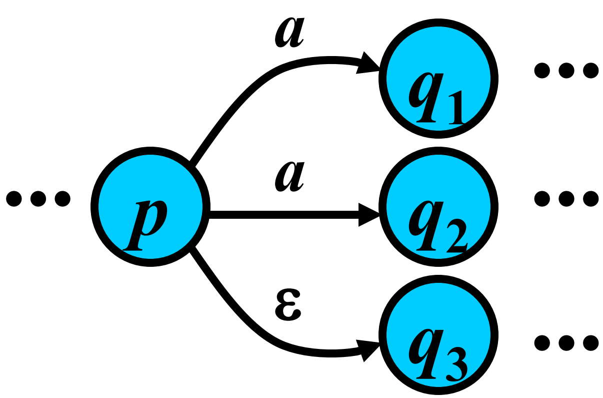
Kapitola IV. Speciální typy konečných automatů

Teorie vs. praxe

a) Konfigurace: $\boldsymbol{p}ax$



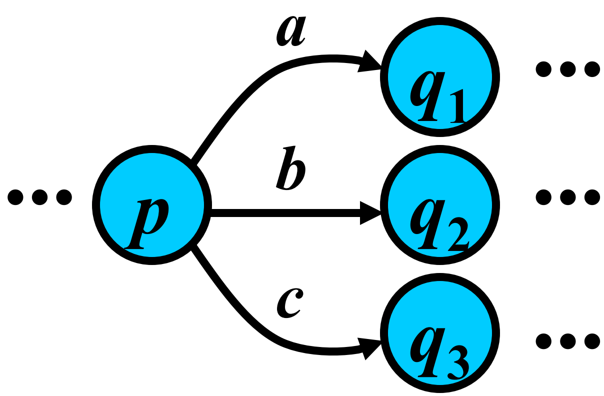
Další konfigurace:

q_1x nebo q_2x nebo q_3ax ?

Teorie: ☺ × Praxe: ☹

---

b) Konfigurace: $\boldsymbol{p}ax$



Další konfigurace:

pouze q_1x

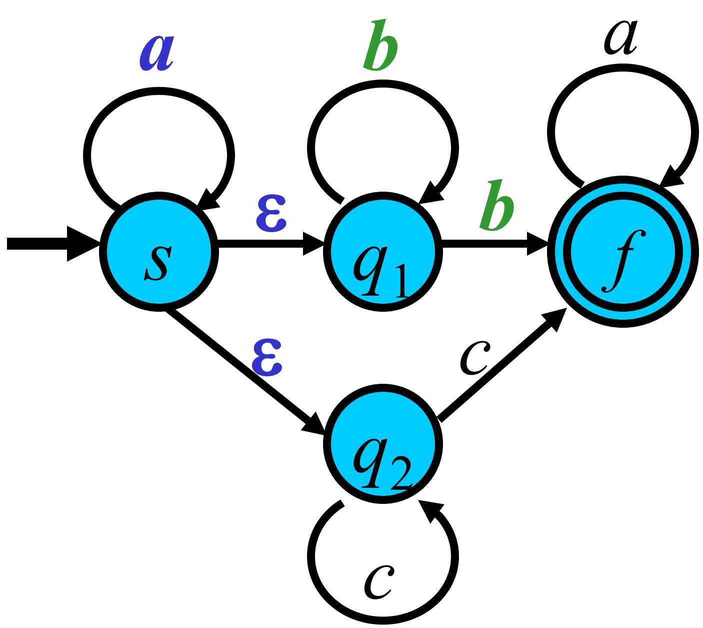
Teorie: ☹ × Praxe: ☺

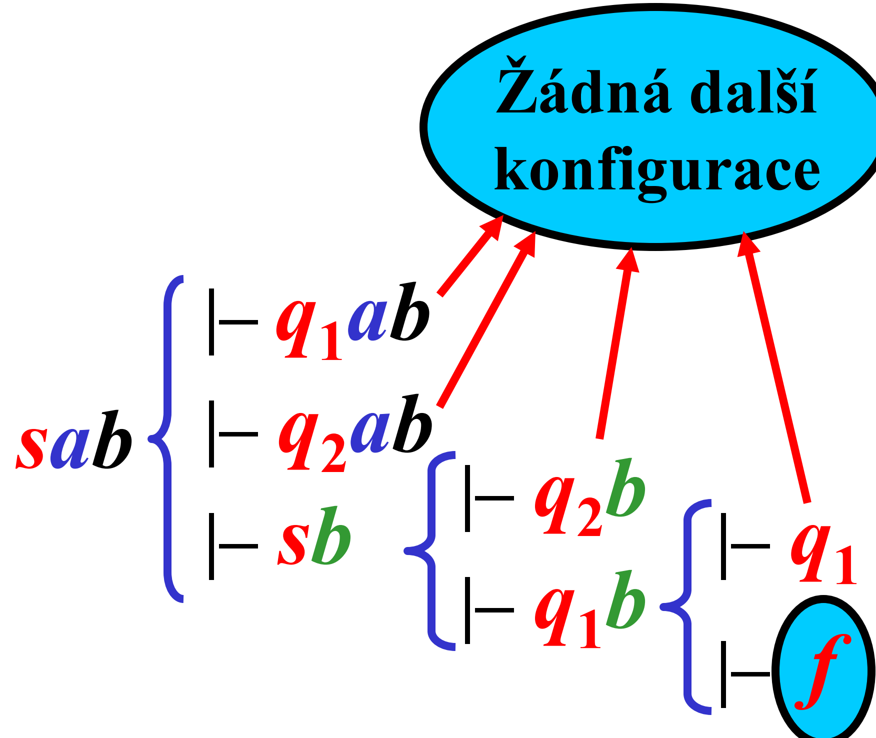
Užití obecného KA

Simulace všech možných přechodů z aktuální konfigurace

Příklad:

KA M je definován:





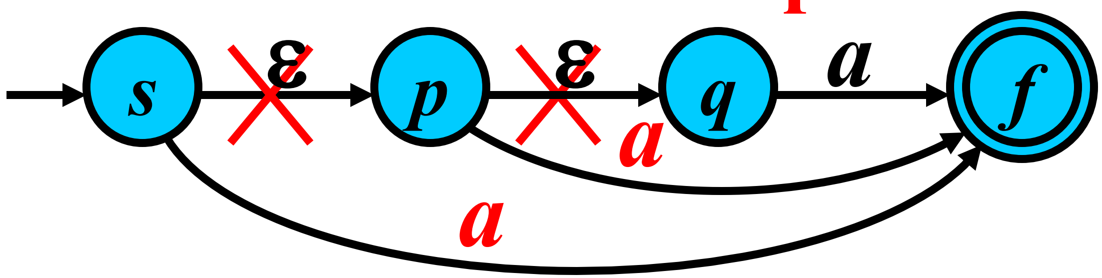
Otázka: $ab \in L(M)$?

Odpověď: ANO, $ab \in L(M)$, protože $f \in F$.

Převod KA na DKA: Myšlenka 1/2

Požadavek do praxe: *Deterministický KA* (DKA): KA, který z každé konfigurace může přejít maximálně do jedné další.

1) Myšlenka: Odstranění ε-přechodů

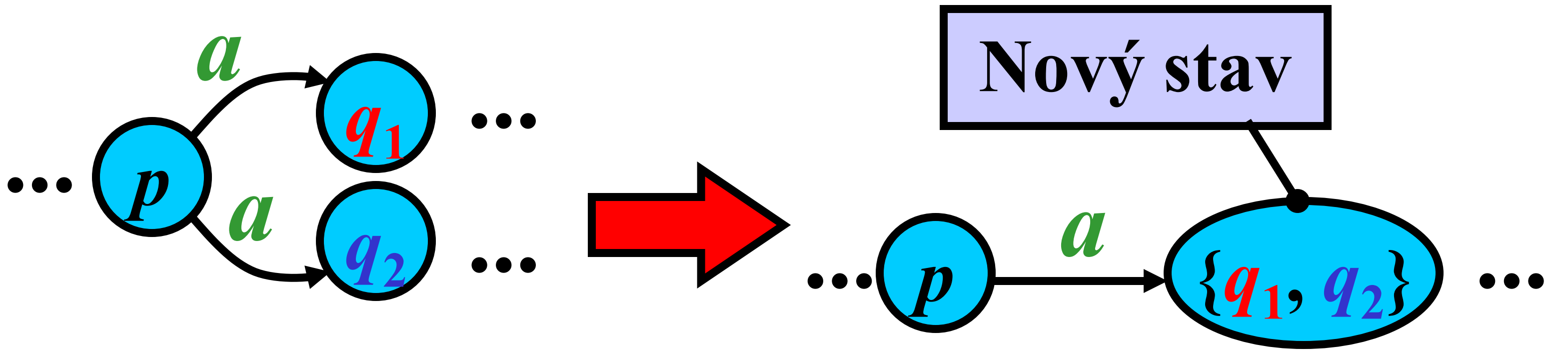


Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA. M je ***KA bez ε-přechodů***, pokud pro každé pravidlo $pa \to q \in R$, kde $p, q \in Q$, platí:

$$a \in \Sigma \ (a \neq \varepsilon)$$

Převod KA na DKA: Myšlenka 2/2

2) Myšlenka: Odstranění nedeterminismu



Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je **KA bez ε-přechodů**. M je ***deterministický konečný automat*** (DKA), pokud pro každé $pa \rightarrow q \in R$ platí, že množina $R - \{pa \rightarrow q\}$ neobsahuje žádné pravidlo s levou stranou pa.

Tvrzení

• Pro každý KA M, existuje ekvivalentní DKA M_d.

