Математические основы робототехники

lec-01-intro

04.10.2021

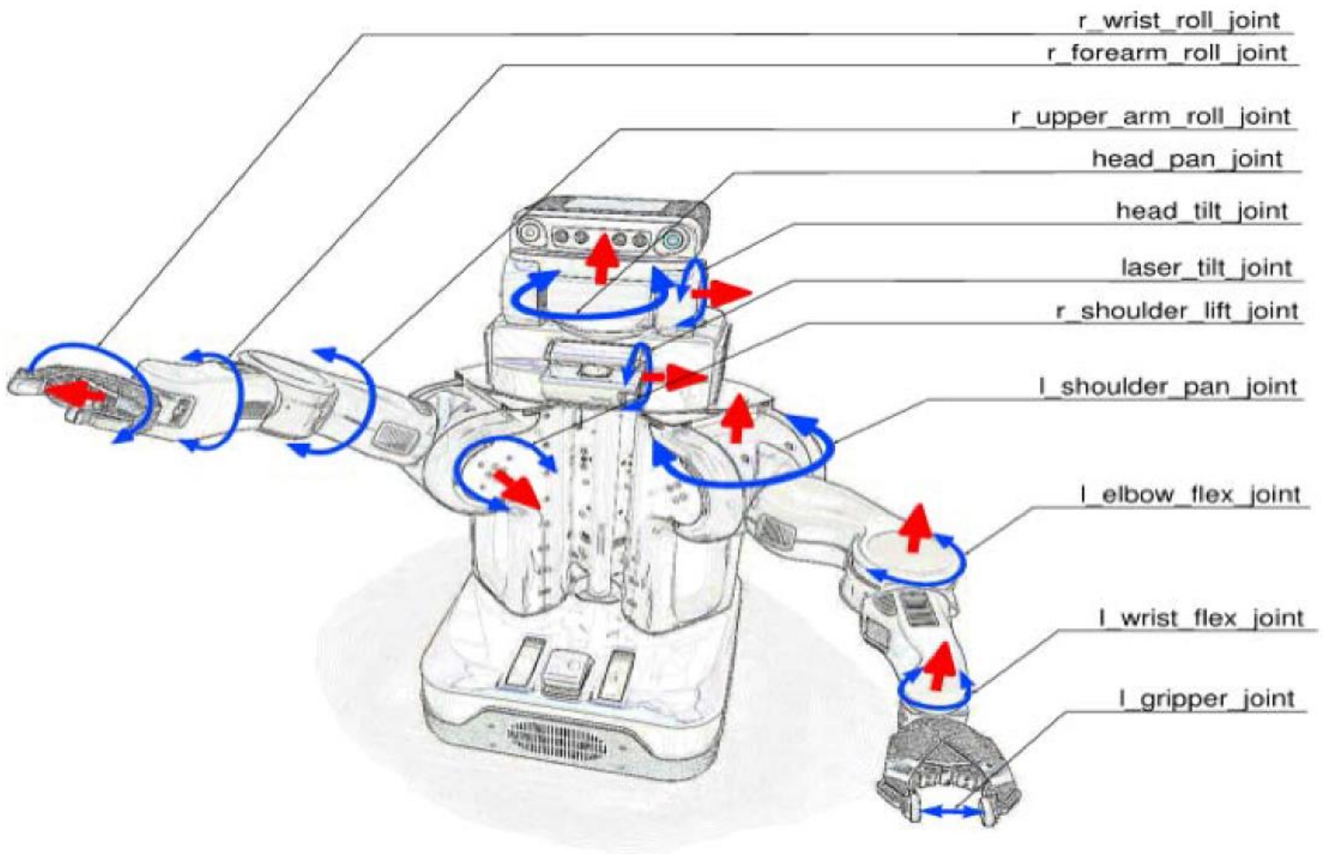
Векторное пространство

- Операции над векторами
- Скалярное произведение
- Ортогональность векторов
- Геометрический смысл

