

# 光電實驗(一)

## 實驗報告

姓	名：
學	號：
組	別：
教	授：
日	期：

### 一、實驗名稱：干涉與繞射

### 二、實驗目的與原理：

#### (1) 實驗目的

透過繞射片與透鏡的組合分別觀察遠場繞射以及近場繞射並比較兩者的不同，且觀察這兩種繞射對不同形狀孔洞的繞射圖形。透過遠場繞射的圖形加以計算狹縫寬度、入射光波長、光柵週期等性質，此外，觀察不同狹縫數之多狹縫繞射的性質及其圖形。

#### (2) 實驗原理

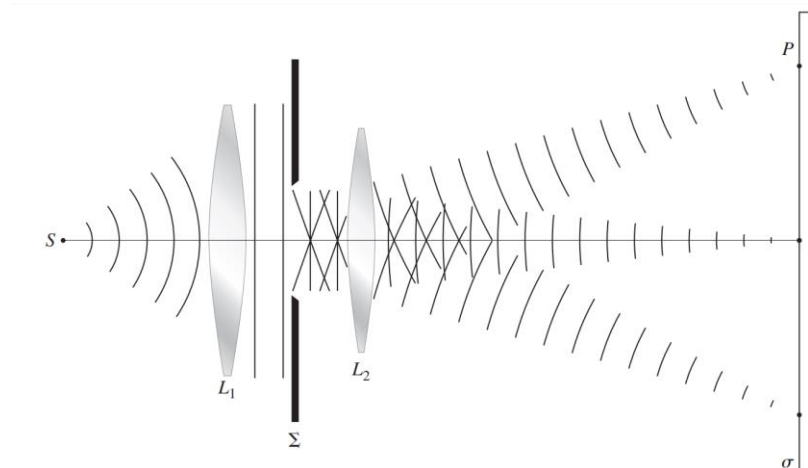
##### 1. 遠場繞射(Fraunhofer 繞射)

在光的繞射中，不同的投影屏幕對孔徑之距離以及孔徑大小等因素將會影響光的行為，並且可將繞射種類分為遠場繞射與近場繞射，而其則是

透過光路的菲涅爾數  $F = \frac{a^2}{L\lambda}$  定義，其中  $a$  為圓孔半徑或狹縫寬度， $L$  為圓孔或狹縫至屏幕的距離， $\lambda$  則為光波的波長。若光路的菲涅爾數  $F \ll 1$ ，則將觀察到遠場繞射，若光路的菲涅爾數  $F \geq 1$ ，則將觀察到近場繞射，若光路的菲涅爾數  $F \gg 1$ ，則應以幾何光學討論。

對遠場繞射而言，在屏幕處的光波前由於距離繞射片相當遠，因此波前可視為平面波，故可套用 Fraunhofer 近似而得遠場繞射。在遠場繞射中，當屏幕與繞射片距離改變時，繞射圖形的大小將會隨之改變，而這也是其波前近似於平面波的體現。

若要在實驗中實際呈現精確的遠場繞射，除了滿足菲涅爾數的條件外，還可以透過在繞射片前後加入凸透鏡，且點波源  $S$  和屏幕分別位於凸透鏡  $L_1$  和  $L_2$  的焦距上，如下圖一，這將使得點波源和屏幕對繞射片的物距和像距趨近於無窮大，故將可在屏幕上得遠場繞射圖形。



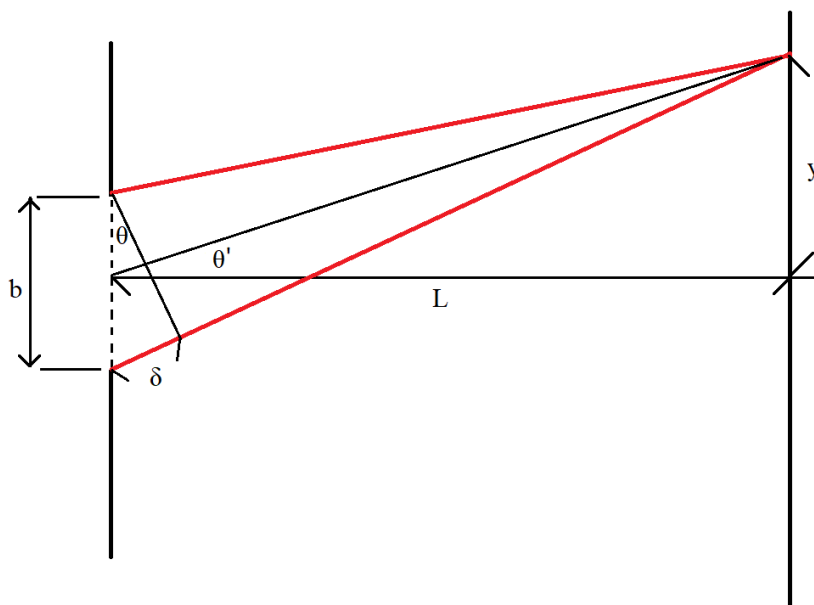
圖一 以凸透鏡和繞射片在屏幕上呈現遠場繞射圖形[1]

## 2. 近場繞射(Fresnel 繞射)

當菲涅爾數  $F \geq 1$  時，屏幕將呈現近場繞射，其與遠場繞射相比並非以平面波行進，故須考慮波前的弧度，也因為波前不再為平面波，所以當改變投影屏幕與繞射孔洞的距離時，繞射圖形的大小與紋路皆會改變。

## 3. 單狹縫的遠場繞射

當單狹縫繞射滿足遠場繞射條件時，其光路應如下圖二。其中右側為屏幕，而  $L$  為狹縫至屏幕距離， $b$  為狹縫寬度， $y$  為觀測點至中心的距離。



圖二 單狹縫遠場繞射的光路示意圖

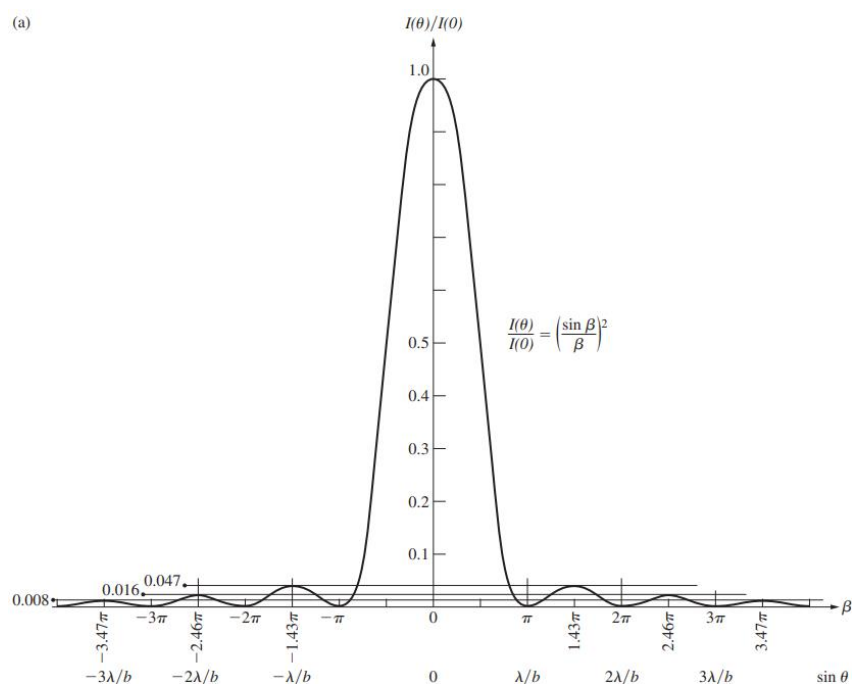
而當考慮遠場繞射時， $L \gg b$ ，因此 $\theta \approx \theta'$ ，且當光程差 $\delta = n\lambda$ ， $n = 1, 2, 3 \dots$ 時，在觀測點上將有完全破壞性干涉，又 $\delta = b \sin \theta$ ，故可列式 $b \sin \theta = n\lambda$ 時，將有完全破壞性干涉。接著考慮在小角度 $\theta$ 時， $\sin \theta \approx \tan \theta$ ，而 $\tan \theta = \frac{y}{L}$ ，且當屏幕上投影發生完全破壞性干涉時，即代表該點為繞射暗區中心點，故最後可整理：在繞射圖形暗區的中心點處， $b \frac{y}{L} = n\lambda$ ， $n = 1, 2, 3 \dots$ 。而透過移項可得：

$$y = \frac{n\lambda L}{b} \text{ 時，為繞射圖形暗區中心點}$$

而相對的，當光程差 $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$ ， $n = 1, 2, 3 \dots$ 時，在觀測點上將有完全建設性干涉，即為在繞射圖形中，除了中央亮帶以外的繞射亮區中心點。因此同樣可整理出下式：

$$y = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda L}{b} \text{ 時，為繞射圖形亮區中心點}$$

