Математические основы робототехники

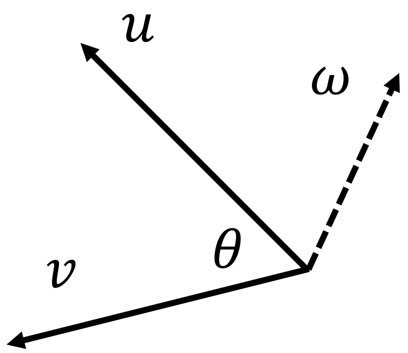
lec-01-rotations

04.10.2021

Представления поворотов

- Векторное произведение
- Жесткие преобразования
- Матрицы поворота
- Экспонента матрицы
- Теория групп
- Формула Родрига
- Кватернионы

Векторное произведение

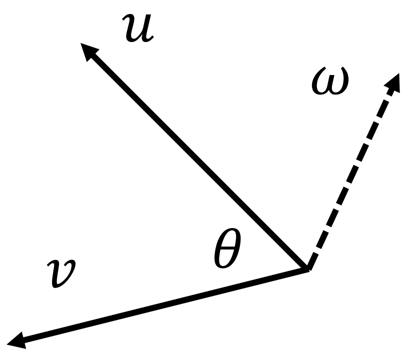


$$u \times v = \omega$$

$$\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\theta$$

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Векторное произведение



$$u \times v = \omega$$

$$\omega = u \times v = J(u)v$$

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}, \quad J(u)^T = -J(u)$$

Жесткие преобразования

Пусть g – функция, которая отображает $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$.

Эта функция называется жестким преобразованием,

если для всех $u, v, \omega \in \mathbb{R}^3$ выполнены свойства:

- $\|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$
- $g\big((u - \omega) \times (v - \omega)\big) = \big(g(u) - g(\omega)\big) \times \big(g(v) - g(\omega)\big)$

Жесткие преобразования

Все жесткие преобразования могут быть записаны как

$$g(v) = R \cdot v + t, \quad R \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad t \in \mathbb{R}^3$$

Здесь R – это матрица поворота, обладающая свойствами:

- $R = (a \quad b \quad c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}^3$
- $\|a\| = \|b\| = \|c\| = 1$ – столбцы единичной длины
- $a \cdot b = b \cdot c = a \cdot c = 0$ – и взаимно ортогональны
- $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b = 1$

Матрицы поворота

Множество матриц 3×3 с этими свойствами и операцией умножения образуют алгебраическую группу $SO(3)$.

$R = (a \quad b \quad c)$ – матрица поворота в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда:

- $R^T R = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\det(R) = (a \times b) \cdot c = 1$

Теория групп

Группа – это алгебраическая структура, состоящая из множества, скажем, G и некоторой операции $\cdot$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- Замкнутость $\quad a \cdot b \in G \quad \forall\, a, b \in G$
- Ассоциативность $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in G$
- Наличие нейтрального и обратного элемента

$$\exists\, e \in G: \quad a \cdot e = a \quad \forall\, a \in G$$

$$\forall\, a \in G \quad \exists\, a^{-1} \in G: \quad a \cdot a^{-1} = e$$

Примеры групп

- Множество целых чисел с операцией сложения
- Множество вещественных чисел без 0 с операцией умножения
- Множество бинарных чисел с бинарной операцией XOR

Группа вращений $SO(3)$ – special orthogonal matrices

Множество $SO(3)$ с операцией матричного умножения образует группу.

Нейтральный элемент:

$$RI = IR = R \quad \forall\, R \in SO(3) \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Группа вращений $SO(3)$

Множество $SO(3)$ с операцией матричного умножения образует группу.

Замкнутость: $R_1, R_2 \in SO(3) \Longrightarrow R_1 R_2 \in SO(3)$

$$
\begin{aligned}
(R_1 R_2)^T R_1 R_2 &= R_2^T R_1^T R_1 R_2 \\
&= R_2^T I R_2 \\
&= R_2^T R_2 \\
&= I
\end{aligned}
$$

$$\det(R_1 R_2) = \det(R_1)\det(R_2) = 1 \times 1 = 1$$

Группа вращений $SO(3)$

Множество $SO(3)$ с операцией матричного умножения образует группу.

Ассоциативность:

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \quad \forall\, R_1, R_2, R_3 \in SO(3)$$

выполнена, т.к. умножение матриц ассоциативно

Группа вращений $SO(3)$

Множество $SO(3)$ с операцией матричного умножения образует группу.