Důkaz je založen na následujících převodech:

Konečný automat *M*

KA bez ε-přechodů *M'*

$L(M) = L(M')$

DKA M_d

$L(M') = L(M_d)$

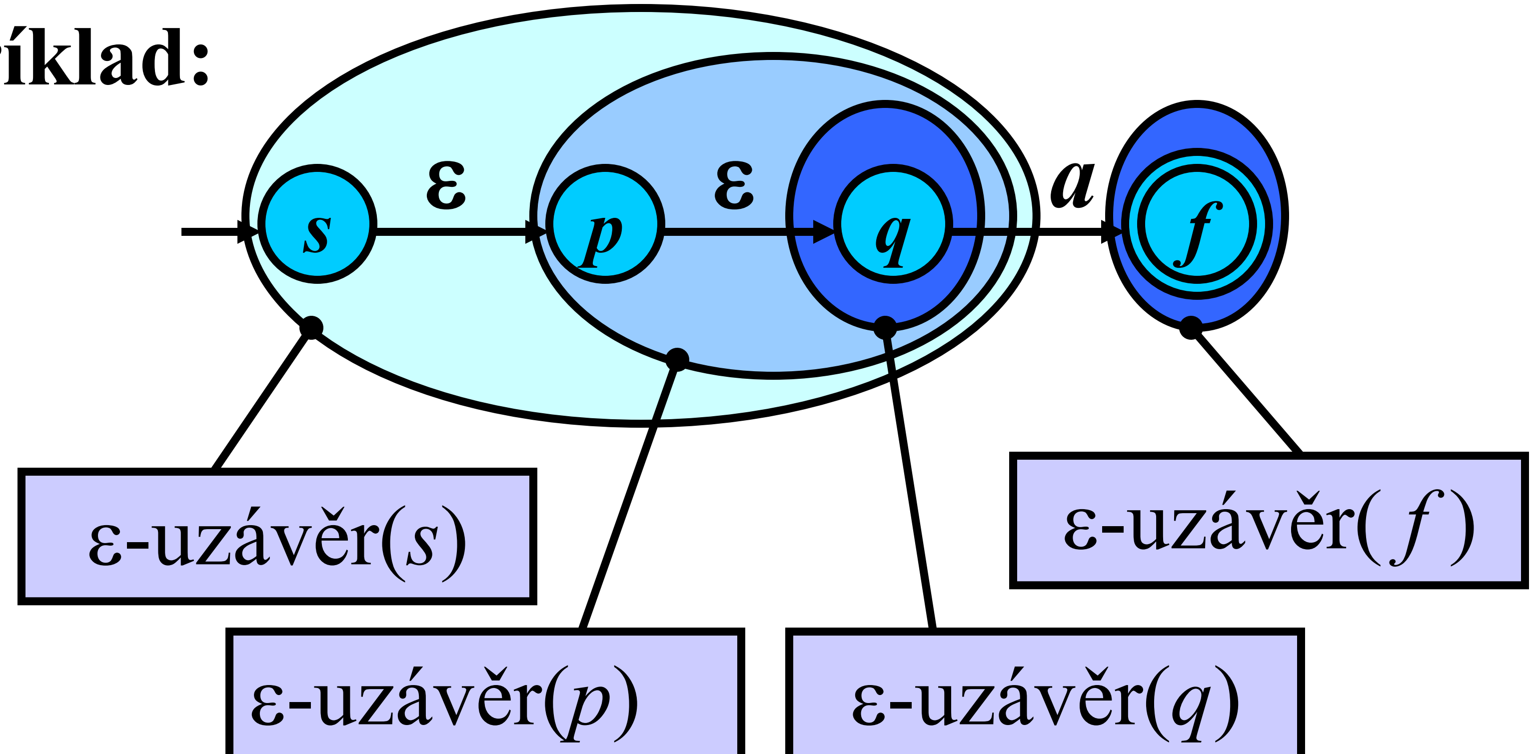
ε-uzávěr

Myšlenka: *q* je v „ε-uzávěr(*p*)“, pokud KA může přejít do *q* z *p* bez přečtení vstupního symbolu.

Definice: Pro každý stav $p \in Q$ je definován *ε-uzávěr*(*p*):

$$\varepsilon\text{-uzávěr}(p) = \{q: q \in Q, p \vdash^* q\}$$

Příklad:



Algoritmus: ε-uzávěr

- **Vstup:** $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$; $p \in Q$
- **Výstup:** ε-uzávěr(p)

- **Metoda:**
- $i := 0$; $Q_0 := \{p\}$;
- **repeat**

  $i := i + 1$;

  $Q_i := Q_{i\text{-}1} \cup \{\, p' : p' \in Q, q \rightarrow p' \in R, q \in Q_{i\text{-}1} \}$;

until $Q_i = Q_{i\text{-}1}$;
- ε-uzávěr(p) $:= Q_i$.

ε-uzávěr: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde: $Q = \{s, p, q, f\}$, $\Sigma = \{a\}$,
$R = \{s \rightarrow p, p \rightarrow q, qa \rightarrow f\}$, $F = \{f\}$

Určeme: ε-uzávěr(s)

$Q_0 = \{\mathbf{s}\}$

1) $\mathbf{s} \rightarrow p'; p' \in Q$: $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}$

$Q_1 = \{\mathbf{s}\} \cup \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{s}, \mathbf{p}\}$

2) $\mathbf{s} \rightarrow p'; p' \in Q$: $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}$
$\mathbf{p} \rightarrow p'; p' \in Q$: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$

$Q_2 = \{\mathbf{s}, \mathbf{p}\} \cup \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} = \{\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$

3) $\mathbf{s} \rightarrow p'; p' \in Q$: $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}$
$\mathbf{p} \rightarrow p'; p' \in Q$: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
$\mathbf{q} \rightarrow p'; p' \in Q$: **nic**

$Q_3 = \{\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\} \cup \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} = \{\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\} = Q_2 =$ **ε-uzávěr(*s*)**

Algoritmus: Odstranění ε-přechodů

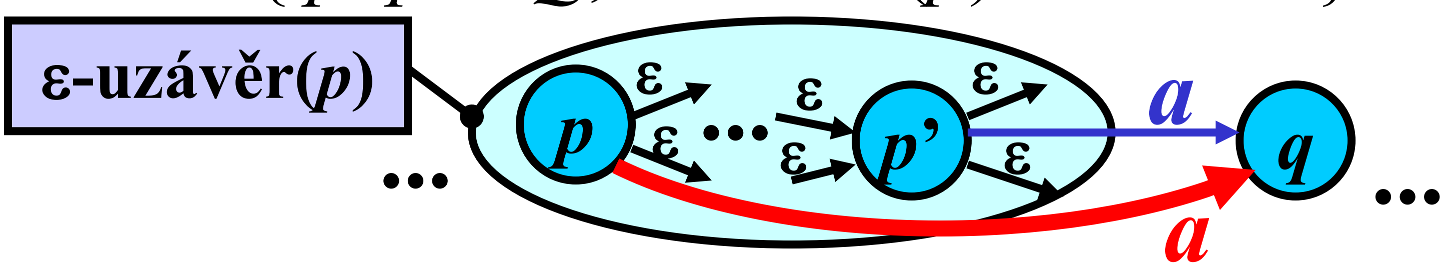
Myšlenka: Odstranit ε-přechody

- **Vstup:** KA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** KA bez ε-přechodů $M' = (Q, \Sigma, R', s, F')$

- **Metoda:**
- $R' := \emptyset$;
- **for each** $p \in Q$ **do**

$$R' := R' \cup \{\, pa \to q : p'a \to q \in R,\ a \in \Sigma,\ p' \in \varepsilon\text{-uzávěr}(p),\ q \in Q \,\};$$

- $F' := \{\, p : p \in Q,\ \varepsilon\text{-uzávěr}(p) \cap F \neq \emptyset \,\}$.



Odstranění ε-přechodů: Příklad 1/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$Q = \{s, q_1, q_2, f\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$;

$R = \{sa \rightarrow s, s \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, s \rightarrow q_2,$
$q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\}$; $F = \{f\}$

---

1) pro $p = \mathbf{s}$: ε-uzávěr($\mathbf{s}$) $= \{\mathbf{s}, \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}\}$

A. $\mathbf{s}d \rightarrow q', \ d \in \Sigma, q' \in Q$: $\mathbf{sa} \rightarrow \mathbf{s}$

B. $\mathbf{q_1}d \rightarrow q', d \in \Sigma, q' \in Q$: $\mathbf{q_1b} \rightarrow \mathbf{q_1}, \mathbf{q_1b} \rightarrow \mathbf{f}$

C. $\mathbf{q_2}d \rightarrow q', d \in \Sigma, q' \in Q$: $\mathbf{q_2c} \rightarrow \mathbf{q_2}, \mathbf{q_2c} \rightarrow \mathbf{f}$

$R' = \emptyset \cup \{\mathbf{sa} \rightarrow \mathbf{s}, \mathbf{sb} \rightarrow \mathbf{q_1}, \mathbf{sb} \rightarrow \mathbf{f}, \mathbf{sc} \rightarrow \mathbf{q_2}, \mathbf{sc} \rightarrow \mathbf{f}\}$

Odstranění ε-přechodů: Příklad 2/3

2) pro $p = q_1$: ε-uzávěr(q_1) = {q_1}

A. $q_1 d \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $q_1 b \rightarrow q_1$, $q_1 b \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{q_1 b \rightarrow q_1, q_1 b \rightarrow f\}$

---

3) pro $p = q_2$: ε-uzávěr(q_2) = {q_2}

A. $q_2 d \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $q_2 c \rightarrow q_2$, $q_2 c \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{q_2 c \rightarrow q_2, q_2 c \rightarrow f\}$

