

光電實驗(一)

實驗報告

姓	名：
學	號：
組	別：
教	授：
日	期：

一、實驗名稱：光的偏極化現象

二、實驗目的與原理：

(1) 實驗目的

透過兩個偏振片夾角的調整觀察雷射光強度的變化，藉此驗證 Malus's law，且在兩個偏振片中加入以不同夾角加入 1/4 波片與 1/2 波片，觀察相位延遲片對光強度與偏振態的影響。利用不同夾角的 1/2 波片與偏振片，得到兩種相互垂直偏振態(垂直入射面與平行入射面)的雷射光，並透過使雷射以不同角度入射塊材，驗證入射塊材角度對兩種偏振光之反射光的影響，且量測出塊材的布魯斯特角

(2) 實驗原理

1. 光的偏振態

觀察電場在光傳播時的不同震盪性質，可將光定義出不同的偏振態，一般而言，可將光分為完全偏振、非偏振以及部分偏振。完全偏振是指電場的行為完全符合該偏振態的數學描述，其中又可分為線偏振、圓偏振與橢圓偏振，分別對應著不同的振幅與相位條件。而非偏振即為電場的震盪方向會隨著光的行進而不規則的隨機變化，而自然光即為非偏振光。部分偏振則是完全偏振與非偏振的疊加，一般所見的光大多為部分偏振，其中差異為偏振的程度不同。

考慮一束光傳播於正 z 方向，則該電場可以以下方程式描述：

$$\vec{E} = \hat{e}E_0 \cos(kz - \omega t)$$

其中 \hat{e} 即表偏振方向。

而也可將電場分為兩個相互正交的分量，分別為 x 方向與 y 方向，若以方程式描述則如下：

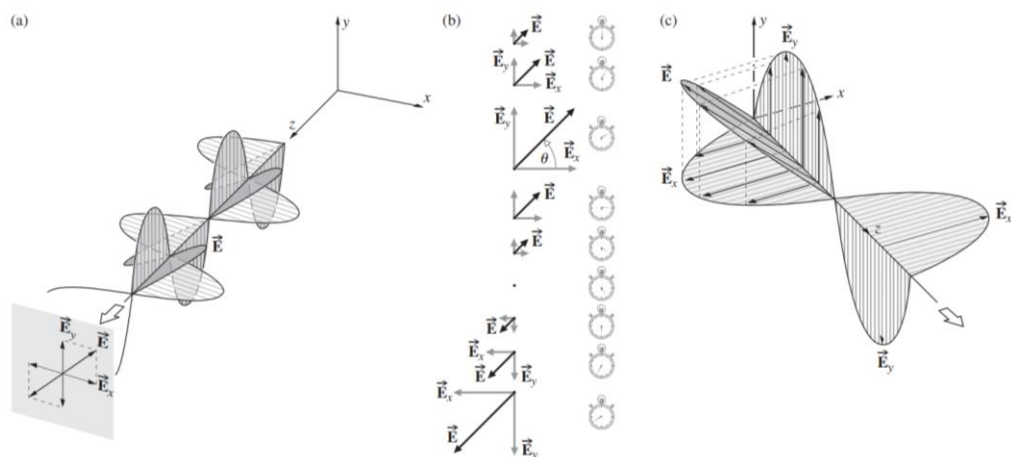
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_x + \vec{E}_y \\ \vec{E}_x &= \hat{x}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{y}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi)\end{aligned}$$

其中 ϕ 為 \vec{E}_x 與 \vec{E}_y 間的相位差。

首先考慮條件 $\phi = 0$ 時，此時 \vec{E}_x 與 \vec{E}_y 同相，透過向量運算可知 \vec{E} 呈線偏振，如下圖一，而此時電場 \vec{E} 與 x 軸夾 θ 角， $\theta = \tan^{-1} \frac{E_{0x}}{E_{0y}}$ ，振幅 $E_0 =$

$\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$ ，且電場 \vec{E} 僅在一、三象限振盪。

若 $\phi = \pi$ ，則 \vec{E}_x 與 \vec{E}_y 反相，同為線偏振，而電場 \vec{E} 則向 y 軸翻轉，故電場 \vec{E} 僅在二、四象限振盪。



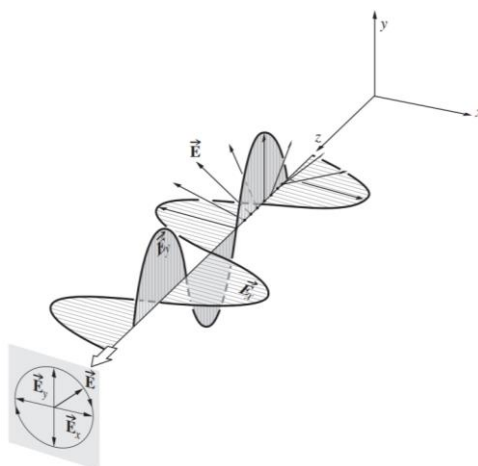
圖一 $\phi = 0$ 時，光的線偏振示意圖[1]

考慮條件 $\phi = -\pi/2$ ， $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ 時，則經過三角運算得下式：

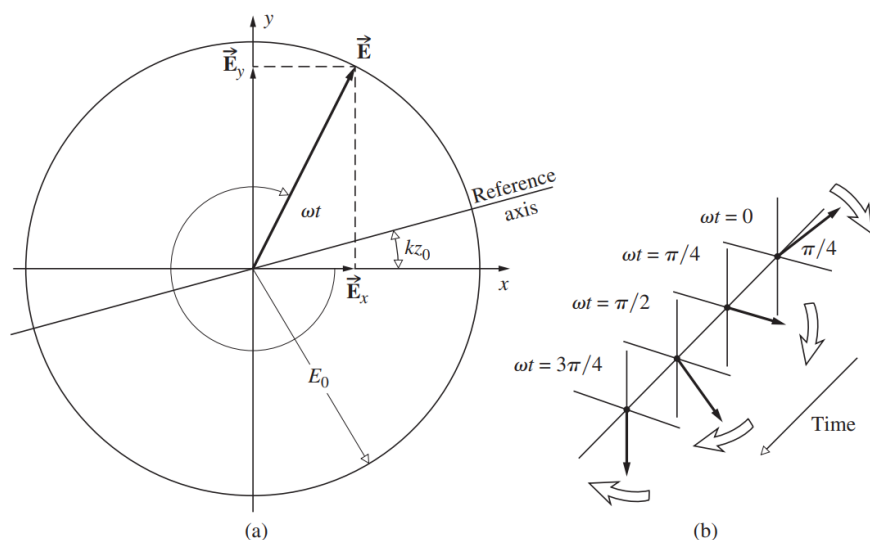
$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{x}E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{y}E_0 \sin(kz - \omega t)\end{aligned}$$

透過向量運算則可得知 \vec{E} 為圓偏振，而此時 \vec{E} 的振幅 $E_0 = E_{0x} = E_{0y}$ ，此時若在定點($z=0$)觀察波的行為，則可發現 \vec{E} 將以順時鐘方向旋轉，而將其稱為右手圓偏振，如下圖二、三。

若 $\phi = \pi/2$ ，且 $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ ，則 \vec{E} 同為圓偏振，但旋轉方向相反，以逆時鐘方向旋轉，此時稱為左手圓偏振。



圖二 右手圓偏振示意圖[1]



圖三 右手圓偏振示意圖[1]

若並未增加任何條件，僅考慮下三式：

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

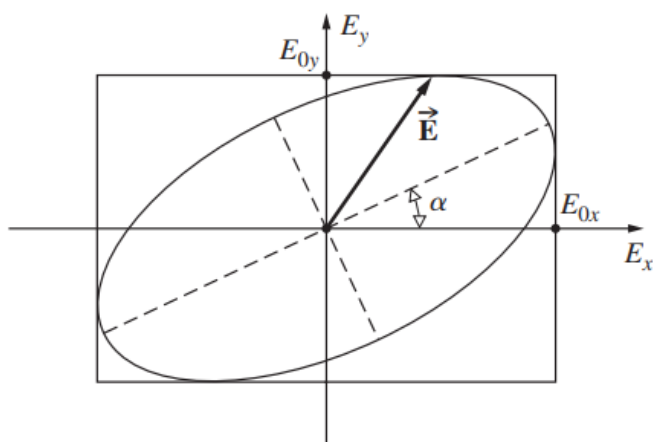
$$\vec{E}_x = \hat{x}E_x = \hat{x}E_{0x} \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_y = \hat{y}E_y = \hat{y}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi)$$

則經三角代換與向量運算可得下式：

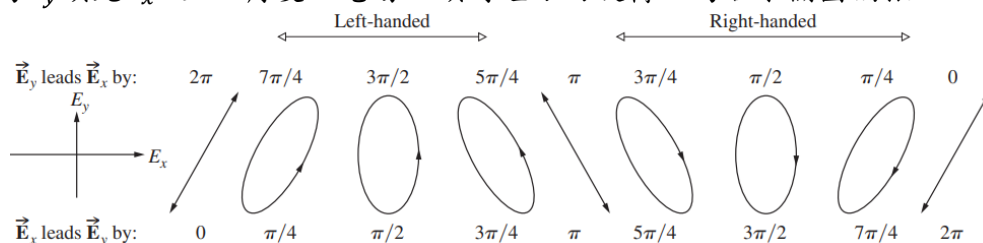
$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\phi = \sin^2\phi$$

而上式即為一橢圓方程，故可知當不給定振幅與相位差條件時，偏振態即為橢圓偏振，如下圖四，而線偏振與圓偏振則為橢圓偏振的特例。此外，就橢圓性質可得知，電場振幅 E_0 於 E_{0x} 與 E_{0y} 間變化，且橢圓橢圓長軸對 x 軸夾 θ 角， $\tan 2\theta = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\phi}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$ 。



圖四 橢圓偏振示意圖[1]

另外，當 ϕ 介於 0 至 π 之間時，可視為 \vec{E}_x 領先 \vec{E}_y 0 至 π 角度，電場以逆時鐘方向旋轉，故為左手橢圓偏振，而當 ϕ 介於 2π 至 π 之間時，可視為 \vec{E}_y 領先 \vec{E}_x 0 至 π 角度，電場以順時鐘方向旋轉，為右手橢圓偏振。



圖五 相位角 ϕ 與偏振旋性關係圖[1]

2. 自然光

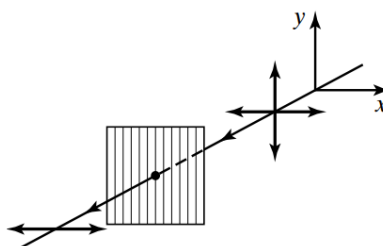
由於自然光所涵蓋的頻寬相當大，故同調長度極短，也因此當過了約 10^{-8} 秒後，波列的相位即會隨機變化，也因此偏振態將隨機變化，故自然光為非偏振光，而實際上為其偏振態隨著時間不斷隨機變化。

而對於非偏振光，我們可以透過疊加兩個任意的、非同調的且同振幅的線性偏振光以描述自然光，也因此，對於自然光而言，光強度也為兩個同振幅之線偏振光的疊加，故自然光的光強度可平分於兩個正交的方向上。

3. 二色相性與偏振

偏振的產生機制主要可分為以下四類，分別為二色相性、散射、反射與雙折射性。

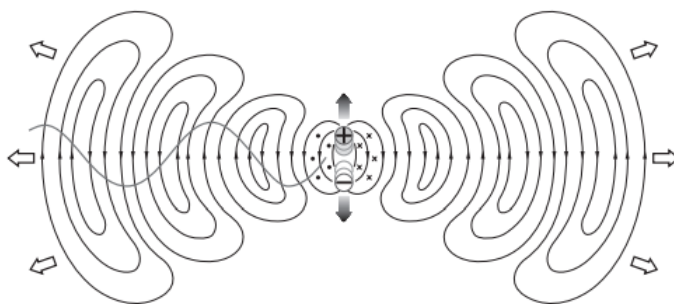
而二色相性即為選擇性吸收，代表著材質將會對兩個正交的線偏振光有著不同的吸收率，例如常見的偏光片，是透過 PVC 片拉伸，並浸入碘液中，使 PVC 片上佈有碘長鏈，而當自然光入射時，可將其視為平行碘長鏈與垂直碘長鏈的線偏振電場分量，此時平行碘長鏈的分量將激發碘長鏈上的電子，使其產生電流，而這將使平行長鏈的電場分量消耗能量，此外，碘長鏈上的電子在加速移動後也將產生電磁波，而此電磁波將與通過偏振片且平行長鏈的電場分量抵銷，故平行碘長鏈的電場分量將被偏振片吸收而無法通過偏振片，最後使透射光形成線偏振光，如下圖六。



圖六 偏光片對自然光的選擇性吸收[2]

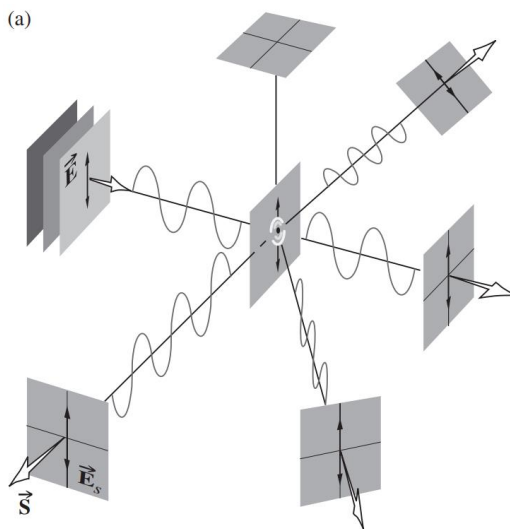
4. 散射與偏振

當討論散射時，需先考慮偶極子的行為，假設一線偏振光入射分子，該分子上的電子即會隨著電場的偏振而震盪，從而形成震盪的偶極子，並且藉此輻射出電磁波，而由此方式輻射出的電磁波將會隨著偶極子的震盪方向而有強度差異，如下圖七。



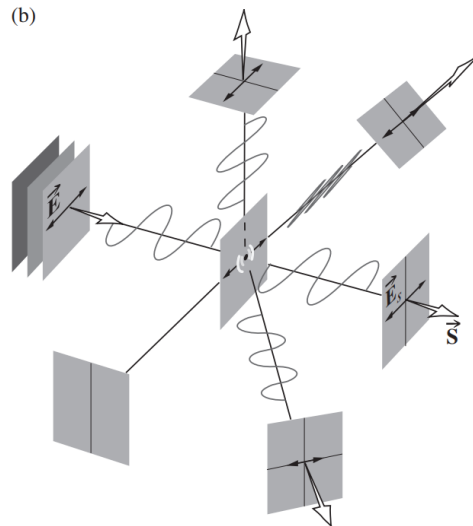
圖七 偶極子的震盪與輻射電磁波之示意圖[3]

自上圖七可明顯發現，在平行偶極子震盪的方向幾乎沒有輻射電磁波，而在垂直震盪方向則有最大值，也因此可得知，散射光除了與原入射光有著相同頻率之外，也將有著相關的偏振方向，故可假設當一線偏振光入射時，分子形成偶極子，並且向外各方向散射出散射光，可透過下圖八解釋其分布情形。



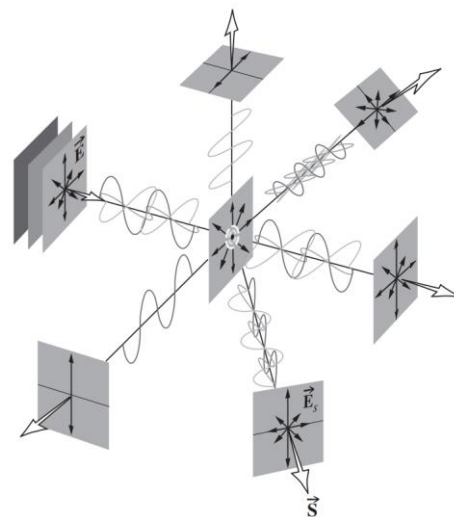
圖八 線偏振光入射分子時散射光於各方向的分布情形[1]