Векторное пространство

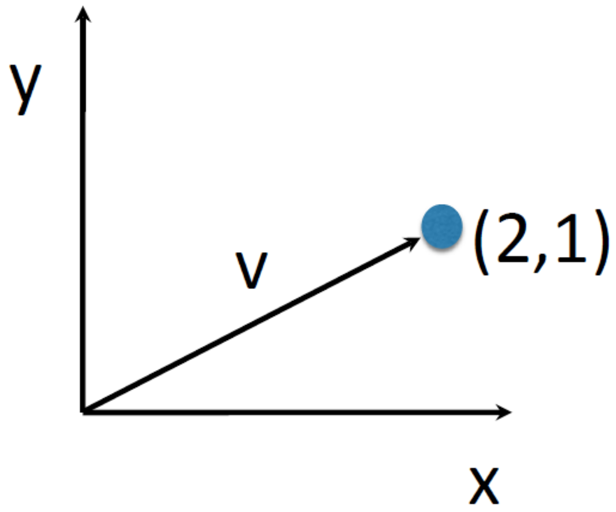
- Удобный математический инструмент, чтобы судить о положении предметов в пространстве
- Многое зависит от точки, с которой мы наблюдаем за предметом

Преобразование координат в робототехнике



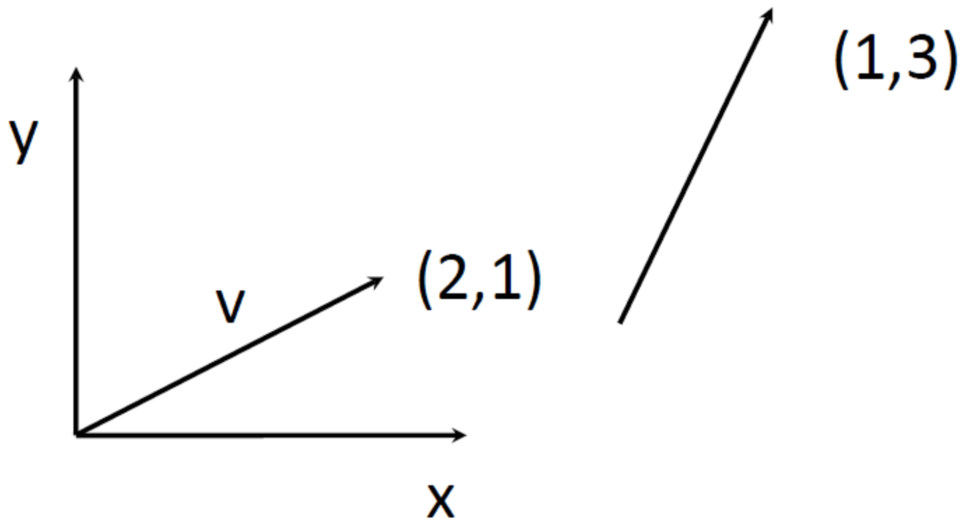
Декартова система координат

- Точки на плоскости связываем с парой значений – координаты данной точки относительно системы отсчета



Декартова система координат

- Аналогично можем определять векторы, демонстрирующие направление в пространстве или смещение между точками



Операции на векторах

- Умножение на скаляр

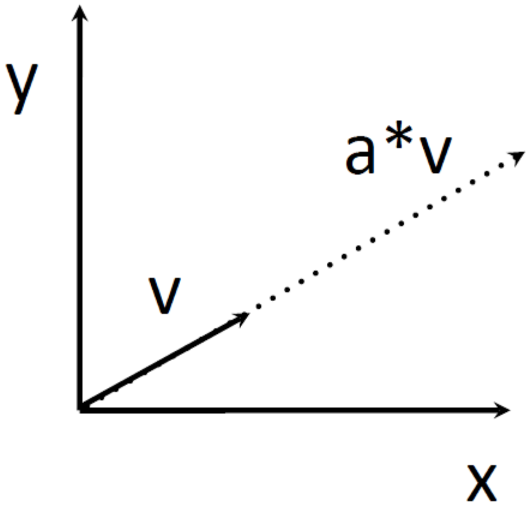
$$5 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

