

光電實驗(一)

實驗報告

姓	名：
學	號：
組	別：
教	授：
日	期：

一、實驗名稱：薄透鏡成像

二、實驗目的與原理：

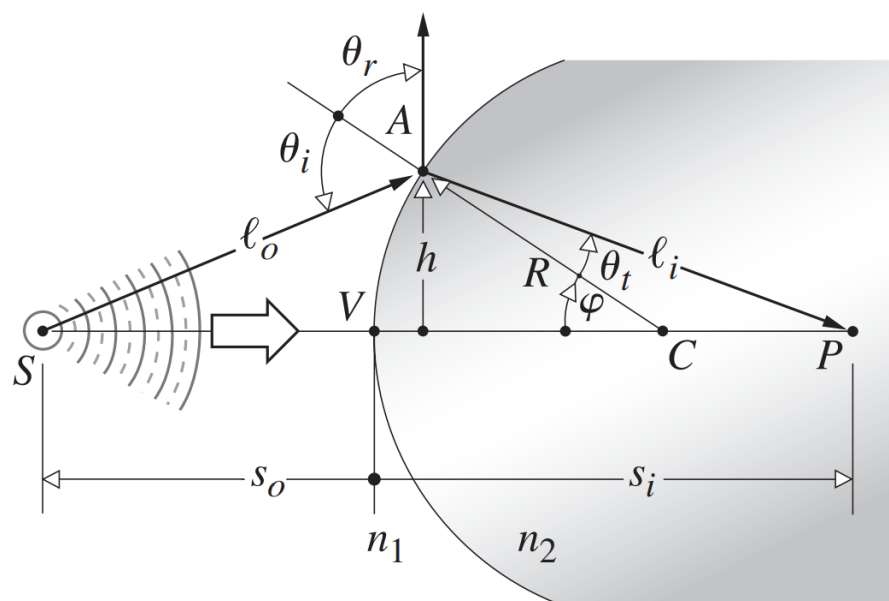
(1) 實驗目的

使用燈泡、單一透鏡和透鏡組觀察透鏡成像時，物距、像距、焦距以及放大倍率間的關係，並透過量測推得未知凸透鏡與凹透鏡的焦距。此外，驗證透鏡和透鏡組的成像公式與放大倍率公式。

(2) 實驗原理

1. 球面透鏡與近軸條件討論

如下圖一，首先考慮一個入射面為球面的透鏡，令其球面頂點為 V ，球面的曲率半徑為 R ，曲率中心為 C ，透鏡折射率為 n_2 ，環境折射率為 n_1 ，且球面中心為光軸，在頂點 V 的左方距離物距 s_o 處有點光源 S ，假定光行經距離 ℓ_o 後照射到球面上的 A 點並向光軸折射，且在透鏡內經過距離 ℓ_i 後與光軸交在 P 點，此外令 P 點位於頂點 V 的右側 s_i 距離處。最後，令 A 點對於光軸的垂直高度為 h ， $\angle SCA = \varphi$ 。



圖一 球面透鏡的入射情形討論[1]

首先，透過費馬原理可知，光傳播的路徑為光程(OPL)取極值的路徑，意即光傳播的路徑是將 OPL 做微分運算後為定值的路徑，而其定值可能為極大值，極小值或函數拐點。

而透過上圖可知， $OPL = n_1 \overline{SA} + n_2 \overline{AP} = n_1 l_o + n_2 l_i$ ，而透過餘弦定理得下二式：

$$l_o = \sqrt{R^2 + (S_o + R)^2 - 2R(S_o + R) \cos \varphi}$$

$$l_i = \sqrt{R^2 + (S_i - R)^2 - 2R(S_i - R) \cos \varphi}$$

而將上兩式代入 OPL 後，將 OPL 對變量 φ 做微分，可得：

$$\frac{dOPL}{d\varphi} = \frac{n_1 R(S_o + R) \sin \varphi}{2l_o} - \frac{n_2 R(S_i - R) \sin \varphi}{2l_i} = 0$$

整理後可得：

$$\frac{n_1}{l_o} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 S_i}{l_i} - \frac{n_1 S_o}{l_o} \right)$$

而若假定討論範圍為近軸光線，則 φ 與 h 相對較小，可套用相似計算 $\cos \varphi \approx 1$ ，因此可將上式化簡為下式：

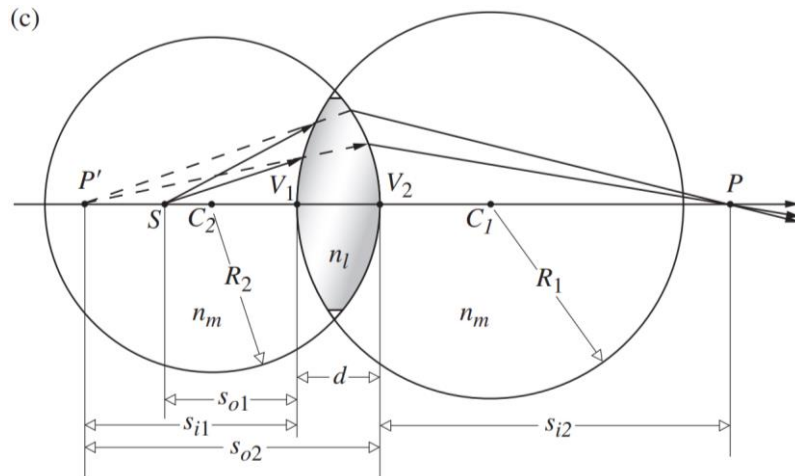
$$\frac{n_1}{S_o} + \frac{n_2}{S_i} = \frac{1}{R} (n_2 - n_1)$$

而此即為近軸光線對單面球面透鏡的行為討論。

2. 薄透鏡公式

如下圖二，考慮一薄透鏡由兩面的球面透鏡組成，而中央厚度為 d ，令左側球面的曲率半徑為 R_1 ，曲率中心為 C_1 ，頂點為 V_1 ，右側球面的曲率半徑為 R_2 ，曲率中心為 C_2 ，頂點為 V_2 ，且透鏡折射率為 n_l ，環境折射率為 n_m 。若在透鏡左側距離頂點 V_1 的 S_{o1} 處有一點光源 S ，則可透過單面球面透鏡的方程式列出下式：

$$\frac{n_m}{S_{o1}} + \frac{n_l}{S_{i1}} = \frac{1}{R_1} (n_l - n_m)$$



圖二 薄透鏡的入射情形討論[1]

其中 S_{i1} 為透過左側球面所匯聚的像距，將其定為 P' 點，而若將 P' 點再作為入射右側球面的物，則可再列出下式：

$$\frac{n_l}{S_{o2}} + \frac{n_m}{S_{i2}} = \frac{1}{R_2}(n_m - n_l)$$

最後觀察圖二，並考慮物距與像距的正負號，可發現 $-S_{i1} + d = S_{o2}$ ，然而，當討論薄透鏡時，透鏡厚度 $d \approx 0$ ，故將三式合併後，可得以下公式：

$$\frac{n_m}{S_{o1}} + \frac{n_m}{S_{i2}} = (n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

而也可假定周遭環境為空氣，故環境折射率 $n_m = 1$ ，並將兩個球面視為一薄透鏡整體討論，因此可令一開始物體對於透鏡的物距 $S_{o1} = S_o$ ，且最後出射透鏡的像距 $S_{i2} = S_i$ ，最後得下式即為薄透鏡公式，也稱為造鏡者公式。

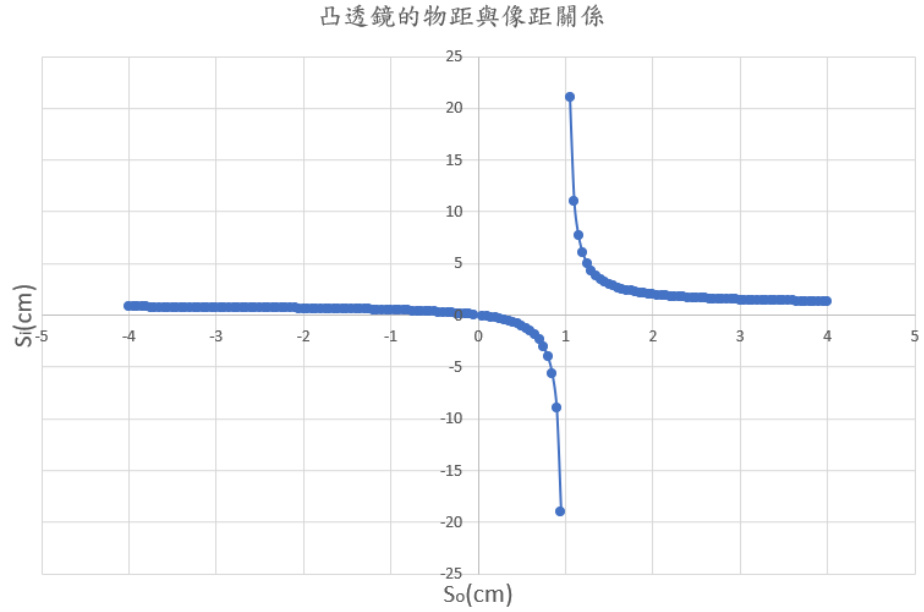
$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

3. 高斯公式

針對薄透鏡公式，可再進行討論並化簡推得高斯公式。首先觀察薄透鏡公式，可發現當 S_o 趨近無窮大時， $\lim_{S_o \rightarrow \infty} \frac{1}{S_i} = (n_l - n_e)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ ，又已知當物距趨近無窮大時，可將入射光視為平行光，則光束將聚焦在像焦點 f_i 上，故 $\lim_{S_o \rightarrow \infty} \frac{1}{S_i} = (n_l - n_e)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f_i}$ ，又當 S_i 趨近無窮大時， $\lim_{S_i \rightarrow \infty} \frac{1}{S_o} = (n_l - n_e)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f_o}$ ，故對於薄透鏡而言，像焦點 f_i 等於物焦點 f_o ，並將其定義為焦點 f ，且可將造鏡者公式整理為高斯公式：

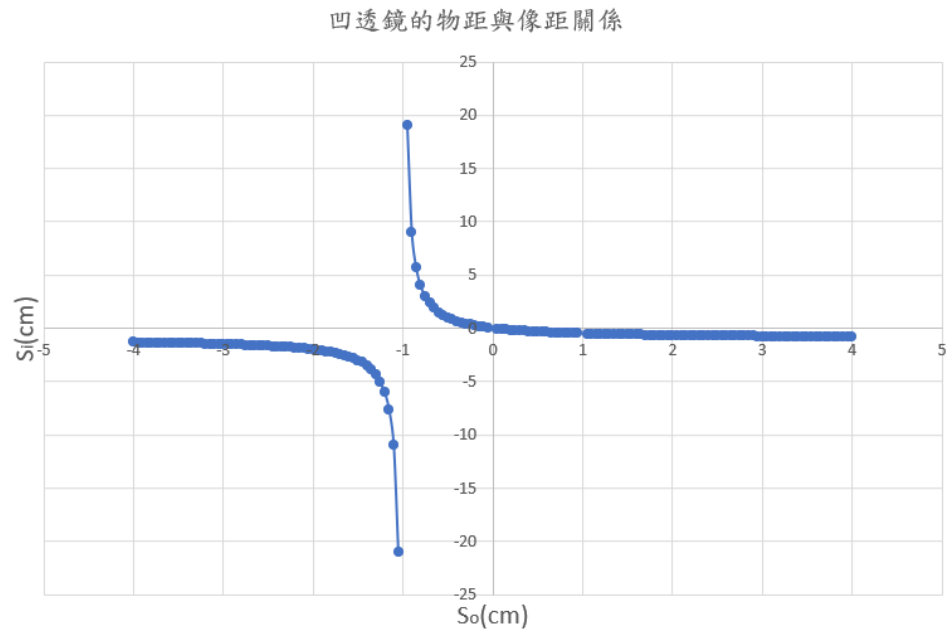
$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$$

