Problemas: Interacción Radiación-Materia

Nicolás Alejandro Ávila Pérez

3 de noviembre de 2021

1. Consideramos la colisión elástica entre una partícula cargada incidente de energía E, masa M y momentum p con electrón en reposo, el cual es dispersado un ángulo θ respecto a la partícula incidente después de la colisión. El momentum de la partícula después de la colisión es p_f, y el del electrón es p_e.

   Por argumentos de conservación de energía,

$$\sqrt{(pc)^2 + (Mc^2)^2} + m_e c^2 = \sqrt{(p_f c)^2 + (Mc^2)^2} + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

   La energía transferida al electrón se calcula como la diferencia entre la energía después de la colisión y la energía en reposo,

$$E_{kin} = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2, \tag{1}$$

   de modo que, la conservación de energía queda

$$\sqrt{(pc)^2 + (Mc^2)^2} = \sqrt{(p_f c)^2 + (Mc^2)^2} + E_{kin}. \tag{2}$$

   Por argumentos de conservación del momentum,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_f + \mathbf{p}_e \longrightarrow p_f^2 = p^2 + p_e^2 - 2\cos(\theta) p p_e. \tag{3}$$

   Pero, de (1),

$$\begin{aligned} p_e^2 &= \frac{(E_{kin} + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2}{c^2} \\ &= \frac{E_{kin}(E_{kin} + 2m_e c^2)}{c^2}, \end{aligned}$$

   y sustituyendo en (3),

$$p_f^2 = p^2 + \frac{E_{kin}(E_{kin} + 2m_e c^2)}{c^2} - 2\cos(\theta) p \sqrt{\frac{E_{kin}(E_{kin} + 2m_e c^2)}{c^2}}.$$

   De (2),

$$p_f^2 = \frac{\left(\sqrt{(pc)^2 + (Mc^2)^2} - E_{kin}\right)^2 - (Mc^2)^2}{c^2}.$$

Comparando estas dos expresiones,

$$\frac{\left(\sqrt{(pc)^2+(Mc^2)^2}-E_{kin}\right)^2-(Mc^2)^2}{c^2}=p^2+\frac{E_{kin}(E_{kin}+2m_ec^2)}{c^2}-2\cos(\theta)p\sqrt{\frac{E_{kin}(E_{kin}+2m_ec^2)}{c^2}}$$

$$\longrightarrow E_{kin}=\frac{2m_e\left[pc^2\cos(\theta)\right]^2}{\left(m_ec^2+\sqrt{(pc)^2+(Mc^2)^2}\right)^2-\left[pc\cos(\theta)\right]^2}.$$

Para $\theta=0$ (máxima energía transferida)

$$\longrightarrow E_{kin}^{max}=\frac{2m_ep^2}{M^2+m_e^2+2m_e\sqrt{(pc)^2+(Mc^2)^2}/c^2}.$$

Reconociendo $E=\sqrt{(pc)^2+(Mc^2)^2}$, se re obtiene la expresión vista en clase

$$\boxed{E_{kin}^{max}=\frac{2m_ep^2}{M^2+m_e^2+2m_eE/c^2}}.$$

Para evaluar los límites relativista y no-relativista, escribimos

$$\begin{aligned}E^2&=(pc)^2+(Mc^2)^2 & E&=\gamma Mc^2\\ \longrightarrow p^2&=M^2c^2(\gamma^2-1)\\ &=M^2c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}-1\right)\\ &=M^2c^2\beta^2\gamma^2,\end{aligned}$$

de modo que

$$E_{kin}^{max}=\frac{2m_eM^2c^2\beta^2\gamma^2}{M^2+m_e^2+2m_eM\gamma}.$$

- En el límite no-relativista, se tiene que $\gamma\simeq 1$ y $E=\frac{1}{2}M\beta^2c^2$, y entonces

$$\begin{aligned}E_{kin}^{max}&=\frac{4m_eME}{M^2+m_e^2+2m_eM}\\ &=\frac{4m_eME}{(M+m_e)^2}.\end{aligned}$$

- En el límite relativista, $\beta\to 1$ y $E\gg m_ec^2$, de modo que

$$\begin{aligned}E_{kin}^{max}&=\frac{2m_eM^2c^2\gamma^2}{M^2+m_e^2+2m_eM\gamma}\\ &=\frac{2m_eM^2c^4\gamma^2}{M^2c^2+m_e^2c^2+2m_eMc^2\gamma}\\ &=\frac{2m_eE^2}{M^2c^2+m_e^2c^2+2m_eE}\\ &\simeq\frac{2m_eE^2}{M^2c^2+2m_eE}\\ &=\frac{E^2}{M^2c^2/2m_e+E}.\end{aligned}$$

