

# Дерево Фенвика: одномерное, двумерное

Антонов Кирилл  
Б01-411

Курс «Алгоритмы и структуры данных»

# Мотивация: Real-time аналитика

## Проблема

- ▶ Массив продаж [регионы] [дни] — 100 регионов × 365 дней
- ▶ Типовой запрос:  $\sum_{\text{регион} = r_1}^{r_2} \sum_{\text{день} = d_1}^{d_2} \text{продажи}[\text{регион}][\text{день}]$   
Требуется: мгновенные отчеты + real-time обновления

## Базовые подходы

Метод	Запрос	Обновление	Примечание
Без предподсчёта	$O(N^2)$	$O(1)$	Полный перебор
С предподсчётом	$O(1)$	$O(N^2)$	Префиксные суммы
<b>Дерево Фенвика</b>	$O(\log N)$	$O(\log N)$	<b>Оптимальное решение</b>

## Вывод

Для реальных данных (36 500 элементов) нужна структура, эффективная и для запросов, и для обновлений → **дерево Фенвика**

## Одномерный случай

Дан массив  $A[0..n - 1]$

- ▶  $\text{update}(i, \Delta) : A[i] \leftarrow A[i] + \Delta$
- ▶  $\text{prefix\_sum}(k) : \sum_{j=0}^k A[j]$
- ▶  $\text{range\_sum}(l, r) :$   
 $\text{prefix\_sum}(r) - \text{prefix\_sum}(l - 1)$

## Двумерный случай

Дан массив  
 $A[0..n - 1][0..m - 1]$

- ▶  $\text{update}(x, y, \Delta) : A[x][y] \leftarrow A[x][y] + \Delta$
- ▶  $\text{rectangle\_sum}(x_1, y_1, x_2, y_2) :$   
 $\sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} A[i][j]$

## Ключевая идея

- ▶ Используем двоичное представление индексов
- ▶  $\text{fenw}[i]$  хранит сумму  $A[i - 2^k + 1 \dots i]$ , т.ч.  $2^k = i\& - i$

## Распределение блоков для n=8

Индекс	Двоично	$2^k$	Диапазон
1	001	1	[1,1]
2	010	2	[1,2]
3	011	1	[3,3]
4	100	4	[1,4]
5	101	1	[5,5]
6	110	2	[5,6]
7	111	1	[7,7]
8	1000	8	[1,8]

## Операции 1D: реализация

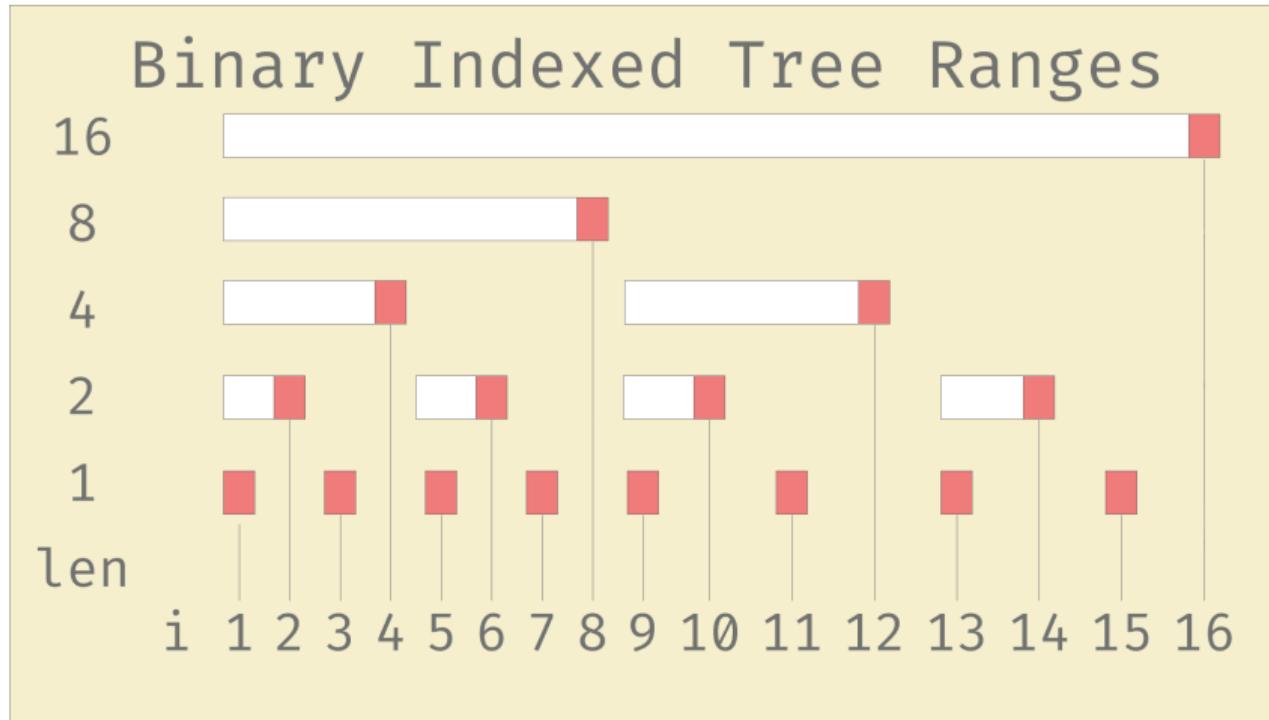
```
int lsb(int x){
    return x & -x;
}

int prefix_sum(int i, int fenw[]){
    int sum = 0;
    for (; i > 0; i -= lsb(i))
        sum += fenw[i];
    return sum;
}

void update(int i, int delta, int fenw[], int n){
    for (; i <= n; i += lsb(i))
        fenw[i] += delta;
}

int range_sum(int l, int r, int fenw[]){
    return prefix_sum(r, fenw) - prefix_sum(l-1, fenw);
}
```

