Математические основы робототехники

lec-04

08.10.2021

Задачи кинематики

Шарнирное пространство

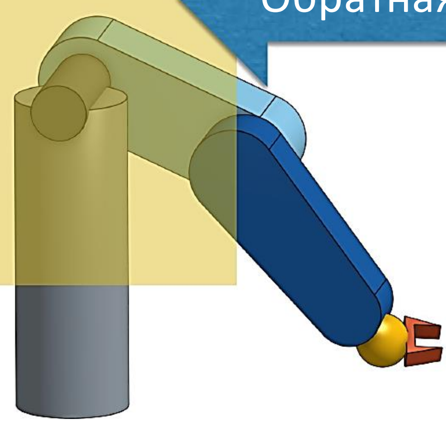
$$\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots q_n]^T$$

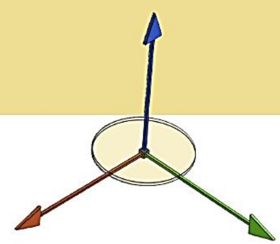
Прямая

Обратная

Декартово пространство

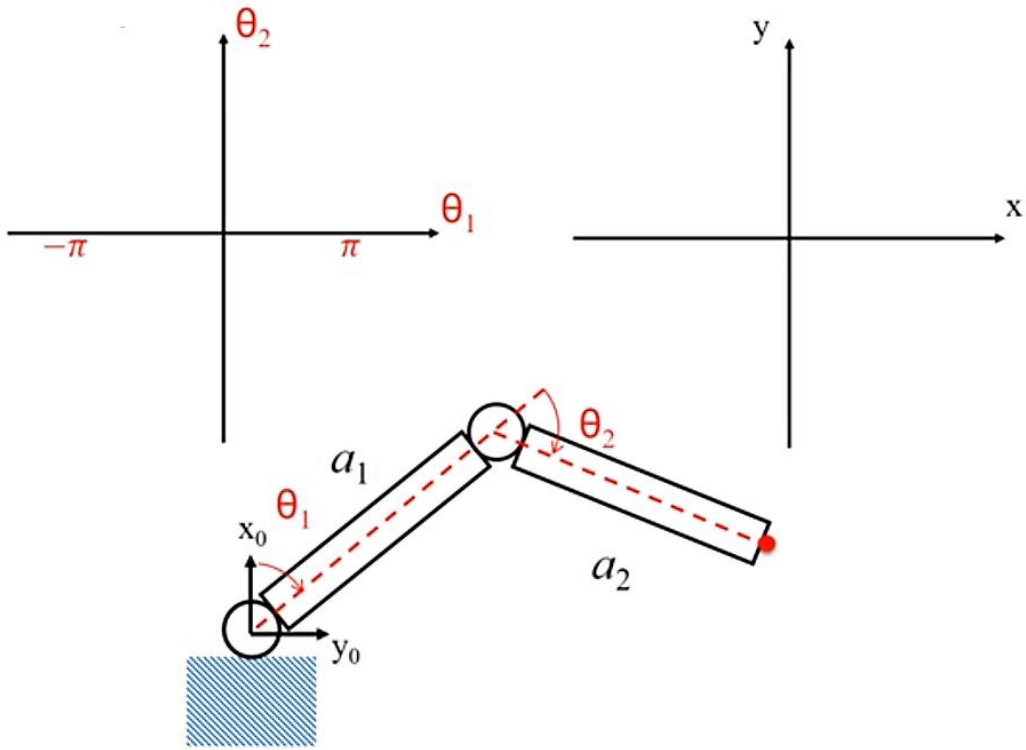
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{R}] & [\boldsymbol{P}] \\ [\boldsymbol{0}] & 1 \end{bmatrix}$$





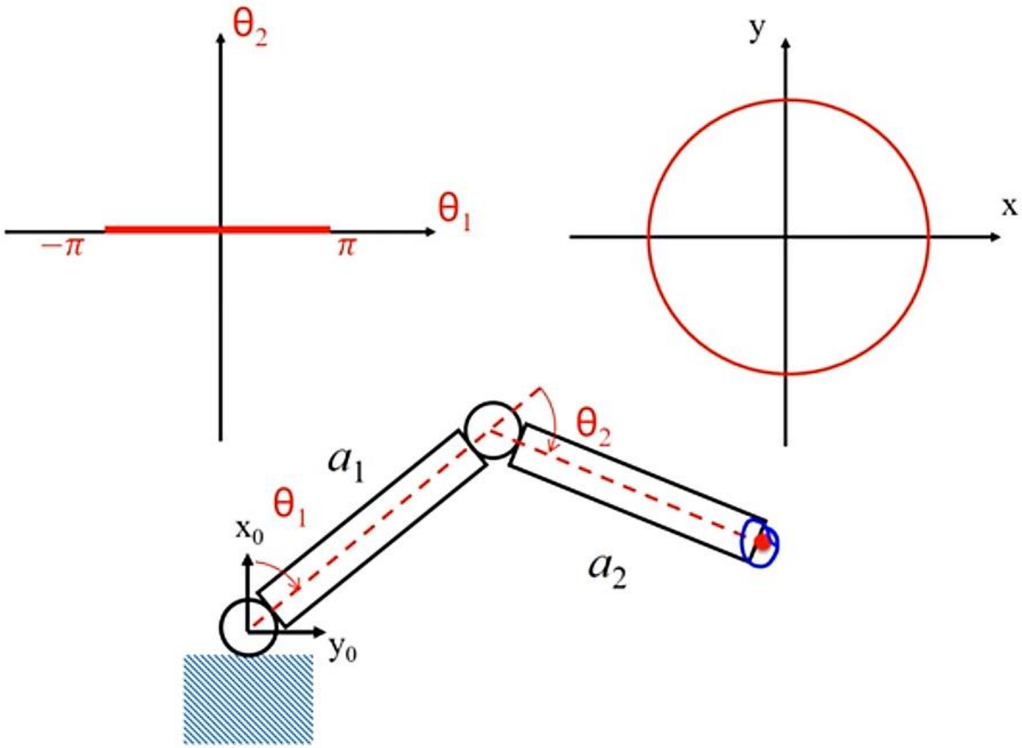
Отображение пространств

Шарнирное пространство *Декартово пространство*



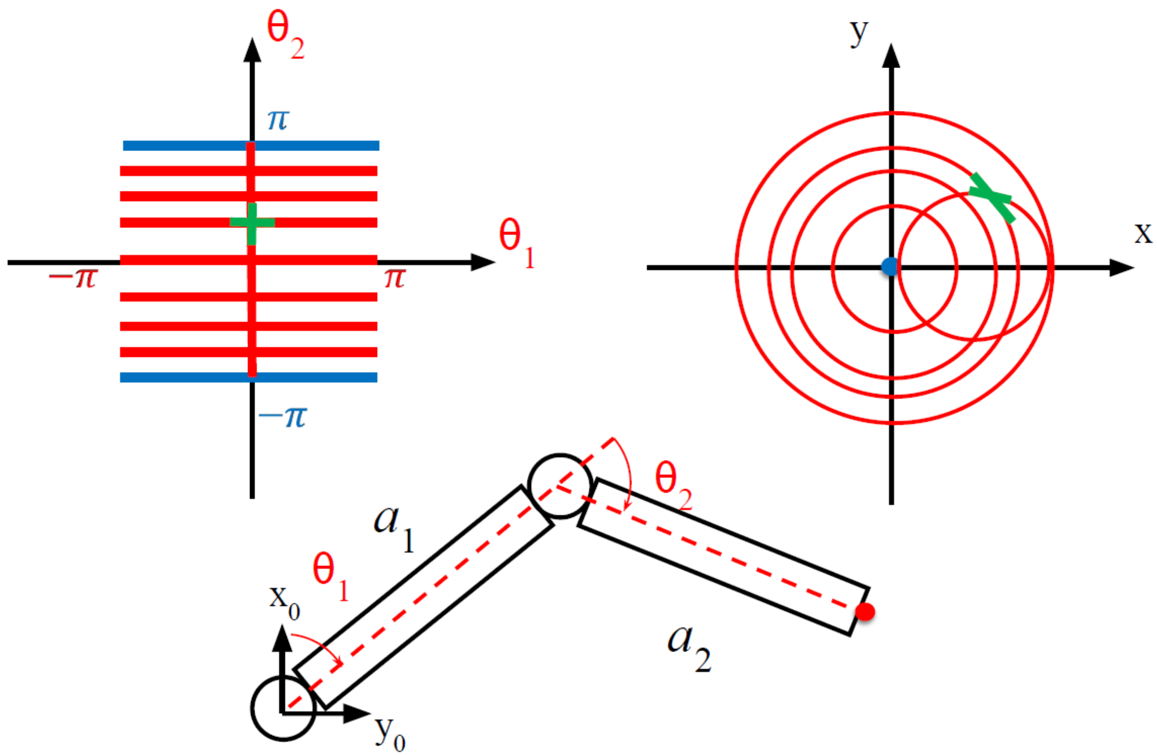
Отображение пространств

Шарнирное пространство *Декартово пространство*



Отображение пространств

Шарнирное пространство *Декартово пространство*



Матрица Якоби

$$\dot{x} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$
$$\dot{y} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$
$$\dot{z} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$
$$\dot{\phi} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$
$$\dot{\theta} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$
$$\dot{\psi} = f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\boldsymbol{q}}$$