2. La energía promedio de los electrones al cruzar la placa de aluminio es

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}.$$

Tomamos la longitud de radiación del aluminio como $X_0 = 8{,}9[cm]$, de modo que la energía perdida por bremstrahlung en $x = 5[cm]$ es entonces

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_0 - E(5[cm]) \\ &\simeq 0{,}43[GeV].\end{aligned}$$

3. Considerando la producción de pares a partir de fotones de alta energía, el coeficiente de absorción viene dado por

$$\mu = \frac{7}{9X_0} \simeq 1{,}38\left[cm^{-1}\right].$$

Por otro lado, la sección eficaz es

$$\sigma_{pair} = \frac{A}{N_A}\frac{7}{9X_0} \simeq 4{,}74 \times 10^{-22}\left[\frac{g}{cm}\right] \longrightarrow 4{,}19 \times 10^{-23}[cm^2]$$

4. Usamos la expresión para el ángulo rms,

$$\Theta_{rms}^{proj} = \frac{13{,}6[MeV]}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}}. \tag{4}$$

a). De la relación energía-momentum,

$$\begin{aligned}(\gamma mc^2)^2 &= (pc)^2 + (mc^2)^2 \\ \longrightarrow \gamma^2 &= \frac{(pc)^2}{(mc^2)^2} + 1 = \frac{1}{1-\beta^2} \\ \longrightarrow \beta^2 &= \frac{(pc)^2}{(pc)^2 + (mc^2)^2},\end{aligned}$$

de modo que podemos escribir (4) como

$$\Theta_{rms}^{proj} = 13{,}6[MeV]\frac{\sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}}{(cp)^2}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \tag{5}$$

Con

$$\begin{aligned}cp &= 50\,[MeV] & mc^2 &= 938{,}27\,[MeV] \\ X_{0[Al]} &= 24\left[\frac{g}{cm^2}\right] & x &= 0{,}1\left[\frac{g}{cm^2}\right],\end{aligned}$$

$$\Theta_{rms}^{proj} \simeq 0{,}33.$$

b). Con

$$E_k = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$
$$\longrightarrow (cp)^2 = (E_k + mc^2)^2 - (mc^2)^2,$$

se escribe (5) como

$$\Theta_{rms}^{proj} = 13{,}6[MeV]\frac{E_k + mc^2}{(E_k + mc^2)^2 - (mc^2)^2}\sqrt{\frac{x}{X_0}}.$$

Usando

$$E_k = 200\,[MeV] \qquad mc^2 = 938{,}27\,[MeV]$$
$$X_{0[Al]} = 1{,}43\,[cm] \qquad x = 0{,}2\,[cm]\,,$$

se obtiene,

$$\Theta_{rms}^{proj} \simeq 0{,}014.$$

5. Se calcula la máxima penetración como

$$t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln(2)} = 10{,}29.$$

El espesor de la atmósfera cruzada es

$$x = tX_0 = 380{,}73\left[\frac{g}{cm^2}\right].$$

6.

a) Se calcula el producto $\gamma\beta$ como

$$(cp)^2 = (\beta\gamma)^2(mc^2)^2 = E^2 - (mc^2)^2$$
$$\longrightarrow \beta\gamma = \sqrt{\frac{E^2}{(mc^2)^2} - 1}.$$

Con

$$E = 100[GeV] \qquad mc^2 = 105{,}66[MeV],$$

esto es,

$$\beta\gamma = 946{,}43.$$

Dado que el producto está en la región $0{,}1 < \beta\gamma < 1000$, el proceso de pérdida de energía dominante es por ionización.

b. Se usa la ecuación de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{dx} \simeq \left(0{,}307\left[\frac{MeV\cdot cm^2}{mol}\right]\right)\rho\frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_\mu c^2(\gamma\beta)^2}{I}\right)-\beta^2\right].$$

Con

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{\frac{E^2}{\gamma^2(mc^2)^2}-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{(mc^2)^2}{E^2}} \simeq 1\\
I &\simeq 16Z^{0,9}[eV] = 300{,}33[eV]\\
z^2 &= 1\\
Z &= 26\\
\rho &= 7{,}87\left[\frac{g}{cm^3}\right]\\
A &= 55{,}85\left[\frac{g}{mol}\right]\\
m_\mu c^2 &= 105{,}66[MeV]\\
\beta\gamma &= 946{,}43,
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\frac{dE}{dx} = -29{,}43\left[\frac{MeV}{cm}\right].$$

La energía media perdida al atravesar $3[m]$ dentro del detector es

$$E = 29{,}43\left[\frac{MeV}{cm}\right]\times 300[cm] = 8{,}83[GeV].$$