而觀察上式，若將 S_o 、 S_i 設為變量，即討論不同物距時，同一薄透鏡的像距變化，則可發現高斯公式為雙曲線形式，將焦距 f 令為 1cm， S_o 設為橫軸變量， S_i 設為縱軸變量，則可做圖得到相對應凸透鏡的物距與像距關係圖。下圖三即為將 S_o 自 -4cm 每隔 0.05cm 取資料點至 4cm 所得之 S_o 與 S_i 之關係圖。



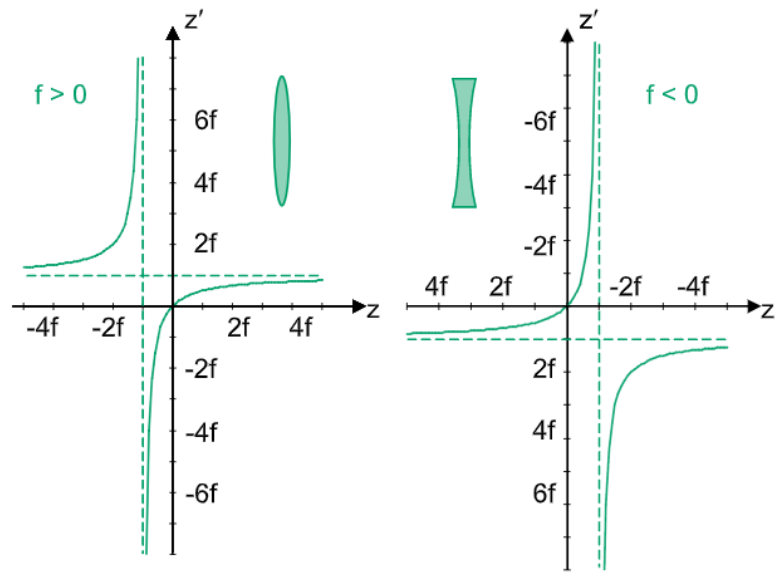
圖三 凸透鏡的物距與像距關係圖(焦距 $f=1$)

其中可注意上圖雙曲線的橫軸與縱軸皆應會往正負無限大延伸。而同理，也可對凹透鏡作圖，如下圖四。



圖四 凹透鏡的物距與像距關係圖(焦距 $f=-1$)

而若將座標軸替換為與焦距的比例，則可得下圖五，而其中 z 軸為 S_o ， z' 軸為 S_i ，且須特別注意下圖五的 S_o 正負號定義與以上討論相反，為 z 小於 0 時為實物入射。



Real Objects: $z < 0$
Real Images: $z' > 0$

Virtual Objects: $z > 0$
Virtual Images: $z' < 0$

圖五 凸透鏡與凹透鏡的物距和像距關係圖[2]

4. 薄透鏡、球面透鏡表面的參數正負號討論

當討論透鏡行為時，一般假設入射光自透鏡左側入射，自右方出射，故透鏡左側也稱為物空間，右側則稱為像空間，而對於各種薄透鏡、球面透鏡表面討論的參數正負號，採用以下定義：

表一 討論薄透鏡、球面透鏡表面時的參數正負號條件(光自左側入射)[1]

參數	正值時的條件	負值時的條件
物距 S_o 、前焦距 f_o	位於透鏡左側	位於透鏡右側
像距 S_i 、後焦距 f_i	位於透鏡右側	位於透鏡左側
曲率半徑 R	曲率中心 C 位於頂點 V 左側	曲率中心 C 位於頂點 V 右側
物高 h 、像高 h'	位於光軸上方	位於光軸下方

而以上參數的正負號對於薄透鏡行為的討論也代表著不同的意義：

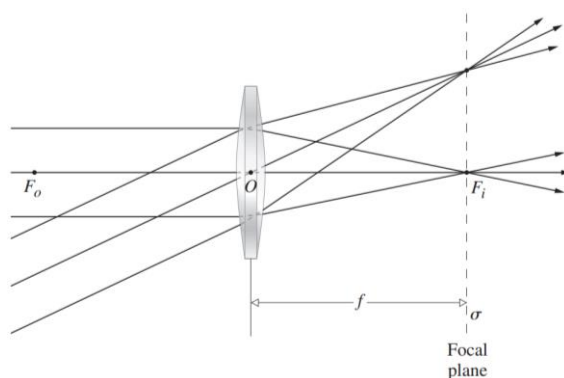
表二 薄透鏡相關參數正負號的意義(光自左側入射)[1]

參數	正值時對薄透鏡的意義	負值時對薄透鏡的意義
物距 S_o	實物	虛物
像距 S_i	實像	虛像
焦距 f	透鏡使光線匯聚	透鏡使光線發散
物高 h	正立	倒立
像高 h'	正立	倒立

5. 焦點、焦平面

一般可透過透鏡的性質在透鏡前後(左、右側)個別找出前焦點與後焦點，而前焦點的性質為當光經過前焦點入射透鏡時，皆會以平行光軸的方向出射透鏡，而後焦點的性質則為當光平行光軸入射透鏡時，出射光皆會通過後焦點。

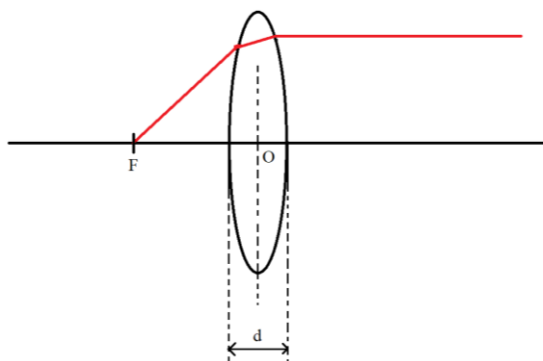
而也可透過焦點位置定義前焦平面與後焦平面，分別為垂直光軸並且通過前焦點或後焦點的平面。而前焦平面的性質為，若任意方向的光線皆通過前焦平面上的同一點，則這些光出射透鏡時將互為平行光。而後焦平面的性質則為，若一組平行光以任一方向入射透鏡，則該組平行光出射透鏡時會聚焦於後焦平面上的同一點，如下圖六。



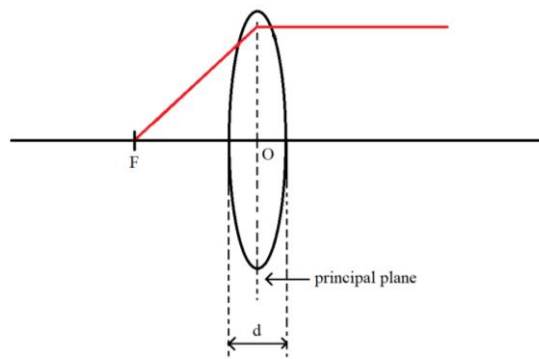
圖六 後焦平面的性質[1]

6. 主平面

當實際討論透鏡行為時，如下圖七，可發現光在入射透鏡時首先發生折射，接著在透鏡內發生水平位移，之後出射透鏡時再發生第二次折射，最後出射透鏡。而由於在討論薄透鏡時，厚度 $d \approx 0$ ，故可以假設光在透鏡內水平位移的距離極短，而光對於兩個介質面的折射可以近似於皆在同一平面上完成，故對於薄透鏡而言，具有一主平面位於透鏡中心，如下圖八，而當光入射至主平面時，光受透鏡影響而偏折，最後出射透鏡。對於薄透鏡而言，主平面的位置可定義出物距與像距，即物距應為物體至主平面的距離，而像距亦同。



圖七 光線在透鏡內的實際偏折情形

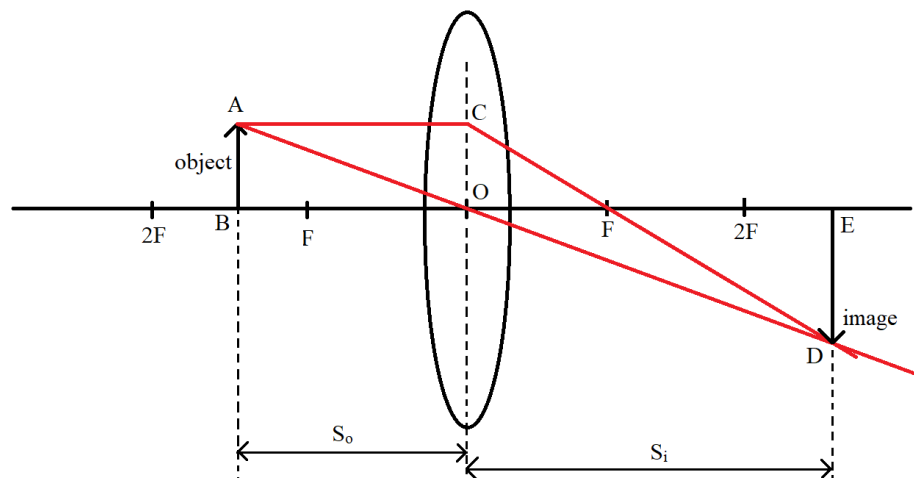


圖八 薄透鏡中主平面的定義與光線偏折情形

7. 射線作圖法

除了透過高斯公式得知物與像的關係，也可經由射線作圖的方式直接討論，如下圖九，其中 F 為焦點位置，而 $2F$ 則為 2 倍焦距位置。當物體位於光軸上時，一般取兩條線做為參考，一條是平行光軸入射的光，而此光線會通過後焦點，另一條射線則與前一條射線自物體的同一點發射，並且通過透鏡的中心，未經偏折後直接出射透鏡，而此兩條線的聚焦處即為成像位置。

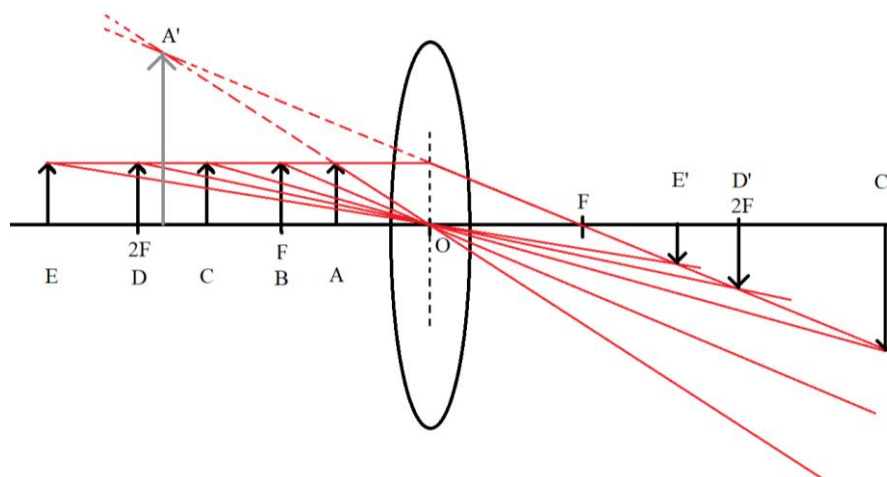
透過作圖法除了可找出物距與像距的關係，也可得知成像對物體的正倒立關係、放大關係，此外也可透過作圖法推導放大倍率公式。



