

目 录

第一篇 最优控制与变分方法

第一章 最优控制问题及实例

- | | |
|----------------|-------|
| 1 控制原理简介..... | (2) |
| 2 最优控制的实例..... | (7) |

第二章 最优控制问题的数学描述

- | | |
|-------------------|--------|
| 1 控制问题的初等描述..... | (15) |
| 2 精确数学表达形式..... | (19) |
| 3 等价形式..... | (20) |
| 4 离散系统最优控制描述..... | (22) |

第三章 变分法简介

- | | |
|-----------------------|--------|
| 1 泛函及其极值..... | (25) |
| 2 泛函极值的必要条件与充分条件..... | (30) |
| 3 变分法与最优控制..... | (41) |

第四章 无约束最优控制问题的变分方法

- | | |
|----------------|--------|
| 1 引言..... | (49) |
| 2 固定终端时间..... | (51) |
| 3 自由终端时间..... | (58) |
| 4 一般结论及例子..... | (66) |

第五章 约束最优控制问题的变分方法

- 1 引言 (72)
- 2 等式约束下的变分方法 (73)
- 3 Pontryagin 极小值原理 (76)
- 4 一般方法及例子 (80)
- 5 问题与思考 (88)

第二篇 间接方法与直接方法

第六章 两点边值问题

- 1 引言 (91)
- 2 线性边值问题 (93)
- 3 非线性边值问题 (100)
- 4 隐式边界条件的求解 (113)
- 5 多重打靶法 (117)

第七章 无约束最优控制问题的数值方法

- 1 引言 (120)
- 2 梯度法 (124)
- 3 共轭梯度法 (131)
- 4 牛顿法(二阶变分法) (133)
- 5 变尺度方法 (134)

第八章 约束最优控制问题的数值解法

- 1 引言 (137)
- 2 约束控制的梯度方法 (138)
- 3 Frank-Wolfe 方法 (141)

4 罚函数法	(143)
5 另外形式的迭代算法	(146)

第九章 动态规划法

1 引言	(149)
2 最优性原理	(153)
3 Hamilton-Jacobi-Bellman方程	(156)
4 算例	(160)
5 附记	(164)
6 数学规划法简介	(164)

第十章 多重打靶法

1 参数最优化方法	(167)
2 多重打靶法	(171)
3 改进的多重打靶法	(178)
4 多重参数化方法简介	(183)

第十一章 最优控制的应用模型

1 生产与库存模型	(188)
2 最优消费时的最优积累率	(192)
3 最优经济增长模型	(196)
4 最优投资模型	(203)
参考文献	(210)

第一篇 最优控制与变分方法

最优控制与变分法都是讨论积分形式泛函的极值问题，因而有其相通处。在最优控制问题的求解中，古典的变分方法以及近代的极值原理起着重要的作用。

本篇着重介绍最优控制与变分方法的一些基本概念及其联系。

限于篇幅，变分方法只介绍与最优控制问题紧密相关的一些基本内容，对于重积分形式变分问题，含高阶导数变分问题，本篇均未涉及。

第一章 最优控制问题及实例

1 控制原理简介

1.1 控制是什么？

粗略地说，控制就是“自动调节”。我国古代四大发明之一“指南针”就是一个自动调节系统，不管我们采取何种“干扰”，指南针系统会自动调节使针向保持指南。同样，人体本身也可以看作是一个体温自动调节系统，天冷加衣服，天热减衣服，使自身保持在某一温度范围内。随着工业技术的发展，简单的自控系统应用很多，如家用的冰箱、恒温器等。

进行现代化大生产必须考虑两个问题：一个是生产系统的设计；一个是生产系统的控制。

系统设计所要解决的问题是：按生产的要求，确定系统的结构，并且确定维持生产的操作条件及外部环境。如在化工生产中，需要确定维持生产的温度、压力、流量、组成等等。

系统控制所要解决的问题是：保证设计中所确定的操作条件得以正确地实现。例如，化工生产中的操作条件由于外部干扰的影响是不稳定的，温度、流量、压力、组成等经常波动，影响产品的质量，这就需要设计一个调节机构，所以引进了控制。

一个生产过程或一个系统有无控制的本质区别在于有无反馈作用于输入。

图 1.1 是一个无控制的生产过程，其特点是当其操作条件输入系统后，在外部的干扰下生产输出。由于外部干扰无法排除，将会在输出中反映出来，在这种情形下，一般无法维持给定的输入值。

图 1.2 表示一个有控制的生产过程，其特点是将输出的结果进行测定、比较、判断、校正等步骤后，再将校正结果反馈至输入端，对输入加以影响，最终达到输出结果符合目标值。

形成控制的手段有两类：

(1) 人力控制：以人脑为比较、判断的中心，以人的双手作为执行校正的机构。如操作工控制流量时，先从流量计上读取流量的测定值，再与目标值进行比较，如果不符，便调整阀门的开度，以维持流量恒值。

(2) 电脑控制，又称自动控制，即当系统在外部干扰下出现偏差时通过计算机对操作量进行调节。其控制流程（如图 1.3 所示）如下：



图 1.1

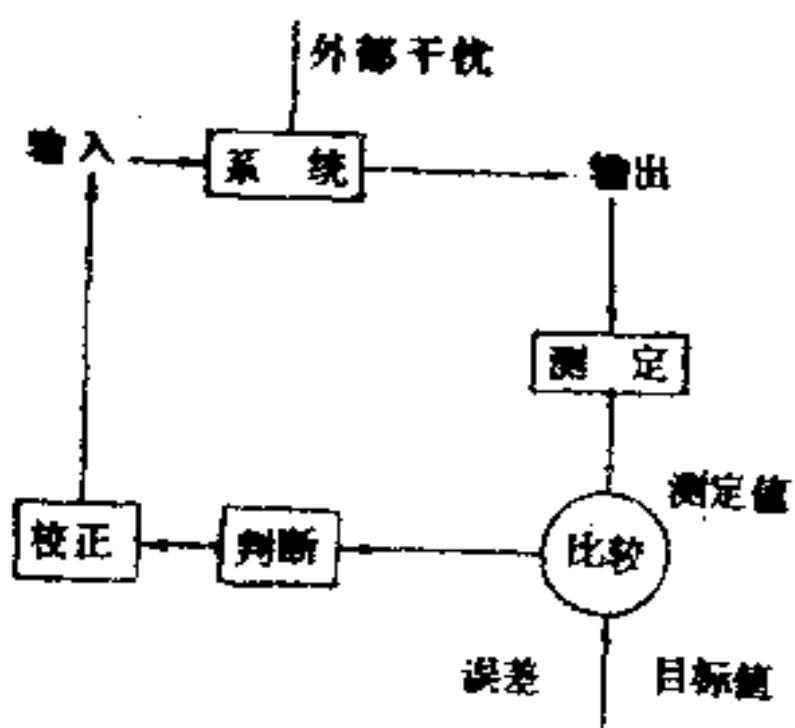


图 1.2

①检测元件对各种参数(如压力、流量、温度、组成等)连续不断地检测，得到检测数据。

②变送器将数据检测量转换成电信号。

③多路输入切换开关将电信号送入模/数转换装置，将模拟量如电压等转换为数字量。

④数字量输入计算机后，计算机对输出参数的实时检测数据进行分析、比较、判断，并将判断结果输入数/模转换装置。

⑤数/模转换装置将数字量再恢复为模拟量(电信号)送入调节器。

⑥由调节器驱动执行机构控制操作，使生产稳定运行或保持最优工况。

空间技术的发展及工程、生产问题的需要，促进了控制工程理论的突破，产生了现代控制理论，其三个标志为：

(1) 状态空间方法的出现，能控性、能观性概念的提出；

(2) Pontryagin 极大值原理的创见及 Bellman 动态规划方法的建立；

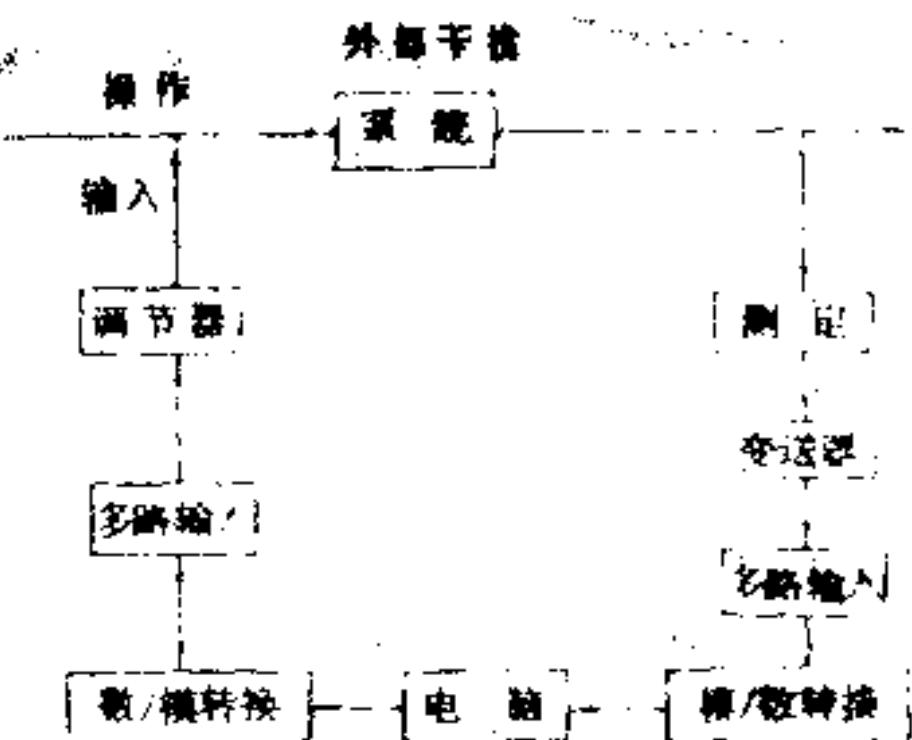


图 1.3

(3) Kalman 滤波器的出现.

现代控制理论采用时域方法，以最优化为准则处理多输入-多输出的复杂的被控系统，近一、二十年现代控制理论发展迅猛，许多分支学科逐渐壮大，其主要内容包括：

- (1) 线性系统的一般理论；
- (2) 最优控制理论；
- (3) 非线性系统理论；
- (4) 分布参数控制理论；
- (5) 系统辨识；
- (6) 状态滤波估计；
- (7) 自适应控制；
- (8) 微分对策；
- (9) 大系统控制理论；
- (10) 生物控制及经济控制。

控制理论的迅速发展与各学科的相互渗透使得我们难以面面俱到。本书仅讨论最优控制问题的计算方法。书中给出最优控制问题的一般提法，只限于由常微分方程描述的系统。

1.2 最优控制

控制的目的是保持系统的输出为定值。这个定值即是根据系统设计中确定的操作条件来定的，但是设计的操作条件与实际运行时的操作条件很难吻合。例如化工过程的操作条件下，原料的组成由于物性数据、反应速度常数、装置效率等等基础数据会有不确定性，故使实际使用的原料组成与设计的假定组成往往有出入，反应条件（温度、压力等）会因为触媒的时间老化而发生变化。

由于实际运行的最佳操作条件与设计的最佳操作条件有一定差距，因此要求不断根据实际情况重新计算最优操作条件。于是出现了最优控制系统，即在满足一定的约束条件下，寻求控制的规律，使我们所定目标达到最优。

最优控制理论设计系统有许多优点，适用于复杂的时变系统，可以处理多目标多约束的情况，并可利用计算机进行计算。最优控制系统基本上分为两类：

(1) 定常最优控制（离散系统的最优控制）

系统处于定常状态，通过极值化目标所确定的控制量（如操作条件）与时间无关。简单地说，控制在离散点上实施。

(2) 动态最优控制（连续系统的最优控制）

系统处于非常状态，通过极值化目标所确定的控制量随时间变化。简单地说，控制在一个时间区间上实施。

最优控制理论是现代控制的核心，早在40年代的控制系统设计中就已有最优控制的应用，只是有较大的局限性，只限于单变量的线性定常系统和很简单的设计目标，但其设计思想与现代控制理论是一致的。随着现代化控制理论的发展，最优控制理论得到了相应的发展。50年代初，人们就开始发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章，为发展现代控制理论提供了第一批实际模型。由于最优控制理论的综合性与数学理论、工程问题、空间技术、计算机发展等的密切关系，使其具有严格的表达形式和广泛的应用性，引起了科学家们的密切注意。人们发现，最优控制理论与数学上的变分理论是一脉相通的。但是，古典变分学对具有约束的控制问题却无法解决，这就导致了人们在变分法理论的基础上寻

求一种求解最优控制问题的新方法，最为著名的两个方法是：

(1) R.E.Bellman 的动态规划法。美国数学家 Bellman 依据最佳原理，发展了变分法中的 Hamilton-Jacobi 理论，于 1953 年至 1957 年逐渐建立起动态规划方法。它适于上机计算，处理问题范围很广。

(2) Pontryagin 的极大值原理。苏联数学家 Pontryagin 受力学中 Hamilton 原理的启发，于 1956 年至 1958 年逐步创立了最优控制问题的最大值原理。极大值原理是通过一个最优控制的必要条件，把较复杂的带积分的最优控制问题转换成一个相对简单的最优化问题，其应用相当广泛。

最优控制理论在空间技术等广泛的广泛应用，需要解决的较复杂的系统越来越多。一方面，人们研究最优控制问题的存在性、充分必要条件，从理论进行探讨；另一方面，在最优控制问题解析解难以得到的情形下，利用高度发展的计算机这一得力工具，研究摸索最优控制问题的数值方法，出现大批研究成果。

可以说，最优控制问题的研究今后仍将是现代控制理论的重要工作，而最优控制理论的发展，需要与之相应的计算方法。因此最优控制计算方法的重要性是很清楚的。

2 最优控制的实例

2.1 空间技术中的实例

例1.1 最小耗能问题

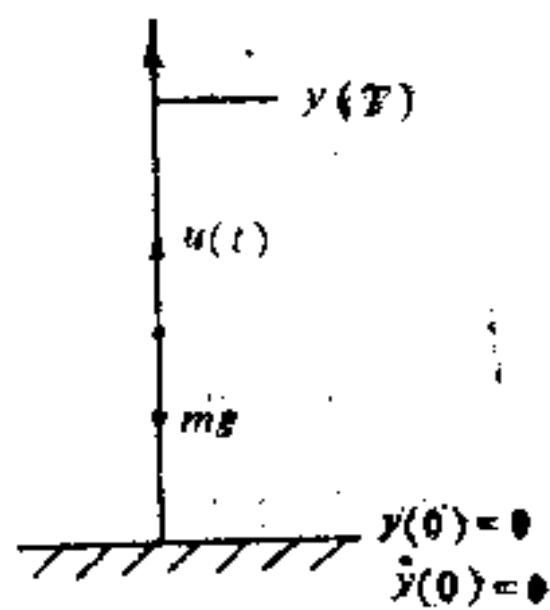


图 1.4

考虑一支火箭在时间 $(0, T)$ 内从地面上升到某一高度 \bar{y} , 其运动规律可由微分方程描述:

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - mg,$$

其中 $y(t)$ 表示时刻 t 火箭的高度, $u(t)$ 表示时刻 t 火箭在垂直方向向上发出的推力, m 为火箭的质量. 如图 1.4 所示. 火箭的推力是有限制的, 即

$$|u(t)| \leq b. \quad (1.1)$$

为方便起见, 改写运动规律方程:

$$\text{令 } \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{m}u(t) - g, \end{aligned}$$

$$\text{所以有 } \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\text{和 } \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

我们的目标是使火箭到达某一高度耗能最小, 即满足

$$y_1(T) = \bar{y} \quad (1.4)$$

时耗能最小. 根据物理学的观点, 所耗能量可用 $\int_0^T |u(t)| dt$ 表示. 因而本问题就是在满足 (1.1)–(1.4) 式的条件下使 $\int_0^T |u(t)| dt$ 达到极小, 求出最佳推力 $u(t)$.

例1.2 登月问题

考虑一登月飞船, 消耗最少的燃料在月球上以速度零安全着陆问题. 设飞船质量为 m , 高度为 h , 垂直速度为 v ,

球的重力加速度为常数 g , u 为飞船发动机推力。 u , h , v , m 皆为时间 t 的函数。又设飞船自身质量为 M , 燃料质量为 F , 运动方程为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{h}=v, \\ \dot{v}=-g+u/m, \\ \dot{m}=-ku(k \text{ 是常数}) \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

初始状态:

$$h(0)=h_0, \quad v(0)=v_0, \quad m(0)=M+F. \quad (1.6)$$

终端状态:

$$h(t_f)=0, \quad v(t_f)=0 \quad (t_f \text{ 为终端时间}). \quad (1.7)$$

控制量推力 u 限制在

$$0 \leq u \leq u_{\max}. \quad (1.8)$$

我们的目标是使燃料消耗最小, 所以问题归结为求最佳推力 $u(t)$ 使(1.5)一(1.8)式满足, 并使 $m(t_f)$ 达到极大。

例1.3 飞行器静止问题

飞行器上的控制面要在某一固定位置上保持静止, 但阵风却使此面与预定位置产生偏离, 可以设计一个伺服机构产生回复力矩, 使控制面在最短时间内回到静止状态。运动方程满足

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) &= u(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0. \end{aligned}$$

其中 θ 表示离开预定位置的偏差, θ_0 是位移($\dot{\theta}_0$ 是阵风施加给控制面的速度), $u(t)$ 为 t 时刻的回复力矩, $u(t)$ 满足 $|u(t)| \leq c$ (c 为常数)。

显然问题就是寻求 $u(t)$, 使在最短时间内达到 $\theta=0$,

$\dot{\theta}=0$ 的终端状态.

把问题简单化: 令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, 有

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2, \quad x_1(0) = \theta_0; \\x_2 &= -ax_2 - \omega^2 x_1 + u, \quad x_2(0) = \dot{\theta}_0; \\x_1(t_f) &= 0, \quad x_2(t_f) = 0.\end{aligned}$$

选择 $u(t)$ 满足 $|u(t)| \leq c$, 并使

$$c(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f$$

为极小.

例1.4 防天拦截问题

现代战争中, 用火箭拦截敌方飞行目标, 形成了防天拦截问题, 并要求尽可能节省燃料, 快速拦截. 火箭与飞行目标的相对运动方程为

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= a(t) + \frac{F(t)}{m(t)} u, \\ \dot{m} &= -F(t)/c,\end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

初始条件: $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$, $m(t_0) = m_0$.

其中 $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ 分别表示火箭与飞行目标的相对位置向量、相对速度向量和相对加速度向量, $m(t)$ 是火箭的质量, $F(t)$ 是推力的大小, u 是推力的单位方向, c 是有效喷气速度 (常数), 且要求

$$\begin{aligned}0 &\leq F(t) \leq F_{\max}, \\ \|u(t)\| &= 1,\end{aligned}$$

在时刻 t_f 实现拦截, 即

$$x(t_f) = 0,$$

燃料 $m(t_f) \geq m_0$ (火箭自身质量). 这是一个多目标问题, 它要求时间最快, 燃料最省, 目标泛函综合为 $A t_f - m(t_f)$ 达到最小. A 为加权常数.

问题归结为求 $F(t)$ 、 $u(t)$ 、 t_f , 有效实现拦截, 并使目标泛函为最小.

2.2 工程问题

例1.5 反应器控制问题

考虑化学工程问题中, 在反应器中如何控制反应温度, 使某一目标达到最优.

设有一连续反应 $x \rightarrow y \rightarrow z$, 物料 x 的浓度记为 $x(t)$, 物料 y 的浓度记为 $y(t)$, 时刻 t 的反应温度为 $\theta(t)$, 时间区间为 $(0, T)$. 反应方程式:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a(\theta)F(x), \\ \dot{y}(t) &= na(\theta)F(x) - b(\theta)G(y). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1.10)$$

其中 n 为常数, a , b , F , G 为已知函数, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

目标是指在 $(0, T)$ 时间内, 控制反应温度, 使物料 y 的浓度 $y(t)$ 最大 (产量最高).

$$y(T) = y_0 + \int_0^T (na(\theta)F(x) - b(\theta)G(y)) dt \quad (1.11)$$

另外反应温度要求在一定范围内:

$$|\theta(t)| \leq k \text{ (常数).} \quad (1.12)$$

该问题就是在满足反应方程(1.10)和温度约束(1.12)的情形下使 $y(T)$ 达到极大.

例1.6 液体搅拌

考虑一盛放液体的连续搅拌槽，如图 1.5 槽内有连续工作的搅拌器，使液体处于完全混合状态。现从入口处流进温度 $u(t)$ 的液体使槽内液体的温度在 $(0, T)$ 内上升 $h^\circ\text{C}$ 。同时为使液面保持恒定，出口处将流出同量水流。试求 $u(t)$ 的规律，使散失热量最少。

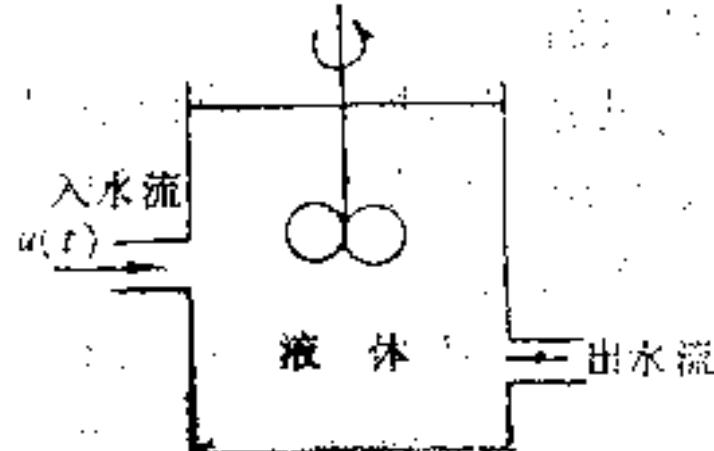


图 1.5

$x(t)$ 表槽内液体温度，由热力学原理知

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= k(u(t) - x(t)) \quad (k \text{ 为比例常数}), \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

散失热量为

$$\int_0^T (qx^2(t) + ru^2(t)) dt. \quad (1.13)$$

这里 $q, r > 0$ 为常数，故最优控制问题归结为寻找 $u(t)$ 满足

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = k(u - x), \\ x(0) = 0, \\ x(T) = h, \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

$$u \leq b \quad (\text{温度上界}), \quad b \gg h, \quad (1.15)$$

使热量散失目标函数达到极小。

2.3 生产问题

例1.7 生产分配问题

设 $x(t)$ 为某一工厂在 t 时刻生产的钢产量总额，其分配途径有两个：

- (1) 消费品的生产；(2) 投资。

该问题是选择合适的分配比例，使 $(0, T)$ 时期内总的消费为最大值。

这里分配给投资用的钢用以增加生产能力。设 $u(t)$ 表示时刻 t 时用于投资的钢产量的比值。假设再投资的钢又用于生产，便有方程：

$$\begin{aligned} dx/dt &= ku(t)x(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \\ x(0) &= c. \end{aligned}$$

这里 c 为原始资金， k 为适当常数。上式表示生产的增长率正比于用于投资的总额。

$1-u(t)$ 为消费的比值，在 $(0, T)$ 内总消费为

$$\int_0^T (1-u(t))x(t)dt.$$

这个问题告诉我们，如何合理安排分配才能使某一时期内的总消费达到极大。

例1.8 生产计划问题

考虑某一生产单位如何安排生产率，才使总成本极小。

在一固定时期 $(0, T)$ 内， $x(t)$ 表示 t 时刻的商品存货量， $r(t)$ 为 t 时刻商品的需求率， $u(t)$ 为时刻 t 的生产率。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -r(t) + u(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$x_0 > 0$ 为初始库存量。按实际需要，要保证库存量 $x(t) \geq 0$ ， $t \in (0, T)$ ，生产能力也要受到一定的限制： $0 \leq u(t) \leq A$ ($A > 0$)。

总成本由生产成本和贮藏费用组成。每个单位时间的生产成本是生产率 u 的函数，记为 $h(u(t))$ 。单位时间贮藏商

品的费用记为 $b\dot{x}(t)$ ($b > 0$)，则总成本

$$c(u) = \int_0^T [h(u(t)) + b\dot{x}(t)] dt. \quad (1.17)$$

对生产计划人员来说，就是要选取一个控制函数 $u(t)$ (生产率)，满足方程(1.16)及约束条件，使总成本 $c(u)$ 取得极小值。

2.4 运动学问题

例1.9 最速到达问题

考虑一列火车如何从甲地以最短时间到达乙地。

设 $x(t)$ 表示火车在时刻 t 的位置， x_0 为甲地的位置， x_T 为乙地的位置，初始速度和终止速度都为零。希望选择一个控制力函数 $u(t)$ ，使火车能以最短时间到达乙地（速度为零）。

设 $u(t)$ 满足 $|u(t)| \leq M$ (常数)。

运动规律为 $\ddot{m}x = u(t), t > 0.$

令 $x_1 = x, x_2 = u(t).$

则 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是火车在 t 时刻的位置和速度，于是有

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = x_0, \\ \dot{x}_2 = u(t), \quad x_2(0) = 0. \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

终端要求为

$$x_1(T) = x_T, \quad x_2(T) = 0. \quad (1.19)$$

控制约束为 $|u(t)| \leq M.$ (1.20)

目标函数为 $T = \int_0^T dt = T,$

即求 $u(t)$ 满足式(1.18)——(1.20)，使时间 T 最小。

第二章 最优控制问题的数学描述

1 控制问题的初等描述

从第一章的实例可以看出，通常的最优控制问题可以归纳为共同的数学描述，基本上有下面几个内容。

1.1 受控制系统的数学模型

受控制系统的数学模型，即是动态系统的微分方程，它反映了动态系统在控制过程中所具有的物理、化学或经济规律。如实例中的运动学方程、反应方程、热力学方程、经济学方程等等。一个集中参数的受控系统总可以用一组一阶常微分方程来表示，形如

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

称为**状态方程**，其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 称为 **n 维状态向量**，而 $u = (u_1, \dots, u_r)^T$ 称为 **r 维控制向量**。例如第一章例1.1中，

状态变量为 $y_1(t), y_2(t)$ ；（位置函数）

控制变量为 $u(t)$ 。 （力函数）

又如例5中，

状态变量为 $x(t), y(t)$ ；（浓度函数）

控制变量为 $\theta(t)$ 。 （温度函数）

状态方程具有边界条件，即是动态系统的初始状态及终止状态，在控制 $u(t)$ 的作用下，实现状态转移是必然的。这种状态转移形成 **n 维空间**中点的运动，进而产生一条状态轨线。在许多最优控制问题中，初始状态通常是已知的，前述

例子都属于这种情况，而所达的终止状态，即是控制所要达到的目标，有许多不同的情况：有时为一个固定点；有时不完全给定；更一般的情况是终止状态要求在事先规定的范围内，称为**目标集**。例如：

在第一章例1.1中，终态是部分给定的，只给出了 $y_1(T) = \bar{y}$ 这一限制，而对 $y_2(T)$ 没有要求， T 一定；

在第一章例1.6、1.9中，终端时间及状态都是固定的；

在例1.5、1.7、1.8中，终端时间固定，状态自由；

在例1.2中，终端时间不定，终端状态部分给定；

在例1.3中，终端时间自由，状态固定，是最短时间问题；

在例1.4中，终端时间自由，终止状态部分自由、部分给定，部分在某一集合内， $x(t_f)=0$ ， $v(t_f)$ 无限制， $m(t_f) \geq m_*$ ，这里 t_f 表自由终端时间。

由上可看出，无论哪种情况，都可以归结为一个目标集 S 来表示终态：

- (1) 若终态是一个固定点， S 为单点集 $\{x_f\}$ ；
- (2) 若终端状态应满足某些约束条件，则 S 为 n 维空间某一子集；
- (3) 若终态不受约束，则目标集 $S = R^n$ 。

其它的情况无非是这三种情形的部分组合和变形，一般地记为

$$S = \{x(t_f) | x(t_f) \in R^n, \varphi_i(x(t_f), t_f) = 0, \\ \varphi_j(x(t_f), t_f) \leq 0, i=1, \dots, L'; j=L'+1, \dots, L\}.$$

(2.1)

1.1.2 约束条件

所谓约束条件主要指控制 $u(t)$ 的一个取值范围，这个范围可用 Ω 表示， $\Omega \subset R^r$ ，从而 $u(t)$ 的每一个值对应于 Ω 中的一个元素。在我们所举的实例中，几乎所有的问题都要求控制函数有一定取值范围。如第一章例 1.1、1.2 中要求推力有上限，即 $|u(t)| \leq b$ ；例 1.5、1.6 中要求温度有界限等。

另外例 1.8 中的生产计划问题，还要求状态 $x(t)$ 满足一定约束，即存货量非负： $x(t) \geq 0$ 。这种约束不同于状态方程及边界条件，也将其归于约束条件内。

一般地，我们把满足约束条件的点集称为**控制域**，记为 U ：在非线性系统中，有时会遇到较复杂的非线性约束。这些约束可看成控制和状态的共同约束。一般说来，约束条件可表为

$$\begin{aligned} g_i(x(t), u(t), t) &\leq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad t \in (t_0, t_f); \\ g_j(x(t), u(t), t) &= 0, \quad j=m'+1, \dots, m. \end{aligned}$$

满足该条件的控制称**容许控制**，容许控制集记为

$$u = \{u(t) | u(t) \in R^r, g_i(x, u, t) \leq 0, g_j(x, u, t) = 0, \\ i=1, \dots, m', \quad j=m'+1, \dots, m\}. \quad (2.2)$$

1.3 性能指标

实现状态 $x(t_0)$ 到目标集的转移有不同的途径，可选择不同的控制 $u(t)$ 达到这一目标。为了寻求最优化，找出最为满意的一种控制，这就需要根据实际情况建立一种衡量控制效果优劣的性能指标。例如第一章例 1.1 将耗能最小作为性能指标；例 1.8 以总成本最小作为性能指标；例 1.9 以时间最小作为标准；例 1.4 则是同时考虑省料和省时。

选择性能指标主要取决于最优控制问题所要解决的主要矛盾以及控制的质量。另外由于设计者着眼点不同，相同的控制问题会产生不同的性能指标，所以不可能给出很具体的统一性能指标模式，而只有给出一种综合形式，在实际中再进行取舍和变形。

一般地，我们称

$$J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (2.3)$$

为**复合型性能指标**。它是由末值型性能指标和积分型性能指标共同组成的。其中 $\varphi(x(t_f), t_f)$ 和 $L(x, u, t)$ 都是 x, t 的连续可微函数。

可以看出，上一章的实例中的性能指标皆在此范围内。

1.4 最优控制的提法

已知动态系统的状态方程及初始状态

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \end{cases}$$

其中向量函数 $f(x(t), u(t), t)$ 是 $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 t 的连续函数，并对 $x(t)$ 、 t 可微。

求区间 $[t_0, t_f]$ 上有第一类间断点的分段连续控制函数 $u(t)$ ， $u(t) \in U$ ，把状态从 x_0 转移到目标集 S 中，并使性能指标 $J(u)$ 达到极值。

这就是最优控制问题，问题的解 $u^*(t)$ 为**最优控制**，相应的 $x^*(t)$ 为**最优轨线**。最优控制 $u^*(t)$ 自然应满足三个条件：

- (1) 约束条件： $u^*(t) \in U$ ；
- (2) 实现状态转移，即使 $x(t)$ 从 $x(t_0)$ 达到 $x(t_f)$ ；

(3) 使性能指标最优。

2 精确数学表达形式

最优控制问题的精确数学表达形式将涉及到 Lebesgue 积分。初等描述中“分段连续控制”在这里应换为“可测控制”。

设基本变量为 t , $x \in R^n$ 为状态变量, $u \in R^r$ 为控制向量。令

$$\mathcal{R} = \{(t, x), t \in R, x(t) \in R^n\},$$

\mathcal{U} 表 u -空间的区域,

$$\Omega: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U},$$

$$(t, x) \mapsto \Omega(t, x),$$

称 Ω 定义了一个控制约束。

定义 2.1 定义在区间 (t_0, t_f) 上而取值于 \mathcal{U} 中的可测函数 $u(t)$ 称为在 (t_0, t_f) 上的一个控制。如果存在一个定义在 (t_0, t_f) 上而取值 R^n 的绝对连续函数 $\hat{x}(t)$, 使

(i) $t_0 \leq t \leq t_f$, 有 $(t, \hat{x}(t)) \in \mathcal{R}$;

(ii) $\hat{x}(t)$ 为 $\dot{x} = f(x, u, t)$ 的解,

函数 $\hat{x}(t)$ 相应称为轨迹, 点 $(t_0, \hat{x}(t_0))$ 叫轨迹的初始点,

$(t_f, \hat{x}(t_f))$ 叫轨迹的终止点, 点 $(t_0, \hat{x}(t_0), t_f, \hat{x}(t_f))$ 叫做轨迹的端点。

(ii) 意味着 $t \mapsto f(t, \hat{x}, u)$ 在 (t_0, t_f) 上是 Lebesgue 可积的。

定义 2.1 中的微分方程组称为**状态方程组**。

定义2.2 控制 u 称为容许控制, 如果存在相应于 u 的
轨线 \hat{x} 使得:

- (i) $t \rightarrow L(\hat{x}, u, t) \in L_1(t_0, t_f)$;
- (ii) $u(t) \in \Omega(t, \hat{x}(t))$ 在 (t_0, t_f) 上几乎处处成立;
- (iii) $(t_0, \hat{x}(t_0), t_f, \hat{x}(t_f))$ 为端点.

相应的可以定义容许轨线 \hat{x} .

定义2.3 容许控制 u 和与之相应的容许轨线 \hat{x} 组成的
 (\hat{x}, u) 称为容许对.

最优控制问题的精确数学描述如下:

令 \mathcal{S} 表 (\hat{x}, u) 的集合, $\mathcal{S} \neq \emptyset$;

$$J(u) = \varphi(t_0, \hat{x}(t_0), t_f, \hat{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \hat{x}(t), u(t)) dt,$$

其中 φ 是定义在端点上的实函数. 问题是求 $(x^*, u^*) \in \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, 使

$$J(u^*) \leq J(u) \text{ (或 } J(u^*) \geq J(u))$$

对所有 $(\hat{x}, u) \in \mathcal{S}_1$ 成立.

简述为: 在满足状态方程、端点条件及控制约束下, 使 $J(u)$ 取极小(极大)值. 不失一般性, 只讨论极小问题.

定义2.4 上述问题的解对 (x^*, u^*) 叫做最优对, x^* 为
最优轨线, u^* 为最优控制.

3 等价形式

最优控制问题通常有三种等价形式, 分别以 Lagrange,

Mayer, Bolza 命名

(1) Lagrange 问题

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{状态方程 } \frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad t \in (t_0, t_f), \\
 x(t_0) = x_0, \\
 x(t_f) \in S \quad (\text{终端条件}), \\
 u(t) \in U \quad (\text{控制约束}), \\
 \min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt.
 \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

性能指标为积分型, 如误差平方积分、燃料或控制能量最小等.

(2) Mayer 问题

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{状态方程 } \frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad t \in (t_0, t_f), \\
 x(t_0) = x_0, \\
 x(t_f) \in S, \quad u(t) \in U, \\
 \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f).
 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

性能指标为终端指标, 如终端状态控制、最短时间控制等.

(3) Bolza 问题

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{状态方程 } \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x} = f(x, u, t), \\
 x(t_0) = x_0,
 \end{array} \right. \\
 x(t_f) \in S, \\
 u(t) \in U, \\
 \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt.
 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

性能指标为综合指标，如最小积分控制问题。显然，Bolza 问题当 $L=0$ 时，为 Mayer 问题；当 $\varphi=0$ 时，为 Lagrange 问题。

这三种形式的最优控制问题是相互等价的，彼此可以相互转换：

(1) Bolza 问题 \rightarrow Lagrange 问题

令 $F = L + \dot{\varphi}(x, t)$ ，即有

$$\min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt + \varphi(x(t_0), t_0).$$

第二项为常数，可略去，从而成为 Lagrange 问题。

(2) Bolza 问题 \rightarrow Mayer 问题

令 $\dot{x}_{n+1} = L(x, u, t)$, $x_{n+1}(t_0) = 0$. 将积分项转入状态方程中，从而增加一维状态变量，但

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f), t_f) + x_{n+1}(t_f) \\ &= \varphi(x(t_f), t_f), \\ x &= (x_1, \dots, x_{n+1})^T. \end{aligned}$$

所以形成了 Mayer 问题。

由 1、2 知三者的确相互等价，因此在具体应用中可酌情选择适当的形式。

4 离散系统最优控制描述

4.1 离散系统的控制问题

当控制变量 $u(t)$ 是取在离散点上，或者说控制是在离散点上实施时，称为**离散系统的控制问题**。

现考虑一个固定为 k 个时段的离散最优控制问题（如图 2.1）。

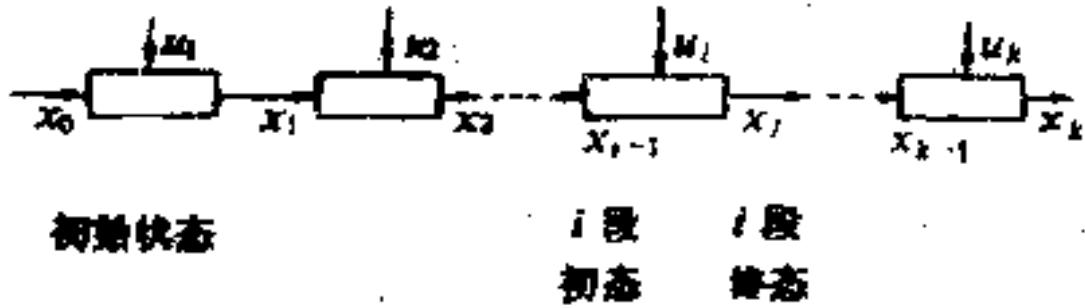


图 2.1

其中: x_0, x_1, \dots, x_k 为状态向量序列; u_1, \dots, u_k 为控制向量序列。 $\{x_i\}$, $\{u_i\}$ 服从于状态方程(差分方程):

$$x_i = x_{i-1} + \varphi_i(x_{i-1}, u_i).$$

该方程表明, 给定初态 x_0 , 应用控制序列

$$u_1, \dots, u_k,$$

便可得到状态序列

$$x_1, \dots, x_k.$$

$\{x_i\}_{i=0, \dots, k}$, $\{u_i\}_1^k$ 为容许的, 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \in X_i \subset R^n, \\ u_i \in U_i \subset R^r. \end{array} \right.$$

问题的提法是: 在所有的容许控制和容许轨线中, 通过极小化目标寻找最优控制和相应的最优轨线。模型为

$$\left. \begin{array}{l} \min f_0(x_0, \dots, x_k, u_1, \dots, u_k), \\ \text{s.t. } x_i = x_{i-1} + \varphi_i(x_{i-1}, u_i), \\ x_i \in X_i, \\ u_i \in U_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

若令 $x = (x_0, \dots, x_k, u_1, \dots, u_k)^T$, 将各个状态方程记为 $\varphi(x) = 0$, 各个边界条件总记为 $\phi(x) \leq 0$, 则上述问题是—个非线性规划问题:

$$\min f_0(x),$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \varphi(x) = 0, \\ & \psi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

4.2 连续控制问题离散化

一个连续系统控制问题可以用一个离散最优控制问题去逼近。对于下面问题，假定

$$\left. \begin{aligned} \min J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \\ \text{s.t. } & \frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad t \in (t_0, t_f), \\ & x(t) \in X \subset R^n, \\ & u(t) \in U. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

将 (t_0, t_f) 分成 k 个时段

令 $\Delta t = (t_f - t_0)/k$,

$$t_i = i\Delta t + t_0, \quad i = 0, \dots,$$

$$k, x_i = x(t_i), u_i = u(t_i),$$

则原问题离散为

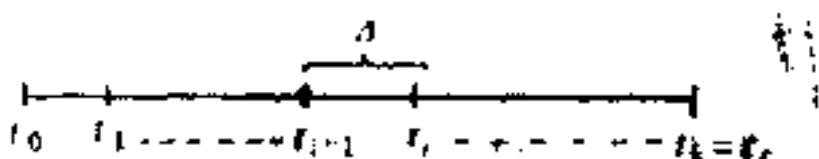


图 2.2

$$\left. \begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^k L(x_i, u_i), \\ \text{s.t. } & x_i = x_{i-1} + \varphi_i(x_{i-1}, u_i), \\ & x_i \in X_i, \\ & u_i \in U_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 φ_i 是第 i 个微分方程离散后所得。 (2.9) 式是一个离散最优控制问题。

显然，用离散最优控制逼近连续控制问题其效果依赖于 Δ 的大小。原则上 Δ 越小，逼近效果越好。

第三章 变分法简介

1 泛函及其极值

1.1 泛函极值问题举例

泛函是函数概念的一种扩充，求泛函极值的方法与求函数极值方法有许多相似之处。为了说明泛函及其极值问题，先举几个简单例子。

例3.1 短程线问题

设 $\varphi(x, y, z)=0$ 为已知曲面，求该曲面上已给两点 A, B 间长度最短的曲线。

设曲面 $\varphi(x, y, z)=0$ 上的曲线

$$y=y(x), \quad z=z(x);$$

A, B 两点的 x 坐标分别为 x_0, x_1 ，那么由弧长公式，该问题即是在 $\varphi(x, y, z)=0$ 上过点 A, B 求曲线 $y=y(x), z=z(x)$ ，使

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx$$

达到最小值。这里要求 $y(x), z(x)$ 必须满足约束条件 $\varphi(x, y, z)=0$ 和边界条件

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, & y(x_1) &= y_1, \\ z(x_0) &= z_0, & z(x_1) &= z_1. \end{aligned}$$

由于 A, B 已知，故可得 (x_0, y_0, z_0) 及 (x_1, y_1, z_1) 。

例3.2 等周问题

在长度一定的封闭的平面曲线中，求使所围面积最大的曲线。

设曲线方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 函数 $x(t)$, $y(t)$ 一阶连续可微; C 为所围平面区域的边界, 那么边界长

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^2 + y^2} dt,$$

面积

$$s = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

所以该问题即是在 L 为定值的情况下, 求 s 的极大值, 其中边界条件为

$$x(t_1) = x(t_0), \quad y(t_1) = y(t_0).$$

例3.3 悬线问题

将一条足够长的绳索两端挂在空间 A , B 两点, 求平衡状态下绳索的形状。

设绳索的曲线方程为 $y=y(x)$, A , B 两点的 x 坐标分别为 x_0 , x_1 , 由题意, 绳长

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

不变, 根据物理意义, 绳索在平衡状态时, 重心最低, 即重心坐标

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx$$

最大, 所以该问题即是在保持 L 不变的情况下, 求 $y(x)$ 满足 \bar{y} 最大, 其中边界条件为

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$$

1.2 泛函的极值

从前面的例子可以看出，每个问题都是寻找一些函数满足目标最优，并且在每个目标中，给定一个函数形式，便得到一个常数值，构成了函数与常数的对应。如例3.3中，给定一个函数 $y(x)$ ，便对应一实数 \bar{y} 值，这和我们过去所学函数极值问题不同，不是数对应数，而是一条曲线与目标值的对应。这种扩充就是泛函概念的实质所在。

(1) 泛函

简单地说，泛函是函数的函数，其变量为函数，值为一实数（或复数）。或者说，对于某一类函数族中的任一函数 $y(x)$ ，均有一个确定的常数与之对应，那么就称这种对应关系 $J = J[y(x)]$ 为泛函。

严格地讲，泛函是一种映射，它将空间 V 中的元素变换成为数值，即

$$J: V \rightarrow R$$

V 通常为 Banach 空间（完备的赋范线性空间）， R 为实数域。

根据泛函的定义，其形式是多种多样的。为了与控制问题相呼应，我们着重讨论具有积分形式泛函的极值问题。

本节三个例子所示的泛函是最简单的泛函，它们的一般形式是：

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x), x) dx. \quad (3.1)$$

还有含多个函数及其一阶导数的泛函

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x), z(x), z'(x)) dx \quad (3.2)$$

及含一个函数及其高阶导数的泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) dx \quad (3.3)$$

(2) 容许曲线

以上问题(3.1)、(3.2)、(3.3)中的未知函数 y, z, y_1, \dots, y_n , 一般情况还要求满足一定的附加条件. 满足这些附加条件, 使 $J[y(x)]$ 有定义的函数曲线, 称为**容许曲线**, 就短程线问题而言, 泛函所能考虑的曲线, 即容许曲线, 仅仅是那些通过 A, B 两点的连续可微或者连续分段可微函数. 又如等周问题, 被求曲线需满足等周条件, 不满足该条件的曲线不是容许曲线.