而當另一與上圖正交之線偏振光入射分子時，分子同樣形成偶極子，並以另一垂直方向震盪，以下圖九解釋其分布情形。



圖九 另一正交之線偏振光入射分子時散射光於各方向的分布情形[1]

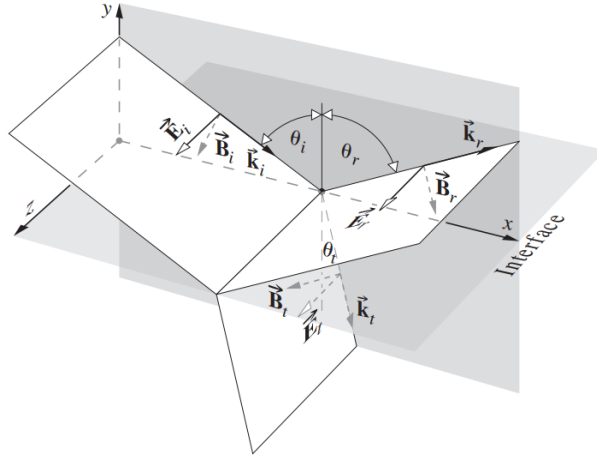
最後由於自然光即為兩正交之線偏振光的疊加，故同樣可將上二圖的散射光疊加，得自然光在入射後，散射光的偏振情形，如下圖十，故可知散射將可作為偏振產生的機制之一。



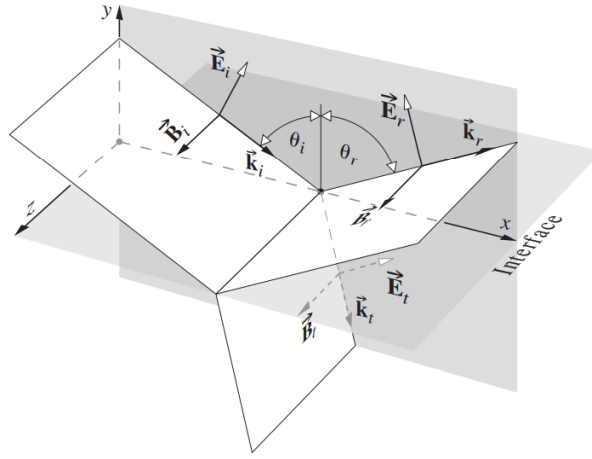
圖十 自然光入射分子時散射光於各方向的偏振情形[1]

5. 反射與布魯斯特角

當光入射介質時，可透過入射平面定義出 TE 光(Transverse Electric)與 TM 光(Transverse Magnetic)，而 TE 光即為電場垂直於入射面的偏振光，又可稱為 S 偏振態，而 TM 光則為磁場垂直於入射面，即電場平行於入射面的偏振光，又可稱為 P 偏振態，如下圖十一、十二。



圖十一 TE 偏振光與入射平面之示意圖[4]



圖十二 TM 偏振光與入射平面之示意圖[4]

根據菲涅爾方程式可知，當考慮 TE 偏振光入射介質表面時，反射光與入射光之間的光強度比率以下式表示：

$$R_s = \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$$

其中 n_1 、 n_2 表光入射前行進的介質折射率與光反射的介質表面之折射率，而 θ_i 與 θ_t 則分別代表入射角與折射角，而 θ_t 又可透過司乃爾定律 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ 決定。

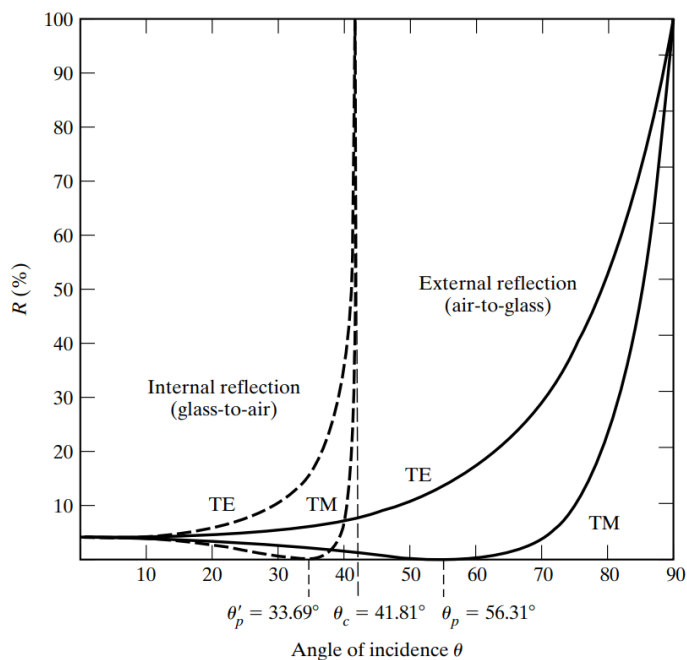
觀察上式可發現，當光線自光疏介質入射光密介質(外反射)時， θ_i 必大於 θ_t ，故 R_s 必為正值，也因此當 TE 偏振進行外反射時，隨著入射角的增大，反射率將逐漸上升。

而若考慮 TM 偏振光入射介質表面，則反射光與入射光之間的光強度比率以下式表示：

$$R_p = \left(\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right)^2$$

此時可發現，當同樣進行外反射時， R_p 中的 $\tan(\theta_t + \theta_i)$ 項在 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 時將趨近於無窮大，故當 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 時， R_p 為 0，故當 TM 偏振光進行外反射時，若入射角度逐漸增大，則在 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 處將不會有任何反射光。

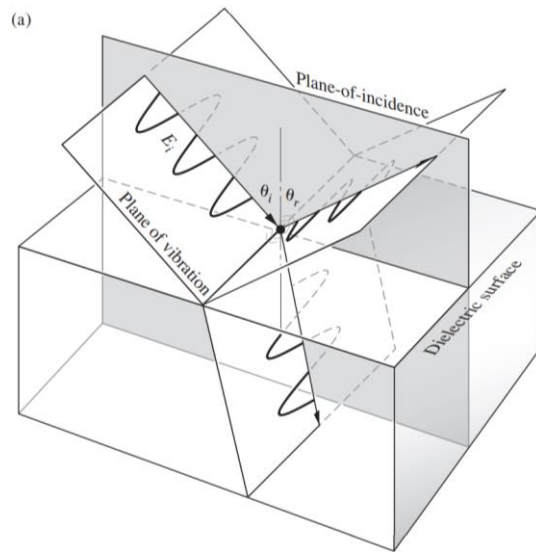
而若將上述 R_s 與 R_p 對入射角度做圖，並假設介質分別為空氣與玻璃， n_1 為 1， n_2 為 1.5，則可得下圖十三，可發現 TE 偏振在外反射情形下反射率逐漸增大，而 TM 偏振的反射率則逐漸變小，於 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 處反射率為 0，而後反射率逐漸增大。



圖十三 TE 與 TM 偏振光在內外反射下的反射率與入射角關係圖[5]

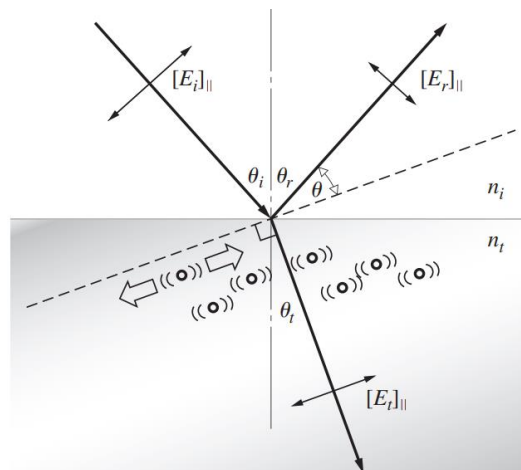
一般將 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 時的入射角稱為布魯斯特角，此時 θ_i 寫作 θ_p ，透過司乃爾定律可知 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ ，代入上述條件後即可得 $n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin(90^\circ - \theta_p)$ ，而經過三角代換得 $n_1 \sin \theta_p = n_2 \cos \theta_p$ ，最後得 $\theta_p = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1}$ ，透過此式即可得不同介質面的布魯斯特角。

而布魯斯特角實際的形成原因則可透過偶極子的運動討論，當偏振光入射介質表面時，介質表面的分子將會受到偏振光的運動而振盪，考慮 TE 偏振光入射，則偶極子將會沿著垂直入射平面的方向振盪，而此時輻射出的電磁波在垂直振盪方向上將有最大值，即在入射平面上有最大值，且不論入射角度皆是如此，如下圖十四，故 TE 偏振光入射時不存在布魯斯特角。



圖十四 TE 偏振光在介質表面處的偶極子振盪情形[1]

若考慮 TM 偏振光入射，則介質表面處的偶極子將在入射表面處振盪，故在特定角度入射時，偶極子的震盪方向同反射光方向，而此時偶極子在反射方向即不存在輻射電磁波，故不存在反射光。

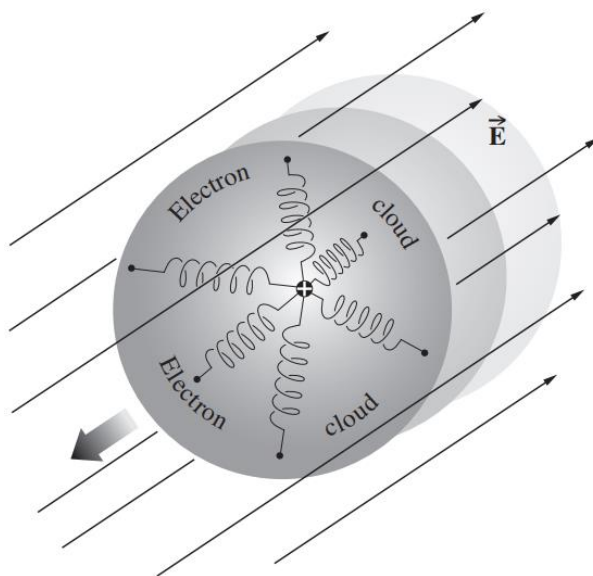


圖十五 TM 偏振光在介質表面處的偶極子振盪情形[1]

觀察上圖十五，即可發現上述之特定入射角度即為 $\theta_r + \theta_t = 90^\circ$ ，透過反射定律知 $\theta_r = \theta_i$ ，故當 $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$ 時，TM 偏振光不存在反射光，同上述以菲涅爾方程式的討論。

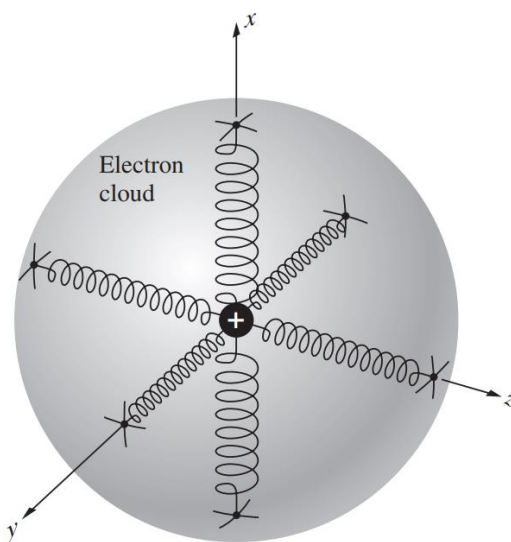
6. 雙折射性與偏振

雙折射性通常出現在晶體上，因晶格構造不對稱所導致不同方向的偏振光會有不同的折射率。當考慮各向同性材料時，若光照射至晶體中的原子，則電子可視為被晶體中的原子所束縛，同彈簧一般，而由於晶體內部結構對稱，因此各向同性，電子在各方向所受之束縛力相同，也因此共振頻率相同，最後計算所得的折射率在各方向故相同。



圖十六 各向同性材料在光場照射下的機械模型[6]

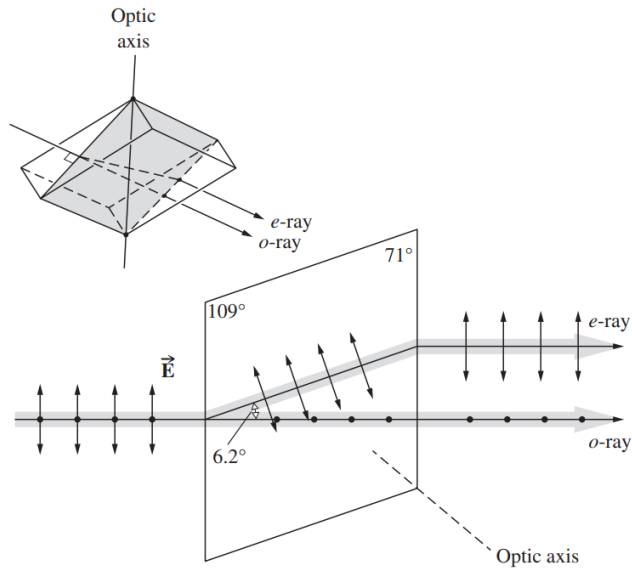
然而，若考慮各向異性材料，由於晶格內部構造不對稱，將使電子在各方向的束縛力不同，將可比擬成各個不同彈力係數的彈簧，也因此使得共振頻率不同，最後使得光在各個方向有著不同的折射率。



圖十七 各向異性材料在光場照射下的機械模型[1]

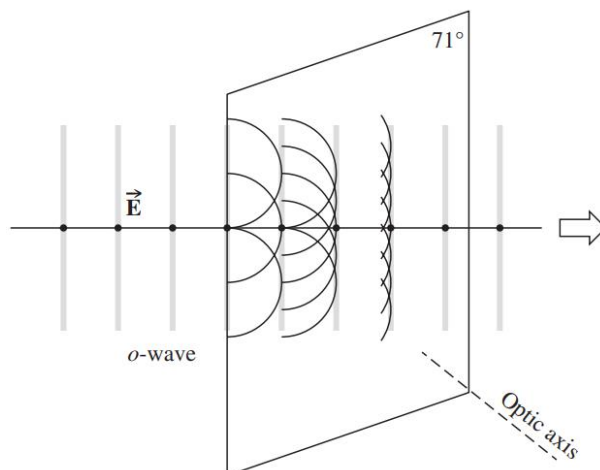
對雙折射晶體而言，可以找到一光軸，而晶格在垂直光軸方向皆對稱，意即若沿著光軸方向向晶體看去，晶格在各方向將對稱，因此可知雙折射晶體對於平行光軸方向與非平行光軸方向的電場具不同折射率。

而我們也可將入射晶體的光分為 o 光(ordinary ray)與 e 光(extraordinary ray)，分別代表著偏振方向垂直光軸的分量與偏振方向不垂直光軸的分量，如下圖十八。



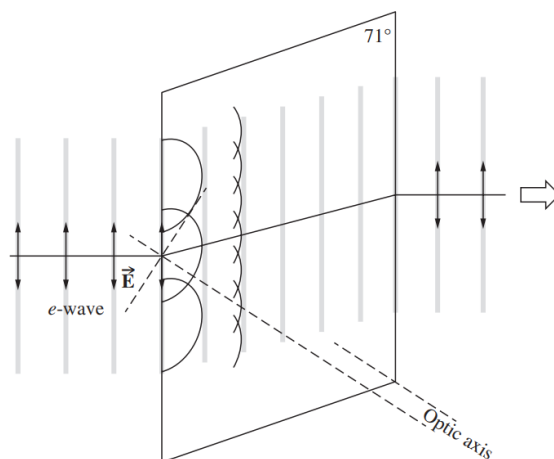
圖十八 光軸與 o 光和 e 光之關係示意圖[1]

對於 o 光而言，由於垂直光軸，故以尋常折射率在晶體內傳播，若以惠更斯原理解釋，則可理解為下圖十九，散射子波上的偏振方向與原入射方向相同而與光軸垂直，故散射子波以尋常折射率傳播，且各子波的波前合成為向前傳遞的波，最後出射形成 o 光。