此外，透過相關對干涉與繞射情形的積分與計算，可得對於單狹縫的遠場繞射而言， $I(\theta) = I(0)\text{sinc}^2(\beta)$ ，其中 $I(\theta)$ 與 $I(0)$ 分別代表繞射角度為 $\theta$ 或0度處的幅照度，而 $\beta \equiv (kb/2) \sin \theta$ ，其中k為入射光的波數。透過此式，可繪出單狹縫繞射圖形，如下圖三。



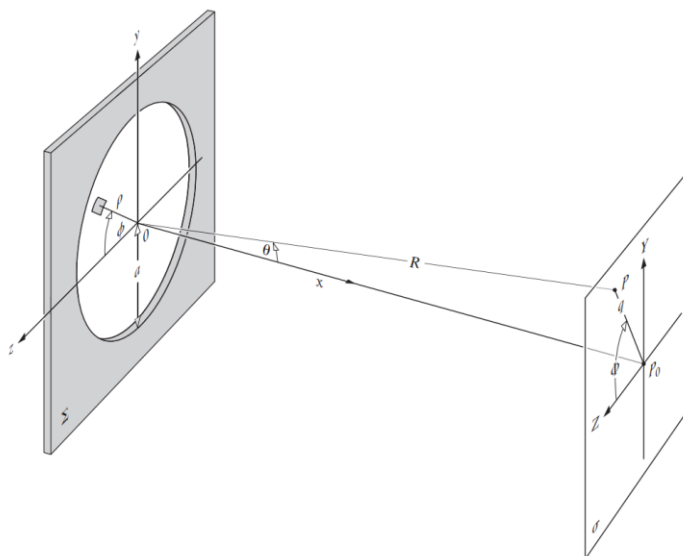
圖三 單狹縫遠場繞射圖形的相對幅照度[1]

#### 4. 圓孔繞射

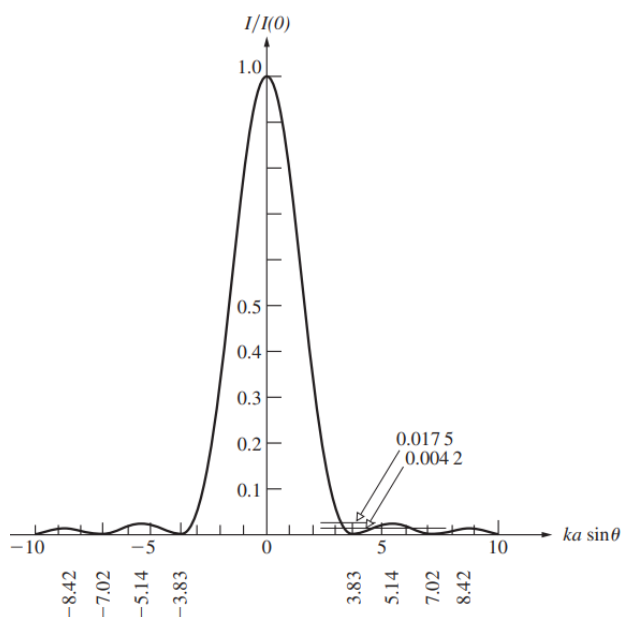
透過對孔洞繞射的積分計算，可知對於圓孔遠場繞射而言，繞射圖形的幅照度可透過下式表示，且其光路可透過下圖四表示，而將幅照度對變量作圖則可得下圖五：

$$I = I(0) \left[ \frac{2J_1(kaq/R)}{kaq/R} \right]^2 = I(0) \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

其中  $k$  為入射光波數， $a$  為圓孔半徑， $q$  為繞射圖形上，討論點對圓心的距離， $R$  為繞射圖形上討論點對孔洞中心的距離，而  $J_1(x)$  則為第一階的 Bessel function。

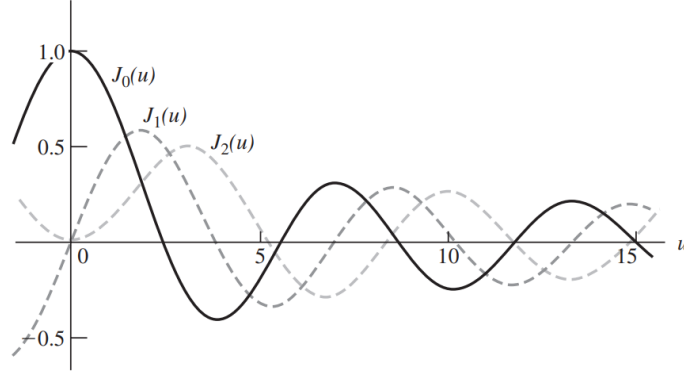


圖四 圓孔遠場繞射示意圖[1]



圖五 圓孔圓場繞射圖形的幅照度對變量作圖[1]

透過上式，我們可知對圓孔遠場繞射而言，其幅照度是一個一階 Bessel function 的二次函數，且其隨著與繞射中心的距離而變化，為一圓對稱圖形。而 Bessel function 的函數圖如下圖六，觀察可發現 Bessel function 隨著  $u$  增大而不斷振盪，且具有多個  $J_1(u) = 0$  的解。因此我們可知，在  $J_1(u) = 0$  處，繞射圖形的幅照度將為 0，即為暗環，而中心處的幅照度最大，隨著距離增加而逐漸衰減。



圖六 Bessel function 函數圖[1]

而透過數值分析與查表可得出，在  $u = 3.83$  處為  $J_1(u)$  的第一個解，即當  $u = 3.83 = \frac{kaq}{R}$  時，為繞射圖形的第一個暗環，接著代入  $k$  並透過計算可得， $0.609 = \frac{aq}{\lambda R} = \frac{a}{\lambda} \sin \theta$ ，又因為遠場繞射條件，故圓孔至屏幕距離極遠，因此  $\theta$  極小，故  $\sin \theta \approx \tan \theta$ ，因此可列式  $0.609 = \frac{a}{\lambda} \tan \theta = \frac{aq}{\lambda x}$ ，並且可改寫成下式：

$$q \approx 1.22 \frac{\lambda x}{D} \text{ 時，為繞射圖形第一暗環}$$

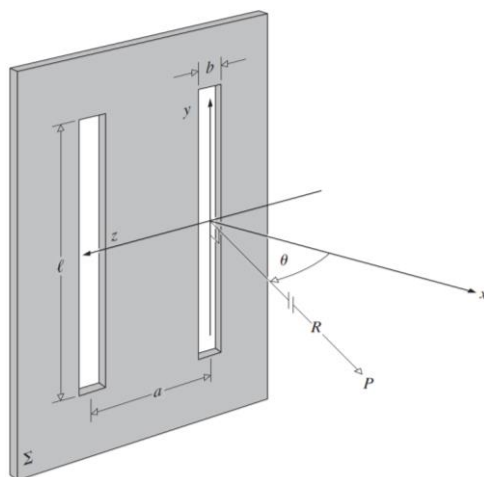
其中  $x$  為圓孔至屏幕的垂直距離， $D$  為圓孔直徑。

## 5. 雙狹縫干涉與繞射

首先考慮雙狹縫干涉的情形，可透過下圖七表示，而透過相關積分計算，則可知雙狹縫干涉圖形的各處幅照度可透過下式表示：

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$$

其中  $\beta \equiv (kb/2) \sin \theta$ ， $\alpha \equiv (ka/2) \sin \theta$ ，而  $a$  為雙狹縫之間的間距， $b$  為狹縫寬度， $\theta$  為繞射角， $I_0$  為當  $\theta = 0$  時，單一狹縫貢獻的幅照度。因此當  $\theta = 0$  時，2 個狹縫的電場重疊成建設性干涉，故電場幅度變為 2 倍，而幅照度則變為 4 倍，所以  $I(0) = 4I_0$ 。