所有容许曲线形成**容许曲线族**.

(3) 极值曲线与比较曲线

设 $J[y(x)]$ 在 $y=y^*(x)$ 上达到极值, 则称 $y=y^*(x)$ 为**极值曲线**. 与 $y=y^*(x)$ 接近的容许曲线称为**比较曲线**.

(4) 曲线的接近

接近是一个距离的概念. 曲线的接近意味着函数间的距离. 考虑连续函数空间 $C[x_0, x_1]$, 设标量函数 $y(x), z(x) \in C[x_0, x_1]$. $\epsilon > 0$ 是预先给定的小量, 如果曲线 $y(x), z(x)$ 满足

$$|y(x) - z(x)| < \epsilon, \quad x \in [x_0, x_1]$$

则称两曲线零级接近.

可以看出零级接近保证的是两条曲线同时被夹在一条很窄的带状区域中，亦即二者在同一点的值很接近，但仅满足这一条件的曲线可具有各种各样的形状，曲线在每点的变化趋势有极大差异，为保证曲线 $y(x)$ 、 $z(x)$ 在形状上比较吻合，还需引进满足更高要求的曲线接近的概念。

$\varepsilon > 0$ 是预先给定的小量，如果曲线 $y(x)$ 、 $z(x)$ 当 $x \in [x_0, x_1]$ 满足

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x) - z'(x)| < \varepsilon,$$

… … …

$$|y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)| < \varepsilon,$$

则称曲线 $y(x)$ 与 $z(x)$ n级接近。显然， n 越大曲线间接近程度越高。为方便起见，在 $C[x_0, x_1]$ 空间中，我们定义距离：

$$d_0(y(x), z(x)) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x) - z(x)|. \quad (3.4)$$

在 $C^{(n)}[x_0, x_1]$ 空间(n 阶连续可微函数空间)中，

$$d_n(y(x), z(x)) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \{ |y(x) - z(x)|, \dots \\ |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)| \}. \quad (3.5)$$

所以曲线接近程度的定义可以用一个式子代替：

零级接近： $d_0(y(x), z(x)) < \varepsilon$,

$y(x), z(x) \in C[x_0, x_1]$;

n 级接近： $d_n(y(x), z(x)) < \varepsilon$,

$y(x), z(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$.

(5) 泛函的极值

定义3.1 若 $y = y^*(x)$ 为容许曲线，如对任何一条容许曲线 $y = y(x)$ 都满足

$$J[y(x)] - J[y^*(x)] \geq 0,$$

则称泛函 $J[y(x)]$ 在曲线 $y^*(x)$ 上达到**绝对极小值**.

定义3.2 设 $y = y^*(x)$ 为容许曲线, 若与 $y^*(x)$ 接近的容许曲线 $y(x)$ 都满足

$$J[y(x)] - J[y^*(x)] \geq 0,$$

则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y^*(x)$ 上达到**相对极小值**.

根据曲线接近程度的不同, 我们有下面两个概念.

定义3.3 当容许曲线取自 $C[x_0, x_1]$, 接近度只满足零级接近, 所得极小值称为**强极小值**.

定义3.4 当容许曲线取自 $C[x_0, x_1]$, 接近度满足一级接近, 所得极小值称为**弱极小值**.

显然强极值一定为弱极值, 因为 $C[x_0, x_1] \supset C'[x_0, x_1]$, 且满足一级接近必满足零级接近.

反之不然, 例如泛函

$$\int_0^1 y^2(1-y'^2) dx.$$

当 $y'^2 < 1$ 时, 积分不为负数; 当 $y=0$ 时, 积分为 0, 在 $y=0$ 一级接近的函数中, $y=0$ 是使泛函取极小的曲线 (充分接近时可保证 $y'^2 < 1$).

再请看函数 $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\pi x$, 当 n 充分大时, 与 $y=0$

零级接近, $y_n' = \sqrt{n} \pi \cos n\pi x$, 不满足一级接近, 此时使积分值为负, 所以 $y=0$ 为强极小曲线, 只是弱极小曲线.

2 泛函极值的必要条件与充分条件

2.1 变分法基本引理

在变分法中，常常要用到下面两个引理：

引理3.1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0, x_1]$ 上连续，如果对 $[x_0, x_1]$ 上任一满足下面条件的函数 $\eta(x)$ ：

$$\eta(x) \in C[x_0, x_1], \quad \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0,$$

都有：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0. \quad (3.6)$$

那么 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上恒为零。

证明：假设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上某一点 ξ 的值不为零， $f(\xi) \neq 0$ ，不妨设 $f(\xi) > 0$ 。

据 $f(x)$ 的连续性，在 (x_0, x_1) 内必有一个 ξ 的邻域 (ξ_1, ξ_2) ，使 $f(x)$ 在该邻域内恒为正，定义函数

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < x \leq \xi_1, \\ (x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2, & x \in (\xi_1, \xi_2), \\ 0, & \xi_2 \leq x < x_1. \end{cases}$$

易知 $\eta(x)$ 满足定理条件，这样积分化为

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} f(x)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 dx.$$

因被积函数恒大于零，故积分为正，得出矛盾，从而有 $f(x) = 0, x \in (x_0, x_1)$ ，引理为真。

把引理3.1的情况推广到二维，我们有

引理3.2 设函数 $f(x, y)$ 是区域 B 上给定的连续函数，如果对一切在区域 B 上具有一阶连续导数，且在区域 B 的边界上恒为0的函数 $\eta(x, y)$ ，都有

$$\iint_B f(x, y)\eta(x, y)dxdy = 0, \quad (3.7)$$

那么 $f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B.$

证明类似于引理1，这里从略。

2.2 泛函的变分

定义3.5 (极值曲线的变分) 设 $y^*(x)$ 为极值曲线, $y(x)$ 为其比较曲线, 称 $\delta y(x) = y(x) - y^*(x)$ 为 $y^*(x)$ 的变分. 注意 $\delta y(x)$ 为 x 的函数, 反映的是整个函数的改变.

定义3.6 设

$$y(x, \alpha) = y^*(x) + \alpha \delta y = y^*(x) + \alpha(y(x) - y^*(x)).$$

当 $\alpha=0$ 时, $y(x, 0) = y^*(x);$

当 $\alpha=1$ 时, $y(x, 1) = y(x);$

当 $0 < \alpha < 1$ 时, $y(x, \alpha)$ 表示 $y^*(x)$ 附近的所有比较曲线, 故称 $y(x, \alpha)$ 为参数曲线.

有了参数曲线, 泛函的极值问题可表示为含参数 α 的函数在 $\alpha=0$ 时的极值问题, 使问题简化.

定义3.7 (泛函变分) 考虑泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

泛函 J 的变分 δJ 定义为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx. \quad (3.8)$$

下面推导 δJ 的由来.

给 $y(x)$ 以变分 δy , 考察相应的泛函增量

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] + \frac{1}{2!} [F_{yy} (\delta y)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2F_{y'y} \delta y \delta y' + F_{y'y'} (\delta y')^2] + \dots \right\} dx \\
&= \delta J + \delta^2 J + \dots \tag{3.9}
\end{aligned}$$

其中: $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx, \tag{3.10}$

$$\begin{aligned}
\delta^2 J &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy} (\delta y)^2 + 2F_{y'y} \delta y \delta y' \\
&\quad + F_{y'y'} (\delta y')^2] dx. \dots \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$\delta J, \delta^2 J, \dots$ 叫泛函的一次变分、二次变分、……。它们分别是函数变分 δy 及其导数 $\delta y'$ 的一次齐次式、二次齐次式、……等的积分。

为得到更一般的定义，可设

$$\varphi(\alpha) = J(y + \alpha \delta y),$$

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \varphi(\alpha) - J(y) \\
&= \varphi(0) + \alpha \varphi'(0) + (1/2!) \alpha^2 \varphi''(0) + \dots - J(y).
\end{aligned}$$

因为 $J(y) = \varphi(0)$ ，从而有

$$\Delta J = \alpha \varphi'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} \varphi''(0) + \dots$$

于是定义泛函 J 的变分为

$$\delta J = \varphi'(0), \quad \delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2!} \varphi''(0), \dots$$

对于泛函 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$

和 $\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, [y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y']) dx,$

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right] dx.$$

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y + \alpha \delta y] = \delta y,$$

$$\frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y' + \alpha \delta y'] = \delta y',$$

故有 $\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$

所以当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y') \delta y \\ &\quad + F_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx = \delta J. \end{aligned}$$

这一结果与 (3.10) 是吻合的。

2.3 必要条件

数学分析中可微函数的极值必要条件是函数的一阶导数在某点为零，类似地，泛函极值也有下面的引理：

引理3.3 如果泛函 $J(y)$ 在 $y^*(x)$ 达到极值，则泛函在 $y^*(x)$ 的变分 $\delta J = 0$ 。

证明：由泛函极值的定义， $y^*(x)$ 为极值曲线，那么对任何一条比较曲线 $y(x)$ ，都有 $J(y) - J(y^*) \geq 0$ 或 (≤ 0) 。这里不妨设 $y^*(x)$ 为极小曲线，从而有

$$J(y) - J(y^*) \geq 0,$$

即 α 足够小时

$$\varphi(\alpha) = J(y^* + \alpha \delta y).$$

$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) \geq 0,$$

$$\text{即 } \alpha \varphi'(0) + \alpha^2 \varphi''(0)/2! + \dots \geq 0.$$

因为 α 足够小，可以保证左边各项和的符号由第一项 $\alpha \varphi'(0)$ 确定。但 α 可正可负，所以必有 $\varphi'(0) = 0$ ，即

$$\delta J = 0.$$

定理3.1 泛函 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 在 $y = y^*(x)$ 达到极值的必要条件是 $y = y^*(x)$ 为尤拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程

$$-\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.12)$$

的解且满足

$$F_y' \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0. \quad (3.13)$$

证明：由引理3.3知 $\delta J = 0$.

再由(3.10)式得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0.$$

利用分部积分法处理第二项

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} d\delta y = F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y dF_{y'} \end{aligned}$$

$$= F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} (F_{y'}) \delta y dx,$$

故有

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) \right\} \delta y dx + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

由 δy 的任选性及变分法基本引理 3.1 易知：若 $\delta J = 0$ ，则必有

$$F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) = 0, \quad F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

于是定理得证。

尤拉-拉格朗日方程为极值曲线应满足的必要条件，即满足方程的解是否达到极值尚须进一步判定，但通常我们都称此解为极值曲线。

例 3.4 求下列变分问题的解：

$$\begin{cases} J(y) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

解：由 (3.12) 式，Euler-Lagrange 方程为

$$y'' + y = 0,$$

其通解

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

这里 c_1, c_2 为待定常数。

由边界条件

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1,$$

得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$

故极值曲线

$$y^* = \sin x.$$

2.4 横截条件

前面叙述了泛函极值的必要条件，对于固定边界问题，即 $y(x)$ 在端点 x_0, x_1 的值给定，那么有

$$\delta y \Big|_{x_1}^{x_0} = 0, \quad F_y \delta y \Big|_{x_1}^{x_0} = 0,$$

这种情形最为简单，必要条件只需满足 Euler-Lagrange 方程和固定边界条件。

下面讨论可动边界问题，边界曲线与极值曲线的关系，即横截条件。

可动边界问题可分两种情况：

(1) 终端时间 x_1 为定值，但终端函数值自由，如图 3.1，终端在一条垂直于 x 轴的直线上变化。

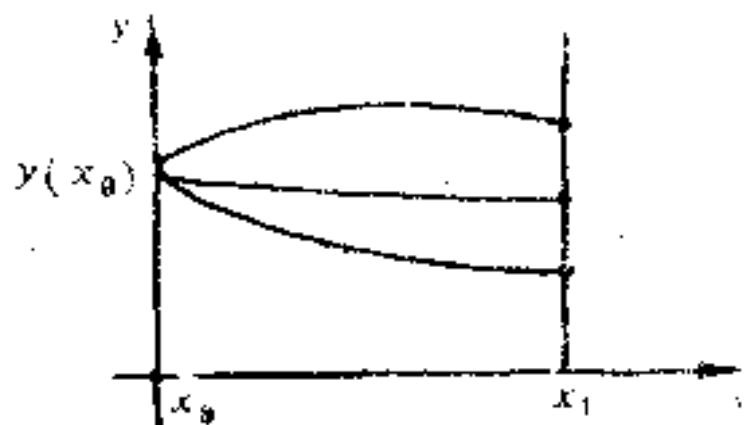


图 3.1

(2) 终端 x_1 自由，终端函数满足

$$N(x_1, y(x_1)) = 0.$$

这种情形最为复杂。

下面分别讨论这两种情况。

(1) 第一种情形，如图 3.1， $x=x_0$ 时， $\delta y=0$ ； $x=x_1$ 时， $\delta y \neq 0$ 是任意的。

由定理 3.1 中(3.12)、(3.13)两式，极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

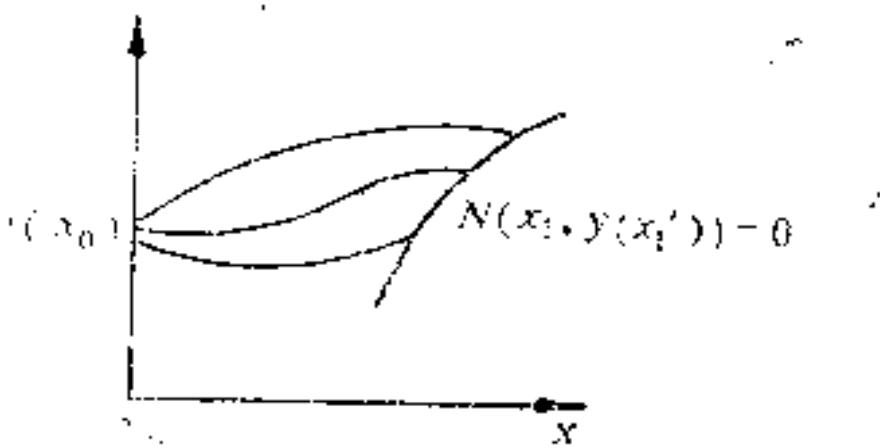


图 3.2

(2) 第二种情形, 如图3.2, 终端 x_1 自由, 故
 $\delta x_1 \neq 0$.

考慮

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \int_{x_0}^{x_1 + \alpha \delta x_1} F(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx, \\ \varphi'(\alpha) &= F(x, y, y') \delta x_1 \Big|_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx \\ &= F \delta x_1 \Big|_{x=x_1} + F_{y'} \delta y \Big|_{x=x_1} \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0.\end{aligned}$$

尤拉-拉格朗日方程 $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ 满足, 且左端

边界

$$(F \delta x_1 + F_{y'} \delta y) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

边界曲线设为

$$y_1 = \phi(x_1), \quad \delta y \Big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'_1 \delta x_1.$$

(见图3.3) 所以, 横截条件为

$$[(F - y' F_{y'}) \delta x_1 + F_{y'} \delta y_1] \Big|_{x=x_1} = 0.$$

例3.5 讨论

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}/y \, dx, \quad y(0)=0, \quad y_1=x_1-5$$

的极值曲线。

解: 尤拉方程为

$$(x-c_1)^2 + y^2 = c_2^2$$

由 $y(0)=0$, 可得 $c_1=c_2$;
再由横截条件,
可得 $c=5$, 于是

$$y = \sqrt{10x-x^2}$$

为所求曲线。

总结以上情况, 可
列成表3.1

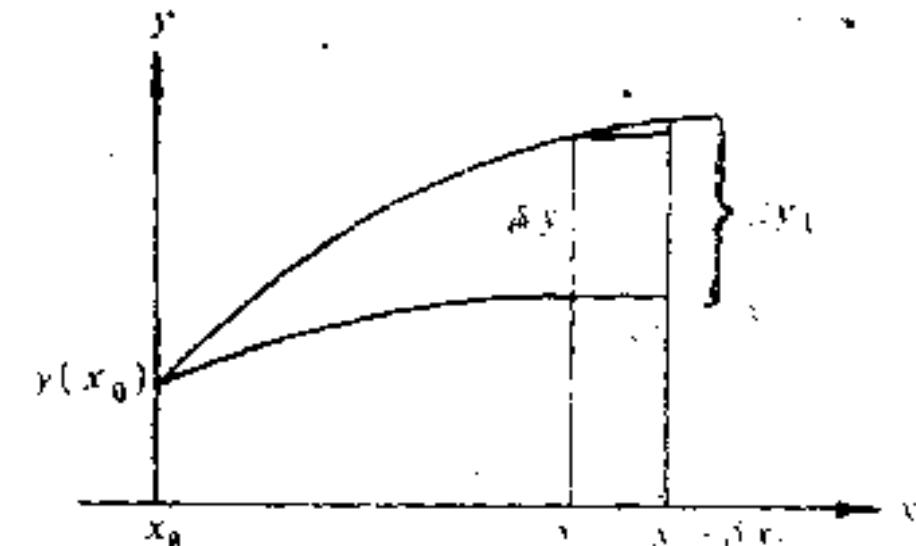


图 3.3

表 3.1

情形分类	终端条件
终端固定	$y(x_1) = y_1$
终端 x_1 固定, $y(x_1)$ 任	$x=x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \Big _{x=x_1} = 0$
x_1 自由, 终端无约束	$F \Big _{x=x_1} = 0, \quad F_{y'} \Big _{x=x_1} = 0$
x_1 自由, $y_1 = \psi(x_1)$	$F + (\psi'(x) - y') F_{y'} \Big _{x=x_1} = 0$

2.5 充分条件

前面讨论了Euler方程和横截条件，即泛函极值的必要条件。为了得到泛函极值的充分条件，我们考虑 $\delta^2 J$ 或 $\varphi''(0)$ 的符号：

若 $\varphi''(0) > 0$, $\varphi'(0) = 0$, 则 $J(y(x))$ 取到极小；

若 $\varphi''(0) < 0$, $\varphi'(0) = 0$, 则 $J(y(x))$ 取到 极大。

亦即：当 $\delta J \Big|_{y=y^*(x)} = 0$

若 $\delta^2 J > 0$ 时, $J(y(x))$ 在 $y^*(x)$ 上达到极小；

若 $\delta^2 J < 0$ 时, $J(y(x))$ 在 $y^*(x)$ 达到极大。

这就是泛函极值的充分条件，以极小为例，说明如下：

$\Delta J \geq 0$ 是泛函极值的充要条件，即是要

$$\begin{aligned}\Delta J &= \alpha \varphi'(0) + \alpha^2 \varphi''(0)/2! + \dots \\ &= \alpha^2 \varphi''(0)/2! + \dots \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

因而当 α 足够小, $\varphi''(0) > 0$ 时就可保证

$$\Delta J \geq 0.$$

故为充分条件。

对于 $\varphi''(0)$ 进一步讨论，可得以下结果：

由 $\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[-\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \dot{y} \right] dx,$

再对 α 求导后代入 $\alpha=0$ 即可得到

$$\varphi''(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{y\dot{y}} \delta y \delta \dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2] dx.$$

由 δy 及 $\delta \dot{y}$ 的任意性以及二次型有关定理，在 $y=y(x)$

满足尤拉方程与横截条件前提下，当

$$F_{yy} > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{y'y} \\ F_{y'y} & F_{y'y'y} \end{vmatrix} > 0,$$

时，泛函有极小值。当

$$F_{yy} < 0, \quad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{y'y} \\ F_{y'y} & F_{y'y'y} \end{vmatrix} > 0$$

时，泛函有极大值。

3 变分法与最优控制

3.1 条件极值

前面讨论了变分方法，目的在于求解最优控制问题。变分问题与最优控制Lagrange问题在某些地方有些相似，为了加强这种联系，考虑带约束的变分问题是应该的。

(1) $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ 型约束

定理3.2 函数 y_1, \dots, y_n 使泛函

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

在互相独立条件

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k < n)$$

之下实现极值时，则对于适当选择的因子 $\lambda_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, k$)， y_1, \dots, y_n 必满足由泛函

$$J^*(y_1, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^k \lambda_i(x) \varphi_i(x, y) \right] dx \quad (3.14)$$

所得出的Euler-Lagrange方程，其中 $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ 。

证明：参考多元函数条件极值的求法，引进 Lagrange

乘子函数

$$F^*(x, \lambda, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = F + \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i. \quad (3.15)$$

于是化成了一个无约束泛函极值问题:

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx.$$

由(3.15)式可知, 若极值曲线满足 $\varphi_i(x, y) = 0$ ($i=1, \dots, k$), 那么这两个变分问题有相同的极值条件。

再来看一下 J^* 的 Euler-Lagrange 方程组

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \lambda_i(x) - \frac{d}{dx} F_{y_j}' = 0, \\ & \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_j} - \frac{d}{dx} F^*_{\lambda_j}' = 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

方程组中后 k 个方程, 即为约束条件, $\varphi_i(x, y) = 0$, $i=1, 2, \dots, k$, 再由 $\varphi_i(x, y) = 0$ ($j=1, \dots, k$) 的相互的独立性, 可以导出(3.16)式中 $n+k$ 个方程的确定性, 因此 J 与 J^* 确有相同极值, 故 y_1, \dots, y_n 满足泛函 J^* 所确定的 Euler 方程。

例3.6 考虑短程线问题: 求在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上两点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 和 $B(x_1, y_1, z_1)$ 间达到最短路程的曲线。

解: 所求泛函问题为

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x) \varphi(x, y, z) \right] dx.$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

的极值问题. 尤拉方程组为

$$\begin{cases} \lambda\varphi_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0, \\ \lambda\varphi_z - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

由方程组就可以确定 $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$. 这里 $y(x)$, $z(x)$ 即为所求曲线.

(2) $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0$ 型约束与上一种情况相仿, 求泛函

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

在独立条件

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad i=1, 2, \dots, k < n$$

约束下的泛函极值问题, 其解 y_1, \dots, y_n 是

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^k \lambda_i(x) \varphi_i \right] dx$$

的极值问题的解. $\lambda_i(x)$ ($i=1, \dots, k$) 是适当选择的含一个任意常数的函数.

与情况1 $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ 约束相仿, 此时在 (3.16) 式中前 n 个方程应为

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = \lambda_i(x)$$

$$-\frac{d}{dx} \left(F_{y'} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \lambda_i(x) \right) = 0.$$

$\lambda_i(x)$ 含在导数符号 $\frac{d}{dx}$ 之后，故要出现 $\dot{\lambda}_i(x)$ ，即 $\lambda_i(x)$ 含任意常数。再者 J^* 达到极值时， $\varphi_i = 0 (i=1, \dots, k)$ ，故 $\lambda_i(x)$ 中的任意常数对 J^* 极值无影响。

另外，条件极值问题还有一类积分形式约束，即等周问题类型，因与后面关系不大，就略而不提了。

此外，最优控制问题的数学模型中还有状态方程约束：

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

利用定理3.2，把微分方程约束化进目标泛函中，求出等价的泛函极值问题。

3.2 最优控制问题与变分问题的互推

最优控制的Lagrange问题形式为

$$\min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \quad (3.17)$$

s.t. 状态方程

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (3.18)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3.19)$$

终端要求

$$x(t_f) \in S,$$

控制约束

$$u(t) \in U. \quad (3.20)$$

下面将其与变分问题进行互推。为方便起见，重新规定变分问题的符号表示，使之与最优控制问题一致。

积分区间 $[x_0, x_1]$ 由时间区间 $[t_0, t_f]$ 代替, $x(t)$ 为 t 的函数, $t \in [t_0, t_f]$.

(1) 从最优控制问题到变分问题

在最优控制问题中, 引进新的变量 z_1, \dots, z_n , 令

$$dz_i/dt = u_i, \quad z_i(t_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

则状态方程(3.18)式改为

$$\varphi_i \equiv f_i(t, x_1, \dots, x_n, dz_1/dt, \dots, dz_n/dt) - x_i = 0, \\ i = 1, \dots, n; \quad (3.21)$$

目标泛函(3.17)式变为

$$\int_{t_0}^{t_f} L\left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dz_n}{dt}\right) dt, \quad (3.22)$$

控制约束(3.20)的形式不妨设为

$$g_j(t, x, u) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

若再引进变量 ω_j , $j = 1, \dots, m$, 令

$$g_j\left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dz_n}{dt}\right) - \left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)^2 = 0, \\ j = 1, \dots, m. \quad (3.23)$$

易知(3.21)、(3.22)、(3.23)式构成一个变分问题。

(2) 从变分问题到最优控制问题

设变分问题为

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right) dt, \\ s.t.$$

边界条件

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, \\N(t_f, x(t_f)) &= 0;\end{aligned}\quad (3.25)$$

约束条件

$$\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad i=1, \dots, l. \quad (3.26)$$

考察约束条件(3.26)式，引进变量 $u_i (i=1, \dots, n)$ ，令

$$\dot{x} = u_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (3.27)$$

那么(3.26)式变成

$$\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) = 0; \quad (3.28)$$

目标泛函(3.24)式成为

$$\min J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) dt. \quad (3.29)$$

于是可知(3.28)、(3.29)式构成最优控制 Lagrange 问题。

从前面的互推中，可以看出变分与控制间的密切关系，以后将充分利用这种关系，推导出最优控制问题的古典变分法及最大值原理。另外，最优控制问题的出发点是寻求最佳控制函数 $u(t)$ ，变分问题的出发点则是寻求最佳轨迹 $x(t)$ ，殊途同归，最优控制问题是泛函极值问题的一种类型，我们

讨论 $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 形式的变分问题，其中含有导数

变量 y' 是为后来最优控制问题将状态方程化入目标泛函中出现的 $\dot{x}(t)$ 作对应，便于应用。

3.3 备注

这一章简单介绍了变分方法及其与最优控制问题的关系，目的是使读者对变分方法的思想和手段有初步的了解，便于后面的应用。正因为如此，很多结论和概念我们就没有一一触及，那些结论是可以根据同样的原理推出的，比如：

(1) 变分法则，可由变分的定义及类似的微分法则导出，如

$$(\delta y)' = \delta y' \text{ 等等；}$$

(2) 在向量形式下，泛函极值的必要条件可以根据单变量情形推广而得，如Euler方程在单变量时为

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

设 $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ，则Euler方程的向量形式为

$$\vec{F}_y - \frac{d}{dx} \vec{F}_{\vec{y}'} = 0,$$

其它结论也可相应得出；

(3) 变分问题类似最优控制问题，也有三种形式，即Bolza问题、Lagrange问题、Mayer问题，三个问题也是等价的。

Bolza问题的目标泛函为

$$\begin{aligned} J(y_1, \dots, y_n) &= G(x_1, y_1, \dots, y_n) \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y}) dx, \end{aligned}$$

Lagrange问题、Mayer问题的目标泛函分别为 Bolza 问题目标泛函的第二项和第一项，其余边界条件、约束条件、提法都相同。

前面只讨论了Lagrange问题。同样，Bolza问题也可以根据变分原理推出相应的Euler方程和边界条件。后面涉及的最优控制问题，一般都是考查Bolza问题。

第四章 无约束最优控制问题的变分方法

1 引言

这一章介绍无约束最优控制问题的变分方法，所谓无约束即是指控制函数不受约束。首先回顾 Bolza 问题的数学描述：

$$\left. \begin{array}{l} \text{目标泛函} \quad \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) \\ \qquad \qquad \qquad + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt. \\ \text{状态方程} \quad \dot{x} = f(x, u, t), \\ \qquad \qquad \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \in (t_0, t_f). \\ \text{目标集} \quad x(t_f) \in S. \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $t \in (t_0, t_f)$.

把这个问题跟前面所讲的变分问题比较，具有下面两个特点。

(1) 该问题目标泛函有两项： $\varphi(x(t_f), t_f)$ 为终端目标，表示稳态误差； $\int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$ 为过程目标，表示暂态误差或能量消耗。这些目标的背景都可以在第一章最优控制问题的实例中得到。前面的变分问题没有涉及第一项，只讨论了 Lagrange 问题的变分方法，但这并不影响下面的工作。利用变分法则，相应的结果是容易得出的。另一方面，Lagrange 问题与 Bolza 问题是等价的，因此这也只是形式上的差别，毫不妨碍本章与第一章的联系。

(2) 从 Bolza 问题的形式看出, 它应属于等式约束的条件泛函极值问题. 请注意, 这里的约束意指状态方程, 而不同于控制域. 第三章的条件极值部分已为这类情况的解决打下了基础.

下面再来分析一下目标集. 目标集即终端状态, 以下简称终态. 终端时间的要求的不同, 会得到不同的结果. 当然, 其本质是一样的, 只是复杂程度不同.

关于终态有如下几种情形.

(1) 固定终端 t_f $\begin{cases} \text{终态 } x(t_f) \text{ 自由;} \\ \text{终态 } x(t_f) \text{ 受约束, 如 } N(x(t_f)) = 0. \end{cases}$

(2) 自由终端 t_f $\begin{cases} \text{终态 } x(t_f) \text{ 自由;} \\ \text{终态 } x(t_f) \text{ 受约束, 如 } N(t_f, x(t_f)) = 0. \end{cases}$

在第一章中, 已介绍了不同终态的例子; 这里再给出较简单的例子. 例如

$$\min J(u) = \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

$$s.t. \quad \dot{x}(t) = u - x,$$

$$x(0) = 1.$$

此问题未给出 $x(1)$, 即表示 $x(1)$ 可以任取, 不受限制. 亦即所谓终态自由的情形, $t_f=1$ 为固定终端. 又如

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt,$$

$$s.t. \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$x_2(t) = u(t),$$

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_2(0) = 1, \\x_1(1) &= x_2(1) = 0.\end{aligned}$$

该问题中, $t_f=1$ 固定, 终态 $x(t_f)$ 受约束. 再如

$$\begin{aligned}\min J(u) &= \int_0^{t_f} (x^2(t) + u^2(t)) dt + x^2(t_f), \\ \text{s.t. } &x(t) = u(t), \\ &x(0) = -13, \\ &x(t_f) + 13e^{-3} = 0.\end{aligned}$$

该问题中, t_f 不固定, $x(t_f)$ 受约束. 对于终端 t_f 不固定的情形, 有时给出终端约束条件, 如 $x(t_f) + 13e^{-3} = 0$, 其一般形式为 $N(x(t_f), t_f) = 0$. 对于终端不固定的情形, 终态 $x(t_f)$ 也可以是自由的.

对于以上四种终态的情形, 我们将分别进行讨论, 即在第 2 节由讨论情形(1), 情形(2)在第 3 节由讨论, 最后在第

2.1 $x(t_f)$ 自由的情形

考虑 Bolza 问题

$$\min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} s.t. \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ \quad x(t_0) = x_0. \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, t_f 固定, $x(t_f)$ 自由.

根据条件极值变分问题中有关定理, 将(4.2) 所示微分方程约束问题化为无约束优化问题

$$\begin{aligned} \min J(u) = & \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x(t), u(t), t) \\ & + \lambda^T(t)(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))\} dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

即是将微分方程约束化入目标中, 为简便起见, 利用 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ = L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

代入上式有

$$\begin{aligned} \min J(u) = & \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ & - \lambda^T(t)\dot{x}(t)) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

下面讨论 (4.4) 式的变分和极值.

根据变分原理, 知道 (4.4) 式取极值的必要条件为

$$\delta J = 0. \quad (4.5)$$

前面专门讲述了形如

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

的变分, 请注意这里是向量形式, 可以得到一次变分

$$\int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^T (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) dx + (\delta y)^T F_{y'} \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

将变分原理用于

$$\int_{t_0}^{t_f} (H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)) dt$$

上, 把 $x(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$ 同时看成被求函数, 即相当于变分问题中的 y , 得一次变分

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} & \{ (\delta x)^T (H_x + \dot{\lambda}(t)) + (\delta u)^T H_u + (\delta \lambda)^T (H_\lambda - \dot{x}(t)) \} dt \\ & - \lambda^T(t_f) \delta x(t_f). \end{aligned}$$

对于 $\varphi(x(t_f), t_f)$, 变量为 $x(t_f)$, 其一阶变分为

$$\varphi^T_{x(t_f)}(x(t_f), t_f) \delta x(t_f),$$

故得

$$\begin{aligned} \delta J = & (\partial \varphi(x(t_f), t_f) / \partial x(t_f) - \lambda(t_f))^T \delta x(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{ (H_x + \dot{\lambda})^T (\delta x) + H_u^T (\delta u) \\ & + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda(t) \} dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

据 (4.5)、(4.6) 式由变分 δx , δu , $\delta \lambda$, $\delta x(t_f)$ 的任意性, 有结论:

$$\partial \varphi(x(t_f), t_f) / \partial x(t_f) - \lambda(t_f) = 0; \quad (4.7)$$

$$\dot{\lambda}(t) + \partial H / \partial x = 0; \quad (4.8)$$

$$\partial H / \partial u = 0; \quad (4.9)$$

$$\partial H / \partial \lambda - \dot{x}(t) = 0. \quad (4.10)$$

(4.7) 式为横截条件, (4.8) 式称为协态方程或伴随方程.

(4.9) 称为耦合方程, (4.10) 的另一形式即为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

可以看出, x 和 λ 有一定的对应关系, 形式相近, 形成两个微分方程边值问题. 将 (4.10)、(4.7)、(4.8) 合并起来,

(x, λ) 看成一个变量, 则形成一个典型的两点边值问题. 由于这种关系, 称 $\lambda(t)$ 为 **伴随向量** 或 **协态向量**.

(4.9) 式是 u, x, λ 关系的纽带, 故有耦合方程之称, 而泛函极值问题 (4.4) 或 (4.2) 有极值的必要条件是存在 u, x, λ 满足方程 (4.7) — (4.10).

若能从 (4.9) 中确定 $u(t)$, 并将其代入 (4.8) 和 (4.10), 那么就得到一个两点边值问题, 求解边值问题就可以得到最佳轨迹 $x(t)$ 及 $\lambda(t)$.

(4.9) 同时说明 $u(t)$ 为 $H(x, u, t)$ 的无约束极小点. 由此可以看出 Hamilton 函数定义的巧妙, 下面的结果会更说明这一点.

函数 H 对 t 求全导数:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(H(t, x(t), u(t), \lambda(t))) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \dot{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \dot{\lambda} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \dot{\lambda}^T \dot{x} + \dot{x}^T \dot{\lambda} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

可见，如果Hamilton函数 H 不显含变量 t ，则

$$\partial H / \partial t = 0,$$

即 $dH/dt = 0.$

也就是说

$$H(t, x, u, \lambda) = \text{常数}. \quad (4.11)$$

如果函数 L 及 f 不显含 t ，即 H 不显含 t ，那么在取到最优控制时，Hamilton函数为一常数。

例4.1 已知受控系统 $\dot{x} = u$, $x(t_0) = x_0$,

$$J(u) = \frac{1}{2} cx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt, \quad c > 0.$$

求 $u^*(t)$ 满足 $J(u^*) = \min J(u)$.

解：Hamilton函数为

$$H(x, u, \lambda) = u^2/2 + \lambda u,$$

由极值必要条件有

$$-\lambda(t_f) + cx(t_f) = 0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \quad u + \lambda = 0,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0.$$

所以

$$u = -\lambda, \quad \lambda = \lambda(t_f) = cx(t_f),$$

$$x = -cx(t_f)t + cx(t_f)t_0 + x_0.$$

从而有

$$x(t_f) = x_0 / (1 + c(t_f - t_0)).$$

得

$$u^*(t) = -cx_0 / (1 + c(t_f - t_0)),$$

这时

$$H(x^*, u^*, \lambda, t) = \text{常数}.$$

2.2 $x(t_f)$ 受约束的情形

在问题 2.1 中，将 $\dot{x}(t_f)$ 自由条件换为 $x(t_f)$ 受到约束的条件，即

$$N(x(t_f), t_f) = 0. \quad (4.12)$$

N 为 q 维向量函数, 引入乘子向量 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q)^T$, 将问题 (4.2) 及约束条件 (4.12) 化为一个无约束的等价极值问题, 即

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi(x(t_f)) + \nu^T N(x(t_f), t_f) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} (L + \lambda^T(f - \dot{x})) dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

同样引入 Hamilton 函数将 (4.13) 化为

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + \nu^T N(x(t_f), t_f) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T(\dot{x}(t))) dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

可以看出 (4.14) 仅比 (4.4) 多一项终端要求函数项, 但总体形式未变, 由变分原理可得

$$\begin{aligned} \delta J &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} + \nu^T \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) - \lambda(t_f)^T \delta \dot{x}(t_f) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x}(t) \right)^T \delta \lambda \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

同样可得:

$$\text{横截条件} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} + \nu^T \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} = \lambda(t_f), \quad (4.15)$$

$$\text{边界条件} \quad N(x(t_f), t_f) = 0; \quad (4.12)$$

$$\text{伴随方程} \quad -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\lambda}, \quad (4.16)$$

耦合方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (4.17)$$

状态方程 $\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.18)$

前已证明，当 $H(x, u, \lambda, t)$ 不显含 t 时，那么在极值处 $H(x, u, \lambda, t) = \text{常数}.$

又由以上各式可以看出终端状态 $x(t_f)$ 的约束条件只改变了横截条件方程，而对其它方程无影响。

例4.2 试求 $u^*(t), x^*(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) = 0, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

$t_f = 1$ ，它满足 $x_1(1) + x_2(1) = 1$ ，且使 $J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt$

达到极小。

解：这是一个终端有约束的问题。由必要条件，有

$$\lambda_1(1) = v, \quad \lambda_2(1) = v,$$

$$x_1(1) + x_2(1) = 1,$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,$$

$$u + \lambda_2 = 0,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

解之得

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2,$$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t, \quad v = -\frac{3}{7}$$

$$u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{此时 } H &= \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{7}t + \frac{6}{7} \right)^2 + \left(\frac{3}{7}t - \frac{6}{7} \right) \left(-\frac{3}{7}t + \frac{6}{7} \right) \\ &= -\frac{3}{7} \left(-\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t \right) \\ &= -\frac{18}{49}, \end{aligned}$$

为一常数。

总结本书结果，对于固定终端 t_f 情形，控制问题取得极值的必要条件见表 4.1.

