Математические основы робототехники

lec-06-quadro-geometry

13.10.2021

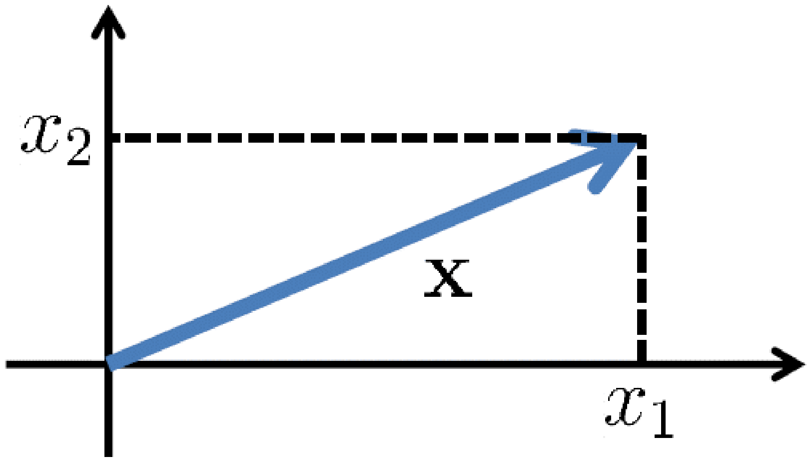
Обозначения

- Скаляр $s \in \mathbb{R}$
- Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- Матрица $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Векторы

- Вектор и его координаты

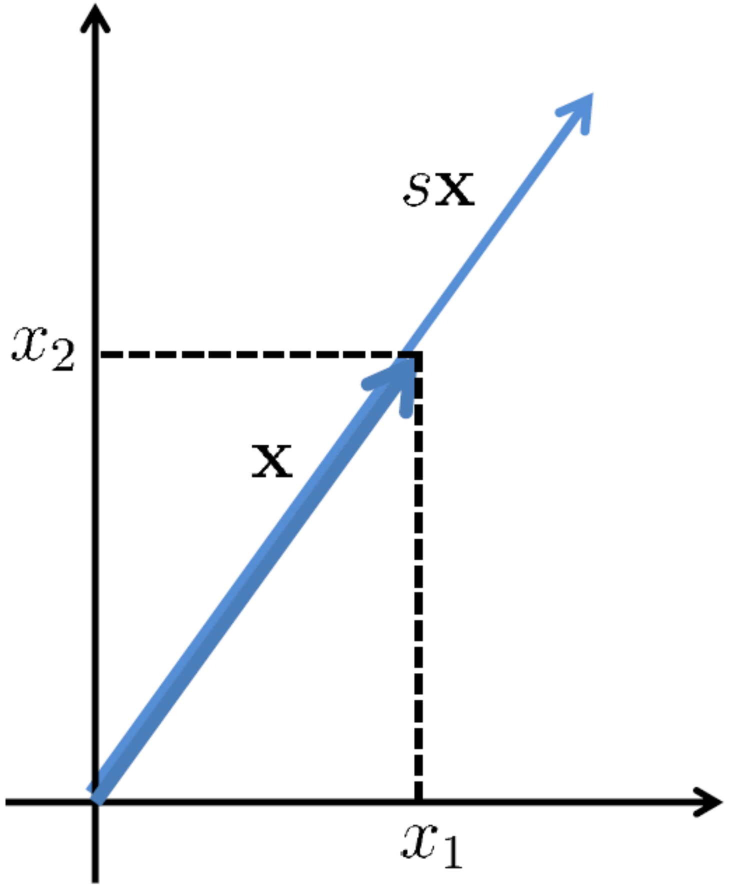
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$



- Вектор представляет точку в n-мерном пространстве

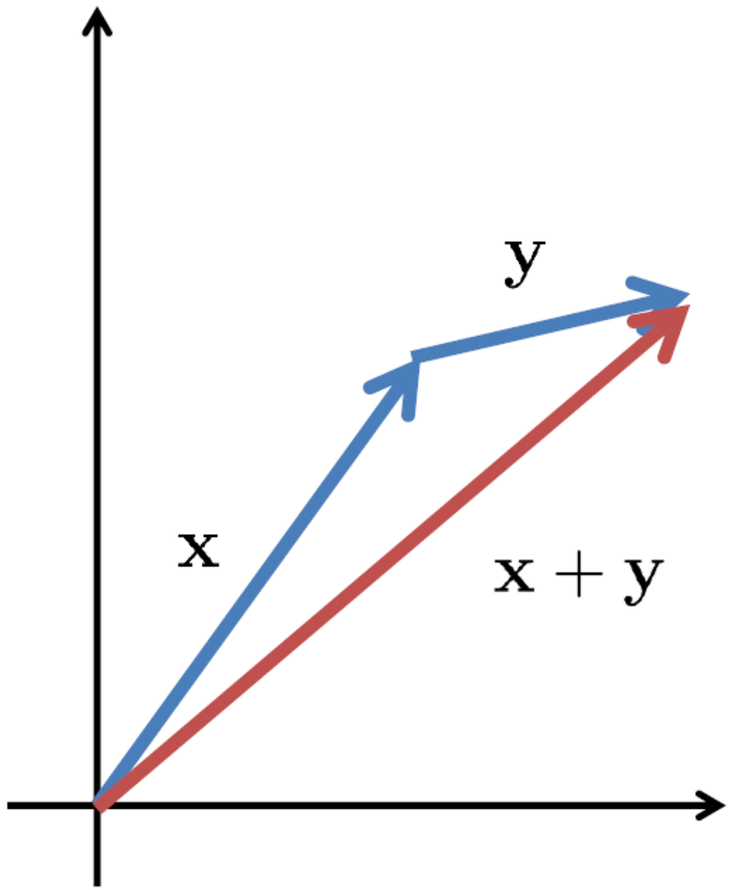
Операции над векторами

- **Умножение на скаляр**
- Сумма/разность векторов
- Длина вектора
- Нормированный вектор
- Скалярное произведение
- Векторное произведение



Операции над векторами

- Умножение на скаляр
- **Сумма/разность векторов**
- Длина вектора
- Нормированный вектор
- Скалярное произведение
- Векторное произведение