Обратный элемент:

$$\forall\, R \in SO(3) \quad \exists\, R^T \in SO(3): \quad R^T R = R R^T = I$$

Свойства групп

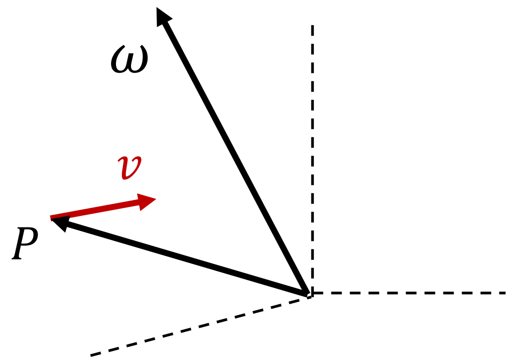
- Обратный справа является также обратным слева

$$a \cdot b = e \Rightarrow b \cdot a = e$$

$$R^T R = I \Rightarrow R R^T = I$$

- Единственность нейтрального элемента
- Единственность обратного элемента

Угловая скорость

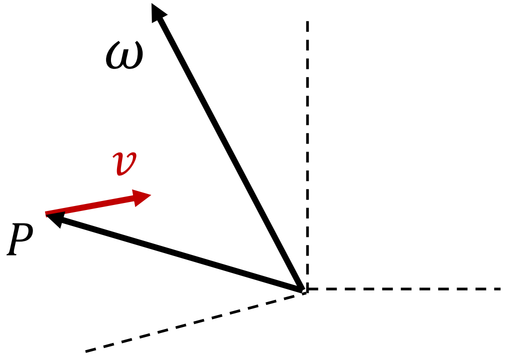


$$v = \omega \times P$$

$\omega \in \mathbb{R}^3$ – угловая скорость, ее направление указывает ось вращения,
а величина $\|\omega\|$ – скорость поворота (например, рад/с)

$v \in \mathbb{R}^3$ – мгновенная скорость перемещения точки $P \in \mathbb{R}^3$

Угловая скорость



$$v = \frac{dP}{dt} = \omega \times P$$

$$\frac{dP}{dt} = J(\omega)P$$

$$J(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt} y(t) = \alpha y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \exp^{(\alpha t)} y(0) = \left(1 + (\alpha t) + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \cdots\right) y(0)$$

Линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}P(t) = J(\omega)P(t)$$

$$\Rightarrow P(t) = \exp^{(J(\omega)t)}P(0) = \left(I + (J(\omega)t) + \frac{(J(\omega)t)^2}{2!} + \frac{(J(\omega)t)^3}{3!} + \ldots\right)P(0)$$

$$\exp^{(J(\omega)t)} = \left(I + (J(\omega)t) + \frac{(J(\omega)t)^2}{2!} + \frac{(J(\omega)t)^3}{3!} + \cdots\right)$$

Поворот как экспонента матрицы

Все матрицы поворота можно рассматривать как действие некоторой угловой скорости $\omega \in \mathbb{R}^3$ за единицу времени

$$R(t) = \exp^{(J(\omega)t)} = \left(I + (J(\omega)t) + \frac{(J(\omega)t)^2}{2!} + \frac{(J(\omega)t)^3}{3!} + \ldots \right)$$

$$R = R(1) = \exp^{(J(\omega)1)} = \left(I + \left(J(\omega)\right) + \frac{\left(J(\omega)\right)^2}{2!} + \frac{\left(J(\omega)\right)^3}{3!} + \ldots \right)$$

$$R \in SO(3)$$

Поворот как экспонента матрицы

Угловую скорость $\omega \in \mathbb{R}^3$ можно разбить на две компоненты: единичный вектор $\widehat{\omega}$ и величину $\theta = \|\omega\|$, где $\omega = \widehat{\omega}\theta$

$$R(t) = \exp^{\left(J(\widehat{\omega}\theta)\right)} = \exp^{\left(\theta J(\widehat{\omega})\right)} = I + \left(\theta J(\widehat{\omega})\right) + \frac{\left(\theta J(\widehat{\omega})\right)^2}{2!} + \frac{\left(\theta J(\widehat{\omega})\right)^3}{3!} + \ldots$$

$$R \in SO(3)$$

Кососимметричные произведения

$$J(u)J(v) = vu^T - (u^T v)I$$

$$J(u)u = u \times u = 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow J(\widehat{\omega})^2 = J(\widehat{\omega})J(\widehat{\omega}) = \widehat{\omega}\widehat{\omega}^T - (\widehat{\omega}^T\widehat{\omega})I = \widehat{\omega}\widehat{\omega}^T - I$$

$$\Rightarrow J(\widehat{\omega})^3 = J(\widehat{\omega})J(\widehat{\omega})^2 = J(\widehat{\omega})(\widehat{\omega}^T\widehat{\omega} - I) = 0 - J(\widehat{\omega}) = -J(\widehat{\omega})$$

$$\Rightarrow J(\widehat{\omega})^{2n} = (-1)^{n-1}J(\widehat{\omega})^2, \quad J(\widehat{\omega})^{2n+1} = (-1)^n J(\widehat{\omega})$$

Формула Родрига

$$R(t) = \exp^{(J(\hat{\omega}\theta))} = \exp^{(\theta J(\hat{\omega}))} = I + \left(\theta J(\hat{\omega})\right) + \frac{\left(\theta J(\hat{\omega})\right)^2}{2!} + \frac{\left(\theta J(\hat{\omega})\right)^3}{3!} + \ldots$$

$$\exp^{(\theta J(\hat{\omega}))} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \ldots\right) J(\hat{\omega}) + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} \ldots\right) J(\hat{\omega})^2$$

$$\exp^{(\theta J(\hat{\omega}))} = I + \sin\theta\, J(\hat{\omega}) + (1 - \cos\theta) J(\hat{\omega})^2$$

