

# Математические основы робототехники

lec-02-dof

05.10.2021

## Что будет

- Степени подвижности
- Прямая кинематика
- Параметры Денавита-Хартенберга
- Примеры

## Зачем

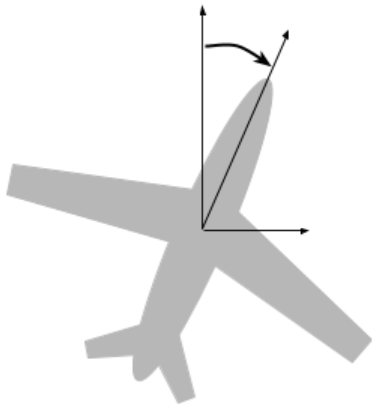
- Чтобы знать положение и ориентацию звеньев манипулятора
- Чтобы вычислять положение выходного звена, например, зная только углы, на которые повернуты сочленения

## Структура робота

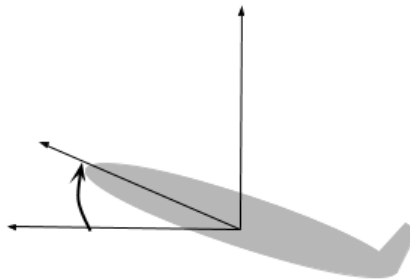


Число **степеней свободы** (степеней подвижности) – количество параметров, необходимое для описания движения твердого тела

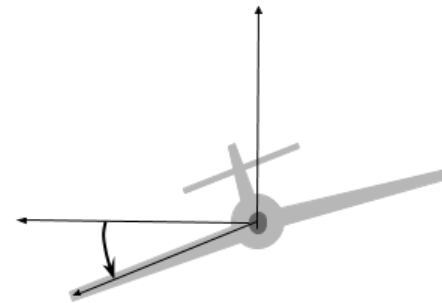
Например, у твердого тела в  $\mathbb{R}^3$  **6 степеней подвижности**: помимо перемещения по координатным осям  $x, y, z$  вперед/назад, вправо/влево, вверх/вниз, он может осуществлять повороты