Матрица Якоби

$$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_1} \quad \cdots \quad \frac{\delta \mathbf{f}}{\partial q_n}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$$

Матрица Якоби для манипулятора

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \\ \dot{y} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \\ \dot{z} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n\end{aligned}\right\} \boldsymbol{v} = \mathbf{J}_v\,\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\phi} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \\ \dot{\theta} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \\ \dot{\psi} &= f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + \cdots + f_n(\boldsymbol{q})\dot{q}_n\end{aligned}\right\} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_\omega\,\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\boldsymbol{q}}$$

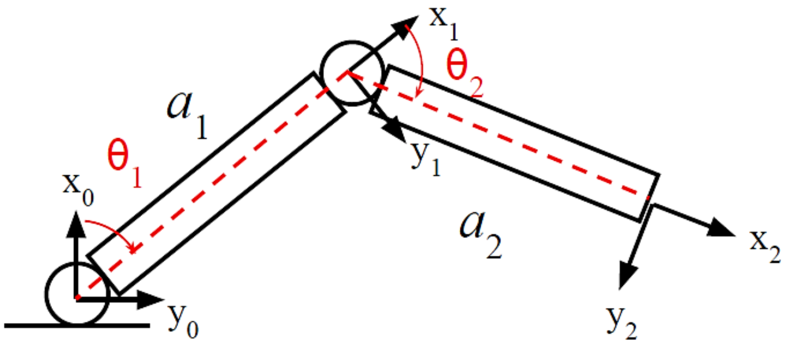
Матрица Якоби для положения

$$\boldsymbol{T_{0n}} = \boldsymbol{A}_0 \ldots \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{R}] & [\boldsymbol{P}] \\ [\boldsymbol{0}] & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

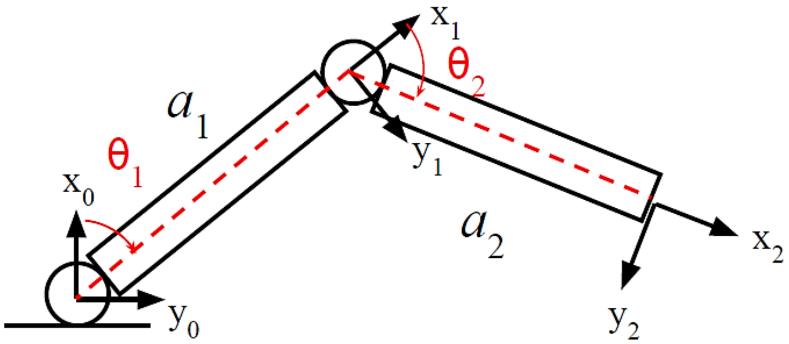
Матрица Якоби для положения

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T_{0n}} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{R}] & [\boldsymbol{P}] \\ [\boldsymbol{0}] & 1 \end{bmatrix}$$



Матрица Якоби для положения

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x}{\partial q_1} = -a_1 s_1 - a_2 s_{12} \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -a_2 s_{12}$$



Матрица Якоби для положения

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x}{\partial q_1} = -a_1s_1 - a_2s_{12} \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -a_2s_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = a_1c_1 + a_2c_{12} \quad \frac{\partial y}{\partial q_2} = a_2c_{12}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_1c_{12} & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{J}_v \, \dot{\boldsymbol{q}}$$

Матрица Якоби для положения

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{P}} = \mathbf{J}_v \, \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{0n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{0n}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\mathbf{J}_{v_i} = \frac{\partial \boldsymbol{P}_{0n}}{\partial q_i}$$

$$\mathbf{J}_v = \left[[\mathbf{J}_{v_1}] \quad \cdots \quad [\mathbf{J}_{v_n}] \right]$$

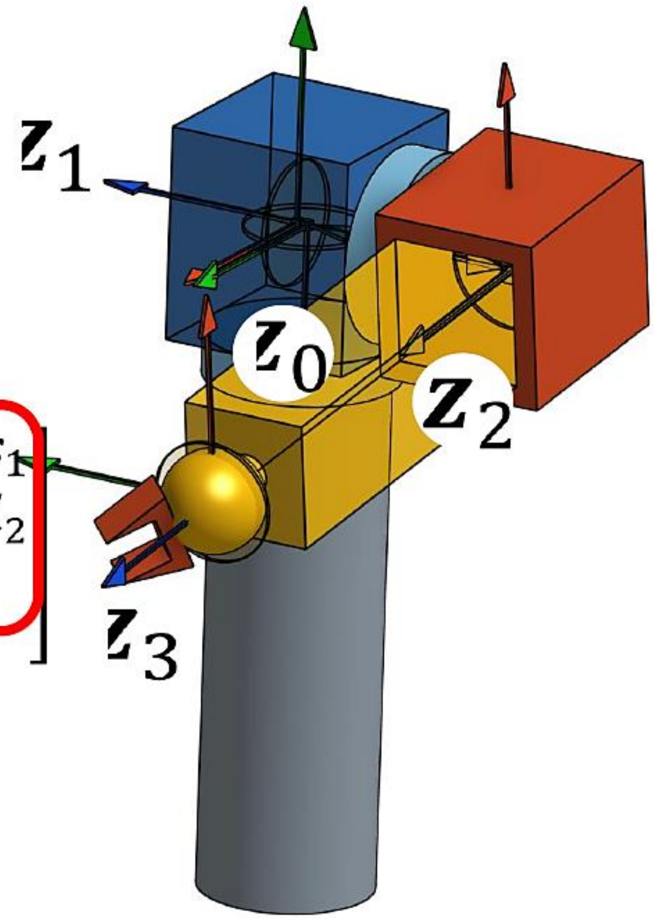
Матрица Якоби для положения (поступательный шарнир)

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\theta_1}$
2	0	90	d_2	$\underline{\theta_2}$
3	0	0	$\underline{d_3}$	0

$$\mathbf{J}_{v_i} = \frac{\partial \boldsymbol{P}_{0n}}{\partial q_i}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \frac{\partial \boldsymbol{P}_{01}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{02}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{03}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$\boldsymbol{T}_{03} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & d_3c_1s_2 - d_2s_1 \\ c_2s_1 & c_1 & s_1s_2 & d_3s_1s_2 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



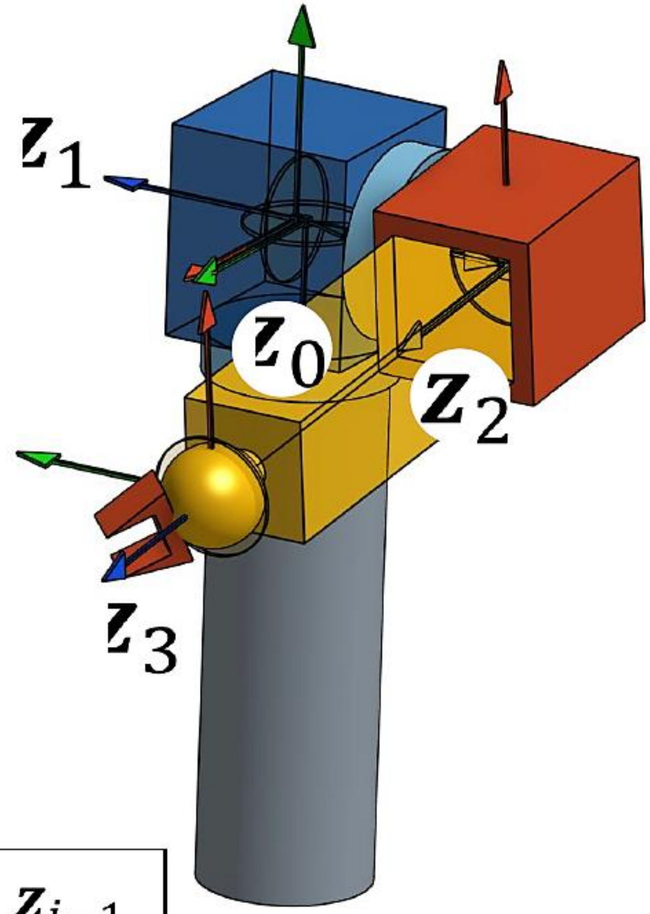
$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \begin{bmatrix} c_1s_2 \\ s_1s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\dot{d}_3$$

