Математические основы робототехники

lec-07-bayes

15.10.2021

Задача оценки состояния

Хотим оценить глобальное состояние $\mathbf{x}$ системы, зная:

- Показания датчиков $\mathbf{z}$
- Управления (показания одометрии) $\mathbf{u}$

Необходимо связать эти случайный величины

$$p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \qquad p(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Причинный vs. диагностический вывод

$P(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})$ – diagnostic

$P(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})$ – causal

- Диагностический вывод – то, что обычно и требуется
- Причинный вывод легче
- Правило Байеса помогает использовать причинный вывод для получения диагностического

Правило Байеса

- Определение условной вероятности

$$P(x, z) = P(x \mid z)P(z) = P(z \mid x)P(x)$$

- Правило Байеса

Правдоподобие наблюдения *Априорная оценка*

$$P(x \mid z) = \frac{P(z \mid x)P(x)}{P(z)}$$

Априорная оценка

Нормализация

- Напрямую оценить $P(z)$ может оказаться не просто
- Идея: сначала вычислить некорректное распределение,
  и затем нормализовать

- Шаг 1 $L(x \mid z) = P(z \mid x)P(x)$

- Шаг 2 $P(z) = \sum_x P(z, x) = \sum_x P(z \mid x)P(x) = \sum_x L(x \mid z)$

- Шаг 3 $P(x \mid z) = L(x \mid z)/P(z)$

Предварительное знание

- Аналогичный вывод работает при наличии предварительных знаний

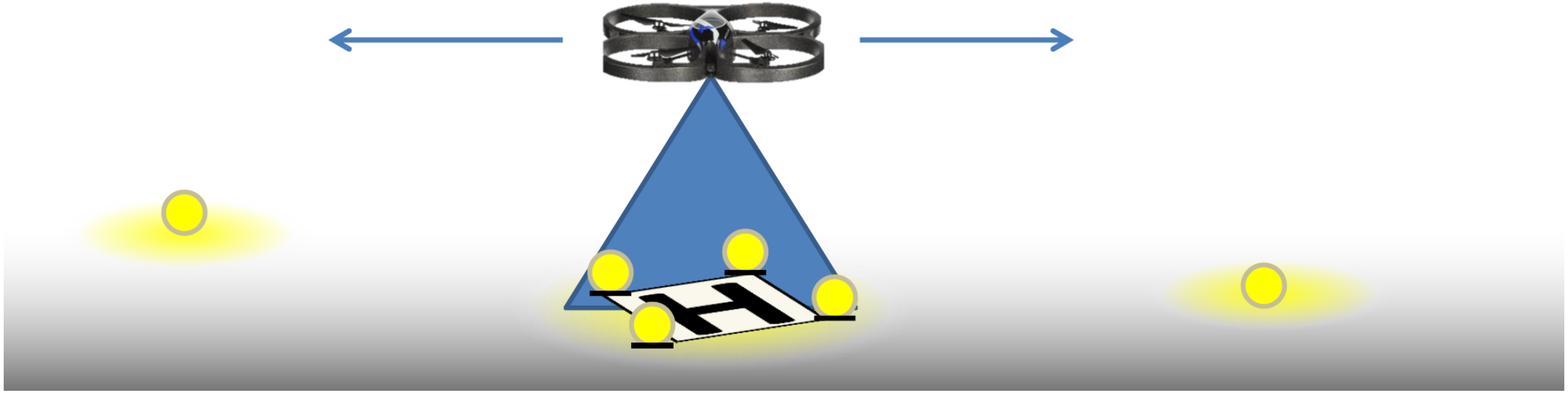
$$P(x, y \mid z) = P(x \mid y, z)P(y \mid z) = P(y \mid x, z)P(x \mid z)$$

- Правило Байеса при наличии предварительных знаний

$$P(x \mid y, z) = \frac{P(y \mid x, z)P(x \mid z)}{P(y \mid z)}$$

Пример с датчиком

- Квадрокоптер ищет зону посадки
- Зона посадки обозначена светодиодами
- На квадрокоптере установлен датчик освещенности



Пример с датчиком

- Бинарный датчик $Z \in \{\text{bright}, \neg\text{bright}\}$
- Бинарное состояние $X \in \{\text{home}, \neg\text{home}\}$
- Модель датчика $P(Z = \text{bright} \mid X = \text{home}) = 0.6$
  $P(Z = \text{bright} \mid X = \neg\text{home}) = 0.3$
- Априорная оценка состояния $P(X = \text{home}) = 0.5$
- Допустим, робот «видит» свет $Z = \text{bright}$
- Какова вероятность, что он над зоной посадки?