*Рысканье*



*Тангаж*



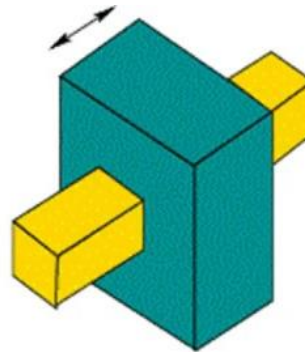
*Крен*

## Кинематические пары



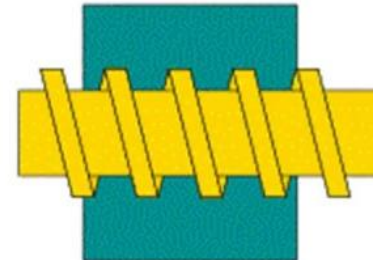
**Revolute**

1 Degree of Freedom



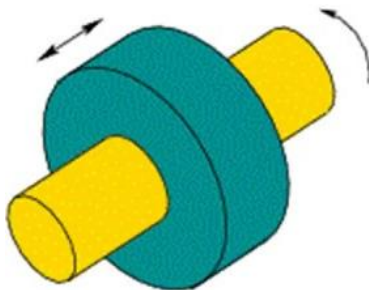
**Prismatic**

1 Degree of Freedom



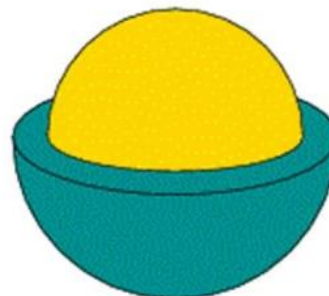
**Screw**

1 Degree of Freedom



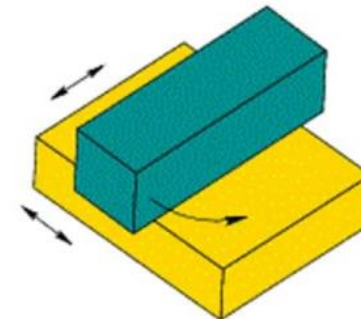
**Cylindrical**

2 Degrees of Freedom



**Spherical**

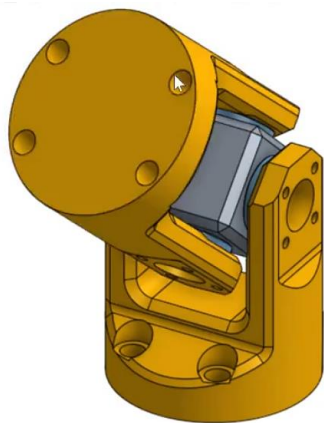
3 Degrees of Freedom



**Planar**

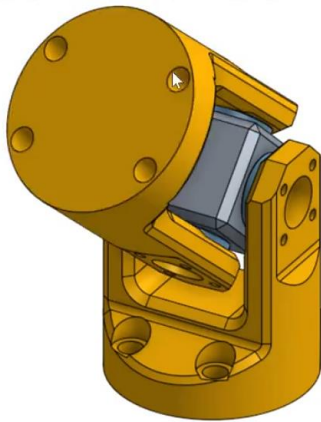
3 Degrees of Freedom

## Универсальное соединение



## Grubler's Criterion

$$F = \lambda (n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$



$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

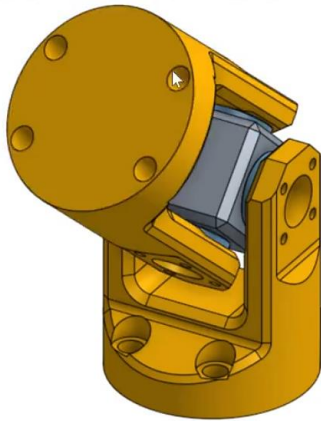
$\lambda$  – число степеней свободы в пространстве