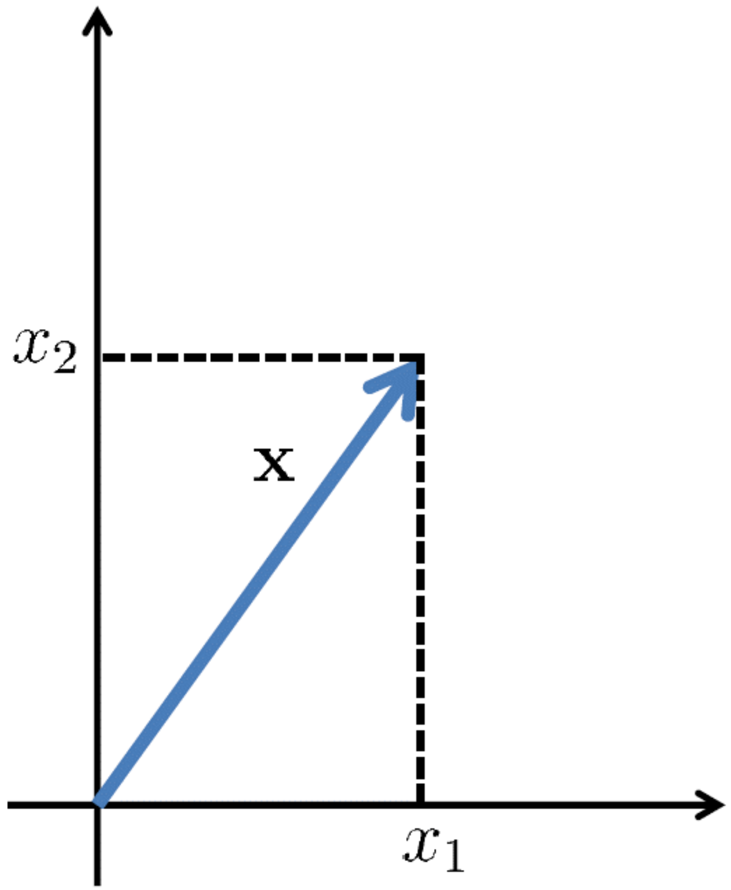


Операции над векторами

- Умножение на скаляр
- Сумма/разность векторов
- **Длина вектора**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots}$$

- Нормированный вектор
- Скалярное произведение
- Векторное произведение

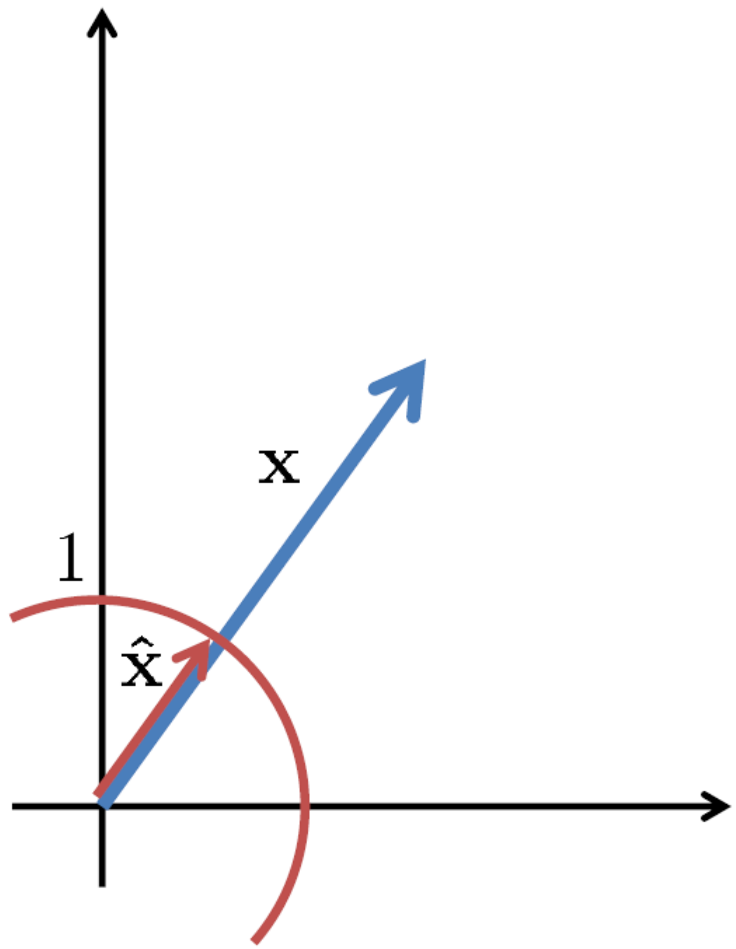


Операции над векторами

- Умножение на скаляр
- Сумма/разность векторов
- Длина вектора
- **Нормированный вектор**

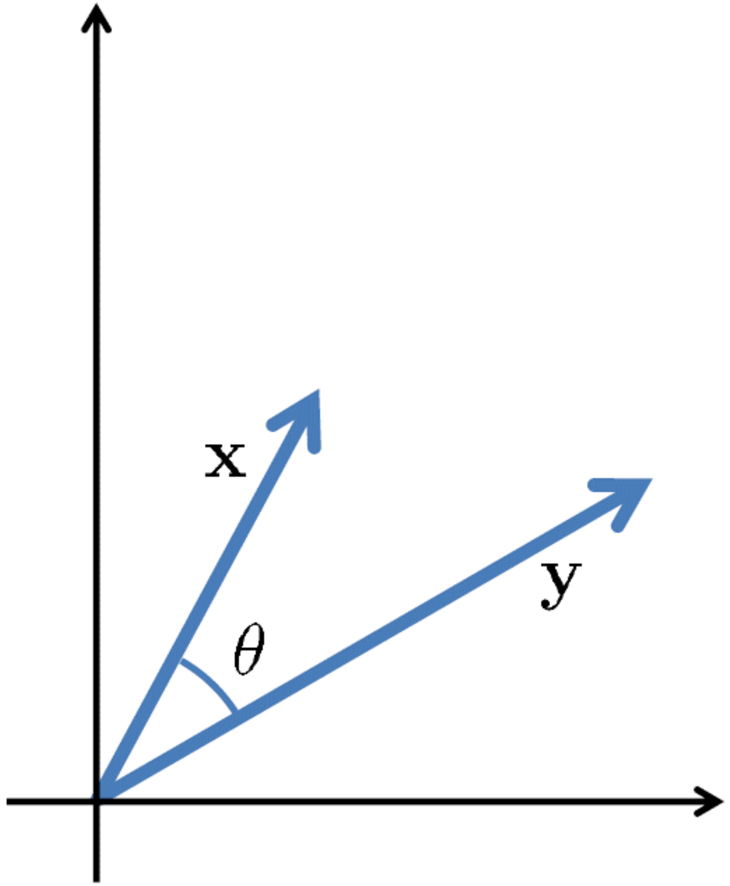
$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$$