表 4.1

边界条件	$x(t_f)$ 自由	$N(x(t_f), t_f) = 0$
横截条件	$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} + v^T \frac{\partial N}{\partial x(t_f)}$
状态方程	$\dot{x} = f(x, u, t)$	$x(t_0) = x_0$
协态方程	$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$	
耦合方程	$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$	
当 H 不显含 t	$H(x, u, \lambda, t) = \text{常数}$	

3 自由终端时间

泛函求极值的问题，即

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x, u, t), \\ \quad \quad x(t_0) = x_0, \\ \quad \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad t \in [t_0, t_f], \\ \quad \quad x(t_f) \in S, \quad t_f \text{自由.} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

对于这种问题，视 t_f 为变量，对它也进行选择，同样求 t_f 的变分。

3.1 $S = R^n$ 的情形

这时 $x(t_f)$ 自由，利用变分原理有

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)) dt \\ \delta J &= \left[-\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \right]^T \delta x(t_f) \\ &\quad + \left[-\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \right]^T \dot{x}(t_f) \delta t_f + (\partial \varphi / \partial t_f) \delta t_f \\ &\quad + ((H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f) \dot{x}(t_f)) \delta t_f \\ &\quad - \lambda^T(t_f) \delta x(t_f)) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T \delta \lambda \right] dt = 0. \end{aligned}$$

由变分的任意性，得到问题取极值的必要条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} - \lambda(t_f) = 0, \\ \left[\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \right]^T \dot{x}(t_f) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + H|_{t_f} - \lambda^T(t_f)x(t_f) = 0, \\ \lambda = -\partial H / \partial x, \\ \partial H / \partial u = 0, \\ \dot{x} = \partial H / \partial \lambda = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

上方程组经过整理可以得到对于控制问题(4.19)，当 $J=R^*$ 时，其最优控制 $u^*(t)$ 及最优轨线 $x^*(t)$ 必满足下列条件。

(1) 横截条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)}; \quad (4.20)$$

(2) 状态方程

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0; \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

(3) 伴随方程

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad (4.22)$$

(4) 耦合方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad (4.23)$$

(5) 哈密顿函数末端有

$$H(x, u, \lambda, t)|_{t=t_f} = -\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f}. \quad (4.24)$$

由上可看出，在增加一个变量 t_f 的同时，又可得到方程(4.24)，变量的确定性得到了保证。在(4.24)中，若 φ 不显含 t_f ，那么有

$$H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) = 0; \quad (4.25)$$

再由(4.11), 若 H 不显含 t , $H \equiv$ 常数, 有

$$H(x, u, \lambda, t) = 0; \quad (4.26)$$

一般有 $H(x, u, \lambda, t) = -\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f}$.

例4.3 求 u^* , x^* 满足

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1,$$

t_f 自由, 使

$$J(u) = t_f^2 + \int_0^{t_f} (x + \frac{1}{2}u^2) dt$$

达到极小

解: 这是一个自由终端问题, 其泛函极值的必要条件是

$$\lambda(t_f) = 0,$$

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\lambda} = 1,$$

$$u + \lambda = 0,$$

$$x(t_f) + \frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -2t_f.$$

由此可求得

$$t_f = 2 + \sqrt{6}, \quad u^*(t) = 2 + \sqrt{6} - t,$$

$$x^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - (2 + \sqrt{6})t + 1.$$

3.2 $S = \{x(t_f) | N(x(t_f), t_f) = 0, N$ 为 q 维函数 }

这种情况下, $x(t_f)$ 有约束

$$N(x(t_f), t_f) = 0. \quad (4.27)$$

仍然仿照2节的做法，引进拉格朗日乘子向量 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^T$ ，将(4.27)代入目标中，可以得到一个等价的无约束泛函极值问题：

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + \nu^T N(x(t_f), t_f) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \{H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)\} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta J &= (\partial \varphi(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f))^T (\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f) \delta t_f) \\ &\quad + \nu^T (\partial N(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f)) (\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f) \delta t_f) \\ &\quad - \lambda^T(t_f) \delta x(t_f) + (\partial \varphi/\partial t_f + \nu^T (\partial N/\partial t_f)) \delta t_f \\ &\quad + \{H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f) \dot{x}(t_f)\} \delta t_f \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right)^T \delta \lambda \right\} dt. \end{aligned}$$

由变分原理知 $\delta J = 0$,

所以极值必要条件为

$$\lambda(t_f) = \partial \varphi(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f) + \nu^T \partial N(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f).$$

$$H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f)$$

$$= \lambda^T(t_f) x(t_f) - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} \right]^T \dot{x}(t_f)$$

$$+ (-\partial N/\partial x(t_f))^T \dot{x}(t_f) - \partial \varphi/\partial t_f - \nu^T (\partial N/\partial t_f),$$

$$\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x, \quad \partial H/\partial u = 0,$$

$$\dot{x} = \partial H/\partial \lambda = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$N(x(t_f), t_f) = 0.$$

由第一式中 $\lambda(t_f)$ 代入第二式，可以消去右端部分项，整理

后即得问题(4.19)及终端约束(4.27)取极值的必要条件为

(1) 横截条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} + v^T \frac{\partial N(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)}, \quad (4.28)$$

(2) 边界条件

$$N(x(t_f), t_f) = 0; \quad (4.29)$$

(3) 状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (4.30)$$

(4) 伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad (4.31)$$

(5) 耦合方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad (4.32)$$

(6) $H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f)$

$$= -\frac{\partial \varphi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} - v^T \frac{\partial N(x(t_f), t_f)}{\partial t_f}. \quad (4.33)$$

乘子向量 v 可以通过 $N(x(t_f), t_f) = 0$ 确定。

例4.4 受控制系统的状态方程、初始条件和目标集分别为

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = u, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$S = \{x(t_f) \mid x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) = t_f^2 + 1\}.$$

t_f 自由，求其目标 $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$ 极小的必要条件。

解：利用本节结果，有

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1(-x_1 + x_2) + \lambda_2 u.$$

(1) 横截条件

$$\lambda_1(t_f) = 2vx_1(t_f), \quad \lambda_2(t_f) = 2vx_2(t_f);$$

(2) 边界条件

$$x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) = t_f^2 + 1;$$

(3) 状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0; \end{cases}$$

(4) 伴随方程

$$\lambda_1 = \lambda_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1;$$

(5) 恰合方程

$$u + \lambda_2 = 0;$$

$$(6) \quad (1/2)u^2(t_f) + \lambda_1(t_f)(-x_1(t_f) + x_2(t_f)) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = 2vt_f.$$

故满足(1)一(6)，即为目标极小的必要条件。

例4.5 已知受控制系统 $x = u(t)$, $x(0) = 1$. 试求 $u(t)$ 和 t_f , 使系统在 t_f 时刻转移到坐标原点 $x(t_f) = 0$, 且使

$$J = t_f^2 + \int_0^{t_f} u^2 dt$$

为最小

解：这里 $x(t_f) = 0$ 为固定终态，直接作为边界条件即可，于是

$$H(x, u, \lambda, t) = u^2 + \lambda u.$$

(1) 由于 $\delta x(t_f) = 0$, 故无 $\lambda(t_f)$ 的表达式项, 只有 $x(t_f) = 0$;

$$(2) \dot{x} = u, \quad x(0) = 1;$$

$$(3) \dot{\lambda} = 0;$$

$$(4) \dot{\lambda} + 2u = 0;$$

$$(5) u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -2t_f,$$

由于 $\dot{\lambda} = 0$, 故有 $\lambda = 2c_1$ (常数),

又由(4) $u = -c_1$,

由(2) $x = -c_1 t + c_2$,

$$\begin{cases} -c_1 t_f + c_2 = 0, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

由(5) $c_1^2 + (-2c_1^2) = -2t_f$.

最后求得 $u = -\sqrt[3]{2}$, $t_f = \sqrt[3]{4}/2$, $x = -\sqrt[3]{2}t + 1$.

总结本节所得结果, 对于自由终端 t_f 的情形, 控制问题 (4.19) 取得极值的必要条件见表 4.2.

表 4.2

边界条件	$S = R^n$	$N(x(t_f), t_f) = 0$
横截条件	$\lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f)$	$\lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f)$ $+ v^T \partial N / \partial x(t_f)$
	$H _{t=t_f} = -\partial \varphi / \partial t_f$	$H _{t=t_f} = -\partial \varphi / \partial t_f$ $- v^T \partial N / \partial t_f$
状态方程	$\dot{x} = f(x, u, t)$	$x(t_0) = x_0$
伴随方程		$\dot{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x$
耦合方程		$\partial H / \partial u = 0$

4 一般结论及例子

本章2、3节把几种情况下的泛函极值的必要条件进行了推证，表4.1和表4.2列出了结果，还有两种情形没有专门讨论，这里只做简单说明：

(1) 前面讨论了 $x(t_f)$ 自由和 $x(t_f)$ 受约束两种情况，那么

$$x(t_f) = x_f \text{(固定)}$$

应属于哪种情况呢？也许会说：当然属于约束情况，是的， $x(t_f) = x_f$ 是一种约束，如果套用约束情况，结果将会得到一个丝毫无用的方程：

$$\lambda(t_f) = \partial\varphi / \partial x(t_f) + \nu.$$

从求解问题角度来看，这并不影响我们的结果，因为它用不上。但这个结论的导出是错误的，回顾一下求泛函变分的过程，就会恍然大悟，因为当 $x(t_f) = x_f$ 时，

$$\delta x(t_f) = 0,$$

所以这个无用的方程是不该产生的，也不必产生，而直接用 $x(t_f) = x_f$ 的条件，会更简捷明了。

(2) 可以这么说，前面所讨论的情形仍属特殊，在很多实际例子中， $x(t_f)$ 所受条件还有其它情况，比如会出现这种情形， $x(t_f)$ 部分自由、部分受约束或部分固定，这时该如何处理？这并不难，这时我们就进行“部分”处理，即根据三种情况将 $x(t_f)$ 分成三组，每一部分按前面的标准做法处理，如

固定部分：只保留固定边界条件；

约束部分：用乘子向量化入目标；

自由部分：直接求变分。

下面给出在上述结论下，求解无约束最优控制问题的一般步骤：

(1) 由 $\partial H / \partial u = 0$, 解出

$$u^*(t) = u(t, x(t), \lambda(t));$$

(2) 将 $u^*(t)$ 代入状态方程和伴随方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, \lambda) = g(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = h(t, x, \lambda) \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f) \text{ 或 } \partial \varphi / \partial t + v^T \partial N / \partial x(t_f). \end{cases}$$

解这个两点边值问题，得到

$$x^*(t) = x(t, t_f), \quad \lambda^*(t) = \lambda(t, t_f);$$

(3) 再由

$$\begin{aligned} H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) \\ = -\partial \varphi / \partial t_f (\text{或} -\partial \varphi / \partial t_f - v^T \partial N / \partial t_f) \end{aligned}$$

确定 t_f^* ；

(4) 反代回去可以得到 $x^*(t)$ 及 $u^*(t)$ 。

在具体计算时，可根据题中情况灵活使用。最后，给出几个计算实例：

例4.6 运动问题：质量为 M 的物体在水平轨道上运动，初始速度 $x(0) = 0$ ，不计摩擦，要求物体在 $t = t_f$ 时刻速度 $x(t_f) = x_f$ ，求控制力 $u(t)$ ，使

$$J(u) = \int_0^{t_f} (u^2 + a(x_f - x)^2) dt$$

达到极值。 a 为一常数，运动方程

$$\dot{x} = u/M.$$

$$\text{解: } H = u^2 + a(x_f - x)^2 + \lambda u/M.$$

(1) 由耦合方程 $\partial H / \partial u = 0$, 有

$$u^*(t) = -\lambda(t)/2M.$$

(2) 求两点边值问题

$$\dot{x} = u/M, \quad \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = -2a(x - x_f),$$

$$\text{所以 } \ddot{\lambda} = -2a \ddot{x} = 2a\lambda(t)/2M^2 = a\lambda(t)/M^2,$$

$$\text{得 } \lambda = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}, \quad (c_1, c_2 \text{ 待定}) p = \sqrt{a/M^2},$$

再由边界条件

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f, \\ pc_1 e^{pt} - c_2 p e^{-pt} = -2a(x - x_f) \end{cases}$$

可得

$$c_1 = 2ax_f/p(1 - e^{2pt_f});$$

$$c_2 = 2ax_f e^{2pt_f}/p(1 - e^{2pt_f}).$$

$$\text{所以 } u^*(t) = -\lambda(t)/2M = -\left(\frac{c_1}{2M} e^{pt} + \frac{c_2}{2M} e^{-pt}\right).$$

当 $t_f \rightarrow \infty$ 时,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -2ax_f/p = -2\sqrt{a/M}x_f.$$

$$\text{这时 } u^*(t) = \sqrt{a/M}x_f e^{-pt}, \quad p = \sqrt{a/M}.$$

例4.7 求线性系统最小能量控制

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt.$$

$$\text{这里状态方程为 } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1; \end{cases}$$

终端条件为 $x_1(1)=0, x_2(1)=0$.

解: $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$.

(1) 由 $\partial H / \partial u = 0$ 得到

$$u + \lambda_2 = 0, \text{ 即 } u^* = -\lambda_2.$$

(2) $-\partial H / \partial x = \dot{\lambda}$, 即

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_1 = 0; \end{cases}$$

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = u.$$

下且有

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -\lambda_1 + c.$$

所以最优轨迹及最优控制为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 18t - 10, \\ x_1^*(t) &= 3t^3 - 5t^2 + t + 1, \\ x_2^*(t) &= 9t^2 - 10t + 1. \end{aligned}$$

本章利用变分原理，将积分形式的控制极值问题转换成了Hamilton函数的无约束极小问题（即 $\partial H/\partial u=0$ ）和求解两点边值问题，显然简化了问题。下一章将发展这一结果。

对于无约束最优控制问题的充分条件，现作如下补充。

设给定泛函

$$J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt,$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

$$\dot{x}(t_0) = x_0,$$

$x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, t_f 固定, $x(t_f)$ 自由。

现考虑控制变量 $u(t)$ 及状态变量 $x(t)$ 和 m 维向量函数 $\lambda(t)$ 一起满足尤拉方程和横截条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_u(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0, \\ \dot{\lambda}(t) = -H_x(x(t), u(t), \lambda(t), t), \\ \lambda(t_f) = \varphi_x(x(t_f), t_f) \end{array} \right.$$

给 $u(t)$ 以变分 $\delta u = a\eta(t)$, 其对应的 $\delta x = a\xi(t)$, 则

$$\dot{\delta x} = f_x \delta x + f_u \delta u,$$

将 $\Delta J = J(u(t) + a\eta(t)) - J(u)$ 在 $a=0$ 点按泰勒公式展开, 得

$$\begin{aligned} \Delta J &= a\xi^T \varphi_x(x(t_f), t_f) + \frac{a^2}{2} \xi^T(t_f) \varphi_{xx}(x(t_f), t_f) \xi(t_f) \\ &\quad + a \int_{t_0}^{t_f} (\xi^T(t) L_x(x(t), u(t), t) + \eta^T(t) L_u(x(t), u(t), t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha^2}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\xi^T(t) L_{xx}(x, u, t) \xi(t) + \eta^T(t) L_{uu}(x, u, t) \eta(t)) \\
& + \xi^T(t) L_{xu}(x, u, t) \eta(t) + \eta^T(t) L_{ux}(x, u, t) \eta(t)) dt + o(\alpha^2) \\
& = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + o(\alpha^2),
\end{aligned}$$

此处 $\delta J = \delta x^T |_{t=t_f} \varphi_{xx}(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\delta x^T L_x + \delta u^T L_u) dt$.

由尤拉方程和横截条件，有 $\delta J = 0$ ，于是

$$\Delta J = \frac{1}{2} \delta^2 J + o(\alpha^2).$$

注意到 $\delta^2 J$ 与 α^2 同阶，可得判定 $u(t)$ 为最优控制的充分条件是： $J(u)$ 的二阶变分 $\delta^2 J > 0$ ，则 $J(u)$ 取极小值；若 $\delta^2 J < 0$ ，则 $J(u)$ 取极大值。

注意到

$$\begin{aligned}
\delta^2 J &= \alpha^2 \xi^T(t_f) \varphi_{xx}(x(t_f), t_f) \xi(t_f) \\
& + \alpha^2 \int_{t_0}^{t_f} (\xi^T L_{xx} \xi + \eta^T L_{uu} \eta + \xi^T L_{xu} \eta + \eta^T L_{ux} \eta) dt \\
& = \alpha^2 \xi^T(t) \varphi_{xx}(x, t_f) \xi(t) |_{t=t_f} \\
& + \alpha^2 \int_{t_0}^{t_f} (\xi^T, \eta^T) \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xu} \\ L_{ux} & L_{uu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} dt,
\end{aligned}$$

根据二次型性质，在自由终端 $\varphi_{xx}(x(t_f), t_f)$ 为正（负）定，在区间 (t_0, t_f)

$$\begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xu} \\ L_{ux} & L_{uu} \end{bmatrix}$$

为半正（负）定，则 $J(u)$ 在 u 有极大（小）值。

第五章 约束最优控制问题的变分方法

1 引言

第四章讨论了无约束最优控制问题的变分法，得出了该类问题取极值的必要条件，但实际上更多地会出现控制受约束的情况。这一点在第一章诸例中已得到证实。如最小耗能问题，要求火箭的推力有限制，即 $|x(t)| \leq b$ ；反应器控制问题，要求反应温度（控制变量）在一定范围内，即 $|\theta(t)| \leq k$ ；生产分配问题中控制变量 $u(t)$ 为钢产量的投资比值，须加约束 $0 \leq u(t) \leq 1$ 等等。因此，只讨论无约束情况是远不够的。

一般地说，控制受约束可表示为 $u(t) \in U \subset R^n$ ，通常 U 为闭集。无约束情况下， $U = R^n$ 。为了得到约束最优控制问题的极值必要条件，有必要回顾一下无约束情况下极值必要条件的推导过程。

考虑 t_f 固定， $x(t_f)$ 自由的情形，在第四章第2节的2.1中我们有

$$\begin{aligned}\delta J = & (\partial\varphi(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f) - \lambda(t_f))^T \delta x(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right)^T \delta \lambda \right] dt.\end{aligned}$$

对于无约束的情况 $\delta J = 0$,

由 $\delta x(t_f)$, $\delta x(t)$, δu , $\delta \lambda$ 等变分的任意性可得方程组:

$$\begin{cases} \lambda(t_f) = \partial\varphi/\partial x(t_f), \\ \dot{\lambda} = -\partial H/\partial x, \\ \partial H/\partial u = 0, \\ \dot{x} = \partial H/\partial \lambda = f(x, u, t). \end{cases}$$

对于约束情况，由于 $u(t)$ 有限制， δu 不是任意的，因而得不到耦合方程 $\partial H / \partial u = 0$ 。虽然如此，但伴随方程、横截条件等其它无约束极值的必要条件在约束最优控制问题上仍然成立。本章旨在寻求一个类似耦合方程而更广义的必要条件形式。

约束最优控制问题的数学模型为：

$$\min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt,$$

s.t 状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in (t_0, t_f), \end{cases}$$

终端目标 $x(t_f) \in S$

$$S = \{x(t_f) | N(x(t_f), t_f) = 0\}$$

控制约束 $u(t) \in U \subset R^n$

t_0 固定， t_f 固定或自由。

整个问题即是确定控制 $u^*(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq t_f$, 使

$$J(u^*) = \min_{u(t) \in U} J(u).$$

对于一般的约束最优控制问题，我们将讨论著名的极小值原理。这已经不属于古典变分法的范围了。但为了与前几章联系起来，我们仍沿用变分方法这个名词，称这一章的标题为约束最优控制问题的变分方法，并在 2 节中叙述等式约束条件下的控制极值条件；3 节中介绍一般情况下的极小值原理；一般结论、方法及例子在第 4 节中给出。

2 等式约束下的变分方法

考虑 $U = \{u(t) | g_i(x, u, t) = 0, i=1, \dots, l\}$ 的情形。

对于这种约束，我们仍可用变分方法处理：

$$\left. \begin{array}{l} \text{设 } \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \dots \\ \quad N(x(t_f), t_f) = 0, \quad g_i(x, u, t) = 0, \\ \quad i=1, \dots, l, \quad t_f \text{ 设为固定.} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

这是一个固定终端时间、终端状态受约束、含有控制等式约束的最优控制问题。

引用条件极值（第三章定理 3.2 的结论），可以得到问题 (5.1) 与无约束最优控制问题

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + v^T N(x(t_f), t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} (L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x}) + \mu^T(t)g(x, u, t)) dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

等价，其中 $g = (g_1, \dots, g_l)^T$, v , $\lambda(t)$, $\mu(t)$ 是适当选择的向量因子。

与无约束问题相仿，引入 Hamilton 函数。为了与前面有所区别不妨称其为约束 Hamilton 函数，记为 H^* ，即

$$H^*(x, u, \lambda, \mu, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f + \mu^T g.$$

所以 (5.2) 式可化为

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + v^T N(x(t_f), t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} (H^*(x, u, \lambda, \mu, t) - \lambda^T(t)\dot{x}) dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

(5.3) 式与第四章的 (4.14) 式完全相似，只是 H^* 函数中多了一个因子 μ ，这并不影响结果，只不过最后多一个约束方程组：

$$\partial H^*/\partial \mu = 0, \text{ 即 } g_i(x, u, t) = 0, \quad i=1, \dots, l.$$

其余方程与无约束情况相同，故可以得到

横截条件

$$\partial\phi/\partial x(t_f) + v^T \partial N/\partial x(t_f) = \lambda(t_f); \quad (5.4)$$

边界条件

$$N(x(t_f), t_f) = 0; \quad (5.5)$$

伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\partial H^*/\partial x; \quad (5.6)$$

耦合方程

$$\partial H^*/\partial u = 0; \quad (5.7)$$

状态方程

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0; \quad (5.8)$$

约束方程

$$g(x, u, t) = 0. \quad (5.9)$$

(5.4) 式至 (5.9) 式构成了问题 (5.1) 取极值的必要条件，现在给出解法步骤：

(1) 由耦合方程确定出

$$u^*(t) = u(x, \lambda, \mu, t);$$

(2) 将 $u^*(t)$ 代入状态方程及伴随方程：

$$\dot{x} = f(x, u, t) = h_1(x, \lambda, \mu, t),$$

$$\dot{\lambda} = -\partial H^*/\partial x = h_2(x, \lambda, \mu, t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$\lambda(t_f) = \partial\phi/\partial x(t_f) + v^T \partial N/\partial x(t_f).$$

得到 $x^* = x(\mu, t)$, $\lambda^* = \lambda(\mu, t)$;

(3) 由 $g(x, u, t) = 0$ 得 $Q(\mu, t) = 0$, 解出 $\mu^*(t)$ 并反代回去

(4) 得到 $u^*(t)$, $x^*(t)$.

可以看出

$$H^* = H + \mu^T(t)g(x, u, t).$$

这里: H^* —约束Hamilton函数; H —Hamilton函数.

当约束方程为

$$g(u, t) = 0$$

时, 有 $\partial H^*/\partial x = \partial H/\partial x$; 此时伴随方程与无约束情况相同, 耦合方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 被替换为

$$\partial(H + \mu^T g(u, t))/\partial u = 0. \quad (5.10)$$

我们知道 (5.10) 式是下列规划解的必要条件, 即

$$\min H(x^*, u, \lambda, t),$$

$$\text{s.t } g(u, t) = 0, t \in (t_0, t_f),$$

从而 (5.7)、(5.9) 式可以用

$$\min H(x, u, \lambda, t),$$

$$\text{s.t } g(u, t) = 0$$

来代替, 而 (5.6) 式换成

$$-\partial H/\partial x = \dot{\lambda}.$$

3 Pontryagin极小值原理

介绍了无约束最优控制问题及有等式约束的最优控制问题的变分方法后, 现在进一步讨论不等式约束或混合约束的控制问题的极值必要条件及求解方法.

对于不等式约束

$$g_i(x, u, t) \geq 0, i=1, \dots, l,$$

可以将其化为等式约束, 比如引进新的控制变量 w_i ($i=1,$

…, l) 则有

$$g_i(x, u, t) - w_i^* = 0,$$

然后再利用 2 节的方法. 不过, 这样做较之下面介绍的极小值原理要逊色得多, 结论也不如极小值原理清晰.

引理5.1 设

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad J(u) &= \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{s.t.} \quad & \dot{x} = f(x, u, t), \\ & x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

其中 L, f 对 x, u 有连续的二阶导数, $u(t) \in U$, t_f 固定, $x(t_f)$ 自由;

(ii) $u^*(t)$ 为最优控制, $x^*(t)$ 为对应的最佳轨迹, 则有

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*) &= \int_{t_0}^{t_f} \{H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \\ &\quad - H(t, x^*(t), \hat{u}(t), \lambda(t))\} dt + \widehat{R}, \end{aligned}$$

其中 $\widehat{R} = o(\delta)$, $o(\delta)$ 表示 δ 的高阶无穷小, 即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} o(\delta)/\delta = 0 \quad (\delta > 0 \text{ 为任意小正数})$$

且满足

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in (t_0, \tau) \cup (\tau + \delta, t_f), \\ \hat{u}(t), & t \in (\tau, \tau + \delta), \tau \in (t_0, t_f). \end{cases}$$

$\hat{u}(t)$ 为任意给定的控制. 如图 5.1.

引理 5.1 的证明很繁, 可参阅参考文献(15). 同样, 引理结论对于 t_f 自由情形仍成立; 对于 $x(t_f)$ 受约束的情形, 只需改变横截条件,

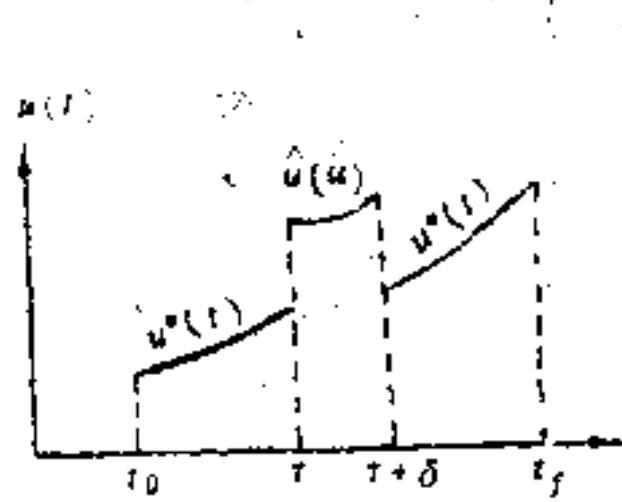


图5.1

定理5.1 (Pontryagin 极小值原理)

设 $x^*(t)$, $u^*(t)$ 是下面问题的最优解,

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{s.t. } \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \\ u(t) \in U, \quad N(x(t_f), t_f) = 0, \quad t_f \text{ 固定.} \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

则对 $\forall t \in [t_0, t_f]$, 有

$$\begin{aligned} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \\ = \min_{u^*(t) \in U} H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)), \end{aligned} \quad (5.12)$$

或者 $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)). \quad (5.13)$

这里, $x^*(t)$, $\lambda(t)$ 都是最优控制时状态变量和协态变量的取值.

证明: 由于 $J(u)$ 在 $u^*(t)$ 处达到极小, 故对 $\forall u(t) \in U$ 有

$$\Delta J(u^*) = J(u) - J(u^*) \geq 0. \quad (5.14)$$

用反正法: 若存在 $u(t) \in U$, 使得在某点 $\tau \in (t_0, t_f)$, 有

$$H(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), \lambda(\tau)) > H(\tau, x^*(\tau), \hat{u}(\tau), \lambda(\tau)).$$

根据 $x(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$ 的连续性及 L , f 连续可微, 必存在 $\delta > 0$, 使 $t \in [\tau, \tau + \delta] \subset [t_0, t_f]$ 时,

$$\begin{aligned} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \\ \geq H(t, x^*(t), \widehat{u}(t), \lambda(t)) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为一个很小的数. 为此, 我们构造

$$u(t) = \begin{cases} \widehat{u}(t), & t \in [\tau, \tau + \delta], \\ u^*(t), & t \in [t_0, t_f] / [\tau, \tau + \delta]. \end{cases}$$

显然 $u(t) \in U$.

估计 $\Delta J(u^*)$ 的值由引理有

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*) &= J(u) - J(u^*) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))) dt \\ &\quad + o(\delta) \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\delta} (H(t, x^*(t), \widehat{u}(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))) dt \\ &\quad + o(\delta). \end{aligned}$$

又由 (5.15) 式知积分项中的被积函数恒为负, 故有

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*) &\leq \int_{\tau}^{\tau+\delta} -\varepsilon dt + o(\delta) \\ &= -\varepsilon \delta + o(\delta); \end{aligned}$$

当 δ 充分小时

$$\Delta J(u^*) < 0.$$

这与 (5.14) 式矛盾. 故有 (5.12) 或 (5.13) 式成立.

极小值原理说明, 使指标泛函 $J(u)$ 取极小的控制必定使 Hamilton 函数取极小.

总结以上结果, 可得到约束最优控制问题取极值的必要条件.

(1) 横截条件

$$\lambda(t_f) = v^T \partial N / \partial x(t_f) + \partial \varphi / \partial x(t_f),$$

$$H|_{t=t_f} + \partial \varphi / \partial t_f + v^T \partial N / \partial t_f = 0 \quad (\text{当 } t_f \text{ 自由时});$$

(2) 状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

(3) 边界条件 $N(x(t_f), t_f) = 0;$

(4) 伴随方程 $\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x;$

(5) 极小值原理 $\forall t \in [t_0, t_f],$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u(t) \in U} H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)).$$

若最优控制问题的解在边界上达到，那么只有用极小值原理去求解；如果其解在控制域的内部达到，则意味着

$$\partial H / \partial u = 0.$$

极小值原理是古典变分方法解最优控制问题的推广，而古典变分方法解最优控制问题是极小值原理的特例。

4 一般方法及例子

根据庞特里雅金极小值原理，求解问题 (5.11) 的解转化为求约束极小化问题：

$$\left. \begin{array}{l} \min_{u(t) \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \\ \text{s.t. } \dot{x} = f(t, x(t), \lambda(t)); \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x(t_f), t_f) / \partial x(t_f) + v^T \partial N / \partial x(t_f) \\ N(x(t_f), t_f) = 0, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{array} \right\} (5.16)$$

问题 (5.16) 的一般解析方法步骤:

(1) 由 $\min_{u(t) \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$, 解出

$$u^*(t) = u(x, \lambda, t)$$

代入状态方程和伴随方程中;

(2) 求解 $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u^*(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$

得到 $x^* = x(\lambda, t), x^*(t_f) = x(\lambda(t_f), t_f)$;

(3) 由 $\begin{cases} \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x |_{x=x^*, u=u^*}, \\ \lambda(t_f) = (\partial \varphi / \partial x(t_f) + v^T \partial N / \partial x(t_f)), \\ N(x^*(t_f), t_f) = 0, \end{cases}$

解出 $\lambda(t)$, 再回代入 $u^*(t), x^*(t)$ 的表达式中;

(4) 得到 $u^*(t), x^*(t)$.

实际上, (1) 是很难实现的, 即多数情况下不可能从问题 $\min_{u \in U} H$ 中求出 u 关于 x, λ, t 的解析表达式. 然而问题

(5.16) 可以通过逐步逼近的数值方法求解. 这里介绍 Krylov-Chernoysko 方法, 并考虑 $x(t_f)$ 自由的情况.

Krylov-Chernoysko 迭代方法:

1° 给定初始控制 $u^0(t) \in U$, 并计算 $J(u_0)$;

2° 解初值问题

正向积分

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u^0, t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{cases}$$

设其解为 $x^0(t)$;

3° 解初值问题

反向积分

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H(t, x^0, u^0, \lambda)/\partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^0(t_f), t_f)/\partial x(t_f), \quad t \in (t_0, t_f). \end{cases}$$

设其解为 $\lambda^0(t)$;

4° 解极小问题

$$\min_{u \in U} H(t, x^0(t), u(t), \lambda^0(t)).$$

设其解为 $u'(t)$.

5° 计算 $J(u')$, 并检查

终止法则 $|J(u') - J(u^0)| / |J(u^0)| < \epsilon?$

满足则停止迭代 $u^* = u'$,

否则 $u' \Rightarrow u^0$, 转2°.

上述方法同样适用于无约束问题. 该迭代方法有一个很大的缺陷, 即在每一个迭代步, 都要解一个极小问题

$$\min_{u(t) \in U} H(t, x^0, u, \lambda^0)$$

来得到 $u'(t)$, 这样太占用时间, 其改进方案是直接构造迭代公式

$$u'(t) = u^0(t) + \alpha_0 \Delta u^0(t).$$

其中 $\Delta u^0(t)$ 为 H 函数的下降方向, α_0 为步长因子, 满足

$$H(t, x^0(t), u'(t), \lambda^0(t)) < H(t, x^0(t), u^0(t), \lambda^0(t)).$$

对于约束问题, 则进一步引入约束算子 Lu 使

$$u'(t) = Lu \hat{u}'(t) \in U,$$

其中 $\hat{u}'(t) = u^0(t) + \alpha_0 \Delta u^0(t)$.

上述三种迭代方法形成了最优控制问题的数值方法, 其具体内容将在第二篇中详细论述. 下面给出一些应用极小值

原理求解最优控制问题的例子.

例5.1 求 $\min J = \int_0^1 (x+u) dt$,

s.t $x' = x - u, \quad 1/2 \leq u \leq 1,$
 $x(0) = 5,$

解: Hamilton 函数 $H = x + u + \lambda(x - u)$, 考虑

$$\begin{aligned} \min H &= x + u + \lambda(x - u), \\ \text{s.t } &1/2 \leq u \leq 1, \end{aligned}$$

知 $\lambda \geq 1$ 时, $u^*(t) = 1$;

$\lambda < 1$ 时, $u^*(t) = 1/2$.

求 $\lambda(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x = -(1+\lambda), \\ \lambda(t_f) = 0, \quad t_f = 1. \end{cases}$$

解出

$$\lambda = e^{1-t} - 1.$$

同时可以算出:

$$t \leq 0.307 \text{ 时, } \lambda \geq 1, \quad u^* = 1;$$

$$t > 0.307 \text{ 时, } \lambda < 1, \quad u^* = 1/2.$$

所以我们得到分段连续的最优控制函数

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 0.307, \\ 1/2, & 0.307 < t \leq 1. \end{cases}$$

代入状态方程, 得到相应的最佳轨迹

$$x^*(t) = \begin{cases} 4e^t + 1, & 0 \leq t \leq 0.307, \\ 4.369e^t + 1/2, & 0.307 < t \leq 1. \end{cases}$$

$x^*(t)$ 是连续的, 因为再求解第二段的状态 $x(t)$ 时, 以第一段的末值作为初始条件.

最后可算出

$$J^*(u) = 8.684.$$

在线性系统情况下，得到的结果必是极小。

例5.2 对时间最优控制问题：

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^{t_f} 1 dt, \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

终端约束 $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 0,$

控制约束 $-1 \leq u \leq 1,$

求最优控制及 t_f .

解： $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$, 由于 $-1 \leq u \leq 1$, 求 H 极小易得

$$u^* = -\operatorname{sgn} \lambda_2.$$

由极小值原理，伴随方程组及状态方程组分别为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\partial H / \partial x_1 = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\partial H / \partial x_2 = -\lambda_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u = -\operatorname{sgn} \lambda_2. \end{cases}$$

由此可求出：

$$\lambda_1(t) = c_1,$$

$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t, c_1, c_2$ 待定，应使终端约束满足。

$u^* = -\operatorname{sgn}(c_2 - c_1 t), t_s = c_2/c_1$ 为开关切换时间。

当 $t \leq t_s$ 时， $u^* = -\operatorname{sgn} c_1$; 当 $t > t_s$ 时， $u^* = \operatorname{sgn} c_1$.

为了求出 t_f ，先给出 $u = 1$ 和 $u = -1$ 时的轨迹图5.2.

$u = 1$ 时，

$$x_1 = \frac{t^3}{2} + a_2 t + a_1 = \frac{1}{2} x_2^3 + a_1 - a_2^3/2.$$

$u = -1$ 时,

$$x_1 = -\frac{t^2}{2} + b_2 t + b_1 = -\frac{1}{2} x_1^2 + b_1 - \frac{1}{2} b_1^2.$$

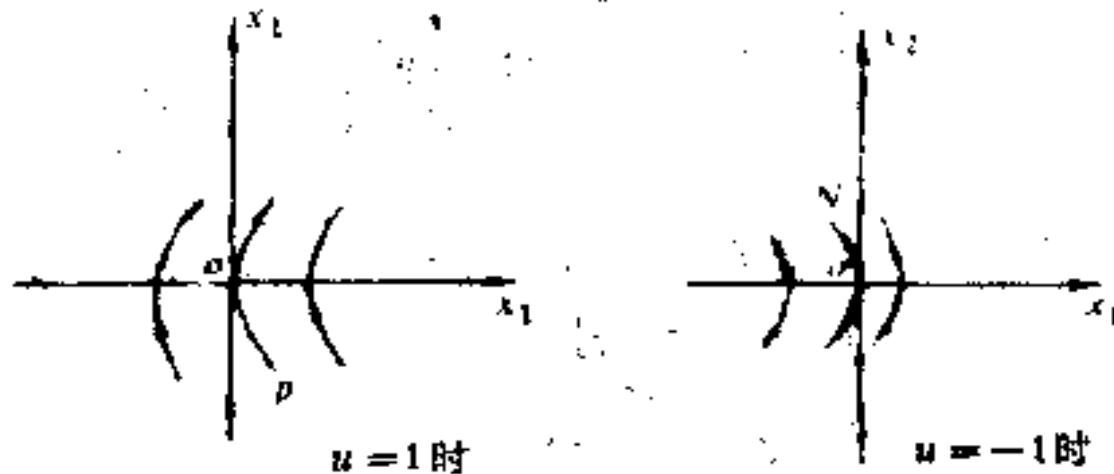


图5.2

从图中可以看出 PO 上各点和 NO 上任意点作初始状态可一步转移到原点, 即 $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 0$. 故可从图中看出, 初始点为 $(0, 0)$ 时, 状态为 $(1, 1)$, 第一步必在 $u = -1$ 的作用下, 即

$$t \leq t_s \text{ 时, } u^* = -1;$$

$$t > t_s \text{ 时, } u^* = 1.$$

否则是不可能在切换一次后转移到原点的. 转移图如图5.3.

在 $u = -1$ 作用下, 状态由 $A(1, 1)$ 转到 B 点, 再在 $u = 1$ 的作用下转移到原点.

下面求 t_s 及 t_f .