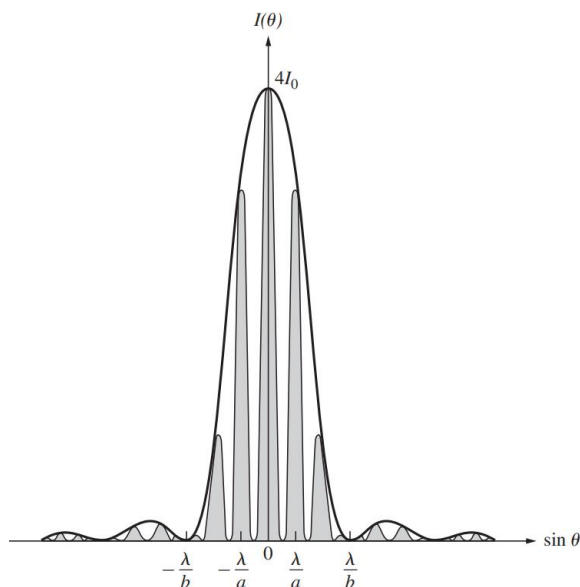


圖七 雙狹縫干涉示意圖[1]

透過上式  $I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$  可知，當雙狹縫的狹縫寬度  $b$  極小時，

$\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$  項將趨近於 1，此時屏幕上的圖形將僅呈現  $\cos^2 \alpha$  的週期變化項，而這即代表著此時僅有雙狹縫間互相的干涉貢獻。而當雙狹縫的狹縫間距離  $a$  為 0 時， $\cos^2 \alpha$  將為 1，此時雙狹縫將視為一個較寬的單狹縫，而此時屏幕上將呈現單狹縫干涉圖形。

透過討論可知，實際上的雙狹縫干涉需同時考慮雙狹縫的干涉項與狹縫本身的繞射項，而其在屏幕上的干涉與繞射圖形將如下圖八。



圖八 雙狹縫干涉與繞射圖形[1]

觀察圖八可發現，此時屏幕上圖形主要為等寬的干涉亮紋，而亮紋的光強度受繞射的亮區與暗區限制。

也因此，在亮紋處可列式：

$$\alpha = \left(ka/2\right) \sin \theta = n\pi \text{時，為第} n \text{階亮紋}$$

同理，由於 $\theta$ 極小，因此 $\sin \theta \approx \tan \theta$ ，故代入 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 與 $\tan \theta = \frac{y}{L}$ 後可

整理成下式：

$$y = \frac{n\lambda L}{a}, n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第} n \text{階亮紋}$$

而對於暗紋，則以下式表示：

$$y = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda L}{a}, n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第} n \text{階暗紋}$$

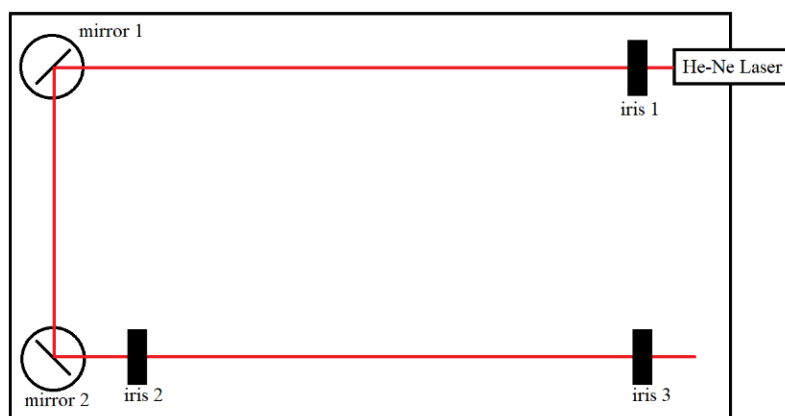
其中  $L$  為狹縫至屏幕的垂直距離， $a$  為雙狹縫間距離。

### 三、實驗步驟(含配置圖)：

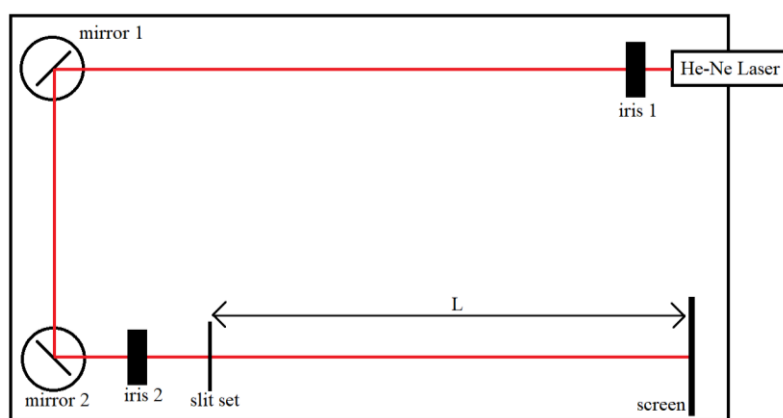
#### 1. Fraunhofer 繞射

首先以等高光圈在光學桌板邊緣建立與桌板平行的水平雷射光束，接著以 2 面反射鏡與光圈改變雷射方向，使出射反射鏡 2 的雷射能夠水平通過 2 個等高光圈，如下圖九。之後移除光圈 3，架設屏幕於光學桌板後方，在屏幕上對雷射光點位置做記號為  $P_0$ ，接著架設繞射片於光圈二後方，使面鏡二的反射光通過單狹縫的中心，如下圖十，此時須注意繞射片與屏幕的距離  $L$  應大於 600mm。

此時將在屏幕上方觀察到亮暗條紋的變化，即為單狹縫繞射條紋，並可在條紋中找到亮度最亮且寬度較寬的亮帶，此為單狹縫繞射條紋的中央亮帶，且中央亮帶的中心應與記號點  $P_0$  重疊，若並未重疊，則微調繞射片入射角度與位置，使雷射垂直入射狹縫中央。以中央亮帶為中心，向左右側分別尋找第一個與第二個的亮區和暗區中心至  $P_0$  的距離並記錄，對於暗區的紀錄，套用公式  $b = \frac{n\lambda L}{y}$ ，其中  $b$  為狹縫寬度， $\lambda$  為入射光波長， $L$  為狹縫至屏幕的距離， $y$  為測得暗區中心至  $P_0$  的距離， $n$  代表著當前暗區為第幾暗區。而對於亮區的紀錄，則套用公式  $b = \frac{(n+1/2)\lambda L}{y}$ ，其中  $y$  為測得亮區中心至  $P_0$  的距離(不含中央亮帶)，而  $n$  代表著當前亮區為第幾亮區。透過此二公式對記錄數據的分析，即可求得狹縫的寬度，並求得平均寬度並與理論值比較。



圖九 建立水平雷射並改變雷射方向



圖十 架設屏幕與繞射片

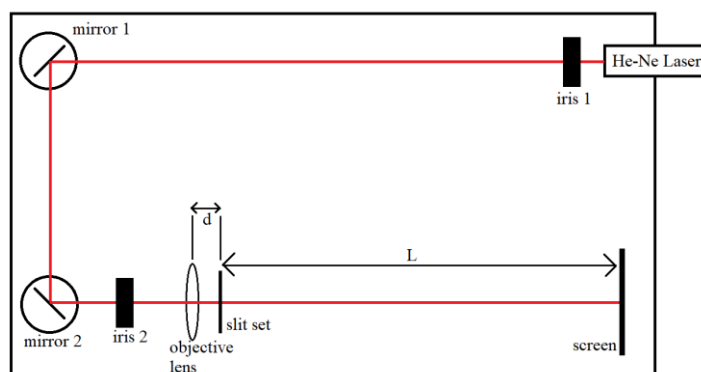
將光路改為使雷射對繞射片上的圓孔入射，雷射應垂直入射圓孔中心，此時可在屏幕上觀察到亮暗相間的圓環，此即為圓孔繞射的結果。透過繞射理論可知繞射角度與入射光波長和圓孔直徑相關，對第一暗環而言，以公式  $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  表示。

首先移動屏幕至與繞射片指定距離處，觀察屏幕移動時，繞射條紋大小是否跟著改變，接著量測第一暗環的直徑並記錄，分別記錄繞射片與屏幕距離為 60cm、80cm 和 110cm 下的數據，透過公式計算得出圓孔直徑的大小，之後將繞射片換為 2 號圓孔並重複上述過程並記錄，同樣計算得出 2 號圓孔的大小。最後將圓孔換為繞射片上不同形狀的孔洞，並記錄其在屏幕上的繞射圖形，須注意不同孔洞的繞射圖形因在同一屏幕距離  $L$  下被記錄。