- Скалярное произведение
- Векторное произведение



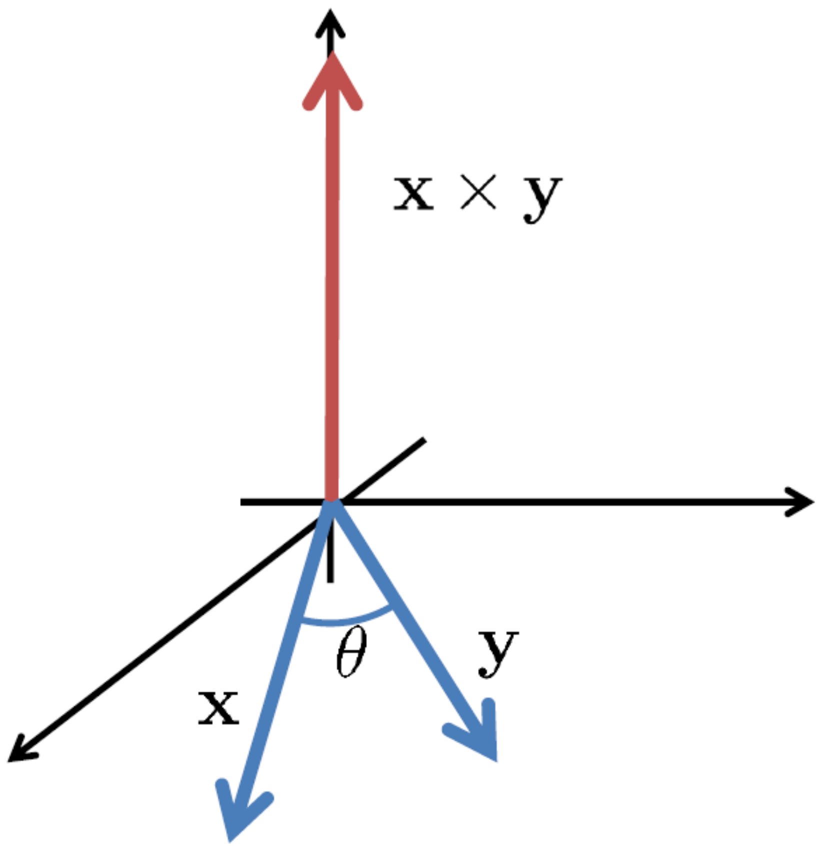
Операции над векторами

- Умножение на скаляр
- Сумма/разность векторов
- Длина вектора
- Нормированный вектор
- **Скалярное произведение**
  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos\theta$
  $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, если $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$
- Векторное произведение



Операции над векторами

- Умножение на скаляр
- Сумма/разность векторов
- Длина вектора
- Нормированный вектор
- Скалярное произведение
- **Векторное произведение**
  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{n}$



Векторное произведение

- Определение $$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

- Матричная запись $$[\mathbf{x}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Проверьте, что $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = [\mathbf{x}]_\times \mathbf{y}$

Матрицы

- Прямоугольный массив чисел

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- Первый индекс n – строки
- Второй индекс m – столбцы

Типы матриц

- Квадратная матрица
- Диагональная матрица
- Верхняя/нижняя треугольная матрица
- Симметричная матрица $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$
- Кососимметричная матрица $\mathbf{X} = -\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$
- Положительно (полу)определенная матрица $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\,\mathbf{a} \geq 0$
- Ортогональная матрица $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{-1}$

Операции над матрицами

- Умножение матрицы на вектор $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$
- Умножение матрицы на матрицу $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$
- Обратимость матрицы $\mathbf{M}^{-1}$
- Транспонирование $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$
- Сингулярное разложение $\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$
- Спектральное разложение (λ – собственные числа)

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^{-\mathbf{1}} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

Геометрические объекты в 2D

- Точка на плоскости $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- Расширенный вектор $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- В однородных координатах $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \widetilde{\omega} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2$

Однородные векторы

- Однородные векторы, отличающиеся на скаляр, представляют на плоскости одну и ту же точку
- Чтобы перейти в обычные, неоднородные координаты, достаточно разделить вектор на последний элемент

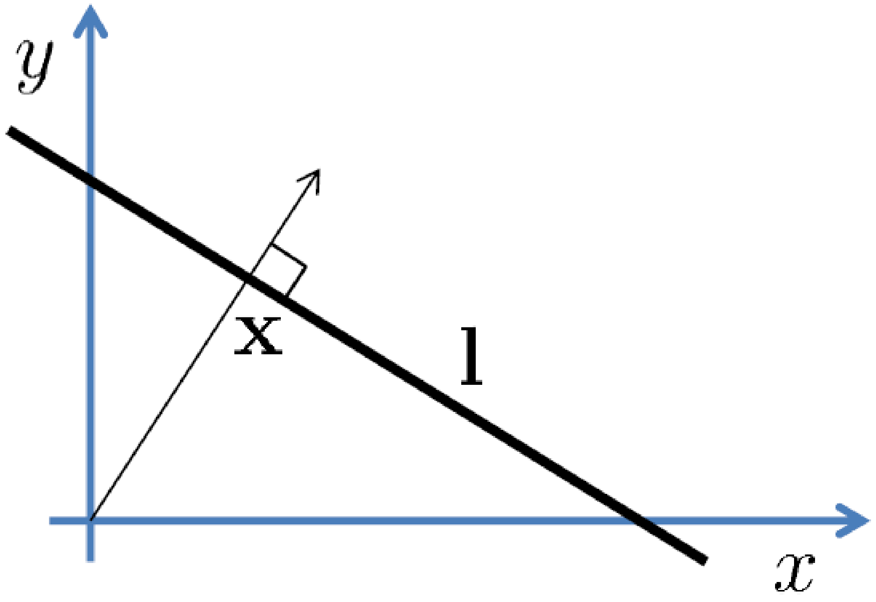
$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \widetilde{\omega} \end{pmatrix} = \widetilde{\omega} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}/\widetilde{\omega} \\ \tilde{y}/\widetilde{\omega} \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{\omega} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{\omega} \cdot \bar{\mathbf{x}}$$

- Точки, в которых называются точками бесконечности и задают направление

Геометрические объекты в 2D

- Прямая на плоскости
  $\tilde{\mathbf{l}} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$

- Уравнение прямой на плоскости
  $\bar{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{l}} = ax + by + c = 0$



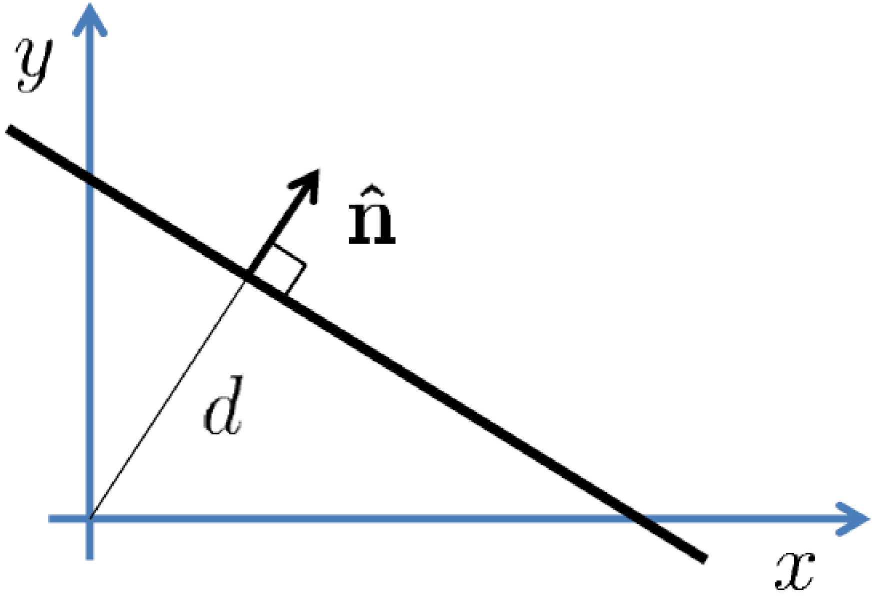
Геометрические объекты в 2D

- Нормированная прямая

$$\tilde{\mathbf{l}} = \left(\hat{n}_x, \hat{n}_y, d\right)^{\mathrm{T}} = (\hat{\mathbf{n}}, d)^{\mathrm{T}}$$

