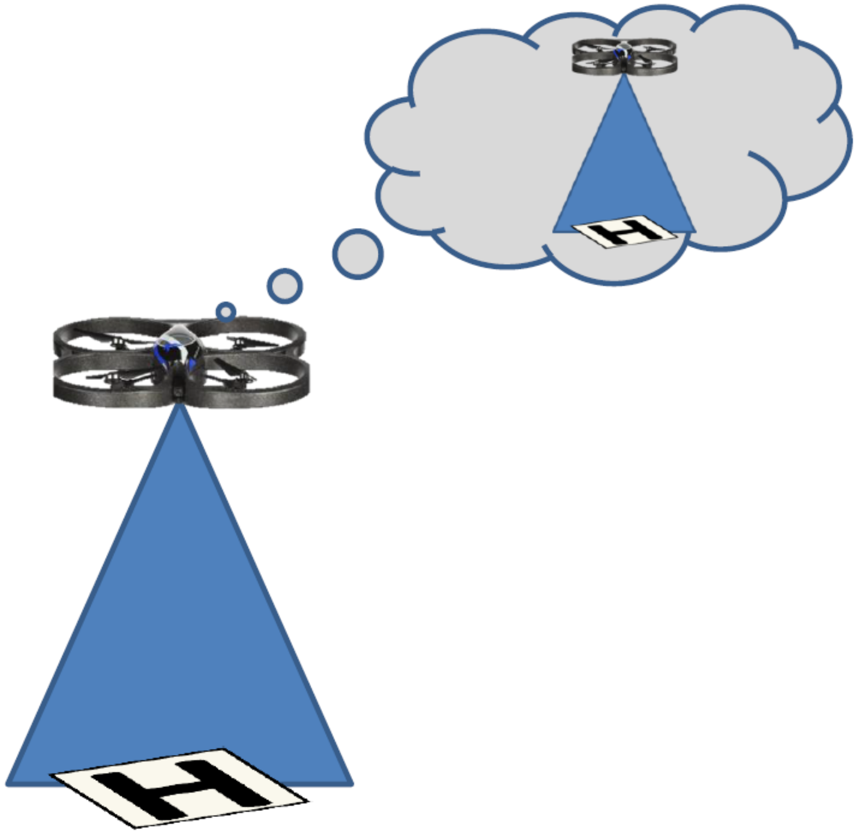
Математические основы робототехники

lec-07-probability

15.10.2021

Глобальное состояние и состояние системы

- World state – реальное положение в пространстве
- Belief State – предполагаемое (оцениваемое) положение в пространстве



Оценка состояния

Что влияет на состояние БПЛА?

- положение
- скорость
- препятствия
- карта
- взаимодействие с и положение людей и других роботов
- etc.

Оценка состояния

Не можем наблюдать реальное состояние «напрямую», необходимо научиться оценивать, но как?

- Можно оценивать по показаниям датчиков
- Либо на основании выполненных перемещений или других действий

Sensor Model

- Робот «воспринимает» окружение через датчики

$$\mathbf{z} = h(\mathbf{x})$$

sensor reading

world state

sensor model
(observation function)

- Цель: оценить состояние системы по этим показаниям

$$\mathbf{x} = h^{-1}(\mathbf{z})$$

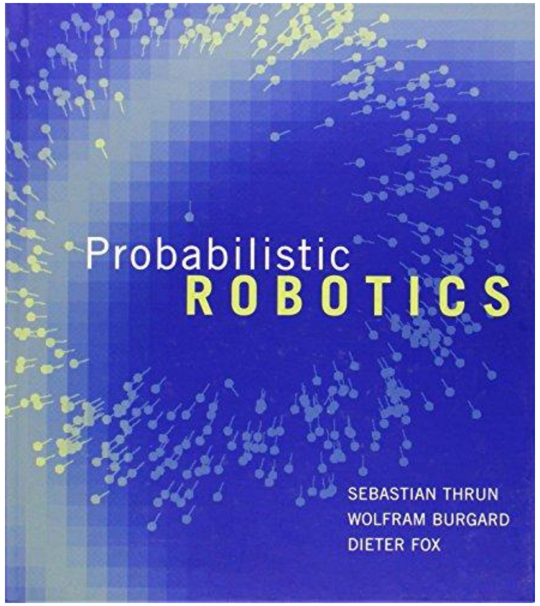
Motion Model

- Робот выполняет некое действие или команду (например, движется вперед со скоростью 1 м/с)
- Состояние системы оценивается с учетом этого действия