Матрица Якоби для положения (поступательный шарнир)

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta}_1}$
2	0	90	d_2	$\underline{\boldsymbol{\theta}_2}$
3	0	0	$\underline{d_3}$	0

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \frac{\partial \boldsymbol{P}_{01}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{02}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{03}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \mathbf{z}_2\dot{q}_3 \qquad \mathbf{J}_{v_3} = \mathbf{z}_2$$



$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\dot{d}_3$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{v_i} = \mathbf{z}_{i-1}}$$

Матрица Якоби для положения (поступательный шарнир)

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\theta_1}$
2	0	90	d_2	$\underline{\theta_2}$
3	0	0	$\underline{d_3}$	0

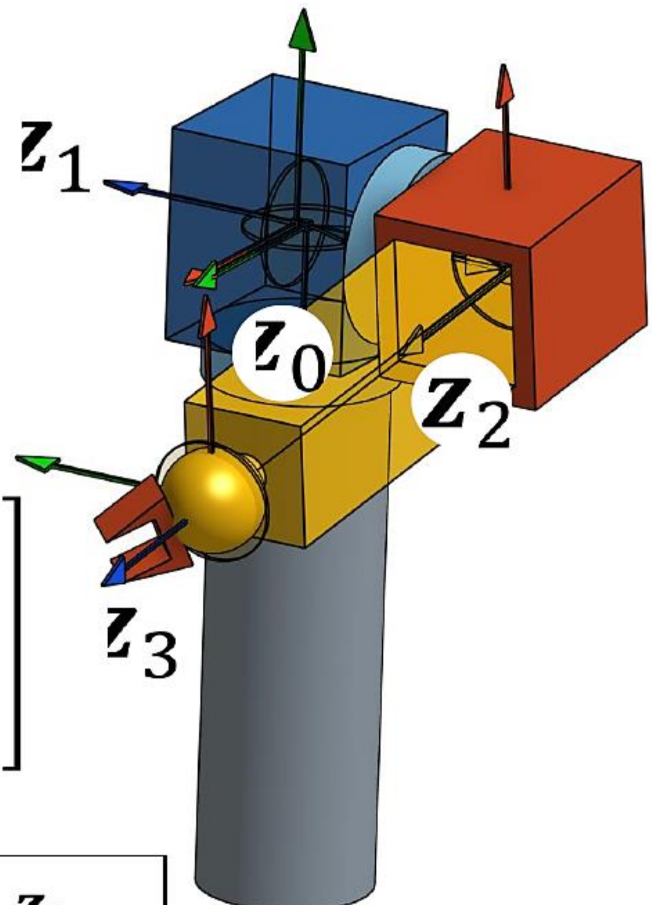
$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \frac{\partial \boldsymbol{P}_{01}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{02}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{P}_{03}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \boldsymbol{z}_2\dot{q}_3 \qquad \mathbf{J}_{v_3} = \boldsymbol{z}_2$$

$$T_{02} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & -s_1 & \boxed{\begin{matrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{matrix}} & -d_2 s_1 \\ c_2 s_1 & c_1 & & d_2 c_1 \\ -s_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

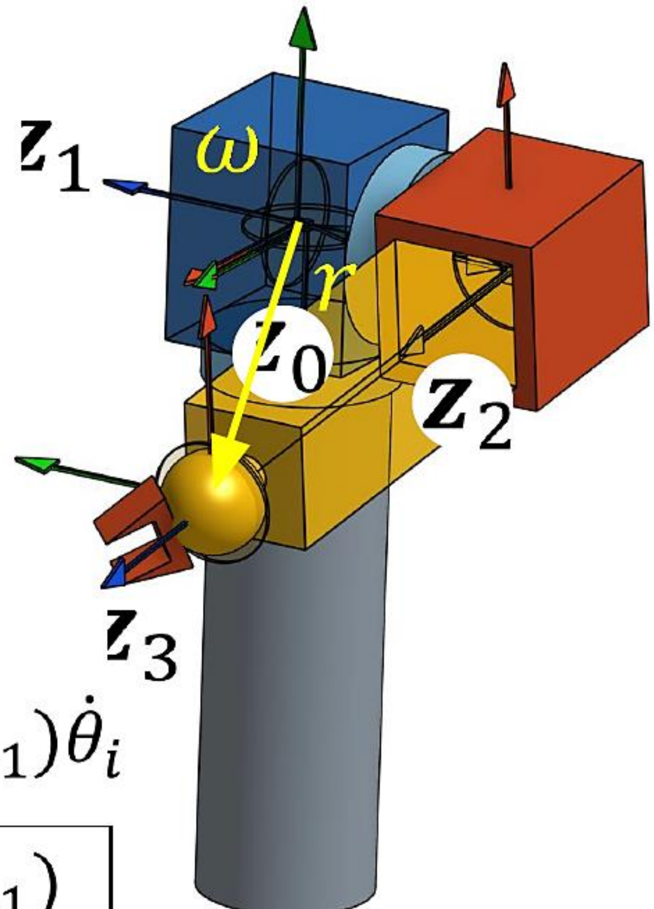
$$\dot{\boldsymbol{P}}_{03} = \boxed{\begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}}\dot{d}_3$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{v_i} = \boldsymbol{z}_{i-1}}$$



Матрица Якоби для положения (вращательный шарнир)

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta}_1}$
2	0	90	d_2	$\underline{\boldsymbol{\theta}_2}$
3	0	0	$\underline{\boldsymbol{d}_3}$	0



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{i-1})$$

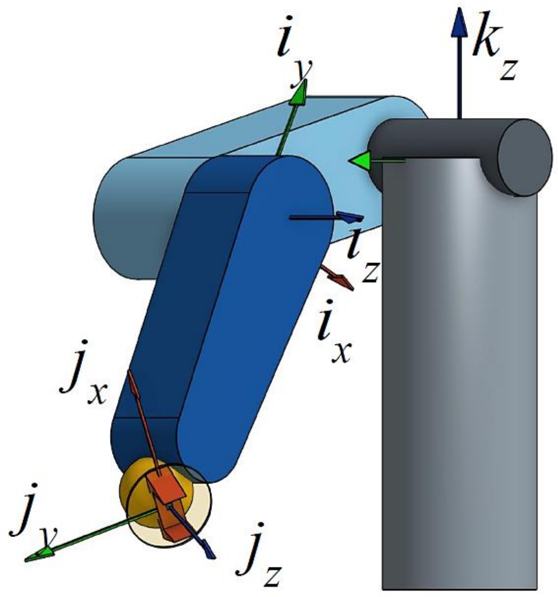
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{i-1})\dot{\theta}_i$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{v_i} = \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{i-1})}$$

Матрица Якоби для ориентации

$$\omega = \mathbf{J}_\omega(q)\dot{\boldsymbol{q}}$$

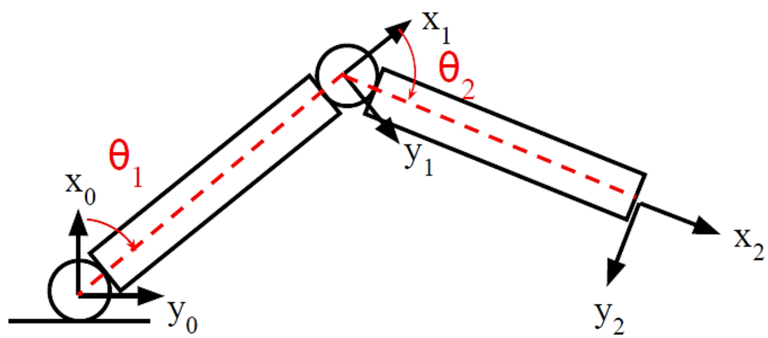
$$\omega_{ij}^{k}$$



ω – угловая скорость системы j относительно системы i в терминах системы k

Матрица Якоби для ориентации

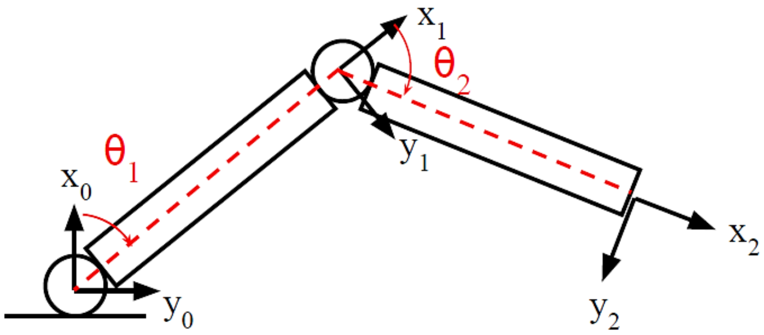
$$\omega_{01}^{0} = 0\hat{x}_0 + 0\hat{y}_0 + \dot{\theta}_1\hat{z}_0$$