где $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$

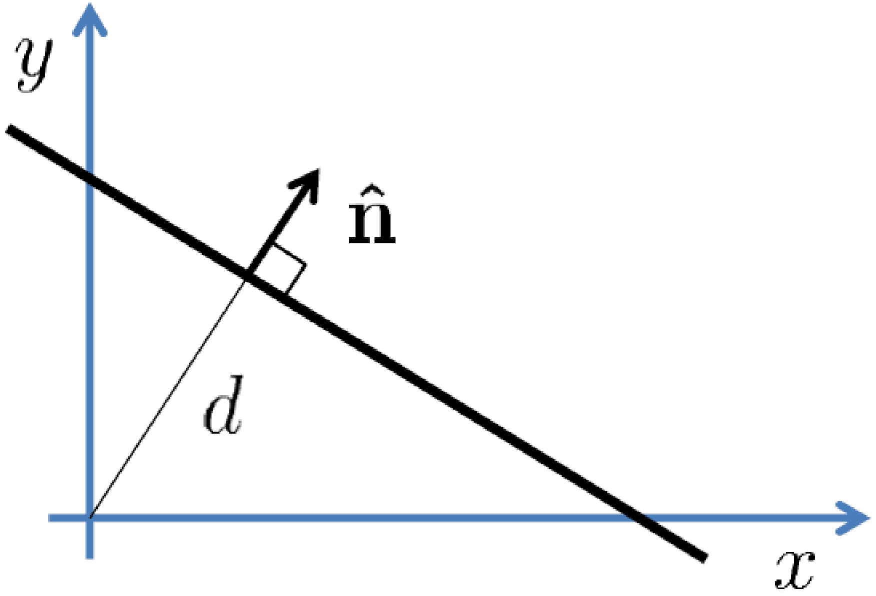
d – расстояние от прямой до начала координат



Геометрические объекты в 2D

- Прямая, соединяющая точки
  $\tilde{\mathbf{l}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 \times \tilde{\mathbf{x}}_2$

- Точка пересечения двух прямых
  $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{l}}_1 \times \tilde{\mathbf{l}}_2$

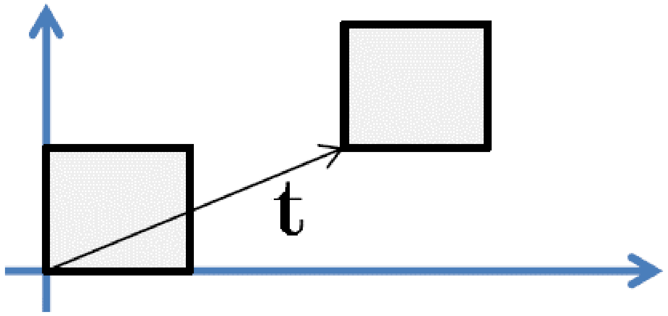


2D преобразования

- Сдвиг $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{t}$

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I}\ \mathbf{t}) \cdot \bar{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$



где $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ – вектор сдвига

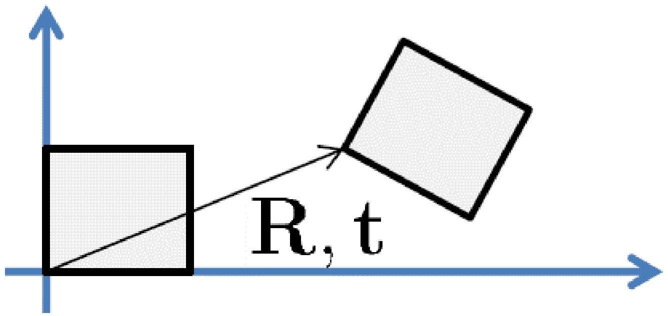
$\mathbf{I}$ – единичная матрица 2×2

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ – нулевой вектор

2D преобразования

- Преобразования твердого тела (поворот и сдвиг)

  $\mathbf{x}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$ $\qquad\qquad$ $\tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$

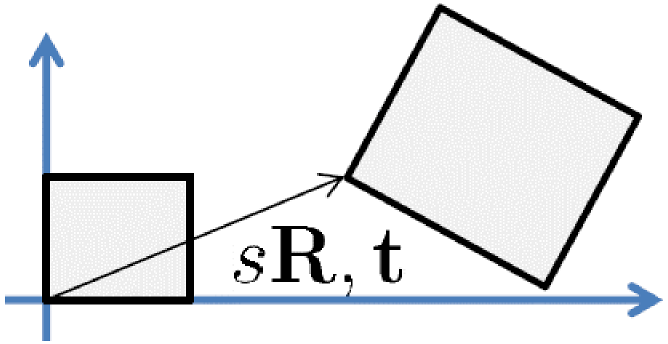


  где $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица,

  т.е. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

- Сохраняются расстояния и углы

2D преобразования



- Преобразование подобия (масштабирование)

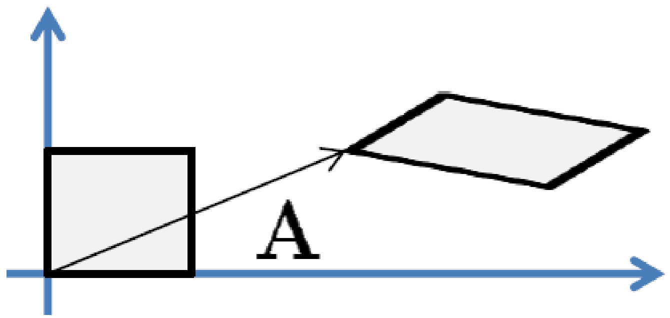
$$\mathbf{x}' = s \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \qquad \tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} s \cdot \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