圖九 利用射線作圖得知物與像的關係

8. 凸透鏡成像

透過對單一凸透鏡的作圖，我們可以得到下圖十，而觀察後可發現，當物位於「一倍焦距內」、「一倍焦距上」、「一倍焦距與兩倍焦距內」、「兩倍焦距上」、「兩倍焦距外」等五種不同位置時，會分別對應不同的成像位置、放大關係以及正倒立關係，而也可將其統整如下表三。



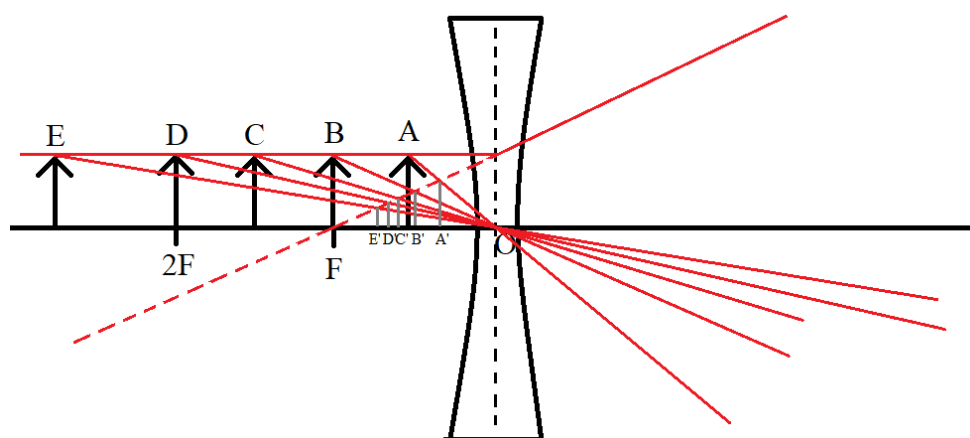
圖十 利用作圖法得知凸透鏡的成像關係

表三 單一凸透鏡的成像關係

物的位置	像的位置	成像性質
(A)鏡前一倍焦距內	(A')鏡前，物的後方	正立放大虛像
(B)鏡前一倍焦距上	鏡後無窮遠處(不成像)	不成像
(C)鏡前一倍焦距與兩倍焦距內	(C')鏡後兩倍焦距外	倒立放大實像
(D)鏡前兩倍焦距上	(D')鏡後兩倍焦距上	倒立等大實像
(E)鏡前兩倍焦距外	(E')鏡後一倍焦距與兩倍焦距內	倒立縮小實像

9. 凹透鏡成像

如同對凸透鏡的作圖，當對凹透鏡作圖時，同樣考慮五種不同的物距，則可得到相對應的成像關係，如下圖十一。觀察下圖，可發現對於單一凹透鏡，不論物體擺放於何處，成像位置皆在鏡前的一倍焦距內、物距大於像距，並且成像必為縮小的正立虛像。



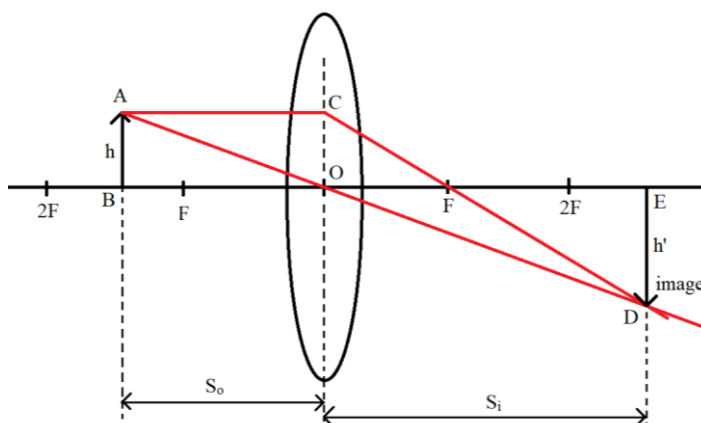
圖十一 利用作圖法得知凸透鏡的成像關係

10. 單一透鏡的放大倍率

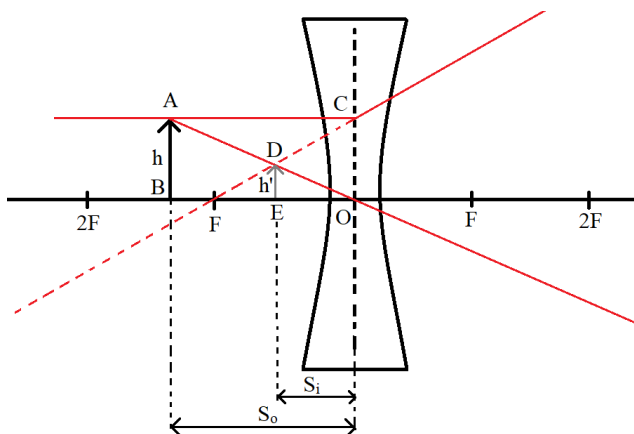
觀察圖十與圖十一，可發現針對每個不同物距的成像情形，都可以對其物距與像距找到一對相似三角形，如下圖十二與下圖十三，分別為凸透鏡和凹透鏡的討論。

而不論是凸透鏡或凹透鏡，皆可以套用以下討論，即觀察下二圖，可發現三角形 ABO 與三角形 DEO 互為相似三角型，因此 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{EO}}$ ，也因

此放大倍率 $|M_T| = \left| \frac{h'}{h} \right| = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{BO}} = \left| \frac{S_i}{S_o} \right|$ 。



圖十二 凸透鏡的放大倍率討論



圖十三 凹透鏡的放大倍率討論

然而當觀察參數正負號與圖像正倒立關係時可發現，當 S_o 、 S_i 皆為正值時，其成像與物體倒立，而當 S_o 為正值、 S_i 為負值時，其成像與物體正立，故對上式 $|M_T| = \left| \frac{h'}{h} \right| = \left| \frac{S_i}{S_o} \right|$ 修改其正負號條件，得下式：

$$M_T = \frac{h'}{h} = \frac{-S_i}{S_o}$$

而其中若 M_T 為正值，即代表像與物正立，若為負值則反之。

11. 透鏡組成像

當有兩面以上各不相同的透鏡時，即成透鏡組，而透鏡組的成像同樣可透過高斯公式推導。

假設若有一物位於透鏡 L_1 前 S_{o1} 處，且令其經過透鏡組的成像位於透鏡 L_2 後的 S_{i2} 處，而 L_1 的焦距為 f_1 ，像距為 S_{i1} ， L_2 的焦距為 f_2 ，物距為 S_{o2} ，且兩透鏡間距為 d ，則可先只考慮透鏡 L_1 、忽略透鏡 L_2 ，如下圖

十四，透過高斯公式 $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$ 可知，物體散出的光在通過 L_1 後會先匯聚

一像在 $S_{i1} = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{S_{o1}}}$ 處，而此透鏡 L_1 的成像將會做為透鏡二的物而再次匯

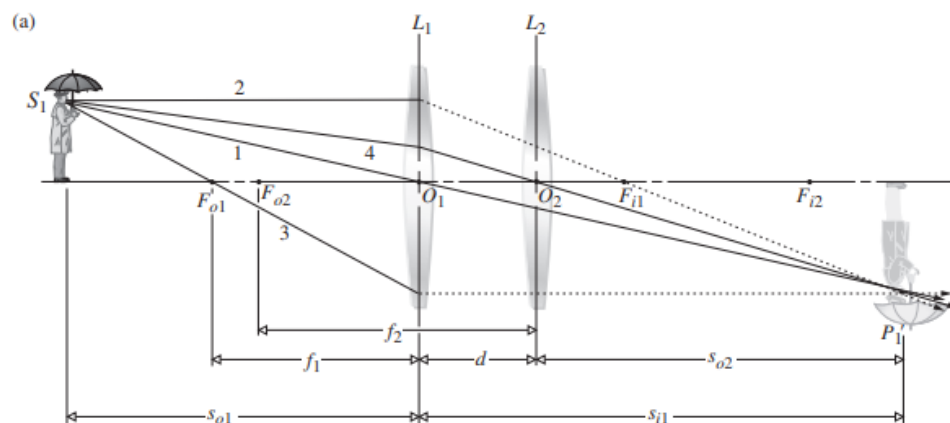
聚或發散，也因此觀察下圖可知，當 L_1 的像距為 L_2 的物時，其對於 L_2

的物距 $S_{o2} = d - S_{i1}$ ，並可再次套用高斯公式得 $S_{i2} = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{S_{o2}}} = \frac{S_{o2}f_2}{S_{o2} - f_2}$ ，且

再代入 S_{o2} 與 S_{i1} ，最後經化簡後可得下式：

$$S_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}{d - f_2 - \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}$$

透過上式，即可使我們在已知兩個透鏡焦距與透鏡間距的情形下，將此兩個透鏡視為透鏡組，而對應物體對於透鏡組的物距(物體與 L_1 的距離)與像距(L_2 與成像的距離)的關係，並且可套用於任意薄凸透鏡與薄凹透鏡的 2 面透鏡組合。



圖十四 透鏡組的成像推導[1]

除了物距與像距的關係，也可推導出透鏡組的放大倍率，由於直觀上 L_2 即是將 L_1 的成像再次放大(縮小)，故可知總放大倍率(最後成像與原始物體的

放大倍率) $M_T = M_{T1} \times M_{T2}$ ，而在代入 $M_{T1} = -\frac{S_{i1}}{S_{o1}}$ 、 $M_{T2} = -\frac{S_{i2}}{S_{o2}}$ 並透過高斯

公式進行相關化簡後，可得總放大倍率如下式：

$$M_T = \frac{f_1 S_{i2}}{d(S_{o1} - f_1) - S_{o1} f_1}$$

此外，由於已將兩透鏡視為透鏡組討論，故此透鏡組也將可套用原先對於焦點的定義，找出對於此透鏡組的前焦長(f.f.l, front focal length)與後焦長(b.f.l, back focal length)。

透過前焦點的定義可知，當出射光平行出射透鏡時，視為像距趨近於無窮大，而物距即在前焦點上，因此對於透鏡組可利用高斯公式列出下式

$$\frac{1}{S_{o1}} \Big|_{S_{i2} \rightarrow \infty} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{S_{i1}} = \frac{1}{f.f.l}, \text{ 而再考慮 } S_{o2} = d - S_{i1}, \text{ 由於當 } L_2 \text{ 的像距 } S_{i2}$$

趨近無窮大時， L_2 的物距 S_{o2} 將趨近於 f_2 ，故 $S_{i1} \rightarrow d - f_2$ ，而將此條件代入前式後即可得下式：

$$f.f.l = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}$$

而對於後焦點的定義則可知，當入射光平行入射透鏡時，視為物距趨近於無窮大，而此時像距位於後焦點上，故 $\frac{1}{S_{i2}} \Big|_{S_{o1} \rightarrow \infty} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{S_{o2}} = \frac{1}{b.f.l}$ ，

且同樣考慮 $S_{o2} = d - S_{i1}$ ，由於當 L_1 的物距趨近無窮大時， L_1 的像距趨近於 f_1 ，故 $S_{o2} \rightarrow d - f_1$ ，最後同樣代入等式後可得下式：

$$b.f.l = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

此外，除了前焦長與後焦長，還可定義出透鏡組的有效焦長(e.f.l, effective focal length)，首先考慮透鏡組的放大倍率 $M_T = M_{T1} \times M_{T2} =$

$$\frac{S_i}{S_o} = \frac{S_{i1}}{S_{o1}} \times \frac{S_{i2}}{S_{o2}}, \text{ 假設物在位於透鏡組無窮遠處，則可知 } S_o \approx S_{o1} \rightarrow \infty, \text{ 且}$$