## 2. Fresnel 繞射

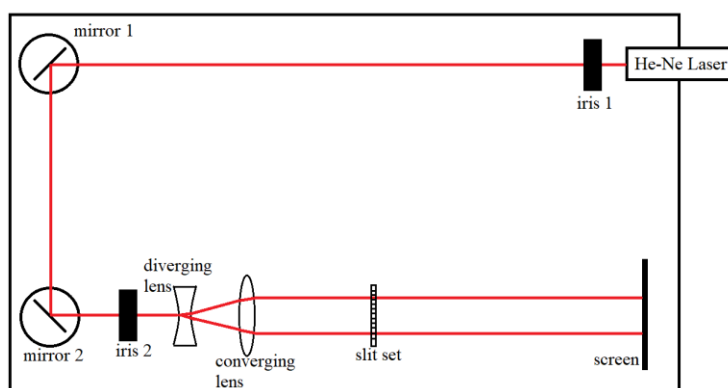
先將上圖十的光路移除繞射片，並在屏幕前加入一等高光圈三，接著在光圈二後方加入物鏡，利用物鏡對光圈三在屏幕上的投影調整物鏡高度，接著利用物鏡在光圈二上的反射光點調整物鏡位置，使雷射垂直入射物鏡。之後移除光圈三，在物鏡後加入繞射片，使光路如下圖十一。取  $d$  距離小於  $2\text{cm}$ ， $L$  距離大於  $60\text{cm}$ ，緩慢調整繞射片與物鏡距離與入射角度，使繞射圖形清晰可見，紀錄繞射片上各形狀孔洞的繞射圖形並記錄，接著同樣紀錄 2 號圓孔的繞射圖形。須注意在記錄 1 號圓孔與 2 號圓孔時，應緩慢改變  $d$  距離，觀察繞射圖形中心的亮暗變化，此外紀錄時取 1 號圓孔的繞射圖形中心為暗區，而 2 號圓孔的繞射圖形中心為亮區。



圖十一 Fresnel 繞射實驗之光路示意圖

## 3. 多狹縫的干涉與繞射

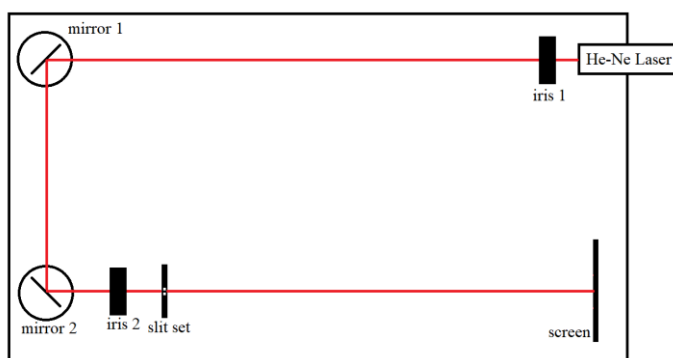
將上圖十一的光路移除物鏡與繞射片，並在屏幕前加入等高光圈三，在光圈二後加入凸透鏡，以凸透鏡對光圈三在屏幕上的投影調整凸透鏡高度，接著以凸透鏡在光圈二上的反射光點調整凸透鏡的入射角度。在凸透鏡前再加入一凹透鏡，適當調整凹透鏡的高度與入射角度，接著調整 2 透鏡間距使出射光為一擴束平行光。最後移除光圈三，並在凸透鏡後加入繞射片，分別使擴束平行光垂直通過繞射片上的雙狹縫、三狹縫與四狹縫並記錄其在屏幕上的成像。



圖十二 多狹縫的干涉與繞射光路示意圖

#### 4. 利用雙狹縫干涉計算入射光波長

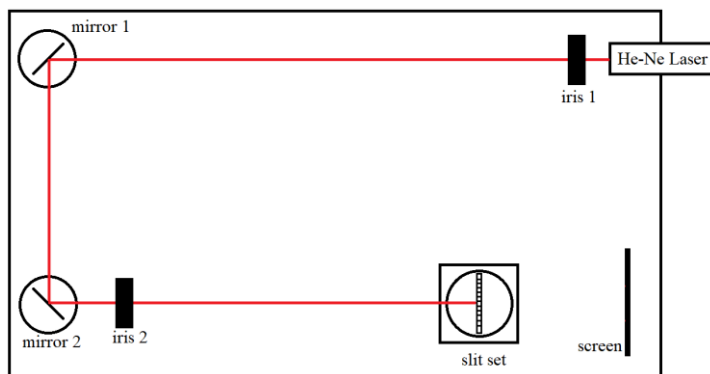
將上圖十二的凹透鏡、凸透鏡和繞射片移除，在屏幕的雷射光點處標記  $P_0$ ，在光圈二後架設繞射片，使繞射片距離屏幕 70cm，並使雷射垂直入射雙狹縫中心，如下圖十三。此時屏幕上應呈現雙狹縫干涉的圖形，記錄左右亮紋中心在  $n$  值各別為 1、2 或 3 時到  $P_0$  的距離。接著將繞射片與屏幕距離改為 100cm，同樣紀錄亮紋至  $P_0$  的距離，最後透過記錄所得的亮紋距離、狹縫間距和狹縫到屏幕的距離求得入射雷射的波長。



圖十三 以雙狹縫干涉計算入射光波長之光路示意圖

#### 5. 量測光柵週期

移除上圖十三中的繞射片，並將其安裝在旋轉台上，如下圖十四放置於光路中，將光圈二的孔洞關小，微調旋轉台角度並確保繞射片與桌面垂直，使雷射光垂直入射繞射片上的 1 號光柵，並使反射光干涉條紋的中央亮帶中心恰反射回光圈二的中心，紀錄此時旋轉台的刻度，將其設為零點。接著微調旋轉台角度，使反射光干涉條紋的第一亮區中央反射回光圈二中心，紀錄此時旋轉角度，再微調旋轉台角度，使中央亮帶中心重新反射回光圈二中心，重新將此時旋轉台刻度設為零點，接著微調旋轉台角度，改為使第二亮區中央反射回光圈二中心並記錄旋轉角度，接著再重新歸零。重複以上動作直到將左右兩側的第一、二和三亮區的旋轉角度皆紀錄完成，並透過旋轉角度計算出光柵週期。接著改為量測繞射片上的 2 號光柵。



圖十四 量測光柵週期之光路示意圖

#### 四、數據分析與討論：

##### (1) 實驗數據整理及分析

##### i. Fraunhofer 繞射

表一 以單狹縫遠場繞射計算狹縫寬度 b(暗區)

$L = 69.7cm$		$\lambda = 632.8nm$	
區域	n 值	y 值(mm)	狹縫寬度 b(mm)
右 1 暗區中心	1	5.4	0.08168
右 2 暗區中心	2	10.7	0.08244
左 1 暗區中心	1	5.5	0.08019
左 2 暗區中心	2	10.9	0.08091

平均寬度為 0.08131mm

表二 以單狹縫遠場繞射計算狹縫寬度 b(亮區)

$L = 69.7cm$		$\lambda = 632.8nm$	
區域	$n + 1/2$ 值	y 值(mm)	狹縫寬度 b(mm)
右 1 亮區中心	1.5	8.1	0.08168
右 2 亮區中心	2.5	13.6	0.08168
左 1 亮區中心	1.5	8.1	0.08168
左 2 亮區中心	2.5	13.3	0.08291

平均寬度為 0.08184mm

在單狹縫 Fraunhofer 繞射的實驗部分中，透過量測單狹縫繞射圖形上的暗區中心與亮區中心至中央亮帶中心的距離以求得狹縫寬度 b。

而在數據分析上，套用下二公式：

$$y = \frac{n\lambda L}{b} \text{ 時，為繞射圖形暗區中心點}$$

$$y = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda L}{b} \text{ 時，為繞射圖形亮區中心點}$$

透過移項處理，可得下二式：

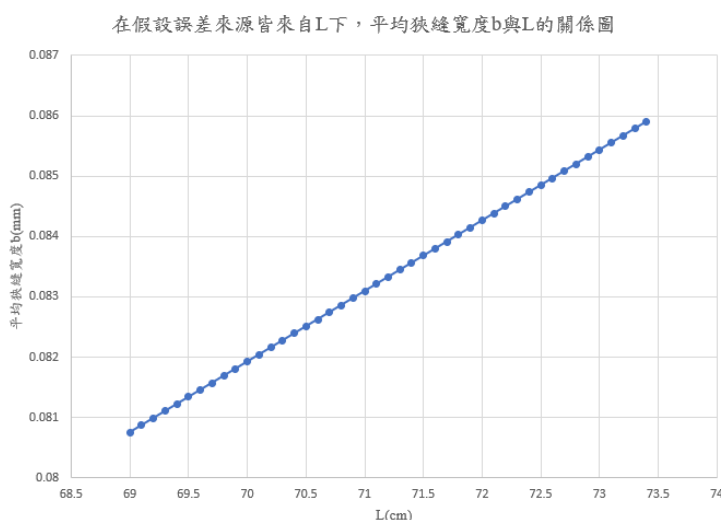
$$\text{對亮區中心點而言，} b = \frac{n\lambda L}{y}$$

$$\text{對暗區中心點而言，} b = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda L}{y}$$