$f_i$  – число степеней свободы, допустимых  
сочленением  $i$

*Универсальное соединение имеет 2 степени подвижности*

## Grubler's Criterion

$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$



$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

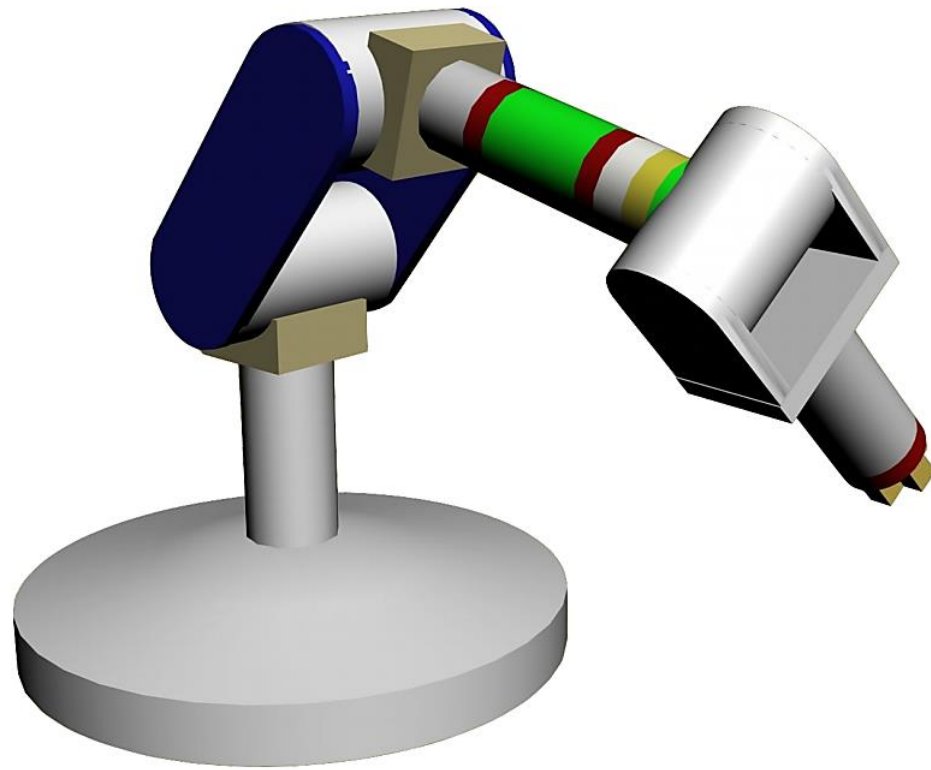
$j$  – число сочленений

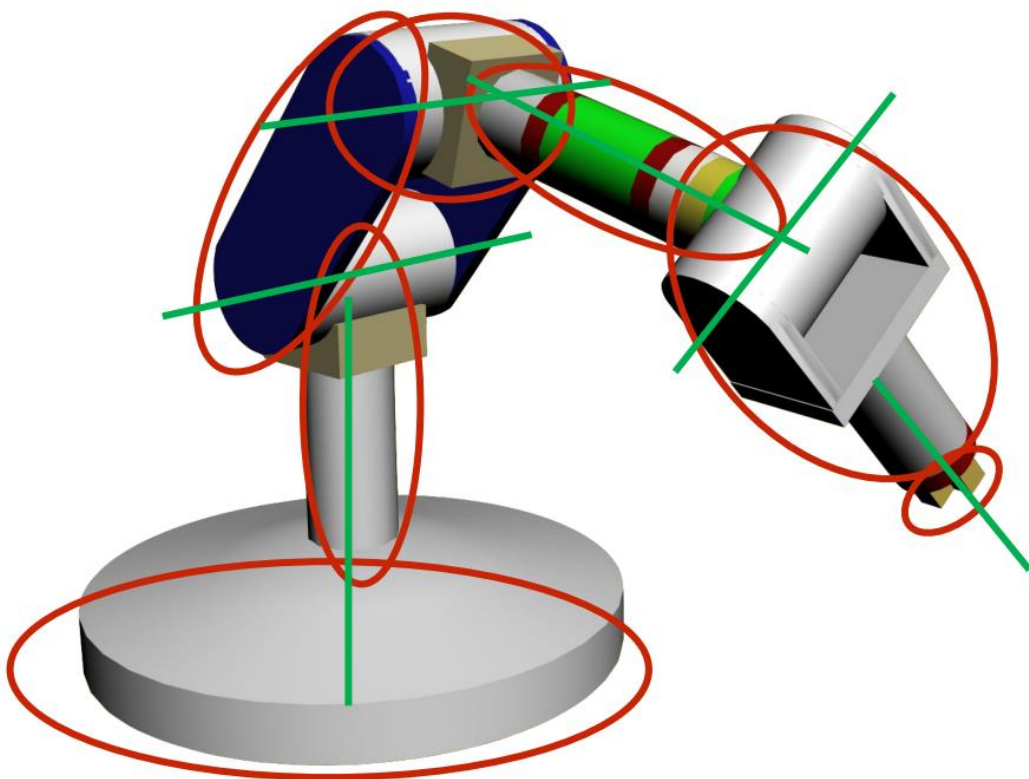
$\lambda$  – число степеней свободы в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы, ограниченных сочленением  $i$

*Универсальное соединение имеет 2 степени подвижности*







$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

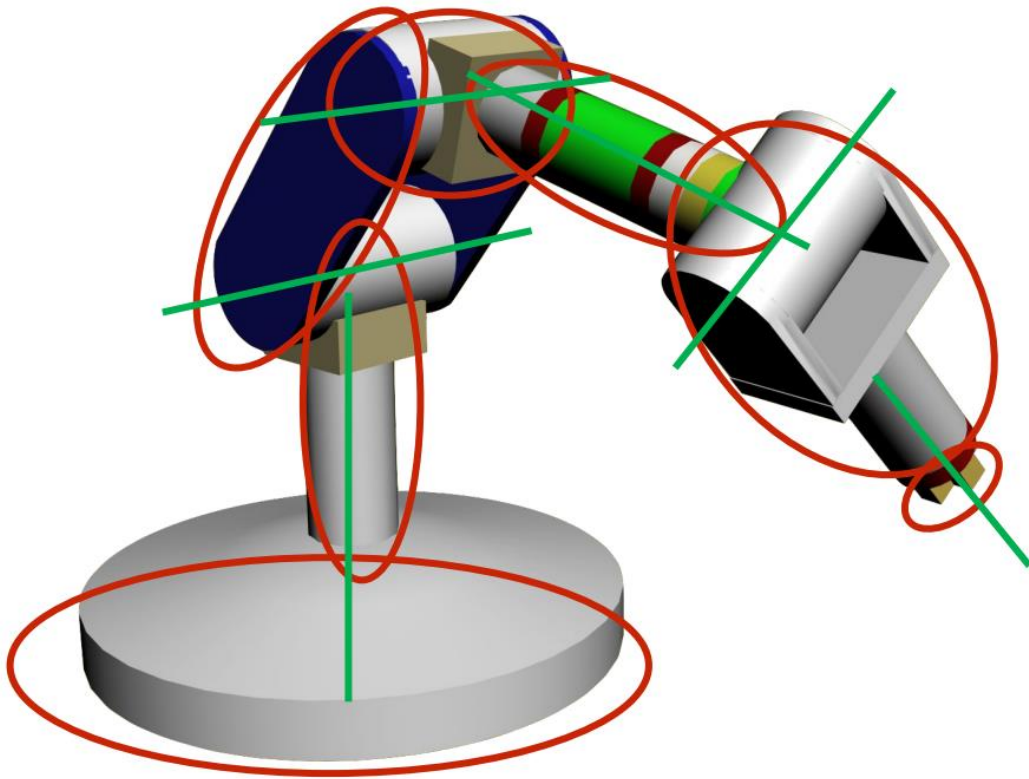
$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$