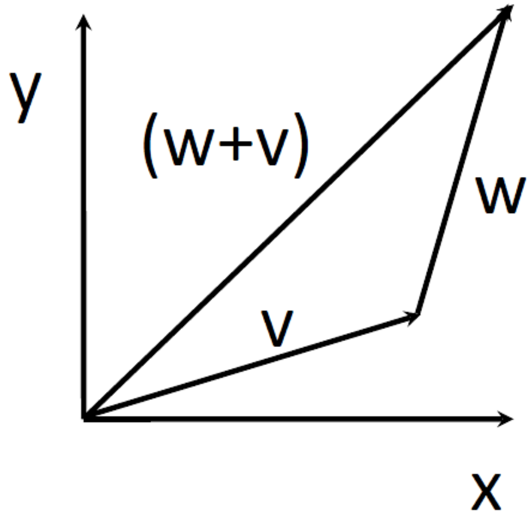
- Сложение векторов

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл

- Умножение на скаляр – масштабирование вектора
- Сложение векторов – последовательное соединение





Скалярное произведение векторов

- Для двух векторов $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ определено их скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$
где
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$
- Скалярное произведение двух векторов возвращает всегда число

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 2 + (-5) \times 1 = 1$$

Евклидова норма

- Скалярное произведение вектора на себя – сумма квадратов
- Например, для вектора из $\mathbb{R}^2$

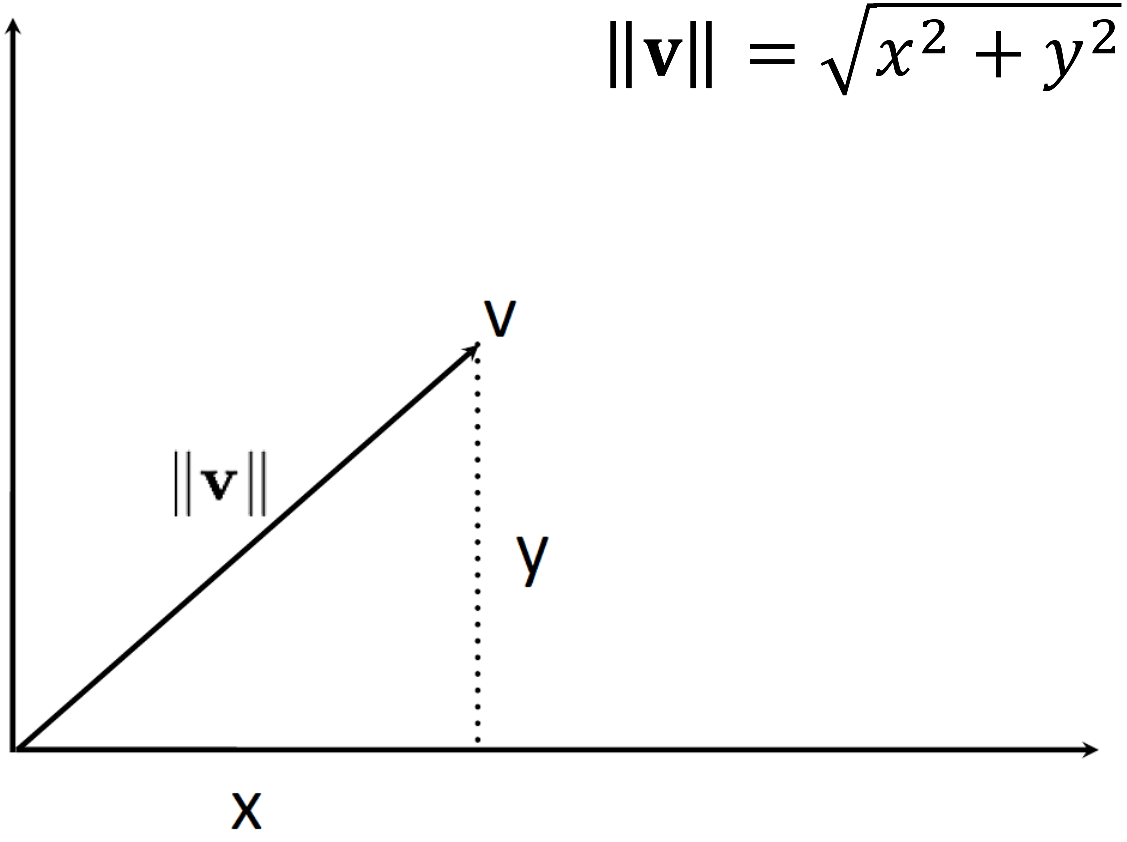
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x^2 + y^2$$