Формула Родрига

Позволяет представить поворот в терминах оси $\hat{\omega}$ и угла θ
и записать соответствующую матрицу поворота $R \in SO(3)$

$$R = \exp^{(\theta J(\hat{\omega}))} = I + \sin\theta\, J(\hat{\omega}) + (1 - \cos\theta) J(\hat{\omega})^2$$

Olinde Rodrigues (1795–1851)

Кватернионы

- Кватернион можно представить как пару $q = (u_0, u)$ где $u_0 \in \mathbb{R}$ – скаляр, $u \in \mathbb{R}^3$ – вектор

- Произведение двух кватернионов (u_0, u) и (v_0, v):

$$(u_0, u)(v_0, v) = (u_0 v_0 - (u^T v), u_0 v + v_0 u + u \times v)$$

Единичные кватернионы

- Единичный кватернион – сумма квадратов компонент равна 1:

$$u_0^2 + u^T u = 1$$

- Множество единичных кватернионов с операцией умножения образует группу

Единичные кватернионы и повороты

- Поворот в терминах оси $\widehat{\omega}$ и угла θ позволяет записать соответствующий единичный кватернион

$$(u_0, u) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\widehat{\omega}\right)$$

- Зная единичный кватернион, можно построить соответствующую матрицу поворота $R \in SO(3)$

$$R = (u_0^2 - u^T u)I + 2u_0 J(u) + 2(uu^T)$$

- Единичные кватернионы (u_0, u) и $(-u_0, -u)$ соответствуют одной и той же матрице поворота

Сопряжение кватернионов

- Для заданного кватерниона $q = (u_0, u)$
  его сопряженный $q^* = (u_0, -u)$

- Если кватернион q соответствует матрице поворота R,
  то его сопряженный соответствует матрице R^T

Единичные кватернионы

Пусть единичные кватернионы q_1 и q_2 соответствуют матрицам поворота R_1 и R_2

Тогда результатом произведения этих кватернионов $q_1 \cdot q_2$ будет единичный кватернион, который соответствует произведению двух поворотов $R_1 R_2$

$$q_1 \approx R_1 \,, \quad q_2 \approx R_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 \cdot q_2 \approx R_1 R_2$$

Другими словами, произведение двух матриц поворота можно вычислить умножив два кватерниона и наоборот

Представления поворотов

- Поворот представим в виде матрицы 3×3 $R \in SO(3)$, где $R^T R = I$ и $\det(R) = 1$
- Поворот представим в терминах угла θ и оси $\widehat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, где $\|\widehat{\omega}\| = 1$. Мы можем связать это представление с матрицей поворота с помощью формулы Родрига:
  $$R = \exp^{(\theta J(\widehat{\omega}))} = I + \sin\theta\, J(\widehat{\omega}) + (1 - \cos\theta) J(\widehat{\omega})^2$$
- Матрица поворота представима в виде единичного кватерниона $(u_0, u) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\widehat{\omega}\right)$
- Зная единичный кватернион, можно построить соответствующую матрицу поворота $R \in SO(3)$
  $$R = (u_0^2 - u^T u)I + 2u_0 J(u) + 2(uu^T)$$

Жесткие преобразования

Пусть g – функция, которая отображает $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$.

Эта функция называется жестким преобразованием,

если для всех $u, v, \omega \in \mathbb{R}^3$ выполнены свойства:

- $\|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$
- $g\big((u - \omega) \times (v - \omega)\big) = \big(g(u) - g(\omega)\big) \times \big(g(v) - g(\omega)\big)$

Жесткие преобразования

Все жесткие преобразования могут быть записаны как

$$g(v) = R \cdot v + t, \quad R \in SO(3), \quad t \in \mathbb{R}^3$$

Здесь – это матрица поворота, обладающая свойствами:

- $R^T R = I$
- $\det(R) = 1$

Жесткие преобразования

В терминах однородных координат жесткие преобразования могут быть записаны как матрицы 4×4

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RP + t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жесткие преобразования – сохраняют расстояния и векторные произведения

Композиция жестких преобразований

Для композиции жестких преобразований используется умножение матриц

$$\begin{pmatrix} R_{AB} & t_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{BC} & t_{BC} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{AB}R_{BC} & R_{AB}t_{BC} + t_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Результат произведения двух жестких преобразований – тоже жесткое преобразование

Обратимость жестких преобразований

Для жесткого преобразования g_{AB} можно построить обратное преобразование g_{BA} следующим образом

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} R_{AB} & t_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{BA} = \begin{pmatrix} R_{AB}^T & -R_{AB}^T t_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное к жесткому преобразование – тоже жесткое преобразование

Группа жестких преобразований $SE(3)$ – special Euclidean

Множество матриц 4×4 вида $g_{AB} = \begin{pmatrix} R_{AB} & t_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

где $R_{AB} \in SO(3)$, $t_{AB} \in \mathbb{R}^3$ образуют группу

относительно операции матричного умножения

- Результат произведения двух жестких преобразований – тоже жесткое преобразование

- Обратное к жесткому преобразование – тоже жесткое преобразование