$S_{i1} = f_1$ ，並可將透鏡組視為一系統，故出射光將聚焦於透鏡組之有效焦長，即 $S_i = f = e.f.l$ ，整理至放大倍率公式內即可得 $f = f_1 \times \frac{S_{i2}}{S_{o2}}$ ，且再

對第二片透鏡 L_2 考慮高斯公式 $\frac{1}{S_{o2}} + \frac{1}{S_{i2}} = \frac{1}{f_2}$ ，得 $S_{i2} = \frac{S_{o2} f_2}{S_{o2} - f_2}$ ，又 $S_{o2} = d - S_{i1}$ ，故可將下四式合併並化簡：

$$f = f_1 \times \frac{S_{i2}}{S_{o2}}$$

$$S_{i2} = \frac{S_{o2} f_2}{S_{o2} - f_2}$$

$$S_{o2} = d - S_{i1}$$

$$S_{i1} = f_1$$

最後即可化簡整理得出下式：

$$\frac{1}{f} = \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2}$$

並可得有效焦長公式：

$$\frac{1}{e.f.l} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

此外，也可透過 e.f.l 求得系統的主平面，即：

$$\text{前主平面的位置為} \frac{e.f.l \times d}{f_2}$$

$$\text{後主平面的位置為} -\frac{e.f.l \times d}{f_1}$$

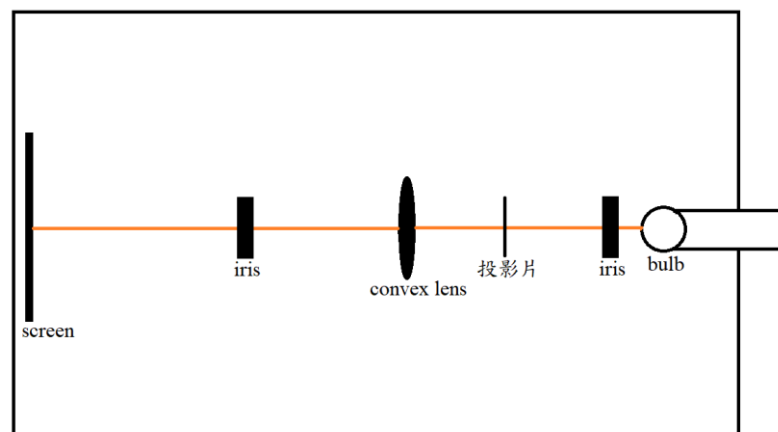
三、實驗步驟(含配置圖)：

1. 凸透鏡成像實驗

首先如下圖十五架設光路，利用雷射固定架安裝燈泡座與燈泡，接著將未知焦距的凸透鏡架設於燈泡前 40cm 處並固定，將透明且具有刻度的投影片安裝於底片固定夾上，置於燈泡與透鏡中間，並將屏幕置於透鏡後。由於實驗中需不斷移動投影片與屏幕位置，故不需固定在光學桌上，此外，可設立兩個光圈於光路中，加以確認燈泡是否歪斜，確保光軸的水平。

將投影片至透鏡的距離設為物距，透鏡至屏幕的距離設為像距，將投影片擺放在不同的位置，紀錄此時物距，透過移動屏幕，找出投影片投影在屏幕時可得最清楚的像，此時屏幕位置即為像距並將其記錄。取投影片上的刻度與屏幕上影像的實際長度做比較，紀錄物高與像高，總共取 6 個不同的物距作為紀錄點。

利用兩種放大倍率公式，即物高與像高的關係以及物距與像距的關係對各紀錄點求得兩種量測倍率，最後利用高斯成像公式求得未知透鏡的焦距並求得平均焦距。



圖十五 未知焦距之凸透鏡的量測

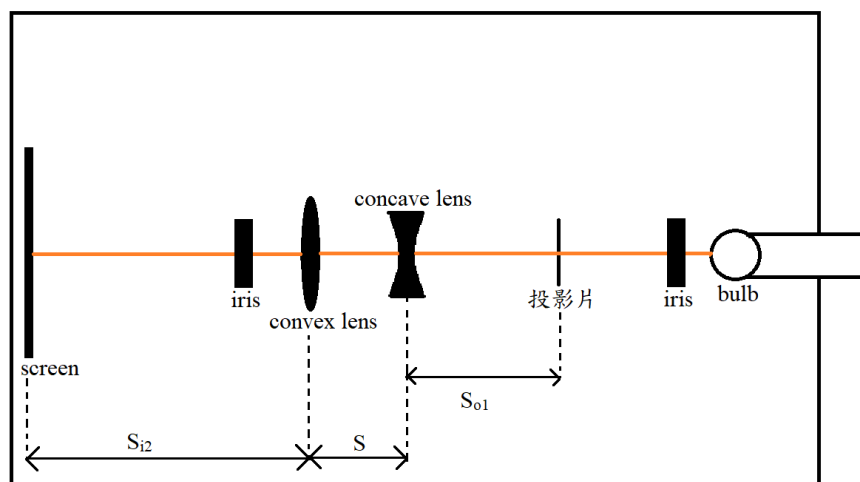
得知未知透鏡的焦距後，將投影片分別擺放於「2 倍焦距之外、2 倍焦距上、2 倍焦距至 1 倍焦距間、1 倍焦距上、1 倍焦距內」，並個別移動屏幕得其清晰的投影成像，如上同樣紀錄物距、像距、物高、像高，並用兩種公式計算放大倍率。最後驗證物距位於不同位置時，所得成像的關係。

2. 求未知凹透鏡之焦距

首先安裝下圖十六之光路，將上圖十五光路的凸透鏡替換成一未知焦距的凹透鏡，將其安裝於燈泡前 30cm 處，且再將一焦距為 15cm 的 105A 凸透鏡，安裝於凹透鏡後約 15cm 至 20cm 處，即兩透鏡間距 S 為 $15\text{cm} < S < 20\text{cm}$ 。將投影片置於燈泡與凹透鏡間，並將屏幕架設於凸透鏡後，可在光路中加設兩光圈以確保光軸的水平。

將投影片至凹透鏡的距離設為物距 S_{o1} ，凸透鏡至屏幕的距離設為像距 S_{i2} ，將投影片擺放在不同的位置，紀錄此時物距 S_{o1} ，透過移動屏幕，找出投影片投影在屏幕時可得最清楚的像，此時屏幕位置即為像距 S_{i2} 並將其記錄。取投影片上的刻度與屏幕上影像的實際長度做比較，紀錄物高與像高，總共取 6 個不同的物距 S_{o1} 作為紀錄點。

利用兩種放大倍率公式，對各紀錄點求得兩種量測倍率，最後利用透鏡組成像公式求得未知透鏡的焦距並求得平均焦距。



圖十六 未知焦距之凹透鏡的量測

將透鏡間距離 S 改變 2 公分，並仍保持在 15cm 至 20cm 間，同樣取 6 個不同的物距 S_{o1} 做為紀錄點，量測像距 S_{i2} 、物高、像高，並同樣利用兩種公式計算放大倍率，利用透鏡組成像公式計算凹透鏡的焦距與平均焦距。

四、數據分析與討論：

(1) 實驗數據整理及分析

表四 未知凸透鏡焦距量測數據

資料點	物距 $S_o(\text{cm})$	像距 $S_i(\text{cm})$	物高 $h_o(\text{cm})$	像高 $h_i(\text{cm})$	量測倍率 M $(-S_i/S_o)$	量測倍率 M (h_i/h_o)	未知透鏡 焦距 f(cm)
點 1	32.20	14.80	1.00	0.45	0.460	0.45	10.14
點 2	28.30	15.60	1.00	0.52	0.551	0.52	10.06
點 3	23.80	16.90	1.00	0.70	0.710	0.70	9.88
點 4	19.80	19.85	1.00	1.00	1.001	1.00	9.91
點 5	33.20	14.15	1.00	0.42	0.426	0.42	9.92
點 6	29.70	15.35	1.00	0.51	0.517	0.51	10.12

未知凸透鏡焦距 f 之平均值為 10.005cm

此處量測出的放大倍率 M 採用了兩種公式計算的方式，即透過單一透鏡作圖而推導出的 $M_T = \frac{h'}{h} = \frac{-S_i}{S_o}$ ，此處代號標示為 $M = |M_T| = \left| \frac{h_i}{h_o} \right| = \left| \frac{-S_i}{S_o} \right|$ ，而透過上表也可發現，兩種公式求得的量測倍率相當接近。而將實驗所量得之物距與像距代入到高斯公式 $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$ 中，即可根據各點求得焦距 f 值。

表五 已知凸透鏡焦距的 5 筆特定物距之數據

資料點	與焦距之關係	物距 $S_o(\text{cm})$	像距 $S_i(\text{cm})$	物高 $h_o(\text{cm})$	像高 $h_i(\text{cm})$	量測倍率 M $(-S_i/S_o)$	量測倍率 M (h_i/h_o)	透鏡焦距之計算值 f(cm)
點 1	2f 外	31.90	14.8	1.00	0.45	0.46	0.45	10.11
點 2	2f 上	20.00	20.05	1.00	1.00	1	1	10.01
點 3	f 至 2f	13.90	34.40	1.00	2.45	2.47	2.45	9.90
點 4	f 上	10.00	-	1.00	-	-	-	-
點 5	f 內	8.050	-	1.00	-	-	-	-

凸透鏡之實際焦距 f 為 10cm

在得知表四中未知凸透鏡的焦距實際值為 10cm 後，將其擺放於五種特定的位置，可發現其物距與像距的關係符合凸透鏡的成像關係，如下表六，而其中需注意當物體位於焦點上時，成像位置為鏡後無窮遠處，故無法量得像距與像高，而當物體位於一倍焦距內時，成像為鏡前的放大虛像，然而虛像並未有實際光線會聚，故無法在屏幕上成像，自然無法量得像距與像高。

表六 單一凸透鏡的成像關係

物的位置	像的位置	成像性質
鏡前兩倍焦距外	鏡後一倍焦距與兩倍焦距內	倒立縮小實像
鏡前兩倍焦距上	鏡後兩倍焦距上	倒立等大實像
鏡前一倍焦距與兩倍焦距內	鏡後兩倍焦距外	倒立放大實像
鏡前一倍焦距上	鏡後無窮遠處(不成像)	不成像
鏡前一倍焦距內	鏡前，物的後方	正立放大虛像

得知凸透鏡的實際焦距後，即可計算各點求得之焦距與實際焦距的誤差，並可透過將物距 S_o 與實際焦距 $f=10\text{cm}$ 代入高斯公式中，得各點像距 S_i 的理論值，進一步求得像距 S_i 與理論值的誤差，並將理論值像距 S_i 與物距 S_o 做計算得理論放大倍率 M ，最後可得量測倍率與理論放大倍率的誤差。而由於表四與表五皆為同一光路所量測之數據，故可將表四的 6 個資料點與表五的前 3 個資料點一起統整如下表七。