$$P(X = \text{home} \mid Z = \text{bright})$$

Пример с датчиком

- Модель датчика $P(Z = \text{bright} \mid X = \text{home}) = 0.6$

  $P(Z = \text{bright} \mid X = \neg\text{home}) = 0.3$
- Априорная оценка состояния $P(X = \text{home}) = \boxed{0.5}$
- Вероятность с учетом показания датчика (п. Байеса)

$$P(X = \text{home} \mid Z = \text{bright})$$

$$= \frac{P(\text{bright} \mid \text{home})P(\text{home})}{P(\text{bright} \mid \text{home})P(\text{home}) + P(\text{bright} \mid \neg\text{home})P(\neg\text{home})}$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{0.3}{0.3 + 0.15} = \boxed{0.67}$$

Объединение показаний

- Допустим, роботу доступно другое показание z_2 (от того же или другого датчика)
- Как использовать эту новую информацию?
- Иначе, как оценить $p(x \mid z_1, z_2, \ldots)$?

Объединение показаний

- Допустим, роботу доступно другое показание z_2 (от того же или другого датчика)
- Как использовать эту новую информацию?
- Иначе, как оценить $p(x \mid z_1, z_2, \ldots)$?

- По формуле Байеса (в условиях предварительных знаний)

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1, \ldots, z_{n-1}) P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

Рекурсивная байесовская оценка

$$P(x \mid z_1, \dots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1, \dots, z_{n-1}) P(x \mid z_1, \dots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \dots, z_{n-1})}$$

- **Марковское предположение**

  z_n не зависит от $z_1, \dots, z_{n-1}$ если известно x

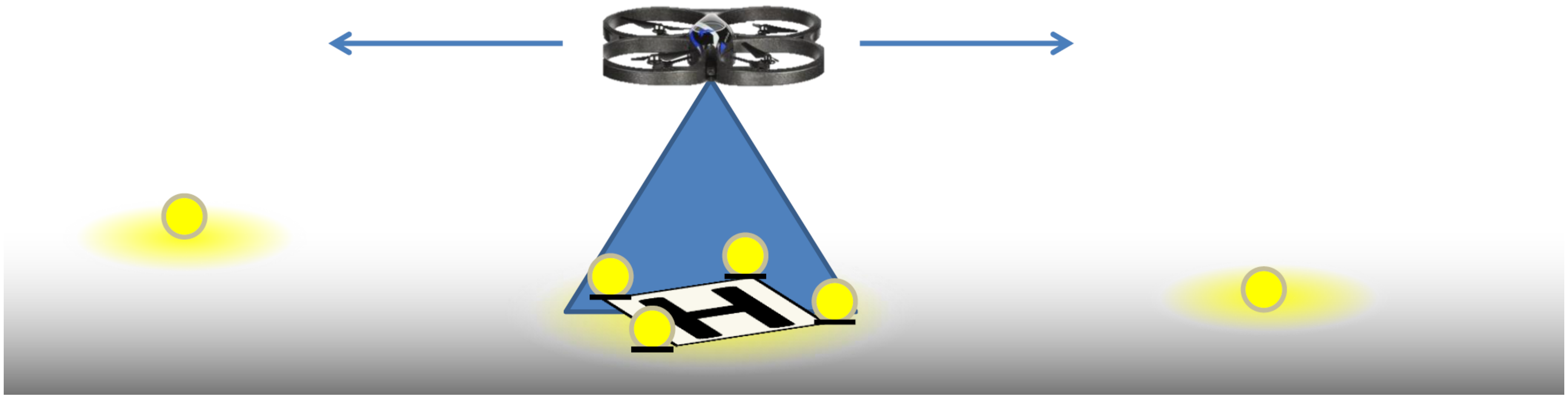
$$\Rightarrow \quad P(x \mid z_1, \dots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x) P(x \mid z_1, \dots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \dots, z_{n-1})}$$

$$= \eta P(z_n \mid x) P(x \mid z_1, \dots, z_{n-1})$$

$$= \eta_{1:n} \prod_{i=1,\dots,n} P(z_i \mid x) P(x)$$

Пример: продолжение

- Квадрокоптер ищет зону посадки
- Зона посадки обозначена светодиодами **и маркером**



