Векторы. Линейные операции над векторами.

Определение 1. Направленный отрезок (или, что то же, упорядоченную пару точек) мы будем называть ***вектором***.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, **a**.

Нулевой вектор (у которого начало и конец совпадают): $\vec{0}$. Вектор характеризуется длиной и направлением.

Под модулем (длиной) вектора $\vec{a}$ понимаем его численное значение без учета направления.

$|\vec{a}| = a$, $|\vec{0}| = 0$

Вектор, длина которого равна 1 – единичный вектор. $|\vec{e}| = 1$.

Если ненулевой вектор $\vec{a}$ разделить на его длину получим единичный вектор (орт) направления. $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Определение 2. Два вектора называются ***равными***, то есть не различаются как векторы, если соответствующие отрезки параллельны, имеют одинаковую длину и направление.

Будем считать, что любые два равных вектора это один и тот же ***свободный*** вектор, то есть вектор, у которого не фиксировано конкретное начало и конец, так как направленный отрезок можно передвинуть параллельно самому себе и вектор при этом не изменится. В связи с этим слова "вектор параллелен прямой (плоскости)" и "вектор лежит на прямой (плоскости)" означают одно и то же.

Нулевой вектор направления не имеет. Считается, что он параллелен и перпендикулярен любому вектору.

Определение 3. Векторы называются ***коллинеарными***, если они параллельны одной прямой.

Определение 4. Векторы называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости.

Линейные операции над векторами.

Определение 5. *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ служат сторонами параллелограмма, а вектор $\vec{c}$ его диагональю. (рис 1.).

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

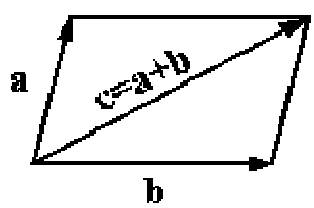


Рис.1.Сложение векторов по правилу параллелограмма.

Это сложение называется ***сложением по правилу параллелограмма***. Однако бывает более удобным использовать для сложения *правило треугольника.* Очевидно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.

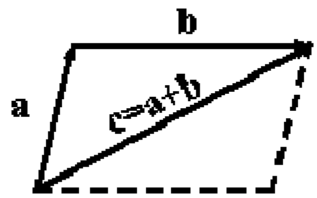


Рис. 2.Правило треугольника

Для каждого вектора $\vec{a}$ вектор существует ему противоположный – имеющий ту же длину, но противоположный по направлению. Он обозначается $-\vec{a}$.

$\vec{a}+(-\vec{a})=0$

Определение 6. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}$ и вектора противоположного $\vec{b}:\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$.

Графически можно также изобразить разность векторов по правилу треугольника и параллелограмма.

Определение 7. *Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число α* называется вектор $\vec{b}$, определяемый условием

1. $|\vec{b}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2. вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на α обозначается $\alpha\vec{a}$.(Рис.3.) $-1{,}5\vec{a}$

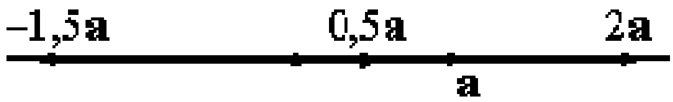


Рис.3 .Умножение вектора на число

Замечание. Иногда числа называют ***скалярами***. Таким образом, мы дали определение умножения вектора на скаляр.

Основные свойства операций сложения и умножения вектора на число.

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любых вещественных чисел α, β выполняются следующие свойства:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство *коммутативности* операции сложения);
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (свойство *ассоциативности* операции сложения);
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (свойство ассоциативности по отношению к числам);
5. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (свойство *дистрибутивности* по отношению к умножению на число);
6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (свойство дистрибутивности по отношению к умножению на вектор;
7. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Линейной пространство. Базис в линейном пространстве.

Определение 1. Пусть L – множество, элементы которого будем называть векторами. Говорят, что L образует линейное пространство над $\mathbb{R}$, если для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} \in L$ определн элемент $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in L$, и для любого вектора $\boldsymbol{a} \in L$ и числа $\alpha \in L$ определен вектор $\alpha\boldsymbol{a}$.

Примеры: Множество геометрических векторов на прямой можно назвать одномерным векторным пространством, множество векторов на плоскости двумерным векторным пространством, в пространстве – трехмерным в. пространством.