圖十九 o 光在雙折射晶體內的傳播[1]

而對於 e 光而言，由於 e 光不垂直光軸，故可再分為平行光軸與垂直光軸的分量，因此 e 光將以尋常折射率與非尋常折射率傳播，因而使 e 光的子波變形，若以惠更斯原理解釋，則如下圖二十，當 e 光入射時，子波上的偏振方向有部分平行光軸與部分垂直光軸，進而造成子波上感受到不同的折射率，故造成不同的傳播速度，因此使得原先的圓形子波拉伸為橢圓子波，並使得 e 光在晶體中水平位移，最後與 o 光分離並出射。



圖二十 e 光在雙折射晶體內的傳播[1]

經過上述討論可知，由於雙折射晶體在不同方向的折射率，使得原先入射的自然光在入射晶體後被分為 o 光與 e 光，而以不同的速度傳播，最後分離成兩個偏振方向相互垂直的線偏振光。

7. 快軸與慢軸

對雙折射晶體而言，不同方向的偏振光將有著不同的折射率，分為 n_o 與 n_e ，而 n_o 即為偏振方向與光軸垂直的光所感受到的尋常折射率，而 n_e 則為偏振方向與光軸平行的光所感受到的非尋常折射率，故可定義：

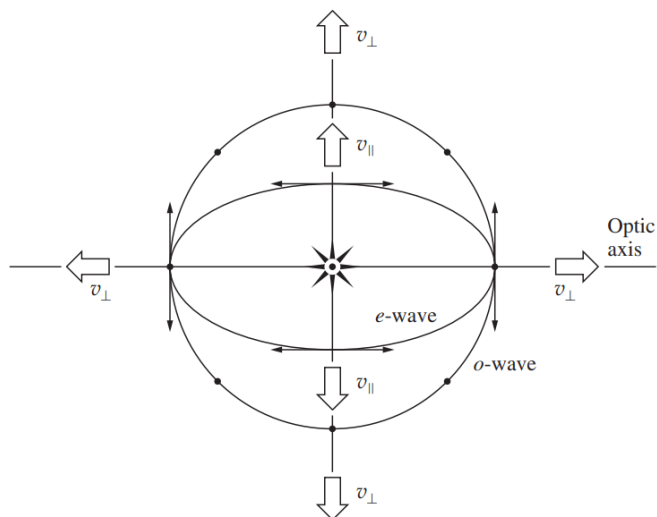
$$n_o := \frac{c}{v_{\perp}}$$

$$n_e := \frac{c}{v_{\parallel}}$$

其中 v_{\perp} 與 v_{\parallel} 即為光在垂直或平行光軸方向的傳播速度。

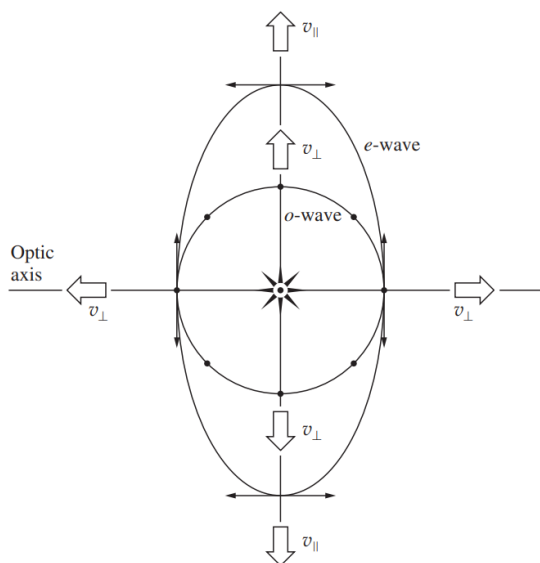
透過此即可加以定義關係 $\Delta n = n_e - n_o$ ，若 $\Delta n > 0$ ，則稱為正單光軸晶體，若 $\Delta n < 0$ ，則稱為負單光軸晶體。也因此可發現，對於正單光軸晶體而言， $n_e > n_o$ ，故 $v_{\parallel} < v_{\perp}$ ，故偏振方向沿光軸的光傳播速度較慢，此時稱光軸方向為慢軸方向。而對於負單光軸晶體而言， $n_e < n_o$ ， $v_{\parallel} > v_{\perp}$ ，故偏振方向沿光軸的光傳播速度較快，故稱光軸方向為快軸方向。

如同下圖二十一，假設在正單光軸晶體中置入一球光源，則偏振方向平行光軸方向的光將以 v_{\parallel} 傳播，垂直光軸方向的光則以 v_{\perp} 傳播，由於 o 光各處偏振皆垂直光軸，故其呈現一圓形(球狀)子波，並以 v_{\perp} 速度向外傳播，而 e 光之偏振則部分平行、部分垂直光軸，故在垂直光軸的部分同 o 光以 v_{\perp} 傳播，而平行光軸的部分則以 v_{\parallel} 傳播，而其餘部分則介於 v_{\perp} 與 v_{\parallel} 間，故形成一橢圓(橢球)子波，最後觀察下圖可發現，由於此晶體為正單光軸晶體，故 $v_{\parallel} < v_{\perp}$ ，光軸方向為慢軸方向，因此 e 光的波前將落後 o 光波前。



圖二十一 正單光軸晶體的 o 光與 e 光傳播情形[1]

反之，參考下圖二十二，若在負單光軸晶體內部置入一球光源，則 o 光同樣形成圓形(球狀)子波，並以 v_{\perp} 速度傳播，而 e 光則形成橢圓(橢球)子波，並以 v_{\perp} 至 v_{\parallel} 的速度傳播，且由於晶體為負單光軸晶體，故 $n_e < n_o$ ， $v_{\parallel} > v_{\perp}$ ，光軸方向為快軸方向，因此 e 光波前將超前 o 光。



圖二十二 負單光軸晶體的 o 光與 e 光傳播情形[1]

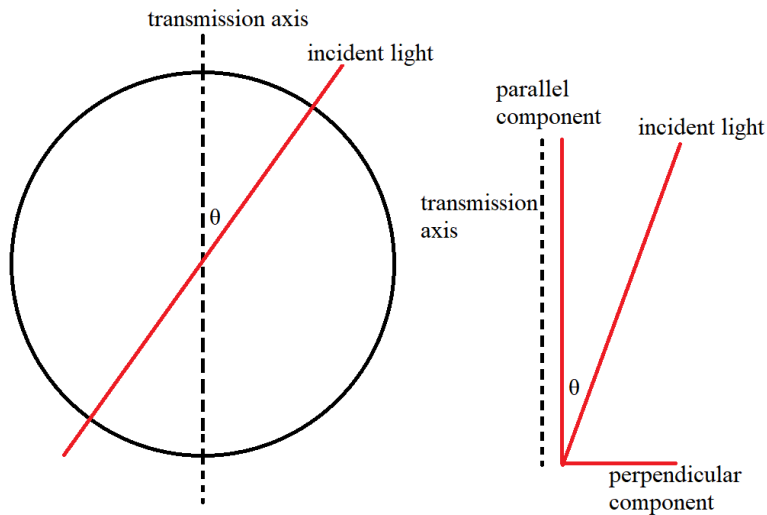
8. 理想偏振片與 Malus's law

當考慮理想偏振片時，即指當入射自然光時，將自然光分為兩個正交的線偏振分量，即分為與偏振片傳輸軸垂直(不可通過)或平行(可通過)的分量，而理想偏振片將吸收全部的垂直分量，並通過全部的平行分量，因此在透射光中，僅存在一方向的線偏振光且並未損耗，而另一方向的線偏振光被偏振片完全吸收，也因此對於自然光入射理想偏振片時，光強度的變化可透過 $I_t = I_0/2$ 表示，其中 I_t 表透射光的光強度， I_0 表入射自然光的光強度。

當一線偏振光入射偏振片時，且偏振方向與傳輸軸夾 θ 角時，首先考慮光強度與電場的關係式：

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$$

而此時入射線偏振光又可視為兩個正交線偏振光的疊加，取與傳輸軸垂直以及與傳輸軸平行的電場向量，如下圖二十三。



圖二十三 線偏振光入射偏振片的電場分量

觀察上圖可發現，若入射線偏振光振幅為 E_0 ，則垂直傳輸軸的電場分量即為 $E_0 \sin \theta$ ，而平行傳輸軸的電場分量為 $E_0 \cos \theta$ 。由於偏振片為理想偏振片，故垂直分量將被全部吸收，透射光僅剩平行的電場分量

$E_0 \cos \theta$ ，故假設原先入射光的光強度為 $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$ ，則出射的光強度應

為 $I_t = \frac{c\epsilon_0}{2} (E_0 \cos \theta)^2 = I_0 \cos^2 \theta$ ，而此即為 Malus's law。

9. 實際偏振片

討論實際偏振片時，則無法像理想偏振片一般假設完全吸收垂直分量並完全通過平行分量，事實上，當一垂直偏振片傳輸軸的線偏振光入射時，仍會有部分線偏振光透射，而當一平行傳輸軸的線偏振光入射時，也將有部分線偏振光損耗。

因此定義主透射率 $T_0 = \frac{I_{t0}}{I_{i0}}$ ，此式代表入射光為與傳輸軸平行的線偏振光，且光強度為 I_{i0} ，而透射光同為與傳輸軸平行的線偏振光，其光強度為 I_{t0} ，而兩值的比率即代表平行線偏振光對偏振片的透射率。並且定義次透射率 $T_{90} = \frac{I_{t90}}{I_{i90}}$ ，同理代表入射光為與傳輸軸垂直的線偏振光， T_{90} 即為垂直線偏振光對偏振片的透射率。對理想偏振片而言， T_0 應等於 1、 T_{90} 應為 0，但對實際偏振片而言，則會有相對應的損耗與洩漏光。

考慮自然光以光強度 I_0 入射實際偏振片時，同理將自然光分為垂直與平行傳輸軸的分量，且光強度個別為 $I_0/2$ ，但此時平行傳輸軸的分量將以 T_0 的比率透射，垂直分量則以 T_{90} 比率透射，故透射光的光強度如下：

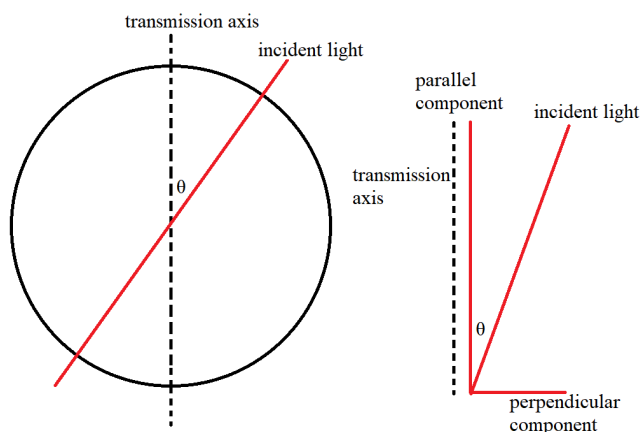
$$I_t = \frac{I_0}{2} T_0 + \frac{I_0}{2} T_{90}$$

並可定義自然光的透射率為 $T_n = \frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{2} (T_0 + T_{90})$ 。

而若考慮線偏振光以夾角 θ 入射實際偏振片時，同樣分為垂直傳輸軸與平行傳輸軸的分量，如下圖二十四，而此時平行傳輸軸分量的光強度應為 $I_0 \cos^2 \theta$ ，且垂直傳輸軸分量的光強度為 $I_0 \sin^2 \theta$ ，故在經過實際偏振片而透射後，透射光強度以下式表示：

$$I_t = I_0 \cos^2 \theta T_0 + I_0 \sin^2 \theta T_{90}$$

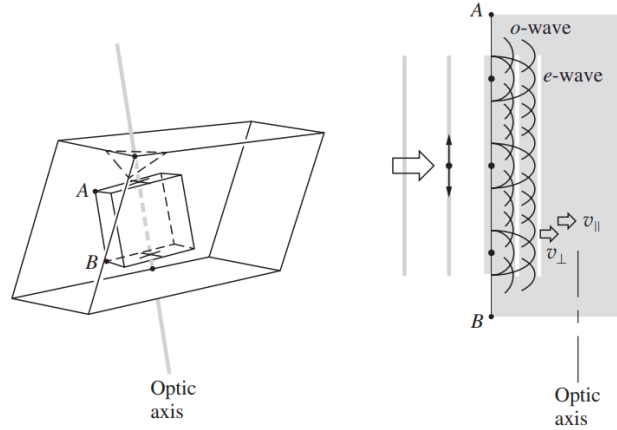
同時也可定義偏振光的透射率為 $T_l = \frac{I_t}{I_0} = T_0 \cos^2 \theta + T_{90} \sin^2 \theta$



圖二十四 線偏振光入射偏振片的電場分量

10. 相位延遲片

相位延遲片，又稱波片，即是透過雙折射效應所製成，由於雙折射晶體對於不同偏振方向的光具有不同折射率，也因此具有不同的傳播速度，故假若將雙折射晶體製成薄板，且使其光軸與入射面平行，則 o 光與 e 光將因不同的折射率而分離，但不改變行進方向，最後只改變 o 光與 e 光間的相位差，如下圖二十五。



圖二十五 以雙折射晶體改變 o 光與 e 光間相位差[1]

而 o 光與 e 光間的相位差則可透過下式計算：

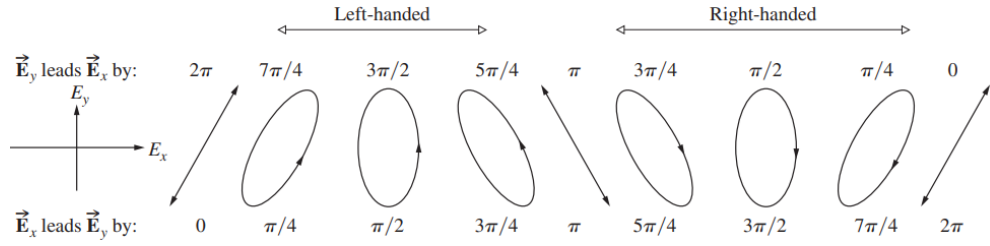
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_e - n_o)$$

其中 λ_0 為入射光在真空中的波長， d 為波片厚度，即光在晶體中所行經的距離，透過此式可找出通過波片後因折射率差異所得之相位差，但若想知 o 光與 e 光的領先關係則需由正負單光軸晶體的快慢軸推得。

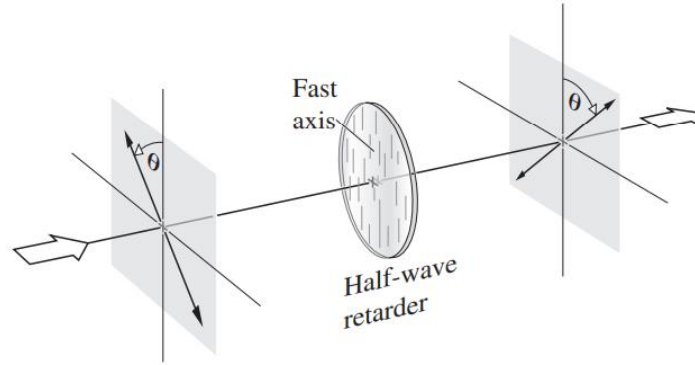
而波片可分為全波片、1/2 波片與 1/4 波片。對於全波片，當光入射後，o 光與 e 光將加上相位差 $\Delta\phi = 2\pi + 2m\pi$ ， $m = 0, 1, 2$ ，但僅符合特定波長的光被加上此相位差，而其他波長的 o 光與 e 光將帶有不等於 2π 的相位差，因此全波片可被用來檢測相位的微小變化或是波長的差異。

