

Дерево Фенвика: одномерное, двумерное

Антонов Кирилл
Б01-411

Курс «Алгоритмы и структуры данных»

Проблема

- ▶ Массив продаж[регионы][дни] — 100 регионов × 365 дней
- ▶ Типовой запрос: $\sum_{\text{регион}=r_1}^{r_2} \sum_{\text{день}=d_1}^{d_2} \text{продажи}[\text{регион}][\text{день}]$
Требуется: мгновенные отчеты + real-time обновления

Базовые подходы

Метод	Запрос	Обновление	Примечание
Без подсчёта	$O(N^2)$	$O(1)$	Полный перебор
С подсчётом	$O(1)$	$O(N^2)$	Префиксные суммы
Дерево Фенвика	$O(\log N)$	$O(\log N)$	Оптимальное решение

Вывод

Для реальных данных (36 500 элементов) нужна структура, эффективная и для запросов, и для обновлений → **дерево Фенвика**

Одномерный случай

Дан массив $A[0..n-1]$

- ▶ $\text{update}(i, \Delta) : A[i] \leftarrow A[i] + \Delta$
- ▶ $\text{prefix_sum}(k) : \sum_{j=0}^k A[j]$
- ▶ $\text{range_sum}(l, r) : \text{prefix_sum}(r) - \text{prefix_sum}(l-1)$

Двумерный случай

Дан массив

$A[0..n-1][0..m-1]$

- ▶ $\text{update}(x, y, \Delta) : A[x][y] \leftarrow A[x][y] + \Delta$
- ▶ $\text{rectangle_sum}(x_1, y_1, x_2, y_2) : \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} A[i][j]$

Ключевая идея

- ▶ Используем двоичное представление индексов
- ▶ $\text{fenw}[i]$ хранит сумму $A[i - 2^k + 1 \dots i]$, т.ч. $2^k = i \& - i$

Распределение блоков для $n=8$

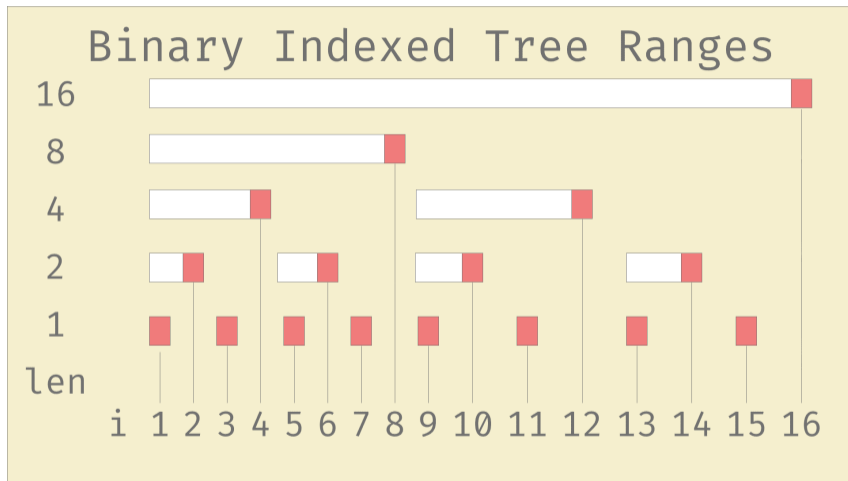
Индекс	Двоично	2^k	Диапазон
1	001	1	[1,1]
2	010	2	[1,2]
3	011	1	[3,3]
4	100	4	[1,4]
5	101	1	[5,5]
6	110	2	[5,6]
7	111	1	[7,7]
8	1000	8	[1,8]

```
int lsb(int x){
    return x & -x;
}

int prefix_sum(int i, int fenw[]){
    int sum = 0;
    for (; i > 0; i -= lsb(i))
        sum += fenw[i];
    return sum;
}

void update(int i, int delta, int fenw[], int n){
    for (; i <= n; i += lsb(i))
        fenw[i] += delta;
}

int range_sum(int l, int r, int fenw[]){
    return prefix_sum(r, fenw) - prefix_sum(l-1, fenw);
}
```



Запрос $\text{sum}(15)$: блоки $15 + 14 + 12 + 8 = [1..15]$

Принцип «дерево деревьев»

- ▶ $\text{fenw}[i][j]$ хранит сумму прямоугольника $[i - 2^k + 1..i] \times [j - 2^l + 1..j]$
- ▶ Операции: два вложенных цикла

Сложность операций

Размерность	Запрос	Обновление
1D	$O(\log n)$	$O(\log n)$
2D	$O(\log n \times \log m)$	$O(\log n \times \log m)$
3D	$O(\log n \times \log m \times \log k)$	$O(\log n \times \log m \times \log k)$

```
void update_2d(int x, int y, int delta,
              vector<vector<int>> &fenw, int n, int m){
    for (int i = x; i <= n; i += lsb(i))
        for (int j = y; j <= m; j += lsb(j))
            fenw[i][j] += delta;
}

int prefix_sum_2d(int x, int y,
                 vector<vector<int>> &fenw){
    int sum = 0;
    for (int i = x; i > 0; i -= lsb(i))
        for (int j = y; j > 0; j -= lsb(j))
            sum += fenw[i][j];
    return sum;
}

int rectangle_sum(int x1, int y1, int x2, int y2,
                 vector<vector<int>> &fenw){
    return prefix_sum_2d(x2, y2, fenw)
        - prefix_sum_2d(x1-1, y2, fenw)
        - prefix_sum_2d(x2, y1-1, fenw)
        + prefix_sum_2d(x1-1, y1-1, fenw);
}
```