- Сохраняются углы

2D преобразования

- Аффинное преобразование

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

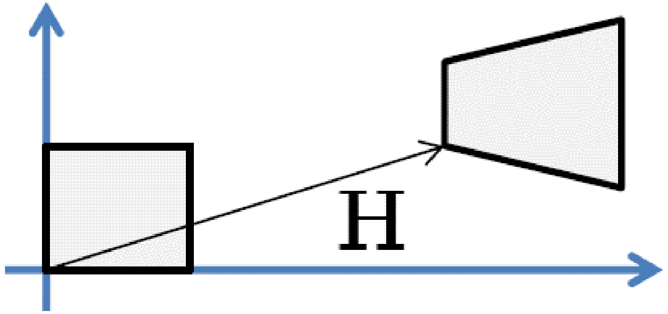


- Параллельные прямые остаются параллельными

2D преобразования

- Проективное преобразование (гомография)

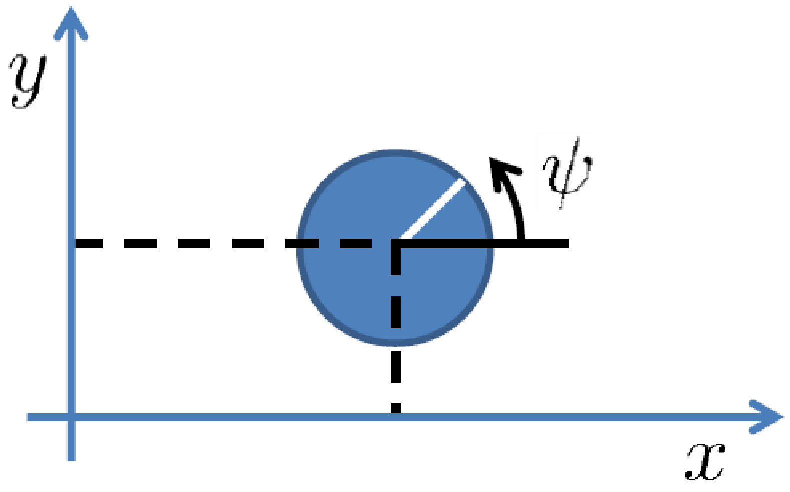
$$\tilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$



- $\widetilde{\mathbf{H}}$ – в терминах однородных координат (определена в точности до умножения на скаляр)
- Прямые остаются прямыми

Положение робота на плоскости

- Положение – координаты x и y
- Ориентация – угол ψ (рыскание)



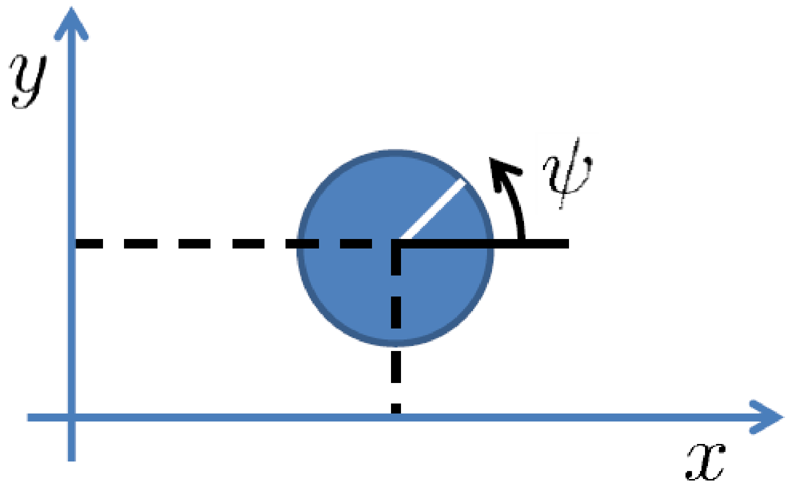
- Можно представить в виде матрицы преобразования

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & x \\ \sin\psi & \cos\psi & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SE}(2) \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Положение робота на плоскости

- Пусть робот находится в точке

$$x = 0{,}7$$
$$y = 0{,}5$$
$$\psi = 45°$$



- Тогда положение робота можно записать в виде матрицы

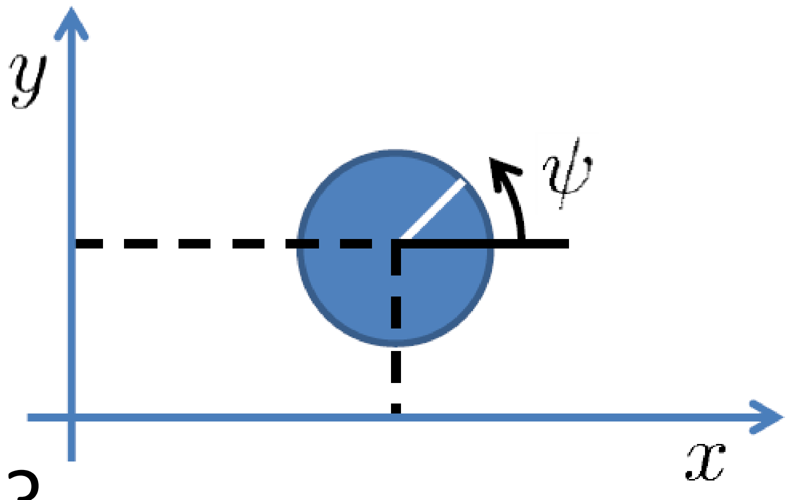
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0{,}7 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}71 & -0{,}71 & 0{,}7 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования координат

- Положение робота на плоскости: координаты x и y, угол ψ

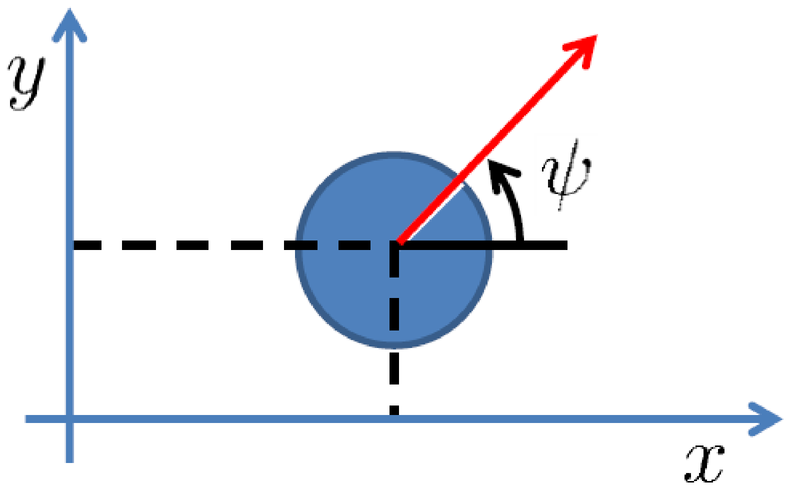
- Какое положение робот примет после того, как пролетит 1 м вперед?

- Как достичь заданного положения?



Преобразования координат

- Робот пролетел 1 м вперед
- Каково его текущее положение?



