PROJ - Calcul de Plus Court Chemin Robuste

Arthur Divanovic, Axel Navarro

November 26, 2023

Contents

1 Exercice 1: Modélisation Papier **3**
1.1 Question 1.1: Modélisation du problème statique . . . 3
1.2 Question 1.2 : Modélisation du problème robuste . . . 3
1.3 Question 1.3 . . . 4
1.4 Question 1.4 . . . 4

2 Exercice 2: Résolution Numérique **5**
2.1 Question 2.1 . . . 5
2.2 Question 2.2 . . . 5
2.3 Question 2.3 . . . 5

Conclusion **6**

1 Exercice 1: Modélisation Papier

1.1 Question 1.1: Modélisation du problème statique

Pour modéliser le problème statique, nous allons attribuer les variables de décision x à chaque arête $ij \in A$ telles que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si l'arête } ij \text{ est sélectionnée} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le problème de plus court chemin dans le cas statique peut se formuler de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\min_{x \in \{0,1\}^{|A|}} \quad & \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} \\
\textbf{s.t:} \quad & \sum_{j:ij \in A} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{s,t\}, && (1) \\
& \sum_{i:ij \in A} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall j \in V \setminus \{s,t\}, && (2) \\
& \sum_{i:is \in A} x_{is} = 0, && (3) \\
& \sum_{j:sj \in A} x_{sj} = 1, && (4) \\
& \sum_{i:ip \in A} x_{ip} = 1, && (5) \\
& \sum_{j:pj \in A} x_{pj} = 0, && (6) \\
& \sum_{ij \in A} x_{ij}(p_i + p_j) + p_s + p_t \leq 2S. && (7)
\end{aligned}$$

Étant donné le choix des variables x, la longueur d'un chemin s'écrit bien $\sum_{(i,j) \in A} d_{i,j} x_{i,j}$, qui est la somme des coûts d'emprunt des arêtes sélectionnées. Il reste à s'assurer que un tell choix de x définit bien un chemin de s à t.

La contrainte (1) assure que pour tout sommet i différent de s ou t, au plus une arête sélectionnée se termine en i. La contrainte (2) assure de même que pour tout sommet différent de s ou t, au plus une arête sélectionnée débute en ce sommet.

Les chemins admissibles commençant par s, la contrainte (3) assure que aucune arête sélectionnée n'arrive en s et (4) assure que exactement une arête partant de s est selectionnée. De même, les chemins se terminent en p, ce qui est assuré par (5) et (6).

Enfin, (7) assure que le poids du chemin considéré est inférieur à S. Le facteur 2 provient du fait que l'on somme deux fois les poids des sommets i différents de s et t.

1.2 Question 1.2 : Modélisation du problème robuste

Pour le problème robuste, le paramètre d est désormais aléatoire avec:

$$d \in \mathcal{U}^1 := \left\{ (d^1_{ij} = d_{ij}(1 + \delta^1_{ij}))_{ij \in A} \;\middle|\; \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d^1, \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \; \forall ij \in A \right\}$$

1.3 Question 1.3

1.4 Question 1.4

2 Exercice 2: Résolution Numérique

2.1 Question 2.1

2.2 Question 2.2

2.3 Question 2.3

Conclusion

Le code correspondant à ce projet est disponible sur le lien GitHub ci-dessous:

https://github.com/ArthurDivanovic/

References