Определение 2. Пусть L – линейное пространство и $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n} \in L$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Вектор

$$\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{a_i}$$

называется ***линейной комбинацией векторов*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Определение 3. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется ***линейно – зависимой***, если среди векторов системы существует вектор, являющийся линейной комбинацией остальных.

Теорема. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ линейно – независима тогда и только тогда, когда равенство $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Определение 4. Линейное пространство называется n – мерным если в нем существует n и не более линейно - независимых векторов.

Обозначение: L^n, n – размерность линейного пространства.

Определение 5. Базисом в L^n называется линейно – независимая система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Теорема. Любой вектор $\vec{a}$ линейного пространства может быть единственным образом разложен по базису, т. е. представлен в виде линейной комбинацией базисных векторов.

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Т.е. координатами (или компонентами) вектора $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называются коэффициенты разложения вектора по векторам базиса.

Базисом в одномерном векторном пространстве (на прямой) называется любой ненулевой вектор коллинеарный прямой.

Базисом в двумерном векторном пространстве (на плоскости) называются два некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом в трехмерном векторном пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Утверждения:

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор $\vec{c}$ компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть представлен в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α и β – координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

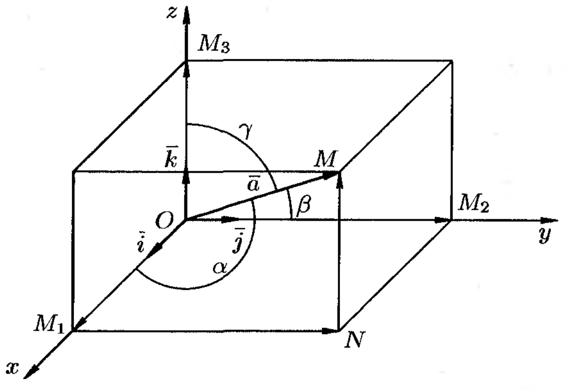
2. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ три некомпланарных вектора. Тогда любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ– координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Можно записывать $\vec{d} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

Прямоугольная (Декартова) система координат в пространстве.

Декартова система координат в пространстве задается началом координат точкой O и базисом, состоящим из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (ортов) координатных осей OX, OY и OZ соответственно.

Выберем вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат т.O. Обозначим точку M как конец вектора. Вектор $\overrightarrow{OM}$ - радиус – вектор точки M. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Т.е. координатами вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат будут x, y, z.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$$

Координаты точки M и вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадают: $M(x, y, z)$.

Зная координаты вектора можно найти его модуль: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Линейные операции над векторами заданными в координатной форме.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами. $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Можно записать: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$ и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Примеры: $\vec{a} = (1, -2, 3)$ $\vec{b} = (4, 0, 5)$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1+4, -2+0, 3+5) = (5, -2, 8)$$

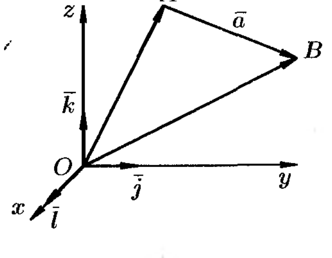
$$\vec{a} - \vec{b} = (1-4, -2-0, 3-5) = (-3, -2, -2)$$

$$2\vec{a} = (2\cdot 1, 2\cdot(-2), 2\cdot 3) = (2, -4, 6)$$

$$-3\vec{b} = ((-3)\cdot 4,\ (-3)\cdot 0,\ (-3)\cdot 5) = (-12, 0, -15)$$

Расстояние между двумя точками.

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.



Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Следовательно, координаты вектора равны разности координат его конца и начала.

Расстояние между точками *A* и *B*: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример: $A(1, 0, -3)\; B(4, 2, -1)$

$\overrightarrow{AB} = (4-1, 2-0, -1-(-3)) = (3, 2, 2)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

Деление отрезка в данном отношении.

Отношением в котором точка *M* делит отрезок M_1M_2 называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$ через координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Координаты векторов:

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$.

Векторы равны если равны их соответствующие координаты, из этого условия: $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (\lambda \cdot (x_2 - x), \lambda \cdot (y_2 - y), \lambda \cdot (z_2 - z))$

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

Аналогично $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Если точка *M* – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$.

Координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\; y = \frac{y_1 + y_2}{2},\; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример: $M_1(3, -5, 8)$ $M_2(7, 13, -6)$.