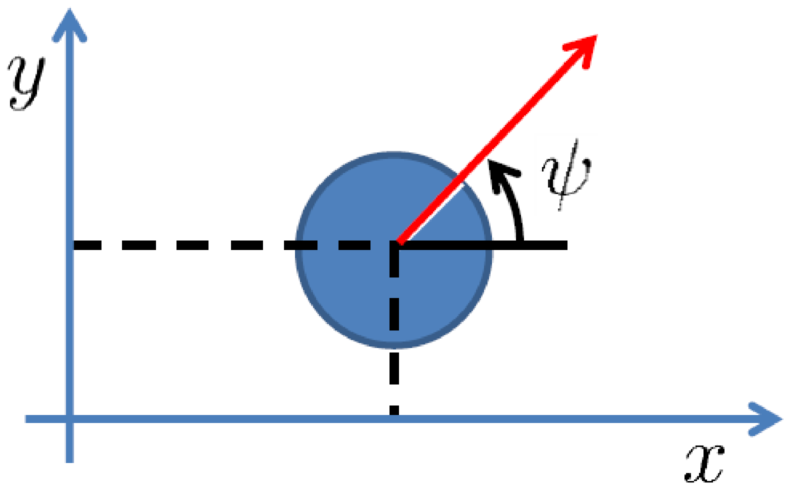
- В локальной системе координат:

точка, расположенная спереди робота на расстоянии 1 м

$$\tilde{\mathbf{p}}_{local} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования координат

- Робот пролетел 1 м вперед
- Каково его текущее положение?



- В глобальной системе координат:

точка, расположенная спереди робота на расстоянии 1 м

$$\tilde{\mathbf{p}}_{global} = \mathbf{X} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{local} = \begin{pmatrix} 0{,}71 & -0{,}71 & 0{,}7 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}41 \\ 1{,}21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования координат

- Умеем переводить локальные координаты в глобальные
- Иногда может потребоваться обратное
- Как можно преобразовать глобальные координаты в локальные?

Преобразования координат

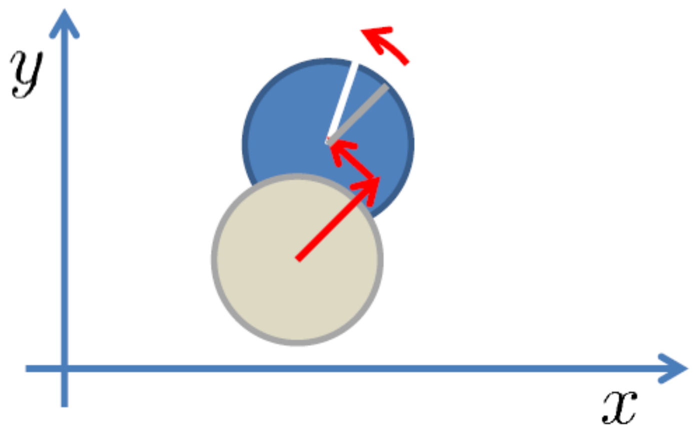
- Умеем переводить локальные координаты в глобальные
- Иногда может потребоваться обратное
- Как можно преобразовать глобальные координаты в локальные?

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{global} = \mathbf{X} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_{local} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_{local}$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{local} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_{global} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_{global}$$

Преобразования координат

- Робот пролетел 0,2 м вперед, затем в сторону 0,1 м и повернулся на 10°

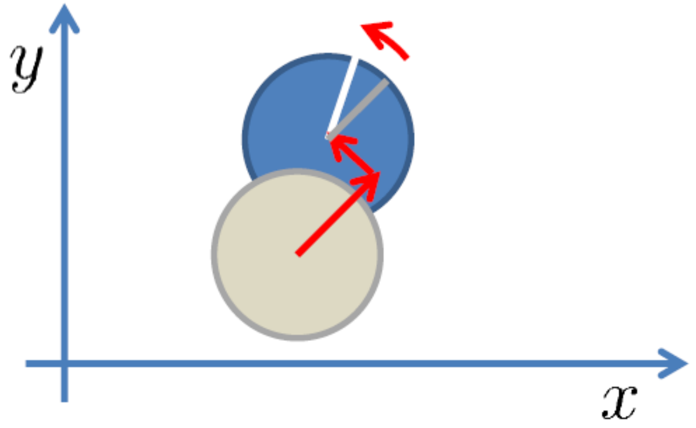


- Евклидово преобразование

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos 10° & -\sin 10° & 0{,}2 \\ \sin 10° & \cos 10° & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & -0{,}17 & 0{,}2 \\ 0{,}17 & 0{,}98 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования координат

- Робот пролетел 0,2 м вперед, затем в сторону 0,1 м и повернулся на 10°



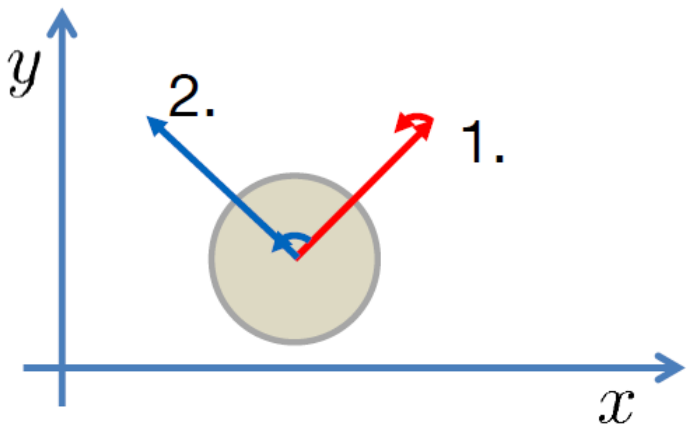
- После этого положение робота:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0{,}71 & -0{,}71 & 0{,}7 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}98 & -0{,}17 & 0{,}2 \\ 0{,}17 & 0{,}98 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования координат

- Порядок имеет значение!

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$



Для сравнения:

- Сначала пролететь 1 м вперед и затем повернуть на 90°
- Сначала повернуть на 90° и затем пролететь 1 м вперед

Одометрия

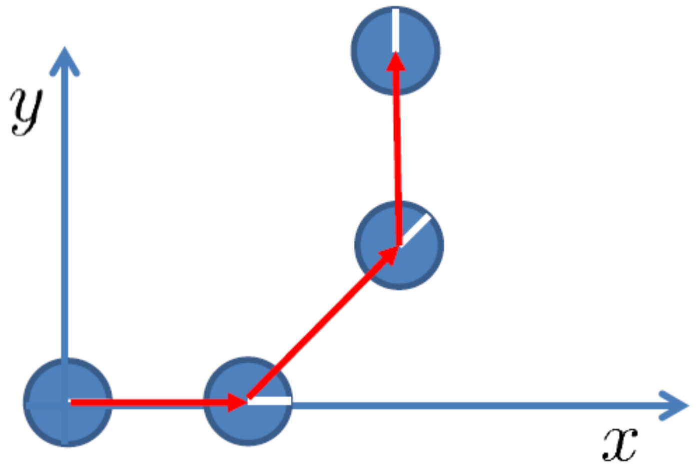
Как оценить перемещение робота?