AB 段: $u = -1$, 由初始条件 $x_1(0) = 1$, 易解得

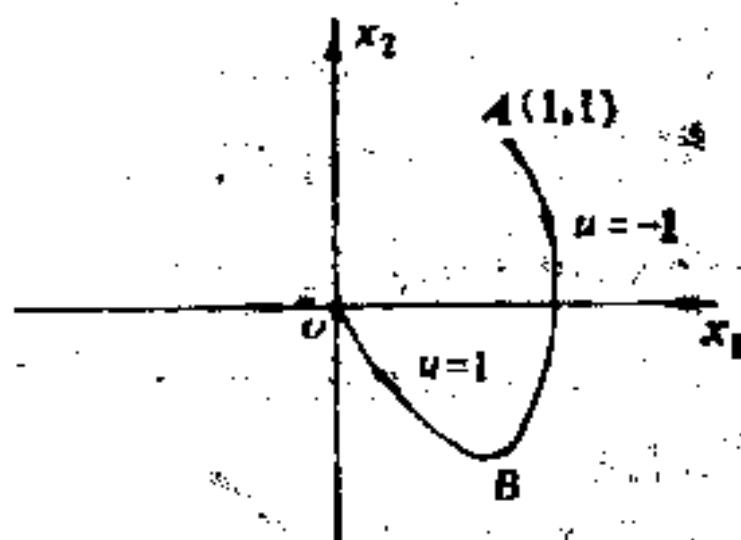


图5.3

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = -t + 1, \\ x_1 = -\frac{t^2}{2} + t + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2(t_s) = -t_s + 1, \\ x_1(t_s) = -\frac{t_s^2}{2} + t_s + 1. \end{cases} \end{array} \right\} \quad (1)$$

在 t_s 处 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0,$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = t - t_s, \\ x_1 = \frac{t^2}{2} - t_s t + \frac{t_s^2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2(t_s) = t_s - t_s, \\ x_1(t_s) = \frac{t_s^2}{2} - t_s t_s + \frac{t_s^2}{2} \end{cases} \end{array} \right\} \quad (2)$$

由 (1) — (2) 联立求解得

$$t_f = 1 + \sqrt{6}, \quad t_s = 1 + \sqrt{6}/2,$$

即得最优控制

$$u^* = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 + \sqrt{6}/2, \\ 1, & 1 + \sqrt{6} \geq t > 1 + \sqrt{6}/2; \end{cases}$$

最短时间

$$t_f^* = 1 + \sqrt{6}.$$

例5.3 求解最小燃料消耗问题

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^1 |u(t)| dt, \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0, 4, \\ x_1(1) = 0, & x_2(1) = 0, \\ -1 \leq u \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$解: H = |u(t)| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u(t),$$

由此式可以看出, 使 H 极小, 有

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda_2(t) \leq -1, \\ 0, & -1 < \lambda_2(t) < 1 \\ -1, & 1 \leq \lambda_2(t). \end{cases}$$

同样可求出 $\lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$, c_1, c_2 由边界条件定存在两个切换时间 t_a, t_b ,

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t_b \leq t \leq 1, \lambda_2 < -1, \\ 0, & t_a < t < t_b, |\lambda_2| < 1, \\ -1, & 0 \leq t \leq t_a, \lambda_2 > 1. \end{cases}$$

t_a, t_b 可由状态方程求出, 整个控制过程是:

先置 $u = -1$, 在 t_a 时刻切换到 0, 再在 t_b 时刻切换到 $u = 1$, 最后使状态转移到原点 (见图 5.4).

$$u = 1 \text{ 时}, \begin{cases} x_2 = t + a_2, \\ x_1 = \frac{t^2}{2} + a_2 t + a_1; \end{cases}$$

$$u = 0 \text{ 时}, \begin{cases} x_2 = b_2, \\ x_1 = b_2 t + b_1; \end{cases}$$

$$u = -1 \text{ 时}, \begin{cases} x_2 = -t + d_2, \\ x_1 = -\frac{t^2}{2} + d_2 t + d_1; \end{cases}$$

$$t = 0 \text{ 时}, \begin{cases} x_2(0) = 0.4, x_1(0) = 0, \\ d_2 = 0.4, d_1 = 0; \end{cases}$$

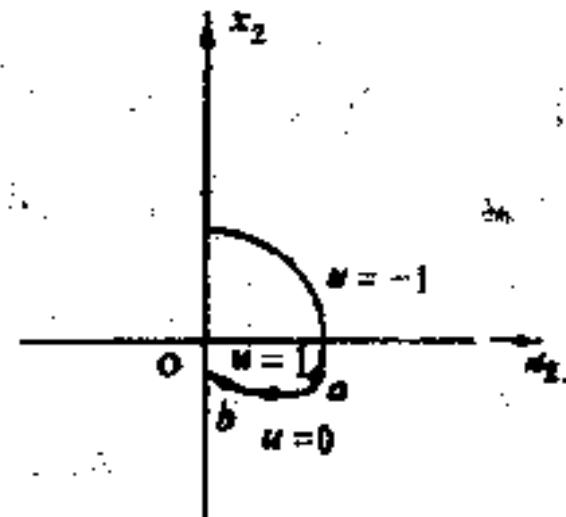


图 5.4 状态转移图

$$t=1 \text{ 时}, \quad \begin{cases} x_1(1)=x_2(1)=0, \\ a_2=-1, \quad a_1=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$t=t_a$ 时, 由 $u=0$ 与 $u=-1$ 得

$$\begin{cases} b_2=-t_a+d_2=-t_a+0.4, \\ b_1+b_2t_a=-\frac{t_a^2}{2}+d_2t_a+a_1=-\frac{t_a^2}{2}+0.4t_a; \end{cases}$$

$t=t_b$ 时, 由 $u=0$ 与 $u=1$ 得

$$\begin{cases} b_2=t_b+d_2=t_b-1, \\ b_1+b_2t_b=\frac{t_b^2}{2}+a_2t_b+a_1=\frac{t_b^2}{2}-t_b+\frac{1}{2}; \end{cases}$$

比较以上两种情况中 b_1 和 b_2 得

$$\begin{cases} t_a+t_b=1.4, \\ t_a^2+t_b^2=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_a=0.6, \\ t_b=0.8. \end{cases}$$

于是

$$u^*(t)=\begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 0.6, \\ 0, & 0.6 < t < 0.8, \\ 1, & 0.8 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

5 问题与思考

(1) $g(x, u) \geq 0$ 是否可以看成是状态 x 的约束, 而 u 看成任意的呢? 如果只是状态受约束, 如 $x \geq c$, 该怎样建立相应的极值必要条件?

(2) 可以发现, 在无约束的情况下, 得到极值必要条件的法宝是 $\delta J=0$, 那么, 有约束的情况下, $\delta J=?$

(3) 无论利用古典变分法或极小值原理, 都得到一个

核心结果，即最优控制满足

$$\min_{u \in U} H(u, x, \lambda, t) \quad (\text{或 } \partial H / \partial u = 0).$$

如果 H 不含 u 怎么办？

(4) 在本章 4 节的末尾，给出了 t_f 固定， $x(t_f)$ 自由的情况下求解最优控制的数值迭代方法 (Krylov-Chernoyenko 方法)，那么考虑 $x(t_f)$ 受限制

$$N(x(t_f), t_f) = 0$$

的情形下，迭代方法该如何建立？

第二篇 间接方法与直接方法

变分方法以及与之相关的极小值原理对最优控制问题的求解，在理论上起了重要的作用，但实际问题中，真正能求得解析解的仅是少数。因此数值方法就成为解决问题必须掌握的手段。

数值方法分为间接方法与直接方法，所谓间接是指将泛函极值问题转为求Hamilton函数的极值问题。

三

第六章 两点边值问题

1 引言

根据求解最优控制问题的一般解析方法步骤，由

$$\min_{u(t) \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)),$$

解出

$$u^*(t) = u(x, \lambda, t),$$

代入状态方程和伴随方程中，得到

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u^*(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f). \end{cases}$$

即可将其化为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda), \\ \dot{\lambda} = g(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \lambda_f. \end{cases}$$

这是一个两点边值问题。解之，可以得到 $x(t)$, $\lambda(t)$ 。通常更多使用的是逐步逼近的数值方法。如Krylov-Chernysko方法。不过，从该方法的结构来看，并不要求解两点边值问题。这是因为完整的初始条件 $x(t_0) = x_0$, $\lambda(t_f) = \lambda_f$ 与状态方程和伴随方程分别组成两个独立可解的微分方程初值问题：

由正向积分 $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u^0, t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \end{cases}$

得到 $x^0(t)$;

由反向积分 $\begin{cases} \dot{\lambda} = -\partial H/\partial x, \quad t \in [t_0, t_f], \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f), \end{cases}$

得出 $\lambda^0(t)$.

但是, 当 $x(t_0) = x_0$ 没有完全给出, 或者说, 在实际问题中, 遇到的问题只给出了部分初始条件时该如何处理, 情况就不是那么简单了, 当假定一个初始的控制值 $u^0(t)$ 后, 就会发现下面的情形:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x, u^0, t), \\ \dot{\lambda}(t) = -\partial H(t, x, u^0, \lambda)/\partial x, \\ \lambda(t_f), \lambda(t_0), x(t_f), x(t_0) \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

部分给定.

在(6.1)式中, 由于 $x(t)$ 的初态 (或终态), $\lambda(t)$ 的初态 (或终态) 只是部分给出, 不能独立地解出状态方程和伴随方程. 为了求解这类在实际中很有用的初值问题, 下面讨论两点边值问题的解法.

对于较简单的情形, 首先讨论显式两点边界问题:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y), \\ y_i(t_0) &= \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ y_{i+1}(t_f) &= \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-r, \\ y(t) &\in R^m, \quad t_f \text{ 固定} (x(t_f) \text{ 自由}). \end{aligned}$$

这里使用下标 j_i ($i = 1, 2, \dots, m-r$), 是允许 j_i 与 i ($i = 1, 2,$

\dots, r) 重复, 但边界条件共有 m 个.

还会遇到比较复杂的情况, 如隐式边界条件, 即在伴随方程的边界条件下,

$$\lambda(t_f) = \partial\varphi(x(t_f), t_f)/\partial x(t_f).$$

$\lambda(t_f)$ 与 $x(t_f)$ 有一种函数关系, 将 y 看成 (6.1) 式中的 (x, λ) , 由此看出, 这种边界关系不是显式的, 一般为

$$g_i(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0), y_1(t_f), \dots, y_m(t_f)) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

对于隐式边界问题, 也将做简单的讨论.

2 线性边值问题

设有 m 阶线性微分方程组

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + h(t), \quad t \in (t_0, t_f). \quad (6.2)$$

其中 $A(t) = (a_{ij}(t))_{m \times m}$; $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$;

$$h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))^T.$$

给定边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} y_i(t_0) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ y_{i_l}(t_f) = \beta_{i_l}, \quad l = 1, \dots, m-r. \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

方程 (6.2)、(6.3) 形成显式线性两点边值问题.

2.1 基本恒等式与共轭函数法

首先定义 (6.2) 的伴随系统 (或共轭方程):

$$\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t). \quad (6.4)$$

其中 $z(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))^T$.

我们的目的是寻求 (6.2) 与 (6.4) 边值的关系, 希望得到 (6.2) 的完整的初始条件.

容易证明(6.2)和(6.4)的通解 $y(t)$ 与 $z(t)$ 对 $\forall t \in (t_0, t_f)$ 满足关系式:

$$(y(t_0), z(t_0)) = (y(t_f), z(t_f)) - \int_{t_0}^{t_f} (z(t), h(t)) dt$$

或

$$\sum_{i=1}^m z_i(t_0) y_i(t_0) = \sum_{i=1}^m z_i(t_f) y_i(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m z_i(t) h_i(t) dt. \quad (6.5)$$

(6.5)式称为两点边值问题的基本恒等式. 根据这个式子, 要想得到 $y_i(t_0)$, $i=r+1, \dots, m$, 就必须给出共轭方程组(6.4)的 $m-r$ 组终端条件 $z_l^{(l)}(t_f)$, $l=1, \dots, m-r$, 规定

$$z_l^{(l)}(t_f) = \begin{cases} 0, & i \neq j_l, \\ 1, & i = j_l. \end{cases}$$

利用上述终端边值条件, 将(6.4)积分 $m-r$ 次, 得到

$$z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-r)}(t)$$

及相应在 $t=t_0$ 时的值, 分别代入(6.5)式得到关于 $y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0)$ 的 $m-r$ 维线性方程组

$$\sum_{i=r+1}^m z_l^{(l)}(t_0) y_i(t_0) = r_l, \quad l=1, \dots, m-r. \quad (6.6)$$

其中 $r_l = \beta_{j_l} - \sum_{i=1}^r z_i^{(l)}(t_0) \alpha_i - \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m z_i^{(l)}(t) h_i(t) dt$,

$$l=1, \dots, m-r. \quad (6.7)$$

求解线性方程组(6.5)得到

$$y_i(t_0), \quad i=r+1, \dots, m,$$

从而(6.2)有完整的初始条件

$$y_i(t_0), \quad i=1, \dots, m,$$

解此初值问题，便得(6.2)式的解。

算法6.1 (共轭函数法)

1° 给出(6.4)的 $m-r$ 组终端条件：

$$z^{(l)}(t_f), \quad l=1, \dots, m-r,$$

其分量规定为

$$z_i^{(l)}(t_f) = \begin{cases} 1, & i=j_l, \\ 0, & i \neq j_l, \end{cases} \quad (6.8)$$

形成 $m-r$ 个初值问题

$$\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t), \quad (6.4)$$

$$z_i^{(l)}(t_0) = \begin{cases} 1, & i=j_l, \\ 0, & i \neq j_l. \end{cases} \quad (6.8)$$

2° 分别解上述 $m-r$ 个初值问题得到 $m-r$ 个特解：

$$z^{(l)}(t) = (z_1^{(l)}(t), \dots, z_m^{(l)}(t))^T, \quad l=1, \dots, m-r \quad (6.9)$$

及 $z^{(l)}(t_0) = (z_1^{(l)}(t_0), \dots, z_m^{(l)}(t_0))^T, \quad l=1, \dots, m-r.$

$$(6.10)$$

3° 利用(6.8)、(6.9)、(6.10)及原问题的边界条件(6.3)解线性方程组(6.6)得其解

$$y_i(t_0), \quad i=r+1, \dots, m.$$

4° 再解初值问题

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y + h(t), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0))^T, \end{cases}$$

得其解 $y(t)$ ，这就是满足原问题(6.2)–(6.3)的解。

说明:

(1) 上述算法是在已知 r 个初始条件和 $m-r$ 个终端条件的情况下, 利用基本恒等式(6.5)与共轭方程(6.4)得到 $m-r$ 个补充初始条件, 从而使原问题化为初值问题的. 这里我们假定 $r \geq m-r$, 当 $r < m-r$ 时, 可以反过来求 r 个终端条件, 这样可减少计算量.

(2) 线性方程组(6.6)的右端即(6.7)式中包含了 $m-r$ 个积分:

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m z_i^{(l)}(t) h_i(t) dt, \quad l=1, \dots, m-r. \quad (6.11)$$

其中 $z^{(l)}(t) = (z_1^{(l)}(t), \dots, z_m^{(l)}(t))^T$, $l=1, \dots, m-r$ 是共轭方程(6.4)的解.

如果用数值方法解(6.4)式, 则 $z^{(l)}(t)$ ($l=1, \dots, m-r$) 的每一个分量 $z_i^{(l)}(t)$ ($i=1, \dots, m$) 非解析表达式, 而是用表格表示的函数. 故(6.11)需用数值积分方法求积.

例6.1 解两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + e^{t^2} y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + t, \end{cases} \quad t \in (0, 1).$$

边界条件:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(1) = 1. \end{cases}$$

解,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{t^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = (0, t)^T.$$

1° 解对应的共轭方程组

$$\dot{x}(t) = -A^T(t)x(t),$$

即

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2(t) = -e^{t^2} x_1. \end{cases}$$

设终端条件为 $x_1(1)=0$, $x_2(1)=1$. 取 $h=-0.2$, 由四阶龙格-库塔公式得其解见表6.1.

表6.1

t	$t_0=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	$t_f=1$
$x_1(t)$	2.20	1.48	0.44	0.54	0.24	0
$x_2(t)$	2.0	1.62	1.36	1.11	1.05	1

由此得 $x_1(0)=2.20$, $x_2(0)=2.0$.

2° 将1°之结果代入基本恒等式得

$$x_2(0)y_2(0)=1-y_1(0)x_1(0)-\int_0^1 tx_2(t)dt,$$

即

$$y_2(0)=(-1,2-\int_0^1 tx_2(t)dt)/2.$$

由复化梯形公式 (取 $h=0.2$) 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 tx_2(t)dt &= \frac{h}{2} \{ x_2(0) \times 0 + x_2(0) \times 0 \\ &\quad + 2(x_2(0.2) \times 0.2 + x_2(0.4) \times 0.4 \\ &\quad + x_2(0.6) \times 0.6 + x_2(0.8) \times 0.8) \\ &\quad + x_2(1) \times 0 + x_2(1) \times 1 \} \\ &= 0.1(1+4.8)=0.58, \end{aligned}$$

所以

$$y_2(0)=-0.89.$$

3° 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + e^{t^2} y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + t, \\ y_1(0)=1, \quad y_2(0)=-0.89. \end{cases}$$

取 $h=0.2$, 由龙格-库塔四阶公式得其解见表6.2.

表 6.2

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y_1(t)$	1	1.05	1.15	1.34	1.7	2.42
$y_2(t)$	-0.89	-0.66	-0.38	-0.03	0.41	1

2.2 补足函数法

考虑下面一类较简单的线性两点边值问题

$$\left. \begin{array}{l} \dot{Y}(t)=A(t)Y(t)+h(t), \\ y_i(t_0)=\alpha_i, \quad i=1, \dots, r, \\ y_j(t_f)=\beta_j, \quad j=r+1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

同样的道理, 不妨设 $r \geq m-r$, 和前面2.1类似。为了求出(6.12)的解, 需补足初始条件

$$y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0).$$

由于考虑的情况比较简单, 初值与终值不重叠, 所以可采取相对容易的方法补足 $m-r$ 个初始条件。我们希望能得到(6.12)的一个解的表达式, 然后由 $m-r$ 个终端条件确定需补足的 $m-r$ 个初始条件。按照一般的步骤首先考虑(6.12)的齐次方程组

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t). \quad (6.13)$$

初值 $x(t_0)$ 分别取 e_{r+1}, \dots, e_m , 其中

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad i=r+1, \dots, m,$$

从而可以得到 $m-r$ 个解:

$$x^{(r+1)}(t), \dots, x^{(m)}(t).$$

那么 $W(t) = \sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x^{(j)}(t)$

是齐次方程组(6.13)在初始条件

$$W(t_0) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r\text{个}}, y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0))^T \quad (6.14)$$

下的解，即是

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= A(t)W(t), \\ W(t_0) &= (0, \dots, 0, y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0))^T \end{aligned} \quad \} \quad (6.15)$$

的解。

然后，求下面方程组的一个特解，即求解

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t)z(t) + h(t), \\ z(t_0) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)^T, \end{aligned} \quad \} \quad (6.16)$$

得到解 $z(t)$ 。

显然 $y(t) = W(t) + z(t)$ 是(6.12)的解。这样就得到了 $y(t)$ 的表达式为

$$y(t) = \sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x^{(j)}(t) + z(t). \quad (6.17)$$

可以看出， $m-r$ 个未知数为 $y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0)$ 。于是将 $m-r$ 个终值条件代入(6.17)，即

$$\begin{cases} y_{r+1}(t_f) = \sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x_{r+1}^{(j)}(t_f) + z_{r+1}(t_f), \\ \dots \\ y_m(t_f) = \sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x_m^{(j)}(t_f) + z_m(t_f), \end{cases}$$

形成一个 $m-r$ 维线性方程组

$$\sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x_i^{(j)}(t_f) = \beta_i - z_i(t_f), \quad (6.18)$$
$$i=r+1, \dots, m.$$

解出 $y_j(t_0)$ ($j=r+1, \dots, m$), 从而补足了原问题的初始条件, 将原问题化为一个便于求解的初值问题.

算法6.2 (补足函数法)

1° 求解齐次方程组(6.13), 即形成 $m-r$ 个初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x^{(i)}(t_0) = e_i, \quad j=r+1, \dots, m, \end{cases}$$

得 $m-r$ 组解 $x^{(r+1)}(t), \dots, x^{(m)}(t)$.

2° 求初值问题(6.16)的一个特解 $z(t)$, 代入(6.17)式

$$3° \text{ 得到 } y(t) = \sum_{j=r+1}^m y_j(t_0) x^{(j)}(t) + z(t).$$

4° 利用终端条件 $y_j(t_f) = \beta_j, \quad j=r+1, \dots, m,$

求线性方程组(6.18)的解, 得到 $y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0)$, 记为 a_{r+1}, \dots, a_m .

$$5° \text{ 解 } \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + h(t), \\ y_i(t_0) = a_i, \quad i=1, \dots, m, \end{cases}$$

得到两点边值问题的解.

3 非线性边值问题

非线性边值问题的求解比线性边值问题要困难得多, 通常是在求解线性两点边值问题的基础上利用迭代求解. 下面介绍三种方法:

(1) 迭代-共轭函数法

该法适用一般边界问题，即

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}(t)=f(t, y(t)), \\ y_i(t_0)=\alpha_i, \quad i=1, \dots, r, \\ y_{ij}(t_l)=\beta_{ij}, \quad l=1, \dots, m-r. \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

缺点：步骤复杂，计算量大。

(2) 补足函数法与 Newton 法联合使用

该法适用特殊边界问题，即

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}(t)=f(t, y(t)), \\ y_i(t_0)=\alpha_i, \quad i=1, \dots, r, \\ y_j(t_l)=\beta_j, \quad j=r+1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

(3) 优化方法

该法将问题(6.19)或(6.20)转化为解非线性方程组。设预先给出参数 $y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_1)$ ，则

$$y_j(t_l) \quad (j=r+1, \dots, m)$$

是上述 $m-r$ 个参数的函数，由终值条件构成一个 $m-r$ 维方程组，求解这个方程组确定参数。该方法解决问题的思路是：

由问题(6.19)形成非线性方程组

$$g_{jl}(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m) = \beta_{jl}, \quad l=1, \dots, m-r.$$

设其解为 $(\alpha_{r+1}^*, \dots, \alpha_m^*)$ ，则原问题(6.19)转化为初值问题：

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}(t)=f(t, y(t)), \\ y(t_0)=(\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*, \alpha_{r+1}^*, \dots, \alpha_m^*)^T. \end{array} \right.$$

由问题(6.20)形成非线性方程组

$$g_j(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m) = \beta_j, \quad j=r+1, \dots, m.$$

设其解为 $(\alpha_{r+1}^*, \dots, \alpha_m^*)$. 则原问题(6.20)转化为初值问题:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}^*, \dots, \alpha_m^*)^T. \end{cases}$$

3.1 迭代-共轭函数法

迭代-共轭函数法也被称着非线性打靶法. 其基本思想是: 首先估计一组未知初始条件 $\{y_j^{(0)}(t_0), j=r+1, \dots, m\}$, 用共轭函数法求解线性边值问题. 以求得 $\{y_j^{(0)}(t_0), j=r+1, \dots, m\}$ 的改变量, 得到迭代值 $\{y_j^{(1)}(t_0), j=r+1, \dots, m\}$, ...如此迭代下去, 直到求到满足精度的初始条件迭代值及对应的 $y^*(t)$.

考虑非线性两点边值问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), & t \in (t_0, t_f), \\ y_i(t_0) = \alpha_i, & i=1, \dots, r, \\ y_{i_l}(t_f) = \beta_{i_l}, & l=1, \dots, m-r. \end{cases} \quad (6.19)$$

对于(6.19)补足 $m-r$ 个初始条件:

$$y_i^{(0)}(t_0) = \alpha_i, \quad i=r+1, \dots, m,$$

形成初值问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = \alpha_i, \quad i=1, \dots, m, \end{cases} \quad (6.21)$$

得到(6.21)的解 $y^{(0)}(t)$. 如果

$$|y_{i_l}^{(0)}(t_f) - y_{i_l}(t_f)| < \varepsilon \quad (l=1, \dots, m-r)$$

成立, 那么可以近似地将 $y^{(0)}(t)$ 看成(6.19)的解, 但一般情况下此式不易满足, 需要修正初始条件:

$$y_i^{(k)}(t_0), \quad i=r+1, \dots, m.$$

修正方法如下：

建立迭代格式

$$\Delta y^{(k)}(t) = y^{(k+1)}(t) - y^{(k)}(t), \quad k=0, 1, \dots. \quad (6.22)$$

其中 $\Delta y^{(k)}(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{\Delta y}^{(k)}(t) &= \dot{y}^{(k+1)}(t) - \dot{y}^{(k)}(t) \\ &= f(t, y^{(k+1)}(t)) - f(t, y^{(k)}(t)) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y^{(k)}(t)} \Delta y^{(k)}(t) = A^{(k)}(t) \Delta y^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$A^{(k)}(t) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y^{(k)}(t)} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{array} \right] \Big|_{y^{(k)}(t)}$$

(6.23) 是一个线性微分方程组，其初始条件及终端条件满足

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_i^{(k)}(t_0) &= y_i^{(k+1)}(t_0) - y_i^{(k)}(t_0) = 0, \\ \Delta y_{i_l}^{(k)}(t_f) &= y_{i_l}^{(k+1)}(t_f) - y_{i_l}^{(k)}(t_f) = r_l, \\ i &= 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, m-r. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

所以(6.23)、(6.24)构成了一个线性两点边值问题：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta y}^{(k)}(t) &= A^{(k)}(t) \Delta y^{(k)}(t), \\ \Delta y_i^{(k)}(t_0) &= 0, \quad i=1, \dots, r, \\ \Delta y_{i_l}^{(k)}(t_f) &= r_l, \quad l=1, \dots, m-r. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

现回到原问题(6.19)，有两种处理手段：

(1) 由(6.25)解出 $\Delta y^{(k)}(t)$, 再由(6.22)得

$$y^{(k+1)}(t) = y^{(k)}(t) + \Delta y^{(k)}(t), \quad (6.26)$$

显然 $y_i^{(k+1)}(t_0) = a_i, i=1, \dots, r,$

只需判断 $\max_{1 \leq i \leq m-r} |y_{i,r}^{(k+1)}(t_f) - y_{i,r}(t_f)| < \varepsilon \quad (6.27)$

即可, 若(6.27)式满足, 那么就得到原非线性两点边值问题的解 $y^{(k+1)}(t)$, 否则继续迭代.

算法6.3 (迭代-共轭函数法I)

1° 给出初始估计值 $y_{r+1}^{(0)}(t_0), \dots, y_m^{(0)}(t_0), k=0, \varepsilon>0,$

2° 求非线性初值问题(6.21), 即

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y_i(t_0) = a_i, i=1, \dots, r, \\ y_i(t_0) = y_i^{(0)}(t_0), i=r+1, \dots, m, \end{cases}$$

得 $y^{(0)}(t)$.

3° 判断 $\max_{1 \leq i \leq m-r} |y_{i,r}^{(0)}(t_f) - y_{i,r}(t_f)| < \varepsilon,$

满足, 则停, 有 $y^*(t) = y^{(0)}(t)$.

否则转4°.

4° 求线性两点边值问题(6.25) (用共轭函数法).

$$\begin{cases} \dot{\Delta y}^{(k)}(t) = A^{(k)}(t) \Delta y^{(k)}(t), \\ \Delta y_i^{(k)}(t_0) = 0, i=1, \dots, r, \\ \Delta y_i^{(k)}(t_f) = r_i, i=1, \dots, m-r, \end{cases}$$

得 $\Delta y^{(k)}(t)$.

5° 得 $y^{(k+1)}(t) = y^{(k)}(t) + \Delta y^{(k)}(t)$.

6° $k+1 \Rightarrow k$, 转3°.

该迭代方法虽然避免了多次求非线性初值问题(6.21),但因 $\Delta y^{(k)}(t)$ 的近似导致 $y^{(k+1)}(t)$ 不能精确满足原微分方程.

(2) 没必要求出(6.25)的解 $\Delta y^{(k)}(t)$, 而是利用共轭函数法的手段补足 $\Delta y_i^{(k)}(t_0)$, $i=r+1, \dots, m$. 又由

$$y_i^{(k+1)}(t_0) = y_i^{(k)}(t_0) + \Delta y_i^{(k)}(t_0)$$

得到 $y_i^{(k)}(t_0)$ 的修正值, 再解非线性初值问题 (6.21) 得到 $y^{(k+1)}(t)$, 判断终端条件是否吻合, 满足, 则求出解 $y^{(k+1)}(t)$, 否则继续修正迭代.

算法6.4 (迭代-共轭函数法Ⅰ)

1° 给出初始估计值

$$\{y_i^{(0)}(t_0), i=r+1, \dots, m\}, k=0, \epsilon > 0.$$

2° 求非线性初值问题(6.21):

$$\begin{cases} \dot{y}(t_0) = f(t, y(t)), \\ y_r(t_0) = \alpha_r, \quad r=1, \dots, r, \\ y_i(t_0) = y_i^{(0)}(t_0), \quad i=r+1, \dots, m, \end{cases}$$

得解 $y^{(0)}(t)$.

3° 判断

$$\max_{1 \leq i \leq m-r} |y_{i,r}^{(0)}(t_r) - y_{i,r}(t_r)| < \epsilon$$

满足, 则停, $y^*(t) = y^{(0)}(t)$, 否则转4°.

4° 求 $\Delta y^{(k)}(t_0)$, 利用共轭函数法补足

$$\begin{cases} \dot{\Delta y}^{(k)}(t) = A^{(k)}(t)\Delta y^{(k)}(t), \\ \Delta y_i^{(k)}(t_0) = 0, \quad i=1, \dots, r, \\ \Delta y_{i,r}^{(k)}(t_r) = \beta_{i,r}, \quad i=1, \dots, m-r \end{cases}$$

的 $m-r$ 个初始条件

$$\Delta y_i^{(k)}(t_0), \quad i=r+1, \dots, m.$$

$$5^{\circ} \quad y_i^{(k+1)}(t_0) = y_i^{(k)}(t_0) + \Delta y_i^{(k)}(t_0), \quad i=r+1, \dots, m.$$

$$6^{\circ} \quad k+1 \Rightarrow k, \text{ 转 } 2^{\circ}.$$

该法避免每次求一个线性初值问题，但每次都需解非线性边值问题，得到的解 $y^*(t)$ 满足微分方程且近似满足边界条件。

从这一节的讨论看出，当原边值问题为(6.20)类型时，同样可用迭代-共轭函数法求解。

3.2 拟线性方法 (Newton 法与补足函数法联合使用) 考虑问题

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = \alpha_i, \quad i=1, \dots, r, \\ y_j(t_r) = \beta_j, \quad j=r+1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

该方法与 3.1 介绍的迭代方法道理基本一致，都是化为线性边值问题求解；只是线性化的手段不同。这里采用牛顿近似逼近，故可称为 Newton 法与补足函数法联合使用。同时也是一种拟线性化方法。该方法将非线性方程 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 线性化，形成迭代过程，而在每一个迭代步用补足函数法求缺少的初始条件，直到满足一定的精度为止。最后将所获得的补足初始条件并入(6.20)中形成完全的初始条件。

算法 6.5 (拟线性方法)

1° 已知(6.20)的第 k 次近似解为 $y^{(k)}(t)$ ，线性展开(6.20)中的非线性方程，得

$$\dot{y}^{(k+1)}(t) = A(t, y^{(k)}(t))y^{(k+1)}(t) + \beta_k \quad (6.28)$$

其中 $\beta_k = -A(t, y^{(k)}(t))y^{(k)}(t) + f(t, y^{(k)}(t))$.

2° 设对应于(6.21)的线性齐次方程为

$$\dot{x}^{(k+1)}(t) = A(t, y^{(k)}(t))x^{(k+1)}(t) \quad (6.29)$$

3° 就(6.29)解初值问题 ($m-r$ 组) :

$$\begin{cases} \dot{x}_j^{(k+1)}(t) = A(t, y^{(k)}(t))x_j^{(k+1)}(t), \\ x_j^{(k+1)}(t_0) = e_j, \quad j = r+1, \dots, m. \end{cases}$$

设其解为

$$x_j^{(k+1)}(t) = (x_1^{(k+1)}(t), \dots, x_m^{(k+1)}(t)) \quad j = r+1, \dots, m. \quad (6.30)$$

4° 就(6.28)解如下初值问题

$$\begin{cases} \dot{z}^{(k+1)}(t) = A(t, z^{(k)}(t))z^{(k+1)}(t) + \beta_k, \\ z^{(k+1)}(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)^T. \end{cases}$$

设其解为

$$z^{(k+1)}(t) = (z_1^{(k+1)}(t), \dots, z_m^{(k+1)}(t))^T. \quad (6.31)$$

5° 将(6.30)中 $x_j^{(k+1)}(t)$ ($j = r+1, \dots, m$) 的后 $m-r$ 个分量及(6.31)中 $z^{(k+1)}(t)$ 的后 $m-r$ 个分量代入(6.17)得方程组

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=r+1}^m x_{r+1,j}^{(k+1)}(t_f)\alpha_j + z_{r+1}^{(k+1)}(t_f) = \beta_{r+1}, \\ \sum_{j=r+1}^m x_{r+2,j}^{(k+1)}(t_f)\alpha_j + z_{r+2}^{(k+1)}(t_f) = \beta_{r+2}, \\ \dots \\ \sum_{j=r+1}^m x_m^{(k+1)}(t_f)\alpha_j + z_m^{(k+1)}(t_f) = \beta_m. \end{array} \right\} \quad (6.32)$$

解(6.32)得补充的初始条件:

$$y_i^{(k+1)}(t_0) = a_i^{(k+1)}, \quad j=r+1, \dots, m.$$

6⁰ 检查终止条件:

$$\| y^{(k+1)}(t_0) - y^{(k)}(t_0) \|_\infty < \epsilon ?$$

是, 停止计算, 转7⁰. 否则, 转3⁰.

7⁰ 解原问题:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = (a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m)^T. \end{cases}$$

说明: 线性展开(6.20)中的非线性方程, 即是对右端的非线性函数线性化:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}(t) &= f(t, y^{(k+1)}(t)) = f(t, y^{(k)}(t) + A y^{(k)}(t)) \\ &\approx f(t, y^{(k)}(t)) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y^{(k)}(t)} \cdot A y^{(k)}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y^{(k)}} y^{(k+1)}(t) - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y^{(k)}} y^{(k)}(t) \\ &\quad + f(t, y^{(k)}(t)) \\ &= A(t, y^{(k)}(t)) y^{(k+1)}(t) - A(t, y^{(k)}(t)) y^{(k)}(t) \\ &\quad + f(t, y^{(k)}(t)). \end{aligned}$$

其中 $A(t, y^{(k)}(t)) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y^{(k)}}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

3.3 优化方法

在本节3.1和3.2中，对非线性两点边值问题，都是采取线性化的手段形成迭代过程，在每一个迭代步，解一个线性两点边值问题，不同的是各自采取不同的线性化的途径。3.1针对终端条件的一般性采用共轭函数法去补充初始条件，3.2针对终端条件的特殊性采用补足函数法去补充初始条件。这里的优化方法，不是采取线性化的途径，而是将问题转化为非线性方程组去求解。

以这样设想，如果选取一组参数：

$$y_i(t_0), i=r+1, \dots, m$$

作为原问题(6.19)或(6.20)的补充初始条件，形式地求解初始问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, y_{r+1}(t_0), \dots, y_m(t_0))^T. \end{cases}$$

设其解为 $y(t)$ 。显然 $y(t)$ 取决于初始参数的值，从而

$$y_i(t_l) \quad (\text{或 } y_{j_l}(t_l), l=1, \dots, m-r), \quad i=r+1, \dots, m$$

由初始参数决定。不妨设参数为

$$\xi_1, \dots, \xi_{m-r}$$

并令 $y_i(t_l) = g_i(\xi_1, \dots, \xi_{m-r}), \quad i=1, \dots, m-r.$

由条件

$$y_i(t_l) = \beta_i, \quad i=1, \dots, m-r$$

可得非线性方程组

$$g_i(\xi_1, \dots, \xi_{m-r}) = \beta_i, \quad i=1, \dots, m-r. \quad (6.33)$$

若令 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-r})^T;$

$$G(\xi) = (g_1(\xi), \dots, g_{m-r}(\xi))^T;$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-r})^T,$$

则有

$$G(\xi) = \beta. \quad (6.34)$$

这是一个由终端条件导出的非线性方程组，解(6.34)或(6.33)可得满足终端条件的补充初始条件

$$y_i(t_0), \quad i=r+1, \dots, m.$$

求解非线性方程组的有效方法很多，如Newton方法、梯度方法、共轭梯度法、变尺度方法等等，可参考相关的书籍。但有一点须注意，由于非线性方程(6.19)(或(6.20))的复杂性，当给出一种估计 ξ_1, \dots, ξ_{m-r} 时，初值问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1, \dots, \xi_{m-r})^T \end{cases}$$

在一般情况下不能得到解析解；因此 $G(\xi)$ 的解析式不易找到，这种情形只能借助数值分析的方法求解，如牛顿法的数值计算。

3.4 牛顿法

对于前面所形成的非线性方程组

$$g_j(\xi_1, \dots, \xi_{m-r}) = \beta_j, \quad j=1, \dots, m-r$$

或其向量方程

$$G(\xi) = \beta, \quad (6.34)$$

用牛顿法求解的主要步骤是通过线性化形成迭代公式，即给定 $\xi^{(k)}$ ，在 $\xi^{(k)}$ 处线性化 $G(\xi)$ ：

$$\begin{aligned} G(\xi) &= G(\xi^{(k)} + \Delta\xi^{(k)}) \\ &= G(\xi^{(k)}) + \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}} \Delta\xi^{(k)} + o(\|\Delta\xi^{(k)}\|) \\ &\approx G(\xi^{(k)}) + \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}} \Delta\xi^{(k)} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \xi_{m-r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m-r}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial g_{m-r}}{\partial \xi_{m-r}} \end{pmatrix} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}}, \quad (6.36)$$

由(6.35)得到线性方程组

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}} \Delta \xi^{(k)} = \beta - G(\xi^{(k)}). \quad (6.37)$$

令 $A^{(k)} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}}, \quad b^{(k)} = \beta - G(\xi^{(k)}),$

得 $A^{(k)} \Delta \xi^{(k)} = b^{(k)}. \quad (6.38)$

解(6.38)得其解 $\Delta \xi^{(k)}$, 从而得到 $k+1$ 级近似解

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + \Delta \xi^{(k)}.$$

若满足 $\|G(\xi^{(k)}) - \beta\|_\infty < \varepsilon$, 则令

$$\xi^* = \xi^{(k+1)},$$

ξ^* 即为(6.34)的解. 否则, 在 $\xi^{(k+1)}$ 处线性化 $G(\xi)$ 重复上述计算过程.

注意到 $g_j(\xi_1, \dots, \xi_{m-r})$ 是如下初值问题的解 ($m-r$ 个终值下同):

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1, \dots, \xi_{m-r})^T. \end{cases}$$

故 Jacobi 矩阵(6.36)中的元素

$$\frac{\partial g_i}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\xi^{(k)}} = \frac{\partial g_i(\xi^{(k)})}{\partial \xi_j}$$

可用差商的方法处理, 即

$$\frac{\partial g_i(\xi^{(k)})}{\partial \xi_j} = (g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)} + h_j, \xi_{j+1}^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})) - g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)}, \xi_{j+1}^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})) / h_j. \quad (6.39)$$

其中 $g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})$ 为如下问题的解:

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})^T, \end{cases}$$

而 $g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)} + h_j, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})$ 为如下问题的解:

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)} + h_j, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})^T. \end{cases}$$

算法6.6 (Newton方法)

1° 给定 $\xi^{(0)} = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_{m-r}^{(0)})^T$, 令 $k=0$.

2° 解 $\begin{cases} y(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})^T. \end{cases}$

设其解为 $y^{(k)}(t)$. 令

$$g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)}) = y_{r+i}^{(k)}(t_i), \quad i=1, \dots, m-r,$$

3° 给出 $h_j (j=1, \dots, m-r)$, 分别就 $j=1, \dots, m-r$ 解

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1^{(k)} + h_j, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})^T. \end{cases}$$

设其解为 $y^{(k+j)}(t)$. 令

$$\begin{aligned} g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_j^{(k)} + h_j, \dots, \xi_{m-r}^{(k)}) \\ = y_{r+i}^{(k+j)}(t_i), \quad i, j=1, \dots, m-r. \end{aligned}$$

4° 形成 Jacobi 矩阵 $A^{(k)}$:

$$A^{(k)} = \left[\frac{\partial g_i(\xi^{(k)})}{\partial \xi_j} \right],$$

其中 $\frac{\partial g_i(\xi^{(k)})}{\partial \xi_j}$ ($i, j = 1, \dots, m-r$) 由 (6.39) 式确定。

5^o 解线性方程组 (6.38):

$$A^{(k)} \Delta \xi^{(k)} = b^{(k)},$$

其中 $b_i^{(k)} = \beta_i - g_i(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{m-r}^{(k)})$, $i = 1, \dots, m-r$.

