Matrices de rotación

Vivas Maldonado Rodrigo
Facultad de Ingeniería, UNAM
Ingeniería Mecatrónica
rodrigo.vivas.25@hotmail.com

***Resumen*- En algunos temas vistos de álgebra lineal, se han hablado de las matrices, y más adelante en el curso, se presentan algunas matrices especiales como lo son las matrices de rotación. En la robótica, este tipo de matrices son de vital importancia para poder cambiar de sistemas de referencia. En este estudio se han hecho varias operaciones de matrices con el fin de obtener una posible semejanza entre el sistema fijo y móvil.**

***Palabras Clave*- fijo, matrices, móvil, operación.**

I. Introducción

Dependiendo si nos encontramos en un sistema fijo o en un sistema móvil, tendremos diferentes matrices de rotación en 3 dimensiones. Se ha verificado que para obtener las matrices del sistema fijo y/o móvil, basta con obtener las matrices transpuestas de algún sistema. En el presente documento, se intenta averiguar las similitudes que guardan los sistemas móviles y fijos al momento de realizar operaciones con sus respectivas matrices de rotación.

II. Las matrices

Primero se hará la multiplicación de las matrices de rotación con respecto al sistema fijo y posteriormente, se obtendrá la multiplicación de las matrices del sistema móvil.

A. *Sistema Fijo*

Las matrices de rotación son las siguientes:

Rx:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

Ry:

$$\begin{bmatrix} cos\phi & 0 & sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\phi & 0 & cos\phi \end{bmatrix}$$

Rz:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si nosotros hacemos la siguiente multiplicación RxRyRz, lo que obtenemos es la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi & \sin\phi \\ cos\alpha\sin\theta + cos\theta sin\alpha sin\phi & cos\alpha cos\theta - sin\alpha sin\theta sin\phi & -sin\alpha cos\phi \\ sin\alpha sin\theta - cos\alpha cos\theta sin\phi & cos\theta sin\alpha + cos\alpha sin\theta sin\phi & cos\alpha cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ahora, nosotros hacemos la multiplicación RzRyRx, obtenemos esta matriz:

$$\begin{bmatrix} cos\theta cos\phi & cos\theta sin\alpha sin\phi - cos\alpha sin\theta & sin\alpha sin\theta + cos\alpha cos\theta sin\phi \\ cos\phi sin\theta & cos\alpha cos\theta + sin\alpha sin\theta sin\phi & cos\alpha sin\theta sin\phi - cos\theta sin\alpha \\ -sin\phi & cos\phi sin\alpha & cos\alpha cos\phi \end{bmatrix}$$

B. *Sistema Móvil*

Las matrices de rotación son las siguientes:

Ru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

Rv:

$$\begin{bmatrix} cos\phi & 0 & -sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\phi & 0 & cos\phi \end{bmatrix}$$

Rw:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si hacemos la multiplicación RuRvRw, obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} cos\theta cos\phi & cos\phi sin\theta & -sin\phi \\ cos\theta sin\alpha sin\phi - cos\alpha sin\theta & cos\alpha cos\theta + sin\alpha sin\theta sin\phi & cos\phi sin\alpha \\ sin\alpha sin\theta + cos\alpha cos\theta sin\phi & cos\alpha sin\theta sin\phi - cos\theta sin\alpha & cos\alpha cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ahora, hacemos la multiplicación RwRvRu. Obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} cos\theta cos\phi & \cos\alpha\sin\theta + cos\theta sin\alpha sin\phi & sin\alpha sin\theta - cos\alpha cos\theta sin\phi \\ -sin\theta\cos\phi & cos\alpha cos\theta - sin\alpha sin\theta sin\phi & cos\theta sin\alpha + cos\alpha sin\theta sin\phi \\ sin\phi & -sin\alpha cos\phi & cos\alpha cos\phi \end{bmatrix}$$

III. Conclusiones

Al estar comparando los resultados de las operaciones con las matrices de rotación, se ha observado que guardan cierta similitud entre ellas, de hecho, con un poco más de observación, podemos darnos cuenta de que la matriz resultante de la operación RwRvRu es la transpuesta de la matriz resultante de la operación RxRyRz. De igual manera, la matriz resultante de la operación RuRvRw es la transpuesta de la matriz resultante de la operación RzRyRx. Ninguna de estas operaciones da el mismo resultado, pero ahora sabemos que guardan relación con las transpuestas de las matrices resultantes.

Referencias

[1] Sistemas Robustos, "Matrices de rotación y sus transformaciones". [En línea] Disponible en: http://www.multirotorguides.com/aprendamos/conceptos-matematicos/matrices-de-rotacion/

IV. Semblanza

Vivas Maldonado Rodrigo

Nació el 25 de marzo de 1996 en la Ciudad de México. En la actualidad, es estudiante de Ingeniería Mecatrónica, cursando el noveno semestre, en la Universidad Nacional Autónoma de México.