- Полученная величина – квадрат длины вектора
- Длина вектора $||\mathbf{v}||$ – Евклидова норма

$$||\mathbf{v}||^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = x^2 + y^2 \qquad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Евклидова норма

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Свойства скалярного произведения

- Коммутативность

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$$

- В частности, для $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$$

Свойства скалярного произведения

- Дистрибутивность относительно умножения на скаляр

$$\big(\mathbf{v} \cdot (\alpha\, \mathbf{w})\big) = \alpha\, (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$$

- В частности, для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\big(\mathbf{v} \cdot (\alpha\, \mathbf{w})\big) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\alpha\, w_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \right) = \alpha\, (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$$

Свойства скалярного произведения

- Дистрибутивность относительно векторного сложения

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

- В частности, для $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i (v_i + w_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} u_i w_i \right) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

Свойства скалярного произведения

- Для $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}+\mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c}+\mathbf{d}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\end{aligned}$$

- Для $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{a}+\mathbf{b})\|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2\end{aligned}$$

Правило косинусов

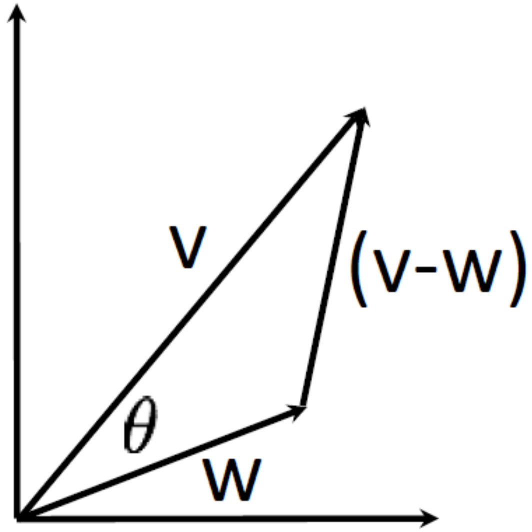
- По правилу косинусов

$$\|(\mathbf{v}-\mathbf{w})\|^{2} = \|\mathbf{v}\|^{2} + \|\mathbf{w}\|^{2} - 2(\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|)\cos\theta$$

- При этом

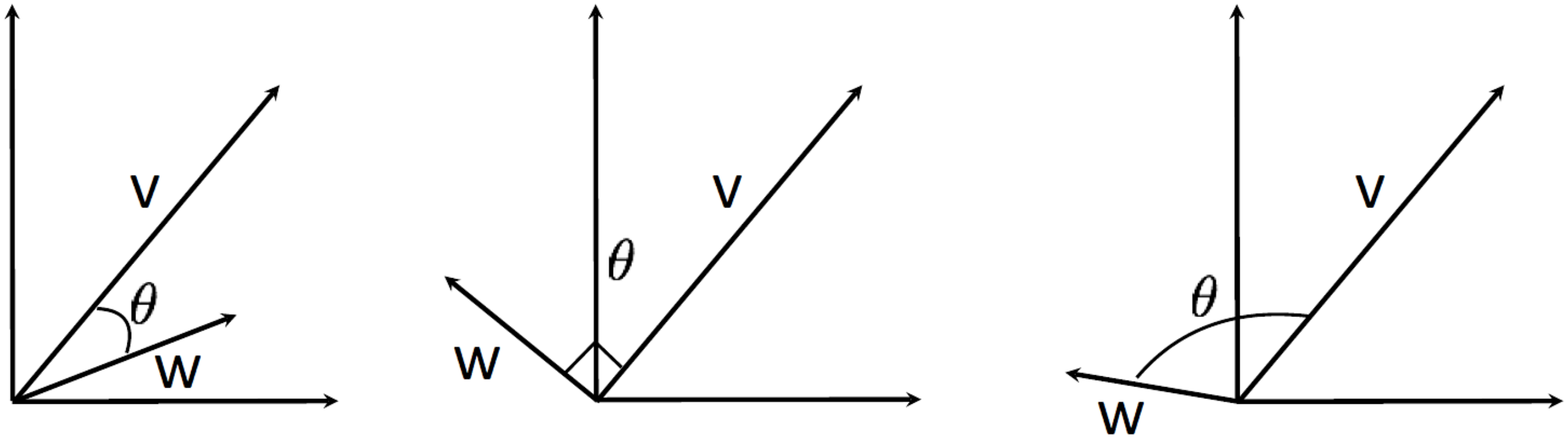
$$\|(\mathbf{v}-\mathbf{w})\|^{2} = \|\mathbf{v}\|^{2} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + \|\mathbf{w}\|^{2}$$