- **Control-based** – предсказывает положение робота согласно заданным командам управления
- **Odometry-based** – используется, когда робот оборудован, например, энкодерами
- **Velocity-based** –когда энкодеры не доступны

Dead Reckoning – счисление координат

Модель движения

- Оценка текущего положения робота $\mathbf{X}_t$ происходит на основании значений воздействующего управления (или показаний IMU) $\mathbf{u}_t$ и предыдущего положения $\mathbf{X}_{t-1}$



- Модель движения $\mathbf{X}_t = f(\mathbf{u}_t, \mathbf{X}_{t-1})$

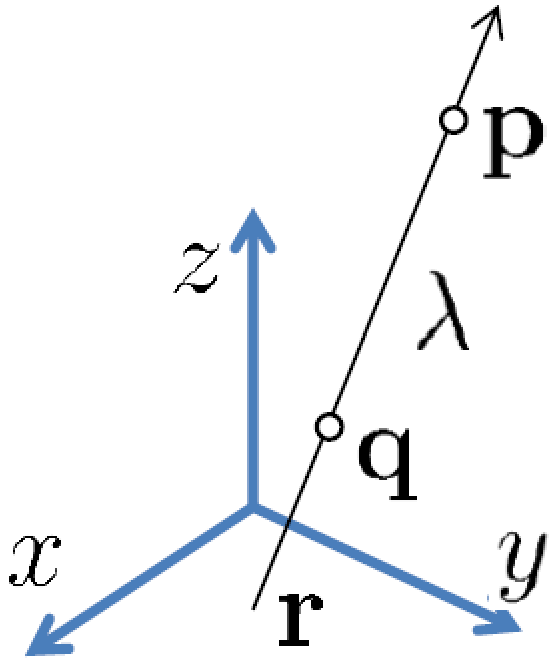
Точка в 3D

- Точка в пространстве $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- Расширенный вектор $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$
- В однородных координатах $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \widetilde{\omega} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3$

Прямая в 3D

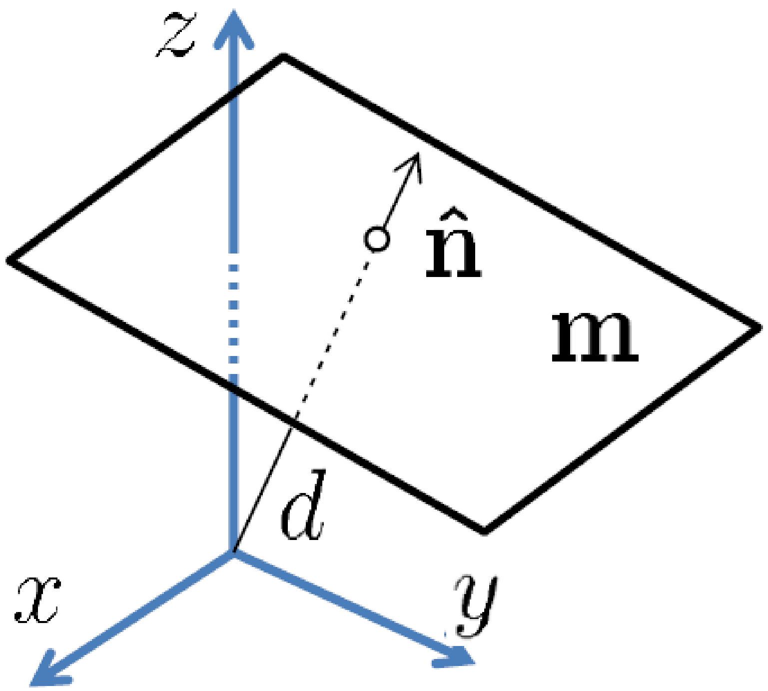
- Прямая, проходящая через точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$
  $\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$

- Бесконечная прямая
  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Отрезок
  $0 \le \lambda \le 1$



Плоскость в 3D

- Плоскость
  $\tilde{\mathbf{m}} = (a, b, c, d)^{\mathrm{T}}$
- Уравнение плоскости
  $\bar{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{m}} = ax + by + cz + d = 0$
- Нормированная плоскость
  $\mathbf{m} = \left(\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z, d\right)^{\mathrm{T}} = (\hat{\mathbf{n}}, d)$
  с единичной нормалью $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$ и расстоянием d



Преобразования в 3D

- Сдвиг (4×4) $$\tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

- Евклидовы преобразования (сдвиг и поворот) – $SE(3)$ $$\tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

- Масштабирование, аффинные и проективные преобразования

Евклидовы преобразования в 3D

- Сдвиг $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ – три степени свободы
- Поворот $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^3$ – три степени свободы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Повороты в 3D

- Матрица поворота – (3×3) ортогональная матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

- Группа $SO(3)$ – special orthogonal
- Столбцы – повернутые координатные оси

Повороты в 3D

- Какие необходимы операции над поворотами?

– обратимость, сочетание (последовательность вращений)

– оценка/оптимизация

- Насколько просто совершать эти операции?

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

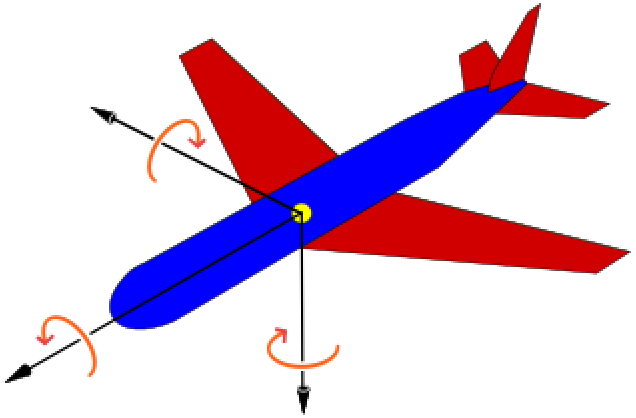
Повороты в 3D

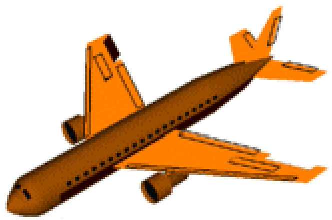
- Достоинства
  легко сочетать (перемножать) и находить обратные
- Недостатки
  избыточность параметров – 9 элементов вместо 3

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

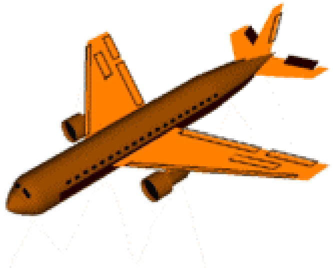
Углы Эйлера

- Произведение трех последовательных вращений (например, по осям X-Y-Z)
- Широко распространены в воздушной навигации (DIN 9300)