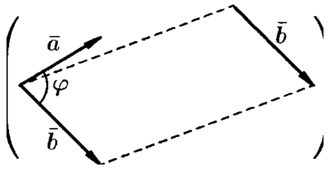
Координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x = \frac{3+7}{2} = 5,\; y = \frac{-5+13}{2} = 4,\; z = \frac{8-6}{2} = 1.$$

$M(5, 4, 1)$

Угол между двумя векторами.

Определение. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют наименьший угол φ ($0 \le \varphi \le \pi$) на который нужно повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Скалярное произведение векторов.

Определение: Назовем скалярным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла φ между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$.

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения.

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$. (Переместительное свойство).
2. $\alpha\cdot(\vec{a},\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$ (Сочетательное свойство).
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ (Распределительное свойство).
4. $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.
5. *Условие перпендикулярности векторов.*

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\vec{b}=0$ и $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Пусть даны два вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$. Найдем их скалярное произведение.

Так как $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ можно умножить их как многочлены, используя свойства скалярного произведения.

$$(\vec{a},\vec{b})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}^{\,2}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+y_1y_2\vec{j}^{\,2}+y_1z_2\vec{j}\vec{k}$$

$$z_1x_2\vec{k}\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\vec{j}+z_1z_2\vec{k}^2=(*)$$

$\vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{i}=\vec{i}\vec{k}=\vec{k}\vec{i}=\vec{k}\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=0$ (так как все векторы взаимно перпендикулярны.)

$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^2=1$

$(*)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Условие перпендикулярности векторов: $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

Примеры: 1. Даны векторы $\vec{a}=(4,-2,-4)$, $\vec{b}=(6,-3,2)$.

Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$.

$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=24+6-8=22$

$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}\vec{a}-9\vec{b}^2=2\vec{a}^2+3\vec{a}\vec{b}-9\vec{b}^2=$

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=\left(\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\right)^2=36$$

$$\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=\left(\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}\right)^2=49$$

$=2\cdot 36+3\cdot 22-9\cdot 49=-303$

2. Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Для этого нужно доказать, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны.

$\overrightarrow{AC}=(-5,3,-1)$, $\overrightarrow{BD}=(-6,-9,3)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-5)\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3=0$

Угол между векторами.

Определим угол φ между векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

Из определения скалярного произведения: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, т.обр.

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B.

Внешний угол будет определяться как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $-\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}=(-3,0,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(7,0,1)$

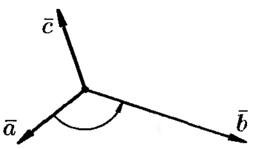
$$\cos\varphi=\frac{(-3)\cdot 7+(-4)\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{-25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

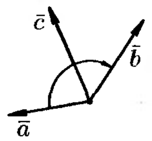
$\varphi=3\pi/4$

Векторное произведение векторов.

Правая и левая тройка векторов.

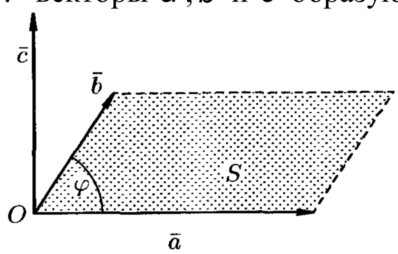
Определение. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой (левой), если направление вектора $\vec{c}$ таково, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то поворот по кратчайшему пути от $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виден как поворот против (по) часовой стрелке.





Определение. Векторными произведением вектора на вектор называется вектор , который:

1. перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;
2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.



Обозначение: $\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a},\,\vec{b}]$.

Свойства векторного произведения.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times a$. (Свойство анти-коммутативности.)

2. $\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$. (Сочетательное свойство относительно скалярного множителя.)

3. $(\vec a+\vec b)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c$. (Распределительное свойство.)

4. Два ненулевых вектора $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\vec a\|\vec b \Leftrightarrow \vec a\times\vec b=0$

Следовательно $\vec a\times\vec a=0$, а также $\vec i\times\vec i=\vec j\times\vec j=\vec k\times\vec k=0$.

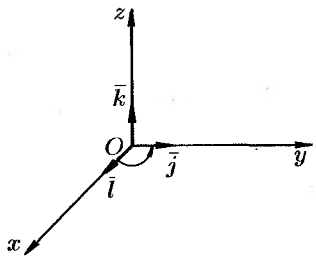
Выражение векторного произведения через координаты векторов.

Пусть даны два вектора $\vec a=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec b=(x_2,y_2,z_2)$. Найдем их векторное произведение.