Матрица Якоби для ориентации

$$\omega_{01}^{0} = 0\hat{x}_0 + 0\hat{y}_0 + \dot{\theta}_1\hat{z}_0$$

$$\omega_{12}^{1} = 0\hat{x}_1 + 0\hat{y}_1 + \dot{\theta}_2\hat{z}_1$$

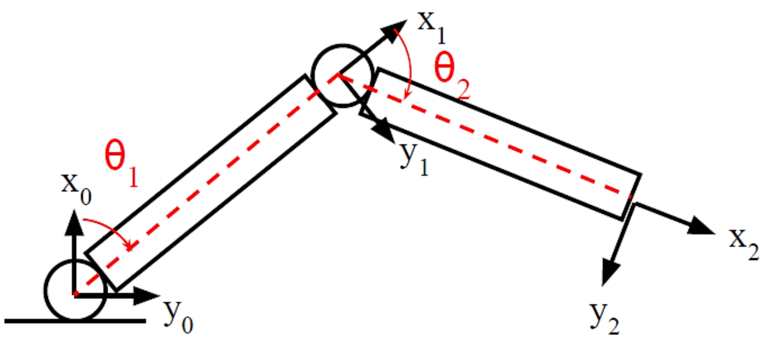


Матрица Якоби для ориентации

$$\omega_{01}^{0} = 0\hat{x}_0 + 0\hat{y}_0 + \dot{\theta}_1\hat{z}_0$$

$$\omega_{12}^{1} = 0\hat{x}_1 + 0\hat{y}_1 + \dot{\theta}_2\hat{z}_1$$

$$\omega_{12}^{0} = \boldsymbol{R}_{01}\omega_{12}^{1}$$



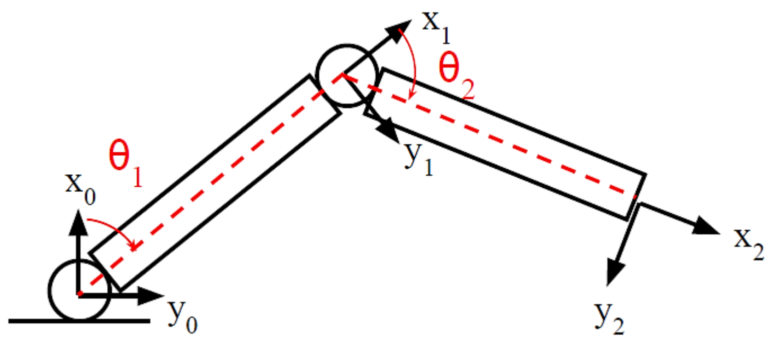
Матрица Якоби для ориентации

$$\omega_{01}^{0} = 0\hat{x}_0 + 0\hat{y}_0 + \dot{\theta}_1\hat{z}_0$$

$$\omega_{12}^{1} = 0\hat{x}_1 + 0\hat{y}_1 + \dot{\theta}_2\hat{z}_1$$

$$\omega_{12}^{0} = \boldsymbol{R}_{01}\omega_{12}^{1}$$

$$\omega_{02}^{0} = \omega_{01}^{0} + \boldsymbol{R}_{01}\omega_{12}^{1} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)\hat{z}_0$$



Матрица Якоби для ориентации

$$\omega_{01}^{0} = 0\hat{x}_0 + 0\hat{y}_0 + \dot{\theta}_1\hat{z}_0$$

$$\omega_{12}^{1} = 0\hat{x}_1 + 0\hat{y}_1 + \dot{\theta}_2\hat{z}_1$$

$$\omega_{12}^{0} = \boldsymbol{R}_{01}\omega_{12}^{1}$$

$$\omega_{02}^{0} = \omega_{01}^{0} + \boldsymbol{R}_{01}\omega_{12}^{1} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)\hat{z}_0$$

$$\omega_{0n}^{0} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_{0(i-1)}\omega_{i-1\,i}^{i-1}$$

Вращательный шарнир

$$\omega_{0n}^{0} = \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{i-1}\dot{\theta}_i$$

Матрица Якоби для ориентации

Поступательный шарнир $\mathbf{J}_\omega = 0$

$$\rho_i = \begin{matrix} 0 \text{ if } i \text{ is prismatic} \\ 1 \text{ if } i \text{ is revolute} \end{matrix}$$

$$\boxed{\mathbf{J}_\omega = [[\rho_1 \hat{\mathbf{z}}_0] \quad \cdots \quad [\rho_n \hat{\mathbf{z}}_{n-1}]]}$$

$$\omega_{0n}^0 = \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{i-1} \dot{\theta}_i$$

Матрица Якоби (для положения и ориентации)

$$\mathbf{J} = [[\mathbf{J}_1][\mathbf{J}_2] \quad \cdots \quad [\mathbf{J}_n]]$$

Вращательный шарнир

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{P}_{i-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \end{bmatrix}$$

Поступательный шарнир

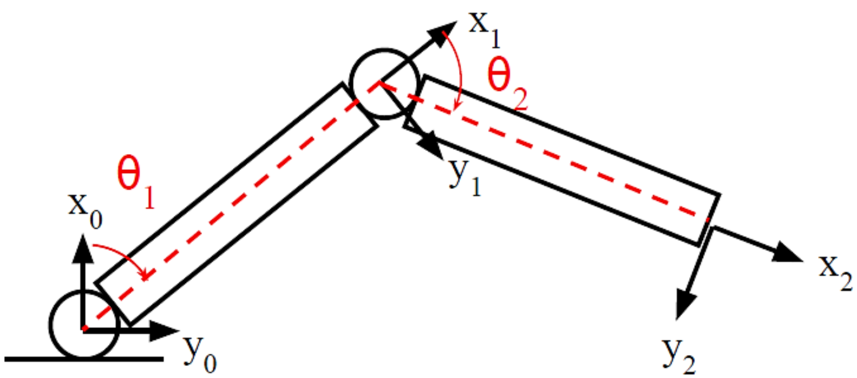
$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример: матрица Якоби для двухзвенного манипулятора

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \\ \hat{\mathbf{z}}_0 & \hat{\mathbf{z}}_1 \end{bmatrix}$$

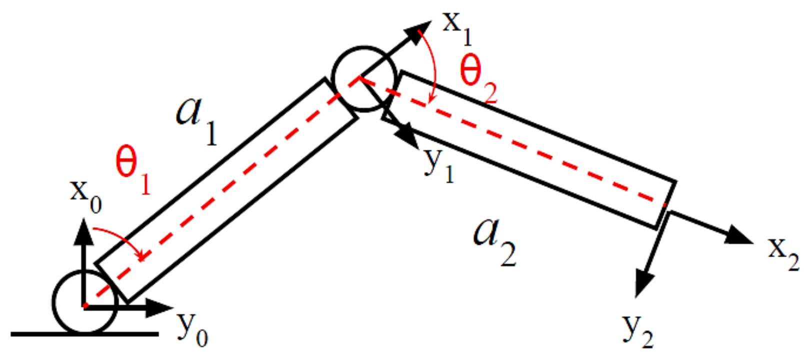
Вращательные шарниры

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{i-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \end{bmatrix}$$



Пример: матрица Якоби для двухзвенного манипулятора

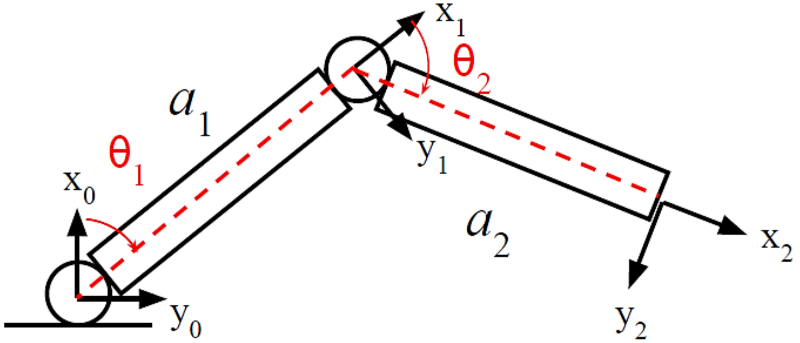
$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \\ \hat{\mathbf{z}}_0 & \hat{\mathbf{z}}_1 \end{bmatrix}$$