---

4) pro $p = f$: ε-uzávěr(f) = {f}

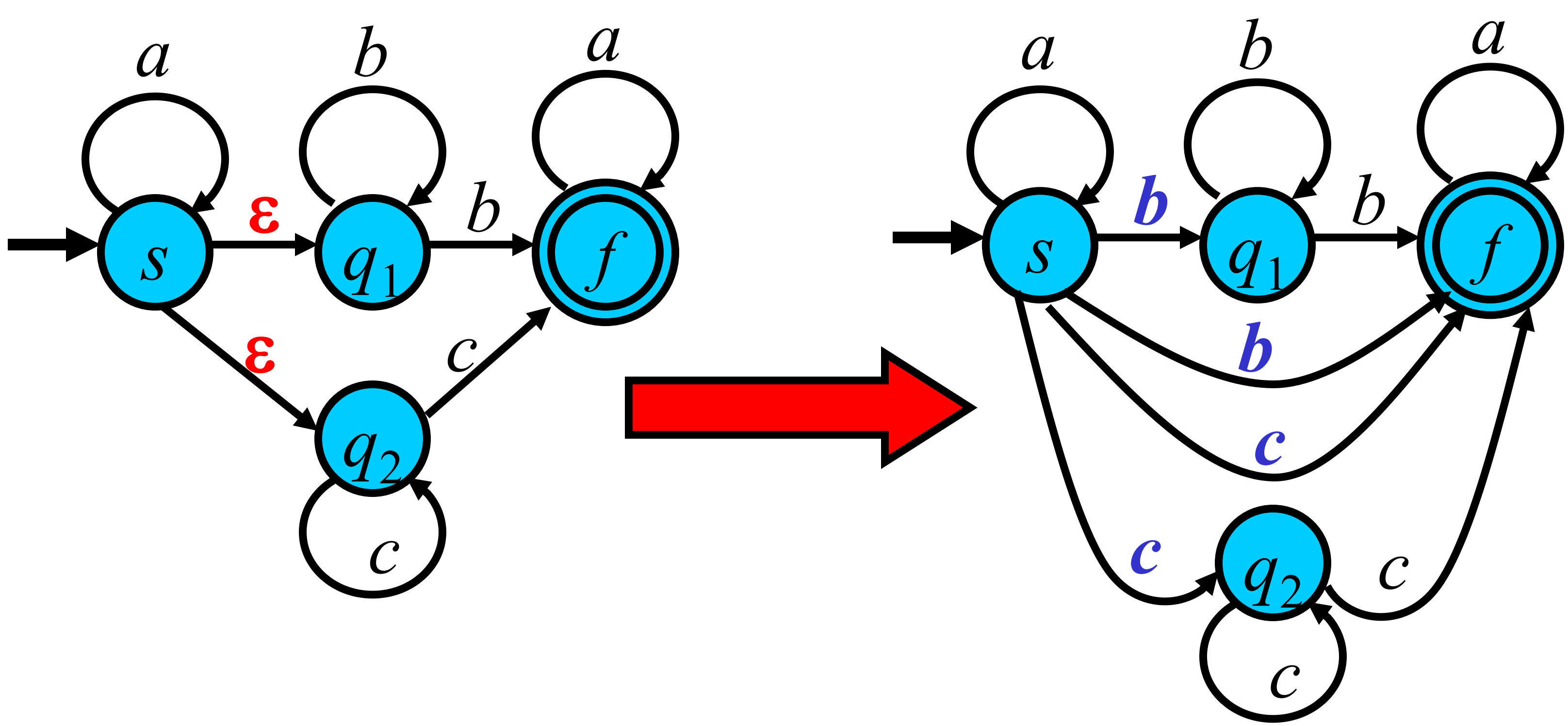
A. $fd \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $fa \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{fa \rightarrow f\}$

$R' = \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f,$
$q_1 b \rightarrow q_1, q_1 b \rightarrow f, q_2 c \rightarrow q_2, q_2 c \rightarrow f, fa \rightarrow f\}$

Odstranění ε-přechodů: Příklad 3/3

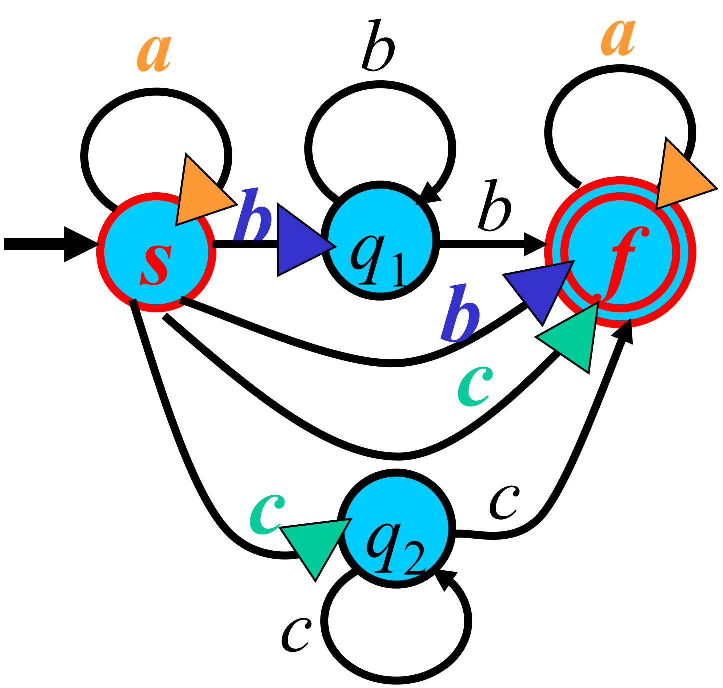
$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon\text{-uzávěr}(s) \cap F = \{s, q_1, q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \\
\varepsilon\text{-uzávěr}(q_1) \cap F = \{q_1\} \cap \{f\} = \emptyset \\
\varepsilon\text{-uzávěr}(q_2) \cap F = \{q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \\
\varepsilon\text{-uzávěr}(f) \cap F = \{f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset
\end{array}\right\} F' = \{f\}$$



Odstranění nedeterminismu

Myšlenka: Vytvořit stavy ze všech podmnožin množiny stavů KA bez ε-přechodů a přidat přechody mezi nimi tak, aby simulovaly přechody původního automatu.

Ilustrace:

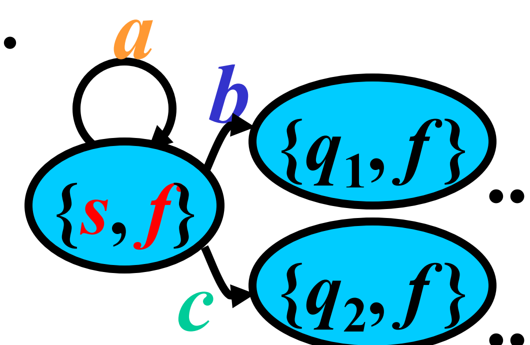


$Q_{DKA} = \{\{s\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{f\}, \{s,q_1\}, \{s,q_2\}, \{s, f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_1,f\}, \{q_2,f\}, \{s,q_1,q_2\}, \{s,q_1,f\}, \{s,q_2,f\}, \{q_1,q_2,f\}, \{s,q_1,q_2,f\}\}$

Pro stav $\{s\}$: …

⋮

Pro stav $\{s, f\}$:



⋮

Pro stav $\{s,q_1,q_2,f\}$: …

Algoritmus: Odstranění nedeterminismu

- **Vstup:** KA bez ε-přechodů: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** DKA: $M_d = (Q_d, \Sigma, R_d, s_d, F_d)$

- **Metoda:**
- $Q_d := \{Q': Q' \subseteq Q, Q' \neq \emptyset\}$; $R_d := \emptyset$;
- **for each** $Q' \in Q_d$, **and** $a \in \Sigma$ **do begin**

  $Q'' := \{q: p \in Q', pa \rightarrow q \in R\}$;

  if $Q'' \neq \emptyset$ **then** $R_d := R_d \cup \{Q'a \rightarrow Q''\}$;

  end
- $s_d := \{s\}$;
- $F_d := \{F': F' \in Q_d, F' \cap F \neq \emptyset\}$.

Odstranění nedeterminismu: Příklad 1/5

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

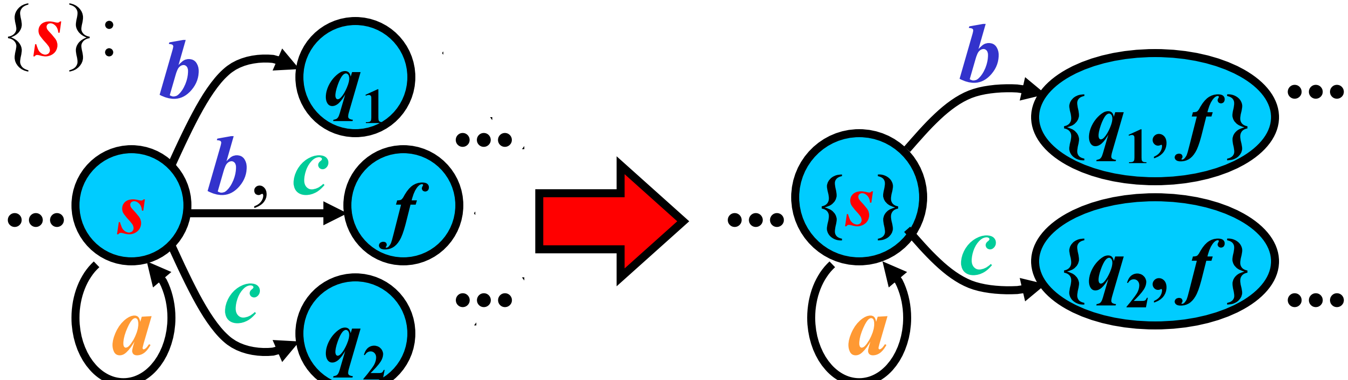
$Q = \{s, q_1, q_2, f\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$; $F = \{f\}$

$R = \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f,$
$q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\}$;

$Q_d = \{\{s\}, \{s,q_1\}, \{s,q_1,q_2\}, \{s,q_1,f\}, \{s,q_1,q_2,f\}, \{s,q_2\}, \{s,q_2,f\},$
$\{s,f\}, \{q_1\}, \{q_1,q_2\}, \{q_1,f\}, \{q_1,q_2,f\}, \{q_2\}, \{q_2,f\}, \{f\}\}$

---

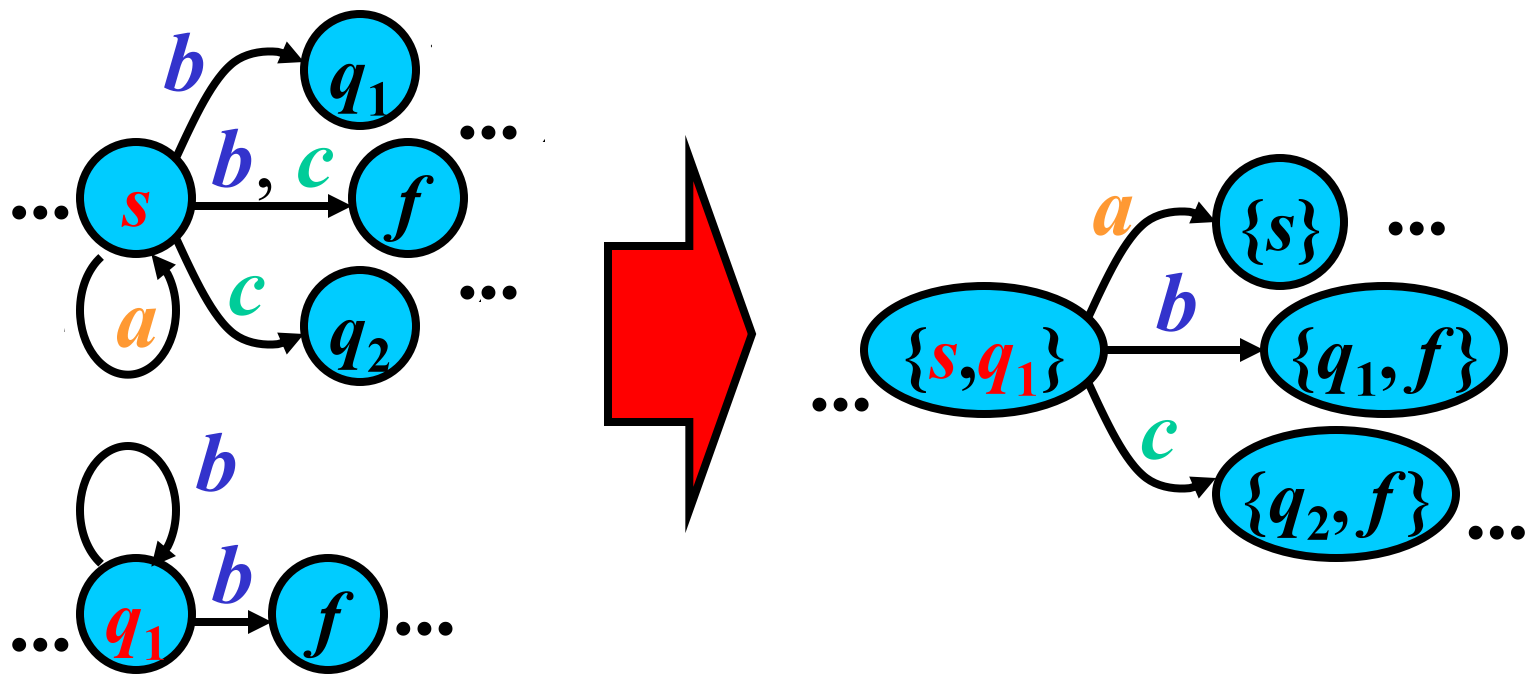
pro $Q' = \{s\}$:



$R_d = \emptyset \cup \{\{s\}a \rightarrow \{s\}, \{s\}b \rightarrow \{q_1, f\}, \{s\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 2/5

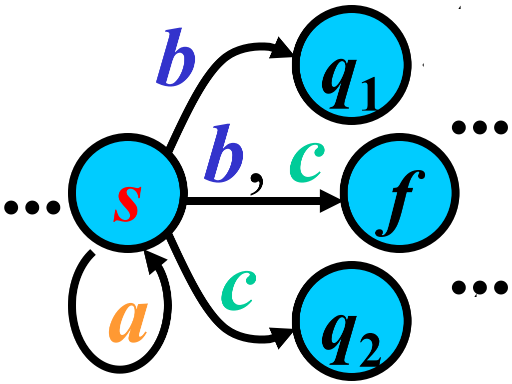
pro $Q' = \{s, q_1\}$:

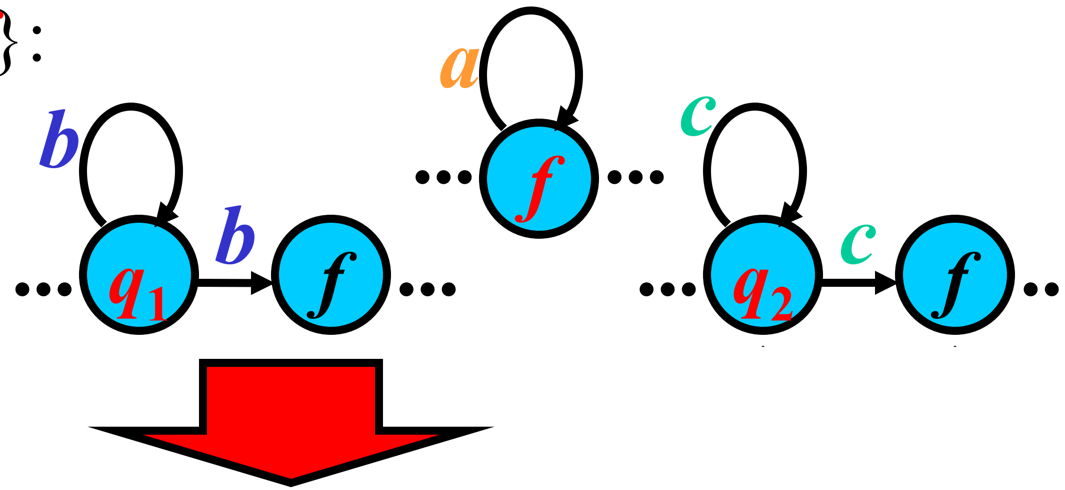


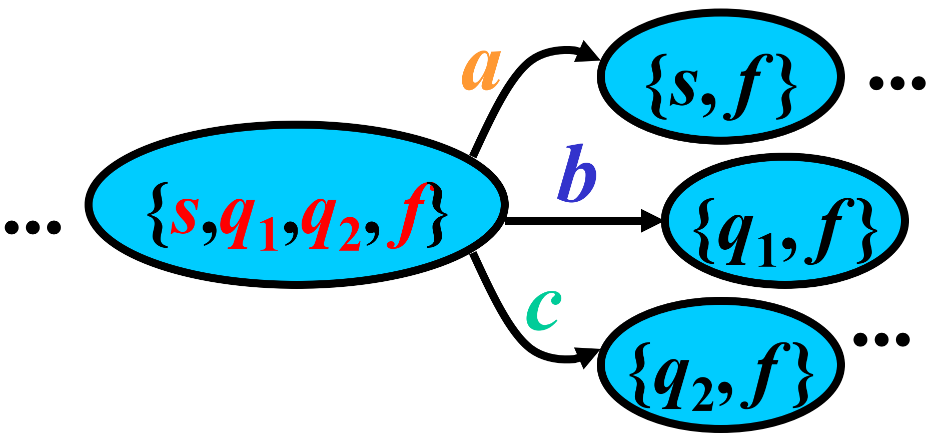
$R_d = R_d \cup \{\{s, q_1\}a \rightarrow \{s\},\ \{s, q_1\}b \rightarrow \{q_1, f\},\ \{s, q_1\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 3/5

pro $Q' = \{s, q_1, q_2, f\}$:







Analogicky vytvořit ostatní stavy…

$R_d = R_d \cup \{\{s,q_1,q_2,f\}a \rightarrow \{s,f\},\ \{s,q_1,q_2,f\}b \rightarrow \{q_1,f\},$
$\{s,q_1,q_2,f\}c \rightarrow \{q_2,f\}\}$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 4/5

Koncové stavy: $F_d := \{F' : F' \in Q_d, F' \cap F \neq \emptyset\}$

pro $F = \{f\}$:

$\{s\} \cap \{f\} = \emptyset \Rightarrow \{s\} \notin F_d$

$\{s, q_1\} \cap \{f\} = \emptyset \Rightarrow \{s, q_1\} \notin F_d$

$\{s, q_1, q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \Rightarrow \{s, q_1, q_2\} \notin F_d$

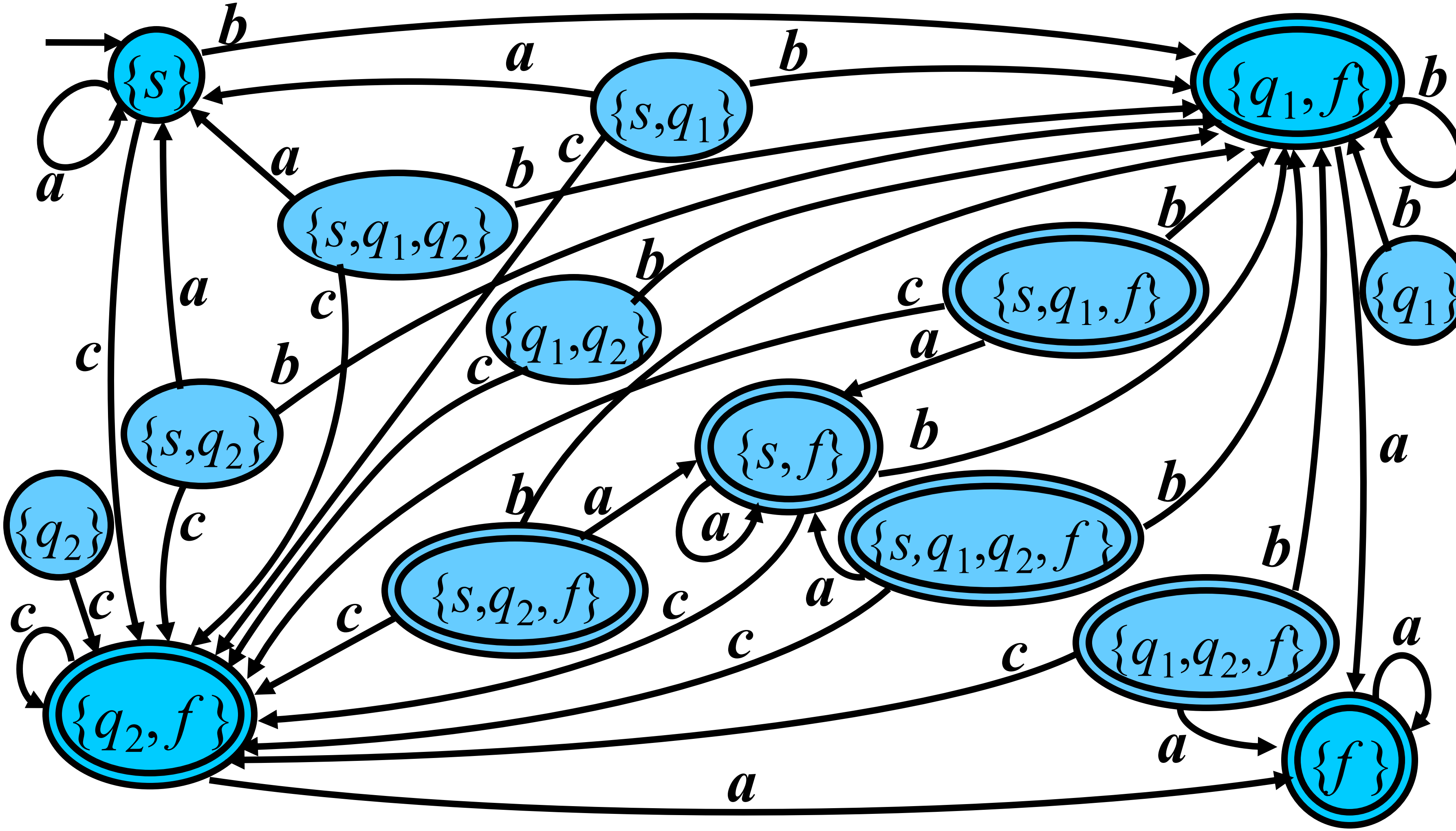
$\{s, q_1, f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset \Rightarrow \{s, q_1, f\} \in F_d$

$\{s, q_1, q_2, f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset \Rightarrow \{s, q_1, q_2, f\} \in F_d$

$\vdots$

$F_d = \{\{s, q_1, f\}, \{s, q_1, q_2, f\}, \{s, q_2, f\}, \{s, f\},$
$\{q_1, f\}, \{q_1, q_2, f\}, \{q_2, f\}, \{f\}\}$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 5/5



Otázka: Můžeme vytvořit DKA menší?

