Лабораторная работа 1

1. Напишите функцию, которая возвращает двум кватернионам их произведение.

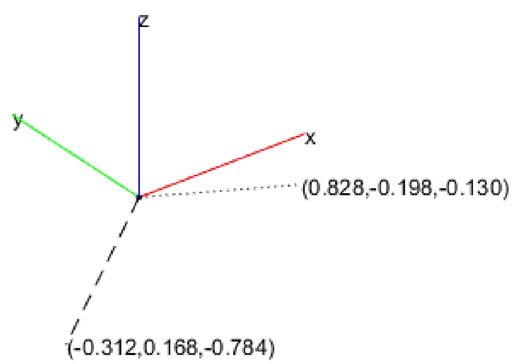
   Протестируйте ее на двух произвольных (единичных) кватернионах.

2. Отобразите на рисунке трехмерную систему координат (в робототехнике принято ось X отображать красным, ось Y – синим, а ось Z – зеленым), отметьте начало координат черной точкой и не забудьте подписать оси.

   Сгенерируйте произвольную матрицу поворота, произвольный вектор и примените к нему поворот.

   Отобразите на том же рисунке исходный (штрихом) и получившийся (точкой) векторы, подпишите их координаты.

   Вам пригодятся функции: plot3, text, num2str. В результате должно получится примерно следующее:



3. Преобразуйте представление ось ω – угол θ в кватернион

   3.1. $\omega = [\,-0.1457,\ 0.5976,\ -0.7884\,],\ \theta = 3.5112$

   3.2. $\omega = [\,0.4928,\ 0.5435,\ 0.6795\,],\ \theta = 3.5366$

   3.7. $\omega = [\,-0.1380,\ -0.8528,\ -0.5037\,],\ \theta = 6.1800$

   3.8. $\omega = [\,0.0351,\ 0.5640,\ -0.8251\,],\ \theta = 2.4076$

4. Преобразуйте кватернион $Q = [\,Q_s,\ Q_x,\ Q_y,\ Q_z\,]$ в матрицу поворота R согласно формуле:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2\,Q_y^2 - 2\,Q_z^2 & 2\,Q_x\,Q_y - 2\,Q_z\,Q_s & 2\,Q_x\,Q_z + 2\,Q_y\,Q_s \\ 2\,Q_x\,Q_y + 2\,Q_z\,Q_s & 1 - 2\,Q_x^2 - 2\,Q_z^2 & 2\,Q_y\,Q_z - 2\,Q_x\,Q_s \\ 2\,Q_x\,Q_z - 2\,Q_y\,Q_s & 2\,Q_y\,Q_z + 2\,Q_x\,Q_s & 1 - 2\,Q_x^2 - 2\,Q_y^2 \end{bmatrix}$$

   4.1. $Q = [\,-0.4161,\ 0.3523,\ -0.3074,\ 0.7800\,]$

   4.2. $Q = [\,0.9010,\ -0.0131,\ -0.3935,\ 0.1818\,]$

   4.7. $Q = [\,0.6442,\ -0.5851,\ -0.3146,\ 0.3791\,]$

   4.8. $Q = [\,-0.3169,\ 0.1932,\ -0.6358,\ 0.6768\,]$

5. Преобразуйте матрицу поворота R в представление ось $\omega = [\,\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\,]$ – угол θ согласно формулам:

$$\theta = \operatorname{acos} \frac{\operatorname{trace}(R) - 1}{2}, \qquad \omega = \frac{1}{2\sin\theta}\,[\,R_{32} - R_{23},\ R_{13} - R_{31},\ R_{21} - R_{12}\,].$$

   Несмотря на то, что одной матрице поворота R соответствуют два эквивалентных решения $(\,\omega,\,\theta\,)$ и $(\,-\omega,\,-\theta\,)$, задание ограничено случаем $\theta \in [\,0,\,\pi\,]$. Однако необходимо учесть особые точки, при которых $2\sin\theta = 0$. При $\theta = 0$ существует бесконечное число решений, и в этом случае $\omega = [\,\mathrm{NaN},\ \mathrm{NaN},\ \mathrm{NaN}\,]$. При $\theta = \pi$ существует два решения, вычислить которые можно по формуле:

$$R = \begin{bmatrix} \omega_x^2\,\nu_\theta + c_\theta & \omega_x\,\omega_y\,\nu_\theta - \omega_z\,s_\theta & \omega_x\,\omega_z\,\nu_\theta + \omega_y\,s_\theta \\ \omega_x\,\omega_y\,\nu_\theta + \omega_z\,s_\theta & \omega_y^2\,\nu_\theta + c_\theta & \omega_y\,\omega_z\,\nu_\theta - \omega_x\,s_\theta \\ \omega_x\,\omega_z\,\nu_\theta - \omega_y\,s_\theta & \omega_y\,\omega_z\,\nu_\theta + \omega_x\,s_\theta & \omega_z^2\,\nu_\theta + c_\theta \end{bmatrix},$$

где $c_\theta = \cos\theta,\ s_\theta = \sin\theta,\ \nu_\theta = 1 - \cos\theta$.

Для проверки на особые точки используйте следующие матрицы:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.1. $R = \begin{bmatrix} -0.5092 & -0.0269 & 0.8602 \\ 0.7973 & 0.3617 & 0.4833 \\ -0.3242 & 0.9319 & -0.1628 \end{bmatrix}$

5.7. $R = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.0401 & 0.9992 \\ 0.8698 & -0.4929 & -0.0222 \\ 0.4934 & 0.8692 & 0.0335 \end{bmatrix}$

5.2. $R = \begin{bmatrix} -0.4434 & -0.4486 & 0.7760 \\ 0.8961 & -0.2012 & 0.3957 \\ -0.0214 & 0.8708 & 0.4912 \end{bmatrix}$

5.8. $R = \begin{bmatrix} -0.8299 & 0.2217 & 0.5120 \\ 0.3220 & -0.5592 & 0.7640 \\ 0.4557 & 0.7989 & 0.3927 \end{bmatrix}$

6. Напишите функцию quat_slerp, чтобы продемонстрировать SLERP (spherical linear interpolation) двух кватернионов и промежуточных между ними.

   - кватернион q_0 — начальная ориентация;
   - кватернион q_1 — конечная ориентация;
   - переменная steps — общее число кватернионов, включая промежуточные между q_0 и q_1.

   Функция должна возвращать матрицу q_int размерности steps $\times$ 4, которая хранит все промежуточные кватернионы, включая сами q_0 (первая строка матрицы) и q_1 (последняя строка матрицы).

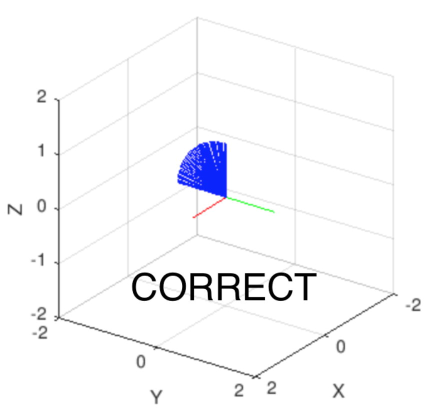
   Угол между (единичными) кватернионами можно найти, используя скалярное произведение:

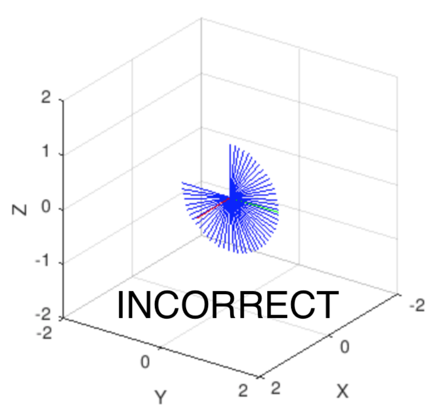
$$\cos\Omega = q_0 \cdot q_1.$$

   Промежуточный кватернион в момент времени t вычисляется согласно формуле:

$$q_t = \frac{\sin\left((1-t)\,\Omega\right)}{\sin\Omega}\, q_0 + \frac{\sin\left(t\,\Omega\right)}{\sin\Omega}\, q_1.$$

   Важно! При написании функции необходимо «найти» кратчайший путь между двумя поворотами:





   Для тестирования алгоритма необходимо сохранить изменения в функции quat_slerp и запустить perform_slerp. Там же можно регулировать начальные значения q_0, q_1 и steps.