Пример: матрица Якоби для двухзвенного манипулятора

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \\ \hat{\mathbf{z}}_0 & \hat{\mathbf{z}}_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

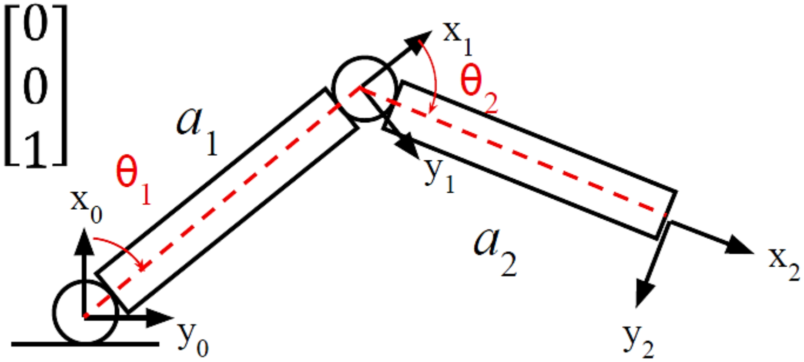


Пример: матрица Якоби для двухзвенного манипулятора

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \\ \hat{\mathbf{z}}_0 & \hat{\mathbf{z}}_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = \hat{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Пример: матрица Якоби для двухзвенного манипулятора

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 c_{12} \\ a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

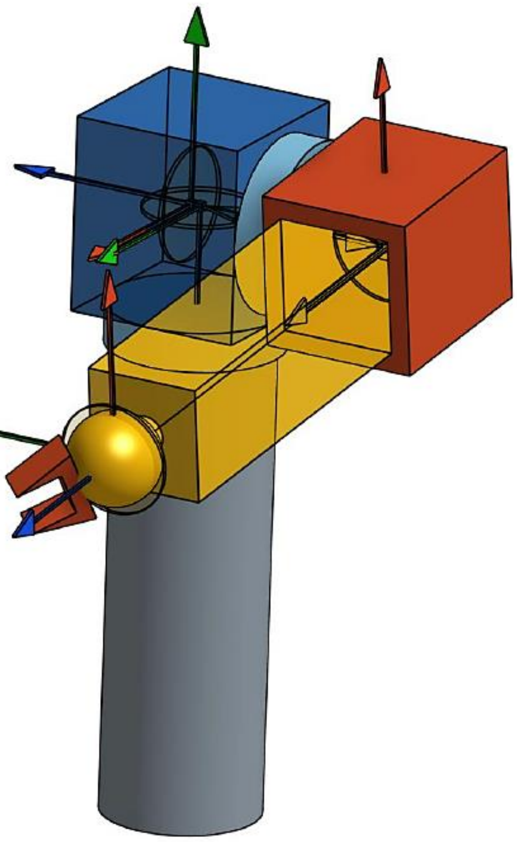
Еще один пример

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta}_1}$
2	0	90	d_2	$\underline{\boldsymbol{\theta}_2}$
3	0	0	$\underline{\boldsymbol{d}_3}$	0

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_{i-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_{i-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \end{bmatrix}, \qquad i = 4,5,6$$



1. Находим все матрицы преобразований

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta_1}}$
2	0	90	d_2	$\underline{\boldsymbol{\theta_2}}$
3	0	0	$\underline{\boldsymbol{d_3}}$	0
4	0	-90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta_4}}$
5	0	90	0	$\underline{\boldsymbol{\theta_5}}$
6	0	0	d_6	$\underline{\boldsymbol{\theta_6}}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Вычисляем значения положений P_i и осей z_i и элементы матрицы Якоби

```
T01 = a1
T02 = T01*a2
T03 = T02*a3
T04 = T03*a4
T05 = T04*a5
T06 = T05*a6
```

```
Z0 = [0;0;1]; P0 = [0;0;0]
Z1 = T01(1:3, 3)
Z2 = T02(1:3, 3)
Z3 = T03(1:3, 3)
Z4 = T04(1:3, 3)
Z5 = T05(1:3, 3)
Z6 = T06(1:3, 3)
P1 = T01(1:3, 4)
P2 = T02(1:3, 4)
P3 = T03(1:3, 4)
P4 = T04(1:3, 4)
P5 = T05(1:3, 4)
P6 = T06(1:3, 4)
```

```
Jp1 = cross(Z0,P6-P0)
Jo1 = Z0
Jp2 = cross(Z1,P6-P1)
Jo2 = Z1
Jp3 = Z2
Jo3 = [0;0;0]
Jp4 = cross(Z3,P6-P3)
Jo4 = Z3
Jp5 = cross(Z4,P6-P4)
Jo5 = Z4
Jp6 = cross(Z5,P6-P5)
Jo6 = Z5
```

```
J = [Jp1 Jp2 Jp3 Jp4 Jp5 Jp6 ; Jo1 Jo2 Jo3 Jo4 Jo5 Jo6]
```

Результат

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; p_2 = \begin{bmatrix} -s_1 d_2 \\ c_1 d_2 \\ 0 \end{bmatrix} \; p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$p_6 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 c_5 s_2 + c_1 s_4 s_5) \\ c_1 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \; z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}$$

$$z_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 \\ s_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Результат

```
J11 - c1*d2 - d6*(s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) + c5*s1*s2) - d3*s1*s2
J12 c1*(c2*d3 + d6*(c2*c5 - c4*s2*s5))
J13 c1*s2
J14 d6*s1*s2*(c2*c5 - c4*s2*s5) - c2*d6*(s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) + c5*s1*s2)
J15 d6*(c1*c4 - c2*s1*s4)*(c2*c5 - c4*s2*s5) - d6*s2*s4*(s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) + c5*s1*s2)
J16 0

J21 c1*d3*s2 - d6*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2) - d2*s1
J22 s1*(c2*d3 + d6*(c2*c5 - c4*s2*s5))
J23 s1*s2
J24 - c2*d6*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2) - c1*d6*s2*(c2*c5 - c4*s2*s5)
J25 d6*(c4*s1 + c1*c2*s4)*(c2*c5 - c4*s2*s5) - d6*s2*s4*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2)
J26 0

J31 0
J32 c1*(d2*s1 + d6*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2) - c1*d3*s2) - s1*(c1*d2 + d6*(s5*(c1*s4
    + c2*c4*s1) + c5*s1*s2) + d3*s1*s2)
J33 c2
J34 c1*d6*s2*(s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) + c5*s1*s2) + d6*s1*s2*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2)
J35 d6*(c1*c4 - c2*s1*s4)*(s5*(s1*s4 - c1*c2*c4) - c1*c5*s2) - d6*(s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) +
    + c5*s1*s2)*(c4*s1 + c1*c2*s4)
J36 0
```

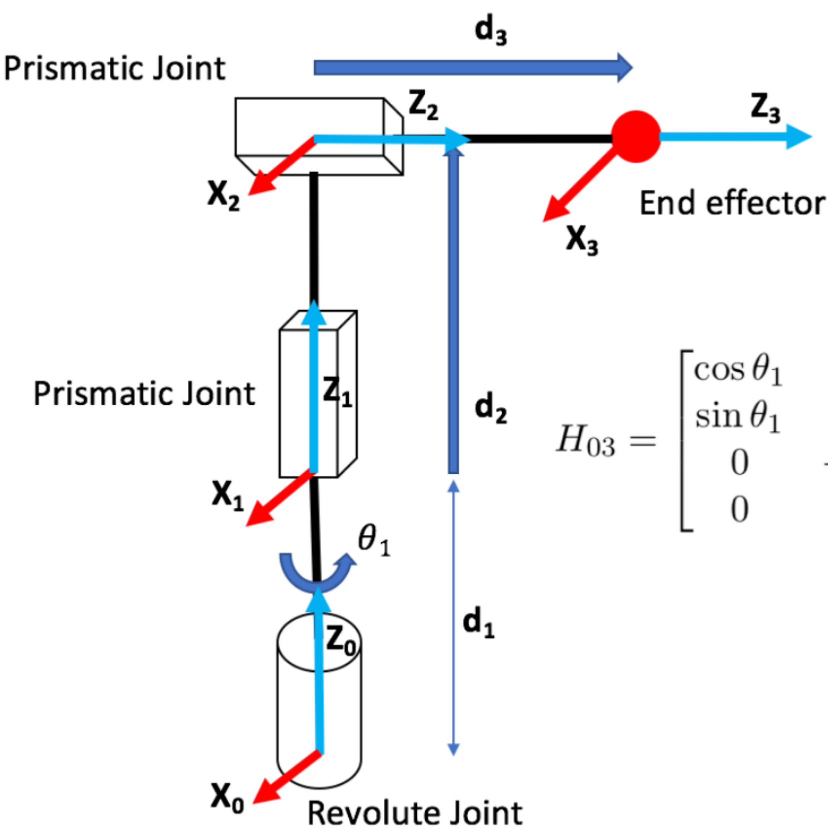
```
J41 0
J42 -s1
J43 0
J44 c1*s2
J45 - c4*s1 - c1*c2*s4
J46 c1*c5*s2 - s5*(s1*s4 - c1*c2*c4)
```

```
J51 0
J52 c1
J53 0
J54 s1*s2
J55 c1*c4 - c2*s1*s4
J56 s5*(c1*s4 + c2*c4*s1) + c5*s1*s2
```

```
J61 1
J62 0
J63 0
J64 c2
J65 s2*s4
J66 c2*c5 - c4*s2*s5
```