因此代入各數據點資料至上二式中，即可求得在該數據點下的推估狹縫寬度，並求得平均狹縫寬度。而狹縫寬度的實際值為 0.085mm，因此可知表一中平均狹縫寬度的誤差值為 4.34%，而表二中平均狹縫寬度的誤差值則為 3.72%。

造成誤差的原因可能來自於雷射並未完全垂直入射狹縫，而是帶有一微小角度的誤差，也因此造成左右兩側的  $y$  值量測數據並不完全對稱，且若帶有角度入射狹縫，量測狹縫寬度應較理論狹縫寬度小。

此外，狹縫與屏幕間距離  $L$  的量測可能也存在部分誤差，若對表一與表二的推估狹縫寬度  $b$  值全數取平均，將得平均狹縫寬度為  $0.081575\text{mm}$ ，若假設雷射為垂直入射狹縫，則左右兩側數據相等，並假設誤差來源皆來自於  $L$  的量測誤差，則若對平均狹縫寬度  $b$  中的  $L$  做修正，且以每  $0.1\text{cm}$  取一次資料點，則修正平均狹縫寬度對變量  $L$  的作圖如下圖十五，且在  $L$  為  $72.6$  處有平均狹縫寬度  $b$  為  $0.084967\text{mm}$ ，可發現假設誤差來源皆來自於  $L$  的量測誤差，則  $L$  有約  $2.9\text{cm}$  的量測誤差。



圖十五 在假設誤差來源皆來自  $L$  下，平均狹縫寬度  $b$  與  $L$  的關係圖

此外，由於在  $y$  值量測上，僅是  $0.1\text{mm}$  的量測差距就可能導致數據相當的不同，因此在取值上，若未精確定位亮區中心與暗區中心，則就容易導致數據誤差。

表三 以圓孔遠場繞射計算 1 號圓孔直徑，入射光波長為  $632.8\text{nm}$

圓孔至屏幕距離 $L(\text{cm})$	第一暗環直徑 $y(\text{mm})$	圓孔直徑 $D(\mu\text{m})$
60	2.1	441.15
80	3.2	386.01
110	4.0	424.61

$D$  的平均值為  $411.257\mu\text{m}$ ，理論值為  $400\mu\text{m}$

表四 以圓孔遠場繞射計算 2 號圓孔直徑，入射光波長為  $632.8\text{nm}$

圓孔至屏幕距離 $L(\text{cm})$	第一暗環直徑 $y(\text{mm})$	圓孔直徑 $D(\mu\text{m})$
60	4.7	197.11
80	6.6	187.16
110	9.6	188.72

$D$  的平均值為  $191.0\mu\text{m}$ ，理論值為  $200\mu\text{m}$

透過在實驗原理對圓孔遠場繞射的分析，可知 $q \approx 1.22 \frac{\lambda L}{D}$

時，為繞射圖形第一暗環，其中  $q$  為觀測點至繞射圖形中心的距離，因此可知第一暗環直徑  $y$  的關係式為：

$$y \approx 2.44 \frac{\lambda L}{D}$$

其中  $y$  即為第一暗環直徑， $\lambda$  為入射光波長， $L$  為圓孔至屏幕距離， $D$  為圓孔直徑，而在透過移項處理後可得：

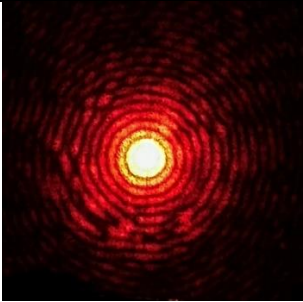
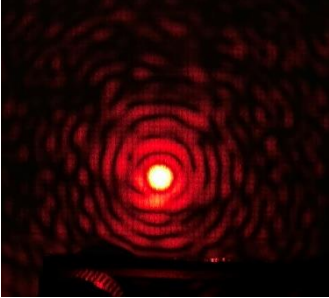
$$D \approx 2.44 \frac{\lambda L}{y}$$

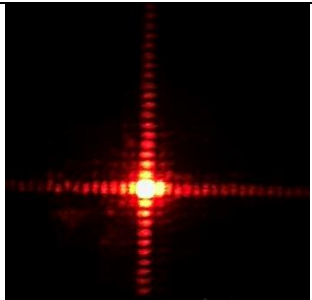
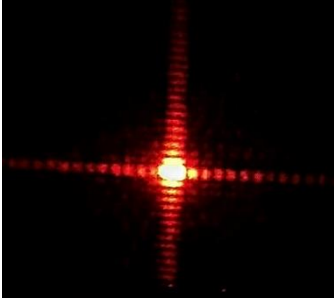
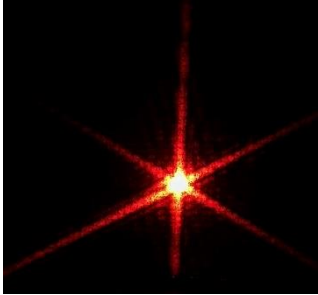
將表三與表四測得的數據代入上式中，即可求得各個數據點下的推估圓孔直徑  $D$ ，而將各推估圓孔直徑  $D$  取平均，即可得  $D$  的平均值，並且與理論值做比較。

對表一而言， $D$  的平均值為  $411.257\mu\text{m}$ ，理論值為  $400\mu\text{m}$ ，誤差為  $2.81425\%$ ，而對表二而言， $D$  的平均值為  $191.0\mu\text{m}$ ，理論值為  $200\mu\text{m}$ ，誤差為  $4.5\%$ 。

觀察實驗數據，可發現推算出的圓孔直徑  $D$  在表三中時大時小，因此推測誤差來自於  $L$  或  $y$  的量測誤差，因此導致 3 次的誤差並沒有顯著趨勢。而對於表四而言，發現 3 次的推估圓孔直徑  $D$  皆較理論值小，推測是因為圓孔的擺放使得雷射並未垂直入射，因此第一暗環在各方向上可能有些微不同，而由於 3 次量測皆以同方向量測  $y$  值，故導致整體推算出的  $D$  值皆偏小。

表五 不同孔洞形狀下的遠場繞射圖形

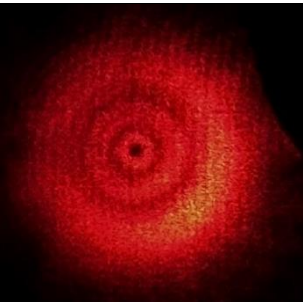
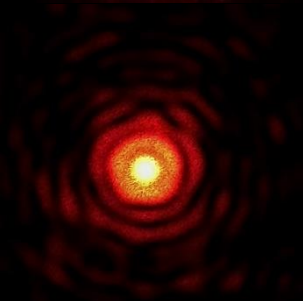
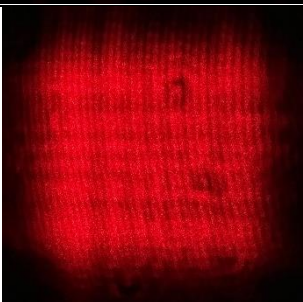
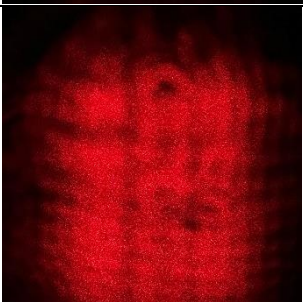
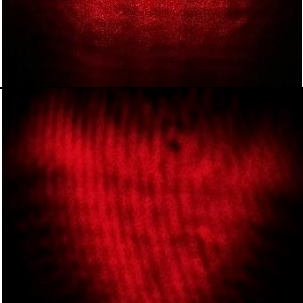
孔洞形狀	繞射圖形	
1 號圓孔		
2 號圓孔		