$\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ и $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ умножим их как многочлены, используя свойства векторного произведения.

$$[\vec a,\vec b]=(x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k)\times(x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k)=x_1x_2\vec i\times\vec i+x_1y_2\vec i\times\vec j+x_1z_2\vec i\times\vec k+y_1x_2\vec j\times\vec i+y_1y_2\vec j\times\vec j$$
$$z_1x_2\vec k\times\vec i+z_1y_2\vec k\times\vec j+z_1z_2\vec k\times\vec k=(*)$$

Найдем векторные произведения между ортами $\vec i,\vec j,\vec k$.



$\vec i\times\vec j=\vec k$

Т.к. $\vec i\times\vec j=-\vec j\times\vec i$, то $\vec j\times\vec i=-\vec k$.

Аналогично

$\vec k\times\vec i=\vec j$, $\vec i\times\vec k=-\vec j$

$\vec j\times\vec k=\vec i$, $\vec k\times\vec j=-\vec i$

Подставим в (*) полученные выражения и учтем свойство 4.

$$(*)=x_1y_2\vec k-x_1z_2\vec j-y_1x_2\vec k+y_1z_2\vec i+z_1x_2\vec j-z_1y_2\vec i=$$
$$=y_1z_2\vec i-z_1y_2\vec i+z_1x_2\vec j-x_1z_2\vec j+x_1y_2\vec k-y_1x_2\vec k=(y_1z_2-z_1y_2)\vec i-(x_1z_2-z_1x_2)\vec j+(x_1y_2-y_1x_2)\vec k=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\vec i-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\vec j+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\cdot\vec k=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

Примеры. 1. Даны векторы $\vec a=(3,-1,-2)$, $\vec b=(1,2,-1)$. Вычислить $\vec a\times\vec b$.

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\cdot\vec i-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}\cdot\vec j+\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\cdot\vec k=5\cdot\vec i-(-1)\cdot\vec j+7\cdot\vec k$$

$\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$

2. Вычислить площадь ΔABC, если вершины $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(5, 4, 3)$.

Согласно определению векторного произведения векторов $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, что является площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Т.е. $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ и тогда $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 2, 3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (-12) \cdot \vec{i} - (-6) \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (6)^2 + (12)^2} = \sqrt{144 + 36 + 144} = \sqrt{324} = 18$$

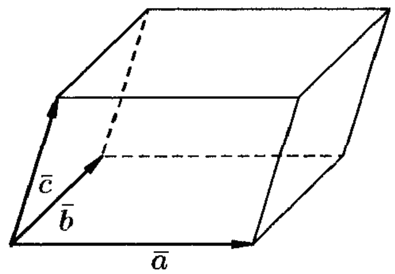
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, где первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор.

Геометрический смысл выражения $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.



Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Поэтому обозначение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. (без знаков векторного и скалярного произведений.)

2. Векторное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, но меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов сомножителей $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.
3. Смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарны.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов.

Пусть заданы три вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$. Найдем их смешанное произведение, используя координатные выражения для векторного и скалярных произведений.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Координаты векторного произведения: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$.

Умножим скалярно на $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot z_3=\begin{vmatrix}x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Полученную формулу можно преобразовать к виду:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Вычисление объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется как $V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на тех же векторах $V=\frac{1}{6}\cdot|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Примеры:

1. Даны векторы $\vec{a}=(2,-1,0)$, $\vec{b}=(3,-2,4)$, $\vec{c}=(1,-2,5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -3 & 5\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot 11=15$$

2. Проверить, лежат ли 4 точки *A*(1, 2, -1), *B*(0, 1,5), *C*(-1, 2, 1) и *D*(2, 1, 3) в одной плоскости.

Составим 3 вектора из данных точек и найдем их координаты: $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,4)$. Данные векторы должны лежать в одной плоскости и следовательно быть компланарными.

Убедимся в этом

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 2-(-1)\cdot(-10)+6\cdot 2=-2-10+12=0$$

Условие компланарности векторов выполняется, то есть точки лежат в одной плоскости.

3. Даны вершины тетраэдра $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(0,\ -1,\ 1)$, $C(2,\ 5,\ 2)$, $D(3,\ 0,\ -2)$. Найти его объем.

Найдем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на которых построен данный тетраэдр (треугольная пирамида).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -1)$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (3, 0, -2)$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-$$

$$= 17 - 9 + 16 = 24$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot 24 = 6$$