$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

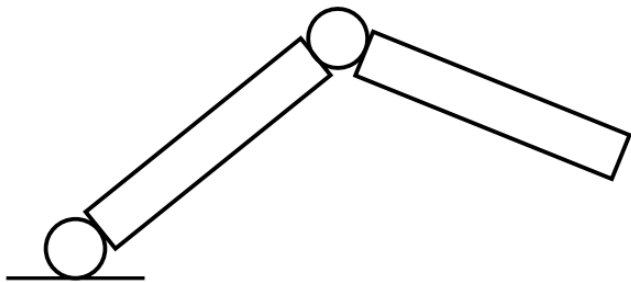
$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$

$$F = 6 \cdot (7 - 1) - 6 \cdot 5 = 6$$



$$F = \lambda (n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

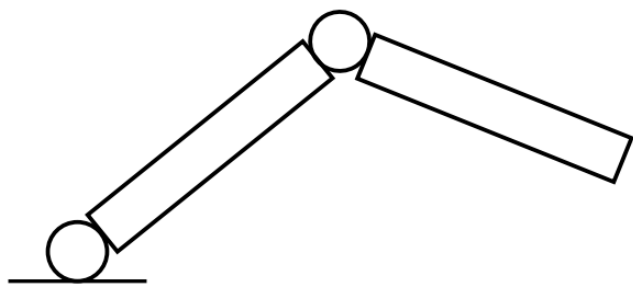
$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$f_i$  – число степеней свободы,  
допустимых сочлениением  $i$



*2 степени подвижности*

$$F = \lambda (n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

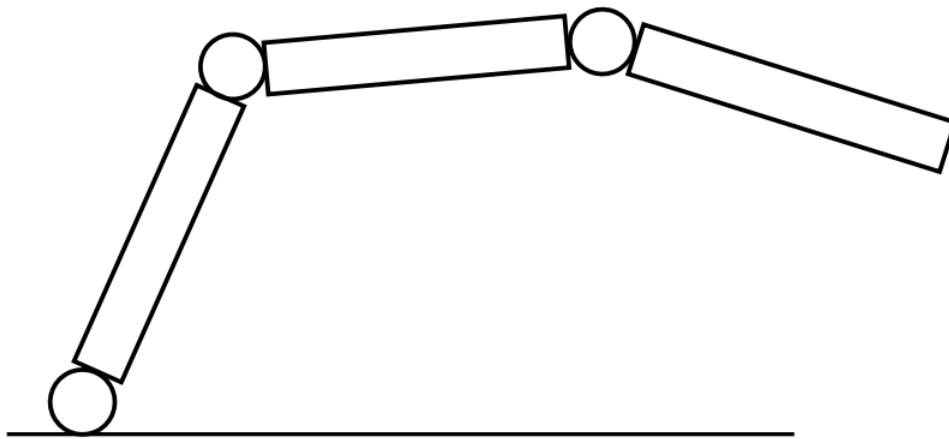
$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$f_i$  – число степеней свободы,  
допустимых сочленением  $i$