正方形孔洞	
長方形孔洞	
倒三角形孔洞	

觀察上表可發現，在遠場繞射下，圓形孔洞的繞射圖像中心為亮區，而向外為同心圓，且2號圓孔的亮帶寬度較1號圓孔寬，這也證實2號圓孔的圓孔直徑較窄。而對正方形及長方形孔洞而言，繞射圖形在圖形的邊向外繞射，而正方形的繞射圖像在4個邊皆相同，但長方形的繞射圖像則有長邊與短邊的差異，與短邊處平行的繞射條紋較長邊處的繞射條紋分散，即亮區間の間隔較長，而這也可透過單狹縫繞射亮區的公式  $y = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda L}{b}$  解釋，因短邊的寬度較窄，故b值較小，而亮區の間距與b成反比，故平行短邊處的繞射條紋較寬。而對於倒三角形而言，繞射圖像呈現六芒星狀的圖像，其正是在三角形的邊與角處產生繞射，且可發現在邊處的繞射較在角處的繞射清晰。

ii. Fresnel 繞射

表六 不同孔洞形狀下的近場繞射圖形

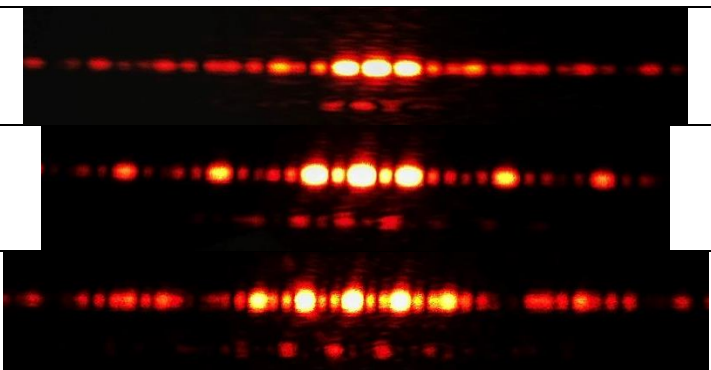
孔洞形狀	繞射圖形	
1 號圓孔		
2 號圓孔		
正方形孔洞		
長方形孔洞		
倒三角形孔洞		



觀察上表可發現，在近場繞射下，圓形孔洞的繞射圖形中心可能為亮區或暗區，而這取決於屏幕與孔洞間的距離，而這也代表繞射圖像會隨著距離而改變，這即是因為在近場繞射條件下波前並非為平面波。對於正方形、長方形與三角形孔洞而言，繞射圖像如同孔洞的形狀，且可發現繞射圖像的中間有許多的暗區，且暗區的形狀也與孔洞形狀相同。

### iii. 觀察多狹縫的繞射與干涉現象

表七 多狹縫的繞射與干涉現象

狹縫數量	干涉與繞射圖形
雙狹縫	
三狹縫	
四狹縫	

在雙狹縫的圖形中可發現，每段亮帶的寬度皆相同，而對於三狹縫的圖形而言，在每段較寬亮帶的中間還有一段較細的亮紋，而四狹縫則是在較寬亮帶中間有兩段較細的亮紋。因此可發現，對於多狹縫來說，若狹縫數為  $x$ ，則其圖形在每段較寬亮帶的中間將有  $x-2$  段較細的亮紋。

### iv. 利用雙狹縫干涉計算入射光波長

表八 以雙狹縫干涉計算入射光波長，雙狹縫間距  $d$  為  $0.2\text{mm}$

L(cm)	n 值	y(mm)			$\lambda(\text{nm})$
		左側亮紋	右側亮紋	平均	
70.0	1	2.2	2.2	2.2	628.6
	2	4.5	4.4	4.45	635.7
	3	6.6	6.5	6.55	623.8
100.0	1	5.4	3.5	3.45	627.3
	2	6.9	7.1	7.0	636.4
	3	10.3	10.5	10.4	630.3

平均波長  $\lambda$  為  $630.35\text{nm}$ ，理論值為  $632.8\text{nm}$

透過實驗原理中對雙狹縫干涉與繞射的討論，可知：

$$y = \frac{n\lambda L}{d}, n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第 } n \text{ 階亮紋}$$



透過移項整理則可得  $\lambda = \frac{yd}{nL}$ ，而將上表數據代入至此式中即可求得不同數據點下的推估入射光波長，其中 y 代入左側 y 值與右側 y 值的平均。

求得各數據點的推估光波長後，即可求出平均光波長為 630.35nm，而實際波長為 632.8nm，故可知誤差為 0.39%，實驗值與實際值相當接近。

在實驗中測量第 1、2 和 3 階亮紋時，須注意其應為雙狹縫干涉所形成的等寬亮紋，但當雙狹縫干涉亮紋與繞射暗區重疊時，該階干涉亮紋的光強度被繞射暗區限制，故干涉亮紋被分割而呈消失階(missing order)。

## v. 量測光柵週期

表九 1 號光柵的週期量測，入射光波長為 632.8nm

	旋轉台上的 角度(°)	$\theta_m(^{\circ})$		m	a(mm)
$\theta_0$	14	0		0	-
$\theta_1$	14.11	$\theta_1 - \theta_0$	0.11	1	0.165
$\theta_3$	14.33	$\theta_3 - \theta_0$	0.33	3	0.165
$\theta_5$	14.55	$\theta_5 - \theta_0$	0.55	5	0.165
$\theta_{-1}$	13.89	$\theta_{-1} - \theta_0$	0.11	1	0.165
$\theta_{-3}$	13.67	$\theta_{-3} - \theta_0$	0.33	3	0.165
$\theta_{-5}$	13.428	$\theta_{-5} - \theta_0$	0.572	5	0.158

a 的平均值為 0.164mm，理論值為 0.16mm

表十 2 號光柵的週期量測，入射光波長為 632.8nm

	旋轉台上的 角度(°)	$\theta_m(^{\circ})$		m	a(mm)
$\theta_0$	14	0		0	-
$\theta_1$	14.154	$\theta_1 - \theta_0$	0.154	1	0.118
$\theta_2$	14.308	$\theta_2 - \theta_0$	0.308	2	0.118
$\theta_4$	14.594	$\theta_4 - \theta_0$	0.594	4	0.122
$\theta_{-1}$	13.846	$\theta_{-1} - \theta_0$	0.154	1	0.118
$\theta_{-2}$	13.692	$\theta_{-2} - \theta_0$	0.308	2	0.118
$\theta_{-4}$	13.406	$\theta_{-4} - \theta_0$	0.594	4	0.122

a 的平均值為 0.119mm，理論值為 0.12mm

透過光柵的公式  $2a \sin \theta_m = m\lambda$  可知，只要將上表數據代入式中，即可求得光柵週期 a。故將上式移項得：

$$a = \frac{m\lambda}{2 \sin \theta_m}$$

將上表數據代入上式中，可對每個數據點推算光柵週期  $a$ ，並且求得平均光柵週期，並與實際值做比較。對 1 號光柵而言，實驗推算的平均光柵週期為 0.164mm，實際值為 0.16mm，誤差為 2.5%，而對 2 號光柵而言，實驗推算的平均光柵週期為 0.119mm，實際值為 0.12mm，誤差為 0.83%

可發現 1 號光柵的誤差較大，且整體數據有一致性的偏移，但考慮到在實驗中，在測量每一個數據點後實際上皆有重新定位 0 點歸零，因此誤差來源應不來自於一開始 0 點設置所造成的角度偏移，故誤差來源可能來自於光柵並未完全擺放於旋轉台主軸上，造成在旋轉時每次皆有微小的角度差異。

## (2) 預報題目作答

1. 一般而言，光束是沿著直線進行傳遞，而光束會偏轉不外乎是發生反射(reflection)、折射(refraction)或繞射(diffraction)。請訴說三者間之發生條件與差異性？

答：反射、折射與繞射皆是光作為波的體現，反射與折射發生在當光入射介質面時，且入射的尺度相對較大，一般討論於入射面遠大於波長時的情形。反射為當光入射介質面時，會在入射面上以反射光出射，且入射光與法線的夾角等同出射光與法線的夾角，即入射角等於反射角。

而折射則是光入射介質面時，透射進另一介質中，且透射光與入射光位於同一入射平面上，而折射角可透過斯乃爾定律找出，即  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。此外，折射與反射可同時發生。

而繞射則發生於光行進時遇到障礙物時，其障礙物可能是微小的孔洞、狹縫或折射率不均勻的介質，且入射的尺度相對較小，當障礙物越小，則繞射越為明顯。而繞射可利用惠更斯-菲涅爾原理解釋，當光前進時，波前可視為無數個子波波源，而過了一短暫時間後，將子波波源所發射的子波波前連線，即為光在經過短暫時間後的波前。因此當光入射障礙物時，子波波源在障礙物處發射子波，而子波的波前繞過障礙物，或是在障礙物後進行干涉，最後以繞射的方式改變光行經的方向，並且由於發生建設性與破壞性干涉，故可發現明暗相間的繞射條紋。