$$\underset{\text{current state}}{\mathbf{x}'} = \overset{\text{motion model}}{g}(\underset{\text{previous state}}{\mathbf{x}}, \overset{\text{executed action}}{\mathbf{u}})$$

Вероятностные методы в робототехнике

- Показания датчиков могут быть зашумлены, недостаточны, потеряны
- Как правило, любые модели ошибочны или неполны
- Зачастую обладаем некоторым априорным знанием



Вероятностные методы в робототехнике

- Вероятностная модель на основе датчиков $p(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})$
- Вероятностная модель на основе движений $p(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}, \mathbf{u})$
- Слияние данных (sensor fusion) с нескольких датчиков

$$p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}_{\text{vision}}, \mathbf{z}_{\text{ultrasound}}, \mathbf{z}_{\text{IMU}})$$

- Слияние данных с течением времени (фильтрация)

$$p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_t)$$

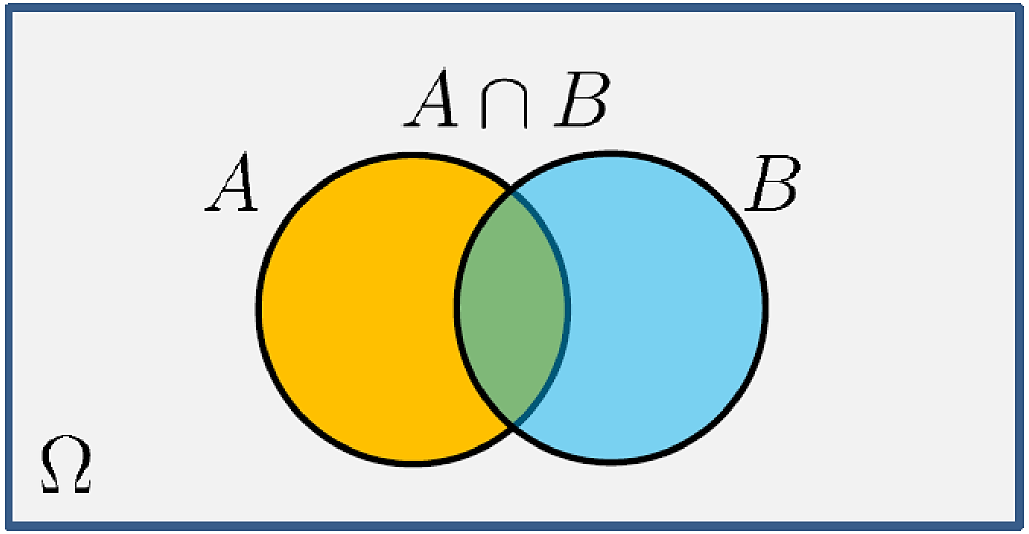
$$p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t)$$

Recap: теория вероятностей

- Случайное событие может иметь несколько исходов, например, бросание кости
- Выборочное пространство – $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Событие A – подмножество исходов, например, $\{2, 4, 6\}$
- Вероятность того, что событие A произойдет $P(A) = 0{,}5$

Аксиомы теории вероятностей

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$ $\qquad P(\emptyset) = 0$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Дискретная случайная величина

- X – случайная величина
- X может принимать счетное множество значений $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $P(X = x_i)$ – вероятность, что случайная величина X примет значение x_i
- $P(\cdot)$ – функция вероятности (PMF)