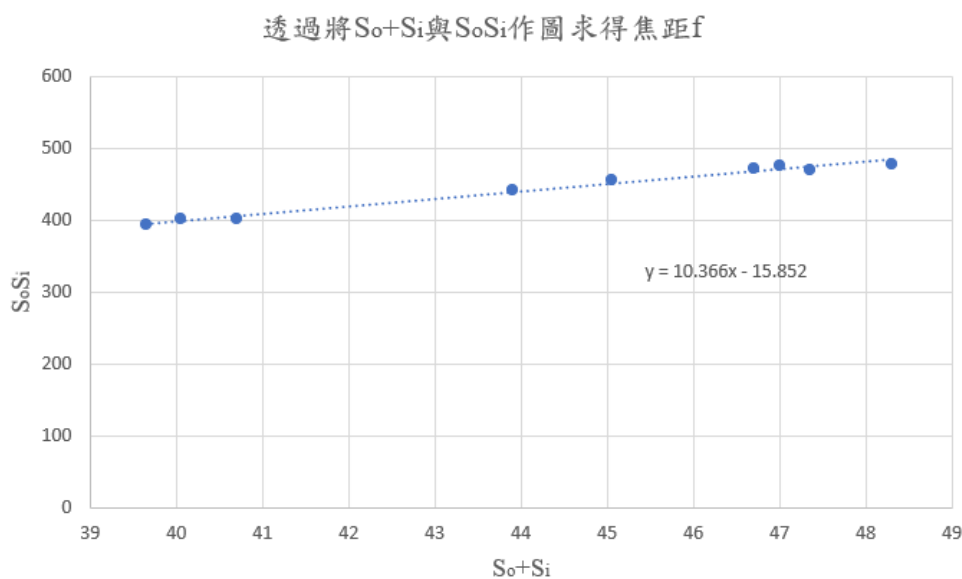
表七 凸透鏡焦距量測數據之誤差統計

資料點	物距 $S_o(\text{cm})$	理論 像距	理論量測 倍率	焦距 誤差	像距 誤差	量測倍率 誤差	量測倍率 誤差
表四點 1	32.20	14.50	0.45	1.40%	2.07%	2.14%	0%
表四點 2	28.30	15.46	0.55	0.60%	0.91%	0.22%	5.45%
表四點 3	23.80	17.25	0.72	1.20%	2.03%	1.38%	2.78%
表四點 4	19.80	20.20	1.02	0.90%	1.73%	1.71%	1.96%
表四點 5	33.20	14.31	0.43	0.80%	1.12%	0.88%	2.33%
表四點 6	29.70	15.08	0.51	1.20%	1.79%	1.34%	0%
表五點 1	31.90	14.57	0.46	1.1%	1.58%	0%	2.17%
表五點 2	20.00	20.00	1.00	0.1%	0.25%	0%	0%
表五點 3	13.90	35.64	2.56	1%	3.48%	3.52%	4.30%

此外，表四中 6 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.05%，表五中前 3 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.067%，表四與表五共 9 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.056%。

另外，透過整理高斯公式 $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$ ，可得另一式 $S_o S_i = f(S_o + S_i)$ ，且

將表四與表五的 9 個資料點統整，以 $S_o + S_i$ 為橫軸，以 $S_o S_i$ 為縱軸作圖，理論上應可得一通過原點的斜直線，而通過上式可知，將此 9 個數據點透過最小平方方法所得之擬和線的斜率即為焦距 f ，如下圖十七，也因此可知用此方式求得的焦距 f 為 10.366cm，而與理論值之誤差為 3.66%。



圖十七 透過將 S_o+S_i 與 S_oS_i 作圖求得焦距 f

表八 未知凹透鏡焦距量測數據(1)

資料點	透鏡間距 $S(\text{cm})$	物距 $S_{o1}(\text{cm})$	像距 $S_{i2}(\text{cm})$	物高 $h_o(\text{cm})$	像高 $h_i(\text{cm})$	量測倍率 M	量測倍率 $M(h_i/h_o)$	未知透鏡 焦距 $f_1(\text{cm})$
點 1	17.40	27.70	41.60	1.00	0.34	0.388	0.34	-7.755
點 2	17.40	25.20	42.00	1.00	0.43	0.424	0.43	-7.761
點 3	17.40	23.70	42.30	1.00	0.44	0.449	0.44	-7.753
點 4	17.40	18.70	43.70	1.00	0.58	0.557	0.58	-7.761
點 5	17.40	15.10	44.90	1.00	0.70	0.677	0.7	-7.758
點 6	17.40	22.40	42.60	1.00	0.45	0.473	0.45	-7.740

未知凹透鏡焦距 f_1 之平均值為 -7.740cm

由於單一凹透鏡的成像皆為縮小的正立虛像，故無法量測單一凹透鏡的像距與像高，自然無法直接求得其焦距，故需要另一已知焦距的凸透鏡設置於光路中，使凹透鏡所產生的虛像作為凸透鏡的物，並匯聚其光線使之成像於屏幕上，則可以實際測得其像距與物高，並利用透鏡組公式求得焦距。

由透鏡組成像公式可知：

$$S_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}{d - f_2 - \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}$$

而在實驗中，物距 S_{o1} 、像距 S_{i2} 與後方凸透鏡的焦距 f_2 皆為已知，前方凹透鏡焦距 f_1 為未知，故可以將上式移項整理成下式：

$$f_1 = \frac{S_{o1}\alpha}{S_{o1} + \alpha}, \alpha = \frac{S_{i2}d - S_{i2}f_2 - f_2d}{S_{i2} - f_2}$$

可求得表上六個數據點的未知透鏡焦距 f_1 ，而量測倍率一樣以兩種方式計算，一種為直接對通過透鏡組前的物高 h_o 跟通過透鏡組後的像高 h_i 做比較，得

$$M = |M_T| = \left| \frac{h_i}{h_o} \right|, \text{ 而另一種計算方式可自透鏡組的放大率公式 } M_T = M_{T1} \times M_{T2} =$$

$$M_T = \frac{f_1 S_{i2}}{d(S_{o1} - f_1) - S_{o1}f_1} \text{ 求得，而式中的 } f_1 \text{ 即代入由公式所推得的各數據點之未知凹}$$

透鏡焦距 f_1 ，此外，透過上式所求得之透鏡組的放大倍率 M 皆為負值，故可知像與物的關係應為倒立，而此處量測倍率 M 不表示正倒立關係，僅呈現物體放大的

$$\text{倍率，故將上式加上絕對值，即 } M = |M_T| = \left| \frac{f_1 S_{i2}}{d(S_{o1} - f_1) - S_{o1}f_1} \right|。$$

表九 未知凹透鏡焦距量測數據(2)

資料點	透鏡間距 $S(\text{cm})$	物距 $S_{o1}(\text{cm})$	像距 $S_{i2}(\text{cm})$	物高 $h_o(\text{cm})$	像高 $h_i(\text{cm})$	量測倍率 M	量測倍率 $M(h_i/h_o)$	未知透鏡 焦距 $f_1(\text{cm})$
點 1	15.20	28.30	51.00	1	0.50	0.513	0.50	-7.695
點 2	15.20	27.00	51.90	1	0.52	0.537	0.52	-7.546
點 3	15.20	22.50	53.20	1	0.64	0.644	0.64	-7.616
點 4	15.20	19.40	54.10	1	0.70	0.746	0.70	-7.783
點 5	15.20	16.20	56.80	1	0.88	0.892	0.88	-7.621
點 6	15.20	15.70	57.00	1	0.90	0.920	0.90	-7.680

未知凹透鏡焦距 f_1 之平均值為 -7.657cm

表九的數據為在透鏡間距自 17.4cm 改至 15.2cm 後測得，而焦距與量測倍率的計算方式與表八相同。由於表八與表九使用的為同一未知焦距的凹透鏡，故可將 2 表的總共 12 個數據點合併統整，計算得 12 個數據點所得之焦距 f_1 的平均值為 -7.698cm。

而該未知凹透鏡的實際焦距 f_1 應為 -7.5cm，也因此可代入下式：

$$S_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{S_{o1}f_1}{S_{o1} - f_1}}{d - f_2 - \frac{S_{o1}f_1}{S_{o1} - f_1}}$$

由此計算出像距 S_{i2} 的理論值，並由實際焦距 f_1 、像距 S_{i2} 的理論值代入至放大倍率公式中，得到放大倍率的理論值，最後求得表八與表九中 12 個數據點的焦距 f_1 、像距 S_{i2} 、放大倍率 M 的誤差，以下表十呈現。

表十 凹透鏡焦距量測數據之誤差統計

資料點	透鏡 間距	物距 S _{o1} (cm)	理論 像距	理論量 測倍率	焦距誤 差	像距 誤差	量測倍 率誤差	量測倍 率誤差
表八點 1	17.40	27.70	42.10	0.38	3.40%	1.19%	0.75%	11.68%
表八點 2	17.40	25.20	42.51	0.42	3.47%	1.19%	0.76%	2.24%
表八點 3	17.40	23.70	42.79	0.45	3.37%	1.14%	0.74%	1.19%
表八點 4	17.40	18.70	44.02	0.55	2.28%	0.73%	0.50%	4.72%
表八點 5	17.40	15.10	45.36	0.67	3.44%	1.01%	0.73%	4.22%
表八點 6	17.40	22.40	43.06	0.47	3.20%	1.07%	0.70%	4.10%
表九點 1	15.20	28.30	51.71	0.51	2.60%	1.38%	0.07%	2.48%
表九點 2	15.20	27.00	52.07	0.54	0.61%	0.33%	0.02%	3.21%
表九點 3	15.20	22.50	53.63	0.64	1.55%	0.80%	0.04%	0.59%
表九點 4	15.20	19.40	55.11	0.75	3.77%	1.84%	0.09%	6.12%
表九點 5	15.20	16.20	57.24	0.89	1.61%	0.77%	0.04%	1.25%
表九點 6	15.20	15.70	57.65	0.92	2.40%	1.13%	0.06%	2.09%

而表八所求得之凹透鏡平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 3.2%，表九所求得之凹透鏡平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 2.093%，表八與表九共 12 個資料點所求得之平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 2.647%。

此外，透過討論得下式：

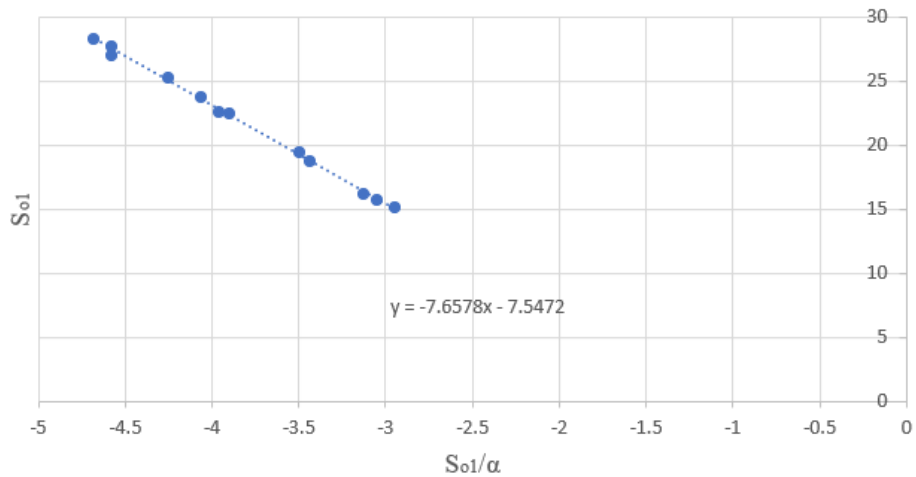
$$f_1 = \frac{S_{o1}\alpha}{S_{o1} + \alpha}, \alpha = \frac{S_{i2}d - S_{i2}f_2 - f_2d}{S_{i2} - f_2}$$

此時也可透過移項計算將上式改為下式：

$$S_{o1} = f_1 \left(\frac{S_{o1}}{\alpha} + 1 \right), \alpha = \frac{S_{i2}d - S_{i2}f_2 - f_2d}{S_{i2} - f_2}$$