- Тогда $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|)\cos\theta$



Геометрический смысл

$\theta < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\theta > \frac{\pi}{2}$



$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) > 0$ $\qquad$ $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0$ $\qquad$ $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) < 0$

Если скалярное произведение двух векторов равно 0,
они обязательно ортогональны друг другу

Вопрос 1

Пусть $R = [u, v, w]$ – матрица, $u, v, w \in \mathrm{R}^3$. Какое из утверждений верно, если известно, что $R^{\mathrm{T}}R$ – диагональная матрица?

- u, v, w лежат в одной плоскости
- u, v, w ортогональны друг другу
- u, v, w имеют одинаковую длину
- u, v, w образуют треугольник

Вопрос 2

Какое из утверждений верно для любых x, y, $z \in \mathrm{R}^n$?

- $x + y + z = y + z + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Если z ортогонален и x, и y, тогда z ортогонален $(x - y)$
- Если z ортогонален и x, и y, тогда z ортогонален $(x + y)$

Вопрос 3

При каких n для любых ненулевых x, y, $z \in \mathrm{R}^n$ справедливо:
если $x \cdot z = 0$ и $y \cdot z = 0$, тогда $x \cdot y \neq 0$?

Линейные преобразования

- Операции над матрицами
- Преобразование координат

Линейные преобразования

- Пусть T – функция, которая переводит элементы из одного векторного пространства V_1 в другое векторное пространство V_2

- Функция T – линейное преобразование тогда и только тогда, если выполнено

$$T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w})$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_1$, $T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \in V_2$

Композиция линейных преобразований

- Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, f – линейное преобразование из V_2 в V_3, g – линейное преобразование из V_1 в V_2, тогда их композиция $(f \circ g)$ – тоже линейное преобразование:

$$(f \circ g)(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = f\big(g(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})\big) = f\big(\alpha\, g(\mathbf{v}) + \beta\, g(\mathbf{w})\big) =$$
$$= \alpha\, f\big(g(\mathbf{v})\big) + \beta\, f\big(g(\mathbf{w})\big)$$

- Композиция $(f \circ g)$ – тоже линейное преобразование из V_1 в V_3

Примеры линейных преобразований

- Масштабирование $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$

- Отражение $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

- Проекция $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + y)$

Линейные преобразования

- Для любого линейного преобразования, которое отображает одно векторное пространство конечной размерности в другое, всегда можно построить матрицу, соответствующую действию этой функции

Операции над матрицами

- Умножение матрицы на скаляр – умножение на данный скаляр всех элементов матрицы
- Сложение двух матриц (одинаковой размерности) – поэлементное сложение
- *Данные операции соответствуют масштабированию и сложению линейных преобразований*

Операции над матрицами

A, B, C – матрицы и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – скаляры

- Сложение матриц и умножение на скаляр дистрибутивно и коммутативно

$$A + B = B + A \qquad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

- Умножение матриц ассоциативно (следует из ассоциативности композиции функций)

$$A(BC) = (AB)C$$

Операции над матрицами

A, B, C – матрицы и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – скаляры

- Умножение матриц дистрибутивно

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (A + B)C = AC + BC$$

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC$$

- Умножение матриц не коммутативно!

$$AB \neq BA$$

Умножение матриц в MatLab

- Умножение матриц – встроенная функция

- Если у вас есть $m \times n$ матрица A и $n \times 1$ вектор x, тогда запись $y = A * x$ позволит вычислить их произведение
- Аналогично, если у вас также есть $n \times k$ матрица B, тогда запись $C = A * B$ позволит вычислить их произведение двух матриц

- Важно различать записи $*$ – матричное произведение и

  $.*$ – поэлементное произведение (по Адамару)

Транспонирование

- Транспонирование – операция, которая меняет строки матрицы на ее столбцы
- Обозначение – A^T
- Операция транспонирования в MatLab – A'
- Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Транспонирование и умножение матриц

