obteniendo:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{v}}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m}$$

Sobre una partícula fluida

$$\|$$

$$\rho\vec{\boldsymbol{a}} = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m$$

Conservación del momento angular

- Consideremos un volumen fluido $V_f(t)$. El **momento angular** del **volumen fluido** es:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int_{V_f(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV$$

- El principio de conservación del momento angular establece que: **la variación del momento angular del volumen fluido es igual al sumatorio de momentos externos:**

$$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{L}} = \sum \vec{\boldsymbol{M}}_{ext} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV = \sum_{V_f(t)} \vec{\boldsymbol{M}}_{ext}}$$

M. de fuerzas de superficie

M. de fuerzas de volumen

- Aplicando el tercer teorema del transporte de Reynolds con $b = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$ podemos escribir:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho \vec{\boldsymbol{v}} dV}_{\text{Variación temporal de momento en el VC}} + \underbrace{\int_{SC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}[(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_c)\cdot \hat{\boldsymbol{n}}]dS}_{\text{Flujo de momento a través de la superficie del VC}} = \underbrace{\int_{SC(t)} -\vec{\boldsymbol{r}} \times p\hat{\boldsymbol{n}} dS + \int_{SC(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}})dS}_{\text{Momento de fuerzas de superficie sobre la superficie del VC}} + \underbrace{\int_{VC(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m dV}_{\text{Momento de fuerzas de volumen sobre el VC}}}$$

Conservación de la energía total (1º principio termo.)

- Consideremos un volumen fluido $V_f(t)$. La **energía** total en el **volumen fluido** será la suma de la energía interna y cinética:

$$E = \int_{V_f(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right) dV$$

- El principio de conservación de la energía total establece que: **el cambio en la energía total de un sistema (volumen fluido) es igual al trabajo sobre éste más el calor añadido al mismo:**

$$\frac{dE}{dt} = \dot{W}_{ext} + \dot{Q}_{in}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) dV = \underbrace{\int_{Sf(t)} (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, dS + \int_{Vf(t)} \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, dV}_{\text{Potencia de las fuerzas de superficie y másicas}} + \underbrace{\int_{Sf(t)} -\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS + \int_{Vf(t)} \dot{q}_v\, dV}_{\text{Flujo de calor entrante y calor generado en interior}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right) dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right) [(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_c) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}]\, dS \\ &= \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, dS + \int_{VC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, dV + \int_{SC(t)} -\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS + \int_{VC(t)} \dot{q}_v\, dV\end{aligned}}$$

Conservación de la energía total (1º principio termo.) (forma compacta)

- Reordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{VC(t)}\rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)dV = -\int_{SC(t)}\rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS + \\ \int_{SC(t)}(-p\vec{\boldsymbol{n}}+\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dS+\int_{VC(t)}\rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV+\int_{SC(t)}-\vec{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS+\int_{VC(t)}\dot{q}_v dV\end{aligned}}$$

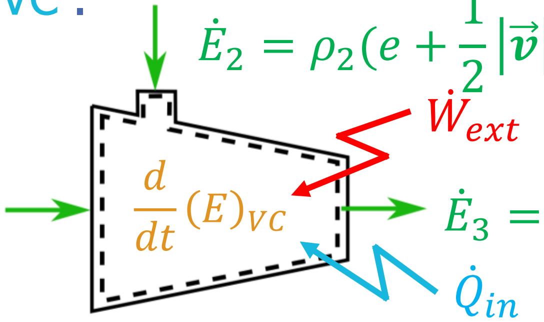
- Podemos considerar que el flujo neto de energía será la diferencia entre el flujo entrante y el saliente y escribir:

$$\frac{d}{dt}(E)_{VC}=\dot{E}_{in}-\dot{E}_{out}+\dot{W}_{ext}+\dot{Q}_{in}$$

que indica que "la variación de la energía en el volumen de control es igual al flujo de energía total entrante menos el flujo de energía total saliente más el trabajo de las fuerzas externas sobre el VC y más el calor aportado al VC".

$$\dot{E}_2=\rho_2\left(e+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)_2 u_2 S_2$$

$$\dot{E}_1=\rho_1\left(e+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)_1 u_1 S_1$$



$$\dot{E}_3=\rho_3\left(e+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)_3 u_3 S_3$$

$$\dot{E}_{in}=\dot{E}_1+\dot{E}_2$$

$$\dot{E}_{out}=\dot{E}_3$$

Conservación de la energía cinética

- La ecuación de conservación de la energía cinética la obtenemos de multiplicar la ecuación diferencial del momento lineal por la velocidad (potencia = fuerza x velocidad):