透過此式，即可令 S_{o1} 為縱軸變量， $\frac{S_{o1}}{\alpha}$ 為橫軸變量，將表八與表九總共 12 個數據點作圖，以最小平方擬和後應可得一通過點(-1,0)的斜直線，且斜率即為未知凹透鏡的焦距，如下圖十八，用此方式求得的焦距 f_1 為 -7.6578cm，與實際值誤差為 2.104%。

透過將 S_{o1} 與 S_{o1}/α 作圖求得焦距 f_1

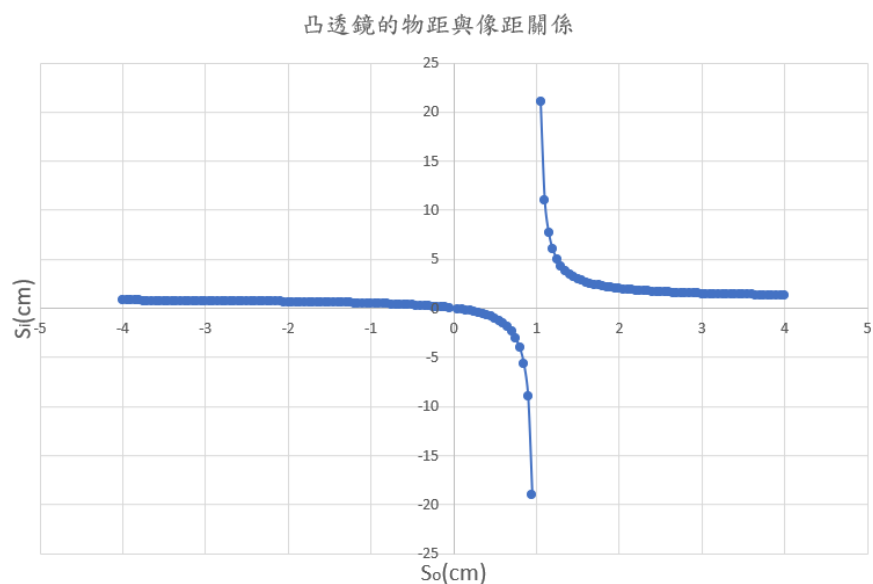


圖十八 透過將 S_{o1} 與 S_{o1}/α 作圖求得焦距 f_1

(2) 預報題目作答

- 物鏡經過單一凸透鏡後的成像結果，取決於物距(物體相對凸透鏡的距離)與焦距的關係，因此根據該關係，討論成像結果的可能性：種類(實、虛像)、位置(像距與焦距的關係)、方向(正、倒立)、大小(放大、縮小)。另外，討論單一凹透鏡的成像可能性。(可利用一已知焦距的透鏡來討論)

答：透過高斯公式 $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$ ，可將 S_o 設為橫軸變量， S_i 設為縱軸變量，並將 f 設為 1cm ，則可對其作圖，得出物距與像距在定焦距下的關係圖，如下圖十九即為將 S_o 自 -4cm 至 4cm 每隔 0.05cm 採點作圖的結果。



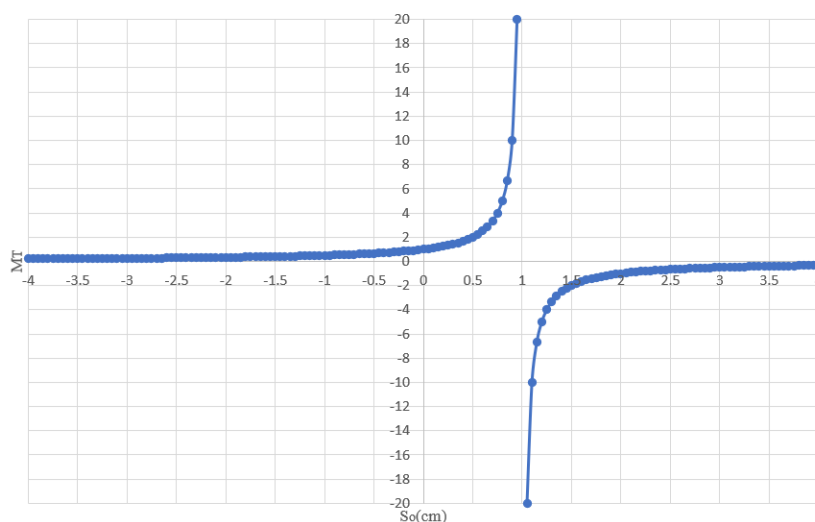
圖十九 凸透鏡的物距與像距關係(焦距 $f=1$)

若將高斯公式整理過後，即可得 $S_i = \frac{S_o f}{S_o - f}$ ，而透過凸透鏡的作圖

推導，可知放大倍率 $M_T = \frac{h'}{h} = \frac{-S_i}{S_o}$ ，其中 h 為物高， h' 為像高，故也

可將 $M_T = \frac{-S_i}{S_o} = \frac{f}{S_o - f}$ 設為縱軸變量， S_o 設為橫軸變量，同樣將 f 令為 1cm，即可作圖得到放大倍率與物距的關係圖，如下圖二十同圖十九為將 S_o 自 -4cm 至 4cm 每隔 0.05cm 採點作圖的結果。

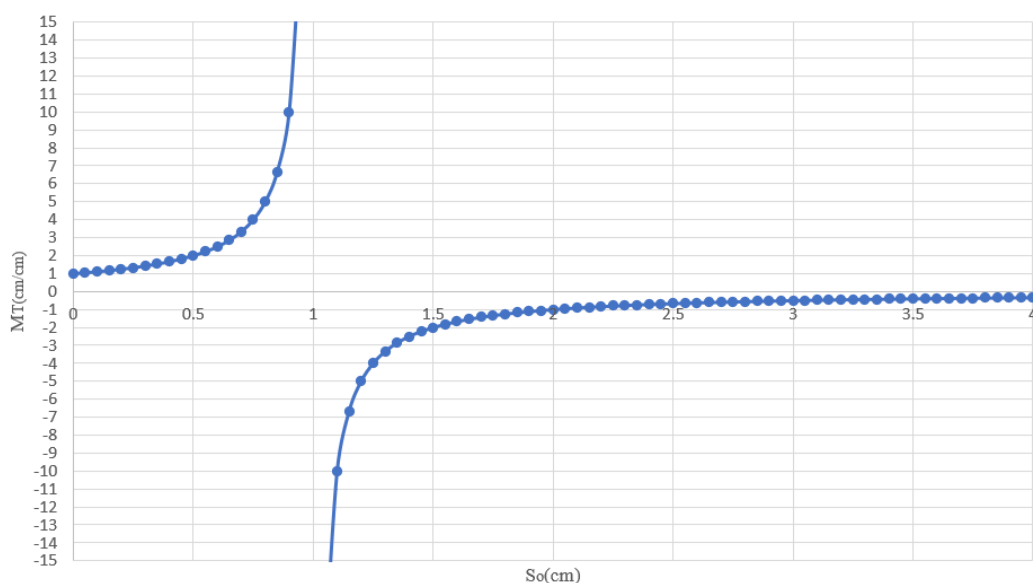
凸透鏡的物距 S_o 與放大倍率 M_T 之關係



圖二十 凸透鏡的物距與放大倍率之關係($f=1$)

透過將上圖二十的數據範圍定成 S_o 為 0cm 至 4cm，討論一般實物狀況，則可得下圖二十一。

凸透鏡的物距 S_o 與放大倍率 M_T 之關係



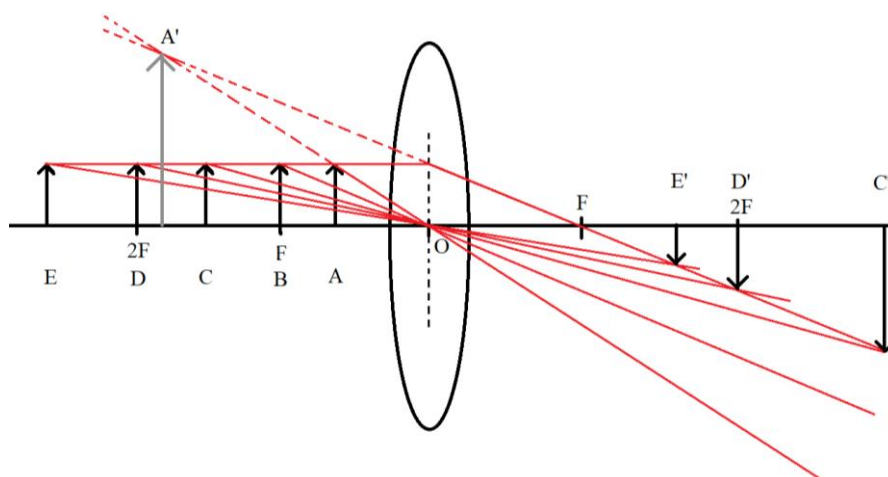
圖二十一 凸透鏡的物距 S_o 與放大倍率 M_T 之關係($f=1$)

從圖二十一中可清楚發現，當物距位於不同倍數的焦距範圍內時，具有不同的放大倍率以及正倒立情形(M_T 大於 0 時，物與像正立，小於 0 則反之)，並可將圖十九與圖二十一中各種情況統整如下表：

表十一 單一凸透鏡的成像關係

物的位置	像的位置	成像性質
鏡前兩倍焦距外	鏡後一倍焦距與兩倍焦距內	倒立縮小實像
鏡前兩倍焦距上	鏡後兩倍焦距上	倒立等大實像
鏡前一倍焦距與兩倍焦距內	鏡後兩倍焦距外	倒立放大實像
鏡前一倍焦距上	鏡後無窮遠處(不成像)	不成像
鏡前一倍焦距內	鏡前，物的後方	正立放大虛像

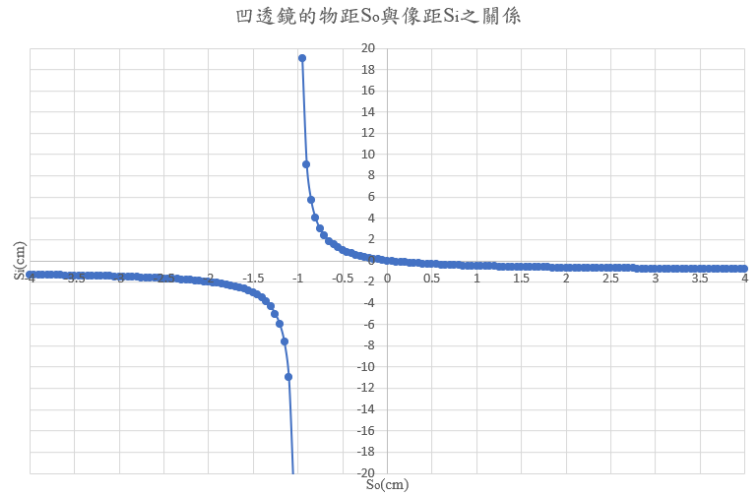
此外，考慮對凸透鏡的作圖，同樣將物置於上表十一中的不同位置範圍，則可繪製下圖二十二：