而對於 1/2 波片，o 光與 e 光將被加上相位差 $\Delta\phi = \pi + 2m\pi$ ， $m = 0, 1, 2$ ，因此，透過下圖二十六可知，若原先兩正交線偏振光的相位差 ϕ 上再加上相位差 $\Delta\phi = \pi$ ，將使其原入射光之橢圓偏振與圓偏振的旋性和角度改變，或是使其原入射光之線偏振的方向改變，例如，原先當 $\phi = \pi/2$ 時，所呈現的應為左手橢圓偏振，但在經過 1/2 波片的影響下，相位

差變為 $\phi = 3\pi/2$ ，故變為右手橢圓偏振，而圓偏振同理，故 1/2 波片將改變其旋性與角度。而對於線偏振而言，假設原先相位差 $\phi = 0$ ，則原入射光呈現在第一、三象限振盪的線偏振光，而在經過 1/2 波片的影響下，相位差變為 $\phi = \pi$ ，故變為在第二、四象限振盪的線偏振光，而出射光相對於入射光等同於對快軸旋轉 2θ 角，如下圖二十七。



圖二十六 相位角 ϕ 與偏振旋性關係圖[1]



圖二十七 線偏振光在穿過 1/2 波片後的角度變化[1]

對於 1/4 波片，o 光與 e 光則被加上相位差 $\Delta\phi = \pi/2 + 2m\pi$ ， $m = 0, 1, 2$ ，同樣參考上圖二十六，可發現 1/4 波片將轉換入射光的偏振型態，如從線偏振轉為橢圓偏振(圓偏振)，或是改變橢圓偏振的角度。

11. Jones vector 與 Jones matrix

Jones vector 與 Jones matrix 為表達與計算偏振態的數學工具，透過 Jones vector 描述光的偏振態，而 Jones matrix 則可表達光學元件將如何改變光的偏振行為，而透過 Jones vector 與 Jones matrix 即可得到光在穿過光學元件前後的偏振態，而須注意的是，Jones vector 與 Jones matrix 僅能表示完全偏振下的光。

Jones vector 為一 2×1 的行向量，而其中分別表示 x 軸與 y 軸的電場分量，如下式：

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i(kz-\omega t+\phi_x)} \\ E_{0y}e^{i(kz-\omega t+\phi_y)} \end{bmatrix}$$

若僅保留振幅與相位資訊，則可以下式表示：

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{bmatrix}$$

而實際在表示偏振態時，將關注於相位差的變化，因此可再將上式化簡，而以下表一表示常見的 Jones vector。

此外，透過 Jones vector 的向量加法，即可表達兩個完全偏振的光之疊加。

表一 常見的 Jones vector 與其歸一化型態

水平線偏振光(偏振於 x 軸)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
垂直線偏振光(偏振於 y 軸)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y}e^{i0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
線偏振光(與 x 軸夾 θ 角)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ E_{0y}e^{i0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \cos \theta \\ E_0 \sin \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$
左手圓偏振光 (E_x 領先 $E_y \pi/2$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_0e^{i0} \\ E_0e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
右手圓偏振光 (E_y 領先 $E_x \pi/2$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_0e^{i0} \\ E_0e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
左手正橢圓偏振光 (E_x 領先 $E_y \pi/2$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ E_{0y}e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$
右手正橢圓偏振光 (E_y 領先 $E_x \pi/2$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ E_{0y}e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$
左手橢圓偏振光 (E_x 領先 $E_y \phi$, $0 < \phi < \pi$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ E_{0y}e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}(\cos \phi + i \sin \phi) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$
右手橢圓偏振光 (E_y 領先 $E_x \phi$, $0 < \phi < \pi$)	$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i0} \\ E_{0y}e^{-i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}(\cos \phi - i \sin \phi) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$

而 Jones matrix 則可用來表示光學元件對光的偏振態的影響，其透過 2×2 的矩陣組成。而入射光與透射光的轉換則以矩陣乘法表達，假設一光學元件之 Jones matrix 為 $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，且入射光的 Jones vector 為

$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} \widetilde{E_{ix}} \\ \widetilde{E_{iy}} \end{bmatrix}$ ，則透射光之 Jones vector 可以下式表示：

$$\widetilde{E}_t = \begin{bmatrix} \widetilde{E_{tx}} \\ \widetilde{E_{ty}} \end{bmatrix} = \mathcal{A} \cdot \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E_{ix}} \\ \widetilde{E_{iy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\widetilde{E_{ix}} + a_{12}\widetilde{E_{iy}} \\ a_{21}\widetilde{E_{ix}} + a_{22}\widetilde{E_{iy}} \end{bmatrix}$$

因此，透過矩陣計算即可推得光學元件之 Jones matrix，反之，也透過 Jones matrix 與 Jones vector 推得透射光之偏振態，此外，對於多個光學元件的運算，則可以多個 Jones matrix 計算，即：

$$\widetilde{E}_t = \mathcal{A}_n \cdots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \tilde{E}_i$$

計算時則須注意矩陣乘法的交換率不成立，故須由後至前從第一個光學元件 \mathcal{A}_1 開始計算。

而以下為常見的 Jones matrix：

表二 常見的 Jones matrix

水平線偏振片(傳輸軸平行 x 軸)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
垂直線偏振片(傳輸軸平行 y 軸)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
斜向線偏振片 (傳輸軸與+x 軸夾 45°, 位於一、三象限)	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
斜向線偏振片 (傳輸軸與-x 軸夾 45°, 位於二、四象限)	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
斜向線偏振片 (傳輸軸與+x 軸夾 θ 角)	$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$
1/4 波片(快軸平行於 x 軸)	$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
1/4 波片(快軸平行於 y 軸)	$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
1/2 波片(快軸平行於 x 軸)	$e^{-i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
1/2 波片(快軸平行於 y 軸)	$e^{i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
右手圓偏振片	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$
左手圓偏振片	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

此外，若將光學元件旋轉 θ 角，則可利用座標轉換計算，首先將

利用旋轉矩陣 $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 將原先在(x,y)坐標系上的 Jones

matrix $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 轉換至(x',y')坐標系上，此時在(x',y')坐標系上

的 Jones matrix 即為 $\mathcal{A}R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，而接著須將

此 Jones matrix 轉換回(x,y)坐標系上，因此須以反旋轉矩陣 $R^{-1} =$

$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 進行運算，得最後旋轉 θ 角的 Jones matrix 為 $R^{-1}\mathcal{A}R$ 。

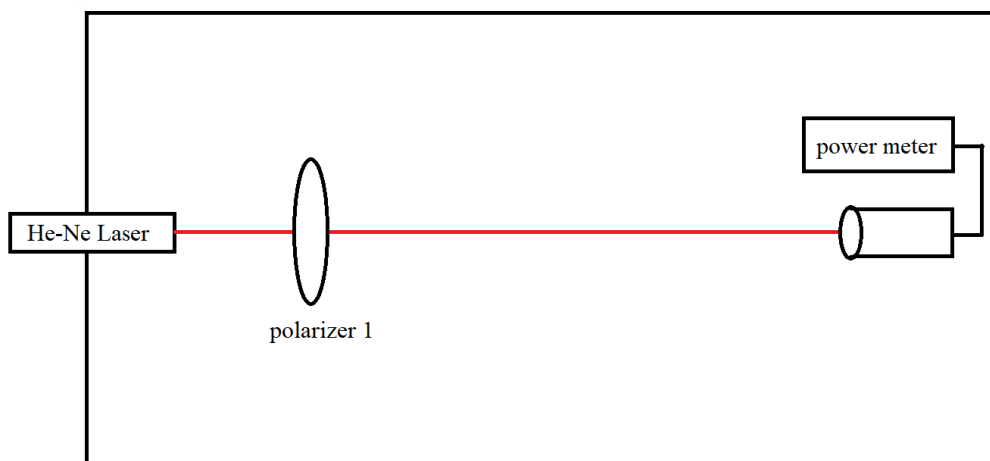
三、實驗步驟(含配置圖)：

1. Malus's law

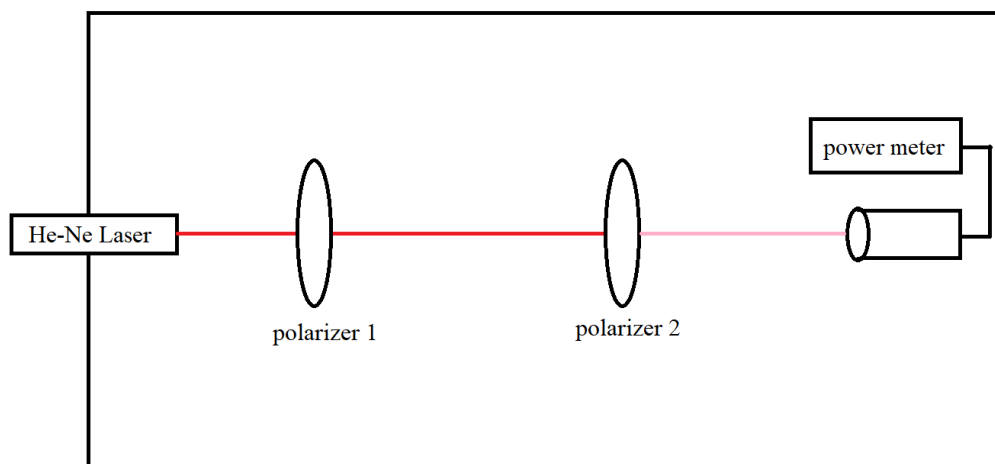
首先利用 2 個等高光圈建立雷射水平，並在光路後方架設光度計，使雷射垂直入射光度計中央，接著在雷射與光度計間架設偏振片 1，如下圖二十八，需注意偏振片應垂直雷射行進方向，此偏振片即做為光路中的起偏器。緩慢旋轉偏振片 1，使得光度計得到最大值，此時即代表雷射的偏振方向與偏振片 1 的傳輸軸方向相同，此外也可選擇旋轉偏振片 1 使光度計得到最小值，再旋轉 90 度得光度計最大值。而在讀取光度計時，需注意檔位，應選至光度計能接受而不使光強度超過檔位範圍的最小檔位讀取，以獲取最多位數的資料。

接著將偏振片 2 置於偏振片 1 與光度計中間，注意偏振片是否垂直雷射行進方向，如下圖二十九，此偏振片為光路中的檢偏器，並緩慢旋轉偏振片 2，使光度計得最小值並記錄，將此時角度定為 0 度，此時兩偏振片的傳輸軸方向應垂直。

緩慢轉動偏振片 2，每旋轉 10 度即紀錄光度計讀值，總共旋轉 360 度，讀取時應注意光度計檔位，最後將數據點繪製光強度與旋轉角度的關係圖，驗證 Malus's law。



圖二十八 設置起偏器



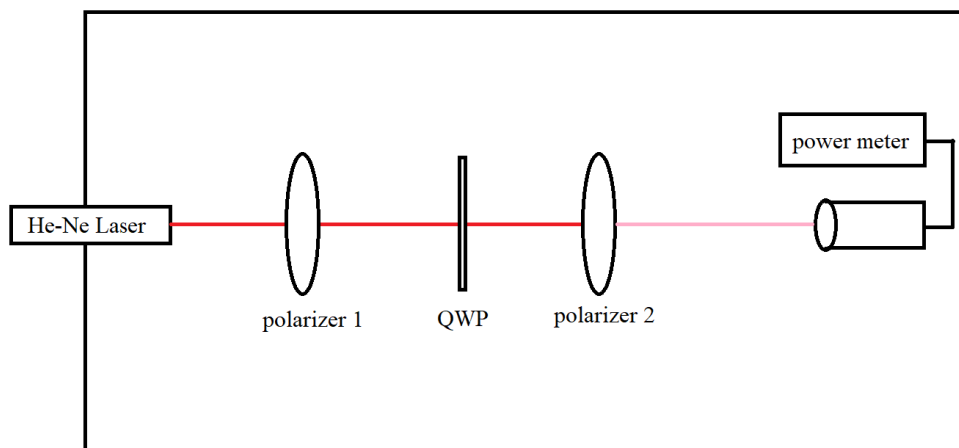
圖二十九 設置檢偏器

2. 相位延遲片

同實驗部分 1 架設偏振片 1 與偏振片 2，先使偏振片 1 與雷射偏振方向平行，再使偏振片 2 與偏振片 1 的傳輸軸方向垂直。接著在偏振片 1 與偏振片 2 中架設 1/4 波片(QWP)，如下圖三十，緩慢旋轉 QWP，使最後穿過偏振片 2 的雷射在光度計上呈最小值，則此時穿過偏振片 1 的雷射偏振方向與 QWP 的快軸或慢軸方向相同，並將此時角度設為 QWP 旋轉角度的 0 度。

將 QWP 轉動 30 度後，紀錄此時光度計數據，接著轉動偏振片 2，每轉動 10 度紀錄一次光度計數據，總共轉動 360 度，將數據以光強度對偏振片 2 的旋轉角度做圖。

將 QWP 改為轉動 45 度，並再次紀錄旋轉偏振片 2 所得之光度計數據，總共轉動 360 度，將數據以光強度對偏振片 2 的旋轉角度做圖。

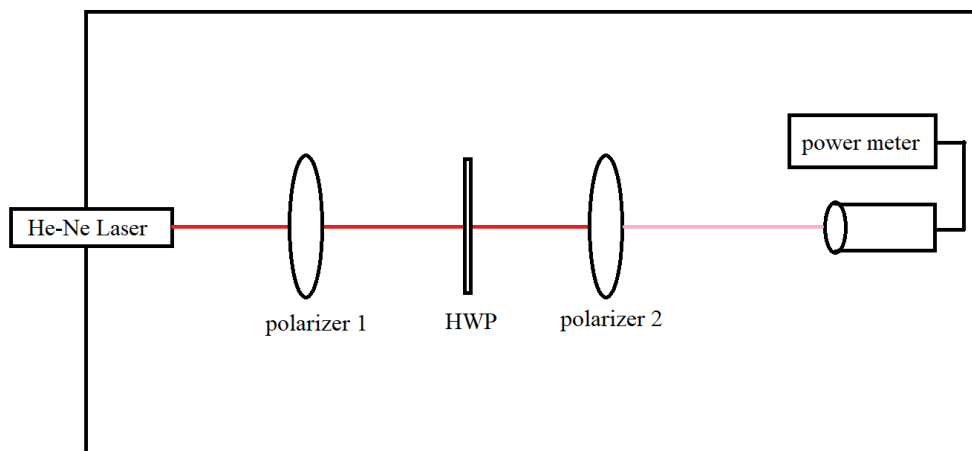


圖三十 設置 1/4 波片(QWP)

接著移除 QWP，以同實驗部分 1 的方式將偏振片 2 重新調至與偏振片 1 垂直，改為將 1/2 波片(HWP)至於兩個偏振片間，如下圖三十一。同樣緩慢旋轉 HWP，使得穿過偏振片 2 的雷射在光度計上讀值最小，即使得 HWP 的快軸或慢軸與偏振片 1 的偏振方向平行，將此時 HWP 的旋轉角度定為 0 度。

接著將 HWP 轉動一小角度(4 度至 8 度)並記錄，之後轉動偏振片 2，使光度計回到最小值，紀錄此時偏振片 2 的旋轉角度。

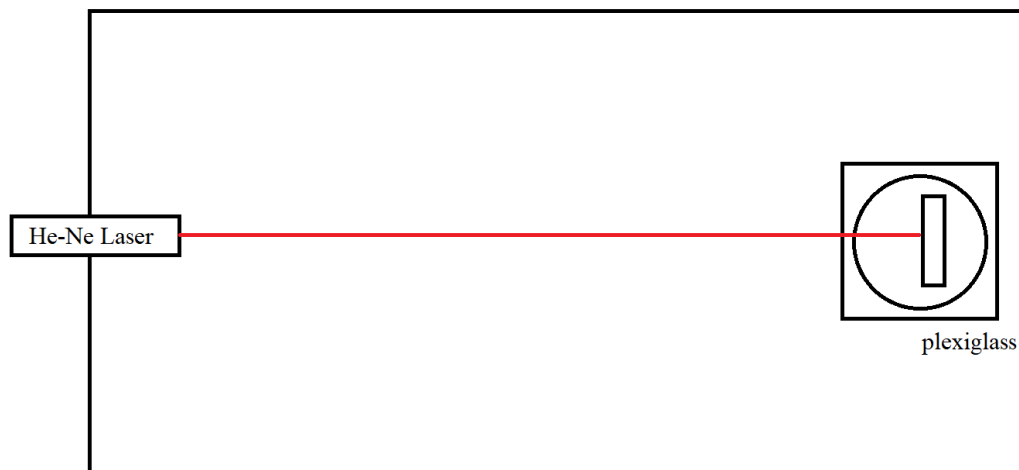
將偏振片 2 轉回原角度，轉動 HWP，使其旋轉角度為 45 度，紀錄此時的光度計讀值，並緩慢轉動偏振片 2，每轉動 10 度紀錄一次光度計數據，總共轉動 360 度，最後將數據以光強度對偏振片 2 的旋轉角度做圖。