## Визуализация: запрос суммы до 16



Запрос  $\text{sum}(15)$ : блоки  $15 + 14 + 12 + 8 = [1..15]$

## Обобщение на 2D случай

### Принцип «дерево деревьев»

- ▶  $\text{fenw}[i][j]$  хранит сумму прямоугольника  $[i - 2^k + 1..i] \times [j - 2^l + 1..j]$
- ▶ Операции: два вложенных цикла

### Сложность операций

Размерность	Запрос	Обновление
1D	$O(\log n)$	$O(\log n)$
2D	$O(\log n \times \log m)$	$O(\log n \times \log m)$
3D	$O(\log n \times \log m \times \log k)$	$O(\log n \times \log m \times \log k)$

## Реализация 2D Фенвика

```
void update_2d(int x, int y, int delta,
    vector<vector<int>> &fenw, int n, int m){
    for (int i = x; i <= n; i += lsb(i))
        for (int j = y; j <= m; j += lsb(j))
            fenw[i][j] += delta;
}

int prefix_sum_2d(int x, int y,
    vector<vector<int>> &fenw){
    int sum = 0;
    for (int i = x; i > 0; i -= lsb(i))
        for (int j = y; j > 0; j -= lsb(j))
            sum += fenw[i][j];
    return sum;
}

int rectangle_sum(int x1, int y1, int x2, int y2,
    vector<vector<int>> &fenw){
    return prefix_sum_2d(x2, y2, fenw)
        - prefix_sum_2d(x1-1, y2, fenw)
        - prefix_sum_2d(x2, y1-1, fenw)
        + prefix_sum_2d(x1-1, y1-1, fenw);
}
```

# Бенчмарки: Фенвик vs Наивные подходы

## Тестовая среда

- ▶ Размер массива: 100,000 элементов
- ▶ Количество операций: 50,000
- ▶ Процессор: Intel i5, 16GB RAM
- ▶ ОС: Manjaro Linux, ядро 6.12.48-1-MANJARO
- ▶ Компилятор: g++ (GCC) 15.2.1 20250813

## Результаты (миллисекунды)

Метод	100% запросы	100% обновления	50/50 смешанно
<b>Фенвик</b>	<b>9 мс</b>	<b>3 мс</b>	<b>4 мс</b>
Наивный (запрос)	5,6 с	1 мс	2,7 с
Наивный (префикс)	1 мс	22,7 с	11 с

## Вывод

В смешанной нагрузке Фенвик в **700-2800 раз** быстрее!

