Матрицы поворота и формула Родрига

1. Основываясь на определении векторного произведения, какие из утверждений верны?
   i) $u \times v = v \times u$
   ii) $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$
   iii) существует нулевой вектор 0 такой, что для любого вектора u из $\mathbb{R}^3$: $0 \times u = 0$
   iv) существует единичный вектор 1 такой, что для любого вектора u из $\mathbb{R}^3$: $1 \times u = u$

2. Какие из матриц удовлетворяют определению матрицы поворота?

   i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. В определении группы важную роль играет операция. Например, матрицы поворота образуют группу относительно операции умножения. Чтобы узнать, образуют ли они группу относительно сложения, необходимо проверить четыре следующих свойства. Какие из них выполнены?
   i) Среди матриц поворота существует нейтральный элемент относительно операции сложения
   ii) Матрицы поворота замкнуты относительно операции сложения
   iii) Сложение матриц поворота ассоциативно
   iv) Для любой матрицы поворота существует обратная относительно операции сложения

4. Формула Родрига позволяет, зная матрицу поворота R, вычислить ось вращения $\hat{\omega}$ и угол поворота θ. В частности, сначала можно найти $\hat{\omega}$ по свойству матриц поворота: $R\hat{\omega} = \hat{\omega}$, после чего θ вычисляется из $R = I + \sin(\theta)J(\hat{\omega}) + (1 - \cos(\theta))J(\hat{\omega})^2$.

   Допустим, для матрицы $\begin{pmatrix} 0.872 & -0.480 & 0.096 \\ 0.480 & 0.800 & -0.360 \\ 0.096 & 0.360 & 0.928 \end{pmatrix}$ уже найден вектор $\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$. Чему равен $\sin\theta$?

Кватернионы и твердые преобразования

1. Чтобы узнать, образуют ли матрицы однородных преобразований группу относительно операции умножения (как матрицы поворота), необходимо проверить четыре следующих свойства. Какие из них выполнены?

   i) Среди матриц однородных преобразований существует нейтральный элемент

   ii) Матрицы однородных преобразований замкнуты относительно операции умножения

   iii) Умножение матриц однородных преобразований ассоциативно

   iv) Для любой матрицы однородных преобразований существует обратная

2. Какой из кватернионов соответствует $\omega = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$?

   i) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 0\right)$

   ii) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0\right)$

   iii) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0\right)$

   iv) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0\right)$

3. Какие из комбинаций $\hat{\omega}$, θ эквивалентны кватерниону $\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$?

   i) $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \qquad \theta = 2\arccos(\frac{3}{5})$

   ii) $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \qquad \theta = 2\arccos(\frac{4}{5})$

   iii) $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \qquad \theta = 2\arccos(\frac{4}{5})$

   iv) $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \qquad \theta = -2\arccos(\frac{4}{5})$

4. Какая из матриц поворота R эквивалентна кватерниону $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

   i) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$