圖三十一 設置 1/2 波片(HWP)

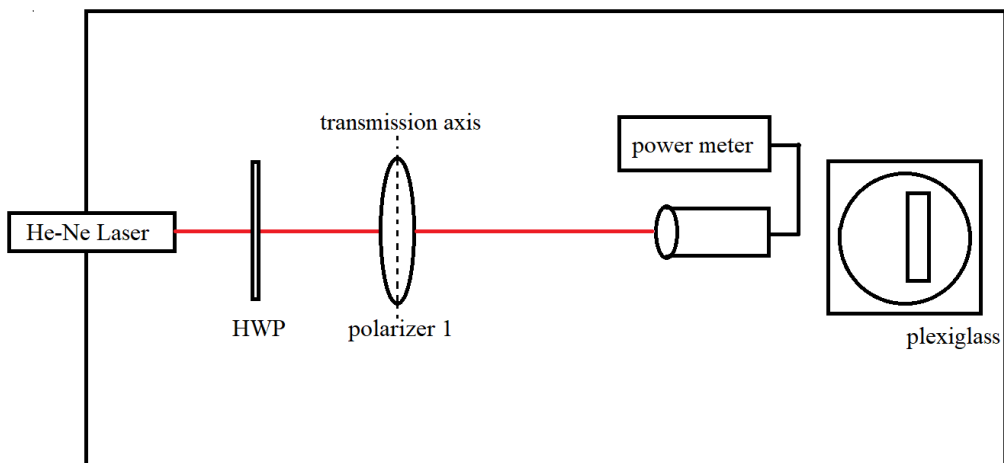
3. 布魯斯特角量測

首先如下圖三十二，將壓克力置於旋轉台上，並放在光學桌板另一端，須注意壓克力的表面應切齊旋轉台直徑，緩慢轉動旋轉台，使雷射的光點在壓克力上無明顯位移，若有顯著移動，則須調整壓克力在旋轉台上的位置，接著緩慢旋轉旋轉台，使雷射反射回雷射管出光處，並記錄此時旋轉台的刻度。



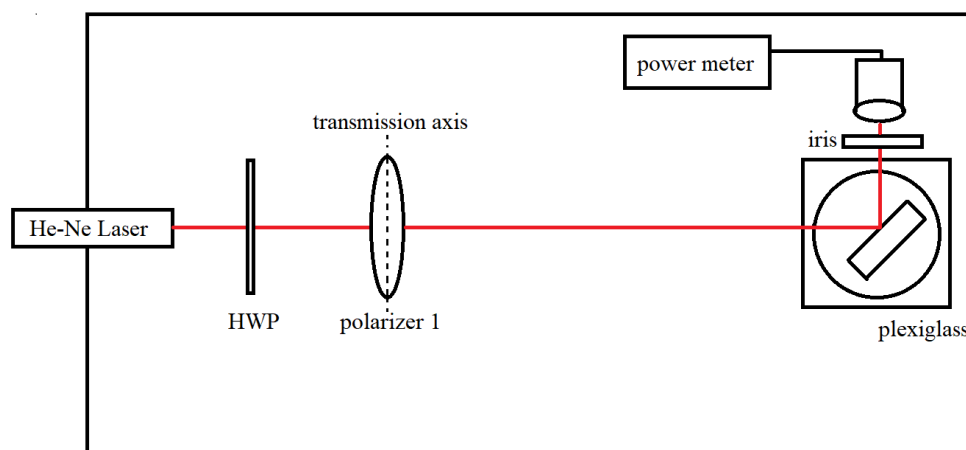
圖三十二 架設旋轉台並記錄初始刻度

如下圖三十三，在雷射前方架設偏振片 1，並使偏振片上的標記點轉於 0° 或 180° 上，這將使偏振片 1 的傳輸軸與桌面垂直。接著在偏振片 1 前方架設光度計，於偏振片與雷射間架設 HWP，緩慢轉動 HWP 使得光度計能測得最大值並記錄其值。



圖三十三 架設偏振片 1 與 HWP 並測量雷射光強度

從 40 度起開始轉動旋轉台至 70 度，每次旋轉 5 度，並將光度計移至合適位置，使光度計能量測到壓克力板的反射光強度並記錄其值，如下圖三十四，可在光度計與壓克力板間架設一光圈，以阻擋其他不應被量測的光點，最後將所量測到的光強度除以原先未經過反射的光強度，得到該角度下的反射率，最後將各角度的反射率與旋轉台旋轉角度(即入射角度)作圖，所得關係圖即為 TE 偏振光對壓克力板表面在不同角度下的反射率。



圖三十四 TE 偏振光的反射率量測

接著轉動偏振片 90 度，即使偏振片上的標記點位於 90° 或 270°，並轉動 HWP 45 度，此時以光度計量測偏振片後的出射光也應得最大值，紀錄此時光度計的讀值。

同上，以 40 度開始轉動旋轉台至 70 度，每次轉動 5 度，以光度計測量壓克力板反射光的光強度，接著將反射光的光強度除以未經過反射時的光強度，得到 TM 偏振光在該角度下的反射率，並將 TM 偏振光的反射率對入射角度作圖。

在反射率最小的三個紀錄點間，以每次旋轉一度的間距測量間距內的其他紀錄點，以找出光強度最小的值。(例：若先前所得之數據 3 個反射率最小的點為 50°、55° 和 60°，則推斷 TM 光反射率最小的點應在 50° 至 60° 區間內，故從 50° 開始記錄至 60°，每次旋轉 1 度，紀錄該角度下的反射率。) 而當 TM 光反射率為 0 的點，所對應之入射角度即為布魯斯特角。

四、數據分析與討論：

(1) 實驗數據整理及分析

表三 實驗部分 1，Malus's law 實驗數據

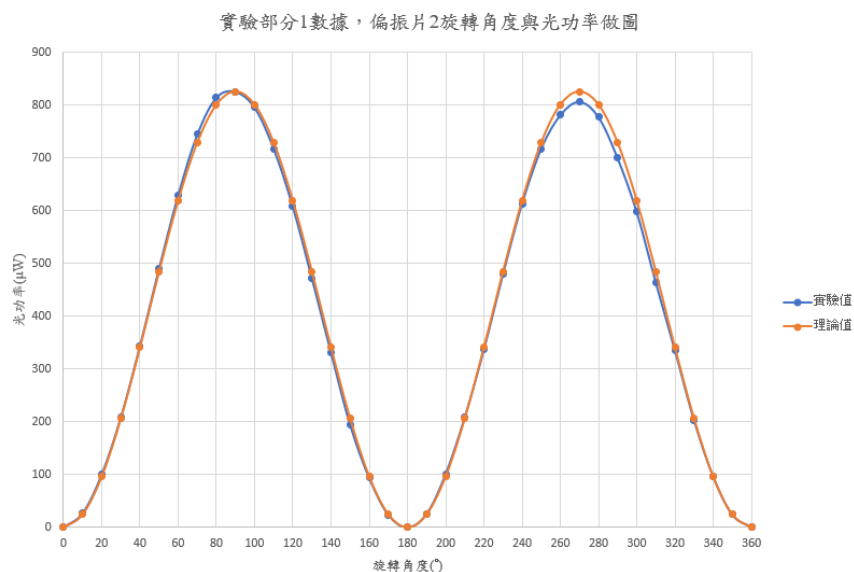
旋轉角度 (°)	光功率 (μW)	旋轉角度 (°)	光功率 (μW)	旋轉角度 (°)	光功率 (μW)	旋轉角度 (°)	光功率 (μW)
0	0.15	100	796	200	101.2	300	598
10	27.05	110	718	210	209	310	464
20	100.5	120	608	220	337.1	320	335.6
30	208.7	130	472	230	480	330	203.1
40	344	140	331	240	614	340	96.3
50	491	150	194.3	250	718	350	23.98
60	630	160	93.4	260	782	360	0.13
70	745	170	23.7	270	807		
80	815	180	0.13	280	778		
90	826	190	25.47	290	700		

在實驗部分 1 中，一開始先架設偏振片 1 並旋轉使透射雷射的光強度達最大值，此是因為在雷射內部裝有 Brewster window，利用了布魯斯特角以及雷射共振腔的原理使雷射出射光帶有偏振性，而偏振片 1 的旋轉與調整即是使偏振片 1 的傳輸軸與雷射偏振方向平行。而後加入偏振片 2，使透射雷射的光強度達最小值，其是使偏振片 2 與偏振片 1 的傳輸軸方向垂直。

將上表三作圖後則可得下圖三十五，其中實驗值為上表光功率對旋轉角度之曲線作圖，而理論值則為透過 Malus's law 所得之關係式 $I = I_0 \cos^2 \theta$ 對旋轉角度作圖， θ 為偏振片 2 的傳輸軸方向與自偏振片 1 出射的雷射光偏振方向之夾角，故當旋轉角度為 90 度時，兩偏振片應平行，夾角 θ 為 0 度，其他角度亦然，並假設理論值的原始光功率為上表實驗數據中的最大值即 $I_0 = 826\mu\text{W}$ 。

觀察下圖可發現實驗數據與理論值大致相符，但需注意實驗數據中刻度於 0 度、180 度、360 度時，光功率並不為 0，而為一極小值，此應是由於實際偏振片具有洩漏光，故次透射率不為 0 所導致。反之，理論值在旋轉角度為 90 度與 270 度時的光功率也應較實際值大，此是由於實際偏振片的主透射率不為 100% 所導致，但由於此處實驗並未記錄放置偏振片 2 前的雷射光功率，故無法得知確切的理論值與誤差。

觀察下圖可發現，實際值之曲線仍與理論值有些為偏移，其可能是因為在一開始架設偏振片 2 並旋轉使雷射出射光達最小值時有些微誤差，並未使偏振片 1 與偏振片 2 完全垂直，導致後續數據皆有些微角度偏移，而在圖中可發現線段右側的光強度比線段左側之光強度小，但由於理論上兩側應完全對稱，故推測是雷射光點並未入射於偏振片 2 中心，導致在轉動時雷射入射點不同，因此偏振片上不同處的瑕疵將使得偏振片 2 在轉動半周後光強度有些微不同。



圖三十五 實驗部分 1 數據，偏振片 2 旋轉角度與光功率做圖

表四 實驗部分 2，1/4 波片(QWP)實驗數據(1)

1/4 波片(QWP)旋轉 30°，初始角度為 3°							
刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)
0	283.2	100	458	200	417	300	309.4
10	347.4	110	387.5	210	479	310	251.4
20	415	120	319.1	220	538	320	217.7
30	486	130	259.7	230	572	330	198.5
40	546	140	219.3	240	590	340	205.3
50	590	150	199.0	250	584	350	231.1
60	609	160	202.6	260	553	360	280.6
70	603	170	230	270	504		
80	569	180	280.9	280	441		
90	520	190	340.7	290	375.9		

表五 實驗部分 2，1/4 波片(QWP)實驗數據(2)

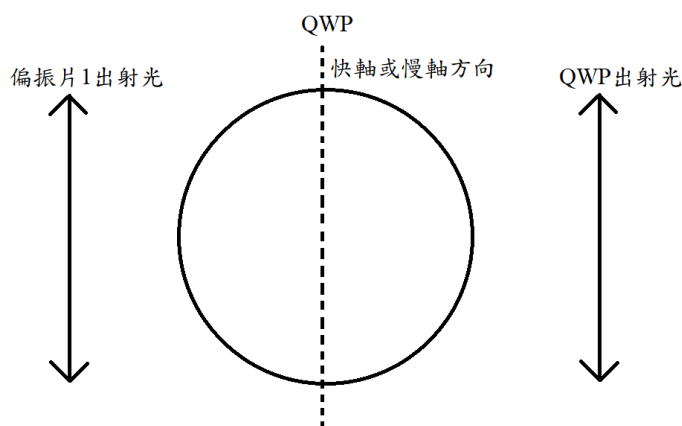
1/4 波片(QWP)旋轉 45°，初始角度為 3°							
刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)
0	367.9	100	427	200	373.9	300	406
10	373.2	110	420	210	383.5	310	391.7
20	385.6	120	413	220	403.4	320	383.7
30	392.9	130	401	230	415	330	377.1
40	406	140	388.9	240	422	340	370.1
50	420	150	377.9	250	428	350	367
60	430	160	372.8	260	426	360	372.1
70	438	170	367.4	270	424		
80	433	180	368.3	280	418		
90	430	190	370.1	290	408		

在實驗部分 2，QWP 的實驗中，一開始同樣使偏振片 1 的傳輸軸方向與雷射偏振方向垂直，接著使偏振片 2 的傳輸軸方向與偏振片 1 的傳輸軸方向垂直，接著在兩者間安裝 QWP，並使最後透射出偏振片 2 的雷射光達最小值，此處即是讓 QWP 的快軸或慢軸與偏振片 1 的傳輸軸方向平行，因當快軸或慢軸與偏振片 1 的傳輸軸方向平行時，對 QWP 而言即僅存在 o 光或 e 光其一，也因此加入 $\Delta\phi = \pi/2$ 的相位差後，仍只有一個分量的光存在，故仍為線偏振光，且偏振方向與偏振片 1 的傳輸軸方向平行。

此處也可透過 Jones matrix 驗證，將坐標軸沿著偏振片 1 的傳輸軸方向建立，假設偏振片 1 的線偏振光僅存在 y 軸分量，則其 Jones vector 可表示為 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，而快軸與 y 軸平行之 QWP 的 Jones matrix 為 $e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ，計算可得 QWP 之出射光的 Jones vector 為：

$$\tilde{E} = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ i - 1 \end{bmatrix}$$

故仍僅存在 y 軸方向的偏振分量，因此出射光仍為偏振方向平行 y 軸的線偏振光，如下圖三十六，且與偏振片 2 的傳輸軸方向平行，故可測得最後出射光的光強度達最小值。此時當 QWP 的快軸或慢軸與偏振片 1 的傳輸軸平行時，將 QWP 的旋轉角度設為 0 度。