2. 假設一開口最大直徑為 2.5cm 的圓孔，在波長為 600nm 的紅光照射下，觀察者的距離需多遠才能使 Fraunhofer 繞射條件成立？

答：當光路的光路的菲涅爾數  $F = \frac{a^2}{L\lambda} \ll 1$  時，Fraunhofer 繞射條件成立，此時  $a$  為圓孔直徑， $\lambda$  為入射光波長， $L$  為觀察者與圓孔間的距離。

因此可知，當  $L \gg \frac{a^2}{\lambda} = 1041.67m$  時，發生遠場繞射。故觀察者距離需大於 1041.67m，才能使 Fraunhofer 繞射條件成立，且在  $L = 1041.67m$  處仍為近場繞射。

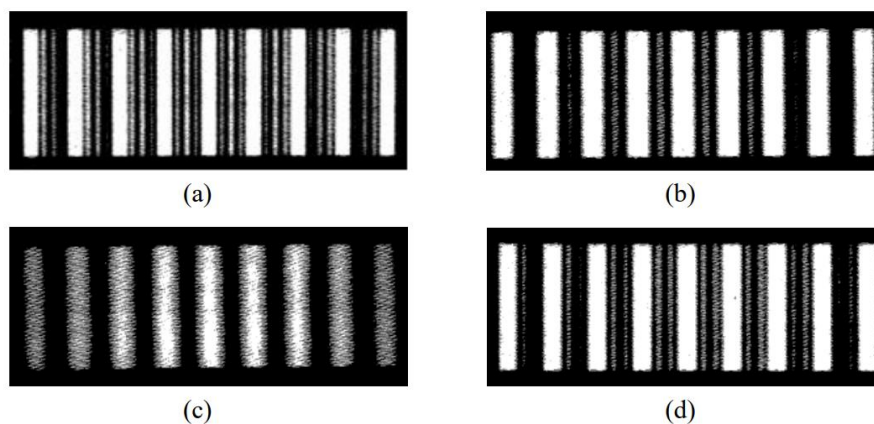
3. 一個雙狹縫干涉實驗中，若光波波長為  $550\text{nm}$ ，兩狹縫的間距為  $2.2\mu\text{m}$  以及兩狹縫至屏幕的距離為  $50\text{cm}$ ，則在屏幕上中央干涉亮紋與第一干涉亮紋中心，其間隔為何？

答：透過在實驗原理對雙狹縫的討論可得下式：

$$y = \frac{n\lambda L}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第 } n \text{ 階亮紋}$$

因此代入題目條件至上式中， $n = 1$ ， $\lambda = 550\text{nm}$ ， $a = 2.2\mu\text{m}$ ， $L = 50\text{cm}$ ，即可得間隔  $y = 0.125\text{m}$ 。

4. 下圖為多狹縫的繞射、干涉圖形，請問三狹縫及四狹縫的繞射、干涉圖形分別為何者？



圖十六 多狹縫繞射圖

答：觀察上圖可發現，(c)圖中各個亮帶的寬度相同，故為雙狹縫干涉，而(b)圖中在亮帶間有 1 條較細且較暗的亮紋，故為三狹縫干涉，而(d)圖中在亮帶間有 2 條較細且較暗的亮紋，故為四狹縫干涉。

5. 假設一道波長為  $532\text{nm}$  的綠光雷射入射一片  $1000$  條/ $\text{mm}$  的反射式光柵，算出各階繞射光的 Littrow 繞射角度。

答：已知光柵公式  $2a \sin \theta_m = m\lambda$ ，移項後可得下式：

$$\theta_m = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{2a}$$

因此帶入題目條件  $\lambda = 532\text{nm}$ ， $a = \frac{1}{1000}\text{mm} = 0.001\text{mm}$ ，可得：

$$\text{第一階時有 } \theta_1 = \sin^{-1} \frac{532\text{nm}}{2 \times 0.001\text{mm}} = 15.426^\circ$$

$$\text{第二階時有 } \theta_2 = \sin^{-1} \frac{2 \times 532\text{nm}}{2 \times 0.001\text{mm}} = 32.141^\circ$$

$$\text{第三階時有 } \theta_3 = \sin^{-1} \frac{3 \times 532 \text{ nm}}{2 \times 0.001 \text{ mm}} = 52.940^\circ$$

而第四階時由於  $\frac{m\lambda}{2a} = \frac{4 \times 532 \text{ nm}}{2 \times 0.001 \text{ mm}} = 1.064 > 1$ ，所以不存在第四階之後的 Littrow 繞射角。

### (3) Q&A 題目作答

1. 根據單狹縫繞射之實驗結果，想想當單狹縫結構之長度與寬度比例越接近 1 且仍處於可產生繞射之條件，則繞射圖樣將如何定性上的變化？請說明原因。

答：對於原先的單狹縫孔洞，可視為一短邊極窄，而長邊極長的長方形孔洞，此時僅有平行短邊的方向可產生繞射，形成丹霞繞射圖形。

而在短邊逐漸變寬，而長邊逐漸變窄的情況下，假設 2 個方向皆可產生繞射，則此時狹縫逐漸變為正方形孔洞，且從原先的僅有一方向的繞射變為 2 個方向皆可產生繞射條紋。

在短邊變寬的過程中，由於原先單狹縫繞射條紋的亮紋間距與狹縫寬度成反比，故此時平行短邊處的繞射條紋將逐漸變窄。

而在長邊變窄的過程中，由於原先菲涅爾數  $F \gg 1$  而無法產生繞射，適用幾何光學解析，但隨著長邊變窄，將逐漸產生平行長邊方向的單狹縫繞射條紋，且條紋間距逐漸變寬。

隨著長寬比例越接近 1，兩個相互垂直的單狹縫繞射條紋的亮暗紋寬度將漸趨相同。

2. 若雷射光的波長改變，則雙狹縫繞射及干涉條紋有何變化？(請附圖說明)

答：因雙狹縫干涉與繞射條紋各處的幅照度可透過下式表示：

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$$

而其中  $\beta \equiv (kb/2) \sin \theta$ ， $\alpha \equiv (ka/2) \sin \theta$ ，b 為狹縫寬度，a 為雙狹

縫的間距，而 k 為波數， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。

透過在實驗原理對雙狹縫干涉與繞射的討論可知，當討論干涉所造成的等寬亮紋時，應考慮上式中的  $\cos^2 \alpha$  項，而透過近一步的討論與近似，可得下二式：

$$y = \frac{n\lambda L}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第 } n \text{ 階亮紋}$$

$$y = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda L}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \text{為第 } n \text{ 階暗紋}$$

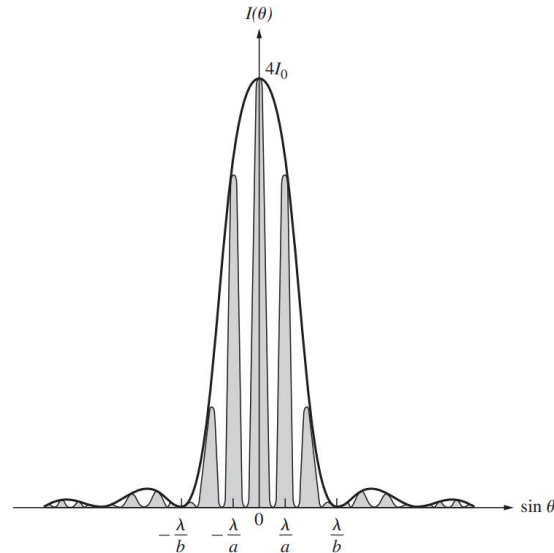
其中  $L$  為雙狹縫至屏幕的垂直距離， $y$  為亮紋至圖形中心的距離，而由此可知  $y$  與  $\lambda$  呈正比，當  $\lambda$  改變時，干涉所形成的等寬亮紋的間距也將隨之改變。

而討論雙狹縫的繞射時，應考慮  $\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$  項，由先前討論可知，雙狹縫干涉與繞射圖形主要呈現等寬的干涉亮紋，而亮紋的亮暗則隨著單狹縫繞射所限制，而透過對  $\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$  項的討論可整理出下二式：

$$y = \frac{m\lambda L}{b} \text{ 時, } m = 1, 2, 3 \dots, \text{ 為繞射圖形暗區中心點}$$

$$y = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{b} \text{ 時, } m = 1, 2, 3 \dots, \text{ 為繞射圖形亮區中心點}$$