Вопрос

Выпишите матрицы Якоби для положения и ориентацииманипулятора и вычислите линейную и угловую скорость при следующих начальных данных



$$H_{03} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & -\sin\theta_1 d_3 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_1 = -\pi$ rad

$d_2 = 0.6$ m

$d_3 = -0.3$ m

$\dot{\theta}_1 = 0.15$ rad/s

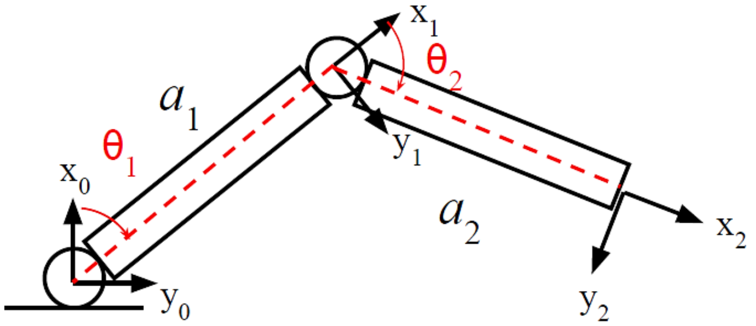
$\dot{d}_2 = 0.10$ m/s

$\dot{d}_3 = -0.20$ m/s

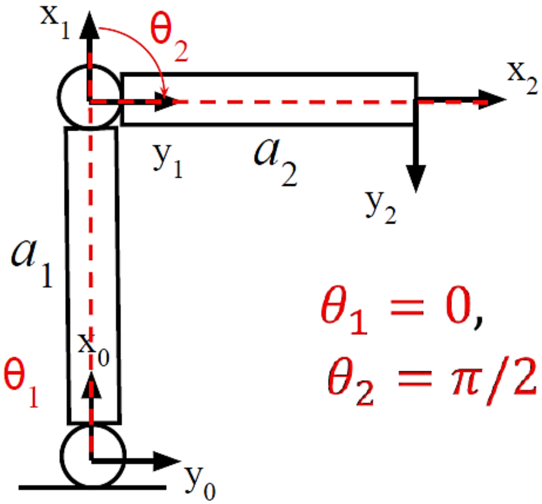
Сингулярность

Конфигурации системы, при которых ранг $\mathrm{J}(q)$ становится меньше своего максимального значения, называются сингулярными конфигурациями

Если Якобиан – квадратная матрица, то такие конфигурации соответствуют $\det \mathrm{J}(q) = 0$



$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

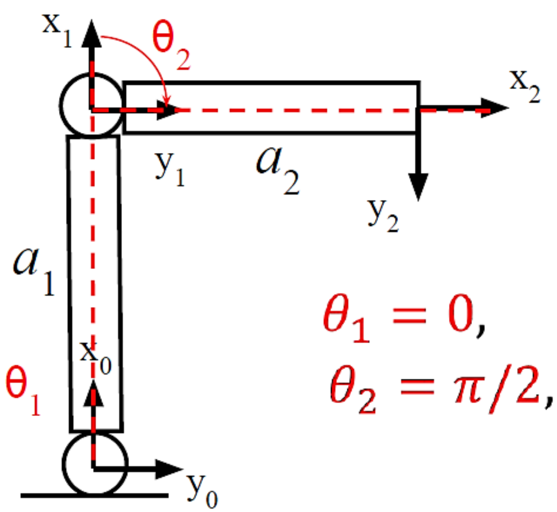


$\theta_1 = 0,\quad s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = \pi/2,\quad s_2 = 1, c_2 = 0$

$s_{12} = 1, c_{12} = 0$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_2 \\ a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

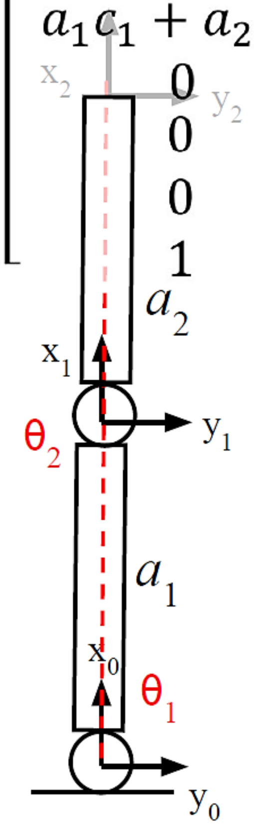


$\theta_1 = 0, \quad s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = \pi/2, \quad s_2 = 1, c_2 = 0$

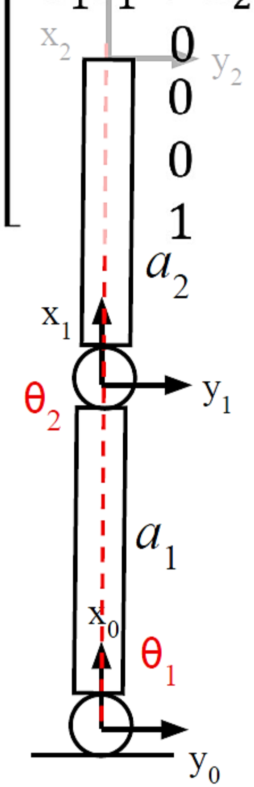
$s_{12} = 1, c_{12} = 0$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\theta_1 = 0,\ s_1 = 0, c_1 = 1$$
$$\theta_2 = 0,\quad s_2 = 0, c_2 = 1$$
$$s_{12} = 0, c_{12} = 1$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$



$$\boxed{\det(\mathbf{J}) = 0}$$

$\theta_1 = 0,\ s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = 0,\quad s_2 = 0, c_2 = 1$

$s_{12} = 0, c_{12} = 1$

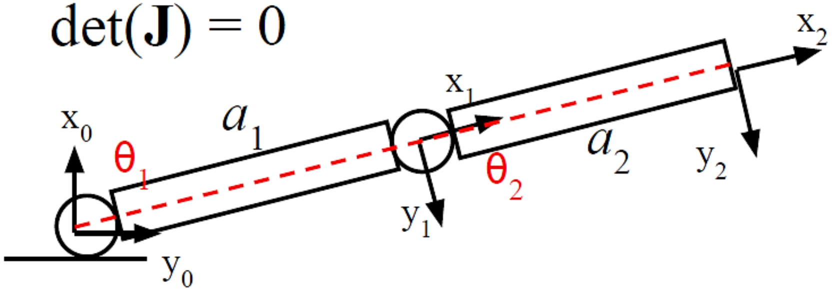
Характерные черты сингулярных конфигураций

- Движение вдоль некоторых направлений может оказаться невозможным
- Для достижения конечной скорости выходного узла могут потребоваться бесконечные скорости шарниров
- Ограниченные воздействия на шарниры могут привести к теоретически бесконечной скорости выходного узла
- Часто имеют место на границах рабочей зоны
- Для них может не быть решения обратной задачи кинематики или наоборот, решений может оказаться бесконечно много