Пример: продолжение

- Модель датчика $$P(Z_2 = \text{marker} \mid X = \text{home}) = 0.8$$ $$P(Z_2 = \text{marker} \mid X = \neg\text{home}) = 0.1$$
- Предыдущая оценка $P(X = \text{home} \mid Z_1 = \text{bright}) = \boxed{0.67}$
- Допустим, робот «не видит» маркер
- Какова вероятность, что он над зоной посадки?

$$P(X = \text{home} \mid Z_1 = \text{bright}, Z_2 = \neg\text{marker})$$
$$= \frac{P(\neg\text{marker} \mid \text{home})P(\text{home} \mid \text{bright})}{P(\neg\text{marker} \mid \text{home})P(\text{home} \mid \text{bright}) + P(\neg\text{marker} \mid \neg\text{home})P(\neg\text{home} \mid \text{bright})}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.67}{0.2 \cdot 0.67 + 0.9 \cdot 0.33} = \boxed{0.31}$$

Второе наблюдение уменьшило вероятность того, что робот находится над зоной посадки!

Действия и управление движением

Глобальное состояние меняется со временем из-за:

- действий, выполняемых роботом
- действий, совершенных другими «участниками»
- просто потому что реальный мир не стационарный

Как учесть эти действия?

Действия и управление движением

- Квадрокоптер ускоряется/замедляется за счет изменения скорости вращения двигателей
- Положение меняется, даже когда квадрокоптер «ничего не делает» (дрейфует)

- Действия никогда не выполняются с абсолютной точностью
- В отличие от показаний датчиков, действия как правило увеличивают неопределенность оценки состояния

Модель действий

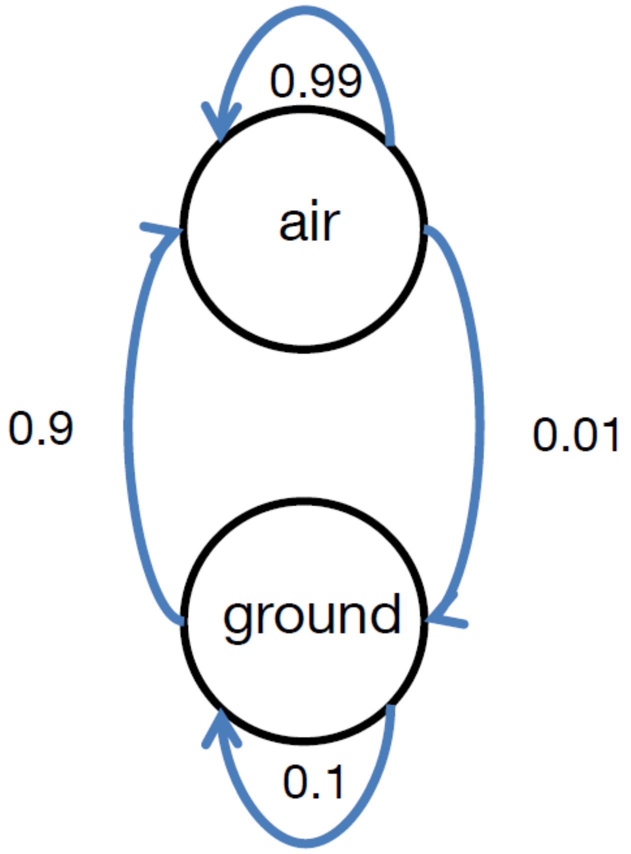
- Чтобы учесть действие в оценке состояния (belief), используем условную вероятность (conditional pdf)

$$p(x' \mid u, x)$$

Вероятность того, что выполнение действия u
в состоянии x приведет к состоянию x'

Пример: взлет

- Действие $u \in \{\text{takeoff}\}$
- Состояние $x \in \{\text{ground}, \text{air}\}$



Объединение результатов действия

- Дискретный случай

$$P(x' \mid u) = \sum_x P(x' \mid u, x) P(x)$$

- Непрерывный случай

$$p(x' \mid u) = \int p(x' \mid u, x) p(x) \mathrm{d}x$$

Пример: взлет

- Априорная оценка состояния : $P(x = \text{ground}) = 1.0$ (робот находится на земле)
- Робот попытался взлететь
- Как изменится оценка состояния после этого шага?

$$
\begin{aligned}
P(x' = \text{ground}) = \sum_x & P(x' = \text{ground} \mid u, x) P(x) \\
= & P(x' = \text{ground} \mid u, x = \text{ground}) P(x = \text{ground}) \\
+ & P(x' = \text{ground} \mid u, x = \text{air}) P(x = \text{air}) \\
= & 0.1 \cdot 1.0 + 0.01 \cdot 0.0 = 0.1
\end{aligned}
$$