6^o 令 $\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + \Delta \xi^{(k)}$.

7^o 检查 $\|G(\xi^{(k)}) - \beta\|_\infty < \epsilon$?

是, 令 $\xi^* = \xi^{(k+1)}$, 转 8^o.

否, 置 $k+1 \Rightarrow k$, 转 2^o.

8^o 解初值问题:

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \xi_1^*, \dots, \xi_{m-r}^*)^T. \end{cases}$$

其解即为原问题的解。

4 隐式边界条件的求解

考虑具有隐式边界条件的非线性边值问题

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = f(t, y(t)), \\ g_i(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0), y_1(t_f), \dots, y_m(t_f)) \\ = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (6.40)$$

求解可按以下步骤:

(1) 建立原边界的变分式

$$g_i(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0), y_1(t_f), \dots, y_m(t_f)) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.41)$$

定义 g_i 的变分

$$\delta g_i = g_i^* - g_i = -g_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.42)$$

其中 g_i^* 是真值，满足(6.41)式； g_i 是迭代计算值，存在误差。

另一方面，有变分法则：

$$\begin{aligned}\delta g_i &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j(t_0)} \delta y_j(t_0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j(t_f)} \delta y_j(t_f), \quad i=1, \dots, m.\end{aligned}\quad (6.43)$$

(2) 给出一组初始条件的估计值，

$$(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0))$$

求初值问题 $\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = \{y_1(t_0), \dots, y_m(t_0)\}, \end{cases}$

可以得 $y_i(t_f)$, $i=1, \dots, m$. 从而可以计算

$$g_i(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0), y_1(t_f), \dots, y_m(t_f))$$

的值。

由(6.42)得到 δg_i , $i=1, \dots, m$, 再由(6.43)得到一个 $2m$ 个未知数的 m 维方程组

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j(t_0)} \delta y_j(t_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j(t_f)} \delta y_j(t_f) = -g_i. \quad (6.45)$$

(3) 想办法以 $\delta y_i(t_0)$ 来线性表示 $\delta y_i(t_f)$, $j=1, \dots, m$, 从而使(6.45)为 $\delta y_i(t_0)$ 的线性方程组($j=1, \dots, m$), 以便求得 $\delta y_i(t_0)$, 来修正 $y_i(t_0)$, $i=1, \dots, m$.

由迭代-共轭函数法的(6.25)式得

$$\delta \dot{y}(t) = A(t) \delta y(t), \quad (6.46)$$

再根据线性边值问题中的伴随系统和基本指等式(6.5), 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m z_i^{(j)}(t_f) \delta y_i(t_f) - \sum_{i=1}^m z_i^{(j)}(t_0) \delta y_i(t_0) \\ = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m z_i^{(j)}(t) \cdot 0 dt = 0, \quad j=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.47)$$

其中 $z^{(j)}(t)$ 为(6.46)式的共轭系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A^T(t)z(t), \\ z^{(j)}(t_f) &= e^{(j)}, \quad j=1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

的解.

这样根据(6.47)就可以线性地由 $\delta y_i(t_0)$ ($i=1, \dots, m$) 表出 $\delta y_i(t_f)$ ($i=1, \dots, m$), 那么(6.45)式就唯一确定了 $\delta y_i(t_0)$ ($i=1, \dots, m$).

(4) 求得 $\delta y_i(t_0)$, 用 $y_i(t_0) + \delta y_i(t_0)$ 修正 $y_i(t_0)$, 直到修正量充分小为止.

算法6.7

1° 给出一组初始估计值 $\{y_i^{(0)}(t_0), i=1, \dots, m\}$, 置 $k=0$, $\epsilon>0$.

2° 求初值问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y^{(0)}(t_0). \end{cases}$$

设其解为 $y^{(k)}(t)$, 并计算 $\dot{y}^{(k)}(t_f)$.

3° 求出 $g_i(y^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_f))$.

4° 确定近似线性系统(6.46), 并求其对应的共轭系统(6.48)的 m 个解 $z^{(j)}(t)$, $j=1, \dots, m$.

5° 由基本恒等式

$$\delta y_i(t_i) = \sum_{j=1}^m z_j^{(k)}(t_0) \delta y_j(t_0), \quad j=1, \dots, m$$

确定出 $\delta y_1(t_1), \dots, \delta y_m(t_1)$ 的线性表达式。

6° 将上表达式代入(6.45)解出 $\delta y_i^{(k)}(t_0)$ ，判断

$$\max_{1 \leq i \leq m} |\delta y_i^{(k)}(t_0)| < \epsilon ?$$

满足则迭代停止，当前的 $y^{(k)}(t)$ 即为所求。否则，转7°。

$$7° \quad y_i^{(k+1)}(t_0) = \delta y_i^{(k)}(t_0) + y_i^{(k)}(t_0), \quad i=1, \dots, m$$

置 $k+1 \Rightarrow k$ ，转2°。

这种方法采取的手段类似于一般边值问题的迭代-共轭函数法，也类似于优化方法。我们还可以做如下构思：

1° 给出一组初值条件 ξ_1, \dots, ξ_m 去作为 $y_1(t_0), \dots, y_m(t_0)$ 的近似；

2° 求出初值问题

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)), \\ y_i(t_0) = \xi_i, \quad i=1, \dots, m. \end{cases}$$

的解 $y(t)$ ；

3° 得到 $y(t_i)$ 为 ξ_1, \dots, ξ_m 的函数，再由 $g(y(t_0), y(t_i)) = 0$ (向量)，同样有方程组

$$G(\xi) = 0,$$

通过解 $G(\xi) = 0$ 得 ξ 的修正量 $D\xi$ ，并令

$$\xi + D\xi \Rightarrow \xi,$$

继续迭代。另外还有一种思路：

1° 给出一组初始估计值 $y^{(0)}(t_0)$ ；

2° 由 $g(y(t_0), y(t_f))=0$, 解出 $y(t_f)$;

3° 解 $\begin{cases} \dot{y}=f(t, y), \\ y(t_i), \end{cases}$

得到 $y(t)$ 及 $y(t_0)$;

4° 若 $\|y(t_0) - y^{(0)}(t_0)\| < \varepsilon$, 则停, 否则

$$y(t_0) = y^{(0)}(t_0),$$

转2°. 不过这种想法有一定的条件限制, 因为迭代形式或初始估计值选择不当, 会导致不收敛.

5 多重打靶方法

打靶的思想方法是: 先给出一组估计值进行求解迭代, 反过来再修正初值, 多重的意思是在区间的许多点上实行打靶.

多重打靶法是将有限差分法与打靶法结合起来的方法. 有限差分法充分利用了初始边值条件, 有很好的稳定性.

用打靶法在 (t_0, t_f) 上求解一般问题时, 如果采用 p 阶积分和 h 步长, 则微分方程的数值解的误差阶为

$$O(h^p \exp(k_1 |t_0 - t_f|)), k_1 \text{ 为常数.}$$

因而减小打靶区间的长度, 便能减少误差. 举例说明如下:

例6.2

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y(t)) \\ f_2(t, y(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1),$$

$$y_1(0) = a, \quad y_2(1) = b, \quad y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T.$$

这是一个二点边值问题, 区间为 $(0, 1)$. 如图6.1.

将 $(0, 1)$ 分成两段, 节点为 $1/2$ 从而产生两个区间 $(0, 1/2)$

和 $(1/2, 1]$ ，然后在每一个子区间上应用打靶法估计 $y_1(0), y_1(1/2), y_2(1/2)$ 。这时可将原问题化成一个四维的两点边值问题：

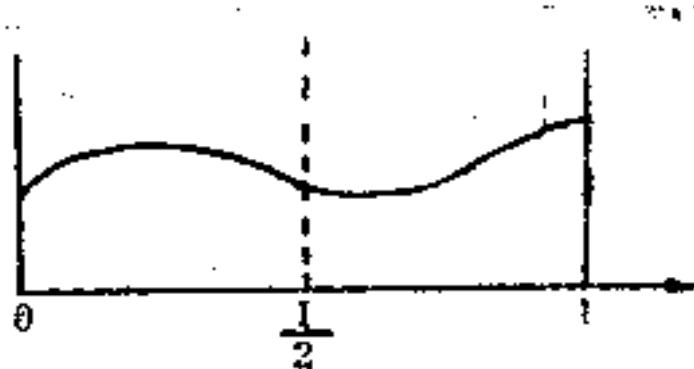


图6.1

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = f_1(t, y(t)), & t \in (0, 1/2], \\ \dot{z}_1(t) = f_1(t, z(t)), & t \in (1/2, 1], \\ \dot{y}_2(t) = f_2(t, y(t)), & t \in (0, 1/2], \\ \dot{z}_2(t) = f_2(t, z(t)), & t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

$$y_1(0) = a, \quad y_2(0) = \text{估计值}, \quad z_1(1/2) = \text{估计值}, \\ z_2(1/2) = \text{估计值}.$$

作代换 $\tau = t - 1/2$, $z(\tau) = y(\tau + 1/2)$, $0 \leq \tau \leq 1/2$,
所以

$$\dot{z}(\tau) = f(\tau + 1/2, z(\tau)) = g(\tau, z(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ z_1(0) = y_1(1/2); \quad z_2(0) = y_2(1/2).$$

原问题化为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \\ g_1(t, z) \\ g_2(t, z) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$$

边界条件为

$$\begin{cases} y_1(0) = a, \\ z_1(0) = y_1(1/2), \\ z_2(0) = y_2(1/2), \\ z_2(1/2) = b. \end{cases}$$

这样区间由 $(0, 1)$ 变成了 $(0, 1/2)$ ，这个四维两点边值问题可由前面介绍的方法解出。

同样地，如果再增加几个打靶区间，仍可以得到相应的更高维两点边值问题。Keller 已证明：如果将区间 (t_0, t_f) 分成 n 等分子区间，则由打靶方法需解一个由 mn 个常微分方程组成的方程组，误差限为

$$o(h^p \exp(k_1 |t_0 - t_f|^{1/n})), \quad k_1 \text{ 为常数.}$$

这里介绍多重打靶法主要是针对微分方程边值问题数值解中的稳定性提高和精度的保证。

第七章 无约束最优控制 问题的数值方法

1 引言

回顾一下求解无约束最优控制问题的迭代步骤。

对于问题

$$\begin{aligned} \min J(u) = & \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{x} = f(x, u, t), \\ & x(t_0) = x_0, \\ & x(t_f) \text{自由, } t_f \text{给定,} \end{aligned} \quad (7.1)$$

有迭代方法:

1° 给定初始控制 $u^0(t) \in R^n$.

2° 解初值问题(正向积分):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u^0, t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in (t_0, t_f). \end{cases}$$

设其解为 $x^0(t)$, 并计算 $J(u^0)$.

3° 解初值问题(反向积分):

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H(t, x^0, u^0, \lambda)/\partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^0(t_f), t_f)/\partial x(t_f), \quad t \in (t_0, t_f), \end{cases}$$

得解 $\lambda^0(t)$.

4° 寻求某下降方向 Δu_0 及因子 α , 令

$$u'(t) = u^0(t) + \alpha \Delta u_0$$

满足 $H(x^0, u', \lambda^0, t) < H(x^0, u^0, \lambda^0, t)$.

5° 计算 $J(u')$ 并检查终止法则:

- (a) $|J(u') - J(u^0)| / |J(u')| < \varepsilon_2$? $|J(u')| > \varepsilon_1$ 时;
- (b) $|J(u') - J(u^0)| < \varepsilon_3$? $|J(u')| \leq \varepsilon_1$ 时,

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是预先给定的常数)

若满足, 则停止, $u^*(t) = u'(t)$.

6° $u'(t) = u^0(t)$, 转 2°.

可以看出, 这个迭代方法的关键步骤是 4°, 即寻求下降方向及搜索步长, 采用不同的下降方向就会得到不同的方法.

最优控制的数值方法与多元函数的极值方法有类似之处, 读者在学过最优化计算方法之后, 对无约束最优化方法有一定的了解. 一般的方法有梯度法、共轭梯度法、牛顿法、变尺度法等. 本章相应地介绍求解无约束最优控制问题的上述方法.

在上述的一般迭代步骤中, 需要解两个初值问题 2° 和 3° 以及无穷维比较 4°, 实际上这是很难办到的, 只能在离散的情形下考虑, 选择离散点

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = t_f,$$

在 t_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 上实现迭代方法, 即进行数值微分、下降判断等, 最后所得也将是这些点上的控制值. 后面的例子会说明这一点, 无疑这将有益于上机运算.

我们的目标是使目标泛函 $J(u)$ 取极小, 在迭代过程中保证 $J(u)$ 下降, 为此希望得到下降方向.

首先定义函数空间上的内积范数.

定义 7.1 设函数向量 $u(t), v(t)$ 在 (t_0, t_f) 上有定义,

平方可积且值域为 R^q , 则其内积为

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)v(t)dt, \quad (7.2)$$

范数为

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t)dt \right)^{1/2}, \quad (7.3)$$

有了这些定义, 再来寻找下降方向. 设 Δu 为下降方向, 即是存在 $\alpha > 0$, 满足

$$J(u + \alpha \Delta u) < J(u), \quad (7.4)$$

将 $J(u + \alpha \Delta u)$ 按 α 在 $\alpha=0$ 处展开:

$$J(u + \alpha \Delta u) = J(u) + \alpha \langle \nabla J(u), \Delta u \rangle + o(\alpha).$$

欲保证下降性 $J(u + \alpha \Delta u) < J(u)$, 仅当 α 足够小时, 满足

$$\langle \nabla J(u), \Delta u \rangle < 0. \quad (7.5)$$

其中 $\nabla J(u)$ 为 $J(u)$ 的梯度, 易知 $\Delta u = -\nabla J(u)$ 为一个下降方向, 且为最速下降方向.

再由 (7.1) 式将微分方程约束化入目标

$$\min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(t, x, u, \lambda) - \lambda^T \dot{x}) dt$$

其中 $H = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$.

欲证 $\nabla J(u) = \frac{\partial H}{\partial u}$, 只须证

$$\delta J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u dt,$$

由 $J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, t) - \lambda^T \dot{x}) dt$,

所以 $\delta J(u) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \delta(H - \lambda^T \dot{x}) dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_f} d(\lambda^T \delta x) + \int_{t_0}^{t_f} \delta(H - \lambda^T \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} (\lambda^T \delta x + \lambda^T \delta \dot{x}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta(H - \lambda^T \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} ((\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial x})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u dt.
\end{aligned}$$

为了保证目标泛函的下降，除具有下降方向外，还需有合理的搜索步长 α ，即如何进行一维寻查。

一维寻查分两种类型：

(1) 精确的一维寻查

寻找 α ，使目标在该方向上达到极值，虽能保证足够下降，但计算量大，常见的有分数法、0.618法等，可参考有关书籍。

(2) 可接受步长的一维寻查

寻找 α ，不要求目标在该方向达到极值，只需保证目标下降即可，即求 α 满足

$$J(u + \alpha \Delta u) < J(u).$$

如：

1° 给出 $\alpha = \alpha_0 > 0, 0 < r < 1$,

2° 检查 $J(u + \alpha \Delta u) < J(u)$ ？

是，则停止， α 满足要求。

否则，转3°。

3° 置 $r\alpha = \alpha$ ，转2°。

2 梯度法

梯度法是求解最优化问题的一种比较简单和基本的方法，现用其来解决最优控制问题。

给定 $u^k(t) \in R^n$, $k=0, 1, \dots$,

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + \alpha_k \Delta u^k(t),$$

寻找方向

$$\Delta u^k(t) = -\nabla J(u^k), \quad (7.6)$$

步长因子 α_k 为

$$J(u^{k+1}(t)) < J(u^k(t)). \quad (7.7)$$

(1) 计算 $\nabla J(u^k)$ 的步骤：

1° 给定 $u^k(t) \in R^n$,

2° 解初值问题：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u^k(t)), & t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

设其解为 $x^k(t)$.

3° 解初值问题：

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H(t, x^k, u^k, \lambda(t))/\partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^k(t_f), t_f)/\partial x(t_f). \end{cases}$$

设其解为 $\lambda^k(t)$.

4° 计算

$$\nabla J(u^k) = -\frac{\partial H(t, x^k, u, \lambda^k)}{\partial u} \Big|_{u=u^k}$$

(2) 确定 α_k 的步骤：

1° 令 $\alpha_k = \overline{\alpha_k}$, $0 < r_k < 1$.

2° 计算 $u^{k+1} = u^k - \alpha_k \nabla J(u^k)$.

3° 解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, u^{k+1}, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

设其解为 x^{k+1} .

4° 求 $J(u^{k+1})$.

5° 比较 $J(u^{k+1}) < J(u^k)$?

是, 令 $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$, 返回主程序.

否, 令 $\bar{\alpha}_k = r_k \bar{\alpha}_k$, 转 1°.

算法7.1 (梯度法)

1° 给定初始控制 $u^0(t)$, ϵ_1 , ϵ_2 , $\epsilon_3 > 0$.

2° 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, u^0, x), \quad t \in (t_0, t_f) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

设其解为 $x^0(t)$.

3° 计算 $J(u^0)$.

4° 解初值问题

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f), \end{cases}$$

得 $\lambda^0(t)$.

5° 计算 $\nabla J(u^0) = \partial H(x^0, u^0, \lambda^0, t) / \partial u$.

6° 执行一维寻查子程序, 确定 α_k .

7° 令 $u'(t) = u^0(t) - \alpha_k \nabla J(u^0)$.

8° 计算 $J(u')$.

9° 判断:

- (a) $|J(u') - J(u^0)| / |J(u')| < \varepsilon_2$? $|J(u')| > \varepsilon_1$ 时,
 (b) $|J(u') - J(u^0)| < \varepsilon_3$? $|J(u')| \leq \varepsilon_1$ 时,
 是, 令 $u^*(t) = u'(t)$, 停.
 否, 令 $u^0(t) \leftarrow u'(t)$, 转 2°.

梯度法因下降方向确定为负梯度方向, 故又称最速下降法. 但在最优点附近会出现拉锯现象, 收敛较慢.

例7.1 已知三阶线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} u - x_1, \quad x_1(0) = -0.6, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \quad x_2(0) = -0.6, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3, \quad x_3(0) = 4, \end{cases}$$

求解

$$\min J(u) = \int_0^3 ((2x_2)^{20} + x_3^2 + 0.01u^2) dt.$$

终端自由, $\lambda_i(3) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \text{解: } H &= (2x_2)^{20} + x_3^2 + 0.01u^2 + \lambda_1 \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} u \right. \\ &\quad \left. - x_1 \right) + \lambda_2 (x_1 - x_2) + \lambda_3 (x_2 - x_3), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 0.02u + \frac{2\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u^2} = 0.$$

协态方程组 $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\partial H / \partial x_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 = -\partial H / \partial x_2 = \lambda_2 - \lambda_3 - 20(2x_2)^{19}, \\ \dot{\lambda}_3 = -\partial H / \partial x_3 = \lambda_3 - 2x_3; \end{cases}$

固定步长因子 $\alpha=10$, $u^0(t)=0$, 取步长 $h=0.3$.

第一次迭代:

1° 给定 $u^0(t)=0$.

2° 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, & x_1(0) = -0.6, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, & x_2(0) = -0.6, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3, & x_3(0) = 4. \end{cases}$$

利用Euler公式求解:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - 0.3x_1^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + 0.3(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + 0.3(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \end{cases} \quad k=0, 1, \dots, 10.$$

其数值解见表7.1。

3° 计算 $J(u^0)$:

$$J(u^0) = \int_0^3 ((2x_2)^{20} + x_3^2) dt.$$

利用牛顿-柯蒂斯(Newton-Cotes)公式, 令

$$f = (2x_2)^{20} + x_3^2,$$

列表算值(见表7.2).

$$\text{故 } J(u^0) = \frac{1}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{0.8}{6}(f_4 + 4f_5 + f_6) + \frac{1}{90}(7f_6 + 32f_7 \\ &+ 12f_8 + 32f_9 + 7f_{10}) \\ &= 26.366 \end{aligned}$$

表 7.1

t_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
$x_1^{(9)}(t)$	-0.6	-0.42	-0.294	-0.2058	-0.144	-0.1	-0.07	-0.05	-0.035	-0.024	-0.017
$x_2^{(9)}(t)$	-0.6	-0.6	-0.546	-0.47	-0.39	-0.32	-0.255	0.199	0.153	-0.119	-0.09
$x_3^{(9)}(t)$	4	2.62	1.054	0.994	0.555	0.271	0.094	-0.01	-0.067	-0.09	-0.154

表 7.2

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
54.34	45.2	8.55	1.278	0.316	0.074	0.008	0.0001	0.0004	0.008	0.024

4° 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 - \lambda_2, & \lambda_1(3) = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 - \lambda_3 - 20(2x_2)^{1/2}, & \lambda_2(3) = 0, \\ \dot{\lambda}_3 = \lambda_3 - 2x_3, & \lambda_3(3) = 0. \end{cases}$$

利用后退的Euler公式, $h=0.3$, 得

$$\begin{cases} \lambda_1(t_{k+1}) = \lambda_1(t_k) - 0.3(\lambda_1(t_k) - \lambda_2(t_k)), \\ \lambda_2(t_{k+1}) = \lambda_2(t_k) - 0.3(\lambda_2(t_k) - \lambda_3(t_k)) \\ \quad - 0.3 \times 20(2x_2(t_k))^{1/2}, \\ \lambda_3(t_{k+1}) = \lambda_3(t_k) - 0.3\lambda_3(t_k) + 2 \times 0.3 \times x_3(t_k), \end{cases}$$
$$k=0, 1, \dots, 10.$$

计算结果见表7.3.

5° 计算

$$\nabla J(u^0) = \frac{\partial H(x^0, u^0, \lambda^0, t)}{\partial u} = 0.02u^0 + \frac{2\lambda_1^0}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(u^0)^2}$$

计算结果见表7.4.

6° 取步长因子 $\alpha=10$.

7° 计算 $u'(t)=u^0(t)-\alpha\nabla J(u^0)$.

计算结果见表7.5.

重复以上步骤, 20次迭代结果见表7.6.

表 7.3

t	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
$\lambda_1^e(t)$	0	0	-0.008	-0.019	-0.0296	-0.035	-0.03	-0.03	-0.035	-0.036	-0.036
$\lambda_2^e(t)$	0	0	-0.027	-0.049	-0.06	-0.0567	-0.03	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
$\lambda_3^e(t)$	0	-0.09	-0.109	-0.104	-0.059	0.015	0.171	0.436	0.858	1.507	2.476

表 7.4

t_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
$\nabla J(u^0)$	-0.458	-0.3369	-0.0096	-0.019	-0.022	-0.0189	-0.012	-0.005	0	0	0

表 7.5

t_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
$u'(t_i)$	-64.58	3.369	0.096	0.19	0.32	0.189	0.112	0.05	0	0	0

表 7.6

t	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
$u(t)$	0.26	2.777	-1.37	-1.097	-0.695	-0.263	0.049	0.121	0.072	0.014	0

3 共轭梯度法

共轭梯度法最早是用来求线性代数方程组的一种方法。后来又用来求解无约束函数极值问题，具有二次终止性质。60年代初，共轭梯度法推广到函数空间，用来求解最优控制问题。

共轭梯度法是选择一组相互共轭的下降方向作为迭代方向进行迭代的方法。

算法7.2 (共轭梯度法)

1⁰ 给定初始控制函数 $u^0(t)$, $k=0$.

2⁰ 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, u^k, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

设其解为 $x^*(t)$.

3⁰ 计算 $J(u^k)$.

4⁰ 解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\partial H(t, x^k, u^k, \lambda)/\partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^*(t_f), t_f)/\partial x(t_f), \end{cases}$$

得 $\lambda^k(t)$.

5⁰ 求 $\nabla J(u^k) = \partial H(x^k, u^k, \lambda^k, t)/\partial u$.

6⁰ $k=0$ 时, $\beta^k=0$;

$k>0$ 时, $\beta^k = \|\nabla J(u^k)\|^2 / \|\nabla J(u^{k-1})\|^2$.

7⁰ 下降方向 $p^k = -\nabla J(u^k) + \beta^k p^{k-1}$.

8⁰ $u^{k+1}(t) = u^k(t) + \alpha^k p^k$, α^k 由一维寻查子程序确定.

9⁰ 检查终止条件, 满足, 停.

否则, $k+1 \Rightarrow k$, 转2°.

共轭梯度法迭代步骤类似于多元函数优化问题的共轭梯度法, 详细内容(公式推导、收敛性等)请查阅参考文献[13].

例7.2 求

$$\min J(u) = \int_0^{0.5} (10x^2 + u^2) dt + 10x^2(0, 5),$$

$$\dot{x} = 0.2x + 10\tanh u, \quad x(0) = 5$$

的解.

解: 取初始控制 $u^0(t) = -0.5$,

$$H = 10x^2 + u^2 + \lambda(-0.2x + 10\tanh u),$$

$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0.2\lambda - 20x,$$

$$\lambda(0.5) = 20x(0.5),$$

$$\nabla J(u) = \partial H / \partial u = 10\lambda(1 - \tanh^2 u) + 2u,$$

计算结果见表7.7

表 7.7

迭代次数	0	1	2	3	4	5
$J(u)$ (共轭梯度法)	123.44	41.76	41.61	41.60	41.60	
$J(u)$ (梯度法)	123.44	53.02	52.48	51.96	51.96	50.98
迭代次数	12	17	30	40	50	
$J(u)$ (共轭梯度法)						
$J(u)$ (梯度法)	48.10	46.48	43.50	42.10	41.64	

由表7.7可以看出共轭梯度法优于梯度法，收敛很快，而梯度法出现“拉锯”现象，收敛很慢。

4 牛顿法（二阶变分法）

牛顿法是求解多元函数极值问题的常用方法，由于它使用了目标函数的二阶导数信息，具有很快的收敛速度，但其缺点也是十分明显的，增大了计算工作量及复杂性，对初值要求苛刻，只有在最优点附近才能显示出其优点。为把牛顿法推广到函数空间，求解最优控制问题，从而产生了二阶变分法，其推导过程可参阅文献(6)。

考察迭代方向

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + \alpha_k \Delta u^k(t), \quad (7.8)$$

$$\Delta u(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \delta \lambda \right), \quad (7.9)$$

式中 $\delta \lambda$ 满足

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A \delta x(t) + B \delta \lambda + V, \quad \delta x(t_0) = 0, \\ \delta \dot{\lambda} &= C \delta x(t) + D \delta \lambda + W, \quad \delta \lambda(t_f) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2(t_f)} \delta x(t_f). \end{aligned} \quad (7.10)$$

其中： $A = f_x - f_u (H_{uu})^{-1} H_{xu}$;

$B = -f_u (H_{uu})^{-1} fu^T$;

$C = -H_{xx} + H_{xu} (H_{uu})^{-1} H_{ux}$;

$V = -f_u (H_{uu})^{-1} H_{vu}$;

$W = H_{xx} (H_{uu})^{-1} H_{vv}$.

这是一个两点边值问题，作Ricati变换后进行求解。

算法7.3 (Newton法)

1⁰ 给出初始控制 $u^0(t)$ 。

2⁰ 求初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u^0, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

得 $x^0(t)$ 。

3⁰ 求 $J(u^0)$ 。

4⁰ 求初值问题

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^0(t_f), t_f) / \partial x(t_f). \end{cases}$$

得 $\lambda^0(t)$ 。

5⁰ 由(7.9)、(7.10)两式，求 $\Delta u^0(u)$ 。

6⁰ 执行一维寻子程序计算 α_0 ，并令

$$u'(t) = u^0(t) + \alpha_0 \Delta u^0(t).$$

7⁰ 验证终止法则，满足，停。否则 $u'(u) \Rightarrow u^0(t)$ ，转 2⁰。

根据梯度法及牛顿法的优劣处，应该扬长避短、相互补充。可先利用梯度法求出一个较好的近似后，再利用牛顿法，使目标很快收敛到极小。

5 变尺度方法

变尺度方法是60年代初期提出的求解n维向量空间中无约束多变量函数极值问题的一个有效算法。70年代初期它被推广到函数空间求解最优控制问题。

变尺度方法最初是在二次函数的情况下推得的，具有二

次终止性及超线性收敛率。我们知道，牛顿法的收敛速度快，但需求二阶导数，限制了其应用范围。变尺度方法借鉴了牛顿法的思想，避免了求二阶导数，其迭代方向为

$$-Q_k \nabla J(u^k).$$

Q_k 为变尺度阵， $Q_k > 0$ （正定），可以看成Newton法Hesse逆阵的近似。 $Q_k = I$ （ I 为单位阵）时为最速下降方向。

Q_k 有很多性质，在最优化方法里面有所论述。根据 Q_k 的不同构成，可以产生不同的变尺度方法。较著名的方法有DFP方法和BFGS方法。

由

$$\Delta J(u^k) = \partial H / \partial u|_{u=u^k}, \quad (7.11)$$

$$\text{迭代方向} \quad p^k = -Q_k \nabla J(u^k). \quad (7.12)$$

令

$$\Delta u^k(t) = u^{(k+1)}(t) - u^{(k)}(t); \quad (7.13)$$

$$r_k = \nabla J(u^{k+1}) - \nabla J(u^k), \quad (7.14)$$

Q_k 的修正矩阵：

DFP公式

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{\Delta u^k \Delta^T u^k}{\langle \Delta u^k, r_k \rangle} - \frac{Q_k r_k r_k^T Q_k}{\langle r_k, Q_k r_k \rangle}; \quad (7.15)$$

BFGS公式为

$$Q_{k+1} = (I - \frac{r_k \Delta^T u^k}{\langle r_k, \Delta u^k \rangle}) Q_k (I - \frac{r_k \Delta^T u^k}{\langle r_k, \Delta u^k \rangle})^T + \frac{r_k r_k^T}{\langle r_k, \Delta u^k \rangle}. \quad (7.16)$$

于是可以构成迭代方向

$$f^{k+1} = -Q_{k+1} \nabla J(u^{k+1}).$$

算法7.4 (变尺度法)

1° 选取初始控制函数 $u^0(t)$, $Q_0=I$.

2° 求解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x, u^0, t), \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$$

得 $x^0(t)$.

3° 求 $J(u^0)$.

4° 求解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}=-\partial H(u^0, x^0, \lambda, t)/\partial u, \\ \lambda(t_f)=\partial \varphi(x^0(t_f), t_f)/\partial x(t_f). \end{cases}$$

得 $\lambda^0(t)$.

5° 计算梯度 $\nabla J(u^0)=\partial H(u^0, x^0, \lambda^0, t)/\partial u$.

6° 迭代方向 $p^0=-Q_0\nabla J(u^0)$.

7° 求 α_0 ,

$$u' = u^0 + \alpha_0 p^0.$$

8° 检查终止条件, 满足, 停.

否则, 转9°.

9° 求 $\Delta u^0(t)$, r_0 :

$$\Delta u^0(t) = u' - u^0;$$

$$r_0 = \nabla J(u') - \nabla J(u^0).$$

10° 修正 Q_0 :

按(7.15)或(7.16)式修正得到新的 Q_0 , $u' = u^0$, 转2°.

前面介绍了四种求解无约束最优控制问题的常用算法, 这些方法也是函数最优化方法的推广, 即从空间 R^n 推广到函数空间, 其很多性质也可相应得出. 关于收敛性问题本书就略去了.

第八章 约束最优控制问题的数值解法

1 引言

考察问题:

$$\min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \quad (8.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad (8.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (8.2)$$

$$g_i(t, x, u) \geq 0, \quad i=1, \dots, l, \quad (8.3)$$

$$N_j(x(t_f), t_f) = 0, \quad j=1, \dots, m. \quad (8.4)$$

这是一个有约束的最优控制问题，可把(8.3)式和(8.4)式分别看成控制约束和终端约束，将无约束最优控制问题的数值方法的一般迭代步骤移植过来，就得到最优控制问题数值解法的一般迭代步骤：

1° 给定 $u^0(t)$.

2° 解 $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u^0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$

得 $x_1(t)$.

3° 解 $\begin{cases} \dot{\lambda} = -\partial H(u^0, x^0, \lambda, t)/\partial x, \\ \lambda(t_f) = \partial \varphi(x^0(t_f), t_f)/\partial x(t_f) + \gamma^T \partial N/\partial x(t_f). \end{cases}$

得 $\lambda^0(t)$.

4° 构造迭代方向 $\Delta u^0(t)$.

5. 令 $u'(t) = u^0(t) + \alpha_0 \Delta u^0(t)$, α_0 为迭代步长, 满足 J 下降.

6. 判断终止条件, 满足, 停.
否则, $u' \Rightarrow u^0$, 转 2^o.

显然, 这个迭代步骤是很不完善的, 是一种象征性的计算步骤. 有这么几个问题:

1. 初始控制 $u^0(t)$ 取自何处?
2. 共轭方程组求解 γ 如何确定?
3. 这种迭代难以保证 $N(x(t_f), t_f) = 0$, 如何使末状态达到目标集?
4. 不能象求解无约束最优控制问题那样选择一个下降方向进行搜索、迭代, 一个重要的前提——控制有约束, 使我们不得不小心谨慎, 在选择 $\Delta u^0(t)$ 的时候, 要考虑可行性.

在终端约束, 控制约束同时存在情况下, 问题是复杂的, 求解也很困难.

约束控制的梯度方法

考虑问题

- (8.1) 式, 只出现控制约束的情形, 终端状态自由,
- (8.2) 式,
- (8.3) 式,

即只考虑出现控制约束的情形, 且终端状态自由. 针对控制约束(8.3)的比较简单的情况进行讨论, 首先定义约束算子 L_v 为,

对 $\forall \hat{u}(t) \in R^q$, 定义

$$即 L_u: \hat{u}(t) \rightarrow u(t) \in U \text{ (控制域)},$$

$$L_u(\hat{u}(t)) = u(t) \in U. \quad (8.5)$$

算子 L_u 具有简单性质:

$$(i) \quad L_u(u) = u \text{ 当且仅当 } u \in U; \quad (8.6)$$

(ii) 对 $\forall \hat{u}(t) \in R^q$, 设

$$u(t) = L_u(\hat{u}(t)),$$

$$\text{那么 } \|u(t) - \hat{u}(t)\| = \min_{v(t) \in U} \|v(t) - \hat{u}(t)\|. \quad (8.7)$$

有了约束算子, 就保证了每步迭代中的可行性了, 现在讨论几种控制约束:

(1) 设约束(8.3)取如下形式, 即

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad (j=1, \dots, q), \quad (8.8)$$

亦即控制变量的容许集 U 为 q 维的“长方体”.

约束算子 $L_u^{(1)}$ 定义为

$$u_j(t) = L_u^{(1)}(\hat{u}_j(t)) = \begin{cases} a_j, & \text{若 } \hat{u}_j(t) \leq a_j, \\ \hat{u}_j(t), & \text{若 } a_j < \hat{u}_j(t) < b_j, \\ b_j, & \text{若 } \hat{u}_j(t) \geq b_j, \end{cases} \quad j=1, \dots, q. \quad (8.9)$$

可知当 $u(t) \in U$ 时, $L_u^{(1)}$ 满足性质(i), (ii) (读者自行验证);

$$(2) \quad \varphi_j(t) \leq u_j(t) \leq \bar{\varphi}_j(t), \quad j=1, 2, \dots, q. \quad (8.10)$$

同样的道理, 取约束算子 $L_u^{(2)}$ 如下, 对 $\forall \hat{u}(t) \in R^q$,

$$u_j(t) = L_u^{(2)}(\hat{u}_j(t)) = \begin{cases} \varphi_j(t), & \hat{u}_j(t) \leq \varphi_j(t), \\ \hat{u}_j(t), & \bar{\varphi}_j \leq \hat{u}_j < \bar{\varphi}_j(t), \\ \bar{\varphi}_j(t), & \hat{u}_j(t) \geq \bar{\varphi}_j(t), \end{cases} \quad (8.11)$$

$$(3) \quad \varphi_i(t, x(t), u(t)) \leq u_i(t) \leq \bar{\varphi}_i(t, x(t), u(t)), \quad (8.12)$$

显然, 由状态方程解得 $x(t) = x(u(t), t)$ 代入 (8.12) 即化为情形(2).

总结以上情况, 得到下面的约束梯度算法.

算法8.1(约束梯度算法)

1° 给定 $u_0(t) \in U$.

2° 解状态方程求 $x^0(t)$.

3° 再解伴随方程, 得 $\lambda^0(t)$.

4° 求 $\nabla J(u^0)$.

5° $\hat{u}' = u^0 - \alpha_0 \nabla J(u^0)$.

6° 约束算子作用 $u' = L_u(\hat{u}')$.

7° 检查终止条件, 满足, 则停.

否则, $u' = u^0$, 转 2°.

这个算法的 5°、6° 说明: 在计算中先是不考虑约束, 在下降方向上无约束搜索, 然后再用约束算子将搜索终止点“拉回”控制域. 当搜索跑出控制域时, 得到的是边界点, 这就可能有较好的内点被放弃了, 为了避免这点, 我们在搜索的同时加约束算子作用, 以求得较好的内点, 即添加:

5°' $\alpha_1 \min_{\alpha > 0} J(L_u(u^0 + \alpha \Delta u^0))$.

6°' $u' = L_u(u^0 + \alpha_0 \Delta u^0)$, $\Delta u^0 = -\nabla J(u^0)$,

或者有过程:

i₁: $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 > 0$, $1 > r > 0$;

i₂: $u' = L_u(u^0 + \alpha_0 \Delta u^0)$;

i₃: $J(u') < J(u^0)$?

是, 返回主程序.

否, $\alpha_0 = r\alpha_0$, 转 i₂.

有了约束算子，无约束最优控制问题的数值解法，都可以在此使用，如共轭梯度法、变尺度法等，但有一条需要注意，当迭代点到达边界时，说明被约束算子作用了，下一次使用的迭代方向很可能不是下降方向了，这时需将迭代方向转成负梯度方向进行搜索。

3 Frank-Wolfe 方法

首先考虑有限维最优化问题

$$\min\{f(u), u \in \Omega\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭凸集， f 是 Ω 上的连续可微的严格凸函数。对给定的初始近似 u_0 ，Frank-Wolfe 方法的迭代公式是

$$u^{i+1} = u^i + \alpha_i (\bar{u}^i - u^i), i = 0, 1, 2, \dots. \quad (8.13)$$

其中 \bar{u}^i 是问题

$$\min\{\langle \nabla f(u^i), u - u^i \rangle | u \in \Omega\} \quad (8.14)$$

的解。

$$\alpha_i: \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \{f(u^i + \lambda(\bar{u}^i - u^i))\} \quad (8.15)$$

(8.14) 式的目的是寻求一个可行的下降方向。

对于最优控制问题 $\min\{J(u), u \in U\}$ ，设

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt. \quad (8.16)$$

其中 $x = x(u, t)$ ，满足

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in (t_0, t_f), \\ U = \{u \mid |u_i(t)| \leq 1, i=1, \dots, q\}, \\ t \in (t_0, t_f) \end{array} \right\} \quad (8.17)$$

用Frank-Wolfe方法解(8.16)、(8.17), 相应的(8.14)式化为

$$\begin{aligned} \min \{ & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u} L(x^i, u^i, t) \right]^T (u(t) - u^i(t)) \right. \\ & \left. - \langle B(t)^T \lambda^i(t), u(t) - u^i(t) \rangle \right\} dt, \quad (8.18) \\ \text{s.t. } & u^i \in U. \end{aligned}$$

其中协态变量 $\lambda^i(t)$ 由

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^i = -A(t)^T \lambda^i(t) + (\partial L(t, x^i, u^i) / \partial x)^T, \\ \lambda^i(t_f) = 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

决定。

从(8.18)式很容易求出 $\bar{u}^i(t)$, 其分量为

$$\bar{u}_j^i(t) = -\operatorname{sign} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} L(t, x^i, u^i) + B(t)^T \lambda^i(t) \right] \quad (8.20)$$

因此可以构造下一个迭代方向, 求出下一个迭代点。

算法8.2 (F-W方法)

- 1° 给定 $u^0(t) \in U$.
- 2° 求状态方程组, 得当前状态值 $x^0(t)$.
- 3° 再解协态方程组(8.35), 得 $\lambda^0(t)$.
- 4° 由(8.36)式求出 $\bar{u}^0(t)$.
- 5° 构造下一个迭代方向 $\Delta u^0(t) = \bar{u}^0(t) - u^0(t)$.
- 6° 按 $\Delta u^0(t)$ 搜索, 得

$$u'(t) = u^0(t) + \lambda_0 (\bar{u}^0(t) - u^0(t)).$$

由 $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ 及控制域 U 凸知

$u'(t) \in U$, 可行.