Odpověď: Ano

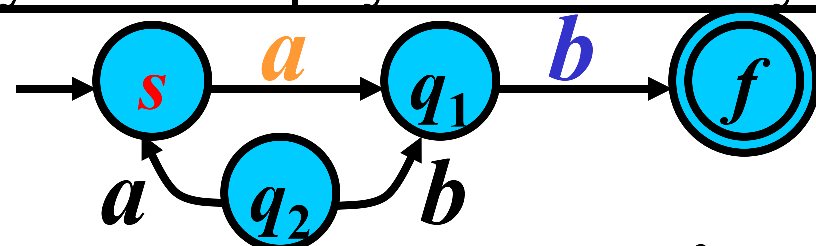
Dostupné stavy

Myšlenka: Stav *q* je *dostupný*, pokud pro nějaký řetězec „dostane“ DKA z *s* (počáteční stav) do *q*.

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA.
Stav $q \in Q$ je *dostupný*, pokud existuje $w \in \Sigma^*$, pro který platí $sw \vdash^* q$. Jinak q je *nedostupný*.

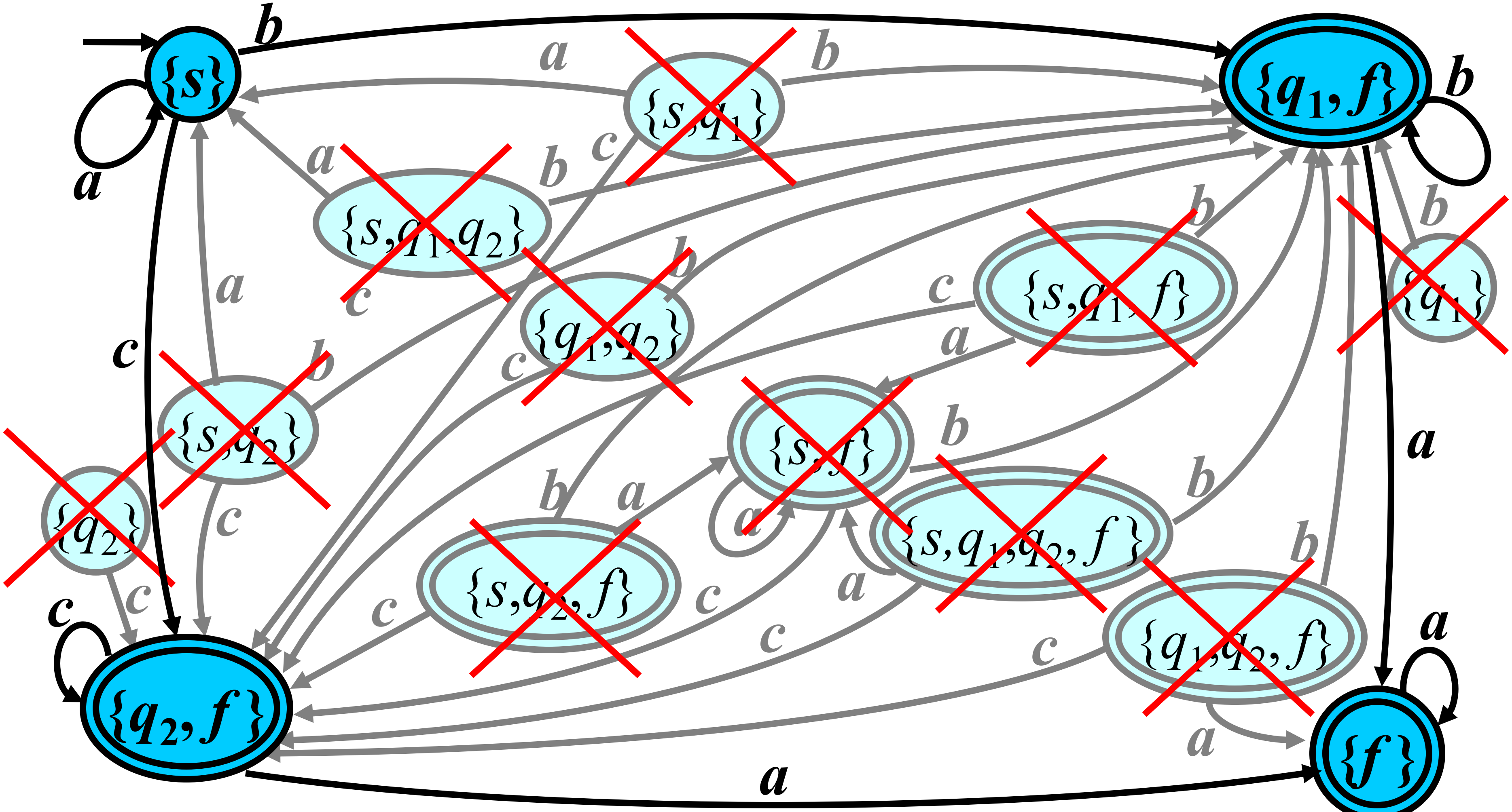
Pozn.: Každý nedostupný stav může být odstraněn

Příklad:



Stav s - dostupný: $w = \varepsilon$: $s \vdash^0 s$
Stav q_1 - dostupný: $w = a$: $sa \vdash q_1$
Stav f - dostupný: $w = ab$: $sab \vdash q_1 b \vdash f$
Stav q_2 - **nedostupný** (neexistuje žádné $w \in \Sigma^*$ takové, že $sw \vdash^* q_2$)

Předchozí příklad: Nedostupné stavy

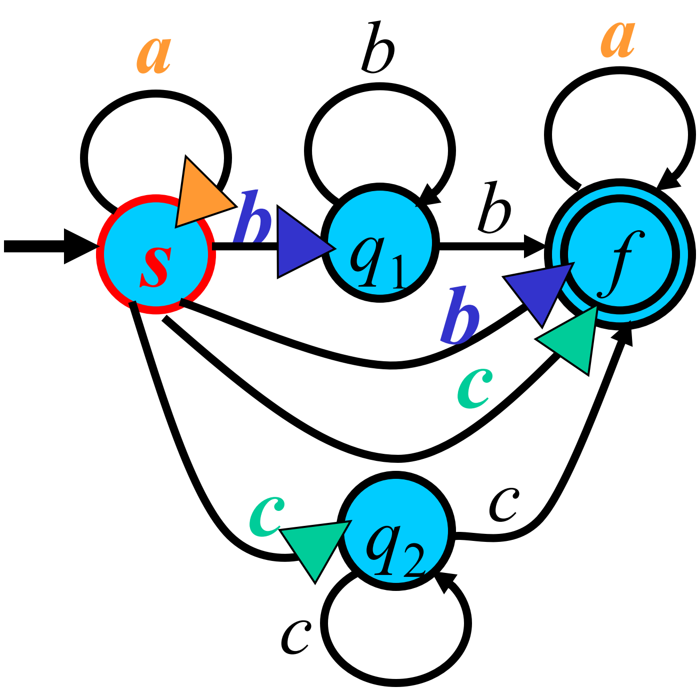


Mnoho nedostupných stavů

Algoritmus II: Odstranění nedeterminismu

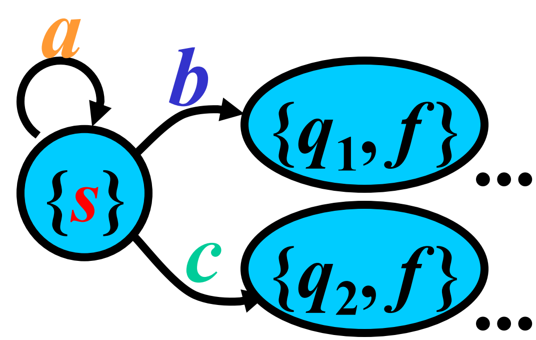
Myšlenka: Analogie předchozího algoritmu s tím rozdílem, že budeme postupně přidávat pouze stavy, které jsou dostupné

Ilustrace:



$Q_{DKA} = \{\{s\}\}$

Pro stav $\{s\}$:



Přidej nové stavy $\{q_1, f\}$, $\{q_2, f\}$ do Q_{DKA}

Pro stav $\{q_1, f\}$: …

Pro stav $\{q_2, f\}$: …

Přidej nové stavy …

⋮

Algoritmus II: Odstranění nedeterminismu

- **Vstup:** KA bez ε-přechodů: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** DKA: $M_d = (Q_d, \Sigma, R_d, s_d, F_d)$
  bez nedostupných stavů

- **Metoda:**
- $s_d := \{s\}$; $Q_{new} := \{s_d\}$; $R_d := \emptyset$; $Q_d := \emptyset$; $F_d := \emptyset$;
- **repeat**

  nechť $Q' \in Q_{new}$; $Q_{new} := Q_{new} - \{Q'\}$; $Q_d := Q_d \cup \{Q'\}$;

  for each $a \in \Sigma$ **do begin**

  $Q'' := \{q: p \in Q', pa \rightarrow q \in R\}$;

  if $Q'' \neq \emptyset$ **then** $R_d := R_d \cup \{Q'a \rightarrow Q''\}$;

  if $Q'' \notin Q_d \cup \{\emptyset\}$ **then** $Q_{new} := Q_{new} \cup \{Q''\}$

  end

  if $Q' \cap F \neq \emptyset$ **then** $F_d := F_d \cup \{Q'\}$

until $Q_{new} = \emptyset$.