$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

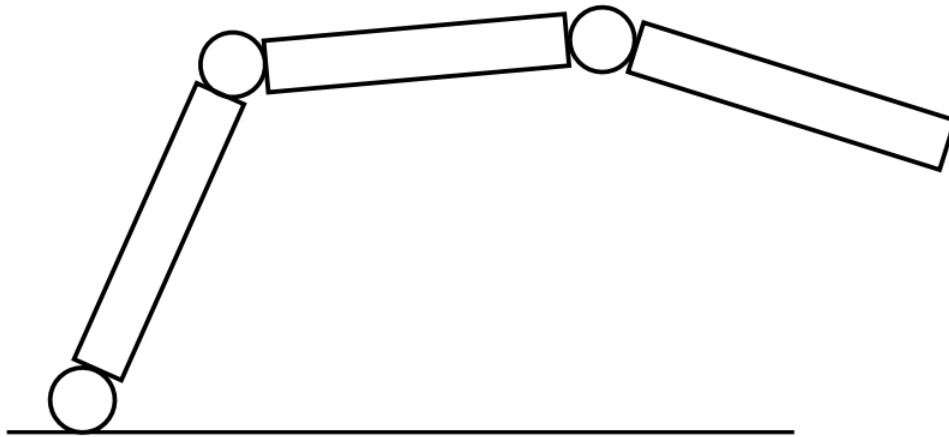
$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$



*3 степени подвижности*

$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

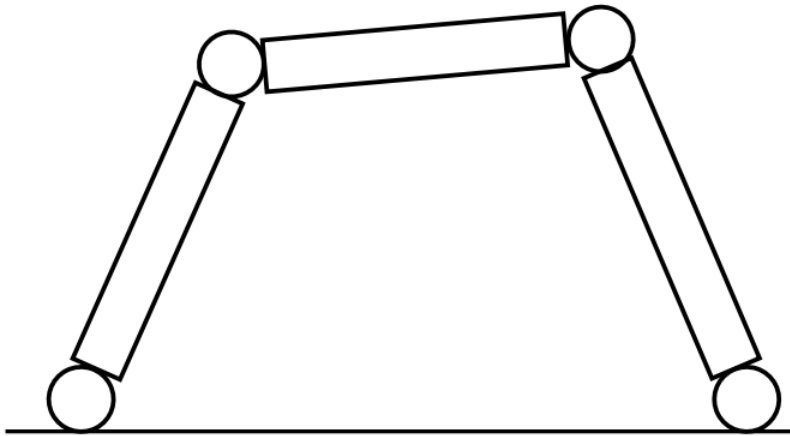
$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$



$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

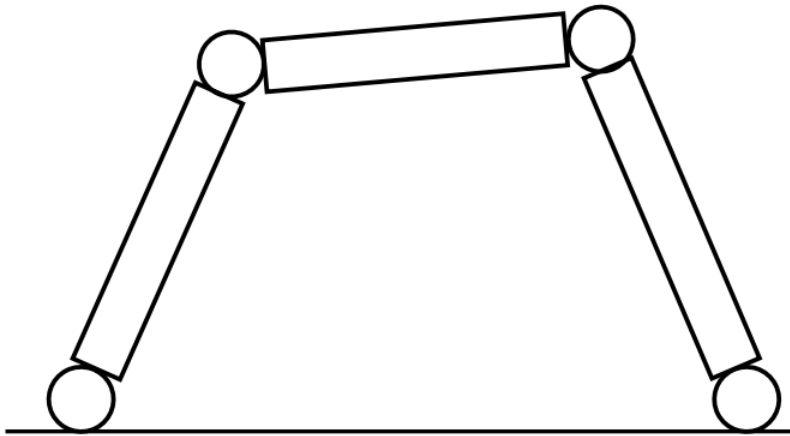
$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$





*Четырехзвенная замкнутая цепь  
1 степень подвижности*

$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

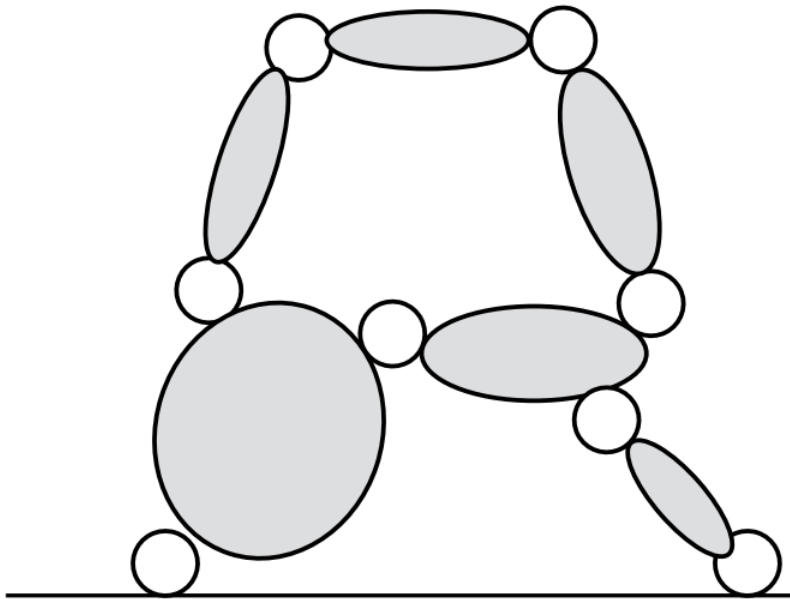
$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$