7° 检查终止条件, 满足, 则停止.

否则, $u^*(t) = u'(t)$, 转2°.

4 罚函数法

这一类算法和基本思想是根据约束的特点构造某种惩罚函数, 并把它加到目标函数中去, 使约束问题的求解化为一系列无约束问题的求解。“惩罚”是针对“违反规章”而言的, 即如果 $u(t)$ 不在约束域内, 那么就会有相应的惩罚, 使其进入控制域. 为说明惩罚函数, 考虑下面函数寻优问题

$$\begin{aligned} & \min f(x), \\ & \text{s.t. } g(x) \geq 0, \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

引进罚因子 μ_1, μ_2 , 构造一个罚函数

$$\mu_1 \{\min(0, g(x))\}^2 + \mu_2 h^2(t).$$

求解下列无约束优化问题

$$\min f(x) + \mu_1 \{\min(0, g(x))\}^2 + \mu_2 h^2(x). \quad (8.22)$$

可以证明, 当 μ_1, μ_2 足够大时, (8.21)与(8.22)式有相同的最优解.

对于最优控制问题(8.1)–(8.4), 构造的罚函数:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I M_i \{\min(0, g_i)\}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_i N_i^2(x(t_i), t_i), \\ & \tilde{J}(u) = J(u) + \sum_{i=1}^I M_i \{\min(0, g_i)\}^2 \\ & + \sum_{i=1}^m \mu_i N_i^2(x(t_i), t_i). \end{aligned} \quad (8.23)$$

从(8.23)看出, 如果 $u^i(t)$ 或 $x^i(t)$ 不满足约束(8.3)和(8.4), 就会受到惩罚, 离控制域和目标集越远, 受到的惩罚就越大, 可以看出, 关键问题是罚因子 M_i ($i=1, \dots, l$), μ_j ($j=1, \dots, m$) 的选取, 罚因子取太大, 会影响目标函数的性态; 取小了可能罚不成功, 所以采取步步加大的策略.

在给出算法之前, 先讨论乘子 γ_i 的估算.

对于具有终端约束(8.4)的问题, 有

$$\lambda_i(t_f) = \partial\varphi/\partial x_i(t_f) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \partial N_j/\partial x_i(t_f), \\ (i=1, \dots, n) \quad (8.24)$$

而对于 $\min \tilde{J}(u)$,

$$\lambda_i(t_f) = \partial\varphi/\partial x_i(t_f) + \sum_{j=1}^m \mu_j N_j(x(t_f), t_f) (\partial N_j/\partial x_i(t_f)). \\ (8.25)$$

二者比较可以看出 $u_i N_i$ 起到了 γ_i 的作用.

按照Lagrange乘子法原则对 γ_i 进行调整:

0⁰: 取 $\gamma_i^0, \beta, k=0$.

1⁰: $\gamma_i^{k+1} = \gamma_i^{(k)} + \beta N_j(x^{(k+1)}(t_f), t_f)$,

β 是适当选取的因子.

有了前面的准备, 现给出罚函数法的迭代步骤:

算法8.3 (罚函数方法)

0⁰ 给出 $u^0(t), \beta > 0, p > 1, \varepsilon > 0, \gamma^0, M_i, \mu_j, \\ (i=1, \dots, l, j=1, \dots, m)$

1⁰ 求解状态方程, 得 $x^0(t)$.

2° 修改乘子，第一次迭代 $\gamma = \gamma^0$, 以后每一步的乘子
后面的迭代 $\gamma \leftarrow \gamma + \beta N$.

3° 求解协态方程，得 $\lambda^0(t)$.

4° 求 $\min \widetilde{H}(u)$:

$$\widetilde{H}(u) = H(u) + p(u)$$

$$= H(u) + \sum_{i=1}^l M_i \{\min(0, g_i)\}^2$$

$$+ \sum_{i=1}^m u_i N_i^2.$$

5° 检查 $|p(u)| < \epsilon$? 满足，转7°.

否则，转6°.

6° 修正罚因子， $M_i \leftarrow \rho M_i$, $u_i \leftarrow \rho u_i$,

$$i=1, \dots, l; j=1, \dots, m.$$

7° 检查终止条件，满足，停. 否则，转8°.

8° $u'(t) = u^*(t)$, 转1°.

思考：

(1) 罚函数算法中能否避免每次迭代都求一次极小化问题？

(2) 在判断目标泛函下降与否时，能否用 Hamilton 函数替代，即 $J(u)$ 与 $H(u, x, \lambda, t)$ 是否关于 x 有相同的升降性？

另外形式的迭代算法

考虑最优控制问题

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) \text{自由}, \quad u \in U. \end{array} \right\} \quad (8.26)$$

这里给出另一种形式的迭代算法:

0° 首先适当地给出控制函数 $u^0(t) \in U$, 求出相应的轨迹值 $x^0(t)$, 置 $i=1$.

1° 解协态变量 $\lambda^{i-1}(t)$ 的微分方程

$$\left. \begin{array}{l} d\lambda^{i-1}(t)/dt = -H_x(x^{i-1}(t), u^{i-1}(t), \lambda^{i-1}(t), t), \\ \lambda^{i-1}(t_f) = 0. \end{array} \right\} \quad (8.27)$$

2° 定义函数

$$\begin{aligned} K(x, u, \lambda, t, v, C) &= H(x, u, \lambda, t) + (u - v)^T C(u - v). \end{aligned} \quad (8.28)$$

其中 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_1, \dots, c_n \geq 0$.

对于 $i=1, 2, \dots$, 适当地选取 $c^i \geq 0$, 同时求得 $x^i(t)$, $u^i(t)$, $t \in (t_0, t_f)$ 满足

$$\begin{aligned} K(x^i(t), u^i(t), \lambda^{i-1}(t), t; u^{i-1}(t), c^i) &= H(x^i(t), u^i(t), \lambda^{i-1}(t), t) \\ &\quad + (u^i(t) - u^{i-1}(t))^T c^i (u^i(t) - u^{i-1}(t)) \\ &= \min_{u \in U} K(x^i(t), u, \lambda^{i-1}(t), t; u^{i-1}(t), c^i) \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{以及} \\ \frac{dx^i(t)}{dt} = f(x^i(t), u^i(t), t), \\ x^i(t_0) = x_0, \end{array} \right\} \quad (8.30)$$

3° 计算 $J(u^i) = \int_{t_0}^{t_f} L(x^i(t), u^i(t), t) dt,$

若 $J(u^i) > J(u^{i-1})$, 增大 c^i , 返回 2°;

若 $J(u^i) \leq J(u^{i-1})$ 则

$$i+1 \leftarrow i, c^{i+1} = ac^i (0.5 \leq a \leq 1),$$

转 1°. $\{c^i\}$ 有界, 若控制函数序列 $\{u^i(t)\}$ 收敛, 则停止计算.

从(8.29)可以看出, 每一步都把 H 代入 K 使之极小化. 因为在 K 中含有 $(u(t) - u^{i-1}(t))^T c^i (u(t) - u^{i-1}(t))$ 项 (这表示控制 $u(t)$ 和 $u^{i-1}(t)$ 的变化部分), 所以只要增大 c^i 就保证 $\|u^i(t) - u^{i-1}(t)\|$ 很小, 于是, 从计算一开始就保证了算法的稳定性. 此外, 计算接近收敛时, $\|u^i(t) - u^{i-1}(t)\|$ 很小, 在 H 上增加项的影响也很小, 因此 $K \rightarrow H$.

在一定条件下, 可以得到该方法的收敛性定理.

例 8.1 试求 $\min J(u) = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2) dt,$ (8.31)

$$\left. \begin{array}{l} \text{s.t.} \\ x_1 = x_2, x_1(0) = 0, \\ x_2 = -x_2 + u, x_2(0) = -1, \end{array} \right\} \quad (8.32)$$

$$x_2(t) - 8(t-0.5)^2 + 0.5 \leq 0. \quad (8.33)$$

解: 引入松弛变量 $\alpha(t)$, 使

$$x_2(t) - 8(t-0.5)^2 + 0.5 + 0.5\alpha^2(t) = 0. \quad (8.34)$$

微分上式, 且令 $\dot{\alpha}(t) = \alpha_1(t)$ 有

$$-x_2(t) + u(t) - 16(t-0.5) + \alpha\alpha_1 = 0, \quad (8.35)$$

所以 $u(t) = x_2 + 16(t - 0.5) - \alpha x_1$. (8.36)

把 $\alpha(t)$ 看成状态变量, (8.36) 代入 (8.32) 得到如下的无约束问题

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 + 16t - 8, x_2(0) = -1, \\ \dot{\alpha} = \alpha_1, \alpha(0) = -\sqrt{5}. \end{array} \right\} \quad (8.37)$$

$$J(u) = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005(x_2 + 16t - 8 - \alpha x_1)^2) dt.$$

$\alpha(0)$ 是式 (8.34) 中 $t=0$ 时所得, 另外, 把 α_1 看成新的控制变量,

用本节的方法去解这个问题, 结果如图 8.1, 8.2.

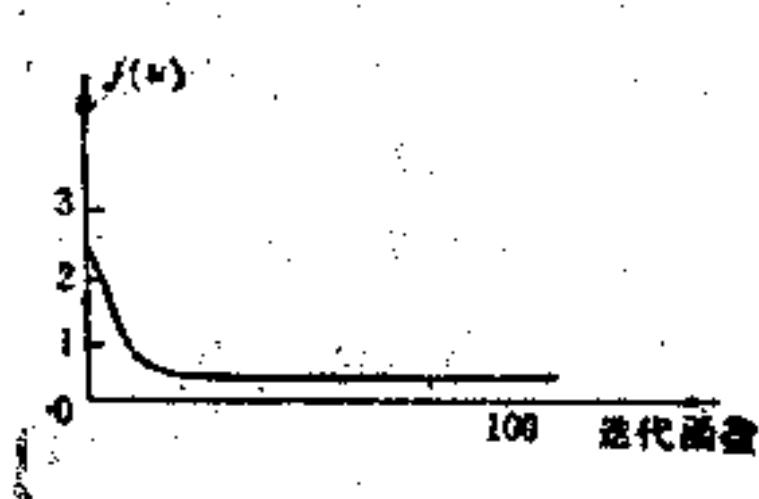


图 8.1

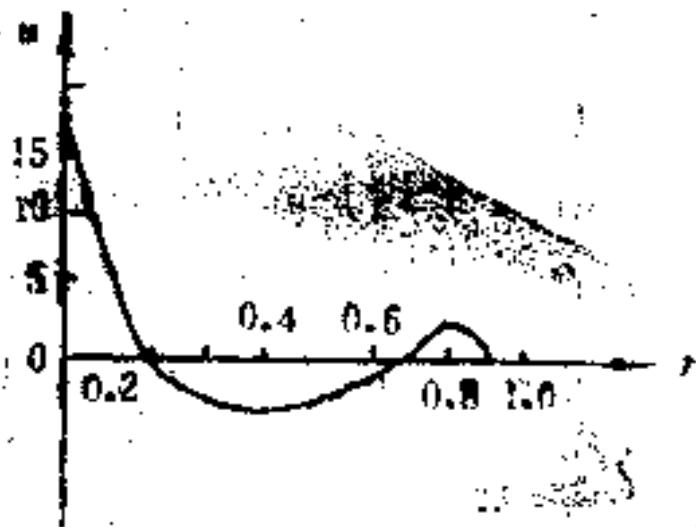


图 8.2

图 8.1 表示目标值, 重复多次后趋于平稳.

$$J^* = 0.1664291.$$

图 8.2 表示 $u^*(t)$.

第九章 动态规划法

1 引言

动态规划是 Bellman 50年代发展的，它是一种分步最优化方法，能够有效地解决多段决策问题。

多段决策过程是指某一过程按时间或空间顺序分为若干段，而决策序列是在这些阶段中依次作出的。例如经济发展规划的制定分成各个时期，而每个时期的目 标、措施等是依次作出的，使最终目标达到最优。我们国家的整体建设发展规划五年为一段，现在正处于第八个五年计划的实现中，当这个五年计划完成时，国家就会制定出第九个五年计划的目标和具体实施的方针、政策。又如军事战略中，多段决策的例子很多，三国时期，诸葛亮辅佐刘备，当时刘备力量很弱，没有地盘，诸葛亮为使刘备集团终成霸业，采取了一系列正确决策，使之步步取得胜利，即先是联吴抗曹，巧借东风大破曹军于赤壁，然后计取荆襄九郡，兵进西川，扩大了势力，形成了三国鼎立的局面。

可见，多段决策过程是决策人在具体情况下，进行系统分析，按照要求，将决策过程分成若干段，一步步地达到目标。见图9.1，这就是一个多段决策过程。易知，当各个时期的控制规律 $u_i (i=1, 2, \dots)$ 给出后，状态规律就随之确定了。离散系统过程显然一个多段决策过程，所以用动态规划求解离散最优控制问题是有效的。那么对于连续系统的

最优控制问题呢?

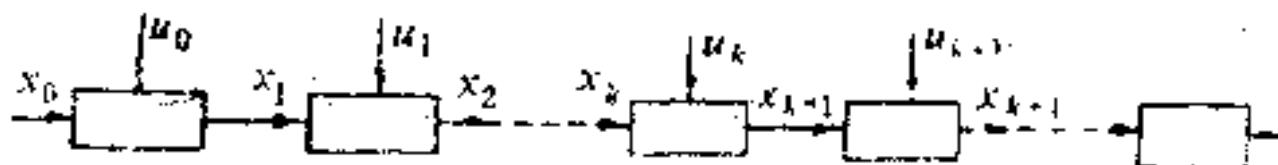


图9.1

如

$$\begin{aligned}\min J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{N-1} L(x(t_i), u(t_i), t_i) \Delta t_i,\end{aligned}$$

化为一个和式极限后，可以看出，连续系统最优控制是无限多段决策过程。

动态规划求解多段决策序列 $\{u_i\}$ 的思想基础是最优性原理。为使读者对动态规划有一个初步认识，这里考查一个简单的应用实例——最短路问题。

假设从 A 点到 E 点的可行运行路线如图，各站之间的运行时间标在图上，易知从 A 到 E 的可行路线有好几条，现求从 A 点到 E 点的最短路线。

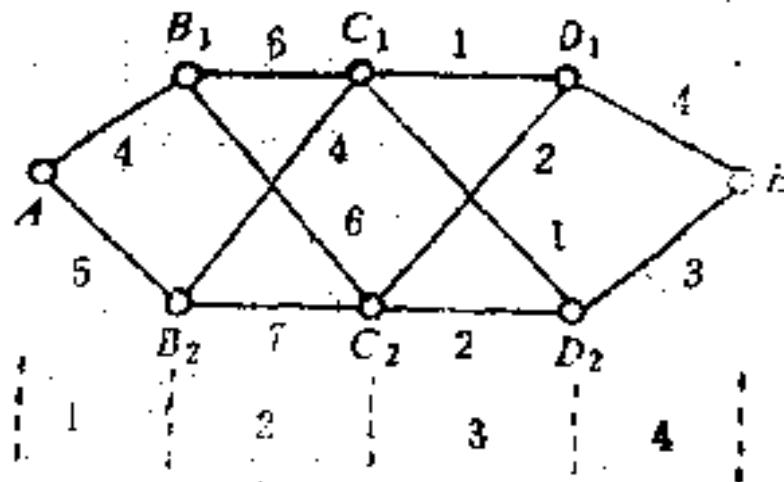


图9.2

可将运行路线从 A 到 E 划分为四段，如图9.2求最短路问题化成一个四段决策，即在每一段中做一个最优决策，选

择一个最优目标，各段决策作完后，就会得到总体目标最优值，具体措施如下：

(1) 求出 D_1, D_2 到 E 的最短路线。从图9.3中看出：路线 $D_1E=4$ ，路线 $D_2E=3$ ，显示在图中()里。

(2) 求 C_1, C_2 到 E 的最短路线 $C_1 \rightarrow E$ ；从 C_1 到 E 必经过 D_1 点或 D_2 点，而 D_1, D_2 到 E 的最短路线已经求出

$$\begin{aligned}\min(C_1 \rightarrow E) &= \min\{C_1D_1E, C_1D_2E\} \\ &= \min\{1+4, 1+3\} \\ &= 1+3 = C_1D_2E.\end{aligned}$$

C_1 到 E 的最短路线是 C_1D_2E ，时间为4。

同理

$$\begin{aligned}\min(C_2 \rightarrow E) &= \min\{C_2D_1E, C_2D_2E\} \\ &= \min\{2+4, 2+3\} \\ &= 2+3 = C_2D_2E.\end{aligned}$$

C_2 到 E 的最短路线为 C_2D_2E ，时间为5，标于图9.4上，共用加法4次，比较2次。

(3) B_1, B_2 到 E 的最短路线

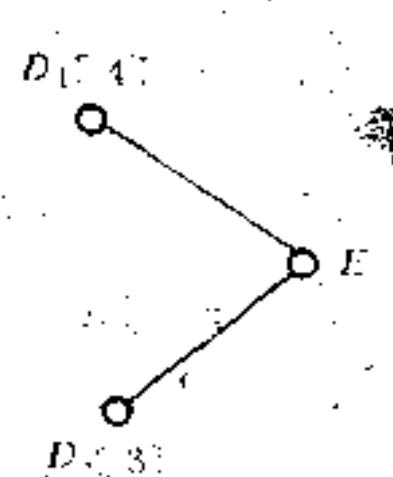


图9.3

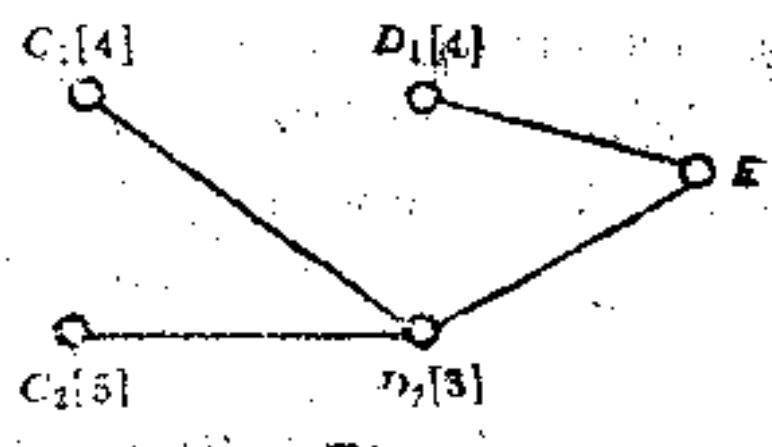


图9.4

$$B_1 \rightarrow E, \min\{B_1C_1 + \min C_1 \rightarrow E, B_1D_1 + \min C_2 \rightarrow E\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \min\{B_1C_1D_2E, B_1C_2D_2E\} \\
 &= \min\{6+4, 6+5\} = 10 = B_1C_1D_2E.
 \end{aligned}$$

B_1 到 E 的最短路线为 $B_1C_1D_2E$, 用时为 10.

$$\begin{aligned}
 B_2 \rightarrow E: \quad &\min\{B_2C_1 + \min C_1 \rightarrow E, B_2C_2 + \min C_2 \rightarrow E\} \\
 &= \min\{B_2C_1D_2E, B_2C_2D_2E\} \\
 &= \min\{4+4, 7+5\} = 8 = B_2C_1D_2E
 \end{aligned}$$

B_2 到 E 的最短路线为 $B_2C_1D_2E$, 时间为 8. 共用加法 4 次(图 9.5), 比较 2 次.

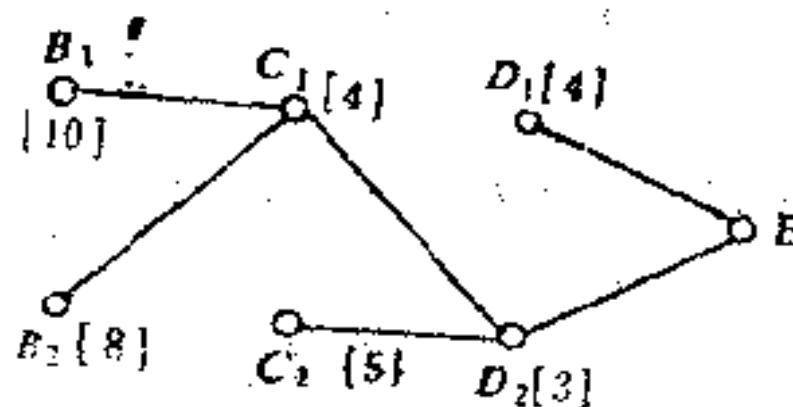


图 9.5

(4) 求 A 到 E 的最短路线

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow E: \quad &\min\{A-B_1 + \min(B_1 \rightarrow E), A-B_2 + \min \\
 &(B_2 \rightarrow E)\} \\
 &= \min\{AB_1C_1D_2E, AB_2C_1D_2E\} \\
 &= \min\{4+10, 5+8\} = 13 = AB_2C_1D_2E,
 \end{aligned}$$

故得 A 到 E 的最短路线为 $AB_2C_1D_2E$, 用时 13. 共用加法 2 次, 比较 1 次.

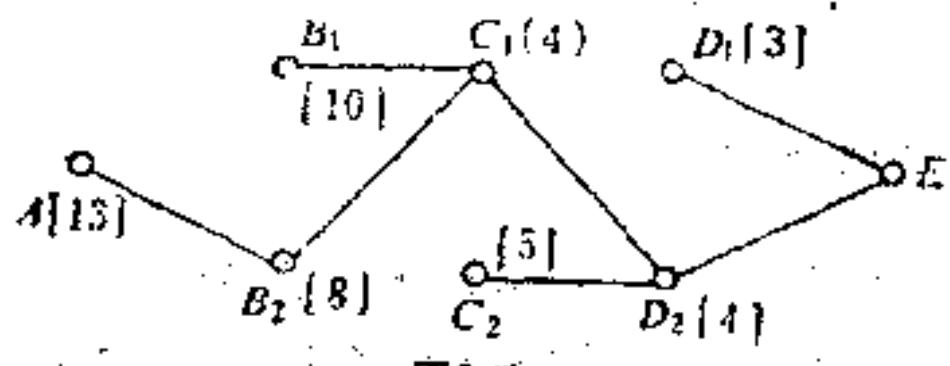


图 9.6

这种从后向前，在每段最优的基础上向前递推的方法就是动态规划法。从每步来看，在得到该阶段的最优路线时，前面各段的路线也达到了最优。图9.6给出了各点到末点E的最短路线。

我们使用的最优性原理，在这个例子中的体现是：如果A的邻点为 B_1, \dots, B_n ，那么

$$\min(A \rightarrow E) = \min\{AB_1 + \min(B_1 \rightarrow E), \dots, AB_n + \min(B_n \rightarrow E)\}. \quad (9)$$

E为末点，这似乎是极显然的，严格定义及证明将在第2节给出。

下面比较动态规划法与穷举法的工作量。

动态规划法：加法10次，比较5次。

穷举法： $A \rightarrow E$ 共有8种路线，每条路线都计算出来，则共做 $8 \times 3 = 24$ 次加法，比较7次。

动态规划省去了许多工作量，这是因为在逆向递推时，利用的是前段的最优路线，省去了许多不必要的计算。如：

C_1 到E的最短路线为 C_1D_2E ，所以只需计算 $B_1C_1D_2E$ ，而没有必要去求 $B_1C_1D_1E$ 。由于

$$|C_1D_1E| > |C_1D_2E|,$$

则 $|B_1C_1D_1E| > |B_1C_1D_2E|$ 。

C_1D_1E 在前面被废弃，对后面的最优路线毫无用处，同样不用考虑。

2 最优性原理

最优性原理是动态规划的基本原则，回顾上一节的例题及(9)式，可知对一条最短路线 $AA_1A_2 \dots A_nB, A_i (i=1, 2,$

\dots, n) 到 B 的最短路线必是

$$A; A_{i+1} \dots A_n B$$

同样，如果一个最佳轨迹被分成两份，那么后一部分本身是最佳的。对此，可以做简单的证明。如图9.7假定线路 B 不是最佳的，即从

t' 到 t_f 的最佳轨迹不是 B ，而是另一曲线 B' ，那么 B' 路线所耗代价要小，由此有 AUB' 必然比 AUB “优”，形成矛盾。所以 B 是 $t' \rightarrow t_f$ 的最佳轨迹。

最优性原理：多级决策过程的最优策略具有以下性质，即不论初始状态和初始决策如何，其余决策对于由初始决策所形成的状态来说，必构成一个最优策略。

下面对离散最优制的最优控性原理，连续最优控制的最优性原理分别进行证明。

对于离散系统：(如图9.8)其最优性原理为：无论 x_k 及

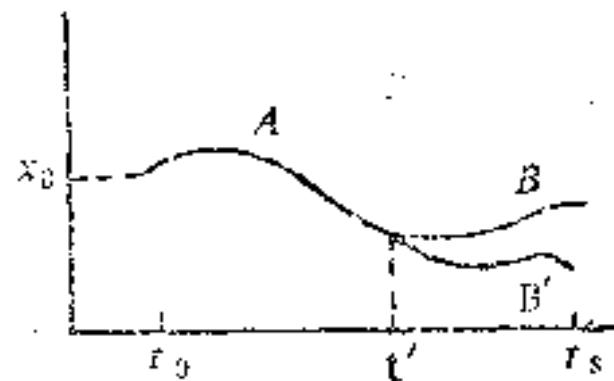


图9.7

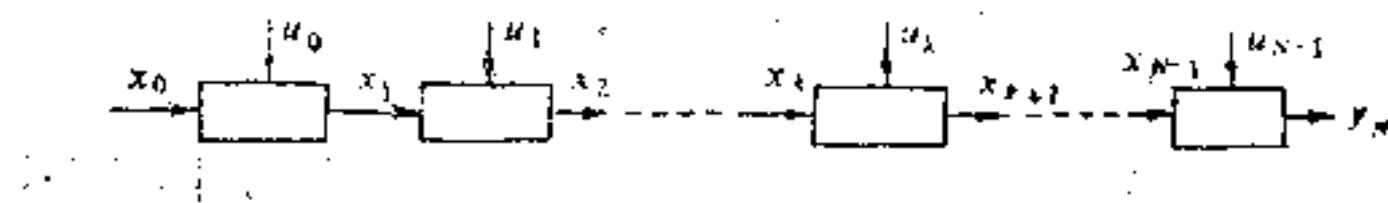


图9.8

前 k 段控制规律如何，后部子过程的控制规律 $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{N-1}$ 对 x_k 说必定也是最优的。

证明：反设 u_k, \dots, u_{N-1} 关于 x_k 不是最优控制序列，也就是说，存在另一组控制序列 u'_k, \dots, u'_{N-1} 不同于 u_k, \dots, u_{N-1} ，

且使目标达到最优，设求 $\min J(u)$ ，即有

$$J(x_k, u_k, \dots, u_{N-1}) > J(x_k, u'_k, \dots, u'_{N-1}),$$

构造一个新的控制序列如下：

$$u_i^* = \begin{cases} u_i, & i=0, \dots, k-1 \\ u'_i, & i=k, \dots, N-1 \end{cases}$$

显然有

$$\begin{aligned} J(x_0, u_0^*, \dots, u_{N-1}^*) &= \sum_{i=0}^{k-1} L(x_i, u_i^*, i) + J(x_k, u'_k, \dots, u'_{N-1}) \\ &< \sum_{i=0}^{k-1} L(x_i, u_i, i) + J(x_k, u_k, \dots, u_{N-1}) \\ &= J(x_0, u_0, \dots, u_{N-1}). \end{aligned}$$

所以 u_0, \dots, u_{N-1} 并非最优控制序列，形成矛盾。故最优化原理成立。

对于连续系统

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt,$$

其最优化原理为：设最优控制 $u^*(t)$, ($t_0 \leq t \leq t_f$) 将系统的轨迹 $x^*(t)$ 由初始状态 x_0 转移到终端状态 $x^*(t_f)$; 区间 (t_1, t_2) 是 (t_0, t_f) 的一部分区间。满足 $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$ 则 $u^*(t)$ 是在区间 (t_1, t_2) 上把 $x^*(t_1)$ 转移到 $x^*(t_2)$ 的最优控制。

证明：设 $u^*(t), t \in (t_1, t_2)$ 上不是最优控制，则存在 控制

$$\hat{u}(t) \neq u^*(t), t \in (t_1, t_2).$$

将 $x^*(t_1)$ 转移到 $x^*(t_2)$ ，且

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, u^*, t) dt > \int_{t_1}^{t_2} L_1(x, \hat{u}, t) dt,$$

构造一个新的控制函数:

$$V(t) = \begin{cases} u^*(t), & t_0 \leq t < t_1 \text{ 和 } t_2 < t \leq t_f, \\ \hat{u}(t), & t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

于是 $J(V) < J(u)$, 且将状态 $x(t)$ 由 x_0 转移到 $x^*(t_f)$, 这与 $u^*(t), t \in (t_2, t_f)$ 为最优控制发生矛盾. 因此, $u^*(t)$ 在 (t_1, t_2) 上也是最优控制.

3. Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

这一节讨论连续控制系统的动态规划
最优控制问题:

$$\left. \begin{array}{l} \min \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt = J, \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq t_f, \\ N(x(t_f), t_f) = 0, t_f \text{ 未定.} \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

该问题可以通过离散化方法化为一个多阶段决策问题, 用动态规划求出最优解, 遥近连续时间问题的最优控制. 当离散化时间间隔趋于零时, 两者趋于一致.

设存在最优控制, 由最优化原理, 对每一初态 (x, t) 都有一个相应的最优控制 $u(t)$, 使状态达到目标集 $N(x(t_f), t_f) = 0$, 性能指标 (目标泛函) $J(x, t)$ 达到极小值.

$$\hat{J}(x, t) = \min_{u(t) \in U} \{ \varphi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x, u, t) dt \} \quad (9.2)$$

满足边界条件:

$$\hat{J}(x(t_f), t_f) = \varphi(x(t_f), t_f), \quad (9.3)$$

$$N(x(t_f), t_f) = 0.$$

当离散化时间间隔 h 足够小时, 动态系统及目标可化为

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \dot{x}h + o(h) \\ &= x + f(x, u, t)h + o(h) \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} J &= \varphi(x(t_f), t_f) + h \sum_{k=0}^{N-1} L(x(t_k), u(t_k), t_k) + o(h) \\ &\quad + \nu^T N(x(t_f), t_f), \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$J(x(t_f), t_f) = \varphi(x(t_f), t_f) + \nu^T N(x(t_f), t_f),$$

即从 (x, t) 出发, 在 $u(t) \in U$ 作用下, 经一短时间间隔 h 到达状态

$$(x + hf(x, u, t) + o(h), t+h), \quad (9.6)$$

然后用最优控制 $\hat{u}(t)$ 把状态(9.6)转移到目标集中, 得

$$\begin{aligned} \hat{J}(x, u, t) &= \hat{J}(x + hf(x, u, t) + o(h), t+h) \\ &\quad + L(x, u, t)h + \epsilon(h^2), \end{aligned} \quad (9.7)$$

最优目标为

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, t) &= \min_{u(t) \in U} \{ \hat{J}(x + hf(x, u, t) + o(h), t+h) \\ &\quad + hL(x, u, t) + \epsilon(h^2) \}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

假设 \hat{J} 连续可微,

$$\begin{aligned}\hat{J}(x+hf(x, u, t) + o(h), t+h) &= \\ &= \hat{J}(x, t) + (\partial \hat{J} / \partial x)^T f(x, u, t) \cdot h + (\partial \hat{J} / \partial t) h \\ &\quad + \epsilon'(h^2),\end{aligned}$$

$$\text{故 } (-\partial \hat{J} / \partial t)h = \min_{u(t) \in U} \{(\partial \hat{J} / \partial x)^T f(x, u, t) h + hL(x, u, t) + \epsilon(h^2)\},$$

两边同除 h , 并令 $h \rightarrow 0$ 有

$$-\partial \hat{J} / \partial t = \min_{u(t) \in U} \{(\partial \hat{J} / \partial x)^T f(x, u, t) + L(x, u, t)\}$$

方程(9.9)就是动态规划的连续形式.

$$\text{令 } \lambda(t) = \partial \hat{J}(x, t) / \partial x; \quad (9.10)$$

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t); \quad (9.11)$$

那么(9.9)式变为

$$-\partial \hat{J} / \partial t = \min_{u(t) \in U} H(x, u, \lambda, t); \quad (9.12)$$

$$\text{易知 } \partial H / \partial \lambda = f(x, u, t) = x; \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= d(\partial \hat{J} / \partial x) / dt \\ &= \partial^2 \hat{J} / \partial x \partial t + (\partial^2 \hat{J} / \partial x^2) \dot{x} \\ &= \partial(-\partial \hat{J} / \partial t) / \partial x + (\partial^2 \hat{J} / \partial x^2) \dot{x} \\ &= \partial(-L(x, u^*, t)) / \partial x - \lambda^T f(x, u^*, t)\end{aligned}$$

$$+ \partial^2 \hat{J} / \partial x^2) \dot{x}$$

$$= -\partial L(x, u^*(t)) / \partial x + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} = -\partial H / \partial x, \quad (9.14)$$

$$\lambda(t_f) = \partial \hat{J} / \partial x|_{t=t_f} = (\partial \varphi / \partial x + v^T \partial N / \partial x)|_{t=t_f}, \quad (9.15)$$

$$\partial \hat{J} / \partial x(t_f, t_f) / \partial t_f = \partial \varphi / \partial t_f + v^T \partial N / \partial t_f. \quad (9.16)$$

由式(9.12)~(9.16)得到下面的结论.

定理9.1 控制系统满足 $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$, 把状态从任一初态转移到满足边界条件

$$N(x(t_f), t_f) = 0, \quad (9.17)$$

使目标泛函

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

达到最优, 即

$$\hat{f}(x, t) = \min_{u(t)} \{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \},$$

则有:

$$(i) \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad (9.17)$$

$$\lambda(t) = -\partial H / \partial x; \quad (9.18)$$

(ii) 满足H-J-B方程

$$-\partial \hat{J} / \partial t = \min_{u(t)} H(x, \lambda, u, t); \quad (9.19)$$

(iii) 终端条件

$$\lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f) + v^T \partial N / \partial x(t_f), \quad (9.20)$$

$$H|_{t=t_f} + \partial \varphi / \partial t_f + v^T \partial N / \partial t_f = 0, \quad (9.21)$$

$$N(x(t_f), t_f) = 0. \quad (9.22)$$

由动态规划推出的极值必要条件与极小值原理是相同的，但应引起注意的是，式(9.19)给出了最优控制的充分条件，这一点在推导过程中可以得出。将(9.19)式具体写出来就是

$$\partial \hat{J} / \partial t + L(x^*, u^*, t) + \sum_{i=1}^n \partial \hat{J} / \partial x_i^* f_i(x^*, u^*, t) = 0.$$

这是一个偏微分方程，而且是非线性的。边界条件为

$$\partial \hat{J} / \partial x|_{t=t_f} = \partial \varphi / \partial x(t_f) + v^T \partial N / \partial x(t_f). \quad (9.24)$$

$$\partial \hat{J} / \partial t|_{t=t_0} = \partial \varphi / \partial t + v^T \partial N / \partial t. \quad (9.25)$$

$$N(x(t_f), t_f) = 0. \quad (9.26)$$

如果(9.23)式至(9.26)式可以解出的话，则可以求出最优控制，但这一点往往做不到。另外，也可以求出满足必要条件的“最优控制”去利用(9.23)式进行检验。

4 算例

例9.1 已知轨线 $x(t)$ 从 $x(t_0) = x_0$ 到 $x(t_f) = x_{f1}$ ，并使目标性能泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$$

达到极值，求 $x(t)$ 所应满足的方程。

解：这是一变分问题。首先将其化成一个控制问题。令

$$u(t) = \dot{x}(t),$$

则 $J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$,

那么, 由动态规划推出的结论, 有

$$\begin{cases} d(\partial \hat{J}/\partial x)/dt = -\partial L(x^*, u^*, t)/\partial x, \\ -\partial \hat{J}/\partial t = \min_u \{L(x, u, t) + (\partial \hat{J}/\partial t)^T u\}. \end{cases}$$

由于关于 u 达到极小, 故有

$$\partial L(x^*, u^*, t)/\partial u + \partial \hat{J}/\partial t = 0,$$

从而 $\frac{\partial L(x^*, u^*, t)}{\partial x} + \frac{d}{dt}(\partial L(x^*, u^*, t)/\partial u) = 0$.

$$\frac{\partial L(x^*, u^*, t)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right) = 0.$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right) = 0.$$

此即求 Euler-Lagrange 方程.

例9.2 求 $\min J = \int_0^t (x^2 + x^4/2 + u^2) dt$, $x=u$ 的解.

$$\text{解: 由 } -\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \min_u (x^2 + \frac{x^4}{2} + u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial u} u),$$

$$\text{及由 } \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right) = 0,$$

$$x' = x + u.$$

于是有 $2u + \partial J^*/\partial x = 0$, $u^* = -(1/2)(\partial J^*/\partial x)$

$$\begin{aligned} \text{所以 } -\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial J^*}{\partial x}\right) \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^2. \end{aligned}$$

边界条件 $J^*(x(t_f), t_f) = 0$.

该偏微分方程是可解的，但太复杂。

例 3 求线性二次型问题

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2} x_f^T \delta x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt, \\ x &= Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

的解。

解：由H-J-B方程

$$-\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \min_u \left[\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + (Ax + Bu)^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right]$$

可知由右边达到极小，

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + (Ax + Bu)^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right] = 0$$

$$\text{即 } R u + B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} = 0, u^* = -R^{-1} B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x},$$

将 u^* 代入 H-J-B 方程，得

$$-\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \frac{1}{2} x^{*T} Q x^*$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(-R^{-1} B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right)^T R \left(-R^{-1} B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right) \\
& + \left(Ax^* + B \left(-R^{-1} B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right) \right)^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \\
= & \frac{1}{2} x^{*T} Q x^* - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \right]^T B R^{-1} B^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x} \\
& + x^{*T} A^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

不妨令 $\hat{J}(x^*) = \frac{1}{2} x^{*T} P(t) x^*$.

从而 $\frac{\partial J^*}{\partial x} = P(t)x^*, u^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)x^*$.