Тестовая среда

- ▶ Размер массива: 100,000 элементов
- ▶ Количество операций: 50,000
- ▶ Процессор: Intel i5, 16GB RAM
- ▶ ОС: Manjaro Linux, ядро 6.12.48-1-MANJARO
- ▶ Компилятор: g++ (GCC) 15.2.1 20250813

Результаты (миллисекунды)

Метод	100% запросы	100% обновления	50/50 смешанно
Фенвик	9 мс	3 мс	4 мс
Наивный (запрос)	5,6 с	1 мс	2,7 с
Наивный (префикс)	1 мс	22,7 с	11 с

Вывод

В смешанной нагрузке Фенвик **в 700-2800 раз быстрее!**

Операции

- ▶ `update(i, delta): $O(\log n)$`
- ▶ `prefix_sum(i): $O(\log n)$`
- ▶ `range_sum(l, r): $O(\log n)$`

Доказательство для `prefix_sum`

- ▶ На каждой итерации: $i = i - \text{LSB}(i)$
- ▶ $\text{LSB}(i) \geq 1$, поэтому итераций \leq количества бит в n
- ▶ Количество бит $= \lceil \log_2 n \rceil = O(\log n)$

Доказательство для `update`

- ▶ Аналогично: $i = i + \text{LSB}(i)$
- ▶ Максимальное значение $\text{LSB}(i) = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$
- ▶ Итераций $\leq \log_2 n$

Операции

- ▶ `update_2d(x, y, delta)`: $O(\log n \times \log m)$
- ▶ `prefix_sum_2d(x, y)`: $O(\log n \times \log m)$
- ▶ `rectangle_sum(x1, y1, x2, y2)`: $O(\log n \times \log m)$

Доказательство

- ▶ Внешний цикл: $O(\log n)$ итераций
- ▶ Внутренний цикл: $O(\log m)$ итераций
- ▶ Итого: $O(\log n) \times O(\log m) = O(\log n \times \log m)$

Пример

Для $n = m = 1024$: $\log_2 1024 = 10$,
 $10 \times 10 = 100$ операций vs $1024^2 = 1,048,576$

1D случай

- ▶ Требуется массив размера n
- ▶ Память: $O(n)$
- ▶ **Доказательство:** Храним ровно n элементов

2D случай

- ▶ Требуется матрица размера $n \times m$
- ▶ Память: $O(n \times m)$
- ▶ **Доказательство:** Храним $n \times m$ элементов

Сравнение с деревом отрезков

- ▶ **Фенвик:** $O(n)$ vs **Дерево отрезков:** $O(2n)$
- ▶ В 2D: $O(nm)$ vs $O(4nm)$
- ▶ Выигрыш в памяти: в 2-4 раза!

Константы в O-нотации

- ▶ update: $\approx 2 \log n$ операций
- ▶ prefix_sum: $\approx 2 \log n$ операций
- ▶ На практике: очень маленькие константы

Сравнение операций

Операция	Фенвик	Дерево отрезков	Выигрыш
Сложение	1 такт	3-5 тактов	3-5x
Обращение к памяти	$\log n$	$2 \log n$	2x

Практическая эффективность

- ▶ Лучшая локальность данных
- ▶ Меньше branching (условных переходов)
- ▶ Быстрее на реальных процессорах

Инвариант

Для любого $i > 0$, $\text{fenw}[i]$ содержит сумму элементов $A[i - 2^k + 1 \dots i]$, где $2^k = \text{LSB}(i)$

Доказательство по индукции

- ▶ **База:** Для $n = 1$: $\text{fenw}[1] = A[1]$ ✓
- ▶ **Переход:** Предположим верно для $n - 1$ элементов
- ▶ $\text{update}(n)$ обновляет все $\text{fenw}[i]$ где $i = n + 2^m$
- ▶ Каждый такой i покрывает корректный диапазон

Корректность `prefix_sum`

- ▶ Любое число n можно представить как сумму степеней 2
- ▶ $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$
- ▶ Алгоритм собирает именно эти блоки

Нижняя оценка

- ▶ Любая структура для динамического RSQ должна тратить $\Omega(\log n)$ на операцию. Фенвик достигает этой границы.

Теорема

Не существует структуры данных, которая поддерживает `update` и `prefix_sum` быстрее чем $O(\log n)$ в модели сравнений.

Почему Фенвик оптимален?

- ▶ Достигает теоретического минимума
- ▶ Константы близки к оптимальным
- ▶ Использует минимально возможную память

Основная литература

- ▶ **Algorithmica**: <https://algorithmica.org/ru/fenwick>
- ▶ **НИУ ИТМО, Алгоритмы**:
https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=РѢРхСГРхРђР«_PhPхР,РђРчРәРө
- ▶ **CP-Algorithms**: https://cp-algorithms.com/data_structures/fenwick.html

Исходный код и презентация

- ▶ GitHub репозиторий: <https://github.com/navernokeril/fenwick-tree>
- ▶ Исходники LaTeX, примеры кода и PDF презентации доступны в репозитории

Спасибо за внимание!