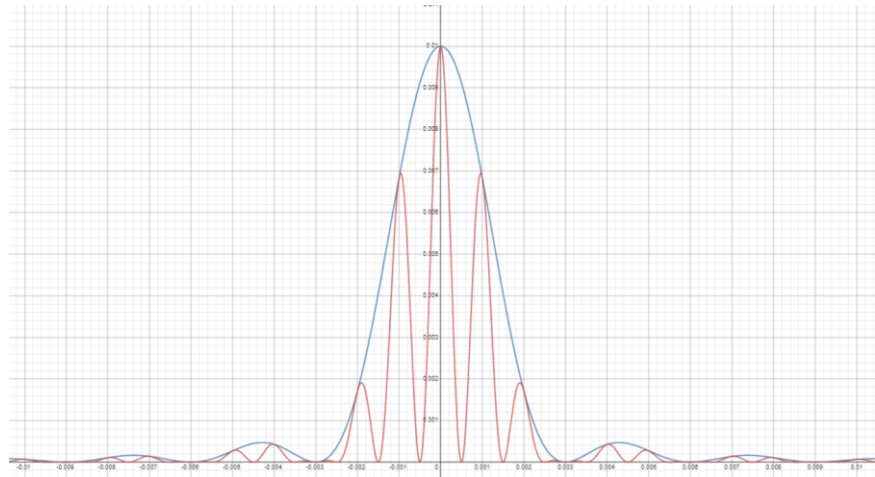
由此可知， $y$  與  $\lambda$  呈正比，當  $\lambda$  改變時，繞射所形成的亮帶與暗帶的間距也將隨之改變。就以上干涉與繞射的關係也可繪出下圖十七：



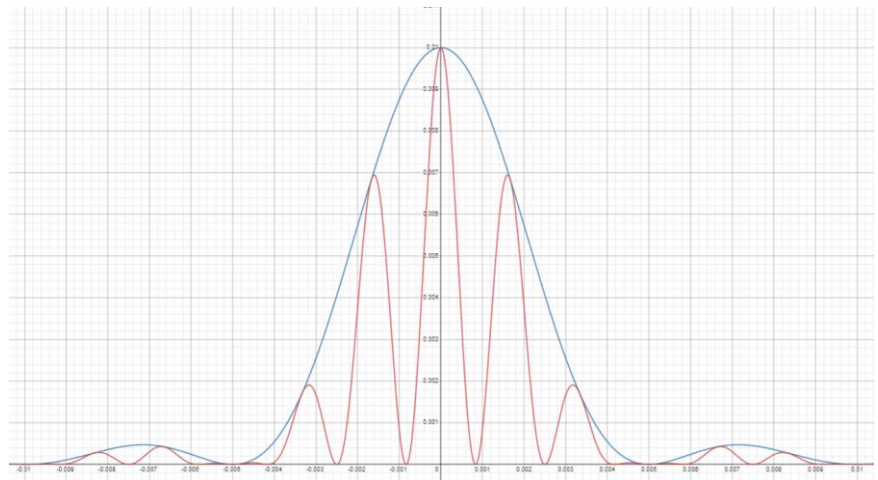
圖十七 雙狹縫干涉與繞射圖像

從圖中可發現，干涉所形成的等寬亮紋平均散佈在屏幕上，但其幅照度受繞射的亮暗區所限制，也因此，在繞射的亮區中可觀察到許多的干涉條紋，而亮區中的條紋數量則由  $a$  跟  $b$  的比例所決定，而當  $na = mb$  時，圖像將產生干涉條紋，但此處恰為繞射的暗區中心，故干涉條紋將被分割成消失階。

最後，當波長改變，而狹縫的間距與寬度不變時，干涉條紋的寬度將會隨之改變，而繞射亮區也將跟著等比例縮放，因此屏幕上的圖形形狀與亮暗將不會改變，改變的為干涉條紋寬度，且使圖像看起來像是拓寬或壓縮，如下二圖的比較。



圖十八 雙狹縫干涉與繞射圖形的幅照度與橫向位移關係圖



圖十九 改變波長後的雙狹縫干涉與繞射圖形的幅照度與橫向位移關係圖

上二圖是將透過  $I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$  所繪製的關係圖，x 軸為  $\sin \theta$ ，y 軸為幅照度，並假設雙狹縫間距  $a$  為  $0.3\text{mm}$ ，狹縫寬度  $b$  為  $0.1\text{mm}$ ，而圖十八的波長為  $300\text{nm}$ ，圖十九的波長則為  $500\text{nm}$ 。

觀察可發現，在改變波長後，2 圖的幅照度相同，條紋分布圖形與相對關係也相同，僅有條紋寬度與繞射暗區被拓寬，因此在屏幕上將會看到被拓寬的亮紋。

#### (4) 實驗結果討論

在本次實驗中首先透過單狹縫遠場繞射條紋找出狹縫寬度，而在實驗數據中，可發現各個數據點所推算出的狹縫皆較實際值小，且最後平均值與實際值比較，誤差約在 3% 至 4%，推測誤差可能來自於雷射並未完全垂直入射繞射片，因此導致推算出的狹縫較小，且左右兩側的數據並不完全相同，此外，在繞射片至屏幕距離  $L$  的量測上可能也有誤差存在，透過計算，推得假若誤差皆源於距離  $L$  的量測，則誤差約在 2.9 公分。

接著以圓孔遠場繞射的第一階暗紋找出圓孔的直徑，在實驗數據中，可發現 1 號圓孔的 3 個數據點推算出的圓孔直徑未有一定趨勢，在  $L = 60\text{cm}$  與  $L = 110\text{cm}$  時，推算值較實際值大，而當  $L = 80\text{cm}$  時，推算值較實驗值小，故推測誤差來自每次調整距離  $L$  時，距離不精確的誤差，故導致約 2.8% 的誤差。而對於 2 號圓孔，誤差約在 4.5%，觀察實驗數據發現各個數據皆較實際值小，故推測誤差來自繞射片的擺放不正，導致繞射圖像不為正圓，而又由於在量測時皆量測同一方向的暗紋直徑，故導致數據皆偏小。

而後將圓孔替換為不同形狀的孔洞，觀察不同孔洞在遠場繞射下的繞射圖形，觀察發現正方形與長方形皆有向外繞射的條紋，可視為兩個垂直的單狹縫遠場繞射，且發現若邊越窄，則平行方向的繞射條紋越清晰，亮紋間距越大。而對於倒三角形的遠場繞射，可發現有六個方向的繞射條紋，但可能是由於在正三角形中，孔洞的寬度比為  $\sqrt{3}:2$ ，故較難發現不同方向上亮紋的間距差異。且在移動屏幕與繞射孔洞間距離時可發現，繞射圖形在屏幕上並無形狀的差異，僅有圖像大小的差異，而這是因為遠場繞射下繞射光波前可視為平面波的緣故。

而對於圓孔的近場繞射下，可發現原先在遠場繞射下，繞射圖像中心必為亮區，但在近場繞射下則可能為暗區或亮區，而這即是因為在近場繞射下波前不可視為平面波。而對於正方形、長方形和三角形的近場繞射，可發現繞射圖形為孔洞形狀，而在繞射圖形中有許多的暗區排列，且暗區形狀也與孔洞相同。

觀察多狹縫的干涉與繞射可發現，其干涉圖形主要為等寬的亮紋，而其光強度則由繞射決定，此外在多狹縫的繞射中，若狹縫數為  $x$ ，則干涉亮紋間將會夾著  $x-2$  個較細且較暗的亮紋。

而在利用雙狹縫干涉推算入射光波長的部分，是透過量測干涉亮紋與中心的距離並套用公式以求得波長。在實驗數據中，推算出的入射光波長與實際值相符。而在量測亮紋距離時須注意，由於干涉條紋的光強度受狹縫的繞射所影響，所以當雙狹縫間距  $a$  與狹縫寬度  $b$  呈整數倍關係時，干涉亮紋與繞射暗區中心重疊，導致干涉亮紋被分割且難以觀測，形成消失階。

最後在量測光柵週期的部分，得 1 號光柵的光柵週期推算值與實際值的誤差為 2.5%，而 2 號光柵則為 0.83%。此處須注意由於在量測各個數據點時皆有重新歸 0，因此已降低了角度整體偏差的誤差，故誤差可能來自 1 號光柵並未擺放於旋轉台主軸上，導致在旋轉時皆有微小角度的偏移，而在擺放 2 號光柵時則較為精確的擺放於主軸，因此推算值與實際值相符。

## 五、參考資料及文獻：

- [1] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 10, pp.4570-492.
- [2] Frank L. Pedrotti , Leno S. Pedrotti , Leno M. Pedrott , *Introduction to Optics* , 3th ed. (Addison-Wesley , 2006) , Chapter 11.1, pp.268-278.
- [3] 徐國城，”多狹縫的干涉與繞射”，*科學教育月刊*，第 260 期，19 頁至 23 頁，2003 年 7 月。