*Две четырехзвенных замкнутых цепи  
позволяют менять точку освещенности,  
не меняя угол направления света*



### «Сложный» пример



$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

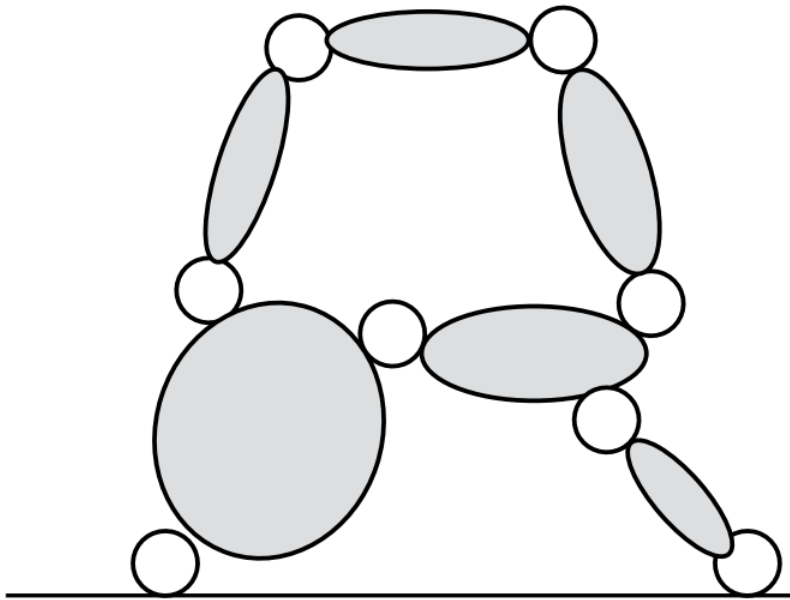
$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$

## «Сложный» пример



*Две четырехзвенных замкнутых цепи,  
каждая с 1 степенью подвижности*

$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

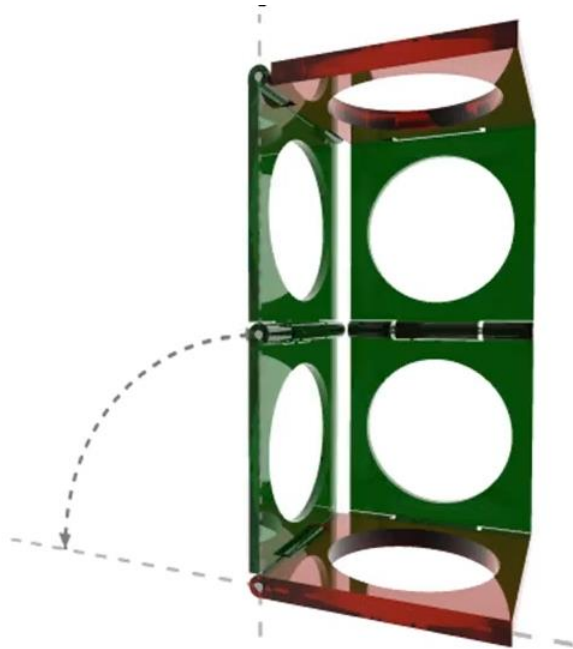
$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$

Формула работает не всегда!



*1 степень подвижности,  
но  $F = 6 \cdot (6 - 1) - 6 \cdot 5$*

$$F = \lambda (n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i$$

$F$  – число степеней подвижности

$n$  – число звеньев

$j$  – число сочленений

$\lambda$  – число степеней свободы  
в пространстве

$c_i$  – число степеней свободы,  
ограниченных сочленением  $i$

## Вопрос

Сколько степеней подвижности имеет робот?