- Транспонирование меняет порядок умножения матриц

$$C = AB \Longrightarrow C^T = B^T A^T$$

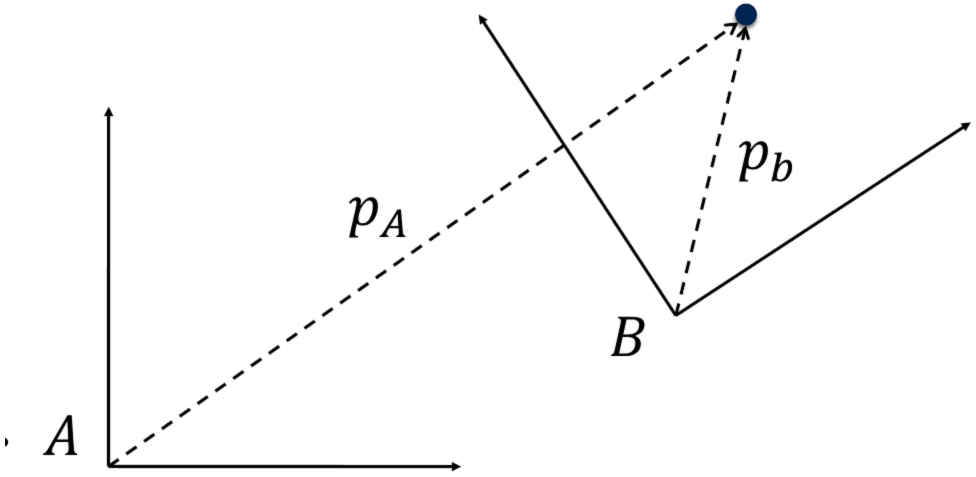
$$C_{ij} = C^T_{ji}$$

- C_{ij} – скалярное произведение i-й строки A на j-й столбец B
- C^T_{ji} – скалярное произведение j-й строки B^T на i-й столбец A^T

Преобразование координат

Рассмотрим две различные системы координат на плоскости

- p_A обозначает координаты точки в системе A
- p_b обозначает координаты точки в системе B



Примеры применения преобразования координат

- Манипуляторы состоят из последовательности различных звеньев
- Преобразования координат позволяют определить, например, как звенья расположены относительно друг друга в глобальной системе координат

Примеры применения преобразования координат

- В компьютерной графике и САПР сцена моделируется из набора отдельных частей
- Преобразование координат применяется, чтобы корректно определить, как эти части расположены относительно друг друга и точки наблюдения

Однородные координаты

- Точкам на плоскости сопоставляем векторы из трех чисел, последнее из которых 1

$$P_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Векторам на плоскости сопоставляем векторы из трех чисел, последнее из которых 0

$$V_A = \begin{pmatrix} v_A^x \\ v_A^y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_B = \begin{pmatrix} v_B^x \\ v_B^y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование координат

- Используя однородные координаты, можно связать преобразования координат с операциями над матрицами

$$P_A = g_{AB} P_B$$

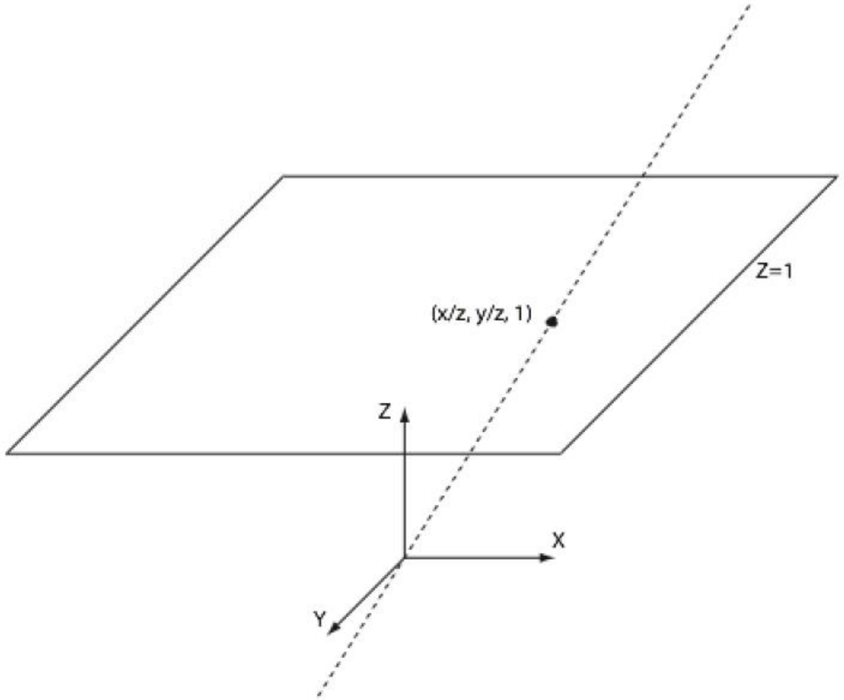
где $P_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$, g_{AB} – матрица 3×3