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 1/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

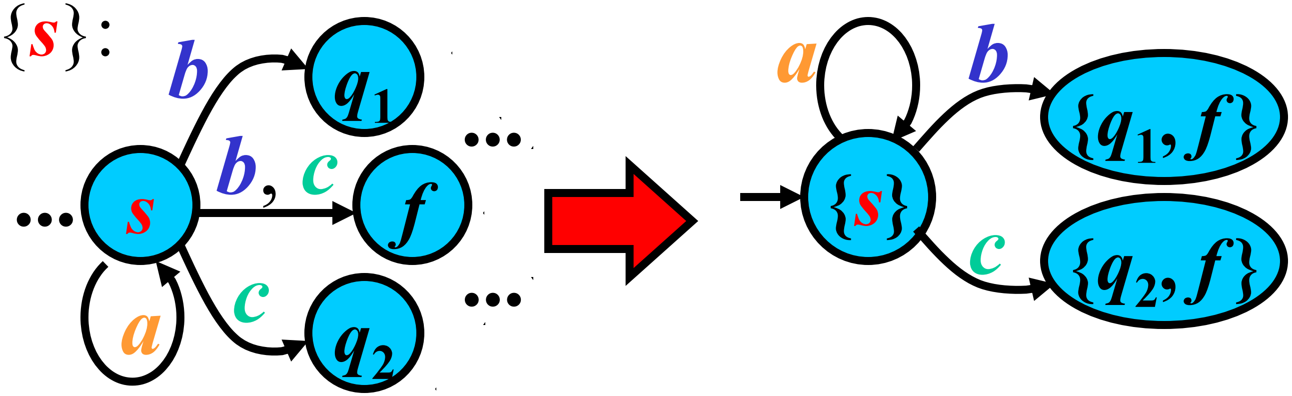
$Q = \{s, q_1, q_2, f\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$; $F = \{f\}$

$R = \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f,$
$q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\}$;

$Q_{new} = \{\{s\}\}$; $R_d = \emptyset$; $Q_d = \emptyset$; $F_d = \emptyset$

---

for $Q' = \{s\}$:

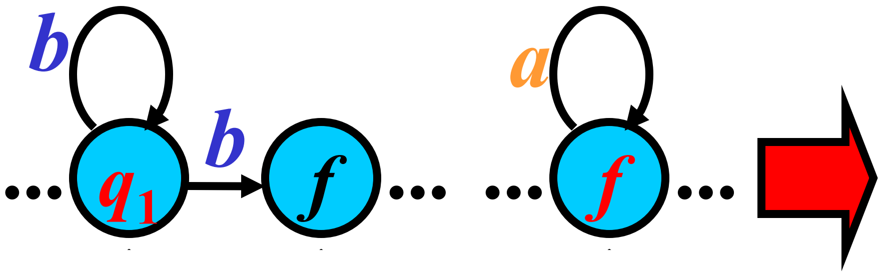


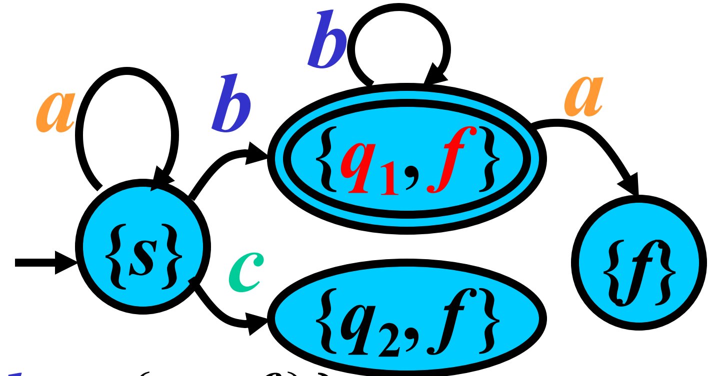
$R_d := \emptyset \cup \{\{s\}a \rightarrow \{s\}, \{s\}b \rightarrow \{q_1, f\}, \{s\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$

$Q_{new} = \{\{q_1, f\}, \{q_2, f\}\}$, $Q_d = \emptyset \cup \{\{s\}\}$, $F_d = \emptyset$

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 2/3

pro $Q' = \{q_1, f\}$:



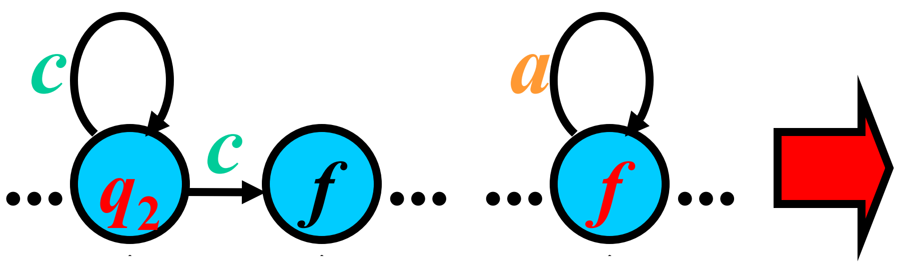


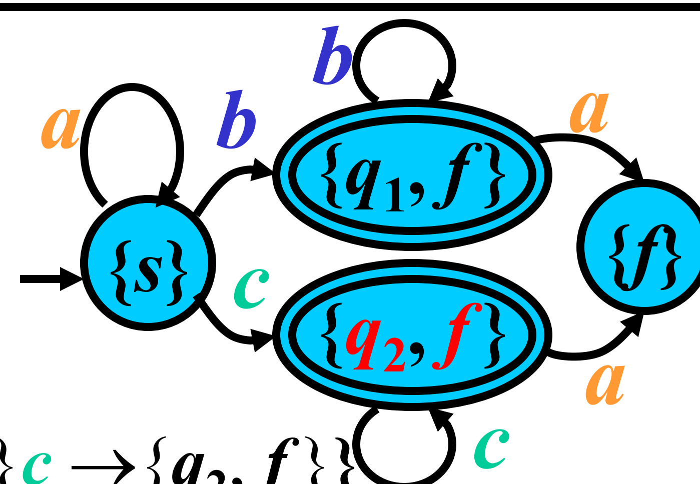
$R_d := R_d \cup \{\{q_1, f\}a \rightarrow \{f\},\ \{q_1, f\}b \rightarrow \{q_1, f\}\}$

$Q_{new} = \{\{q_2, f\},\ \{f\}\},\ Q_d = Q_d \cup \{\{q_1, f\}\}, F_d := \emptyset \cup \{\{q_1, f\}\}$

---

pro $Q' = \{q_2, f\}$:



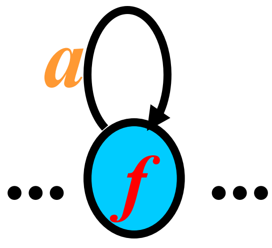


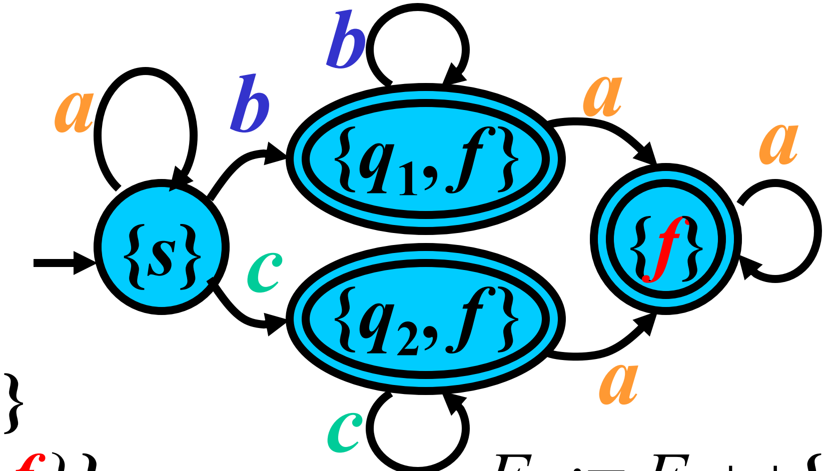
$R_d := R_d \cup \{\{q_2, f\}a \rightarrow \{f\},\ \{q_2, f\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$

$Q_{new} = \{\{f\}\},\ Q_d = Q_d \cup \{\{q_2, f\}\},\ F_d := F_d \cup \{\{q_2, f\}\}$

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 3/3

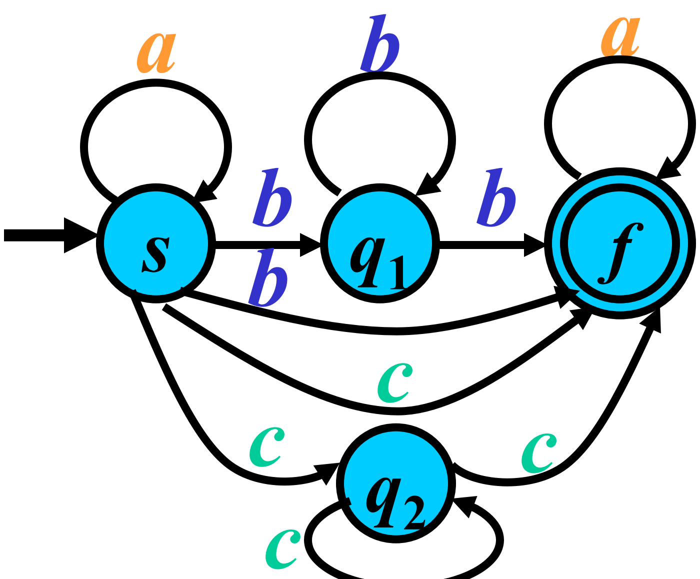
pro $Q' = \{f\}$:



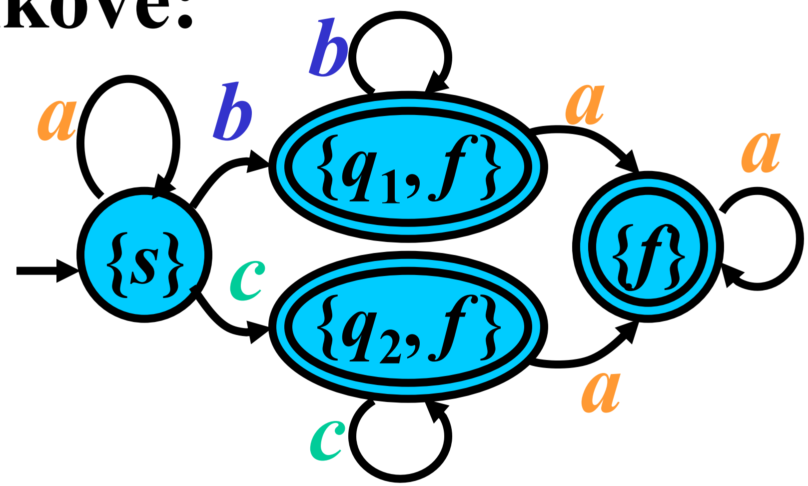


$R_d := R_d \cup \{\{f\}a \rightarrow \{f\}\}$

$Q_{new} = \emptyset$, $Q_d = Q_d \cup \{\{f\}\}$, $F_d := F_d \cup \{\{f\}\}$



Celkově:



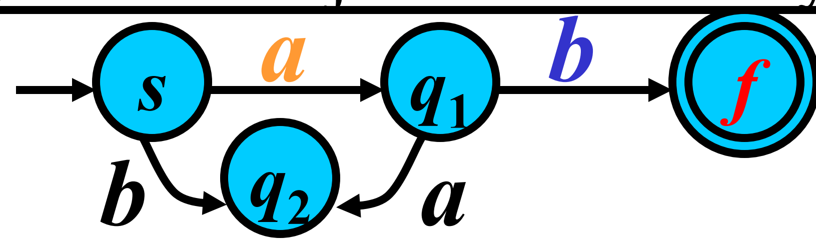
Ukončující stavy

Myšlenka: Stav *q* je *ukončující*, pokud pro nějaký řetězec „dostane“ DKA z *q* do koncového stavu

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je DKA. Stav $q \in Q$ je *ukončující*, pokud existuje řetězec $w \in \Sigma^*$, pro který platí: $qw \vdash^* f,\ f \in F$. Jinak q je *neukončující*.