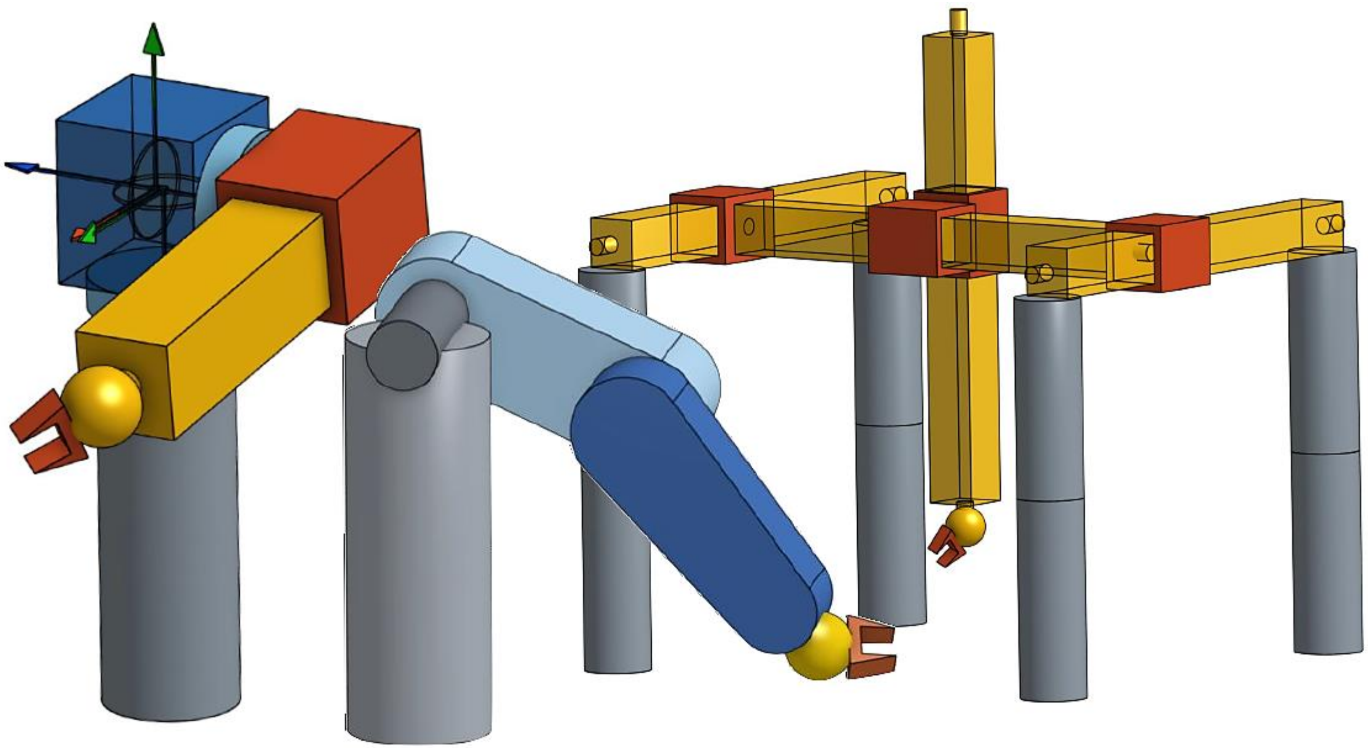
Нахождение сингулярных конфигураций
с помощью Якобиана (определителя матрицы Якоби)

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_1 & -a_2 s_1 \\ a_1 c_1 + a_2 c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix} \qquad \theta_2 = 0, \pi$$

$$\det(\mathbf{J}) = 0$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

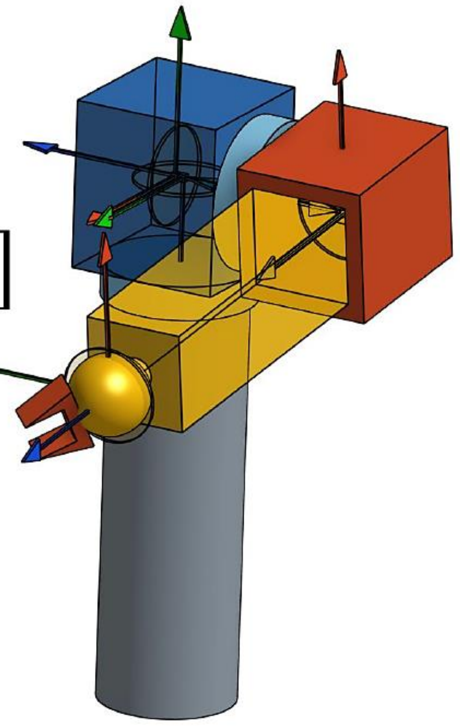


Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$\mathrm{J}(q)$ – матрица 6×6, которая сингулярна, если $\det \mathrm{J}(q) = 0$

$$\mathbf{J} = \big[\underbrace{[\mathbf{J}_1][\mathbf{J}_2][\mathbf{J}_3]}\underbrace{[\mathbf{J}_4][\mathbf{J}_5][\mathbf{J}_6]}\big]$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P | \mathbf{J}_O]$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

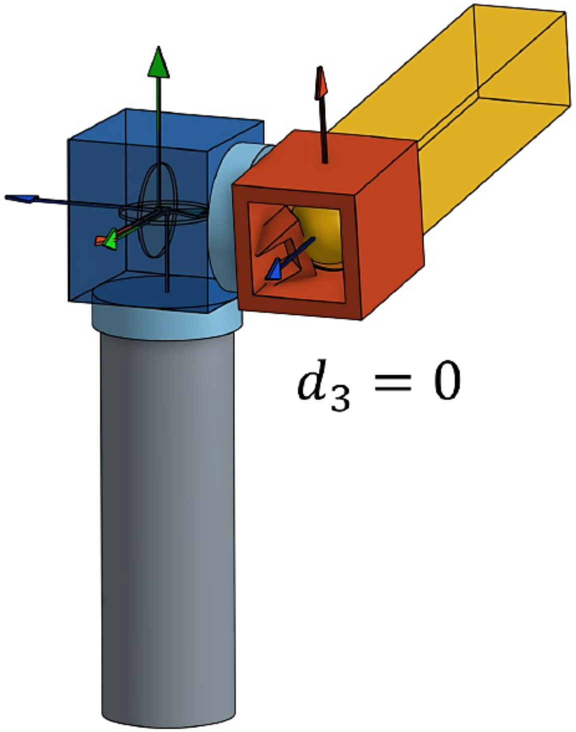
$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6$$

Выберем $P_6 = P_c$

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P \,|\, \boxed{\mathbf{J}_O}]$$

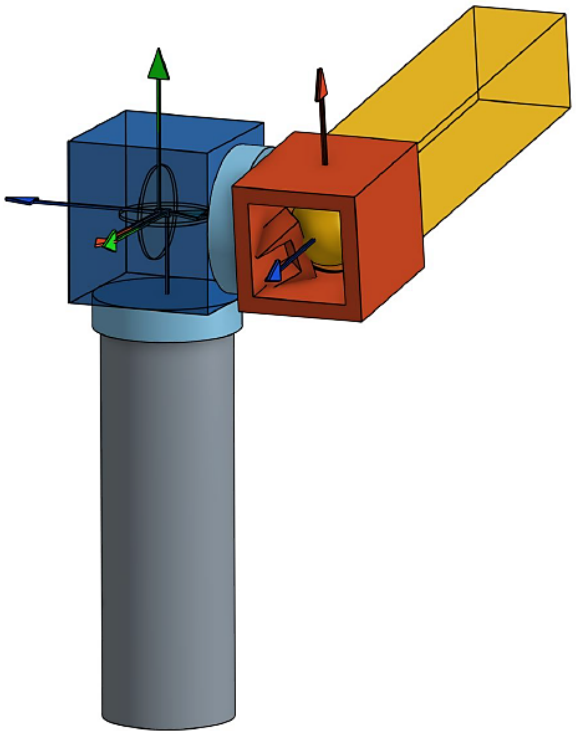


$d_3 = 0$

Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0] [0] [0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3 \; \hat{\mathbf{z}}_4 \; \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

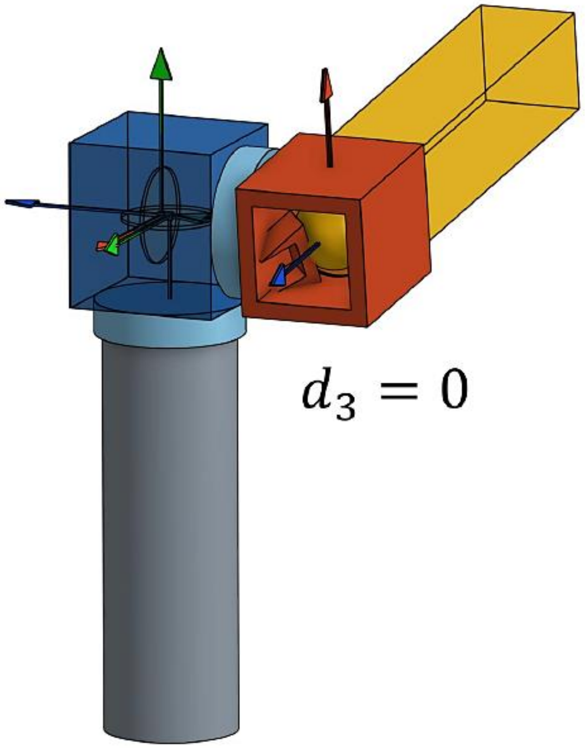


$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22})$$

Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$\mathbf{J}_{22}$ – wrist part