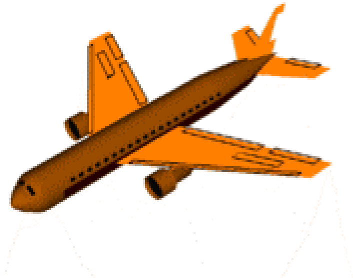




Крен



Тангаж



Рыскание

Углы Эйлера

- Крен ϕ, тангаж θ, рыскание ψ
- Переход к (3×3) матрице поворота

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\psi)\mathbf{R}_Y(\theta)\mathbf{R}_X(\phi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

Углы Эйлера

- Крен ϕ, тангаж θ, рыскание ψ
- Получение из (3×3) матрицы поворота

$$\phi = \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\psi = -\mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\phi}, \frac{r_{11}}{\cos\phi}\right)$$

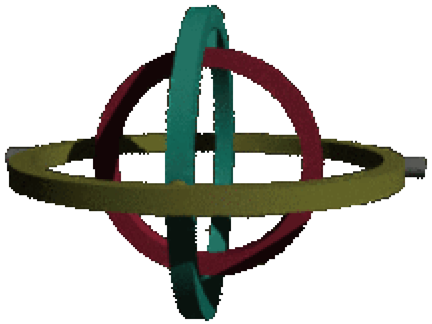
$$\theta = \mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\phi}, \frac{r_{33}}{\cos\phi}\right)$$

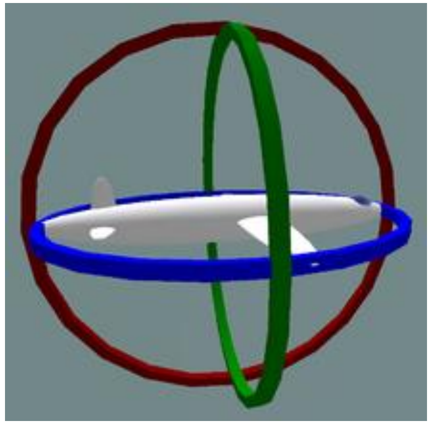
Углы Эйлера

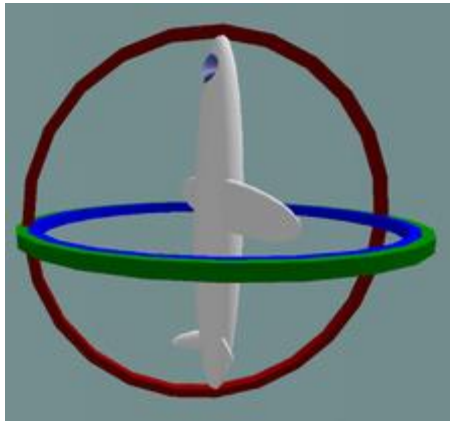
- Достоинства
  – минимальное представление (3 параметра)
  – легко интерпертировать
- Недостатки
  – большое число «альтернативных» представлений
  – трудно сочетать последовательности вращений
  – сингулярность (складывание рамок – gimbal lock)

Складывание рамок

- При совпадении осей вращения теряется степень подвижности

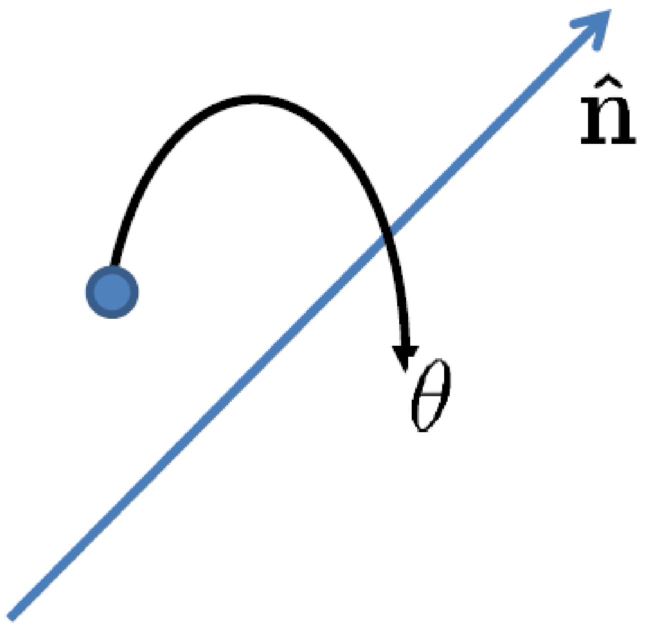






Ось-угол

- 4 параметра
  - ось вращения $\widehat{\mathbf{n}}$
  - угол поворота θ
- 3 параметра
  - угловая скорость
  - длина – угол поворота
  - минимальное представление, но не единственное



Преобразование

- Формула Родрига

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}},\theta) = \mathbf{I} + \sin\theta\,[\hat{\mathbf{n}}]_\times + (1-\cos\theta)[\hat{\mathbf{n}}]_\times^{\mathbf{2}}$$

- Обратно

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{trace}(\mathbf{R})-1}{2}\right), \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{pmatrix}$$

- См. также Ma, Soatto, Kosecka, Sastry «Invitation to 3D Vision» (Chapter 2)

Ось-угол

- Twist Coordinates – координаты скручивания
- Достоинства
  - минимальное представление (3 параметра)
  - простой вывод
- Недостатки
  - трудно сочетать последовательности вращений
  - трудно преобразовывать в представление другого вида

Кватернионы

- Кватернион $\mathbf{q} = \left(q_\omega, q_x, q_y, q_z\right)^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^4$
- Скалярная и векторная часть $\mathbf{q} = (r, \mathbf{v}),\ r \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$
- Единичный кватернион $\|\mathbf{q}\| = 1$
- Кватернионы противоположных знаков представляют один и тот же поворот
- В остальном представление единственно

Кватернионы

- Легко сочетать (умножение)

$$(r_1, \mathbf{v}_1)(r_2, \mathbf{v}_2) = (r_1 r_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, r_1 \mathbf{v}_2 + r_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$$

- Легко обращать (изменение знака одной из частей)

$$(r, \mathbf{v})^{-1} = (r, \mathbf{v})^* \equiv (-r, \mathbf{v}) \equiv (r, -\mathbf{v})$$

Кватернионы

- Поворот вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ с помощью кватерниона

$$(r, \mathbf{v})(0, \mathbf{p})(r, \mathbf{v})^*$$

- Связь с представлением ось-угол

$$\mathbf{q} = (r, \mathbf{v}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\mathbf{n}}\right)$$

Remark

- Повороты трудно визуализировать «в уме»
- Вспомогательные средства
  - RVIZ (ROS)
  - libqglviewer (C++)
- Полезно почитать Szeliski
  «Computer Vision: Algorithms and Applications» (Chapter 2)