Pozn.: Každý neukončující stav může být odstraněn.

Příklad:



Stav s - ukončující: $w = ab$: $sab \vdash q_1b \vdash f$

Stav q_1 - ukončující: $w = b$: $q_1b \vdash f$

Stav f - ukončující: $w = \varepsilon$: $f \vdash^0 f$

Stav q_2 - **neukončující** (neexistuje žádné $w \in \Sigma^*$ takové že: $q_2w \vdash^* q,\ q \in F$)

Algoritmus: Odstranění neukončujících stavů

- **Vstup:** DKA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** DKA: $M_t = (Q_t, \Sigma, R_t, s, F)$

- **Metoda:**
- $Q_0 := F$; $i := 0$;
- **repeat**

  $i := i + 1$;

  $Q_i := Q_{i\text{-}1} \cup \{q: qa \rightarrow p \in R, a \in \Sigma, p \in Q_{i\text{-}1}\}$;

until $Q_i = Q_{i\text{-}1}$;

- $Q_t := Q_i$;
- $R_t := \{qa \rightarrow p: qa \rightarrow p \in R,\ p, q \in Q_t, a \in \Sigma\}$.

Odstranění neukončujících stavů: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde: $Q = \{s, q_1, q_2, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
$R = \{sa \rightarrow q_1, sb \rightarrow q_2, q_1a \rightarrow q_2, q_1b \rightarrow f\}$, $F = \{f\}$

$Q_0 = \{f\}$

---

1) $qd \rightarrow f$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: $\quad q_1b \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{q_1\} = \{f, q_1\}$

---

2) $qd \rightarrow f$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: $\quad q_1b \rightarrow f$

$qd \rightarrow q_1$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: $\quad sa \rightarrow q_1$

$Q_2 = \{f, q_1\} \cup \{q_1, s\} = \{f, q_1, s\}$

---

3) $qd \rightarrow f$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: $\quad q_1b \rightarrow f$

$qd \rightarrow q_1$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: $\quad sa \rightarrow q_1$

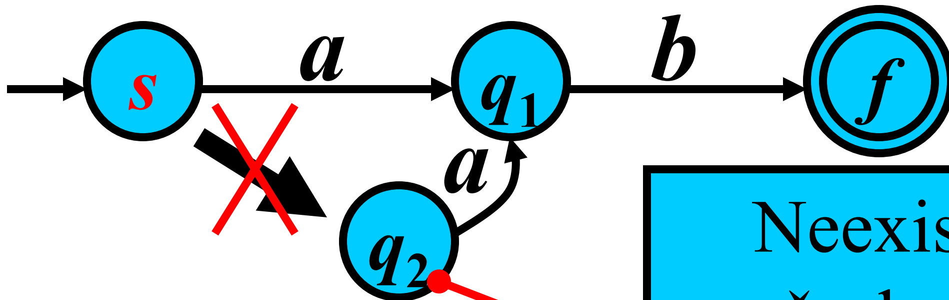
$qd \rightarrow s$; $q \in Q$; $d \in \Sigma$: **nic**

$Q_3 = \{f, q_1, s\} \cup \{q_1, s\} = \{f, q_1, s\} = Q_2 = Q_t$

$R_t = \{sa \rightarrow q_1, \cancel{sb \rightarrow q_2}, \cancel{q_1a \rightarrow q_2}, q_1b \rightarrow f\}$

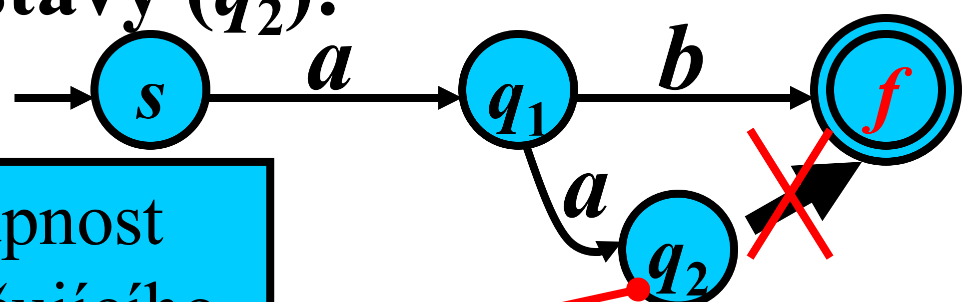
Celkem: Stavy k odstranění

1) Nedostupné stavy (q_2):



Neexistuje posloupnost přechodů z počátečního stavu do nedostupného stavu

2) Neukončující stavy (q_2):



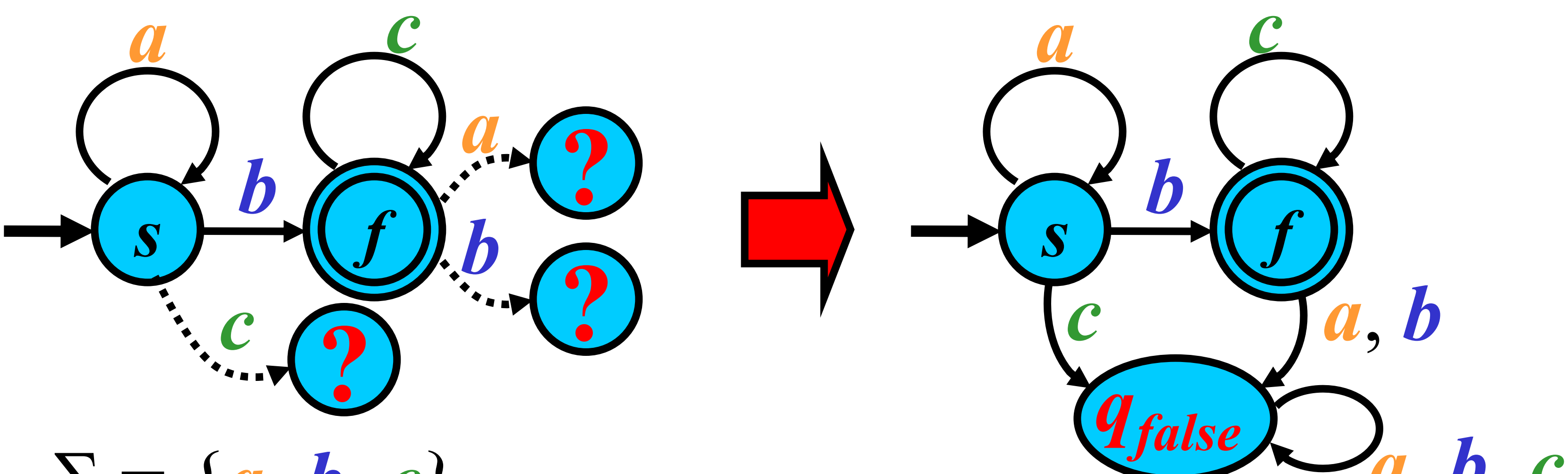
Neexistuje posloupnost přechodů z neukončujícího stavu do koncového stavu

Úplný DKA

Myšlenka: Úplný DKA se nemůže zaseknout.

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je **DKA**.
M je ***úplný***, pokud pro libovolné $p \in Q$, $a \in \Sigma$ existuje právě jedno pravidlo $pa \rightarrow q \in R$ pro nějaké $q \in Q$. Jinak M je ***neúplný***.

Převod: **Neúplný DKA:** **Úplný DKA:**



$\Sigma = \{a, b, c\}$

Algoritmus: Z DKA na úplný DKA

Myšlenka: Přidej stav simulující "past"

- **Vstup:** Neúplný DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný DKA $M_c = (Q_c, \Sigma, R_c, s, F)$

- **Metoda:**
- $Q_c := Q \cup \{q_{false}\}$;
- $R_c := R \cup \{qa \rightarrow q_{false}: a \in \Sigma, q \in Q_c,$
  $qa \rightarrow p \notin R,\ p \in Q\}$.

Dobře specifikovaný KA

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je **úplný DKA**.
Pak M je ***dobře specifikovaný KA*** (DSKA), pokud:

1) Q nemá nedostupné stavy

2) Q má maximálně jeden neukončující stav

Pozn.: Pokud dobře specifikovaný KA má neukončující stav, je to q_{false} z předchozího algoritmu

Tvrzení: Pro každý KA M existuje ekvivalentní dobře specifikovaný KA M_{ds}

Důkaz: Použij následující algoritmus

Algoritmus: Převod KA na DSKA

- **Vstup:** KA M
- **Výstup:** DSKA M_{ds}

- **Metoda:**
- převeď KA M na ekvivalentní KA M' bez ε-přechodů
- převeď KA M' na ekvivalentní DKA M_d bez nedostupných stavů
- převeď KA M_d na ekvivalentní DKA M_t bez neukončujících stavů
- převeď KA M_t na ekvivalentní úplný KA M_c
- $M_{ds} := M_c$

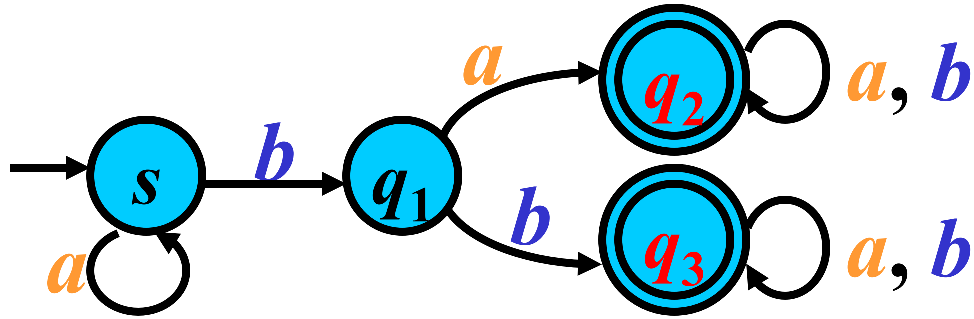
Pozn.: V M_{ds} je max. jeden neukončující stav—q_{false}

Rozlišitelné stavy

Myšlenka: Řetězec *w rozlišuje* stavy *p* a *q*, pokud se DSKA „dostane“ z <u>právě z jedné</u> z konfigurací *pw* a *qw* do koncového stavu.