$d_3 = 0$

$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22})$$

Wrist Singularities

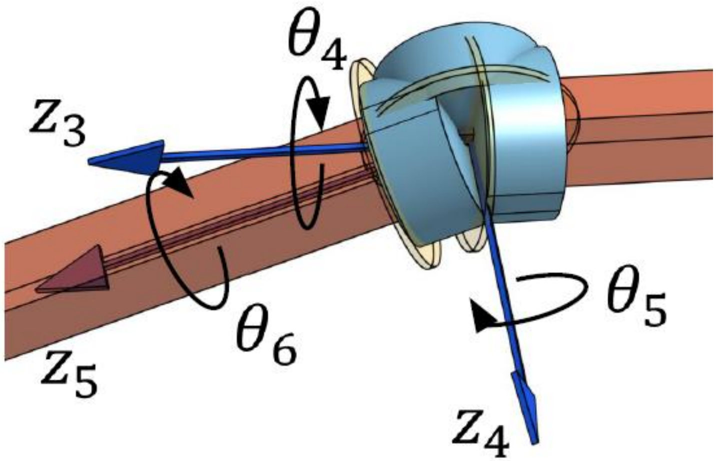
Сингулярность имеет место:

- тогда и только тогда, когда шарнирные оси совпадают (0 или π)
- неизбежна при прохождении через эти точки

$\mathbf{J}_{22}$ – часть, соответствующая ориентации

$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

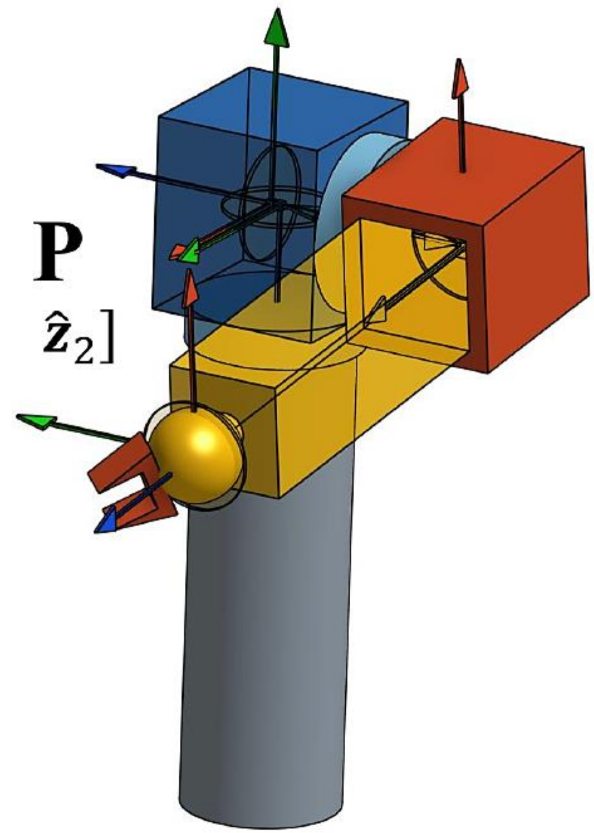
$$\theta_5 = 0 \quad \text{или} \quad \pi$$



Arm Singularities

$\mathbf{J}_{11}$ – матрица Якоби для положения

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{array}{c} \\ [\end{array} \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_1) & \hat{\mathbf{z}}_2 \end{array} \begin{array}{c} \\ ] \end{array}$$



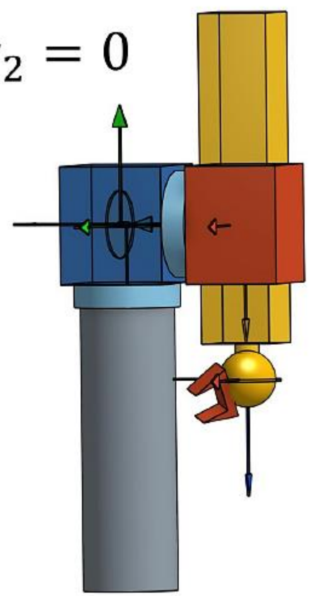
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_3 s_2 - d_2 s_1 \\ c_1 d_2 + d_3 s_1 s_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

Arm Singularities

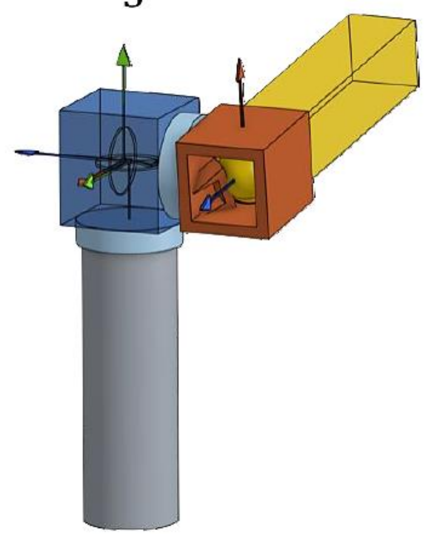
$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = -s_2 d_3^2$$

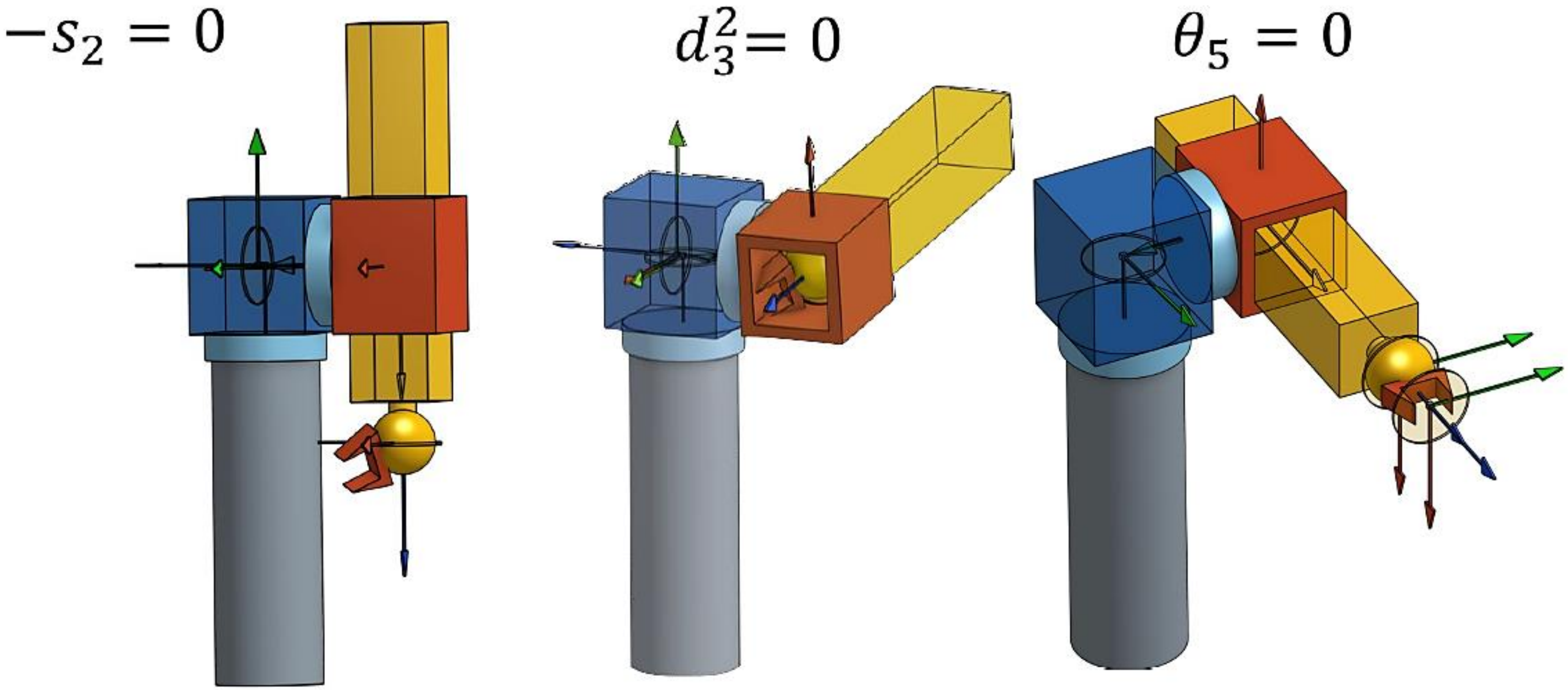
$-s_2 = 0$



$d_3^2 = 0$



Сингулярные конфигурации системы с 6 степенями свободы



Пример: KUKA 6 DoF

- *Overhead singularity* – the wrist root point is located vertically above axis A1
- *Extended position singularity* – the wrist root point is located in the extension of axes A2 and A3 of the robot
- *Wrist axis singularity*