- Аналогично для векторов $V_A = g_{AB} V_B$

где $V_A = \begin{pmatrix} v_A^x \\ v_A^y \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_B = \begin{pmatrix} v_B^x \\ v_B^y \\ 0 \end{pmatrix}$

Проективная плоскость

- Множество лучей в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат образуют проективную плоскость $RP(2)$
- Луч $P = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ пересекает плоскость $z = 1$ в точке $\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix}$ и соответствуют точкам в $\mathbb{R}^2$
- Лучи вида $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ не пересекают $z = 1$ и задают направления в $\mathbb{R}^2$

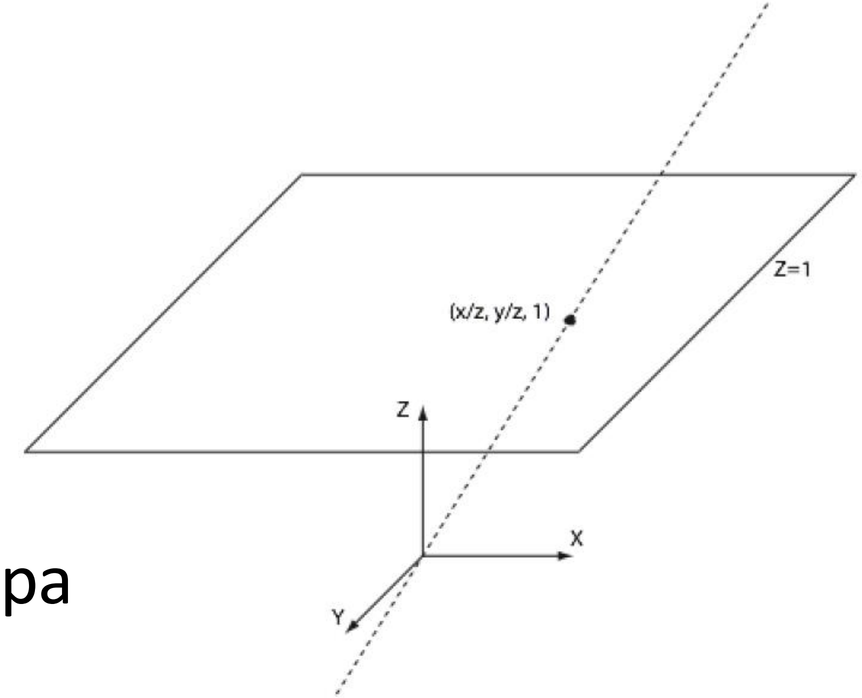


Однородные координаты

- В проективных координатах лучи, отличающиеся на скаляр, совпадают

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

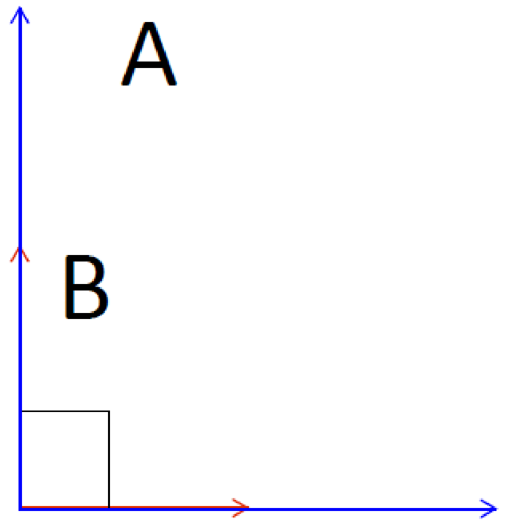
- Аналогичным образом устроена камера