# Сложность по времени: 1D случай

## Операции

- ▶ `update(i, delta)`:  $O(\log n)$
- ▶ `prefix_sum(i)`:  $O(\log n)$
- ▶ `range_sum(l, r)`:  $O(\log n)$

## Доказательство для `prefix_sum`

- ▶ На каждой итерации:  $i = i - \text{LSB}(i)$
- ▶  $\text{LSB}(i) \geq 1$ , поэтому итераций  $\leq$  количества бит в  $n$
- ▶ Количество бит =  $\lceil \log_2 n \rceil = O(\log n)$

## Доказательство для `update`

- ▶ Аналогично:  $i = i + \text{LSB}(i)$
- ▶ Максимальное значение  $\text{LSB}(i) = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$
- ▶ Итераций  $\leq \log_2 n$

## Сложность по времени: 2D случай

### Операции

- ▶ `update_2d(x, y, delta)`:  $O(\log n \times \log m)$
- ▶ `prefix_sum_2d(x, y)`:  $O(\log n \times \log m)$
- ▶ `rectangle_sum(x1, y1, x2, y2)`:  $O(\log n \times \log m)$

### Доказательство

- ▶ Внешний цикл:  $O(\log n)$  итераций
- ▶ Внутренний цикл:  $O(\log m)$  итераций
- ▶ Итого:  $O(\log n) \times O(\log m) = O(\log n \times \log m)$

### Пример

Для  $n = m = 1024$ :  $\log_2 1024 = 10$ ,  
 $10 \times 10 = 100$  операций vs  $1024^2 = 1,048,576$

## Сложность по памяти

### 1D случай

- ▶ Требуется массив размера  $n$
- ▶ Память:  $O(n)$
- ▶ **Доказательство:** Храним ровно  $n$  элементов

### 2D случай

- ▶ Требуется матрица размера  $n \times m$
- ▶ Память:  $O(n \times m)$
- ▶ **Доказательство:** Храним  $n \times m$  элементов

### Сравнение с деревом отрезков

- ▶ **Фенвик:**  $O(n)$  vs **Дерево отрезков:**  $O(2n)$
- ▶ В 2D:  $O(nm)$  vs  $O(4nm)$
- ▶ Выигрыш в памяти: в 2-4 раза!

## Константы в O-нотации

- ▶ update:  $\approx 2 \log n$  операций
- ▶ prefix\_sum:  $\approx 2 \log n$  операций
- ▶ На практике: очень маленькие константы

## Сравнение операций

Операция	Фенвик	Дерево отрезков	Выигрыш
Сложение	1 такт	3-5 тактов	3-5x
Обращение к памяти	$\log n$	$2 \log n$	2x

## Практическая эффективность

- ▶ Лучшая локальность данных
- ▶ Меньше branching (условных переходов)
- ▶ Быстрее на реальных процессорах

# Доказательство корректности

## Инвариант

Для любого  $i > 0$ ,  $\text{fenw}[i]$  содержит сумму элементов  $A[i - 2^k + 1 \dots i]$ , где  $2^k = \text{LSB}(i)$

## Доказательство по индукции

- ▶ **База:** Для  $n = 1$ :  $\text{fenw}[1] = A[1]$  ✓
- ▶ **Переход:** Предположим верно для  $n - 1$  элементов
- ▶  $\text{update}(n)$  обновляет все  $\text{fenw}[i]$  где  $i = n + 2^m$
- ▶ Каждый такой  $i$  покрывает корректный диапазон

## Корректность `prefix_sum`

- ▶ Любое число  $n$  можно представить как сумму степеней 2
- ▶  $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$
- ▶ Алгоритм собирает именно эти блоки

## Нижняя оценка

- ▶ Любая структура для динамического RSQ должна тратить  $\Omega(\log n)$  на операцию.  
Фенвик достигает этой границы.

## Теорема

Не существует структуры данных, которая поддерживает  
`update` и `prefix_sum` быстрее чем  $O(\log n)$   
в модели сравнений.

## Почему Фенвик оптимален?

- ▶ Достигает теоретического минимума
- ▶ Константы близки к оптимальным
- ▶ Использует минимально возможную память

## Основная литература



## Исходный код и презентация

- ▶ GitHub репозиторий: <https://github.com/navernokeril/fenwick-tree>
  - ▶ Исходники LaTeX, примеры кода и PDF презентации доступны в репозитории

**Спасибо за внимание!**