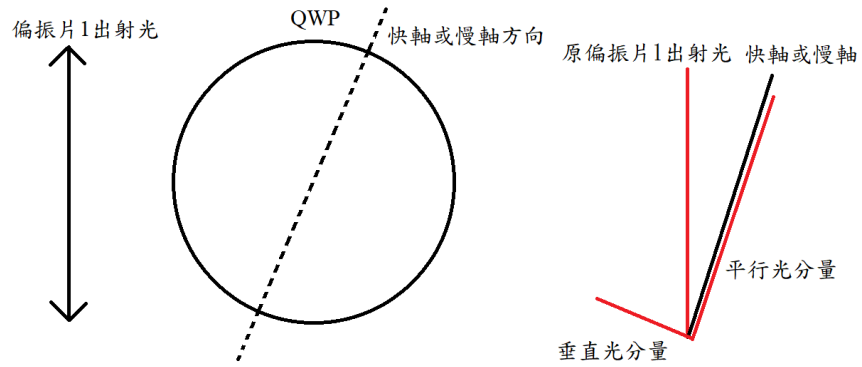


圖三十六 當 QWP 的快軸或慢軸與偏振片 1 傳輸軸平行時示意圖

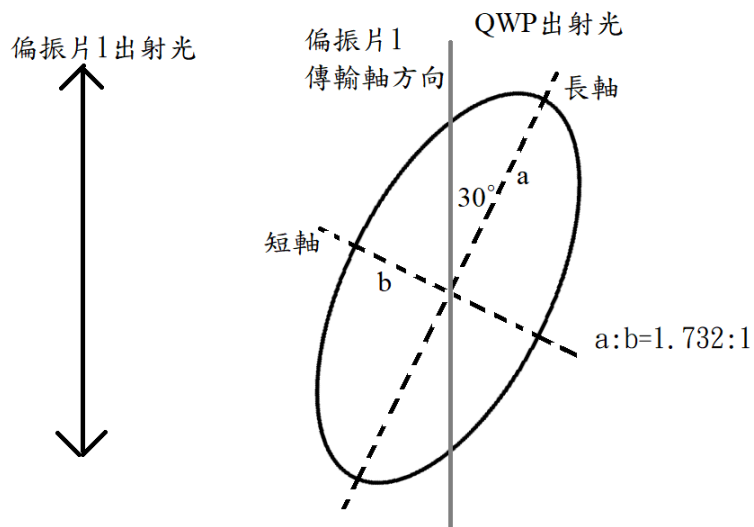
而當 QWP 轉動 30 度時，偏振片 1 出射光將與 QWP 的快軸或慢軸夾 30 度，此時將偏振片 1 的出射光分為平行與垂直的分量，如下圖三十七，假設偏振片 1 出射光的電場振幅為 E_0 ，則垂直分量的電場振幅為

$$E_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0, \text{ 而水平分量的電場振幅為 } E_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} E_0, \text{ 且在經過}$$

QWP 後兩者相位差將相差 $\frac{\pi}{2}$ ，因此 QWP 出射光將為長軸與偏振片 1 傳輸軸夾 30 度且長軸與短軸比為 $\sqrt{3}:1$ 之橢圓偏振光，如下圖三十八。



圖三十七 QWP 轉動 30 度角示意圖



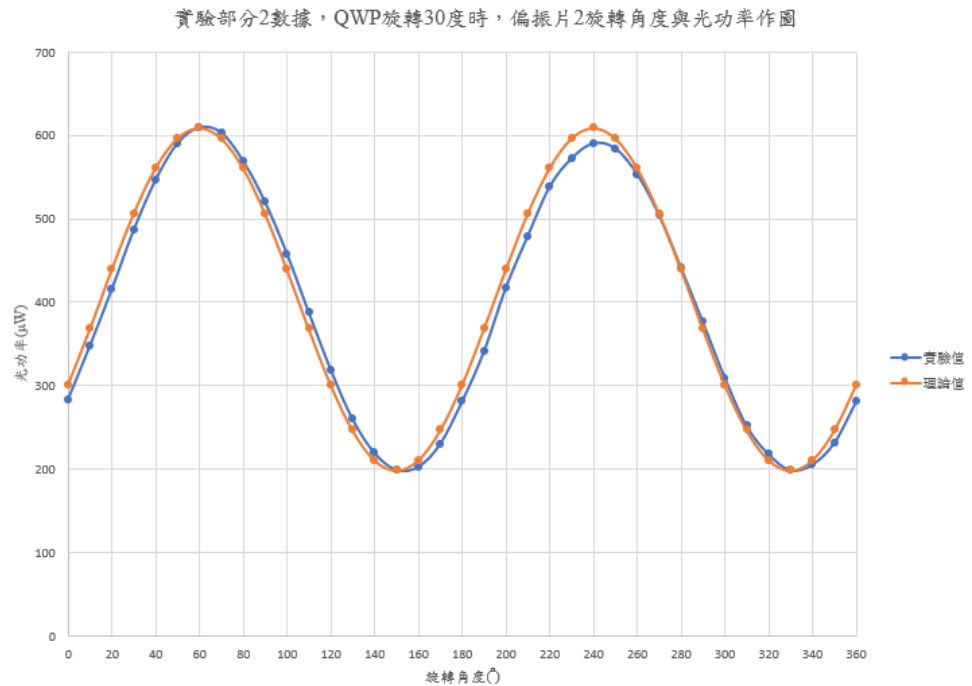
圖三十八 QWP 轉動 30 度之出射光電場示意圖

而由於光強度與電場強度成平方關係，因此可知當偏振片 2 的傳輸軸平行橢圓長軸時所測得之光強度應為平行短軸時所測得之光強度的 3 倍。此外，對於其他角度的分析，可將橢圓偏振電場分為平行長軸與平行短軸的分量，而後再透過 Malus's law 分析，即可得到在偏振片 2 旋轉至不同角度下，透射光強度的理論值。

透過表四可發現，偏振片 2 的透射光強度最大值出現在偏振片 2 旋轉 60 度處，光強度為 $609\mu\text{W}$ ，此時偏振片 2 的傳輸軸平行橢圓長軸而垂直短軸，故假設橢圓長軸之光強度為 $I_{\text{major}} = 609\mu\text{W}$ ，而偏振片 2 的透射光強度最小值出現在旋轉 330 度處，光強度為 $198.5\mu\text{W}$ ，此時傳輸軸平行橢圓短軸而垂直長軸，故假設橢圓短軸光強度為 $I_{\text{minor}} = 198.5\mu\text{W}$ 。

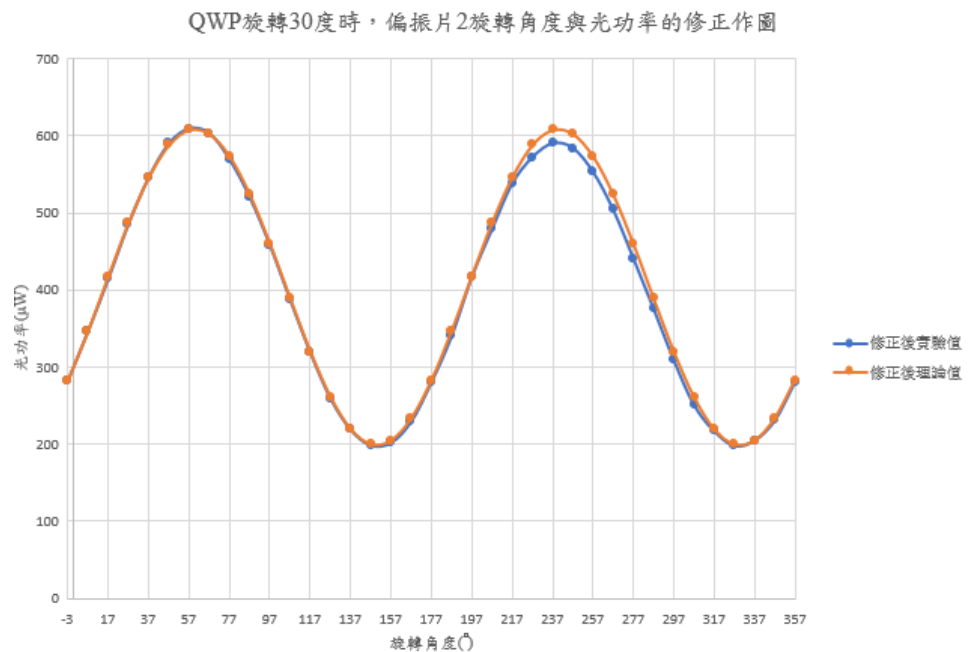
對於不同旋轉角度的理論值，即可利用 Malus's law 計算，假設偏振片 2 的傳輸軸與橢圓長軸夾 θ 角，則此時光強度理論值同時受 2 個分量影響，故此時光強度應為 $I = I_{\text{major}}\cos^2\theta + I_{\text{minor}}\cos^2(90 - \theta)$ ，整理後得 $I = I_{\text{major}}\cos^2\theta + I_{\text{minor}}\sin^2\theta$ 。

因此可將表四與其理論值作圖，如下圖三十九：



圖三十九 QWP 旋轉 30 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率作圖

觀察上圖首先可發現，曲線右側的光強度同樣較左側小，與實驗部分 1 同樣可能是因為雷射光點並未入射於偏振片 2 中心導致。另外可發現實驗值與理論值有明顯角度上的偏移，此處若假設實驗值所量測的角度約有 3 度的偏移，則在修正實驗值的旋轉角度以及理論值的角度後可得下圖四十。



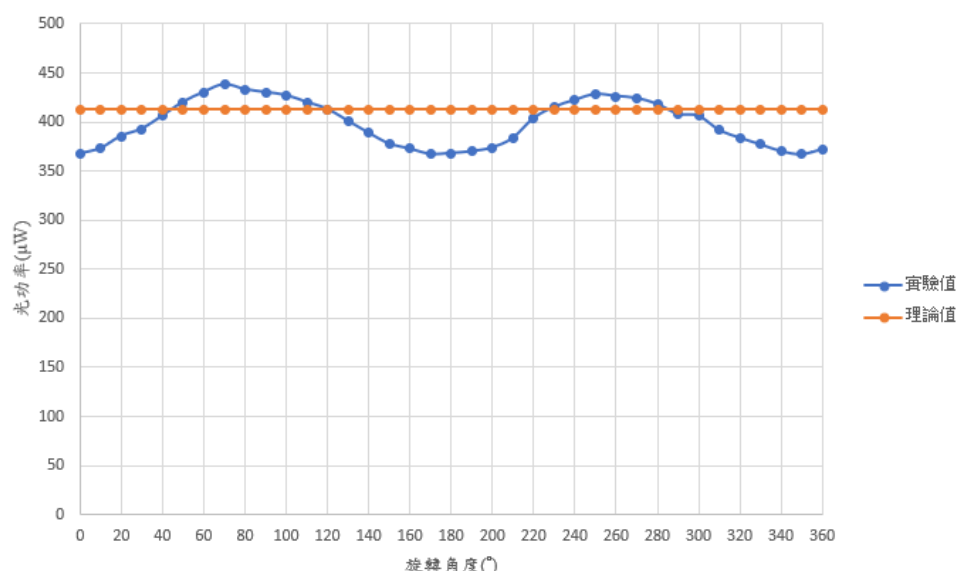
圖四十 QWP 旋轉 30 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率的修正作圖

觀察圖四十即可發現，修正過後的實驗值與理論值相當吻合，僅在曲線右側有著光強度的差異，故合理推測實驗誤差來自於 QWP 或偏振片 2 的擺放角度誤差。

對於表五，則是將 QWP 轉動 45 度後所得之結果，當 QWP 轉動 45 度後，偏振片 1 的出射光即與 QWP 的快軸或慢軸夾 45 度角，也因此可將 QWP 入射光分為 2 個振幅相等且正交的電場向量，而在經過 QWP 給予 $\pi/2$ 的相位角後，QWP 的出射光將由 2 個振幅相等、相互正交且相位差 $\pi/2$ 的電場分量構成，透過前文討論可知，此時出射光應為圓形偏振光。

而當圓形偏振光入射偏振片 2 時，理論上不論偏振片 2 的旋轉角度為何，所測量到的出射光強度都為一定值。考慮到在實驗部分 1 中，當偏振片 1 與偏振片 2 的傳輸軸平行時，光強度有最大值 $I_0 = 826\mu\text{W}$ ，假設 QWP 對光的吸收率極低，則在實驗部分 2 中，圓形偏振光透射偏振片 2 後的光強度應為線偏振光強度的一半，即 $I = 413\mu\text{W}$ ，故假設在表五中，各旋轉角度下的理論值皆為 $I = 413\mu\text{W}$ ，並可將表五與理論值做下圖。

實驗部分 2 數據，QWP 旋轉 45 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率作圖



圖四十一 QWP 旋轉 45 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率作圖

觀察上圖可發現，實驗值與理論值的曲線有明顯不同，其主要是因為 QWP 並未完全轉至 45 度，而是有著些微誤差，使得 QWP 出射光仍為橢圓偏振光，因此最後得出實驗曲線並非直線，而是有著週期性變化。

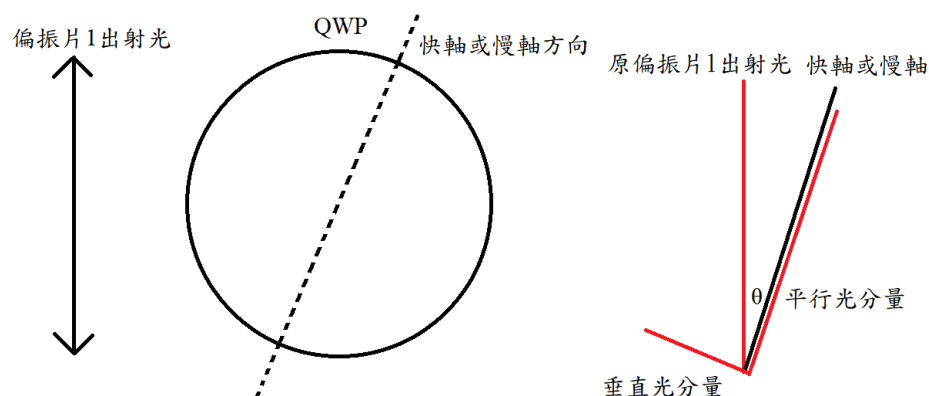
在表五數據中可發現，光強度最大值為旋轉角度為 70 度時的 $438\mu\text{W}$ ，而最小值為旋轉角度為 350 度時的 $367\mu\text{W}$ ，故可知橢圓偏振光短軸分量的光強度與長軸分量的光強度比為 $\frac{367}{438} \approx 0.8379$ ，而電場分量的振幅比則

為 $\sqrt{\frac{367}{438}} \approx 0.9154$ 。

透過下圖四十二即可得知電場振幅比公式為 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ ，因此可求

得 QWP 與偏振片 1 出射光的夾角應為 $\tan^{-1} \sqrt{\frac{367}{438}} = 42.47^\circ$ ，故可得知

QWP 在設置上有 2.53 度的誤差，並非實際旋轉至 45 度，因而導致圖四十一實驗值與理論值的不同。

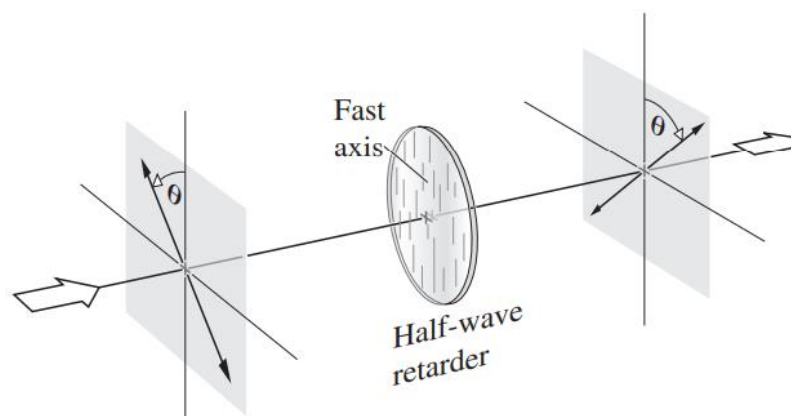


圖四十二 電場振幅比與 QWP 角度關係示意圖

表六 實驗部分 2，1/2 波片(HWP)實驗數據

1/2 波片(HWP)旋轉 45°，初始角度為 22°							
刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)	刻度 (°)	光功率 (μW)
0	817	100	29.9	200	696	300	214
10	789	110	105.1	210	587	310	340.9
20	719	120	214.3	220	459	320	481
30	610	130	348.8	230	314.8	330	608
40	474	140	490	240	181.8	340	713
50	329.7	150	616	250	82.3	350	783
60	195.3	160	718	260	19.06	360	812
70	87.9	170	791	270	0.55		
80	19.84	180	811	280	30.74		
90	0.46	190	770	290	104.5		