Элементарные преобразования координат

- Масштабирование

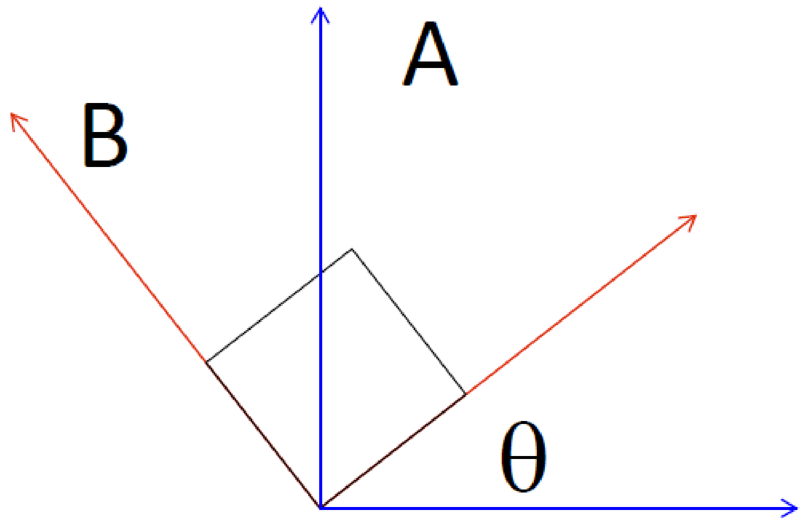
$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$



Элементарные преобразования координат

- Поворот

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$

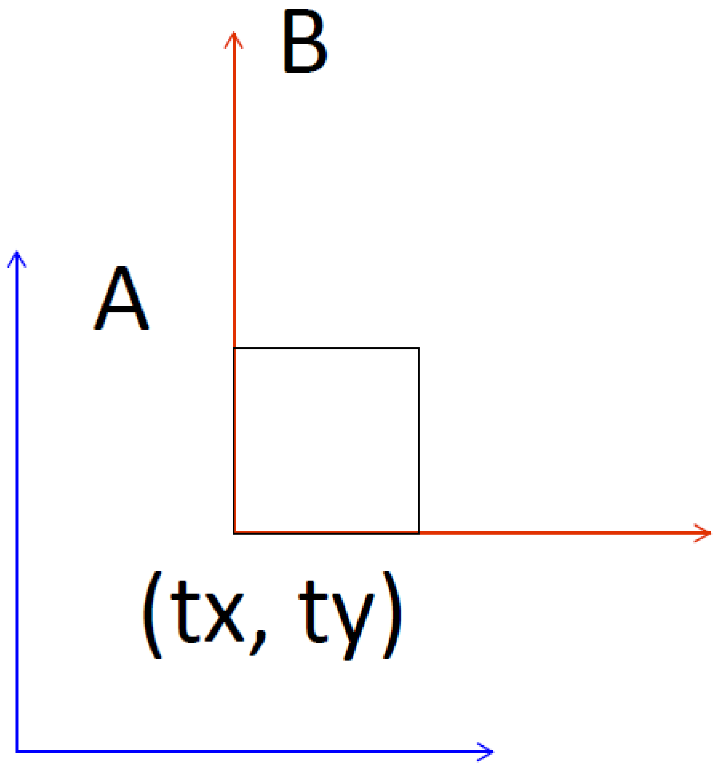


Для построения матрицы преобразования достаточно посмотреть, как при переходе в другую систему координат меняются оси и начало координат (столбцы матрицы)

Элементарные преобразования координат

- Сдвиг

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$



Вопрос 1

Какое утверждение верно для любых матриц A, B, $C \in \mathrm{R}^{n \times n}$?

- $(AB)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$
- $AB = BA$
- $A(B + C) = (AB) + (AC)$

Вопрос 2

Какое утверждение верно для любых матриц A, B, $C \in \mathrm{R}^{n \times n}$?

- $AB = BA$
- $A(BC) = (AB)C$
- Если $AB = AC$, тогда $B = C$
- $(AB)(AB) = A^2 + 2AB + B^2$