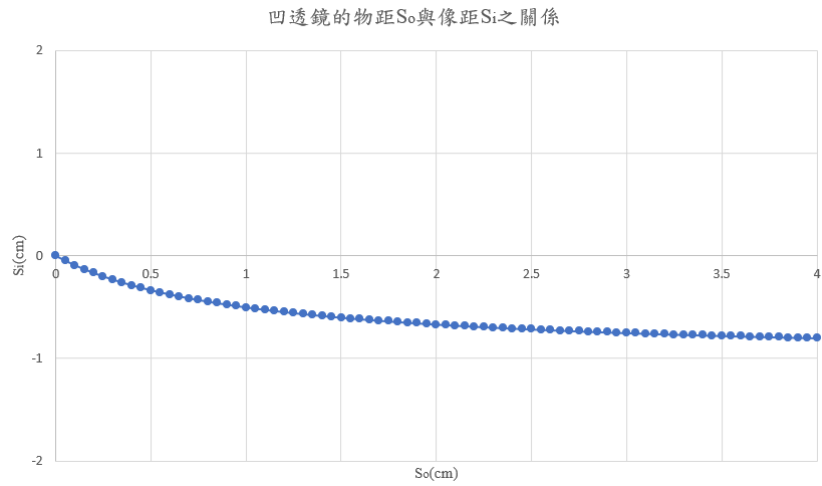
圖二十二 利用作圖法得知凸透鏡的成像關係

透過圖二十二，可以驗證上表十一的成像關係，此外，觀察當物置於一倍焦距內時，由於成像位於鏡前，且此處並無實際光線通過，故無法成像於屏幕上，即為虛像，也驗證了表十一中的成像性質。

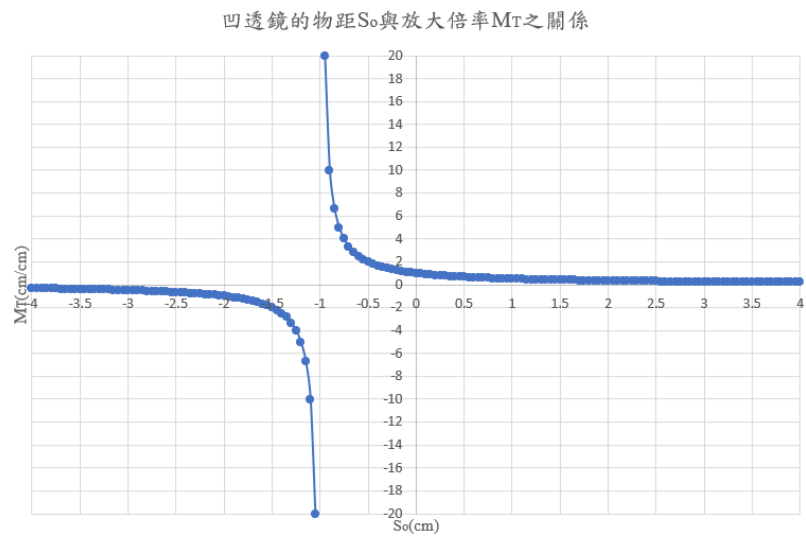
而當討論單一凹透鏡時，可以利用同樣的方式對凹透鏡作物距-像距關係圖與物距-放大倍率關係圖，如下四圖，其中圖二十四與圖二十六為圖二十三與圖二十五取物距 S_o 為 0cm 至 4cm 區間的作圖，較輕處辨別凹透鏡在實物情況下的行為：



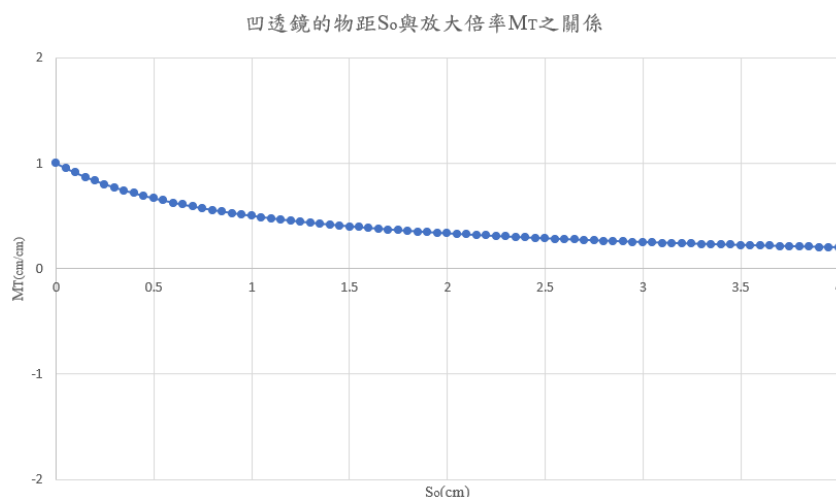
圖二十三 凹透鏡的物距 S_o 與像距 S_i 之關係(焦距 $f=1$)



圖二十四 凹透鏡的物距 S_o 與像距 S_i 之關係(焦距 $f=1$)



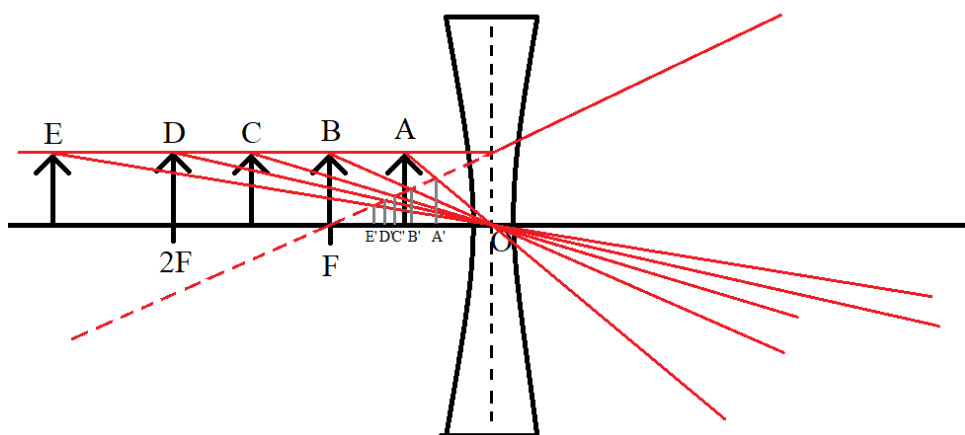
圖二十五 凹透鏡的物距 S_o 與放大倍率 M_T 之關係($f=1$)



圖二十六 凹透鏡的物距 S_o 與放大倍率 M_T 之關係($f=1$)

透過觀察圖二十四與圖二十六，可發現凹透鏡在實物情況下，像距皆為介於 0 至 -1 間的負值，意即成像位置皆在鏡前一倍焦距內，而放大倍率則皆為 1 至 0 間的正值，意即成像皆為縮小正立的像。

同樣的，也可用作圖法驗證凹透鏡的成像關係，如下圖二十七：

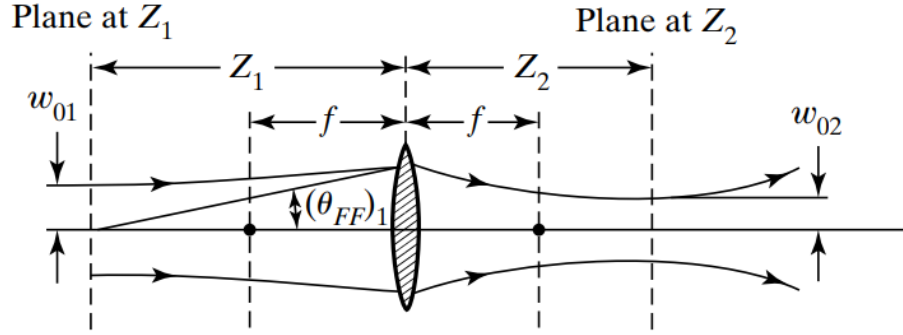


圖二十七 利用作圖法得知凹透鏡的成像關係

觀察上圖，同樣可發現成像皆無實際光線行經，故無法成像於屏幕上，故可得知在實物情況下，凹透鏡的成像皆為縮小正立虛像。

2. 是否可以用實驗三的刀口法來量測單一凹透鏡(光路中無其他透鏡)的焦距？請解釋你的答案。

答：可以，首先考慮將一單模雷射以 z 軸方向入射單一凸透鏡，且假設已知該雷射的光腰束位置，則可將光路分析如下圖。



圖二十八 以刀口法求單一透鏡焦距時的光路示意圖[4]

上圖中的 w_{01} 、 w_{02} 分別為通過透鏡前後的光腰束寬度， Z_1 、 Z_2 分別為通過透鏡前後的光腰束與透鏡間距，而透過 ABCD 矩陣分析 [4]，可得下列二式：

$$\frac{1}{w_{02}^2} = \frac{1}{w_{01}^2} \left(1 - \frac{Z_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\pi w_{01}}{\lambda}\right)^2$$

$$Z_2 = f + \frac{f^2(Z_1 - f)}{(Z_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_{01}}{\lambda}\right)^2}$$

而在考慮在 $w_{01} \gg w_{02}$ 的條件下， $w_{02} \approx \frac{f\lambda}{\pi w_{01}}$ ，接著考慮在

$\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda} \gg (Z_1 - f)^2$ 的情形下， $Z_2 \approx f$ ，故可整理出下列二式：

$$w_{02} \approx \frac{f\lambda}{\pi w_{01}}$$

$$Z_2 \approx f$$

而其中對於高斯光束分析，瑞立距離 $Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ，故可令入射至

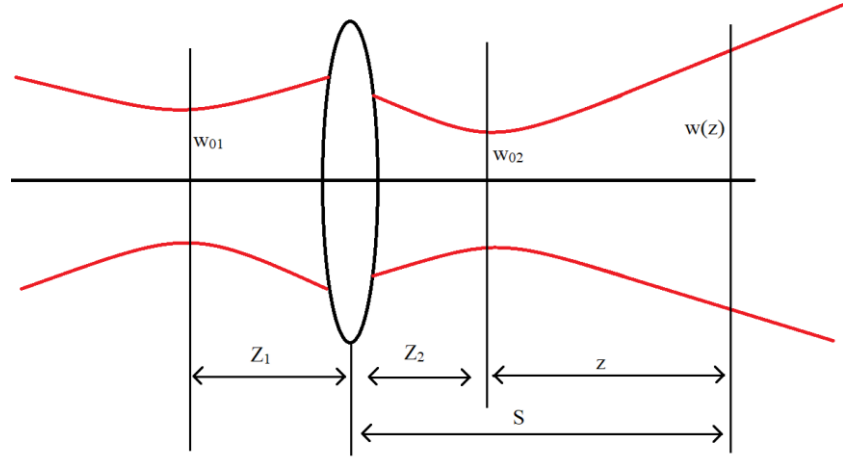
透鏡前的瑞立距離為 $Z_{R1} = \frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}$ ，入射至透鏡後的瑞立距離為 $Z_{R2} =$

$\frac{\pi w_{02}^2}{\lambda}$ ，且再考慮 $w(z)$ 為 z 處的光束半徑，定義為光束在距離光腰束

中心距離 z 時，電場振幅降到 z 處中心電場 $1/e$ 處，幅照度降到 $1/e^2$ 時的徑向距離，而對於 $w(z)$ 有著以下關係：

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}$$

故可知在出射光的光腰束後方任取一點做刀口法，該點的光束半徑 $w(z) = w_{02} \sqrt{1 + (\frac{z}{Z_{R2}})^2}$ ，如下圖二十九。



圖二十九 光束半徑位置示意圖

而若將以下五式代入整理，結合上圖的距離關係：

$$w_{02} \approx \frac{f\lambda}{\pi w_{01}}$$

$$Z_2 \approx f$$

$$Z_{R2} = \frac{\pi w_{02}^2}{\lambda}$$

$$w(z) = w_{02} \sqrt{1 + (\frac{z}{Z_{R2}})^2}$$

$$z = S - Z_2$$

最後可得下式：

$$w(z) = \sqrt{\left(\frac{f\lambda}{\pi w_{01}}\right)^2 + \left(\frac{(S-f)\pi w_{01}}{\pi f}\right)^2}$$