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\rho \frac{D\vec{\boldsymbol{v}}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \right)$$

Obteniendo:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}\right) = -\underbrace{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla p}_{\nabla\cdot(p\vec{\boldsymbol{v}})-p\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v}_{\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\vec{\boldsymbol{v}})-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v:\nabla\vec{\boldsymbol{v}}} + \rho\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{f}}_m$$

Que en forma integral queda:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho \frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2} dV + \int_{SC(t)} \rho \frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2} [(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}] dS \\ &= \underbrace{\int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} dS}_{\substack{\text{Potencia total f. superficie} \\ \text{(presión y visc.)}}} + \underbrace{\int_{VC(t)} p\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} dV}_{\substack{\text{Potencia} \\ \text{compresión/expansión} \\ \text{(=0 si incompr.)}}} - \underbrace{\int_{VC(t)} \phi_v dV}_{\substack{\text{Potencia disipación} \\ \text{viscosa}}} + \underbrace{\int_{VC(t)} \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m \cdot \vec{\boldsymbol{v}} dV}_{\substack{\text{Potencia fuerzas} \\ \text{másicas}}}\end{aligned}}$$

Conservación de la energía interna

Energía interna = Energía total – Energía cinética

- Restamos primer miembro de las ecuaciones:

$$
\begin{array}{r l}
 & \frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS \\
- & \frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}dV + \int_{SC(t)} \rho\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}{2}[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS \\
\hline
\end{array}
$$

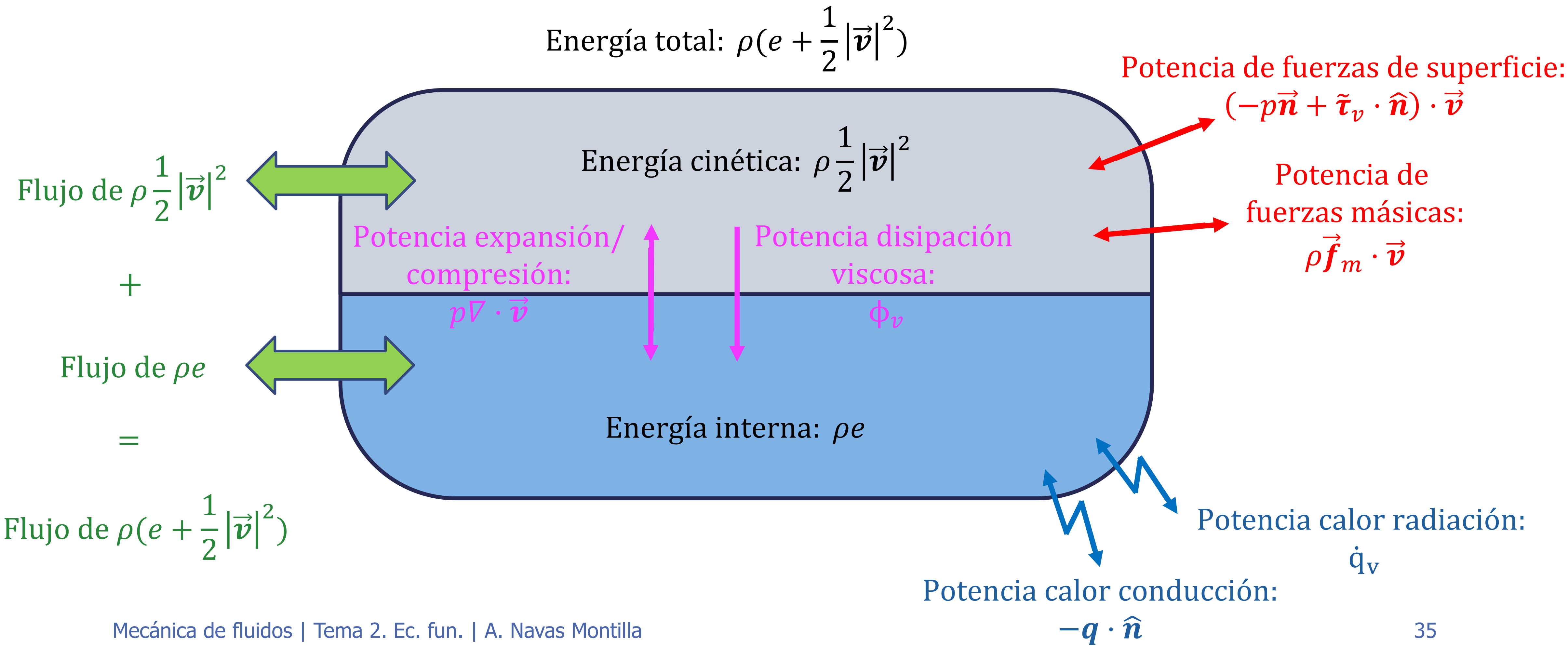
$$
\boxed{\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho e dV + \int_{SC(t)} \rho e\,[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS}
$$