又 $\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (x^T p x) = \frac{1}{2} x^T \dot{P} x$

且 $\frac{d}{dt} (x^T p x) = \frac{\partial (x^T p x)}{\partial x} x + \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}$

所以 $\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \frac{d}{dt} (x^T p x) - \frac{\partial (x^T p x)}{\partial x} x$
 $= 2x^T \dot{p} x + x^T \ddot{p} x - 2(\dot{p} x)^T x = x^T \ddot{p} x$

故有

$$-\frac{1}{2} x^{*T} \dot{p} x^* = \frac{1}{2} x^{*T} Q x^* - \frac{1}{2} x^{*T} p(t) B R^{-1} B^T p(t) x^*$$

$$+ x^* A^T p(t) x^*,$$

$$\dot{p}(t) = p^T(t), \quad A^T p = \frac{1}{2} (A^T P + P A),$$

$$-\dot{p} = Q + A^T p(t) + p(t) A - p(t) B R^{-1} B^T p(t).$$

这是微分 Riccati 方程，求解方法很多，请见吴受章的《应用最优控制》。

5 附记

(1) 用动态规划求解多段决策过程的寻优问题是比较简单的，其实质是，以最优化原理为基本原则，将一个 N 决策问题化为 N 个一段决策问题，动态规划用以求解离散最优控制问题是简明的，但限于本书范围，对此没做更多的阐述。

(2) 一般说来，只有在最简单的情况下，可用动态规划求出解析解，其它情况则必须使用数值计算方法，但计算工作量会很大，对于高维问题，会出现“维数灾难”，这是其很大的弱点，为了减少维数，人们用多项式近似来弥补，详见参考文献(15)。

(3) 本章沟通了动态规划与极小值原理的关系。

(4) 求解非线性偏微分方程——Hamilton-Jacobi-Bellman 方程是非常困难的，目前尚未有较好的算法。

6 数学规划法简介

数学规划是求解静态最优化问题的有效方法，它同极小值原理及动态规划一样，也可用来求解动态的最优控制问

题。本书介绍的数学规划法，主要针对一些极小值原理和动态规划不易解决的问题，采取离散化的方法，将原动态问题化为一个相应的近似静态问题，再用数学规划的有效算法进行求解。

关于一个连续系统的最优控制问题的离散在第一章中已经讲过，这里考察动态系统

$$\left. \begin{array}{l} \min J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(x, u, t) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \\ h_1(x(t), u(t), t) \geq 0, \\ h_2(x(t), u(t), t) = 0, \\ x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m. \end{array} \right\} \quad (9.27)$$

一般地讲，(9.27)的离散形式为

$$\left. \begin{array}{l} \min J = \varphi(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k, k), \\ \text{s.t. } \quad x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k, k), \\ \quad x_0 = x_0, \\ \quad h_1(x_k, u_k) \geq 0, \\ \quad h_2(x_k, u_k) = 0, \quad k=0, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

这种离散是将离散步长视为1得到的，动态系统方程采用的是Euler公式离散的，因此可以提出下面的问题。

- (1) N 是否越大越好，即分段是否越细越好？回答应该是肯定的，但 N 越大，变量就越多，维数就越高，计算起来越复杂；
- (2) 离散形式什么样最好？前面的形式是比较简单的，

而且具有递推形式，适合用动态规划求解。

(3) 可以把离散后的问题看成下面的形式，即

$$\begin{aligned} & \min F(x), \\ \text{s.t. } & h(x) \geq 0. \end{aligned} \quad \{ \quad (9.28)$$

这是一个大系统问题。

(4) 求出各节点的控制值 u_k 后，可采用插值的手段，形成一条近似最优控制曲线。

有很多大规模非线性规划算法，如著名的广义简约梯度法 (GRE)，可用来求解问题 (9.28)，可参阅参考文献 [8], [9]。

第十章 多重打靶法

本章是求解最优控制问题的直接方法的继续，采取的手段是参数化及打靶，最后由非线性规划算法求解，它不同于单纯离散化方法，而是将区间分段，利用参数化方法，在各段逼近控制值，借鉴两点边值问题中的多重打靶技术，在节点处实行打靶，并提出了匹配原则，最后求出参数向量，近似逼近最优控制。近几年来发表的关于多重打靶法的文章，使人们重新开始注意直接方法，也使一向沉寂的控制计算方面出现了生机。

1 参数最优化方法

1.1 参数因子法

考察最优控制问题

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0, \\ t_f \text{ 固定, } x(t_f) \text{ 自由.} \end{array} \right\} \quad (10.1)$$

这是一个无约束最优控制问题，我们希望能不借助于极小值原理，直接去求最优控制和最佳轨迹。不妨设 $u(t) \in C(t_0, t_f)$, $u(t)$ 的形式预先是无法知道的，但是否能用一个带参数的简单函数去近似 $u(t)$ ，使问题(10.1)形式明朗而易于求解呢？

维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 给出了下面的定理.

定理10.1 设 $f(x) \in C(a, b)$, 则对任何 $\epsilon > 0$, 总存在一个代数多项式 $P(x)$, 使

$$\|f(x) - P(x)\|_{\infty} < \epsilon$$

在 (a, b) 上一致成立.

该定理在数值分析中已经学过, 柏恩斯坦1912年给出了它的一个构造性证明.

对于 $u(t) \in (t_0, t_f)$, 可以选择适当的简单函数列 $\{g_i(t)\}$ 及参数因子 $\{\alpha_i\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i g_i(t) = u(t). \quad (10.2)$$

一般地讲, (10.2)式左端中多项式 $g_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, \dots$.

实际上, 我们不能达到上面这个要求, 在求解计算中, 只能给出 $u(t)$ 的有限近似形式

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(t) \quad (10.3)$$

用 $\tilde{u}(t)$ 去替代 $u(t)$, 状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \tilde{u}, t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

从(10.4)中解出

$$x(t) = x(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad (10.5)$$

代入目标

$$\min J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = R(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (10.6)$$

求解静态最优化问题(10.6), 得到被求参数 $\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*$.

从而有近似最优控制和最佳轨迹.

$$u^*(t) = \tilde{u}(\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*, t),$$

$$x^*(t) = x(t, \alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*).$$

对于有控制约束的情况, $u(t) \in U$, (10.6) 式就会变成一个含有无穷维约束的优化问题.

$$\min J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = R(\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad (10.6')$$

$$\text{s.t. } u(\alpha_1, \dots, \alpha_N, t) \in U, t \in (t_0, t_f).$$

这种情形下, 只能选择具有一定代表性的离散点, 如 $t_1, \dots, t_s \in (t_0, t_f)$ 代入 (10.6') 式构成 s 维约束, 成为一个约束的静态优化问题, 由非线性规划解出.

不如人意的是状态方程 (10.4) 往往不能解析求出 (10.5) 式, 而目标项中的积分也不一定直接求得, 这就需要引进数值积分与数值微分进行离散.

(1) 选择一组离散点, 数值微分求解初值问题 (10.4) 得到这些点上的状态值;

(2) 在同样的点上对目标数值积分, 得到目标值;

(3) 同样在这些点上使控制约束满足, 不断调整 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, 使目标达到极小.

例10.1 求解最优控制问题

$$\min J(u) = 10x^2(t_f) + \int_0^{t_f} (10x^2 + u^2) dt,$$

$$\dot{x} = -0.2x + 10tgh u,$$

$$x(0) = 5, \quad t_f = 0.5.$$

解: 取 $\tilde{u}(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$.

用共轭方向法计算结果如下：

次数	0	1	2	3	4
α_1	-3	-3.412	-2.835	-2.888	-2.879
α_2	6	4.975	4.756	4.756	4.717
α_3	0	0.341	-2.754	-3.121	-3.154
J	49.898	41.391	41.685	41.633	41.632

次数	5	6	7	8	9
α_1	-2.730	-2.764	-2.596	-2.591	-2.591
α_2	3.875	3.091	1.494	1.407	1.406
α_3	-1.970	0.198	3.159	3.322	3.329
J	41.625	41.606	41.596	41.596	41.596

得 $\alpha_1^* = -2.591$, $\alpha_2^* = 1.406$, $\alpha_3^* = 3.329$,

$$u^*(t) \approx -2.591 + 1.406t + 3.329t^2,$$

$$J^* = 41.596.$$

思考：(1) $x(t_f)$ 有约束的情形，该如何引进参数化方法？

(2) 考虑 t_f 自由的情况；

(3) 讨论本小节算法的细节问题。

这是求解最优控制问题的近似方法，由此可知当选定好近似形式后， $u(t)$ 就基本确定，对较复杂的 $u(t)$ 会出现不理想的情况。

1.2 参数向量法

参数因子法是针对一维情形，即 $u(t)$ 为 t 的一维函数时使用的，多维的情况下，相应地有参数向量法。设

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T,$$

仿前可取参数 $\alpha_{ij}, i=1, \dots, r; j=1, \dots, N$, 使

$$\tilde{u}_i(t) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}t + \dots + \alpha_{iN}t^{N-1}, \\ i=1, \dots, r.$$

这样做是可以的, 对于能解析求出的情况应该选用这种方式, 对于离散的情况, 可以采用如下的方法, 即:

(1) 选取几个离散点, 在离散点 $t_1, \dots, t_s \in (t_0, t_f)$ 上给出 $u(t)$ 的估计值 $\bar{u}(t_1), \dots, \bar{u}(t_s)$;

(2) 通过 $t_i, \bar{u}(t_i), i=1, \dots, s$ 做插值函数近似 $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t_1, \dots, t_s, \bar{u}(t_1), \dots, \bar{u}(t_s))$;

(3) 将 $\tilde{u}(t)$ 代入控制问题, 这里 $\bar{u}(t_1), \dots, \bar{u}(t_s)$ 便是参数向量;

(4) 不断修正 $\tilde{u}(t_i), i=1, \dots, s$, 使目标达优.

2 多重打靶法

波恩大学的H·G·Bock与K·J·Plitt提出了求解最优控制问题的多重直接打靶法, 其结果是建立在控制参数化、多重打靶及序列二次规划技术上的.

2.1 控制参数化

考虑约束最优控制问题

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt, \\ x = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (t_0, t_f), \\ r(x(t_0), x(t_f)) = 0 \quad (\geq 0), \\ g(t, u(t)) \geq 0, \quad t \in (t_0, t_f). \end{array} \right\} \quad (10.7)$$

(10.7)式是一个约束只有控制变量的 Lagrange 问题，一般的情形可以相应推出，留给读者思考。

(1) 划分区间 (t_0, t_f) ，节点为

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = t_f, \quad (10.8)$$

于是将 (t_0, t_f) 划成了 m 个子区间。

(2) 控制变量参数化

在各节点处给出控制的估计值

$$p_0, \dots, p_m, p_i \in R^q (i=1, \dots, m)$$

是参数，在区间 $I_j = (t_j, t_{j+1}) (j=0, \dots, m-1)$ 上构造函数 $\varphi_j(t, p_0, \dots, p_m)$ 逼近这段上的控制函数，于是

$$u(t)|_{I_j} = \varphi_j(t, p_0, \dots, p_m), \quad j=0, \dots, m-1. \quad (10.9)$$

(3) 子区间打靶

在 $I_j = (t_j, t_{j+1})$ 上，相应地赋初值与 $x(t_j)$ ，

$$\begin{aligned} x(t_j) &= s_j, \quad j=0, \dots, m-1, \\ \dot{x} &= f(t, x, \varphi_j), \\ x(t_j) &= s_j, \quad t \in I_j, \end{aligned} \quad \} \quad (10.10)$$

得 $x(t, s_j, \varphi_j)$ 。

(4) 匹配条件

为保证轨迹解的连续性，有匹配条件 (matching conditions)：

$$x(t_{j+1}, s_j, \varphi_j) = s_{j+1}. \quad (10.11)$$

(10.7) 式可化成形式：

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(t, x(t, s_j, \varphi_j), \dot{x}(t, s_j, \varphi_j)) dt, \\ \text{s.t. } r(s_0, s_m) = 0 \quad (\geq 0), \\ g(p_j) \geq 0, \quad j = 0, \dots, m, \\ h_j(s_j, s_{j+1}, \varphi_j) = x(t_{j+1}, s_j, \varphi_j) - s_{j+1} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

(5) 约束最优化问题

令参数向量 $y = (p_0, \dots, p_m, s_0, \dots, s_m)$.

(10.12) 中的目标积分项可以积出来(包括数值积分),
于是有

$$\left. \begin{array}{l} \min F_1(y), \\ \text{s.t. } F_2(y) = 0, \\ F_3(y) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (10.13)$$

这是一个标准的约束优化问题, 得到了(10.12)式, 第一步工作就完成了.

2.2 用序列二次规划方法求解

为求得(10.13)的解 y^* , 采取迭代步骤:

$$y^{k+1} = y^k + \alpha^k \Delta y^k. \quad (10.14)$$

其中, y^k 是 y 的第 k 次迭代值, Δy^k 是迭代方向, α_k 为步长.

为得到 Δy^k , 由约束变尺度法的思想, Δy^k 是下面二次子规划的解.

$$\left. \begin{array}{l} \min \nabla F_1^k \Delta y + \frac{1}{2} \Delta y^T Q_k \Delta y, \\ \text{s.t. } F_2^k + \nabla F_2^k \Delta y = 0, \\ F_3^k + \nabla F_3^k \Delta y \geq 0. \end{array} \right\} \quad (10.15)$$

其中目标项为(10.13)目标Lagrange函数的二次逼近, 约束

为(10.13)约束的线性展开。

Q^k 的修正可使用BFGS方法。

2.3 降阶子问题

(10.15)式的变量数是庞大的,但根据多重打靶的特点,可以实现降阶。

注意(10.12)式中的匹配条件

$$s_{j+1} = x(t_{j+1}, s_j, p_0, \dots, p_m) + h_j, \quad (10.16)$$
$$j = 0, \dots, m-1,$$

线性展开(10.16)有

$$\Delta s_{j+1} = (\partial x(t_{j+1}, s_j, p_0, \dots, p_m) / \partial s_j) \Delta s_j$$
$$+ \sum_{i=0}^m (\partial x / \partial p_i) \Delta p_i + h_j. \quad (10.17)$$

从(10.17)式看出

Δs_{j+1} 可由 Δs_j 及 Δp_i ($i = 0, \dots, m$) 表出:

$$\Delta s_1 = \frac{\partial x(t_1, s_0, p_0, \dots, p_m)}{\partial s_0} \Delta s_0$$
$$+ \sum_{i=0}^m \frac{\partial x(t_1, s_0, p_0, \dots, p_m)}{\partial p_i} \Delta p_i + h_0,$$

即 Δs_1 可由 Δs_0 和 Δp_i ($i = 0, \dots, m$) 线性表出; Δs_2 可由 Δs_1 和 Δp_i ($i = 0, \dots, m$) 表出, 递推可得 Δs_2 可由 Δs_0 和 Δp_i ($i = 0, \dots, m$) 线性表出。

同理推出:

Δs_j 皆可由 Δs_0 及 Δp_i ($i = 0, \dots, m$) 线性表出 ($j = 1, 2, \dots, m$)。

因此, 二次子规划(10.15)可实现降阶。

原变量 $\Delta y = (\Delta s_0, \dots, \Delta s_m, \Delta p_0, \dots, \Delta p_m)$, 降阶后仅依赖 Δs_0 和 $\Delta p_i (i=0, \dots, m)$.

降阶子问题:

$$\begin{aligned} & \min \left[b^T \begin{pmatrix} \Delta s_0 \\ \Delta p \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta s_0 \\ \Delta p \end{pmatrix}^T \bar{Q}_i \begin{pmatrix} \Delta s_0 \\ \Delta p \end{pmatrix} \right], \\ & \text{s.t. } \left. \begin{aligned} V_1 + E^* \Delta s_0 + \sum_{i=0}^m E_i^* \Delta p_i &= 0, \\ V_2 + E_1^* \Delta s_0 + \sum_{i=0}^m E_1 i^* \Delta p_i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (10.18)$$

其中 $b, \bar{Q}^*, V_1, V_2, E^*, E_1^*, E^i, E_1 i^* (i=0, \dots, m)$ 可由原二次子规划的参数及递推式 (10.17) 得到, 而

$$\Delta p = (\Delta p_0, \dots, \Delta p_m)^T.$$

引理 10.1 设 $(\Delta s_0, \Delta p)$ 为降阶子问题的解, μ_1, μ_2 为 (10.18) 对应的 Lagrange 乘子. 定义

$$G_m^* = \partial r(s_0, s_m) / \partial s_m. \quad (10.19)$$

那么原二次子规划 (10.15) 的 K-T 点 $(\Delta y, \lambda)$ 满足

$$\begin{aligned} \lambda_{2,j} &= -\partial Q / \partial (\Delta s_{j+1}) + G_{j+1}^* \lambda_{1,j+1}, \\ j &= m-1, \dots, 0. \end{aligned}$$

Q 为 (10.15) 的目标函数; $G_j^* = \partial x(t_{j+1}, s_j, \varphi_j) / \partial s_j, j \neq m$;

$\lambda_{2,m} = \mu_2$; $\lambda_{2,0} = \mu_1$; Δs_j 由 (10.17) 导出, $j=1, \dots, m$.

证明: 验证 K-T 条件即可.

算法 10.1 (多重打靶算法)

0° 初始参数设置, $s_i, p_i (i=0, \dots, m), Q_0 = I$.

1° 梯度及残差 $h_i (i=0, \dots, m-1)$ 的计算.

2° 由 (10.15) 式及递推式 (10.17) 形成降阶子问题

(10.18).

3° 求解子问题.

4° 由递推公式(10.17)得到原二次子问题的解

$$\Delta y = (\Delta s_0, \dots, \Delta s_m, \Delta p_1, \dots, \Delta p_m).$$

5° 得到搜索方向 Δy , 进行一维搜索, 求出下一个迭代
代值

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \alpha_k \Delta y^{(k)}.$$

6° 检查收敛法则是否满足? 若满足, 令 $y^* = y^{(k+1)}$,
停. 否则, 转7°.

7° $Q_{k+1} = Q_k + \Delta Q_k$, $k+1 \Rightarrow k$, 转1°.

本书简介了打靶方法的思想, 有关序列二次规划的问题
将在下节讨论. 下面给出一个简单算例.

2.4 算例分析

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt,$$

$$\text{s.t. } \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u, \quad x_2(0),$$

$$x_1(5) - x_2(5) + 1 = 0.$$

分析: 给出初始估计值 $x_1(t_i) = 1$, $x_2(t_i) = 0$,
 $u(t) = \phi_i(t, p) = 0.5$, 计算结果见表10.1.

表10.1

mesh	J(u)	GE	FE	CPu-sec
3	2.0757	7	7	0.174
6	1.6907	7	8	0.241
11	1.6860	6	6	0.305
21	1.6857	6	6	0.524

从表10.1中看出
节点数(mesh)增
加, $J(u)$ 值减小, 同时
梯度及函数迭代次数
(GE, FE)也相应减
少, 但CPU时间增加.
所以, 增加节点数可以
提高近似度, 但运行时
间也增加了. 计算结果
如图10.1—图10.3.

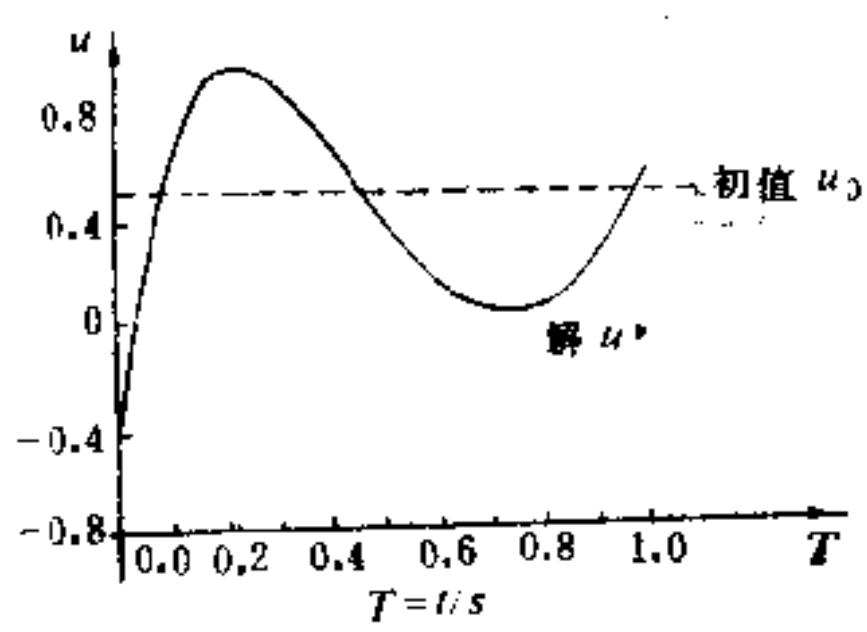


图10.1 u^* , $m=21$

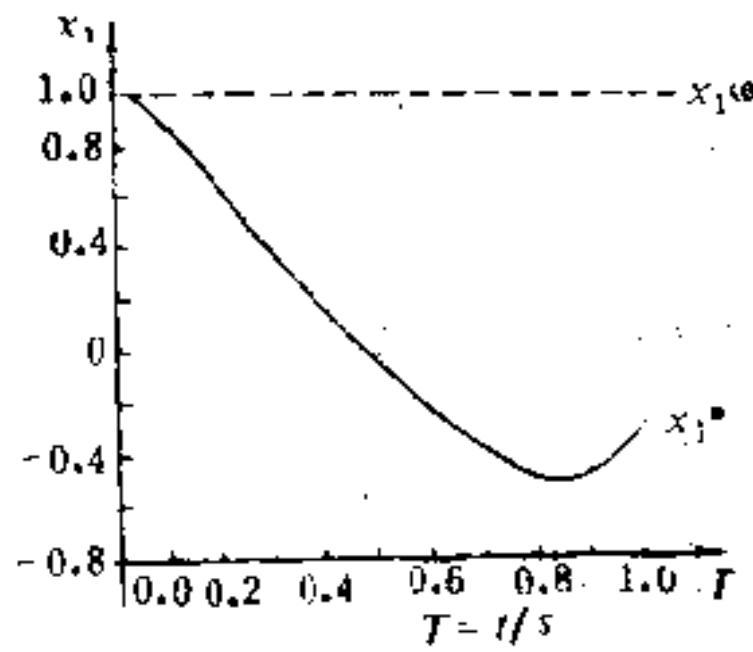


图10.2 x_1^* , $m=21$

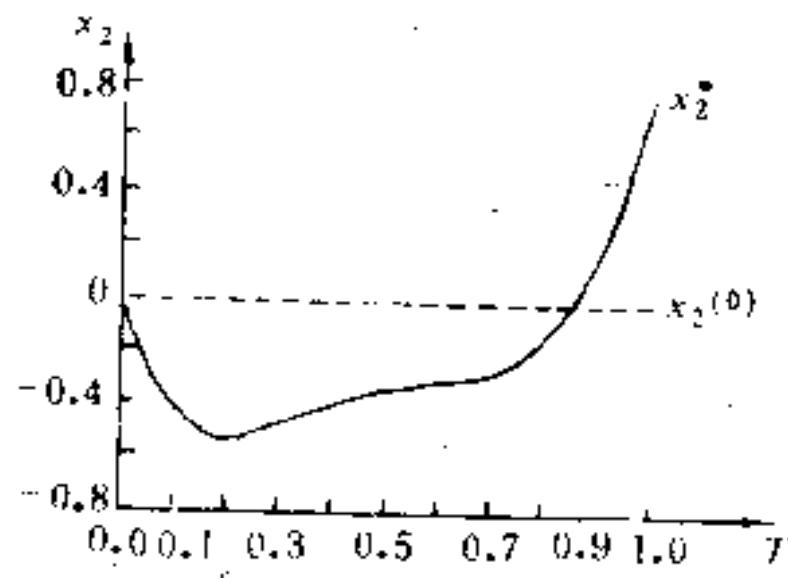


图10.3 x_2^* , $m=21$

3 改进的多重打靶法

3.1 目标泛函的简化

我们曾进行过 Mayer 问题与 Lagrange 问题的转化，对简化目标泛函的形式，这里使用 Mayer 问题：

$$\left. \begin{array}{l} \min x_{n+1}(t_f), \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = F(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_f], \\ \tilde{r}(x(t_0), x(t_f)) = 0 (\geq 0), \\ g(t, u(t)) \geq 0. \end{array} \right\} (10.20)$$

这时，状态变量增加一维，在以后的参数化过程中，目标变为 $\min s_m$ ，形式简单，从而将不可避免的数值积分转换成了微分方程的数值化。

3.2 SQP 算法的细节问题

为方便起见，考虑下面的 NLP 问题。

$$\left. \begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.t. } c_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m', \\ c_i(x) \geq 0, \quad i = m' + 1, \dots, m. \end{array} \right\} (10.21)$$

需要指出，为了方便起见，这里所涉及的 NLP 问题与 (10.13) 符号有所不同，但形式完全一样。

(1) SQP 算法迭代步骤

0° 给定初值 x_0, Q_0 ，置 $K=0$ 。

1° 求解向量 d_k ，使之满足，

$$\begin{aligned} \min \quad & d_k^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} d_k^T Q_k d_k, \\ \text{s.t. } & c_i(x_k) + d_k^T \nabla c_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, m', \end{aligned}$$

$$c_i(x_k) + d_k^T \nabla c_i(x_k) \geq 0, i = m' + 1, \dots, m.$$

2° 置 $x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot d_k$, α 为迭代步长, 用一维搜索确定。

3° 修正 Q_k , 得 Q_{k+1} .

4° $k+1 \rightarrow k$ 转 1°.

(2) Q_k 阵的修正及步长选取方式

算法实现的一个重要问题, 是如何修正 Q_k 以保持其正定性, 容易想到采用 BFGS 公式:

$$\begin{aligned} Q_{k+1}^{\text{BFGS}} &= Q_k - \frac{(y_k - Q_k s_k)^T s_k}{y_k^T s_k} y_k y_k^T \\ &\quad + \frac{(y_k - Q_k s_k) y_k^T + y_k (y_k - Q_k s_k)^T}{y_k^T s_k}. \end{aligned}$$

考虑到 BFGS 公式是针对无约束问题设计的, 故对约束问题(10.21), 令

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x).$$

其中

$$c(x) = (c_1(x), \dots, c_m(x))^T,$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T,$$

则上述 BFGS 公式中

$$y_k = \nabla_x L(x_k + s_k, \lambda_k) - \nabla_x L(x_k, \lambda_k),$$

$$s_k = x_{k+1} - x_k,$$

而 Q_k 则是拉格朗日乘子函数 $L(x, \lambda)$ 的 Hesse 矩阵, $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ 的第 k 次近似。可以证明, 当 Q_k 正定时, Q_{k+1} 正定的充要条件是

$$y_k^T s_k > 0. \quad (10.22)$$

为此, Powell 引入参数 r_k , 并令

$$\eta_k = r_k y_k + (1 - r_k) Q_k s_k \quad (0 \leq r_k \leq 1),$$

并且 r_k 满足

$$r_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } s_k^T y_k \geq 0, 2s_k^T Q_k s_k; \\ \frac{0.8s_k^T Q_k s_k}{s_k^T Q_k s_k - s_k^T s_k}, & \text{当 } s_k^T y_k < 0, 2s_k^T Q_k s_k. \end{cases}$$

由此得到BFGS公式的改进形式:

$$Q_{k+1} = Q_k - \frac{Q_k s_k (Q_k s_k)^T}{s_k^T Q_k s_k} + \frac{\eta_k \eta_k^T}{s_k^T \eta_k}.$$

显然 $s_k^T \eta_k \geq 0, 2s_k^T Q_k s_k,$

从而保证了 Q_k 正定的连续性.

取效益函数, 即线性搜索²的目标函数

$$\begin{aligned} w(x_k, \mu_k) = f(x_k) + \sum_{i=1}^m \mu_i^K |c_i(x_k)| \\ + \sum_{i=m+1}^n \mu_i^K \max(0, -c_i(x_k)), \quad (10.23) \end{aligned}$$

μ_i^K 是罚子, 选代步长及罚因子满足

$$w(x_k + \alpha_k d_k, \mu_k) \leq w(x_k, \mu_k)$$

(3) Watchdog 技术

为了保持算法的全局收敛性及超线性收敛速度, 克服 Maratos 效应, Chamberlain 等人提出了一种称作“Watchdog”的技术, 包括两个方面:

① μ_i 的确定, 为了保证 $\mu_i \geq |\lambda_i|$, 则

a. 第一次迭代, 取 μ_i 初值为 $\mu_i = 2|\lambda_i|$ ($i = 1, \dots, m$);

b. 以后迭代中, 仅当 $\mu_i < 1.5|\lambda_i|$ 时, 才将 μ_i 增加到

$2 \|\lambda_i\|$.

② 步长搜索

修正方案的步长搜索分为两种方式：

a. 标准搜索

判据

$$w(x_k + \alpha d_k) \leq w(x_k) - \theta(w(x_k) - w_k(x_k + 1)).$$

(10.24)

其中 w_k 是 w 的一阶近似，则

$$w_k(x_k + 1) = f(x_k) + \nabla^T f(x_k)(\alpha \cdot d_k)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m'} \mu_i [c_i(x_k) + \nabla^T c_i(x_k) \alpha \cdot d_k]$$

$$+ \sum_{i=m'+1}^m \mu_i \max(0, -c_i(x_k) \alpha - d_k k \Delta c_i(x_k)),$$

$\theta \in (0, 10, 5)$.

判据满足， α 选取成功。

b. 松弛搜索

判据 $w(x_k + \alpha d_k) \leq w(x_k)$,

(10.25)

或 $L_k(x_k + \alpha d_k) \leq l_k(x_k)$.

式中 $L_k(x) = f(x) - \lambda_k^T c_k(x)$.

判据满足， α 选取成功。

③ Watchdog 方法步骤

0° 给定初始点 x_0 与正整数 t , 令 $k=l=0$, 使用标准搜索.

1° 求 QP_k 子问题, 得搜索方向 d_k , 置初始步长 $\alpha_k=1$.

2° 根据搜索类型进行线性搜索, 必要时减少 α_k , 使当前

判据满足。

令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

若 $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon$, 迭代停止.

3° 若 $w(x_{k+1})$ “充分小于” $w(x_k)$, 则置下一次的线性搜索类型为松弛型, 否则置为标准型.

4° 若 $w(x_{k+1}) \leq w(x_k)$, 令 $l = k+1$.

5° 若 $k = l + t$, 以 x_l 代替 x_{k+1} , 令 $l = k+1$.

6° 若要继续迭代, 则令 $k = k+1$, 转1°.

④ 二次子规划的相容性问题

二次子规划的约束是原规划的约束展开, 可能在某些点出现不相容的情况. 例如, 对于约束

$$x \leq 1, x^2 \geq 0$$

在 $x=3$ 处将它们线性化, 得到两个约束:

$$2+d \leq 0; 9+2d \geq 0.$$

是不相容的.

为此, Powell 引进一个辅助变量, 首先求解线性规划

$$\max \xi$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, m', \\ \xi c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) \geq 0, \quad i \in V, \\ c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) \geq 0, \quad i \in S, \\ 0 \leq \xi \leq 1. \end{array} \right\} \quad (10.26)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} V = \{i \mid c_i(x) < 0, m'+1 \leq i \leq m\}, \\ S = \{i \mid c_i(x) \geq 0, m'+1 \leq i \leq m\}. \end{array} \right\} \quad (10.27)$$

因为 $\xi = 0$, $d = 0$ 恒为 (10.26) 的可行解且有界, 故有最优解 ξ^* ($0 \leq \xi^* \leq 1$).

然后用约束

$$\begin{aligned}\xi^* c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) &= 0, \quad i=1, \dots, m', \\ \xi^* > 0, \quad \xi^* c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) &\geq 0, \quad i \in V, \\ c_i(x) + d^T \nabla c_i(x) &\geq 0, \quad i \in S\end{aligned}$$

替代SQP算法中的规划的约束，即保证了相容性。

现将讨论的结果用在多重打靶法中，即下面的算法。

3.3 改进的多重打靶算法

算法10.2

- 0° 初始化，赋初值 $s_0, p_0; Q_0 = I$ 。
- 1° 梯度及残差计算。
- 2° 降阶QP子问题形成及递推公式。
- 3° 求解QP子问题。
- 4° 原QP子问题的求解，由递推公式可得。
- 5° 由Watchdog方法确定迭代步长 α_k 。
- 6° 得到新的迭代变量 $y^{k+1} = y^k + \alpha_k \Delta y^k$ 。
- 7° 检验收敛准则，若继续迭代，则修正

$$Q_{k+1} = Q_k + \Delta Q_k,$$

$k+1 \rightarrow k$, 转1°。

不需迭代，则 $y^* = y^{k+1}$, 停机。

4 多重参数化方法简介

本节的方法，广义地讲，也属于打靶方法，但与前述的多重打靶法处理手段略有不同。

考虑最优控制问题

$$\left. \begin{array}{l} \min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt, \\ \text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x, u, t), \\ \quad x(t_0) = x_0, te(t_0, t_f), \\ \quad g(t, u, x) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (10.28)$$

在 2 节中讨论了参数化方法，并在参数化过程中利用了插值的概念，用插值函数逼近控制函数，但在数值分析中又讲过，高维插值效果并不好，为此，我们使用低维的分段插值，从而有了多重参数化方法。

(1) 等分时间区间 (t_0, t_f) :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = t_f, \quad (10.29)$$

$$t_i = t_0 + (t_f - t_0)i/m, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

(2) 引入参数向量 $p_i \in R^d (i=0, 1, \dots, m)$ ，它表示 t_i 节点处控制的估计值。为了求得 p_i ，我们先设 $p_0 = p_f$ ，为得到其余点的控制值，我们使用分段线性插值：

$$u_i(t) = u_i(p_i, p_{i+1}, t), \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad (10.30)$$

来逼近该区间 (t_i, t_{i+1}) 上的控制函数。

(3) 有了 $u_i(t) (i=0, \dots, m-1)$ 就可以建立 m 个初值问题，以求得对应的轨迹值，这里可“强迫”状态在节点处连续，不进行打靶，匹配条件自行满足。

m 个初值问题为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x_i, u_i(t), t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ x(u_i, t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_1], \\ \dot{x}(t) = f(x, u_i(t), t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ x(u_i, t_i) = x(u_{i-1}, t_i), \quad i=1, \dots, m-1, \end{array} \right. \quad (10.31)$$

于是(10.28)即形成问题(10.31)的解法如下：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(x(t_i, u_i(t)), u_i(t), t) dt \\ & \text{s.t. } g(t_j, x(t_j), p_j, p_{j+1}) \geq 0, \quad j=0, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (10.32)$$

(10.32)式同样可以化为(10.13)的形式，转换成一个NLP问题。求解NLP问题，仍将继续使用3节中所述的SQP方法。

(4) 一个初值问题的数值求解，可使用Runge-Kutta方法。

(5) 在实际工程计算中，算法是通过计算机实现的，所以要使用不用导数的变尺度方法。Gill-Murray提出一种无约束变尺度方法下差分近似导数的技术，将其移植过来。在算法开始时固定 h_i 的大小(可据实际情况假定)，由于向前差分

$$\Delta f(x)/\Delta h_j = (f(x+h_j I_j) - f(x))/h_j,$$

($f(x)$ 为被求导的函数， $j=1, \dots, p$, p 为变量个数)需较少次数的函数值计算，故先估计 ∇f 。

0° 给定 $\hat{\alpha} > 0, \hat{\beta} > 0, k=0$ 。

1° 用向前差分估计 $\nabla f(x^k)$ ，

若 $\left\{ \sum_{i=1}^p \left(-\frac{\Delta f(x_k)}{\Delta x_i} \right)^2 \right\}^{1/2} < \hat{\alpha}$, 转2°.

否则转3°.

2° 用中心差商计算 $\nabla f(x^k)$.

3° 得 x^{k+1} , 若 $\|x^{k+1} - x^k\| < \hat{\beta}$:

(i) 若前次使用的是向前差分, 则转2°, 重新计算;

(ii) 若前次使用的是中心差分, 则 $k = k + 1$, 转2.

4° $k = k + 1$, 转1°.

计算经验表明, 该法与BFGS方法结合, 效果很好.

最后给出多重参数化法的步骤:

0° 赋初值 $y^0, k=0, Q_0 = I$.

1° 梯度计算及初值问题求解.

2° QP问题的形成(内含辅助线性规划的求解)

3° 求解QP子问题, 得 d_k, λ_k .

4° 用Watchdog方法确定搜索步长 α_k ,

$$y^k + \alpha_k d^k \rightarrow y^{k+1}$$

5° 收敛准则判断(如 $\|d^k\| \leq \epsilon$), 满足, 则停机.

否则, 按BFGS方法修正 $Q_k, k+1 \rightarrow k$, 转1°.

对于算法的收敛性问题作者在此做一说明:

(1) 间接算法的收敛性

参考文献(15)中有详述. 由于间接方法中的算法基本上都是从 R^n 空间推广到函数空间中来的, 所以收敛性也可相应推出.

(2) 直接方法的收敛性

这方面的文章极少，参考文献(26)中讨论了直接方法的逼近性质，提出了近似最优解序列、近似可行解序列、极限解序列的概念，根据不同的逼近形式，得出了三个收敛性结论。

最优控制问题由于牵涉到微分方程组、优化方法、无穷维处理，故计算起来十分复杂，其算法分析、算法研究仍是很重要而艰巨的工作。

第十一章 最优控制的应用模型

第一章列举了最优控制在空间技术、工程问题、生产问题等方面的一些简单模型，为最优控制问题的数学描述提供了感性认识。本章将对现代管理中的一些典型的最优控制问题的数学模型进行描述，并对部分问题作深入讨论。

1 生产与库存模型

考虑一个企业生产与库存关系。“如果生产过多，将使库存量过大，造成资金积压；生产过少，造成脱销且影响利润。因此，如何决定产量与库存量对企业有重要意义。

1.1 离散时间系统的最优库存模型

设 $u(k)$ ——第 k 月的生产产品数量；

$x(k)$ ——第 k 月的库存量；

$s(k)$ ——第 k 月的已知销售量。

三个量之间有关系：

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - s(k), k = 1, 2, \dots, 12.$$

该最优控制问题是：

求每个月的最优生产量 $u(k)$ ，使正好完成销售计划，且生产费用与库存费用之和为最小，即使

$$J = \sum_{k=1}^{12} (\alpha u^m(k) + \beta x^n(k)) \quad (11.1)$$

为最小。式中 α, β, m, n 为已知常数。

当产量和库存量都有限制时，应加上约束条件：

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u(k) \leq N, \\ 0 \leq x(k) \leq M, k = 1, 2, \dots, 12. \end{array} \right\} \quad (11.2)$$

1.2 连续时间最优库存问题

设 $x(t)$ —— t 时库存量;

$u(t)$ —— t 时生产率;

$s(t)$ —— t 时销售率;

则若满足关系:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t) - s(t), \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \geq 0. \end{cases} \quad (11.3)$$

关于目标函数有两种提法:

一是求管理决策变量——生产率 $u(t)$ 使生产费用和库存费用的总和最小, 即使

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (c(u(t), t) + h(x(t), t)) dt \quad (11.4)$$

为最小, 其中式 $c(u(t), t)$ 为生产费用, $h(x(t), t)$ 为储存费用.

另一种是求 $u(t)$, 使 $u(t)$ 接近于理想的生产率 $\hat{u}(t)$, $x(t)$ 接近于理想的库存量 $\hat{x}(t)$, 即使

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (h(x(t) - \hat{x}(t))^2 + c(u(t) - \hat{u}(t))^2) dt \quad (11.5)$$

取最小值.

1.3 带有贴现率的库存问题

设 $x(t), u(t), s(t)$ 意义同前; ρ 为贴现率常数; T 为计划周期长度, 现在考虑求

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} \left[\frac{h}{2} (x(t) - \hat{x}(t))^2 + \frac{c}{2} (u(t) - \hat{u}(t))^2 \right] dt \quad (11.6)$$

的最小值。

这个问题的求解是一个含约束的变分问题，其 Hamilton 函数为

$$H = \lambda(t)(u - s) + e^{-\rho t} \left[\frac{h}{2} (x(t) - \hat{x}(t))^2 + \frac{c}{2} (u(t) - \hat{u}(t))^2 \right] \quad (11.7)$$

式中 $\lambda(t)$ 为伴随变量。

由耦合方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda(t) + ce^{-\rho t}(u(t) - \hat{u}(t)) = 0$

得到 $u(t) = -\frac{\lambda(t)}{c} e^{\rho t} + \hat{u}(t), \quad (11.8)$

最优控制 $u^*(t) = \max(\hat{u}(t) - \frac{\lambda(t)}{c} e^{\rho t}, 0). \quad (11.9)$

现设 $\hat{u}(t)$ 足够大，使 $u^*(t) > 0$ ，把(11.8)代入(11.3)得

$$\dot{x}(t) = \hat{u}(t) - \frac{\lambda(t)}{c} e^{\rho t} - s, \quad x(0) = x_0. \quad (11.10)$$

伴随方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-\rho t} h(x(t) - \hat{x}(t)), \\ \lambda(T) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

(11.10)式对 t 求导得

190

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\lambda(t)}{c}e^{st} - \frac{\rho}{c}\lambda(t)e^{st} - \dot{s}(t),$$

将 $\lambda(t)$ 代入上式得

$$\ddot{x}(t) = \frac{h}{c} (x(t) - \hat{x}(t)) + \rho \dot{x}(t) + \rho s(t) - \rho \hat{u}(t) - \dot{s}(t),$$

整理后为

$$\ddot{x}(t) - \rho \dot{x}(t) - \alpha^2 x(t) = \rho(s(t) - \hat{u}(t)) - \alpha^2 \hat{x}(t) - \dot{s}(t) \quad (11.12)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{h}{c}}$ 这是一个二阶常系数微分方程，其一般解为

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

$$\text{式中 } m_1 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\alpha^2}}{2} < 0; \quad m_2 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\alpha^2}}{2},$$

$Q(t)$ 为(11.12)式的特解。

(11.13)式有两个待定系数 a_1, a_2 ，只有一个边界条件，为了求得另一条件，可微分后应用(11.10)式得

$$\lambda(t) = ce^{-\rho t}(\hat{u}(t) - s - \dot{x}(t)), \quad (11.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(t) &= ce^{-\rho t}(\hat{u}(t) - s - a_1 m_1 e^{m_1 t} - a_2 m_2 e^{m_2 t} - \dot{Q}(t)), \\ \lambda(T) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

这样增加了一个条件，从而可以确定 a_1 和 a_2 。

现设满足方程(11.12)及边界条件(11.13)、(11.15)的状态变量 $x(t)$ 的表达式为?

$$x(t)=b_1 e^{m_1 t} + b_2 e^{m_2(t-T)} + Q(t) \quad (11.16)$$

由于 $m_1 < 0, m_2 > 0, T$ 充分大, 上式第一部分只在时间很小时起主导作用, 标记为“起始修正”部分; 第二部分只是在时间 t 接近 T 时起主导作用, 标记为“终端修正”部分; 最后一部分在所有的时间 t 都有重要作用, 但在除开起始和终端附近两处后, 就由它起主导作用, 标记为“快车道表达式”. 同样处理 $u(t)$ 和 $\lambda(t)$, 并调整二、三部分次序列表如下:

表 11.1

起始修正	快车道表达式	终端修正
$x(t)=b_1 e^{m_1 t}$	$+Q(t)$	$+b_2 e^{m_2(t-T)}$
$u(t)=m_1 b_1 e^{m_1 t}$	$+Q'(t)+s(t)$	$+m_2 b_2 e^{m_2(t-T)}$
$\lambda(t)=cm_1 b_1 e^{(m_1-\rho)t}$	$+ce^{-\delta t}(u(t)-Q(t)-s(t))$	$+cm_2 b_2 e^{(m_2-\rho)t-m_2 T}$

2 最优消费时的最优积累率

设第 k 年度产出为 $Y(k)$:

$$Y(k)=AK^\alpha(k)L^{1-\alpha}(k) \quad (11.17)$$

式中 k 表示时间.