因此若要求得未知凸透鏡的焦距，則透過上式可知，只要知道光腰束位置，則 Z_1 已知，因此可透過刀口法量測 w_{01} ，而之後只需在透鏡後一遠處以刀口法測量光束半徑 $w(z)$ ，並且量測該處與透鏡的距離 S ，則可代入上式求得 f 值。

而對於單一凹透鏡的量測則同理，即便凹透鏡使雷射發散， $Z_2 \approx f$ 應為負值，且 w_{02} 的位置出現在透鏡前方無法量測，但透過在透鏡遠處 $w(z)$ 的測量，同理可找出凹透鏡焦距 f 值。

3. 一薄透鏡系統由一焦距為-10cm 的凹透鏡與一焦距為 15cm 的凸透鏡組合而成。假設兩透鏡的距離 S 為 9cm，若一發光物體分別放置於該系統前方(凹透鏡那一邊)10cm 及 20cm 處，其最後成像的種類、位置、方向、大小為何？同時計算該系統的 effective focal lengths、front and back focal lengths、principal planes。若 S=10cm 及 20cm，則上述的結果為何？請以表格呈現答案。

答：凹透鏡焦距為 $f_1 = -10\text{cm}$ ，凸透鏡焦距為 $f_2 = 15\text{cm}$ ，透鏡間距為 $d = 9\text{cm}$ 、 10cm 及 20cm ，物距 S_{o1} 為 10cm 及 20cm 。則自前文推導可知，可將數據代入以下公式：

$$S_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}{d - f_2 - \frac{S_{o1} f_1}{S_{o1} - f_1}}$$

$$M_T = \frac{f_1 S_{i2}}{d(S_{o1} - f_1) - S_{o1} f_1}$$

$$\frac{1}{e.f.l.} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f.f.l. = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}$$

$$b.f.l. = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

$$\text{前主平面 } H_1 \text{ 的位置為 } \frac{e.f.l. \times d}{f_2}$$

$$\text{後主平面 } H_2 \text{ 的位置為 } -\frac{e.f.l. \times d}{f_1}$$

代入參數後可得下表：

表十二 薄透鏡系統之數據

d(cm)	$S_{o1}(\text{cm})$	S_{i2}	M_T	e.f.l.	f.f.l.	b.f.l.	H_1	H_2
9	10	-210	7.5	37.5	15	71.25	22.5	33.75
9	20	352.5	-7.5	37.5	15	71.25	22.5	33.75
10	10	系統後無窮遠處	-	30	10	60	20	30
10	20	150	-3	30	10	60	20	30
20	10	37.5	-0.75	10	-3.33	30	13.33	20
20	20	34.29	-0.43	10	-3.33	30	13.33	20

其中對於 S_{i2} ，參考 0 點為凸透鏡位置，若為正值即代表成實像於凸透鏡後，若為負值則成虛像於凸透鏡前。而對於 M_T ，若為正值則像與物正立，負值則倒立，大於 1 為放大，小於 1 則為縮小。其中當 $d = 10\text{cm}$ ， $S_{o1} = 10\text{cm}$ 時，由於系統之 e.f.l 為 10 公分，故此時等同於將 S_{o1} 置於整個系統的前焦點上，故出射系統的為一平行光，成像於無窮遠處，無法測得放大倍率 M_T 。

(3) Q&A 題目作答

1. 如何使用一個已知焦距的凸透鏡和一只手電筒量測一未知焦距的凹透鏡？(假設此手電筒為一平行光源)。

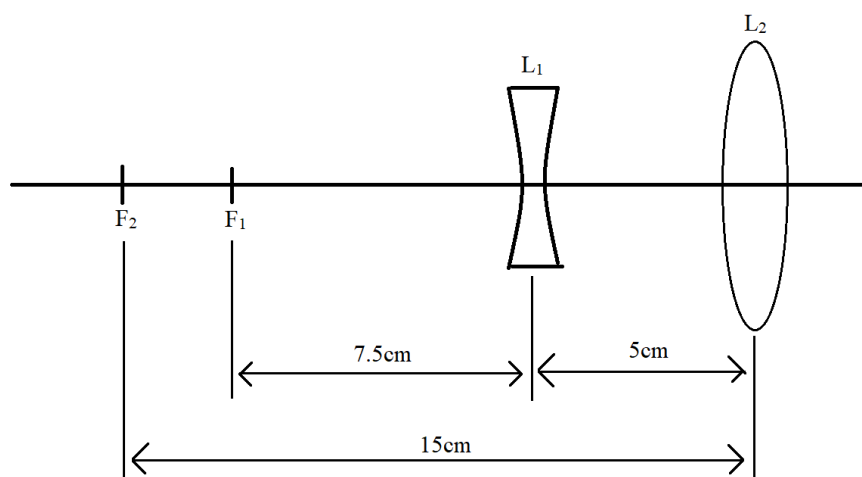
答：將手電筒作為光源，並架設光路，使光線先通過凹透鏡，再通過凸透鏡，由於假定手電筒為一平行光源，故將手電筒入射整體薄透鏡系統時，可視為將平行光入射系統，而出射光將會聚焦於系統的後焦點上，故若將一屏幕放置於凸透鏡後方，改變屏幕位置使得系統出射光在屏幕上聚焦成一點，該點即為後焦點，之後量測距離並代入後焦距公式：

$$b.f.l. = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

其中 d 為兩透鏡間距， f_1 為未知焦距， f_2 為凸透鏡焦距，計算後即可得之凹透鏡的焦距 f_1 。

2. 若凹透鏡與凸透鏡之間的距離 S 小於 5cm ，任意移動投影片的位置，同時觀察屏幕上之成像(移動屏幕找到清晰成像)。是否可以找到清晰成像？請說明原因。

答：不可，如下圖，因為實驗所使用之凹透鏡焦距為 -7.5cm ，而凸透鏡焦距為 15cm ，當光先入射凹透鏡時，透過凹透鏡的成像討論可知，不論物距為何，皆只會成於凹透鏡前的一倍焦距內，但又由於兩透鏡間距小於 5cm ，故一倍凹透鏡焦距加上透鏡間距為 12.5cm ，故凹透鏡的成像距離凸透鏡最多只為 12.5cm ，但凸透鏡的焦距為 15cm ，故凹透鏡成像將在凸透鏡的焦距內，透過透鏡系統討論可知，前透鏡的成像將會作為後透鏡的物入射，而凹透鏡的成像做為凸透鏡的物入射時，物距小於凸透鏡的一倍焦距，又從凸透鏡的成像討論可知，當物位於凸透鏡的一倍焦距內時，成像為凸透鏡前的正立放大虛像，故無法在屏幕上找到清晰成像。



圖三十 當實驗時兩透鏡間距小於 5cm 時之討論

(4) 實驗結果討論

表十三 凸透鏡焦距量測數據之誤差統計

資料點	物距 $S_o(\text{cm})$	理論 像距	理論量測 倍率	焦距 誤差	像距 誤差	量測倍率 誤差	量測倍率 誤差
表四點 1	32.20	14.50	0.45	1.40%	2.07%	2.14%	0%
表四點 2	28.30	15.46	0.55	0.60%	0.91%	0.22%	5.45%
表四點 3	23.80	17.25	0.72	1.20%	2.03%	1.38%	2.78%
表四點 4	19.80	20.20	1.02	0.90%	1.73%	1.71%	1.96%
表四點 5	33.20	14.31	0.43	0.80%	1.12%	0.88%	2.33%
表四點 6	29.70	15.08	0.51	1.20%	1.79%	1.34%	0%
表五點 1	31.90	14.57	0.46	1.1%	1.58%	0%	2.17%
表五點 2	20.00	20.00	1.00	0.1%	0.25%	0%	0%
表五點 3	13.90	35.64	2.56	1%	3.48%	3.52%	4.30%

對於實驗部分一，當僅有一面凸透鏡時，測量統整得表四與表五，而表四中 6 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.05%，表五中前 3 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.067%，表四與表五共 9 個數據點求得焦距 f 之平均值與理論值的誤差為 0.056%。可知其與實際焦距值 f 相當接近，而觀察上表可發現，實際上像距誤差仍在 1% 至 2% 之間，而這可能是由於量測時不夠精確導致，因若整體光路架構或透鏡設置有瑕疵，則應會影響平均焦距的誤差，故每次的像距誤差、量測倍率誤差來源等應主要是由於量測失誤。此外，可發現後者的量測倍率誤差較前者大，其可能是因為量測物高與像高時較量測物距與像距困難，且由於數值較小，些微的相差即可能導致較大的百分誤差。

表十四 凹透鏡焦距量測數據之誤差統計

資料點	透鏡 間距	物距 $S_{o1}(\text{cm})$	理論 像距	理論量 測倍率	焦距誤 差	像距 誤差	量測倍 率誤差	量測倍 率誤差
表八點 1	17.40	27.70	42.10	0.38	3.40%	1.19%	0.75%	11.68%
表八點 2	17.40	25.20	42.51	0.42	3.47%	1.19%	0.76%	2.24%
表八點 3	17.40	23.70	42.79	0.45	3.37%	1.14%	0.74%	1.19%
表八點 4	17.40	18.70	44.02	0.55	2.28%	0.73%	0.50%	4.72%
表八點 5	17.40	15.10	45.36	0.67	3.44%	1.01%	0.73%	4.22%
表八點 6	17.40	22.40	43.06	0.47	3.20%	1.07%	0.70%	4.10%
表九點 1	15.20	28.30	51.71	0.51	2.60%	1.38%	0.07%	2.48%
表九點 2	15.20	27.00	52.07	0.54	0.61%	0.33%	0.02%	3.21%
表九點 3	15.20	22.50	53.63	0.64	1.55%	0.80%	0.04%	0.59%
表九點 4	15.20	19.40	55.11	0.75	3.77%	1.84%	0.09%	6.12%
表九點 5	15.20	16.20	57.24	0.89	1.61%	0.77%	0.04%	1.25%
表九點 6	15.20	15.70	57.65	0.92	2.40%	1.13%	0.06%	2.09%

而在實驗部分二，將量測數據統整為表八與表九，而表八所求得之凹透鏡平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 3.2%，表九所求得之凹透鏡平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 2.093%，表八與表九共 12 個資料點所求得之平均焦距 f_1 與實際值的誤差為 2.647%。可發現此時數據誤差較大，但觀察整體數據，可發現實驗計算所得之焦距 f 皆約為 -7.6 至 -7.7 區間，故推測可能是整體光路擺放不良，或參數量測上有系統性誤差，而這裡懷疑是由於量測透鏡間距時，因凸透鏡與凹透鏡在透鏡環內的位置不同，導致量測透鏡間距時產生混淆，使得透鏡間距皆有相同誤差，假設在透鏡間距量測時，量測皆少 0.1cm，故實際透鏡間距應為 17.5cm 與 15.3cm，則 12 個點的平均焦距 f 將變為 -7.51cm，誤差為 0.133%，故合理推論實驗部分二的主要誤差來源為透鏡間距量測不佳。

五、參考資料及文獻：

- [1] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017), Chapter 13.1.3, pp.159-182.
- [2] John E. Greivenkamp, *Field Guide To Geometrical Optics*, SPIE vol.FG01 (SPIE publications, 2004), pp.16-20.
- [3] 龔書正，”廣角口腔內視鏡設計與研究”，15 頁至 24 頁，2011 年。
- [4] Frank L. Pedrotti, Leno S. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3th ed. (Addison-Wesley, 2006), Chapter 27, pp.594-600.