在 HWP 的實驗部分中，將 HWP 旋轉使其快軸或慢軸與偏振片 1 平行後，需先轉動 HWP 一小角度，接著轉動偏振片 2 使光點再度消失，此處 HWP 的轉動角度為 4 度，而偏振片 2 相對應的旋轉角度為 8 度，其即是因為原先 HWP 的快軸或慢軸與入射光的偏振方向平行，但在旋轉 4 度之後，線偏振光受 HWP 所加的 π 相位角影響而沿著 HWP 的快軸或慢軸翻轉，等同於旋轉 8 度，如下圖四十三，因此偏振片 2 若要再次使光點消失，則需相對應的旋轉 8 度使 HWP 的出射光偏振方向再次與偏振片 2 的傳輸軸方向垂直。

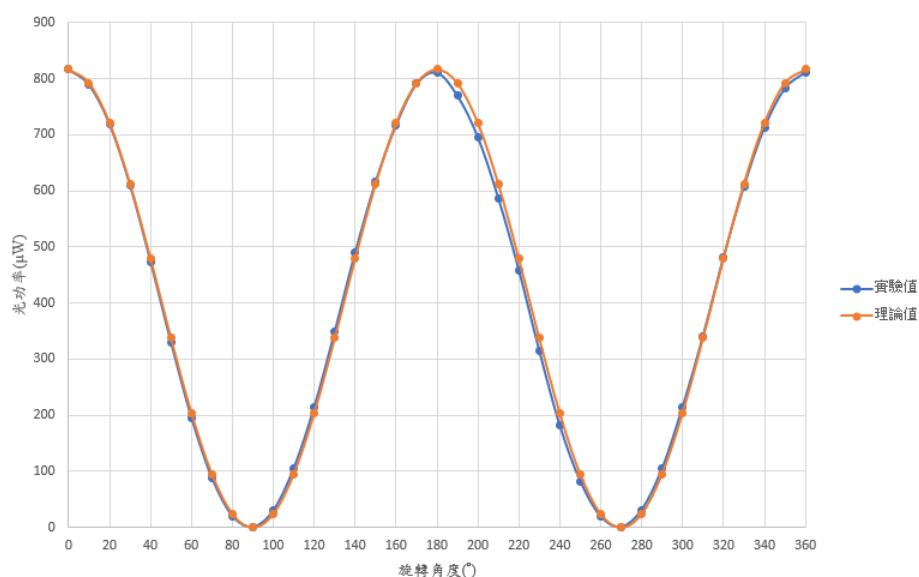


圖四十三 HWP 與線偏振光夾 θ 角時，出射光的角度變化[1]

也因此可以得知，在表六中，旋轉 HWP 45 度將使 HWP 的快軸或慢軸與偏振片 1 出射光的偏振方向夾 45 度角，而在通過 HWP 後，HWP 出射光仍為線偏振光，但偏振角度與入射 HWP 前相差 90 度。

而觀察表六的數據可發現，光強度最大值為旋轉角度為 0 度時的 $817\mu\text{W}$ ，故透過 Malus's law 計算理論值時，假設 $I = I_0 \cos^2 \theta$ 中的原始光強度 $I_0 = 817\mu\text{W}$ ，接著即可透過 Malus's law 計算各個旋轉角度下的光強度理論值。將表六與理論值作圖，即可得下圖四十四。

實驗部分 2 數據，HWP 旋轉 45 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率作圖



圖四十四 HWP 旋轉 45 度時，偏振片 2 旋轉角度與光功率作圖

觀察上圖四十四可發現其與實驗部分一的作圖(圖三十五)類似，而差在旋轉角度相對位移 90 度，而這即是 HWP 使線偏振光偏振角度旋轉的結果。而觀察圖四十四可發現實驗值與理論值大致相同，且右側的光強度同樣較左側低，也驗證先前雷射光點並未入射於偏振片 2 中心的假設，且可發現表六的光強度最大值較表三小，其應是因為 HWP 仍吸收部分光。

表七 實驗部分 3，TE 波反射率之量測

TE 波， $I_i = 1625\mu\text{W}$				
壓克力 旋轉角度	光功率 I_r (μW)	反射率 R	理論值	誤差(%)
40°	98.6	0.060677	0.080322	24.46
45°	122.4	0.075323	0.095577	21.19
50°	147.5	0.090769	0.116089	21.81
55°	187.9	0.115631	0.143864	19.62
60°	232.5	0.143077	0.181766	21.29
65°	320.0	0.196923	0.23386	15.79
70°	417	0.256615	0.305879	16.11

表八 實驗部分 3，TM 波反射率之量測

TM 波， $I_i = 1656\mu\text{W}$				
壓克力 旋轉角度	光功率 I_r (μW)	反射率 R	理論值	誤差(%)
40°	19.60	0.011836	0.015242	22.35
45°	11.27	0.006806	0.009135	25.50
50°	3.95	0.002385	0.003661	34.84
55°	0.27	0.000163	0.000264	38.22
60°	2.78	0.001679	0.001593	5.38
65°	17.07	0.010308	0.012479	17.40
70°	57.7	0.034843	0.041773	16.59

表九 實驗部分 3，夾擊布魯斯特角數據(TM 波)， $I_i = 1656\mu\text{W}$

壓克力 旋轉角度	光功率 I_r (μW)	反射率 R(%)	理論值 (%)	誤差(%)
50°	3.95	0.238527	0.366064	34.84017
51°	2.99	0.180556	0.275218	34.39551
52°	2.01	0.121377	0.193911	37.40576
53°	1.27	0.076691	0.12394	38.12268
54°	0.70	0.042271	0.067337	37.22545
55°	0.26	0.015700	0.026391	40.5074
56°	0.10	0.006039	0.003682	63.9881
57°	0.19	0.011473	0.002123	440.486
58°	0.59	0.035628	0.024994	42.5487
59°	1.47	0.088768	0.075995	16.8079
60°	2.70	0.163043	0.159299	2.35031

在實驗部分 3 中，首先測得未經反射的 TE 波與 TM 波之光強度，即為 I_i ，接著量測各入射角度下的反射光功率 I_r ，最後以 $R = \frac{I_r}{I_i}$ 計算反射率。

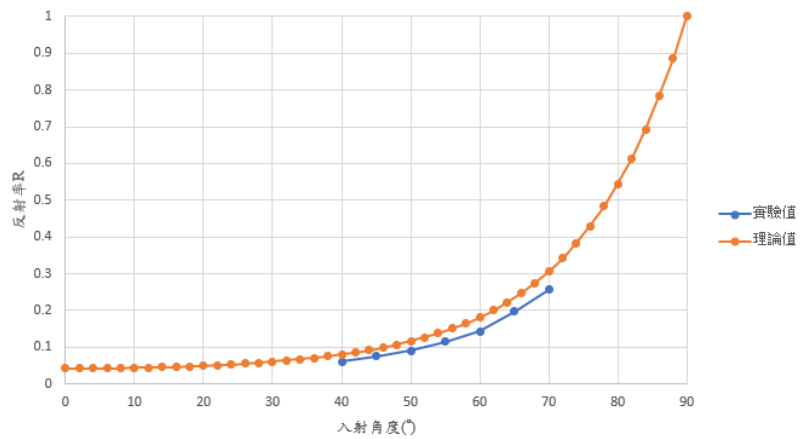
而由於實驗中的塊材使用的是對波長 632.8nm 紅光時折射率為 1.5151 的 BK7，故可使用菲涅爾方程式對 TE 光以及 TM 光進行理論值的計算：

$$R_s = \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$R_p = \left(\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right)^2$$

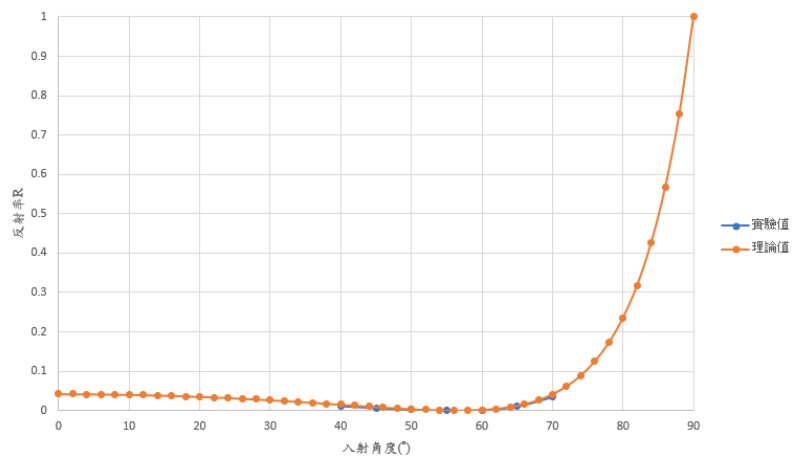
若將表七中的 TE 波數據與理論值以反射率對入射角度作圖，則可得下圖四十五，將表八中的 TM 波數據與理論值作圖，可得下圖四十六。

實驗部分3，TE波反射率對入射角度作圖



圖四十五 TE 波反射率對入射角度作圖

實驗部分3，TM波反射率對入射角度作圖

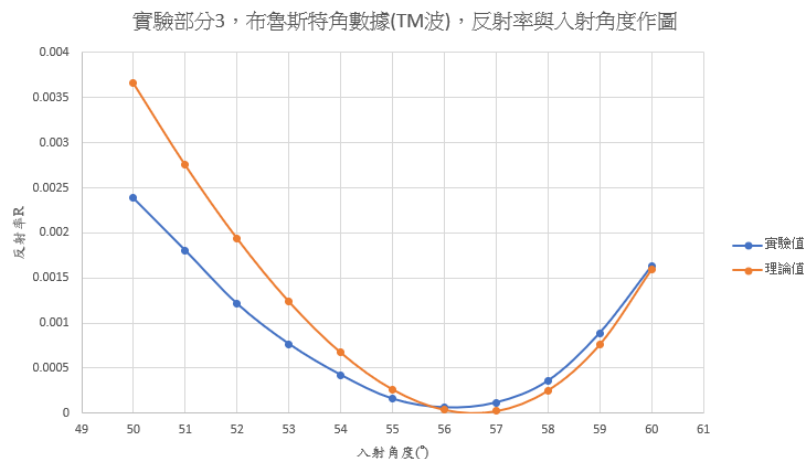


圖四十六 TE 波反射率對入射角度作圖

其中可發現在圖四十五中，TE 波反射率的實驗值趨勢與理論值相同，儘管有些微誤差，但實驗值同樣滿足 TE 波中不存在布魯斯特角而反射率隨著入射角度增加而逐漸增大的敘述，而在實驗中，由於量測 TE 波與 TM 波前後有多次調整塊材擺放位置，故猜測 TE 波的實驗誤差可能來自塊材擺放位置不正，導致入射角度皆有一小角度的誤差，而誤差皆約為 10% 至 30% 間，透過比對可發現實驗值與理論值有約 4 至 5 度的偏移。

觀察表八數據可發現，反射率在 50 度至 60 度區間產生轉折，故猜測布魯斯特角出現在此區間，因此進行夾擊布魯斯特角，在 50 度至 60 度區間以每 1 度做為紀錄點測量。

觀察圖四十六則可發現，TM 波反射率的實驗值與理論值相當接近，且在 50 度至 60 度區間趨近於 0，符合 TM 波中存在布魯斯特角而反射率在布魯斯特角處為 0，而後隨著角度增加而反射率逐漸增大的敘述。然而儘管曲線上實驗值與理論值相當吻合，但觀察表八可發現，誤差仍約在 10% 至 20% 區間，但此處猜測誤差是由於 TM 波的反射率在此區段本就較低，因而環境微弱的光干擾將對實驗誤差帶來較大比例的影響。



圖四十七 布魯斯特角數據(TM 波)，反射率與入射角度作圖

將表九做圖即可得上圖四十七，觀察可發現實驗數據顯示，TM 波在約 56 度至 57 度區間反射率趨近於 0，因此可知布魯斯特角約為 56 度，而透過與理論值的比較也驗證此推論。但由於在布魯斯特角附近的反射率已趨近於 0，故誤差相當大，其主要是受環境微弱的干擾所影響。

(2) 預報題目作答

1. 寫出 \hat{x} 極化光之 Jones vector 及半波片(快軸在 y 方向上)的 Jones matrix。

答：透過實驗原理對 Jones vector 與 Jones matrix 的討論可知， \hat{x} 極

化光之 Jones vector 為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，半波片(快軸在 y 方向上)的 Jones matrix 為

$$e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}。$$

2. 計算題 1 半波片旋轉為逆時針 30° 與順時針 45° 時的 Jones matrix。

答：當光學元件旋轉時，透過實驗原理對 Jones matrix 解釋可知，需先將光學元件在未旋轉時的 Jones matrix M ，與旋轉矩陣 R 相乘，使其投影到旋轉過後的坐標系上，而後再與逆旋轉矩陣 R^{-1} 相乘，使其投影回原本的坐標系上。即 $M_\theta = R^{-1}MR$ ，因此可得半波片旋轉為逆時針 30° 的 Jones matrix 為：

$$\begin{aligned} M_{30} &= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\ &= i \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\ &= i \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

而半波片旋轉為順時針 45° 的 Jones matrix 為：

$$\begin{aligned} M_{-45} &= \begin{bmatrix} \cos -45^\circ & -\sin -45^\circ \\ \sin -45^\circ & \cos -45^\circ \end{bmatrix} e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -45^\circ & \sin -45^\circ \\ -\sin -45^\circ & \cos -45^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ &= i \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\ &= i \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = i \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. 計算 \hat{x} 的極化光分別通過題2中之半波片後的 Jones vector，並描述其輸出偏振為線偏振、圓偏振、或橢圓偏振。

答： \hat{x} 的極化光之 Jones vector 為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，個別穿過題二的兩個半波片

片後的 Jones vector 分別為：

$$\widetilde{E}_{30} = i \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = i/2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{E}_{-45} = -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因 $\widetilde{E}_{30} = i/2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，故可知通過逆時針旋轉 30 度的半波片後，入

射光等同於在 \hat{x} 、 \hat{y} 方向皆被延遲 $\frac{\pi}{2}$ ，因此出射光的 \hat{x} 、 \hat{y} 電場分量相位

差為 0，出射光仍為線性偏振光，且 \hat{x} 、 \hat{y} 方向的電場分量振幅比為 $1:\sqrt{3}$ ，因此偏振方向為第一、三象限，且與正 x 軸夾 60 度。

因 $\widetilde{E}_{-45} = -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，故可知通過順時針旋轉 45 度的半波片後，

出射光的 \hat{x} 、 \hat{y} 電場分量相位差為 0，出射光仍為線性偏振光，且出射光僅剩 \hat{y} 電場分量，因此偏振方向為 \hat{y} 極化。

4. 接續題4，在半波片後加上一 \hat{y} 方向的偏振片，則入射光通過此偏振片的強度百分比為何？

答：因 $\widetilde{E}_{30} = i/2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，而 \hat{y} 方向的偏振片 Jones matrix 為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

因此可知最後透射光的 Jones vector 為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} i/2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = i/2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，又

光強度與電場強度呈平方關係，因此加入偏振片前後的光強度比應

$$\text{為 } \frac{I_{t30,polaroid}}{I_{t30}} = \frac{0^2 + \sqrt{3}^2}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{3}{4} = 0.75。$$

而 $\widetilde{E}_{-45} = -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，所以最後透射光的 Jones vector 為

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-i\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，所以在加入偏振片前後的光強度比應