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je DSKA a nechť $p, q \in Q, p \neq q$. Stavy p a q jsou *rozlišitelné* pokud existuje řetězec $w \in \Sigma^*$ takový, že:
$pw \vdash^* p'$ and $qw \vdash^* q'$, kde $p', q' \in Q$ a
$((p' \in F$ a $q' \notin F)$ nebo $(p' \notin F$ a $q' \in F))$.
Jinak stavy p a q jsou *nerozlišitelné*.

Rozlišitelné Stavy: Příklad



- s a q_1 jsou **rozlišitelné**, protože např. pro $w = a$:

$$sa \vdash s \ ,\ s \notin F$$
$$q_1 a \vdash q_2 \ ,\ q_2 \in F$$

- q_2 a q_3 jsou **nerozlišitelné**, protože pro každé $w \in \Sigma^*$:

$$q_2 w \vdash^* q_2,\ q_2 \in F$$
$$q_3 w \vdash^* q_3,\ q_3 \in F$$

- Ostatní dvojice stavů jsou triviálně **rozlišitelné** pro $w = \varepsilon$.

Minimální KA

Definice: Nechť M je DSKA. Potom, M je ***minimální KA***, pokud M obsahuje pouze rozlišitelné stavy.

Tvrzení: Pro každý DSKA M, existuje ekvivalentní minimální KA M_m.

Důkaz: Použij následující algoritmus.

Algoritmus: Minimalizace KA

- **Vstup:** DSKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Minimální KA $M_m = (Q_m, \Sigma, R_m, s_m, F_m)$

- **Metoda:**
- $Q_m = \{\{p: p \in F\}, \{q: q \in Q - F\}\};$
- **repeat**

 if existuje $X \in Q_m$, $d \in \Sigma$, $X_1, X_2 \subset X$ takové, že:

 $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset$ **and**

 $\{q_1: p_1 \in X_1, p_1 d \rightarrow q_1 \in R\} \subseteq Q_1, Q_1 \in Q_m,$

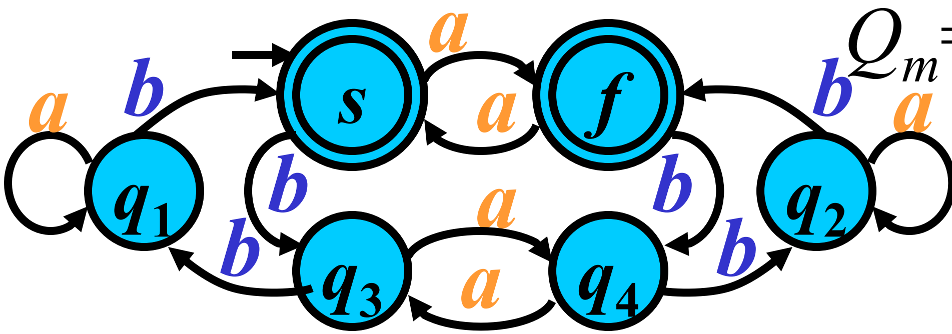
 $\{q_2: p_2 \in X_2, p_2 d \rightarrow q_2 \in R\} \cap Q_1 = \emptyset$

 then rozštěp X na X_1 a X_2 v Q_m

until není možné provést další štěpení;

- $R_m = \{ Xa \rightarrow Y: X, Y \in Q_m, pa \rightarrow q \in R, p \in X, q \in Y, a \in \Sigma\};$
- $s_m = X: s \in X;$ $F_m := \{X: X \in Q_m, X \cap F \neq \emptyset\}.$

Minimalizace: Příklad 1/4



$Q_m = \{\underbrace{\{s, f\}}_{\text{Koncové stavy}}, \underbrace{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}_{\text{Ostatní stavy}}\}$

1) $X = \{s, f\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$

Z jedné množiny

$d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

2) $X = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$:

Z jedné množiny

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$, $q_3a \rightarrow q_4$, $q_4a \rightarrow q_3$

$d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$; $\{s, f\} \subseteq Q_1 = \{s, f\}$

$q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$; $\{q_1, q_2\} \cap Q_1 = \emptyset$

Štěpení: $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \Rightarrow \underbrace{\{q_1, q_2\}}_{X_1}, \underbrace{\{q_3, q_4\}}_{X_2}$

Minimalizace: Příklad 2/4

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$

1) $X = \{s,f\}$:

Z jedné množiny **Z jedné množiny**

$d = a$: $sa \rightarrow f$, $fa \rightarrow s$ $\quad$ $d = b$: $sb \rightarrow q_3$, $fb \rightarrow q_4$

2) $X = \{q_1,q_2\}$:

Z jedné množiny **Z jedné množiny**

$d = a$: $q_1a \rightarrow q_1$, $q_2a \rightarrow q_2$ $\quad$ $d = b$: $q_1b \rightarrow s$, $q_2b \rightarrow f$

3) $X = \{q_3,q_4\}$:

Z jedné množiny **Z jedné množiny**

$d = a$: $q_3a \rightarrow q_3$, $q_4a \rightarrow q_4$ $\quad$ $d = b$: $q_3b \rightarrow q_1$, $q_4b \rightarrow q_2$

Žádné další štěpení !!!

Minimalizace: Příklad 3/4

$Q_m = \{\{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}\}$

$$\left.\begin{array}{l} sa \rightarrow f \in R: \\ fa \rightarrow s \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s, f\}a \rightarrow \{s, f\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} sb \rightarrow q_3 \in R: \\ fb \rightarrow q_4 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s, f\}b \rightarrow \{q_3, q_4\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1a \rightarrow q_1 \in R: \\ q_2a \rightarrow q_2 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_1, q_2\}a \rightarrow \{q_1, q_2\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1b \rightarrow s \in R: \\ q_2b \rightarrow f \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_1, q_2\}b \rightarrow \{s, f\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3a \rightarrow q_3 \in R: \\ q_4a \rightarrow q_4 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_3, q_4\}a \rightarrow \{q_3, q_4\} \in R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3b \rightarrow q_1 \in R: \\ q_4b \rightarrow q_2 \in R: \end{array}\right\} \Rightarrow \{q_3, q_4\}b \rightarrow \{q_1, q_2\} \in R_m$$

Minimalizace: Příklad 4/4

$s \in \{s,f\} \Rightarrow s_m := \{s,f\}$

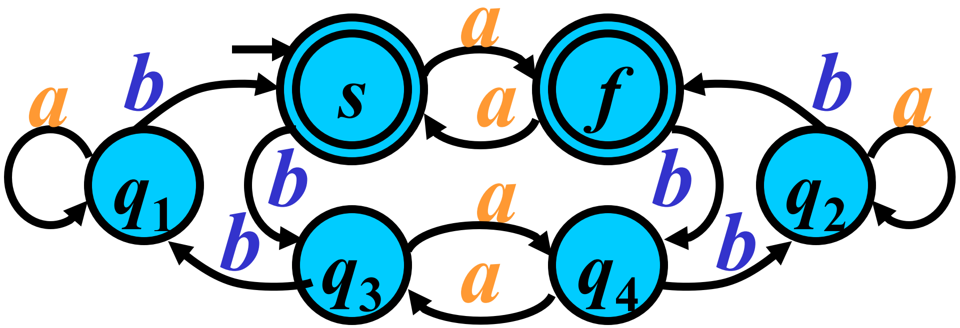
$\left.\begin{array}{l} s \in F: \\ f \in F: \end{array}\right\} \Rightarrow \{s,f\} \in F_m$

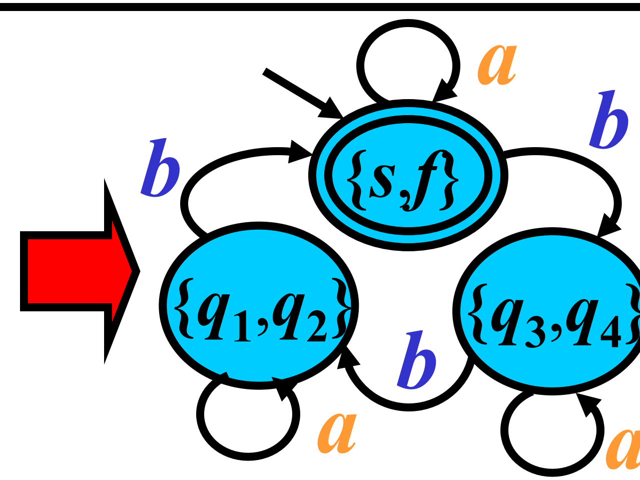
$M_m = (Q_m, \Sigma, R_m, s_m, F_m)$, kde: $\Sigma = \{a, b\}$, $s_m = \{s,f\}$

$Q_m = \{\{s,f\}, \{q_1,q_2\}, \{q_3,q_4\}\}$, $F_m = \{\{s,f\}\}$

$R_m = \{\{s,f\}a \to \{s,f\}, \{s,f\}b \to \{q_3,q_4\}, \{q_1,q_2\}a \to \{q_1,q_2\},$
$\{q_1,q_2\}b \to \{s,f\}, \{q_3,q_4\}a \to \{q_3,q_4\}, \{q_3,q_4\}b \to \{q_1,q_2\}\}$

Celkově:





Typy KA: Shrnutí

	KA	KA bez ε-přech.	DKA	Úplný KA	DSKA	Minimální KA
Počet všech pravidel tvaru $p \to q$, kde $p, q \in Q$	**0-n**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Počet pravidel tvaru $pa \to q$, pro libovolné $p \in Q$ a libovolné $a \in \Sigma$	**0-n**	**0-n**	**0-1**	**1**	**1**	**1**
Počet všech nedostupných stavů	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0**	**0**
Počet všech neukončujících stavů	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-n**	**0-1**	**0-1**
Počet všech možných těchto automatů pro jeden regulární jazyk	∞	∞	∞	∞	∞	**1**