- Пример: $P(\text{Room}) = < 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 >$

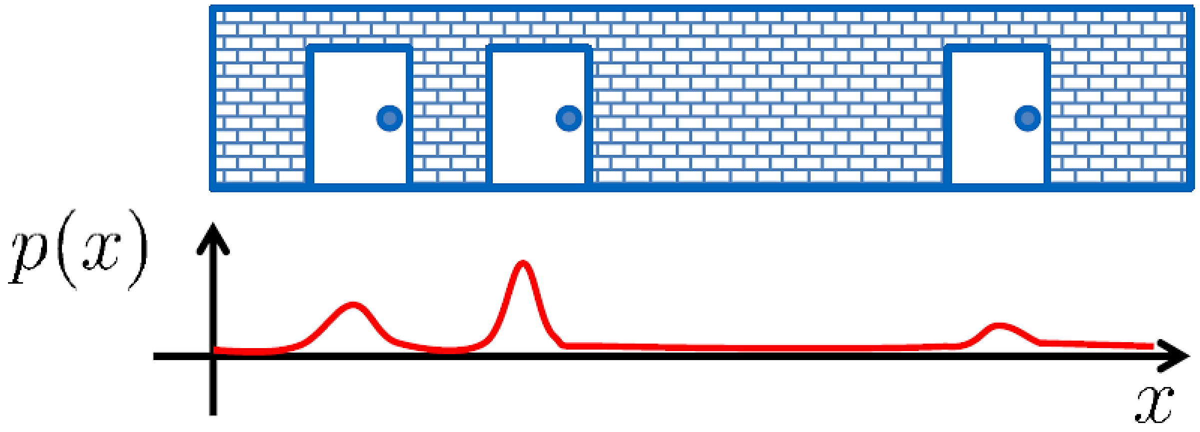
  $\text{Room} \in \{\text{office}, \text{corridor}, \text{lab}, \text{kitchen}\}$

Непрерывная случайная величина

- X принимает непрерывные значения
- $p(X = x)$ или $p(x)$ – плотность вероятности (PDF)

$$P(x \in [a,b]) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

- Пример:



Сумма вероятностей всех исходов = 1

- Для дискретной величины $$\sum_x P(x) = 1$$

- Для непрерывной величины $$\int p(x)\mathrm{d}x = 1$$

Совместная и условная вероятность

- $P(X = x \text{ and } Y = y) = P(x, y)$
- Если X и Y независимы, то $P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$

- $P(x|y)$ – вероятность, что произойдет x при условии, что произошло y

$$P(x|y) \cdot P(y) = P(x, y)$$

- Если X и Y независимы, то $P(x|y) = P(x)$

Условная независимость

- Определение условной независимости

$$P(x, y|z) = P(x|z) \cdot P(y|z)$$

- Эквивалентно

$$P(x|z) = P(x|y, z)$$
$$P(y|z) = P(y|x, z)$$

- При этом не обязательно, что $P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$

Маргинализация (суммирование)

- Дискретный случай $$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

- Непрерывный случай $$p(x) = \int p(x, y) \mathrm{d}y$$

Маргинализация: пример

$P(X,Y)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$P(Y)\downarrow$
y_1	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
y_2	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
y_3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
y_4	1/4	0	0	0	1/4
$P(X)\rightarrow$	1/2	1/4	1/8	1/8	1

Математическое ожидание случайной величины

- Дискретный случай $$E[X] = \sum_i x_i P(x_i)$$
- Непрерывный случай $$E[X] = \int xP(X = x)\mathrm{d}x$$
- Математическое ожидание – взвешенное среднее всех значений, которые принимает случайная величина
- Математическое ожидание – линейный оператор

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Дисперсия случайной величины

- Мера разброса относительно математического ожидания

$$\mathrm{Cov}[X] = E[X - E[X]]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Оценка по данным

- Наблюдения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$
- Выборочное среднее $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$
- Выборочная дисперсия $\Sigma = \frac{1}{n-1} \sum_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^\top$