产出的一部分用于节余 $\sigma Y(k)$, 而另一部分用于消费 $(1-\sigma)Y(k)$. 节余的部分用于抵销资本折旧并使资本存量增加:

$$K(k+1)=K(k)-\delta K(k)+\sigma Y(k) \quad (11.18)$$

式中 $K(k+1)$ 表示本年度资本存量； $K(k)$ 表示上一年度原有资本存量； δ 为资本折旧率， $\sigma Y(k)$ 为投资。

目的是要求出各年度最优节余率 $\sigma(k)$ ，使得人均消费最大，即：

$$\max_{0 \leq k \leq T} \sum_{k=0}^{T-1} (1-\sigma(k))Y(k)/L(k). \quad (11.19)$$

综上所述，最优消费下的最优积累问题的数学模型为

$$\left. \begin{array}{l} \max_{0 \leq k \leq T} \sum_{k=0}^{T-1} (1-\sigma(k))AK^*(k)L^{1-\sigma}(k)/L(k), \\ \text{s.t. } K(k+1) = (1-\delta)K(k) + \sigma AK^*(k)L^{1-\sigma}(k), \\ K(0) \text{ 为已知初态.} \end{array} \right\} \quad (11.20)$$

作哈密尔顿函数：

$$H = (1-\sigma(k))AK^*(k)L^{1-\sigma}(k)/L(k) + \lambda(k+1)((1-\delta)K(k) + \sigma(k)AK^*(k)L^{1-\sigma}(k)), \quad (11.21)$$

即

$$H = (\lambda(k+1) - 1/L(k))\sigma(k)AK^*(k)L^{1-\sigma}(k) + AK^*(k)L^{1-\sigma}(k)/L(k) + \lambda(k+1)(1-\delta)K(k) \quad (11.22)$$

依极大值原理必要条件可知

$$\begin{aligned} H(K^*(k), \sigma^*(k), \lambda^*(k+1), k) \\ = \max_{\substack{0 \leq k \leq 1 \\ k=0, \dots, T-1}} H(K^*(k), \sigma(k), \lambda^*(k+1), k). \end{aligned}$$

即最优策略 $\sigma^*(k)$ 应使得哈密尔顿函数取极大。

考察式(11.22)可知最优策略为

- 当 $\lambda^*(k+1) > 1/L(k)$ 时, $\sigma(k) = 1$;
- 当 $\lambda^*(k+1) < 1/L(k)$ 时, $\sigma(k) = 0$;
- 当 $\lambda^*(k+1) = 1/L(k)$ 时, $\sigma(k)$ 待定.

当 $\sigma(k) = 1$ 时, 表示应最大限度积累; $\sigma(k) = 0$ 时, 表示应最大限度消费. 这都属于特殊时期, 现在考察式(11.23)中的第三种情况, $\lambda^*(k+1) = 1/L(k)$. 如果人口增长因子为 n , 即

$$L(k) = L_0 n^k, \quad (11.24)$$

故有

$$\lambda(k) = 1/L(k-1) = n/L(k) = n\lambda(k+1). \quad (11.25)$$

又由式

$$\left. \begin{aligned} \lambda(k) &= \frac{\partial H(K(k), u(k), \lambda(k+1), k)}{\partial K(k)} && \text{(伴随方程或协态方程)} \\ \lambda(T) &= -\frac{\partial s(x(T))}{\partial x(T)} && \text{(横截条件),} \\ H(x^*(k), u^*(k), \lambda^*(k+1), k) &= \max_{\substack{u(k) \in Q \\ k+1, \dots, T-1}} H(x^*(k), u(k), \lambda^*(k+1), k), \\ K(k+1) &= f(K(k), u(k), k) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{(状态方程)} \\ &K(0) \text{ 为已知初值.} \end{aligned} \quad (11.26)$$

的第一个必要条件, 有

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial K(k)} \quad (11.27)$$

当 $\lambda(k+1) = 1/L(k)$ 时，可由式(11.22)求出 $\frac{\partial H}{\partial K(k)}$ 的值：

$$\lambda(k) = \frac{\partial(AK^*(k)L^{1-\sigma}(k)/L(k) + \lambda(k+1)(1-\delta)K(k))}{\partial K(k)},$$

$$\text{即 } \lambda(k) = -\frac{\alpha AK^{*\sigma-1}(k)L^{1-\sigma}(k)}{L(k)} + \lambda(k+1)(1-\delta),$$

$$\text{于是得到 } \frac{n+\delta-1}{\alpha A} = \left(\frac{K(k)}{L(k)} \right)^{\sigma-1}. \quad (11.28)$$

从 (11.28) 可知

$$K(k) = L(k) \left(\frac{n+\delta-1}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$\text{则 } K(k+1) = L(k+1) \left(\frac{n+\delta-1}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} = nK(k),$$

把上式代入式 (11.20) 的状态方程中去，得

$$nK(k) = (1-\delta)K(k) + \sigma(k)AK^*(k)L^{1-\sigma}(k),$$

两边同除以 $K(k)$ ，得

$$n = (1-\delta) + \sigma(k)A(K/k)/L(k))^{\sigma-1}.$$

将式 (11.28) 代入上式，得

$$n = 1 - \delta + \sigma(k)A - \frac{n+\delta-1}{\alpha A},$$

解出得

$$\sigma = \alpha. \quad (11.29)$$

它表明，当 $\lambda(k+1)=1/L(k)$ 时，最优节余率为 $\sigma=\alpha$ 。

最优净积累率为节余(毛积累) $\sigma Y(K)$ 减去折旧 $\delta K(k)$ ，再除以总产出：

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{净}} &= \frac{\sigma(k)Y(k) - \delta K(k)}{Y(k)} = \sigma(k) - \delta - \frac{K(k)}{Y(k)} \\ &= \sigma(k) - \delta - AK^{\alpha-1}(k)L^{1-\alpha}(k).\end{aligned}$$

再将式(11.28)代入得

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{净}} &= \sigma - \delta - \frac{1}{A} \frac{n + \delta - 1}{\alpha A} = \alpha - \frac{\delta \alpha}{n + \delta - 1} \\ &= \alpha - \frac{n - 1}{n + \delta - 1}.\end{aligned}\tag{11.30}$$

(11.30)式是最优净积累率计算公式。

依我国实际数据回归得出的工业生产函数为

$$Y(k) = AK^\alpha(k)L^{1-\alpha}(k) = 14.638K^{0.602}(k)L^{0.398}(k).$$

由(11.29)式得 $\sigma=\alpha=0.602$ ，同时人口增长因子 $n=1+0.064$ ，那么在折旧率 $\delta=0.05$ 时，

$$\sigma_{\text{净}} = \alpha - \frac{n - 1}{n + \delta - 1} = \frac{0.064}{0.064 + 0.05} \times 0.602 = 33.79\%.$$

当折旧率为0.10时，

$$\sigma_{\text{净}} = \frac{0.064}{0.064 + 0.10} \times 0.602 = 23.492\%$$

3. 最优经济增长模型

这里研究两种经济增长（资本积累）的简单模型，该模型是以一种具有稳定人口的经济研究为先导的。

3.1 最优资金积累模型

考虑一个简单的经济机构，其资金贮备（以 $K(t)$ 表示）为唯一的生产因素。令 $F(K)$ 为该经济机构的产出速率（当 K 为资本贮备时）。假定 $F(0)=0$, $F(K)>0$, $F'(K)>0$ 以及当 $K>0$ 时 $F''(K)<0$ 。后一条件（即 $F''(K)<0$ ）是指减小的边际资金生产率。这个产出既可以被消费也可用来再投资，作为进一步的资金积累。令 $C(t)$ 为分配给消费的产出量。令 $I(t)=F(K(t))-C(t)$ 为投资量； δ 为定常的资本贬值率。于是资本贮备状态方程为

$$K(t) = F(F(t)) - C(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0. \quad (11.31)$$

又令 $u(c(t))$ 为消费的社会收益， ρ 表示社会回扣率， T 表示有限时间范围并假定 $u'(0)=\infty$ ，这样，一个被选举任期 T 年的政府就可考虑使用如下的目标函数，即

$$\begin{aligned} \max J &= \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t)) dt, \\ \text{s.t. } & K(T) = K_T, \end{aligned} \quad (11.32)$$

Ramsey将上述最优资金积累模型加以改型为

$$\begin{aligned} \max J &= \int_0^\infty (u(c(t)) - B) dt, \\ \text{s.t. } & \left\{ \begin{array}{l} \dot{K} = F(K(t)) - c(t) - \delta K(t), \\ K(0) = K_0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (11.33)$$

式中 $B = \sup_{c>0} u(c) > 0$ 是所谓的“理想点”，这里

$\lim_{t \rightarrow \infty} u(c(t)) = B$, 并设指标函数中的积分是收敛的。且

$\lim_{t \rightarrow \infty} u'(c(t)) = 0$. 该模型称为Ramsey模型。

应用极大值原理求解哈密尔顿函数得

$$H = u(c(t)) + \lambda(K)(F(K) - c - \delta K), \quad (11.34)$$

伴随方程为

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial K} = (\rho + \delta)\lambda - \lambda \frac{\partial F}{\partial K}, \quad (\lambda(T) \text{ 为待定常数}), \quad (11.35)$$

于是最优控制由下式给出为

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c) - \lambda = 0. \quad (11.36)$$

由于 $u'(0) = \infty$, 因此, 此条件的解总是给出 $c > 0$. 哈密尔顿函数在经济上的解释是很明确的. 它共包括两项: 第一项给出了当时的消费效益; 第三项给出了由价格 λ 算出的净投资. 由式(11.36)可见该值反映了消费的边际效益.

对于目前所研究的最优运行的经济系统来说, 其解必须满足三个条件:

(i) 使哈密尔顿函数值在每个瞬间都为最大, 并给出 $c(t)$ 的静态有效条件(11.36)式为已知;

(ii) 动态有效条件(11.35)式迫使资本的价值 λ 随时间变化, 而且总能使资本贮备获得一个净利润率, 其值等于社会贴现率 ρ , 即

$$d\lambda + \frac{\partial H}{\partial K} dt = \rho\lambda dt,$$

(iii) 长期预测条件建立了资本的最后价格 $r(T)$ ，并且能精确地获得在时间 T 时的资本积累 K_T 。

方程(11.31), (11.32), (11.35)和(11.36)构成了一个两点边界值问题，此问题可进行数值解。

现在引入一个新的因素——劳力，它以一定速率 $g > 0$ 按指数规律增长，就有可能以按人口平均计算的变数来重建新的模型，因而它与前面的模型在形式上很相象。引入按人口平均计算的变数就使得有可能来处理新模型无限时间的情况。

令 $L(t)$ 表示时间 t 时的劳动力的总量，由于它是按指数规律以速率 g 增长的，因此有

$$L(t) = L(0)e^{gt}. \quad (11.37)$$

令 $F(K, L)$ 为生产函数，假定它为 K 和 L 的一阶齐次凹函数，可以定义 $k = K/L$ ，按人口平均的生产函数

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1). \quad (11.38)$$

为导出 k 的状态方程，且注意到

$$\dot{K} = kL + \dot{k}L = kL + kgL.$$

将式(11.31)中的 \dot{K} 代入，并定义按人口平均的消费量 $c = c/L$ ，则得

$$\dot{k} = f(k) - c - \gamma k, \quad k(0) = k_0. \quad (11.39)$$

式中 $\gamma = g + \delta$ 。

令 $u(c)$ 为消费量 c 的效用，式中 u 假定满足条件：

$$u'(c) > 0, \quad u''(c) < 0 \quad (\text{当 } c > 0 \text{ 时}). \quad (11.40)$$

与以前一样，假定 $\lim_{t \rightarrow 0} u'(0) = \infty$ ，以排除零消费的情况，此时目标函数可表示为

$$\max_{c>0} J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt, \quad (11.41)$$

现值哈密尔顿函数为

$$H = u(c) + \lambda(f(k) - c - \gamma k), \quad (11.42)$$

伴随方程为

$$\dot{k} = \rho k - \frac{\partial H}{\partial k} = (\rho + \gamma)k - f'(k)\lambda. \quad (11.43)$$

为了获得最优控制，将式(11.42)对 c 微分，令其值等于零并解得

$$u'(c) = \lambda. \quad (11.44)$$

令 $u(c) = h(\lambda)$ 就为方程(11.44)的解。

为了证明极大值原理对于最优化是充分的，我们将证明导出的哈密尔顿函数 $H^0(k, \lambda)$ 在 k 处是凹的。这一类由以下事实可以立即得到，即由式(11.40)知 $u'(c)$ 为正值，而 $f(k)$ 已经假定为凹函数。

方程(11.39)，(11.43)，(11.44)现在就构成了一个完全自治的系统，这是因为时间因素显然没有参与到这些方程中去的缘故，因此可以应用状态图方法求解。

对下列两个方程画出的状态图如图11.1所示，这两个方程为

$$\dot{k} = f(k) - h(\lambda) - \gamma k = 0, \quad (11.45)$$

$$\dot{\lambda} = (\rho + \gamma)\lambda - f'(k)\lambda = 0. \quad (11.46)$$

此两方程可由式(11.39)、(11.43)和(11.44)获得，可以证明 $k=0$ 和 $\lambda=0$ 的曲线如图11.1所示。这两条曲线的交点为 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ 。

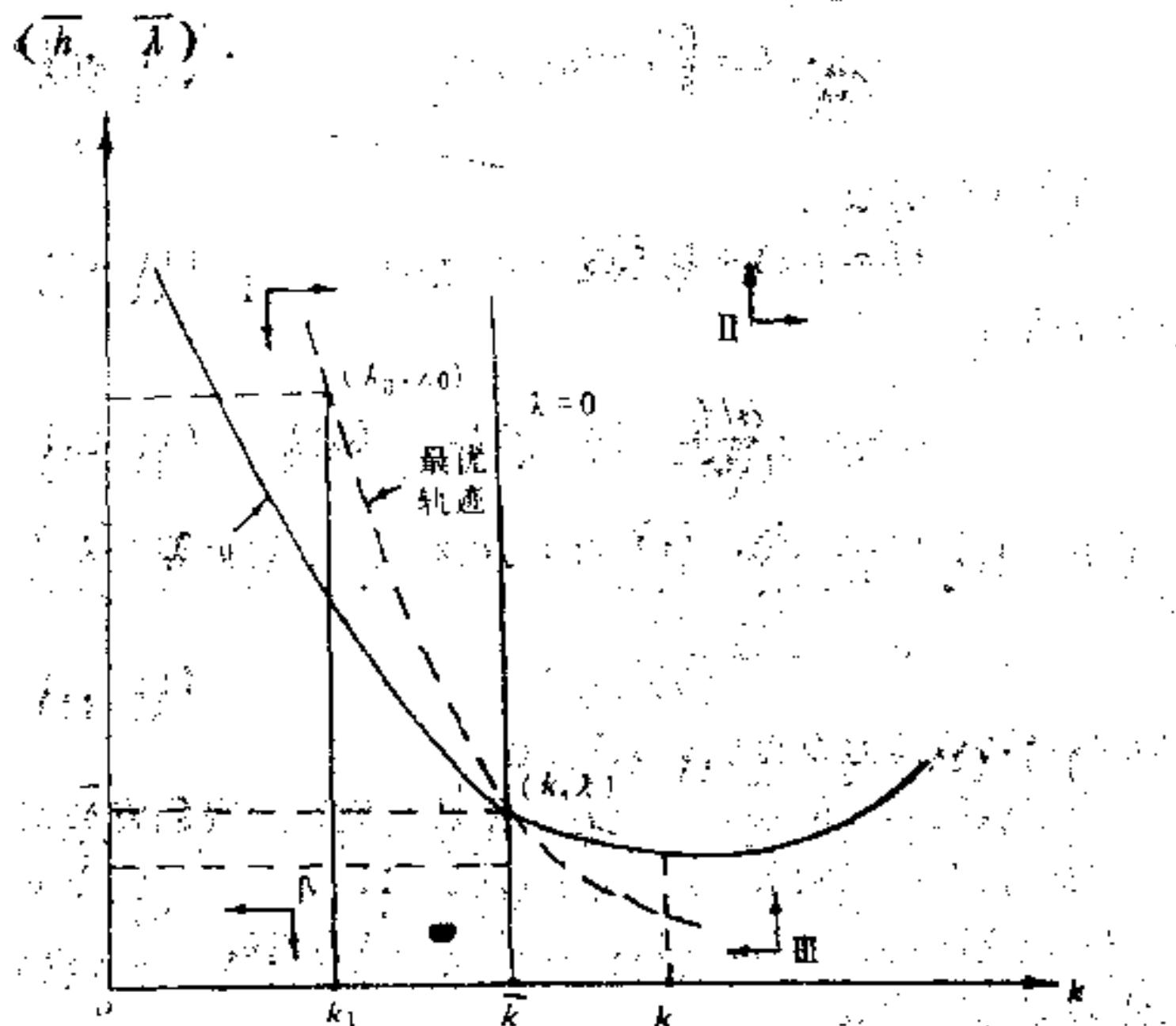


图 11.1 最优增长模型的状态图。

此两曲线将平面分为四个区域：I、II、III和IV。对于垂线以左的区域， $\lambda=0, k<\bar{k}, \rho+\gamma < f'(k)$ ，因此由式(11.43)可得 $\lambda<0$ ，从而可知是递减的。这一点由区域I和IV中方向朝下的箭头予以标明。类似的，对于垂线右方来说，即在区域II和III中，由于 λ 是递增的，所以箭头朝上。可以证明，表示 k 的变化方向的水平箭头，在 $k=0$ 曲线上（即在区域

I, II内) 指向右方, 而在区域 III, IV 中(即在 $\dot{k}=0$ 曲线以下部分) 箭头指向左方.

点 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ 表示最优的长期稳态平衡, \bar{k} 及 $\bar{\lambda}$ 的值可以求得. 现在的任务是看一下是否有一条收敛于平衡状态, 而又满足极大值原理的路径.

显然, 这种路径不能起始于 I, IV 象限, 因为在这些区域中箭头的方向是由 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ 点向外的. 对于 $k_0 = \bar{k}$ 的情况, 点 (k_0, λ_0) 必须选在区域 II 中.

我们只分析 $k_0 < \bar{k}$ 的情况, 并证明在给定 k_0 的情况下存在一个唯一的 λ_0 , $((k_0, \lambda_0))$ 的轨迹在图 11.1 上用虚线标出.

在区域 I 中, $k(t)$ 为 t 的递增函数. 如水平右向箭头所示, 因此可以用 k 来替换独立变量 t , 然后由式(11.45)得到

$$\frac{d(\ln \lambda)}{dk} = \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) / \frac{dk}{dt} = \frac{f'(k) - (\rho + \gamma)}{h(\lambda) + \gamma(k) - f(k)}. \quad (11.47)$$

当 $k < \bar{k}$ 时, 式 (11.47) 的右边为负. 又由于 $h(\lambda)$ 随 λ 而减小, 因而有 $d(\ln \lambda)/dk$ 随 λ 而增加.

下面证明, 对于初始资本 $k_0 < \bar{k}$ 的情况, 至多只有一条轨迹. 反之, 我们假定 $\lambda_1^{(k)}$ 和 $\lambda_2^{(k)}$ 为两条导致 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ 的路径, 并且选定的初始值满足 $\lambda_1(k_0) > \lambda_2(k_0)$. 由于 $d(\ln \lambda)/dk$ 随 λ 而增大, 故当 $\lambda_1(k) > \lambda_2(k)$ 时有

$$\frac{d(\ln(\lambda_1(k)/\lambda_2(k)))}{dk} = \frac{d\ln\lambda_1(k)}{dk} - \frac{d\ln\lambda_2(k)}{dk} > 0. \quad (11.48)$$

这个不等式在 k_0 处显然成立，又由式(11.48)可知 $\lambda_1(k)/\lambda_2(k)$ 在 k_0 处将增大，这进而又意味着该不等式在 $k_0 + \epsilon$ 处也成立，这里 $\epsilon > 0$ 是个很小的值。现在用 $k_0 + \epsilon$ 来代替 k_0 再来重复以上的证明，这样，当 k 增大时比值 $\lambda_1(k)/\lambda_2(k)$ 也增大，因此，当 $k \rightarrow \bar{k}$ 时 $\lambda_1(k)$ 和 $\lambda_2(k)$ 不可能同时收敛于 $\bar{\lambda}$ 。为了证明对于 $k_0 < \bar{k}$ 的情况存在一个 λ_0 使轨迹收敛于 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ ，注意到对于某些伴随变量的起始值，最后的轨迹 (k, λ) 将进入区域 I 然后发散；而对于另一些变量，轨迹将进入区域 IV 并发散，可见存在一个起始值 λ_0 ，它使轨迹收敛于 $(\bar{k}, \bar{\lambda})$ 。当 $k > \bar{k}$ 时可类似证明。

4 最优投资模型

公司的最优投资模型问题，大多是在定常的增长率的假设前提下进行分析的。如果把上述假设去掉，则公司最优投资问题就成为一个最优控制问题。在不允许用负债的办法作为投资的来源，并允许留存收益和外部产权按任何比例配合的前提下，建立一个最优投资的控制模型，令：

$x(t)$ ——在时间 t 的当期收益率；

$u(t)$ ——外部权项，用当期收益的倍数来表示， $u \geq 0$ ；

$v(t)$ ——当期收益的几分之一留存， $0 \leq v \leq 1$ ；

c ——1减去（假设的）常值比例的浮动成本（指外部产权）， $0 \leq c < 1$ ；

ρ ——在公司的股息中支付的恒定公允市场贴现率；

γ ——公司投入资本的利润率（假定为常数），式中 $\gamma > \rho$ ；

g ——公司能够达到的资产增长率的上界。

给出上述的假定后，当期收益的变化率可由下式得到，即有

$$\dot{x}(t) = \gamma(cu(t) + v(t))x(t), \quad x(0) = x_0. \quad (11.49)$$

因此，资产增长率的上界就意味着在定常利润率 γ 的假设的前提下，收益的增长速率也存在着一个上界。这样，就能导出控制变量约束关系：

$$\dot{x}(t)/x(t) = \gamma(cu(t) + v(t)) \leq g. \quad (11.50)$$

最后，公司的目标是要使得公司给原股东带来未来的股息量的现值为最大。下面导出其表达式，并记为

$$\int_0^T (1 - v(t)) e^{-\rho t} dt.$$

它表示由公司拨出的总股息的现值。上式减去由新股东带来的外部产权集资的现值

$$\int_0^T u(t) e^{-\rho t} dt,$$

在存在着有效的销售市场的前提下，新股东将会得到一个恰好等于他们投资的贴现率 ρ 的利润率。这样，对于原股东总的未来股息的净现值是它们的差额

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - v(t) - u(t)) dt. \quad (11.51)$$

因为在 $t=0$ 时，公司完全由原来的股东所拥有，显然， J 是目标函数，公司必须使它达到极大。注意到在有限时间范围的情况下，一个更有实际意义的目标函数将包括残值 $s(x(T))$ 。要把残值包括进去并不困难。下面求解有限时间范围问题，并且在此之后，还将解无限时间范围问题（即 $T=\infty$ ）。

因此，该最优控制问题就是要在整个时间范围内选择

$u(t)$ 和 $v(t)$; 要求 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在服从状态方程(11.49)式和约束条件(11.50)式及 $u \geq 0$ 和 $0 \leq v \leq 1$ 的情况下, 以使 (11.51) 式的 J 达到极大。为了方便起见, 把对问题的叙述归纳为

$$\left. \begin{array}{l} \max_{u,v} J = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t)) dt, \\ \text{满足状态约束} \\ \dot{x}(t) = \gamma(cu(t) + v(t))x(t), \quad x(0) = x_0, \\ \text{控制约束} \\ cu(t) + v(t) \leq g/\gamma, \quad u(t) \geq 0, \quad 0 \leq v(t) \leq 1. \end{array} \right\} \quad (11.52)$$

这是一个具有两个控制变量的双线性问题, 其现值哈密尔顿函数为

$$H = (1 - u(t) - v(t))x(t) + \lambda(t)\gamma(cu(t) + v(t))x(t). \quad (11.53)$$

式中现值伴随变量 $\lambda(t)$ 满足方程

$$\dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) - (1 - u(t) - v(t)) - \lambda(t)\gamma(cu(t) + v(t)) \quad (11.54)$$

及横截条件

$$\lambda(T) = 0. \quad (11.55)$$

由哈密尔顿函数及关于伴随方程的讨论, 可知 $\lambda(t)$ 能够解释成在时间 t 收益发生每单位变化时目标函数极大值的边际值。因此, 乘积 $\lambda(t)\gamma(cu(t) + v(t))x(t)$ 是按先前的股份度量投资增量给股东们带来好处。同时, 还能对 (11.54) 式进行

解释一下?如果公司取得了 $\lambda(t)$ 的投资增量, $\rho\lambda(t)$ 即为由投资所产生预期收益。在平衡状态下, $\rho\lambda(t)$ 必须等于“资本收益” $\lambda(t)$ 加上流动股息 $(1-v(t))$ 减去 $u(t)$ ·(外汇投资的“债权”), 再加上增量收益值 $\gamma(t)\gamma(cu(t)+v(t))$ 。

为了说明最优策略的形式, 将哈密尔顿函数写为

$$H = (W_1 u(t) + W_2 v(t) + 1)x(t), \quad (11.56)$$

$$\text{式中 } W_1 = c\gamma\lambda(t) - 1; \quad W_2 = \gamma\lambda(t) - 1. \quad (11.57)$$

首先应注意到在 (11.56) 式中, 状态变量 $x(t)$ 为公因子提出, 所以最优控制将与状态变量无关。第二, 由于哈密尔顿函数是控制变量 $u(t)$, $v(t)$ 的线性函数, 故最优策略将是一般的“bang-bang”型控制和奇异控制的组合。当然, 欲知这些伴随变量 $\lambda(t)$ 形式表示的最优控制的特性, 就要求在时间 t 的每一个瞬间求解一个线性规划问题。于是哈密尔顿函数为极大的问题:

$$\begin{aligned} & \max (W_1 u(t) + W_2 v(t)), \\ & \text{s.t. } u(t) \geq 0, 0 \leq v(t) \leq 1, cu(t) + v(t) \leq g/\gamma. \end{aligned} \quad \} \quad (11.58)$$

显然, 如果 $g/\gamma \leq 1$, 约束 $v \leq 1$ 成为多余的, 因此, 有两种情况存在:

情况A: $g/\gamma \leq 1$;

情况B: $g/\gamma > 1$.

在每一种情况下, 我们能够在一个封闭的图形内, 用几何方法求解 (11.58) 式的线性规划问题。具体的做法见图 11.2 和图 11.3.

根据 $c < 1$ 的假设，在图11.2和图11.3中下列情况可以不予以讨论，即

- (1) $W_1 > cW_2, W_1 > 0 \Rightarrow c > 1$ 排除情况 A_2 和 B_1 ；
- (2) $W_1 = 0, W_2 < 0 \Rightarrow c > 1$ 排除情况 A_4 和 B_5 ；
- (3) $W_1 = cW_2 > 0 \Rightarrow c = 1$ 排除情况 A_5 和 B_4 ；
- (4) $W_1 = W_2 = 0 \Rightarrow c = 1$ 排除情况 A_1 和 B_6 。

对于图中那些用粗黑线相连的剩下的子情况，能够用列表的方式来表示相应的最优控制的特性。

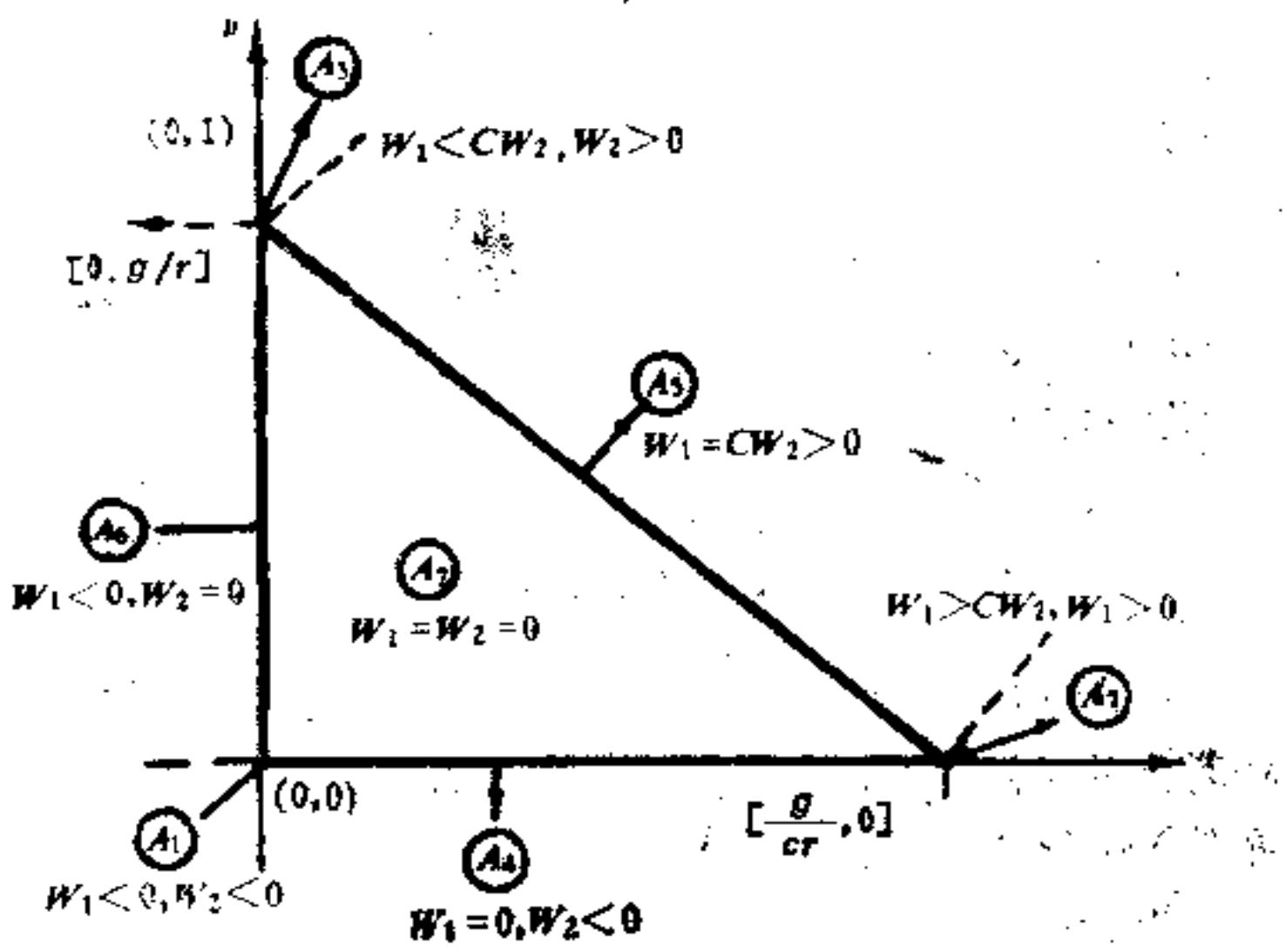


图11.2 情况A₄, g/r<1

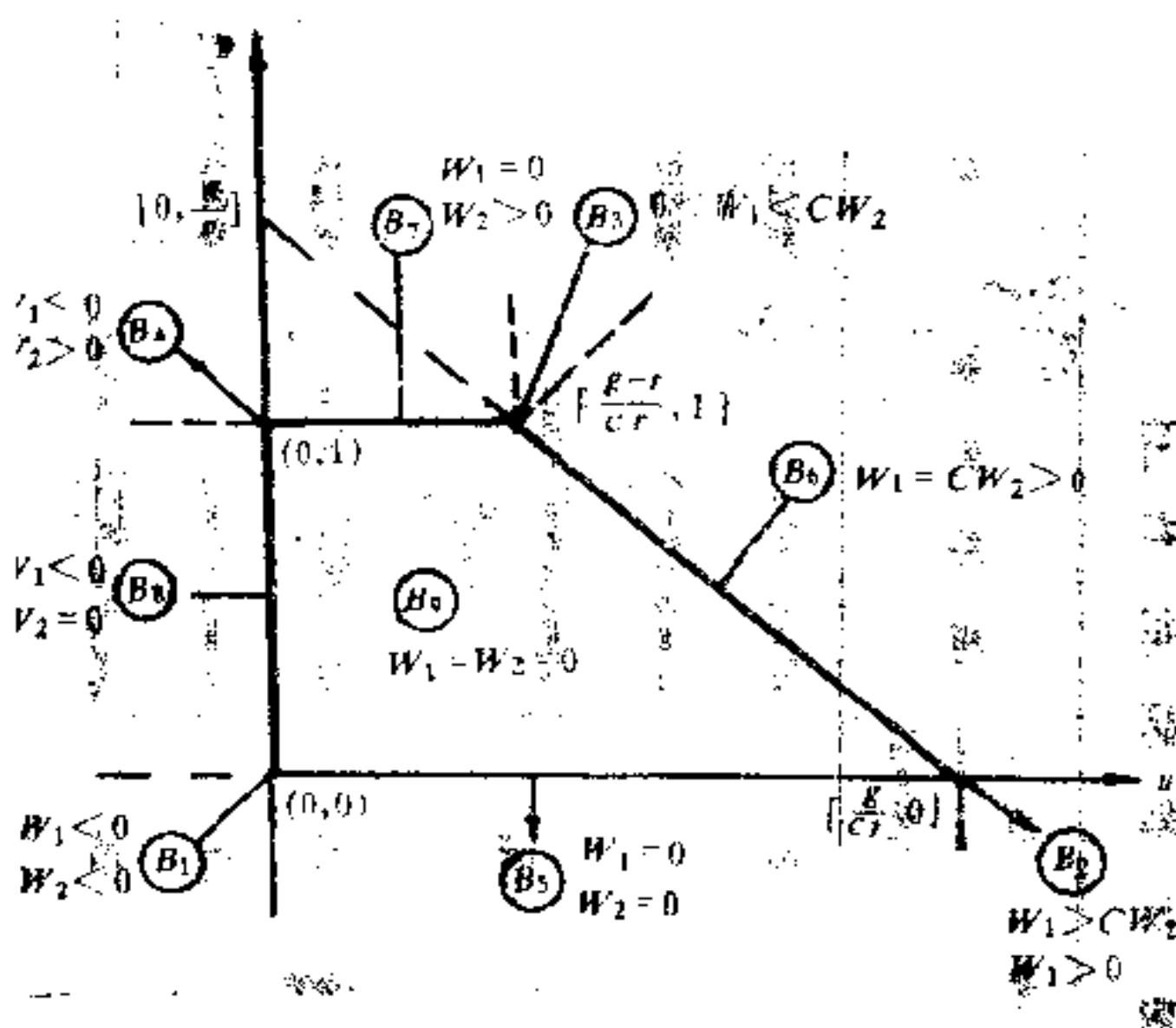


图11.3 情况B: $g/r > 1$

这里给出可能的最优控制方式一览表11.2, 描绘了此公司可能的时间轨迹。如果要求得到一条最优轨线(给定初始条件), 可以按最优序列将上述子情况进行合成。

表11.2 最优控制的特性

W_1 和 W_2 的状态 子情况	最优控制		特性
	情况 $A_1, \frac{B}{\gamma} < 1$	情况 $B_1, \frac{B}{\gamma} \geq 1$	
(1) $W_1 < 0, W_2 > 0$	A_1 B_1	$u^* = 0, v^* = 0$	普通的“bang-bang”控制
(2) $W_1 < cW_2, W_2 > 0$	A_2 —	$u^* = 0, v^* = \frac{\theta}{\gamma}$	普通的“bang-bang”控制
(3) $W_1 < 0, W_2 = 0$	A_3 B_3	$u^* = 0, 0 < v^* \leq \min\left(1, \frac{B}{\gamma}\right)$	奇异控制
(4) $0 < W_1 < cW_2$	B_4 —	$u^* = -\frac{\kappa - \gamma}{\gamma C}, v^* = 1$	普通的“bang-bang”控制
(5) $W_1 < 0, W_2 > 0$	B_5 B_6	$u^* = 0, v^* = 1$	普通的“bang-bang”控制
(6) $W_1 = 0, W_2 > 0$	—	$0 < u^* < \frac{B - \kappa}{\gamma D}, v^* = 1$	奇异控制

参 考 文 献

- [1] 板和爱等,《最优控制数值解法的新课题》,应用数学与计算数学期刊,2期1983年。
- [2] 王培德等,《求解非线性最佳控制问题的改进直接多重打靶算法》,控制理论及其应用年会,1987年。
- [3] 侯明,《求解一类最佳轨迹问题的直接多重打靶算法》,西北工大硕士论文,1988年。
- [4] 梁学章,《解最佳控制问题的最优化方法》,吉林大学资料,1978年。
- [5] 梁学章、马合元,《关于用共轭梯度法求解具有控度约束的最佳控制问题的一点改进意见和计算经验》,吉大资料。
- [6] 宫锡芳,《最优控制问题的计算方法》,科学出版社,1979年。
- [7] 叶庆凯,《优化与控制计算方法》,科学出版社,1987年。
- [8] 何旭初等,《约束最优化方法》,南京大学出版社,1986年。
- [9] 席少霖,《约束变尺度方法》,运筹学杂志,Vol.4 No.1,1985年。
- [10] 李庆杨等,《数值分析》,华中工学院出版社,1981年。
- [11] P·亨利西,包雪松等译,《常微分方程离散变量方法》,科学出版社,1985年。
- [12] 张建中,《约束极值的SQP方法》,高校应用数学学报,Vol.2 No.2,1987年。
- [13] 席少霖、赵凤治,《最优化计算方法》,上海科技出版社,1981年。
- [14] 《一种最优控制问题的计算方法》,吉大资料。
- [15] (西德),海宁·吐尔,《最优化方法》,机械工业出版社,1984年。
- [16] 张光澄、张国川,《求解最优控制问题直接方法》,控制理论及应用年会,1988年。
- [17] 张国川,《最优控制直接方法研究》,成都科大硕士论文,1989年。
- [18] (美)格雷格·诺尔斯,《应用最佳控制引论》,上海科技文献出版社,1985年。
- [19] G·B·Dantzig, Linear Control Processes and mathematical Programming, J·SIAM Control, 1966, Vol 4 No.1.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И · Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.

- [20] C · T · Kelley and E · W · Sachs, Quasi-Newton methods and unconstrained optimal Control problems, J · SIAM Control and optimization , 1987, Vol 25 No. 6.
- [21] H · G · Bock and K · J · Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal Control problems, in proc 8th Conf. IFAC, 1984.
- [22] P · E · Gill and W · Murray, Quasi-Newton methods for unconstrained Optimizaton, J · Inst · Math · Appl ·, 1972.
- [23] И · А · Крылов И Ф · Л · Черноусако, О Методе постепенно-вильных Приложений для решения Задачи оптимального Управления ЖКМ в М · Ф2, №6, 1962.