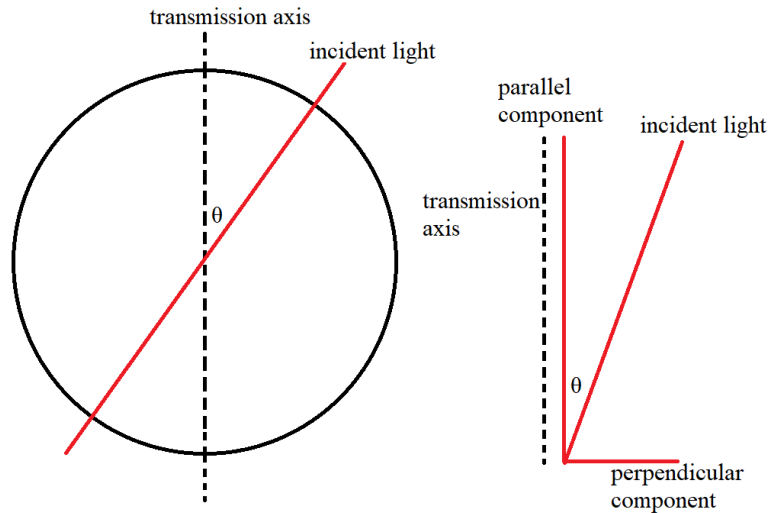
$$\text{為 } \frac{I_{t-45,polaroid}}{I_{t-45}} = \frac{0^2 + 1^2}{0^2 + 1^2} = 1$$

5. Malus's law 為何？

答：Malus's law 指當線偏振光入射理想線偏振片時，可將入射線偏振光分為垂直和平行偏振片傳輸軸的兩個正交分量，而垂直傳輸軸的分量將被吸收而無法穿透，且透過下圖四十八可知，平行傳輸軸的電場分量與原入射電場的關係為 $E_t = E_0 \cos \theta$ ，其中 E_0 為入射電場振幅，又透過光強度與電場的關係式可知 $I = \frac{c\epsilon_0}{2} E^2$ ，此處 E 代

表電場振幅， I 為光強度。故假設原先入射光的光強度為 $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$ ，

則出射的光強度應為 $I_t = \frac{c\epsilon_0}{2} E_t^2 = \frac{c\epsilon_0}{2} (E_0 \cos \theta)^2 = I_0 \cos^2 \theta$ ，故可由入射偏振片前的光強度以及偏振片傳輸軸與入射光偏振方向的夾角 θ 求得出射光的光強度，而此即為 Malus's law。



圖四十八 線偏振光入射偏振片的電場分量

6. 考慮空氣與一折射率為 1.5 的介質之介面，計算並畫出反射係數（對 TE (S) 與 TM (P) 兩種偏振方向）。（入射角由 0 度到 90 度）

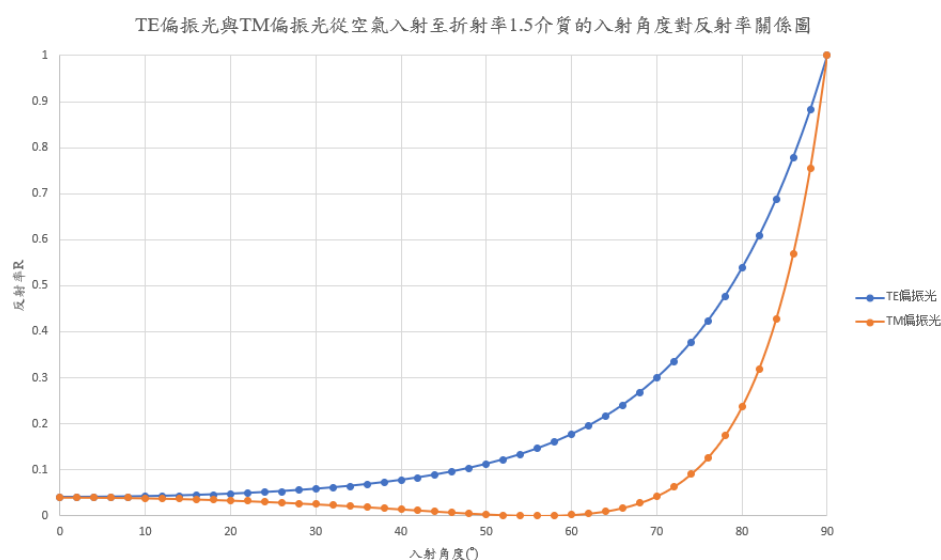
答：經由菲涅爾方程式可以透過入射與透射介質的折射率和入射角及折射角求得 TE 偏振光和 TM 偏振光的反射率，菲涅爾方程式如下：

$$R_S = \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$R_P = \left(\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right)^2$$

而其中 R_S 與 R_P 別代表 TE 與 TM 偏振光的反射率， n_1 與 n_2 分別代表入射與透射介質的折射率，而 θ_i 與 θ_t 代表入射角與折射角，此外折射角可以透過司乃爾定律 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ 求得。

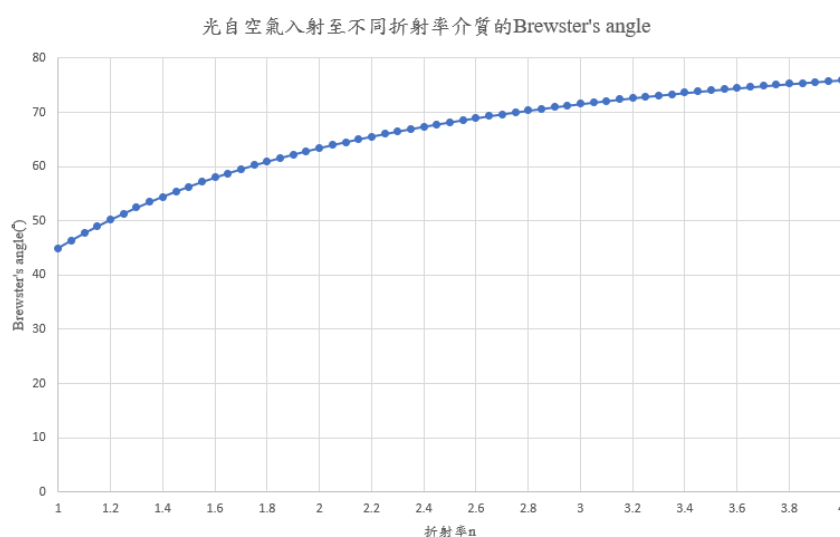
因此透過題目條件可知， $n_1 = 1$ ， $n_2 = 1.5$ ，入射角從 0 度增加至 90 度，若將資料點取點為入射角從 0 至 90 度，每 2 度取一次資料點，則可繪製出下圖：



圖四十九 TE 與 TM 光從空氣入射至折射率 1.5 介質的入射角度對反射率關係圖

7. 計算並畫出空氣與不同折射率介質之界面的 Brewster's angle，考慮折射率範圍為 $1 \leq n \leq 4$ 。

答：透過實驗原理對 Brewster's angle 的推導，可知 Brewster's angle 為 $\theta_p = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1}$ ， n_1 與 n_2 分別代表入射與透射介質的折射率，而根據題目敘述， $n_1 = 1$ ，而 n_2 範圍為 1 至 4，因此若取資料點為折射率從 1 至 4，且每 0.05 取一次資料點，則可就公式繪製下圖：



圖五十 光自空氣入射至不同折射率介質的 Brewster's angle

(3) Q&A 題目作答

1. 在實驗部分 1 中，為何光強度偵測計測到之值會隨著偏振片 1 之轉動改變？

答：因為在雷射構造中具有 Brewster window，其原理是由於當入射角度為 Brewster's angle 時，反射光中將沒有任何 TM 偏振的分量，而僅存 TE 偏振光，相對的透射光將以 TM 偏振光為主，並帶有少量的 TE 偏振光。

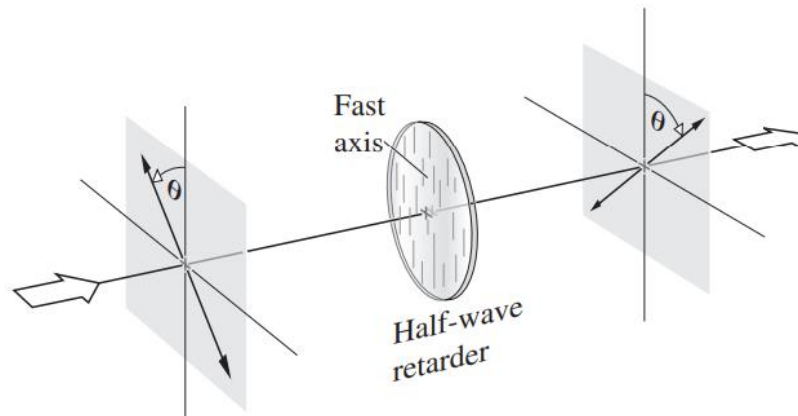
因此當雷射共振腔內部的光入射 Brewster window 時，大部分的 TE 偏振光將被反射，而所有的 TM 偏振光與少量的 TE 偏振光將透射 Brewster window，而透過雷射共振腔的設計，僅有透射 Brewster window 的光能達成共振，因而持續放大，而被 Brewster window 反射的 TE 光無法與共振腔長度對應，因此將在共振腔內部逐漸損耗，故最後出射的雷射光即為 TM 偏振光。

因此在實驗部分 1 中，雷射的出射光即帶偏振方向，所以當偏振片 1 轉動時，光度計所量測之光強度將逐漸變化。

2. 在實驗部分 3 中，為何在旋轉偏振片 90 度而半波片 45 度時，光強度為最大值？

答：在實驗部分 3 中，首先使偏振片 1 的傳輸軸垂直桌面，接著再加入 HWP 並旋轉使偏振片 1 的出射光強度達最大值，而由於對線偏振光而言，HWP 具有旋轉偏振方向的功能，因此當旋轉 HWP 時，即是使雷射的出射光改變偏振方向，使 HWP 的出射線偏振光偏振方向與偏振片 1 的傳輸軸方向平行，此時光強度為最大值。

而若再旋轉 HWP 45 度，則相較於旋轉 45 度前，旋轉 HWP 後的出射光偏振方向將改變 90 度，故此時若將偏振片連帶旋轉 90 度，則出射光的偏振方向又將與偏振片的傳輸軸方向平行，故光強度仍為最大值。



圖五十一 HWP 與線偏振光夾 θ 角時，出射光的角度變化[1]

3. 請以實驗預習第二點所述座標旋轉的概念推導 Malus's law。

答：假設入射光為 \hat{y} 極化光，則透過實驗原理時對 Jones vector

與 Jones matrix 的討論可知， \hat{y} 極化光的 Jones vector 為 $\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，且

傳輸軸平行 y 軸的線偏振片之 Jones matrix 為 $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，此時若旋轉該線偏振片一 θ 角，則傳輸軸方向與入射光偏振方向即夾 θ 角，而此時透過座標旋轉的概念可知，原先傳輸軸平行 y 軸的線偏振片在旋轉 θ 角後，其 Jones matrix 應表示為：

$$\begin{aligned} M_\theta &= R^{-1}MR = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

而經 \hat{y} 極化光入射後，出射光的 Jones vector 為：

$$\tilde{E}_t = M_\theta \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

此時 Jones vector 內的數值為 \hat{x} 與 \hat{y} 的電場振幅，而其相對光強度則為：

$$\begin{aligned} I_t &= (-\sin \theta \cos \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \\ &= \cos^2 \theta \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta \end{aligned}$$

而觀察原入射光的 Jones vector 可知相對光強度為 $I_0 = 0^2 + 1^2 = 1$ ，因此最後可知透射光強度與入射光強度的關係為 $I_t = I_0 \cos^2 \theta$ ，即為 Malus's law。

(4) 實驗結果討論

在實驗部分 1 中，以兩個偏振片的架設驗證 Malus's law，而實驗數據與理論值大致吻合，但須注意實驗中的偏振片並非理想偏振片，故具洩漏光，並且會對平行傳輸軸的偏振光少部分吸收，也因此考慮理想偏振片的理論值最大值將較實驗值最大值大，且理論值最小值為 0，但實驗值最小值仍為一極小值。而實驗部分 1 的誤差來源主要來自於一開始 2 個偏振片的角度設置，因在旋轉偏振片 2 使出射光得最小值時仍有微小誤差，故導致 2 偏振片並未完全垂直，所以實驗數據與理論值會有微小角度偏移量。此外，由於雷射光並未完全入射於偏振片中心。這將導致在旋轉偏振片時，雷射光點入射在偏振片上的不同位置，這將導致偏振片上不同位置的微小差異或瑕疵影響實驗數據，此推論從實驗數據曲線兩側的不對稱即可證實。

在實驗部分 2 中，以兩個偏振片以及 QWP 或 HWP 驗證波片對入射光偏振態、角度、光強度的影響。而對於 QWP 旋轉 30 度的實驗數據而言，實驗數據與理論值有明顯的角度偏移，且可能是因為偏振片 2 的角度誤差，且最大值與最小值處的光強度接近 3 倍差異，但並非剛好 3 倍，此可能是因為 QWP 的旋轉角度誤差導致出射橢圓偏振光的長軸與短軸並非恰好 $\sqrt{3}$ 倍關係。

而對 QWP 旋轉 45 度的實驗數據而言，實驗曲線與理論值曲線形狀不同，理論上經過 QWP 的出射光應為圓形偏振光，故 2 個正交的電場分量振幅相同，也因此偏振片 2 在任何旋轉角度下，光強度都應為一定值。但此處實驗值呈周期性變化，故可得知 QWP 並未恰好轉至 45 度，因此使得 QWP 出射光為長短軸相當接近的橢圓偏振光，而透過最大值與最小值的比較，可得出橢圓長短軸的比例差異，進而推導出 QWP 實際的旋轉角度，而經由計算得出 QWP 實際旋轉角度為 42.47° ，有著 2.53° 的誤差。

而對 HWP 旋轉 45 度的實驗數據而言，實驗值與理論值相當吻合，且與實驗部分 1 的實驗數據作圖恰好呈 90 度位移，這也驗證了 HWP 對線性偏振光的偏振角度旋轉性。

此外，觀察 QWP 與 HWP 的實驗曲線，皆可發現實驗數據曲線兩側同樣具有不對稱的情形，而這可同樣再次驗證實驗部分 1 的誤差來源推導。

在實驗部分 3 中，利用了 HWP 與偏振片製成偏振方向與塊材入射面垂直或水平的 TE、TM 光，並量測在不同入射角度下的反射率，觀察 TE 偏振的實驗曲線可發現，其與理論值曲線趨勢吻合，但有約 20% 的誤差，而誤差來源可能來自塊材初始擺放位置並未恰好垂直雷射，使得其具有一小角度偏差。導致所有數據皆有著大致相同的角度偏移。而對 TM 偏振光而言，實驗值曲線與理論值曲線吻合，但在接近布魯斯特角的實驗誤差相當大，這應是因為在布魯斯特角附近的反射率極小，因此微小的環境干擾在比例上將帶來相當大的誤差。而在夾擊布魯斯特角時，雖然實驗值與理論值有些許誤差，但整體趨勢仍呈現布魯斯特角位於 56 度至 57 度間，符合理論值。

此外，在整體實驗進行時都應注意偏振片、波片的擺放是否與雷射入射方向垂直，否則將導致實驗數據的誤差以及實驗曲線的偏差。

五、參考資料及文獻：

- [1] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 8, pp.339-374.
- [2] Frank L. Pedrotti , Leno S. Pedrotti , Leno M. Pedrott , *Introduction to Optics* , 3th ed. (Addison-Wesley , 2006) , Chapter 15, pp.350-357.
- [3] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 3.4.3, pp.72-74.
- [4] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 4.6, pp.121-133.
- [5] Frank L. Pedrotti , Leno S. Pedrotti , Leno M. Pedrott , *Introduction to Optics* , 3th ed. (Addison-Wesley , 2006) , Chapter 23, pp.491-499.
- [6] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 3.5.1, pp.78-83.
- [7] Frank L. Pedrotti , Leno S. Pedrotti , Leno M. Pedrott , *Introduction to Optics* , 3th ed. (Addison-Wesley , 2006) , Chapter 14, pp.333-347.
- [8] David K. Cheng, *Field and wave Electromagnetics*, An Adapted Version 2nd ed.(Pearson Education Taiwan Ltd., 2016) , Chapter 8-2.3, pp.364-367
- [9] 孫仲村，” 以含不對稱十字架孔洞金屬膜實現兆赫波段相位延遲器” ，3 頁至 5 頁，2010 年。