- Restamos segundo miembro de las ecuaciones:

$$
\begin{array}{r l}
 & \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}}+\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV + \int_{SC(t)} -\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)} \dot{q}_v dV \\
- & \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}}+\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dS + \int_{VC(t)} p\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV - \int_{VC(t)} \Phi_v dV + \int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\boxed{\int_{SC(t)} -\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)} \dot{q}_v dV - \int_{VC(t)} p\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV + \int_{VC(t)} \Phi_v dV}
$$

Resumen flujos y fuentes de intercambio energético



Ecuación de Bernoulli

Consideramos la ecuación de la energía total sin viscosidad (fricción), ni transferencia de calor:

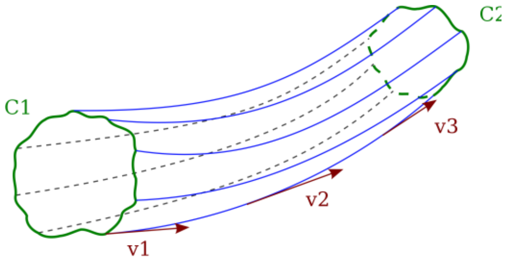
$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2\right)[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS$$
$$= \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}} + \cancelto{0}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dS + \int_{VC(t)} \rho\vec{\boldsymbol{f}}_m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV + \int_{SC(t)} -\cancelto{0}{\boldsymbol{q}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}dS + \int_{VC(t)} \cancelto{0}{\dot{q}_v}dV$$

- Si las fuerzas másicas son conservativas (derivan de un potencial): $\vec{\boldsymbol{f}}_m = -\nabla U$, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)dV + \int_{SC(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)[(\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{c}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]dS = \int_{SC(t)} (-p\vec{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dS$$

- Si consideramos flujo estacionario y escogemos un tubo de corriente como VC:

$$\left[\rho v S\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)\right]_2 - \left[\rho v S\left(e+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right)\right]_1 = (pvS)_1 - (pvS)_2$$



reordenando y sabiendo que al ser estacionario $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dot{M}$, obtenemos:

$$\boxed{\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right) = constante}$$

En líquidos $\delta e = 0$:
$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2+U\right) = \mathrm{C}$$

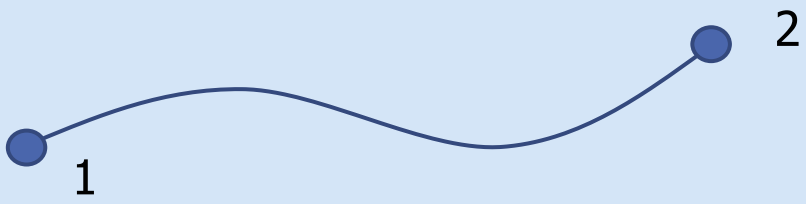
Ecuación de Bernoulli

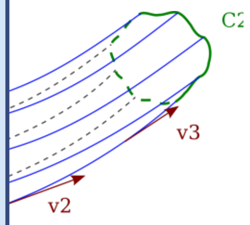
$$\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{\boldsymbol{v}}|^2 + U\right) = constante$$

Pero entonces… ¿cuándo podemos usar la ecuación de Bernoulli? Se tiene que cumplir que:

- Flujo estacionario
- No viscoso (sin fricción)
- Sin transferencia de calor
- Las fuerzas másicas son conservativas

Y la aplicaremos entre dos puntos conectados por una línea de corriente:





Resumen de las ecuaciones de MF en forma diferencial

De manera general, las ecuaciones de la mecánica de fluidos constituyen un sistema de 5 ecuaciones para 5 incógnitas (que dependen de $\vec{\boldsymbol{x}}$ y t):

- ec. conservación de la masa: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0$$
- ec. conservación del momento lineal: $$\rho\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{v}}\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \rho \vec{\boldsymbol{f}}_m$$
- ec. conservación energía interna: $$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla e\right) = \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - p\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \phi_v + \dot{q}_v$$
- ec. de estado: $e = e(\rho, T)$ y $p = p(\rho, T)$

junto con unas condiciones iniciales y de contorno.

Además, se usarán las relaciones:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v = 2\mu\tilde{\boldsymbol{e}} + \left(\mu_V - \frac{2}{3}\mu\right)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{I}} \qquad \phi_v = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v : \nabla \vec{\boldsymbol{v}} \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = k\nabla T$$